



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Αριθμητική Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων για την Υπολογιστική Επίλυση Τυρβωδών Πεδίων Ροής

Διπλωματική Εργασία

Παναγιώτης Β. Κατσικογιάννης

Επιβλέπων: Σπύρος Γ. Βουτσινάς, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2016

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ανάπτυξη και εφαρμογή μιας μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων (Multi Scale Analysis) σε συνδυασμό με μεθόδους στοιχείων στροβιλότητας (Vortex Particle Methods) για την υπολογιστική επίλυση τυρβωδών πεδίων ροής. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε τριδιάστατα, δομημένα τετραγωνικά πλέγματα και η υπολογιστική επίλυση των πεδίων αυτών βασίζεται στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων. Ουσιαστικά μελετάται η χρονική και χωρική εξέλιξη του φαινομένου της τύρβης με χρήση ρευστοστοιχείων με όγκο, τα οποία φέρουν στροβιλότητα (particles-blobs), τεχνικών επαναδιακριτοποίησης (remeshing) και εφαρμογής πολλαπλών κλιμάκων στην ανάλυσή μας ώστε να επιτευχθεί η διάκριση των σημαντικών κλιμάκων της τύρβης. Αρχικά παράγεται ένας στοχαστικός τυρβώδης άνεμος στο επίπεδο της μικρής κλίμακας (πυκνό πλέγμα). Στη συνέχεια υπολογίζεται η στροβιλότητα της κλίμακας αυτής αλλά και τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής σε μία μεγαλύτερη κλίμακα (αραιό πλέγμα). Τα στοιχεία αυτά εισέρχονται σε έναν κώδικα Vortex Particle Mesh όπου παράγεται η χρονική εξέλιξη του φαινομένου αυτού. Η διαφορά της μεθόδου αυτής, έγκειται στο γεγονός ότι για την χρονική εξέλιξη του πεδίου ροής της μεγάλης κλίμακας, λαμβάνουμε υπόψιν και το χρονικά εξελιγμένο (ανεξάρτητα) πεδίο ροής της μικρής κλίμακας. Η συσχέτιση αυτή πραγματοποιείται μέσω της εξίσωσης μεταφοράς της στροβιλότητας και των επιπλέον όρων που προκύπτουν σε αυτήν, εάν λάβουμε υπόψιν και την πληροφορία της μικρής κλίμακας. Τέλος, εφαρμόζεται μια ανάλυση Fourier ώστε να εξεταστεί η διατήρηση του ενεργειακού φάσματος σε μια τέτοια μετάβαση (from small scale to large scale) και εξάγονται στατιστικά αποτελέσματα για τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις των κλιμάκων ώστε να καταστεί εφικτή η σύγκριση τους και να αποφανθούμε πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η μετάβαση αυτή διατηρώντας ταυτόχρονα το μεγαλύτερο κομμάτι της αρχικής πληροφορίας.



National Technical University of Athens

School of Mechanical Engineering

Section of Fluids

Laboratory of Aerodynamics

Multi Scale Analysis of Turbulent Flows

Diploma Thesis

Panagiotis V. Katsikogiannis

Supervisor: Spyros G. Voutsinas, Professor NTUA

Athens, 2014

Abstract

This thesis deals with the development and implementation of a multi-scale method (Multi Scale Analysis) in conjunction with vorticity element methods (Vortex Particle Methods) for the computational solution of turbulent flow fields. This method is applied to three-dimensional, structured square grids and the computational solution of these fields is based on the Finite Volume Method. Essentially, we study the temporal and spatial evolution of the phenomenon of turbulence using particles (elements with volume, bearing vorticity), remeshing techniques and multi-scale application in our analysis to achieve the distinction of significant scales in turbulent flows. At first place, we produce a stochastic turbulent wind at the level of small-scale (dense network). Then, we calculate the vorticity of this particular scale as well as the characteristics of the flow field in a larger scale using appropriate projection functions. This data are being used as an input to a Vortex Particle Mesh code where the time evolution of the phenomenon takes place. Lastly, we carry out the correlation between the two scales, we apply a Fourier analysis in order to investigate the conservation of the energy spectrum in such a transition (from small scale to large scale) and we export statistical results for the mean values and standard deviations of the scales in order to enable them to compare and to judge how great this transition could be, without losing the largest piece of the original information at the same time.

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική μου Εργασία στα πλαίσια των σπουδών μου στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αισθάνομαι ιδιαίτερα ευτυχής που είχα την τύχη να ολοκληρώσω τις σπουδές μου δίπλα σε ωραίους ανθρώπους και επιστήμονες, καθηγητές και φίλους, και σε ένα ίδρυμα που παρόλα τα προβλήματα σε αυτό το εξαιρετικά αναγνωρισμένο δημόσιο ανώτατο εκπαιδευτικό ίδρυμα.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Σπύρο Βουτσινά, όχι ως τυπική υποχρέωση αλλά ως αναγνώριση την ιδιαίτερης συμβολής του στην απόκτηση γνώσης στο πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο της Μηχανικής των Ρευστών. Ο κ. Βουτσινάς στο διάστημα της επίβλεψης της εργασίας μου, με ενέπνευσε και συνέβαλε στη διαμόρφωσή μου τόσο ως άνθρωπου όσο και ως επιστήμονα.

Θερμότερες ευχαριστίες αποδίδω και στον διδάκτορα κ. Γιώργο Παπαδάκη, ο οποίος βρέθηκε κάθε στιγμή δίπλα μου και με τις καίριες συμβουλές του καθώς και με την υποστήριξη του συνέβαλλε σημαντικά στην επιτυχή ολοκλήρωση της διπλωματικής μου. Δεν μπορώ δε να παραλείψω και τη συμβολή όλων των συνεργατών του εργαστηρίου Αεροδυναμικής που συμβάλλουν καθημερινά στη λειτουργία μια τόσο σημαντικής για την προώθησης της έρευνας δομής του ΕΜΠ.

Ευχαριστώ θερμά τους φίλους και συμφοιτητές μου με τους οποίους ζήσαμε μια άκρως ενδιαφέρουσα και αποδοτική από άποψη κτήσης γνώσεων και εμπειριών περίοδο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω, πάνω απ' όλα, την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράσταση και πολύπλευρη στήριξη που μου παρέχουν για την εκπλήρωση όλων των στόχων μου, τη σύντροφό μου Νάσια που ήταν εκεί σε όλες τις καθημερινές δυσκολίες, και ήταν πάντα έτοιμη να ακούσει τους προβληματισμούς μου και τις εσωτερικές μου ανησυχίες, και τους συντρόφους μου στη μουσική, τον Ηρακλή, το Βαγγέλη, και το Γιώργο.

Αθήνα, Οκτώβριος 2016

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας	1
1.2	Βασικά Στοιχεία της Μηχανικής των Ρευστών	2
1.2.1	Εισαγωγικές Έννοιες και Ορισμοί	2
1.2.2	Ιδιότητες των Ρευστών	2
1.3	Βασικές Εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών	5
1.3.1	Κινηματική των Ρευστών	5
1.3.2	Εξισώσεις Διατήρησης	10
1.3.3	Προτάσεις Στροβιλότητας	15
1.4	Τυρβώδεις Ροές	17
1.4.1	Γενικά Χαρακτηριστικά Τυρβωδών Ροών	17
1.4.2	Περιγραφή Τυρβωδών Ροών (Μοντέλο Raynolds)	18
2	Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων σε Τυρβώδη Πεδία Ροής (Multi Scale Analysis)	21
2.1	Η Γέννηση της Ιδέας των Πολλαπλών Κλιμάκων	21
2.2	Βηματική Παρουσίαση της Μεθόδου	22
2.2.1	Δημιουργία Στοχαστικού Τυρβώδους Πεδίου Ροής	22
2.2.2	Υπολογισμός Πεδίου Στροβιλότητας στη Μικρότερη Κλίμακα (Small Scale)	23
2.2.3	Μετάβαση στην Επόμενη Κλίμακα (Large Scale)	25
2.2.4	Χρονική Εξέλιξη του Πεδίου Ροής (Time Evolution)	29
2.2.5	Καθορισμός του Πεδίου των Διαταραχών στη Μικρή Κλίμακα	30
2.2.6	Σύζευξη Κλιμάκων - Μεταφορά Στροβιλότητας	34
2.2.7	Ανάλυση των Επιπλέον Όρων στην Εξίσωση Μεταφοράς της Στροβι- λότητας	37
2.2.8	Στατιστική Ανάλυση	45
2.2.9	Στοχαστική Ανάλυση - Μετασχηματισμός Fourier	49
3	Παρουσίαση Αποτελεσμάτων	55
3.1	Αρχικό Πεδίο Ροής	55

3.2	Χρονική Εξέλιξη του Φαινομένου (Time Evolution)	60
3.2.1	Timestep = 2	61
3.2.2	Timestep = 26	67
3.2.3	Timestep = 50	73
3.2.4	Σχολιασμός Αποτελεσμάτων	79
3.3	Χρονική Εξέλιξη του Φαινομένου - Σύζευξη Κλιμάκων σε Πραγματικό Χρόνο (Time Evolution - Real Time Multiscale Analysis)	81
3.3.1	Timestep = 2	82
3.3.2	Timestep = 26	88
3.3.3	Timestep = 50	94
3.3.4	Σχολιασμός Αποτελεσμάτων	103
Βιβλιογραφία		107

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ανάπτυξη και εφαρμογή μιας μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων (Multi Scale Analysis) σε συνδυασμό με μεθόδους στοιχείων στροβιλότητας (Vortex Particle Methods) για την υπολογιστική επίλυση τυρβωδών πεδίων ροής. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε τριδιάστατα, δομημένα τετραγωνικά πλέγματα και η υπολογιστική επίλυση των πεδίων αυτών βασίζεται στη Μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων. Ουσιαστικά μελετάται η χρονική και χωρική εξέλιξη του φαινομένου της τύρβης με χρήση ρευστοστοιχείων με όγκο, τα οποία φέρουν στροβιλότητα (particles-blobs), τεχνικών επαναδιακριτοποίησης (remeshing) και εφαρμογής πολλαπλών κλιμάκων στην ανάλυσή μας ώστε να επιτευχθεί η διάκριση των σημαντικών κλιμάκων της τύρβης. Αρχικά παράγεται ένας στοχαστικός τυρβώδης άνεμος μικρής κλίμακας (πυκνό πλέγμα) από το Avatar Turbulent Wind Mann Model. Στη συνέχεια υπολογίζεται η στροβιλότητα της κλίμακας αυτής αλλά και τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής σε μία μεγαλύτερη κλίμακα με τη διαδικασία της προβολής (projection). Τα στοιχεία αυτά εισέρχονται σε έναν κώδικα Vortex Particle Mesh (VPM), όπου πραγματοποιείται η χρονική εξέλιξη του φαινομένου αυτού. Η διαφορά της μεθόδου αυτής, έγκειται στο γεγονός ότι για την χρονική εξέλιξη του πεδίου ροής της μεγάλης κλίμακας, λαμβάνουμε υπόψιν και το χρονικά εξελιγμένο (ανεξάρτητα) πεδίο ροής της μικρής κλίμακας. Η συσχέτιση αυτή πραγματοποιείται μέσω της εξίσωσης μεταφοράς της στροβιλότητας και των επιπλέον όρων που προκύπτουν σε αυτήν, εάν λάβουμε υπόψιν και την πληροφορία της μικρής κλίμακας. Τέλος, εφαρμόζεται μια ανάλυση Fourier ώστε να εξεταστεί η διατήρηση του ενεργειακού φάσματος σε μια τέτοια μετάβαση (from small scale to large scale) και εξάγονται στατιστικά αποτελέσματα για τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις των κλιμάκων ώστε να καταστεί εφικτή η σύγκριση τους και να αποφανθούμε πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η μετάβαση αυτή διατηρώντας ταυτόχρονα το μεγαλύτερο κομμάτι της αρχικής πληροφορίας.

Στη συνέχεια του 1ου κεφαλαίου παρουσιάζονται ορισμένα βασικά στοιχεία της Μηχανικής

των Ρευστών, κάποια γενικά χαρακτηριστικά του φαινομένου της Τύρβης καθώς και οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο αυτό..

Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζεται βήμα προς βήμα η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων. Σε κάθε βήμα, καταστρώνονται οι εξισώσεις επίλυσης και διακριτοποιούνται έτσι ώστε να είναι εφικτή η αριθμητική τους επίλυση. Εν συνεχεία, γίνεται μία αναφορά στην Ανάλυση Fourier και το πώς αυτή εφαρμόζεται στο αντικείμενο μελέτης μας. Τέλος, παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της Στατιστικής Ανάλυσης.

Τέλος, στο 4ο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα αυτά αναλύονται στη συνέχεια και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την λειτουργία της μεθόδου.

1.2 Βασικά Στοιχεία της Μηχανικής των Ρευστών

1.2.1 Εισαγωγικές Έννοιες και Ορισμοί

Ρευστά (κοινή ονομασία για υγρά και αέρια) ονομάζουμε τα συνεχή σώματα τα οποία χαρακτηρίζονται από εύκολη μεταφορά των στοιχείων τους. Σε αντίθεση με τα στερεά σώματα, προβάλλουν μικρή αντίσταση στη μεταβολή της μορφής τους.

Η Μηχανική των Ρευστών είναι εκείνος ο κλάδος της Μηχανικής που εξετάζει την κίνηση των Ρευστών σωμάτων και τα αίτια που την προκαλούν.

Η Αεροδυναμική με τη σειρά της, αποτελεί μία υποδιαίρεση της Μηχανικής των Ρευστών, η οποία σήμερα αναφέρεται ως αυτοτελής κλάδος, και εξετάζει την κίνηση στερεών σωμάτων στον αέρα ή γενικότερα σε μίγμα αερίων (π.χ. η περιστροφική κίνηση της έλικας μιας ανεμογεννήτριας μέσα στον ατμοσφαιρικό αέρα).

1.2.2 Ιδιότητες των Ρευστών

Καταστάσεις της Ύλης

Τα υλικά σώματα έχουν μοριακή υφή. Ως εκ τούτου είναι μέσα ασυνεχή. Εν γένει η ύλη από άτομα και μόρια, η μέση διάσταση των οποίων είναι της τάξεως $d \sim 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$. Για την μακροσκοπική μορφή τους, που καθορίζει την κατάσταση της ύλης, δύο παράγοντες έχουν σημαντική επίδραση:

1. Εάν τα μεμονωμένα μόρια ή άτομα είναι αρκετά απομακρυσμένα μεταξύ τους (υλικά με μικρή πυκνότητα), τότε το ένα δεν επιδρά στο άλλο και υπάρχει μία ακανόνιστη κίνηση οφειλόμενη στη θερμική τους ενέργεια (κίνηση Brown).

Στον ατμοσφαιρικό αέρα σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας (ατμοσφαιρική πίεση και θερμοκρασία 20°C), η μέση ελεύθερη διαδρομή l είναι της τάξεως $l \sim 10^{-7}$ και η μέση μοριακή ταχύτητα $\tilde{C} \sim 500 \text{ m/s}$. Δηλαδή ο λόγος της μέσης ελεύθερης διαδρομής προς το μέσο μέγεθος του μορίου είναι $\frac{l}{d} \sim 10^3$.

2. Εάν τα μόρια και τα άτομα βρίσκονται σε κοντινές αποστάσεις μεταξύ τους (υλικά με πολύ μεγάλη πυκνότητα), τότε αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και οι μοριακές δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι οι δυνάμεις van der Waals. Η εμβέλειά τους φτάνει τότε σε απόσταση $10d \sim 10^{-9} \text{ m}$. Ελκτικές δυνάμεις βαρυτικής φύσεως, σταθεροποιούν τα άτομα και τα μόρια μεταξύ τους σχηματίζοντας διατάξεις που ονομάζονται κρυσταλλικές δομές.

Ο συνδυασμός των δύο άνωθεν παργόντων 1 και 2 καθορίζει εν τέλει και την κατάσταση της ύλης στην οποία βρίσκεται το εκάστοτε υλικό. Ανάλογα δηλαδή με την φύση των δυνάμεων που υπερισχύουν, το υλικό βρίσκεται σε αέρια, υγρή ή στερεά κατάσταση.

Η Υπόθεση της Ασυνέχειας

Όπως αναφέραμε παραπάνω, στα αέρια σώματα, οι αποστάσεις των ατόμων και των μορίων μεταξύ τους είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ίδιες τις διαστάσεις τους. Ακόμη και στα υγρά, όπου τα μόρια είναι πολύ κοντά διατεταγμένα το ένα στο άλλο, εξαιτίας των μικρής εμβέλειας απωστικών δυνάμεων, η μάζα του υλικού είναι συγκεντρωμένη στον πυρήνα των ατόμων που συνιστούν το μόριο. Επομένως, από μικροσκοπική άποψη, κάθε άλλο παρά ομοιόμορφα διατεταγμένη στο χώρο, μπορεί να θεωρηθεί η μάζα του ρευστού. Ακόμη και άλλες ιδιότητες των ρευστών, όπως η σύνθεση και η ταχύτητα για παράδειγμα, παρουσιάζουν μια ισχυρά ανομοιόμορφη κατανομή αν τα εξετάσουμε σε μια μικρή κλίμακα.

Η Μηχανική των Ρευστών λοιπόν, στη δική μας ανάλυση, περιορίζεται στη συμπεριφορά της ύλης σε μακροσκοπική κλίμακα, δηλαδή σε κλίμακα πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των μορίων. Στην δική μας διαπραγμάτευση επομένως, θα θεωρήσουμε ότι η μακροσκοπική συμπεριφορά του ρευστού είναι συνεχής και ως εκ τούτου φυσικές ποσότητες, όπως η μάζα, η ορμή κ.ο.κ, θα θεωρούνται ότι είναι συνεχώς κατανεμημένες στον όγκο του ρευστού.

Φυσικές Ιδιότητες των Ρευστών - Δυνάμεις

- Δυνάμεις

Τα ρευστά ως υλικά σώματα, υπόκεινται τόσο σε εξωτερικές όσο σε εσωτερικές δυνάμεις. Οι δυνάμεις αυτές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

1. **Επιφανειακές Δυνάμεις**, οι οποίες δρουν στην επιφάνεια του ρευστού και είναι ανάλογες του εμβαδού αυτής.
2. **Ογκικές ή Μαζικές Δυνάμεις**, οι οποίες ενεργούν στο στοιχείο τού όγκου ή της μάζας και είναι ανάλογες του όγκου ή της μάζας του.

Κάθε στοιχείο ρευστού, είτε εν ηρεμία είτε εν κινήσει, βρίσκεται σε **εντατική κατάσταση** δημιουργούμενη από τα γειτονικά του στοιχεία. Λέμε ότι ένα συνεχές μέσο βρίσκεται σε ισορροπία, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν πάνω σε αυτό είναι μηδέν. Την **εντατική κατάσταση** των ρευστών τη διακρίνουμε σε **ορθή εντατική κατάσταση** (ορθές τάσεις οφειλόμενες στην ασκούμενη πίεση σε ακίνητα ρευστά) και **διατμητική εντατική κατάσταση** (διατμητικές τάσεις οφειλόμενες στην σχετική κίνηση μεταξύ γειτονικών στοιχείων σε κινούμενα ρευστά).

- **Συνεκτικότητα ή Ιξώδες**

Μία χαρακτηριστική φυσική ιδιότητα των ρευστών, η οποία είναι και υπεύθυνη για την εμφάνιση διατμητικών τάσεων στην μάζα τους, είναι η συνεκτικότητα ή αλλιώς το ιξώδες (μ). Πιο συγκεκριμένα, η συνεκτικότητα είναι η ιδιότητα των ρευστών να αντιστέκονται στην διάτμησή τους, δηλαδή στη σχετική κίνηση μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων τους. Φαινομενολογικά, προσιδιάζει στην τριβή των στερεών σωμάτων (εξού και ο όρος εσωτερική τριβή), αλλά η ουσιαστική πρόκειται για δυνάμεις εντελώς διαφορετικής φύσης. Το ιξώδες, στα νευτώνια ασυμπίεστα ρευστά, εξαρτάται κυρίως από την θερμοκρασία, δηλαδή $\mu = \mu(T)$, ενώ στα συμπίεστα ρευστά είναι συνάρτηση και της πίεσης, δηλαδή $\mu = \mu(p, T)$.

- **Συμπιεστότητα**

Μία άλλη σημαντική ιδιότητα των ρευστών είναι η συμπιεστότητα, η οποία ορίζεται ως η ικανότητα των ρευστών να μεταβάλλουν την πυκνότητά τους κατόπιν μεταβολής της ορθής εντατικής τους κατάστασης (πίεσης) είτε εν ηρεμία είτε εν κινήσει. Μάλιστα αύξηση της πίεσης προκαλεί εν γένει και αύξηση της πυκνότητας.

Στην περίπτωση των **υγρών σωμάτων**, λόγω της μεγάλης τους πυκνότητας (μικρές αποστάσεις μεταξύ των μορίων τους), ακόμα και κάτω υπό υψηλές πιέσεις, η μεταβολή του όγκου τους θεωρείται αμελητέα. Ως εκ τούτου, τα υγρά θεωρούνται πρακτικά ασυμπίεστα ($\rho = \text{const.}$).

Αντίθετα τα **αέρια σώματα**, όπου οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων τους είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το μέγεθός τους και άρα δυνάμεις συνοχής μεταξύ των πρακτικά δεν υφίστανται, θεωρούνται συμπίεστα. Επομένως αυξανόμενης της πίεσης, τα αέρια μειώνουν τον όγκο τους και ως εκ τούτου αυξάνουν την πυκνότητά τους.

1.3 Βασικές Εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών

1.3.1 Κινηματική των Ρευστών

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Η Κινηματική των Ρευστών είναι το κεφάλαιο της Ρευστομηχανικής, που εξετάζει την κίνηση των ρευστών χωρίς να ενδιαφέρεται για τα αίτια που την προκαλούν. Παρόλο που, όπως αναλύθηκε παραπάνω, η Ρευστομηχανική αντιμετωπίζει τα ρευστά ως συνεχή μέσα, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του **σωματιδίου**, ως το τμήμα εκείνο του ρευστού, το οποίο σε μια δεδομένη χρονική στιγμή περικλείεται σε μια απειροστή περιοχή ενός σημείου του χώρου. Κάθε σωματίδιο χαρακτηρίζεται από τη θέση του στο χώρο της δεδομένη αυτή χρονική στιγμή. Συνεπώς, το συνεχές μέσο (ρευστό) θεωρείται ότι αποτελείται από το σύνολο των σωματιδίων του.

Αφού ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς, τα διάφορα σωματίδια μπορούν να χαρακτηριστούν από τη θέση τους την χρονική στιγμή $t = t_0$ με το διάνυσμα $\vec{R} = (X, Y, Z)$ ενώ τα σημεία του χώρου συμβολίζονται με το διάνυσμα $\vec{r} = (x, y, z)$.

Η εξίσωση κίνησης του συνεχούς μέσου δίνεται λοιπόν από τη σχέση:

$$\vec{r} = \vec{f}(\vec{R}, t) \Leftrightarrow \quad (1.1)$$

$$x = f_x(X, Y, Z, t)$$

$$y = f_y(X, Y, Z, t)$$

$$z = f_z(X, Y, Z, t)$$

όπου t ο χρόνος.

Η έννοια της εξίσωσης κίνησης είναι ότι δίνει τη θέση του κάθε σωματιδίου $\vec{R}$ κάθε χρονική στιγμή t και συνεπώς πρέπει να ικανοποιεί και την σχέση $\vec{R} = \vec{f}(\vec{R}, t_0)$.

Περιγραφή Πεδίου Ροής

Οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{R}$ ονομάζονται **σωματιδιακές μεταβλητές** ή **μεταβλητές Lagrange**, ενώ οι μεταβλητές του διανύσματος $\vec{r}$ **χωρικές μεταβλητές** ή **μεταβλητές Euler**.

Εάν ένα μέγεθος h του πεδίου ροής εκφραστεί σε μεταβλητές Lagrange $\vec{R}$, τότε η περιγραφή του πεδίου λέγεται **υλική περιγραφή** ή **περιγραφή Langrange**:

$$h = h(X, Y, Z, t) \quad (1.2)$$

Συνεπώς σ' αυτήν την περιγραφή, η συνάρτηση h περιγράφει το φυσικό μέγεθος συναρτήσει του χρόνου κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου $\vec{R}$, ό,τι δηλαδή θα αντιλαμβανόταν ένα παρατηρητής που θα μετείχε στην κίνηση του σωματιδίου αυτού.

Εάν το μέγεθος h το εκφράσουμε σε μεταβλητές Euler, έχουμε τη **χωρική περιγραφή ή περιγραφή κατά Euler**:

$$h = h(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

Στην περιγραφή κατά Euler, η συνάρτηση h περιγράφει την κατανομή του φυσικού μεγέθους αυτού συναρτήσει του χρόνου και σε κάθε σημείο του χώρου $\vec{r}$, ό,τι δηλαδή θα αντιλαμβανόταν ένας ακίνητος παρατηρητής ευρισκόμενος στον εν λόγω σημείο του χώρου.

Ένα πεδίο ροής καλείται **μόνιμο**, όταν η μόρφή του σε περιγραφή Euler είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Σε αντίθετη περίπτωση καλείται **μή μόνιμο**.

Με βάση τις παραπάνω περιγραφές ορίζουμε δύο διαφορετικές παραγωγίσεις ενός μεγέθους h ως προς τον χρόνο:

1. Την **Τοπική Παράγωγο**

$$\frac{\delta h}{\delta t} \equiv \frac{\partial h(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

2. Και την **Υλική ή Ουσιώδη Παράγωγο**

$$\frac{Dh}{Dt} \equiv \frac{\partial h(\vec{R}, t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

Η **ταχύτητα ενός σωματιδίου** λοιπόν, ορίζεται ως η υλική παράγωγος του διανύσματος $\vec{r}$, της εξίσωσης του σωματιδίου αυτού ως προς τον χρόνο t :

$$\vec{v} \equiv \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{R}, t)}{\partial t} \leftrightarrow \quad (1.6)$$

$$u = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{\vec{R}}$$

$$v = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{\vec{R}}$$

$$w = \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{\vec{R}}$$

$$\text{όπου: } \vec{v} = (u, v, w)$$

Από τον κανόνα παραγώγισης για μια συνάρτηση h εκφρασμένη τόσο σε υλικές όσο και τοπικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h(\vec{R}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{grad}h(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Big|_{\vec{R}} = \frac{\partial h(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}h(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

Τελικά έχουμε:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial h}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}h \quad (1.8)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο προσθετέος $\partial h / \partial t$ είναι η τοπική παράγωγος της συνάρτησης h ενώ οι υπόλοιποι όροι του δεξιού μέλους ονομάζονται μεταφορικοί ή συναγωγικοί όροι.

Ο τελεστής

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.9)$$

ονομάζεται **τελεστής Euler**.

Στη συνέχεια ορίζουμε και την **επιτάχυνση του σωματιδίου** $\vec{b}$ ως την υλική παράγωγο της ταχύτητας $\vec{v}$:

$$\vec{b} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial^2 \vec{r}(\vec{R}, t)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \quad (1.10)$$

$$b_x = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$b_y = \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$b_z = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\text{όπου: } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}^T \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (1.11)$$

όπου ο πίνακας $\text{grad} \vec{v}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\text{grad} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \vec{v} \quad (1.12)$$

Βασική Πρόταση της Κινηματικής των Ρευστών (Cauchy-Helmholtz)

Σύμφωνα με την **βασική πρόταση της κινηματικής**, η απόδειξη της οποίας εδώ παραλείπεται, η απειροστή μετακίνηση ενός στοιχείου ρευστού από μία θέση $\vec{r}$ σε μία θέση $\vec{r} + d\vec{r}$ αναλύεται σε επαλληλία τριών κινήσεων: μεταφοράς, περιστροφής και παραμόρφωσης.

Η πρόταση αυτή περιγράφεται από τη σχέση:

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) + \overset{\leftrightarrow}{R}d\vec{r} \quad (1.13)$$

όπου $\overset{\leftrightarrow}{D}$ και $\overset{\leftrightarrow}{R}$ ονομάζουμε αντίστοιχα **τους τανυστές ρυθμού παραμόρφωσης και περιστροφής** και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\overset{\leftrightarrow}{D} = \frac{1}{2}(\text{grad}^T \vec{v} + \text{grad} \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(v_x + u_y) & \frac{1}{2}(u_z + w_x) \\ \frac{1}{2}(v_x + u_y) & v_y & \frac{1}{2}(v_z + w_y) \\ \frac{1}{2}(u_z + w_x) & \frac{1}{2}(v_z + w_y) & w_z \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{R} = \frac{1}{2}(\text{grad}^T \vec{v} - \text{grad} \vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(v_x - u_y) & \frac{1}{2}(u_z - w_x) \\ \frac{1}{2}(v_x - u_y) & 0 & -\frac{1}{2}(w_y - v_z) \\ -\frac{1}{2}(u_z - w_x) & \frac{1}{2}(w_y - v_z) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Ως εκ τούτου η ταχύτητα κάθε στοιχείου του ρευστού εκφράζεται ως άθροισμα τριών προσθετέων:

1. Η $\vec{v}(\vec{r}, t)$ αντιστοιχεί σε μεταφορική κίνηση του στοιχείου ως απολύτως στερεού σώματος
2. Η $\overset{\leftrightarrow}{D}d\vec{r}$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα παραμόρφωσης του στοιχείου
3. Η $\overset{\leftrightarrow}{R}d\vec{r}$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα περιστροφής του στοιχείου γύρω από στιγμιαίο άξονα, ως απολύτως στερεού σώματος.

Αστρόβιλο Πεδίο Ροής - Δυναμικό Ταχύτητας

Πεδία ροής στα οποία τα στοιχεία του ρευστού δεν περιστρέφονται ονομάζονται αστρόβιλα ή δυναμικά.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ικανή συνθήκη για είναι ένα πεδίο αστρόβιλο, είναι: $\overset{\leftrightarrow}{R} = 0 \forall$ σημείο του πεδίου ροής.

Το γινόμενο όμως $\overleftrightarrow{R}d\vec{r}$ γράφεται:

$$\overleftrightarrow{R}d\vec{r} = \frac{1}{2}rot\vec{v} \times d\vec{r} \quad (1.16)$$

Θέτουμε:

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2}rot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}$$

Και τελικά προκύπτει:

$$\overleftrightarrow{R}d\vec{r} = \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (1.17)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το στοιχείο ρευστού περιστρέφεται με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από κάποιο σημείο του χώρου P και ο οποίος έχει την κατεύθυνση του $\vec{\omega}$.

Άρα η ικανή συνθήκη για να είναι ένα πεδίο αστρόβιλο $\overleftrightarrow{R} = 0$, $\forall$ σημείο του πεδίου ροής, ισοδυναμεί με:

$$\vec{\omega} = \vec{0} \Leftrightarrow rot\vec{v} = \vec{0} \quad (1.18)$$

,

$\forall$ σημείο του πεδίου ροής

Από βασική πρόταση των Μαθηματικών γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις που πληρούν την εξίσωση 1.18 έχουν τη μορφή:

$$\vec{v} = grad\Phi = \nabla\Phi \quad (1.19)$$

.

Δίνονται δηλαδή ως κλίση βαθμωτής συνάρτησης $\Phi(\vec{r}, t)$, η οποία είναι εξ' ορισμού παραγωγίσιμη και ονομάζεται **δυναμικό ταχύτητας**.

Η σχέση 1.19 γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής:

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \quad (1.20)$$

Αντίθετα με το αστρόβιλο πεδίο ροής, **στροβιλό** λέγεται το πεδίο ροής του οποίου τα στοιχεία στρέφονται, δηλαδή $\vec{\omega} \neq \vec{0}$.

1.3.2 Εξισώσεις Διατήρησης

Εξίσωση Διατήρησης της Μάζας

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας εκφράζει τον πρώτο βασικό νόμο της Κλασικής Μηχανικής, ότι η μάζα δεν καταστρέφεται ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός.

Η **πυκνότητα** του ρευστού ορίζεται ως ο λόγος:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (1.21)$$

όπου dV το στοιχείο του όγκου του ρευστού και dm η μάζα του στοιχείου αυτού.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει παραπάνω, η πυκνότητα είναι για τα διάφορα ρευστά λιγότερο ή περισσότερο σταθερή. Τα περισσότερα υγρά θεωρούνται πρακτικά ασυμπίεστα, ενώ τα αέρια θεωρούνται εν γένει συμπιεστά.

Η διαφορική διατύπωση της **Εξίσωσης Διατήρησης της Μάζας (Εξίσωση της Συνέχειας)** δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.22)$$

Διακρίνουμε δύο ειδικές περιπτώσεις πεδίων ροής:

- Στην περίπτωση μόνιμου πεδίου ροής συμπιεστού ρευστού η εξίσωση της συνέχειας γράφεται: $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$,
- ενώ για ασυμπίεστο ρευστό (και τόσο για μόνιμο ή όσο και για μη μόνιμο πεδίο ροής) εκπίπτει στη σχέση: $\text{div}(\vec{v}) = 0$

Θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εξετάσουμε ενδελεχώς την περίπτωση των ασυμπίεστων ρευστών, συνεκτικών ή μη. Όπως είδαμε προηγουμένως, η εξίσωση της συνέχειας μεταπίπτει στην περίπτωση αυτή στη σχέση:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.23)$$

Λόγω της μαθηματικής ταυτότητας $\text{div}(\text{rot}\vec{A}) = 0 \ \forall$ διάνυσμα $\vec{A}$, μπορεί κανείς στην περίπτωση αυτή να παράγει το πεδίο ταχυτήτων από ένα διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(x, y, z, t)$:

$$\vec{v} = \text{rot}\vec{A} \quad (1.24)$$

Το συμπέρασμα αυτό έχει ιδιαίτερα πρακτική χρήση στις διδιάστατες ροές, όπου δύο χωρικές μεταβλητές αρκούν για την περιγραφή της ροής και ως εκ τούτου το διανυσματικό δυναμικό απλοποιείται στη βαθμωτή **ροϊκή συνάρτηση** Ψ .

Ειδικότερα, για επίπεδες ροές ($//$ στο επίπεδο $-z$) η εξίσωση της συνέχειας γράφεται:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.25)$$

η οποία ικανοποιείται ταυτοτικά αν και μόνο αν:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_y, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\Psi_x \quad (1.26)$$

δηλαδή $\vec{A} = \vec{k}\Psi$, όπου η συνάρτηση $\Psi(x, y, t)$ είναι δύο φορές συνεχής και παραγωγίσιμη.

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή Laplace στη ροϊκή συνάρτηση Ψ παίρνουμε:

$$\Delta \Psi = \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = -v_x + u_y = -\text{rot}\vec{v} \cdot \vec{k} \quad (1.27)$$

όπου $\vec{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την z κατεύθυνση.

Άρα σε ένα αστρόβιλο πεδίο ροής, η ροϊκή συνάρτηση Ψ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\Delta \Psi = 0 \quad (1.28)$$

Το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης είναι πολύ χρήσιμο, διότι σε διδιάστατες αστρόβιλες ροές ασυμπίεστων ρευστών μπορούμε να εξάγουμε το πεδίο ταχυτήτων επιλύοντας την εξίσωση Laplace με μία οριακή συνθήκη έχοντας χρησιμοποιήσει μόνο την εξίσωση της συνέχειας και το αστρόβιλο του πεδίου.

Εξίσωση Διατήρησης της Ορμής

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής εκφράζει το δεύτερο βασικό νόμο της Μηχανικής (2ος νόμος του Νεύτωνα), σύμφωνα με τον οποίο ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με το αθροισμα των δρυσών στο σώμα δυνάμεων.

Σε προηγούμενη παράγραφο αναλύσαμε τη φύση των δυνάμεων αυτών και τις διακρίναμε σε δύο κατηγορίες: σε **Μαζικές ή Ογκικές Δυνάμεις**, σε **Επιφανειακές Δυνάμεις** και σε **Δυνάμεις από Στερεό Σώμα**.

Η διαφορική διατύπωση της **Εξίσωσης Διατήρησης της Ορμής** δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v})\vec{v} + \text{grad}^T \vec{v} \cdot \rho\vec{v} = \rho\vec{g} + \text{div}\vec{\sigma} \quad (1.29)$$

όπου:

$$\text{grad}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla\vec{v}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ ο ταυιστής των τάσεων}$$

$$\vec{\sigma} = \nabla \cdot \vec{\sigma} = \vec{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Κάνοντας χρήση της Εξίσωσης της Συνέχειας, καταλήγουμε στην ειδική μορφή της Εξίσωσης Διατήρησης της Ορμής:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} + \text{div}\vec{\sigma} \quad (1.30)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τον ρευστό ασυμπίεστο ($\rho = \text{const.}$), σταθερού ιξώδους ($\mu = \text{const.}$), κάνοντας χρήση των υλικών εξισώσεων για νευτώνια ρευστά και εισαγάγοντας την εξίσωση της συνέχειας στην εξίσωση της ορμής παίρνουμε στη διανυσματική σχέση:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \text{grad}p + \mu\Delta\vec{v} \Leftrightarrow \quad (1.31)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \Leftrightarrow \quad (1.32)$$

όπου:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ ο τελεστής Laplace}$$

και

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ η κινηματική συνεκτικότητα.}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η διανυσματική μορφή των **εξισώσεων Navier-Stokes** για ασυμπίεστο, νευτώνιο ρευστό και μαζί με την **εξίσωση της συνέχειας** ($\text{div} \vec{v} = 0$) αποτελούν πλήρες σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους (u, v, w, p) όπου p η πίεση του πεδίου ροής.

Εξίσωσης Διατήρησης της Ροπής της Ορμής (Στροφορμής)

Η **Εξίσωση Διατήρησης της Στροφορμής** εκφράζει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με το άθροισμα των ροπών των δρυσών δυνάμεων και δίνεται από τη σχέση (επίσης σε διαφορική μορφή):

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{r} \times \vec{v})] + \text{div} \vec{v}(\vec{r} \times \rho \vec{v}) + \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{r} \times \rho \vec{v}) = \rho(\vec{r} \times \vec{g}) + (\vec{r} \times \text{div} \vec{\sigma}) - 2 \text{vec} \vec{\sigma}^T \quad (1.33)$$

όπου $\text{vec} \vec{\sigma}^T$ είναι το διάνυσμα του τανυστή $\vec{\sigma}^T$:

$$\text{vec} \vec{\sigma}^T = \frac{1}{2} (\sigma_{zy} - \sigma_{yz}, \sigma_{xz} - \sigma_{zx}, \sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \quad (1.34)$$

Η σχέση αυτή κατόπιν πράξεων και με χρήση ταυτοτικών σχέσεων καταλήγει στη μορφή:

$$\vec{r} \times \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho \vec{v}) \right] = \vec{r} \times \left[\rho \vec{g} + \text{div} \vec{\sigma} \right] - 2 \text{vec} \vec{\sigma}^T \Leftrightarrow \quad (1.35)$$

$$\vec{r} \times \underbrace{\left[\left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho \vec{v}) \right] - \left[\rho \vec{g} + \text{div} \vec{\sigma} \right] \right]} = -2 \text{vec} \vec{\sigma}^T \quad (1.36)$$

Η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες ισούται ταυτοτικά με το μηδέν (Εξ. Διατήρησης της Ορμής). Συνεπώς ισχύει ταυτοτικά:

$$vec{\overset{\leftrightarrow}{\sigma}}^T = \vec{0} \quad (1.37)$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τη συμμετρία του τανυστή των τάσεων:

$$\begin{aligned} \sigma_{zy} &= \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} &= \sigma_{xy} \end{aligned}$$

Εξίσωση Διατήρησης της Ενέργειας

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας εκφράζει το γενικευμένο νόμο της Θερμοδυναμικής (1ο Αξίωμα). Το θεώρημα της ενέργειας σε ολοκληρωματική μορφή δηλώνει ότι σε μια ακίνητη επιφάνεια ελέγχου E , ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ρευστού που βρίσκεται στο χώρο (τ) ο οποίος περικλείεται από την E ισούται με την ανά μονάδα χρόνου εισερχόμενη ενέργεια από την E , το άθροισμα των ισχύων των πάσης φύσεως δυνάμεων που δρουν στο ρευστό καθώς και των άλλης φύσεως ισχύων που προσδίδονται στο ρευστό.

Η ενέργεια ενός στοιχείου ρευστού μάζας $dm = \rho dV$ είναι:

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) dm \quad (1.38)$$

όπου:

$$\begin{aligned} (v^2 dm)/2 &: \text{η κινητική ενέργεια} \\ \text{και, } e dm &: \text{η εσωτερική ενέργεια} \end{aligned}$$

Η διαφορική διατύπωση της **Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας** δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \right] + \text{div} \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \right] = \rho \vec{v} \cdot \vec{g} + \text{div} \left(\overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v} \right) - \text{div} \vec{q} + w \rho \quad (1.39)$$

όπου:

$\vec{q}$: το διάνυσμα πυκνότητας θερμορροής (ενέργεια που προσδίδεται στην επιφάνεια ελέγχου δι' αγωγής)

w : το ποσό της ενέργειας που εκλύεται από πιθανές εξώθερμες αντιδράσεις ανά μονάδα μάζας και χρόνου

1.3.3 Προτάσεις Στροβιλότητας

Σε ένα πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}$ αντιστοιχεί ένα πεδίο στροβιλότητας $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$, αν και μόνο αν το πεδίο ταχυτήτων είναι παραγωγίσιμο.

Γενικά ισχύει η ταυτότητα $\text{div} \vec{\omega} = 0$, δηλαδή το πεδίο στροβιλότητας είναι χωρίς πηγές.

Βασική Εξίσωση Μεταφοράς Στροβιλότητας για Νευτώνιο Ασυμπίεστο Ρευστό

Ισχύει η κινηματική πρόταση:

$$\text{rot} \vec{b} = 2 \left(\frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega} \cdot \text{div} \vec{v} - \vec{\omega} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) \quad (1.40)$$

όπου: $\vec{b}$ το διάνυσμα της επιτάχυνσης και $\vec{\omega}$ η στροβιλότητα.

Στην ειδική περίπτωση του ασυμπίεστου ρευστού ($\text{div} \vec{v} = 0$) η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\text{rot} \vec{b} = 2 \left(\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \vec{\omega} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) \quad (1.41)$$

Επίσης, για ασυμπίεστο νευτώνιο ρευστό ισχύει η εξίσωση Navier-Stokes στη διανυσματική μορφή:

$$\vec{b} = -\frac{\text{grad} p}{\rho} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} \quad (1.42)$$

όπου: $\vec{g} = -\text{grad} U$, εάν οι δυνάμεις πεδίου προέρχονται από δυναμικό (π.χ. δυνάμεις βαρύτητας).

Εφαρμόζοντας τον τελεστή rot και στα δύο μέλη της σχέσης αυτής και κάνοντας χρήση των ταυτοτήτων $\text{rot}(\text{grad}) = 0$ και $\Delta = -\text{rot}(\text{rot})$ παίρνουμε τη σχέση:

$$\text{rot} \vec{b} = 2\nu \Delta \vec{\omega} \quad (1.43)$$

Κάνοντας χρήση και της βοηθητικής σχέσης 1.40 καταλήγουμε στην **εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας** για ασυμπίεστο, νευτώνιο ρευστό σταθερού ιξώδους, σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \vec{\omega} \cdot \text{grad}\vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (1.44)$$

Στην ειδική περίπτωση του διδιάστατου πεδίου ροής, όπου δηλαδή $\vec{\omega} = k\omega$, η εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \quad (1.45)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta \omega \quad (1.46)$$

Θεώρημα του Helmholtz (Helmholtz Decomposition Theorem)

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Helmholtz, κάθε συνεχές και παραγωγίσιμο πεδίο ταχύτητας $\vec{v}$ μπορεί να διαχωριστεί σε ένα σωληνοειδές $\vec{v}_\psi$ (divergence free) και σε ένα αστρόβιλο $\vec{v}_\phi$ (curl free) πεδίο. Το αστρόβιλο πεδίο ροής ορίζεται μέσω της βαθμωτής συνάρτησης ϕ (δυναμικό ταχύτητας), ενώ το στροβιλό (σωληνοειδές) κομμάτι μέσω του διανυσματικού δυναμικού $\vec{\psi}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η ταχύτητα του πεδίου γράφεται:

$$\vec{v} = \vec{U}_\infty + \vec{v}_\phi + \vec{v}_\psi \quad (1.47)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\phi &= \nabla \phi \\ \vec{v}_\psi &= \nabla \times \vec{\psi} \\ \vec{U}_\infty, &\text{ η επ' άπειρο ταχύτητα της ροής} \end{aligned}$$

Εισάγοντας του τελεστές div και rot στις σχέσεις ορισμού των $\vec{v}_\phi$ και $\vec{v}_\psi$, παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \vec{v} \quad (1.48)$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega} \quad (1.49)$$

Συνεπώς, το πεδίο ροής μπορεί να προσδιορισθεί πλήρως με την επίλυση των εξισώσεων Poisson 1.48, 1.49 για τις συναρτήσεις ϕ , $\vec{\psi}$ και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες.

σημείωση: στην διατύπωση του θεωρήματος και των συμπερασμάτων που προκύπτουν από αυτό, ως $\vec{\omega}$ θεωρήθηκε η ποσότητα $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$, σε αντίθεση με την μέχρι τώρα ανάλυση όπου είχαμε ορίσει $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$

1.4 Τυρβώδεις Ροές

1.4.1 Γενικά Χαρακτηριστικά Τυρβωδών Ροών

Οι τυρβώδεις ροές, είναι μη μόνιμες ροές και παρουσιάζουν **ακανόνιστες διακυμάνσεις** της ταχύτητας στο χώρο. Το πλάτος των διακυμάνσεων αυτών δεν είναι σταθερό και είναι μικρότερο από το 10% της μέσης ταχύτητας. Οι διακυμάνσεις αυτές είναι ακανόνιστες αλλά όχι και τυχαίες (στοχαστικές). Αντίθετα, έχουν δομή και ειρμό και ευθύνονται για τη δημιουργία χωρικών δομών που ονομάζονται **μικροδίνες**. Οι χωρικές αυτές δομές διατηρούνται για σύντομο χρονικό διάστημα και υπάγονται σε μεγαλύτερες δομές τις **μεγάλες δίνες**. Βασικό χαρακτηριστικό της τύρβης είναι η **συνεχής κατανομή του μεγέθους των μικροδινών**. Έτσι αν ορίσουμε τη φασματική κατανομή $F(\eta)$ της μέσης χρονικά τιμής του τετραγώνου της διαταραχής $\overline{u'^2}$ της ταχύτητας u σε τυρβώδη ροή παίρνουμε μία συνεχή καμπύλη.

Η φασματική αυτή κατανομή των ενεργειακών διαταραχών υποδεικνύει ότι τα μεγέθη των μικροδινών δεν είναι συγκεκριμένα αλλά έχουν συνεχές φάσμα μεγέθους.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να ανφέρουμε ότι η τύρβη είναι αυτοδιατηρούμενη. Αφού δημιουργηθεί λοιπόν η τύρβη, μέσα από σχετικά ασαφείς διαδικασίες, δεν μειώνεται και συνεπώς ούτε σταματά να υφίσταται. Επίσης το φαινόμενο της τύρβης είναι συνυφασμένο με τη **μέση διάτμηση** (οριακά στρώματα, δέσμες, ομόρρους). Επομένως τύρβη με μέση διάτμηση αυτοδιατηρείται ενώ η τύρβη πλέγματος εν αντιθέση αποσβένεται.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της τύρβης είναι η τάση της να διεισδύει στις μη τυρβώδεις περιοχές του πεδίου ροής με αποτέλεσμα να αυξάνεται η έκτασή της.

Το βασικό κριτήριο διαχωρισμού μιας ροής σε στρωτή ή τυρβώδη, είναι η στροβιλότητα. Οι τυρβώδεις ροές είναι ροές **υψηλής στροβιλότητας** γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μικροδινών σε αντίθεση με τις στρωτές ροές όπου έχουμε απλά την εν γένει εμφάνιση μεγάλων δινών.

Επιπρόσθετα, οι τυρβώδεις ροές είναι ροές μεγάλης διάχυσης (ιξώδης διάχυση, θερμική διάχυση, διάχυση μάζας) καθώς όπως αναφέρθηκε ήδη η τύρβη έχει την τάση να αναμειγνύει το ρευστό. Οι μικροδίνες λοιπόν έχουν την ικανότητα να μεταφέρουν ρευστό (μάζα) από μία περιοχή χαμηλής ορμής σε μία περιοχή υψηλής ορμής (**διάχυση μικροδίνης**).

Τέλος, οι τυρβώδεις ροές σχετίζονται με διαδικασίες **μεταβολής της κλίμακας μήκους των μικροδινών**. Οι διαδικασίες αυτές συχνά οδηγούν τόσο σε αύξηση της μικροδίνης (**ζευγάρισμα μικροδινών**) όσο και σε μείωση του μεγέθους της. Φυσικά και αυτή η διαδικασία έχει όριο. Εκείνο το χαρακτηριστικό που θέτει τον κατώτερο όριο του μεγέθους των μικροδινών είναι οι ιξώδεις, καθώς για μικρά μεγέθη μικροδίνης οι ιξώδεις δυνάμεις γίνονται ιδιαίτερα σημαντικές και τείνουν να καταστρέψουν τις μικροδίνες αυτές.

1.4.2 Περιγραφή Τυρβωδών Ροών (Μοντέλο Reynolds)

Έστω το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}$ ενός τυρβώδους πεδίου ροής:

$$\vec{v} = (u, v, w) \quad (1.50)$$

Με βάση το **μοντέλο Reynolds** θεωρούμε την ταχύτητα και κάθε άλλο βασικό μέγεθος του πεδίου ροής ως άθροισμα μιας μέσης τιμής $\bar{A}$ και μιας διακυμάνσης A' .

Έτσι έχουμε για την ταχύτητα, τη στροβιλότητα και την πίεση:

$$\vec{v} = \underline{\vec{v}} + \vec{v}' \quad (1.51)$$

$$\vec{\omega} = \underline{\vec{\omega}} + \vec{\omega}' \quad (1.52)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (1.53)$$

Όπου για τις μέσες τιμές των διακυμάνσεων ισχύει:

$$\underline{\vec{v}'} = \vec{0}$$

$$\underline{\vec{\omega}'} = \vec{0}$$

$$\underline{p'} = 0$$

Οι μέσες τιμές στο μοντέλο Reynolds αναφέρονται σε χρονικά μέσες τιμές. Έτσι η μέση τιμή ενός μεγέθους q ορίζεται ως:

$$\bar{q} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} q(\vec{r}, t) dt \quad (1.54)$$

όπου τ το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης και t η χρονική στιγμή ολοκλήρωσης.

Το διάστημα ολοκλήρωσης τ θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ως προς τη χρονική περίοδο των τυρβωδών διακυμάνσεων $\tau \gg T$ και ταυτόχρονα αρκετά μικρότερο από τη χρονική διάρκεια των μη τυρβωδών διακυμάνσεων.

Ως **τυρβώδης κινητική ενέργεια** k (ανά μονάδα όγκου) ορίζεται η κινητική ενέργεια των διακυμάνσεων των συνιστωσών της ταχύτητας:

$$k \equiv \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} \quad (1.55)$$

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων σε Τυρβώδη Πεδία Ροής (Multi Scale Analysis)

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ενδελεχώς τη μέθοδο της **Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων σε Τυρβώδη Πεδία Ροής** αφού αρχικά κατανοήσουμε την βασική ιδέα που βρίσκεται πίσω από αυτήν.

Στη συνέχεια, σε κάθε βήμα της μεθόδου διατυπώνονται οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημά μας και διακριτοποιούνται ώστε να καθίσταται δυνατή η αριθμητική τους επίλυση. Η θεώρησή μας αυτή αφορά στην περίπτωση της τυρβώδους ροής ασυμπίεστου και μή συνεκτικού ρευστού στο χώρο. Η ροή αυτή, όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, είναι εξ' ορισμού μή μόνιμη (τυρβώδης ροή).

2.1 Η Γέννηση της Ιδέας των Πολλαπλών Κλιμάκων

Η γέννηση της ιδέας των πολλαπλών κλιμάκων προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση και την περιγραφή του φαινομένου της τύρβης. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι διακυμάνσεις της ταχύτητας στα τυρβώδη πεδία ροής είναι ακανόνιστες αλλά όχι και τυχαίες. Αντίθετα, έχουν δομή και ειρμό (στοχαστικές) και ευθύνονται για τη δημιουργία χωρικών δομών που ονομάζονται **μικροδίνες**. Οι χωρικές αυτές δομές διατηρούνται για σύντομο χρονικό διάστημα και υπάγονται σε μεγαλύτερες δομές τις **μεγάλες δίνες**. Βασικό χαρακτηριστικό της τύρβης είναι η **συνεχής κατανομή του μεγέθους των μικροδινών**. Συνεπώς, η ιδέα των πολλαπλών κλιμάκων είναι άμεσο απότοκο των χαρακτηριστικών και της φυσικής που διέπει τα τυρβώδη πεδία ροής. Επίσης, η επιλογή αναπαραγωγής ενός τυρβώδους πεδίου ροής με στοιχεία στροβιλότητας με όγκο (δίνες που καταλαμβάνουν όγκο και όχι σημειακές - particles/blobs), η ένταση των οποίων μεταβάλλεται τόσο στο χώρο όσο και συναρτήσει του χρόνου έχει κι αυτή με τη σειρά της ευθεία σχέση με τη φυσική περιγραφή και παρατήρηση της τύρβης. Η ανάλυσή μας λοιπόν στην παρούσα διαπραγμάτευση, θα συνδυάσει τη χρήση **πολλαπλών κλιμάκων**

με τεχνικές **vortex particle mesh** έτσι ώστε να αποφανθούμε για το ποιες και πόσες κλίμακες είναι σημαντικές και αναγκαίες για την αναπαραγωγή ενός στοχαστικού τυρβώδους πεδίου ταχύτητας και τη διατήρηση του "αναγκαίου" ποσοστού της αρχικής πληροφορίας καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται στο χρόνο.

2.2 Βηματική Παρουσίαση της Μεθόδου

2.2.1 Δημιουργία Στοχαστικού Τυρβώδους Πεδίου Ροής

Αρχικά παράγουμε ένα στοχαστικό τυρβώδες πεδίο ροής με το Mann Generator (DTU, Roskilde, Denmark) στη μικρότερη κλίμακα που μπορούμε να διαχειριστούμε (μέγιστη πυκνότητα πλέγματος). Το Mann Generator παράγει στοχαστικά πεδία ροής με βάση το μοντέλο του Mann χρησιμοποιώντας τις εξής εισόδους:

- $\alpha\epsilon^{2/3}$, όπου α η σταθερά του Kolmogorov (Kolmogorov constant) και ϵ ο ρυθμός συνεκτικής διάχυσης (rate of viscous dissipation)
- L , το χαρακτηριστικό μήκος κλίμακας (characteristic length scale)
- Γ , παράμετρος σχετική με την εντατική κατάσταση του ρευστού (stretching parameter)
- n_r , ακέραιος αριθμός που ορίζεται αυθαίρετα από εμάς για τη συνάρτηση παραγωγής τυχαίων αριθμών (random number generator)
- N_u , ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος στην κατεύθυνση της ροής $-x$ (flow direction)
- N_v , ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος στην οριζόντια κατεύθυνση $-y$ (horizontal cross-flow direction)
- N_w , ο αριθμός των κόμβων στην κατακόρυφη κατεύθυνση $-z$ (vertical direction)
- Δ_u , το χωρικό βήμα στην κατεύθυνση της ροής $-x$ (flow direction)
- Δ_v , το χωρικό βήμα στην οριζόντια κατεύθυνση $-y$ (horizontal cross-flow direction)
- Δ_w , το χωρικό βήμα στην κατακόρυφη κατεύθυνση $-z$ (vertical direction)
- HF_{comp} , ο συντελεστής διόρθωσης υψηλής συχνότητας, ο οποίος λαμβάνει τις τιμές 1 ή 0 (high frequency correction - true/false)

Για ισοτροπικά τυρβώδη πεδία ροής ($\Gamma = 0$) ισχύει (Mann Model) :

$$\alpha \epsilon^{2/3} = \sigma \frac{2}{0.688 L^{2/3}} \quad (2.1)$$

όπου:

$$\sigma = \tau \cdot U_{mean}$$

και

$$U_{mean}, \text{ η επ' άπειρο ταχύτητα της ροής} \\ \tau, \text{ η διατμητική τάση}$$

2.2.2 Υπολογισμός Πεδίου Στροβιλότητας στη Μικρότερη Κλίμακα (Small Scale)

Το διάνυσμα της στροβιλότητας ενός πεδίου ροής, όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{v} \quad (2.2)$$

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$ με μοναδιαία διανύσματα στις τρεις κατευθύνσεις $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας $rot \vec{v}$ δίνεται από την ορίζουσα:

$$rot \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

όπου: $\vec{v} = (u, v, w)$ το πεδίο ταχύτητας.

Αναπτυσσόντας την παραπάνω ορίζουσα 2.3 παίρνουμε:

$$rot \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (2.4)$$

Αν θέσουμε:

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

προκύπτουν, για τις συνιστώσες του πεδίου στροβιλότητας, οι εξής σχέσεις:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.5)$$

$$\omega_y = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.7)$$

Έστω λοιπόν $D \subset \mathbb{R}^3$ ο χώρος στον οποίο λαμβάνει χώρα το φαινόμενο που πραγματευόμαστε.

$$D = \{(x, y, z) : x \in [x_{min}, x_{max}], y \in [y_{min}, y_{max}], z \in [z_{min}, z_{max}]\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.8)$$

Διακριτοποιούμε τον χώρο D στο επίπεδο της μικρής κλίμακας (small scale), σε ένα καρτεσιανό πλέγμα με $(N_{x_{ss}} + 1), (N_{y_{ss}} + 1), (N_{z_{ss}} + 1)$ κόμβους στις κατευθύνσεις $-x, -y, -z$ αντίστοιχα.

Προκύπτει έτσι ένα καρτεσιανό δομημένο πλέγμα με πλήθος κόμβων:

$$(N_{x_{ss}} + 1) \times (N_{y_{ss}} + 1) \times (N_{z_{ss}} + 1).$$

Ο κόμβος (i, j, k) έχει συντεταγμένες (x_i, y_j, z_k) , όπου:

$$x_i^{ss} = x_{min} + (i - 1) \cdot \Delta x_{ss} \mid i = 1, \dots, (N_{x_{ss}} + 1) \in \mathbb{N}$$

$$y_j^{ss} = y_{min} + (j - 1) \cdot \Delta y_{ss} \mid j = 1, \dots, (N_{y_{ss}} + 1) \in \mathbb{N}$$

$$z_k^{ss} = z_{min} + (k - 1) \cdot \Delta z_{ss} \mid k = 1, \dots, (N_{z_{ss}} + 1) \in \mathbb{N}$$

και

$$\Delta x_{ss}, \Delta y_{ss}, \Delta z_{ss} : \text{τα χωρικά βήματα στην κάθε κατεύθυνση.}$$

Στη συνέχεια, διακριτοποιούμε τις εξισώσεις αυτές, χρησιμοποιώντας σχήματα κεντρικών πεπερασμένων διαφορών 1ης τάξης, ώστε να καταστεί δυνατή η αριθμητική τους επίλυση.

Θεωρούμε τη στροβιλικότητα συγκεντρωμένη στα κέντρα των κελιών του πλέγματος. Οι θέσεις αυτές περιγράφονται από τις εξισώσεις (θέσεις των particles):

$$x_{p_i}^{ss} = x_i^{ss} + \frac{\Delta x_{ss}}{2} \mid i = 1, \dots, N_{x_{ss}} \in \mathbb{N}$$

$$y_{p_j}^{ss} = y_j^{ss} + \frac{\Delta y_{ss}}{2} \mid j = 1, \dots, N_{y_{ss}} \in \mathbb{N}$$

$$z_{p_k}^{ss} = z_k^{ss} + \frac{\Delta z_{ss}}{2} \mid k = 1, \dots, N_{z_{ss}} \in \mathbb{N}$$

Συνεπώς, στο κέντρο του κελιού (i, j, k) του πλέγματος στη θέση $\vec{r}_{pss}|_{(i,j,k)} = (x_{pi}^{ss}, y_{pj}^{ss}, z_{pk}^{ss})$ οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών για τις συνιστώσες του πεδίου της στροβιλότητας γράφονται:

$$\omega_x^{ss}|_{(i,j,k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{w_{i,j+1,k}^{ss} - w_{i,j-1,k}^{ss}}{2\Delta y_{ss}} - \frac{v_{i,j,k+1}^{ss} - v_{i,j,k-1}^{ss}}{2\Delta z_{ss}} \right) \quad (2.9)$$

$$\omega_y^{ss}|_{(i,j,k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{ss} - u_{i,j,k-1}^{ss}}{2\Delta z_{ss}} - \frac{w_{i+1,j,k}^{ss} - w_{i-1,j,k}^{ss}}{2\Delta x_{ss}} \right) \quad (2.10)$$

$$\omega_z^{ss}|_{(i,j,k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j,k}^{ss} - v_{i-1,j,k}^{ss}}{f} \right) \quad (2.11)$$

Έτσι έχουμε προσδιορίσει όλα τα στοιχεία ροής στην μικρή κλίμακα (small scale), δηλαδή το πεδίο ταχύτητας $\vec{v}_{ss} = (u^{ss}, v^{ss}, w^{ss})$ και το πεδίο στροβιλότητας $\vec{\omega}_{ss} = (\omega_x^{ss}, \omega_y^{ss}, \omega_z^{ss})$.

2.2.3 Μετάβαση στην Επόμενη Κλίμακα (Large Scale)

Διακριτοποιούμε ξανά το χώρο D , στο επίπεδο της μεγάλης κλίμακας (large scale) αυτή τη φορά, σε ένα καρτεσιανό πλέγμα με $N_{x_{ls}}, N_{y_{ls}}, N_{z_{ls}}$ κόμβους στις κατευθύνσεις $-x, -y, -z$ αντίστοιχα.

Προκύπτει έτσι ένα καρτεσιανό δομημένο πλέγμα με πλήθος κόμβων $N_{x_{ls}} \times N_{y_{ls}} \times N_{z_{ls}}$.

Ο κόμβος (i, j, k) έχει συντεταγμένες (x_i, y_j, z_k) , όπου:

$$x_i^{ls} = x_{min} + (i - 1) \cdot \Delta x_{ls} \mid i = 1, \dots, N_{x_{ls}} \in \mathbb{N}$$

$$y_j^{ls} = y_{min} + (j - 1) \cdot \Delta y_{ls} \mid j = 1, \dots, N_{y_{ls}} \in \mathbb{N}$$

$$z_k^{ls} = z_{min} + (k - 1) \cdot \Delta z_{ls} \mid k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \in \mathbb{N}$$

και

$\Delta x_{ls}, \Delta y_{ls}, \Delta z_{ls}$: τα χωρικά βήματα στην κάθε κατεύθυνση.

Για τον προσδιορισμό των στοιχείων ροής στη μεγάλη κλίμακα προβάλλουμε το πεδίο στροβιλότητας της μικρής κλίμακας $\vec{\omega}_{ss}$ στη μεγάλη κλίμακα $\vec{\omega}_{ls}$.

Έτσι, στον κόμβο (i, j, k) του πλέγματος της μεγάλης κλίμακας, η τιμή της στροβιλότητας προκύπτει ως το άθροισμα της συνεισφοράς του κάθε particle της μικρής κλίμακας στον κόμβο αυτό.

Τα particles της μικρής κλίμακας είναι αρχικά τοποθετημένα στα κέντρα των κελιών του πλέγματος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Κάθε ένα από αυτά συνεισφέρει (ως στοιχείο στρωβιλικότητας με όγκο) σε τόσους κόμβους του πλέγματος της μεγάλης κλίμακας, όσους υποδεικνύει η μορφή και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης προβολής. Η σύνδεση μεταξύ των κόμβων του πλέγματος της κάθε κλίμακας, ώστε να καθοριστεί το πεδίο επιρροής του κάθε particle, γίνεται μέσω των σχέσεων:

$$i_c^{ls} = \left\lceil \frac{x_{p_i}^{ss} - x_{min}}{\Delta x_{ls}} \right\rceil + 1 \quad (2.12)$$

$$j_c^{ls} = \left\lceil \frac{y_{p_j}^{ss} - y_{min}}{\Delta y_{ls}} \right\rceil + 1 \quad (2.13)$$

$$k_c^{ls} = \left\lceil \frac{z_{p_k}^{ss} - z_{min}}{\Delta z_{ls}} \right\rceil + 1 \quad (2.14)$$

όπου:

$$\begin{aligned} x_{p_i}^{ss} &= x_i^{ss} + \frac{\Delta x_{ss}}{2} \\ y_{p_j}^{ss} &= y_j^{ss} + \frac{\Delta y_{ss}}{2} \\ z_{p_k}^{ss} &= z_k^{ss} + \frac{\Delta z_{ss}}{2} \end{aligned}$$

οι θέσεις των particles, και

$$[\cdot]$$

η συνάρτηση μετατροπής ενός πραγματικού σε ακέραιο.

Ανάλογα λοιπόν με τη συνάρτηση προβολής, το πεδίο επιρροής και συνεισφοράς του κάθε particle στη μεγάλη κλίμακα σε όρους πλέγματος (κόμβοι) προκύπτει:

$$(i_c^{ls} - \alpha_1, i_c^{ls} + \alpha_2) \times (j_c^{ls} - \beta_1, j_c^{ls} + \beta_2) \times (k_c^{ls} - \gamma_1, k_c^{ls} + \gamma_2)$$

Μετά από την ανάλυση αυτή είμαστε έτοιμοι να σχηματίσουμε τα αθροίσματα από τα οποία και προκύπτει το πεδίο στρωβιλικότητας στη μεγάλη κλίμακα. Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω σχέσεις για την κάθε συνιστώσα του διαδύσματος της στρωβιλικότητας:

$$\omega_x^{ls}|_{i,j,k} = \frac{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \omega_{x_p}^{ss} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.15)$$

$$\omega_y^{ls}|_{i,j,k} = \frac{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \omega_{y_p}^{ss} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.16)$$

$$\omega_z^{ls}|_{i,j,k} = \frac{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \omega_{z_p}^{ss} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.17)$$

όπου :

$$\vec{\omega}_p^{ss} = (\omega_{x_p}^{ss}, \omega_{y_p}^{ss}, \omega_{z_p}^{ss}) = \vec{\omega}_{ss} : \text{η στροβιλότητα των particles}$$

$$f = f(p, \bar{s}) : \text{η συνάρτηση προβολής}$$

$$N_{pss} = N_{xss} \times N_{yss} \times N_{zss} : \text{το πλήθος των particles της μικρής κλίμακας}$$

και

$$\bar{x} = \frac{|x_p^{ss} - x_i^{ls}|}{\Delta x_{ls}}$$

$$\bar{y} = \frac{|y_p^{ss} - y_i^{ls}|}{\Delta y_{ls}}$$

$$\bar{z} = \frac{|z_p^{ss} - z_i^{ls}|}{\Delta z_{ls}}$$

$$Vol_p^{ss} = \Delta x_{ss} \Delta y_{ss} \Delta z_{ss} : \text{ο όγκος των particles}$$

Έχοντας πλέον προσδιορίσει το πεδίο στροβιλότητας της μεγάλης κλίμακας, το μόνο που απομένει για τον πλήρη καθορισμό της ροής στην κλίμακα αυτή είναι ο προσδιορισμός του πεδίου ταχύτητας.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι για ασυμπίεστο ρευστό, το πεδίο ταχύτητας προκύπτει από ένα διανυσματικό δυναμικό $\vec{\Psi}$.

$$\vec{v} = \text{rot}\vec{\Psi} \quad (2.18)$$

Επίσης, αν το πεδίο ταχύτητας είναι παραγωγίσιμο, η στροβιλότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{v} \quad (2.19)$$

Έτσι προκύπτει ότι το διανυσματικό δυναμικό (ροϊκή συνάρτηση) $\vec{\Psi}$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla^2 \times \vec{\Psi} = 2\vec{\omega} \quad (2.20)$$

Αναπτύσσοντας το πρώτο μέλος της 2.20 καταλήγουμε στην εξίσωση Poisson για το διανυσματικό δυναμικό $\vec{\Psi}$:

$$\nabla^2 \cdot \vec{\Psi} = -\vec{\omega} \quad (2.21)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης Poisson για τη ροϊκή συνάρτηση του πεδίου ροής χρησιμοποιείται μία μέθοδος Particle Mesh, υλοποιημένη στον κώδικα Vortex Particle Method (Εργαστήριο Αεροδυναμικής, Ε.Μ.Π.). Η γενική ιδέα των μεθόδων Particle Mesh είναι η επίλυση των Poisson εξισώσεων πάνω σε ένα καρτεσιανό πλέγμα με τη χρήση Fast Poisson Solvers.

Καθώς απαιτείται ένα δομημένο καρτεσιανό πλέγμα, είναι αναγκαία η προβολή της ροϊκής πληροφορίας από τα στοιχεία στροβιλότητας στους κόμβους του πλέγματος μέσω κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής, η επίλυση της εξίσωσης Poisson και εν τέλει η επιστροφή πίσω στα στοιχεία στροβιλότητας. Να σημειωθεί εδώ ότι παρ'όλο που η αρχική μας πληροφορία είναι διακριτοποιημένη σε πλέγμα, εισάγεται στον κώδικα στη μορφή "τυχαία" κατανεμημένων στοιχείων, τα οποία ανακατανέμονται σε νέο πλέγμα. Για την ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης είναι ιδιαίτερης σημασίας πάντα ο επιτυχής προσδιορισμός του όγκου κάθε κελιού του Particle Mesh σε συνάρτηση με τον αρχικά θεωρούμενο όγκο των σωματιδίων. Μια πιο αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου που υλοποιεί ο κώδικας παρατίθεται στο [?].

Η εξίσωση Poisson επιλυόμενη μας δίνει τη ροϊκή συνάρτηση και από τη σχέση ?? υπολογίζουμε το πεδίο ταχύτητας. Αν θέσουμε $\vec{\Psi} = (\Psi_1(\vec{r}), \Psi_2(\vec{r}), \Psi_3(\vec{r}))$ με $\vec{r} = (x, y, z)$ η ??

γράφεται:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \quad (2.22)$$

$$\vec{v} = (\Psi_{3y} - \Psi_{2z}, \Psi_{1z} - \Psi_{3x}, \Psi_{2x} - \Psi_{1y}) \quad (2.23)$$

όπου οι δείκτες x, y, z υποδεικνύουν μερική παραγωγή.

Ακολουθώντας λοιπόν την παραπάνω διαδικασία, η οποία μάλιστα χαρακτηρίζεται από αισθητά μειωμένο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με άλλες μεθόδους, έχουμε προσδιορίσει όλα τα στοιχεία της ροής στην μεγάλη κλίμακα (large scale), δηλαδή το πεδίο ταχύτητας $\vec{v}_{ls} = (u^{ls}, v^{ls}, w^{ls})$ και το πεδίο στροβιλότητας $\vec{\omega}_{ls} = (\omega_x^{ls}, \omega_y^{ls}, \omega_z^{ls})$.

2.2.4 Χρονική Εξέλιξη του Πεδίου Ροής (Time Evolution)

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, η στροβιλότητα των particles της κάθε κλίμακας, εισάγεται στον κώδικα Vortex Particle Method στη μορφή τυχαία κατανεμημένων στοιχείων, και πραγματοποιείται η χρονική εξέλιξη του φαινομένου.

Τα βήματα που εκτελούνται σε κάθε χρονικό βήμα του κώδικα αυτού είναι τα εξής:

Βήμα 1: Η πληροφορία που εισάγεται στον κώδικα σε μορφή τυχαία κατανεμημένων ρευστοστοιχείων (particles) προβάλλεται στο πλέγμα του Particle Mesh.

Βήμα 2: Λύνονται οι εξισώσεις Poisson για τη ροϊκή συνάρτηση $\vec{\Psi}$ και το δυναμικό Φ (θεώρημα Helmholtz):

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 \vec{\Psi} = -\vec{\omega} \quad (2.25)$$

Βήμα 3: Υπολογίζονται, στους κόμβους του πλέγματος του Particle Mesh, οι ποσότητες που βρίσκονται στα δεξιά μέλη των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\phi &= \nabla \Phi \\ \vec{v}_\psi &= \nabla \times \vec{\Psi} \end{aligned}$$

Βήμα 4: Όλα τα στοιχεία που έχουν υπολογιστεί στους κόμβους του πλέγματος παρεμβάλλονται με κατάλληλες συναρτήσεις παρεμβολής στις θέσεις των particles.

Βήμα 5: Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της συνέχειας στο χρόνο, υπολογίζονται οι νέες τιμές των ιδιοτήτων των particles, επιτελώντας έτσι τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου.

Βήμα 6: Πραγματοποιείται remeshing, εάν αυτό κριθεί απαραίτητο.

2.2.5 Καθορισμός του Πεδίου των Διαταραχών στη Μικρή Κλίμακα

Όπως είδαμε στο 1ο Κεφάλαιο, στην παράγραφο περί Τύρβης, στα τυρβώδη πεδία ροής τα βασικά μεγέθη του πεδίου γράφονται ως άθροισμα μίας μέσης χρονικά τιμής και μιας διακυμάνσης (μοντέλο Reynolds). Για τα διανύσματα της ταχύτητας και της στροβιλότητας ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$\vec{v} = \underline{\vec{v}} + \vec{v}' \quad (2.26)$$

$$\vec{\omega} = \underline{\vec{\omega}} + \vec{\omega}' \quad (2.27)$$

Όπου για τις μέσες τιμές των διακυμάνσεων ισχύει:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{v}'} &= \vec{0} \\ \underline{\vec{\omega}'} &= \vec{0} \end{aligned}$$

και οι χρονικές μέσες τιμές δίνονται από τις σχέσεις:

$$\underline{\vec{v}} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \vec{v}(\vec{r}, t) dt \quad (2.28)$$

$$\underline{\vec{\omega}} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \vec{\omega}(\vec{r}, t) dt \quad (2.29)$$

όπου τ το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης και t η χρονική στιγμή ολοκλήρωσης.

Οι σχέσεις που συνδέουν τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις των δύο αυτών μεγεθών μεταξύ τους, προκύπτουν από το νόμο των Biot-Savart. Έτσι έχουμε:

$$\underline{\vec{v}} = \iiint \underline{\vec{\omega}} \times \vec{k} dD \quad (2.30)$$

$$\vec{v}' = \iiint \vec{\omega}' \times \vec{k} dD \quad (2.31)$$

όπου $D = dx dy dz$ ο όγκος του χωρίου ολοκλήρωσης.

Οι κλίμακες που έχουμε θεωρήσει στην παρούσα ανάλυση, έχουν την δυνατότητα να φέρουν συγκεκριμένη πληροφορία. Έτσι η **μικρή κλίμακα** είναι αυτή, η οποία φέρει την πληροφορία τόσο της μέσης τιμής όσο και της διακύμανσης ενώ η **μεγάλη κλίμακα** φέρει αποκλειστικά και μόνο την πληροφορία της μέσης τιμής. Το γεγονός αυτό είναι αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο έχει οριστεί η κάθε κλίμακα, δηλαδή της φυσικής καταβολής και ερμηνείας της (resolution).

Για να μπορέσουμε λοιπόν να διαχωρίσουμε τη μέση τιμή από τη διακύμανση στη μικρή κλίμακα, ώστε να καταφέρουμε να αποκτήσουμε άμεση γνώση του πεδίου των διαταραχών τόσο της ταχύτητας όσο και της στροβιλότητας, παρεμβάλλουμε τις μέσες τιμές των μεγεθών αυτών ($\vec{v}_{ls}, \vec{\omega}_{ls}$) στις θέσεις των particles της μικρής κλίμακας (κέντρα των κελιών του πλέγματος), με κατάλληλες συναρτήσεις παρεμβολής.

Αν $\vec{v}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$ και $\vec{\omega}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$ τα πεδία που προκύπτουν από την παρεμβολή των particles της μεγάλης κλίμακας (χρονικά μέσες τιμές) στις θέσεις των particles της μικρής κλίμακας (large scale to small scale interpolation), τότε τα πεδία των διαταραχών της ταχύτητας και της στροβιλότητας, τα οποία προφανώς και αναφέρονται στη μικρή κλίμακα όπως ειπώθηκε και προηγούμενως, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{v}' = \vec{v}_{ss} - \vec{v}|_{(ls) \rightarrow (ss)} \quad (2.32)$$

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}_{ss} - \vec{\omega}|_{(ls) \rightarrow (ss)} \quad (2.33)$$

Η πληροφορία που φέρει το κάθε particle της μεγάλης κλίμακας, παρεμβάλλεται στη θέση του (i, j, k) particle της μικρής κλίμακας. Το αποτέλεσμα της παρεμβολής αυτής προκύπτει ως το άθροισμα της συνεισφοράς του κάθε particle της μεγάλης κλίμακας στη θέση αυτή.

Τα particles της μικρής κλίμακας είναι αρχικά τοποθετημένα στα κέντρα των κελιών του πλέγματος ενώ στη μεγάλη κλίμακα η πληροφορία θεωρείται συγκεντρωμένη στους κόμβους του πλέγματος. Κάθε ένα από τα particles της μεγάλης κλίμακας συνεισφέρει (ως στοιχείο στροβιλότητας με όγκο) σε τόσους κόμβους του πλέγματος της μικρής κλίμακας, όσους υποδεικνύει η μορφή και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης προβολής. Η σύνδεση μεταξύ των κόμβων του πλέγματος της κάθε κλίμακας, ώστε να καθοριστεί το πεδίο επιρροής του κάθε particle, γίνεται μέσω των σχέσεων:

$$i_c^{ss} = \left\lceil \frac{x_{p_i}^{ls} - x_{min}}{\Delta x_{ss}} \right\rceil + 1 \quad (2.34)$$

$$j_c^{ss} = \left\lceil \frac{y_{p_j}^{ls} - y_{min}}{\Delta y_{ss}} \right\rceil + 1 \quad (2.35)$$

$$k_c^{ss} = \left\lceil \frac{z_{p_k}^{ls} - z_{min}}{\Delta z_{ss}} \right\rceil + 1 \quad (2.36)$$

όπου:

$$\begin{aligned} x_{p_i}^{ls} &= x_i^{ls} \mid i = 1, \dots, N_{x_{ls}} \in \mathbb{N} \\ y_{p_i}^{ls} &= y_i^{ls} \mid i = 1, \dots, N_{y_{ls}} \in \mathbb{N} \\ z_{p_i}^{ls} &= z_i^{ls} \mid i = 1, \dots, N_{z_{ls}} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

οι θέσεις των particles της μεγάλης κλίμακας, και

[.]

η συνάρτηση μετατροπής ενός πραγματικού σε ακέραιο.

Ανάλογα λοιπόν με τη συνάρτηση παρεμβολής, το πεδίο επιρροής και συνεισφοράς του κάθε particle στη μικρή κλίμακα σε όρους πλέγματος (κόμβοι) προκύπτει:

$$(i_c^{ss} - \alpha_1, i_c^{ss} + \alpha_2) \times (j_c^{ss} - \beta_1, j_c^{ss} + \beta_2) \times (k_c^{ss} - \gamma_1, k_c^{ss} + \gamma_2)$$

Σημείωση: Το εύρος αυτό ουσιαστικά αναφέρεται στον αριθμό particles της μικρής κλίμακας, τα οποία βρίσκονται στο πεδίο επιρροής (συσχέτιση) του κάθε particle της μεγάλης κλίμακας. Θα μπορούσαμε βέβαια να θεωρήσουμε ένα σχετικό πλέγμα τέτοιο ώστε η θέση των particles της μικρής κλίμακας να συμπίπτει με τους κόμβους του, οπότε και θα μπορούσαμε ελεύθερα να χρησιμοποιούμε τον όρο "εύρος κόμβων". Πάντως όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 2.2.4, σε κάθε χρονικό βήμα, ο κώδικας VPM αφού επιλύσει τις εξισώσεις Poisson στους κόμβους του πλέγματος, παρεμβάλλει τα αποτελέσματα αυτά πίσω στις θέσεις των particles. Άρα στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται η τεχνική του remeshing, οι θέσεις των particles παραμένουν ίδιες με τις αρχικές (μεγάλη κλίμακα - κόμβοι, μικρή κλίμακα - κέντρα κελιών).

Μετά από την ανάλυση αυτή είμαστε έτοιμοι να σχηματίσουμε τα αθροίσματα από τα οποία και προκύπτει το αποτέλεσμα της παρεμβολής της μεγάλης κλίμακας στη μικρή. Έχουμε λοιπόν τις

εξισώσεις υπολογισμού των $\vec{v}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$ και $\vec{\omega}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$ σε διανυσματική μορφή:

$$\vec{v}|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} \vec{v}_{pls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.37)$$

$$\vec{\omega}|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} \vec{\omega}_{pls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.38)$$

όπου : $\vec{v}_{pls} \equiv \vec{v}_{ls}$ και $\vec{\omega}_{pls} \equiv \vec{\omega}_{ls}$ (καθώς όπως προαναφέραμε τα particles της μεγάλης κλίμακας είναι τοποθετημένα στους κόμβους του πλέγματος.)

Αναπτύσσοντας τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε τις σχέσεις υπολογισμού των συνιστωσών των $\vec{v}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$ και $\vec{\omega}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$:

$$u|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} u_p^{ls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.39)$$

$$v|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} v_p^{ls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.40)$$

$$w|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} w_p^{ls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.41)$$

$$\omega_x|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} \omega_{x_p}^{ls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.42)$$

$$\omega_y|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} \omega_{y_p}^{ls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.43)$$

$$\omega_z|_{(ls) \rightarrow (ss)}^{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_{pls}} \omega_{z_p}^{ls} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z}) \quad (2.44)$$

όπου :

$$f = f(p, \bar{s}), \text{ η συνάρτηση παρεμβολής}$$

$N_{p_{ls}}$, το πλήθος των particles της μεγάλης κλίμακας

και

$$\bar{x} = \frac{|x_p^{ss} - x_i^{ls}|}{\Delta x_{ss}}$$

$$\bar{y} = \frac{|y_p^{ss} - y_j^{ls}|}{\Delta y_{ss}}$$

$$\bar{z} = \frac{|z_p^{ss} - z_k^{ls}|}{\Delta z_{ss}}$$

Με γνωστά πλέον τα $\vec{v}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$ και $\vec{\omega}|_{(ls) \rightarrow (ss)}$, οι διακυμάνσεις της ταχύτητας και της στροβιλότητας του πεδίου στο επίπεδο της μικρής κλίμακας υπολογίζονται από τις εξισώσεις 2.32 και 2.33

2.2.6 Σύζευξη Κλιμάκων - Μεταφορά Στροβιλότητας

Η Εξίσωση Μεταφοράς της Στροβιλότητας όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για ασυμπίεστο, νευτώνιο ρευστό σταθερού ιξώδους σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \quad (2.45)$$

Η οποία για μη συνεκτικό ρευστό, δηλαδή για $\nu = 0$, παίρνει τη μορφή:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.46)$$

Επίσης γράφοντας τη σχέση μεταξύ τοπικής και υλικής παραγώγου για τη στροβιλότητα, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} \quad (2.47)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα διανύσματα της ταχύτητας και της στροβιλότητας γράφονται στη μορφή:

$$\vec{v} = \underline{\vec{v}} + \vec{v}' \quad (2.48)$$

$$\vec{\omega} = \underline{\vec{\omega}} + \vec{\omega}' \quad (2.49)$$

Εισάγοντας τις 2.48, 2.49 στην 2.47 παίρνουμε τη σχέση:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{D(\underline{\vec{\omega}} + \vec{\omega}')}{Dt} = \frac{\partial(\underline{\vec{\omega}} + \vec{\omega}')}{\partial t} + \left((\underline{\vec{v}} + \vec{v}') \cdot \nabla \right) (\underline{\vec{\omega}} + \vec{\omega}') \quad (2.50)$$

Κάνοντας τις πράξεις στην 2.50 παίρνουμε:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\vec{\omega}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}'}{\partial t} + (\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \underline{\vec{\omega}} + (\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega}' + (\vec{v}' \cdot \nabla) \underline{\vec{\omega}} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}' \quad (2.51)$$

Όμως από τη σχέση μεταξύ υλικής και τοπικής παραγώγου για τη μέση τιμή της στροβιλότητας $\underline{\vec{\omega}}$:

$$\frac{D\underline{\vec{\omega}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\vec{\omega}}}{\partial t} + (\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \underline{\vec{\omega}} \quad (2.52)$$

Η εξίσωση 2.51 γράφεται:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{D\underline{\vec{\omega}}}{Dt} + \frac{\partial \vec{\omega}'}{\partial t} + (\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega}' + (\vec{v}' \cdot \nabla) \underline{\vec{\omega}} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}' \quad (2.53)$$

Ολοκληρώνουμε λοιπόν τη σχέση 2.53 στη μεγάλη κλίμακα (projection to large scale):

$$\overline{\frac{D\vec{\omega}}{Dt}} = \overline{\frac{D\underline{\vec{\omega}}}{Dt}} + \overline{\frac{\partial \vec{\omega}'}{\partial t}} + \overline{(\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega}'} + \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \underline{\vec{\omega}}} + \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}'} \quad (2.54)$$

όπου: το σύμβολο $\overline{(\cdot)}$ υποδηλώνει την ολοκλήρωση στη μεγάλη κλίμακα, δηλαδή την αναγωγή των όρων της εξίσωσης στη μεγάλη κλίμακα.

Οι όροι $\overline{(\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega}'}$, $\overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \underline{\vec{\omega}}}$ στην 2.54 είναι ίσοι με το μηδέν, καθώς οι ποσότητες $\underline{\vec{v}}$ και $\underline{\vec{v}}$ θεωρούνται σταθερές στη μεγάλη κλίμακα και συνεπώς μπορούν να βγουν έξω από το ολοκλήρωμα. Τα ολοκληρώματα όμως των διακυμάνσεων στη μεγάλη κλίμακα είναι μηδέν καθώς όπως έχουμε ήδη αναφέρει η κλίμακα αυτή φέρει αποκλειστικά και μόνο την πληροφορία της μέσης τιμής και όχι της διακύμανσης ενός μεγέθους.

$$\overline{(\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega}'} = (\underline{\vec{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega}' = \vec{0} \quad (2.55)$$

$$\overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}} = \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}} = \vec{0} \quad (2.56)$$

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}'} \quad (2.57)$$

Εισάγοντας τώρα τις 2.48, 2.49 στο δεύτερο μέλος της 2.46 παίρνουμε:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \left((\vec{\omega} + \vec{\omega}') \cdot \nabla \right) (\vec{v} + \vec{v}') \Leftrightarrow \quad (2.58)$$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}' + (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' \quad (2.59)$$

Ολοκληρώνοντας τη 2.59 στη μεγάλη κλίμακα παίρνουμε:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \overline{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}} + \overline{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}'} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}'} \quad (2.60)$$

Τα ολοκληρώματα $\overline{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}'}$, $\overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}}$ είναι επίσης μηδέν, σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε πιο πάνω σχετικά με το ολοκλήρωμα των διαταραχών στη μεγάλη κλίμακα.

Επίσης το ολοκλήρωμα $\overline{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}}$ ισούται με: $\overline{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$, καθώς ο όρος $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$ αναφέρεται ήδη στη μεγάλη κλίμακα και επομένως θεωρείται σταθερός και βγαίνει εκτός της ολοκλήρωσης.

Τελικά, η 2.60, γραφεται:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}'} \quad (2.61)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων 2.53 και 2.57 καταλήγουμε στη σχέση που διέπει το φαινόμενο της μεταφοράς της στροβιλότητας συναρτήσει του χρόνου στη μεγάλη κλίμακα:

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'} - \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}'}} \quad (2.62)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η **Εξίσωση Μεταφοράς της Στροβιλότητας** διατυπωμένη στο επίπεδο της **μεγάλης κλίμακας** και όπως αποτυπώνεται στη σχέση 2.62, περιλαμβάνει τους επιπλέον όρους

$$\overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'}, \quad -\overline{(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}'}$$

Οι όροι αυτοί ουσιαστικά ευθύνονται για τη μεταφορά της πληροφορίας από τη μικρή στη μεγάλη κλίμακα (σύζευξη κλιμάκων). Βλέπουμε λοιπόν, πώς η χρονική μεταβολή της μέσης τιμής της στροβιλότητας σε επίπεδο μεγάλης κλίμακας επηρεάζεται, ή μάλλον "διορθώνεται", από την πρόσθετη πληροφορία που φέρει η μικρή κλίμακα.

2.2.7 Ανάλυση των Επιπλέον Όρων στην Εξίσωση Μεταφοράς της Στροβιλότητας

Έστω λοιπόν τα διανύσματα της ταχύτητας και της στροβιλότητας:

$$\vec{v} = (u, v, w) \quad (2.63)$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad (2.64)$$

Αναλύουμε τον όρο $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v}$, ώστε να γραφτεί σε συντηρητική μορφή:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} &= \omega_x \partial_x \vec{v} + \omega_y \partial_y \vec{v} + \omega_z \partial_z \vec{v} = \\ &= \partial_x(\omega_x \vec{v}) + \partial_y(\omega_y \vec{v}) + \partial_z(\omega_z \vec{v}) - \\ &\quad - \vec{v}(\partial_x \omega_x + \partial_y \omega_y + \partial_z \omega_z) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Όμως ισχύει ταυτοτικά:

$$\partial_x \omega_x + \partial_y \omega_y + \partial_z \omega_z = \text{div} \vec{\omega} = \text{div}(\text{rot} \vec{v}) = 0 \quad (2.66)$$

Συνεπώς, η 2.65 παίρνει τη μορφή:

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \partial_x(\omega_x \vec{v}) + \partial_y(\omega_y \vec{v}) + \partial_z(\omega_z \vec{v}) \quad (2.67)$$

Κατά την ίδια λογική, σχηματίζουμε και την αναλυτική μορφή του όρου $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} &= u \partial_x \vec{\omega} + v \partial_y \vec{\omega} + w \partial_z \vec{\omega} = \\ &= \partial_x(u \vec{\omega}) + \partial_y(v \vec{\omega}) + \partial_z(w \vec{\omega}) - \\ &\quad - \vec{\omega}(\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας για το ασυμπίεστο ρευστό έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \Leftrightarrow \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Κάνοντας χρήση λοιπόν της 2.69, η 2.68 γράφεται:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \partial_x(u \vec{\omega}) + \partial_y(v \vec{\omega}) + \partial_z(w \vec{\omega}) \quad (2.70)$$

Έστω το πεδίο των διαταραχών της ταχύτητας και της στροβιλότητας, στο επίπεδο της μικρής κλίμακας όπου και ορίζεται:

$$\vec{v}' = (u', v', w') \quad (2.71)$$

$$\vec{\omega}' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z) \quad (2.72)$$

Γράφοντας λοιπόν τις 2.67 και 2.70 για τις συνιστώσες των $\vec{v}'$, $\vec{\omega}'$ καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\boxed{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' = \partial_x(\omega'_x \vec{v}') + \partial_y(\omega'_y \vec{v}') + \partial_z(\omega'_z \vec{v}')} \quad (2.73)$$

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega}' = \partial_x(u' \vec{\omega}') + \partial_y(v' \vec{\omega}') + \partial_z(w' \vec{\omega}')} \quad (2.74)$$

Στη συνέχεια, διακριτοποιούμε τις εξισώσεις 2.73 και 2.74 χρησιμοποιώντας σχήματα πεπερασμένων κεντρικών διαφορών, ώστε να καταστεί δυνατή η αριθμητική τους επίλυση. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται στα κέντρα των κελιών, εκεί δηλαδή που βρίσκονται τοποθετημένα τα particles της μικρής κλίμακας. Έτσι, στη θέση (i, j, k) , οι τιμές των συνιστωσών των όρων $(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}'$, $(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}'$ δίνονται από τις διακριτοποιημένες σχέσεις:

- Οι συνιστώσες του όρου $(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}'$:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' \Big|_x^{(i,j,k)} &= \frac{(\omega'_x u')^{(i+1,j,k)} - (\omega'_x u')^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ss}} + \\ &+ \frac{(\omega'_y u')^{(i,j+1,k)} - (\omega'_y u')^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ss}} + \\ &+ \frac{(\omega'_z u')^{(i,j,k+1)} - (\omega'_z u')^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ss}} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' \Big|_y^{(i,j,k)} &= \frac{(\omega'_x v')^{(i+1,j,k)} - (\omega'_x v')^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ss}} + \\ &+ \frac{(\omega'_y v')^{(i,j+1,k)} - (\omega'_y v')^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ss}} + \\ &+ \frac{(\omega'_z v')^{(i,j,k+1)} - (\omega'_z v')^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ss}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' \Big|_z^{(i,j,k)} &= \frac{(\omega'_x w')^{(i+1,j,k)} - (\omega'_x w')^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ss}} + \\ &+ \frac{(\omega'_y w')^{(i,j+1,k)} - (\omega'_y w')^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ss}} + \\ &+ \frac{(\omega'_z w')^{(i,j,k+1)} - (\omega'_z w')^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ss}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

- Οι συνιστώσες του όρου $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}
 (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}' \Big|_x^{(i,j,k)} &= \frac{(u'\omega'_x)^{(i+1,j,k)} - (u'\omega'_x)^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ss}} + \\
 &+ \frac{(v'\omega'_x)^{(i,j+1,k)} - (v'\omega'_x)^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ss}} + \\
 &+ \frac{(w'\omega'_x)^{(i,j,k+1)} - (w'\omega'_x)^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ss}}
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}' \Big|_y^{(i,j,k)} &= \frac{(u'\omega'_y)^{(i+1,j,k)} - (u'\omega'_y)^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ss}} + \\
 &+ \frac{(v'\omega'_y)^{(i,j+1,k)} - (v'\omega'_y)^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ss}} + \\
 &+ \frac{(w'\omega'_y)^{(i,j,k+1)} - (w'\omega'_y)^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ss}}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}' \Big|_z^{(i,j,k)} &= \frac{(u'\omega'_z)^{(i+1,j,k)} - (u'\omega'_z)^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ss}} + \\
 &+ \frac{(v'\omega'_z)^{(i,j+1,k)} - (v'\omega'_z)^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ss}} + \\
 &+ \frac{(w'\omega'_z)^{(i,j,k+1)} - (w'\omega'_z)^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ss}}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Η ολοκλήρωση των όρων αυτών πραγματοποιείται ουσιαστικά με την προβολή (projection) τους στους κόμβους του πλέγματος της μεγάλης κλίμακας.

$$\overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'} \Big|_x^{(i,j,k)ls} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{xss}} \sum_{j=1}^{N_{yss}} \sum_{k=1}^{N_{zss}} (\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}' \Big|_x^{(i,j,k)} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x})f(p, \bar{y})f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x})f(p, \bar{y})f(p, \bar{z})} \tag{2.81}$$

$$\overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}'} \Big|_y^{(i,j,k)_{ls}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{xss}} \sum_{j=1}^{N_{yss}} \sum_{k=1}^{N_{zss}} (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' \Big|_y^{(i,j,k)} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.82)$$

$$\overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}'} \Big|_z^{(i,j,k)_{ls}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{xss}} \sum_{j=1}^{N_{yss}} \sum_{k=1}^{N_{zss}} (\vec{\omega}' \cdot \nabla) \vec{v}' \Big|_z^{(i,j,k)} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.83)$$

$$\overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}'} \Big|_x^{(i,j,k)_{ls}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{xss}} \sum_{j=1}^{N_{yss}} \sum_{k=1}^{N_{zss}} (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}' \Big|_x^{(i,j,k)} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.84)$$

$$\overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}'} \Big|_y^{(i,j,k)_{ls}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{xss}} \sum_{j=1}^{N_{yss}} \sum_{k=1}^{N_{zss}} (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}' \Big|_y^{(i,j,k)} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.85)$$

$$\overline{(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}'} \Big|_z^{(i,j,k)_{ls}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{xss}} \sum_{j=1}^{N_{yss}} \sum_{k=1}^{N_{zss}} (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{\omega}' \Big|_z^{(i,j,k)} \cdot Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})}{\sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} \sum_{p=1}^{N_{pss}} Vol_p^{ss} \cdot f(p, \bar{x}) f(p, \bar{y}) f(p, \bar{z})} \quad (2.86)$$

Μετά τον υπολογισμό των επιπλέον όρων στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας στους κόμβους του πλέγματος της μεγάλης κλίμακας, το τελευταίο βήμα που απομένει πριν την επίλυση της εξίσωσης αυτής είναι ο υπολογισμός του όρου $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$. Γράφουμε λοιπόν την

εξίσωση 2.67 για τις μέσες τιμές της ταχύτητας και της στροβιλότητας:

$$(\underline{\vec{\omega}} \cdot \nabla) \underline{\vec{v}} = \partial_x(\underline{\omega}_x \underline{v}) + \partial_y(\underline{\omega}_y \underline{v}) + \partial_z(\underline{\omega}_z \underline{v}) \quad (2.87)$$

Στη συνέχεια, διακριτοποιούμε την εξίσωση 2.87 χρησιμοποιώντας σχήματα πεπερασμένων κεντρικών διαφορών, ώστε να καταστεί δυνατή η αριθμητική της επίλυση. Η εξίσωση αυτή επιλύεται στους κόμβους του πλέγματος της μεγάλης κλίμακας. Έτσι, στη θέση (i, j, k) , οι τιμές των συνιστωσών του όρου $(\underline{\vec{\omega}} \cdot \nabla) \underline{\vec{v}}$ δίνονται από τις διακριτοποιημένες σχέσεις:

Οι συνιστώσες του όρου $(\underline{\vec{\omega}} \cdot \nabla) \underline{\vec{v}}$:

$$\begin{aligned} (\underline{\vec{\omega}} \cdot \nabla) \underline{\vec{v}} \Big|_x^{(i,j,k)} &= \frac{(\omega_x^{ls} u^{ls})^{(i+1,j,k)} - (\omega_x^{ls} u^{ls})^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ls}} + \\ &+ \frac{(\omega_y^{ls} u^{ls})^{(i,j+1,k)} - (\omega_y^{ls} u^{ls})^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ls}} + \\ &+ \frac{(\omega_z^{ls} u^{ls})^{(i,j,k+1)} - (\omega_z^{ls} u^{ls})^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ls}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} (\underline{\vec{\omega}} \cdot \nabla) \underline{\vec{v}} \Big|_x^{(i,j,k)} &= \frac{(\omega_x^{ls} v^{ls})^{(i+1,j,k)} - (\omega_x^{ls} v^{ls})^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ls}} + \\ &+ \frac{(\omega_y^{ls} v^{ls})^{(i,j+1,k)} - (\omega_y^{ls} v^{ls})^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ls}} + \\ &+ \frac{(\omega_z^{ls} v^{ls})^{(i,j,k+1)} - (\omega_z^{ls} v^{ls})^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ls}} \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} (\underline{\vec{\omega}} \cdot \nabla) \underline{\vec{v}} \Big|_x^{(i,j,k)} &= \frac{(\omega_x^{ls} w^{ls})^{(i+1,j,k)} - (\omega_x^{ls} w^{ls})^{(i-1,j,k)}}{2\Delta x_{ls}} + \\ &+ \frac{(\omega_y^{ls} w^{ls})^{(i,j+1,k)} - (\omega_y^{ls} w^{ls})^{(i,j-1,k)}}{2\Delta y_{ls}} + \\ &+ \frac{(\omega_z^{ls} w^{ls})^{(i,j,k+1)} - (\omega_z^{ls} w^{ls})^{(i,j,k-1)}}{2\Delta z_{ls}} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει όλους τους όρους στην εξίσωση της μεταφοράς της στροβιλότητας, είναι πλέον δυνατή η αριθμητική της επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Για να γίνει αυτό θεωρούμε μία διακριτοποίηση του χρονικού διαστήματος εξέλιξης του φαινομένου.

Έστω λοιπόν το χρονικό διάστημα εξέλιξης του φαινομένου:

$$\mathcal{T} = \{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\} \quad (2.91)$$

Θεωρούμε τώρα ένα διακριτό υποσύνολο του $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_N = \left\{ t_\nu \in \mathcal{T} : t_\nu = (\nu - 1) \cdot \Delta t_{ss}, \nu = 1, \dots, N \in \mathbf{N} \right\} \quad (2.92)$$

όπου:

$$\Delta t_{ss} = \frac{\Delta x_{ss}}{U_\infty} : \text{το χρονικό βήμα στην κατεύθυνση της ροής}$$

και

$$U_\infty : \text{η επ' άπειρο ταχύτητα της ροής}$$

Παρατήρηση:

Αν

$$\Delta t_{ls} = \frac{\Delta x_{ls}}{U_\infty}$$

$$\Delta t_{ss} = \frac{\Delta x_{ss}}{U_\infty}$$

τα χρονικά βήματα που προκύπτουν από τις παραμέτρους της κάθε κλίμακας, τότε ως Δt λαμβάνεται η ποσότητα:

$$\Delta t = \min \left\{ \Delta t_{ls}, \Delta t_{ss} \right\}$$

Όμως από τον τρόπο με τον οποίο έχουν οριστεί οι κλίμακες αυτές (διακριτοποιήσεις του ίδου χώρου D με διαφορετική πυκνότητα πλέγματος) ισχύει:

$$N_{x_{ss}} > N_{x_{ls}} \Leftrightarrow$$

$$\Delta x_{ss} < \Delta x_{ls} \Leftrightarrow$$

$$\Delta t_{ss} < \Delta t_{ls}$$

Συνεπώς λαμβάνουμε:

$$\Delta t = \Delta t_{ss}$$

Η Εξίσωση Μεταφοράς της Στροβιλότητας:

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'} - \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}'}} \quad (2.93)$$

μπορεί πλέον να γραφεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στη μορφή:

$$\frac{\vec{\omega}_{ls}|_{t_{\nu+1}}^{(i,j,k)} - \vec{\omega}_{ls}|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)}}{\Delta t_{ss}} = \left\{ (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'} - \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}'} \right\} \Big|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)} \quad (2.94)$$

Οπότε λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς τη στροβιλότητα $\vec{\omega}_{ls}$ στον κόμβο (i, j, k) του πλέγματος της μεγάλης κλίμακας την χρονική στιγμή $t_{\nu+1}$ προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{\vec{\omega}_{ls}|_{t_{\nu+1}}^{(i,j,k)} = \vec{\omega}_{ls}|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)} + \left\{ (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'} - \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}'} \right\} \Big|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)} \cdot \Delta t_{ss}} \quad (2.95)$$

- **1η Εκδοχή:** Ανεξάρτητη χρονική εξέλιξη των δύο κλιμάκων και συσχέτισή τους σε δεύτερο χρόνο.

Ο σκοπός της παραπάνω ανάλυσης επί της εξίσωσης μεταφοράς της στροβιλότητας στην πρώτη εκδοχή της μεθόδου είναι να μπορούμε σε κάθε χρονική στιγμή t_{ν} να προβλέψουμε την τιμή της στροβιλότητας την στιγμή $t_{\nu+1}$. Συνεπώς σε κάθε χρονικό βήμα, με βάση την τιμή της στροβιλότητας που εξάγεται από τον κώδικα VPM, έστω $\vec{\omega}_{lsv.p.m}|_{t_{\nu}}$, θα υπολογίζουμε το διάνυσμα $\vec{\omega}_{lsv.t.e}|_{t_{\nu+1}}$ από την εξίσωση 2.95 (vorticity transfer equation) και θα το συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα του VPM στο επόμενο χρονικό βήμα $\vec{\omega}_{lsv.p.m}|_{t_{\nu+1}}$.

Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε χρονικό βήμα t_{ν} θα θέτουμε:

$$\vec{\omega}_{ls}|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)} = \vec{\omega}_{lsv.p.m}|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)}$$

και στη συνέχεια θα υπολογίζουμε το διάνυσμα $\vec{\omega}_{lsv.t.e}|_{t_{\nu+1}}^{(i,j,k)}$ από τη σχέση:

$$\boxed{\vec{\omega}_{lsv.t.e}|_{t_{\nu+1}}^{(i,j,k)} = \vec{\omega}_{lsv.p.m}|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)} + \left\{ (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \overline{(\vec{\omega}' \cdot \nabla)\vec{v}'} - \overline{(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{\omega}'} \right\} \Big|_{t_{\nu}}^{(i,j,k)} \cdot \Delta t_{ss}} \quad (2.96)$$

- **2η Εκδοχή:** Χρονική εξέλιξη των δύο κλιμάκων και συσχέτιση σε πραγματικό χρόνο.

Στην δεύτερη, και πλέον ολοκληρωμένη, εκδοχή της μεθόδου, η συσχέτιση των δύο κλιμάκων γίνεται σε πραγματικό χρόνο (realtime). Αρχικά παράγεται το χρονικά εξελιγμένο πεδίο ροής της μικρής κλίμακας από τον κώδικα `vrn`. Στη συνέχεια, η υπορουτίνα που υπολογίζει τους επιπλέον όρους στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας εισέρχεται στον `vrn` και με βάση την πληροφορία που ήδη διαθέτουμε για το πεδίο της μικρής κλίμακας, πραγματοποιείται η χρονική εξέλιξη του πεδίου της μεγάλης κλίμακας.

Πιο συγκεκριμένα, έστω το πεδίο ταχύτητας $\vec{v}_{ls}|_{t_\nu}$ και στροβιλότητας $\vec{\omega}_{ls}|_{t_\nu}$ της μεγάλης κλίμακας τη χρονική στιγμή t_ν . Η υπορουτίνα `VortEq.f90` υπολογίζει τους επιπλέον όρους στη εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας τροφοδοτούμενη με τα πεδία ταχύτητας και στροβιλότητας των δύο κλιμάκων τη στιγμή t_ν . Το πεδίο στροβιλότητας της μεγάλης κλίμακας τη χρονική στιγμή $t_{\nu+1}$ λαμβάνεται πλέον από την εξίσωση 2.95. Τέλος, ο κώδικας `vrn` επιλύει την εξίσωση Poisson και προκύπτει έτσι και το πεδίο ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_{\nu+1}$. Πλέον το πεδίο ροής $(\vec{v}_{ls}|_{t_{\nu+1}}, \vec{\omega}_{ls}|_{t_{\nu+1}})$ της μεγάλης κλίμακας τη χρονική στιγμή $t_{\nu+1}$ είναι πλήρως καθορισμένο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και με τον τρόπο αυτό παίρνουμε το χρονικά εξελιγμένο πεδίο ροής της μεγάλης κλίμακας, έχοντας λάβει υπόψιν, σε πραγματικό χρόνο, την πληροφορία που φέρει η μικρή κλίμακα. Το πεδίο αυτό συγκρίνεται στη συνέχεια με αυτό που προέκυψε από τον `vrn` χωρίς την "επίδραση" της μικρής κλίμακας.

2.2.8 Στατιστική Ανάλυση

Βασικά Στοιχεία Στατιστικής

Έστω μία πραγματική, διακριτή, βαθμωτή συνάρτηση f επί ενός διακριτού πεδίου ορισμού A_f :

$$f : \mathbf{R} \supset A_f \rightarrow D = D(A) \subset \mathbf{R} \quad (2.97)$$

όπου:

- A_f το πεδίο ορισμού της f

$$A_f = \left\{ x_i \in \mathbf{R} : i = 1, \dots, \nu \in \mathbf{N} \right\}$$

- $D = D(A)$ το σύνολο τιμών της f

$$D(A) = \left\{ f_i : f_i = f(x_i), i = 1, \dots, \nu \in \mathbb{N} \right\}$$

Τότε, η **μέση τιμή** f_{mean} και η **τυπική απόκλιση** σ_f της f δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$f_{mean} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} f_i \quad (2.98)$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (f_i - f_{mean})^2} \quad (2.99)$$

Εφαρμογή στην Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στο τέλος της παραγράφου 2.2.7, στην **1η εκδοχή** της μεθόδου, σε κάθε χρονικό βήμα t_ν θα θέτουμε:

$$\vec{\omega}_{ls} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} = \vec{\omega}_{ls_{v.p.m}} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}$$

και στη συνέχεια θα υπολογίζουμε το διάνυσμα $\vec{\omega}_{ls_{v.t.e}} \Big|_{t_{\nu+1}}^{(i,j,k)}$ από τη σχέση 2.96, με απώτερο σκοπό τη σύγκριση των δύο αυτών προσεγγίσεων του ίδου μεγέθους, δηλαδή της στροβιλότητας στη μεγάλη κλίμακα. Για να καταστεί δυνατή η σύγκριση αυτή, και πέρα από την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων σε μορφή διαγραμμάτων, θα υπολογίσουμε τις μέσες τιμές, τις τυπικές αποκλίσεις, και τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές για κάθε μία από τις συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών.

Ειδικότερα, ο υπολογισμός αυτών των στατιστικών μεγεθών θα πραγματοποιείται σε κάθε χρονικό βήμα $t_\nu | \nu = 1, \dots, N$ και $\forall$ επίπεδο $-yz$ του χωρικού πλέγματος που αντιστοιχεί σε $i = 1, \dots, N_{x_{ls}}$.

- **Μέση Τιμή (mean) :**

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.100)$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.101)$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.102)$$

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.103)$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.104)$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)}}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.105)$$

• **Τυπική Απόκλιση (standard deviation):**

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{deviation} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \left(\omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} - \left(\omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean}\right)^2}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.106)$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{deviation} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \left(\omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} - \left(\omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean}\right)^2}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.107)$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{deviation} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \left(\omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} - \left(\omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{mean}\right)^2}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.108)$$

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{deviation} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \left(\omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} - \left(\omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}\right)_{mean}^i\right)^2}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.109)$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{deviation} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \left(\omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} - \left(\omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}\right)_{mean}^i\right)^2}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.110)$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{deviation} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{y_{ls}}} \sum_{k=1}^{N_{z_{ls}}} \left(\omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} - \left(\omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}\right)_{mean}^i\right)^2}{N_{y_{ls}} \cdot N_{z_{ls}}} \quad (2.111)$$

• **Μέγιστο (maximum):**

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{max} = \max \left\{ \omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{max} = \max \left\{ \omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{max} = \max \left\{ \omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{max} = \max \left\{ \omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{max} = \max \left\{ \omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{max} = \max \left\{ \omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

• **Ελάχιστο (minimum):**

$$\left(\omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{min} = \min \left\{ \omega_{x_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{min} = \min \left\{ \omega_{y_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\left(\omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^i\right)_{min} = \min \left\{ \omega_{z_{ls}}^{v.p.m} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i \right)_{min} &= \min \left\{ \omega_{x_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\} \\ \left(\omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i \right)_{min} &= \min \left\{ \omega_{y_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\} \\ \left(\omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^i \right)_{min} &= \min \left\{ \omega_{z_{ls}}^{v.t.e} \Big|_{t_\nu}^{(i,j,k)} : j = 1, \dots, N_{y_{ls}}, k = 1, \dots, N_{z_{ls}} \right\} \end{aligned}$$

Στη **2η εκδοχή**, και πλέον ολοκληρωμένη, της μεθόδου η παραπάνω σύγκριση θα εφαρμοστεί για τα πεδία ταχυτήτων των πεδίων ροής της μεγάλης κλίμακας όπως αυτά προέκυψαν από τον νrm και την ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων αντίστοιχα.

2.2.9 Στοχαστική Ανάλυση - Μετασχηματισμός Fourier

Ανάλυση Fourier

Κάθε πραγματική, περιοδική συνάρτηση, που είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής ή απόλυτα ολοκληρώσιμη, με περίοδο $2T$:

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} \supseteq A &\rightarrow D_f = f(A) \subseteq \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \supseteq A \ni t &\mapsto y = f(t) \in D_f \subseteq \mathbf{R} \end{aligned}$$

συγκλίνει στην αντίστοιχη της σειρά Fourier:

$$u(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(k_n t) + b_n \sin(k_n t) \right) \quad (2.112)$$

Οι συντελεστές Fourier a_n, b_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cos(k_n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \sin(k_n t) dt \end{aligned}$$

όπου:

$$k_n = \frac{n\pi}{T} : \text{ο αριθμός κύματος (wavenumber)}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval [?], για μία απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση u , ισχύει η ισότητα:

$$\int_{-T}^T u^2(t) dt = \frac{T}{2} a_0^2 + T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.113)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η συνολική ισχύς της συνάρτησης u ισούται με το άθροισμα της ισχύος κάθε αρμονικής συνιστώσας. Έτσι, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το **φάσμα ισχύος** της u , με το διάγραμμα του πλάτους των αρμονικών συνιστωσών προς τη συχνότητα.

Για τον υπολογισμό του **φάσματος ισχύος** της συνάρτησης u υπολογίζουμε αρχικά το μετασχηματισμό Fourier της:

$$U(f) = \mathcal{F}(u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi t f} dt \quad (2.114)$$

Τότε, το **φάσμα ισχύος** της $u = u(t)$ στο πεδίο της συχνότητας f δίνεται από τη σχέση:

$$E(f) = \left(U(f) \right)^2 \quad (2.115)$$

Εφαρμογή στην Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων

Για να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα της μεθόδου, πρέπει να συγκρίνουμε το στοχαστικό πεδίο ταχυτήτων πριν την εισαγωγή του στη μέθοδο, με το ανακατασκευασμένο πεδίο ταχυτήτων βάσει της στροβιλότητας, από τη μέθοδο. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τι ποσοστό της τύρβης χάνουμε και να προσδιορίσουμε τις κλίμακες στις οποίες παρατηρείται η απώλεια αυτή. Οπότε, εκτός από την απευθείας σύγκριση των χρονοσειρών, καταφεύγουμε στην σύγκριση των ενεργειακών φασμάτων.

Έστω λοιπόν οι τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας του πεδίου ροής σε ένα συγκεκριμένο κόμβο της μεγάλης κλίμακας (i^*, j^*, k^*) . Τότε ορίζονται οι χρονικές συναρτήσεις (χρονοσειρές)

από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u(t_\nu) = u_{ls} \Big|_{t_\nu}^{(i^*, j^*, k^*)} \quad (2.116)$$

$$v(t_\nu) = v_{ls} \Big|_{t_\nu}^{(i^*, j^*, k^*)} \quad (2.117)$$

$$w(t_\nu) = w_{ls} \Big|_{t_\nu}^{(i^*, j^*, k^*)} \quad (2.118)$$

$$\nu = 1, \dots, N$$

Τα φάσματα ισχύος των u, v, w στο πεδίο της συχνότητας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_u(f_\nu) = \left(U(f_\nu) \right)^2 \quad (2.119)$$

$$E_v(f_\nu) = \left(V(f_\nu) \right)^2 \quad (2.120)$$

$$E_w(f_\nu) = \left(W(f_\nu) \right)^2 \quad (2.121)$$

όπου:

$$U(f_\nu) = \mathcal{F}(u(t_\nu)) \quad (2.122)$$

$$V(f_\nu) = \mathcal{F}(v(t_\nu)) \quad (2.123)$$

$$W(f_\nu) = \mathcal{F}(w(t_\nu)) \quad (2.124)$$

οι μετασχηματισμοί Fourier των χρονοσειρών u, v, w , οι οποίοι υπολογίζονται από τη σχέση [2.114](#).

Δηλαδή, για μία χρονοσειρά ταχύτητας

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = (u(t), v(t), w(t))$$

αρκεί να προσδιορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier

$$\vec{\Upsilon} = \vec{\Upsilon}(f) = \mathcal{F}(\vec{v})$$

και να χαράξουμε το διάγραμμα του τετραγώνου του μέτρου των μιγαδικών συντελεστών Fourier Υ_ν για να πάρουμε το φάσμα ισχύος, ενώ αν διαιρέσουμε και με το Δf θα προκύψει το διάγραμμα Power-Spectral Density.

Η παραπάνω διαδικασία θα μπορούσε να εκτελεστεί και κατά την κατεύθυνση της ροής $-x$ αντί της διάστασης του χρόνου t , με ακριβώς τα ίδια βήματα.

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας του πεδίου μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = t_{\nu^*}$ και σε μία συγκεκριμένη θέση του επιπέδου $-yz$ έστω (i, j^*, k^*) . Ορίζουμε τώρα χωρικές συναρτήσεις στην κατεύθυνση της ροής:

$$u(x_i) = u_{ls} \Big|_{t_{\nu^*}}^{(i, j^*, k^*)} \quad (2.125)$$

$$v(x_i) = v_{ls} \Big|_{t_{\nu^*}}^{(i, j^*, k^*)} \quad (2.126)$$

$$w(x_i) = w_{ls} \Big|_{t_{\nu^*}}^{(i, j^*, k^*)} \quad (2.127)$$

$$i = 1, \dots, N_{x_{ls}}$$

Τα φάσματα ισχύος των u, v, w στο πεδίο της συχνότητας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_u(f_i) = \left(U(f_i) \right)^2 \quad (2.128)$$

$$E_v(f_i) = \left(V(f_i) \right)^2 \quad (2.129)$$

$$E_w(f_i) = \left(W(f_i) \right)^2 \quad (2.130)$$

όπου:

$$U(f_i) = \mathcal{F}(u(x_i)) \quad (2.131)$$

$$V(f_i) = \mathcal{F}(v(x_i)) \quad (2.132)$$

$$W(f_i) = \mathcal{F}(w(x_i)) \quad (2.133)$$

οι μετασχηματισμοί Fourier των χρονοσειρών u, v, w , οι οποίοι υπολογίζονται από τη σχέση [2.114](#).

Κατά αντιστοιχία λοιπόν με τα παραπάνω, και για να καταστεί δυνατή η σύγκριση των φασμάτων ισχύος μεταξύ των χρονικά εξελιγμένων από τον κώδικα VPM πεδίων ταχύτητας και του αρχικού πεδίου, όπως αυτό προκύπτει από το μοντέλο του Mann, θεωρούμε και πάλι ένα συγκεκριμένο σημείο του αρχικού πεδίου ροής και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier κατά μήκος της κατεύθυνσης της ροής, καθώς το αρχικό αυτό πεδίο θεωρείται ως το

πεδίο ταχύτητας τη χρονική στιγμή μηδέν. Έστω λοιπόν ο κόμβος:

$$(i, j^*, k^*)$$

όπου:

$$i = 1, \dots, N_{xls}$$

Οι συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας όπως προκύπτουν από το μοντέλο του Mann, δίνονται συναρτήσει της κατεύθυνσης της ροής για τη συγκεκριμένη θέση (κόμβος) στο επίπεδο yz , από τις σχέσεις:

$$u_{ls}(x_i) = u_{ls} \Big|_{t=0}^{(i,j^*,k^*)} \quad (2.134)$$

$$v_{ls}(x_i) = v_{ls} \Big|_{t=0}^{(i,j^*,k^*)} \quad (2.135)$$

$$w_{ls}(x_i) = w_{ls} \Big|_{t=0}^{(i,j^*,k^*)} \quad (2.136)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier στις συναρτήσεις αυτές και με χρονικό βήμα

$$\Delta t_{ls} = \frac{\Delta x_{ls}}{U_\infty}$$

υπολογίζουμε το φάσμα ισχύος κάθε συνιστώσας της ταχύτητας, και το συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα φάσματα των χρονοσειρών της ταχύτητας όπως αυτές προέκυψαν από τη χρονική εξέλιξη του πεδίου ροής μέσω του VPM.

Στην παρούσα ανάλυση, λόγω περιορισμένων χρονικών βημάτων (υψηλό υπολογιστικό κόστος σε χρόνο και χώρο), θα αρκεστούμε σε χωρικό μετασχηματισμό Fourier. Η διαδικασία αυτή, όπως αναλύθηκε προηγουμένως, θα εφαρμοστεί τόσο στα αρχικά πεδία όπως αυτά προέκυψαν από το Mann Model, όσο και στα χρονικά εξελιγμένα πεδία μέσω του vpm αλλά και της ανάλυσης των πολλαπλών κλιμάκων.

Κεφάλαιο 3

Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

3.1 Αρχικό Πεδίο Ροής

Στο πρόβλημα που πραγματεύεται η παρούσα ανάλυση, παράχθηκε από το Mann Turb (σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 2.2.1) το στοχαστικό πεδίο ροής στο επίπεδο της μικρής κλίμακας (**small scale**) με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$\begin{aligned}U_{mean} &= 10.5m/sec \\ \tau &= 0.050, L = 89.53m, \Gamma = 0 \\ N_{x_{ss}} &= N_{y_{ss}} = N_{z_{ss}} = 128 \\ \Delta x_{ss} &= \Delta y_{ss} = \Delta z_{ss} = 0.625m \\ n_r &= -100, HF_{comp} = 1 \text{ (true)}\end{aligned}$$

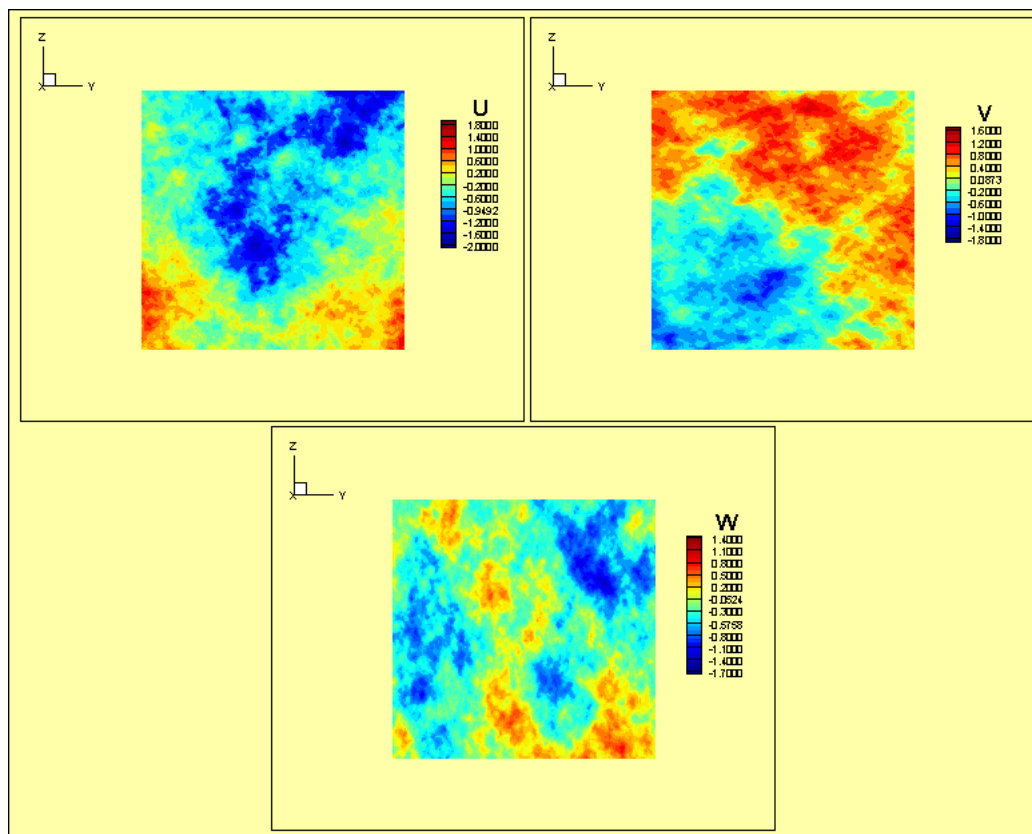
Συνεπώς:

$$\alpha\epsilon^{2/3} = 0.020 \tag{3.1}$$

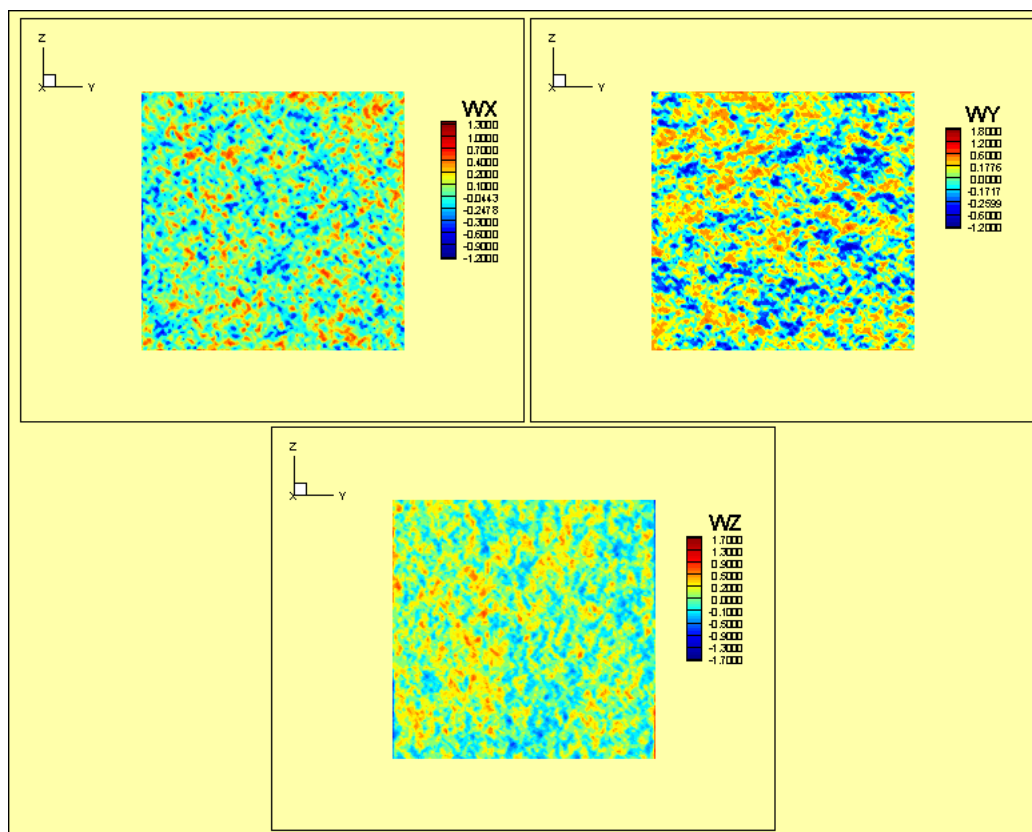
Ο χώρος $D \subset \mathbb{R}^3$ στον οποίο λαμβάνει χώρα το φαινόμενο που πραγματευόμαστε, έχει διαστάσεις $80x80x80m^3$. Συγκεκριμένα, ο χώρος D σε σχέση με το σύστημα αξόνων που ορίστηκε, γράφεται:

$$D = \{(x, y, z) : x \in [0, 80], y \in [-40, 40], z \in [-40, 40]\} \subset \mathbb{R}^3 \tag{3.2}$$

Το πεδίο ταχύτητας της μικρής κλίμακας όπως προέκυψε από το Mann Turb καθώς και το πεδίο στροβιλότητας, το οποίο υπολογίστηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων από τις σχέσεις 2.9-2.11, παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1, όπου ενδεικτικά απεικονίζεται το επίπεδο $x = 40.0m$.



(α') Πεδίο Ταχύτητας



(β') Πεδίο Στροβιλότητας

Σχήμα 3.1: Μικρή Κλίμακα (128x128x128)

Το πλέγμα της μεγάλης κλίμακας, αποτελεί μία δεύτερη διακριτοποίηση του ίδιου χωρίου D με παραμέτρους:

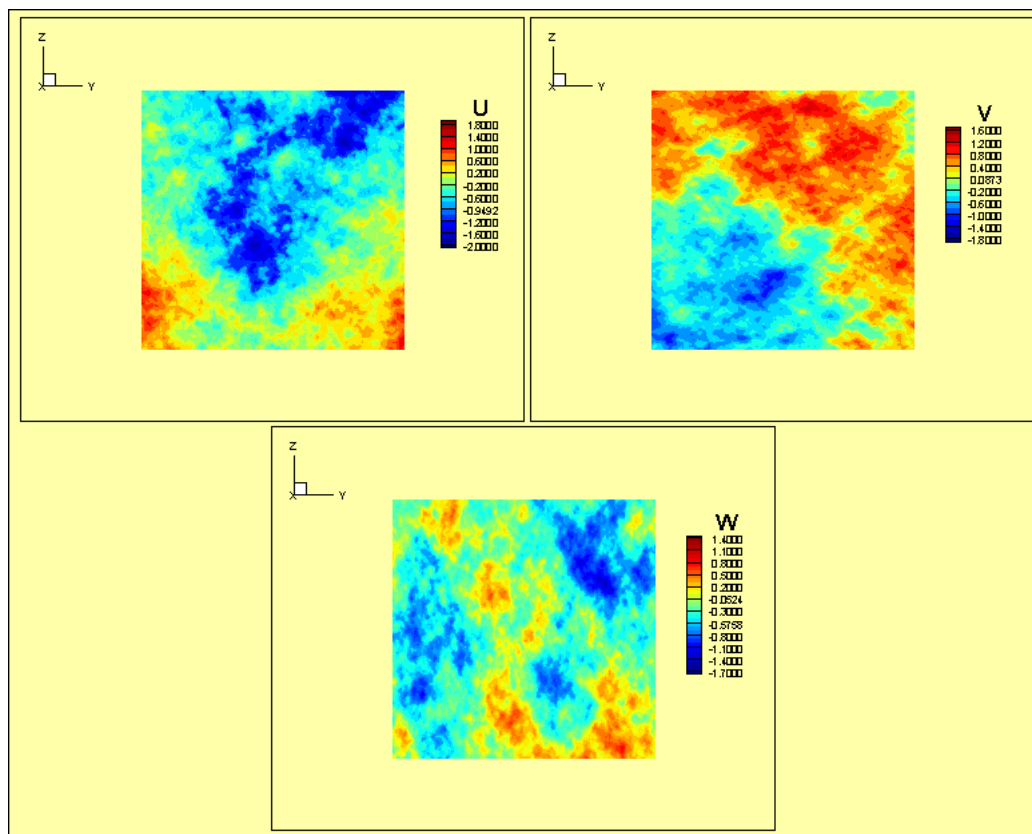
$$N_{x_{ls}} = N_{y_{ls}} = N_{z_{ls}} = 64$$

$$\Delta x_{ls} = \Delta y_{ls} = \Delta z_{ls} = 1.250m$$

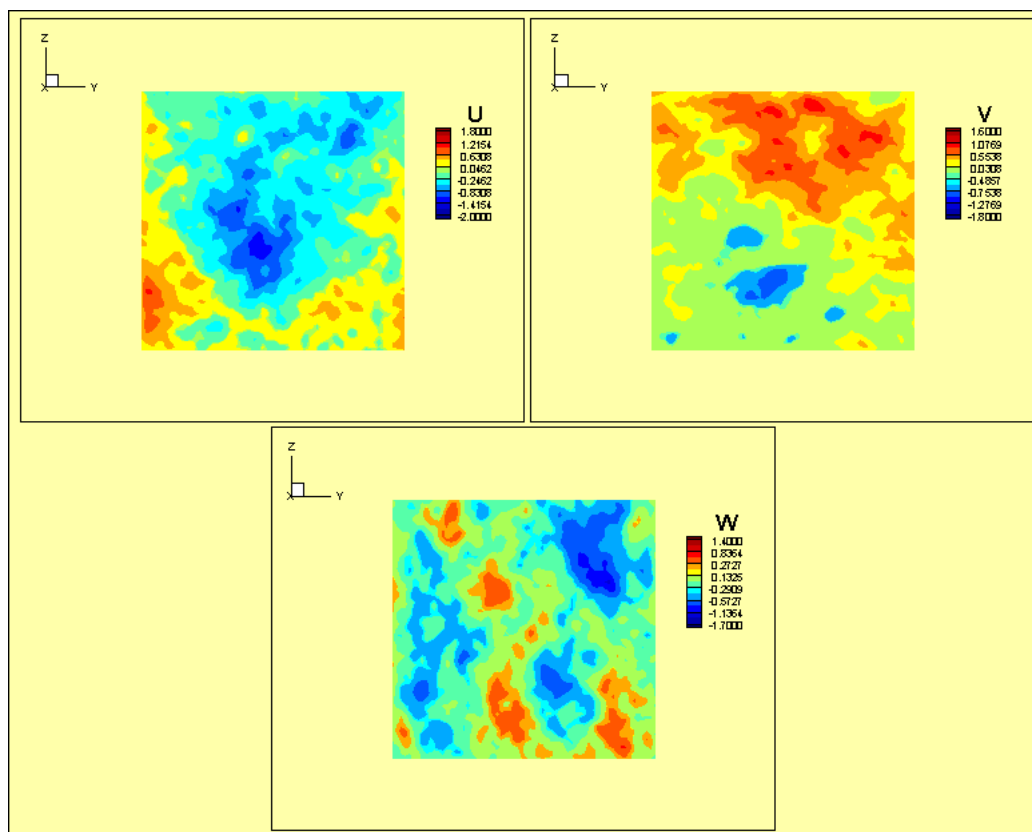
Το πεδίο ταχύτητας της μικρής κλίμακας προβλήθηκε στη συνέχεια στο πλέγμα της μεγάλης κλίμακας (64x64x64) και επιλύοντας την εξίσωση Poisson 2.21 με τον κώδικα VPM, προέκυψε και το πεδίο της στροβιλότητας. Η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε για την προβολή (και αντίστοιχα για την παρεμβολή) δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1.0}{88.0}(x-1.0)(60.0x^4 - 87.0x^3 - 87.0x^2 + 88.0x + 88.0) & x \leq 1.0 \\ \frac{1.0}{176.0}(x-1.0)(x-2.0)(60.0x^3 - 261.0x^2 + 257.0x + 68.0) & 1.0 \leq x \leq 2.0 \\ -\frac{3.0}{176.0}(x-2.0)(4.0x^2 - 17.0x + 12.0)(x-3.0)^2 & 2.0 \leq x \leq 3.0 \\ 0.0 & x \geq 3.0 \end{cases}$$

Το πεδίο ροής της μεγάλης κλίμακας απεικονίζεται, για το ίδιο επίπεδο $-yz$ ($x = 40.0m$), στα σχήματα 3.2, 3.3 παράλληλα με αυτό της μικρής κλίμακας ώστε να καθίσταται δυνατή η άμεση σύγκρισή τους.

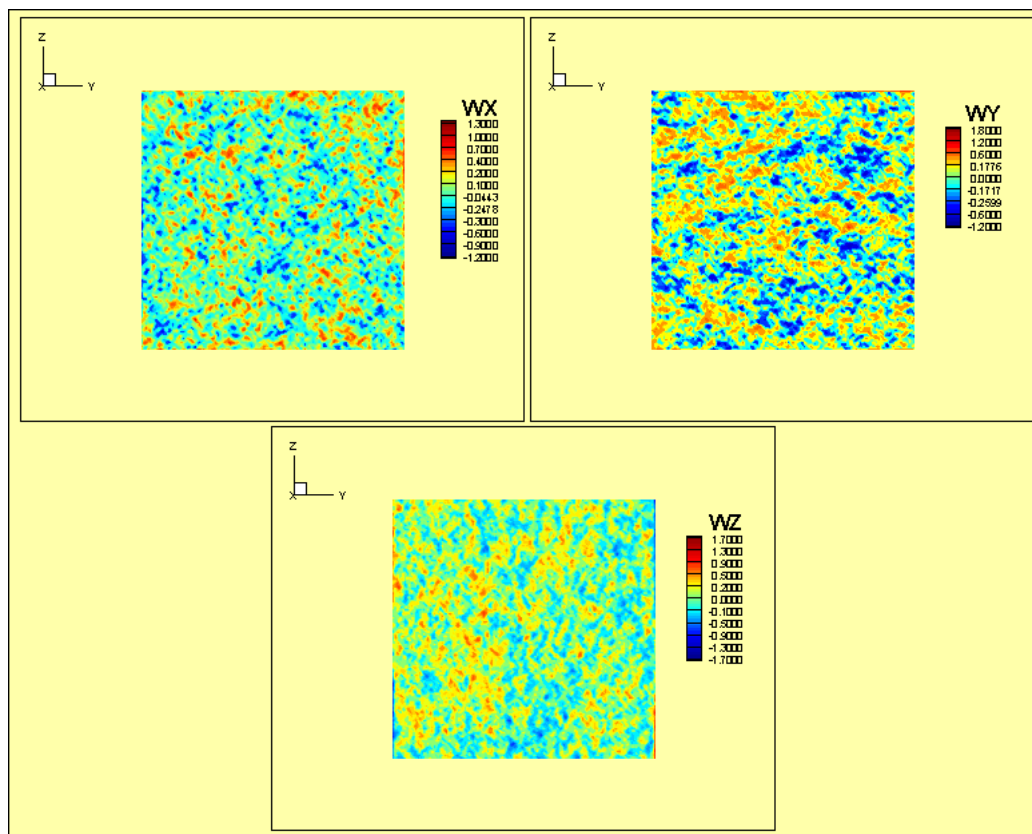


(α') Small Scale

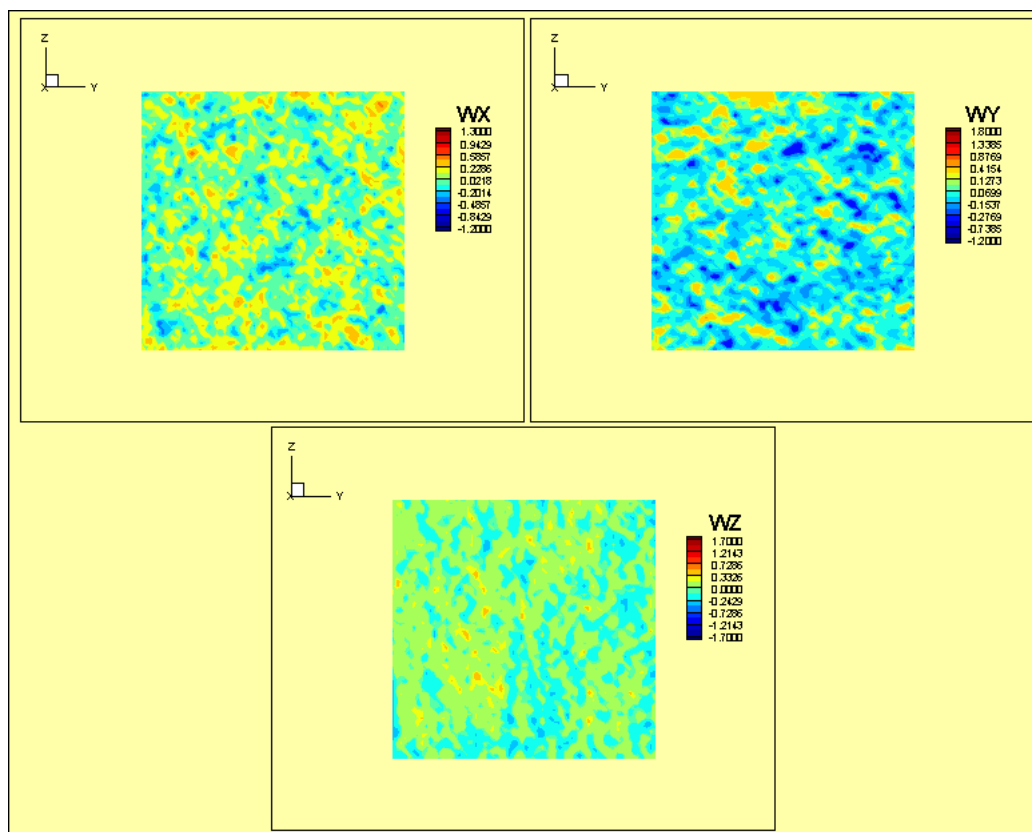


(β') Large Scale

Σχήμα 3.2: Πεδίο Ταχύτητας



(α') Small Scale



(β') Large Scale

Σχήμα 3.3: Πεδίο Στροβιλότητας

3.2 Χρονική Εξέλιξη του Φαινομένου (Time Evolution)

Στη συνέχεια, εξελίξαμε χρονικά το αρχικό πεδίο ροής της κάθε κλίμακας ξεχωριστά με τον κώδικα VPM για $N_t = 50$ χρονικές στιγμές με χρονικό βήμα:

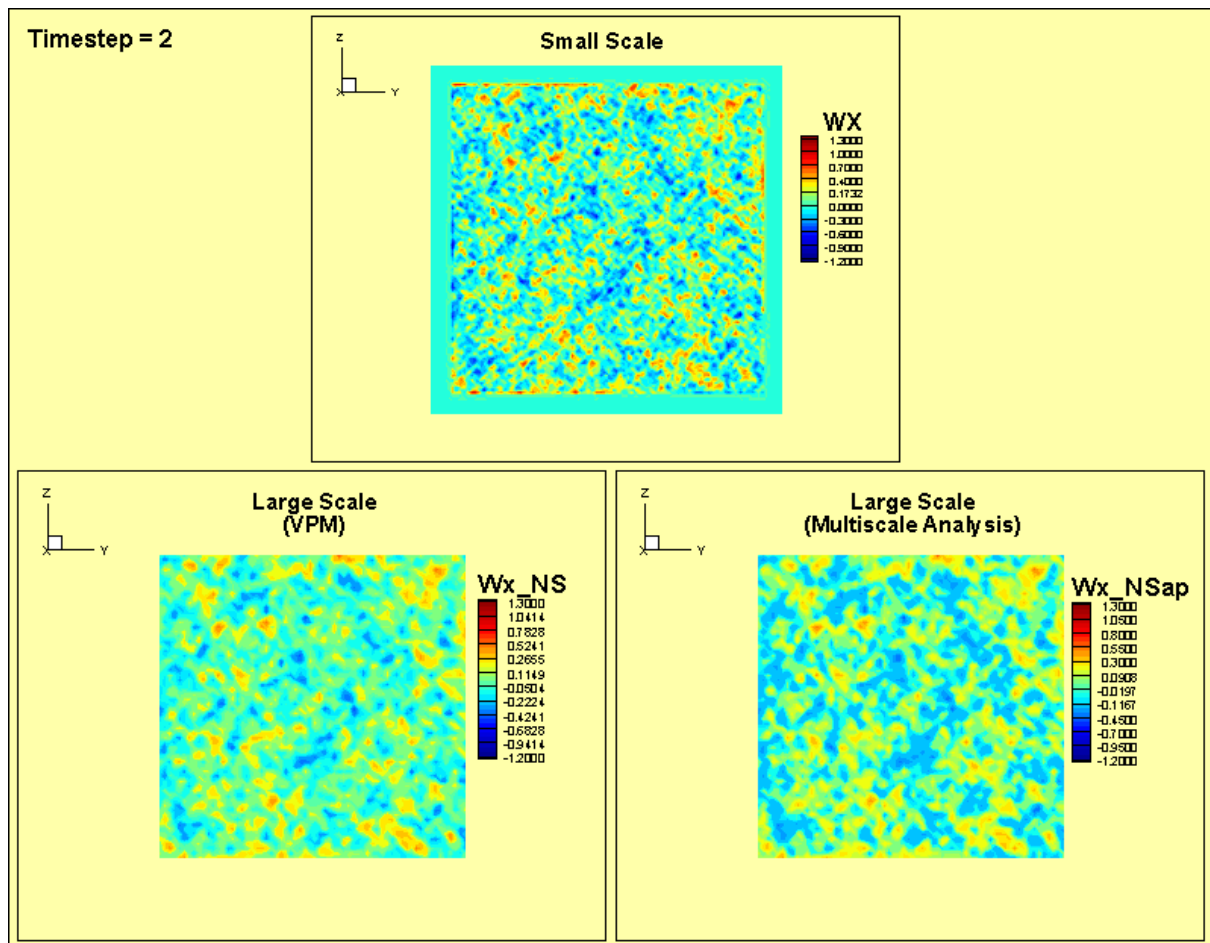
$$\Delta t_{ss} = \frac{\Delta x_{ss}}{U_\infty}$$

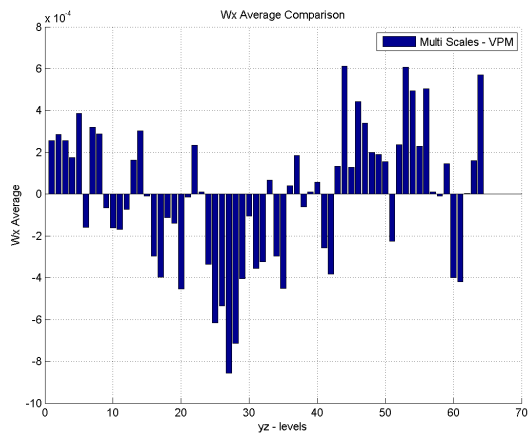
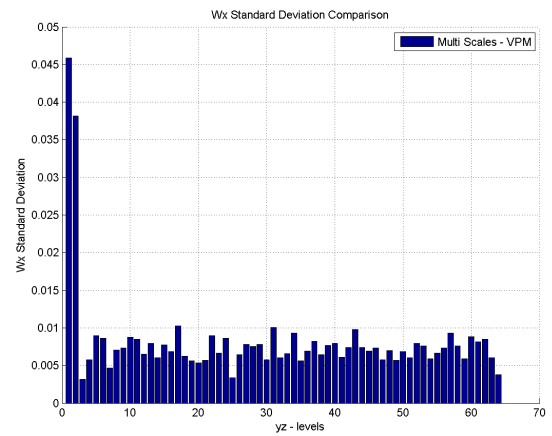
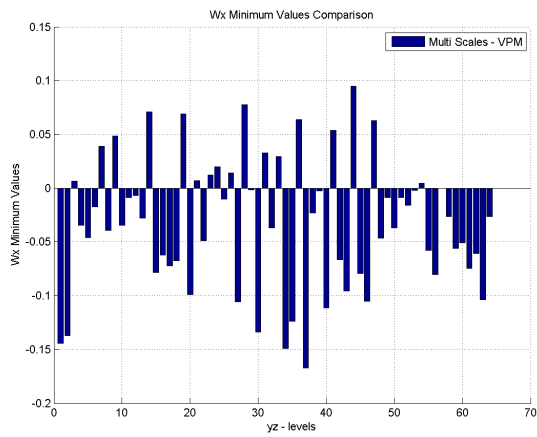
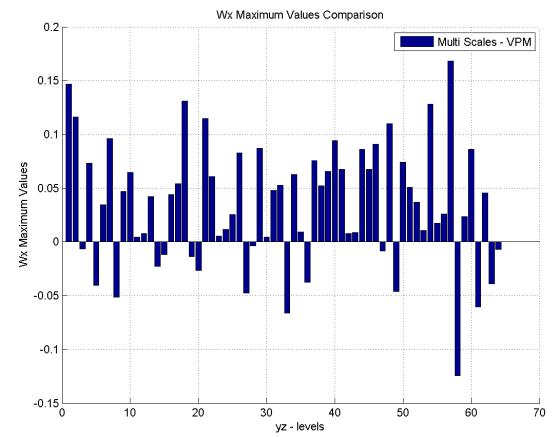
Σε κάθε χρονική στιγμή $t_i | i = 1, \dots, N_t - 1$ υπολογίσαμε με βάση την εξίσωση της στροβιλότητας 2.93 και λαμβάνοντας υπόψιν όλη την πληροφορία που μας παρείχε η μικρή κλίμακα, όπως αναλύθηκε λεπτομερώς στο προηγούμενο κεφάλαιο, την τιμή της στροβιλότητας στη μεγάλη κλίμακα την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή t_{i+1} και την συγκρίναμε με αυτή που είχε προκύψει από την ανεξάρτητη χρονική εξέλιξη της κλίμακας αυτής μέσω του VPM.

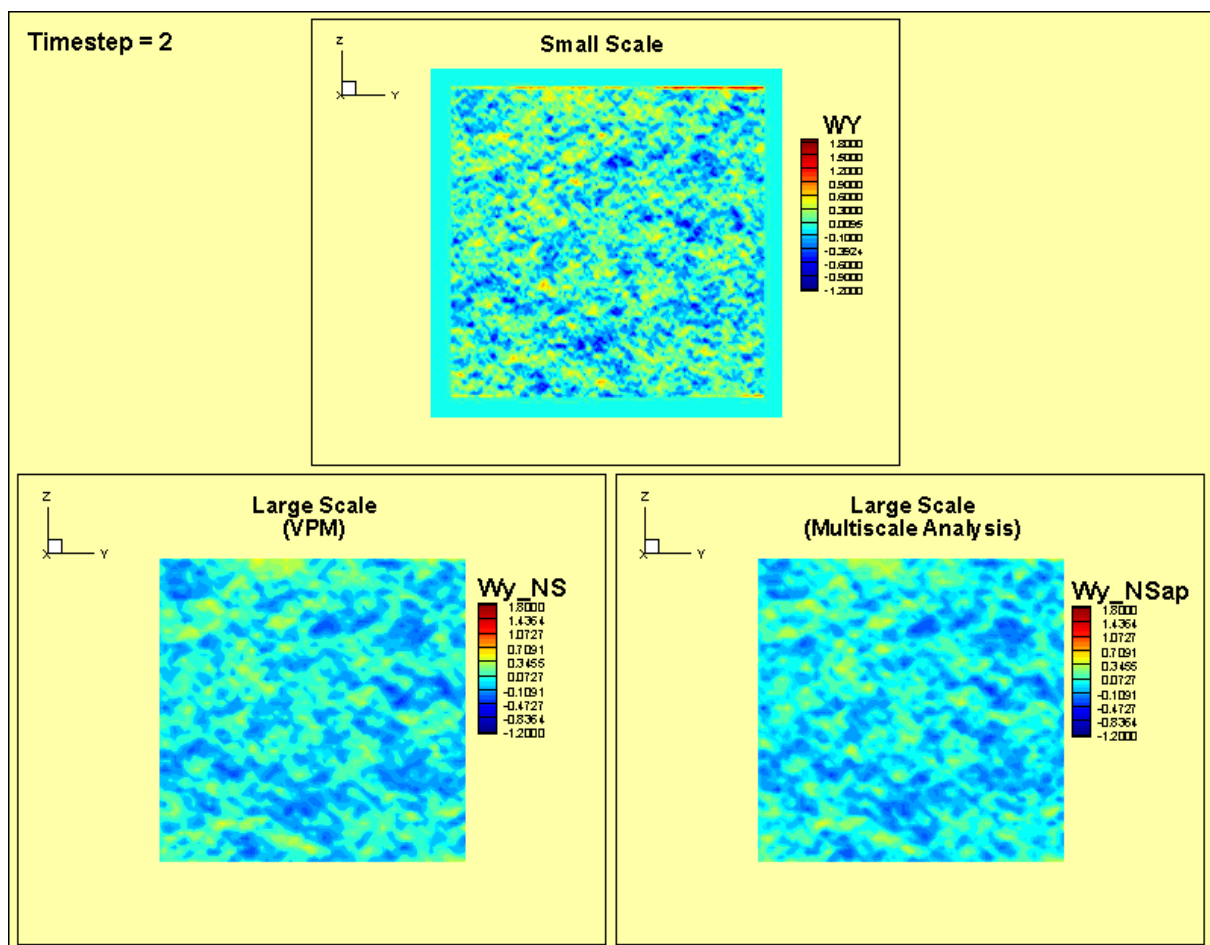
Επιλέξαμε να παρουσιάσουμε την διαδικασία αυτή για τις χρονικές στιγμές t_2, t_{26}, t_{50} .

Στα διαγράμματα που ακολουθούν λοιπόν, απεικονίζεται για κάθε μία από αυτές τις χρονικές στιγμές, η στροβιλότητα της μικρής κλίμακας, η στροβιλότητα της μεγάλης κλίμακας όπως προέκυψε από την ανεξάρτητη χρονική εξέλιξη της, και η προσέγγιση της στροβιλότητας της κλίμακας αυτής με τη **μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων** έχοντας λάβει δηλαδή υπόψιν και τις διαταραχές του πεδίου (επιπλέον όροι στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας). Για την καλύτερη ανάγνωση των γραφικών αυτών παραστάσεων και την σύγκριση των δύο "εκδοχών" του πεδίου ροής της μεγάλης κλίμακας, παρατίθενται και τα διαγράμματα με τις διαφορές των στατιστικών μεγεθών της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης, του μεγίστου και του ελαχίστου σε κάθε επίπεδο $-yz$ του διακριτοποιημένου χωρίου D και για κάθε μία από τις επιλεχθείσες χρονικές στιγμές. Τέλος, παρουσιάζονται και οι μετασχηματισμοί των ταχυτήτων στο πεδίο της συχνότητας (Fast Fourier Transform) για κάθε κλίμακα, ώστε να μπορέσουμε να αποφανθούμε εάν διατηρείται το ενεργειακό φάσμα του αρχικού πεδίου στο χρόνο. Ο μετασχηματισμός Fourier επί των αρχικών πεδίων (Mannturb) είναι χωρικός, δηλαδή έχει εφαρμοσθεί συγκεκριμένα για το κέντρο των $-yz$ επιπέδων ως προς την κατεύθυνση της ροής $-x$. Στα χρονικά εξελιγμένα, από τον vpm, πεδία ο μετασχηματισμός Fourier εφαρμόστηκε, με την ίδια λογική, για το κέντρο των επιπέδων $-yz$ στην "κατεύθυνση" της ροής καθώς θα χρονικά βήματα για τα οποία εξελίξαμε το φαινόμενο δεν είναι αρκετά ώστε να μπορέσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με την διατήρηση ή όχι του φάσματος της τύρβης. Δεδομένων των παραμέτρων του προβλήματος, θα χρειάζονταν 128 χρονικά βήματα για να διατρέξει το "κουτί" το μήκος του.

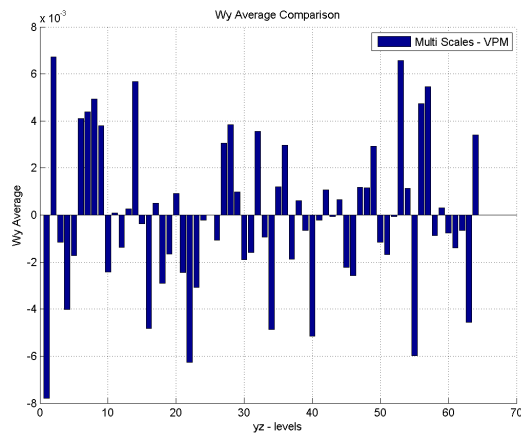
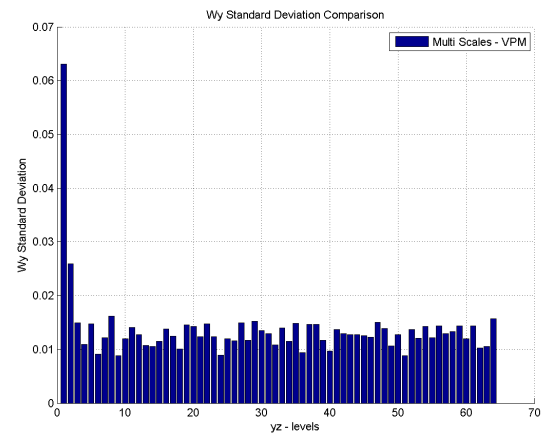
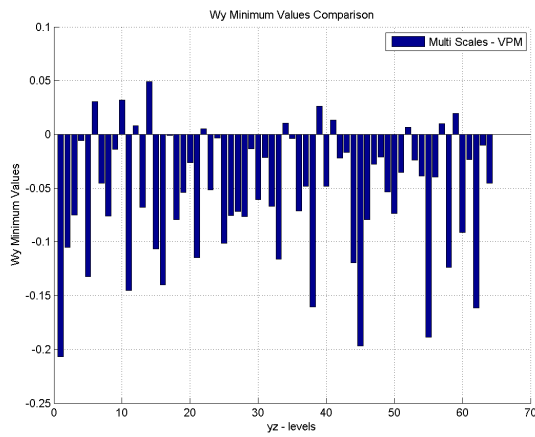
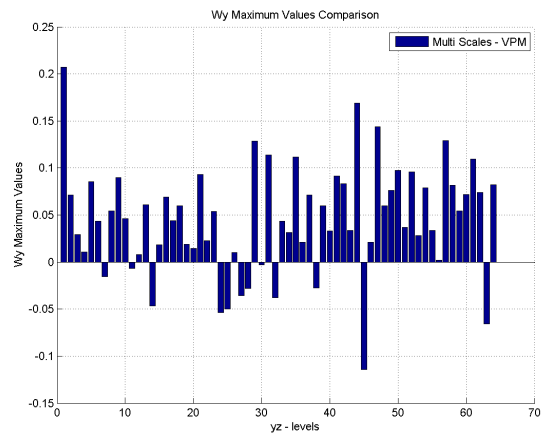
3.2.1 Timestep = 2

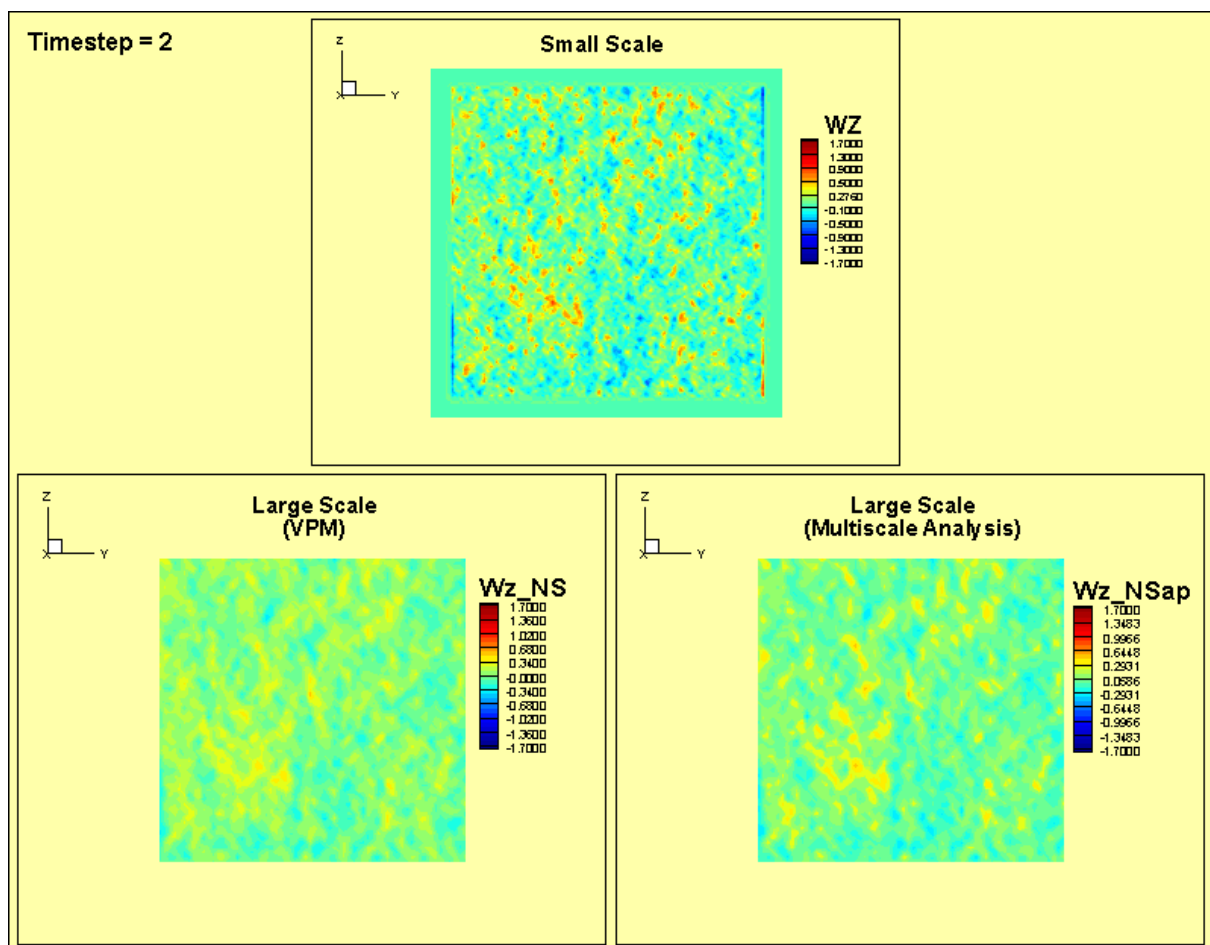
Σχήμα 3.4: Πεδίο Στροβιλότητας (Timestep = 2, $x = 40.0m$)

(α') ω_x average values comparison(β') ω_x standard deviation comparison(γ') ω_x minimum value comparison(δ') ω_x maximum value comparison**Σχήμα 3.5:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 2$)

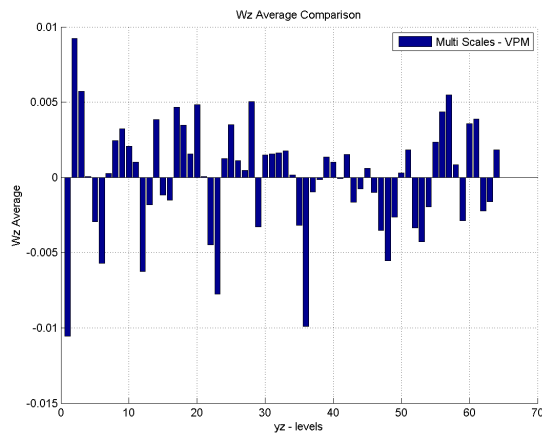
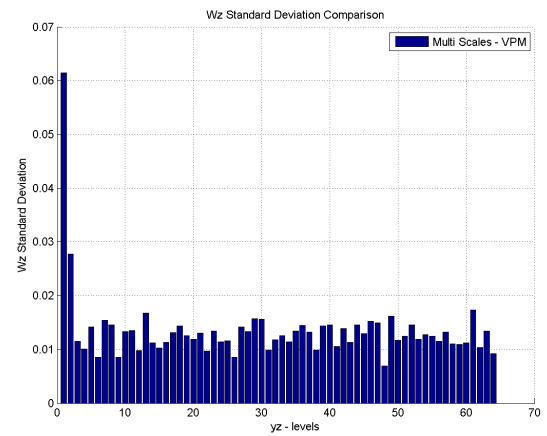
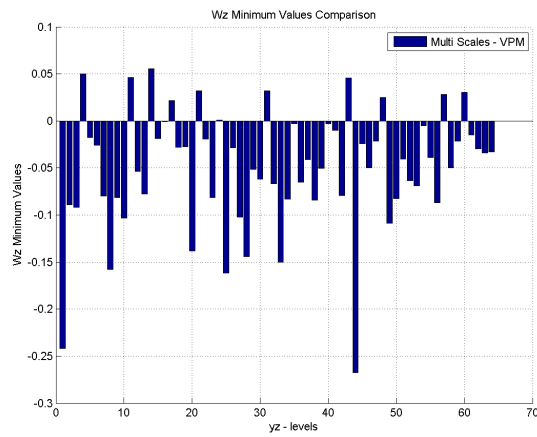
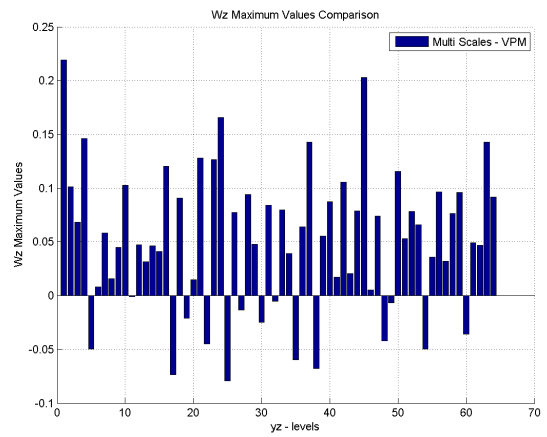


Σχήμα 3.6: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 2, x = 40.0m$)

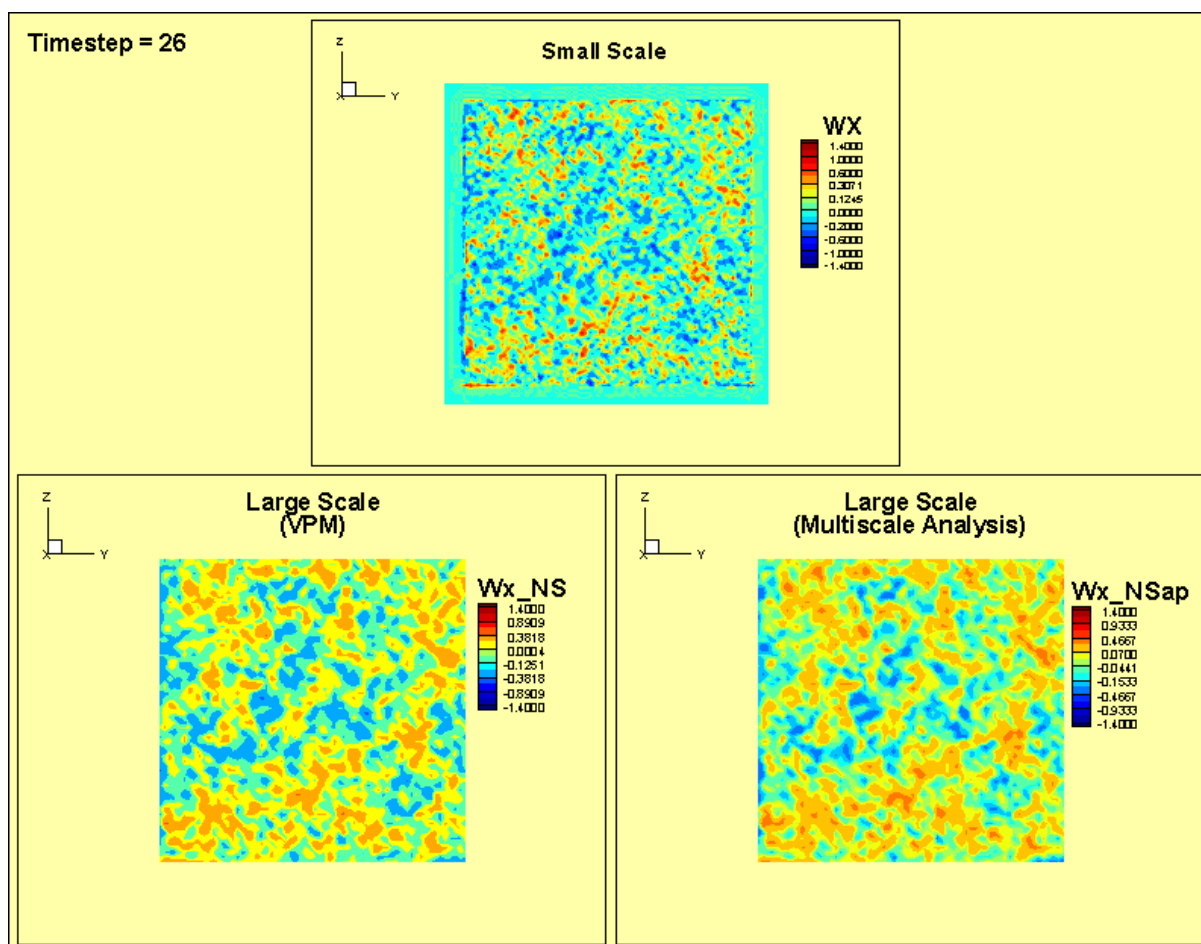
(α') ω_y average values comparison(β') ω_y standard deviation comparison(γ') ω_y minimum value comparison(δ') ω_y maximum value comparison**Σχήμα 3.7:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 2$)



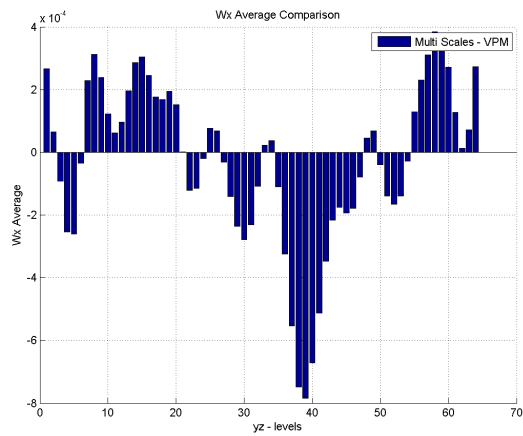
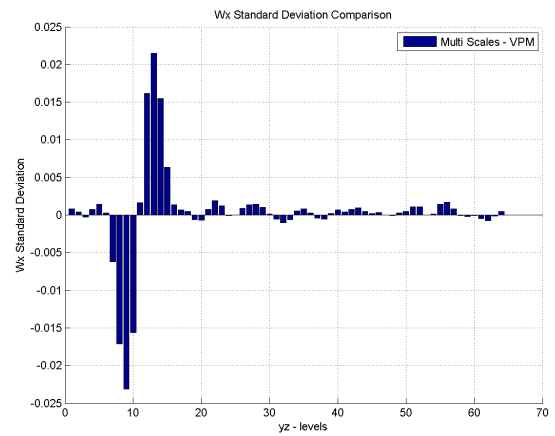
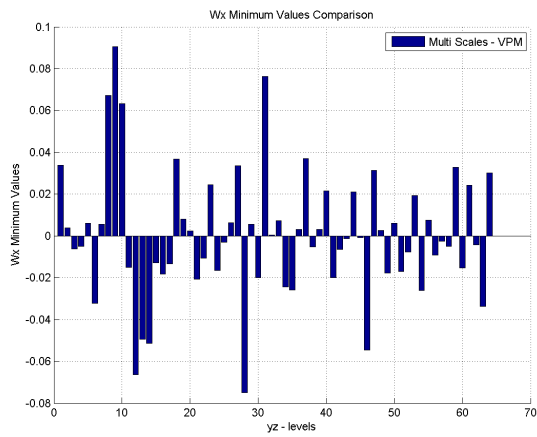
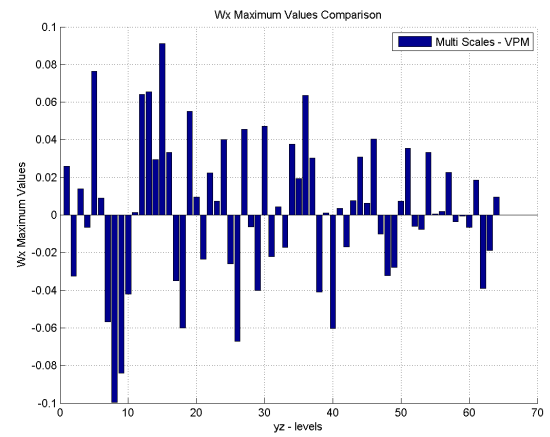
Σχήμα 3.8: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 2, x = 40.0m$)

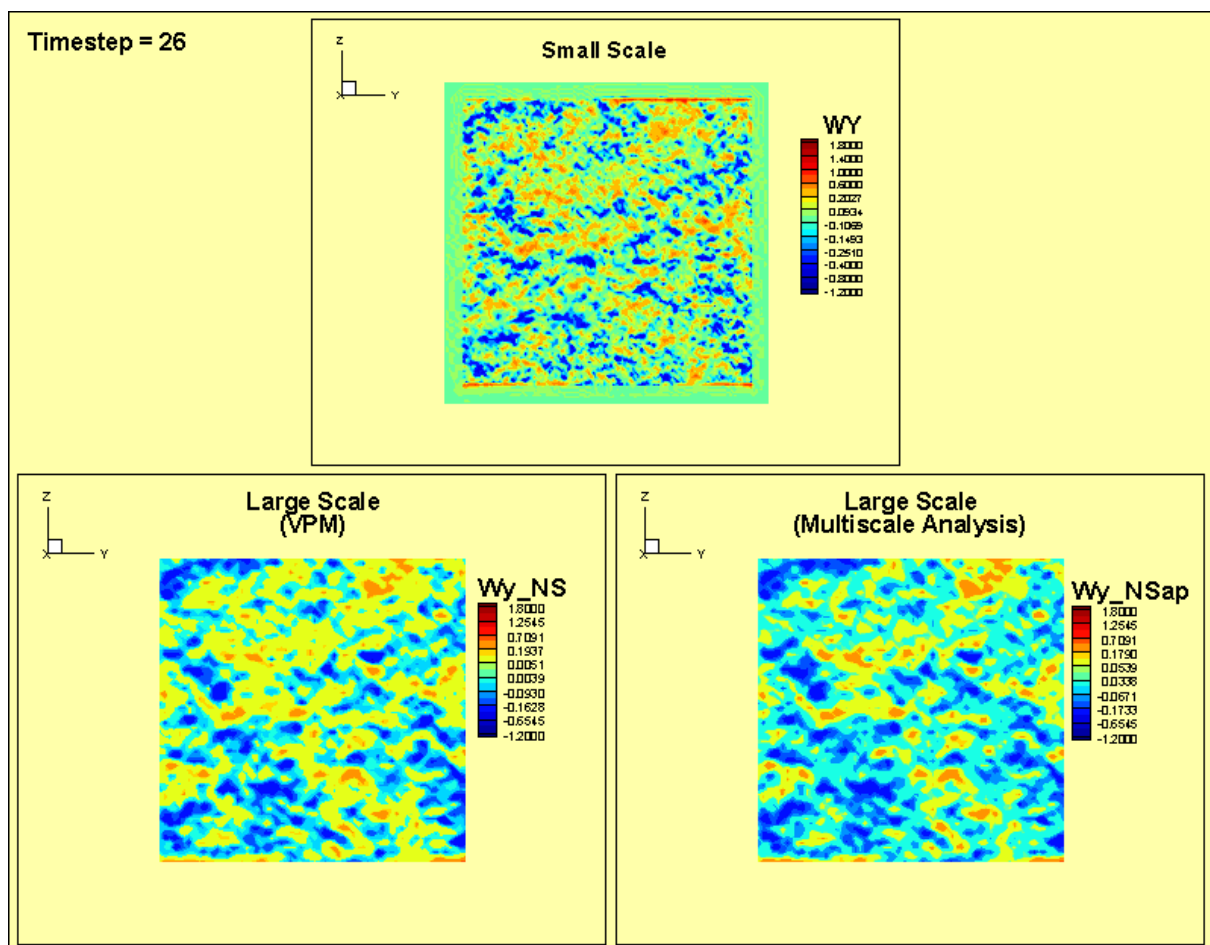
(α') ω_z average values comparison(β') ω_z standard deviation comparison(γ') ω_z minimum value comparison(δ') ω_z maximum value comparison**Σχήμα 3.9:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 2$)

3.2.2 Timestep = 26

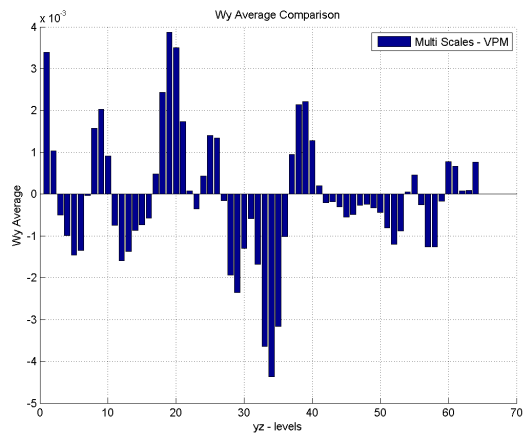
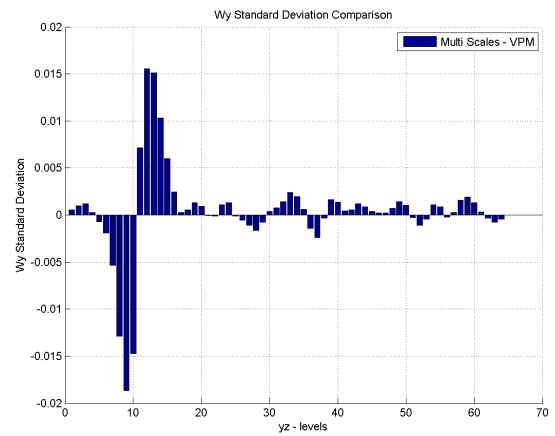
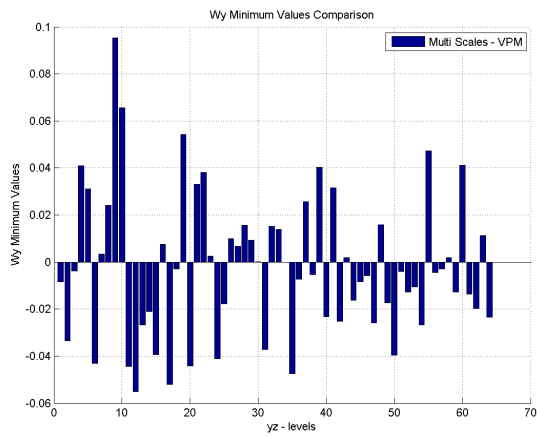
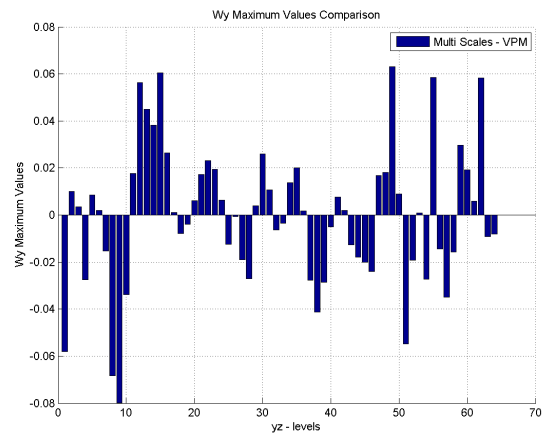


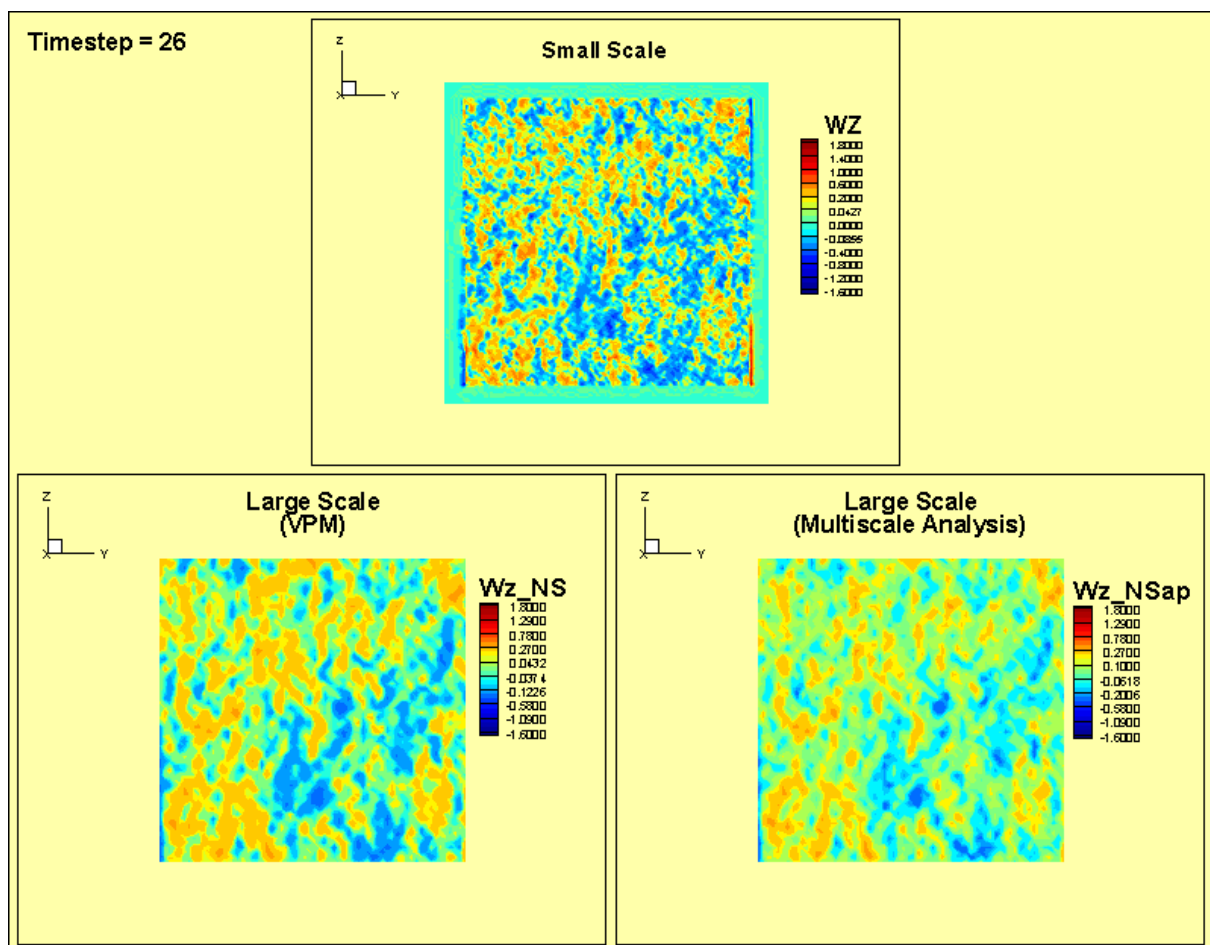
Σχήμα 3.10: Πεδίο Στροβιλότητας (Timestep = 26, $x = 40.0m$)

(α') ω_x average values comparison(β') ω_x standard deviation comparison(γ') ω_x minimum value comparison(δ') ω_x maximum value comparison**Σχήμα 3.11:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 26$)

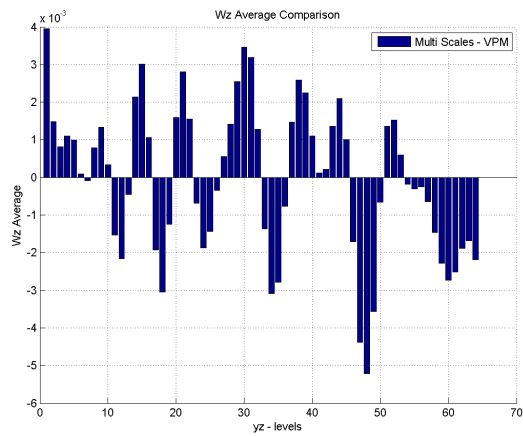
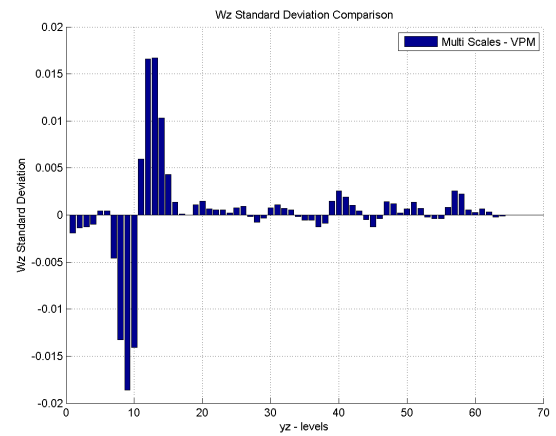
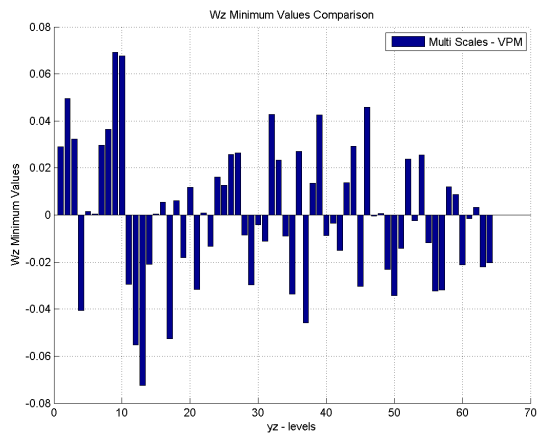
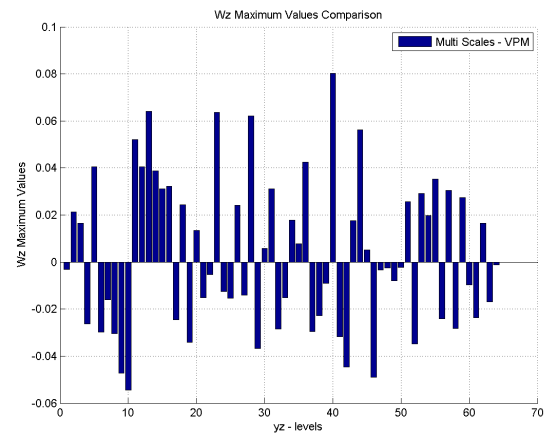


Σχήμα 3.12: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 26, x = 40.0m$)

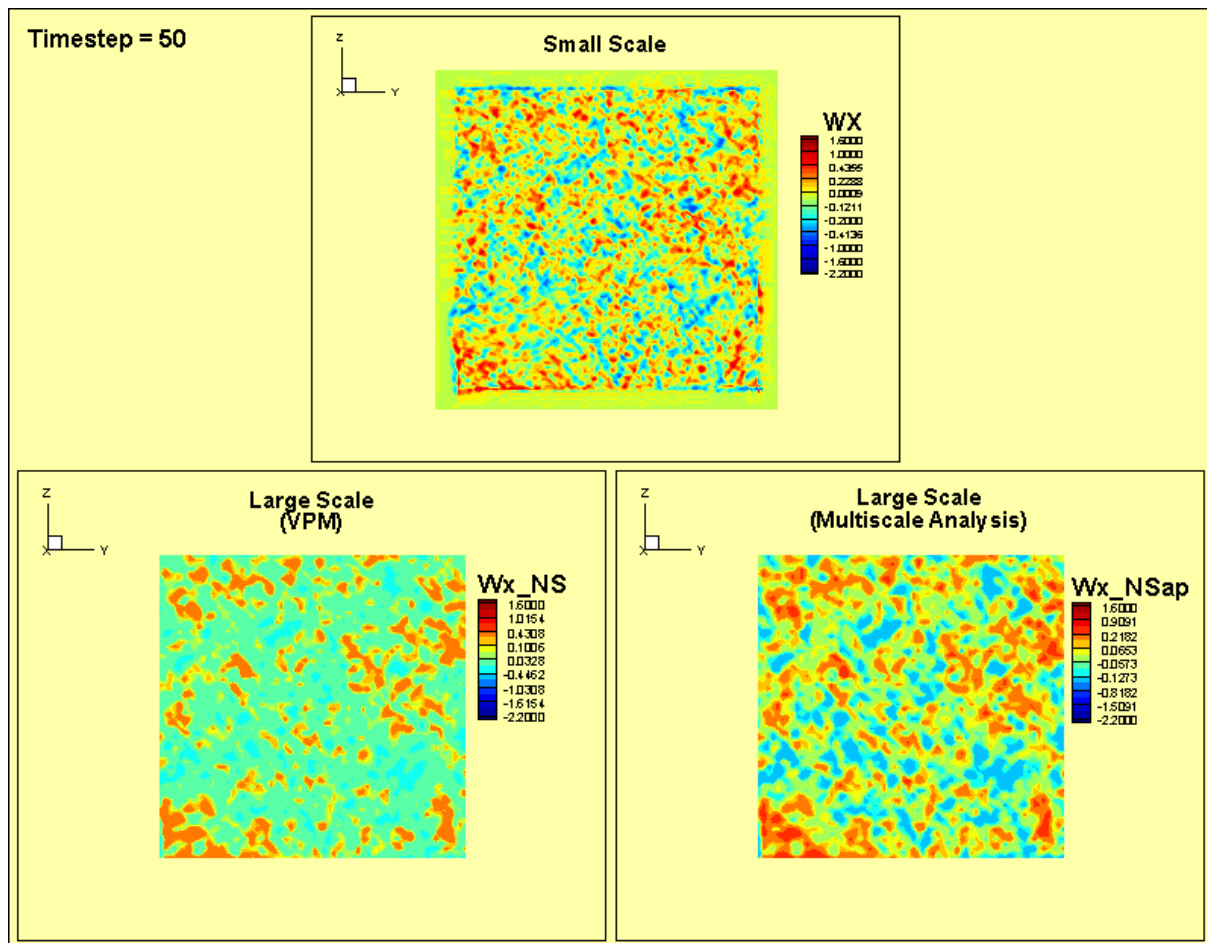
(α') ω_y average values comparison(β') ω_y standard deviation comparison(γ') ω_y minimum value comparison(δ') ω_y maximum value comparison**Σχήμα 3.13:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 26$)



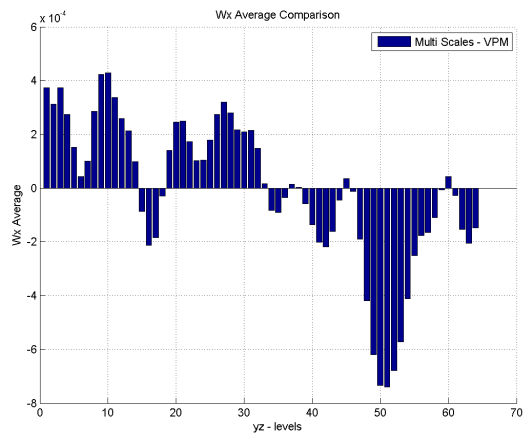
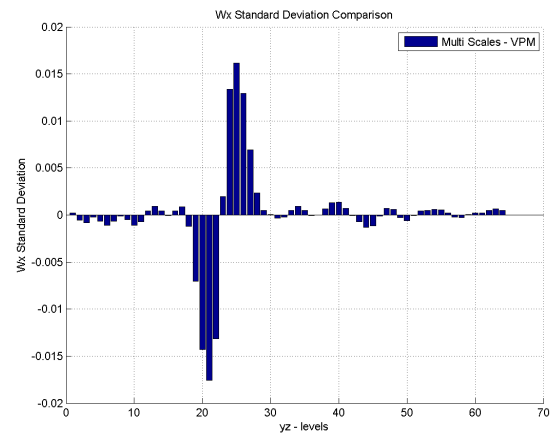
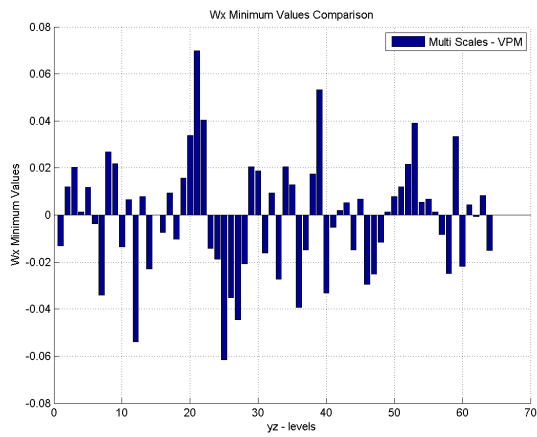
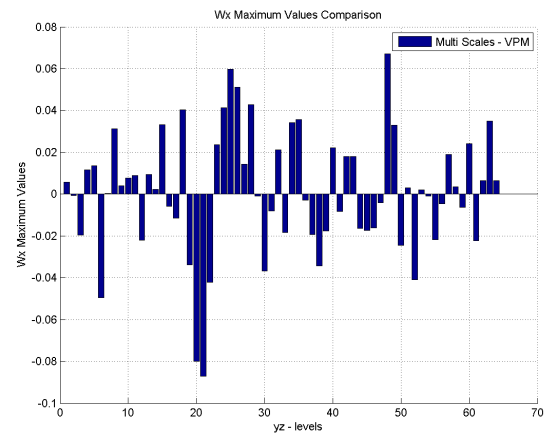
Σχήμα 3.14: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 26, x = 40.0m$)

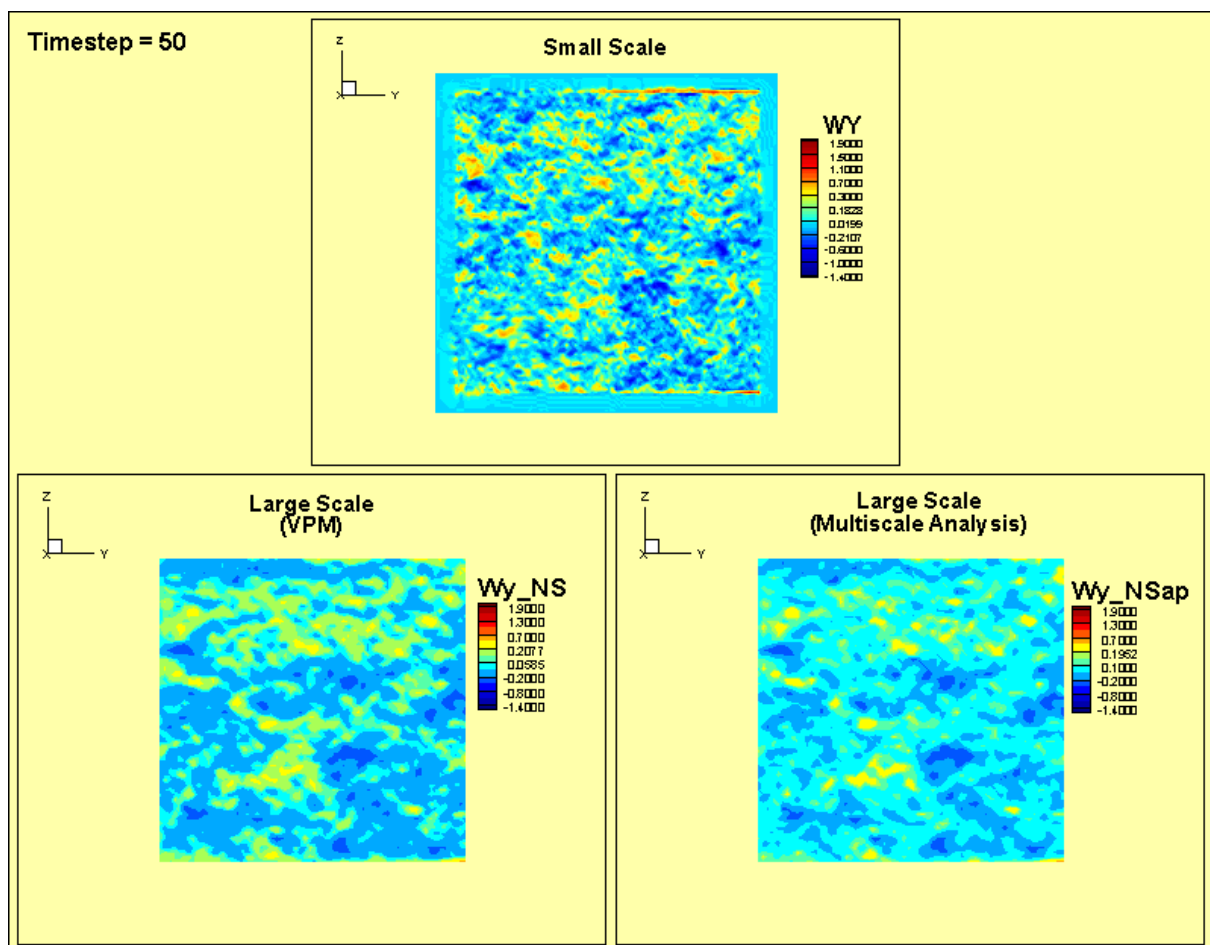
(α') ω_z average values comparison(β') ω_z standard deviation comparison(γ') ω_z minimum value comparison(δ') ω_z maximum value comparison**Σχήμα 3.15:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 26$)

3.2.3 Timestep = 50

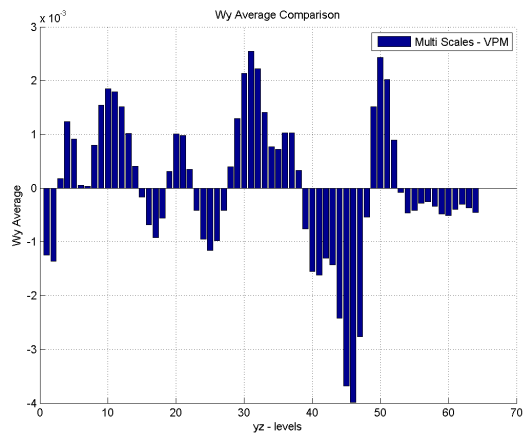
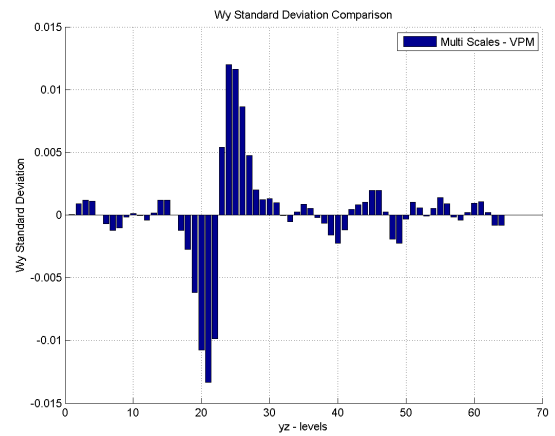
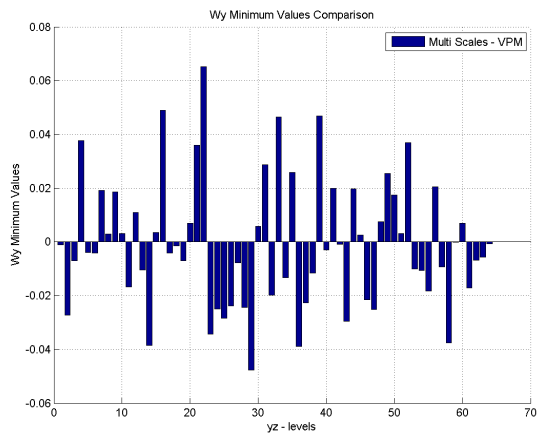
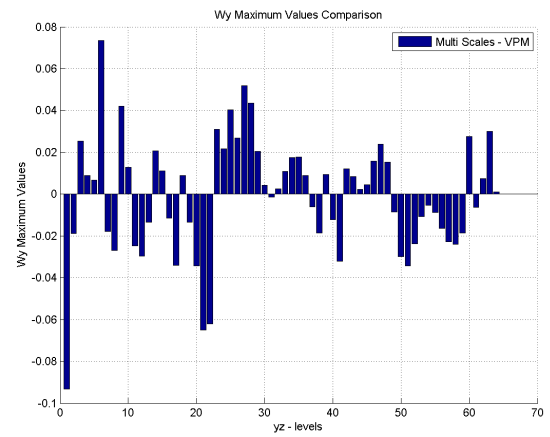


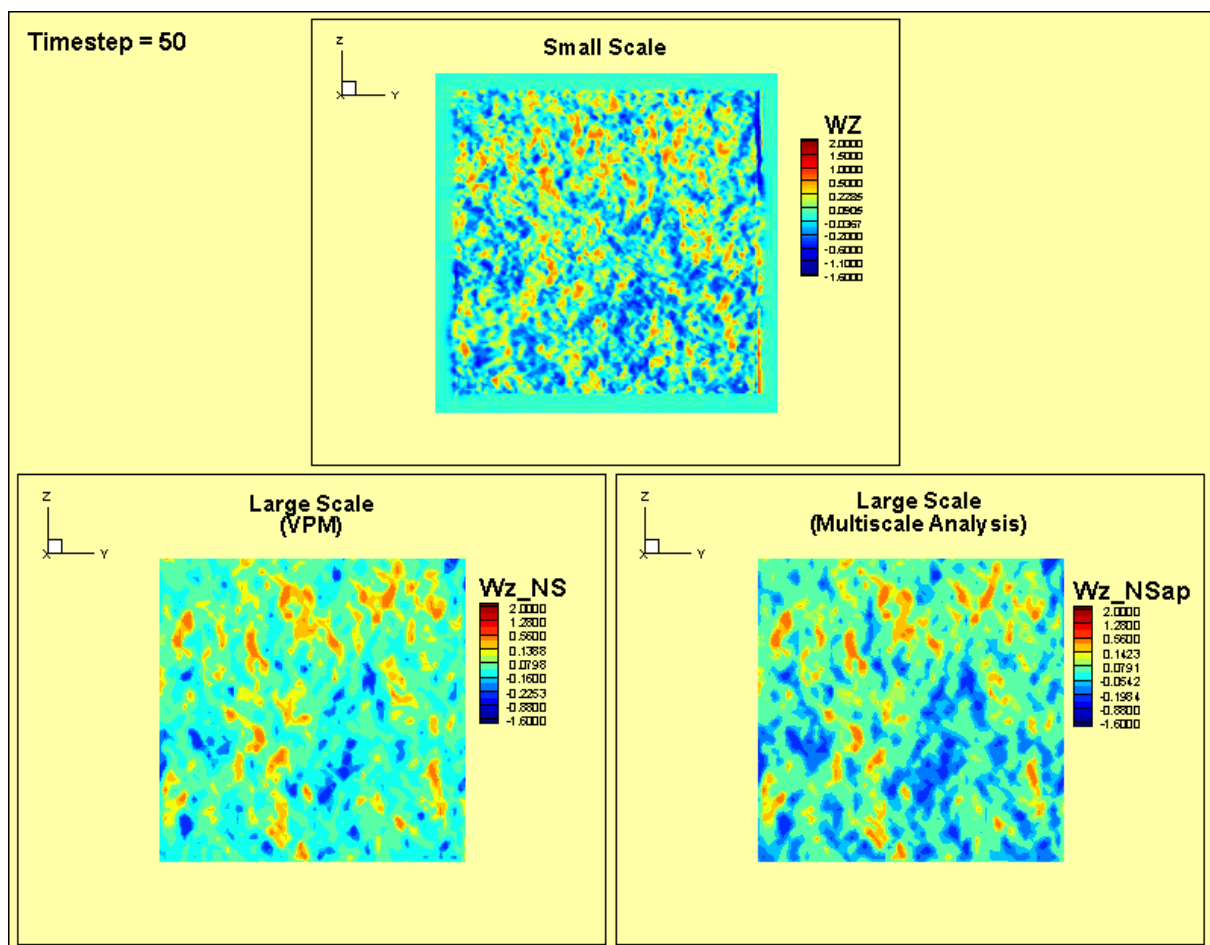
Σχήμα 3.16: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 50, x = 40.0m$)

(α') ω_x average values comparison(β') ω_x standard deviation comparison(γ') ω_x minimum value comparison(δ') ω_x maximum value comparison**Σχήμα 3.17:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 50$)

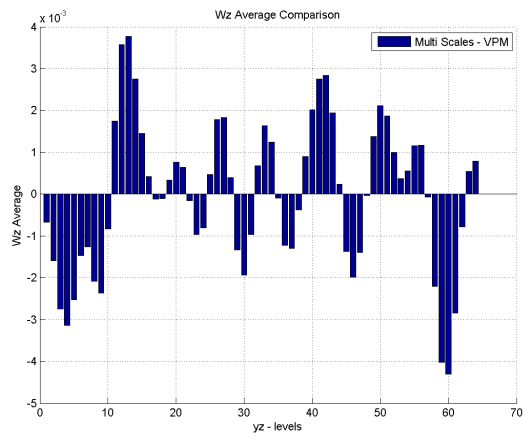
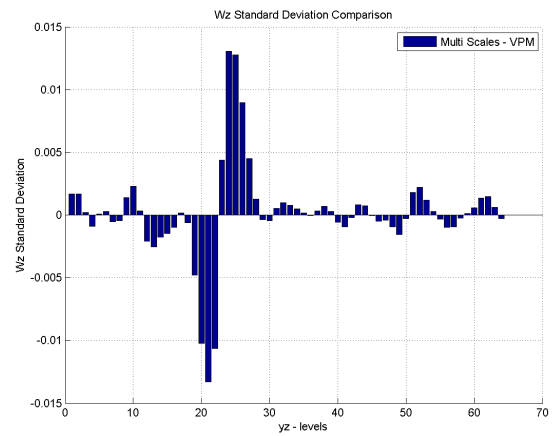
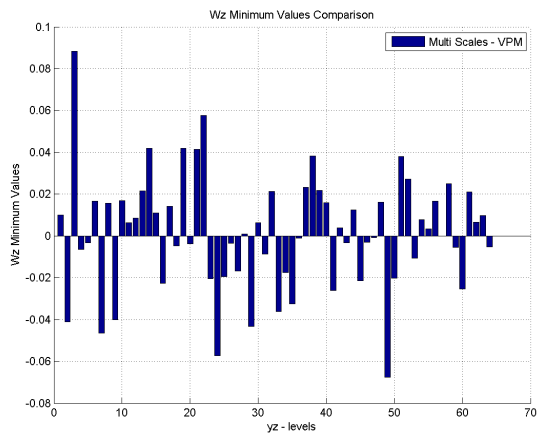
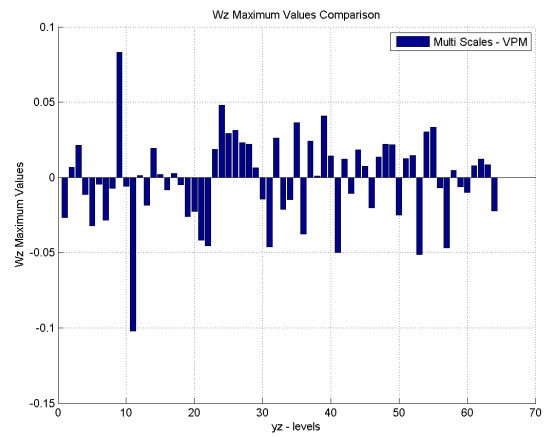


Σχήμα 3.18: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 50, x = 40.0m$)

(α') ω_y average values comparison(β') ω_y standard deviation comparison(γ') ω_y minimum value comparison(δ') ω_y maximum value comparison**Σχήμα 3.19:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 50$)



Σχήμα 3.20: Πεδίο Στροβιλότητας ($Timestep = 50, x = 40.0m$)

(α') ω_z average values comparison(β') ω_z standard deviation comparison(γ') ω_z minimum value comparison(δ') ω_z maximum value comparison**Σχήμα 3.21:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Στροβιλότητας ($Timestep = 50$)

3.2.4 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

1. Στατιστικά Διαγράμματα

α'. Μέση Τιμή (Average Value)

- Παρατηρούμε ότι η διαφορά των μέσων τιμών των ω_y, ω_z είναι κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή που παρουσιάζουν οι μέσες τιμές της ω_x . Το γεγονός αυτό οφείλεται ακριβώς στο ότι οι τιμές των ω_y, ω_z είναι κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από την $-x$ συνιστώσα του πεδίου της στροβιλότητας ω_x . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεδίο στροβιλότητας λαμβάνει τις μεγαλύτερες τιμές του στις κάθετες, στην κατεύθυνση της ροής, κατευθύνσεις.
- Η διαφορά των μέσων τιμών της ω_x συνιστώσας παρουσιάζει μία μικρή μείωση συναρτήσει του χρόνου. Ταυτόχρονα όμως η διαφορά αυτή λαμβάνει τις αρνητικές της τιμές σε επίπεδα ολοένα και πιο δεξιά στον άξονα $-x$ (κατεύθυνση της ροής). Αυτό συνεπάγεται ότι στην κατεύθυνση της ροής, η μέση τιμή της στροβιλότητας, που προέκυψε από την Ανάλυση των Πολλαπλών Κλιμάκων τείνει σταθερά, αν και με μικρό ρυθμό, σε τιμές μεγαλύτερες από αυτές που λαμβάνει το πεδίο που εξήχθη από τον κώδικα VPM, χωρίς δηλαδή να έχει ληφθεί υπόψιν η πληροφορία που φέρει η μικρή κλίμακα. Το γεγονός αυτό είναι ενθαρρυντικό καθώς το πεδίο που προκύπτει από την ανάλυσή μας έχει την τάση να "παρακολουθεί" καλύτερα το πεδίο ροής της μικρής κλίμακας συναρτήσει του χρόνου. Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι η επίδραση των επιπλέον όρων της εξίσωσης της στροβιλότητας μειώνεται όσο το φαινόμενο εξελίσσεται χρονικά όπως δείχνει και η μείωση του εύρους των διαφορών ανάμεσα στα δύο πεδία.
- Η διαφορά των μέσων τιμών της $-y$ συνιστώσας του πεδίου της στροβιλότητας ω_y ακολουθεί μία αντίστοιχη συμπεριφορά με την ω_x . Παρατηρούμε δηλαδή μία σημαντική μείωση σε συνάρτηση με το χρόνο και ταυτόχρονα την τάση να σταθεροποιηθεί σε θετικές τιμές.
- Όσον αφορά τώρα στις μέσες τιμές της ω_z δεν παρατηρείται κάποια σημαντική διαφοροποίηση στη μεταξύ τους σχέση όπως στις άλλες δύο συνιστώσες.

β'. Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation)

- Η διαφορά των τυπικών αποκλίσεων της ω_x συνιστώσας των δύο πεδίων ξεκινά από θετικές τιμές στο 2ο χρονικό βήμα και στη συνέχεια φθίνει αλλάζο-

ντας μάλιστα και πρόσημο(50ο χρονικό βήμα) και στα περισσότερα επίπεδα περιορίζεται στην περιοχή του μηδενός. Παρελθόντος δηλαδή του χρόνου, η διασπορά γύρω από τη μέση τιμή του πεδίου που προκύπτει από την ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων τείνει να έχει ολοένα και μικρότερη διαφορά σε σχέση με το πεδίο που προέκυψε από τον κώδικα vrm. Τα επίπεδα στα οποία η διαφορά αυτή λαμβάνει τις μεγαλύτερες τιμές(κατά απόλυτο τιμή) μετατοπίζονται επίσης προς τα θετικά του άξονα των $-x$ καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται χρονικά.

- Αντίστοιχη μείωση, αλλά αρκετά σημαντική (αλλαγή τάξης μεγέθους), της διαφοράς των τυπικών αποκλίσεων των δύο πεδίων παρατηρείται και στις ω_y, ω_z συνιστώσες.

γ'. Μέγιστα (Maximum) και Ελάχιστα (Minimum)

Σχετικά τώρα με τις διαφορές των μεγίστων και των ελαχίστων ανάμεσα στις δύο "εκδοχές" του πεδίου της στροβιλότητας της μεγάλης κλίμακας, παρατηρούμε ότι οι διαφορές αυτές φθίνουν συναρτήσει του χρόνου χωρίς να έχουν όμως κάποια άλλη συμπεριφορά ή περιοδικότητα που θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε και να αναλύσουμε.

2. Συγκρητικές Απεικονίσεις των δύο Πεδίων

Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις του πεδίου της στροβιλότητας στη θέση $x = 40.0m$ για κάθε ένα από τα επιλεχθέντα χρονικά βήματα μπορούμε να διακρίνουμε ότι η υπολογιστική διαδικασία λειτουργεί ως φίλτρο. Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσαμε να πούμε ότι ομαλοποιεί τις διαφορές μεταξύ της μικρής και της μεγάλης κλίμακας όπως αυτές προέκυψαν από τον κώδικα vrm. Επίσης από τα χρώματα των γραφικών παραστάσεων αυτών παρατηρούμε μία διάχυση των δινών. Τα συμπεράσματα αυτά βέβαια δεν αποτυπώνονται στα στατιστικά διαγράμματα των διαφορών της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και των μεγίστων ελαχίστων των δύο "εκδοχών" του πεδίου της στροβιλότητας της μεγάλης κλίμακας. Αυτή η αποτύπωση δεν θα μπορούσε άλλωστε να είναι εφικτή καθώς ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών για κάθε επίπεδο yz του πεδίου ροής, ολοκληρώνει ουσιαστικά τα αποτελέσματα της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων και του vrm.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι η επίδραση των επιπλέον όρων στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας γίνεται λιγότερο αισθητή με την πάροδο του χρόνου. θα μπορούσαμε όμως συγκρατημένα να πούμε ότι η μέθοδος αυτή προσεγγίζει βελτιωμένα το πεδίο ροής της μικρής κλίμακας.

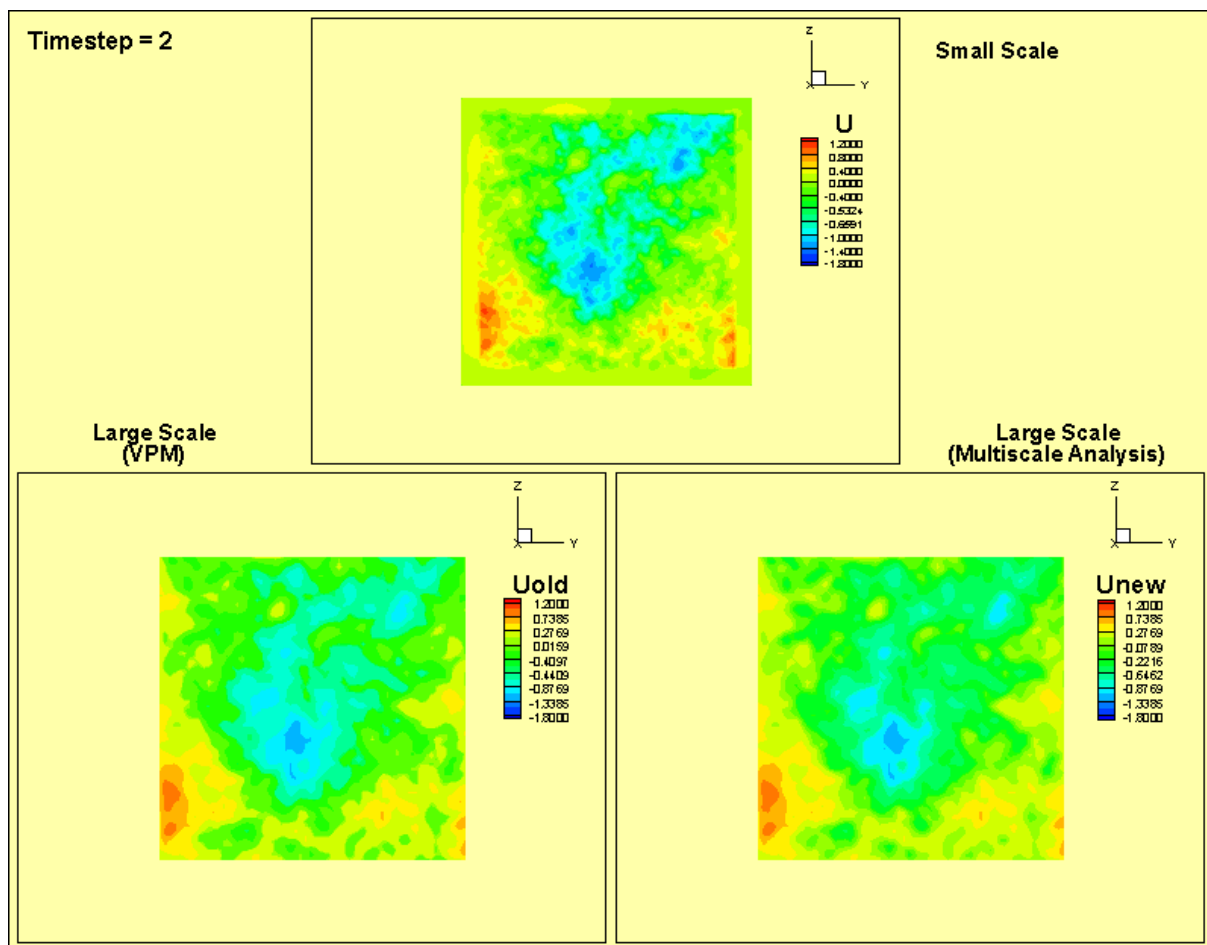
3.3 Χρονική Εξέλιξη του Φαινομένου - Σύζευξη Κλιμάκων σε Πραγματικό Χρόνο (Time Evolution - Real Time Multiscale Analysis)

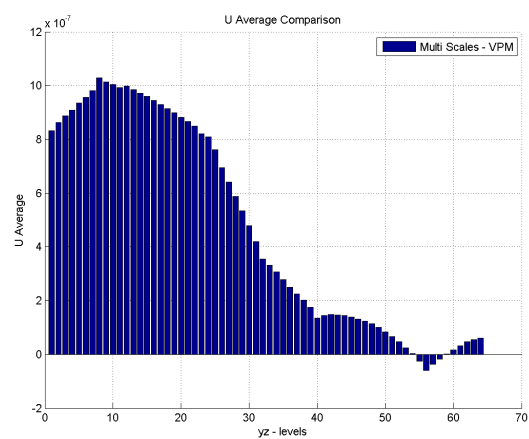
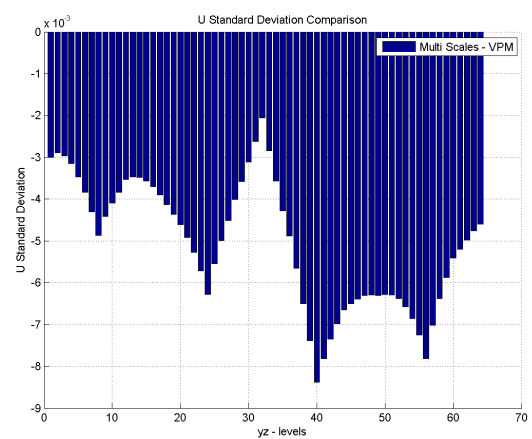
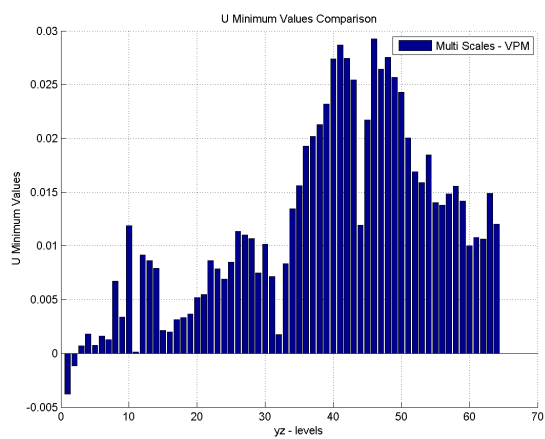
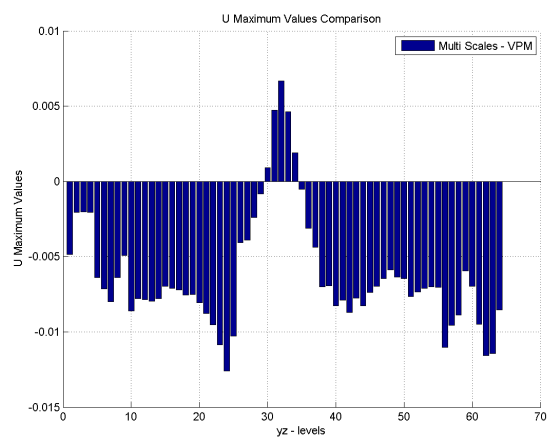
Στη προηγούμενη ανάλυση, η χρονική εξέλιξη των δύο κλιμάκων πραγματοποιήθηκε ανεξάρτητα, και η επίδραση της μικρής κλίμακας στη μεγάλη εξετάστηκε σε δεύτερο χρόνο. Συγκεκριμένα, σε κάθε χρονικό βήμα όπως αυτό αποτυπώθηκε από τον κώδικα `vrn`, υπολογίστηκε μία καινούρια προσέγγιση του πεδίου της στροβιλότητας της μεγάλης κλίμακας με βάση τα ήδη γνωστά στοιχεία των πεδίων ροής των δύο κλιμάκων. Έτσι, σε κάθε επόμενο βήμα, τα στοιχεία της ροής δεν ανανεώνονταν στις νέες τιμές που προέκυπταν από την εξίσωση της στροβιλότητας. Άλλωστε, μέσω της διαδικασίας αυτής ήταν δυνατός μόνο ο υπολογισμός μιας νέας τιμής της στροβιλότητας και όχι η εξολοκλήρου λύση του πεδίου (λύση εξίσωσης Poisson για τον εκ νέου υπολογισμό της ταχύτητας).

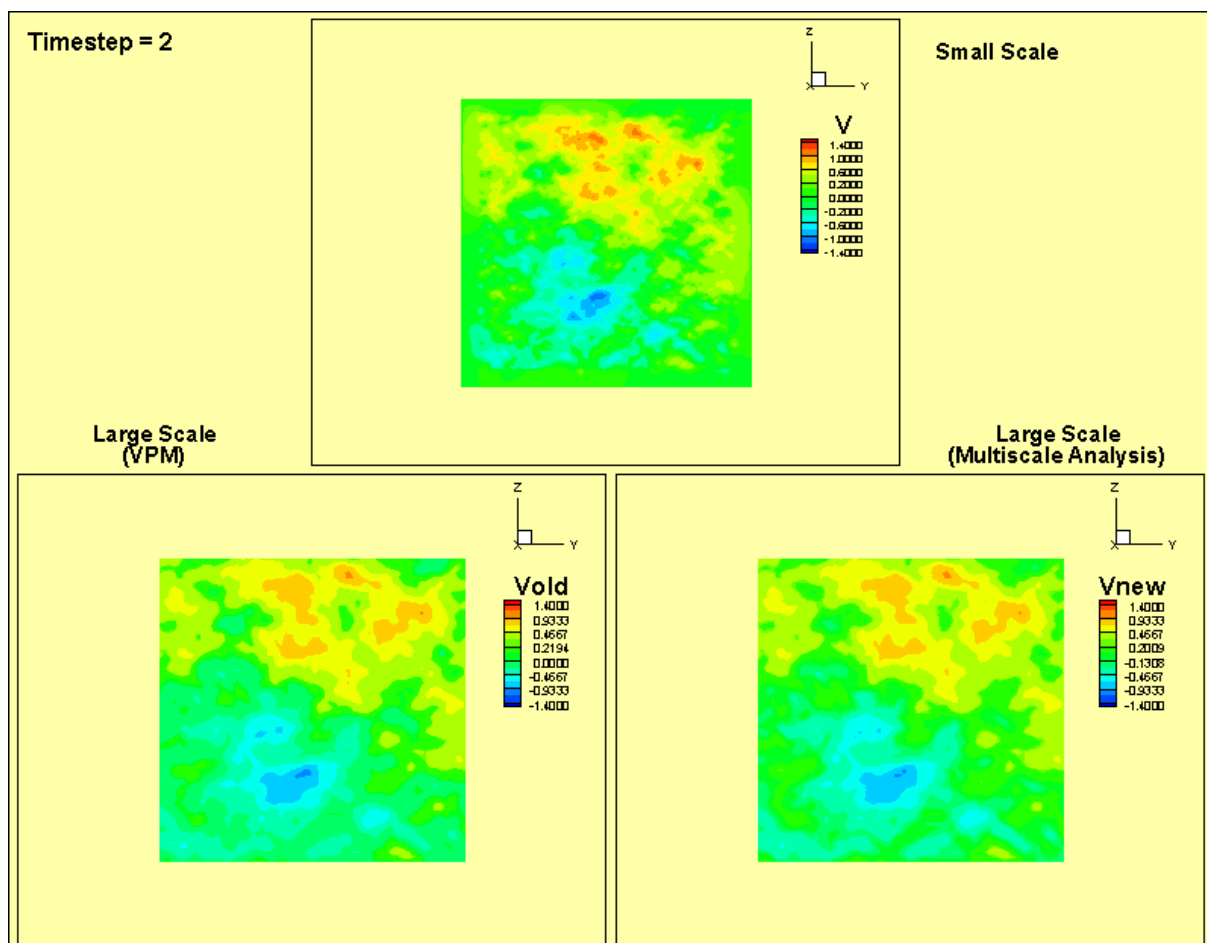
Στη παρούσα παράγραφο, θα παρουσιάσουμε την ταυτόχρονη σύζευξη των δύο κλιμάκων. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά πραγματοποιήθηκε η χρονική εξέλιξη του πεδίου ροής της μικρής κλίμακας και στη συνέχεια, η υπορουτίνα που υπολογίζει τους επιπλέον όρους στην εξίσωση της στροβιλότητας (πληροφορία που προέρχεται από την μικρή κλίμακα), εισήχθει στον κώδικα `vrn` και η διαδικασία αυτή έλαβε χώρα σε πραγματικό χρόνο. Έτσι προέκυψε η "διορθωμένη" χρονική εξέλιξη του πεδίου ροής της μεγάλης κλίμακας μέσω του `vrn`, λαμβάνοντας τη φορά αυτή υπόψιν και την επίδραση της μικρής κλίμακας. για $N_t = 50$ χρονικές στιγμές με χρονικό βήμα $\Delta t_{ss} = \frac{\Delta x_{ss}}{U_\infty}$.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται για τις χρονικές στιγμές t_2, t_{26}, t_{50} . Στα διαγράμματα που ακολουθούν λοιπόν, απεικονίζεται για κάθε μία από αυτές η ταχύτητα του πεδίου της μικρής κλίμακας, η ταχύτητα του πεδίου της μεγάλης κλίμακας όπως προέκυψε από την ανεξάρτητη χρονική εξέλιξη της, και το νέο πεδίο ταχύτητας της κλίμακας αυτής που προέκυψε από την εφαρμογή της **μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων** έχοντας λάβει δηλαδή υπόψιν και τις διαταραχές του πεδίου (επιπλέον όροι στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας) σε πραγματικό χρόνο. Για την καλύτερη ανάγνωση των γραφικών αυτών παραστάσεων και την σύγκριση των δύο "εκδοχών" του πεδίου ροής της μεγάλης κλίμακας, παρατίθενται και τα διαγράμματα με τις διαφορές των στατιστικών μεγεθών της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης, του μεγίστου και του ελαχίστου σε κάθε επίπεδο $-yz$ του διακριτοποιημένου χωρίου D και για κάθε μία από τις επιλεχθείσες χρονικές στιγμές. Τέλος, παρουσιάζονται και οι μετασχηματισμοί των ταχυτήτων στο πεδίο της συχνότητας (Fast Fourier Transform) για κάθε κλίμακα, ώστε να μπορέσουμε να αποφανθούμε εάν διατηρείται το ενεργειακό φάσμα του αρχικού πεδίου στο χρόνο.

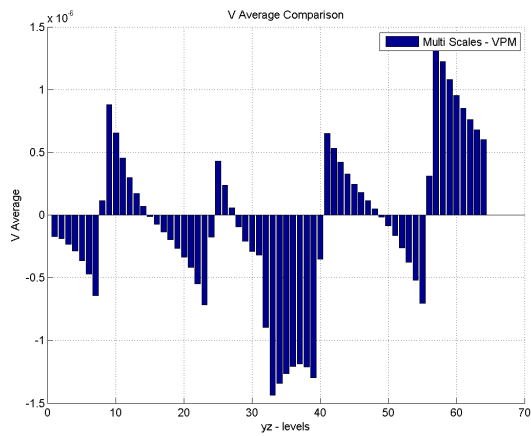
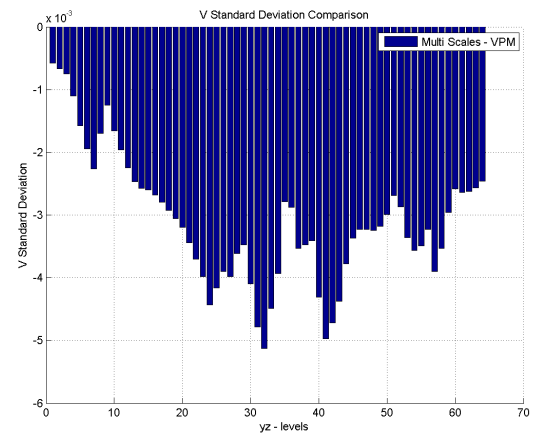
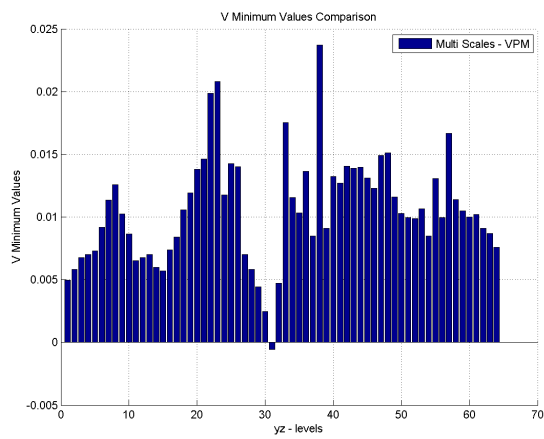
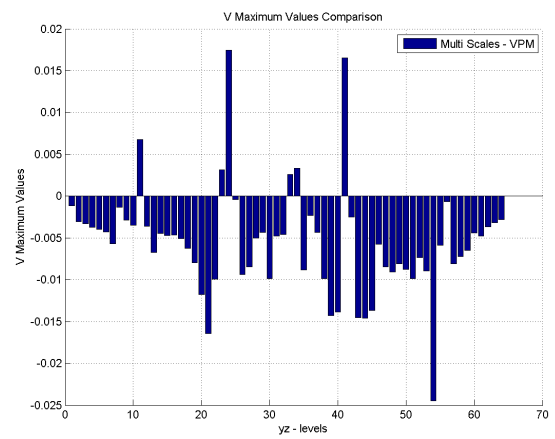
3.3.1 Timestep = 2

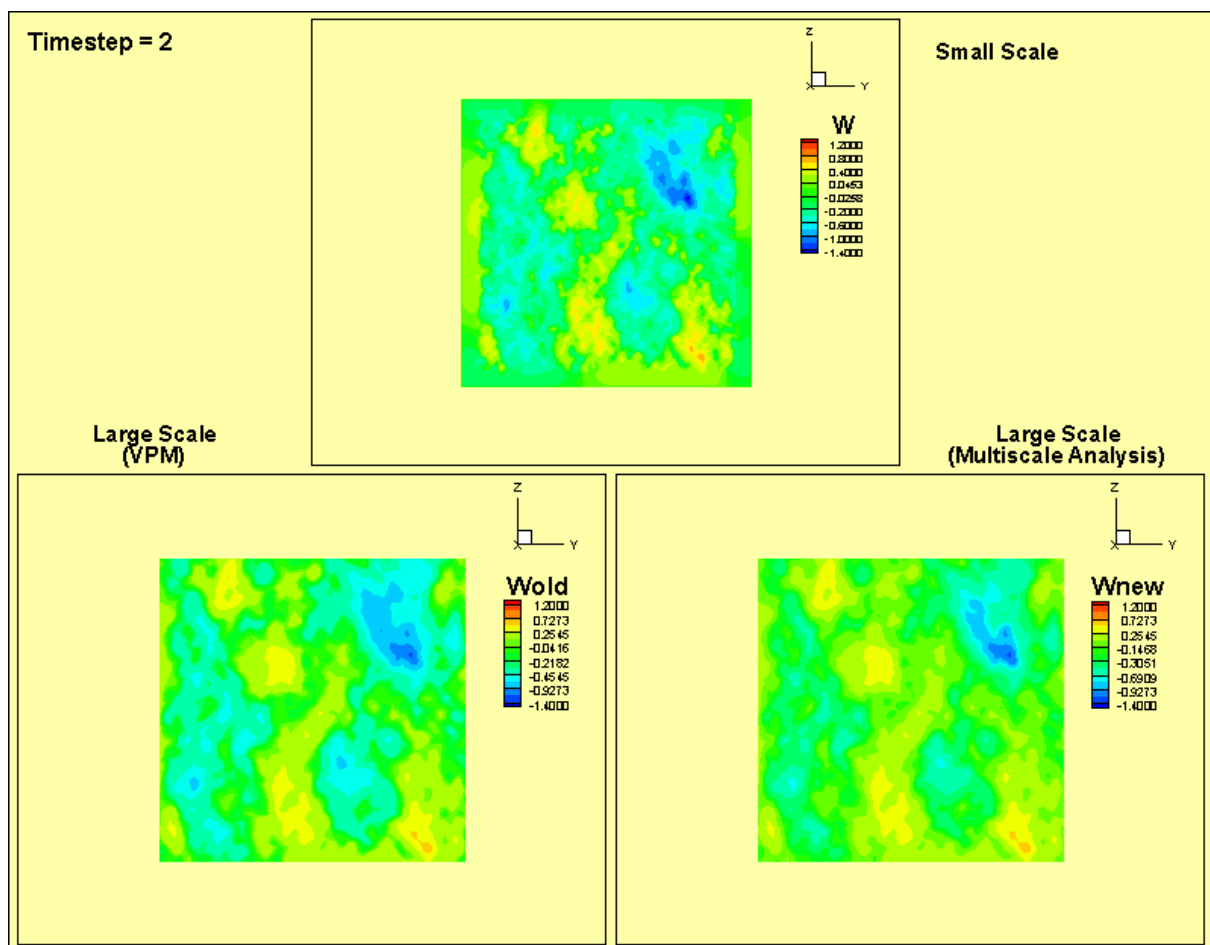
Σχήμα 3.22: Πεδίο Ταχύτητας (Timestep = 2, $x = 40.0m$)

(α') u average values comparison(β') u standard deviation comparison(γ') u minimum value comparison(δ') u maximum value comparison**Σχήμα 3.23:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 2$)

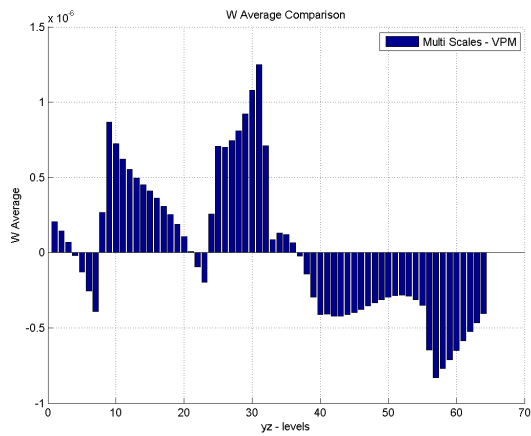
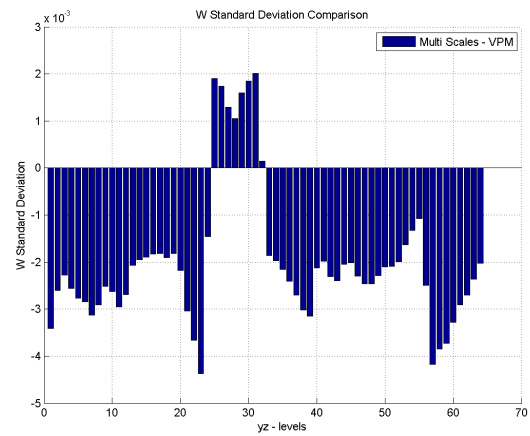
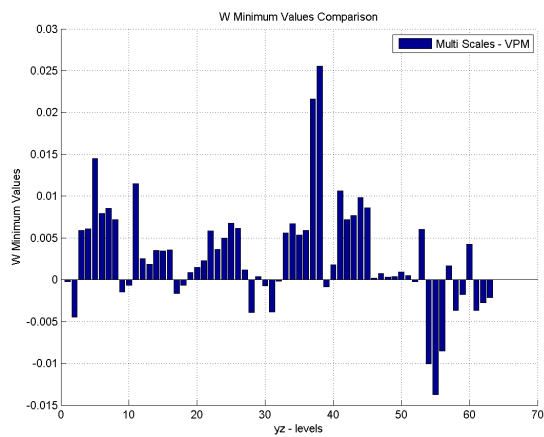
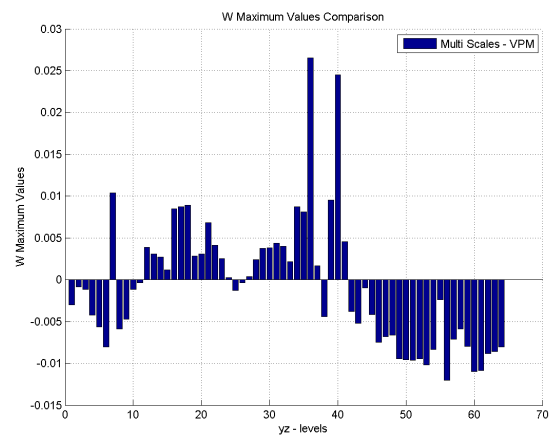


Σχήμα 3.24: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 2, x = 40.0m$)

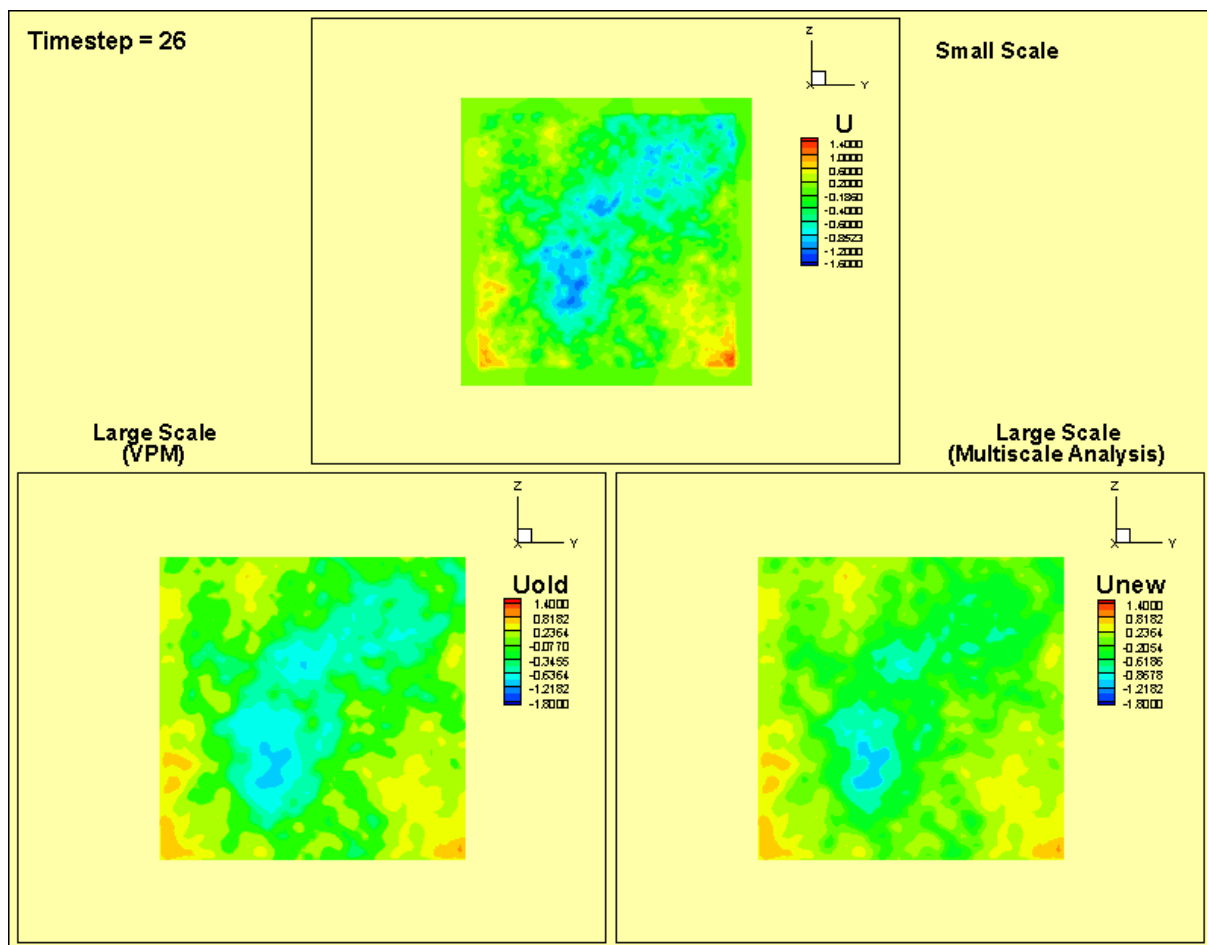
(α') *v average values comparison*(β') *v standard deviation comparison*(γ') *v minimum value comparison*(δ') *v maximum value comparison***Σχήμα 3.25:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας (*Timestep* = 2)

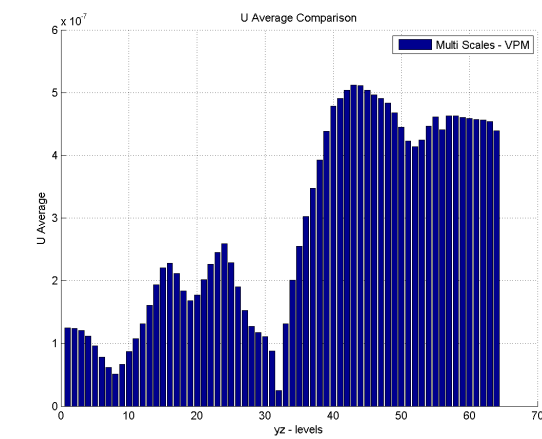
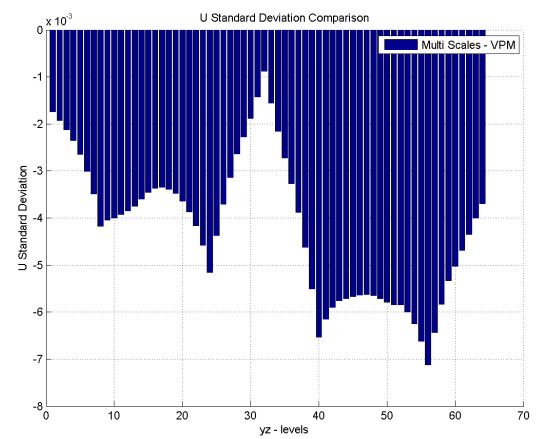
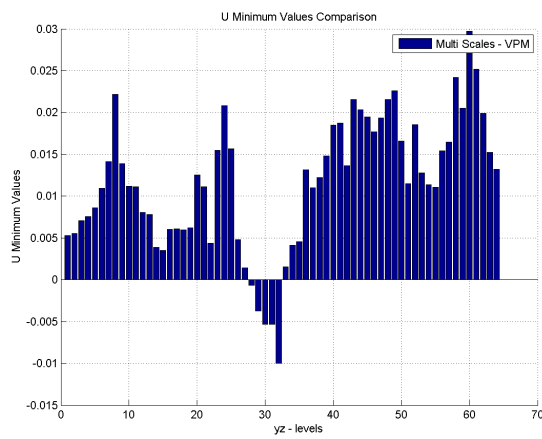
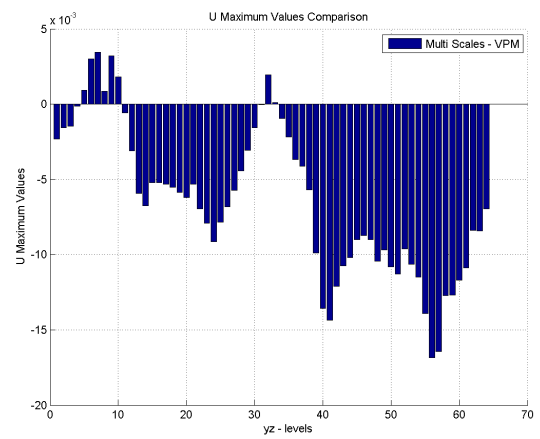


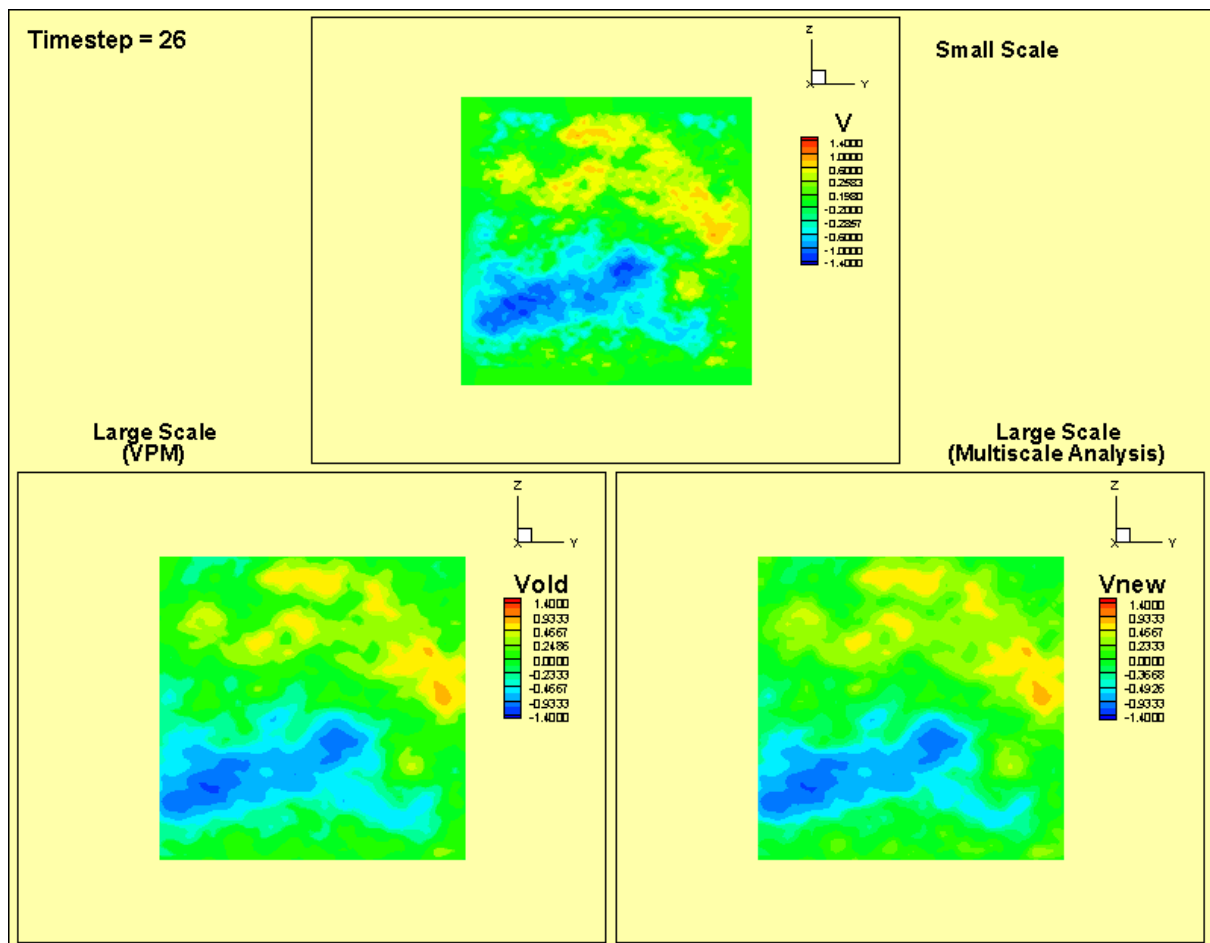
Σχήμα 3.26: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 2, x = 40.0m$)

(α') *w average values comparison*(β') *w standard deviation comparison*(γ') *w minimum value comparison*(δ') *w maximum value comparison***Σχήμα 3.27:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 2$)

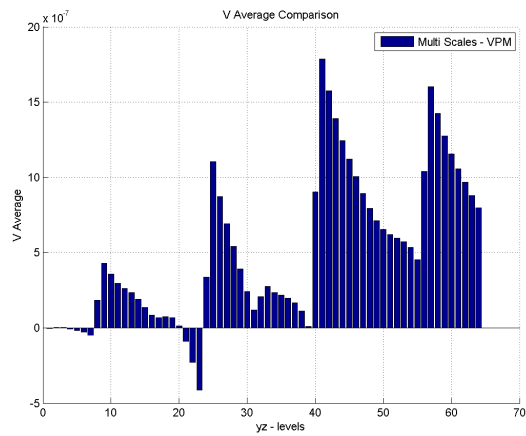
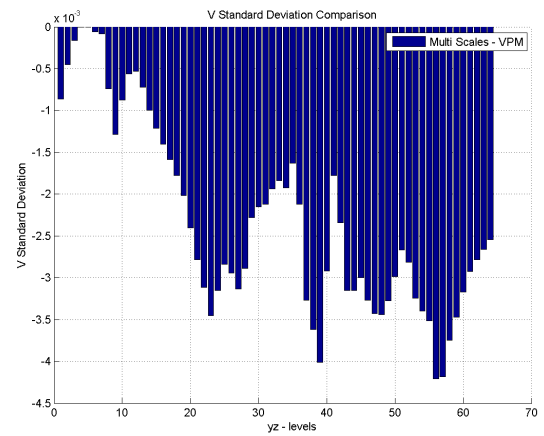
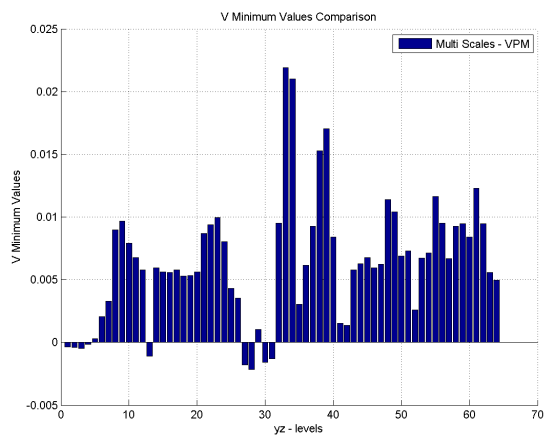
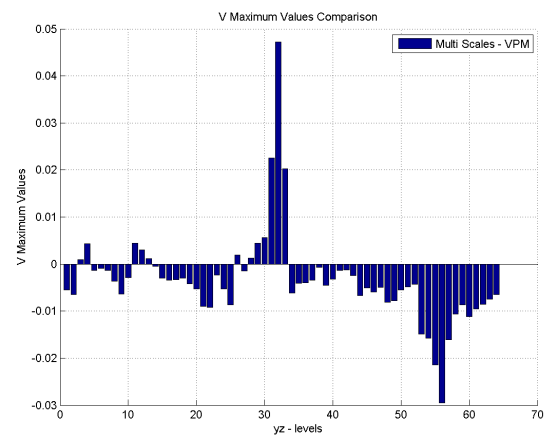
3.3.2 Timestep = 26

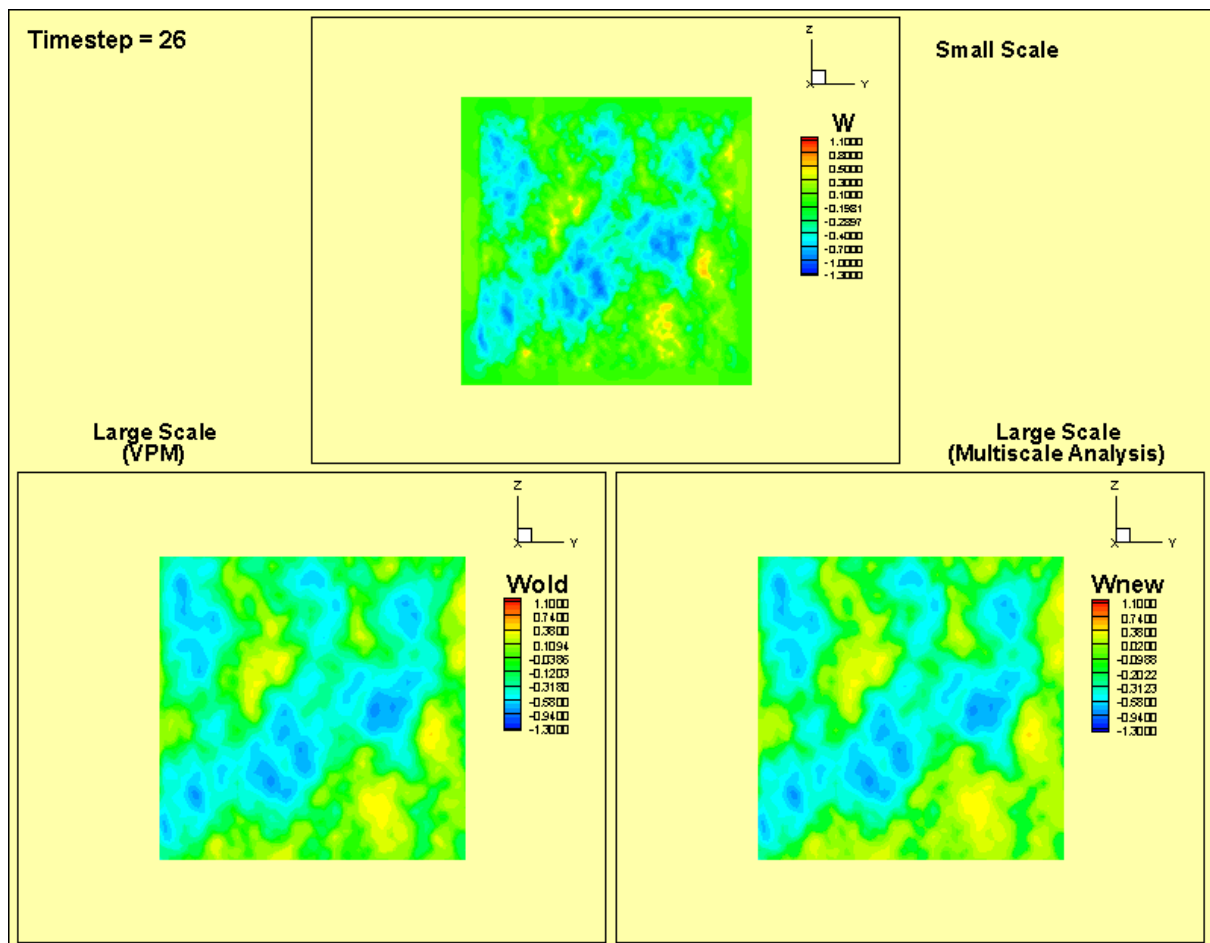
Σχήμα 3.28: Πεδίο Ταχύτητας (Timestep = 26, $x = 40.0m$)

(α') *u average values comparison*(β') *u standard deviation comparison*(γ') *u minimum value comparison*(δ') *u maximum value comparison***Σχήμα 3.29:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 26$)

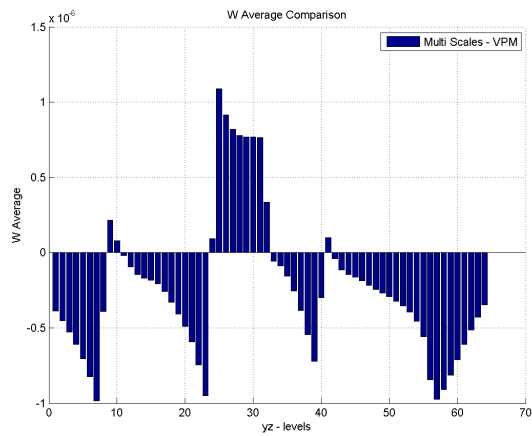
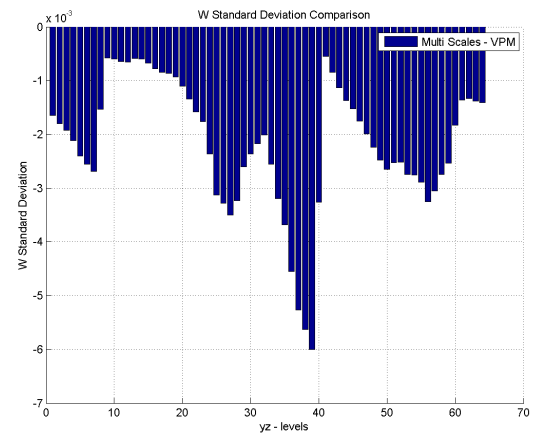
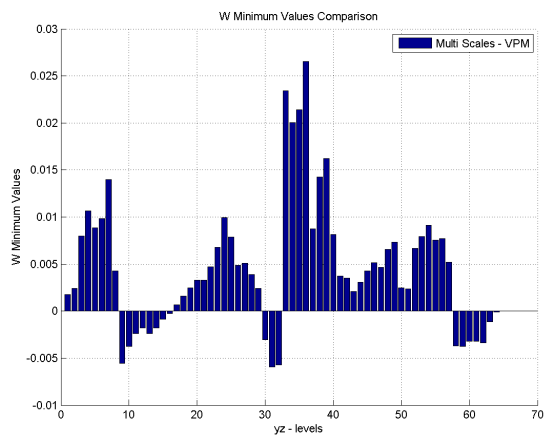
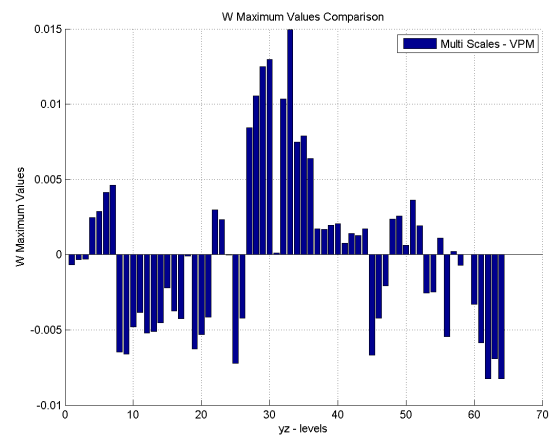


Σχήμα 3.30: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 26, x = 40.0m$)

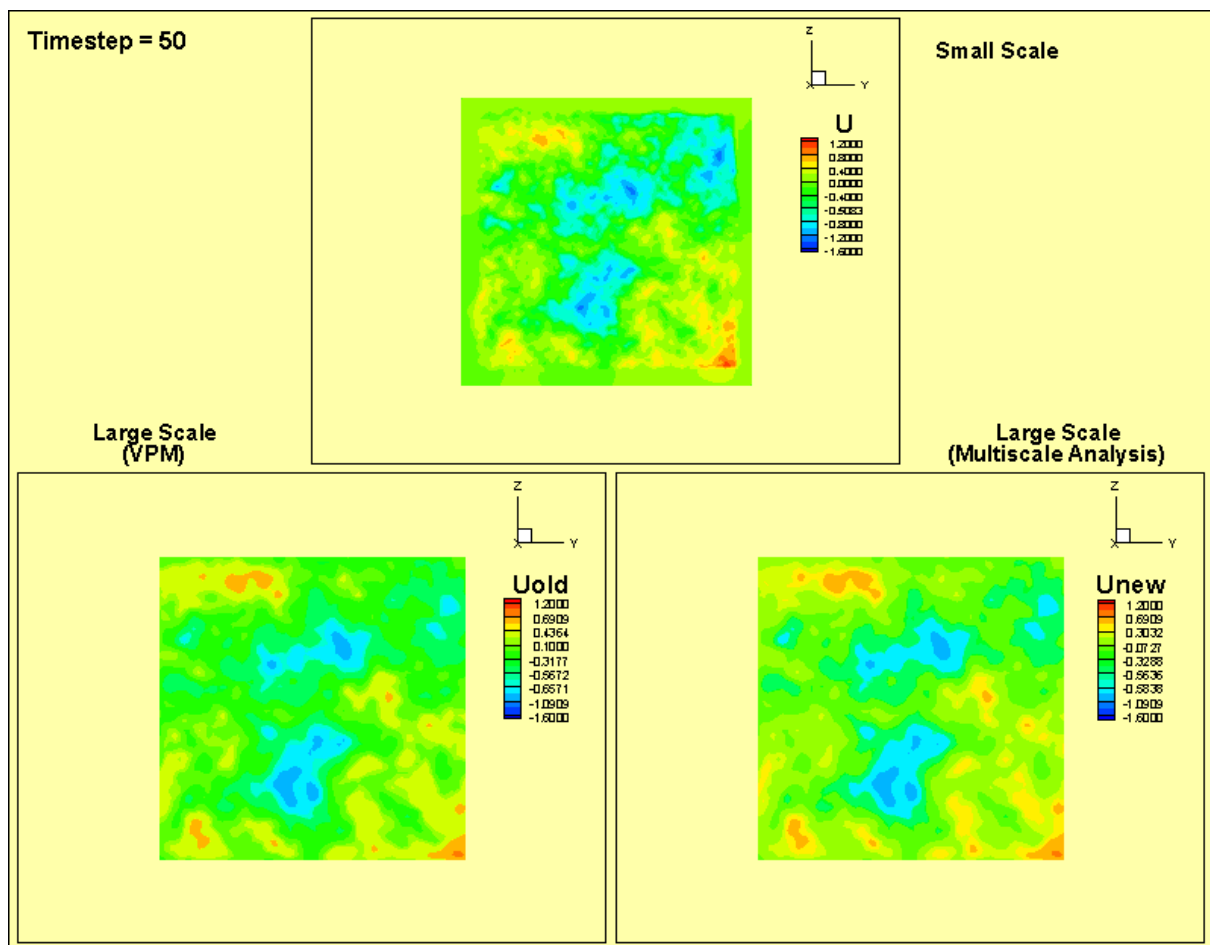
(α') *v* average values comparison(β') *v* standard deviation comparison(γ') *v* minimum value comparison(δ') *v* maximum value comparisonΣχήμα 3.31: Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 26$)



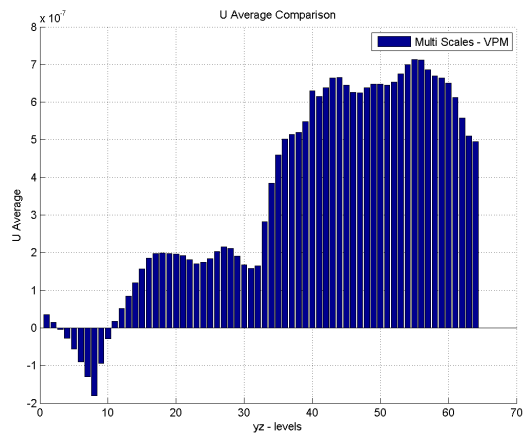
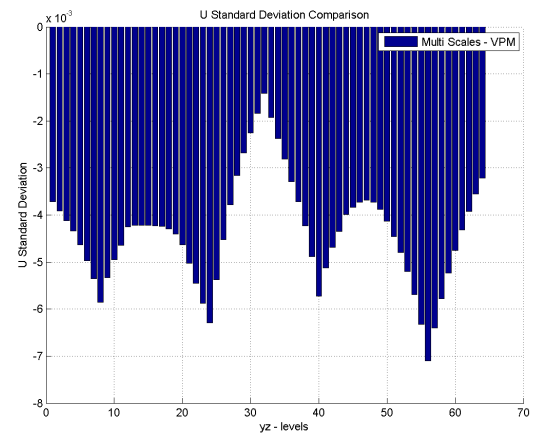
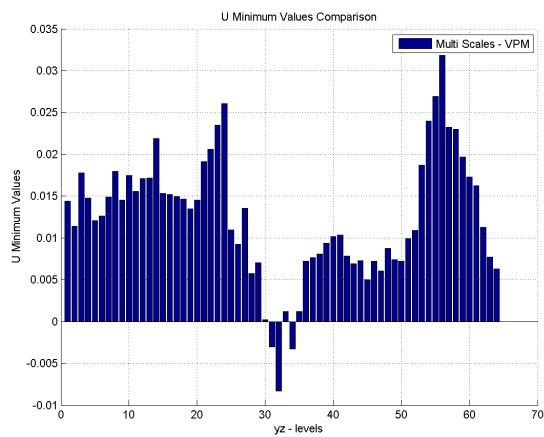
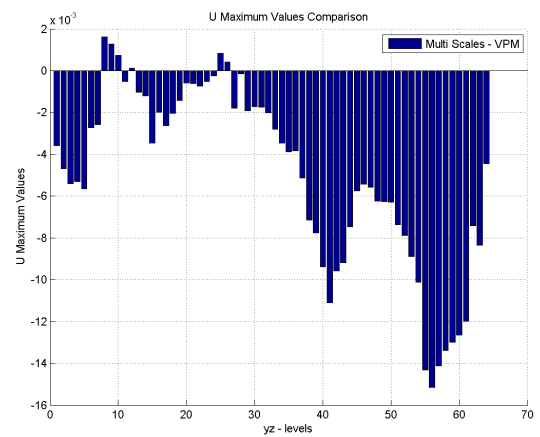
Σχήμα 3.32: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 26, x = 40.0m$)

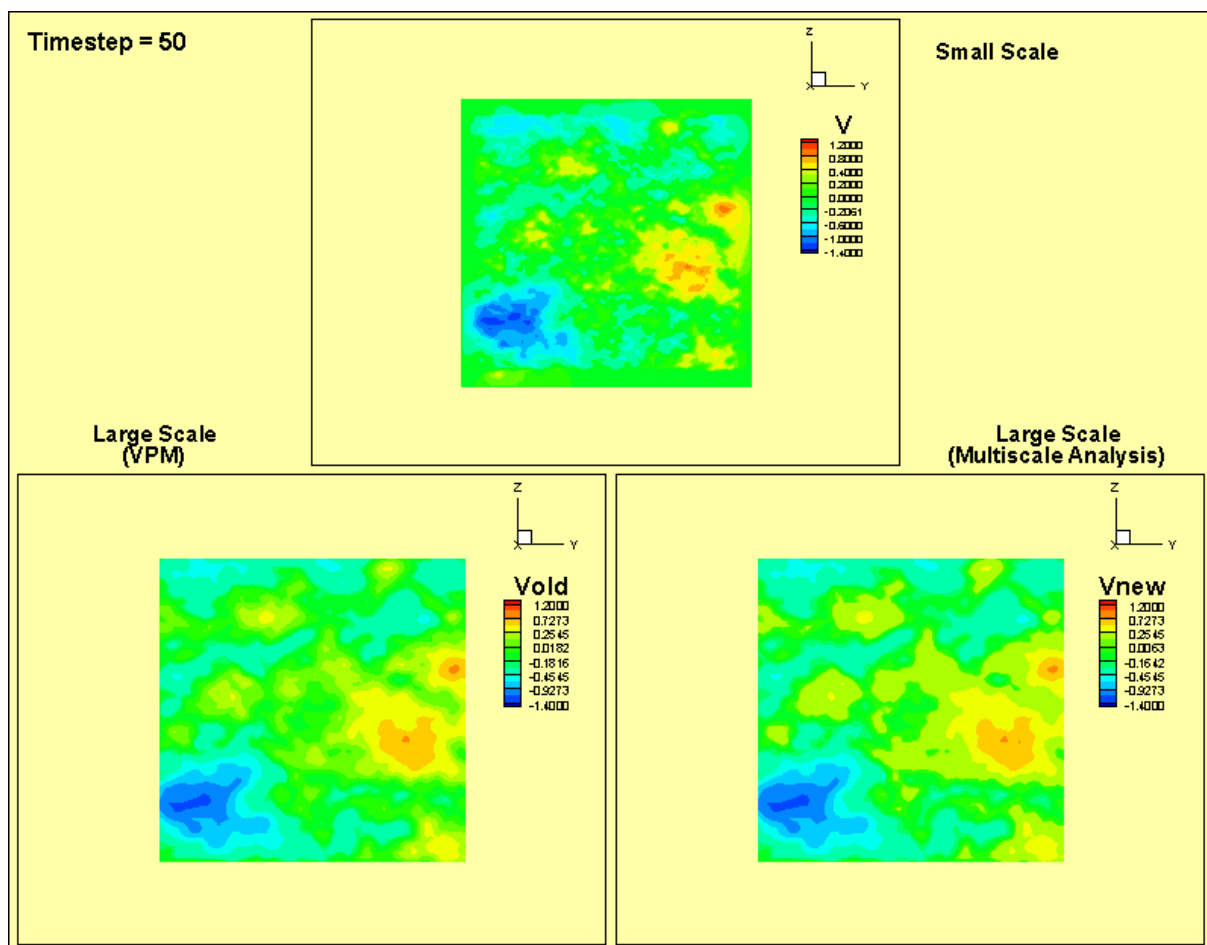
(α') *w average values comparison*(β') *w standard deviation comparison*(γ') *w minimum value comparison*(δ') *w maximum value comparison*Σχήμα 3.33: Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 26$)

3.3.3 Timestep = 50

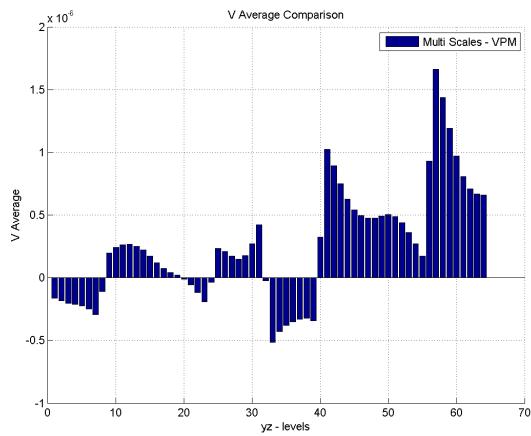
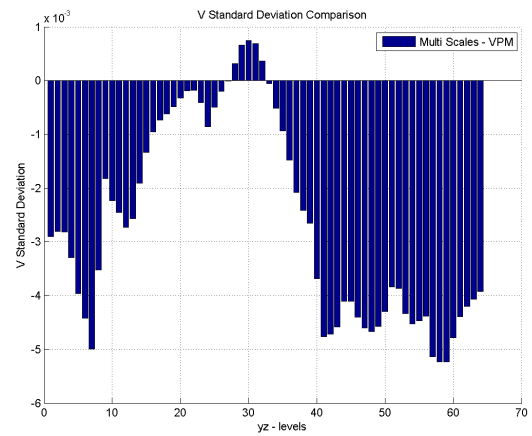
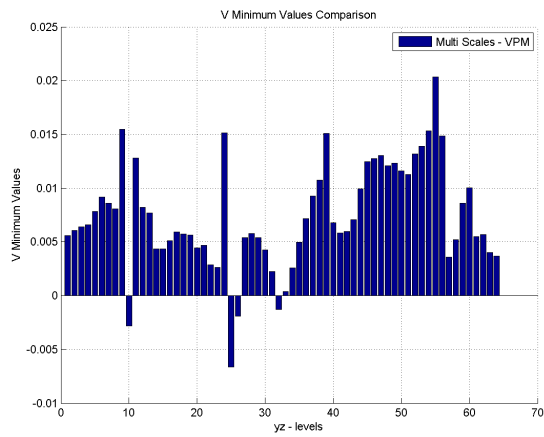
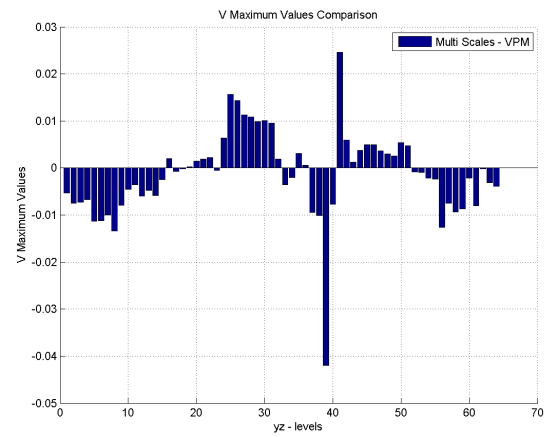


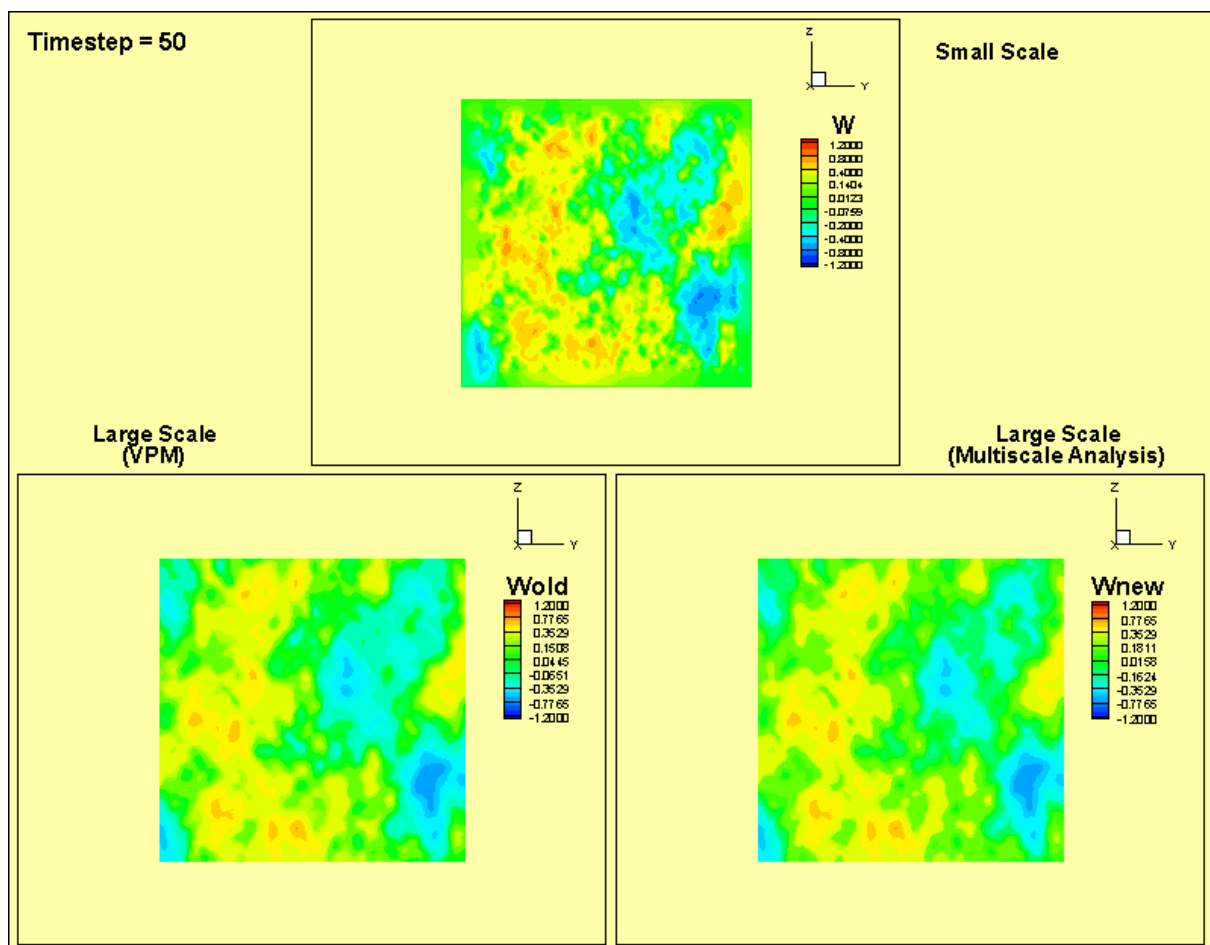
Σχήμα 3.34: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 50, x = 40.0m$)

(α') *u average values comparison*(β') *u standard deviation comparison*(γ') *u minimum value comparison*(δ') *u maximum value comparison*Σχήμα 3.35: Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 50$)

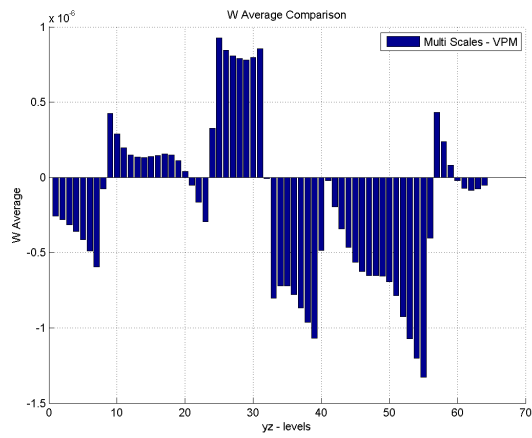
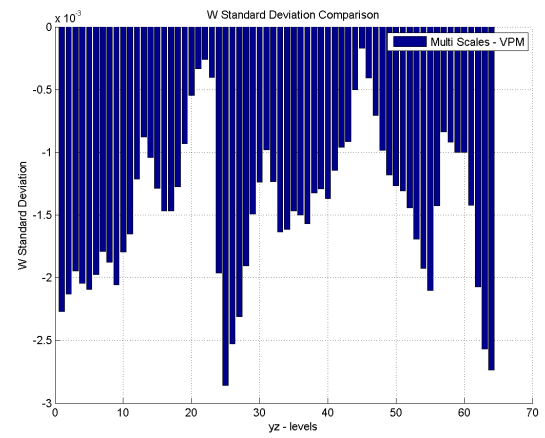
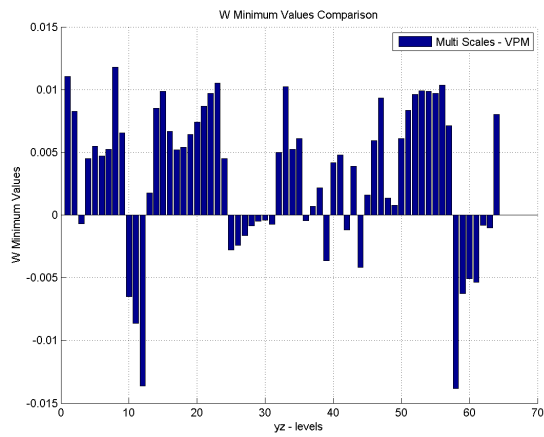
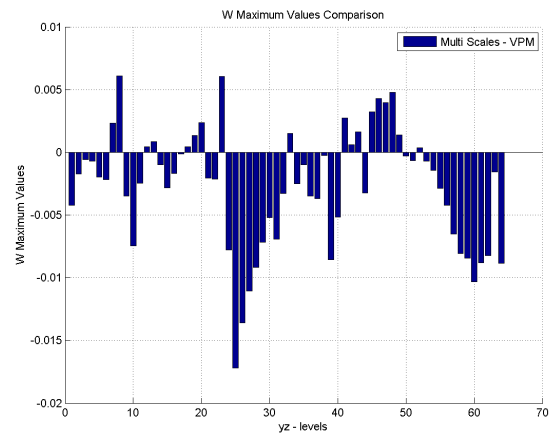


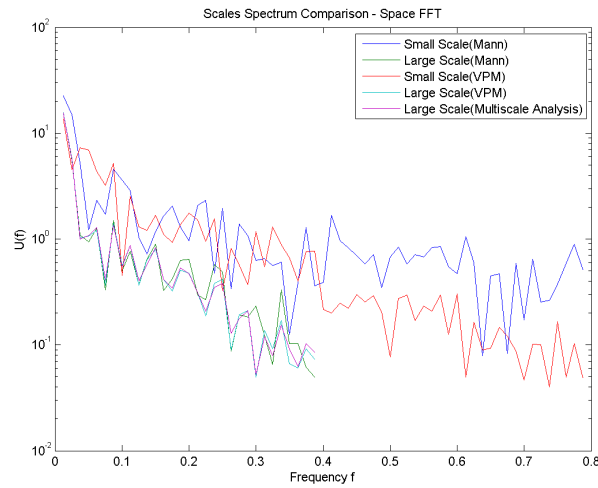
Σχήμα 3.36: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 50, x = 40.0m$)

(α') *v average values comparison*(β') *v standard deviation comparison*(γ') *v minimum value comparison*(δ') *v maximum value comparison***Σχήμα 3.37:** Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας (*Timestep* = 50)

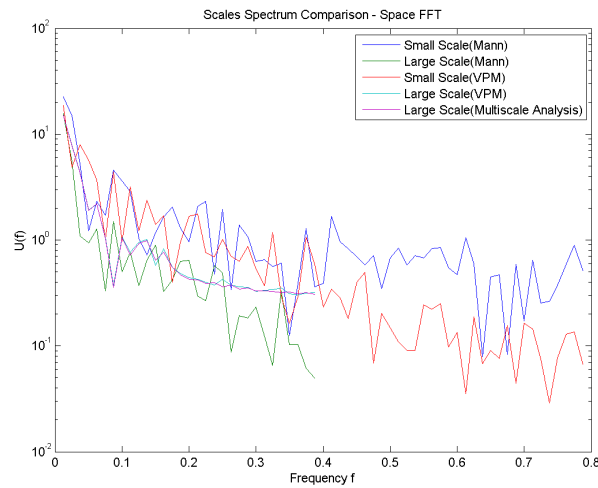


Σχήμα 3.38: Πεδίο Ταχύτητας ($Timestep = 50, x = 40.0m$)

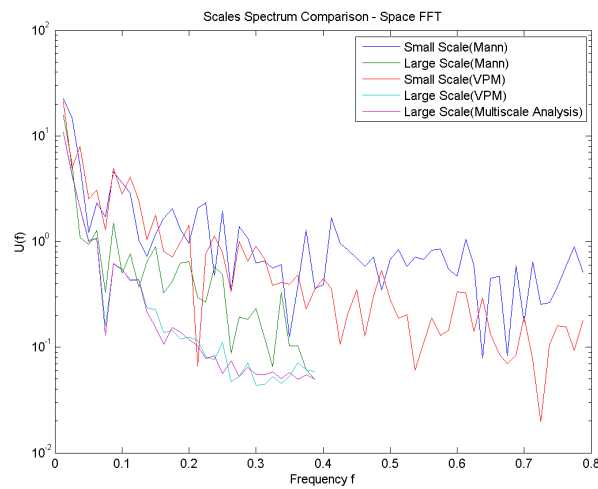
(α') *w average values comparison*(β') *w standard deviation comparison*(γ') *w minimum value comparison*(δ') *w maximum value comparison*Σχήμα 3.39: Στατιστικά Μεγέθη Πεδίου Ταχύτητας ($Timestep = 50$)



(α') U velocity component in frequency domain (Timestep=2)

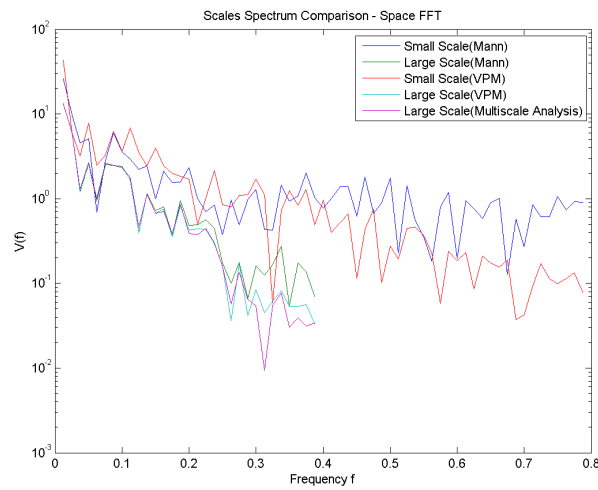


(β') U velocity component in frequency domain (Timestep=26)

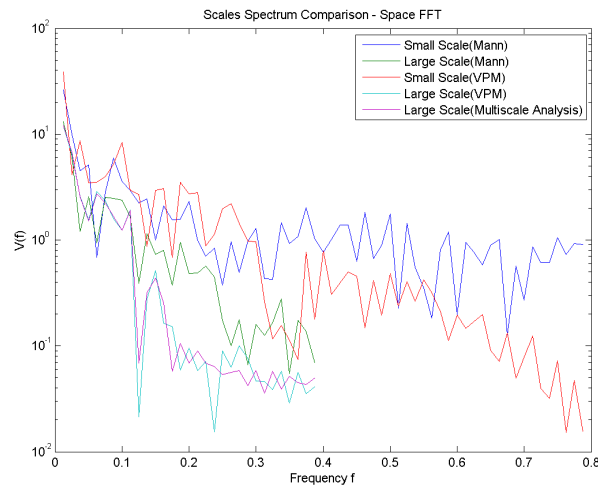


(γ') U velocity component in frequency domain (Timestep=50)

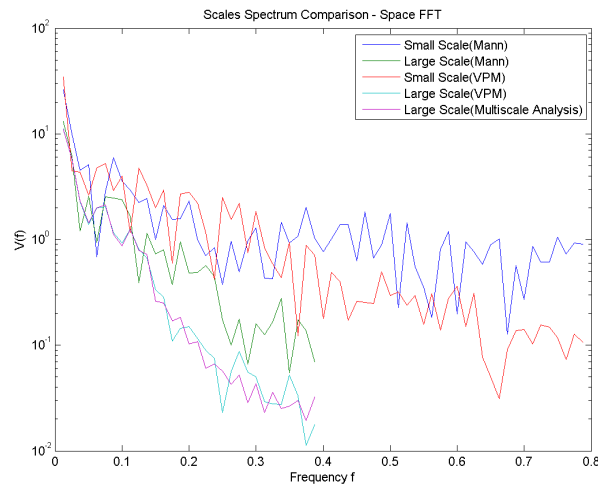
Σχήμα 3.40: Fast Fourier Transform on Large Scale's Velocity Components



(α') V velocity component in frequency domain (Timestep=2)

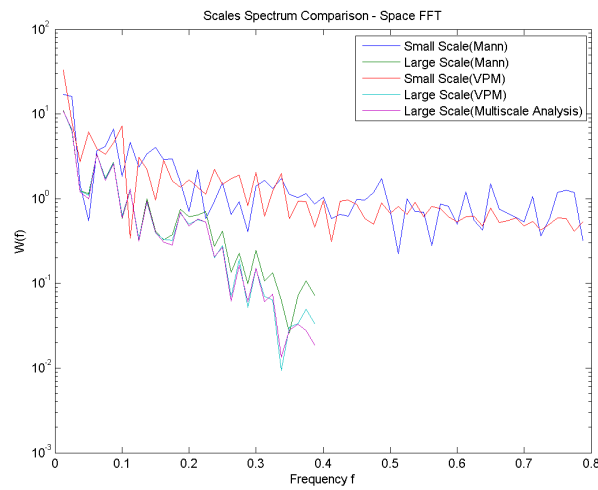


(β') V velocity component in frequency domain (Timestep=26)

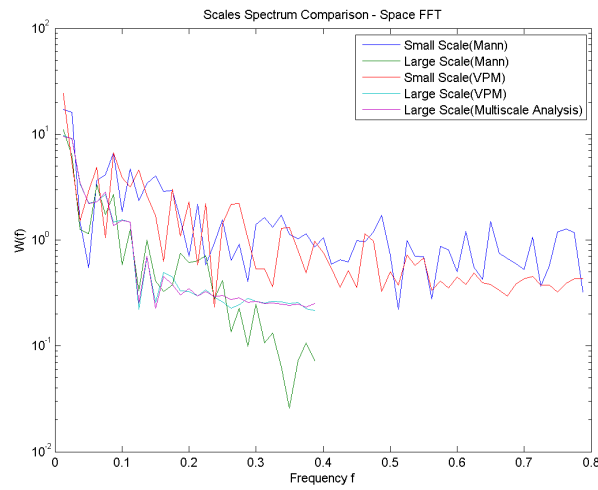


(γ') V velocity component in frequency domain (Timestep=50)

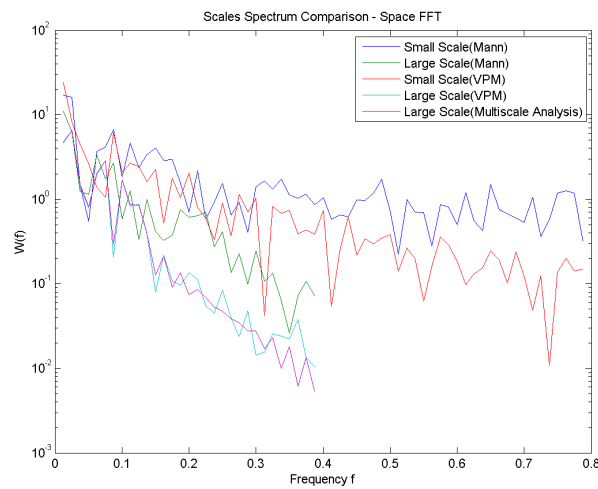
Σχήμα 3.41: Fast Fourier Transform on Large Scale's Velocity Components



(α') W velocity component in frequency domain (Timestep=2)



(β') W velocity component in frequency domain (Timestep=26)



(γ') W velocity component in frequency domain (Timestep=50)

Σχήμα 3.42: Fast Fourier Transform on Large Scale's Velocity Components

3.3.4 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

1. Στατιστικά Διαγράμματα

α'. Μέση Τιμή (Average Value)

- Παρατηρούμε ότι η διαφορά των μέσω τιμών των v, w έχει την ίδια τάξη μεγέθους με αυτή των μέσω τιμών της u , σε αντίθεση με ότι παρατηρήσαμε για τις στροβιλότητες στην πορηγούμενη εκδοχή της μεθόδου.
- Η διαφορά των μέσω τιμών της u συνιστώσας παρουσιάζει μία μικρή μείωση συναρτήσει του χρόνου. Ταυτόχρονα όμως λαμβάνει θετικές τιμές σχεδόν σε όλα τα επίπεδα $-yz$ ακόμα και στο 50ο χρονικό βήμα. Αυτό συνεπάγεται ότι στην κατεύθυνση της ροής, η μέση τιμή της ταχύτητας, που προέκυψε από την Ανάλυση των Πολλαπλών Κλιμάκων είναι σταθερά, αν και με μικρή διαφορά ($\sim 10^{-6}$, μεγαλύτερη από τη μέση τιμή το πεδίου που εξήχθη από τον κώδικα VPM, χωρίς δηλαδή να έχει ληφθεί υπόψιν η πληροφορία που φέρει η μικρή κλίμακα. Το γεγονός αυτό είναι ενθαρρυντικό καθώς το πεδίο που προκύπτει από την ανάλυσή μας έχει την τάση να "παρακολουθεί" καλύτερα το πεδίο ροής της μικρής κλίμακας συναρτήσει του χρόνου. Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι η επίδραση των επιπλέον όρων της εξίσωσης της στροβιλότητας μειώνεται όσο το φαινόμενο εξελίσσεται χρονικά όπως δείχνει και η μείωση του εύρους των διαφορών ανάμεσα στα δύο πεδία.
- Η διαφορά των μέσω τιμών της $-y$ συνιστώσας του πεδίου της ταχύτητας v τείνει σε θετικές τιμές σε ολόένα και περισσότερα επίπεδα, κάθετα στον άξονα της ροής, όσο το φαινόμενο εξελίσσεται χρονικά.
- Όσον αφορά τώρα στις μέσες τιμές της w δεν παρατηρείται κάποια σημαντική διαφοροποίηση στη μεταξύ τους σχέση όπως στις άλλες δύο συνιστώσες.

β'. Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation)

- Η διαφορές των τυπικών αποκλίσεων ανάμεσα στις u, v, w συνιστώσες των δύο πεδίων θα μπορούσαμε να πούμε ότι διατηρούν ένα σταθερό προφίλ στο χρόνο και μάλιστα λαμβάνουν κατά βάση αρνητικές τιμές της τάξεως του $\sim 10^{-3}$. Παρελθόντος δηλαδή του χρόνου, η διασπορά γύρω από τη μέση τιμή του πεδίου που προκύπτει από την ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων δεν παρουσιάζει κάποια σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση με το πεδίο που προέκυψε από τον κώδικα vpm.

γ'. Μέγιστα (Maximum) και Ελάχιστα (Minimum)

Σχετικά τώρα με τις διαφορές των μεγίστων και των ελαχίστων ανάμεσα στις δύο "εκδοχές" του πεδίου της ταχύτητας της μεγάλης κλίμακας, παρατηρούμε ότι οι διαφορές αυτές φθίνουν συναρτήσει του χρόνου χωρίς να έχουν όμως κάποια άλλη συμπεριφορά ή περιοδικότητα που θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε και να αναλύσουμε.

2. Συγκρητικές Απεικονίσεις των δύο Πεδίων

Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις του πεδίου της ταχύτητας στη θέση $x = 40.0m$ για κάθε ένα από τα επιλεχθέντα χρονικά βήματα μπορούμε να διακρίνουμε ότι η υπολογιστική διαδικασία λειτουργεί ως φίλτρο και σε αυτήν την εκδοχή της μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσαμε να πούμε ότι ομαλοποιεί τις διαφορές μεταξύ της μικρής και της μεγάλης κλίμακας όπως αυτές προέκυψαν από τον κώδικα `vrn`. Επίσης από τα χρώματα των γραφικών παραστάσεων αυτών παρατηρούμε μία διάχυση των δινών. Τα συμπεράσματα αυτά βέβαια δεν αποτυπώνονται στα στατιστικά διαγράμματα των διαφορών της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και των μεγίστων ελαχίστων των δύο "εκδοχών" του πεδίου της στροβιλότητας της μεγάλης κλίμακας. Αυτή η αποτύπωση δεν θα μπορούσε άλλωστε να είναι εφικτή καθώς ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών για κάθε επίπεδο yz του πεδίου ροής, ολοκληρώνει ουσιαστικά τα αποτελέσματα της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων και του `vrn`.

3. FFT Διαγράμματα

Παρατηρώντας τα διαγράμματα με τους μετασχηματισμούς Fourier των ταχυτήτων των δύο κλιμάκων, συμπεραίνουμε ότι η διαφορά του φάσματος των δύο κλιμάκων εντοπίζεται κυρίως στις μεγάλες συχνότητες της τύρβης. Η απώλεια της πληροφορίας μάλιστα που υπάρχει στη μεγάλη κλίμακα σε σχέση πάντα με τη μικρή, γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη όσο το φαινόμενο εξελίσσεται (50ο χρονικό βήμα). Επίσης, η μεγάλη κλίμακα, δεν μπορεί καν να αναπαράξει τις συχνότητες της τύρβης του πεδίου που είναι μεγαλύτερες από $f = 0.4$. Αυτό βέβαια είναι αναμενόμενο καθώς ο μετασχηματισμός Fourier έχει εφαρμοστεί στην κατεύθυνση της ροής και ο λόγος ανάμεσα στο πλήθος των δύο δειγμάτων είναι ίσος με δύο (128/64). Παρόλα αυτά, το ενεργειακό φάσμα που προκύπτει με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων βρίσκεται σταθερά πάνω από αυτό του πεδίου που προέκυψε με τον κώδικα `vrn`. Η απώλεια δηλαδή της πληροφορίας που παρατηρείται στη μεγάλη κλίμακα, διορθώνεται ή καλύτερα "ελαχιστοποιείται" με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι η επίδραση των επιπλέον όρων στην εξίσωση μεταφοράς της στροβιλότητας γίνεται λιγότερο αισθητή με την πάροδο του χρόνου. Θα μπορούσαμε όμως συγκρατημένα να πούμε ότι η μέθοδος αυτή προσεγγίζει βελτιωμένα το πεδίο ροής της μικρής κλίμακας. Διαπιστώνεται ότι η διαδικασία «φιλτράρει» τα peaks των διαφορών των δύο κλιμάκων. Επίσης, η δεύτερη εκδοχή της μεθόδου (Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων σε Πραγματικό Χρόνο) δίνει παρόμοια αλλά ελαφρώς καλύτερα, όπως ήταν αναμενόμενο, αποτελέσματα από την πρώτη. Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν, ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου είναι ενθαρρυντικά. Θα χρειαζόμασταν όμως περισσότερα επίπεδα (κλίμακες) αλλά και περισσότερο χρόνο στην ανάλυσή μας (εν προκειμένω τουλάχιστον 128 χρονικά βήματα) για εξάγουμε πιο ασφαλή συμπεράσματα και βελτιωμένα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Brand, L. *Advanced Calculus*. Cincinnati, 1955.
- [2] Τσαγγάρης, Σ. *Μηχανική των Ρευστών*. Αθήνα, 2005.
- [3] Μπεργελές, Γ. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Αθήνα, 2006.
- [4] Davidson, L. *Fluid Mechanics, Turbulent Flow and Turbulence Modeling*. Sweden, 2012.
- [5] Bergdorf, M., Koumoutsakos, P. *A Lagrangian Particle-Wavelet Method*. Switzerland, 2006.
- [6] Yokota, R., Sheel, T.K., Obi, S. *Calculation of Isotropic Turbulence Using a Pure Lagrangian Vortex Method*. Japan, 2007.
- [7] Μαθιουλάκης, Δ. *Μηχανική Ρευστών II (Σημειώσεις)*. Αθήνα, 2006
- [8] Fassianos, G., Panaras, A., Voutsinas, S. *Awiator Report*. Athens, 2003.
- [9] Papadakis, G. *Development of a Hybrid Compressible Vortex Particle Method and Application to External Problems Including Helicopter Flows*. Athens, 2014.
- [10] Beale, J.T., Majda, A. *High Order Accurate Vortex Methods with Explicit Velocity Kernels*. U.S.A, 1983.
- [11] Cottet, G. - H., Koumoutsakos, P. *Vortex Methods: Theory and Practise*. Cambridge, 2000.
- [12] Blazek, J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Amsterdam: Elsevier, 2001.
- [13] Wesseling, Pieter. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 2001.
- [14] Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge UP, 2005.
- [15] Versteeg, H. K., W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Harlow: Longman, 1996.

-
- [16] Tannehill, John C., Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Washington, DC: Taylor and Francis, 1997.
-