



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΝΕΚΤΑΡΙΟΥ-ΙΩΑΝΝΗ ΕΥΑΓΓΕΛΙΔΗ

Προπτυχιακού Φοιτητή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Ε.Μ.Π.

**Μοντελοποίηση και υπολογιστική ανάλυση
χρονοσειρών με τη μέθοδο της μη παραμετρικής
Granger αιτιότητας για την κατασκευή των
δικτύων αλληλεπίδρασης**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Σιέττος Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Γκούσης Δημήτριος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Νικόλαος Σμυρνής, Επίκουρος Καθηγητής Ιατρικής Ε.Κ.Π.Α.

Αθήνα, Ιανουάριος 2014

Αφιερώνεται στην κοπέλα της ψυχής μου,

Φανή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Κωνσταντίνο Σιέττο, που μου έδωσε την δυνατότητα πραγματοποίησης της εν λόγω διπλωματικής εργασίας και με καθοδήγησε. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την διδακτορικό Φωτεινή Πρωτόπαπα για την ουσιαστική βοήθεια που είχα κάθε φορά που την είχα ανάγκη. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την Φανή, τους Ανδρέα και Αθηνά Κιλιμάντζου και όλους τους φίλους που στάθηκαν δίπλα μου στην διάρκεια των σπουδών μου

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιαστούν μέθοδοι ανάπτυξης της Granger αιτιότητας με σκοπό την ανάλυση νευρωνικών δικτύων για την περαιτέρω μελέτη του ανθρώπινου εγκεφάλου. Αρχικά, θα γίνει ανάλυση των μαθηματικών εργαλείων που είναι απαραίτητα για την περιγραφή της Granger αιτιότητας και θα ακολουθήσει η εξέταση των μαθηματικών μοντέλων των νευρωνικών σημάτων πάνω στα οποία θα γίνει μελέτη των ιδιοτήτων τους. Τέλος, βάσει όλων των προηγούμενων κεφαλαίων, θα γίνει ανάπτυξη της Granger αιτιότητας με την παραμετρική και μη παραμετρική μέθοδο.

Συγκεκριμένα, το πρώτο μέρος της εργασίας μελετά την αναπαράσταση ενός σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων μέσω μετασχηματισμού Fourier. Εδώ θα παρουσιαστούν μέθοδοι όπως οι Short time Fourier Transformation, Multitaper και μετασχηματισμός Wavelet, όπου γίνεται ανάλυση σήματος στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων.

Στο δεύτερο μέρος θα γίνει μελέτη των πολυμεταβλητών αυτοπαλινδρομικών μοντέλων, όπου θα εξεταστούν οι ιδιότητές τους, τα κριτήρια τάξης και ο εντοπισμός των συντελεστών του μοντέλου.

Στο τρίτο μέρος της διπλωματικής εργασίας θα γίνει μια εισαγωγή στην Granger αιτιότητα και θα μελετηθεί ο εντοπισμός της μέσω παραμετρικής και μη παραμετρικής μεθόδου. Τα αποτελέσματα από τις δύο αυτές μεθόδους θα συγκριθούν μεταξύ τους με ένα παράδειγμα.

Τέλος, θα γίνει παρουσίαση του πειράματος καταγραφής ηλεκτροεγκεφαλικών σημάτων για τη διανοητική λειτουργία της δρώσας μνήμης επιληπτικών και υγιών παιδιών, καθώς και εφαρμογή της προαναφερθείσας θεωρίας σε πραγματικά δεδομένα συνοδευόμενη από τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Abstract

In this Thesis we present Granger causality methods for the analysis of EEG signals of the human brain. Firstly, the key mathematical tools are presented and then the parametric and non-parametric Granger causality algorithms are described.

Within this framework we present methods like Fourier Transformation, Short Time Fourier Transformation, Multitaper Transformation and Wavelet Transformation. Next, we describe the basic elements of the theory underpinning multivariate linear regressive models that are used as the basic models in standard Granger analysis. We then, present the concept of both parametric and non-parametric causality approaches. An illustrative example is also given.

At the final part of the Thesis we exploit the methodology to analyse the EEG signals as recorded during a working memory task from both control and epileptic children.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	8
----------------	---

Κεφάλαιο 1

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ

1.1 Εισαγωγή στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier	13
1.1.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier	15
1.1.2 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier	18
1.2 Αρχή της Αβεβαιότητας	18
1.3 Μετασχηματισμός Gabor	20
1.4 Μέθοδος Multitaper	23
1.5 Συνεχής Wavelet μετασχηματισμός.....	25
1.5.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Wavelet	27
1.5.2 Βάση Wavelet	27
1.5.3 Παράδειγμα.....	28
1.6 Συμπεράσματα	30

Κεφάλαιο 2

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή στα μοντέλα παλινδρόμησης.....	35
2.1.1 Εισαγωγή.....	35
2.1.2 Χαρακτηριστικά των χρονοσειρών.....	35
2.2 Σταθερότητα και ευστάθεια χρονοσειρών	36
2.3 Λευκός Θόρυβος	37
2.4 Πολυμεταβλητό μοντέλο 1ης τάξης.....	37
2.5 Πολυμεταβλητό μοντέλο P-τάξης.....	39
2.6 Μέθοδοι προσέγγισης συντελεστών	41
2.6.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.....	41
2.6.2 Μέθοδος Burg.....	42
2.7 Κριτήρια επιλογής τάξης.....	43
2.8 Απεικόνιση στον χώρο των συχνοτήτων	44
2.9 Μοντελοποίηση μη στάσιμης διαδικασίας	45

Κεφάλαιο 3

GRANGER ΑΙΤΙΟΤΗΤΑ

3.1 Εισαγωγή.....	49
3.2 Παραμετρική μέθοδος υπολογισμού	49
3.2.1 Ανάλυση στο πεδίο του χρόνου.....	49
3.2.2 Ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων.....	52
3.3 Μη παραμετρική μέθοδος υπολογισμού Granger αιτιότητας.....	56
3.3.1 Παραγοντοποίηση του Πίνακα Φασματικής Πυκνότητας.....	58
3.3.2 Μεθοδολογία παραγοντοποίησης.....	59

3.4 Παραδείγματα σύγκρισης παραμετρικής και μη παραμετρικής μεθόδου.....	59
3.5 Συμπεράσματα.....	65

Κεφάλαιο 4

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.1 Εισαγωγή.....	69
4.2 Θεωρία μεθόδου Bootstrap.....	69
4.3 Στατιστικός έλεγχος σημαντικότητας για την αιτιότητα Granger	70
4.4 Wilcoxon rank-sum έλεγχος.....	71
4.5 Cluster Base permutation έλεγχος	73

Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΑΝΟΗΤΙΚΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΔΡΩΣΑΣ ΜΝΗΜΗΣ ΣΕ ΕΠΙΛΕΙΠΤΙΚΑ ΚΑΙ ΥΓΙΗ ΠΑΙΔΙΑ

5.1 Εισαγωγή.....	77
5.2 Δρώσα μνήμη (working memory)	77
5.3 Πειραματική διαδικασία	79
5.4 Μεθοδολογία επεξεργασίας δεδομένων.....	81
5.5 Αποτελέσματα	83

Σύνοψη.....	87
-------------	----

Βιβλιογραφία	88
--------------------	----

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μας απασχολήσει η μελέτη της Granger αιτιότητας, υπολογίζοντάς την με τις μεθόδους της παραμετρικής και μη παραμετρικής. Η Granger αιτιότητα στην ουσία δείχνει ότι οι πληροφορίες που λαμβάνουμε από μια χρονοσειρά βοηθάνε στην πρόβλεψη άλλων χρονοσειρών [Granger, 1969]. Αρχικά ο κύριος τομέας εφαρμογής της Granger αιτιότητας ήταν στην ανάλυση οικονομικών μεγεθών όπου βρήκε εφαρμογή στην πρόβλεψη της εξέλιξης άλλων συσχετιζόμενων χρονοσειρών. Η ευρύτερη εφαρμογή της έγινε στην δεκαετία του '80 όταν αναλύθηκε η Granger αιτιότητα στον πεδίο των συχνοτήτων από τον Geweke το 1982 [Geweke, 1982; 1984] όπου ήταν η βάση για τον υπολογισμό καινούργιων μεγεθών όπως ήταν αυτά της σαφήνειας (coherence) [Bendat and Pierson, 1986], μερικής κατευθυντικής σαφήνειας (partial direct coherence) [Baccala and Sameshima, 2001] και την συνάρτηση κατευθυντικής μεταφοράς (direct transfer function) [Kaminski and Blinowska, 1991]. Χάρη σε αυτά τα μεγέθη λοιπόν, η Granger αιτιότητα βρέθηκε στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος που αφορά την μελέτη του νευρικού συστήματος του ανθρώπινου εγκεφάλου και απασχολεί επιστημονικούς κλάδους όπως της νευροεπιστήμης (neuroscience) κ.α. Η μελέτη των νευρικών σημάτων είναι σημαντική στο πεδίο της ιατρικής διότι μέσω αυτών μπορούμε να ανιχνεύσουμε εγκεφαλικές διαταραχές όπως την επιληψία και άλλα χαρακτηριστικά βιοσήματα μέσω της θεωρίας των δικτύων που συνδέονται με συγκεκριμένες λειτουργίες του εγκεφάλου (κίνηση, σκέψη κλπ). Η καταγραφή των νευρωνικών σημάτων γίνεται με πολλές μεθόδους, εμείς όμως θα επικεντρωθούμε στην μελέτη των ηλεκτροεγκεφαλογραφικών (EEG) σημάτων.

Καταρχάς, από την μελέτη των ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου σε συνδυασμό με την Granger αιτιότητα δεν παίρνουμε αρκετές πληροφορίες για την εγκεφαλική λειτουργία από ότι στο πεδίο των συχνοτήτων. Για αυτό θα αρχίσουμε την μελέτη με τα εργαλεία και τις μεθόδους για την μεταφορά των σημάτων από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Αρχικά, θα αναφέρουμε το πιο σημαντικό εργαλείο για την μεταφορά στο πεδίο των συχνοτήτων τον μετασχηματισμό Fourier όπου θα γίνει ανάλυση των ιδιοτήτων του για την μετέπειτα ανάλυση των μεθόδων όπου θα χρησιμοποιήσουμε. Στην συνέχεια θα γίνει αναφορά του μετασχηματισμού Gabor όπου γίνεται ανάλυση του σήματος στα πεδία του χρόνου-συχνοτήτων κάνοντας παραθυροποίηση του σήματος και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier σε κάθε παράθυρο που κόβει το σήμα μας. Εν συνεχεία, θα γίνει ανάπτυξη των μεθόδων multitaper [Thomson, 1982; Persival and Walden, 1993; Mitra and Pasaran, 1999] και του συνεχή μετασχηματισμού wavelet [Shift et al., 1994]. Κατά την ανάπτυξη της μεθόδου multitaper θα κάνουμε αναφορά των σειρών slepian [Slepian and Pollak, 1961] όπου θα εφαρμοστούν ως παράθυρα στον μετασχηματισμό Fourier με σκοπό την καλύτερη σαφήνεια των συχνοτήτων. Τέλος θα γίνει ανάλυση του μετασχηματισμού wavelet που θα φάνει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη μη στάσιμων σημάτων όπου για στην δίκη μας περίπτωση θα κάνουμε χρήση την συνάρτηση wavelet [Torrence and Compo, 1998] όπου στο τέλος αναδεικνύονται οι μέθοδοι με ένα παράδειγμα για την κάθε μέθοδο.

Στο δεύτερο κομμάτι της εργασίας θα γίνει ανάπτυξη της παραμετρικής και μη παραμετρικής μεθόδου Granger αιτιότητας, όπου τελικά θα πραγματοποιηθεί παράδειγμα σύγκρισης μεταξύ τους. Αρχικά θα αναφερθεί η παραμετρική μέθοδος Granger στον πεδίο του χρόνου [Granger, 1969] και οι σχέσεις υπολογισμού της άμεσης (direct) Granger αιτιότητας και της

δεσμευμένης (conditional) Granger αιτιότητας και εν συνεχεία θα προχωρήσουμε στην ανάπτυξη στο πεδίο των συχνοτήτων [Geweke, 1982] αναπτύσσοντας τις ίδιες σχέσεις. Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην μη παραμετρική μέθοδο Granger αιτιότητας [Dhamala et al., 2004] όπου θα μελετηθούν όλοι οι απαραίτητοι παράμετροι της μεθόδου όπου θα υπολογιστούν η άμεση και δεσμευμένες αιτιότητα. Στο τέλος θα πραγματοποιηθεί ένα παράδειγμα τριών καναλιών [Dhamala et al., 2008] όπου θα κάνουμε την σύγκριση της παραμετρικής με την μη παραμετρική όπου θα αποφανθούμε για την ορθότητα της μεθόδου.

Στο τρίτο και τελικό κομμάτι θα εξετάσουμε την μη παραμετρική Granger αιτιότητα σε πειραματικά δεδομένα ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων από υγιή παιδιά και παιδιά με επιληψία [Myatchin and Lagae, 2011]. Στο πείραμα εξετάστηκαν 62 στο σύνολο παιδιά εκ των οποίων τα 31 έπασχαν από επιληψία στο πρώιμο στάδιό της και όλα τα υπόλοιπα παιδιά ήταν φυσιολογικά. Οι υποψήφιοι του πειράματος πέρασαν από έναν έλεγχο στο οποίο εξεταζόνταν η δρώσα μνήμη (working memory) σε δύο ενότητες, τις backmatching-1 και backmatching-2. Κατά την επεξεργασία των δεδομένων υπολογίσαμε τις δυο granger αιτιότητες, την άμεση και την δεσμευμένη και αυτό, διότι ο υπολογισμός της άμεσης αιτιότητας δεν μας δίνει την σωστή εικόνα των συζεύξεων (άμεση ή έμμεση) των καναλιών. Έτσι κρίνεται απαραίτητος ο υπολογισμός της δεσμευμένης αιτιότητας, όπου μηδενίστηκαν οι έμμεσες αιτιότητες υπολογίζοντας το κατώφλι σημαντικότητας της αιτιότητας μέσω της στατιστικής Bootstrap μεθόδου. Τέλος, τα πειραματικά αποτελέσματα αναπαραστάθηκαν υπολογίζοντας τα μέτρα δικτύου, όπως είναι το degree in, degree out, outflow και στην συνέχεια συγκρίναμε τα αποτελέσματα των επιληπτικών και φυσιολογικών παιδιών εφαρμόζοντας Wilcoxon στατιστικό έλεγχο.

Κεφάλαιο 1

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ FOURIER

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (ΔΜF) είναι ένα από τα πιο διαδεδομένα και χρήσιμα εργαλεία που κατέχει ένας μηχανικός, πάνω στο πεδίο των διακριτών (ψηφιακών) σημάτων. Λέγοντας ψηφιακά σήματα εννοούμε την διακριτοποίηση των αντίστοιχων αναλογικών σημάτων. Στην ουσία, παίρνουμε για μια χρονική στιγμή μια συγκεκριμένη πληροφορία που μας ενδιαφέρει και με τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να αντλήσουμε από το σήμα περαιτέρω πληροφορίες πάνω στο πεδίο των συχνοτήτων.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier είναι μια μαθηματική έκφραση που ουσιαστικά μας μεταφέρει από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Ο ΔΜF προέρχεται φυσικά από τον συνεχή μετασχηματισμό Fourier που ορίζεται ως [Lyons, 2004; Chaparro, 2011]:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

όπου $x(t)$ είναι ένα συνεχές σήμα (αναλογικό) στο πεδίο του χρόνου. Από την παραπάνω σχέση είμαστε σε θέση να εκφράσουμε οποιοδήποτε φυσικό σήμα στον χώρο συχνοτήτων, πράγμα που καθιστά τον μετασχηματισμό Fourier ένα πολύ εύχρηστο εργαλείο στο πεδίο της μηχανικής αλλά και της φυσικής.

Τέλος, εξίσου χρήσιμος είναι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, όπου γίνεται η αντίστροφη διαδικασία που προαναφέραμε και ορίζεται ως :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(f)e^{-i2\pi ft} df \quad (1.2)$$

Έχοντας εν γνώση τους συνεχείς μετασχηματισμούς Fourier που μπορούμε να κάνουμε ανάλυση σε ένα αναλογικό σήμα, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση σε μορφή αναπτύγματος μια σειράς για ένα διακριτό χρονικό πεδίο, που αντίστοιχα ορίζεται ως εξής:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} \quad (1.3)$$

όπου το $x(n)$ είναι το διακριτό (ψηφιακό) σήμα στο πεδίο του χρόνου στο διακριτό χρονικό διάστημα $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Η αντίστοιχη τιμή στο συνεχές φάσμα ήταν το $x(t)$.

Επίσης, η παραπάνω έκφραση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier γράφεται και σύμφωνα με τον τύπου Euler, οπότε έχουμε την εναλλακτική διατύπωση του μετασχηματισμού.

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \right] \quad (1.4)$$

όπου m και n είναι οι τιμές των συχνοτήτων και του χρονικού πεδίου αντίστοιχα και παίρνουν τις τιμές $0,1,2,...N-1$. Επίσης, σημαντικός είναι ο παράγοντας N οποίος μας δείχνει το διάστημα του χρόνου καθώς και των συχνοτήτων. Αν παραδείγματος χάρη έχουμε ένα σήμα που η συχνότητα του αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και δεν εμπλέκονται μεταξύ τους κατά την διάρκεια του χρόνου, τότε για να μπορέσουμε να δούμε όλες τις δυνατές συχνότητες του σήματος πρέπει να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στο διάστημα $(0,N)$, έτσι ώστε να εντοπίσουμε όλες τις δυνατές συχνότητες του σήματος.

Το μέγεθος $X(m)$ από την σχέση (1.4) πρόκειται από έναν μιγαδικό αριθμό κι αποτελείται από ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος, το μέγεθος, όμως, που συνήθως μας ενδιαφέρει στην ανάλυση Fourier είναι η απόλυτη τιμή του $X(m)$, που συμβολίζουμε με :

$$X_{mag}(m) = |X(m)| = \sqrt{X_{πραγ}(m)^2 + X_{φαντ}(m)^2} \quad (1.5)$$

Επίσης ένα άλλο ενδιαφέρον μέγεθος στην ανάλυση κατά Fourier είναι η φάση (phase) του $X(m)$ που είναι η γωνία που σχηματίζει το $X_{mag}(m)$ στο μιγαδικό επίπεδο και την ορίσουμε ως :

$$X_{φαση}(m) = \arctan\left(\frac{X_{φαντ}}{X_{πραγμ}}\right) \quad (1.6)$$

Ουσιαστικά , αυτά τα δύο μεγέθη που μόλις περιγράψαμε παραπάνω δεν είναι τίποτα παραπάνω από τους παράγοντες της εκθετικής έκφρασης του πλάτος συχνοτήτων:

$$X(m) = X_{mag} e^{-jX_{φαση}}$$

Τέλος ένα άλλο σημαντικό μέγεθος είναι η ενέργεια του $X(m)$, που αναφέρεται και ως φασματική ενέργεια (power spectrum) και συμβολίζεται $X_{ps}(m)$. Εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$X_{ps}(m) = |X(m)|^2 = |X_{mag} e^{jX_{φαση}}|^2 = |X_{mag}|^2 = X_{πραγ}(m)^2 + X_{φαντ}(m)^2 \quad (1.7)$$

Το μέγεθος της φασματικής ενέργειας συνήθως το αναπαριστούμε με την διαφορά της σε λογαριθμική κλίμακα που η μονάδα μέτρησης της είναι το dB, το οποίο το χρησιμοποιούμε κατά την ανάλυση φίλτρων. Ένα bel σημαίνει ότι η ενέργεια του σήματος αλλάζει κάθε φορά στο πεδίο των συχνοτήτων κατά ένα παράγοντα 10. Η σχέση που εκφράζει αυτή την διαφορά σε dB είναι :

$$dB = 10 * \log\left(\frac{X_{ps}(m)}{\max(X_{ps}(m))}\right) \quad (1.8)$$

1.1.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

1.1.1.1 Συμμετρία μετασχηματισμών Fourier

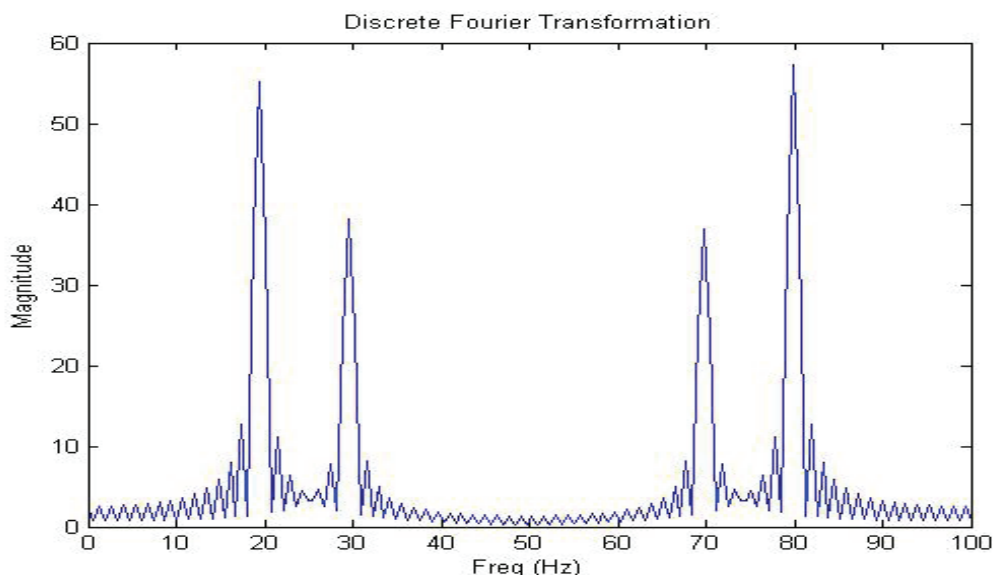
Κοιτώντας την εικόνα 1.1 όπου έχει γίνει μετασχηματισμός Fourier στο σήμα $X(t) = 0.5\sin(2\pi t * 20) + 0.2\cos(2\pi t * 30)$ παρατηρούμε μια συμμετρία στον μετασχηματισμό Fourier, ενώ μελετώντας προσεκτικά την εικόνα βλέπουμε ότι ο άξονας συμμετρίας είναι το μέσο του άξονα συχνοτήτων. Το πλάτος συχνότητας (magnitude) δηλαδή, στο πρώτο σημείο είναι ίσο με το πλάτος συχνότητας στο N-1 σημείο. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι $X_{mag}(m) = X_{mag}(N - m)$ και αυτή η ιδιότητα προκύπτει διότι :

$$\begin{aligned} X_{mag}(N - m) &= |X(N - m)|^2 = X(N - m)X^*(N - m) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi n(N-m)}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{j2\pi n(N-m)}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{j2\pi nm}{N}} e^{-j2\pi n} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} e^{j2\pi n} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Επειδή $e^{\pm j2\pi n} = \cos(2\pi n) \pm j\sin(2\pi n) = 1$ για όλες τις τιμές του n, συνεπώς προκύπτει ότι

$$X_{mag}(N - m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{j2\pi nm}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} = |X(m)|^2 = X_{mag}(m) \quad (1.10)$$

Από την παραπάνω ιδιότητα, συμπεραίνουμε ότι κατά την ανάλυση Fourier μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε φάσμα συχνοτήτων, αλλά οι συχνότητες που θα μας δώσουν την ουσιαστική πληροφορία θα είναι στον μισό άξονα συχνοτήτων.



Εικόνα 1.1. Μετασχηματισμός Fourier ενός συντονικού σήματος

$(X(t) = 0.5\sin(2\pi t * 20) + 0.3\cos(2\pi t * 30))$ συχνοτήτων 20Hz και 30Hz. Βλέπουμε την συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier ως προς τον άξονα συμμετρίας που βρίσκεται στα 50Hz.

Παραδείγματος χάρη, αν θέλουμε να εντοπίσουμε μια συχνότητα που βρίσκεται μεταξύ 0-50Hz θα πρέπει να κάνουμε ανάλυση Fourier μέχρι τα 100Hz ώστε ο άξονας συμμετρίας να βρίσκεται στα 50 Hz και έτσι να είναι δυνατός ο εντοπισμός κορυφών στο πρώτο

διάστημα συμμετρίας. Από την συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier θα εμφανιστούν οι αντίστοιχες κορυφές στο δεύτερο μισό διάστημα συμμετρίας, όπου δεν δίνουν καμία επιπλέον πληροφορία στην ανάλυση μας. Με αυτή την ιδιότητα του μετασχηματισμού μπορούμε να εξοικονομήσουμε χρόνο υπολογισμού και χώρο δεδομένων, καθώς έχουμε μια επικεντρωμένη ανάλυση στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν και, επομένως, ταχύτερο υπολογισμό τους. Από την άλλη, πρέπει να προσέχουμε και τον παράγοντα N , δηλαδή τον αριθμό των σημείων που κάνουμε την ανάλυση και που είναι άμεσα συνδεδεμένος με το εύρος συχνοτήτων, διότι, αν είναι μικρός, θα χάσουμε πληροφορία στην ανάλυση (resolution) των πλατών συχνοτήτων.

1.1.1.2 Γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Fourier είναι η γραμμικότητα, διότι μας επιτρέπει να κάνουμε τον μετασχηματισμό σε ένα άθροισμα σημάτων και να έχουμε το άθροισμα των πλατών στο πεδίο των συχνοτήτων. Δηλαδή, στην περίπτωση που έχουμε δυο σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ που το άθροισμα τους είναι $x_{sum}(n)$, ο μετασχηματισμός Fourier του αθροίσματος θα είναι

$$X_{sum}(m) = X_1(m) + X_2(m) \quad (1.11)$$

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από το ορισμό του μετασχηματισμού αν αντικαταστήσουμε $x_{sum}(n)$ με το άθροισμά του, δηλαδή :

$$\begin{aligned} X_{sum}(m) &= \sum x_{sum}(n) e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} = \sum [x_1(n) + x_2(n)] e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} \\ &= \sum x_1(n) e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} + \sum x_2(n) e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} = X_1(m) + X_2(m) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Την παραπάνω ιδιότητα την βλέπουμε σε εφαρμογή στην εικόνα (1.2.1), όπου το αρχικό μας σήμα είναι μια επαλληλία δύο συνημίτονων και το τελικό αποτέλεσμα, ύστερα από μετασχηματισμό Fourier, είναι η άθροιση των δύο πλατών συχνοτήτων στο τελικό διάγραμμα.

Επιπλέον, χωρίς την ιδιότητα της γραμμικότητας οι μετασχηματισμοί Fourier θα ήταν ένα άχρηστο εργαλείο το οποίο θα εφαρμόζαμε για την ανάλυση μοναχά ενός αρμονικού σήματος. Όμως, τα πραγματικά σήματα που είμαστε σε θέση να αναλύσουμε αποτελούνται από μία επαλληλία πολλών αρμονικών σημάτων, όπου η γραμμικότητα καθίστα τον μετασχηματισμό Fourier απαραίτητο.

1.1.1.3 Χρονική μετατόπιση

Κάνοντας σε κάποιο σήμα μετατόπιση στον χρόνο ή συχνότητα και το πλάτος συχνοτήτων δεν επηρεάζονται. Το μόνο που επηρεάζεται από τον μετασχηματισμό Fourier είναι η φάση του σήματος. Έστω, ότι έχουμε ένα σήμα $x(n)$ και του εφαρμόζουμε μια χρονική μετατόπιση k , όπου το σήμα θα γράφεται ως $x(n-k)$. Τότε το πλάτος συχνοτήτων γίνεται:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_n x(n-k) e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} = \sum_z x(z) e^{-\frac{j2\pi m(k+z)}{N}} \\ &= \sum_z x(z) e^{-\frac{j2\pi mz}{N}} e^{-\frac{j2\pi mk}{N}} = e^{-\frac{j2\pi mk}{N}} \sum_z x(z) e^{-\frac{j2\pi mz}{N}} = e^{-\frac{j2\pi mk}{N}} X(m) \\ &= |X(m)| e^{j(X_{\phi \alpha \sigma \eta} - \frac{2\pi mk}{N})} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Από την παραπάνω απόδειξη φαίνεται ξεκάθαρα πώς επηρεάζει η χρονική μετατόπιση τον μετασχηματισμό, αλλά το μόνο που «αλλοιώνεται» είναι η φάση του μετασχηματιζόμενου σήματος.

Η ιδιότητα αυτή της μετατόπισης του χρόνου χωρίς να αλλοιώνει τις συχνότητες του σήματος μας επιτρέπει να κάνουμε ανάλυση των συχνοτήτων συναρτήσει του χρόνου. Αυτή, δηλαδή, η χρήσιμη ιδιότητα μας επιτρέπει να εντοπίσουμε ποιο είναι το χρονικό πεδίο που αναλογεί για μια από τις συχνότητες του σήματος και έτσι να κάνουμε μια χρονικό-συνολική ανάλυση του σήματος.

1.1.1.4 Μετατόπιση συχνότητας

Όπως με την χρονική μετατόπιση έτσι και με την μετατόπιση συχνότητας μπορούμε να μετακινήσουμε τις συχνότητες στον χώρο των συχνοτήτων πολλαπλασιάζοντας με ένα εκθετικό παράγοντα $e^{-j2\pi m_0/N}$ το αρχικό μας σήμα, έτσι ώστε να κάνουμε μία μετατόπιση κατά m_0 στον άξονα των συχνοτήτων.

$$x(n)e^{-\frac{j2\pi m_0}{N}} \Leftrightarrow X(m - m_0) \quad (1.14)$$

Η μετατόπιση στον χώρο δεν επηρεάζει το πλάτος των συχνοτήτων, ούτε το πλάτος του εισερχόμενου σήματος, αφού το πολλαπλασιάζουμε με ένα μιγαδικό αριθμό.

1.1.1.5 Αντιστροφή μετασχηματισμού Fourier

Εξίσου σημαντικό ρόλο στην ανάλυση Fourier έχει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier (IDFT), που μας μεταφέρει από τον χώρο των συχνοτήτων στον χώρο του χρόνου. Πάνω σε ένα πλάτος συχνοτήτων $X(m)$ ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier [Lyons, 2004] ως :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{\frac{j2\pi mn}{N}} \quad (1.15)$$

Η παραπάνω σχέση σύμφωνα με την ταυτότητα Euler ισούται με :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[\cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \right] \quad (1.16)$$

Η αντιστροφή αυτή του μετασχηματισμού Fourier μας δείχνει από τι αποτελείται το εισερχόμενο σήμα το οποίο κάνουμε την ανάλυση. Όπως έχουμε αναφέρει και στα προηγούμενα, το εισερχόμενο σήμα αποτελείται από μία συνισταμένη συχνοτήτων οι οποίες εκφράζονται από μια σειρά ημιτόνων και συνημίτονων. Γι' αυτό ο παραπάνω τύπος μας δείχνει τι είναι αυτό που πρόκειται να αναλύσουμε κατά το μετασχηματισμό Fourier. Τέλος ο τύπος αυτός διαφέρει από το μετασχηματισμό Fourier μόνο κατά ένα παράγοντα $1/N$, που σημαίνει ότι το πλάτος συχνοτήτων είναι κατά N μεγαλύτερο από το πλάτος του εισερχόμενου σήματος [Lyons, 2004].

$$x_{\text{Amplitude}} \sim \frac{1}{N} X_{\text{Magnitude}} \quad (1.17)$$

1.1.2 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, ως γνωστόν, έχει πολλά προτερήματα κατά την ανάλυση δεδομένων, διότι είναι μια απλή μαθηματική έκφραση. Παρόλα αυτά, όταν έχουμε να κάνουμε ανάλυση σε πραγματικά φυσικά προβλήματα που πρέπει να επεξεργαστούμε εκατοντάδες χιλιάδες δεδομένα, όπως είναι φυσικό, ο αριθμός των πράξεων στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier είναι αρκετά μεγάλος και τον καθίστα έναν πολύ αργό αλγόριθμο. Το 1965, από τους Cooley και Tukey δημοσιεύτηκε ένα άρθρο που περιέγραφε έναν εξίσου αποτελεσματικό αλγόριθμο με αυτόν του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, αλλά με την διάφορα ότι ήταν αρκετές τάξεις γρηγορότερος. Ο αλγόριθμος αυτός ήταν ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier transform) [Cooley and Tukey, 1965]. Ο FFT είναι ο πλέον πιο διαδεδομένος αλγόριθμος για να την ανάλυση Fourier και χρησιμοποιείται σε πολλά επιστημονικά πεδία.

Αρχικά, ο FFT αλγόριθμος για να κάνει την ίδια ανάλυση με αυτή του διακριτού μετασχηματισμού πρέπει ο αριθμός των σημείων του να είναι ίσος με την δύναμη του δυο. Παραδείγματος χάρη, αν έχω να κάνω ανάλυση σε 1000 σημεία στον DFT, ο FFT θα πραγματοποιήσει την ίδια ανάλυση σε 1024 σημεία, δηλαδή ο αριθμός των σημείων είναι $N = 2^k$, όπου k είναι ένας θετικό ακέραιος αριθμός.

Ο αριθμός των πράξεων που πραγματοποιείται κατά τον DFT είναι N^2 (N είναι ο αριθμός των σημείων). Δηλαδή, αν έχουμε N=32 σημεία, οι πράξεις που θα πραγματοποιηθούν είναι 1024, ενώ με τον FFT ο αριθμός των πράξεων που θα πραγματοποιηθούν θα είναι γύρω στους

$\frac{N}{2} \log_2 N$, δηλαδή αν έχουμε τον ίδιο αριθμό σημείων με το προηγούμενο παράδειγμα, ο αριθμός των πράξεων θα είναι μόνο 80! Η διαφορά των δύο αλγορίθμων είναι αισθητή και για πολύ μικρό αριθμό σημείων που έχουμε δυο τάξεις μεγέθους λιγότερους υπολογισμούς.

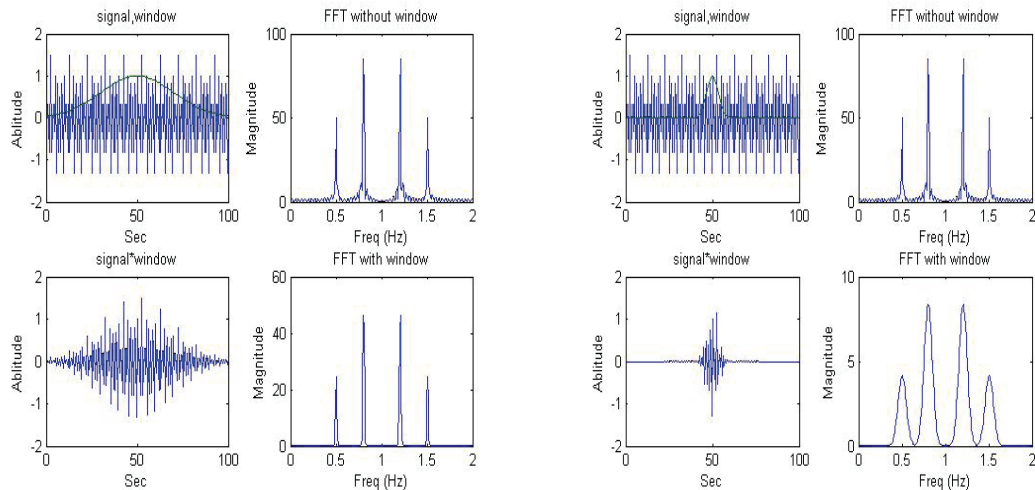
Τέλος, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier δεν είναι μια εκτίμηση του διακριτού μετασχηματισμού. Οι δυο μετασχηματισμοί ικανοποιούν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες και παράγουν τα ίδια αποτελέσματα.

1.2 ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο μετασχηματισμός Fourier βρίσκει πολλές εφαρμογές στην ανάλυση ψηφιακών σημάτων. Παρόλα αυτά, επειδή κατά την ανάλυση πραγματικών δεδομένων έχουμε να κάνουμε με μία πληθώρα σημάτων που μπορούν να αλλάζουν συχνότητα ανά χρονικά διαστήματα, η ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων τελικά δεν μας βοηθάει ιδιαίτερα. Συνεπώς, πρέπει να αναπτύξουμε μια άλλη μέθοδο που να βρίσκει λύση σε αυτό το πρόβλημα κάνοντας ταυτόχρονη ανάλυση το πεδίο του χρόνου με το πεδίο των συχνοτήτων.

Για να κάνουμε ανάλυση και στα δύο πεδία, δηλαδή του χρόνου και της συχνότητας, αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να κόψουμε το σήμα μας σε διάφορα κομμάτια που στο καθένα θα αντιστοιχεί μια χρονική περίοδος. Εν συνεχεία, στο κάθε κομμάτι θα εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό Fourier για να αποκομίσουμε τις διαφορές συχνοτήτες του σήματος για αυτή την χρονική περίοδο του κομματιού. Εν τέλει, θα έχουμε απόκτηση της πληροφορίας του πλάτους συχνοτήτων (magnitude) συναρτήσει του χρόνου και των συχνοτήτων.

Στην εικόνα 1.2 παρουσιάζεται η προαναφερθείσα ανάλυση όπου ένα συνημιτονικό σήμα ($X(t) = 0.5 * \sin(2\pi t * 0.5) + \cos(2\pi t * 0.8)$) το διαχωρίζουμε βάζοντας παράθυρα (windows). Στην ανάλυση Fourier είναι πολύ διαδεδομένο η χρήση διάφορων παραθύρων, διότι το κάθε παράθυρο έχει και διαφορετικές ιδιότητες ανάλογα με την ανάλυση που επιθυμούμε να κάνουμε.



Εικόνα 1.2 Ανάλυση Fourier σε ένα άθροισμα συνημιτονικών σημάτων

$(X(t) = 0.5 * \sin(2\pi t * 0.5) + \cos(2\pi t * 0.8))$ το οποίο κόβουμε με ένα Gaussian Window, που στην πρώτη περίπτωση δεξιά έχει τυπική απόκλιση 0.05 και στην δεύτερη περίπτωση 0.3. Η κάθε εικόνα αποτελείται από τα τέσσερα επιμέρους σχήματα. Στο πρώτο φαίνεται το σήμα μαζί με το παράθυρο, το δεύτερο σχήμα στα δεξιά είναι το φάσμα συχνοτήτων σε όλη την έκταση του σήματος, το κάτω αριστερά είναι το κομμένο σήμα από το παράθυρο και δίπλα του είναι η ανάλυση Fourier στο διαμορφωμένο σήμα.

Κοιτώντας την εικόνα 1.2, όπου έχουμε δυο περιπτώσεις διαχωρισμού σήματος με ένα Gaussian παράθυρο, παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση που έχουμε ένα πλατύ παράθυρο υπάρχει μια καλύτερη προσέγγιση στις συχνότητες, ενώ δεν έχουμε καθόλου καλή ανάλυση στον χρόνο. Ωστόσο, στην δεύτερη περίπτωση, που έχουμε ένα μικρού μήκους παράθυρο (που σημαίνει ότι έχουμε καλύτερη ανάλυση στο πεδίο του χρόνου), χάνουμε από ακρίβεια στο πεδίο των συχνοτήτων. Γενικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε την ακρίβεια στον χρόνο, τόσο χάνουμε σε ακρίβεια στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα.

Αυτό συμβαίνει λόγω της αρχής της αβεβαιότητας, που στην κβαντομηχανική αναφέρει ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα την θέση και την ορμή ενός σωματιδίου. Το αντίστοιχο συμβαίνει εδώ για τον χρόνο και τις συχνότητες, δηλαδή :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 1 \quad (1.18)$$

Όπου Δt και Δf είναι η τυπική απόκλιση του χρόνου και της συχνότητας αντίστοιχα.

1.3 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ GABOR

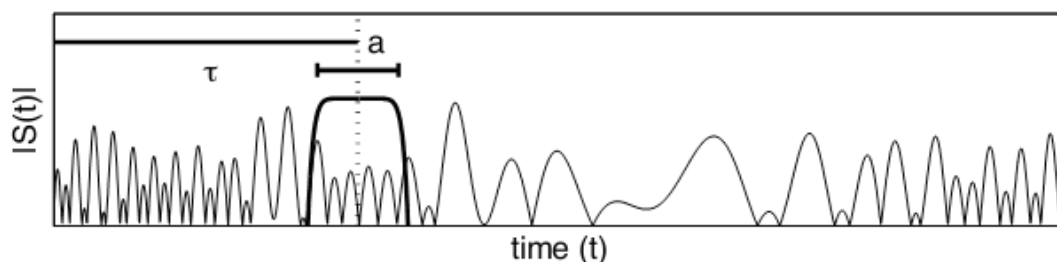
Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier το μόνο που μπορεί κάνει είναι να μας μεταφέρει από το χρονικό πεδίο στο πεδίο των συχνοτήτων, πολλές φορές συναντάται το πρόβλημα το οποίο αναφέρεται στο χρονικό πεδίο όπου αντιστοιχεί η ενδιαφερόμενη συχνότητα. Η short time Fourier transformation [Gabor, 1947] είναι η μέθοδος που αντιμετωπίζει το προαναφερόμενο πρόβλημα ώστε εν τέλει να έχουμε μια σαφή εικόνα στα πεδία των συχνοτήτων και του χρόνου. Ο Gabor τροποποίησε το πυρήνα (kernel) του μετασχηματισμού Fourier και τον αντικατέστησε με τον ακόλουθο πυρήνα:

$$g_{t,v}(\tau) = e^{j2\pi v\tau} g(\tau - t) \quad (1.19)$$

Ο καινούργιος όρος στον πυρήνα του Fourier είναι το $g(\tau - t)$ και σκοπός του είναι να εντοπίζει συχνότητες σε ένα χρονικό πεδίο. Συνήθως, την συνάρτηση $g(\tau - t)$ τη συναντούμε και ως χρονικά παράθυρα (time-windows). Τέλος, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Gabor ως εξής [Gabor, 1947]:

$$X_g(t, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g^*(\tau - t) e^{-j2\pi v\tau} d\tau \quad (1.20)$$

Στην εικόνα 1.3 φαίνεται πώς δουλεύει ο μετασχηματισμός Gabor σε ένα σήμα που μεταβάλλεται η συχνότητά του στο χρονικό πεδίο. Ένα παράθυρο πλάτους a κινείται κατά μήκος του σήματος αλλάζοντας το κέντρο τ του παραθύρου. Καθώς γίνεται η χρονική ανάλυση του σήματος, αποσπούμε τις συχνότητές του που εμπεριέχονται μέσα στο παράθυρο. Με αυτόν τον τρόπο, ξέρουμε ποια συχνότητα αντιστοιχεί σε μια χρονική περίοδο που μπορούμε να ελέγξουμε από το πλάτος του χρονικού παραθύρου.



Εικόνα 1.3 Η γραφική αναπαράσταση του μετασχηματισμού Gabor που αποσπάμε τις συνιστώσες του χρόνου και της συχνότητας ενός $S(t)$ σήματος. Επίσης, το χρονικό παράθυρο $g(\tau - t)$ με κέντρο στο τ και πλάτος a [Nathan Kutz, Computational Methods for Data Analysis, σελ 224].

Παρακάτω θα αναφέρουμε κάποιες από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Gabor [Kutz, 2012]

- 1) Η διατήρηση στην μετατόπιση στον χρόνο και στις συχνότητες, που είναι

$$y(t) = x(t)e^{-j2\pi v_0 t} \Rightarrow X_g(t, v) = X_g(t, v - v_0) \quad (1.21)$$

$$y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow X_g(t, v) = X_g(t - t_0, v)e^{j2\pi t_0 v} \quad (1.22)$$

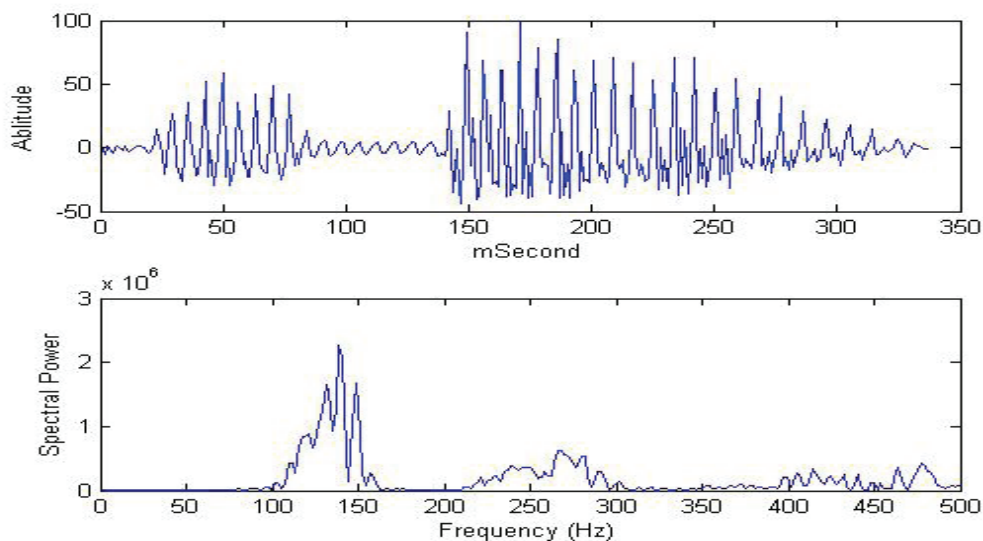
2) Διατήρηση της γραμμικότητας

$$X_g[a(t_1, v_1) + b(t_2, v_2)] = aX_g(t_1, v_1) + bX_g(t_2, v_2) \quad (1.23)$$

3) Διατήρηση της συμμετρίας στον χώρο των συχνοτήτων που συμβαίνει διότι η νόρμα του χρόνο-παραθύρου ισούται με 1, δηλαδή $\|g(\tau - t)\| = 1$.

4) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Gabor ορίζεται ως :

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|g\|^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} X_g^*(t, v) g(\tau - t) e^{j2\pi v \tau} dv dt \quad (1.24)$$

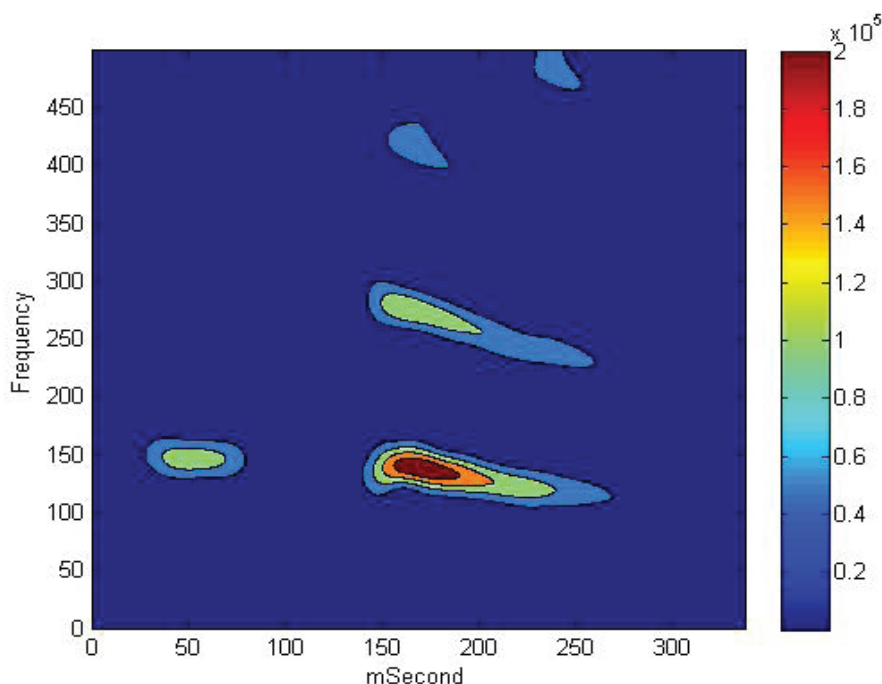


Εικόνα 1.4. Φωνητικό σήμα που αντιστοιχεί στην λέξη 'GABOR' [Σήμα από τη βάση δεδομένων του Matlab]. Το πρώτο διάγραμμα είναι το χρονικό σήμα και το δεύτερο είναι η φασματική πυκνότητα ενέργειας.

Κάνοντας ανάλυση κατά Gabor, σημαντικός παράγοντας είναι η χρονική ανάλυση του σήματος, που είναι άμεσα εξαρτημένος από την ακρίβεια των συχνοτήτων. Όπως έχουμε προαναφέρει, όσο περισσότερη ακρίβεια στον χρόνο κερδίζουμε, τόση ακρίβεια στις συχνότητες χάνουμε, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας. Συνεπώς, δεν μπορούμε να έχουμε ένα πολύ μικρό σε πλάτος χρονικό παράθυρο, διότι θα χάσουμε ακρίβεια στις συχνότητες, άλλα

ούτε ένα πολύ μεγάλο σε πλάτος χρονικό παράθυρο (καλύτερη ακρίβεια στις συχνότητες), γιατί θα χάσουμε από την ανάλυση στον χρόνο. Γι' αυτό, αρχικά κατά την ανάλυση σήματος κάνουμε διάφορες δοκιμές ως προς το ποιο είναι το πιο κατάλληλο σε μέγεθος παράθυρο, ώστε να έχουμε την επιθυμητή ακρίβεια στις συχνότητες. Για να βελτιώσουμε την ακρίβεια στον χρόνο προσπαθούμε να έχουμε μεγάλη αλληλοεπικάλυψη των χρονικών παραθύρων. Αυτό έχει ως συνέπεια να καθυστερεί ο αλγόριθμος και να χρειαζόμαστε περισσότερη χρονική διάρκεια ανάλυσης, το αποτέλεσμα όμως θα είναι σίγουρα κατά πολύ πιο βελτιωμένο και ακριβές.

Ας δούμε τον μετασχηματισμό Gabor στην εφαρμογή κάνοντας ένα παράδειγμα. Στην εικόνα 1.4 έχουμε ηχογραφήσει την λέξη 'GABOR' [Σήμα από τη βάση δεδομένων του Matlab] σε 338 σημεία με δειγματική συχνότητα 1KHz.



Εικόνα 1.5 Φασματική ανάλυση του φωνητικού σήματος κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Gabor στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας.

Στην συνέχεια, κάναμε μια ανάλυση στον χώρο των συχνοτήτων, όπου συμπεράναμε ότι δεν είμαστε σε θέση να αποφανθούμε για το ποιες συχνότητες αντιστοιχούν σε κάθε συλλαβή της λέξης. Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι έχουμε μία κορυφή γύρω από την συχνότητα των 140 Hz .

Κάνοντας ανάλυση κατά Gabor στο φωνητικό σήμα, χρησιμοποιώντας ένα Gaussian χρονικό παράθυρο με συνολικό πλάτος 75 σημείων και μία αλληλοεπικάλυψη παραθύρων 87%, παίρνουμε την εικόνα 1.5. Το πλάτος του παραθύρου είναι κατά 4.5 φορές μικρότερο σε σχέση με το σύνολο των σημείων, που σημαίνει ότι έχουμε καλή ακρίβεια στις συχνότητες παρόλα αυτά όμως έχουμε και καλή ακρίβεια στον χρόνο όπως φαίνεται και στην εικόνα 1.2 και αυτό συμβαίνει διότι έχουμε μια υψηλή αλληλοεπικάλυψη παραθύρων.

Τέλος, στην εικόνα 1.5 έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων. Τώρα μπορούμε να θέσουμε τις συχνότητες στα διάφορα χρονικά διαστήματα. Δηλαδή, στο διάστημα των 30-60msec που αντιστοιχεί η συλλαβή 'GA' οι συχνότητες είναι γύρω στα 150Hz και στο διάστημα των 150-250msec που αντιστοιχεί η δεύτερη συλλαβή 'BOR' οι συχνότητες είναι γύρω στα 110-150Hz.

1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ MULTITAPER

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, για να κάνουμε μια φασματική ανάλυση των δεδομένων πολλαπλασιάζαμε το σήμα με ένα παράθυρο (taper) και στην συνέχεια, υστέρη από ένα μετασχηματισμό Fourier, παίρναμε την συχνότητα που αντιστοιχούσε. Ανάλογα με την αλληλοεπικάλυψη των παραθύρων παίρναμε μια εικόνα των συχνοτήτων στο χρονικό πεδίο. Όμως, η ανάλυση που έχουμε πραγματοποιήσει μέχρι στιγμής γίνεται μόνο με ένα παράθυρο (taper), όπως είναι αυτό του Gauss, Hamming, Hanning και άλλα πολλά. Αντίθετα, στην μέθοδο Multitaper [Thomson, 1982] χρησιμοποιούνται για παράθυρο οι συναρτήσεις Slepian ή οι διακριτές σειρές prolate Spheroidal (DPSS) [Slepian and Pollak, 1961], οι οποίες είναι ορθογώνιες συναρτήσεις. Οι Slepian συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από την παράμετρο W την οποία αποκαλούμε παράμετρο “εύρος ζώνης” (bandwidth). Αυτή σχετίζεται με το εύρο ζώνης συχνοτήτων της συνάρτησης και συνδυάζοντάς τη με το μήκος του σήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των συναρτήσεων-παραθύρων που μπορούμε να εφαρμόσουμε στο σήμα. Αν W είναι το εύρος ζώνης των συχνοτήτων και N το μήκος του σήματος, μπορούμε να κάνουμε ανάλυση με $2NW$ Slepian συναρτήσεις, όπου θα έχουμε ένα καλό φασματικό υπολογισμό των συχνοτήτων στο διάστημα $[-W, W]$. Μπορούμε, δηλαδή, να χρησιμοποιήσουμε ως παράθυρα $W_k(t) \{k = 1, 2, \dots, 2NW, t = 1, \dots, N\}$ DPSS συναρτήσεις της εικόνας (1.6). για την εκτίμηση των συχνοτήτων στο σήμα, οι οποίες ορίζονται από την σχέση [Slepian and Pollak, 1961]

$$W_n(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1} \quad (1.25)$$

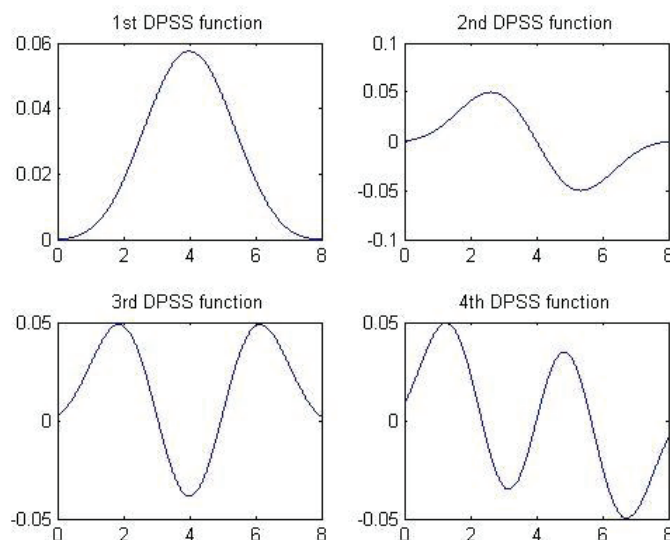
Σημαντικό, για την ανάπτυξη της Multitaper μεθόδου είναι η κατάλληλη επιλογή του αριθμού των Slepian συναρτήσεων ($2NW$), καθώς επίσης και το μέγεθος της παραμέτρου W . Δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος τρόπος επιλογής των παραπάνω, παρά αφήνεται στην κρίση του ερευνητή να επιλέξει τις κατάλληλες παραμέτρους για την καλύτερη εκτίμηση των συχνοτήτων. Η επιλογή της “εύρους ζώνης” παραμέτρου W είναι ανάλογη με το πόσο ήπιες (smoothed) θέλουμε τις συχνότητες. Συνήθως, η στρατηγική που ακολουθούμε είναι να ξεκινάμε με μικρό αριθμό SPSS συναρτήσεων (συνήθως 3 ή 4) και στην συνέχεια να τις αυξάνουμε μέχρι την καλύτερη ανάλυση των συχνοτήτων.

Για το υπολογισμό των συχνοτήτων που αντιστοιχούν για κάθε ένα από τα taper $W_t(k)$ για τα δεδομένα $x_t \{t = 1, \dots, N\}$ εφαρμόζουμε ένα μετασχηματισμό Fourier και παίρνουμε το πλάτος που αντιστοιχεί σε κάθε συχνότητα για κάθε taper.

$$x_k(f) = \sum_{t=1}^N W_t(k) x_t e^{-j2\pi f t} \quad (1.26)$$

Μπορούμε εν συνεχεία να υπολογίσουμε την ενέργεια του σήματος εφαρμόζοντας την εξίσωση (1.5) βρίσκοντας τον μέσο όρο όλων των tapers που χρησιμοποιήσαμε και να παίρνουμε τελικά την σχέση :

$$S_{mt}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |x_k(f)|^2 \quad (1.27)$$

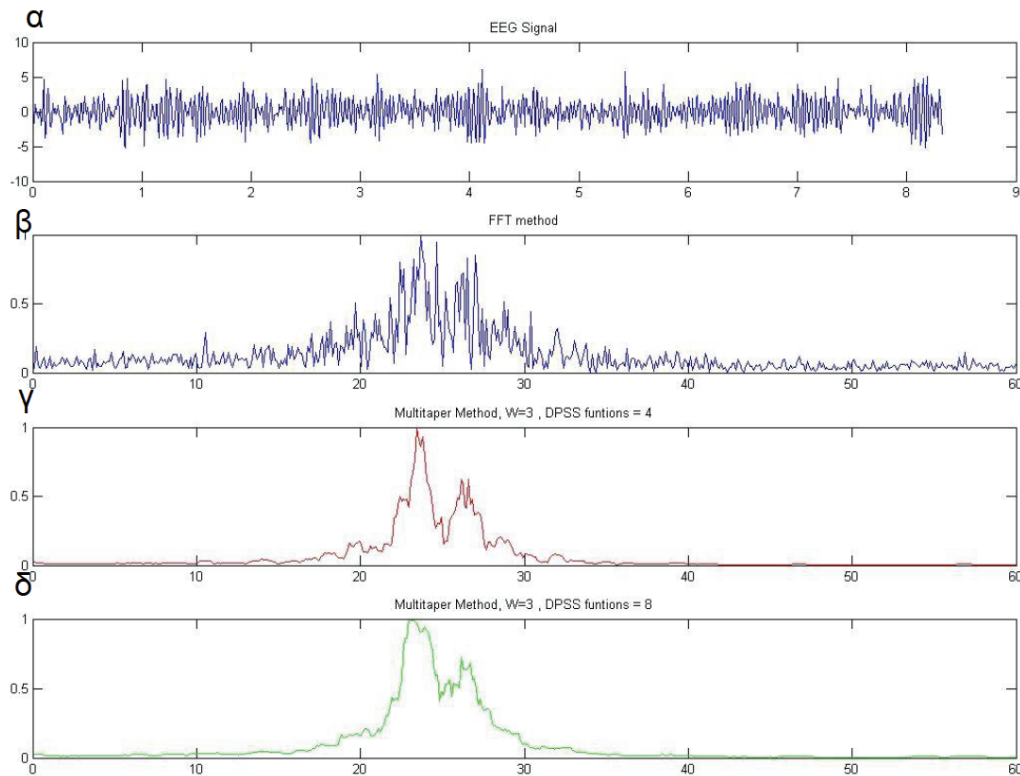


Εικόνα 1.6. Τα τέσσερα πρώτα παράθυρα (*tapers*) που δημιουργούνται από τις DPSS συναρτήσεις της εξίσωσης 1.25.

όπου K είναι ο αριθμός των taper και S_{mt} είναι η ενέργεια του σήματος υπολογισμένη με την multitaper μέθοδο. Την παραπάνω σχέση μπορούμε να την αναγάγουμε και στο πεδίο του χρόνου βάζοντας τα tapers να κινηθούν στο σήμα και να ακολουθήσουμε την ίδια λογική με τον μετασχηματισμό Gabor.

Για την καλύτερη κατανόηση των προαναφερθέντων μεθόδων, θα συνεχίσουμε με μια εφαρμογή αυτών. Πιο συγκεκριμένα θα αναλύσουμε ένα τεχνητό ηλεκτροεγκεφαλογραφικό (EEG) σήμα (εικόνα 1.7α) κάνοντας χρήση των χρονοσειρών, που είναι και το κεντρικό ενδιαφέρον της εργασίας. Αρχικά θα εντοπίσουμε τις συχνότητες κάνοντας έναν μετασχηματισμό Fourier στα δεδομένα, όπου θα πάρουμε μια μη ξεκάθαρη εικόνα για το πού βρίσκεται η κορυφή των συχνοτήτων (εικόνα 1.7β). Αντίθετα, με την μέθοδο Multitaper, βλέπουμε ξεκάθαρα πού βρίσκονται οι κορυφές των συχνοτήτων.

Ξεκινήσαμε την μελέτη της Multitaper μεθόδου χρησιμοποιώντας αρχικά τέσσερις DPSS συναρτήσεις, όπου έχουμε μια πιο ήπια εικόνα από την FFT μέθοδο και βλέπουμε ότι εντοπίζονται κορυφές στα 23Hz και στα 26Hz, πληροφορία την οποία δεν έχουμε με την FFT μέθοδο (εικόνα 1.7γ-δ). Αν τώρα αυξήσουμε τον αριθμό των DPSS συναρτήσεων στις οκτώ, οι συχνότητες θα φαίνονται μεν πιο ήπιες από αυτές τις FFT, άλλα τείνουν να ενωθούν οι κορυφές (εικόνα 1.7δ). Αν επιπλέον αυξήσουμε ακόμη περισσότερο τις DPSS συναρτήσεις, τότε οι δυο κορυφές θα ενωθούν με αποτέλεσμα να χάσουμε ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας.



Εικόνα 1.7. Στο γράφημα α είναι μια αναπαράστασή ενός τεχνητού EEG σήματος, στο γράφημα β είναι το μετασχηματισμένο σήμα κατά Fourier, στο γράφημα γ-δ είναι το μετασχηματισμένο σήμα κάνοντας Multitaper ανάλυση με συνολικό αριθμό παραθύρων (tapers) 4 και 8 αντίστοιχα.

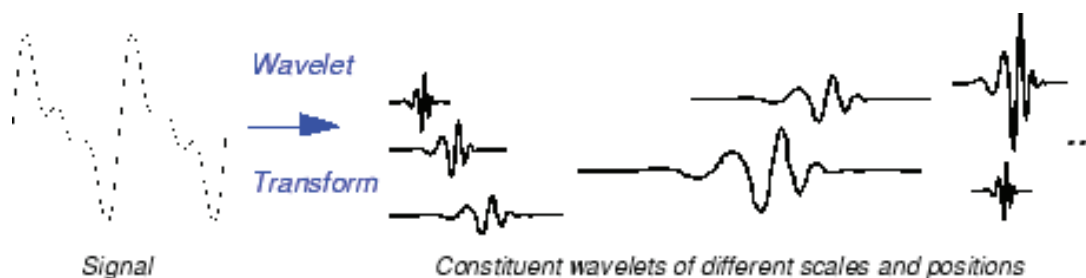
1.5 ΣΥΝΕΧΗΣ WAVELET ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ (CWT)

Όπως με το μετασχηματισμό Fourier ή με τον STFT, έτσι και με τον συνεχή μετασχηματισμό Wavelet κάνουμε ανάλυση σήματος συγκρίνοντας το προς επεξεργασία σήμα με μια 'μητρική' συνάρτηση wavelet 'ψ'. Κατά τον μετασχηματισμό Fourier, η συνάρτηση κατά την οποία γίνεται η ανάλυση είναι το εκθετικό $e^{-j2\pi tv}$ και έτσι μεταφερόμαστε από το χρονικό πεδίο στον πεδίο των συχνοτήτων. Παρόμοια συμβαίνει και κατά την ανάλυση Gabor που η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η $w(t)e^{-j2\pi vt}$ και έχουμε ως αποτέλεσμα μια ανάλυση στις συχνότητες ν μέσα στο χρονικό διάστημα του παραθύρου.

Κατά τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet συγκρίνουμε το σήμα μας κάνοντας μετατοπίσεις και διαστολές ή συστολές της μητρικής συνάρτησης ψ. Κάνοντας μετατοπίσεις την μητρική συνάρτηση παίρνουμε μια ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και κάθε φορά που διαστέλλεται ή συστέλλεται η μητρική συνάρτηση αλλάζουμε κλίμακα (scale). Εν τέλει, έχουμε μια δισδιάστατη ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και κλίμακας της μητρικής συνάρτησης. Ορίζουμε τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet [Mallat, 1999; Barford et al., 1992] ως :

$$C_{\psi}(f)(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1.28)$$

Όπου a είναι ο παράγοντας κλίμακας και b είναι η θέση της μητρικής συνάρτησης. Επίσης όταν $a > 0$ τότε η μητρική συνάρτηση ψ διαστέλλεται και συμβαίνει το αντίθετο όταν ο παράγοντας $a < 0$.



Εικόνα 1.8 Παράδειγμα CWT συστολής ή διαστολής σήματος σε διάφορες θέσεις του σήματος μας [Σήμα από τη βάση δεδομένων του Matlab].

Κατά την ανάλυση wavelet καθοριστικό ρόλο παίζει η κατάλληλη επιλογή της μητρικής συνάρτησης. Ανάλογα με το τι θέλουμε να εντοπίσουμε ή να αφαιρέσουμε πάνω σε ένα σήμα επιλέγουμε και την καταλληλότερη συνάρτηση, ύστερα από πολλές δοκιμές. Γενικά, αν επιλέξουμε να κάνουμε ανάλυση κατά wavelet, υπάρχει μια ποικιλία από μητρικές συναρτήσεις με τις οποίες μπορούμε να λύσουμε πολλών ειδών προβλήματα, γι' αυτό και είναι τόσο δημοφιλής.

Υπάρχει μια αλληλεξάρτηση ανάμεσα στον παράγοντα κλίμακας και στις συχνότητες. Διότι, για ένα σήμα που έχει διασταλεί (υψηλή κλίμακα) θα αντιστοιχούν χαμηλές συχνότητες ενώ για ένα σήμα που έχει συμπιεστεί θα αντιστοιχούν σε αυτό υψηλές συχνότητες, όπως φαίνεται και στην εικόνα 1.9. Γι' αυτό, είναι σαφές ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στην κλίμακα συχνότητα και έτσι μπορούμε να μετατρέψουμε τον άξονα της κλίμακας σε συχνότητες.



Εικόνα 1.9 Αριστερά ένα συμπιεσμένο σήμα (χαμηλή κλίμακα, υψηλές συχνότητες), δεξιά ένα διεσταλμένο σήμα (υψηλή κλίμακα, χαμηλές συχνότητες) [Εικόνα από το Toolbox του wavelet του Matlab]

Η σχέση που μας δίνει την αντιστοίχιση της κλίμακας του μετασχηματισμού wavelet με την συχνότητες του σήματος ορίζεται ως [Abry, 1997]:

$$F_a = \frac{F_c}{a * T_s} \quad (1.29)$$

όπου a είναι η κλίμακα, T_s είναι η δειγματική περίοδος του σήματος, F_c είναι η κεντρική συχνότητα της wavelet σε Hz (χαρακτηριστικό των μητρικών συναρτήσεων) και F_a είναι η συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλίμακα.

1.5.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Wavelet

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε τις ιδιότητες που ικανοποιούνται στον μετασχηματισμός wavelet, οι οποίες είναι οι ακόλουθες [Kutz, 2012]. :

1) Γραμμικότητα :

$$C_{\psi}(af + \beta g)(a, b) = aC_{\psi}(f)(a, b) + \beta C_{\psi}(f)(a, b) \quad (1.30)$$

Όπου a και β είναι κάποιες σταθερές και f, g είναι τα σήματα.

2) Μετατόπιση :

$$C_{\psi}(T_{\tau}f)(a, b) = C_{\psi}(f)(a, b - \tau) \quad (1.31)$$

Όπου T_{τ} ο τελεστής μετατόπισης και $T_{\tau}f(t) = f(t - \tau)$

3) Διαστολή :

$$C_{\psi}(D_c f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}} C_{\psi}(f)\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \quad (1.32)$$

Όπου D_c τελεστής διαστολής και $D_c f(t) = (1/c)f(t/c)$ για $c > 0$

4) Αντιστροφή μετασχηματισμού wavelet:

$$f(t) = \frac{1}{A_{\psi}} \iint_{-\infty}^{+\infty} C_{\psi}(f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (1.33)$$

όπου A_{ψ} είναι σταθερά από την ικανή συνθήκη του μετασχηματισμός wavelet η οποία ορίζεται ως :

$$A_{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1.34)$$

Στην σχέση 1.34 έχουμε κάνει μετασχηματισμό Fourier στην συνάρτηση wavelet, η οποία ισούται με :

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-j\omega b} \psi(a\omega) \quad (1.35)$$

Αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται, τότε ο μετασχηματισμός wavelet είναι καλά ορισμένος.

1.5.2 Βάση Wavelet

Κατά την ανάλυση Fourier, είναι δυνατό να απεικονίσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση με ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημίτονων. Με τον ίδιο τρόπο λειτουργεί και ο μετασχηματισμός wavelet που, αντί για άθροισμα ημιτόνων και συνημίτονων, χρησιμοποιείται μία μητρική συνάρτηση wavelet. Όμως, για να ικανοποιούνται όλες οι παραπάνω ιδιότητες πρέπει οι συναρτήσεις wavelet να είναι ορθομοναδιαίες μεταξύ τους, δηλαδή:

$$(\psi_{a,b}, \psi_{c,d}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(x) \psi_{c,d}(x) dx = \delta_{a,b} \delta_{c,d} \quad (1.36)$$

όπου $\delta_{a,b}$ είναι το δέλτα του Dirac.

Συνεπώς, τώρα μπορούμε να εκφράσουμε με ένα ανάπτυγμα σειράς μια συνάρτηση ή ένα σήμα συναρτήσει της βάσης wavelet $\psi(t)$ δηλαδή :

$$f(t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (1.37)$$

όπου οι σταθερές μπορούν να δοθούν λόγω τις ορθογωνιότητας από την σχέση :

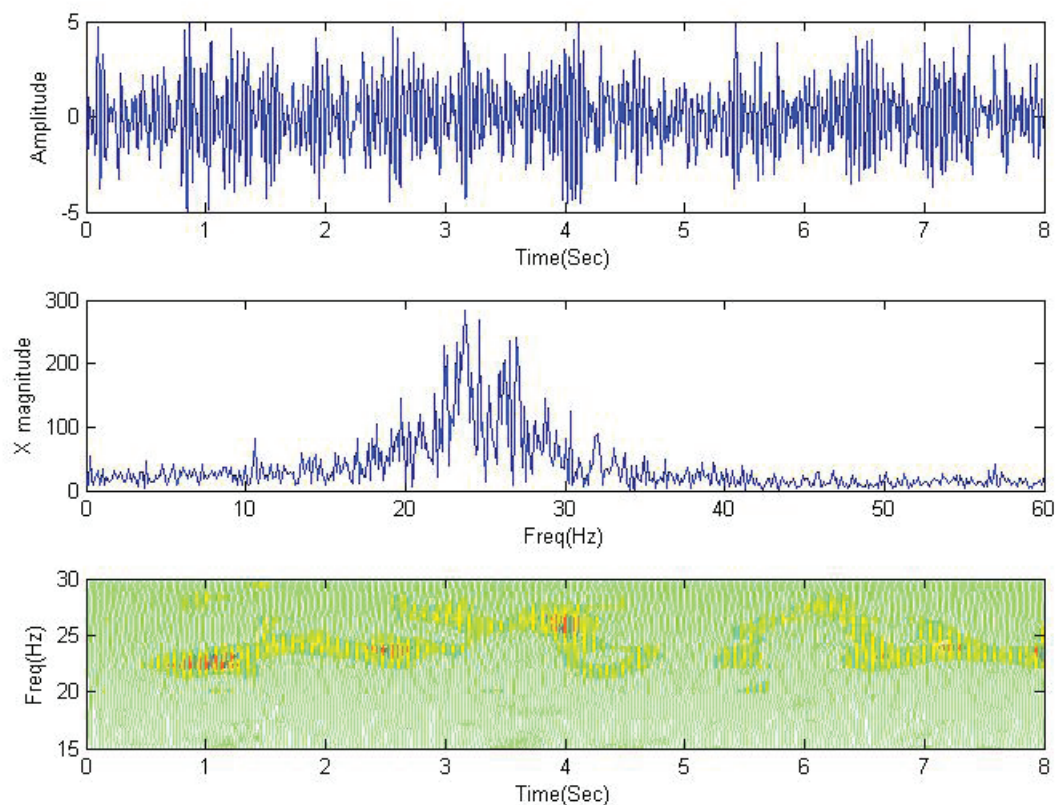
$$c_{m,n} = (f, \psi_{m,n}) \quad (1.38)$$

Σύμφωνα με το παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε και τον αντίστροφο μετασχηματισμό wavelet. Λόγω της ορθοκανονικής βάσης ο μετασχηματισμός wavelet είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση οποιοδήποτε σήματος.

1.5.3 Παράδειγμα

Θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω αναλύοντας σήματα της μορφής ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων (EEG). Αρχικά θα κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Fourier έτσι ώστε να έχουμε μια πρώτη εικόνα του πού βρίσκονται οι ενδιαφερόμενες συχνότητες και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό wavelet στο διάστημα όπου είδαμε τις κορυφές των συχνοτήτων προκειμένου να κάνουμε μια ανάλυση του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

Συγκεκριμένα, θα φτιάξουμε σήμα με την χρήση χρονοσειρών το οποίο θα διαρκεί οκτώ δευτερόλεπτα με δειγματική συχνότητα 120 σημεία/δευτερόλεπτο, όπως φαίνεται και από την εικόνα 1.10. Κατά την ανάλυση wavelet θα χρησιμοποιήσουμε την μιγαδική Morlet [Shift et al., 1994] μητρική συνάρτηση με κεντρική συχνότητα 5 Hz και ο παράγοντας τις κλίμακας θα αυξάνεται με την δύναμη του δυο. Για την μετατροπή της κλίμακας σε συχνότητα θα κάνουμε χρήση της σχέσης 1.29, όπου θα έχουμε την ταυτόχρονη ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων αλλά και του χρόνο (βλ. εικόνα 1.10).



Εικόνα 1.10. Ανάλυση EEG του σήματος α-γράφημα, στο πεδίο των συχνοτήτων β-γράφημα και ταυτόχρονη ανάλυση στα πεδία των συχνοτήτων-χρόνου με την μέθοδο του μετασχηματισμού wavelet γ-γράφημα.

Για την καλύτερη ανάλυση του σήματος ακολουθούμε την μεθοδολογία όπως φαίνεται και από την εικόνα 1.10. Δηλαδή, αφού εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στο σήμα παρατηρούμε ότι η συχνότητα που μας ενδιαφέρει βρίσκεται ανάμεσα των 20 - 30Hz, αλλά δεν γνωρίζουμε πώς κατανέμεται αυτή η κορυφή στο πεδίο του χρόνου. Έτσι, επιλέγουμε το διάστημα των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει εδώ είναι από 20-30Hz και εφαρμόζουμε τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet για να πάρουμε την ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων. Στην προκειμένη περίπτωση η κορυφή της δεύτερης εικόνας βρίσκεται ανάμεσα στα 20-25Hz και ενεργείται στα επιμέρους χρονικά διαστήματα των περιοχών του πρώτου και τετάρτου δευτερολέπτου. Με ανάλογο τρόπο δράσαμε και με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Gabor στην προηγούμενη παράγραφο.

1.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

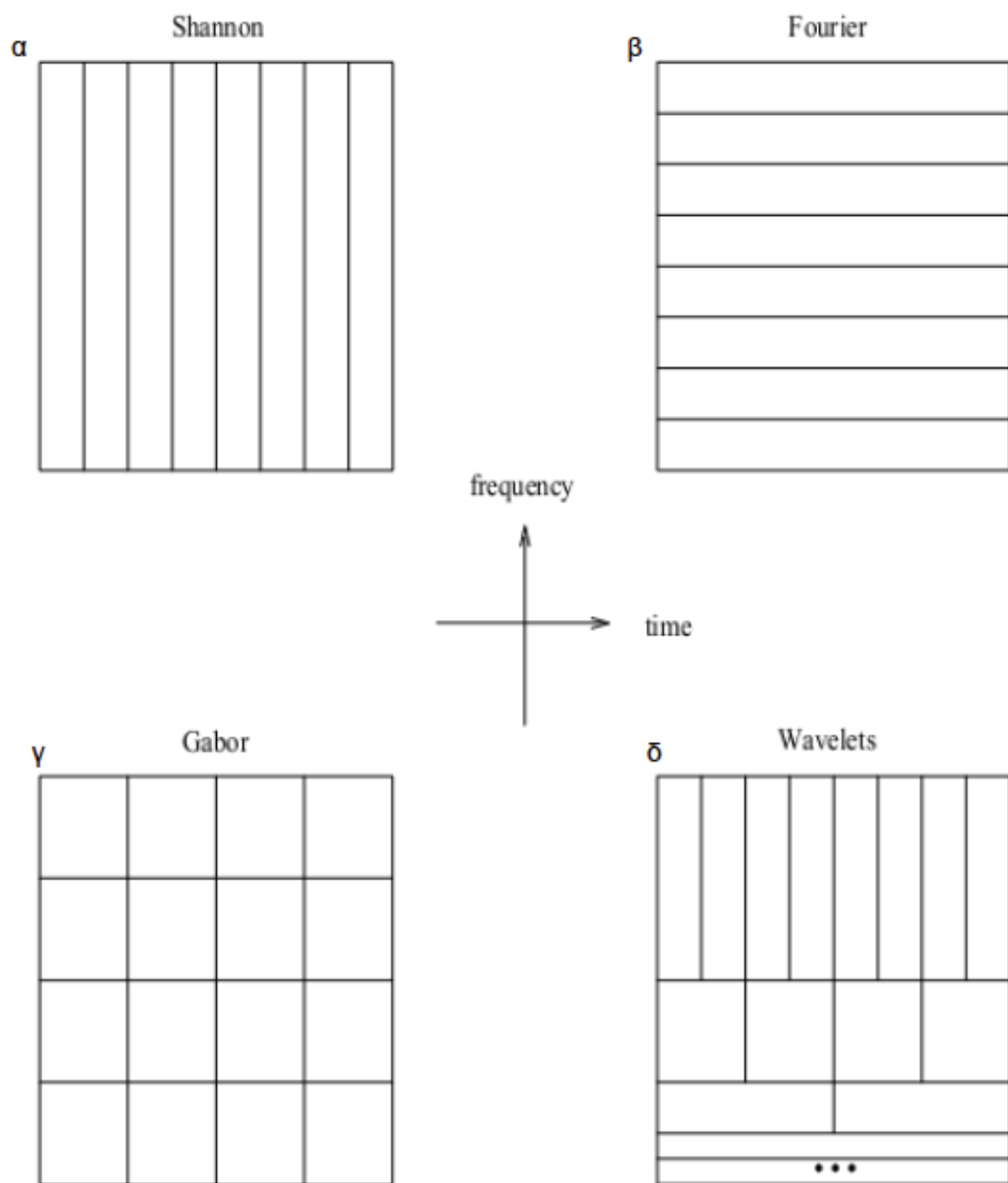
Στο παρόν κεφάλαιο έχουμε αναπτύξει μια σειρά από μεθόδους που μπορούμε να κάνουμε ανάλυση στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων (εικόνα 1.11). Καμία, όμως, από τις παραπάνω δεν μπορεί να αποφύγει την απροσδιοριστία Heisenberg και να έχουμε μια τέλεια ανάλυση και στα δύο πεδία. Η κάθε μέθοδος αναπαριστά με διαφορετικό τρόπο τα δυο πεδία, αλλά πάντοτε ισχύει ότι $\Delta t \Delta f \geq 1/2$.

Μετασχηματισμός Fourier: Έχουμε πλήρη πληροφορία στο πεδίο των συχνοτήτων αλλά καμία στο πεδίο του χρόνου. Χρησιμοποιείται για να πάρουμε μια πρώτη εικόνα των συχνοτήτων, διότι ο αλγόριθμος του μετασχηματισμού Fourier είναι πολύ γρήγορος και εξίσου ακριβείς.

Μετασχηματισμός Gabor ή STFT: Προσθέτοντας ένα παράθυρο στον πυρήνα του μετασχηματισμού Fourier παίρνουμε πληροφορίες και από τα δυο πεδία. Στην προκειμένη περίπτωση, λόγω αρχής απροσδιοριστίας, πρέπει να επιλέξουμε ένα πλάτος παράθυρου έτσι ώστε να έχουμε την καλύτερη ανάλυση και στα δυο πεδία (ποτέ τέλεια ανάλυση).

Μέθοδος Multitaper: Έχουμε την ίδια πληροφορία με αυτήν του μετασχηματισμού Fourier, αλλά σε αυτή την περίπτωση έχουμε καλύτερη ευκρίνεια στις κορυφές των συχνοτήτων με την χρήση των Slepian σειρών.

Μετασχηματισμός wavelet: Σε αυτήν την περίπτωση αλλάζουμε την βάση του μετασχηματισμού Fourier με μία μητρική συνάρτηση η οποία συστέλλεται ή διαστέλλεται και μετατοπίζεται. Ανάλογα με το ποια συχνότητα μας ενδιαφέρει, επιλέγουμε την κατάλληλη κλίμακα, παραδείγματος χάρι αν θέλουμε να εντοπίσουμε χαμηλές συχνότητες επιλέγουμε να κάνουμε ανάλυση σε υψηλή κλίμακα και το αντίστροφο. Η ανάλυση, δηλαδή, στο πεδίο του χρόνου μεταβάλλεται με την συχνότητα.



Εικόνα 1.11 Διάφορες περιπτώσεις στην ανάλυση στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. χρονική ανάλυση εικόνα α, Fourier ανάλυση εικόνα β, Gabor ή STFT ανάλυση εικόνα γ, wavelet ανάλυση εικόνα δ [Kutz, 2012].

Κεφάλαιο 2

*ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ
ΜΟΝΤΕΛΑ
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ*

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

2.1.1 Εισαγωγή

Μια χρονοσειρά χαρακτηρίζεται ως διανυσματική όταν αποτελείται από M επιμέρους χρονοσειρές (κανάλια) και η κάθε χρονοσειρά εκτείνεται για T χρονικά σημεία. Τα κανάλια $(x_1, x_2, \dots, x_M)$ που τα χρονικά σημεία των καναλιών είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Mt}]'$ όπου $t=0, 1, 2, \dots, T$. Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν από ένα διανυσματικό γραμμικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο (MAR) τάξεως p , δηλαδή [Wei, 1999; Lutkepohl, 2011]:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{v} + \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{t-k} + \mathbf{u}_k \quad (2.1)$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι διάνυσμα $[1 \times M]$ σταθερών συντελεστών, ο πίνακας $\mathbf{A}_k$ διαστάσεων $[M \times M]$ είναι οι παράμετροι του μοντέλου και $\mathbf{u}_k$ είναι ο λευκός θόρυβος της διαδικασίας διαστάσεων $[1 \times M]$ με μέση τιμή μηδέν και πίνακα διασποράς Σ διαστάσεων $[M \times M]$.

$$\mathbf{u}_k = N(0, \Sigma) \quad (2.2)$$

2.1.2 Χαρακτηριστικά των χρονοσειρών.

Πρώτου περιγράψουμε τις ιδιότητες των διανυσματικών χρονοσειρών, ας αναφέρουμε διάφορα στατιστικά μεγέθη που θα μας χρειαστούν στην ανάλυση τους.

- 1) Μέση τιμή (mean) των σημείων των επιμέρους καναλιών :

$$E(\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_M \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

- 2) Πίνακας διακύμανσης καθυστέρησης k (lagk).

$$\Gamma(k) = \text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+k}) = E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_{t+k} - \boldsymbol{\mu})'] \quad (2.4)$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα (2.1.2) γράφεται και με μορφή πίνακα ως:

$$\Gamma(k) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(k) & \cdots & \gamma_{1M}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1}(k) & \cdots & \gamma_{MM}(k) \end{pmatrix} \quad \text{όπου } \gamma_{ij} = E[(x_{it} - \mu_i)(x_{j,t+k} - \mu_j)] \quad (2.5)$$

Για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $i, j = 1, 2, \dots, M$. Συνεπώς η συνάρτηση $\Gamma(k)$ ονομάζεται πίνακας διακύμανσης της διαδικασίας $\mathbf{x}_t$. Για $i = j$, γ_{ii} λέγεται συνάρτηση αυτό-συσχέτισης (auto covariance function) της διαδικασίας x_{it} και για $i \neq j$ γ_{ij} είναι συνάρτηση διασταυρωμένης

συσχέτισης (cross-covariance function) ανάμεσα στις διαδικασίες $x_{i,t}$ και $x_{j,t}$.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ένα σημαντικό εργαλείο για αναπαράγουμε τον πίνακα διασποράς του λευκού θορύβου για $k=0$ και μας επιτρέπει να αποφανθούμε αν η διαδικασία x_t είναι στάσιμη και ευσταθής, ιδιότητα πολύ σημαντική για την ανάλυση χρονοσειρών.

3) Πίνακας συσχέτισης μιας διανυσματικής διαδικασίας. Ορίζεται :

$$\rho(k) = D^{-\frac{1}{2}} \Gamma(k) D^{-\frac{1}{2}} = [\rho_{ij}(k)] \quad (2.6)$$

για $i, j = 1, 2, \dots, M$ και ο πίνακας D είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτοσυσχέτισης $\Gamma(0)$. Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε τα στοιχεία του πίνακα συσχέτισης ως

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}} \quad (2.7)$$

Για $i = j$ η ρ_{ii} λέγεται συνάρτηση αυτό-συσχέτισης (autocorrelation function) της διαδικασίας $x_{i,t}$ και για $i \neq j$ η ρ_{ij} λέγεται σταυρωτή συνάρτηση συσχέτισης (cross correlation function) μεταξύ των διαδικασιών $x_{i,t}$ και $x_{j,t}$.

2.2 ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Η στασιμότητα και ευστάθεια είναι μια βασική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα ενός διανυσματικού αυτοπαλινδρομικού μοντέλου για να κάνουμε μια περαιτέρω ανάλυση. Λέμε ότι μια χρονοσειρά είναι στάσιμη όταν η μέση τιμή και η συνάρτηση συσχέτισης δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Μπορούμε να γράψουμε ότι $E(x_t) = \mu$ και $\Gamma(k) = Cov(x_t, x_{t+k})$ είναι ανεξάρτητα από τον χρόνο όταν μιλάμε για μια στάσιμη διαδικασία.

Επίσης, λέμε ότι μια χρονοσειρά είναι ευσταθής όταν οι παράμετροι του μοντέλου παίρνουν τιμές εντός μοναδιαίου κύκλου. Για να ελέγξουμε αν μια χρονοσειρά είναι ευσταθής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βρίσκουμε την ορίζουσα $\det(I - Az) \neq 0$ για $|z| < 1$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{M-1} & A_M \\ I_M & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_M & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μικρότερες της μονάδας, τότε η διαδικασία είναι ευσταθής [Lutkepohl, 2006]. Ακόμη, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι αν μια χρονοσειρά είναι ευσταθής, συνεπάγεται ότι είναι και στάσιμη. Συνεπώς, κάνοντας έναν έλεγχο στις ιδιοτιμές του πίνακα A , καταλαβαίνουμε την σταθερότητα και την ευστάθεια του μοντέλου.

2.3 ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ

Στο ανάπτυγμα του διανυσματικού παλινδρομικού μοντέλου (σχέση 2.1) (MAR) υπάρχει το διάνυσμα u_t που ορίστηκε ως λευκό θόρυβος. Ορίζουμε λοιπόν ως λευκό θόρυβο μια διαδικασία που τα στοιχεία του u_t είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα, δηλαδή $Cov(u_t, u_{t+k}) = 0$ και ακολουθούν μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν. Η διασπορά του πίνακα Σ υπολογίζεται:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Cov(u_1, u_1) & Cov(u_1, u_2) & \dots & Cov(u_1, u_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(u_M, u_1) & Cov(u_M, u_2) & \dots & Cov(u_M, u_M) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Τα διαγώνια στοιχεία του παραπάνω πίνακα 2.9 $Cov(u_i, u_i) = Var(u_i)$ για $i = 1, 2, \dots, M$ είναι η διασπορά των στοιχείων του διανύσματος του λευκού θορύβου. Κάθε στοιχείο του πίνακα είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο, συνεπώς ο λευκός θόρυβος είναι και μια στάσιμη διαδικασία.

2.4 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗΣ 1^{ης} ΤΑΞΗΣ

Θα περιγράψουμε όσα έχουμε αναφέρει με ένα παράδειγμα διανυσματικού αυτοπαλινδρομικού μοντέλου 1^{ης} τάξης. Αρχικά, υπολογίζουμε την μέση τιμή του μοντέλου:

$$\begin{aligned} E(x_t) &= E(v + A_1 x_{t-1} + u_t) \Rightarrow E(x_t) = E(v) + A_1 E(x_{t-1}) + E(u_t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu - A_1 \mu &= v + 0 \Rightarrow \mu = v [I - A_1]^{-1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ο μέσος είναι $E(x_t) = E(x_{t-1}) = \mu$ διότι η διαδικασία είναι στάσιμη και ο μέσος δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Ο μέσος του διανύσματος v δεν μεταβάλλεται διότι είναι μια σταθερά και τέλος ο μέσος του λευκού θορύβου είναι επίσης μηδέν.

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε στην θέση της σταθεράς v στην σχέση 2.10, παίρνουμε την εξής έκφραση για το MAR(1) μοντέλο:

$$x_t = \mu [I - A_1] + A_1 x_{t-1} + u_t \Rightarrow (x_t - \mu) = A_1 (x_{t-1} - \mu) + u_t \quad (2.11)$$

Κεφάλαιο 2

Η παραπάνω εναλλακτική έκφραση του MAR(1) μοντέλου μπορεί να γενικευτεί και για p-τάξη με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Όπως έχουμε προαναφέρει, ο πίνακας A_1 είναι οι παράμετροι που ορίζουν το μοντέλο και το διάνυσμα u_t είναι ο λευκός θόρυβος του μοντέλου. Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε ποιος είναι ο πίνακας διάσποράς Σ του λευκού θορύβου. Αρχικά, υπολογίζουμε τον πίνακα διακύμανσης του μοντέλου.

$$\begin{aligned}\Gamma(\kappa) &= E[(x_{t-\kappa} - \mu)(x_t - \mu)'] = \\ &= E[(x_{t+\kappa} - \mu)(A_1(x_{t-1} - \mu) + u_t)'] \\ &= E[(x_{t+\kappa} - \mu)A_1'(x_{t-1} - \mu)'] + E[(x_{t+\kappa} - \mu)u_t'] \quad (2.12) \\ &= \Gamma(\kappa - 1)A_1' + \Sigma\delta_{\kappa,0}\end{aligned}$$

$$\Gamma(\kappa) = \Gamma(\kappa - 1)A_1' + \Sigma\delta_{\kappa,0} \quad (2.13)$$

Για $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $\delta_{\kappa,0}$ είναι το δέλτα του Kronecker όπου για $\kappa=0$ μας δίνει έναν μοναδιαίο πίνακα $[M \times M]$. Από την παραπάνω εξίσωση, αν γνωρίζουμε την συνάρτηση διακύμανσης του μοντέλου, εύκολα υπολογίζεται ο πίνακας συντελεστών A_1 και ο πίνακας διασποράς του σφάλματος. Σε γενικές γραμμές, την παραπάνω εξίσωση θα την συναντήσουμε ως Yule-Walker εξίσωση και είναι πολύ χρήσιμη για τον προσδιορισμό των συντελεστών του μοντέλου.

Επίσης μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση 2.13 Yule-Walker εναλλακτικά ως :

$$\Gamma(\kappa) = \begin{cases} \Gamma(-1)A_1' + \Sigma & \text{για } \kappa = 0 \\ \Gamma(\kappa - 1)A_1' & \text{για } \kappa \geq 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση 2.14., $\kappa=1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα συντελεστών A_1 του μοντέλου.

$$\Gamma(1) = \Gamma(0)A_1' \Rightarrow A_1 = \Gamma(1)' \Gamma(0)^{-1} \quad (2.15)$$

Από το παραπάνω υπολογίζουμε τον πίνακα διακύμανσης του λευκού θορύβου από την εξίσωση 2.14 για $\kappa=0$:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Gamma(0) - \Gamma(-1)\Gamma(0)^{-1}\Gamma(-1)' \\ &= \Gamma(0) - \Gamma(1)'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(1) \quad (2.16)\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τους πίνακες $\Gamma(\mathbf{0})$ και $\Gamma(\mathbf{1})$ μπορούμε από τις εξισώσεις (2.15) και (2.16) να υπολογίσουμε τους συντελεστές του μοντέλου άλλα και την διασπορά του λευκού θορύβου. Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί για p -τάξη ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και να προκύψει η εξίσωση Yule-Walker για οποιαδήποτε τάξη μοντέλου.

2.5 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ p -ΤΑΞΗΣ

Παρακάτω θα κάνουμε μια προσπάθεια να γενικεύσουμε τον μοντέλο MAR(1) σε p -τάξης κάνοντας ανάλογους υπολογισμούς, όπου θα υπολογίσουμε τους συντελεστές του μοντέλου και τον πίνακα διασποράς του λευκού θορύβου. Αρχικά, ας ορίσουμε το μοντέλο MAR(p) με έναν εναλλακτικό τρόπο ώστε να μας είναι πιο εύκολη η εύρεση των συντελεστών.

$$\begin{aligned} x_t &= v + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \dots + A_p x_{t-p} + u_t \Rightarrow \text{βρίσκω τον μέσο} \\ \Rightarrow E(x_t - v) &= A_1 E(x_{t-1}) + A_2 E(x_{t-2}) + \dots + A_p E(x_{t-p}) + E(u_t) \quad (2.17) \\ \Rightarrow \mu - v &= A_1 \mu + A_2 \mu + \dots + A_p \mu + 0 \\ \Rightarrow \mu &= v[I - A_1 - A_2 - \dots - A_p]^{-1} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα v στην αρχική διατύπωση 2.1 του MAR(p) καταλήγουμε στην έκφραση :

$$\dot{x}_t = \sum_{i=1}^p A_i \dot{x}_{t-i} + u_t \quad (2.18)$$

Όπου $\dot{x}_t = x_t - \mu$. Για να υπολογίσουμε την εξίσωση Yule-Walker, αρχικά βρίσκουμε τον πίνακα διακύμανσης του μοντέλου.

$$\begin{aligned} \Gamma(\kappa) &= E(\dot{x}_t \dot{x}_{t+\kappa}') \xleftrightarrow{t \rightarrow t-k} \Gamma(\kappa) = E(\dot{x}_{t-k} \dot{x}_t') \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma(\kappa) &= E\left(\dot{x}_{t-k} \left(\sum_{i=1}^p A_i' \dot{x}_{t-i}'\right)\right) + E(\dot{x}_{t-k} u_t') \quad (2.19) \end{aligned}$$

Την παραπάνω εξίσωση (2.19) την ονομάζουμε Yule-Walker για το διανυσματικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο που μπορούμε να το γράψουμε με την μορφή πίνακα για $\kappa \geq 1$ για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του μοντέλου.

$$\begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1)' & \Gamma(2)' & \dots & \Gamma(p-1)' \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \Gamma(1)' & \ddots & \Gamma(p-2)' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(p-1) & \Gamma(p-2) & \Gamma(p-3) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_p' \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

και για $\kappa=0$ υπολογίζουμε τον πίνακα διασποράς του λευκού θορύβου:

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \sum_{i=1}^p \Gamma(-i)A_i' + \Sigma \Leftrightarrow \\ \Sigma &= \Gamma(0) - \sum_{i=1}^p \Gamma(-i)A_i' \end{aligned} \quad (2.21)$$

Επίσης, μπορούμε τις παραπάνω εξισώσεις (2.20)-(2.21) να τις γράψουμε πιο κομψά αν θέσουμε όπου Γ_p τον πίνακα των διακυμάνσεων $[p \times p]$, $\Gamma_{(p)}$ διάνυσμα των διακυμάνσεων $[1 \times p]$ και A το διάνυσμα των συντελεστών $[1 \times p]$. Επομένως, η εξίσωση Yule-Walker γράφεται:

$$\Gamma_{(p)} = \Gamma_p A \Leftrightarrow \boxed{A = \Gamma_p^{-1} \Gamma_{(p)}} \quad (2.22)$$

και ο πίνακας διασποράς του λευκού θορύβου γράφεται εναλλακτικά ως :

$$\Sigma = \Gamma(0) - \Gamma_{(p)}' A \Rightarrow \boxed{\Sigma = \Gamma(0) - \Gamma_{(p)}' \Gamma_p^{-1} \Gamma_{(p)}} \quad (2.23)$$

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις έχουν λύση με γνωστή την συνάρτηση διακύμανσης των δεδομένων της διαδικασίας. Την συνάρτηση της διακύμανσης μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με την δειγματική συνάρτηση διακύμανσης η οποία παράγεται από τα δεδομένα και να κάνουμε μια εκτίμηση των συντελεστών του πίνακα διασποράς. Ως δειγματική συνάρτηση διακύμανσης ορίζουμε :

$$\hat{\Gamma}(\kappa) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\kappa} (x_{t-\kappa} - \bar{x})(x_t + \bar{x})' \text{ για } \kappa \geq 0 \quad (2.24)$$

Όπου $\bar{x}$ είναι ο μέσος των δεδομένων και ορίζεται ως $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t)$.

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε με έναν απλό τρόπο τις εκτιμητές τιμές των συντελεστών του μοντέλου $\hat{\mathbf{A}}$ και του πίνακα διασποράς $\hat{\Sigma}$ εντοπίζοντας την δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (σχέση 2.24) και ύστερα από αντικατάσταση στις (σχέσεις 2.22-2.23) να υπολογίσουμε τους πίνακες $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\Sigma}$. Η παραπάνω μέθοδος εύρεσης συντελεστών ονομάζεται Yule-Walker και για να κάνουμε πιο γρήγορους και ακριβείς υπολογισμούς χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin.

Επίσης, πέρα από την μέθοδο Yule-Walker, μπορούμε να υπολογίσουμε του συντελεστές του μοντέλου και τον πίνακα διασποράς με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (LeastSquares) αλλά και με την μέθοδο Burg.

2.6 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

2.6.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (least squares)

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων προσομοιάζει ένα σύνολο δεδομένων με ένα μαθηματικό μοντέλο. Στην περίπτωση μας, που θέλουμε τα δεδομένα μας να περιγράφονται από ένα αυτοπαλινδρομικό μοντέλο, η μέθοδος αυτή προσεγγίζει του συντελεστές του μοντέλου, καθώς επίσης και τον πίνακα διασποράς.

Το νόημα της μεθόδου είναι ότι προσδιορίζει με τον καλύτερο τρόπο το μοντέλο ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων της διαφοράς ανάμεσα στις πραγματικές και τις εκτιμητές τιμές.

Το υπόλοιπο (residuals) ανάμεσα στην πραγματική τιμή και την εκτιμητέα το γράφουμε ως:

$$R_t = x_t - \sum_{i=1}^p A_i x_{t-i} \quad (2.25)$$

και το άθροισμα των τετραγώνων του υπολοίπου ως:

$$S(A) = \sum_{i=1}^T R_i^2 \quad (2.26)$$

Τέλος, η ελαχιστοποίηση του παραπάνω αθροίσματος ισούται με τον εκτιμητή των συντελεστών του μοντέλου.

$$\hat{\mathbf{A}} = \operatorname{argmin}(S(A)) \quad (2.27)$$

Ο καλύτερος δυνατός εκτιμητής των συντελεστών που υπολογίστηκε είναι [H.Lutkepohl, 2006]:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{x}_t \mathbf{Z} (\mathbf{Z} \mathbf{Z}')^{-1} \quad (2.28)$$

όπου $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_{T-1})$ και $\mathbf{Z}_t = [\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-p}]'$

Ο Yule-Walker εκτιμητής προσδιορίζει τους συντελεστές του MAR μοντέλου στα πλαίσια της ευστάθειας. Με άλλα λόγια, η εκτιμητέα διαδικασία είναι πάντα ευσταθής. Παρόλο το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, στην πραγματικότητα δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν μια διαδικασία είναι στάσιμη ή όχι κι έτσι ο εκτιμητής Yule-Walker αποκλίνει από την πραγματική διαδικασία. Πολλές φορές είναι κακή στρατηγική να επιβάλουμε την ευστάθεια σε μια διαδικασία. Έτσι, για μια μη ευσταθή διαδικασία η LS μέθοδος προτιμάται από την YW διότι δεν προϋποθέτει στασιμότητα της διαδικασίας [Reinsel, 1993]

2.6.2 Μέθοδος Burg

Η μέθοδος Burg είναι η πιο διαδομένη για την εκτίμηση συντελεστών. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες δυο μεθόδους που περιγράψαμε, δεν εντοπίζει άμεσα τους συντελεστές του μοντέλου, αλλά χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και του αλγόριθμου Levinson-Durbin τον οποίο τροποποιεί έτσι ώστε να έχουμε το ελάχιστο υπόλοιπο ανάμεσα σε πραγματική και εκτιμητέα τιμή. Σε αυτήν, δηλαδή, την μέθοδο βρίσκουμε το ελάχιστο άθροισμα των τετραγωνικών υπόλοιπων των δειγματικών συναρτήσεων της διακύμανσης και της μερική διακύμανσης όπου εντοπίζουμε τους συντελεστές για κάθε μια από τις συναρτήσεις και στην συνέχεια εντοπίζουμε τις εκτεινόμενες τιμές του μοντέλου.

Εν συντομία, ο αλγόριθμος που υπολογίζει του συντελεστές του αυτοπαλινδρομικού μοντέλου εξελίσσεται ως εξής [Burg, 1968; Childers, 1978]:

Βήμα 1.

- Εντοπίζω το σφάλμα διασποράς $\sigma_u^2(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} [x_t x_t']$
- Εντοπίζω τα σφάλματα του εμπρόσθιου u_t (forward) κα οπισθοδρομικού b_{t-1} (backward) μοντέλου

$$u_t(0) = x_t \quad (2.29)$$

$$b_{t-1}(0) = x_{t-1} \quad (2.30)$$

Βήμα 2.

- Υπολογίζω τις reflections παραμέτρους

$$\pi_m = -2 \frac{\sum_{n=m}^{N-1} b_{n-1}(m-1) u_n(m-1)}{\sum_{n=m}^{N-1} [b_{n-1}(m-1) b'_{n-1}(m-1) + u_n(m-1) u'_n(m-1)]} \quad (2.31)$$

- Βρίσκω το νέο σφάλμα διασποράς

$$\sigma_u^2(m) = [1 - \pi_m^2] \sigma_u^2(m-1) \quad (2.32)$$

Βήμα 3.

- Υπολογισμός των συντελεστών του AR μοντέλου

$$A_k(m) = \begin{cases} A_k(m-1) + \pi_m A_{m-k}(m-1), & m > 1 \\ \pi_m = A_m(m), & m = 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

- Νέος υπολογισμός των σφαλμάτων

$$u_n(m) = u_n(m-1) + \pi_m b_{n-1}(m-1) \quad (2.32)$$

$$b_n(m) = b_{n-1}(m-1) + \pi_m u_n(m-1) \quad (2.33)$$

Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 ανάλογα με την τάξη του μοντέλου που επιθυμούμε να υπολογίσουμε.

2.7 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ως γνωστόν, για ένα MAR μοντέλο οι συντελεστές του έχουν εκτιμηθεί από τις μεθόδους που έχουμε περιγράψει στην προηγούμενη παράγραφο. Παρόλο που θέλουμε να έχουμε την καλύτερη δυνατή εκτίμηση των συντελεστών, εμείς ενδιαφερόμαστε περισσότερο για την καλύτερη προσομοίωση του μοντέλου ώστε να έχουμε μια καλή πρόβλεψη. Μια καλή πρόβλεψη δεν είναι ανάλογη με την τάξη μοντέλου. Εμείς επιθυμούμε την καλύτερη δυνατή τάξη μοντέλου ώστε να έχουμε το ελάχιστο σφάλμα πρόβλεψης. Την απάντηση αυτή μπορεί να μας τη δώσουν τα κριτήρια επιλογής τάξης, μερικά εκ των οποίων είναι 1) AIC (Akaike's Information Criterion) [Akaike, 1974] 2) HQ (Hannan and Quinn) [Hannan and Quinn, 1979] 3) BSC (Bayesian Schwarz Criterion) [Schwarz, 1978].

Κριτήρια	Σχέσεις
Akaike's Information Criterion	$AIC(p) = \ln \hat{\Sigma}(p) + \frac{2pM^2}{T}$
Hannan& Quinn	$HQ(p) = \ln \hat{\Sigma}(p) + \frac{2\ln\ln T}{T} pM^2$
Bayesian Schwarz Criterion	$BSC(p) = \ln \hat{\Sigma}(p) + \frac{2\ln T}{T} pM^2$

όπου T είναι το μέγεθος του δείγματος, M είναι η διάσταση του μοντέλου και $|\hat{\Sigma}(p)|$ ο εκτιμητέος πίνακας διασποράς λευκού θορύβου. Η τάξη- p του μοντέλου εντοπίζεται στο ελάχιστο των παραπάνω κριτηρίων.

Για να γίνει η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη τάξης μοντέλου πρέπει να επιλέξουμε και το κατάλληλο μοντέλο. Το μοντέλο AIC είναι ιδανικό όταν έχουμε ένα μικρό δείγμα ($T < 16$), ωστόσο μπορούμε να βελτιώσουμε την πρόβλεψη κατά AIC και σε μεγαλύτερα δείγματα έχοντας τις κατάλληλες συνθήκες [Shibata, 1980]. Παρόλα αυτά, για μεγάλα δείγματα είναι προτιμότερη η επιλογή των κριτηρίων HQ ή BSC και αυτό είναι απόρροια του ότι είναι πλήρη (consistent) κριτήρια, δηλαδή $\lim_{T \rightarrow \infty} \Pr(P_{cor} = P_{sel}) = 1$, το οποίο δεν ισχύει για το AIC.

Για την ανάλυση EEG σημάτων συνίσταται η χρήση του AIC κριτηρίου, διότι είναι πιο ξεκάθαρο ποια είναι η κατάλληλη τάξη του μοντέλου. Επίσης, μπορούμε να πούμε εμπειρικά ότι η τάξη των EEG είναι $1 < p < 30$ και στο 80% των περιπτώσεων η προτεινόμενη τάξη είναι μικρότερη του 14. Τέλος, επειδή πολλές φορές κανένα από τα κριτήρια δεν είναι σε θέση να μας δώσει μια σαφή εικόνα για το ποια είναι η κατάλληλη τάξη του μοντέλου, μπορούμε να κάνουμε την ανάλυση των EEG σημάτων με μη-παραμετρική μέθοδο [Dhamala, 2008], όπου ξεπερνάμε τα προβλήματα επιλογής παραμέτρων του μοντέλου αλλά και η έχουμε καλύτερη εκτίμηση αυτών.

2.8 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Τα υπό επεξεργασία σήματα (EEG) είναι δοσμένα στο χρονικό πεδίο και στην συνέχεια τα προσομοιώνουμε με ένα μοντέλο, που στην περίπτωση μας είναι MAR μοντέλο. Μας ενδιαφέρει, όμως, να κάνουμε μια ανάλυση του σήματος και στο χώρο των συχνοτήτων ώστε να εξάγουμε όσο πιο πολλές πληροφορίες αφορούν το δίκτυο του εγκεφάλου (coherence, granger causality, PDC, DTF). Προφανώς, η αλλαγή από το πεδίο του χρόνου στις συχνότητες θα πραγματοποιηθεί με ένα μετασχηματισμό Fourier στο MAR μοντέλο.

Χωρίς να χάσουμε καμιά πληροφορία από το μοντέλο μας, μπορούμε να το γράψουμε :

$$u_t = \sum_{i=0}^p A_i x_{t-i} \quad (2.34)$$

Με $A_0 = I$ και $A_i = -A_i$ για $i = 1, 2, \dots, p$. Κάνοντας τον μετασχηματισμό Fourier στην παραπάνω σχέση παίρνουμε το μοντέλο στο χώρο των συχνοτήτων.

$$U(f) = A(f)X(f) \quad (2.35)$$

$$A(f) = \sum_{t=0}^p A(t)e^{-\frac{j2\pi t f}{p}} \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow X(f) = A^{-1}(f)U(f) \Rightarrow X(f) = H(f)U(f) \quad (2.37)$$

όπου ο πίνακας $H(f)$ ονομάζεται πίνακας μεταφοράς του συστήματος και $U(f)$ είναι ο μετασχηματισμός του πίνακα λευκού θορύβου. Όμως, το μέγεθος το οποίο θα μας απασχολήσει είναι πυκνότητα συχνοτήτων, δηλαδή η ενέργεια του $X(f)$, η οποία ορίζεται ως:

$$S(f) = |X(f)|^2 = H(f)U(f)U^*(f)H^*(f) \Rightarrow$$

$$\boxed{S(f) = H(f)\Sigma(f)H^*(f)} \quad (2.38)$$

όπου $\Sigma(f)$ είναι ο πίνακας διασποράς του λευκού θορύβου στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η πυκνότητα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για την ανάλυση EEG σήματος, καθώς και για την μελέτη κάποιων ενδιαφερόντων μεγεθών, όπως είναι η αιτιότητα των επιμέρους EEG σημάτων, η ροή πληροφοριών σε ένα νευρώνα, η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ των νευρώνων, κ.α. Επίσης, από την πυκνότητα συχνοτήτων μπορούμε να αναπτύξουμε την μη παραμετρική μέθοδο ανάλυσης σημάτων EEG, όπου έχουμε καλύτερη εικόνα στην κατά Granger αιτιότητα.

2.9 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΣΤΑΣΙΜΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Τα EEG σήματα, όπως και κάθε είδος νευρικών σημάτων, είναι μη στάσιμες διαδικασίες, δηλαδή ο μέσος και η διακύμανση τους είναι εξαρτημένα από τον χρόνο. Συνεπώς, τα συγκεκριμένα σήματα δεν μπορούν να προσομοιωθούν με ένα γραμμικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο. Η διαδικασία που συνίσταται για την προσομοίωση των EEG σημάτων είναι να μετατρέψουμε το μη στάσιμο σήμα σε στάσιμο και όχι να χρησιμοποιήσουμε ένα μη γραμμικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο.

Τα περισσότερα μεγέθη (Granger causality, coherence) που μας ενδιαφέρουν στην ανάλυση νευρικών σημάτων είναι εκφρασμένα στο πεδίο των συχνοτήτων, αλλά, επειδή χρειαζόμαστε και την πληροφορία στο πεδίο του χρόνου, οι τρόποι μετατροπής είναι η παραθυροποίηση [Ding et al., 2000] και η ανάλυση κατά Wavelet [Dhamala et al., 2008].

Κατά την παραθυροποίηση χωρίζουμε το μη στάσιμο σήμα σε μικρά παράθυρα έτσι ώστε να διατηρείται η στασιμότητα στα επιμέρους παράθυρα. Σε κάθε κομμάτι του σήματος κάνουμε και την ανάλογη ανάλυση των στάσιμων σημάτων αφού πρώτα γίνει έλεγχος της στασιμότητας με το κριτήριο που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου. Επίσης, για να βεβαιωθούμε ότι το διαιρούμενο σήμα είναι στάσιμο, βρίσκουμε τον συνολικό μέσο των καναλιών και τον διαιρούμε με την αντίστοιχη συνολική απόκλιση. Έτσι, βελτιώνουμε σημαντικά την τοπική στασιμότητα των δεδομένων [Ding et al., 2000]. Τέλος, επειδή μας ενδιαφέρει η μελέτη του σήματος να γίνει και στο χρονικό πεδίο αυξάνουμε την αλληλοεπικάλυψη των παραθύρων με αποτέλεσμα να έχουμε μια τελική ανάλυση του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

Ο δεύτερος τρόπος μετατροπής μια μη στάσιμης διαδικασίας σε στάσιμη είναι η ανάπτυξη του μετασχηματισμού Wavelet στα δεδομένα. Από τον μετασχηματισμό Wavelet παίρνουμε μια ανάλυση στο πεδίο του χρόνου t και της κλίμακας a , δηλαδή μια συνάρτηση $W(t,a)$. Η κλίμακα a έχει άμεση εξάρτηση με το πεδίο των συχνοτήτων. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι κάνοντας μια ανάλυση κατά Wavelet αποκομίζουμε πληροφορίες στο πεδίο του χρόνου αλλά και της συχνότητας. Η μιγαδική Morlet Wavelet συνάρτηση απεικονίζεται καλύτερα με τα μη στάσιμα και EEG σήματα [Shiff et al., 1994], λόγω του ημιτονοειδούς σχήματός της

και ορίζεται ως $\psi(\eta) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 \eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}}$ όπου η είναι η χρονική ανάλυση και επιλεγούμε κεντρική συχνότητα $\omega_0 \geq 6$ [Torrence and Compo, 1998]. Όσο υψηλότερη είναι η κεντρική συχνότητα τόσο καλύτερη ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε, αλλά χάνουμε στο πεδίο του χρόνου.

Κεφάλαιο 3

*GRANGER
ΑΙΤΙΟΤΗΤΑ*

ΣΚΟΠΟΣ

Σκοπός του κεφαλαίου είναι μια εισαγωγή της Granger αιτιότητας μεταξύ δυο ή περισσότερων στοχαστικών διαδικασιών. Αρχικά, θα γίνει μια αναφορά της Granger αιτιότητας στον χώρο του χρόνου ώστε να συνεχίσουμε με την ερμηνεία της αιτιότητας στο πεδίο των συχνοτήτων. Αφού γίνει μια εισαγωγή της παραμετρική μεθόδου για την εύρεση της αιτιότητας, θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην μελέτη της Granger αιτιότητας με την μη παραμετρική μέθοδο. Τέλος, θα υπάρχει μια σύγκριση των δυο μεθόδων με ένα παράδειγμα όπου θα δούμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα τους για ό,τι αφορά στην εύρεση της Granger αιτιότητας.

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αρχικά, η αιτιότητα μεταξύ δυο στοχαστικών διαδικασιών έγινε από τον Wiener το 1956 σε θεωρητικό επίπεδο. Το 1969 ο Clive Granger μοντελοποίησε την υπόθεση του Wiener και μπόρεσε να μετρήσει την αιτιότητα που στην συνέχεια ονομάστηκε Granger αιτιότητα. Η επινόηση της αιτιότητας από τον Granger αρχικά έγινε για την μελέτη οικονομικών μεγεθών, αλλά στην συνέχεια βρέθηκε στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος από άλλους κλάδους επιστημών. Εμείς θα εστιάσουμε στον κλάδο της νευροεπιστήμης, όπου θα γίνει μια εκτενής μελέτη του νευρικού συστήματος του ανθρώπινου εγκεφάλου και της επικοινωνίας μεταξύ των νευρώνων από διάφορα σημεία του εγκεφάλου. Η μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης των νευρώνων είναι βασισμένη στην Granger αιτιότητα, που στην πραγματικότητα είναι ένα στατιστικό εργαλείο που δίνει μια αριθμητική απάντηση στο κατά πόσο αλληλοεπηρεάζονται μεταξύ τους οι νευρώνες. Η Granger αιτιότητα βασίζεται στην θεωρία της γραμμικής πρόβλεψης, γι' αυτό απαιτείται τα δεδομένα να μοντελοποιηθούν από ένα γραμμικό σύστημα, όπως είναι αυτό του αυτοπαλινδρομικού (AR model) και να υπολογιστεί η Granger αιτιότητα με την παραμετρική μέθοδο. Παρόλα αυτά, με την παραμετρική μέθοδο συναντάμε κάποιες δυσκολίες για ό,τι αφορά την ακρίβεια υπολογισμού της Granger αιτιότητας, διότι υπάρχει η αβεβαιότητα για την τάξη του μοντέλου, αλλά και ανικανότητα να προσομοιάσουμε τα δεδομένα άμεσα στον χώρο των συχνοτήτων. Για να αποφύγουμε αυτά τα προβλήματα μπορούμε να υπολογίσουμε την Granger αιτιότητα από την βάση του Fourier μετασχηματισμού ή του συνεχούς μετασχηματισμού wavelet με την μη παραμετρική μέθοδο. Το πρόβλημα που συναντάμε στον υπολογισμό της Granger αιτιότητας θα ξεπεραστεί με την παραγοντοποίηση του φασματικού πίνακα και τελικά θα έχουμε μια καλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της αιτιότητας. Γι' αυτό θα αρχίσουμε με την ανάδειξη της Granger αιτιότητας με την παραμετρική μέθοδο προσομοιώνοντάς την με χρονοσειρές και τέλος θα αναπτύξουμε την μη παραμετρική μέθοδο, όπου θα δούμε και τις μεταξύ τους διαφορές.

3.2 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ GRANGER ΑΙΤΙΟΤΗΤΑΣ

3.2.1. Ανάλυση στο πεδίο του χρόνου

Με την παραμετρική μέθοδο μετράμε την Granger αιτιότητα ή την κατευθυντήρια επιρροή μεταξύ των χρονοσειρών. Στην προκειμένη περίπτωση, για να απλοποιήσουμε την ερμηνεία της Granger αιτιότητας θα αναφέρουμε την επιρροή μεταξύ δυο χρονοσειρών

$X_1: x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,t}$ και $X_2: x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,t}$. Ο ορισμός που είχε δώσει ο Granger το 1969 ανέφερε ότι, εάν η σειρά X_2 περιέχει πληροφορίες που βοηθούν στην πρόβλεψη του X_1 και

οι πληροφορίες δεν περιέχονται σε οποιαδήποτε άλλη σειρά πρόβλεψης, τότε λέμε ότι X_2 προκαλεί την X_1 . Μαθηματικά μπορούμε να γράψουμε τον ορισμό της Granger αιτιότητας ως [Granger, 1969; Geweke, 1982; Geweke, 1984]:

$$x_{1,t} = \sum_{j=1}^p A_{11}x_{1,t-j} + \sum_{j=1}^p A_{12}x_{2,t-j} + E_{1,t}x_{1,t} = \sum_{j=1}^p A_{11}x_{1,t-j} + \sum_{j=1}^p A_{12}x_{2,t-j} + E_{1,t} \quad (3.1)$$

$$x_{2,t} = \sum_{j=1}^p A_{21}x_{1,t-j} + \sum_{j=1}^p A_{22}x_{2,t-j} + E_{2,t}x_{2,t} = \sum_{j=1}^p A_{21}x_{1,t-j} + \sum_{j=1}^p A_{22}x_{2,t-j} + E_{2,t} \quad (3.2)$$

όπου οι παραπάνω εξισώσεις είναι πανομοιότυπα ορισμένες με αυτές ενός διμεταβλητού αυτοπαλινδρομικού μοντέλου. Τα $E_{1,t}$ και $E_{2,t}$ είναι τα σφάλματα πρόβλεψης και $A_{i,j}$ για $i, j = 1, 2$ είναι οι συντελεστές του μοντέλου. Στην γενική περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε τις δυο στοχαστικές διαδικασίες σε ένα μονομερές αυτοπαλινδρομικό μοντέλο που γράφεται:

$$x_{1,t} = \sum_{j=1}^p B_j x_{1,t-j} + e_{1,t} \quad (3.3)$$

$$x_{2,t} = \sum_{j=1}^p C_j x_{2,t-j} + e_{2,t} \quad (3.4)$$

Τα $e_{1,t}$ και $e_{2,t}$ είναι τα σφάλματα πρόβλεψης και B_j, C_j είναι οι συντελεστές του AR μοντέλου. Οι παραπάνω μεταβλητές (συντελεστές μοντέλου και σφάλματα πρόβλεψης) στο διμεταβλητό και μονομερές μοντέλο εκτιμούνται με τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (Yule-Walker, Berg, ελαχίστων τετραγώνων). Η τάξη του μοντέλου εντοπίζεται από το κριτήριο του Akaike [Akaike, 1974]. Μέτα την εκτίμηση των συντελεστών των δυο εκφράσεων των από μέρους καναλιών X_1 και X_2 , αν $Var(E_1) < Var(e_1)$, τότε θα λέμε ότι το X_2 προκαλεί το X_1 και αντίστροφα αν $Var(E_2) < Var(e_2)$, το X_1 προκαλεί το X_2 .

Ορίζουμε ως την γραμμική αιτιότητα μεταξύ των στοχαστικών διαδικασιών X_1 και X_2 στο πεδίο του χρόνου ως [Geweke, 1984] :

$$F_{x_2 \rightarrow x_1} = \ln \frac{|Var(e_1)|}{|Var(E_1)|} \quad (3.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει κάποιες ιδιότητες που είναι χρήσιμες να αναφερθούν [Geweke, 1984]. Πρώτον, η παραπάνω ποσότητα παίρνει μη αρνητικές τιμές που σημαίνει ότι θα έχουμε μια επιρροή του X_2 στο X_1 αν οι τιμές της αιτιότητας είναι μεγαλύτερες από τον μηδέν. Δεύτερον, αν $Var(E_1) = Var(e_1)$ τότε λέμε ότι η X_2 δεν προκαλεί την X_1 και η τιμή της ποσότητα που μετράει την αιτιότητα είναι μηδέν ($F_{x_2 \rightarrow x_1} = 0$). Τρίτον, η ποσότητα της γραμμικής αιτιότητας είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα, δηλαδή, αν παραδείγματος χάρη πολλαπλασιάσουμε της

X_2 και X_1 με ένα γραμμικό τελεστή τότε η αιτιότητα των εν λόγω στοχαστικών διαδικασιών παραμένει σταθερή. Σαφώς, η παραπάνω σχέση ισχύει και όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την αιτιότητα του X_1 στο X_2 αντικαθιστώντας τα σφάλματα πρόβλεψης και διατηρούνται οι παραπάνω ιδιότητες.

Επίσης σημαντικό να αναφερθεί είναι η δεσμευμένη Granger αιτιότητα [Geweke, 1982]. Η δεσμευμένη αιτιότητα εντοπίζεται μεταξύ τριών ή περισσότερων στοχαστικών διαδικασιών και στην ουσία εντοπίζουμε την αιτιότητα μεταξύ δυο στοχαστικών διαδικασιών έχοντας εν γνώσει την εναπομένοντα διαδικασία.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε τρεις στοχαστικές διαδικασίες X_1, X_2 και X_3 η οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα της στασιμότητας με μέσο μηδέν και ότι η X_2 προκαλεί την X_1 δεδομένου της X_3 τότε σύμφωνα με τον ορισμό του Granger το μοντέλο πρόβλεψης της διαδικασίας X_1 γράφεται:

$$x_{1,t} = \sum_{j=1}^p c_{11}x_{1,t-j} + \sum_{j=1}^p c_{12}x_{2,t-j} + \sum_{j=1}^p c_{13}x_{3,t-j} + E_{3,t} \quad (3.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας περιγράφει το πλήρες μοντέλο που μας δίνει όλη την πληροφορία για την πρόβλεψη του X_1 όπου θα το συγκρίνουμε με το μονομερές μοντέλο που περιγράφει την X_1 το οποίο γράφεται:

$$x_{1,t} = \sum_{j=1}^p D_{11}x_{1,t-j} + \sum_{j=1}^p D_{13}x_{3,t-j} + e_{3,t} \quad (3.7)$$

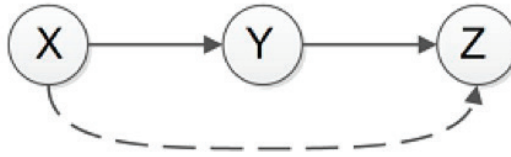
Έχοντας εκτίμηση όλες τις παραμέτρους των δύο μοντέλων μπορούμε να ορίσουμε την Granger αιτιότητα από τη X_2 στην X_1 δεδομένου την X_3 στο πεδίο του χρόνου.

$$F_{x_2 \rightarrow x_1 | x_3} = \ln \frac{|Var(e_3)|}{|Var(E_3)|} \quad (3.8)$$

Στην ουσία, οι δυο σχέσεις που αφορούν την αιτιότητα η μια κατά ζεύγη και η άλλη κατά δέσμευση εκφράζονται από το πηλίκο της διασποράς του σφάλματος πρόβλεψης των δυο σχέσεων που αφορούν την μοντελοποίηση των δύο στοχαστικών διαδικασιών. Όμως η διαφοροποίηση των σχέσεων βρίσκεται στα μοντέλα πρόβλεψης όπου για την δεσμευμένη αιτιότητα προσθέτουμε και στα δυο μοντέλα που περιγράφουν μια στοχαστική διαδικασία την επιπλέον πληροφορία της δέσμευσης που επιθυμούμε να κάνουμε.

Όμως η κεντρική διαφορά των δυο σχέσεων βρίσκεται στο ότι η αιτιότητα κατά ζεύγη μπορεί και εντοπίζει όλων των ειδών τις επιρροές που προκαλούνται στο σύστημα δηλ. έμμεσες και άμεσες ενώ στην δεσμευμένη αιτιότητα εντοπίζεται μόνο την άμεση επιρροή που υπάρξει αναμεταξύ δυο καναλιών και να μηδενίζεται στην περίπτωση της έμμεσης επιρροής μεταξύ δυο στοχαστικών διαδικασιών.

Η παραπάνω διαφορά παρουσιάζεται με ένα παράδειγμα τριών στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών X, Y και Z όπου η X προκαλεί την Y (άμεση αιτιότητα), η Y προκαλεί την Z οπότε η X οδηγεί την Z διαμέσου της Y (έμμεση αιτιότητα) εικόνα 3.1.



Εικόνα 3.1 Τρεις στοχαστικές διαδικασίες X, Y και Z όπου η X προκαλεί άμεσα την Y (συνεχές βέλος), η Y προκαλεί την Z με τον ίδιο τρόπο, ως συνέπεια η X να προκαλεί την Z έμμεσα (διακεκομμένο βέλος).

Αν για το παραπάνω παράδειγμα εφαρμόσουμε την Granger αιτιότητα κατά ζεύγη θα πάρουμε κάποια θετική τιμή για κάθε μια από τις επιρροές, δηλαδή, θα εντοπίσουμε αιτιότητα από το X στο Y , από το Y στο Z και από το X στο Z . Κατά συνέπεια δεν είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε πια είναι η άμεση (συμπαγές βέλος) και η έμμεση (διακεκομμένο βέλος) αιτιότητα του συστήματος. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με την δεσμευμένη Granger αιτιότητα. Υπολογίζοντας την δεσμευμένη αιτιότητα από την X στην Z δεδομένου την Y παίρνουμε ένα μηδενικό αποτέλεσμα που σημαίνει ότι η τιμή που πήραμε από την αιτιότητα κατά ζεύγη μεταξύ του X στο Z είναι μια έμμεση αιτιότητα οπότε καταλήγουμε στις ορθές αιτιότητες του συστήματος.

3.2.2 Ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων

Ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της αιτιότητας μεταξύ των νευρώνων είναι η ανάπτυξη της Granger αιτιότητας στο πεδίο των συχνοτήτων [Geweke, 1982]. Για να δείξουμε την αιτιότητα στον χώρο των συχνοτήτων γράφουμε τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) σε μορφή πινάκων με την βοήθεια του backward τελεστή $L: L^j x_t = x_{t-j}$ και η μετατροπή γίνεται ως :

$$\left(1 - \sum_{j=1}^P b_{11,j} L^j\right) x_{1,t} - \sum_{j=1}^P b_{12,j} L^j x_{2,t} = E_{1,t} \quad (3.9)$$

$$-\sum_{j=1}^P b_{21,j} L^j x_{1,t} + \left(1 - \sum_{j=1}^P b_{22,j} L^j\right) x_{2,t} = E_{2,t} \quad (3.10)$$

Όποτε προκύπτει το σύστημα πινάκων αν θέσουμε $B_{ij}(L) = \delta_{i,j} - \sum_{k=1}^P b_{i,j,k} L^k$ για $i, j = 1, 2$ και δ το δελτα του Kronecker .

$$\begin{bmatrix} B_{11}(L) & B_{12}(L) \\ B_{21}(L) & B_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1,t} \\ E_{2,t} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Τώρα αν θέσουμε τον πίνακα $B_{ij}(L)^{-1} = H(L)$ στο σύστημα (3.9) και ταυτόχρονα εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό Fourier σε κάθε στοιχείο των πινάκων παίρνουμε την εξής έκφραση της (3.9)

$$\begin{bmatrix} x_1(f) \\ x_2(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(f) & B_{12}(f) \\ B_{21}(f) & B_{22}(f) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_1(f) \\ E_2(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(f) \\ E_2(f) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό της αιτιότητας στο χώρο των συχνοτήτων το κάνουμε βρίσκοντας την ενέργεια των καναλιών ώστε να παράγουμε την διασπορά του σφάλματος προβλέψεις ώστε να κάνουμε την σύγκριση με την σχέση αιτιότητα στο χώρο του χρόνου εξ. (3.8). Για να υπολογίσουμε την ενέργεια των καναλιών ή αλλιώς τον πίνακα φασματικής πυκνότητας πολλαπλασιάζουμε την (3.12) με την αναστροφосуζυγής του συστήματος.

Με αποτέλεσμα να πάρουμε την έκφραση της φασματικής πυκνότητας που γράφεται ως :

$$\begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{var}(E_1) & \text{cov}(E_1 E_2) \\ \text{cov}(E_1 E_2) & \text{var}(E_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}(f) & H_{21}(f) \\ H_{12}(f) & H_{22}(f) \end{bmatrix}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S(f) = H(f) \Sigma H(f)^*} \quad (3.13)$$

Όπου η παραπάνω έκφραση της φασματικής πυκνότητας $S(f)$ ισούται με το γινόμενο του πίνακα μεταφοράς $H(f)$ με τον πίνακα σφάλματος που το $\Sigma_{11} = \text{var}(E_1)$, $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \text{cov}(E_1 E_2)$ και $\Sigma_{22} = \text{var}(E_2)$. Τα διαγώνια στοιχεία του φασματικού πίνακα εντοπίζουν την επιρροή που έχουν μεταξύ τους τα X_1 και X_2 , αν εξετάσουμε την περίπτωση όπου το X_2 προκαλεί το X_1 τότε η αιτιότητα θα προκύψει από το πρώτο στοιχείο του πίνακα S το οποίο ισούται : $S_{11} = H_{11} \Sigma_{11} H_{11}^* + \Sigma_{12} (H_{12} H_{11}^* + (H_{12} H_{11}^*)^*) + H_{12} \Sigma_{22} H_{12}^*$. Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται η ενέργεια του X_1 από τον παράγοντα $H_{11} \Sigma_{11} H_{11}^*$ άλλα δεν εντοπίζεται ξεκάθαρα ο παράγοντας που αναδεικνύει την ενέργεια αιτιότητα του X_2 στο X_1 . Για την επίλυση του προβλήματος [Geweke, 1984] πραγματοποιείται κανονικοποίηση πολλαπλασιάζοντας το σύστημα (3.11) από τα αριστερά με τον πίνακα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Sigma_{12}/\Sigma_{11} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Που τελικά το διαγώνιο στοιχείο S_{11} του πίνακα της φασματικής πυκνότητας ισούνται

$$\text{με } S_{11} = \tilde{H}(f)_{11} \Sigma_{12} \tilde{H}^*(f)_{11} + H(f)_{12} \tilde{\Sigma}(f)_{22} H^*(f)_{12}, \text{ όπου } \tilde{H}_{11}(f) = H_{11}(f) + \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}} H_{12}(f)$$

και $\tilde{\Sigma}_{22} = \Sigma_{22} - \frac{\Sigma_{12}^2}{\Sigma_{11}}$. Από την παραπάνω μορφή του στοιχείου S_{11} διακρίνεται η εσωτερική ενέργεια του X_1 από τον παράγοντα $\tilde{H}(f)_{11} \Sigma_{12} \tilde{H}^*(f)_{11}$ και οι ενέργεια της αιτιότητας του X_2 στο X_1 από το $H(f)_{12} \tilde{\Sigma}(f)_{22} H^*(f)_{12}$ που θα μας βοηθήσει στην ανάπτυξη της αιτιότητας. Συμφώνα από τον ορισμό αιτιότητας που έδωσε ο Geweke για την Granger αιτιότητα του X_2 στο X_1 , ισούται με τον φυσικό λογάριθμο της συνολικής ενέργειας του X_1 προς την εσωτερική ενέργεια του X_1 η αιτιότητα γράφεται ως :

$$I_{x_2 \rightarrow x_1}(f) = \ln \frac{|S_{11}(f)|}{|\tilde{H}(f)_{11} \Sigma_{12} \tilde{H}^*(f)_{11}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{x_2 \rightarrow x_1}(f) = \ln \frac{|S(f)_{11}|}{|S(f)_{11} - [\Sigma_{22} + \frac{\Sigma_{12}^2}{\Sigma_{11}}] |H(f)_{12}|^2|} \quad (3.14)$$

Να σημειώσουμε ότι στον παραπάνω ορισμός της αιτιότητας έχει χρησιμοποιηθεί ο παράγοντας της εσωτερική ενεργεία του X_1 και όχι η ενέργεια αιτιότητας διότι στην περίπτωση που δεν έχουμε αιτιότητα, η ενέργεια αιτιότητας ισούται με μηδέν που σημαίνει ότι η ολική ενέργεια ισούται με την εσωτερική ενέργεια του X_1 , όποτε και ο ορισμό της Granger αιτιότητας σχέση 3.14 είναι μηδέν. Επίσης όσο αυξάνεται η ενέργεια της αιτιότητα μειώνεται η εσωτερική ενέργεια του X_1 οπότε αυξάνεται η Granger αιτιότητα και αντίστροφα.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να εντοπίσουμε την αιτιότητα από το X_1 στο X_2 πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά το σύστημα 3.11 με τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\Sigma_{12}/\Sigma_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

όπου, κάνοντας την ίδια ανάλυση που κάναμε προηγουμένως, καταλήγουμε ότι η αιτιότητα από το X_1 στο X_2 γράφεται :

$$I_{x_1 \rightarrow x_2}(f) = \ln \frac{|S_{22}(f)|}{|\tilde{H}(f)_{22} \Sigma_{12} \tilde{H}^*(f)_{22}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{x_1 \rightarrow x_2}(f) = \ln \frac{|S(f)_{22}|}{|S(f)_{22} - [\Sigma_{11} + \frac{\Sigma_{12}^2}{\Sigma_{22}}] |H(f)_{12}|^2|} \quad (3.16)$$

Όπου $\tilde{H}_{22}(f) = H_{22}(f) + \frac{F_{12}}{F_{22}} H_{12}(f)$.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι αν οι διαδικασίες είναι στάσιμες συμφώνα με το θεώρημα του Geweke μπορούμε να μεταφερθούμε από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου κάτω από τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$F_{x_2 \rightarrow x_1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{x_2 \rightarrow x_1}(f) df \quad (3.17)$$

$$F_{x_1 \rightarrow x_2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{x_1 \rightarrow x_2}(f) df \quad (3.18)$$

Σημαντικό σημείο στην ανάλυση Granger αιτιότητας είναι η εύρεση της δεσμευμένης αιτιότητας που όπως προαναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο είναι ένα εργαλείο κατά το οποίο μπορούμε να διακρίνουμε ποτέ έχουμε άμεση ή έμμεση αιτιότητα στο σύστημα μας.

Η εύρεση της δεσμευμένης αιτιότητας στον χώρο των συχνοτήτων γίνεται με όμοιο τρόπο με αυτό της αιτιότητα κατά ζεύγη. Αρχικά αφού διαμορφώσουμε το μοντέλο πρόβλεψης σε ένα σύστημα πινάκων με την βοήθεια του backward τελεστή L, εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό Fourier και έτσι παίρνουμε το σύστημα μας στον χώρο των συχνοτήτων. Στην συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε το σύστημα μας με το πίνακα κανονικοποίησης και παίρνουμε την συνολική ενέργεια του ενδιαφερόμενου καναλιού με ένα άθροισμα της εσωτερικής ενέργειας και της ενέργειας αιτιότητας. Η δεσμευμένη Granger αιτιότητα μεταξύ των στοχαστικών διαδικασιών X, Y και Z όπου η Y προκαλεί την X δεδομένου την Z γράφεται στο πεδίο των συχνοτήτων ως [Ding, 2004]:

$$I_{Y \rightarrow X|Z}(f) = \ln \frac{|\Sigma_{xx}(X, Z)|}{|Q_{xx}(f) \tilde{\Sigma}_{xx}(X, Y, Z) Q_{xx}^*(f)|} \quad (3.19)$$

Όπου $\Sigma_{xx}(X, Z)$ είναι στοιχείο του πίνακα διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης του περιορισμένου μοντέλου, $Q_{xx}(f)$ είναι το στοιχείο του πίνακα μεταφοράς του κανονικοποιημένου μοντέλου $Q(f) = G^{-1}(f)H(f)$ όπου ο πίνακας $G(f)$ είναι ο πίνακας των τελεστών του περιορισμένου μοντέλου ύστερα από ένα μετασχηματισμό Fourier και ο $H(f)$ είναι ο μετασχηματισμένος πίνακας του πλήρες μοντέλου και τέλος το $\tilde{\Sigma}_{xx}(X, Y, Z)$ είναι στοιχείο του πίνακα σφάλματος του κανονικοποιημένου μοντέλου.

Προφανώς στην εξίσωση 3.19 μπορούμε να αλλάξουμε την κατευθυντικότητα της αιτιότητας όπου ταυτόχρονα αλλάζουμε και τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων που προαναφέραμε προηγουμένως.

Επίσης, μπορούμε να δείξουμε ότι η δεσμευμένη αιτιότητα στον πεδίο των συχνοτήτων σχετίζεται με την δεσμευμένη αιτιότητα στο πεδίο του χρόνου με την σχέση [Ding, 2004]:

$$F_{Y \rightarrow X|Z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{Y \rightarrow X|Z}(f) df \quad (3.20)$$

Κάτω από την συνθήκη ότι οι διαδικασίες X , Y και Z είναι στάσιμες.

Γενικά, είναι σημαντική η ανάλυση των εγκεφαλικών κυμάτων στο χώρο των συχνοτήτων διότι έχει καταγραφεί ότι κάποιες δραστηριότητες που εντοπίζονται σε διάφορα σημεία του εγκεφάλου περιορίζονται σε κάποιες περιοχές συχνοτήτων. Ανάλογα με τα ερεθίσματα που προκαλούνται από τον άνθρωπο, ενεργοποιείτε μια περιοχή του εγκεφάλου η οποία εκπέμπει εγκεφαλικά κύματα σε μια περιοχή συχνοτήτων από 0-70Hz έτσι η ανάλυση στο χώρο των συχνοτήτων είναι αναγκαία και η Granger αιτιότητα είναι ένα σημαντικό εργαλείο όπου μπορούμε να ανιχνεύσουμε την επιρροή των νευρώνων μεταξύ τους στον χώρο των συχνοτήτων. Επίσης, σημαντικό κατά την ανάλυση EEG σημάτων είναι η μέτρηση της συνάφειας (coherence) [Bendat and Pierson, 1986], όπου ο υπολογισμός της γίνεται από τα στοιχεία του πίνακα της φασματικής πυκνότητας $S(f)$. Βρίσκοντας της συνάφεια μεταξύ δύο στοχαστικών διαδικασιών X και Y εντοπίζω της ολική αιτιότητα των X και Y η οποία είναι το άθροισμα της αιτιότητας από το X στο Y , από το Y στο X και ένας τρίτος όρος ο οποίος είναι η στιγμιαία αιτιότητα (instantaneous causality) των X και Y . Όπως καταλαβαίνουμε η διαφορά μεταξύ της Granger αιτιότητας και της συνάφειας εντοπίζεται στην κατευθυντικότητα της αιτιότητας, η συνάφεια βρίσκει την αλληλεξάρτηση μεταξύ δυο διαδικασιών ενώ με την Granger αιτιότητα βρίσκουμε πια διαδικασία προκαλεί την άλλη. Εκτός, από την συνάφεια και την Granger αιτιότητα, στο πεδίο των συχνοτήτων υπάρχουν και άλλα εργαλεία που μας βοηθούν στην ανάλυση των εγκεφαλικών σημάτων. Αυτά είναι η συνάρτηση κατευθυνόμενης μεταφοράς (Direct Transfer Function) η οποία χρησιμοποιεί στοιχεία του πίνακα μεταφοράς $H(f)$ και εντοπίζει την εισροή μιας διαδικασίας X από την Y [Kaminski and Blinowska, 1991] και η συνάρτηση κατευθυνόμενη μερική συνάφεια (Partial Directed Coherence) η οποία χρησιμοποιεί στοιχεία του πίνακα $B(f)$ του συστήματος (2.1) και εντοπίζει την εκροή του καναλιού Y προς το X [Baccala and Sameshima, 2001].

3.3 ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ GRANGER ΑΙΤΙΟΤΗΤΑΣ

Από τον πίνακα της φασματικής πυκνότητας παράγονται πολλά μεγέθη που σχετίζονται με την δικτύωση των νευρώνων όπως είναι η συνάφεια, μερική συνάφεια, συνάρτηση κατευθυνόμενης μεταφοράς κ.α. Η προσέγγιση του φασματικού πίνακα είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους είτε παραμετρικά είτε μη παραμετρικά. Κατά την παραμετρική εκτίμηση, προσομοιώνουμε τα δεδομένα σε ένα αυτό-παλινδρομικό μοντέλο που στην συνέχεια ύστερα από ένα μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε τον πίνακα φασματικής πυκνότητας. Κατά την μη παραμετρική εκτίμηση, εφαρμόζουμε αμέσως ένα μετασχηματισμό Fourier ή ένα μετασχηματισμό wavelet στα δεδομένα και αποκτούμε τον πίνακα φασματικής πυκνότητας. Ωστόσο δεν αρκεί μόνο αυτή πληροφορία για να συνεχίσουμε την ανάλυση γι' αυτό στην συνέχεια παραγοντοποιούμε τον πίνακα της φασματικής πυκνότητας όπου αποκτούμε τον πίνακα σφάλματος και τον πίνακα μεταφοράς ώστε να εντοπίσουμε την Granger αιτιότητα.

Με την παραμετρική μέθοδο αντιμετωπίζουμε προβλήματα στην ανάπτυξη του AR μοντέλου και πολλές φορές αποτυγχάνει στον υπολογισμό της Granger αιτιότητας όταν τα δεδομένα απαιτούν υψηλή τάξη AR μοντέλου [Mitra and Pesaran, 1999]. Το παραπάνω πρόβλημα το αντιμετωπίζουμε αν απαλλαχτούμε από την εκτίμηση των συντελεστών του AR μοντέλου, δηλαδή να αναπτύξουμε μια μη παραμετρική μέθοδο εντοπισμού Granger αιτιότητας [Dhamala, 2004]. Κατά την μη παραμετρική μέθοδο παραγοντοποιούμε τον πίνακα φασματικής πυκνότητας στον πίνακα μεταφοράς και σε στο πίνακα σφάλματος σχέση 3.13 όπου στην συνέχεια με τα στοιχεία των πινάκων εντοπίσουμε την αιτιότητα κατά ζεύγη σχέση 3.14 άλλα

και την δεσμευμένη αιτιότητα σχέση 3.19 στο πεδίο των συχνοτήτων.

Ο υπολογισμός του πίνακα φασματικής πυκνότητας $S(f)$ γίνεται είτε με μετασχηματισμό Fourier στα δεδομένα μας είτε με συνεχή wavelet μετασχηματισμό. Η χρήση του κάθε μετασχηματισμού είναι ανάλογη με την ευστάθεια και την στασιμότητα των δεδομένων. Αν τα δεδομένα μας διατηρούν την στασιμότητα τότε ο υπολογισμός του πίνακα φασματικής πυκνότητας γίνεται με Fourier μετασχηματισμό μέσω της multitaper μεθόδου ενώ για την αντίθετη περίπτωση που δεν διατηρείται η στασιμότητα τότε γίνεται η χρήση του συνεχούς μετασχηματισμού wavelet. Για κάθε μετασχηματισμό που εφαρμόσουμε υπολογίζουμε τον πίνακα φασματικής πυκνότητας $S(f)$.

Αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στα κανάλια $X(t)_i \xrightarrow{\text{Fourier}} S(f)_i$ όπου ικανοποιείται η ιδιότητα της σταθερότητας υπολογίζουμε τα κανάλια μας στον χώρο των συχνοτήτων. Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε την μέθοδο multitaper έτσι ώστε να έχουμε μια ήπια εικόνα των συχνοτήτων όπου γίνεται η χρήση των διακριτών σφαιρικών σειρών (DPSS). Στην συνέχεια, υπολογίζουμε τον φασματικό πίνακα των καναλιών ή αλλιώς των πίνακα ενεργειών των καναλιών.

$$S(f) = S(f)_i S(f)_j^* = \begin{pmatrix} S(f)_{11} & \dots & S(f)_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S(f)_{M1} & \dots & S(f)_{MM} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Τα $i, j = 1, 2, \dots, M$ είναι ο αριθμός των καναλιών, στην περίπτωση που έχουμε πολλαπλές δοκιμές (trials) υπολογισμού του πίνακα $S(f)$ τότε ο πίνακας φασματικής πυκνότητας είναι ίσος η μέση τιμή των μετασχηματισμένων καναλιών $S(f) = \langle S(f)_i S(f)_j^* \rangle$.

Στην περίπτωση που τα δεδομένα μας είναι μη στάσιμα για να εξασφαλίσουμε την στασιμότητα κάνουμε χρήση του συνεχούς μετασχηματισμού Wavelet [Daubechies, 1990; 1992; Percival and Walden, 2000]. Για μητρική συνάρτηση παίρνουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις Morlet και επιλέγουμε ως κεντρική συχνότητα $\omega_0 \geq 6$ έτσι ώστε να έχουμε μια πιο ήπιες (smoother) συχνότητες [Torrence and Compo, 1998]. Τα κανάλια μέσω του μετασχηματισμού μετατρέπονται σε μια συνάρτηση της βαθμίδας και του χρόνου $W(s, t)_i$ που η βαθμίδα σχετίζεται με την συχνότητα f αν είναι γνωστή η κεντρική συχνότητα της μητρικής συνάρτησης. Ο πίνακας φασματικής πυκνότητας στην προκειμένη περίπτωση είναι ο $S(t, f) = W(t, f)_i W(t, f)_j^*$ όπου $i, j = 1, 2, \dots, M$ είναι ο αριθμός των καναλιών και αν έχουμε κάνει πολλές δοκιμές (trials) για το κάθε κανάλι τότε βρίσκουμε τον μέσο όρο του κάθε καναλιού.

Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι πίνακας της φασματικής πυκνότητας ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες [Dhamala et al., 2004]

- 1) Είναι μη-αρνητικός κι Ερμητιανός πίνακας
- 2) $S(-\theta) = S^T(\theta)$ όπου $\theta = 2\pi f$ και ορίζεται $[-\pi, \pi]$
- 3) Είναι ένας ολοκληρώσιμος πίνακας
- 4) Αναπτύσσεται κατά Fourier $S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ik\omega}$
- 5) Ο $S \in L^1$, όπου L είναι το σύνολο των κάτω τριγωνικών πινάκων.

Οι παραπάνω οι ιδιότητες είναι χρήσιμες κατά την παραγοντοποίηση (factorization) του πίνακα φασματικής πυκνότητας έτσι ώστε να γίνει υπολογισμός των πινάκων μεταφοράς $H(f)$ και σφάλματος Σ . Με τους παρακάτω πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε την Granger αιτιότητα μεταξύ των καναλιών.

3.3.1 Παραγοντοποίηση του πίνακα $S(f)$

Κομβικό σημείο στην μέθοδο μη παραμετρική Granger αιτιότητα είναι η παραγοντοποίηση (factorization) του πίνακα $S(f)$ οποίος θα διαχωριστεί σε δύο φασματικούς παράγοντες ελάχιστης φάσης. Για τον διαχωρισμό του πίνακα φασματικής πυκνότητας θα εφαρμόσουμε το αλγόριθμό Wilson [Wilson, 1972] οποίος εξασφαλίζει την χρήση του θεωρήματος Wilson [Wilson, 1978] που τελικά παίρνουμε τον διαχωρισμό του πίνακα $S(f)$ σε δύο παράγοντες.

Θεώρημα Wilson

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ παίρνει για στοιχεία την συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $[-\pi, \pi]$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες :

$$f \geq 0, \quad f(\theta) = f(\theta)^* = f(-\theta)^T, \quad f \in L^1, \quad \log \det(f) \in L^1$$

Θεωρούμε την σειρά ψ_τ η οποία ορίζεται από την σειρά των συναρτήσεων

$$\psi_{\tau+1} = \psi_\tau [\psi_\tau^* f \psi_\tau^{-*} + I]^+ + R_\tau \text{ με } \psi_{0,\mu} = \Gamma_{0,\mu}^{1/2} \text{ και } R_\tau + R_\tau^* = 0$$

(Γ : αντίστροφος του πίνακα φασματικής πυκνότητας)

Τότε για $\lim \psi_\tau(z) = \psi(z)$ υπάρχει για $|z| < 1$ και η $\psi(z)$ είναι η μοναδική μέγιστη λύση στο H^2 της εξίσωσης $f(\theta) = \psi(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta})^*$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα και τις ιδιότητες του πίνακα φασματικής πυκνότητας μπορούμε να γράψουμε τον $S(f)$ ως ένα σύνολο συναρτήσεων ελάχιστης φάσης.

$$S(\theta) = \psi(e^{i\theta})\psi^*(e^{i\theta}) \quad (3.21)$$

Όπου επίσης η συνάρτηση $\psi(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \psi_\tau z^\tau$ ορισμένη για $|z| < 1$ πρέπει να ικανοποιεί η σχέση $\psi_{\tau+1} = \psi_\tau [\psi_\tau^* f \psi_\tau^{-*} + I]^+ + R_\tau$ όπου $R_\tau + R_\tau^* = 0$ και τελεστής $[g]^+ = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{ik\theta}$ με $g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\theta}$.

Συνεπώς αν γράψουμε την συνάρτηση ψ στην βάση Fourier $\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k e^{i\theta k}$ με $A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(e^{i\theta}) e^{-i\theta k} d\theta$. Επίσης η συνάρτηση ψ είναι ολόμορφη λόγω διαφορίσιμότητας στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ και σύμφωνα με τον θεώρημα Taylor στις μιγαδικές συναρτήσεις μπορούμε να γράψουμε ότι $\psi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k z^k$ ορισμένη στον δίσκο $|z - 0| < 1$ με $A_k = \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}$, οπότε για $k=0 \rightarrow A_0 = \psi(0)$. Οπότε αν κανώ το ίδιο και για τους πίνακες S και H και αντικαταστήσω στις (3.21) και (3.14) $z=0$ και την συγκρίνω έχουμε [Dhamala et al., 2004]:

$$\psi(0)\psi^*(0) = H(0)\Sigma H^*(0) \quad (3.22)$$

Και αν αντικαταστήσω $A_0 = \psi(0)$, γνωρίζουμε ότι $B_{ij}(L)^{-1} = H(L) L = 0 \rightarrow H(0) = I$ τότε παίρνουμε τον πίνακα σφάλματος :

$$\Sigma = A_0 A_0^T \quad (3.23)$$

Τώρα αν ξαναγράψουμε την σχέση (3.2) ως :

$$S = \psi A_0^{-1} A_0 A_0^T A_0^{-T} \psi^* \quad (3.24)$$

Και αν την συγκρίνω με την σχέση (3.19) παίρνω την έκφραση του πίνακα μεταφοράς H :

$$H = \psi A_0^{-1} \quad (3.25)$$

Τώρα που είναι γνωστοί οι δύο πίνακες της έκφρασης της φασματικής πυκνότητας μπορούμε να υπολογίσουμε την Granger αιτιότητα αντικαθιστώντας τα στοιχεία των πινάκων H και Σ στην σχέση 3.14 ή στην σχέση 3.19 στην περίπτωση της δεσμευμένης αιτιότητας.

3.3.2 Μεθοδολογία παραγοντοποίησης

Η μη-παραμετρική προσέγγιση της κατά ζεύγη ή της δεσμευμένης Granger αιτιότητας συμπεριλαμβάνει να εξής βήματα :

- 1) Κατασκευή του πίνακα φασματική πυκνότητας $S(f)$ εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier ή συνεχής μετασχηματισμό Wavelets στα δεδομένα.
- 2) Παραγοντοποιούμε τον πίνακα της φασματικής πυκνότητας σε δυο παράγοντες $\Psi\Psi$ ελαχίστης φάσης: $S = \Psi\Psi$
- 3) Βρίσκουμε τον πίνακα σφάλματος Σ από την εξίσωση 3.23 και τον πίνακα μεταφοράς από την εξίσωση 3.25.
- 4) Εύρεση της Granger αιτιότητα αντιστοιχώντας τα στοιχεία των πινάκων Σ και H στην εξίσωση 3.14 ή στην 3.19

Επίσης, με την μη παραμετρική μέθοδο εντοπίζουμε την αιτιότητα στον χώρο των συχνοτήτων, όπου κάνοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς εξ.(3.13) ή (3.20) μεταβαίνουμε στον πεδίο του χρόνου κάτω από την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα μας τηρούν την στασιμότητα [Geweke, 1982]. Επιπλέον, για την κατασκευή του πίνακα φασματικής πυκνότητας χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό Fourier, αν τα δεδομένα είναι στάσιμα και μετασχηματισμό wavelet αν συμβαίνει το αντίθετο και θέλουμε να μελετήσουμε την χρονική εξέλιξη των συχνοτήτων.

3.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ - ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Παρακάτω θα παρουσιαστούν δυο παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών όπου θα γίνει χρήση της παραμετρικής και της μη παραμετρικής μεθόδου όπου και τελικά θα τις συγκρίνουμε μεταξύ τους. Στο πρώτο παράδειγμα θα μελετήσουμε την Granger αιτιότητα για τρεις στοχαστικές διαδικασίες X, Y και Z οι οποίες θα γραφτούν ως ένα αυτοπαλινδρομικό μοντέλο [Dhamala et al., 2008] :

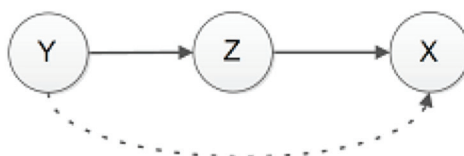
$$X(t) = 0.8X(t-1) - 0.5X(t-2) + 0.4Z(t-1) + \eta(t)$$

$$Y(t) = 0.53Y(t-1) - 0.8Y(t-2) + \xi(t) \quad (3.26)$$

$$Z(t) = 0.5Z(t-1) - 0.2Z(t-2) + 0.5Y(t-1) + \varepsilon(t)$$

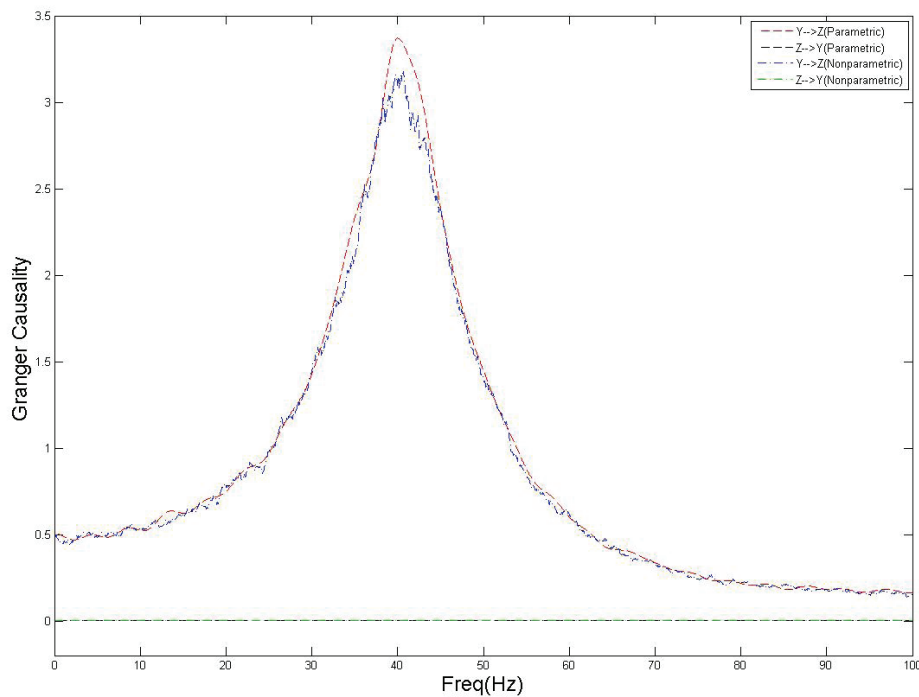
Οι τρεις στοχαστικές διαδικασίες είναι στάσιμες, που σημαίνει ότι ο μέσος του λευκού θορύβου είναι ίσος με μηδέν και η διασπορά του ένας μη μηδενικός σταθερό αριθμός, οπότε $var(\eta(t)) = var(\varepsilon(t)) = 0.25$ και $var(\xi(t)) = 1$. Στο ακόλουθο παράδειγμα θα πάρουμε 4000 σημεία και θα το επαναλάβουμε 100 φορές (trials) με μια δειγματική συχνότητα 200Hz.

Από το σύστημα (4.1) μπορούμε να εντοπίσουμε την επιρροή των μεταξύ καναλιών δηλαδή ότι η Y προκαλεί άμεσα την Z και επίσης ότι Y προκαλεί έμμεσα της X διαμέσου της Z όπου μπορούμε να εκφράσουμε ποιοτικά από την εικόνα 3.2.



Εικόνα.3.2. Ποιοτική εκτίμηση της αιτιότητας του συστήματος 3.26 όπου Y προκαλεί άμεσα την Z (συνεχές βέλος), η Z οδηγεί την X με αποτέλεσμα η Y να προκαλεί έμμεσα την X (διακεκομμένο βέλος).

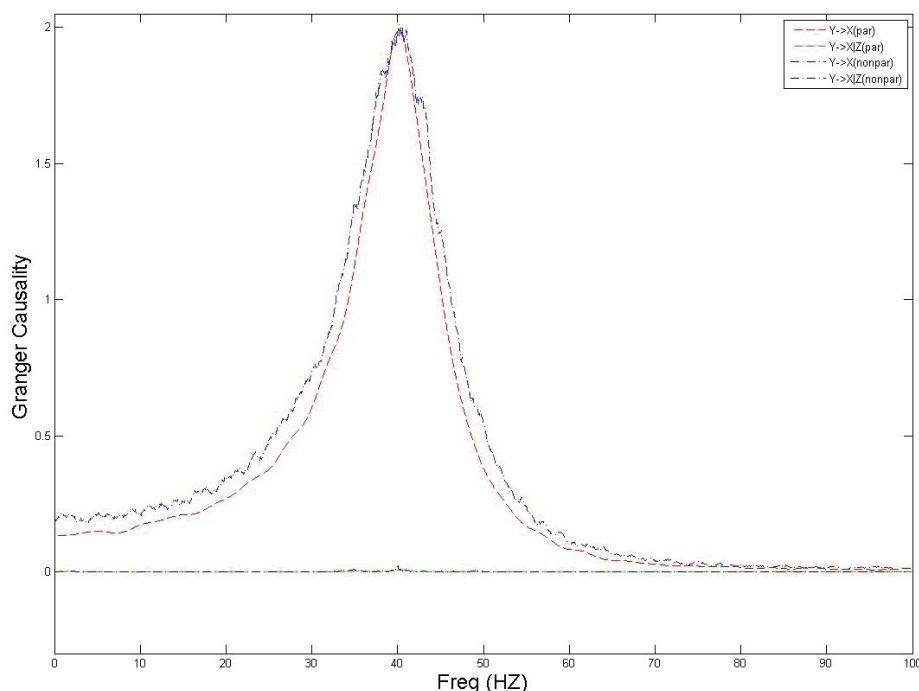
Θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε την Granger αιτιότητα του συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων με την παραμετρική και την μη παραμετρική μέθοδο. Θα ξεκινήσουμε με την άμεση επιρροή της Y στην Z διαδικασία όπου βλέπουμε μια κοινή κορυφή των δυο μεθόδων στα 40Hz που σημαίνει ότι για μεγάλο δείγμα δεδομένων η παραμετρική συμπίπτει με τα αποτελέσματα της μη παραμετρική μεθόδου εικόνα 3.2. Επίσης εντοπίσαμε και την αιτιότητα του Z στο Y όπου και στις δυο μεθόδους είναι μηδέν όπως άλλωστε περιμέναμε βλέποντας το ποιοτικό διάγραμμα εικόνα 3.2 όπου δεν υπάρχει καμία αιτιότητα σε αυτή την περίπτωση. Όποτε, συμφώνα με τα προηγούμενα καταλήγουμε στο ότι η μη παραμετρική μέθοδος διατηρεί σωστά την κατευθυντικότητα της αιτιότητας αλλά και ότι εντοπίζει σωστά την αιτιότητα στην συχνότητα που βρίσκεται.



Εικόνα 3.3. Εκτίμηση Granger αιτιότητα της Y στην Z με την παραμετρική και μη παραμετρική μέθοδο όπου βλέπουμε κοινή κορυφή στα 40Hz καθώς επίσης και την αιτιότητα της Z προς την Y η οποία είναι μηδέν όπως αναμενόταν.

Η διάφορα που εντοπίζεται στην εικόνα 3.3 μεταξύ των δυο κορυφών μπορεί να οφείλεται σε στατικό σφάλμα ή να προκύπτει λόγω της υπολογιστικής μεθόδου. Όπως και να έχει, η ποσοστιαία διάφορα τους κυμαίνεται στο 5.9%, ποσοστό, δηλαδή, πολύ μικρό για να είναι ανησυχητικό. Επίσης μπορεί και να οφείλεται στην επιλογή του μεγέθους του δείγματος διότι με την παραμετρική μέθοδο έχω καλύτερη προσέγγιση του πίνακα φασματικής πυκνότητας από την μη παραμετρική μέθοδο [Ding, 2000] που σημαίνει καλύτερη εκτίμηση της Granger αιτιότητα. Παρόλα αυτά δεν σημαίνει ότι με την μη παραμετρική μέθοδο δεν προσδιορίζουμε την σωστή συχνότητα που συμβαίνει η αιτιότητα που αυτό είναι το κυρίως ζητούμενο αλλά απλά δεν συμπίπτουν μεταξύ τους οι δυο καμπύλες.

Αμέσως μετά από την σύγκριση της παραμετρικής και της μη παραμετρικής μεθόδου για την περίπτωση της μέτρησης της Granger αιτιότητας κατά ζεύγη, θα συγκρίνουμε τις δυο μεθόδους για την εκτίμηση της δεσμευμένης Granger αιτιότητας. Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα ο εντοπισμός της δεσμευμένης Granger αιτιότητα μας βοηθάει στον διαχωρισμό ανάμεσα της άμεση και της έμμεσης αιτιότητας, εντοπίζοντας την έμμεση αιτιότητα ως μηδενική. Στο παράδειγμα έχουμε μια έμμεση αιτιότητα από την Y στην X όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.2 με το διακεκομμένο βέλος που συνδέει την Y με την X . Επομένως, κάνοντας την επεξεργασία φτιάχνουμε την εικόνα 3.4 που φαίνεται η διάφορα μεταξύ της παραμετρικής και της μη παραμετρικής μεθόδου αλλά και της Granger αιτιότητας κατά ζεύγη με αυτή της δεσμευμένης αιτιότητας που σημαίνει ότι διαφοροποιήσαμε την άμεση με την έμμεση αιτιότητα.



Εικόνα 3.4. Εκτίμηση Granger αιτιότητας κατά ζεύγη από την Y στην X χρησιμοποιώντας την παραμετρική και μη παραμετρική μεθόδους και συμπληρώνουμε με την εκτίμηση της δεσμευμένης αιτιότητας από την Y στην X δεδομένου την Z .

Όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.4, υπολογίζοντας την Granger αιτιότητα από την Y στην X βλέπουμε μια κορυφή στα 40Hz όπου η αρχική εντύπωση είναι ότι υπάρχει μια επιρροή του Y στην X . Αλλά κάνοντας τον έλεγχο της δεσμευμένης αιτιότητας υπολογίζοντας την αιτιότητα της Y στην X δεδομένου την X παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία ένδειξη άμεσης αιτιότητας από την Y στην X , όποτε καταλαβαίνουμε ότι αιτιότητα ανάμεσα στην Y και στην X γίνεται δια μέσου της Z είναι μηδέν, συνεπώς επαληθεύεται το ποιοτικό διάγραμμα εικόνα 3.2 του πρώτου παραδείγματος.

Από τις εικόνες 3.3 και 3.4 φαίνεται ότι τα αποτελέσματα της μη παραμετρική μεθόδου συγκλίνει με αυτή της παραμετρικής για τις περιπτώσεις της αιτιότητας κατά ζεύγη και τις δεσμευμένης. Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε μια καλή προσέγγιση της συχνότητας που συμβαίνει η αιτιότητα όπου είναι το κεντρικό ζήτημα στην μελέτη των νευρώνων. Απλά και με τις δυο μεθόδους οι καμπύλες μας δεν συμπίπτουν η μια με την άλλη όπου αυτό τις καθιστά ξεχωριστές όπου η κάθε μία έχει τα μειονεκτήματα της και τα προτερήματα της ανάλογα με το πώς εργαζόμαστε.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η μελέτη στάσιμων σημάτων με την μη παραμετρική μέθοδο εντοπισμού της αιτιότητας βασίζεται στον μετασχηματισμό Fourier των δεδομένων όπου ύστερα από την παραγοντοποίησή του φασματικού πίνακα πυκνότητας υπολογίζουμε την Granger αιτιότητα κατά ζεύγη αλλά και την δεσμευμένη αιτιότητα έτσι ώστε να γίνει ο διαχωρισμός ανάμεσα στην έμμεση και άμεση αιτιότητα.

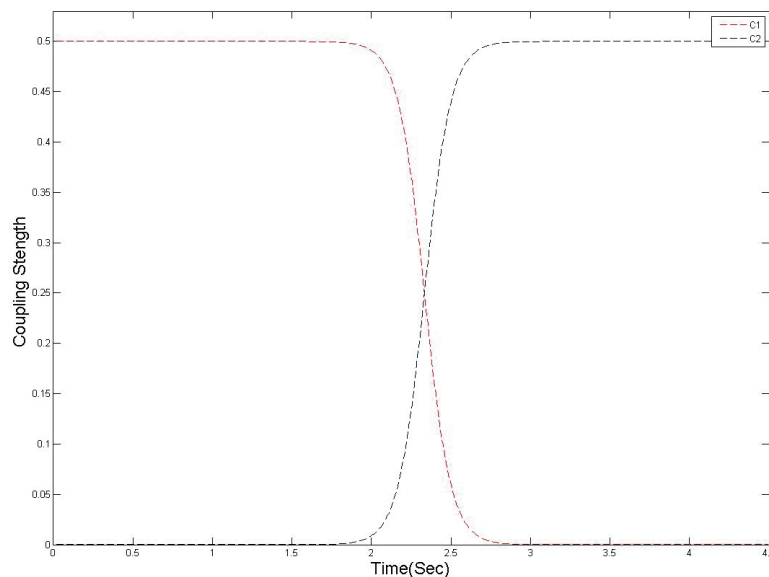
Στο δεύτερο παράδειγμα θα αναλύσουμε την Granger αιτιότητα στα πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων με συνεχή μετασχηματισμό Wavelet όπου θα χρησιμοποιήσουμε την Morlet συναρτήσεις με κεντρική συχνότητα μεγαλύτερη των 6Hz. Στο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε δυο στοχαστικές διαδικασίες X και Y που η μια θα επηρεάζει την άλλη σε

διαφορετικά χρονικά διαστήματα, οι δυο στοχαστικές διαδικασίες θα τις προσομοιώσουμε με ένα αυτό-παλινδρομικό μοντέλο ως [Dhamala et al., 2008]:

$$X(t) = 0.53X(t-1) - 0.8X(t-2) + C_1(t)Y(t-1) + \xi(t) \quad (4.2)$$

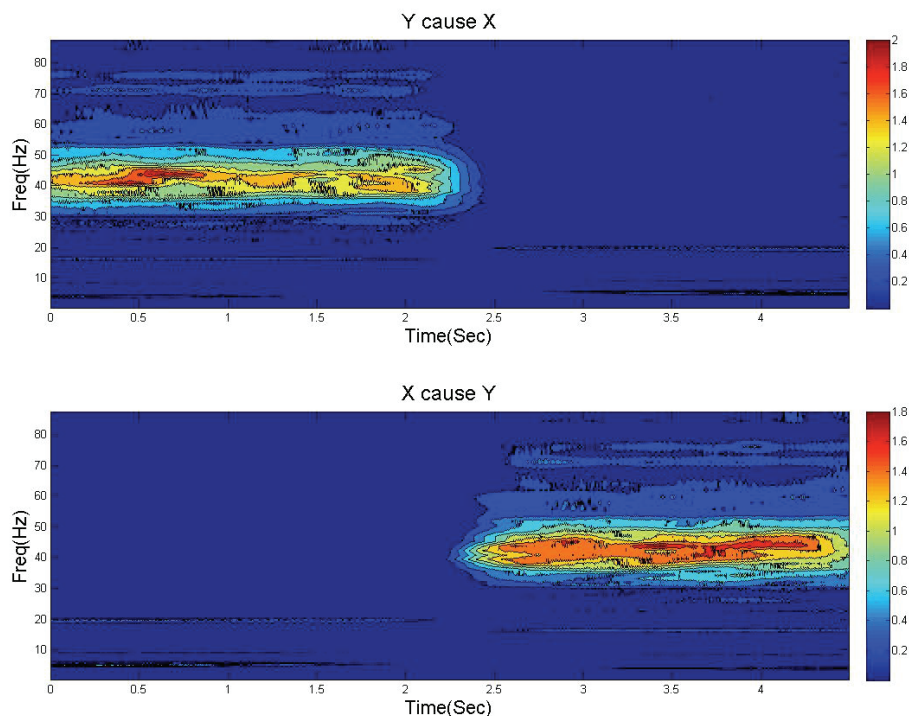
$$Y(t) = 0.53Y(t-1) - 0.8Y(t-2) + C_2(t)X(t-1) + \eta(t)$$

Όπου οι διασπορές των σφαλμάτων πρόβλεψης είναι αντίστοιχα $var(\xi(t)) = 1$ και $var(\eta(t)) = 0.25$ και $C_1(t)$ και $C_2(t)$ είναι χρονικές μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν μια υπερβολική συνάρτηση με διασπορά 0.5 αντίστοιχα όπως φαίνεται και στην εικόνα(4.4). Επίσης, έχουμε πάρει ένα δείγμα 900 σημείων κάνοντας 100 επαναλήψεις με δειγματική συχνότητα 200Hz.



Εικόνα 3.5. Οι χρονικές μεταβλητές C_1 και C_2 οι οποίες μεταβάλλονται υπερβολικά η μια με την άλλη, όπου η εναλλαγή γίνεται στο χρονικό διάστημα $1.7 < t < 3$ και το σημείο τομής των δυο καμπυλών βρίσκεται στα 2.3 sec.

Στο παραπάνω παράδειγμα θα κάνουμε χρήση μόνο της μη παραμετρικής μεθόδου για τον εντοπισμό της Granger αιτιότητας μεταξύ των δυο χρονοσειρών. Όπως φαίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (4.2) τα δυο σήματα αλληλοεπηρεάζονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Η Y επηρεάζει την X στο πρώτο μισό χρονικό διάστημα σύμφωνα και με την εικόνα 3.5 και η X επηρεάζει την Y στο δεύτερο μισό χρονικό διάστημα. Για να παρουσιάσουμε αυτή την εναλλαγή των επιρροών στον χρονικό πεδίο θα εφαρμόσουμε τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet με μητρική συνάρτηση Morlet και με κεντρική συχνότητα $\omega_c > 6$. Αφού πάρουμε το μετασχηματισμένο σήμα και βρούμε τον πίνακα φασματικής πυκνότητας συνάρτηση του χρόνου στην συνέχεια παραγοντοποιούμε τον πίνακα $S(f, t)$ και έχουμε εν τέλει τα στοιχεία που χρειάζονται για να βρούμε την αιτιότητα στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας και παίρνουμε την εικόνα 4.6



Εικόνα 3.6 Εκτίμηση της Granger αιτιότητας με τη μη παραμετρική μέθοδο εφαρμόζοντας wavelet μετασχηματισμό. Πάνω εικόνα: φαίνεται η επιρροή της Y στο X για το χρονικό διάστημα 0-2.3sec. Κάτω εικόνα: βλέπουμε την επιρροή της X στην Y για το χρονικό διάστημα 2.3-4.5 στα 40Hz και για τις δυο περιπτώσεις.

Έχοντας μια μη στάσιμη διαδικασία όπως είναι αυτό του συστήματος εξισώσεων(4.2) εφαρμόζουμε συνεχής μετασχηματισμό wavelet ώστε να έχουμε μια χρονική και φασματική ανάλυση της Granger αιτιότητας. Στο προκείμενο παράδειγμα η Y επηρεάζει την X στο χρονικό διάστημα 0-2.3sec και αντίστοιχα η X επηρεάζει την Y στο διάστημα 2.3 - 4.5Sec δηλαδή έχουμε μια εναλλαγή της αιτιότητας ανάλογη με την αυξομείωση των σταθερών C_1 και C_2 των εξισώσεων(4.2)όπου στο σημείο που τέμνονται οι δυο καμπύλες στα 2.3Sec έχουμε την εναλλαγή της Granger αιτιότητας.

Με ακριβώς το ίδιο τρόπο που εντοπίσαμε την Granger αιτιότητα κατά ζεύγη για το προαναφερόμενο παράδειγμα μπορούμε να εντοπίσουμε και την δεσμευμένη αιτιότητα αλλά για την προκειμένη περίπτωση δεν χρειάζεται διότι μελετάμε ένα ζεύγος εξισώσεων.

Ας δούμε τα κεντρικά σημεία των δυο παραδειγμάτων. Στο πρώτο παράδειγμα που είχαμε να κάνουμε με τρεις στάσιμες διαδικασίες ο εντοπισμός της Granger αιτιότητας είναι εφικτός και με την παραμετρική μέθοδο άλλα και με την μη παραμετρική όπου η καθεμία έχει τα προτερήματα και μειονεκτήματα της. Στο δεύτερο παράδειγμα που είχαμε να κάνουμε με μη στάσιμες διαδικασίες προτιμήσαμε να εντοπίσουμε την Granger αιτιότητα του συστήματος με μετασχηματισμό wavelet και όχι πραγματοποιώντας παραθυροποίηση στα δεδομένα όπως θα γινόταν στην περίπτωση της παραμετρική μέθοδο. Ο wavelet μετασχηματισμός μας βοήθησε να εντοπίσουμε τον πίνακα φασματικής πυκνότητας στον χώρο του χρόνου και της συχνότητας χρησιμοποιώντας ως μητρική συνάρτηση μιγαδική Morlet και εν συνεχεία πραγματοποιείται ανάλυση για τον εντοπισμό της Granger αιτιότητας.

3.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στις προηγούμενες παραγράφους εκτιμήσαμε την Granger αιτιότητα με δυο διαφορετικές μεθόδους, την παραμετρική και την μη παραμετρική. Όπως είδαμε από το πρώτο παράδειγμα, οι διαφορές τους όσον αφορά την εκτίμηση της αιτιότητας ήταν ελάχιστες στο αποτέλεσμα διότι και οι δυο μέθοδοι έτειναν στην ίδια καμπύλη με μία κοινή κορυφή. Ωστόσο, η κάθε μέθοδος εξαρτάται από διάφορους παράγοντες που έχουν κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη των μεθόδων και αν δεν τους προσέξουμε αλλοιώνεται το αποτέλεσμα που θέλουμε να πάρουμε.

Η περίπτωση της μη παραμετρικής μεθόδου υπολογισμού Granger αιτιότητας, μπορεί να μην εξαρτάται από τις παραμέτρους ενός AR μοντέλου που θα επιλέξουμε, άλλα υπάρχουν σημαντικές παράμετροι που διαμορφώνουν το αποτέλεσμα. Για την εύρεση την αιτιότητας για ένα σύστημα στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών χρησιμοποιούμε ως βάση τον μετασχηματισμό Fourier εντοπίζοντας τον πίνακα φασματικής πυκνότητας με την multitaper μέθοδο έτσι ώστε να έχουμε ήπιες συχνότητες. Στο προκείμενη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε τρία tapers γιατί αν αυξήσουμε τον αριθμό των tapers θα υπάρξει αλλοίωση των συχνοτήτων στον πίνακα φασματικής πυκνότητας, του τύπου διαχωρισμός της κορυφής σε δύο, με αποτέλεσμα την λανθασμένη εκτίμηση της Granger αιτιότητας. Επίσης, για την περίπτωση μη στάσιμων διαδικασιών κάνουμε χρήση τον μετασχηματισμό wavelet με μητρική συνάρτηση την Morlet και κεντρική συχνότητα μεγαλύτερη από 6Hz, όσο αυξάνουμε την τιμή της κεντρική συχνότητα έχουμε καλύτερη ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων άλλα ταυτόχρονα χάνουμε ανάλυση στο πεδίο του χρόνου. Επιπλέον, εμείς ελέγξαμε την μη παραμετρική μέθοδο σε ένα σήμα πολλών χρονικών σημείων (4000 σημεία) και ταυτόχρονα πολλών δοκιμών (trials) και είχαμε ικανοποιητικά αποτελέσματα, όμως εξίσου αξιόπιστα αποτελέσματα έχουμε και με λιγότερες δοκιμές (Dhamala et al., 2008). Επίσης, για την καλύτερη εκτίμηση της αιτιότητας μπορούμε να διαχωρίσουμε την χρονοσειρά σε μικρότερες μονάδες και στην συνέχεια εφαρμόζοντας multitaper μέθοδο. Παρόλα αυτά, αν έχουμε μικρό αριθμό δεδομένων και δοκιμών και οι δύο μέθοδοι είναι αναξιόπιστες για την χρήση τους.

Από την άλλη, η παραμετρική μέθοδος βασίζεται στην εκτίμηση των συντελεστών και στην τάξη του αυτό παλινδρομικού μοντέλου η οποία εντοπίζεται από τα κριτήρια τάξης AIC ή το BSI τα οποία δεν είναι αξιόπιστα διότι κάνουμε ανάλυση σε ένα πεπερασμένο αριθμό δεδομένων, άλλα μπορούμε να δούμε ποια τάξη είναι η καλύτερη για το μοντέλο συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της μη παραμετρικής μεθόδου. Επίσης, η μη παραμετρική μέθοδος όταν δεν είναι αξιόπιστη λόγω του μεγέθους των δεδομένων και τον δοκιμών μπορεί η παραμετρική μέθοδος να μας βοηθήσει στο να το ξεπεράσουμε και να γίνει η ανάλυση που επιθυμούμε. Τέλος, όπως και να έχει, εμείς ενδιαφερόμαστε για μια ανάλυση ηλεκτροεγκεφαλικών σημάτων που ο αριθμός των δεδομένων είναι πολύ μεγάλος όπως και ο αριθμός των δοκιμών και καθιστά την μη παραμετρική μέθοδο αξιόπιστη για τον εντοπισμό της Granger αιτιότητας με εξαιρετικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4

*ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ
ΕΛΕΓΧΟΣ
ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ*

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός μας στο παρακάτω κεφάλαιο είναι η εισαγωγή της Bootstrap μεθόδου, μια στατική μεθοδολογία κατά την οποία υπολογίζουμε την κατανομή μια παραμέτρου f από ένα δείγμα X . Η προκειμένη μέθοδος είναι πολύ σημαντική για την μελέτη της Granger αιτιότητας διότι υπολογίζεται μέσω αυτής το κατώφλι σημαντικότητας (significance threshold) της αιτιότητας, από την οποία μπορούμε να εξάγουμε σημαντικές πληροφορίες για το σύστημά μας. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η Granger αιτιότητα χωρίζεται στην αιτιότητα κατά ζεύγη και την δεσμευμένη, όπου με την δεύτερη μπορούμε να αποφανθούμε αν η αιτιότητα είναι άμεση ή έμμεση. Όμως, κατά τον υπολογισμό της δεσμευμένης αιτιότητας δεν μπορούμε να ξέρουμε ποια τιμή της αιτιότητας είναι σημαντική έτσι ώστε να αποφασίσουμε αν είναι άμεση ή έμμεση αιτιότητα. Συνεπώς, ο υπολογισμός του κατωφλίου σημαντικότητας (significance threshold) είναι απαραίτητος για τον υπολογισμό της Granger αιτιότητας.

4.2 ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ BOOTSTRAP

Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα πραγματικών αριθμών $X_1, X_2, \dots, X_n$ με κατανομή πληθυσμού F και θέλουμε να εξάγουμε πληροφορίες για μια παράμετρο f της κατανομής F . Για τον εντοπισμό της παραμέτρου f είναι απαραίτητη η γνώση της στατιστικής συνάρτησης $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ αλλά και διάφορα χαρακτηριστικά της (διασπορά, κατανομή, μεροληψία,...). Η στατιστική μελέτη που θα μας οδηγήσει στον εντοπισμό της f βασίζεται στις υποθέσεις που κάνουμε για το κάθε μοντέλο. Διακρίνονται δυο κατηγορίες μοντέλων: τα παραμετρικά και τα μη-παραμετρικά μοντέλα. Επιλέγοντας το παραμετρικό μοντέλο για τον εντοπισμό της f πρέπει να είναι γνωστή η κατανομή F από κάποιες άλλες παραμέτρους ώστε να οδηγηθούμε στον εντοπισμό της f . Στην περίπτωση που δεν έχουμε καμία πληροφορία για την κατανομή F (null hypothesis) επιλέγουμε τα μη-παραμετρικά μοντέλα για τον εντοπισμό της παραμέτρου f . Ένα από τα σημαντικότερα μη-παραμετρικά μοντέλα είναι αυτό του Bootstrap όπου θα κάνουμε την στατιστική μελέτη των αποτελεσμάτων της Granger αιτιότητας.

Αν υποθέσουμε ότι είναι γνωστή η κατανομή F των $X_1, X_2, \dots, X_n$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά της T μέσω της κατανομής της F_T . Στην περίπτωση μας, όμως, δεν έχουμε κάνει καμία υπόθεση για την F κι έτσι θα εκτιμήσουμε την κατανομή F_T της T μέσα από το δείγμα. Σαφώς, η στατιστική συνάρτηση $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι άμεσα εξαρτημένη από την κατανομή F των στοιχείων „ η οποία μπορεί να εκτιμηθεί μέσα από το δείγμα και να πάρουμε την δειγματική κατανομή $\hat{F}$. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου Bootstrap [Boutsikas, 2005] είναι η εκτίμηση της κατανομής F_T της T χρησιμοποιώντας την δειγματική κατανομή $\hat{F}$. Δηλαδή, μπορούμε να εκτιμήσουμε την κατανομή της

$$T = T(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ όπου } X_i \sim F \quad (4.1)$$

από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_i^* του δείγματος X_i

$$T^* = T(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) \text{ όπου } X_i^* \sim \hat{F} \quad (4.2).$$

Συνεπώς, οποιοδήποτε μέγεθος της στατιστικής συνάρτησης T μπορεί να εκτιμηθεί από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της T^* . Αν, παραδείγματος χάρη, θέλουμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της T , $E(T)$, μπορεί να εκτιμηθεί από την $E(T^*)$ σύμφωνα με τα παρακάτω [Boutsikas, 2005]:

$$\begin{aligned}
\hat{E}(T) &= E(T^*) = E(T(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)) = \\
&= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n T(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \Pr(X_1^* = x_{i_1}) \dots \Pr(X_n^* = x_{i_n}) \quad (4.3) \\
&= \frac{1}{n^n} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n T(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})
\end{aligned}$$

όπου οι τιμές του δείγματος $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι οι $x_1, x_2, \dots, x_n$ και επίσης η πιθανότητα να επιλέξουμε μια τυχαία τιμή από το δείγμα είναι $\Pr(X^* = x_i) = \frac{1}{n}$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Από τον υπολογισμό της μέσης τιμής μπορεί να υπολογιστεί και η διασπορά της T και άλλα χαρακτηριστικά της. Όμως, με την Bootstrap μέθοδο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα ότι το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι σχετικά πολύ μικρό διότι, αν έχουμε ένα δείγμα μεγέθους 50, τότε για να υπολογίσουμε την μέση τιμή της T^* πρέπει να πραγματοποιηθούν 50^{50} πράξεις, που είναι αδύνατο να γίνουν με οποιοδήποτε υπολογιστή. Έτσι γεννιέται το ερώτημα, πώς μπορούμε εναλλακτικά να προσεγγίσουμε την μέση τιμή της T^* . Η απάντηση είναι πολύ απλή, χρησιμοποιείται ευρέως στην στατιστική και είναι η μέθοδος της επαναδειγματοληψίας (resampling).

Για να αντιμετωπίσουμε το μεγάλο πλήθος των πράξεων που περιγράψαμε προηγουμένως, παράγουμε την κατανομή $\hat{F}$ παίρνοντας τυχαίους αριθμούς από το δείγμα και παράγουμε το σύνολο των τυχαίων αριθμών $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$. Συγκεκριμένα, ως X_1^* επιλέγουμε ισοπίθανα ένα από τα στοιχεία του δείγματος $x_1, x_2, \dots, x_n$ συνεχίζουμε με το X_2^* όπου κάνουμε την ίδια διαδικασία με την επιλογή του X_1^* και τελειώνουμε την συλλογή των τυχαίων αριθμών με την επιλογή του X_n^* . Από αυτό το σύνολο τυχαίων αριθμών υπολογίζουμε την $T^* = T(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$. Την συγκεκριμένη διαδικασία την επαναλαμβάνουμε για k φορές, υπολογίζουμε τα $T_1^*, T_2^*, \dots, T_k^*$ και εν τέλει μπορούμε να εκτιμήσουμε την κατανομή της T άλλα και διάφορα άλλα χαρακτηριστικά της. Η συγκεκριμένη μέθοδος της επαναδειγματοληψίας είναι η γνωστή μη παραμετρική **μέθοδος Bootstrap** κατά την οποία εξάγουμε στατιστικές πληροφορίες για το δείγμα από το ίδιο το δείγμα μας.

4.3 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ GRANGER ΑΙΤΙΟΤΗΤΑΣ

Κατά τον υπολογισμό της Granger αιτιότητας χρησιμοποιήσαμε κανάλια που το κάθε ένα είχε ένα πλήθος δοκίμων (trials) ώστε να έχουμε μια καλή στατιστική στα τελικά αποτελέσματα της αιτιότητας. Παρόλα αυτά, υπάρχει το ενδεχόμενο κάποια από τις δοκιμές να πάρει μια ακραία τιμή αιτιότητας, λόγω τυχαιότητας, με αποτέλεσμα την αλλοίωση των τελικών αποτελεσμάτων, πράγμα που μπορεί να επιφέρει σημαντικά προβλήματα στην μελέτη μας. Γι' αυτόν τον λόγο πρέπει να θέσουμε ένα κατώφλι σημαντικότητας (significance threshold) από το οποίο θα γίνεται ο έλεγχος των αιτιοτήτων για όλα τα ζεύγη των καναλιών. Ο στατιστικός έλεγχος θα γίνει σε κάθε δοκιμή με την εφαρμογή της Bootstrap μεθόδου για το υπολογισμό του κατωφλίου σημαντικότητας.

Ο στατικός έλεγχος των δεδομένων γίνεται με μη παραμετρική μέθοδο, όπως αυτή της Bootstrap, διότι δεν γνωρίζουμε τίποτα για την κατανομή της αιτιότητας πάνω σε μια συχνότητα, οπότε θα εξάγουμε αυτή την κατανομή από τα ίδια τα δεδομένα. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε δυο κανάλια πολλαπλών δοκιμών και θέλουμε στην συνέχεια να πραγματοποιη-

σουμε έναν στατιστικό έλεγχο. Επίσης, γνωρίζουμε ότι τα δεδομένα διαφορετικών δοκιμών στο ίδιο κανάλι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους [Blair and Karniski, 1993; Brovelli et al., 2004] όποτε έχουμε εξασφαλίσει ότι δεν έχουμε κάνει καμία υπόθεση (null-hypothesis). Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο Bootstrap για όλες της δοκιμές για κάθε κανάλι και τελικά παίρνουμε μια κατανομή των αιτιοτήτων για κάθε μια από της συχνότητες. Συγκεκριμένα, αναμειγνύουμε τις δοκιμές για κάθε ένα κανάλι με τυχαίο τρόπο σύμφωνα με την μέθοδο την επαναδειγματοληψίας (resampling) και στην συνέχεια υπολογίζουμε την αιτιότητα που αντιστοιχεί για κάθε ζευγάρι καναλιών. Την παραπάνω διαδικασία την επαναλαμβάνουμε τουλάχιστον 100-1000 φορές με αποτέλεσμα να πάρουμε την κατανομή των αιτιοτήτων για κάθε μια από τις συχνότητες. Τέλος, επιλέγουμε μια οριακή τιμή του επιπέδου σημαντικότητας (P-value) της κατανομής κάτω από την οποία θα απορρίπτονται όλες οι τιμές της αιτιότητας. Συνήθίζεται, η **P – value** να παίρνει τιμές από 0.10 έως 0.01, που σημαίνει ότι για μικρές τιμές της **P – value** παίρνουμε όλο αυστηρότερο κατώφλι σημαντικότητας.

Επίσης, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί και στην περίπτωση που θέλουμε να κάνουμε μια ανάλυση της αιτιότητας στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων. Συγκεκριμένα, εντοπίζουμε την κατανομή όλων των συχνοτήτων από την οποία εξάγουμε το κατώφλι σημαντικότητας για μια χρονική στιγμή και στην συνέχεια το επαναλαμβάνουμε για ολόκληρο το χρονικό πεδίο. Στο τέλος θα πάρουμε το κατώφλι σημαντικότητας ως μια επιφάνεια στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας όπου θα απορρίπτονται οι τιμές των αιτιοτήτων που βρίσκονται κάτω από το κατώφλι σημαντικότητας.

4.4 WILCOXON RANK-SUM TEST

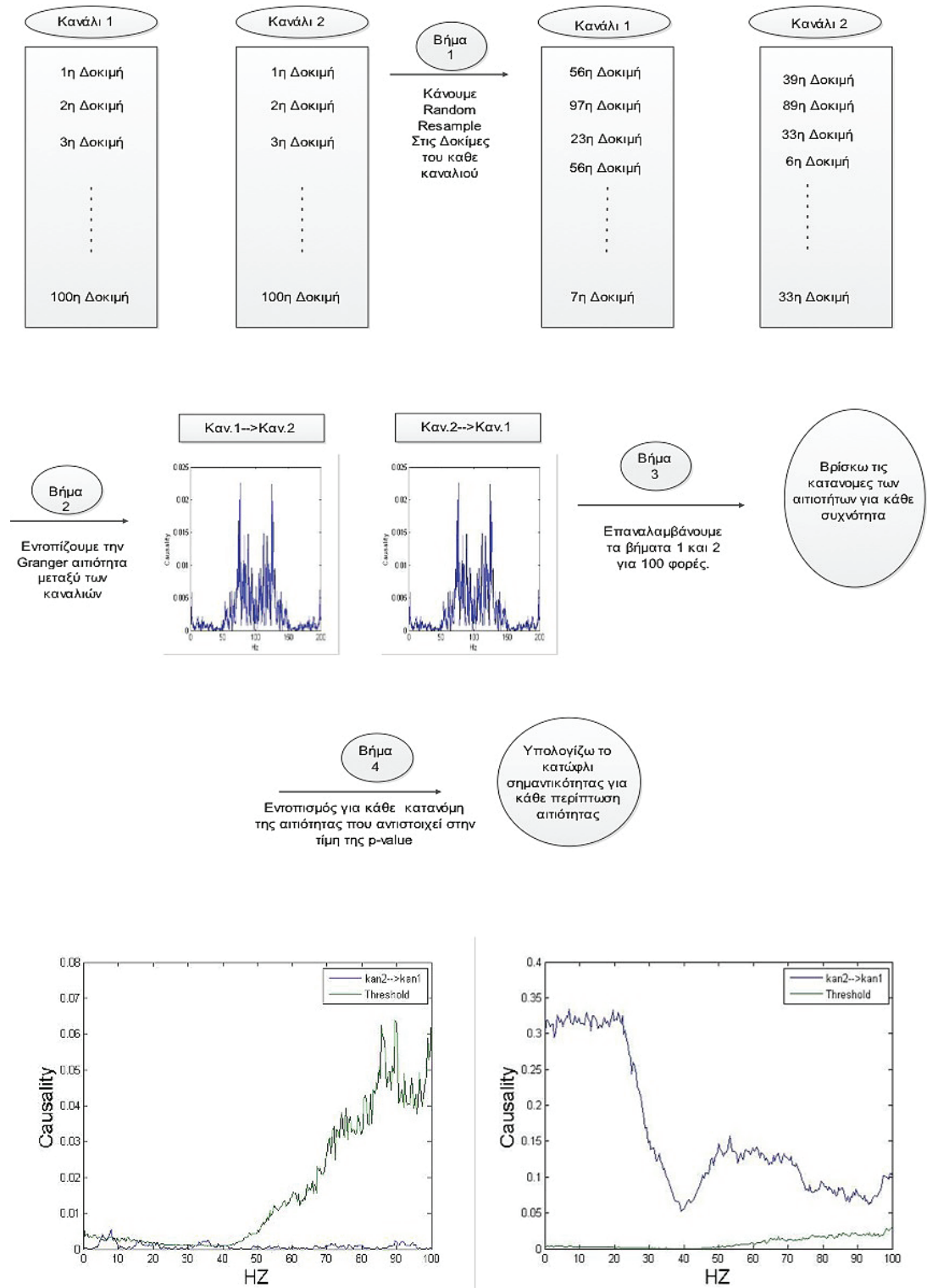
Το Wilcoxon rank-sum test είναι ένας μη-παραμετρικός στατιστικός έλεγχος που χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους λόγω της ιδιότητάς του να είναι μη παραμετρικός. Ουσιαστικά κάνουμε χρήση του Wilcoxon ελέγχου για να συγκρίνουμε δυο πληθυσμούς μεταξύ χωρίς καμία προϋπόθεση ή συνθήκη, δηλαδή χωρίς να έχουμε καμία πληροφορία για το δείγμα (Κατανομή, Μέσος, Διασπορά). Ακόμη σημαντικότερο είναι ότι μπορούμε να κάνουμε χρήση Wilcoxon rank-sum test έχοντας διαφορετικό πλήθος δειγμάτων τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Η ιδέα για το πώς λειτουργεί ο Wilcoxon rank-sum έλεγχος είναι αρκετά απλός. Έστω n_1 και n_2 είναι το μέγεθος των δύο δειγμάτων και N ο συνολικός αριθμός και των δυο δειγμάτων $N = n_1 + n_2$. Στην συνέχεια, αντιστοιχίζουμε τα στοιχεία του δείγματος από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο με το συνολικό πλήθος από τον αριθμό 1 έως το N . Εάν συμπίπτουν οι τιμές του δείγματος, τότε τις αντιστοιχίζουμε με τον ημιάθροισμα των δυο επόμενων αριθμών.

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι αν η υπόθεση είναι μηδενική, τότε δεν υπάρχει καμία σημαντική διαφορά μεταξύ τους, ενώ στην περίπτωση που υπόθεση μας είναι εναλλακτική τότε οι δυο πληθυσμοί έχουν μια σημαντική διαφορά. Την υπόθεση μπορούμε να την υποδείξουμε υπολογίζοντας την p-τιμή [Moore and McCabe, 2005].

Εμείς τον Wilcoxon Rank-sum έλεγχο θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε την σύγκριση μεταξύ των ομάδων κατά την πειραματική επεξεργασία. Είναι προφανές ότι χρησιμοποιούμε τον συγκεκριμένο έλεγχο διότι δεν έχουμε καμία πληροφορία για τις παραμέτρους των δεδομένων, ούτε πληθυσμιακά είναι ίδια μεταξύ τους.

Κεφάλαιο 4



Εικόνα 4.1 Αναπαράσταση της Bootstrap μεθόδου για τον εντοπισμό του κατωφλιού σημαντικότητας (significance threshold) της Granger αιτιότητας κάνοντας χρήση του πρώτου παραδείγματος της παραγράφου 3.6 του κεφαλαίου 3.

4.5 CLUSTER BASE PERMUTATION ΕΛΕΓΧΟΣ

Ο στατιστικός έλεγχος που προτιμάται για την ανάλυση ηλεκτροεγκεφαλογραφικών (EEG) άλλα και μαγνητοεγκεφαλικών (MEG) είναι ένας έλεγχος μη-παραμετρικός. Μη παραμετρικός διότι τα σήματα που αποκομίζουμε από την εγκεφαλική δραστηριότητα δεν μας δίνουν καμία πληροφορία σχετικά με την κατανομή τους και έτσι καταφεύγουμε στην χρήση μη παραμετρικών μεθόδων. Επίσης, ο μη παραμετρικός στατιστικός έλεγχος μας δίνει την ελευθερία της σύγκρισης, σε σχέση με τις συνθήκες του πειράματος οπότε είναι δυνατό να επιλυθούν προβλήματα πολλαπλών συγκρίσεων [Maris and Oostenveld, 2007; 2009].

Τα προβλήματα πολλαπλών συγκρίσεων δημιουργούνται από την μελέτη και καταγραφή των ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων από εκατοντάδες αισθητήρες με αποτέλεσμα να δημιουργούνται συστηματικά σφάλματα στις μετρήσεις. Η επίλυση του προβλήματος αυτού θα επέλθει κάνοντας χρήση μη παραμετρικού στατιστικού ελέγχου.

Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την σύγκριση δύο ή και περισσότερων δειγμάτων, όπως είναι οι t-έλεγχος, Z-έλεγχος και έλεγχος ANOVA. Όποια, όμως, μέθοδος κι αν χρησιμοποιηθεί, είναι απαραίτητη η γνώση παραμέτρων όπως είναι ο μέσος, η κατανομή και η διασπορά των δειγμάτων. Ωστόσο, τα ηλεκτροεγκεφαλογραφικά σήματα δεν έχουν τη δυνατότητα να μας δώσουν τις απαραίτητες πληροφορίες για αυτές τις παραμέτρους και γι' αυτό κρίνεται απαραίτητο για την σύγκριση των δειγμάτων να χρησιμοποιήσουμε μη παραμετρική μέθοδο [Blair and Karniski, 1993; Achim, 2001; Gal' an et al., 1997; Karnisky et al., 1994].

Συγκεκριμένα, για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών συγκρίσεων (MCP) χρησιμοποιείται ο μη παραμετρικός στατιστικός έλεγχος με την εξής μεθοδολογία [Maris and Oostenveld, 2007]:

- 1) Συλλέγουμε όλες τις πειραματικές δοκιμές που είναι προς εξέταση-σύγκριση στα αντίστοιχα υποσύνολα .
- 2) Εφαρμόζουμε τυχαίο διαμερισμό (random partition) των δοκιμών στο κάθε ένα από τα υποσύνολα. Τοποθετούμε με τυχαίο τρόπο τις δοκιμές του πρώτου πειράματος στο πρώτο σύνολο και αντίστοιχα τις δοκιμές του δεύτερου πειράματος.
- 3) Εφαρμόζουμε στατιστικό έλεγχο στα τυχαία διαμερισμένα υποσύνολα.
- 4) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 αρκετές φορές και φτιάχνουμε τον ιστόγραμμα του στατιστικού ελέγχου.
- 5) Υπολογίζουμε από το ιστόγραμμα την p-τιμή που η τιμή της ισούται με αυτή του κατώφλιου σημαντικότητας
- 6) Κάνουμε την σύγκριση μεταξύ σημάτων και εντοπίζουμε τις σημαντικές διαφορές μεταξύ αυτών.

Σε αυτό το σημείο, αφού έχουμε τρέξει την παραπάνω διαδικασία, διαπιστώνουμε ότι τα σημεία σημαντικότητας τα οποία βρίσκονται κάτω από το κατώφλι σημαντικότητας, χωρίζονται σε χρονικά διαστήματα (clusters). Τα clusters μεταξύ τους μπορούν να περάσουν και αυτά από την αντίστοιχη μη-παραμετρική στατιστική μεθοδολογία ώστε να κριθεί ποια clusters είναι σημαντικά [Bullmore et al., 1999].

Ουσιαστικά, κατά τον παραπάνω στατιστικό έλεγχο, που ονομάζεται cluster base permutation [Maris and Oostenveld, 2007], γίνεται σύγκριση των επιμέρους clusters και επιλέγονται τα clusters με την μεγαλύτερη σημαντικότητα στην σύγκριση μας. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η σύγκριση των σημάτων με ένα στατιστικό έλεγχο. Εμείς χρησιμοποιούμε τον Wilcoxon rank sum έλεγχο, όπου παίρνουμε την αρχική εικόνα των cluster και στην συνέχεια εφαρμόζουμε την μη παραμετρική μέθοδο που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Κεφάλαιο 4

Αφού έχουμε κάνει τυχαίες μεταθέσεις (permutation) στα εν λόγω σήματα ως προς το πεδίο του χρόνου, φτιάχνουμε το ιστόγραμμα των μεγαλύτερων clusters και αντιστοιχίζουμε για μια τιμή της p -value το σημαντικό μέγεθος των clusters της κατά Wilcoxon σύγκρισης.

Κεφάλαιο 5

*ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΓΙΑ
ΤΗΝ ΔΙΑΝΟΗΤΙΚΗ
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ
ΔΡΩΣΑΣ ΜΝΗΜΗΣ
ΣΕ ΕΠΙΛΗΠΤΙΚΑ ΚΑΙ
ΥΓΙΑ ΠΑΙΔΙΑ*

ΣΚΟΠΟΣ

Σκοπός του πειράματος είναι η μελέτη της δρώσας μνήμης (Working Memory) παιδιών με επιληψία και η σύγκρισή τους με υγιή παιδιά. Εμείς θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τις διαφορές στην δικτύωση και διασύνδεση των νευρώνων μεταξύ των επιληπτικών και φυσιολογικών παιδιών εφαρμόζοντας την μέθοδο της Granger αιτιότητας.

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πείραμα που θα εξετάσουμε πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο του Professor Lagae στο University Hospital Leuven του Βελγίου από τους I.Myatchin και L.Lagae [Myatchin and Lagae, 2011]. Στο συγκεκριμένο πείραμα εξεταστήκαν 62 παιδιά εκ των οποίων τα 31 **είναι** επιληπτικά και ηλικίες τους κυμαίνονται από 6 έως 16 χρόνων. Τα παιδιά υποβλήθηκαν σε έναν οπτικό-χωρικό (visuo-spatial) έλεγχο από τον οποίο μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες για την δρώσα μνήμη. Ο έλεγχος της δρώσας μνήμης των παιδιών απαρτίζεται από τις ενότητες των one-backmatching (BM1) και two-backmatching (BM2). Για την κάθε ενότητα θα γίνει σύγκριση μεταξύ των δυο ομάδων.

Τα πειραματικά αποτελέσματα αναλύθηκαν εφαρμόζοντας την μέθοδο ERP (event-related potentials) και στην συνέχεια συγκρίθηκαν οι δύο ομάδες. Τα αποτελέσματα για την πρώτη ενότητα του ελέγχου (BM1) έδειξαν κάποια εντυπωσιακή διαφορά, σε αντίθεση με την ενότητα BM2, όπου τα παιδιά με επιληψία έκαναν πολλά σημαντικά σφάλματα, πράγμα που φάνηκε στην ανάλυση ERP. Συγκεκριμένα, οι διάφορες εντοπίστηκαν στην μετώπια και κεντρική περιοχή του εγκεφάλου στο χρονικό διάστημα των 300 και 500ms έχοντας τα παιδιά με επιληψία υψηλότερο πλάτος διαφοράς.

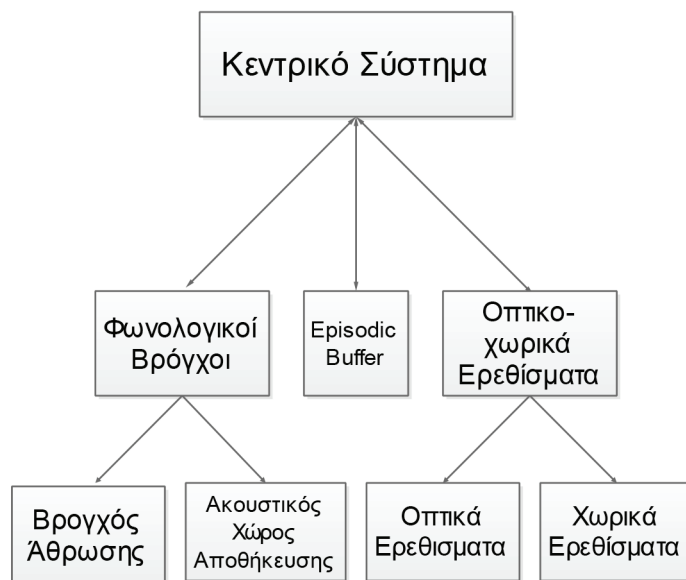
Εμείς θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ποιες περιοχές ενεργοποιούνται σε ένα αντιστοίχο χρονικό διάστημα κάνοντας εφαρμογή της μη παραμετρικής μεθόδου Granger αιτιότητας για κάθε μια από τις ενότητες του πειράματος, όπου τελικά θα γίνει η σύγκριση των δύο ομάδων.

5.2 ΔΡΩΣΑ ΜΝΗΜΗ (WORKING MEMORY)

Η δρώσα μνήμη είναι το ελάχιστο νοητικό σύστημα το οποίο είναι ικανό να αποθηκεύσει αλλά και να διαχειριστεί πληροφορίες για ένα μικρό χρονικό διάστημα [Baddeley and Hitch, 1974; Baddeley, 2000; Repovs and Baddeley, 2006]. Η δρώσα μνήμη αποτελείται από τα υποσυστήματα της αποθήκευσης και της επεξεργασίας οπτικής (visual) και προφορικής (verbal) πληροφορίας, τα οποία συντονίζονται από το κεντρικό εκτελεστικό τμήμα. Επίσης, είναι μια από τις βασικότερες λειτουργίες για την επεξεργασία νοητικών πληροφοριών, όπως είναι παραδείγματος χάρι το διάβασμα, η γλώσσα, ο προφορικός λόγος, μαθηματικές ικανότητες και άλλες διανοητικές ικανότητες.

Το πρώτο θεωρητικό μοντέλο για την δρώσα μνήμη διατυπώθηκε το 1974 από τους Baddeley και Hitch [Baddeley and Hitch, 1974] (εικόνα 5.1) και θεώρησαν ότι το κεντρικό εκτελεστικό σύστημα αποτελείται από δυο υποσυστήματα αποθήκευσης. Σε γενικές γραμμές, το κεντρικό εκτελεστικό σύστημα είναι το σύστημα το οποίο είναι υπεύθυνο για τον αποπροσανατολισμό της εστίασης της προσοχής και την διατήρηση πληροφοριών που αφορά οπτικά και προφορικά ερεθίσματα. Συνεπώς, τα δύο υποσυστήματα του κεντρικού εκτελεστικού συστήματος είναι οι φωνολογικοί βρόγχοι (Phonological loop) και τα οπτικά-χωρικά ερεθίσματα (visual spatial sketchpad), τα οποία είναι υπεύθυνα για την διατήρηση και αποθή-

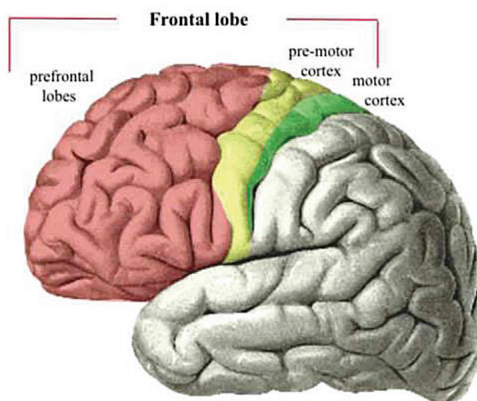
κευση πληροφοριών που αφορούν το κάθε υποσύστημα, δηλαδή, οπτικές και προφορικές πληροφορίες. Ο φωνολογικός βρόγχος, όπως είναι φυσικό, απαρτίζεται από τον βρόγχο της άρθρωσης (προφορικό) και από την αποθήκευση ακουστικών πληροφοριών. Το οπτικο-χωρικό ερέθισμα χωρίζεται στην αποθήκευση της οπτικής και χωρικής πληροφορίας. Το 2000 ο Baddeley πρόσθεσε άλλη μια συνιστώσα στο μοντέλο της δρώσας μνήμης, την Episodic buffer, η οποία είναι υπεύθυνη για την ενσωμάτωση των φωνολογικών, οπτικών και χωρικών πληροφοριών αλλά και για πιθανή άλλη πληροφορία που δεν συμπεριλαμβάνεται στα δυο κεντρικά υποσυστήματα.



Εικόνα 5.1. Προσομοίωση του μοντέλου δρώσας μνήμης των Baddeley και Hitch.

Το μοντέλο του Baddeley δεν είναι το μόνο θεωρητικό μοντέλο για την δρώσα μνήμη. Υπάρχουν διάφορα μοντέλα που προσπαθούν να εξηγήσουν την έννοια της δρώσας μνήμης. Ένα από αυτά είναι του Cowah που προτείνει ότι η δρώσα μνήμη είναι απλά ένα υποσύστημα της πληροφορίας που αφορά την εστίαση της προσοχής μέσα σε ένα χρονικό διάστημα. κατά αυτόν, δεν υπάρχει η διατήρηση της στιγμιαίας πληροφορίας και, στην ουσία, η δρώσα μνήμη είναι ένα υποσύστημα της υπάρχουσας μνήμης.

Εκτός από την θεωρητική μελέτη της δρώσας μνήμης, σημαντική είναι η εξέτασή της σε επίπεδο νευρώνων, δηλαδή να δούμε ποιες περιοχές ενεργοποιούνται εξαιτίας της δρώσας μνήμης. Έχει φανεί ότι οι συνιστώσες της δρώσας μνήμης: 1) δεν είναι εύκολα διακριτές στις περιοχές του εγκεφάλου (γι' αυτό για την εξέταση της δρώσας μνήμης πρέπει ο εγκέφαλος να μην δέχεται εξωτερικά ερεθίσματα) και 2) οι περιοχές που ενεργοποιούνται είναι οι πρωταρχικές αισθητήριες περιοχές του εγκεφάλου και είναι η προμετωπιαία περιοχή (prefrontal region) και η πλευρική περιοχή (Parietal region). Η προμετωπιαία περιοχή χωρίζεται στις ventromedial και dorsolateral περιοχές, όπου η πρώτη είναι υπεύθυνη για την διατήρηση διάφορων τύπων πληροφοριών και η δεύτερη ειδικεύεται στην συνεχή παρακολούθηση και διατήρηση πληροφοριών.



Εικόνα 5.2. Η περιοχή της μετωπιαίας περιοχής και οι επιμέρους περιοχές της [thebrain.mcgill.ca].

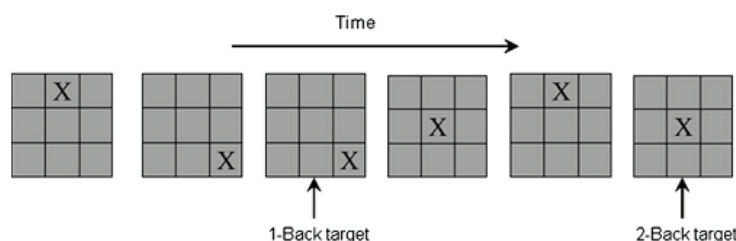
Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι, η δυσλειτουργία της μετωπιαίας νοητική περιοχής συχνά μπορεί να επιφέρει ποικίλες νευροψυχιατρικές (neuropsychiatric) διαταραχές, όπως είναι οι έλλειψη προσοχής, υπερκινητικότητα, κατάθλιψη, αυτισμός κ.α [Filley, 2000; Powell, 2004]. Ακόμα και η επιληψία είναι γνωστό από μελέτες ότι προκαλείται συχνά από διαταραχές της μετωπιαίας νοητικής περιοχής. Ύστερα, από μελέτες σε ενήλικους και παιδιά με επιληψία, φάνηκε ότι το σύνδρομο αυτό έχει αρχή στην παιδική ηλικία εμφανίζοντας τότε τα πρώτα στάδια της (begin epilepsy syndromes), όπου έχουν διαγνωστεί στις ίδιες νοητικές περιοχές με αυτές που περιγράψαμε προηγουμένως (Meltz andLunz, 1999; Gulgonen 2000 ; Deltour 2007).

Σύμφωνα με τα παραπάνω η νοητική δυσλειτουργία που προκαλεί η επιληψία σε επίπεδο νευρώνων βρίσκεται περίπου στις ίδιες περιοχές όπου ενεργοποιείται η δρώσα μνήμη. Για τον λόγο, αυτό το συγκεκριμένο πείραμα συγκρίνει τις νοητικές δραστηριότητες μεταξύ επιληπτικών και φυσιολογικών ατόμων ύστερα από έναν έλεγχο μνήμης και επιλέγει το δείγμα του να είναι παιδιά (6-16 ετών) για να εξετάσει κατά πόσο η επιληψία στα πρώτα της στάδια επηρεάζει την δρώσα μνήμη. Η δικιά μας μελέτη είναι να εξετάσουμε ποιες περιοχές του εγκεφάλου επηρεάζουν άλλες περιοχές κατά τον έλεγχο της δρώσας μνήμης και να δούμε αν υπάρχει διαφοροποίηση της συνδεσιμότητας των περιοχών μεταξύ των επιληπτικών και φυσιολογικών παιδιών.

5.3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

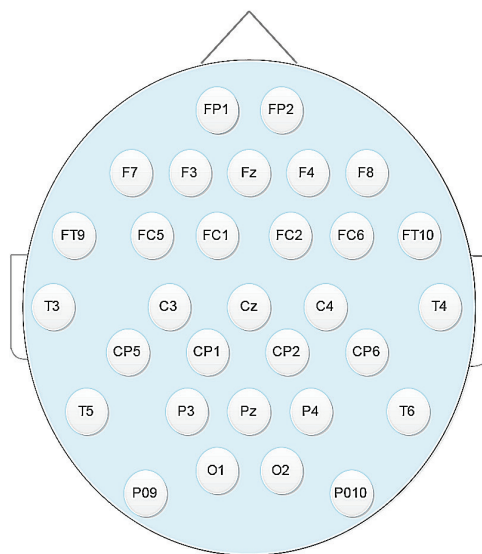
Τα παιδιά εξετάστηκαν σε δυο οπτικο-χωρικούς ελέγχους δρώσας μνήμης (one-backmatching, two-backmatching task). Τα παιδιά παρατηρούσαν ένα τετράγωνο πλαίσιο 3x3 κελιών με γκρι φόντο διαστάσεων 9x9cm, στο κέντρο της οθόνης υπολογιστή σε απόσταση ενός μέτρου από τα μάτια του κάθε εξεταζόμενου. Ένας μαύρος στόχος σχήματος Χ εμφανιζόταν ψευδοτυχαία σε ένα από τα κελιά του πλαισίου για 1.5sec και ύστερα από μια καθυστέρηση 1.0-1.5sec εμφανιζόταν ο επόμενος στόχος. Κατά την διάρκεια του πρώτου πειράματος (one-backmatching, BM1) τα παιδιά έπρεπε να θυμούνται την θέση του στόχου στο αμέσως προηγούμενο πλαίσιο και στο δεύτερο πείραμα (two-backmatching, BM2) τα παιδιά έπρεπε να θυμούνται την τοποθεσία του στόχου στο πλαίσιο που εμφανιζόταν πριν από το προηγούμενο πλαίσιο. Τα παιδιά έδιναν τις απαντήσεις τους πατώντας ένα κουμπί, όπου εξετάζονταν η ακρίβεια και η ταχύτητά τους. Τα παιδιά κάθονταν αναπαυτικά ώστε να μειωθούν

οποιοσδήποτε κινήσεις των μυών και έτσι να δώσουν όσο το δυνατόν καθαρότερο EEG σήμα. Το μήκος του σήματος για κάθε περίπτωση ήταν 4min, που συμπεριλάμβανε 80 δοκιμές, 24 εκ των οποίων ήταν με στόχο.



Εικόνα 5.3 Τα δύο πειράματα μνήμης BM1 και BM2 [Myatchin and Lagae, 2011].

Στο κάθε υποψήφιο τοποθετήθηκαν ηλεκτρόδια σύμφωνα με το διεθνές 10-10 σύστημα και χρησιμοποιήθηκαν ηλεκτρόδια Ag/AgCl. Στο σύνολο τα ηλεκτρόδια ήταν 31 τα οποία τοποθετούνται στις θέσεις Fp1, Fp2, F3, F4, F7, F8, Fz, FC1, FC2, FC5, FC5, FC6, FT6, FT10, C3, C4, Cz, CP1, CP5, CP6, T3, T4, T5, T6, P3, P4, Pz, P09, P010 και O2. Επίσης τοποθετήθηκαν ηλεκτρόδια κατά μήκος και πλάτος στην περιοχή γύρω από τα μάτια, έτσι ώστε να γίνει αφαίρεση των κινήσεων των ματιών από τα σήματα EEG. Η δειγματική συχνότητα των EEG σημάτων είναι στα 1000Hz και το εύρος συχνοτήτων των σημάτων κυμαίνεται από 0.095-70Hz.



Εικόνα 5.4. Κάτοψη του ανθρώπινου κεφαλιού με τις θέσεις των ηλεκτροδίων σε περιοχές του εγκεφάλου.

Η τελική μορφή των δεδομένων δόθηκε κάνοντας χρήση της μεθόδου ICA (independent component analysis) όπου αφαιρέθηκαν από το συνεχές σήμα ο θόρυβος που προερχόταν από τις κινήσεις των ματιών. Συνεπώς, τα δεδομένα για κάθε ένα από τα πειράματα χωρίστηκαν σε δύο ομάδες: στην πρώτη ομάδα ήταν τα δεδομένα όπου τα παιδιά κοιτούσαν τον στόχο (target) και στην δεύτερη ομάδα τα δεδομένα όπου αποφάσιζαν για το πού βρισκόταν ο στόχος (non target). Επίσης, έγινε έλεγχος στις δοκιμές των δεδομένων για τυχόν επιληπτικές δραστηριότητες και αφαιρέθηκαν οι δοκιμές που ξεπερνούσαν τα

$\pm 150\mu\text{Volt}$. Τελικά, από το πρώτο στάδιο του πειράματος BM1 υπήρξαν κατά μέσο όρο 43 δοκιμές για τα target δεδομένα και για τα non target υπήρξαν κατά μέσο όρο 103 δοκιμές. Κατά το δεύτερο μέρος του πειράματος BM2 υπήρξαν κατά μέσο όρο 36 και 103 δοκιμές για τα target και non target αντίστοιχα που αφορούσαν τα φυσιολογικά παιδιά και για τα επιληπτικά παιδιά υπήρξαν κατά μέσο όρο 29 και 100 δοκιμές για τα δεδομένα των target και non target αντίστοιχα.

5.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η επεξεργασία των δεδομένων που είχαμε στην διάθεση μας ήταν πολύ μεγάλη σε όγκο και για αυτό κρίθηκε απαραίτητο η επεξεργασία των δεδομένων να πραγματοποιούνταν σε παράλληλο σύστημα υπολογιστών για εξοικονόμηση χρόνου. Στα δεδομένα, δοκιμάσαμε την μη παραμετρική μέθοδο Granger αιτιότητας για την μελέτη του νευρωνικού δικτύου στα επιληπτικά και υγιή παιδιά, ώστε τελικά να γίνει η σύγκριση των δυο αυτών ομάδων και να αποφανθούμε αν η πρώιμη επιληψία επηρεάζει τις περιοχές του εγκεφάλου όπου οφείλεται η δρώσα μνήμη. Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για τον εντοπισμό Granger αιτιότητας άλλα και η περαιτέρω επεξεργασία είναι ίδια για κάθε παιδί που εξετάστηκε στο πείραμα.

Αρχικά, αποφασίσαμε ότι η Granger αιτιότητα θα εξετασθεί σε περιοχές του εγκεφάλου και όχι για κάθε κανάλι [Nikolaou et al., 2012] λόγω υπολογιστικού κόστους. Έτσι, ομαδοποιήσαμε τα κανάλια σε περιοχές οι οποίες χωρίζονται στις:

- ➔ Αριστερά και Δεξιά προμετωπιαίες (frontal), τα κανάλια των οποίων είναι Fp1, F7, F3, FT9 και Fp2, F8, F4, FT10 αντίστοιχα.
- ➔ Αριστερά και Δεξιά κεντρικές (central), τα κανάλια των οποίων είναι FC5, FC1, T3, C3, CP5, CP1 και FC6, FC2, T4, C4, CP6, CP2 αντίστοιχα.
- ➔ Αριστερά και Δεξιά πίσω (posterior), τα κανάλια των οποίων είναι T5, P3, PO9, O1 και T6, P4, PO10, O2 αντίστοιχα.
- ➔ Midline περιοχή, τα κανάλια της οποίας είναι Fz, Cz, Pz

Συνεπώς, έχουμε μόνο 7 κανάλια υπό επεξεργασία, που για την κάθε περιοχή έχουμε πάρει τον μέσο όρο των καναλιών. Αρχίζοντας με αυτόν τον τρόπο επεξεργασία θα έχει μικρότερο υπολογιστικό κόστος, αλλά και θα είμαστε σε θέση να έχουμε σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων σύγκρισης.

Η δεύτερη φάση της επεξεργασία των δεδομένων είναι ο υπολογισμός της Granger αιτιότητας με την μη-παραμετρική μέθοδο, όπου θα ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα με αυτά του δεύτερου παραδείγματος της παραγράφου 3.4, με την διαφορά ότι θα γίνει υπολογισμός Conditional αιτιότητας στα πεδία του χρόνου-συχνότητων μέσω μετασχηματισμού wavelet. Η διαδικασία είναι:

- ➔ Επιλογή του χρονικού διαστήματος που παρατηρήθηκε από προηγούμενη έρευνα [Myatchin and Lagae, 2011], το οποίο βρίσκεται στα -200-600Sec με δειγματική συχνότητα $F_s=1000$ και επιλογή του εύρους συχνοτήτων 4.18-58.31Hz όπου αντιστοιχούν 20 σημεία στο πεδίο των συχνοτήτων.
- ➔ Υπολογισμός του πίνακα φασματικής πυκνότητας κάνοντας χρήση του συνεχής μετασχηματισμού wavelet με μητρική συνάρτηση την μιγαδική Morlet με κεντρική συχνότητα $f_c=2\text{Hz}$ και εύρος $f_b=2\text{Hz}$.

- ➔ Υπολογισμός της Άμεσης (Pair Wise) και δεσμευμένης (Conditional) αιτιότητας για κάθε άτομο στα πεδία του χρόνου-συχνότητων.

Κατά την τρίτη φάση της επεξεργασίας πραγματοποιούμε διαχωρισμό των άμεσων (direct) και των έμμεσων (indirect) συνδέσμων. Εφαρμόζουμε την μη-παραμετρική μέθοδο bootstrap υπολογίζοντας το κατώφλι σημαντικότητας, όπου ελέγχουμε την δεσμευμένη αιτιότητα ώστε να αποφασίσουμε αν είναι άμεση ή έμμεση η αιτιότητα για μια χρονική στιγμή δεδομένης μιας συχνότητας.

- ➔ Εφαρμογή της μεθόδου Bootstrap εφαρμόζοντας 200 permutation για κάθε άτομο και υπολογισμός του κατωφλίου σημαντικότητας χρησιμοποιώντας $p\text{-value} < 10^{-4}$
- ➔ Έλεγχος των δεσμευμένων αιτιοτήτων με το κατώφλι σημαντικότητας και μηδενισμός των άμεσων συνδέσμων αν το κατώφλι έχει μεγαλύτερη τιμή από αυτή της αιτιότητας. Διατήρηση των άμεσων συνδέσμων στην αντίστροφη διαδικασία για κάθε σημείο του χρόνου για μια δεδομένη συχνότητα.
- ➔ Τελική διαμόρφωση του νευρωνικού δικτύου που απαρτίζεται μόνο από άμεσους συνδέσμους για κάθε άτομο στα πεδία του χρόνου-συχνότητων.

Τέλος, η τέταρτη φάση της επεξεργασίας αφορά την σύγκριση των επιμέρους ομάδων που πήραν μέρος στο πείραμα με την χρήση στατιστικών μεθόδων και έλεγχο μέτρων δικτύων ώστε να αποφανθούμε τις διαφορές μεταξύ των δυο ομάδων.

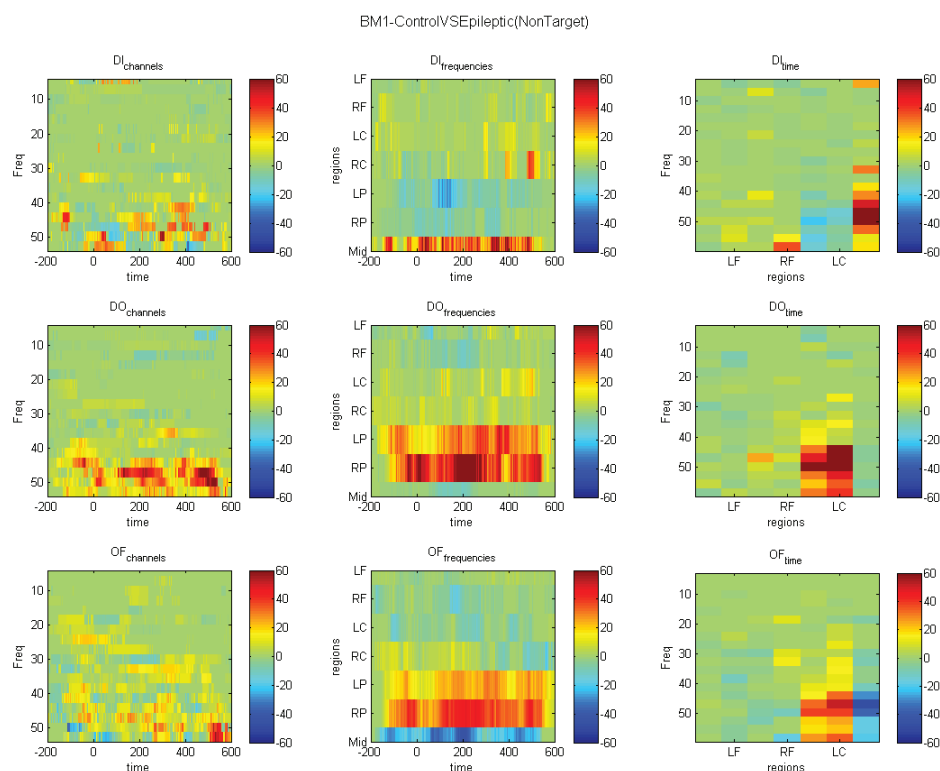
- ➔ Οι συγκρίσεις των ομάδων που πραγματοποιήθηκαν στο πείραμα είναι οι εξής παρακάτω:
 - Μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών στην ενότητα BM1 για την περίπτωση target
 - Μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών στην ενότητα BM1 για την περίπτωση Non target
 - Μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών στην ενότητα BM2 για την περίπτωση target
 - Μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών στην ενότητα BM2 για την περίπτωση Non target
- ➔ Για την σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων εφαρμόζουμε Wilcoxon στατιστικό έλεγχο όπου παίρνουμε χρονικά σημεία σημαντικότητας μεταξύ των ομάδων
- ➔ Εφαρμογή Cluster Base Permutation [Maris and Oostenveld, 2007] για την εύρεση του χρονικού διαστήματος, όπου έχουμε σημαντικότερη διαφοροποίηση στις περιοχές μεταξύ των ομάδων που είχαμε συγκρίνει.
- ➔ Εφαρμογή Z-score για την διαφοροποίηση της αιτιότητας σε όλο τον χρόνο από την base-line.
- ➔ Υπολογισμός μέτρων δικτύου degree in, degree out και outflow για την αποτελεσματικότερη απεικόνιση των αποτελεσμάτων.

5.5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα τα οποία εξάγαμε από το πείραμα τα προσομοιώσαμε με την λογική της εργασίας [Adhikari, et al. 2013]. Παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα υπολογίζοντας τα τρία μέτρα δικτυού που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο: degree in, degree out και outflow. Κατά τον υπολογισμό του degree in προσθέσαμε όλες τις αιτιότητες που προκαλούν όλα τα κανάλια σε ένα και στην συνέχεια, βρίσκοντας τον μέσο τους, το degree out είναι ο μέσος των αιτιοτήτων των καναλιών τα οποία προκαλούν όλα τα υπόλοιπα. Τέλος το outflow είναι διαφορά των degree in και degree out. Τα συγκεκριμένα μεγέθη υπολογίστηκαν ώστε να γίνει πιο συνοπτική η παρουσίαση των αποτελεσμάτων και ταυτόχρονα να μην χάνεται καμία χρήσιμη πληροφορία η οποία θα κοστίσει στα αποτελέσματα.

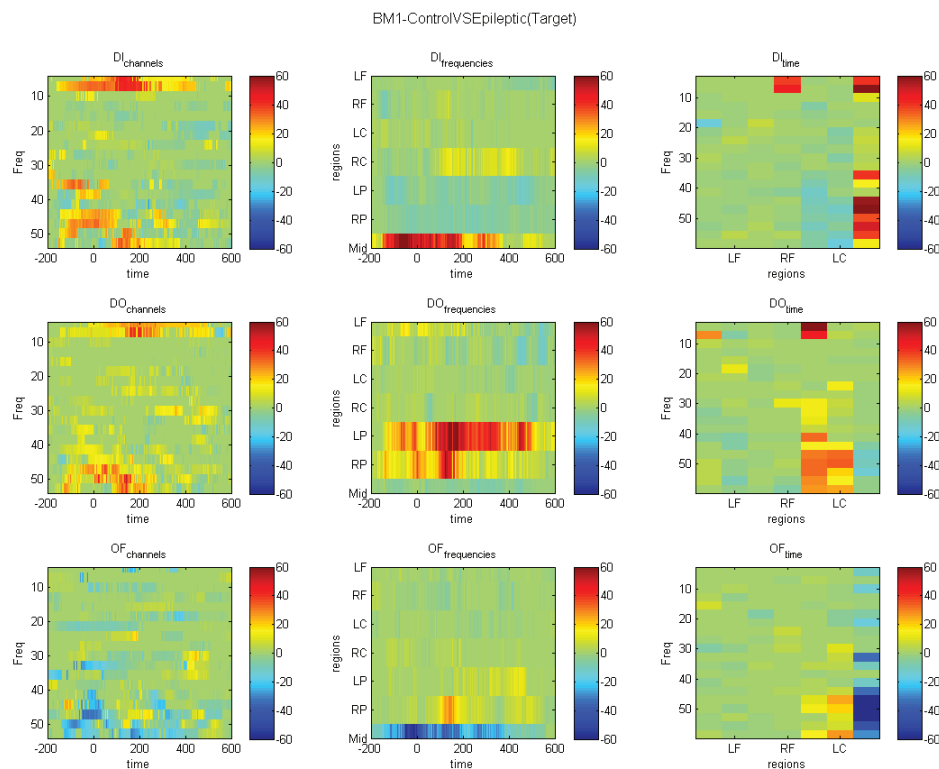
Αφού έγιναν οι υπολογισμοί, χωρίσαμε τα αποτελέσματα σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις: στην πρώτη περίπτωση εντοπίσαμε τον μέσο ως προς τις περιοχές με αποτέλεσμα να έχουμε αναπαράσταση στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων ως τις περιοχές που βλέπουμε τις επί τις εκατό σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων σύγκρισης. Στην δεύτερη περίπτωση κάνουμε αντίστοιχα ανάλυση στο πεδίο του χρόνου συναρτήσει των περιοχών κρατώντας τον μέσο των συχνοτήτων. Τέλος, στην τρίτη περίπτωση γίνεται ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων συναρτήσει των περιοχών ως προς τον χρόνο (εικόνες 5.6-5.9).

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι στα τελικά πειραματικά δεδομένα δεν έγινε ο τελικός στατιστικός έλεγχος των cluster base permutation ώστε να εντοπιστούν τα σημαντικά clusters και να αφαιρεθούν όσα έχουν τα υπόλοιπα τα οποία δημιουργήθηκαν λόγω τυχαιότητας.



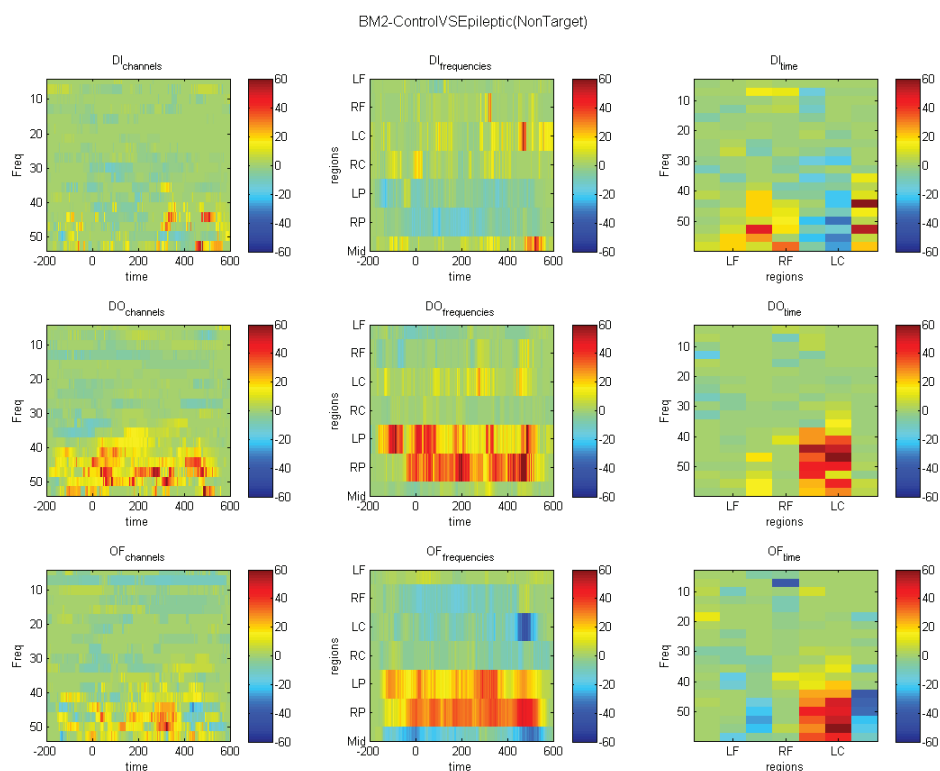
Εικόνα 5.6 Πειραματικά αποτελέσματα των συγκρίσεων μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών για το πείραμα BM1 στην περίπτωση Nontarget δεδομένων. Οι γραμμές του γραφήματος απεικονίζουν τα degree in, degree out και outflow αντίστοιχα, ενώ οι στήλες την ανάλυση ως προς τις περιοχές, συχνοτήτες και χρόνος.

Στα παραπάνω πειραματικά αποτελέσματα της εικόνας 5.6 βλέπουμε τα διαστήματα σημαντικότητας μεταξύ των δυο ομάδων του πειράματος BM1 να βρίσκονται στο degree out στις δυο πίσω περιοχές του εγκεφάλου (left and right posterior) για το χρονικό διάστημα [-100-500] στο εύρος συχνοτήτων 45-50 Hz. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι το διάστημα [100-200] έχει την μεγαλύτερη σημαντική διαφορά στην δεξιά πίσω περιοχή στην συχνότητα των 50Hz.



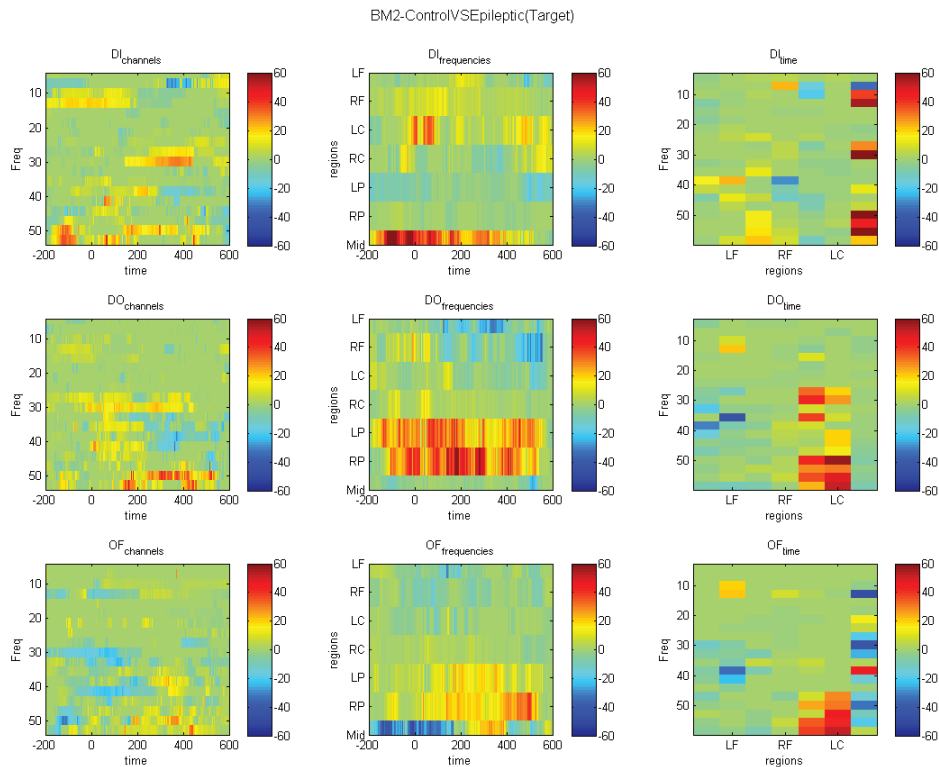
Εικόνα 5.7 Πειραματικά αποτελέσματα των συγκρίσεων μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών για το πείραμα BM1 στην περίπτωση των target δεδομένων. Οι γραμμές του γραφήματος απεικονίζουν τα degree in, degree out και outflow αντίστοιχα, ενώ οι στήλες την ανάλυση ως προς τις περιοχές, συχνότητες και χρόνο.

Στην παράπανω εικόνα 5.7 εξετάζουμε την ίδια περίπτωση με προηγούμενως, άλλα με δεδομένα των target εντοπίζουμε δύο σημαντικά διαστήματα στην συγκριση των δύο ομάδων στα degree in και degree out. Η πρώτη διαφορά εντοπίζεται στα degree in τα οποία βρίσκονται στην κεντρική περιοχή (middle) μεταξύ του διαστήματος -150-200sec στις συχνότητες από 30-50 Hz και το δεύτερο σημαντικό cluster εντοπίζεται στο degree out στην αριστερά πίσω περιοχή στο χρονικό διάστημα των 100-200msec στις χαμηλές συχνότητες.



Εικόνα 5.8 Πειραματικά αποτελέσματα των συγκρίσεων μεταξύ υγιών και επιληπτικών παιδιών για το πείραμα BM2 στην περίπτωση των Nontarget δεδομένων. Οι γραμμές του γραφήματος απεικονίζουν τα degree in, degree out και outflow αντίστοιχα, ενώ οι στήλες την ανάλυση ως προς τις περιοχές, συχνότητες και χρόνο.

Στην παραπάνω εικόνα 5.7 όπου γίνεται η εξέταση στην ενότητα BM2 μεταξύ των υγιών και επιληπτικών παιδιών παρατηρούμε σημαντικό διάστημα στο degree out στην περιοχή των συχνοτήτων 40-45Hz που αφορά την δεξιά πίσω περιοχή στα χρονικά διαστήματα των 180-220s και στα 480-520s.



Εικόνα 5.9 Πειραματικά αποτελέσματα των συγκρίσεων μεταξύ υγιή και επιληπτικών παιδιών για το πείραμα BM2 στην περίπτωση των Target δεδομένων. Οι γραμμές του γραφήματος απεικονίζουν τα degree in, degree out και outflow αντίστοιχα, ενώ οι στήλες την ανάλυση ως προς τις περιοχές, συχνότητες και χρόνος

Στην εικόνα 5.9 βλέπουμε τις σημαντικές διαφορές στο degree out στο χρονικό διάστημα 100-300s στην πίσω δεξιά περιοχή στις συχνότητες από 50-60Hz, όπως επίσης βλέπουμε στο degree in περιοχή σημαντικότητας στην baseline περιοχή.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εφαρμογή της μη παραμετρικής μεθόδου Granger αιτιότητας σε πειραματικά δεδομένα ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων έδειξε να ανταποκρίνεται βλέποντας τα τελικά αποτελέσματα των εικόνων 5.6-5.9. Συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε ότι οι σημαντικές διαφορές που λάβαμε κατά την πειραματική επεξεργασία μεταξύ των επιληπτικών και υγιών παιδιών βρίσκονται στις πίσω περιοχές (posterior) του εγκεφάλου και κυρίως στην δεξιά πίσω περιοχή στο χρονικό διαστήματα 0-200sec για την BM1 πειραματική ενότητα και στην baseline περιοχή στην BM2.

Πρέπει να αναφερθεί ότι δεν έγινε ο τελικός στατιστικός έλεγχος cluster base permutation και έτσι δεν έχουμε μια περισσότερο ξεκάθαρη εικόνα των περιοχών σημαντικότητας ώστε να αποφανθούμε συγκεκριμένα και με ακρίβεια τις διαφορές των συγκρίσεων των ομάδων. Παρόλα αυτά, μπορούμε κατά προσέγγιση να υποδείξουμε τις διαφορές των συγκρίσεων σε ένα ευρύτερο χρονικό διάστημα με μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων και να βγάλουμε τα συμπεράσματα μας πάνω σε αυτά.

Ακόμα όμως και με τις συγκεκριμένες συνθήκες επεξεργασίας των δεδομένων μπορέσαμε να εξάγουμε πληροφορίες για την νευρωνική δικτύωση επιληπτικών ατόμων σε σχέση με υγιή υπό ορισμένες συνθήκες, ώστε να δοθεί για περαιτέρω μελέτη στον κλάδο της ιατρικής και συγκεκριμένα της νευροεπιστήμης.

Σύνοψη

Σκοπός της διπλωματική εργασίας ήταν η μοντελοποίηση και υπολογιστική ανάλυση χρονοσειρών με τη μέθοδο της μη παραμετρικής Granger αιτιότητας. Η συγκεκριμένη μέθοδος μελετήθηκε με την βοήθεια προσομοιωμένων δεδομένων και ελέγχθηκε για την ορθότητα της για τα μεν πεδία των συχνοτήτων με ένα απλό μοντέλο τριών καναλιών, για τα δε πεδία του χρόνου-συχνοτήτων με ένα μοντέλο δύο καναλιών. Επίσης, η συγκεκριμένη μέθοδος συγκρίθηκε με αυτή της παραμετρικής μεθόδου στα ίδια προσομοιωτικά μοντέλα όπου επαληθεύτηκε και η ορθότητα του.

Το κομβικό σημείο της μη παραμετρικής μεθόδου εντοπίζεται στην παραγοντοποίηση του πίνακα φασματικής πυκνότητας, που πραγματοποιήθηκε κάνοντας εφαρμογή του θεωρήματος Wilson. Στην συνέχεια, αφού κάναμε τον υπολογισμό των πινάκων μεταφοράς και σφάλματος, εκτιμήσαμε την άμεση και δεσμευμένη τιμή της Granger αιτιότητας.

Τα κύριο προτερήματα της μη παραμετρικής μεθόδου είναι ότι είναι ελεύθερή από την εξάρτηση των παραμέτρων του AR μοντέλου το οποίο αποτυγχάνει στο υπολογισμό της Granger αιτιότητας για μεγάλες τάξεις παραμέτρων και επιπλέον ο άμεσος υπολογισμός της φασματικής πυκνότητας στις Fourier και wavelet βάσεις με τον μη παραμετρικό φασματικό υπολογισμό έχει λιγότερες υποθέσεις από αυτό της παραμετρικής μεθόδου. Παρόλα αυτά αντιμετωπίζουμε άλλων ειδών παραμετρικά προβλήματα, όπως είναι η κατάλληλος αριθμός tapers ή η κατάλληλη επιλογή κεντρικής συχνότητας στην συνάρτηση Morlet.

Επίσης, η μέθοδος μελετήθηκε και εξετάσθηκε πάνω σε ηλεκτροεγκεφαλογραφικά σήματα, όπου αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της άμεσης και έμμεσης κατευθυντικότητας των αιτιότητων υπολογίζοντας την δεσμευμένη Granger αιτιότητα. Συγκεκριμένα έγινε χρήση του μη παραμετρικού Bootstrap στατιστικού ελέγχου ώστε να φανεί η διαφοροποίηση της άμεσης και έμμεσης αιτιότητας.

Η Granger αιτιότητα έθεσε τις βάσεις για την περαιτέρω μελέτη και επίλυση προβλημάτων που απασχολούν την επιστημονική κοινότητα του σήμερα. Μια από τις προεκτάσεις της Granger αιτιότητας είναι η μελέτη μη γραμμικών προβλημάτων. Σε αυτήν γίνεται μεν η ανάπτυξη της μη-γραμμικής Granger αιτιότητας [Gourevitch et al., 2006; Pereda et al. 2005], συναντώνται όμως αρκετά προβλήματα στην επίλυση πρακτικών ζητημάτων. Ακόμη, παρουσιάζεται ενδιαφέρον πάνω στην ανάλυση δυναμικών μοντέλων που έχουν ως κύριο άξονα την αιτιότητα που προκύπτει από σύστημα νευρωνικού δικτύου. Έτσι δημιουργούμε δυναμικά συστήματα αιτιότητας (dynamic causal model) τα οποία βρίσκονται σήμερα στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος.

Σε γενικές γραμμές η μελέτη της μη παραμετρικής Granger αιτιότητας μας δίνει την δυνατότητα επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων τα οποία αφορούν την νευρωνική δικτύωση του ανθρώπινου εγκεφάλου και την καθιστά ένα σημαντικό εργαλείο στον κλάδο των νευροεπιστημών δίνοντας την προοπτική να εξετασθεί και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους.

Βιβλιογραφία

Adhikari, B., Epstein, C., Dhamala, M. (2013) *Localizing epileptic seizure onsets with Granger causality*, Physical Review E 88, 030701.

Akaike, H. (1974) *A new look at the statistical model identification*, IEEE Trans. Automat. Contr. 19, 716–723.

Auger, F., Flandrin, P., Gonçalves, P., Lemoine, O. (1996) *Time Frequency Toolbox for Use with Matlab*, CNRS (France) and Rice University (USA).

Bacala, L. A., Sameshima, K. (2001). *Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination*, Biol. Cybern. 84, 463–474.

Barford, L. A., Fazzio, R. S., Smith, D. R. (1992) *An Introduction to Wavelets*, HPL-92-124.

Blair, R. C., Karniski W. (1993) *An alternative method for significance testing of waveform difference potentials*, Psychophysiology, 30, 518–24.

Blinowska, K. J., Kus, R., Kaminsk, M., (2004) *Granger causality and information flow in multivariate processes*, Physical Review E 70(5), 05090214.

Bressler, S. L. (2010) *Wiener– Granger Causality: A well established methodology*, NeuroImage, 58(2), 323–9.

Brovelli, A., Ding, M., Ledberg, A., Chen, Y., Nakamura, R., Bressler, L., Beta, S.L. (2004) *Oscillations in a large-scale sensorimotor cortical network: directional influences revealed by Granger causality*, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 101, 9849–9854.

Chaparro, L. F. (2011) *Signal and System using Matlab. 1st Edition*, Academic Press.

Chen, Y., Bressler, S.L., Ding, M. (2006) *Frequency decomposition of conditional Granger causality and application to multivariate neural field potential data*, J. Neurosci. Methods 150, 228–237.

Collomb, C. (2009) *Burg's Method, Algorithm and Recursion*, <http://ccollomb.free.fr/>, 1–8.

Cooley, J. W., Tukey, J. (1965) *An algorithm for machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp. 19, 297–301.

De Hoon, M. J. L., Van Der Hagen, T.H.J.J., Schonewelle, H., Van Dam, H. (1994) *Why Yule-Walker Should Not Be Used For Autoregressive Modeling*, Annals of Nuclear Energy 23(15), 1219–1228.

Dhamala, M., Rangarajan, G., Ding, M. (2008) *Analyzing information flow in brain networks with nonparametric Granger causality*, Neuroimage 41(2), 354–362.

Dhamala, M., Rangarajan, G., Ding, M. (2008) *Estimating Granger causality from Fourier and wavelet transforms of time series data*, Phys. Rev. Lett. 100(1), 018701.

Ding M., Chen, Y., Bressler, S. (2006) *Granger Causality: Basic theory and application to Neuroscience*, In B. Schelter, M. Winterhalder, & J. Timmer, eds. Handbook of Time Series Analysis Wiley, Wienheim.

- Ding, M. (2009) *Analyzing multiple spike trains with nonparametric granger causality*, J. Comp. Neuroscience 2(1), 55-64.
- Geweke, J. (1982) *Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series*, J. American Statistical Association 7(378), 304-313.
- Geweke, J. (1984) *Measures of conditional linear dependence and feedback between time series*, J. American Statistical Association 79(388), 907-915.
- Gourévitch, B., Le Bouquin-Jeannès, R., Faucon, G. (2006) *Linear and nonlinear causality between signals: methods, examples and neurophysiological applications*, Biol. Cybern. 95(4), 349-369.
- Granger, C. W. J., (1969) *Investigating causal relations by economic models and cross-spectral methods*, Econometrica 37, 424-438.
- Hesse, W., Moller, E., Arnold, M., Schack, B. (2002) *The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies*, J. Neuroscience Methods 124(1), 27-44.
- Kamiski, M. J., Blinowska, K.J. (1991) *A new method of the description of the information flow in the brain structures by a modified directed transfer function (dDTF) method*, J. Neurosci. Methods 125, 195-207.
- Karris, S. T. (2007) *Signal and System with Matlab Computing and Simulink Modeling. 4th Edition*, Orchard Publications.
- Kutz, N. (2012) *Computational Methods for Data Analysis*, Course Notes of Computational Methods for Data Analysis.
- Lutkepohl, H. (2005) *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag.
- Lyons, R. G. (2004) *Understanding Digital Signal Processing. 4th Edition*, Prentice Hall.
- Mallat, S. (1999) *A wavelet tour of signal processing. 3rd Edition*, Academic Press.
- Maris, E., Oostenveld, R. (2007) *Nonparametric statistical testing of EEG- and MEG-data*, Journal of Neuroscience Methods, 164 (2007) 177-190.
- Mitra, P. P., Pesaran, B. (1999) *Analysis of dynamic brain imaging data*, Biophys. J. 76, 691-708.
- Mullen, T. (2010) *Source Information Flow Toolbox*, Swartz Center for Computational Neuroscience, Institute for Neural Computation, and Department of Cognitive Science University of California, San Diego (SIFT), 4-27.
- Myatchin, I., Lagae, L. (2011) *Impaired spatial working memory in children with well-controlled epilepsy: An event-related potentials study*, Seizure 20(2), 143-150.
- Ott, R., Longnecker, M. (2010) *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis. 6th Edition*, Brooks/Cole.
- Palaniappan, R. (2006) *Towards Optimal Model Order Selection for Autoregressive Spectral Analysis of Mental Tasks Using Genetic Algorithm*, 153-161.
- Slepian, D. (1964) *Spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, iv. Bell System Tech. J., 3009-3057.
- Slepian, D., Pollak, H. O. (1961) *Prolate spheroidal wavefunctions Fourier analysis and uncertainty*, I. Bell Syst. Tech. J., 40-63.
- Thomson, D. J. (1982) *Spectrum estimation and harmonic analysis*, Proc. IEEE 70, 1055-1096.

Torrence, C., Compo, G. (1998) *A practical guide to wavelet analysis*. Bull, Am. Meteorol. Soc. 79, 61–78.

Wei, W. W. S. (2006) *Time Series Analysis. 2nd Edition*, Univariate and Multivariate Methods.

Wilson, G.T. (1972) *The factorization of matricial spectral densities*, SIAM J. Appl. Math, 23, 420–426.

Wilson, G.T. (1978) *A convergence theorem for spectral factorization*, J. Multivar. Anal. 8, , 222–232.

Καραγεωργόπουλος, Γ. Δ. (2012) *Υπολογιστική ανάλυση της λειτουργικής διασύνδεσης εγκεφαλογραφικών χρονοσειρών με θεωρίες πληροφoρίας μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (Partial Directed Coherence)*, Μεταπτυχιακή εργασία στα πλαίσια του ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένη Μηχανική.

