

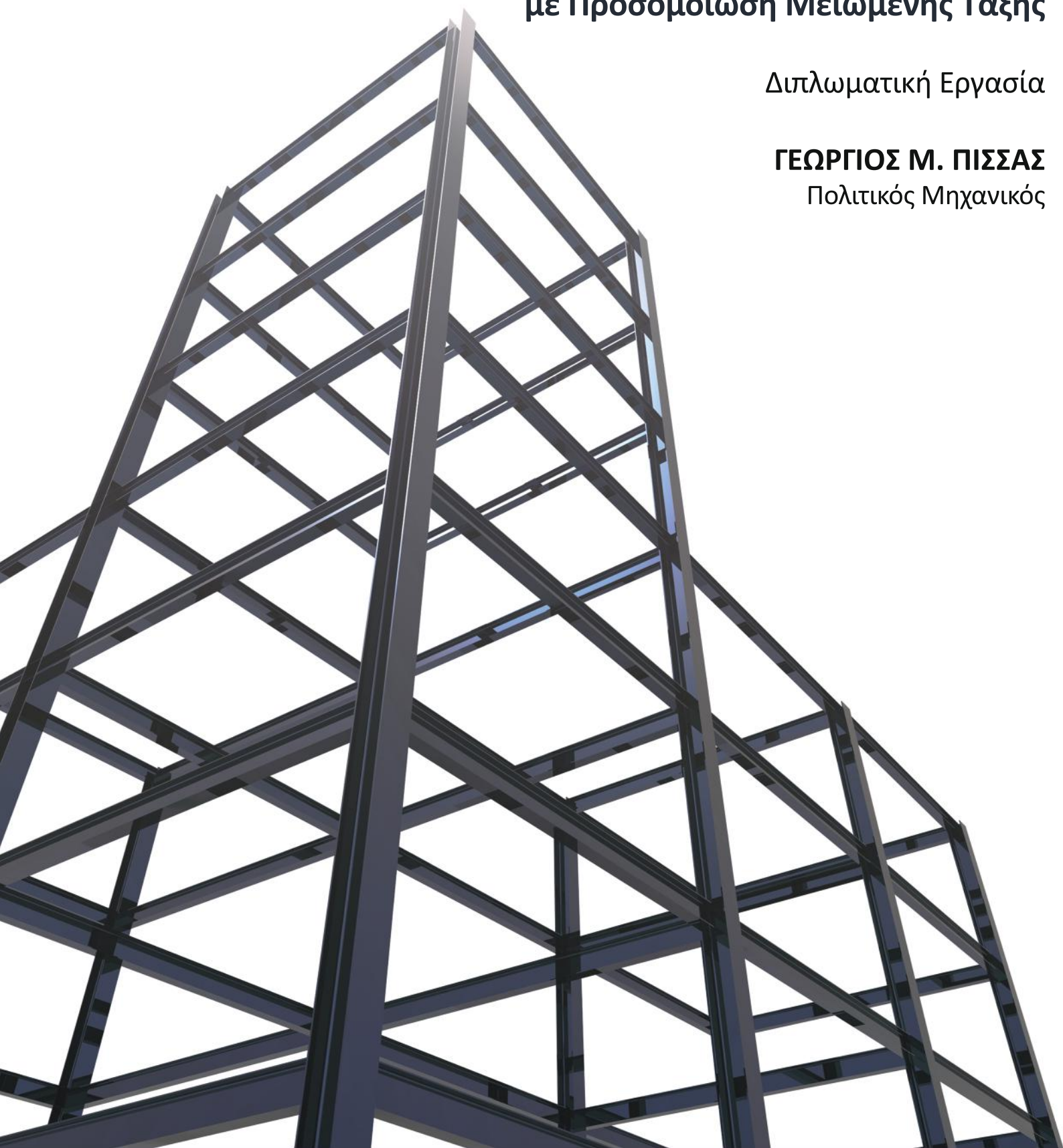


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών με Προσομοίωση Μειωμένης Τάξης

Διπλωματική Εργασία

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Μ. ΠΙΣΣΑΣ
Πολιτικός Μηχανικός



Επιβλέπων: Σάββας Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2021

Copyright ©–All rights reserved Γεώργιος Μ. Πίσσας, 2021.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας αυτής, κ. Σάββα Τριανταφύλλου, που μου έδωσε την ευκαιρία να εκπονήσω την παρούσα διπλωματική. Η καθοδήγηση, εμπύχωση και η έμπρακτη συνεισφορά του σε όλα τα στάδια της εργασίας ήταν ανεκτίμητη. Δεδομένου ότι η παρούσα εργασία σηματοδοτεί και το τέλος των φοιτητικών μου χρόνων, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους και συμφοιτητές μου με τους οποίους περάσαμε μαζί τα χρόνια αυτά, μοιραστήκαμε εμπειρίες, συνεργαστήκαμε και ανταλλάξαμε ιδέες. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ερρίκο για τη βοήθεια του με το εξώφυλλο της εργασίας. Ακόμη, ευχαριστώ την Άννα, για την υποστήριξή της όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, τους γονείς μου και τον αδερφό μου για την υποστήριξη και καθοδήγησή τους, σε όλη μου τη ζωή.

Περίληψη

Η δυναμική ανάλυση μεγάλων και πολύπλοκων κατασκευών υπό σεισμική διέγερση αποτελεί μια υπολογιστικά ακριβή διαδικασία, ειδικά υπό καθεστώς μη γραμμικότητας. Είναι λοιπόν θέμα μείζονος σημασίας η ανάπτυξη νέων μεθόδων προσομοίωσης. Η Προσομοίωση Μειωμένης Τάξης, η προσέγγιση, δηλαδή, υπολογιστικών προσομοιωμάτων μεγάλης διάστασης με προσομοιώματα σημαντικά μικρότερης διάστασης, αποτελεί μια ελκυστική επιλογή για την επίτευξη χαμηλότερου υπολογιστικού κόστους.

Η παρούσα διπλωματική εργασία, πραγματεύεται τη μεθοδολογική παρουσίαση, εφαρμογή και διερεύνηση της αποδοτικότητας της μεθόδου *Ορθή Ορθογωνική Παραγοντοποίηση* (POD) στη δυναμική ανάλυση τρισδιάστατων πλαισιωτών κατασκευών υπό σεισμική διέγερση. Προκύπτει ότι με βάση ένα σχετικά μικρό ποσοστό της απόκρισης της κατασκευής σε μία αντιπροσωπευτική διέγερση, μπορεί να «κατασκευαστεί» ένα Προσομοίωμα Μειωμένης Τάξης (ROM), το οποίο προσεγγίζει την απόκριση του συστήματος για όλη τη διάρκεια της διέγερσης, με μεγάλη ακρίβεια και ταυτόχρονη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Η διαδικασία δόμησης αυτού του ROM επιμερίζεται σε τρία στάδια: (1) Προσομοίωση του Προσομοιώματος Πλήρους Τάξης (FOM) για ένα μικρό χρονικό διάστημα της διέγερσης και απόκτηση των δεδομένων εκπαίδευσης (στιγμιότυπων). (2) Εφαρμογή μηχανικής μάθησης στα δεδομένα, με χρήση της Παραγοντοποίησης Ιδιαζουσών Τιμών (SVD), για τον υπολογισμό ενός, μικρής διάστασης, υπόχωρου που μπορεί να αναπαράγει την κύρια συμπεριφορά του συστήματος με ακρίβεια. (3) Προβολή των εξισώσεων κίνησης του συστήματος σε αυτόν τον υπόχωρο. Στη συνέχεια, οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης του ROM ολοκληρώνονται σε όλη τη διάρκεια της διέγερσης.

Η εφαρμοσιμότητα και η αποδοτικότητα της μεθόδου POD αξιολογούνται μέσα από την επίλυση αριθμητικών παραδειγμάτων πλαισιωτών κατασκευών στον χώρο, τόσο για γραμμική όσο και μη γραμμική ανάλυση. Για τη διενέργεια όλων των αναλύσεων αναπτύχθηκε κώδικας MATLAB. Για τη γραμμική περίπτωση, τα αποτελέσματα συγκρίνονται και με αυτά της εφαρμογής της, πλέον διαδεδομένης, ιδιομορφικής ανάλυσης. Το κύριο πλεονέκτημα της POD σε σχέση με την ιδιομορφική ανάλυση δεν είναι μόνο η υψηλότερη ακρίβεια με χρήση λιγότερων μορφών, αλλά και η εφαρμοσιμότητα της σε μη γραμμικά προβλήματα. Για τις μη γραμμικές αναλύσεις, εξετάζεται η περίπτωση μη γραμμικότητας υλικού χρησιμοποιώντας στοιχεία δοκού συγκεντρωμένης πλαστικότητας με υστερητική προσομοίωση Bouc-Wen. Επίσης, διερευνάται εάν το ROM που προέκυψε από τα δεδομένα μιας αντιπροσωπευτικής διέγερσης, αποδίδει ακριβή αποτελέσματα για ένα σύνολο άλλων διεγέρσεων. Τόσο στις γραμμικές, όσο και στις μη γραμμικές αναλύσεις, προκύπτει από τα αποτελέσματα, ότι η προσέγγιση της απόκρισης παρουσιάζει μεγάλη ακρίβεια (σε όρους μέσου τετραγωνικού σφάλματος) και απαιτεί πολύ χαμηλότερους χρόνους υπολογισμού από αυτούς της ανάλυσης του προσομοιώματος πλήρους τάξης (FOM).

Από την παρούσα εργασία, προκύπτουν συμπεράσματα που αφορούν στην ακρίβεια, τη μείωση διάστασης του προβλήματος και το υπολογιστικό κέρδος, που επιτυγχάνονται με την εφαρμογή της μεθόδου POD.

Λέξεις Κλειδιά

Μείωση Τάξης Προσομοιώματος, Προσομοίωμα Μειωμένης Τάξης, Ορθή Ορθογωνική Παραγοντοποίηση (POD), Αντισεισμική Μηχανική, Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών

Abstract

Dynamic analysis of large complex structures under transient excitation is computationally taxing, especially in the presence of nonlinearities. Hence, there exists an ever increasing requirement for rapid, yet high fidelity, dynamic analysis procedures. Model Order Reduction (MOR), i.e. the approximation of large computational models with significantly smaller ones, is an attractive option towards mitigating this problem of high computational costs.

The main purpose of this diploma thesis is the methodological study and application of the Proper Orthogonal Decomposition (POD) method upon 3D frame structures under transient earthquake loading. It is shown that by analyzing a relatively small portion of the structure's response to a representative excitation (snapshots), it is possible to assemble a Reduced Order Model (ROM), which yields an approximation of the system's response to the entire earthquake, that is both accurate and time-saving. The assembly of this ROM can be broken down into 3 steps: 1) Simulation of the Full Order Model (FOM) over a small portion of the excitation and acquisition of the training dataset (snapshots). 2) Machine learning on the snapshots by means of the method from the field of statistics, the Singular Value Decomposition (SVD), in order to compute a low dimensional subspace that should describe the main behavior of the system well. 3) Linear projection of the equations of motion of the system upon this subspace. Next, the reduced equations of motion of the ROM are integrated over the whole duration of the excitation.

The practicability and performance assessment of the POD method are demonstrated on numerical examples of spatial frame structures for both linear and nonlinear analyses. MATLAB code has been developed for the execution of all analyses. For the linear case, the results are compared to those obtained by the classical method of modal analysis and mode truncation. The main advantages of the POD over the modal truncation method, is its high achieved accuracy with the use of fewer modes and its applicability to nonlinear systems. For the nonlinear analyses, the case of material nonlinearity is considered, using concentrated plasticity beam elements with a Bouc-Wen model of hysteresis. The case of assembling the ROM using snapshots of representative earthquakes and then employing it in a totally different set of excitations is also examined. In both linear and nonlinear cases, the results demonstrate that the approximation of the system as reduced by the POD method is very accurate (by mean square error estimation) and at a fraction of the computational cost of the FOM simulation.

Throughout this work, several conclusions are drawn regarding the accomplished accuracy, dimensionality reduction and computational gain from the application of the POD method.

Keywords

Model Order Reduction, Reduced Order Model, Proper Orthogonal Decomposition (POD), Earthquake Engineering, Structural Dynamics

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1	Περίληψη του Προβλήματος	1
1.2	Σύντομη Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	2
1.3	Αντικείμενο της Εργασίας	3
1.4	Μεθοδολογία	4
1.5	Δομή της Διπλωματικής	4
2	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΥΠΟ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ	5
2.1	Εισαγωγή	5
2.2	Εξίσωση Κίνησης	5
2.2.1	Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Χρονοϊστορίας	6
2.2.2	Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Χρονοϊστορίας	6
2.3	Απευθείας Αριθμητική Ολοκλήρωση της Εξίσωσης Κίνησης	7
2.3.1	Ακρίβεια και Ευστάθεια	7
2.3.2	Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων	7
2.3.3	Επίλυση Μη Γραμμικών Εξισώσεων	12
2.4	Τρισδιάστατο Στοιχείο Δοκού Συγκεντρωμένης Πλαστικότητας	17
2.4.1	Ελαστική Ανάλυση	19
2.4.1.1	Μητρώο Στιβαρότητας – Ελαστικές Ιδιότητες	19
2.4.1.2	Μητρώο Μάζας – Αδρανειακές Ιδιότητες	21
2.4.1.3	Μητρώο Απόσβεσης	22
2.4.2	Ανελαστική Ανάλυση	23
2.4.2.1	Μητρώο Στιβαρότητας	23
2.4.2.2	Προσομοίωση Ανελαστικής Συμπεριφοράς	24
3	ΜΕΙΩΣΗ ΤΑΞΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ - MODEL ORDER REDUCTION	27
3.1	Προβολική Μείωση Τάξης (Projective M.O.R)	27
3.2	Μέθοδος Επαλληλίας Ιδιομορφών - Modal Superposition	28
3.2.1	Μεθοδολογία	29
3.2.2	Ιδιομορφικές Μάζες	30
3.2.3	Επιλογή Πλήθους Ιδιομορφών – Διάσταση της Μειωμένης Βάσης	30
3.3	Ορθή Ορθογωνική Παραγοντοποίηση – Proper Orthogonal Decomposition (POD)	30
3.3.1	Μέθοδος των Στιγμιότυπων (Method of Snapshots)	31
3.3.2	Μεθοδολογία POD	31
3.3.3	Επιλογή Διάστασης της Μειωμένης Βάσης	33
4	ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	35
4.1	Διαδικασία Εφαρμογής της Μεθόδου POD	35
4.2	Σεισμικές Καταγραφές	36
4.3	Γραμμική Ανάλυση	36
4.3.1	Μονώροφο Τρισδιάστατο Πλαίσιο	36
4.3.2	Πολυώροφο Τρισδιάστατο Πλαίσιο	39
4.4	Μη Γραμμική Ανάλυση	49
4.4.1	Πολυώροφο Τρισδιάστατο Πλαίσιο	49

5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ	59
5.1	Συμπεράσματα	59
5.2	Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	60

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Υπολογιστικό κόστος με και χωρίς εφαρμογή MOR (σχήμα από [13])	2
2.1	Μέθοδος Newmark	10
2.2	Newton-Raphson	13
2.3	Επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης	18
2.4	Αξονική (αριστερά) και στρεπτική (δεξιά) ισορροπία στοιχείου απειροστού μήκους dx	18
2.5	Στοιχείο δοκού με ανελαστικά ελατήρια στους κόμβους αρχής και πέρατος	23
2.6	Προσομοίωση των ανελαστικών ελατηρίων με στοιχεία δοκού μηδενικού μήκους	24
2.7	Παράμετροι συμπεριφοράς του υστερητικού μοντέλου.	25
3.1	Ιδιάζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων ενός μονώροφου πλαισίου	32
3.2	Καθορισμός μιας τιμής ανοχής για την επιλογή των k πρώτων ιδιάζουσών τιμών	34
4.1	Πλάνο εκτέλεσης των αναλύσεων	35
4.2	Γεωμετρία μονώροφου φορέα	36
4.3	Πάνω αριστερά: Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση x , Πάνω δεξιά: Απόκριση FOM, Κάτω αριστερά: Ιδιάζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων, Κάτω δεξιά: Ιδιομορφικές μάζες	37
4.4	Χρονοϊστορία απόκρισης του FOM κατά τη διεύθυνση x	38
4.5	Αριστερά: L_2 νόρμα του σφάλματος συναρτήσεως της διάρκειας λήψης στιγμιότυπων, Δεξιά: L_2 νόρμα του σφάλματος συναρτήσεως της τιμής ανοχής των ιδιάζουσών τιμών	38
4.6	Γεωμετρία πολυώροφου φορέα	39
4.7	Αριστερά: Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση x , Δεξιά: Απόκριση FOM	39
4.8	Αριστερά: Ιδιάζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων, Δεξιά: Ιδιομορφικές μάζες	40
4.9	Αριστερά: Σφάλματα της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD (Περίπτωση 1), Δεξιά: Λόγος του σφάλματος POD προς το σφάλμα της ιδιομορφικής ανάλυσης	40
4.10	Πάνω: Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης (Περίπτωση 1), Κάτω: Μεγέθυνση της απόκρισης στο διάστημα 15-20 sec	40
4.11	Αριστερά: Σφάλματα της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD (Περίπτωση 2), Δεξιά: Λόγος του σφάλματος POD προς το σφάλμα της ιδιομορφικής ανάλυσης	41
4.12	Πάνω: Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης (Περίπτωση 2), Κάτω: Μεγέθυνση της απόκρισης στο διάστημα 15-20 sec	41
4.13	Αριστερά: Σφάλματα της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD (Περίπτωση 3), Δεξιά: Λόγος του σφάλματος POD προς το σφάλμα της ιδιομορφικής ανάλυσης	42
4.14	Πάνω: Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης (Περίπτωση 3), Κάτω: Μεγέθυνση της απόκρισης στο διάστημα 15-20 sec	42
4.15	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΑ (2019)	43
4.16	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΘΗΝΑ (1999)	44
4.17	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: IMPERIAL VALLEY (1979)	45
4.18	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: KOBE (1995)	46
4.19	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΛΕΥΚΑΔΑ (2015)	47
4.20	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: NORTHBRIDGE (1994)	48
4.21	Γεωμετρία πολυώροφου μη συμμετρικού φορέα	49

4.22	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΣΑΜΟΣ (2020)	51
4.23	ΣΑΜΟΣ (2020): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀	51
4.24	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΑ (2019)	52
4.25	ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΑ (2019): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀ (στο διάστημα 15-43sec)	52
4.26	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΘΗΝΑ (1999)	53
4.27	ΑΘΗΝΑ (1999): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀	53
4.28	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: IMPERIAL VALLEY (1979)	54
4.29	IMPERIAL VALLEY (1979): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀	54
4.30	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΚΟΒΕ (1995)	55
4.31	ΚΟΒΕ (1995): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀	55
4.32	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΛΕΥΚΑΔΑ (2015)	56
4.33	ΛΕΥΚΑΔΑ (2015): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀ (στο διάστημα 15-33 sec)	56
4.34	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: NORTHRIDGE (1994)	57
4.35	NORTHRIDGE (1994): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM ₂₀ , ROM ₁₀₀	57

Κατάλογος πινάκων

4.1	Δεδομένα σεισμικών καταγραφών	36
4.2	Εμβαδόν και ροπές αδράνειας δοκών και στύλων του φορέα	36
4.3	Μέτρο ελαστικότητας, πυκνότητα και λόγος Poisson του υλικού	37
4.4	Χρόνοι ανάλυσης μονώροφου πλαισίου	37
4.5	Χρόνοι ανάλυσης (sec) πολυώροφου πλαισίου	42
4.6	Χρόνοι ανάλυσης (sec) πολυώροφου πλαισίου για όλες τις διεγέρσεις	49
4.7	Χρόνοι μη γραμμικής ανάλυσης πολυώροφου πλαισίου	50
4.8	L_2 νόρμες των σφαλμάτων των ROM ₂₀ και ROM ₁₀₀	50

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Περίληψη του Προβλήματος

Η αξιολόγηση της χρονοιστορίας απόκρισης μίας κατασκευής αποτελεί ένα από τα βασικά θέματα της δυναμικής των κατασκευών (structural dynamics) εν γένει και της αντισεισμικής μηχανικής ειδικότερα (earthquake engineering). Σήμερα, με τα διαθέσιμα εργαλεία αριθμητικής ανάλυσης, η συμπεριφορά σύνθετων κατασκευών και συστημάτων μπορεί να προβλεφθεί πιο αποδοτικά και αποτελεσματικά από ποτέ άλλοτε. Εντούτοις, παρά την εκθετική αύξηση της απόδοσης των υπολογιστών τα τελευταία χρόνια [8], η ανάγκη, για πιο γρήγορα και πιο ακριβή εργαλεία προσομοίωσης, παραμένει αδιάσπαστη. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Qu [9], ενώ η ικανότητα των υπολογιστών διπλασιάζεται κάθε 18 μήνες (Moore's Law), η ζήτηση για περισσότερο αποθηκευτικό χώρο και υψηλότερες ταχύτητες των υπολογιστών πάντα θα υπερτερεί των τρεχουσών δυνατοτήτων των υπολογιστικών συστημάτων, όπως έχουν δείξει τα τελευταία 50 χρόνια αναλύσεων με πεπερασμένα στοιχεία.

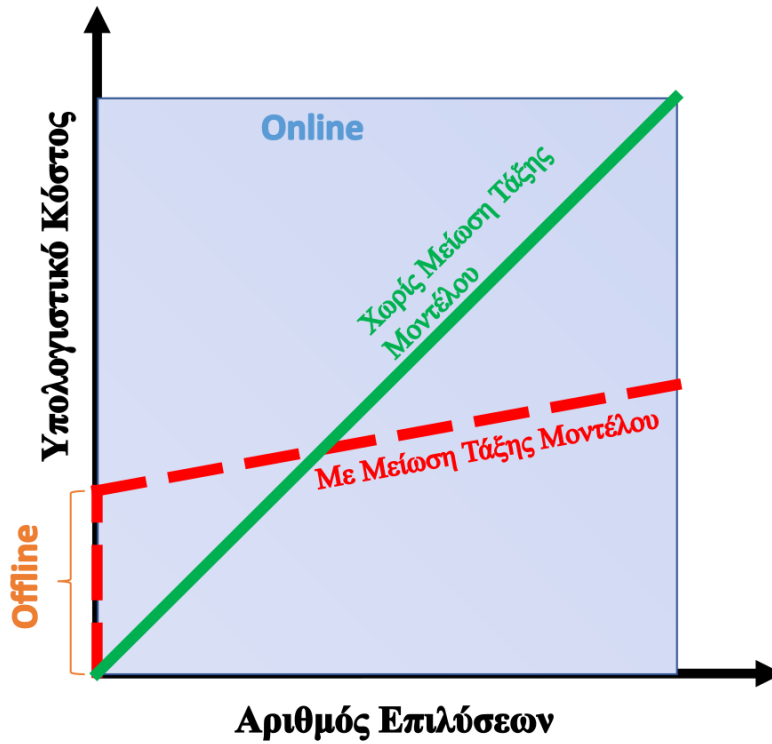
Για να ξεπεραστούν τα υπολογιστικά «εμπόδια» που τίθενται από την ανάπτυξη του υλισμικού (hardware development) των υπολογιστών, απαιτούνται καλύτεροι αριθμητικοί αλγόριθμοι, που παρέχουν ταυτόχρονα 1) υψηλή ακρίβεια και 2) χαμηλά υπολογιστικά «κόστη». Μια προσέγγιση¹, ώστε να ικανοποιηθούν αυτοί οι αντικρουόμενοι στόχοι, είναι οι τεχνικές Μείωσης Τάξης Προσομοιώματος (Model Order Reduction – MOR). Στα πλαίσια αυτής, το μαθηματικό προσομοίωμα πλήρους τάξης (Full Order Model – FOM), προσεγγίζεται από ένα προσομοίωμα μειωμένης τάξης (Reduced Order Model – ROM, surrogate model), χαμηλότερης υπολογιστικής πολυπλοκότητας (computational complexity) [47]. Η στρατηγική που ακολουθείται είναι η «κατανάλωση» υπολογιστικών πόρων για την κατασκευή του προσομοιώματος μειωμένης τάξης (ROM). Η διαδικασία αυτή κατατάσσεται στο offline² κόστος, όπως φαίνεται και στο Σχ. 1.1. Τότε, το online κόστος του ROM (που αφορά στους υπολογισμούς και στις διαδικασίες που αποδίδουν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης), μειώνεται σημαντικά, σε σύγκριση με την ανάλυση του προσομοιώματος πλήρους τάξης (FOM).

Τα πλεονεκτήματα του μειωμένου online κόστους και κατά συνέπεια της MOR έχουν εφαρμογή σε διάφορους κλάδους του μηχανικού. Σε περιπτώσεις εφαρμογών που απαιτούν υπολογισμούς σε πραγματικό χρόνο (real time simulations – control engineering), για παράδειγμα, χαμηλά online κόστη είναι πολύ σημαντικά για συστήματα ελέγχου σε πραγματικό χρόνο (real time controllers), ενώ τα offline κόστη κατά το στάδιο σχεδιασμού έχουν πολύ μικρή σημασία. Επιπλέον, σε αναλύσεις με πολλά σενάρια φόρτισης ή σε προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού (design optimization) ή ποσοτικοποίησης αβεβαιοτήτων, μέθοδοι μείωσης χρησιμοποιούνται συχνά, όταν το offline κόστος της μείωσης απαιτείται μία φορά και αποδίδει σημαντικό κέρδος σε πολλαπλές online αναλύσεις. Στη δυναμική των κατασκευών, το μαθηματικό προσομοίωμα κατασκευάζεται, συνήθως, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, μπορούν να διακριτοποιηθούν τυχούσες και συχνά πολύπλοκες γεωμετρίες με εξαιρετική ακρίβεια. Ωστόσο, η επίλυση μεγάλων και σύνθετων προβλημάτων, υπό καθεστώς μη γραμμικότητας, μπορεί να απαιτεί περιοριστικά πολύ χρόνο και υπολογιστικούς πόρους³, και μια ανάλυση υπό παραδοχές γραμμικότητας μπορεί

¹Άλλες προσεγγίσεις: απλοποίηση της φυσικής του προβλήματος, data-fitting, κ.α.

²Οι όροι online/offline cost, δεν αποδίδονται στα Ελληνικά προς αποφυγήν παρερμηνειών τους.

³Ιδιαίτερα χρονοβόρες αναλύσεις χρειάζονται όταν το χρονικό βήμα της χρονικής ολοκλήρωσης είναι πολύ μικρό.



Σχήμα 1.1: Υπολογιστικό κόστος με και χωρίς εφαρμογή MOR (σχήμα από [13])

να οδηγήσει σε υπεραπλούστευση του προβλήματος. Ακόμα και ο υπολογισμός της απόκρισης γραμμικών συστημάτων μπορεί να καταστεί δύσκολος, καθώς η παραγοντοποίηση του μητρώου στιβαρότητας είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών και τον υπολογισμό των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Επομένως, η MOR είναι ιδιαίτερα επιθυμητή, προκειμένου να γίνει πιο προσιτή η ανάλυση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

1.2 Σύντομη Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Τεχνικές μείωσης τάξης προσομοιώματος έχουν εδραιωθεί για γραμμικές δυναμικές αναλύσεις. Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί (Modal Truncation, Krylov Subspace Reduction) [13], βασιζόμενες σε εγγενείς ιδιότητες του συστήματος, όπως οι ιδιομορφές. Για μη γραμμικά συστήματα, ωστόσο, αυτές οι ιδιότητες είτε δεν υπάρχουν, είτε είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστούν. Επομένως, η εφαρμογή των μεθόδων αυτών για την περίπτωση μη γραμμικών συστημάτων δεν είναι εφικτή. Οι πλέον σύγχρονες τεχνικές MOR για περιπτώσεις μη γραμμικών συστημάτων εμπνέονται από στατιστικές μεθόδους της επιστήμης δεδομένων (data science). Σύμφωνα με αυτές, κάποια «εκπαιδευτικά» στιγμιότυπα υπολογίζονται, με χρήση του πλήρους συστήματος (FOM) και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του προσομοιώματος μειωμένης τάξης (ROM). Η εφαρμογή της MOR χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες: 1) Πρόβλημα Μειωμένης Βάσης (Reduced Basis Problem) και 2) Πρόβλημα Υπερ-μείωσης (Hyper-Reduction Problem). Στην πρώτη, ο κινηματικός διανυσματικός χώρος (ο χώρος δηλαδή στον οποίο ανήκουν όλες οι συμβατές διαμορφώσεις του συστήματος) μειώνεται, αποδίδοντας ένα μειωμένο σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων. Η δεύτερη ασχολείται με τον υπολογισμό των μη γραμμικών όρων στις μειωμένες εξισώσεις κίνησης.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, επικεντρωνόμαστε στην πρώτη κατηγορία και συγκεκριμένα στη μέθοδο: Ορθή Ορθογωνική Παραγοντοποίηση (Proper Orthogonal Decomposition - POD). Η POD είναι μια αποτελεσματική στρατηγική για να προσδιοριστεί ένα μικρό σύνολο «σημαντικών» εξισώσεων κίνησης που προσεγγίζει το πλήρες δυναμικό σύστημα (μεγάλης διάστασης) με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Αυτό επιτυγχάνεται με την κατασκευή ενός διανυσματικού υπόχωρου, μικρότερης διάστασης, στον οποίο μπορούν να προβληθούν οι αρχικές εξισώσεις, με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα.

Η μέθοδος POD έχει εφαρμογή σε πολλούς κλάδους όπως η ρευστοδυναμική, η ανεμομηχανική (wind engineering), η επεξεργασία εικόνας, η δυναμική των κατασκευών κ.α.. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε στη στατιστική από τους Kosambi [30], Karhunen [31] και Loeve [33].

Η πρώτη δημοσίευση στα πλαίσια της Δυναμικής των Κατασκευών ήταν από τους Cusumano et al. [35], στις αρχές της δεκαετίας του 1990, στην οποία μελετήθηκε πειραματικά ένας ελαστικός ταλαντωτής και εάν η δυναμική του συστήματος εμπεριέχεται στους πρώτους ορθούς ορθογωνικούς τρόπους ταλάντωσης (proper orthogonal modes). Ακολούθησαν οι Feeny και Kappagantu, [36] [37], στα τέλη της ίδιας δεκαετίας, οι οποίοι μελέτησαν τη σχέση των proper orthogonal modes με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (normal modes) και στις αρχές του 21ου αιώνα χρησιμοποίησαν τις πειραματικές διατάξεις των προηγούμενων εργασιών τους, για αριθμητικές προσομοιώσεις [38], [39]. Οι Liang et al [40] ανέλυσαν τις διάφορες εκδοχές – μεθοδολογίες της POD, δηλαδή Karhunen-Loeve Decomposition, Principal Component Analysis και Singular Value Decomposition (SVD) και τις συνέκριναν. Οι Kerschen και Golivani [41] παρουσιάζουν τη φυσική ερμηνεία των proper orthogonal modes, τη σχέση της με την SVD και ερευνήσαν την POD με βάση τα αυτοσυσχετιστικά νευρωνικά δίκτυα (autoassociative neural networks) χρησιμοποιώντας δεδομένα προσομοίωσης ενός τρισδιάστατου πλαισίου [42].

Στο πεδίο της αντισεισμικής μηχανικής, η ανάγκη να περιγραφεί ένα σύστημα μεγάλης διάστασης, με ένα μικρό σύνολο από εξισώσεις κίνησης, έχει προκαλέσει ενδιαφέρον κυρίως τις τελευταίες δύο δεκαετίες [43]. Οι Krysl et al [45] ασχολήθηκαν με την MOR για μη γραμμικές αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων. Χρησιμοποίησαν την POD ως μία μέθοδο προσέγγισης χαμηλής τάξης (low order approximation) και σημειώνουν τα πλεονεκτήματα που αφορούν στην αριθμητική ολοκλήρωση, στη βελτιστοποίηση της προσέγγισης (optimality) και στην ευρωστία (robustness) της μεθόδου. Οι Tubino et al [25] διερεύνησαν τη σεισμική διέγερση των σημείων στήριξης μιας κατασκευής και χαρακτήρισαν την POD ως ένα πολύ αποδοτικό εργαλείο για προσομοιώσεις πολύπλοκων διαδικασιών. Ο Bucher [26] εξέτασε την ευστάθεια ρητών (explicit) μεθόδων αριθμητικής χρονικής ολοκλήρωσης για μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις, μέσω περικοπής ιδιομορφών (modal truncation). Οι Gutierrez και Zaldivar [27] εξέτασαν και αυτοί το θέμα της ευστάθειας της ρητής αριθμητικής ολοκλήρωσης μέσω μεθόδων περικοπής ιδιομορφών, πιο σχετικά, όμως, με την σεισμική ανάλυση, και εφήρμοσαν την Karhunen-Loeve Decomposition, που είναι πρακτικά ταυτόσημη με την POD, για να περιγράψουν τη δυναμική συμπεριφορά μη γραμμικών συστημάτων [28].

Πιο πρόσφατα, οι Ritto et al (2010) [46] εκτίμησαν την αποδοτικότητα της POD και τη συνέκριναν με την ιδιομορφική ανάλυση (modal analysis), χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα μία ράβδο με αξονικό πεδίο μετατοπίσεων. Οι Bamer και Bucher (2012) [18] ανέπτυξαν μια στρατηγική εφαρμογής της POD για ανάλυση κατασκευών, υπό παροδική διέγερση (transient excitation), στηριζόμενων σε μονοδιάστατα στοιχεία τριβής (friction elements). Αυτή η μελέτη, ανέδειξε σημαντικά πλεονεκτήματα της POD σε συνδυασμό με τις μεθόδους ρητής (explicit) αριθμητικής χρονικής ολοκλήρωσης. Οι ίδιοι, μαζί με τον Amiri (2016) [19], παρουσίασαν ένα νέο πλάνο εφαρμογής MOR για προβλήματα σεισμικής μηχανικής.

1.3 Αντικείμενο της Εργασίας

Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η διερεύνηση της αποδοτικότητας μεθόδων μείωσης τάξης για τη δυναμική ανάλυση ραβδωτών φορέων στον χώρο. Συγκεκριμένα, επιδιώκεται η μεθοδολογική παρουσίαση, εφαρμογή και διερεύνηση της μεθόδου POD, ως μίας τεχνικής MOR, στα πλαίσια, τόσο της γραμμικής όσο και της μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης κατασκευών υπό σεισμική διέγερση. Ωστόσο, προτού μελετηθεί η περίπτωση μη γραμμικής ανάλυσης, σκόπιμο είναι να εφαρμοσθεί η POD για μείωση τάξης σε γραμμικά προσομοιώματα κατασκευών υπό σεισμική διέγερση.

Τα βασικά ερωτήματα που καλείται να απαντήσει η εργασία αυτή είναι:

1. Τι ποσοστό της συνολικής απόκρισης χρειάζεται, προκειμένου να κατασκευαστεί ένα αποδοτικό και ταυτόχρονα «οικονομικό» ROM;
2. Έχει νόημα η εφαρμογή της POD για γραμμικά προβλήματα, σε σύγκριση με την ιδιομορφική ανάλυση (Modal Analysis);

3. Ποιο το κέρδος στους χρόνους υπολογισμού, με εφαρμογή μείωσης τάξης προσομοιώματος, τόσο σε γραμμικά όσο και σε μη γραμμικά προβλήματα;
4. Μπορεί το ROM, που έχει κατασκευαστεί με τα δεδομένα μιας αντιπροσωπευτικής διέγερσης της κατασκευής, να δώσει ακριβή αποτελέσματα για μια άλλη διέγερση;

1.4 Μεθοδολογία

Στα πλαίσια της εργασίας, η εφαρμογή της POD επιμερίζεται στα εξής στάδια:

1. Συλλογή Δεδομένων Εκπαίδευσης: Προσομοίωση του FOM και αποθήκευση των δεδομένων σε μητρώα.
2. Μηχανική Μάθηση: Επεξεργασία των δεδομένων – ανίχνευση ενός μικρής διάστασης υπόχωρου, ο οποίος προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια τα δεδομένα, μέσω της SVD.
3. Μείωση Τάξης Προσομοιώματος: Προβολή των εξισώσεων που διέπουν το σύστημα σε αυτόν τον υπόχωρο, κατασκευή του ROM και προσομοίωση του συστήματος με μειωμένο πλέον κόστος επίλυσης.

Πρώτα υπολογίζονται στιγμιότυπα της κατασκευής (snapshots), ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κίνησης για ένα μικρό χρονικό διάστημα της διέγερσης και οργανώνονται στο μητρώο στιγμιότυπων (snapshot matrix). Από αυτά, κατασκευάζεται το προσομοίωμα μειωμένης τάξης της κατασκευής (reduced order model – ROM). Έπειτα, πραγματοποιείται χρονική ολοκλήρωση των μετασχηματισμένων εξισώσεων κίνησης του ROM για όλη τη χρονική διάρκεια της σεισμικής διέγερσης και τέλος οι γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος μετασχηματίζονται πίσω στον αρχικό χώρο του προβλήματος.

Για την επίτευξη των παραπάνω, συντάχθηκαν προγράμματα σε γλώσσα MATLAB. Ο κώδικας αρχικά δέχεται ως δεδομένα εισόδου τη γεωμετρία του φορέα (κόμβοι και στοιχεία) και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Συνθέτει τα μητρώα στιβαρότητας, μάζας και απόσβεσης του φορέα. Στη συνέχεια γίνεται ανάγνωση του επιταχυνσιογραφήματος του εκάστοτε σεισμού. Ακολουθώς, εκτελείται γραμμική ή μη γραμμική δυναμική ανάλυση και υπολογίζεται η απόκριση του προσομοιώματος πλήρους τάξης (FOM) με απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης με τη μέθοδο Newmark. Με χρήση ενός μέρους της απόκρισης που υπολογίστηκε (στιγμιότυπα) εκτελείται η διαδικασία υπολογισμού του προσομοιώματος μειωμένης τάξης (ROM) και εκτελείται πάλι ο αλγόριθμος Newmark για την επίλυση των εξισώσεων κίνησης μειωμένης τάξης. Τέλος τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά της ανάλυσης του προσομοιώματος πλήρους τάξης.

1.5 Δομή της Διπλωματικής

Μετά από αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, στο Κεφάλαιο 2 παρέχεται το θεωρητικό υπόβαθρο και οι βασικοί αλγόριθμοι και διαδικασίες της δυναμικής των κατασκευών, που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας. Στο Κεφάλαιο 3, εισάγεται η μείωση τάξης προσομοιώματος (MOR) και αναλύεται η βασική θεωρία για την ιδιομορφική ανάλυση και την POD. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η μείωση τάξης προσομοιώματος με χρήση της POD μέσα από κάποια αριθμητικά παραδείγματα, για περίπτωση γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης και καταγράφονται τα αποτελέσματα. Για την περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης, γίνεται σύγκριση της POD με την ιδιομορφική ανάλυση. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παραθέτονται τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΥΠΟ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

2.1 Εισαγωγή

Η κοινή πρακτική για τα συνήθη προβλήματα πολιτικού μηχανικού είναι να γίνονται αναλύσεις υπό την παραδοχή γραμμικά ελαστικής συμπεριφοράς της κατασκευής. Αυτό αποσκοπεί στη μείωση του υπολογιστικού κόστους και στον ευκολότερο έλεγχο της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, η δυναμική απόκριση, των πραγματικών κατασκευών, υπό την επίδραση έντονων διεγέρσεων, παρουσιάζει σημαντική μη γραμμική συμπεριφορά.

Ο όρος μη γραμμική συμπεριφορά σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στις επιβαλλόμενες δυνάμεις και τις αντίστοιχες μετακινήσεις του συστήματος είναι μη γραμμική. Κατά βάση, η μη γραμμική συμπεριφορά περιλαμβάνει τρεις παράγοντες: α) την γεωμετρική μη γραμμικότητα (geometrical nonlinearity), δηλαδή την επίδραση μεγάλων μετατοπίσεων 1ης και 2ης τάξης, β) τη μη γραμμικότητα που διέπει τον καταστατικό νόμο των υλικών (material nonlinearity) και γ) τη μη γραμμικότητα κινηματικού περιορισμού και επαφής (constraint and contact nonlinearity). Κύρια συνέπεια αυτών των παραγόντων, σε αντίθεση με τη γραμμική ανάλυση, είναι η χρονική μεταβολή του μητρώου στιβαρότητας κατά την επιβολή φορτίου. Ο πιο κοινός τύπος μη γραμμικής συμπεριφοράς συναντάται όταν η σχέση τάσης – τροπής (σ - ϵ) ή δύναμης-παραμόρφωσης (F - d) του υλικού είναι ανελαστική. Αυτό οφείλεται στη σχετικά σύγχρονη φιλοσοφία σχεδιασμού, σύμφωνα με την οποία μια σωστά σχεδιασμένη κατασκευή πρέπει να έχει έναν περιορισμένο αριθμό μελών που παρουσιάζουν πλαστιμότητα και ο μηχανισμός κατάρρευσης πρέπει να είναι σαφώς ορισμένος. Η προσέγγιση αυτή ελαχιστοποιεί το κόστος επισκευής μετά από έναν ισχυρό σεισμό.

Σε αυτό το κεφάλαιο το πρόβλημα της δυναμικής των κατασκευών θα διατυπωθεί για κατασκευές διακριτοποιημένες ως συστήματα με έναν πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας στους κόμβους της κατασκευής. Οι εξισώσεις κίνησης θα διαμορφωθούν αρχικά για ένα πολυβάθμιο ελαστικό και ένα πολυβάθμιο ανελαστικό σύστημα¹. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν ορισμένες μέθοδοι (βήμα προς βήμα) απευθείας αριθμητικής ολοκλήρωσης της εξίσωσης κίνησης και συνοπτικά, ο φορμαλισμός για το τρισδιάστατο (ραβδόμορφο) στοιχείο δοκού που χρησιμοποιήθηκε στις αναλύσεις.

2.2 Εξίσωση Κίνησης

Το πρόβλημα προσδιορισμού της δυναμικής αποκρίσεως ενός πολυβάθμιου δομικού συστήματος περιγράφεται μαθηματικά πλήρως από το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}[\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)] = \mathbf{f}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.2)$$

¹Στο εξής οι όροι σύστημα και κατασκευή θα είναι ισοδύναμοι και θα χρησιμοποιούνται χωρίς διάκριση, παρά τη γενικότερη φύση του όρου σύστημα [3].

$$\dot{\mathbf{u}}(t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (2.3)$$

όπου: $\mathbf{M}$ το μητρώο μάζας, $\mathbf{K}$ το ελαστικό μητρώο στιβαρότητας, $\mathbf{C}$ το μητρώο απόσβεσης, $\mathbf{R}$ οι μη γραμμικές δυνάμεις επαναφοράς, $\mathbf{u}$ το διάνυσμα μετατοπίσεων, $\dot{\mathbf{u}}$ το διάνυσμα ταχυτήτων, $\ddot{\mathbf{u}}$ το διάνυσμα επιταχύνσεων και $\mathbf{f}$ το διάνυσμα εξωτερικών φορτίσεων. Η εξίσωση 2.1, μπορεί να γραφτεί εναλλακτικά ως εξής

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) - \mathbf{f}(t) = 0, \quad (2.4)$$

όπου: $\mathbf{F}_I(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)$ είναι οι αδρανειακές δυνάμεις, $\mathbf{F}_D(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)$ οι δυνάμεις απόσβεσης και $\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}[\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)]$ οι εσωτερικές δυνάμεις επαναφοράς.

Η εξίσωση κίνησης ενός ταλαντούμενου συστήματος (εξίσωση 2.1) όπως έχει γραφτεί στη μορφή της σχέσης 2.4 εκφράζει τη συνθήκη ισορροπίας όλων των δυνάμεων, δηλαδή της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης και των εσωτερικών δυνάμεων αντίστασης του συστήματος (αδρανειακές, ελαστικές και απόσβεσης) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t .

2.2.1 Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Χρονοϊστορίας

Στην περίπτωση της γραμμικής δυναμικής ανάλυσης, η εξάρτηση των εσωτερικών δυνάμεων αντίστασης από το αίτιο που τις προκαλεί είναι γραμμική και επομένως ισχύει:

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{K}\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.5, 2.6 στην 2.4 προκύπτει πως η συνθήκη ισορροπίας για ένα δυναμικό σύστημα με απόσβεση, υπό σεισμική διέγερση, με n -βαθμούς ελευθερίας, υπό την παραδοχή γραμμικά ελαστικής συμπεριφοράς, διατυπώνεται, για μια χρονική στιγμή t , σε μητρωική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t), \quad (2.7)$$

όπου $\mathbf{M}$ το $(n \times n)$ μητρώο μάζας, $\mathbf{K}$ το $(n \times n)$ μητρώο στιβαρότητας, $\mathbf{C}$ το $(n \times n)$ μητρώο απόσβεσης, $\mathbf{u}$ το $(n \times 1)$ διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων, $\ddot{u}_g$ η εδαφική επιτάχυνση και $\mathbf{r}$ το $(n \times 1)$ διάνυσμα επιρροής, το οποίο εκφράζει τη χωρική κατανομή της εξωτερικής διέγερσης.

Μαθηματικά, η εξίσωση (2.7) αντιπροσωπεύει ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης, η λύση του οποίου μπορεί να ληφθεί με οποιαδήποτε συμβατική μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, με σταθερούς συντελεστές. Τέτοιες συμβατικές μέθοδοι, ωστόσο, μπορεί να είναι ιδιαίτερα «ακριβές» υπολογιστικά, ειδικά όταν η τάξη των μητρώων – συντελεστών είναι υψηλή, εκτός εάν εκμεταλλευθούν κάποια ειδικά χαρακτηριστικά των μητρώων-συντελεστών. Επομένως, κοινή πρακτική σε αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων (FEA), είναι να προτιμώνται αριθμητικές μέθοδοι προσαρμοσμένες στα προβλήματα μηχανικής και κατάλληλες για την επίλυση προβλημάτων όπου τα μητρώα είναι αραιά (sparse).

Οι αλγόριθμοι που υιοθετούνται, κύρια, διακρίνονται στην επαλληλία ιδιομορφών (Modal Superposition) και τις μεθόδους Απευθείας Αριθμητικής Ολοκλήρωσης στο πεδίο του χρόνου (Direct Numerical Integration Schemes), ενώ άλλοι είναι η ανάλυση φάσματος απόκρισης (Response Spectrum Analysis) και η ανάλυση στο πεδίο συχνοτήτων (Frequency Domain Analysis). Στην παρούσα εργασία οι ελαστικές – γραμμικές αναλύσεις πραγματοποιούνται με απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης.

2.2.2 Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Χρονοϊστορίας

Στην περίπτωση ενός n -βάθμιου μη γραμμικού δυναμικού συστήματος, υπό σεισμική διέγερση, η εξίσωση κίνησης, για μια χρονική στιγμή t , διατυπώνεται στην ακόλουθη μητρωική μορφή:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{R}[\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)] = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t), \quad (2.8)$$

όπου $\mathbf{R}[\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)]$ είναι το διάνυσμα των μη γραμμικών δυνάμεων επαναφοράς, το οποίο πρέπει να υπολογίζεται σε κάθε χρονικό βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, διαδικασία η οποία αυξάνει σημαντικά τον χρόνο υπολογισμού. Στη γενική περίπτωση, μπορεί και οι δυνάμεις απόσβεσης να παρουσιάζουν μη γραμμικότητα, αλλά στα πλαίσια της εργασίας εξετάζεται μόνο η γραμμική περίπτωση. Σε αντίθεση με την ελαστική ανάλυση, εδώ η επαλληλία ιδιομορφών θεωρείται ακατάλληλη, καθώς ο προσδιορισμός σταθερών ιδιομορφών δεν είναι δυνατός σε φορέα που επιδεικνύει ανελαστική συμπεριφορά, λόγω της συνεχώς μεταβαλλόμενης δυσκαμψίας σε κάθε βήμα της ανάλυσης. Επομένως, στην προκειμένη περίπτωση, η Απευθείας Αριθμητική Ολοκλήρωση αποτελεί μονόδρομο.

2.3 Απευθείας Αριθμητική Ολοκλήρωση της Εξίσωσης Κίνησης

Στην ακόλουθη παράγραφο θα εξετάσουμε αλγοριθμικά τον τρόπο επίλυσης της δυναμικής εξίσωσης ισορροπίας (ή εξίσωσης κίνησης) με αριθμητικές μεθόδους. Στα πλαίσια της απευθείας αριθμητικής ολοκλήρωσης, οι εξισώσεις ολοκληρώνονται με τη χρήση μιας διαδικασίας βήμα-προς-βήμα. Σημειώνεται ότι ο όρος απευθείας, δηλώνει ότι δε διενεργείται κανένας μετασχηματισμός των εξισώσεων και ολοκληρώνονται στην αρχική τους μορφή. Η ουσία της απευθείας αριθμητικής ολοκλήρωσης βασίζεται σε δύο βασικές ιδέες. Η πρώτη αφορά στη διακριτοποίηση της χρονικής κλίμακας και στο γεγονός ότι αντί της απαίτησης η εξίσωση κίνησης να ικανοποιείται σε όλο το φάσμα του πεδίου του χρόνου (κάθε χρονική στιγμή), επιδιώκεται να ικανοποιηθεί μόνον σε διακριτά χρονικά σημεία που απέχουν μεταξύ τους κατά διαστήματα Δt . Η δεύτερη συνίσταται στον προκαθορισμό της χρονικής μεταβολής των μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων σε κάθε διάστημα Δt . Η δεύτερη είναι και αυτή που καθορίζει την ακρίβεια, την ευστάθεια και το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας επίλυσης. Ως προς τη φύση των μεθόδων, υπάρχουν δύο κατηγορίες: οι ρητές (explicit) και οι πεπλεγμένες (implicit). Στις ρητές μεθόδους, τα διανύσματα μετατοπίσεων και ταχυτήτων τη χρονική στιγμή t_{i+1} μπορούν να προσδιορισθούν σε κλειστή μορφή από τις αντίστοιχες μετατοπίσεις και ταχύτητες του προηγούμενου χρονικού βήματος t_i , και από την εξωτερική φόρτιση στο χρονικό βήμα t_i και πιθανόν και t_{i+1} . Οι πεπλεγμένες μέθοδοι, περιλαμβάνουν την επίλυση ενός συνόλου μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων σε κάθε χρονικό βήμα. Για παράδειγμα, οι μετατοπίσεις και ταχύτητες στο βήμα t_{i+1} , $[\mathbf{u}(t + \Delta t), \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]$ καθορίζονται από τις ρίζες μιας μη γραμμικής εξίσωσης σε ορούς $[\mathbf{u}(t + \Delta t), \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]$. Οι ρητές μέθοδοι, τυπικά, είναι υπολογιστικά αποδοτικότερες (computationally efficient).

2.3.1 Ακρίβεια και Ευστάθεια

Κριτήριο αξιολόγησης των αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης της εξίσωσης κίνησης αποτελούν η ακρίβεια και η αριθμητική ευστάθεια τους. Η αριθμητική ευστάθεια είναι επιβεβλημένη ώστε να εξασφαλίζεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής διαδικασίας. Αν η απαίτηση της ευστάθειας εισάγει περιορισμούς στο μέγεθος της παραμέτρου χρονικής διακριτοποίησης, Δt , τότε η μέθοδος χαρακτηρίζεται ευσταθής υπό συνθήκες (conditionally stable), ενώ σε άλλη περίπτωση ευσταθής άνευ συνθηκών (unconditionally stable). Αξίζει να τονισθεί εδώ ότι η δέσμευση του χρονικού βήματος Δt αποτελεί αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της διαδικασίας, αλλά όχι και ικανή. Επομένως, με κριτήριο την επιθυμητή ακρίβεια, μπορεί να απαιτείται ακόμα μικρότερο Δt από την απαίτηση ευστάθειας.

2.3.2 Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αλγοριθμικά ορισμένες από τις πλέον διαδεδομένες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης της εξίσωσης κίνησης στην περίπτωση γραμμικής δυναμικής ανάλυσης.

Μέθοδος Κεντρικών Διαφορών

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση 2.4 ως ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, συνεπάγεται ότι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε κατάλληλη έκφραση πεπερασμένων διαφορών (finite differences) για τις επιταχύνσεις και τις ταχύτητες συναρτήσει των μετατοπί-

σεων. Μια από αυτές είναι η μέθοδος κεντρικών διαφορών (ΜΚΔ). Αρχικά αναπτύσσουμε τις μετατοπίσεις $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ και $\mathbf{u}(t - \Delta t)$, τις χρονικές στιγμές $t + \Delta t$ και $t - \Delta t$, σε σειρά Taylor και αμελώντας όρους 2ης και άνω τάξης, προκύπτει

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}(t) + \dots \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}(t - \Delta t) = \mathbf{u}(t) - \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}(t) + \dots \quad (2.10)$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω δυο σχέσεις κατά μέλη και επιλύοντας ως προς $\dot{\mathbf{u}}(t)$ προκύπτει το ανάπτυγμα τύπου πεπερασμένων διαφορών για την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t

$$\dot{\mathbf{u}}(t) \approx \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.11)$$

ενώ προσθέτοντας τις ίδιες σχέσεις κατά μέλη λαμβάνουμε την προσέγγιση για την επιτάχυνση $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, τη χρονική στιγμή t

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) \approx \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - \Delta t))}{\Delta t^2} \quad (2.12)$$

Το σφάλμα στις δυο παραπάνω προσεγγίσεις είναι της τάξης του Δt^2 . Αντικαθιστώντας τις παραπάνω προσεγγίσεις στην εξίσωση 2.7 και αναδιατάσσοντας κάποιους όρους, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t) + \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \mathbf{K} \right) \mathbf{u}(t) + \left(-\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}(t - \Delta t) \quad (2.13)$$

όπου $\mathbf{f}_{\text{ext}}(t)$ είναι η εξωτερική διέγερση στη γενική περίπτωση, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση για τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$. Ο υπολογισμός της μετατόπισης $\mathbf{u}(t + \Delta t)$, λοιπόν, εξαρτάται από τη συνθήκη ισορροπίας τη χρονική στιγμή t , επομένως η ΜΚΔ είναι μια ρητή (explicit) μέθοδος ολοκλήρωσης. Η αριθμητική ευστάθεια της ΜΚΔ εξαρτάται από την επιλογή του χρονικού διαστήματος Δt . Για να υπάρξει σταθερή λύση, θα πρέπει $\Delta t < T_i/\pi$, όπου T_i είναι η μικρότερη ιδιοπερίοδος του δομικού συστήματος, ενώ σε αντίθετη περίπτωση η λύση θα παρουσιάσει συνεχόμενη εκθετική αύξηση (blow up).

Ακολουθως παρουσιάζεται η μέθοδος αλγοριθμικά.

A. Αρχικοί Υπολογισμοί:

1. Υπολογισμός μητρώου στιβαρότητας $\mathbf{K}$, μητρώου μάζας $\mathbf{M}$ και μητρώου απόσβεσης $\mathbf{C}$.
2. Αρχικοποίηση των διανυσμάτων $\mathbf{u}(0)$, $\dot{\mathbf{u}}(0)$, $\ddot{\mathbf{u}}(0)$ (αρχικές συνθήκες).
3. Επιλογή χρονικού βήματος Δt και υπολογισμός των σταθερών ολοκλήρωσης:

$$\alpha_0 = 1/(\Delta t)^2; \alpha_1 = 1/2\Delta t; \alpha_2 = 2\alpha_0; \alpha_3 = 1/\alpha_2$$

4. Υπολογισμός του διανύσματος $\mathbf{u}(-\Delta t) = \mathbf{u}(0) - \Delta t \dot{\mathbf{u}}(0) + \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}(0)$
5. Υπολογισμός ενεργού μητρώου μάζας $\hat{\mathbf{M}} = \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C}$
6. Τριγωνοποίηση του $\hat{\mathbf{M}}$: $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$

B. Για κάθε χρονικό βήμα:

1. Υπολογισμός ενεργού διανύσματος φόρτισης τη χρονική στιγμή t

$$\hat{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{f}(t) - (\mathbf{K} - \alpha_2 \mathbf{M}) \mathbf{u}(t) - (\alpha_0 \mathbf{M} - \alpha_1 \mathbf{C}) \mathbf{u}(t - \Delta t)$$

2. Επίλυση για τις μετατοπίσεις τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{u}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{f}}(t)$$

3. Εκτίμηση των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων τη χρονική στιγμή t :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \alpha_1 [\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)]$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \alpha_0 [\mathbf{u}(t + \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - \Delta t)]$$

Μέθοδος Newmark

Ας θεωρήσουμε τώρα τις σειρές Taylor για τις μετατοπίσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \ddot{\mathbf{u}}'(t) + \frac{\Delta t^4}{4!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) + \dots \quad (2.14)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}'(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) + \dots \quad (2.15)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \ddot{\mathbf{u}}(t) + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) + \dots \quad (2.16)$$

Αναδιατάσσοντας την εξίσωση 2.16,

$$\Delta t \ddot{\mathbf{u}}'(t) = \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) + \dots \quad (2.17)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 2.14 και 2.15 καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{3!} \left[\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) - \dots \right] + \frac{\Delta t^4}{4!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) + \dots \quad (2.18)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \left[\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) - \dots \right] + \frac{\Delta t^3}{3!} \ddot{\mathbf{u}}''(t) + \dots \quad (2.19)$$

Περικόπτοντας όρους 4ης τάξης και άνω από τις παραπάνω εξισώσεις, καταλήγουμε στις ακόλουθες προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) \approx \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{6} \left[\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + 2\ddot{\mathbf{u}}(t) \right] \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \approx \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \left[\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] \quad (2.21)$$

Αυτές οι σχέσεις είναι πεπλεγμένες (implicit) υπό την έννοια ότι, για να προσδιοριστούν τα διανύσματα $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ και $\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ απαιτείται το διάνυσμα $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$, αλλά οι επιταχύνσεις $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ δεν μπορούν να βρεθούν χωρίς τα $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ και $\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$. Ας σημειωθεί εδώ, ότι με τις παραπάνω αντικαταστάσεις, έγινε απαλοιφή των όρων τρίτης χρονικής παραγώγου και η μέθοδος έχει ακρίβεια της τάξης του $\Delta t^4 \ddot{\mathbf{u}}''(t)$.

Η παραπάνω ανάπτυξη καλείται μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης (linear acceleration method) καθώς η τρίτη χρονική παράγωγος του $\mathbf{u}$ έχει απαλειφθεί. Εάν ο ρυθμός μεταβολής της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα είναι πράγματι σταθερός, τότε η προσέγγιση να περικόψουμε όρους 4ης και άνω τάξεως από τις σειρές Taylor δεν επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης.

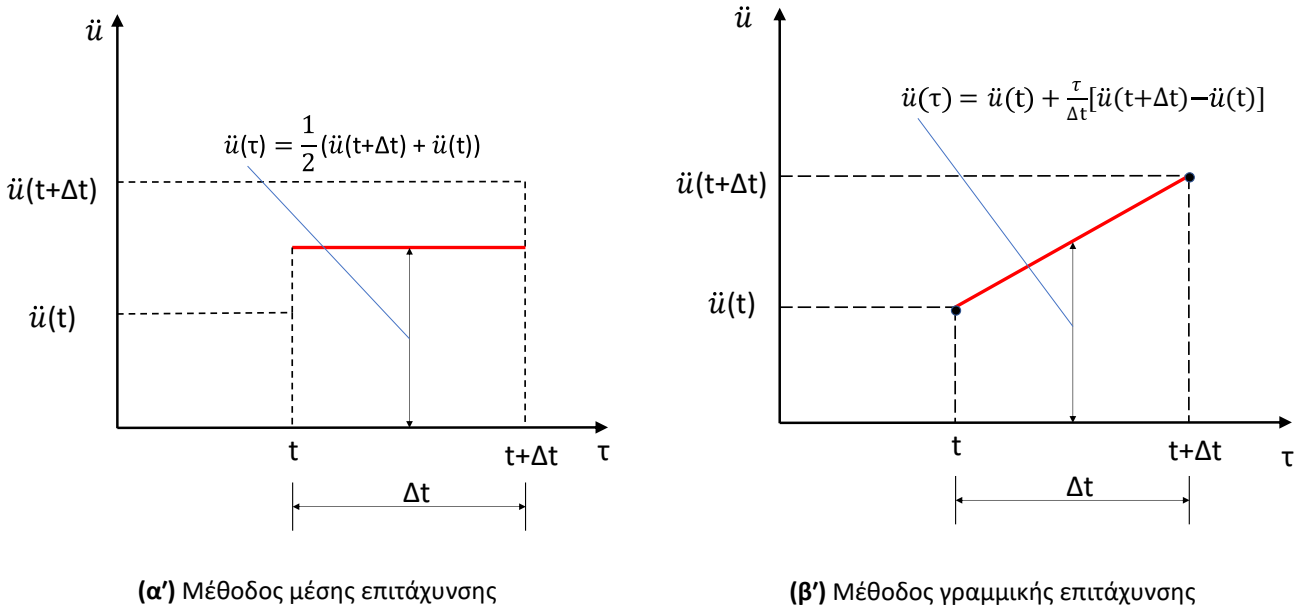
Σύμφωνα με τη μέθοδο Newmark [20], οι μετακινήσεις και οι ταχύτητες εντός του παρόντος χρονικού βήματος προέρχονται από ολοκλήρωση της αντίστοιχης έκφρασης της επιτάχυνσης, υπό την παραδοχή γραμμικής μεταβολής αυτής εντός του χρονικού βήματος. Μετά την ολοκλήρωση αυτή, οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών, για τη μετακίνηση και την ταχύτητα, της μεθόδου Newmark είναι οι ακόλουθες:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) \approx \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \beta \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \right] \quad (2.22)$$

και

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \approx \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \gamma \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)] \quad (2.23)$$

όπου β και γ ,² είναι παράμετροι που μπορούν να καθοριστούν με κριτήριο την επιθυμητή ακρίβεια και ευστάθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Οι πιο διαδεδομένες υποπεριπτώσεις της μεθόδου Newmark είναι η μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης (linear acceleration method) και η μέθοδος της σταθερής – μέσης επιτάχυνσης (constant – average acceleration method). Ο Newmark αρχικά πρότεινε, ως μια άνευ όρων ευσταθή και πεπλεγμένη μέθοδο, τη μέθοδο μέσης επιτάχυνσης³ η οποία προκύπτει θέτοντας τις παραμέτρους $\gamma = 1/2$ και $\beta = 1/4$ στις εξισώσεις 2.22 και 2.23. Η μέθοδος της γραμμικής επιτάχυνσης προκύπτει για $\gamma = 1/2$ και $\beta = 1/6$, ενώ για $\gamma = 1/2$ και $\beta = 0$, η μέθοδος Newmark εκφυλίζεται στη МКΔ. Για γραμμική δυναμική ανάλυση, εάν $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$, η μέθοδος Newmark είναι ευσταθής ανεξαρτήτως του χρονικού βήματος Δt . Επιπλέον, είναι ευσταθής υπό όρους για τιμές του $\gamma < 1/2$. Για $\gamma = 1/2$ η μέθοδος έχει ακρίβεια τουλάχιστον 2ης τάξης⁴. Παρακάτω φαίνονται σχηματικά οι παραδοχές για τη χρονική μεταβολή της επιτάχυνσης για τις δυο υπό-περιπτώσεις της μεθόδου. Η συνάρτηση $\mathbf{u}(\tau)$ (Σχ.2.1) ολοκληρώνεται ως προς τ για να υπολογιστούν οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις.



Σχήμα 2.1: Μέθοδος Newmark

Αντικαθιστώντας τις προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών για $\gamma = 1/2$ και $\beta = 1/6$ (μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης) στη συνθήκη ισορροπίας (2.7) και εκτελώντας ορισμένες αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στην εξής έκφραση:

²Στη βιβλιογραφία πολλές φορές, αντί των γραμμάτων β και γ [1], χρησιμοποιούνται τα γράμματα $\alpha (= \beta)$ και $\delta (= \gamma)$ [2]

³Γνωστή και ως κανόνας του τραπεζίου (Trapezoidal Rule – TR).

⁴Αναφέρουμε, για την προσέγγιση $\mathbf{u}_{sol}$ της ακριβούς λύσης $\mathbf{u}$, ότι έχει ν-οστής τάξης ακρίβεια, εάν το σφάλμα $E := |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{sol}|$ είναι ανάλογο προς το χρονικό βήμα Δt της αριθμητικής διαδικασίας, δηλαδή: $E := |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{sol}| \leq C(\Delta t)^{\nu}$, όπου C : σταθερά εξαρτώμενη από το βήμα Δt .

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \mathbf{u}(t + \Delta t) = & \mathbf{f}_{\text{ext}}(t + \Delta t) + \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}(t) \\
& + \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \frac{\gamma - \beta}{\beta} \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{u}}(t) \\
& + \left[\frac{1 - 2\beta}{2\beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{u}}(t)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

της μορφής

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{p}}(t + \Delta t) \tag{2.25}$$

η οποία επιλύεται σε κάθε χρονικό βήμα, γνωρίζοντας τις παραμέτρους του συστήματος $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$, τις αλγοριθμικές παραμέτρους β , γ και με την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t να καθορίζεται από τις $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$. Έχοντας λοιπόν υπολογίσει τη μετατόπιση τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{p}}(t + \Delta t) / \hat{\mathbf{K}} \tag{2.26}$$

απομένει να υπολογιστούν οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις. Πρώτα επιλύουμε την εξίσωση 2.22 ως προς $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$, και με τη σχέση που προκύπτει, εκφράζουμε μέσω της εξίσωσης 2.23 και την $\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ σε όρους⁵ $\mathbf{u}(t + \Delta t)$. Έχοντας υπολογίσει τις μετατοπίσεις $\mathbf{u}(t + \Delta t)$, υπολογίζουμε και τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ και πλέον γνωρίζουμε πλήρως την κατάσταση του συστήματος στο επόμενο χρονικό βήμα. Παρακάτω παρουσιάζεται αλγοριθμικά η μέθοδος Newmark για γραμμικά συστήματα.

A. Αρχικοί Υπολογισμοί:

1. Υπολογισμός μητρώου στιβαρότητας $\mathbf{K}$, μητρώου μάζας $\mathbf{M}$ και μητρώου απόσβεσης $\mathbf{C}$
2. Αρχικοποίηση των διανυσμάτων $\mathbf{u}(0)$, $\dot{\mathbf{u}}(0)$, $\ddot{\mathbf{u}}(0)$ (αρχικές συνθήκες)
3. Επιλογή χρονικού βήματος Δt , αλγοριθμικών παραμέτρων β και γ και υπολογισμός των σταθερών ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned}
\gamma & \geq 0.5\beta \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2 \\
c_0 & = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; c_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; c_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; \\
c_3 & = \frac{1}{2\beta} - 1; c_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; c_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); \\
c_6 & = \Delta t(1 - \gamma); c_7 = \gamma \Delta t
\end{aligned}$$

4. Υπολογισμός ενεργού μητρώου στιβαρότητας $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + c_0 \mathbf{M} + c_1 \mathbf{C}$
5. Τριγωνοποίηση του $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$ (προαιρετικό)

B. Για κάθε χρονικό βήμα:

1. Υπολογισμός ενεργού διανύσματος φόρτισης τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$

$$\hat{\mathbf{f}}(t + \Delta t) = \mathbf{f}(t + \Delta t) + \mathbf{M}[c_0 \mathbf{u}(t) + c_2 \dot{\mathbf{u}}(t) + c_3 \ddot{\mathbf{u}}(t)] + \mathbf{C}[c_1 \mathbf{u}(t) + c_4 \dot{\mathbf{u}}(t) + c_5 \ddot{\mathbf{u}}(t)]$$

2. Επίλυση για τις μετατοπίσεις τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{u}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{f}}(t)$$

⁵Οι αναλυτικές εκφράσεις φαίνονται στον πίνακα βημάτων στη συνέχεια.

3. Εκτίμηση των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &= c_0[\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)] - c_2\dot{\mathbf{u}}(t) - c_3\ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &= \dot{\mathbf{u}}(t) + c_6\ddot{\mathbf{u}}(t) + c_7\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)\end{aligned}$$

Μέθοδος HHT- α (Hilber-Hughes-Taylor):

Η μέθοδος HHT- α αποτελεί μια γενίκευση της οικογένειας μεθόδων Newmark και εκφυλίζεται σε αυτήν για $\alpha = 0$. Η μέθοδος HHT- α υιοθετεί τις ίδιες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών με τη Newmark (εξισώσεις 2.22 και 2.23), ωστόσο, η εξίσωση κίνησης τροποποιείται με την εισαγωγή μιας παραμέτρου α , η οποία αντιπροσωπεύει μια αριθμητική καθυστέρηση (numerical lag) στους όρους απόσβεσης, στίβαρότητας και εξωτερικής φόρτισης. Υπό την παραδοχή σταθερής επιτάχυνσης στο διάστημα $[t, t + \Delta t]$ ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$), η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + (1 - \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + (1 - \alpha)\mathbf{K}\mathbf{u}(t + \Delta t) + \alpha\mathbf{K}\mathbf{u}(t) \\ = -(1 - \alpha)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_g(t + \Delta t) - \alpha\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_g(t)\end{aligned}\quad (2.27)$$

Ακρίβεια τουλάχιστον 2ης τάξης και άνευ όρων ευστάθειας επιτυγχάνεται εάν ισχύουν τα παρακάτω:

$$0 \leq \alpha \leq 1/3$$

$$\beta = (1 + \alpha)^2/4$$

$$\gamma = 1/2 + \alpha$$

Η μέθοδος HHT- α είναι χρήσιμη στη δυναμική ανάλυση κατασκευών σε προσομοιώσεις με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, όπου οι υψίσυχνες ιδιομορφές διεγείρονται, αλλά η συνεισφορά τους στη συνολική απόκριση είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από ότι θα προβλεπόταν, και στις οποίες επιδιώκεται αριθμητική απόσβεση (numerical damping) της συνεισφοράς αυτών των ιδιομορφών. Αύξηση του α συνεπάγεται αύξηση της αριθμητικής απόσβεσης και άρα μείωση της απόκρισης σε συχνότητες μεγαλύτερες από $1/(2\Delta t)$, εφόσον βέβαια τα β , γ έχουν οριστεί όπως προαναφέρεται.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 2.22 και 2.23 στην εξίσωση 2.27 και ομαδοποιώντας την προκύπτουσα έκφραση σε όρους $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_g(t + \Delta t)$, $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_g(t)$, καταλήγουμε στη μητρική έκφραση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων για το διάνυσμα $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$, σε όρους $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, της εξωτερικής δυναμικής φόρτισης και των ιδιοτήτων του συστήματος. Το σύστημα αυτό, μαζί με τις εξισώσεις 2.22 και 2.23 αποτελεί την επαναληπτική διαδικασία της μεθόδου.

2.3.3 Επίλυση Μη Γραμμικών Εξισώσεων

Η δυναμική απόκριση ενός συστήματος, πέραν του εύρους ελαστικής του συμπεριφοράς, στη γενική περίπτωση δεν επιδέχεται αναλυτικής λύσεως, ακόμη και αν η εξωτερική διέγερση περιγράφεται από μία απλή συνάρτηση. Επομένως στην περίπτωση μη γραμμικών αναλύσεων οι αριθμητικές μέθοδοι είναι μονόδρομος, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Σε αυτήν την ενότητα, η οικογένεια επιλυτών Newmark, που περιγράφηκε πριν για το γραμμικό πρόβλημα, επεκτείνεται για το μη γραμμικό πρόβλημα. Η ουσιαστική διαφορά, εναπόκειται στον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων επαναφοράς, οι οποίες πλέον είναι συνάρτηση των μετατοπίσεων στο τρέχον χρονικό βήμα. Άρα, σε κάθε χρονικό βήμα απαιτείται μια επαναληπτική διαδικασία προκειμένου να ικανοποιηθεί η ισορροπία μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων. Κρίνεται λοιπόν σκόπιμο, να παρουσιαστεί πρώτα μια μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, συγκεκριμένα η μέθοδος Newton – Raphson.

Μέθοδος Newton-Raphson

Χάριν απλούστευσης, θα αγνοήσουμε προσωρινά του όρους απόσβεσης και αδράνειας, επομένως η μη γραμμική (στατική πλέον) εξίσωση ισορροπίας προς επίλυση είναι η εξής:

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{p} \quad (2.28)$$

Σκοπός μας, να καθοριστεί το διάνυσμα μετατοπίσεων $\mathbf{u}$ που προκαλείται από δεδομένη εξωτερική φόρτιση $\mathbf{p}$, έχοντας ήδη ορίσει τη μη γραμμική σχέση μεταξύ δύναμης αντίστασης $\mathbf{f}_s(\mathbf{u})$ – μετατόπισης $\mathbf{u}$, για το εκάστοτε σύστημα. Έστω τώρα, ότι μετά από n επαναλήψεις, το διάνυσμα $\mathbf{u}^{(n)}$ είναι μια εκτίμηση των άγνωστων μετατοπίσεων και προσπαθούμε να αναπτύξουμε μια επαναληπτική διαδικασία που να αποδίδει μια καλύτερη εκτίμηση $\mathbf{u}^{(n+1)}$. Για τον σκοπό αυτό, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση δύναμης αντίστασης του επόμενου βήματος $n+1$, $\mathbf{f}_s(\mathbf{u})^{(n+1)}$, κατά Taylor γύρω από την εκτίμηση $\mathbf{u}^{(n)}$ και έχουμε:

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{u})^{(n+1)} = \mathbf{f}_s(\mathbf{u})^{(n)} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(n)}} (\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\mathbf{u}^{(n)}} (\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)})^2 + \dots \quad (2.29)$$

Εάν τώρα η εκτίμηση $\mathbf{u}^{(n)}$ είναι κοντά στην πραγματική λύση, τότε το διάνυσμα $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}$ είναι μικρό και άρα όροι 2ης και άνω τάξης μπορούν να αγνοηθούν, οδηγώντας στη γραμμικοποιημένη εξίσωση:

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{u})^{(n+1)} \cong \mathbf{f}_s(\mathbf{u})^{(n)} + \mathbf{k}_T^{(n)} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{p} \quad (2.30)$$

ή

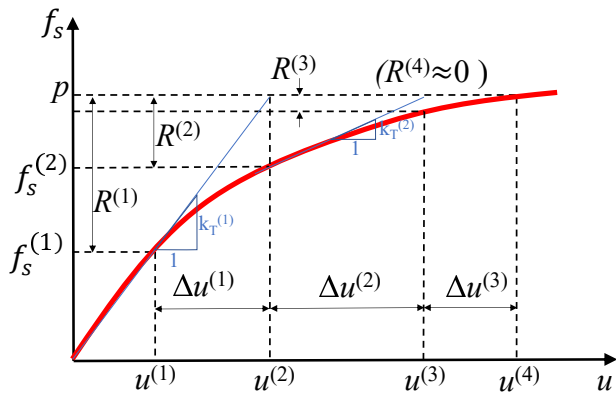
$$\mathbf{k}_T^{(n)} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{p} - \mathbf{f}_s(\mathbf{u})^{(n)} = \mathbf{R}^{(n)} \quad (2.31)$$

όπου $\mathbf{k}_T^{(n)} = (\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{u}^{(n)}) / \partial \mathbf{u})$ η εφαπτομενική δυσκαμψία⁶ για μετατόπιση $\mathbf{u}^{(n)}$. Επιλύοντας τώρα την εξίσωση 2.31 βρίσκουμε τη μεταβολή $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$ και έτσι μια βελτιωμένη εκτίμηση της μετατόπισης:

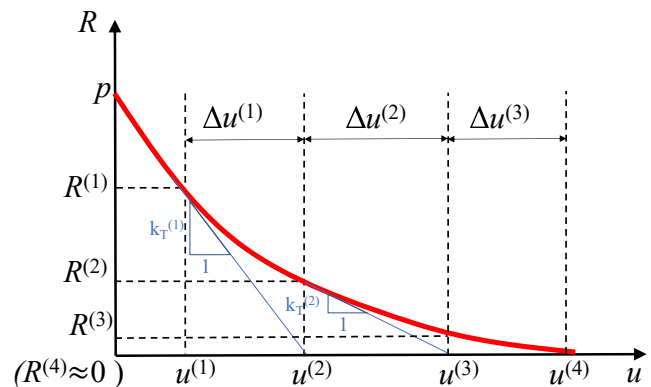
$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \Delta \mathbf{u}^{(n)} \quad (2.32)$$

Στη συνέχεια περιγράφεται η επαναληπτική διαδικασία, με αναφορά στα παρακάτω σχήματα (2.2α', 2.2β'). Η δύναμη αντίστασης $\mathbf{f}_s^{(n)}$, που εξαρτάται από την αντίστοιχη μετατόπιση $\mathbf{u}^{(n)}$, δεν είναι ίση με την εφαρμοζόμενη δύναμη $\mathbf{p}$, επομένως ορίζεται μια δύναμη – υπόλοιπο (Residual):

$$\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{p} - \mathbf{f}_s^{(n)} \quad (2.33)$$



(α') Δύναμη επαναφοράς σε κάθε επανάληψη



(β') Υπολειπόμενη δύναμη σε κάθε επανάληψη

Σχήμα 2.2: Newton-Raphson

Η επιπρόσθετη μετατόπιση $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$, οφειλόμενη στην υπολειπόμενη δύναμη προσδιορίζεται από την εξίσωση 2.31, οδηγώντας στον υπολογισμό της $\mathbf{u}^{(n+1)}$. Αυτή η νέα εκτίμηση της λύσης χρησιμοποιείται

⁶ $(\mathbf{k}_T)_{i,j}$ = δύναμη κατά τον βαθμό ελευθερίας i για μοναδιαία και μοναδική μετατόπιση κατά τον β.ε. j , στην τρέχουσα κατάσταση του συστήματος.

για να βρεθεί το νέο διάνυσμα της υπολειπόμενης δύναμης $\mathbf{R}^{(n+1)} = \mathbf{p} - \mathbf{f}_s^{(n+1)}$. Η επιπρόσθετη μετατόπιση $\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{k}_T^{(n+1)} \Delta \mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{R}^{(n+1)} \quad (2.34)$$

Κατόπιν υπολογίζεται η νέα τιμή της μετατόπισης:

$$\mathbf{u}^{(n+2)} = \mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta \mathbf{u}^{(n+1)} \quad (2.35)$$

και τέλος υπολογίζεται το επόμενο διάνυσμα της δύναμης – υπόλοιπο $\mathbf{R}^{(n+2)}$. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου να επιτευχθεί σύγκλιση⁷ και είναι γνωστή ως Μέθοδος Newton – Raphson. Μετά από κάθε επανάληψη, η λύση ελέγχεται και η διαδικασία τερματίζεται όταν κάποιο μέτρο του σφάλματος δεν ξεπερνά μία προκαθορισμένη ανοχή. Τα τυπικά κριτήρια σύγκλισης είναι τα εξής⁸:

1. Περιορισμός της υπολειπόμενης δύναμης: (αυτό χρησιμοποιήθηκε στις αναλύσεις)

$$\|\mathbf{R}^{(n)}\| \leq \epsilon_R \quad (2.36)$$

Συμβατικά $\epsilon_R \in [10^{-8}, 10^{-3}]$.

2. Περιορισμός της μεταβολής της μετατόπισης:

$$\|\Delta \mathbf{u}^{(n)}\| \leq \epsilon_u \quad (2.37)$$

Συμβατικά $\epsilon_u \in [10^{-8}, 10^{-3}]$.

3. Περιορισμός του έργου που εκτελεί η υπολειπόμενη δύναμη κατά τη μεταβολή της μετατόπισης

$$\frac{1}{2} \|\Delta \mathbf{u}^{(n)}\|^T \mathbf{R}^{(n)}\| \leq \epsilon_w \quad (2.38)$$

Συμβατικές τιμές για το ϵ_w πρέπει να είναι κοντά στην ακρίβεια που μπορεί να πετύχει ο υπολογιστής που εκτελεί την διαδικασία, καθώς το αριστερό μέλος είναι γινόμενο πολύ μικρών ποσοτήτων.

Μέθοδος Newmark

Έχοντας παρουσιάσει τη μέθοδο επίλυσης της μη γραμμικής στατικής εξίσωσης ισορροπίας, μπορούμε τώρα να την επεκτείνουμε για δυναμική ανάλυση. Στόχος μας, να προσδιορίσουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}(t + \Delta t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, που ικανοποιούν την εξίσωση 2.8, η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\hat{\mathbf{f}}_s(\mathbf{u}(t + \Delta t)) = \mathbf{p}(t + \Delta t) \quad (2.39)$$

ή

$$(\hat{\mathbf{f}}_s)_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1} \quad (2.40)$$

όπου

$$(\hat{\mathbf{f}}_s)_{i+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + (\mathbf{f}_s)_{i+1} \quad (2.41)$$

Μπορούμε τώρα να προσαρμόσουμε τη σειρά Taylor της εξίσωσης 2.29 στην εξίσωση 2.40, θεωρώντας το διάνυσμα $(\hat{\mathbf{f}}_s)_{i+1}$ συνάρτηση του $\mathbf{u}_{i+1}$ και να αγνοήσουμε όρους 2ης και άνω τάξης. Καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση ανάλογη της εξίσωσης 2.30:

⁷Αποδεικνύεται ότι προς το τέλος της επαναληπτικής διαδικασίας, η Μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει με τετραγωνικό ρυθμό προς την ακριβή λύση, δηλαδή $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n+1)}\| \leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)}\|^2$, όπου c σταθερά που εξαρτάται από την 2η παράγωγο της δύναμης αντίστασης (ή τη μεταβολή της τέμνουσας δυσκαμψίας).

⁸Με $\|\cdot\|$ συμβολίζεται η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος.

$$(\hat{\mathbf{f}}_s)_{(i+1)}^{(n+1)} \cong (\hat{\mathbf{f}}_s)_{(i+1)}^{(n)} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{p}_{i+1} \quad (2.42)$$

όπου

$$\Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(n+1)} - \mathbf{u}_{i+1}^{(n)} \quad (2.43)$$

Προς αποφυγήν παρερμηνείας, ο κάτω δείκτης $(i+1)$ αριθμεί το τρέχον χρονικό βήμα της διαδικασίας αριθμητικής ολοκλήρωσης, ενώ ο πάνω δείκτης $(n+1)$ αριθμεί την τρέχουσα επανάληψη της επαναληπτικής διαδικασίας Newton – Raphson.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 2.41 ως προς τις (γνωστές) μετατοπίσεις $\mathbf{u}_{i+1}^{(n)}$ έχουμε:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \cong \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} + \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \quad (2.44)$$

όπου οι παράγωγοι στους όρους αδράνειας και απόσβεσης του δεξιού μέλους μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις της μεθόδου Newmark 2.22, 2.23, επιλύοντας ως προς $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ στην πρώτη και κατόπιν παραγωγίζοντας την, και αντικαθιστώντας μετά στη δεύτερη και παραγωγίζοντας. Παραλείποντας τις πράξεις καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad (2.46)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 2.44 και ανακαλώντας τον ορισμό της τέμνουσας δυσκαμψίας έχουμε:

$$(\hat{\mathbf{k}}_T)_{i+1}^n \equiv \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = (\mathbf{k}_T)_{i+1}^n + \mathbf{C} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \mathbf{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad (2.47)$$

Έτσι, η εξίσωση 2.42 μπορεί να γραφεί ως:

$$(\hat{\mathbf{k}}_T)_{(i+1)}^{(n)} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{p}_{i+1} - (\hat{\mathbf{f}}_s)_{(i+1)}^{(n)} \equiv \mathbf{R}_{(i+1)}^{(n)} \quad (2.48)$$

ώστε να συνδυαστούν πλέον οι εξισώσεις 2.22, 2.23 με την εξίσωση 2.41 και στη συνέχεια με το δεξί μέλος της 2.48 ώστε να προκύψει η ακόλουθη έκφραση για την υπολειπόμενη δύναμη (Residual):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{(i+1)}^{(n)} = & \mathbf{p}_{i+1} - (\mathbf{f}_s)_{(i+1)}^{(n)} - \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \Delta t} \right] (\mathbf{u}_{i+1}^{(n)} - \mathbf{u}_i) + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t} + \mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \right] \dot{\mathbf{u}}_i \\ & + \left[\mathbf{M} \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) + \mathbf{C} \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \right] \ddot{\mathbf{u}}_i \end{aligned} \quad (2.49)$$

Εύκολα παρατηρείται ότι στην εξίσωση 2.49, η οποία αποτελεί και τη βάση για την επαναληπτική διαδικασία της Newton – Raphson, μόνο ο 2ος και ο 3ος όρος μεταβάλλονται από τη μία επανάληψη στην επόμενη, ενώ οι υπόλοιποι παραμένουν σταθεροί. Στη συνέχεια παρουσιάζεται κατά βήμα η μέθοδος Newmark για μη γραμμική δυναμική ανάλυση. Αξίζει να τονιστεί εδώ, μία ιδιαιτερότητα στο βήμα Γ.6 «Καθορισμός της Τρέχουσας Κατάστασης του Συστήματος». Θα πρέπει, ο αλγόριθμος να αναγνωρίζει ότι η σχέση δύναμης – μετατόπισης για τα ανελαστικά συστήματα παρουσιάζει εξάρτηση ως προς το πρόσημο της μεταβολής των παραμορφώσεων (path dependence), δηλαδή εάν οι παραμορφώσεις αυξάνουν ή μειώνονται στο τρέχον χρονικό βήμα. Αυτή η εξάρτηση θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη τόσο στη μόρφωση του μητρώου τέμνουσας δυσκαμψίας, όσο και στον υπολογισμό των δυνάμεων επαναφοράς που σχετίζονται με τις μετατοπίσεις $\mathbf{u}_i$, σε κάθε χρονικό βήμα.

A. Αρχικοί Υπολογισμοί:

1. Υπολογισμός μητρώου στιβαρότητας $\mathbf{K}$, μητρώου μάζας $\mathbf{M}$ και μητρώου απόσβεσης $\mathbf{C}$.
2. Καθορισμός κατάστασης συστήματος: $\mathbf{f}_s(t=0)$, $\mathbf{k}_T(t=0) = \mathbf{k}_{T0}$
3. Αρχικοποίηση των διανυσμάτων $\mathbf{u}(0)$, $\dot{\mathbf{u}}(0)$ και υπολογισμός

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = [\mathbf{M}]^{-1}(\mathbf{p}(0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{k}_{T0}\mathbf{u}(0))$$

(αρχικές συνθήκες)

4. Επιλογή χρονικού βήματος Δt , αλγοριθμικών παραμέτρων β και γ και υπολογισμός των συντελεστών:

$$a_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C};$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{C};$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{C}$$

B. Για κάθε χρονικό βήμα $i = 0, 1, 2, \dots$:

1. Αρχικοποίηση του δείκτη επαναλήψεων $N - R$: $n = 1$
2. Αρχικοποίηση των διανυσμάτων μετατοπίσεων, δυνάμεων επαναφοράς και μητρώου τέμνουσας δυσκαμψίας για τις επαναλήψεις N-R:

$$\mathbf{u}_{i+1}^{(n)} = \mathbf{u}_i,$$

$$\mathbf{f}_{s(i+1)}^{(n)} = \mathbf{f}_{s(i)},$$

$$\mathbf{k}_{T(i+1)}^{(n)} = \mathbf{k}_{T(i)}$$

3. Υπολογισμός ενεργού διανύσματος φόρτισης τη χρονική στιγμή $i + 1$ ($t + \Delta t$)

$$\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1} + a_1\mathbf{u}_i + a_2\dot{\mathbf{u}}_i + a_3\ddot{\mathbf{u}}_i$$

Γ. Για κάθε επανάληψη $n = 0, 1, 2, \dots$:

1. Υπολογισμός υπολειπόμενης δύναμης:

$$\hat{\mathbf{R}}_{(i+1)}^{(n)} = \hat{\mathbf{p}}_{i+1} - \mathbf{f}_{s(i+1)}^{(n)} - a_1\mathbf{u}_{i+1}^{(n)}$$

2. Έλεγχος κριτηρίου σύγκλισης: εάν δεν ικανοποιείται το κριτήριο, συνέχεια στα βήματα Γ.3 έως Γ.7, αλλιώς πήγαινε στην ενότητα Δ.
3. Υπολογισμός ενεργού τέμνουσας δυσκαμψίας:

$$\hat{\mathbf{k}}_{T(i+1)}^{(n)} = \mathbf{k}_{T(i+1)}^{(n)} + \alpha_1$$

4. Υπολογισμός πρόσθετης μετατόπισης από επίλυση της εξίσωσης:

$$\hat{\mathbf{k}}_{T(i+1)}^{(n)} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \hat{\mathbf{R}}_{(i+1)}^{(n)} \rightarrow \Delta \mathbf{u}^{(n)}$$

5. Υπολογισμός νέας εκτίμησης για τη μετατόπιση:

$$\mathbf{u}_{i+1}^{(n+1)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(n)} + \Delta \mathbf{u}^{(n)}$$

6. Καθορισμός της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος:

$$\mathbf{f}_{s(i+1)}^{(n+1)}, \mathbf{k}_{T(i+1)}^{(n+1)}$$

7. Αντικατάσταση του δείκτη n με $n + 1$ και επανάληψη βημάτων Γ.1 έως Γ.6; αποθήκευση της τελευταίας εκτίμησης $\mathbf{u}_{i+1}^{(n+1)}$ ως $\mathbf{u}_{i+1}$.

Δ. Υπολογισμός ταχυτήτων και επιταχύνσεων::

1.

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_i$$

2.

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta (\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_i$$

Επανάληψη για το επόμενο χρονικό βήμα. Αντικατάσταση του δείκτη i με $i + 1$ και εφαρμογή των ενοτήτων Β. έως Δ. για το επόμενο χρονικό βήμα.

2.4 Τρισδιάστατο Στοιχείο Δοκού Συγκεντρωμένης Πλαστικότητας

Η αντιμετώπιση των κατασκευών ως συνεχή συστήματα απαιτεί την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με δεδομένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, γεγονός που αποτελεί δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα ακόμη και για μεμονωμένα δομικά στοιχεία. Λύση σε αυτό, έδωσε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method – FEM). Σε γενικές γραμμές, η κατασκευή διαιρείται σε μικρά στοιχεία, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία, τους κόμβους, όπου εξασφαλίζεται η συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (μετατοπίσεων, στροφών) και η ισορροπία των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων.

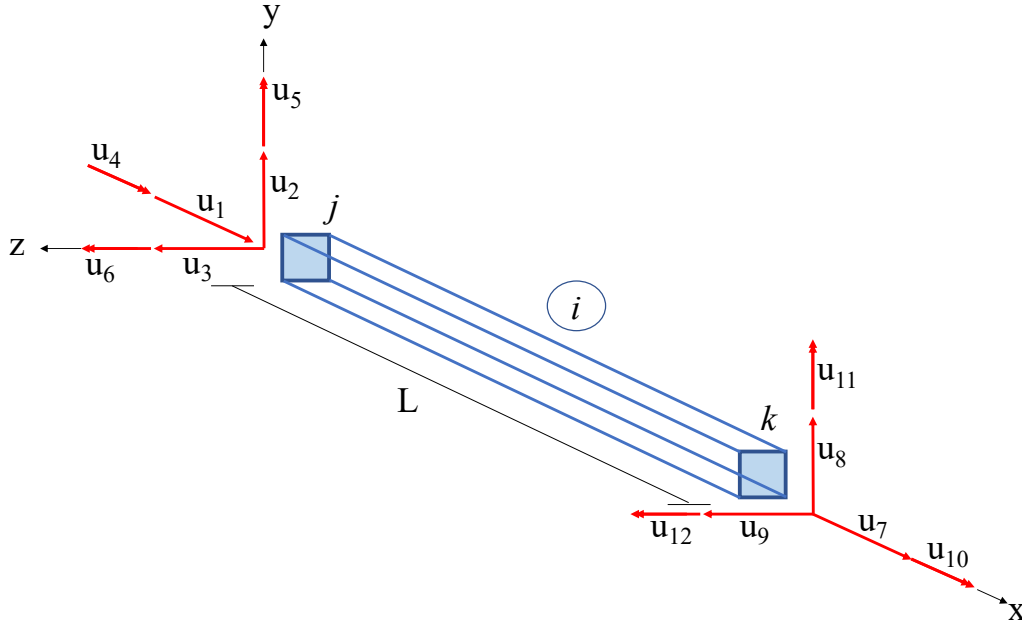
Μετά τη διακριτοποίηση, γίνεται η παραδοχή πως η συνάρτηση του πεδίου μετακινήσεων μεταβάλλεται σύμφωνα με γνωστό νόμο, που εκφράζεται ως επαλληλία των συναρτήσεων σχήματος, που αντιστοιχούν σε μοναδιαίες τιμές των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου. Ο formalισμός της μεθόδου, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας και θα παρουσιαστεί αργότερα, συνοπτικά μόνο, η εξαγωγή των μητρώων του στοιχείου χωρικού πλαισίου. Θα παρουσιαστούν οι σχέσεις των συναρτήσεων σχήματος, οι εκφράσεις ελαστικής και κινητικής ενέργειας συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων (επικόμβιων μετακινήσεων) και στη συνέχεια θα μορφωθούν τα μητρώα α) Στιβαρότητας, β) Μάζας, γ) Απόσβεσης.

Θεωρούμε το στοιχείο χωρικού πλαισίου σταθερής διατομής του Σχ.2.3. Ο άξονας του στοιχείου i ορίζει τον τοπικό άξονα x , ενώ οι τοπικοί άξονες y και z βρίσκονται στα κύρια επίπεδα κάμψης του. Οι κόμβοι στα άκρα του στοιχείου υφίστανται 6 μετακινήσεις στον χώρο (3 μετατοπίσεις και 3 στροφές). Οι βαθμοί ελευθερίας επομένως του στοιχείου (γενικευμένες συντεταγμένες) είναι 12, 6 σε κάθε άκρο, η αρίθμηση των οποίων φαίνεται στο Σχ.2.3. Το διάνυσμα επομένως των επικόμβιων μετακινήσεων είναι:

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11} \ u_{12}\}^T \quad (2.50)$$

Οι μετατοπίσεις u_1 και u_7 προκαλούν αξονική παραμόρφωση στη ράβδο, οι u_4 , u_{10} στρεπτική, ενώ οι u_2 , u_6 , u_8 , u_{12} κάμψη στο επίπεδο $x - y$ και οι u_3 , u_5 , u_9 , u_{11} κάμψη στο επίπεδο $x - z$. Εκφράζουμε την αξονική μετατόπιση του στοιχείου με τη μορφή:

$$u(x, t) = u_1 \psi_1(x) + u_7 \psi_7(x) \quad (2.51)$$



Σχήμα 2.3: Επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης

Οι συναρτήσεις σχήματος ψ_1, ψ_7 μπορούν να υπολογιστούν από την ισορροπία απειροστού στοιχείου dx (Σχήμα 2.4). Οι προκύπτουσες εκφράσεις είναι:

$$\psi_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2.52)$$

$$\psi_7(x) = \frac{x}{L} \quad (2.53)$$

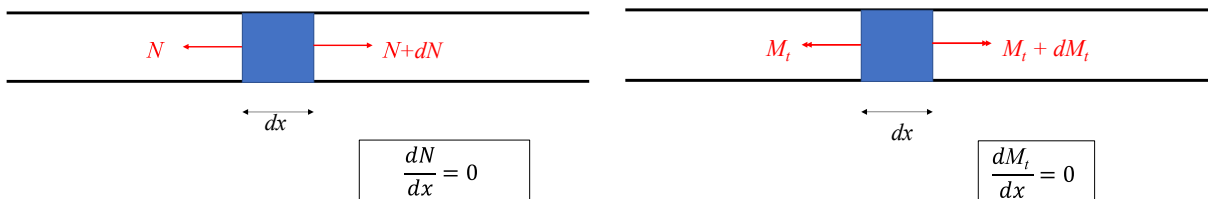
Η στρόφη της διατομής σε θέση x , συνεπεία των στροφών u_4 και u_{10} γράφεται ως:

$$\theta(x, t) = u_4 \psi_4(x) + u_{10} \psi_{10}(x) \quad (2.54)$$

Πάλι, οι συναρτήσεις σχήματος ψ_4, ψ_{10} θα προκύψουν ως η λύση της εξίσωσης ισορροπίας δοκού σταθερής διατομής, που υποβάλλεται στις στροφές u_4 και u_{10} (Σχήμα 2.4).

$$\psi_4(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \psi_1(x) \quad (2.55)$$

$$\psi_{10}(x) = \frac{x}{L} = \psi_7(x) \quad (2.56)$$



Σχήμα 2.4: Αξονική (αριστερά) και στρεπτική (δεξιά) ισορροπία στοιχείου απειροστού μήκους dx

Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις κατά τους άξονες y και z , $v(x, t)$ και $w(x, t)$, γράφονται:

$$v(x, t) = u_2 \psi_2(x) + u_6 \psi_6(x) + u_8 \psi_8(x) + u_{12} \psi_{12}(x) \quad (2.57)$$

$$w(x, t) = u_3 \psi_3(x) + u_5 \psi_5(x) + u_9 \psi_9(x) + u_{11} \psi_{11}(x) \quad (2.58)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος $\psi_i(x)$ εκφράζουν την ελαστική γραμμή του στοιχείου για $u_i = 1$ όταν $u_j = 0$, για $j \neq i$ και μπορούν να προσδιοριστούν από την επίλυση των προβλημάτων κάμψεως δοκού (Euler – Bernoulli $\rightarrow$ εγκάρσια παραμόρφωση μόνο από έργα εκ κάμψεως).

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \right] = 0 \quad (2.59)$$

Οι εκφράσεις που προκύπτουν είναι:

$$\psi_2(x) = 1 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 = \psi_1(x) \quad (2.60)$$

$$\psi_6(x) = L \left(\frac{x}{L} - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) = -\psi_5(x) \quad (2.61)$$

$$\psi_{12}(x) = L \left(- \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) = -\psi_{11}(x) \quad (2.62)$$

$$\psi_9(x) = 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 = \psi_8(x) \quad (2.63)$$

2.4.1 Ελαστική Ανάλυση

2.4.1.1 Μητρώο Στιβαρότητας – Ελαστικές Ιδιότητες

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε για τη δοκό ότι ισχύουν οι παραδοχές Euler-Bernoulli και θα αγνοήσουμε την ελαστική ενέργεια λόγω διάτμησης. Η ελαστική ενέργεια του στοιχείου, επομένως είναι:

$$U = U_a + U_t + U_{by} + U_{bz}, \quad (2.64)$$

όπου U_a, U_t, U_{by}, U_{bz} , είναι η ελαστική ενέργεια λόγω αξονικής παραμόρφωσης, στρέψης, κάμψης στο επίπεδο $x - y$ και $x - z$, αντιστοίχως. Οι επιμέρους συνιστώσες της ελαστικής ενέργειας δίνονται από τις σχέσεις:

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L EA [u'(x, t)]^2 dx \quad (2.65)$$

$$U_t = \frac{1}{2} GI_t [\theta'(x, t)]^2 L \quad (2.66)$$

$$U_{by} = \frac{1}{2} \int_0^L EI [v''(x, t)]^2 dx \quad (2.67)$$

$$U_{bz} = \frac{1}{2} \int_0^L EI [w''(x, t)]^2 dx \quad (2.68)$$

επομένως

$$U(u_1, \dots, u_{12}) = \frac{1}{2} \int_0^L EA [u'(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} GI_t [\theta'(x, t)]^2 L + \frac{1}{2} \int_0^L EI [v''(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI [w''(x, t)]^2 dx \quad (2.69)$$

Οι επικόμβιες ελαστικές δυνάμεις λαμβάνονται με παραγωγή της ανωτέρω σχέσης ως προς $u_i, i = 1, 2, \dots, 12$. Οι δείκτες δυσκαμψίας (ορίσματα του μητρώου στιβαρότητας) προκύπτουν ως οι συντελεστές των γενικευμένων συντεταγμένων στις σχέσεις των ελαστικών δυνάμεων ($F_{el,i}(u)$) και δίδονται από τις σχέσεις:

$$k_{ij} = \int_0^L EA \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx, \quad i, j = 1, 7 \quad (2.70)$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi''_i(x) \psi''_j(x) dx, \quad i, j = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\} \quad (2.71)$$

$$k_{ij} = \int_0^L GI \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx, \quad i, j = 4, 10 \quad (2.72)$$

Για το στοιχείο χωρικού πλαισίου προκύπτει λοιπόν το 12x12 μητρώο στιβαρότητας:

$$\mathbf{k}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{jj}^i & \mathbf{k}_{jk}^i \\ \mathbf{k}_{kj}^i & \mathbf{k}_{kk}^i \end{bmatrix}$$

$$k_{jj}^i = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 I_z & 0 & 0 & 0 & 6 L I_z \\ 0 & 0 & 12 I_y & 0 & -6 L I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G}{E} L^2 I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 L I_y & 0 & 4 L^2 I_y & 0 \\ 0 & 6 L I_z & 0 & 0 & 0 & 4 L^2 I_z \end{bmatrix}$$

$$k_{kk}^i = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 I_z & 0 & 0 & 0 & -6 L I_z \\ 0 & 0 & 12 I_y & 0 & 6 L I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G}{E} L^2 I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 L I_y & 0 & 4 L^2 I_y & 0 \\ 0 & -6 L I_z & 0 & 0 & 0 & 4 L^2 I_z \end{bmatrix}$$

$$k_{kj}^i = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} -L^2 A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 I_z & 0 & 0 & 0 & -6 L I_z \\ 0 & 0 & -12 I_y & 0 & 6 L I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G}{E} L^2 I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 L I_y & 0 & 2 L^2 I_y & 0 \\ 0 & 6 L I_z & 0 & 0 & 0 & 2 L^2 I_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{jk}^i = \left[\mathbf{k}_{kj}^i \right]^T$$

Όπου A το εμβαδό της διατομής του στοιχείου, I_y, I_z οι ροπές αδρανείας της διατομής ως προς τους κύριους άξονες y, z αντιστοίχως, και I_t η σταθερά στρέψης της διατομής.

2.4.1.2 Μητρώο Μάζας – Αδρανειακές Ιδιότητες

Οι επικόμβιες αδρανειακές δυνάμεις, μπορούν να προκύψουν με δύο διαφορετικές παραδοχές ως προς την κατανομή της μάζας του στοιχείου. Στην πρώτη δεχόμαστε συνεχή κατανομή μάζας μέσα στο στοιχείο (Παραδοχή Κατανεμημένης Μάζας – Consistent Mass Representation), ενώ στη δεύτερη συγκεντρωμένη όλη τη μάζα του στοιχείου στους κόμβους του (Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών – Lumped Mass Representation).

Α) Παραδοχή Κατανεμημένης Μάζας

Κατά την κίνηση, η στοιχειώδης μάζα $m(x)dx$ υφίσταται τέσσερις μετακινήσεις, τις τρεις μετατοπίσεις u, v, w και τη στροφή θ . Επομένως, η κινητική ενέργεια του στοιχείου δίνεται από την έκφραση:

$$K[\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{12}] = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{u}^2(x, t) + \dot{v}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)] dx + \frac{1}{2} \int_0^L I_0 \dot{\theta}^2(x, t) dx \quad (2.73)$$

Οι επικόμβιες αδρανειακές δυνάμεις προκύπτουν ως

$$f_{I,i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_i} \quad (2.74)$$

και το προκύπτον «συνεπές» μητρώο μάζας (consistent mass matrix) είναι:

$$\mathbf{m}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{jj}^i & \mathbf{m}_{jk}^i \\ \mathbf{m}_{kj}^i & \mathbf{m}_{kk}^i \end{bmatrix}$$

$$m_{jj}^i = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140r_g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{kk}^i = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140r_g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{kj}^i = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70r_g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_{jk}^i = \left[\mathbf{m}_{kj}^i \right]^T$$

όπου $m = \rho AL$ είναι η ολική μάζα του στοιχείου i και $r_g = \sqrt{I_0/A}$ η ακτίνα αδράνειας της διατομής.

Β) Παραδοχή Συγκεντρωμένων Μαζών

Η κινητική ενέργεια του στοιχείου είναι:

$$K[\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{12}] = \frac{m_1}{2} [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2] + \frac{m_2}{2} [\dot{u}_7^2 + \dot{u}_8^2 + \dot{u}_9^2] \quad (2.75)$$

όπου

$$m_1 = \int_0^L m(x) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx,$$

$$m_2 = \int_0^L m(x) \frac{x}{L} dx$$

Και το μητρώο μάζας είναι:

$$m^i = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4.1.3 Μητρώο Απόσβεσης

Όταν το μητρώο απόσβεσης είναι ανάλογο της μάζας και της στιβαρότητας της κατασκευής, τότε ονομάζεται μητρώο απόσβεσης Rayleigh.

$$\mathbf{C}_s = a\mathbf{M}_s + \beta\mathbf{K}_s \quad (2.76)$$

Κανονικοποιώντας την παραπάνω εξίσωση 2.76 ως προς τη μάζα, προκύπτει:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{C}_s \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \omega_{n1} & & \\ & \ddots & \\ & & 2\zeta_N \omega_{nN} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{nN}^2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

όπου ω_{nj}^2 είναι μια ιδιοτιμή (το τετράγωνο της ιδιοσυχνότητας) και οι στήλες του μητρώου $\mathbf{R}$ είναι τα κανονικοποιημένα ως προς τη μάζα ιδιοδιανύσματα του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών:

$$[\mathbf{K}_s - \omega_{nj}^2 \mathbf{M}_s] \mathbf{r}_j = 0$$

Από τις εξισώσεις 2.77 εύκολα προκύπτει ότι οι λόγοι απόσβεσης ικανοποιούν τη σχέση:

$$\zeta_j = \frac{a}{2} \frac{1}{\omega_{nj}} + \frac{\beta}{2} \omega_{nj} \quad (2.78)$$

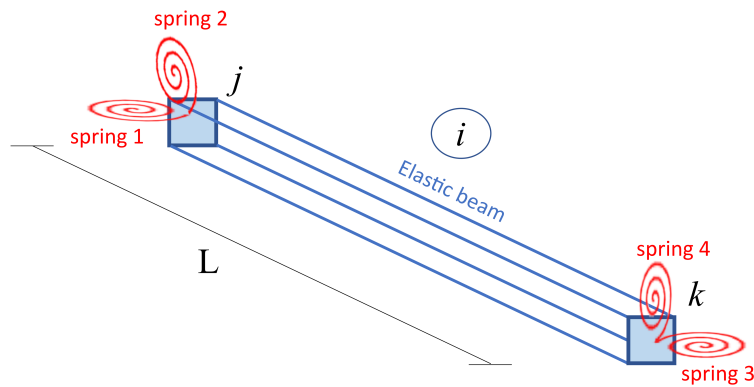
και άρα οι συντελεστές απόσβεσης Rayleigh (a, β) μπορούν να καθοριστούν με κριτήριο οι λόγοι απόσβεσης ζ_j να έχουν μια προκαθορισμένη (επιθυμητή) τιμή σε δύο ιδιομορφές. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το μητρώο απόσβεσης Rayleigh έχει την ίδια ταινιοειδή μορφή (banded form) με τα μητρώα μάζας και στιβαρότητας. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι με τη χρήση απόσβεσης Rayleigh, οι εσωτερικές δυνάμεις απόσβεσης εφαρμόζονται μόνο μεταξύ συντεταγμένων του συστήματος που ενώνονται με δομικά στοιχεία. Επομένως πολύ εύκολα μορφώνεται και το μητρώο $\mathbf{c}^i$ του στοιχείου χωρικού πλαισίου, μέσω των μητρώων του $\mathbf{m}^i$ και $\mathbf{k}^i$.

$$\mathbf{C}^i = a\mathbf{M}^i + \beta\mathbf{K}^i \quad (2.79)$$

2.4.2 Ανελαστική Ανάλυση

2.4.2.1 Μητρώο Στιβαρότητας

Για τις ανελαστικές αναλύσεις η μόρφωση του μητρώου μάζας δεν επηρεάζεται. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένα στοιχείο το οποίο μπορεί να μεταβάλει τη δυσκαμψία του λόγω πλαστικοποίησης. Επιλέγεται ένα στοιχείο δοκού υπό την παραδοχή συγκεντρωμένης πλαστικότητας, μοντελοποιώντας στα άκρα αυτού ελατήρια με μη γραμμική σχέση δύναμης – μετατόπισης. Επομένως το στοιχείο μας θα αποτελείται από ένα στοιχείο δοκού, και δύο ελατήρια στους κόμβους αρχής και πέρατός του.



Σχήμα 2.5: Στοιχείο δοκού με ανελαστικά ελατήρια στους κόμβους αρχής και πέρατος

Για κάθε ελατήριο (s), ισχύει μια καταστατική εξίσωση της μορφής:

$$M_{y\text{ or } z, j} = M_{s, j}(\phi_{y\text{ or } z, j}) \quad (2.80)$$

$$M_{y\text{ or } z, k} = M_{s, k}(\phi_{y\text{ or } z, k}) \quad (2.81)$$

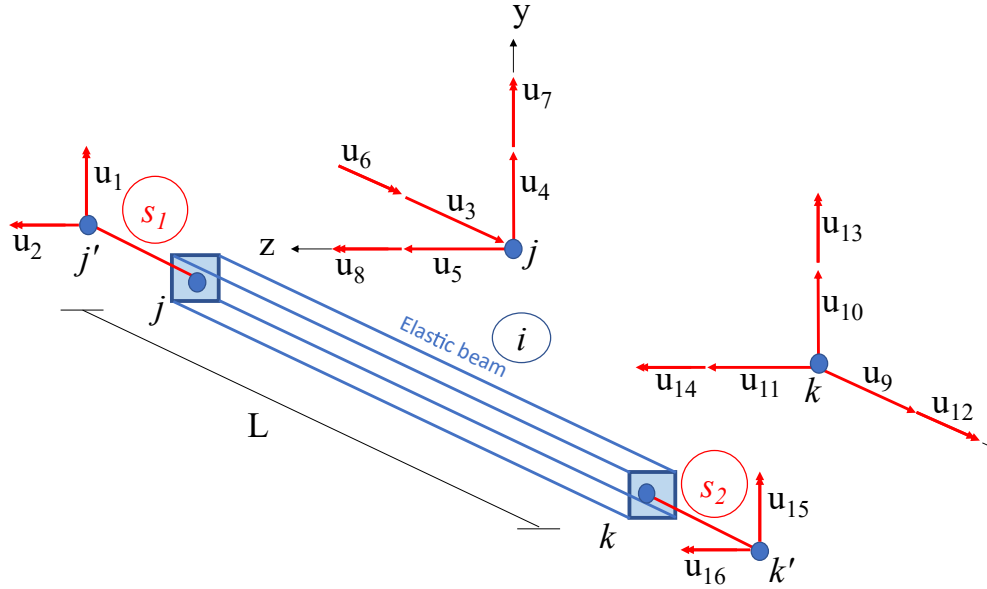
όπου $M_{y\text{ or } z, j}$, $M_{y\text{ or } z, k}$ είναι οι ροπές στα άκρα του στοιχείου και ϕ_j, ϕ_k οι στροφές των ελατηρίων στα άκρα j και k , αντιστοίχως. Θα δεχτούμε, συγκεκριμένα, ότι η ροπή σε κάθε ελατήριο, ανά διεύθυνση, δίνεται από τη σχέση:

$$M_{y\text{ or } z, j} = k_{y\text{ or } z, j, T} \times \phi_{y\text{ or } z, j} \quad (2.82)$$

$$M_{y\text{ or } z, k} = k_{y\text{ or } z, k, T} \times \phi_{y\text{ or } z, k} \quad (2.83)$$

με $k_{y\text{ or } z, j, T}$, $k_{y\text{ or } z, k, T}$ τις τέμνουσες στροφικές δυσκαμψίες των ελατηρίων, ανά διεύθυνση (y ή z). Επομένως, θα χρειαστεί να μορφώσουμε το μητρώο δυσκαμψίας μίας «κατασκευής» που είναι ο συνδυασμός ενός κλασικού ελαστικού στοιχείου δοκού και δύο στοιχείων δοκού μηδενικού μήκους με μόνο στροφικούς β.ε., συνδεδεμένων εν σειρά (Σχ.2.6).

Το μητρώο δυσκαμψίας του ελαστικού μέρους είναι ήδη γνωστό. Για το πλασματικό στοιχείο δοκού που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των ελατηρίων, έχουμε ένα στοιχείο με 4 β.ε. (μόνο στροφικούς)



Σχήμα 2.6: Προσομοίωση των ανελαστικών ελατηρίων με στοιχεία δοκού μηδενικού μήκους

του οποίου το μητρώο στιβαρότητας θα είναι ένα μητρώο 4×4 που θα υπεισέρχεται στη σχέση ροπών – στρεφών του ελατηρίου ως εξής (διατύπωση μόνο για το στοιχείο s_1):

$$\begin{bmatrix} M_{y,j'} \\ M_{z,j'} \\ M_{y,j} \\ M_{z,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{y,j'} \\ \varphi_{z,j'} \\ \varphi_{y,j} \\ \varphi_{z,j} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Τα ορίσματα του μητρώου στιβαρότητας υπολογίζονται από τον ορισμό των δεικτών δυσκαμψίας, δηλαδή: $k_{mn} = M_m$ για $\phi_n = 1$ και $\phi_i = 0$, $i \neq n$. Επομένως, εκμεταλλευόμενοι τον ορισμό αυτό, καθώς και την καταστατική σχέση του ελατηρίου 2.82, καταλήγουμε στο μητρώο στιβαρότητας για το πλασματικό στοιχείο:

$$\begin{bmatrix} k_{y,T} & 0 & -k_{y,T} & 0 \\ 0 & k_{z,T} & 0 & -k_{z,T} \\ -k_{y,T} & 0 & k_{y,T} & 0 \\ 0 & -k_{z,T} & 0 & k_{z,T} \end{bmatrix}$$

Μπορούμε πλέον να μορφώσουμε το 16×16 μητρώο στιβαρότητας αυτού του σύνθετου στοιχείου. Στη συνέχεια, θα πραγματοποιήσουμε στατική συμπίκνωση (static condensation) στους β.ε. 7,8,13,14 (Σχ.2.6) και θα καταλήξουμε στο τελικό 12×12 μητρώο στιβαρότητας του ανελαστικού στοιχείου χωρικού πλαισίου. Η διαδικασία πραγματοποιήθηκε με χρήση της γλώσσας συμβολικών μαθηματικών Maple και δε θα παρουσιαστεί χάριν απλότητας.

2.4.2.2 Προσομοίωση Ανελαστικής Συμπεριφοράς

Στις μη γραμμικές αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, υιοθετήθηκε ένα απλό κριτήριο διαρροής $f(M, M_y) = 0 \rightarrow M/M_y - 1 = 0$, υπό την παραδοχή της συγκεντρωμένης πλαστικότητας. Επομένως στο βήμα καθορισμού της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος, με δεδομένη την τρέχουσα εκτίμηση της καθολικής απόκρισης του συστήματος, γινόταν προσπέλαση σε επίπεδο στοιχείου, προκειμένου να καθοριστεί η εντατική κατάσταση αυτού και να σημειωθεί εάν ο εκάστοτε κόμβος του στοιχείου έχει πλαστικοποιηθεί. Στη συνέχεια ανάλογα με το πόρισμα του προηγούμενου ελέγχου, μορφωνόταν εκ νέου το

μητρώο στιβαρότητας κάθε στοιχείου στο οποίο είχε επέλθει διαρροή, λαμβάνοντας υπόψη την ή τις πλαστικές αρθρώσεις που είχαν δημιουργηθεί σε αυτό. Ακολουθούσε η μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας της κατασκευής και η διαδικασία προχωρούσε.

Για την προσομοίωση της υστέρησης χρησιμοποιήθηκε ένα υστερητικό προσομοίωμα τύπου Bouc-Wen. Σύμφωνα με αυτό, η δύναμη επαναφοράς (στην περίπτωση μας ροπή) δίνεται από τη σχέση:

$$M(t) = \alpha k_i \phi(t) + (1 - \alpha) k_i z(t) \quad (2.85)$$

όπου $\alpha = k_f/k_i$ είναι ο λόγος μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, k_i η (ελαστική) δυσκαμψία προ διαρροής, k_f η δυσκαμψία μετά τη διαρροή, ϕ η καμπυλότητα και $z(t)$ η υστερητική παράμετρος (ή υστερητική παραμόρφωση). Η υστερητική αυτή παράμετρος περιγράφεται από την ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση:

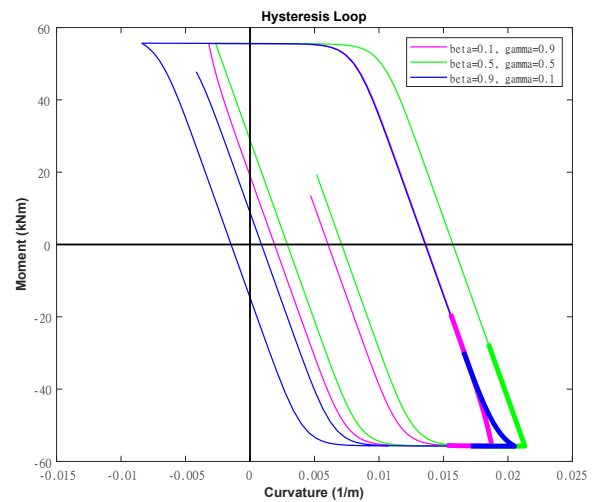
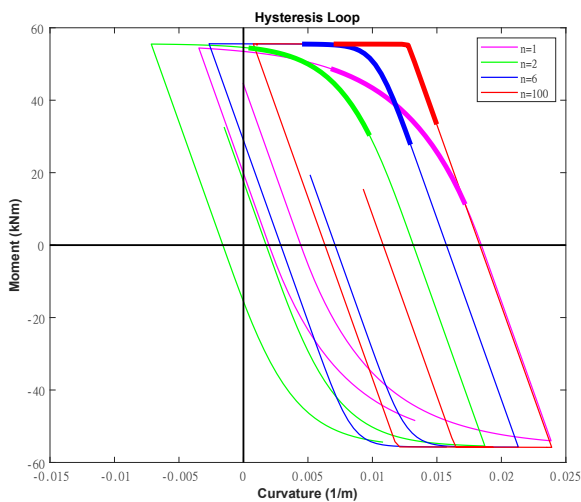
$$\dot{z}(t) = \dot{\phi}(t) \left[1 - [\beta \text{sign}(z(t)\dot{\phi}(t)) + \gamma] \left| \frac{z(t)}{z_y} \right|^n \right] \quad (2.86)$$

όπου β, γ και n είναι αδιάστατες ποσότητες που καθορίζουν τη συμπεριφορά του υστερητικού μοντέλου και $z_y = \phi_y = M_y/EI$ η καμπυλότητα στη διαρροή. Για παράδειγμα, για $n = \infty$ προκύπτει το μοντέλο ελαστοπλαστικής υστέρησης. Επομένως η δύναμη επαναφοράς μπορεί να εκφραστεί με δύο σκέλη ως:

$$M^{el}(t) = \alpha k_i \phi(t) \quad (2.87)$$

$$M^h(t) = (1 - \alpha) k_i z(t) \quad (2.88)$$

Στο Σχ.2.7 φαίνονται βρόγχοι υστέρησης για διάφορες τιμές των παραμέτρων β, γ, n . Για τις αναλύσεις υιοθετήθηκαν οι ακόλουθες τιμές: $\alpha = 0.001$, $\beta = \gamma = 0.5$, και $n = 6$.



(α') Βρόγχοι υστέρησης για διάφορες τιμές της παραμέτρου n , με $\alpha = \beta = 0.5$. (β') Βρόγχοι υστέρησης για διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β , με $n = 6$.

Σχήμα 2.7: Παράμετροι συμπεριφοράς του υστερητικού μοντέλου.

Κεφάλαιο 3

ΜΕΙΩΣΗ ΤΑΞΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ - MODEL ORDER REDUCTION

3.1 Προβολική Μείωση Τάξης (Projective M.O.R)

Η προβολική μείωση τάξης αποτελεί την κεντρική ιδέα για την ελάττωση των βαθμών ελευθερίας ενός δυναμικού συστήματος από N σε n , με $n \ll N$. Καθώς η προβολή μπορεί να ερμηνευθεί σαν μια προσέγγιση Galerkin, μοιράζεται το ίδιο θεωρητικό υπόβαθρο με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (F.E.M). Σε συνέχεια της F.E.M, στην οποία το γενικευμένο δυναμικό σύστημα απομειώνεται σε ένα διακριτοποιημένο σύστημα διάστασης N , η προβολική M.O.R. επαναλαμβάνει τη διαδικασία για να μειώσει περαιτέρω τη διάσταση από N σε n .

Σημείο εκκίνησης είναι η ημι-διακριτοποιημένη εξίσωση κίνησης:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.1)$$

όπου $\mathbf{M}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, τα μητρώα μάζας και απόσβεσης, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ το διάνυσμα των μη γραμμικών δυνάμεων επαναφοράς, $\mathbf{f}_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^N$ το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων και $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ το διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων.

Σε πολλά προβλήματα μηχανικού, η διάσταση N μπορεί να γίνει περιοριστικά μεγάλη, με μεγάλο αντίκτυπο στον υπολογιστικό χρόνο. Η διάσταση του δυναμικού προβλήματος, ωστόσο, είναι συχνά πολύ μικρότερη του N , δηλαδή οι προκύπτουσες μετατοπίσεις $\mathbf{u}$ δεσμεύονται σε έναν μικρότερο υπόχωρο που περιέχει όλες τις δυνατές καταστάσεις – θέσεις του συστήματος. Εκμεταλλευόμενοι αυτό το γεγονός θα προχωρήσουμε στη μεθοδολογία μείωσης τάξης.

Έστω Ω ο υπόχωρος στον οποίο ανήκει η λύση $\mathbf{u}$, τότε μπορεί να εκφρασθεί ως το γραμμικό εύρος (linear span¹) ενός συνόλου n διανυσμάτων βάσης, δηλαδή $\Omega = \text{span}(\mathbf{S})$. Συγκεντρώνοντας αυτά τα διανύσματα σε ένα μητρώο $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ και εκμεταλλευόμενοι ότι το διάνυσμα μετατοπίσεων $\mathbf{u}$ μπορεί να προσεγγισθεί από έναν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης, μπορούμε να εκφράσουμε τις επικόμβιες μετατοπίσεις συναρτήσει της βάσης $\mathbf{B}$ και των νέων γενικευμένων συντεταγμένων $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ως:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (3.2)$$

Αυτή η προσέγγιση αποτελεί τη βασική ιδέα για την απομείωση τάξης. Το μητρώο $\mathbf{B}$ καλείται μειωμένη βάση ή βάση μείωσης (reduced basis). Αντικαθιστώντας την άνω σχέση 3.2 στην εξίσωση κίνησης 3.1, προκύπτει ένα υπόλοιπο $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$, καθώς οι εξισώσεις δεν μπορούν στη γενική περίπτωση να ικανοποιηθούν από τους n αγνώστους του διανύσματος $\mathbf{q}$:

¹Ως γραμμικό εύρος ενός συνόλου διανυσμάτων $\mathbf{S}$ ορίζουμε και συμβολίζουμε με $\text{span}(\mathbf{S})$, τον μικρότερο γραμμικό υπόχωρο που περιέχει αυτό το σύνολο διανυσμάτων. Μπορεί να γραφεί και ως το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του συνόλου $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{M}\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{B}\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{e} \quad (3.3)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τώρα την 3.3 με $\mathbf{B}^T$ προκύπτει:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \mathbf{f}(\mathbf{B} \mathbf{q}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{B}^T \mathbf{e} \quad (3.4)$$

Συνήθης πρακτική είναι η απαίτηση το υπόλοιπο $\mathbf{e}$ να είναι ορθογώνιο ως προς $C(\mathbf{B})$, δηλαδή τον χώρο στηλών (column space) του μητρώου $\mathbf{B}$, ο οποίος περιγράφει τον χώρο όλων των πιθανών διανυσμάτων $\mathbf{u}$, δηλαδή:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Επομένως, το υπόλοιπο μπορεί πλέον να απαλειφθεί από την εξίσωση 3.4, οδηγώντας στην εξίσωση κίνησης μειωμένης τάξης (reduced order equation of motion), διάστασης n αντί για N .

$$\underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B}}_{\mathbf{M}_r} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}}_{\mathbf{C}_r} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{f}(\mathbf{B} \mathbf{q})}_{\mathbf{f}_r(\mathbf{q})} = \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}}_{\mathbf{f}_{\text{ext},r}} \quad (3.6)$$

όπου $\mathbf{M}_r, \mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τα μειωμένα (reduced) μητρώα μάζας και απόσβεσης, αντίστοιχα και $\mathbf{f}_r, \mathbf{f}_{\text{ext},r} \in \mathbb{R}^n$ τα μειωμένα διανύσματα εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων, αντίστοιχα.

Άρα, το πλήθος των γενικευμένων συντεταγμένων μειώθηκε πλέον από N σε n . Εάν το n είναι πολύ μικρότερο από το N , τότε το υπολογιστικό κόστος (computational cost) της χρονικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης (Παράγραφος 2.3), καθώς και άλλων διαδικασιών της ανάλυσης, μειώνεται δραστικά².

Για την ανάλυση γραμμικών δυναμικών συστημάτων υπάρχουν διάφορες μέθοδοι μείωσης της τάξης τους, με πλέον γνωστή την ιδιομορφική ανάλυση (modal truncation). Τα συστήματα αυτά χαρακτηρίζονται από σταθερά μητρώα μάζας, στιβαρότητας και απόσβεσης. Επομένως, η μείωση της τάξης τους θα εξαρτηθεί ρητά ή μη από τις ιδιότητες του συστήματος. Για μη γραμμικά συστήματα, ωστόσο, αυτές οι ιδιότητες συχνά δεν ορίζονται, ή αν ορίζονται είναι πολύ «ακριβές υπολογιστικά» (computationally expensive). Άρα, η διαδικασία εύρεσης μίας μειωμένης βάσης $\mathbf{B}$ για ένα μη γραμμικό σύστημα διαφέρει από τις αντίστοιχες μεθόδους για γραμμικά συστήματα. Εφόσον τα μη γραμμικά συστήματα δεν μπορούν να περιγραφούν πλήρως από μητρώα – ιδιότητες, χρησιμοποιούνται συχνά μέθοδοι οδηγούμενες από τα δεδομένα (data-driven). Σε πρώτο στάδιο, διεξάγονται προσομοιώσεις του συστήματος πλήρους τάξης (Full Order Model – FOM), από τις οποίες τα δεδομένα, αναλύονται για να προκύψει το μητρώο $\mathbf{B}$. Η πιο διακεκριμένη τέτοια μέθοδος είναι η Ορθή Ορθογωνική Παραγοντοποίηση (Proper Orthogonal Decomposition – POD).

3.2 Μέθοδος Επαλληλίας Ιδιομορφών - Modal Superposition

Η παλαιότερη ίσως τεχνική μείωσης τάξης προσομοιώματος για γραμμικά συστήματα (Παράγραφος 2.2.1) είναι η ιδιομορφική ανάλυση. Βασίζεται στην αρχή, ότι το δυναμικό σύστημα προσεγγίζεται από μία υπέρθεση ιδιομορφικών συντεταγμένων. Αυτή η κεντρική ιδέα προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Λόρδο Rayleigh [10], σύμφωνα με τον οποίο οι τρόποι ταλάντωσης (vibration modes) υπολογίζονταν με αναλυτικό τρόπο για απλές κατασκευές όπως ράβδοι, δοκοί και πλάκες, ακόμα και πριν την ανάπτυξη της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων.

²Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος αριθμητικής ολοκλήρωσης Newmark προσεγγιστικά χαρακτηρίζεται από υπολογιστική πολυπλοκότητα (computational complexity): $O(n^3)$ [47], επομένως υποδεκαπλασιασμός της διάστασης των μητρώων οδηγεί σε 10^3 επιτάχυνση της μεθόδου.

3.2.1 Μεθοδολογία

Βασική ιδέα αποτελεί η ανάλυση της ελεύθερης κίνησης του ομογενούς συστήματος χωρίς απόσβεση:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Η εξίσωση 3.7 επιδέχεται αναλυτική λύση. Δοκιμάζοντας μία λύση της μορφής:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}_i \cos(\omega_i t + \alpha) \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας στην 3.7 και απλοποιώντας τον χρονοεξαρτώμενο όρο $\cos(\omega_i t + \alpha)$, οδηγούμαστε στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών (generalised eigenvalue problem):

$$\omega_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i \quad (3.9)$$

όπου οι λύσεις ω_i^2 είναι οι χωρίς απόσβεση ιδιοσυχνότητες (eigenfrequencies) και $\boldsymbol{\phi}_i$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (eigenvectors) του συστήματος που περιγράφεται από την 3.7. Τα ιδιοδιανύσματα αυτά, τα οποία συχνά καλούνται και μορφές ταλάντωσης ή ιδιομορφές (vibration modes, eigenmodes, mode shapes), αποτελούν τις χωρικές λύσεις του ομογενούς προβλήματος 3.7, οι οποίες ταλαντώνονται με την αντίστοιχη συχνότητα ω_i , σύμφωνα με την 3.8.

Οι λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών 3.9, ωστόσο, δεν είναι μοναδικές, αφού δεν έχει οριστεί η νόρμα του ιδιοδιανύσματος $\boldsymbol{\phi}_i$. Συχνά³ χρησιμοποιείται η κανονικοποίηση ως προς τη μάζα, η οποία θέτει το μήκος του ιδιοδιανύσματος $\boldsymbol{\phi}_i$ ίσο με τη μονάδα στην $\mathbf{M}$ -νόρμα, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i = 1 \quad (3.10)$$

Μια επιπλέον ιδιότητα που έχουν οι μορφές ταλάντωσης $\boldsymbol{\phi}_i$ είναι η ορθογωνικότητα τόσο ως προς τη μάζα όσο και τη δυσκαμψία, δηλαδή στην $\mathbf{M}$ -νόρμα και στην $\mathbf{K}$ -νόρμα οι μορφές είναι ορθογώνιες η μία προς την άλλη [29]. Μορφώνοντας ένα μητρώο από όλες τις ιδιομορφές $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N]$ μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας μέσω του μετασχηματισμού με βάση το $\boldsymbol{\Phi}$. Προφανώς, το μετασχηματισμένο μητρώο μάζας είναι το μοναδιαίο μητρώο, λόγω της 3.10. Ο μετασχηματισμός του μητρώου στιβαρότητας αποδίδει ένα τετράγωνο διαγώνιο μητρώο $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, το οποίο περιέχει τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Η απομείωση τάξης, λοιπόν, μέσω της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal truncation), πραγματοποιείται συνθέτοντας τη μειωμένη βάση $\mathbf{B}$ με ορισμένα επιλεγμένα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\phi}_i$. Εάν θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα με απόσβεση, για να επιτευχθεί απόζευξη των εξισώσεων κίνησης, θα πρέπει το μητρώο απόσβεσης $\mathbf{C}$ να διαγωνοποιείται κατά την προβολή του σε ιδιομορφικές συντεταγμένες. Με εφαρμογή απόσβεσης Rayleigh 2.76 αυτό επιτυγχάνεται καθώς τα μητρώα $\mathbf{M}$ και $\mathbf{K}$ διαγωνοποιούνται όπως φαίνεται στις 3.11, 3.12. Χρησιμοποιώντας την πλήρη ιδιομορφική βάση $\boldsymbol{\Phi}$ ως τη μειωμένη βάση (reduced basis) $\mathbf{B}$ το σύστημα της εξίσωσης 2.7 γράφεται σε αποζευγμένη (decoupled) μορφή:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \zeta_1 \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_N \omega_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_N^T \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{r}_{\ddot{g}}(t) \quad (3.13)$$

³Για πολυώροφα κτίρια, υιοθετείται και η κανονικοποίηση ως προς τη μέγιστη τιμή μετατόπισης του ανώτερου ορόφου, στη δεσπόζουσα διεύθυνση κίνησης. Ας σημειωθεί όμως ότι η κανονικοποίηση γίνεται περισσότερο για λόγους εποπτικών και δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα.

με ζ_i τους λόγους απόσβεσης. Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα αποζευγμένων εξισώσεων, με τα ιδιομορφικά πλάτη q_i να συγκεντρώνονται στο διάνυσμα $\mathbf{q}$. Όπως φαίνεται και στην 3.13 η ιδιομορφική βάση αποζευγνύει τις εξισώσεις κίνησης σε ανεξάρτητες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Δηλαδή η ιδιομορφική συνιστώσα q_i ισούται με τη μετακίνηση ενός μονοβάθμιου συστήματος με τα δυναμικά χαρακτηριστικά (ιδιοσυχνότητα και λόγο απόσβεσης) της i -ιδιομορφής, εάν αυτό διεγερθεί με τη δεδομένη σεισμική διέγερση, πολλαπλασιασμένη επί έναν συντελεστή (συντελεστής συμμετοχής της ιδιομορφής).

3.2.2 Ιδιομορφικές Μάζες

Η κίνηση κάθε ιδιομορφής ενεργοποιεί ένα ποσοστό της συνολικής μάζας, το οποίο δηλώνει πόσο πολύ ή λίγο συμμετέχει η συγκεκριμένη ιδιομορφή στη συνολική απόκριση. Η μάζα m_i^* που αντιστοιχεί στην κίνηση της i -ιδιομορφής ονομάζεται *ενεργός ιδιομορφική μάζα* και δίνεται από τη σχέση:

$$m_i^* = \frac{(\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}} \quad (3.14)$$

Προκύπτει ότι η ενεργός ιδιομορφική μάζα εξαρτάται από τη διεύθυνση της σεισμικής δύναμης. Για δεδομένη διεύθυνση σεισμού, η ιδιομορφή με τη μεγαλύτερη ιδιομορφική μάζα ονομάζεται *δεσπόζουσα ιδιομορφή*. Το άθροισμα των ενεργών ιδιομορφικών μαζών όλων των τρόπων ταλάντωσης ισούται με τη συνολική μάζα της κατασκευής που ενεργοποιείται στην εξεταζόμενη διεύθυνση σεισμού.

3.2.3 Επιλογή Πλήθους Ιδιομορφών – Διάσταση της Μειωμένης Βάσης

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συμμετοχή των ιδιομορφών στη συνολική απόκριση δεν είναι εξίσου σημαντική για όλους τους τρόπους ταλάντωσης. Συνήθως η συμμετοχή των ανώτερων ιδιομορφών είναι μικρή και μπορεί να αμεληθεί. Σύμφωνα με διάφορους κτιριακούς κανονισμούς, το ελάχιστο πλήθος ιδιομορφών που πρέπει να ληφθούν υπόψη, βασίζεται στο ποσοστό της συνολικής μάζας που ενεργοποιείται από την κίνηση με αυτούς τους τρόπους ταλάντωσης. Επομένως, η βάση μείωσης $\mathbf{B}$ κατασκευάζεται μόνο από k επιλεγμένα ιδιοδιανύσματα, των οποίων η συνολική ιδιομορφική μάζα ξεπερνά το επιθυμητό ποσοστό της συνολικής μάζας⁴. Όπως είναι προφανές, εάν επιλεγούν όλα τα ιδιοδιανύσματα για την κατασκευή της βάσης, τότε η απόκριση θα ταυτίζεται με την απόκριση του αρχικού συστήματος.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της ιδιομορφικής ανάλυσης είναι πως εφόσον σε ιδιομορφικές συντεταγμένες, οι εξισώσεις κίνησης είναι αποζευγμένες, όπως φαίνεται στην 3.13, η παράλειψη κάποιων τρόπων ταλάντωσης, δεν επηρεάζει καθόλου την κίνηση των υπολοίπων που έχουν επιλεγεί για την κατασκευή της μειωμένης βάσης.

3.3 Ορθή Ορθογωνική Παραγοντοποίηση – Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Η μέθοδος POD εμφανίστηκε και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά τη δεκαετία του 1960 στην ρευστοδυναμική, στα πλαίσια έρευνας και ανάλυσης της τύρβης, στον κλάδο που σήμερα ονομάζεται Coherent Turbulent Structures. Στη συνέχεια παρουσιάστηκε από διάφορους επιστήμονες διαφορετικών τομέων ([30], [33], [34], [31], [24]). Η μεθοδολογία λοιπόν είναι γνωστή με διαφορετικά ονόματα όπως: Karhunen - Loève Decomposition, Principal Component Analysis [12], Singular Value Decomposition [11] κ.α.. Πλέον είναι ευρέως διαδεδομένη ως μέθοδος μείωσης τάξης σε προβλήματα τυρβώδους ροής. Ακόμη εφαρμόζεται σε διαδικασίες ελέγχου δυναμικών συστημάτων (dynamic system control), ανίχνευσης βλαβών (damage detection), σε προσεγγίσεις χαμηλότερης τάξης στον τομέα επεξεργασίας εικόνας (image processing), σε προβλήματα διάδοσης θερμότητας (heat transfer problems) και φυσικά μείωση τάξης σε προβλήματα δυναμικής κατασκευών (structural dynamics).

⁴Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν και άλλα κριτήρια τα οποία βασίζονται στις ιδιοσυχνότητες [13] ή στη διέγερση ενός ιδιομορφικού βαθμού ελευθερίας καθώς και κριτήρια που περιορίζουν το σφάλμα της προσέγγισης του πλήρους συστήματος με λιγότερες ιδιομορφικές συντεταγμένες

3.3.1 Μέθοδος των Στιγμιότυπων (Method of Snapshots)

Η μέθοδος των στιγμιότυπων προτάθηκε πρώτη φορά από τον Sirovich [21], [22], [23] και είναι μια αποδοτική μεθοδολογία για την κατασκευή μίας βάσης μείωσης $\mathbf{B}$, από στιγμιότυπα του προσομοιώματος (snapshots). Με τον όρο στιγμιότυπα εννοούνται διακριτές – στιγμιαίες αποτυπώσεις του συστήματος, καθώς αυτό μεταβαίνει από μια παραμορφωμένη κατάσταση σε μία άλλη, συνθέτοντας έτσι μια τροχιά. Η χρήση άλλων μεθόδων, όπως η PCA – Principal Component Analysis, που απαιτούν τον υπολογισμό των ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα συσχέτισης (correlation matrix), είναι υπολογιστικά δύσκολη ή και αδύνατη, όταν η διάσταση N του συστήματος είναι πολύ μεγάλη. Επομένως, στη μέθοδο των στιγμιότυπων, αξιοποιούνται στιγμιότυπα που αποκτούνται από αναλύσεις του προσομοιώματος πλήρους τάξης (FOM) και στη συνέχεια συγκεντρώνονται στον πίνακα στιγμιότυπων (snapshot matrix) ο οποίος έχει τη μορφή:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{u}(t_1)\mathbf{u}(t_2)\dots\mathbf{u}(t_m)] \quad (3.15)$$

όπου η τιμή m , που προσδιορίζει και τον αριθμό των στηλών του πίνακα στιγμιότυπων, αποτελεί το πλήθος των δειγματοληφθέντων χρονικών βημάτων (sampled time steps), για το οποίο γίνεται η ανάλυση του FOM.

3.3.2 Μεθοδολογία POD

Η POD είναι μια μέθοδος οδηγούμενη από τα δεδομένα (data-driven), στόχος της οποίας είναι ο καθορισμός της βέλτιστης μειωμένης βάσης, μέσω της ανάλυσης ενός συνόλου δεδομένων. Στην προκειμένη περίπτωση αυτά τα δεδομένα είναι στιγμιότυπα μετατοπίσεων $\mathbf{u}_s$. Αυτός ο στόχος παραπέμπει σε μία μέθοδο από τα επιστημονικά πεδία της στατιστικής και της μηχανικής μάθησης, την Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA) [12]. Η μέθοδος αυτή κατασκευάζει μία ορθοκανονική βάση ενός υπόχωρου μικρότερης διάστασης, στον οποίο το σφάλμα της ορθής προβολής ενός συνόλου δεδομένων, υπό την έννοια της ευκλείδειας νόρμας, ελαχιστοποιείται. Στα πλαίσια της POD, τα στιγμιότυπα μετατοπίσεων $\mathbf{u}_s$ είναι τα δεδομένα, για τα οποία αναζητείται η βάση $\mathbf{B}$, η οποία ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min \sum_{i=1}^m \|\mathbf{u}_s(t_i) - \mathbf{B}\mathbf{q}(t_i)\|_2 \quad (3.16)$$

Το μητρώο $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ προκαθορισμένης διάστασης n , αναζητείται, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η παραπάνω ποσότητα 3.16. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μπορεί να ληφθεί μέσω της Παραγοντοποίησης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition – SVD), σύμφωνα με το θεώρημα *Schmidt-Eckart-Young-Mirsky* [16]. Η διαδικασία αυτή, αναδεικνύει το μητρώο $\mathbf{B}$ που ικανοποιεί την 3.16 όταν εφαρμόζεται στο μητρώο στιγμιότυπων $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times m}$, στο οποίο συγκεντρώνονται τα διανύσματα μετατοπίσεων των m χρονικών βημάτων. Από αλγεβρική σκοπιά, η SVD είναι ένας μετασχηματισμός που διαγωνοποιεί ένα μητρώο $\mathbf{S}$ και το θέτει σε κανονική μορφή ως:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{u}(t_1)\mathbf{u}(t_2)\dots\mathbf{u}(t_m)] = \mathbf{U}_{svd}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}_{svd}^T \quad (3.17)$$

Η SVD του μητρώου στιγμιότυπων αποδίδει το ορθογώνιο μητρώο $\mathbf{U}_{svd} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ που περιέχει τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα (left singular vectors), το διαγώνιο μητρώο $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ των ιδιαζουσών τιμών σ_i , οι οποίες είναι διατεταγμένες κατά φθίνουσα σειρά με $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$ και το ορθογώνιο μητρώο $\mathbf{V}_{svd} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ στο οποίο περιέχονται τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα (right singular vectors). Ας σημειωθεί ότι οι διαστάσεις των μητρώων που αναγράφονται ισχύουν για την περίπτωση όπου το πλήθος των στιγμιότυπων, m , είναι μικρότερο από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας N . Αυτή είναι η περίπτωση για προσομοιώματα μεγάλων διαστάσεων. Στην αντίθετη περίπτωση, για $m > N$, οι διαστάσεις των μητρώων είναι: $\mathbf{U}_{svd} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{V}_{svd} \in \mathbb{R}^{N \times m}$.

Τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα $\mathbf{u}_{svd,i}$ αποτελούν τις κύριες συνιστώσες (principal values) των τιμών του πεδίου μετατοπίσεων που συγκεντρώνεται στο $\mathbf{S}$. Για δεδομένη διάσταση n , οι πρώτες n κύριες

συνιστώσες ικανοποιούν τη συνθήκη βελτιστοποίησης (optimality condition) 3.16 και ελαχιστοποιούν το ευκλείδειο σφάλμα. Επομένως, μέσω της POD, προκύπτει η βάση $\mathbf{B}$, χρησιμοποιώντας τα πρώτα n αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα $\mathbf{u}_{svd,i}$. Εφόσον, επίσης, τόσο τα αριστερά όσο και τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα είναι κανονικοποιημένα, το πλάτος (amplitude) για την κατασκευή των στιγμιότυπων από αυτά, είναι αποθηκευμένο στις ιδιάζουσες τιμές σ_i . Άρα, η σημασία της i -οστής κύριας συνιστώσας $\mathbf{u}_{svd,i}$, συνδέεται με την τιμή της αντίστοιχης ιδιάζουσας τιμής σ_i .

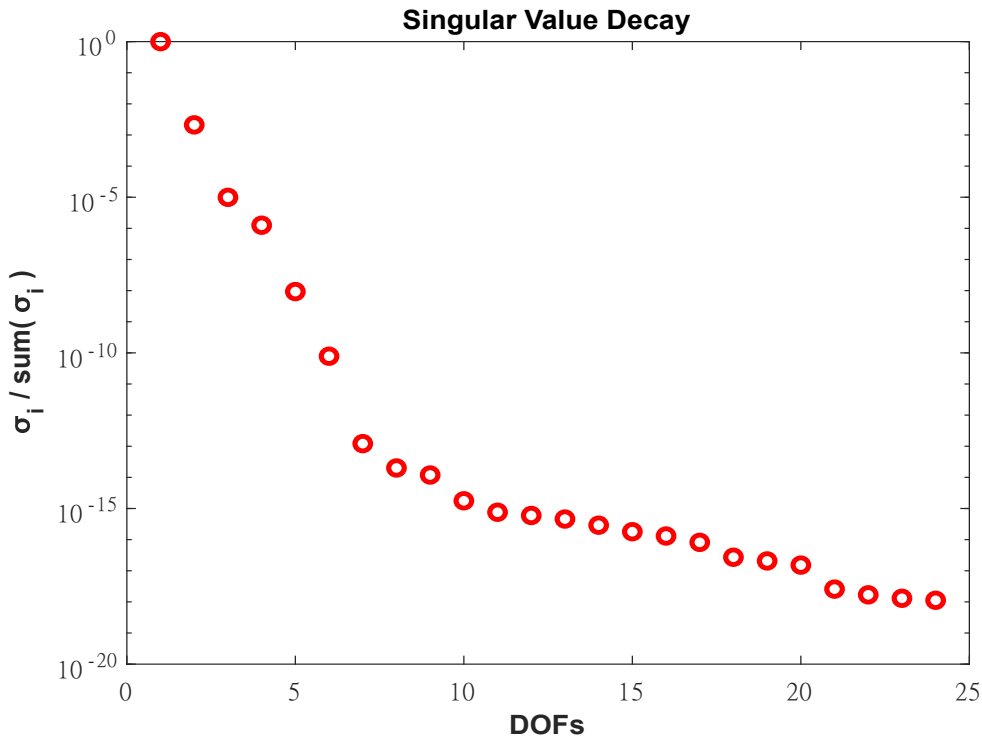
Ως προς την πληροφορία που εμπεριέχουν τα μητρώα αυτά, τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα, αναδεικνύουν πληροφορία των κυρίαρχων χωρικών πεδίων μετατοπίσεων, ενώ τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα, $\mathbf{v}_{svd,i}$, που συνθέτουν το $\mathbf{V}_{svd}$, περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη αυτών. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η εφαρμογή της SVD πάνω στα στιγμιότυπα δεν παρέχει μόνο τον κυρίαρχο υπόχωρο της κίνησης, αλλά και χρονική πληροφορία.

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της εξίσωσης 3.16 μπορεί να γραφτεί και σε μητρωική μορφή, όπου η SVD αναδεικνύει μια βέλτιστη προσέγγιση χαμηλής τάξεως (n) (low rank approximation), $\mathbf{S}_{approx}$, του μητρώου στιγμιότυπων $\mathbf{S}$. Αυτή η βέλτιστη προσέγγιση λαμβάνεται με απαίτηση η L_2 νόρμα ή η νόρμα Frobenius της διαφοράς μεταξύ προσεγγιστικού και ακριβούς μητρώου να είναι ελάχιστες. Η L_2 νόρμα και η νόρμα Frobenius δίνονται, αντιστοίχως, από τις σχέσεις:

$$\epsilon_2 = \|\mathbf{S}_{approx} - \mathbf{S}\|_2 \quad (3.18)$$

$$\epsilon_f = \|\mathbf{S}_{approx} - \mathbf{S}\|_f \quad (3.19)$$

Στο Σχ.3.1 φαίνονται οι ιδιάζουσες τιμές ενός τετράστυλου μονώροφου πλαισίου (48 β.ε. – 24 ελεύθεροι – 24 δεσμευμένοι) υπό σεισμική διέγερση σε μία διεύθυνση και πως αυτές φθίνουν. Αυτή η μείωση (decay), στα πλαίσια της POD, είναι ένας δείκτης της πολυπλοκότητας της δυναμικής του συστήματος. Μια ταχεία μείωση σημαίνει ότι λίγα ιδιάζοντα διανύσματα χρειάζονται για να περιγράψουν τη σχετική κίνηση του συστήματος πλήρους τάξης (FOM) και άρα η διάσταση n της βάσης μπορεί να επιλεγεί αρκετά μικρή. Αντίθετα, μία βραδεία πτώση σημαίνει ότι απαιτούνται πολλά διανύσματα βάσης για να ορίσουν⁵ τον υπόχωρο της σχετικής κίνησης, απαιτώντας έτσι το n να είναι αρκετά μεγάλο.



Σχήμα 3.1: Ιδιάζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων ενός μονώροφου πλαισίου

⁵Η λέξη «ορίσουν» εδώ χρησιμοποιείται αντί του αγγλικού όρου *span*.

3.3.3 Επιλογή Διάστασης της Μειωμένης Βάσης

Σημαντικό ερώτημα το οποίο προκύπτει, είναι η επιλογή της διάστασης n της μειωμένης βάσης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η POD προσδιορίζει την ορθοκανονική βάση, η οποία περιγράφει το διάνυσμα – λύση του δυναμικού προβλήματος, σε έναν υπόχωρο, καλύτερα από κάθε άλλη ορθοκανονική βάση. Η επιλεγόμενη διάσταση αυτής της βάσης, θα πρέπει να είναι αρκούντως μικρή για να επιτευχθεί μείωση του υπολογιστικού κόστους, αποδίδοντας παράλληλα ικανοποιητική ακρίβεια. Ξεκινώντας από τη νόρμα Frobenius⁶ του πίνακα στιγμιότυπων έχουμε:

$$\|\mathbf{S}\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\sigma_i(\mathbf{S})|^2} \quad (3.20)$$

Το σφάλμα που μετράται με τη νόρμα Frobenius από την περικοπή (truncation) των $n - k$ διανυσμάτων της βάσης της POD δίνεται από την σχέση:

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\|_f = \sqrt{\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2(\mathbf{S})} \quad (3.21)$$

Δηλαδή το τετράγωνο του σφάλματος της ορθής προβολής του $\mathbf{S}$ στον υπόχωρο χαμηλότερης διάστασης ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ιδιζουσών τιμών που δεν αξιοποιήθηκαν για την κατασκευή της βάσης. Το τετράγωνο τώρα, του σχετικού σφάλματος είναι μία ένδειξη της πληροφορίας που χάνεται, $I_L(k)$, δηλαδή:

$$I_L(k) = \frac{\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2(\mathbf{S})}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathbf{S})} \quad (3.22)$$

και επιπλέον

$$I(k) = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2(\mathbf{S})}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathbf{S})} \quad (3.23)$$

όπου $I(k)$ είναι το σχετικό πληροφοριακό περιεχόμενο των πρώτων k επιλεγμένων διανυσμάτων βάσης από την POD. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι η επιλογή της διάστασης k μπορεί να γίνει με βάση το κριτήριο:

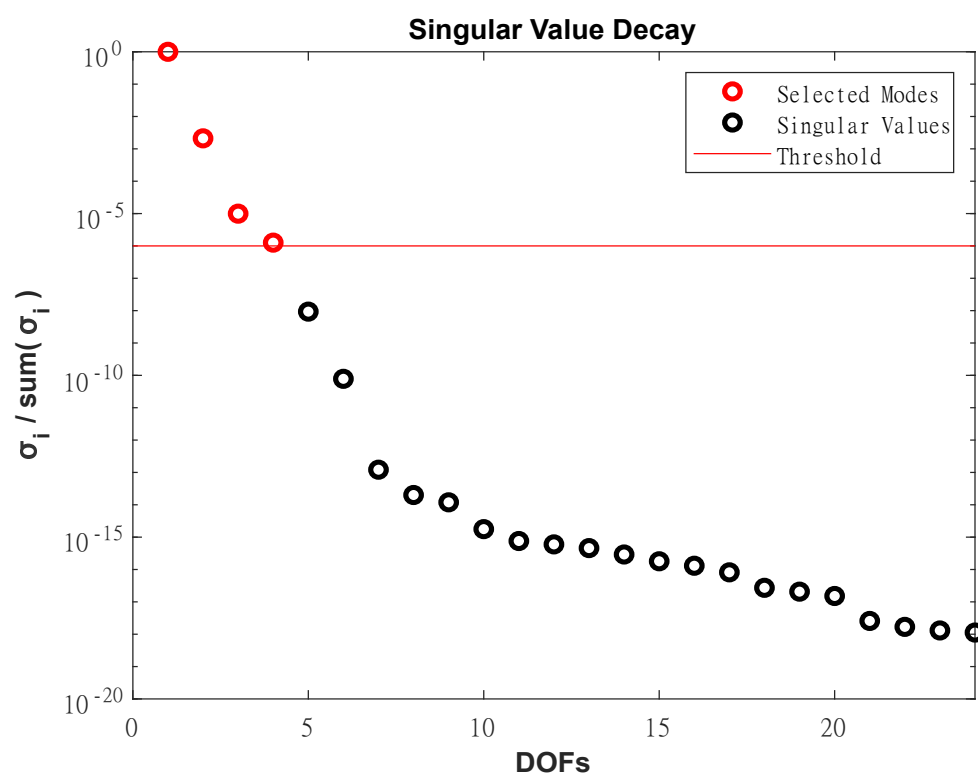
$$k = \operatorname{argmin}\{I(k) : I(k) \geq p\%\} \quad (3.24)$$

ή εναλλακτικά

$$k = \operatorname{argmin}\left\{\sigma_i, i = 1, 2, \dots, k : \frac{\sigma_i}{\sum \sigma_i} \geq \text{tolerance}\right\} \quad (3.25)$$

Καθορίζοντας λοιπόν μια τιμή ανοχής (tolerance), επιλέγουμε τόσες POD-μορφές, δηλαδή τόσα διανύσματα βάσης του υπόχωρου, όσες είναι και οι ιδιζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων, των οποίων ο λόγος τους ως προς το άθροισμα όλων των ιδιζουσών τιμών, είναι μεγαλύτερο από την τιμή ανοχής. Οι συμβατικές τιμές ανοχής εξαρτώνται από το εκάστοτε πρόβλημα ($\text{tol} = 10^{-6}, \text{tol} = 10^{-10}, \text{tol} = 10^{-30}$ κ.λ.π.).

⁶Νόρμα Frobenius, καλείται η νόρμα ενός μητρώου $m \times n$ που ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των απολύτων τιμών των ορισμάτων του μητρώου.



Σχήμα 3.2: Καθορισμός μιας τιμής ανοχής για την επιλογή των k πρώτων ιδιαζουσών τιμών

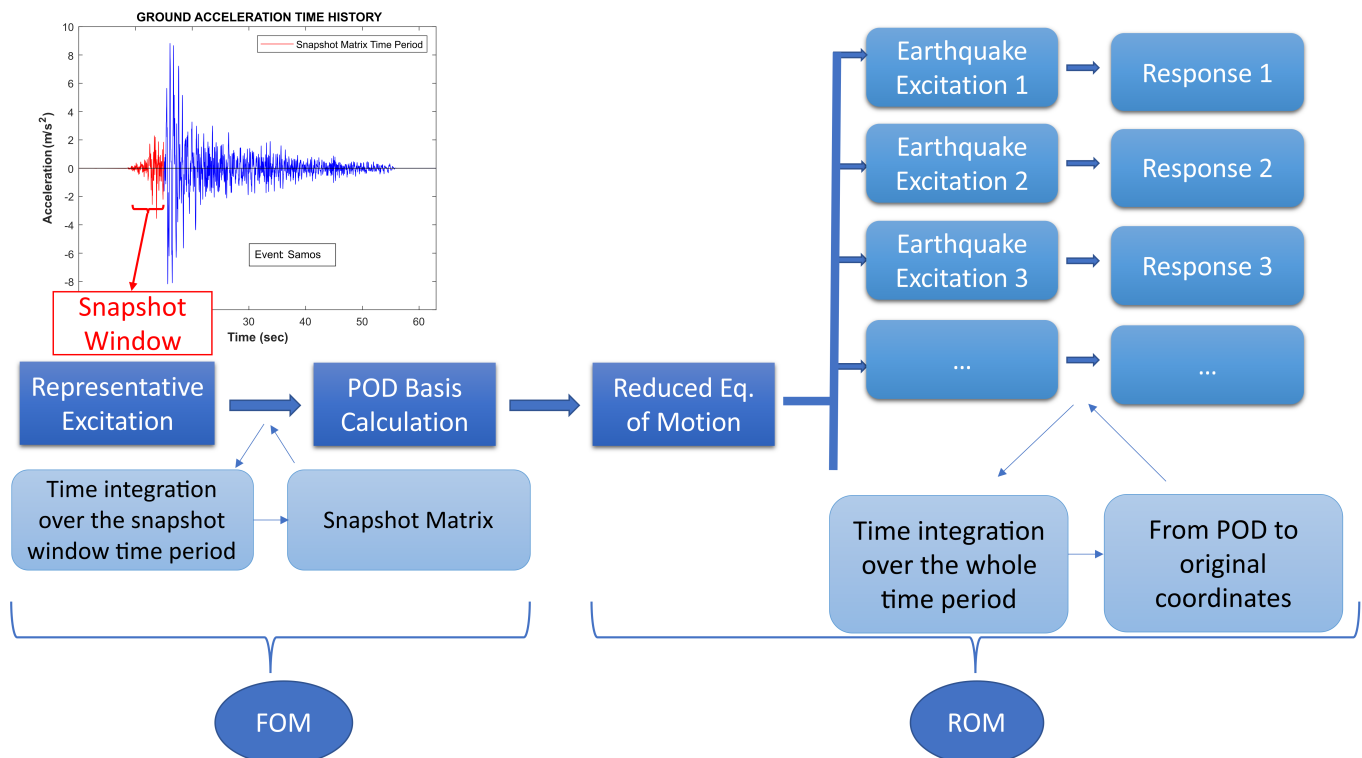
Κεφάλαιο 4

ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η εφαρμογή της μείωσης τάξης προσομοιώματος, μέσα από αριθμητικά παραδείγματα ανάλυσης κατασκευών.

4.1 Διαδικασία Εφαρμογής της Μεθόδου POD

Η προσέγγιση που ακολουθείται παρουσιάζεται σε μορφή διαγράμματος ροής στο Σχ. 4.1. Το πλήρες σύστημα (με N βαθμούς ελευθερίας) ολοκληρώνεται για ένα μικρό χρονικό διάστημα της διέγερσης (λήψη m στιγμιότυπων), για μια αντιπροσωπευτική διέγερση και προκύπτει το μητρώο στιγμιότυπων $\mathbf{S}$, διάστασης $N \times m$. Με εφαρμογή της SVD, υπολογίζεται η βάση $\mathbf{B}$, η οποία θα πρέπει να περιγράφει την κύρια συμπεριφορά του συστήματος. Με επιλογή $l \ll N$ διανυσμάτων βάσης της $\mathbf{B}$, προκύπτει το μητρώο μετασχηματισμού των εξισώσεων κίνησης στον υπόχωρο διάστασης l , στον οποίο πραγματοποιείται η αριθμητική ολοκλήρωση για όλη τη διάρκεια του σεισμού. Η λύση του προβλήματος μειωμένης τάξης επαναπεικονίζεται στον αρχικό χώρο με τον αντίστροφο μετασχηματισμό.



Σχήμα 4.1: Πλάνο εκτέλεσης των αναλύσεων

4.2 Σεισμικές Καταγραφές

Για τις αριθμητικές επιλύσεις, επιλέχθηκε ένα σύνολο 7 σεισμικών καταγραφών, από τις βάσεις δεδομένων Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER) και Engineering Strong Motion Database (ESM). Τα χαρακτηριστικά αυτών των καταγραφών φαίνονται στον Πίνακα 4.1.

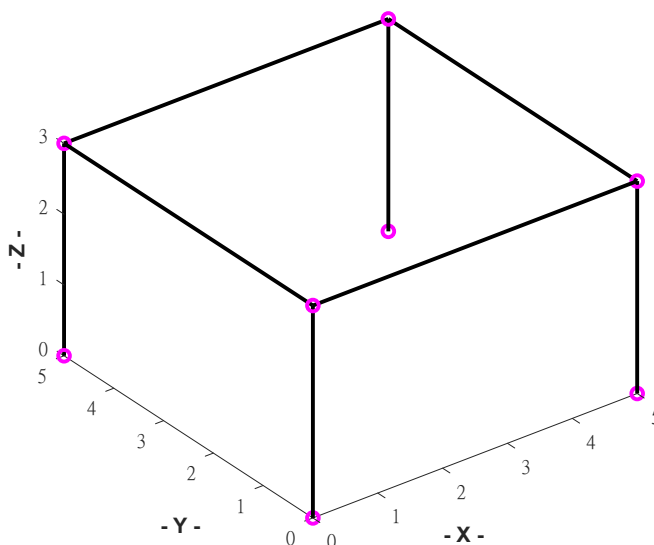
Πίνακας 4.1: Δεδομένα σεισμικών καταγραφών

Γεγονός	Ημ/νία	Τοποθεσία	Ρυθμός Δειγματοληψίας	Διάρκεια (sec)	Μέγεθος M_L (R)	PGA (cm/s^2)	Πηγή Δεδομένων
Imperial Valley	15/10/1979	El Centro	50	40	6.53	311.3	PEER
Northridge	17/1/1994	California/Newhall	100	40	6.69	583.9	PEER
Kobe	17/1/1995	Japan/Amagasaki	200	54	6.9	331.4	PEER
Athens	7/9/1999	Αθήνα	200	49	6	303.1	ESM
Lefkada	17/11/2015	Αργοστόλι	200	67	6.4	98.6	ESM
Antikythera	27/11/2019	Κύθηρα	200	88	6.1	174.8	ESM
Samos	30/10/2020	Gumuldur-Izmir	200	63	7	881.9	ESM

4.3 Γραμμική Ανάλυση

4.3.1 Μονώροφο Τρισδιάστατο Πλαίσιο

Για την παρουσίαση της μεθόδου, επιλέγεται αρχικά ως ένας απλός φορέας, το μονώροφο πλαίσιο του Σχ.4.2. Οι διατομές και οι παράμετροι υλικού δίδονται στους Πίνακες 4.2, 4.3.



Σχήμα 4.2: Γεωμετρία μονώροφου φορέα

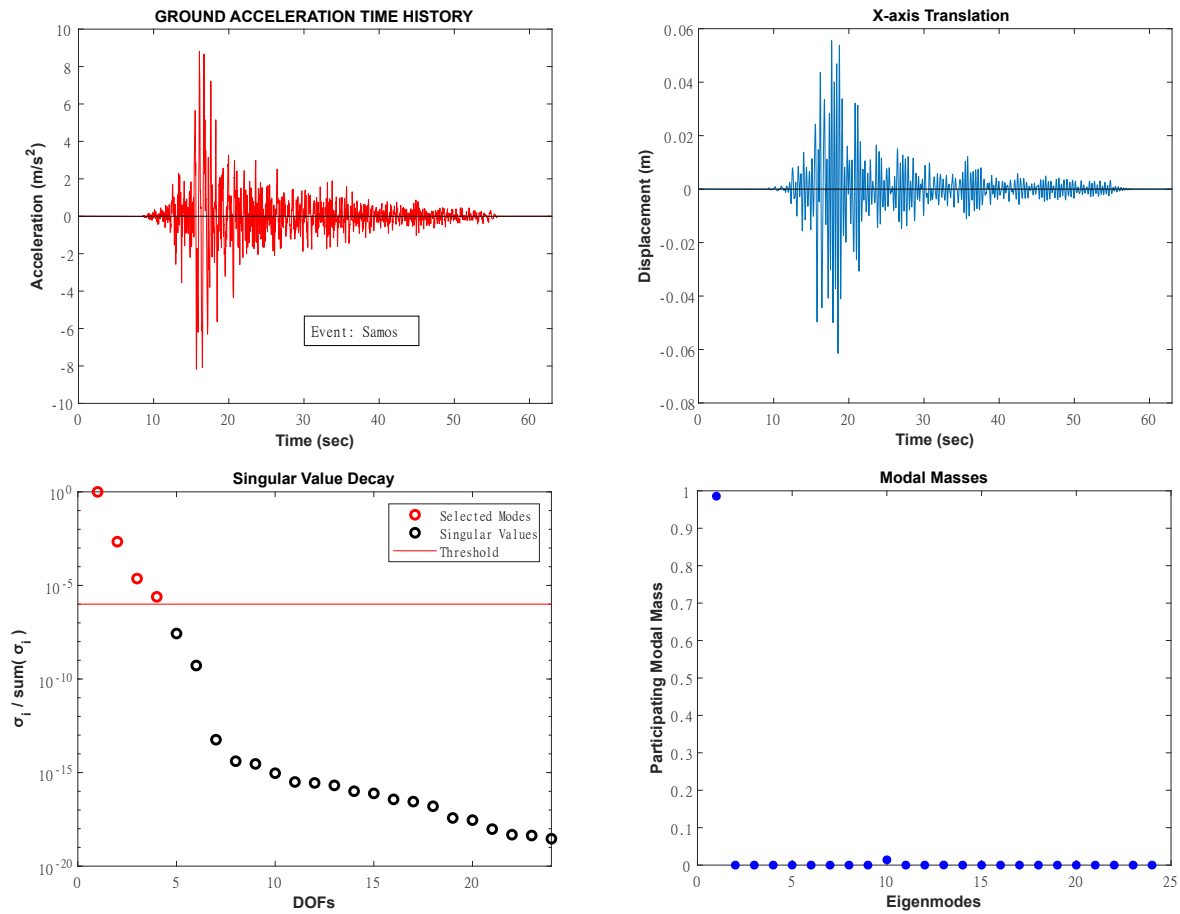
Πίνακας 4.2: Εμβαδόν και ροπές αδράνειας δοκών και στύλων του φορέα

	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$I_x \text{ (m}^4\text{)}$	$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	$I_z \text{ (m}^4\text{)}$
Στύλοι	0.5	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-3}	5×10^{-4}
Δοκοί κατά-x	0.25	2.1×10^{-5}	2.1×10^{-3}	2.5×10^{-4}
Δοκοί κατά-y	0.25	2.1×10^{-5}	2.1×10^{-3}	2.5×10^{-4}

Η κατασκευή διεγείρεται στη διεύθυνση x με το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού της Σάμου. Υπολογίζεται η απόκριση του πλήρους συστήματος με τη μέθοδο Newmark. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών και υπολογίζεται η απόκριση, με χρήση τόσων ιδιομορφών, ώστε το άθροισμα

Πίνακας 4.3: Μέτρο ελαστικότητας, πυκνότητα και λόγος Poisson του υλικού

$E \text{ (Pa)}$	$\rho \text{ (t/m}^3\text{)}$	ν
10000000	2.5	0.3

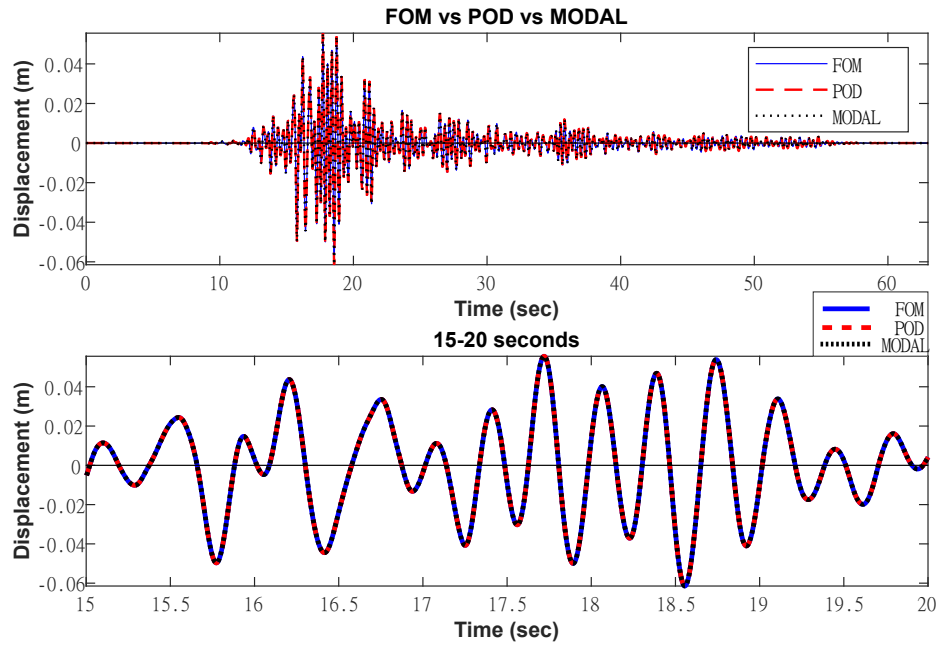
**Σχήμα 4.3:** Πάνω αριστερά: Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση x , Πάνω δεξιά: Απόκριση FOM, Κάτω αριστερά: Ιδιάζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων, Κάτω δεξιά: Ιδιομορφικές μάζες

των ιδιομορφικών τους μαζών να είναι μεγαλύτερο από 90% της συνολικής μάζας που ενεργοποιείται για διέγερση στη συγκεκριμένη διεύθυνση.

Λόγω της απλής γεωμετρίας, αλλά και χωρικής κατανομής της φόρτισης, σχεδόν όλη η μάζα που διεγείρεται αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιομορφή του φορέα. Στη συνέχεια, μορφώνεται το μητρώο στιγμιότυπων από τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα της απόκρισης του πλήρους συστήματος, εφαρμόζεται η SVD και υπολογίζεται η βάση μείωσης με επιλογή των 4 πρώτων POD-μορφών. Ακολούθως, συγκρίνονται οι αποκρίσεις που υπολογίστηκαν με τις τρεις μεθόδους και καταγράφονται οι χρόνοι υπολογισμού. Ο χρόνος υπολογισμού του πλήρους συστήματος (FOM) ισούται με τον χρόνο που απαιτείται για την αριθμητική ολοκλήρωση των αρχικών εξισώσεων κίνησης. Για την ιδιομορφική ανάλυση (MODAL) αθροίζονται ο χρόνος επίλυσης του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων, ο χρόνος που απαιτείται για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης σε ιδιομορφικές συντεταγμένες και ο χρόνος του μετασχηματισμού πίσω στις αρχικές γενικευμένες συντεταγμένες. Τέλος, ο χρόνος επίλυσης με την POD επιμερίζεται στον χρόνο για την επίλυση του FOM και τη λήψη στιγμιότυπων, την κατασκευή της βάσης μείωσης, την αριθμητική επίλυση του ROM για όλη τη διάρκεια της διέγερσης και τέλος τον αντίστροφο μετασχηματισμό στον αρχικό χώρο του προβλήματος.

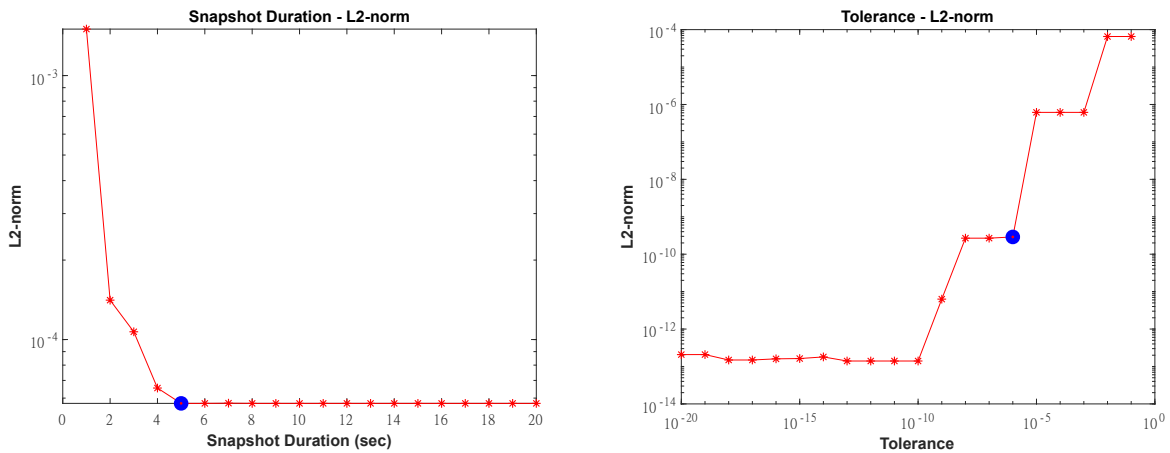
Πίνακας 4.4: Χρόνοι ανάλυσης μονώροφου πλαισίου

	FOM	MODAL	POD
Χρόνος Ανάλυσης(sec)	2.25	1.41	0.47



Σχήμα 4.4: Χρονοϊστορία απόκρισης του FOM κατά τη διεύθυνση x

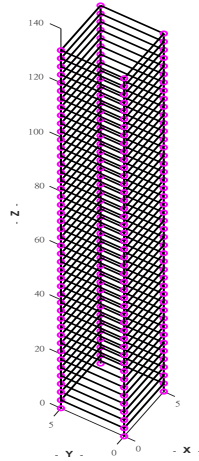
Για τον καθορισμό των παραμέτρων εφαρμογής της POD (πλήθος μορφών, αριθμός στιγμιότυπων) διεξήχθη παραμετρική ανάλυση ως προς το όριο της τιμής των ιδιζουσών τιμών και ως προς το χρονικό διάστημα επίλυσης του FOM για τη λήψη στιγμιότυπων. Και στις δύο περιπτώσεις, για την εκτίμηση του σφάλματος της προσέγγισης υπολογίστηκε, η L_2 διανυσματική νόρμα της διαφοράς ανάμεσα στην προσεγγιστική και στην ακριβή λύση. Όπως προκύπτει, για χρονική διάρκεια λήψης στιγμιότυπων μεγαλύτερη των 5 sec, η προσέγγιση, πρακτικά, δε βελτιώνεται, ενώ για τιμή ανοχής των ιδιζουσών τιμών ίση με 10^{-6} το σφάλμα προκύπτει πολύ μικρό (Σχ.4.5).



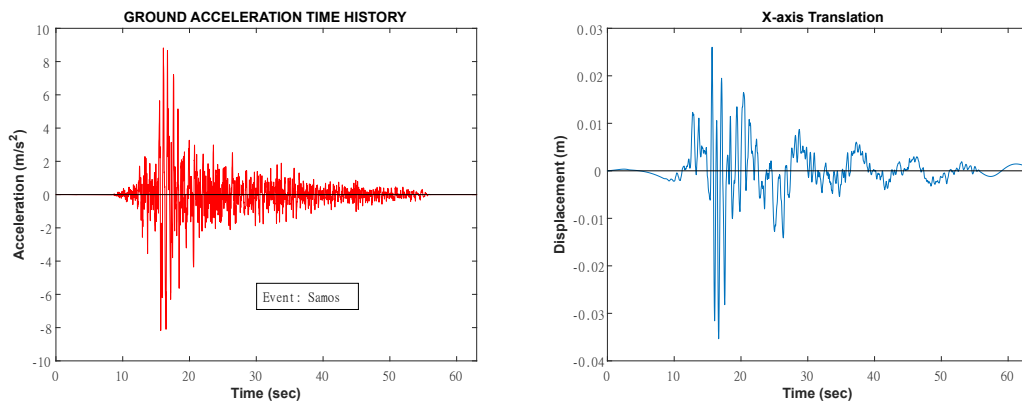
Σχήμα 4.5: Αριστερά: L_2 νόρμα του σφάλματος συναρτήσει της διάρκειας λήψης στιγμιότυπων, Δεξιά: L_2 νόρμα του σφάλματος συναρτήσει της τιμής ανοχής των ιδιζουσών τιμών

4.3.2 Πολυώροφο Τρισδιάστατο Πλαίσιο

Για να αναδειχθεί το πλεονέκτημα χρήσης της POD, αναλύεται ο πολυώροφος φορέας του Σχ.4.6, ύψους 132m, με 1080 βαθμούς ελευθερίας και με ίδιες διατομές και παραμέτρους υλικού. Επιλέγεται ως αντιπροσωπευτική φόρτιση ο σεισμός της Σάμου (30/10/2020). Υπολογίζεται η απόκριση του FOM με τη μέθοδο Newmark, για χρονικό βήμα $\Delta t = 0.0025$ sec. Ο συνολικός χρόνος επίλυσης είναι $t_{FOM} = 129.48$ sec.



Σχήμα 4.6: Γεωμετρία πολυώροφου φορέα



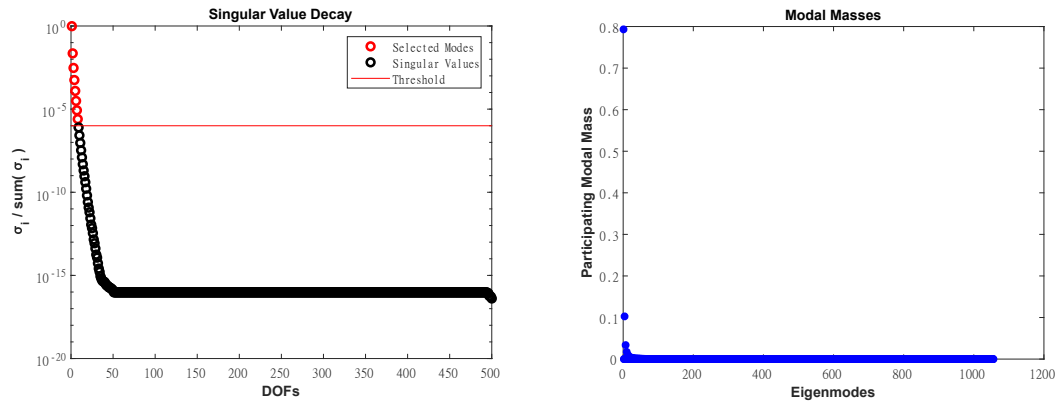
Σχήμα 4.7: Αριστερά: Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση x , Δεξιά: Απόκριση FOM

Ακολουθούν οι επιλύσεις με ιδιομορφική ανάλυση και εφαρμογή της POD, για τρεις περιπτώσεις των παραμέτρων ανάλυσης. Οι χρόνοι ανάλυσης για κάθε περίπτωση παραμέτρων καταγράφονται στον Πίνακα 4.5.

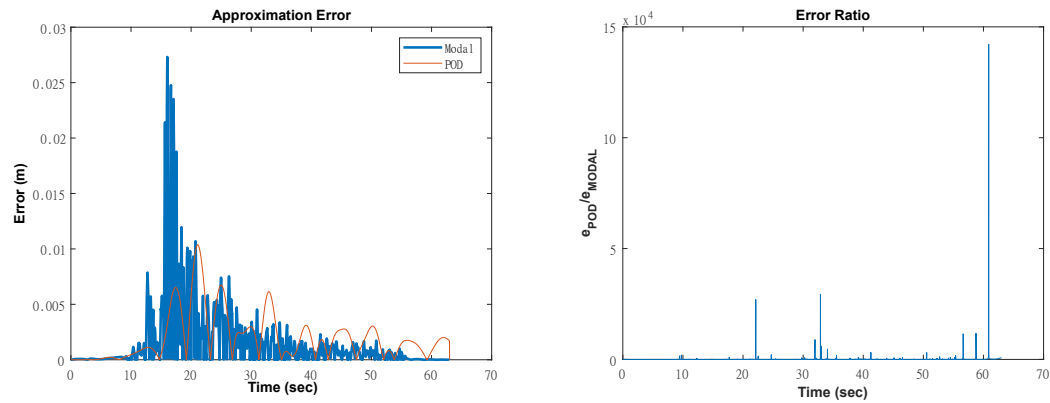
Περίπτωση 1: Για την POD χρησιμοποιούνται **500** στιγμιότυπα (1.25sec) και **8** POD μορφές. Για την ιδιομορφική ανάλυση επιλέγονται **7** ιδιομορφές. Οι διανυσματικές νόρμες των σφαλμάτων της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD είναι αντίστοιχα: $L_{2,MODAL} = 0.5709$, $L_{2,POD} = 0.4607$.

Η εφαρμογή της ιδιομορφικής ανάλυσης με 8 ιδιομορφές δεν αποδίδει ακριβή αποτελέσματα. Η εφαρμογή της POD προσεγγίζει με σχετική ακρίβεια ορισμένα μόνο διαστήματα της απόκρισης, καθώς το χρονικό διάστημα λήψης των στιγμιότυπων είναι ιδιαίτερα μικρό (1.25sec). Για αυτόν τον λόγο αυξάνονται τόσο τα στιγμιότυπα όσο και οι ιδιομορφές στην επόμενη περίπτωση.

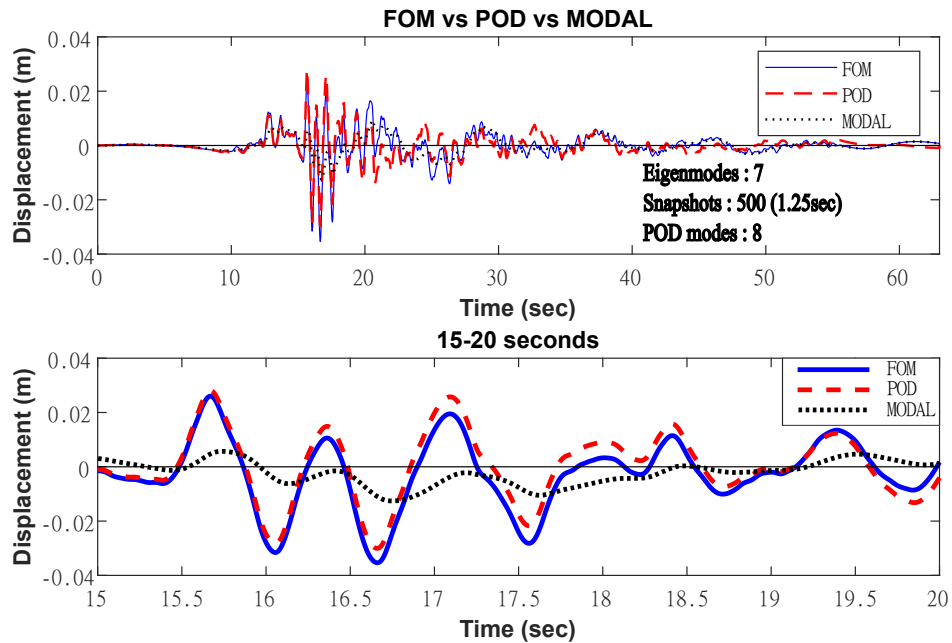
Περίπτωση 2: Για την POD χρησιμοποιούνται **2000** στιγμιότυπα (5 sec) και **12** POD μορφές. Για την ιδιομορφική ανάλυση επιλέγονται **12** ιδιομορφές. Οι διανυσματικές νόρμες των σφαλμάτων της ιδιομορφικής



Σχήμα 4.8: Αριστερά: Ιδιάζουσες τιμές του μητρώου στιγμιότυπων, Δεξιά: Ιδιομορφικές μάζες



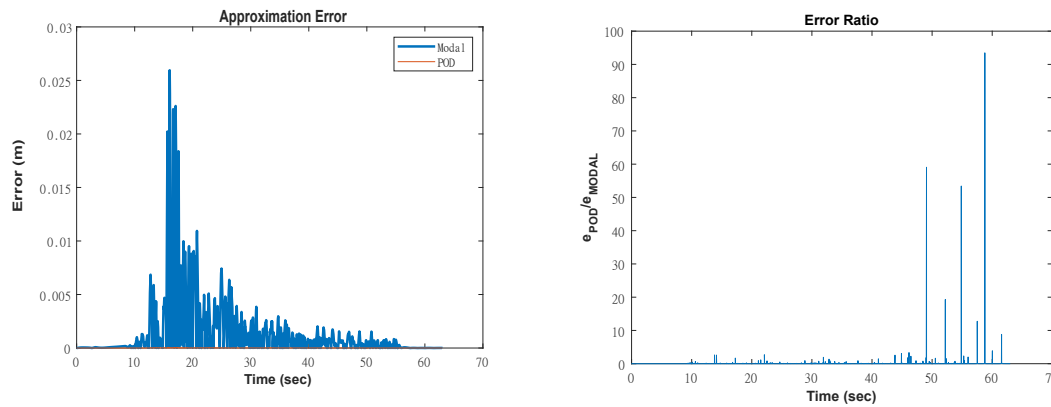
Σχήμα 4.9: Αριστερά: Σφάλματα της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD (Περίπτωση 1), Δεξιά: Λόγος του σφάλματος POD προς το σφάλμα της ιδιομορφικής ανάλυσης



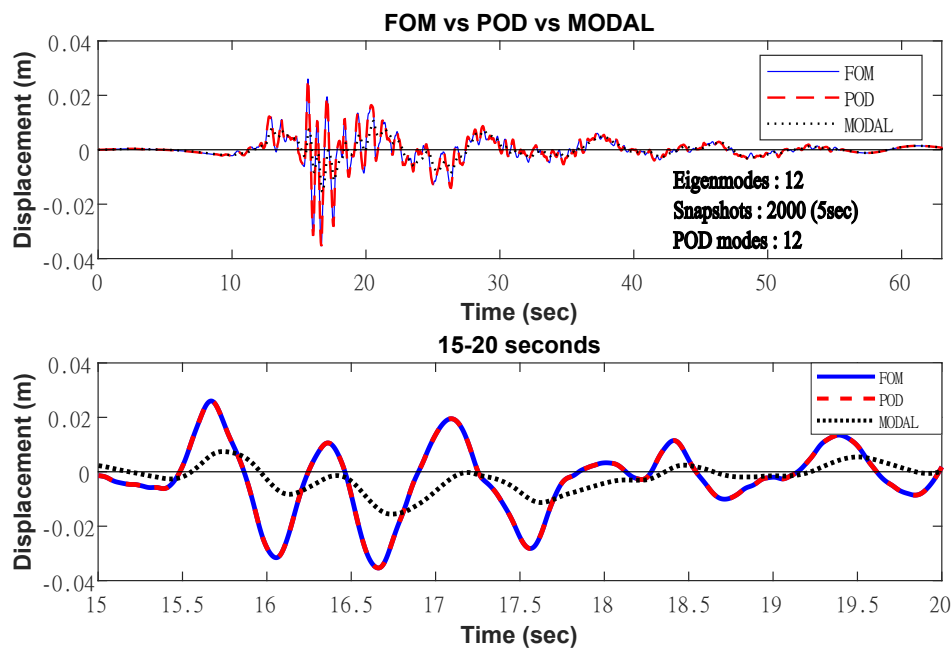
Σχήμα 4.10: Πάνω: Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης (Περίπτωση 1), Κάτω: Μεγέθυνση της απόκρισης στο διάστημα 15-20 sec

ανάλυσης και της μεθόδου POD είναι αντίστοιχα: $L_{2,MODAL} = 0.5353$, $L_{2,POD} = 7.6441 \times 10^{-4}$.

Όπως σημειώθηκε και στην ανάλυση του μονώροφου πλαισίου, το χρονικό διάστημα λήψης στιγμιότυπων των 5 sec είναι αρκετό για να κατασκευασθεί ένα προσομοίωμα μειωμένης τάξης (ROM) επαρκώς ακριβές.



Σχήμα 4.11: Αριστερά: Σφάλματα της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD (Περίπτωση 2), Δεξιά: Λόγος του σφάλματος POD προς το σφάλμα της ιδιομορφικής ανάλυσης



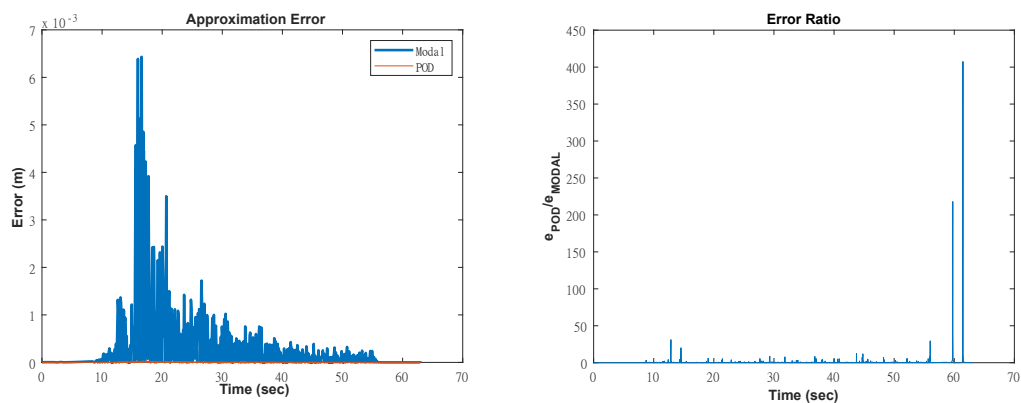
Σχήμα 4.12: Πάνω: Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης (Περίπτωση 2), Κάτω: Μεγέθυνση της απόκρισης στο διάστημα 15-20 sec

Αντίθετα, η ιδιομορφική ανάλυση, παρά τη χρήση ίδιου αριθμού μορφών με την POD, δεν αποδίδει ακριβή αποτελέσματα. Αυτό είναι εν μέρει αναμενόμενο καθώς η POD βασίζεται σε μία βέλτιστη προσέγγιση της λύσης στον υπόχωρο στον οποίο αυτή προβάλλεται. Ακολουθεί αύξηση του πλήθους των ιδιομορφών μέχρι και η ιδιομορφική ανάλυση να αποδίδει ακριβή αποτελέσματα.

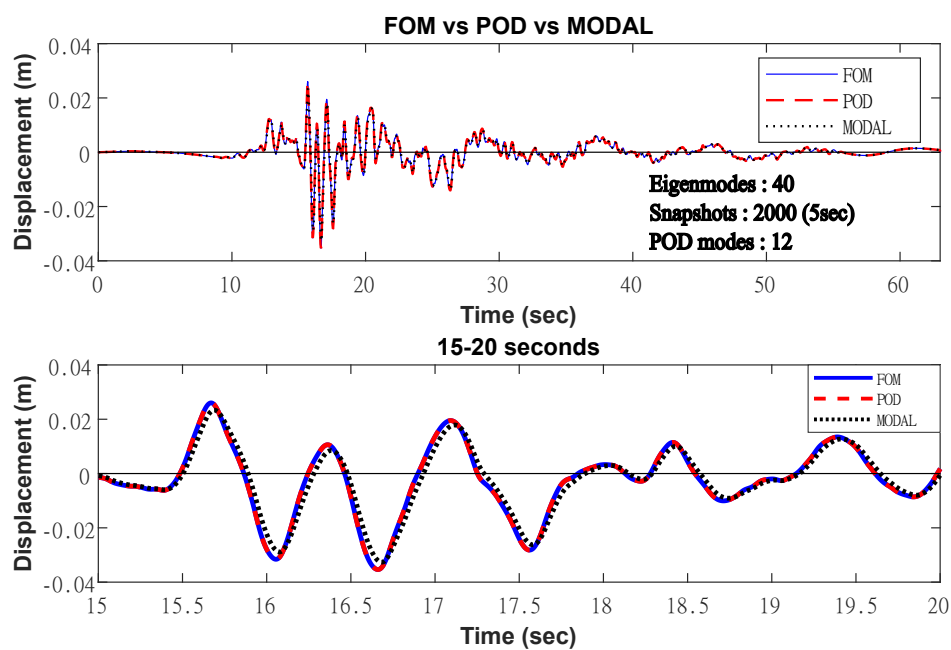
Περίπτωση 3: Για την POD χρησιμοποιούνται **2000** στιγμιότυπα (5sec) και **12** POD μορφές. Για την ιδιομορφική ανάλυση επιλέγονται **40** ιδιομορφές. Οι διανυσματικές νόρμες των σφαλμάτων της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD είναι αντίστοιχα: $L_{2,MODAL} = 0.1350$, $L_{2,POD} = 7.6441 \times 10^{-4}$.

Προκύπτει, λοιπόν, ότι η εφαρμογή της POD προσεγγίζει καλύτερα τα ακριβή αποτελέσματα, με χρήση λιγότερων μορφών σε σχέση με την ιδιομορφική ανάλυση και σε αρκετά χαμηλότερο χρόνο ανάλυσης.

Στη συνέχεια, διερευνάται εάν, με δεδομένο το μητρώο στιγμιότυπων που λαμβάνεται από την αντιπροσωπευτική διέγερση, λαμβάνουμε ακριβή αποτελέσματα για ένα σύνολο άλλων σεισμικών φορτίσεων. Συγκεκριμένα, με χρήση της βάσης μείωσης που προέκυψε από τα 2000 στιγμιότυπα της απόκρισης της κατασκευής στο σεισμό της Σάμου, εξετάζεται εάν το ROM αποδίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα (Σχ.4.15 έως 4.20) για τις υπόλοιπες διεγέρσεις του Πίνακα 4.1. Πλέον, στο συνολικό χρόνο POD δεν προσμετράται ο χρόνος που απαιτείται για τη λήψη στιγμιότυπων και τον υπολογισμό της βάσης μείωσης.



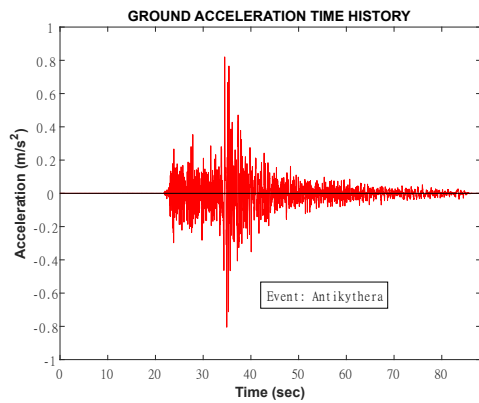
Σχήμα 4.13: Αριστερά: Σφάλματα της ιδιομορφικής ανάλυσης και της μεθόδου POD (Περίπτωση 3), Δεξιά: Λόγος του σφάλματος POD προς το σφάλμα της ιδιομορφικής ανάλυσης



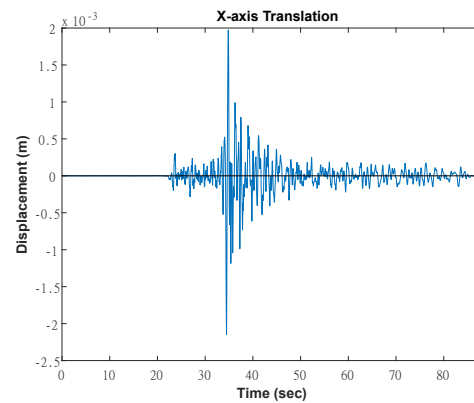
Σχήμα 4.14: Πάνω: Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης (Περίπτωση 3), Κάτω: Μεγέθυνση της απόκρισης στο διάστημα 15-20 sec

Πίνακας 4.5: Χρόνοι ανάλυσης (sec) πολυώροφου πλαισίου

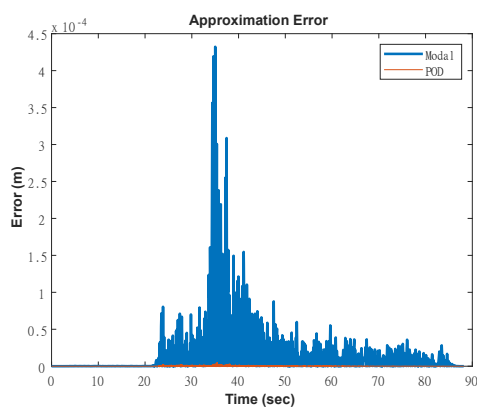
	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3
FOM	129.48	129.48	129.48
MODAL	23.86	24.20	28.85
ROM	5.83	9.09	9.09



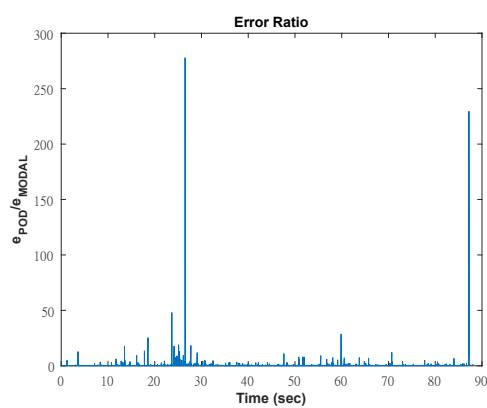
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



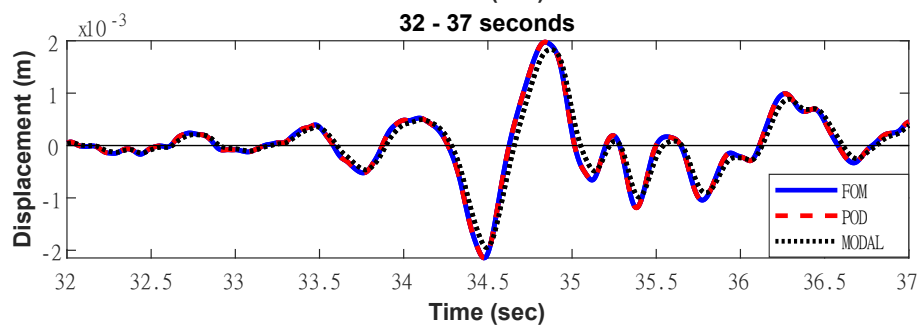
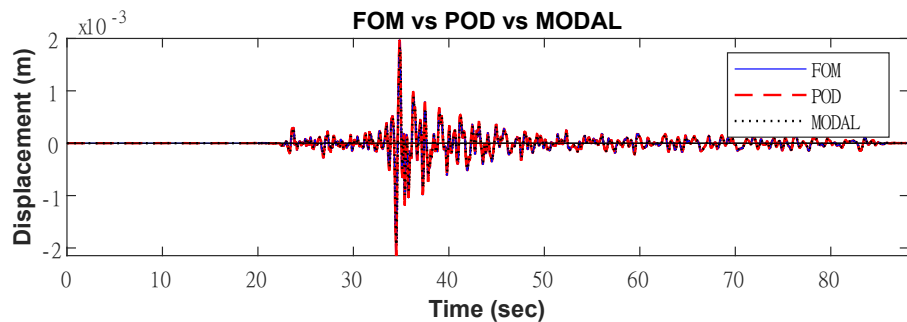
(β') Απόκριση FOM



(γ') Σφάλματα ιδιομορφικής ανάλυσης και μεθόδου POD

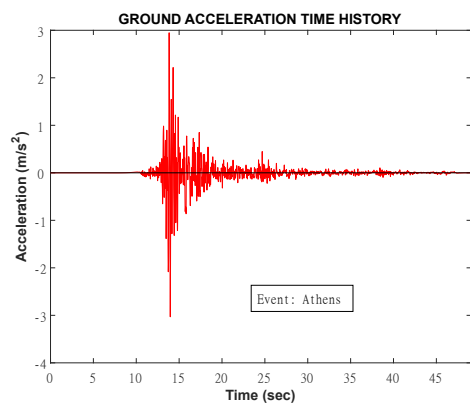


(δ') Λόγος σφαλμάτων ιδιομορφικής ανάλυσης και POD

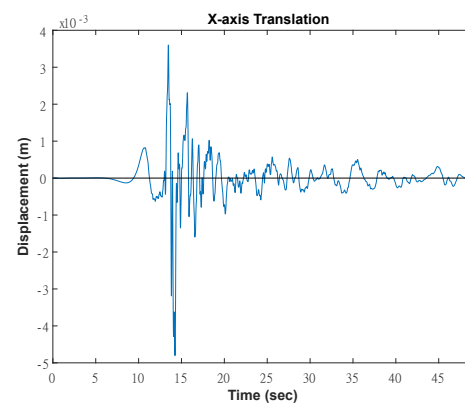


(ε') Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης

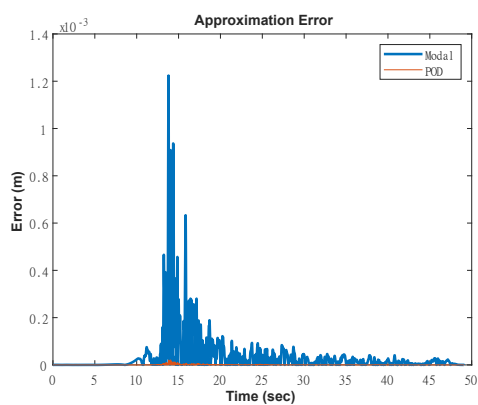
Σχήμα 4.15: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΑ (2019)



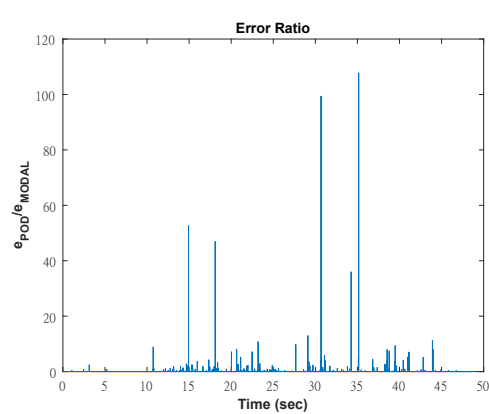
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



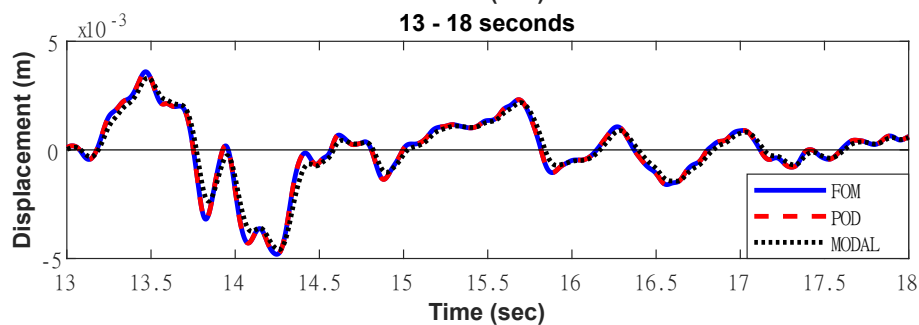
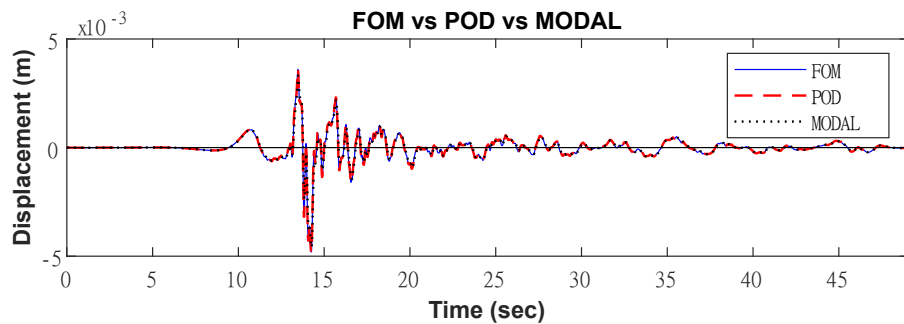
(β') Απόκριση FOM



(γ') Σφάλματα ιδιομορφικής ανάλυσης και μεθόδου POD

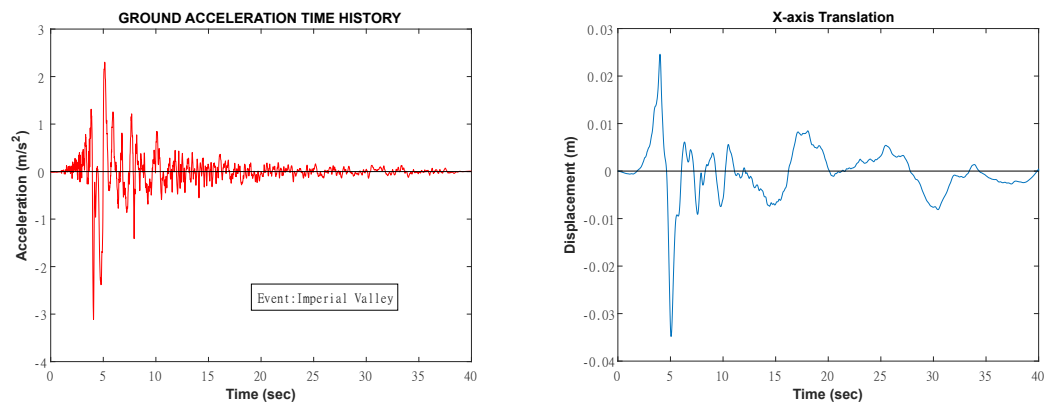


(δ') Λόγος σφαλμάτων ιδιομορφικής ανάλυσης και POD



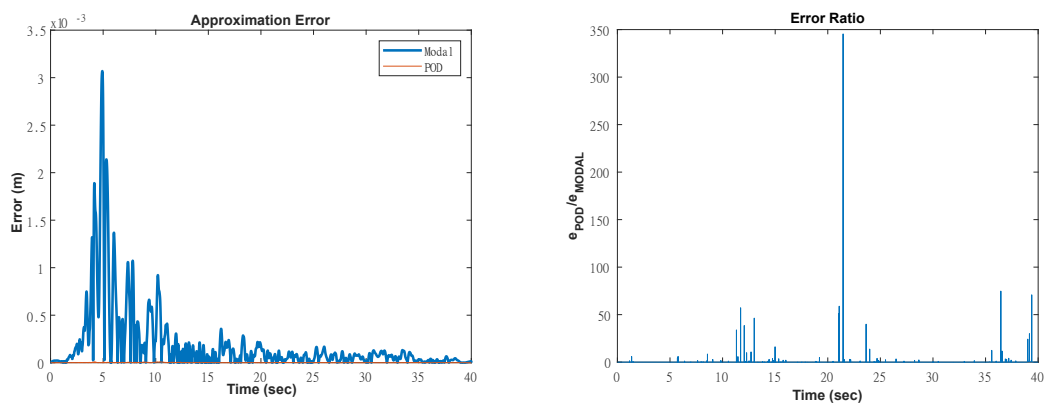
(ε') Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης

Σχήμα 4.16: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΘΗΝΑ (1999)



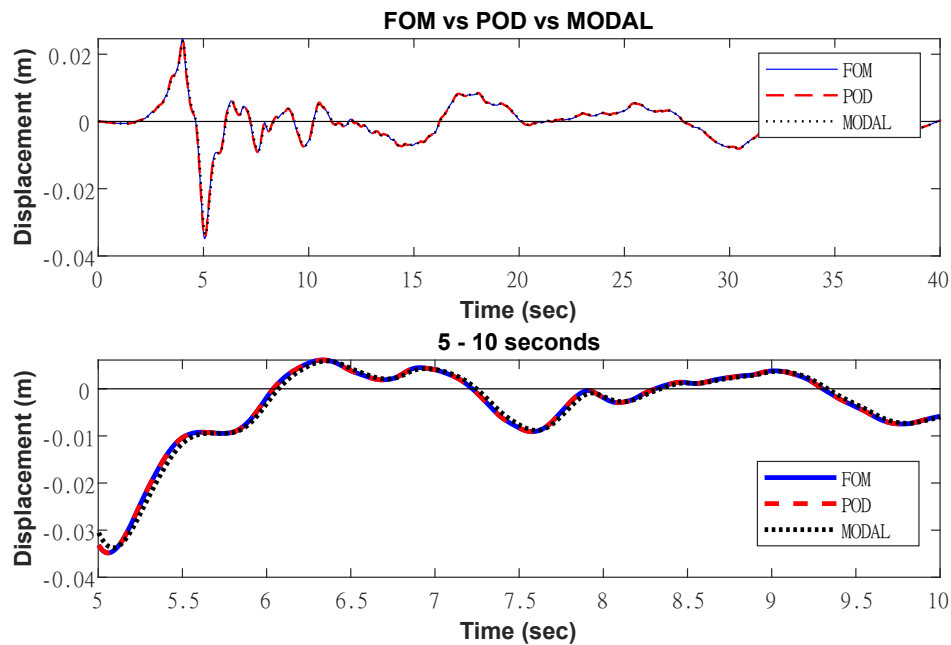
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης

(β') Απόκριση FOM



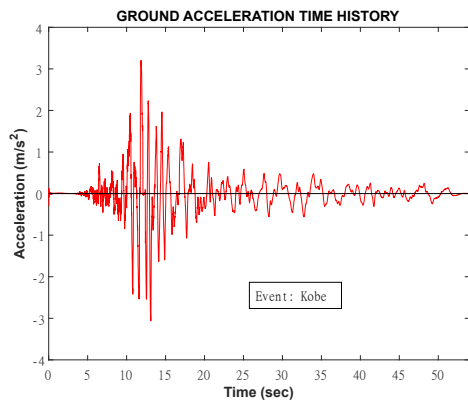
(γ') Σφάλματα ιδιομορφικής ανάλυσης και μεθόδου POD

(δ') Λόγος σφαλμάτων ιδιομορφικής ανάλυσης και POD

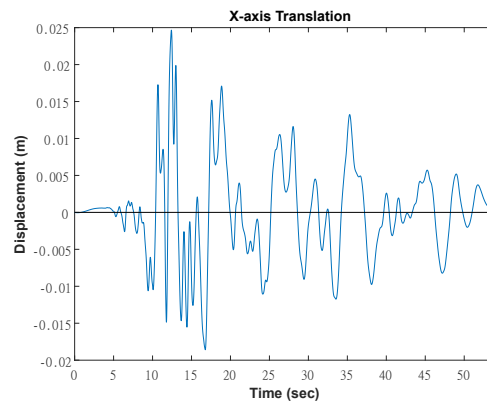


(ε') Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης

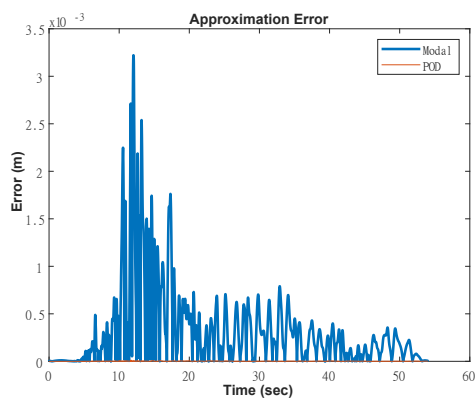
Σχήμα 4.17: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: IMPERIAL VALLEY (1979)



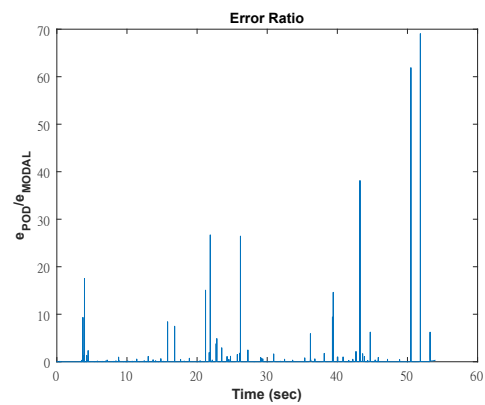
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



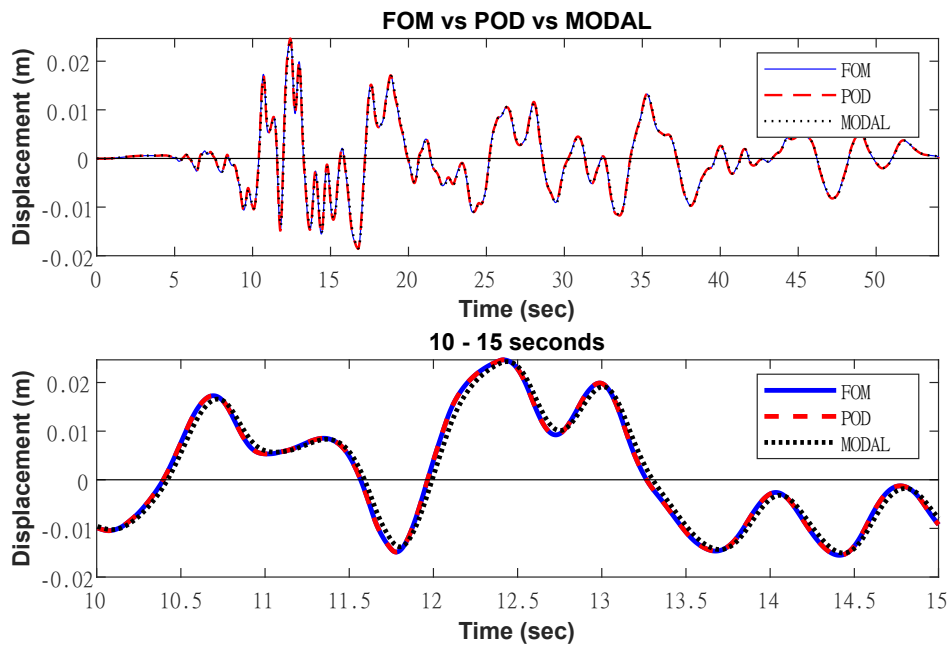
(β') Απόκριση FOM



(γ') Σφάλματα ιδιομορφικής ανάλυσης και μεθόδου POD

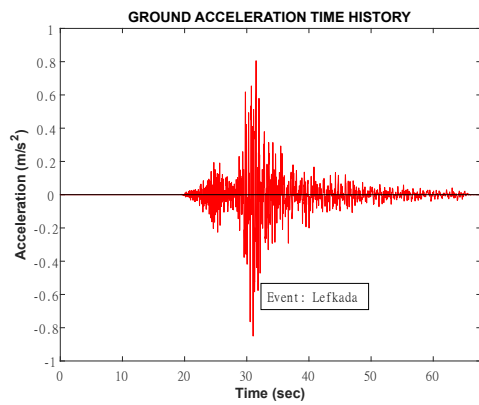


(δ') Λόγος σφαλμάτων ιδιομορφικής ανάλυσης και POD

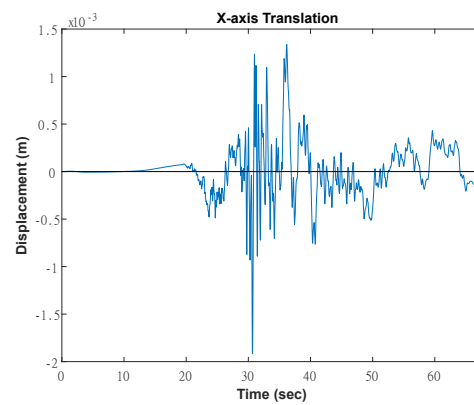


(ε') Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης

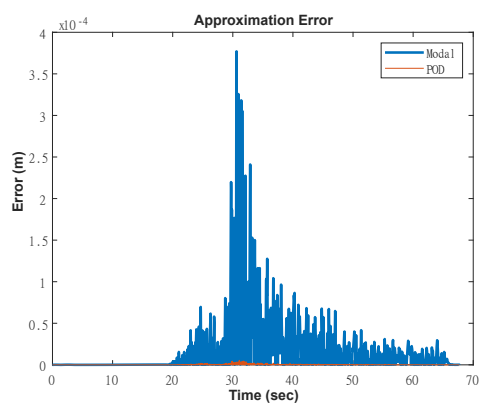
Σχήμα 4.18: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΚΟΒΕ (1995)



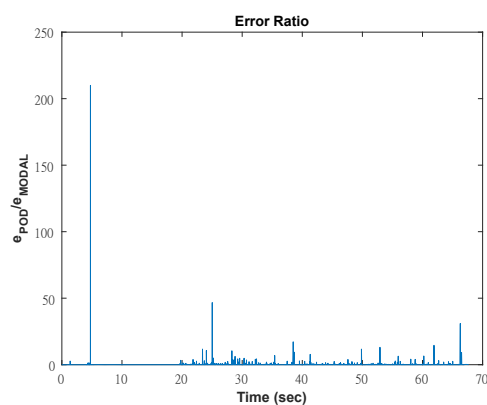
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



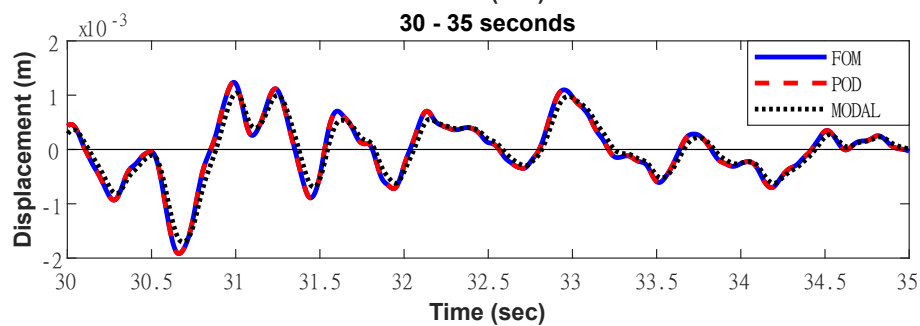
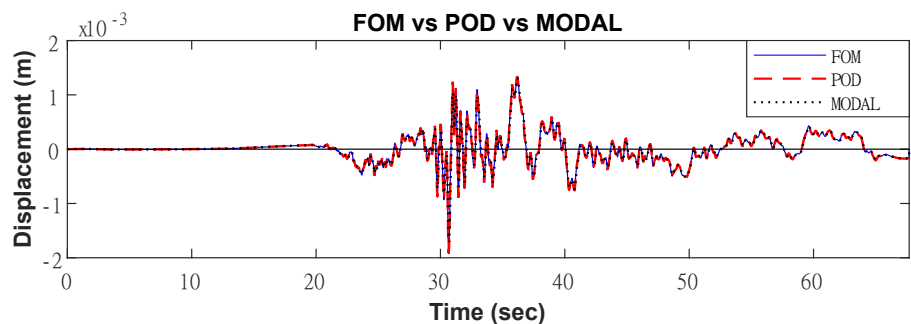
(β') Απόκριση FOM



(γ') Σφάλματα ιδιομορφικής ανάλυσης και μεθόδου POD

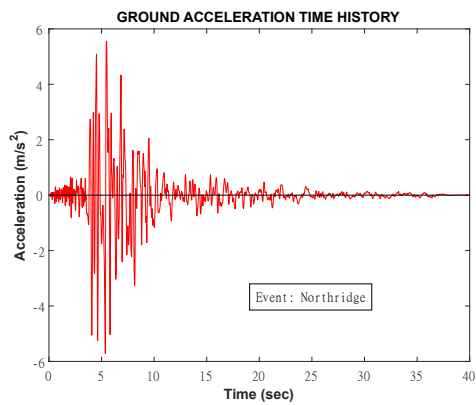


(δ') Λόγος σφαλμάτων ιδιομορφικής ανάλυσης και POD

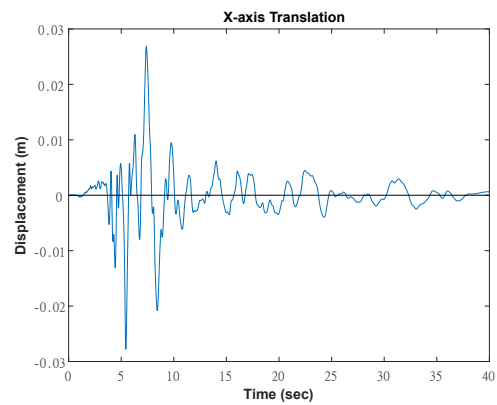


(ε') Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης

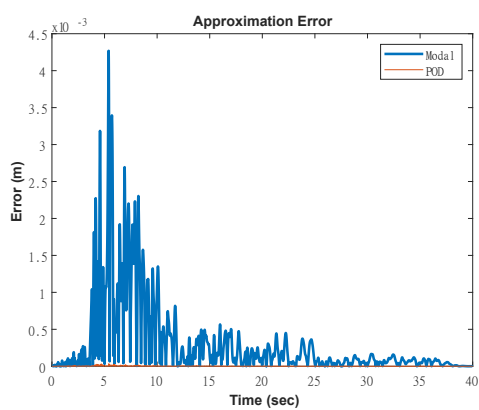
Σχήμα 4.19: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΛΕΥΚΑΔΑ (2015)



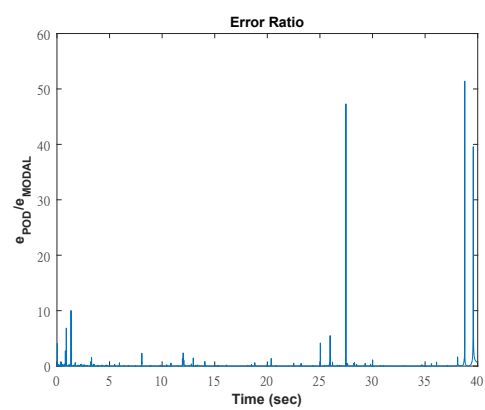
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



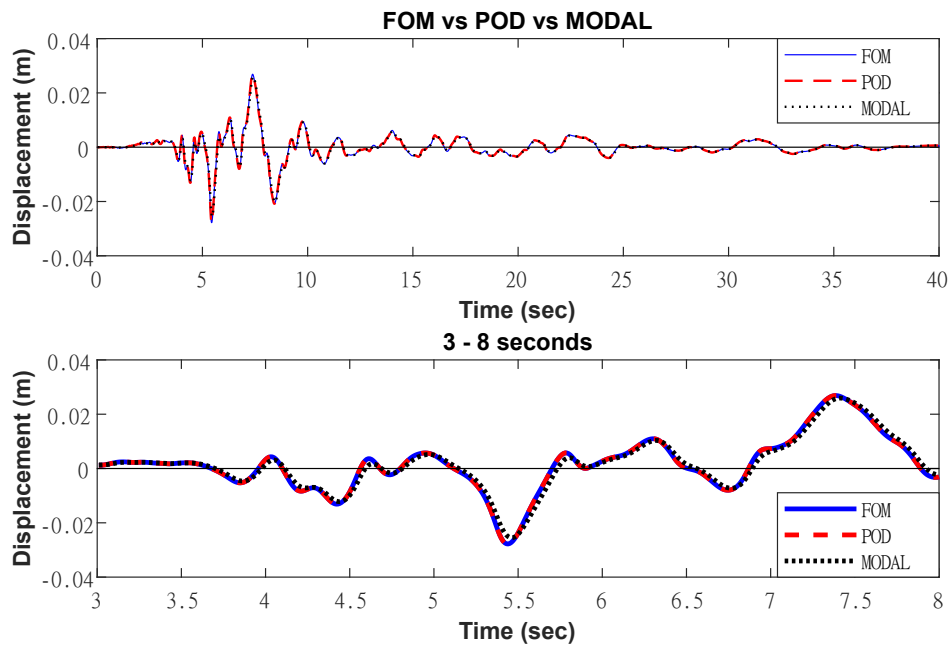
(β') Απόκριση FOM



(γ') Σφάλματα ιδιομορφικής ανάλυσης και μεθόδου POD



(δ') Λόγος σφαλμάτων ιδιομορφικής ανάλυσης και POD



(ε') Σύγκριση αποκρίσεων FOM, POD και ιδιομορφικής ανάλυσης

Σχήμα 4.20: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: NORTHRIDGE (1994)

Πίνακας 4.6: Χρόνοι ανάλυσης (sec) πολυώροφου πλαισίου για όλες τις διεγέρσεις

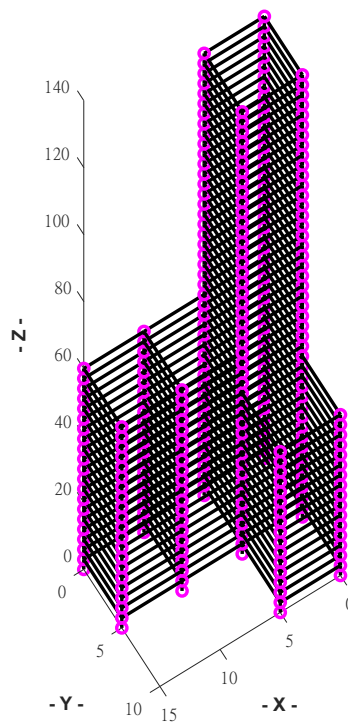
	Αντικύθηρα	Αθήνα	Imperial Valley	Kobe	Λευκάδα	Northridge
FOM	257.15	130.03	67.56	63.43	165.38	21.36
MODAL	29.86	29.66	25.80	26.97	30.90	20.54
ROM	5.24	1.39	2.4	1.76	4.92	0.57

4.4 Μη Γραμμική Ανάλυση

4.4.1 Πολυώροφο Τρισδιάστατο Πλαίσιο

Για τη μελέτη της μη γραμμικής συμπεριφοράς, χρησιμοποιείται ένα απλοποιημένο κριτήριο διαρροής για τις καμπτικές ροπές $f(M, M_{yield}) = 1 \Rightarrow M/M_{yield} = 1$. Για τη μοντελοποίηση της υστερητικής συμπεριφοράς που εμφανίζει ο φορέας στην ανακυκλιζόμενη φόρτιση, χρησιμοποιείται ένα μοντέλο Bouc-Wen με κινηματική κράτυνση.

Η εφαρμογή της μεθόδου POD σε μη γραμμικές αναλύσεις, παρουσιάζεται για την περίπτωση του φορέα του Σχ. 4.21. Αποτελείται από τον φορέα του Σχ. 4.6, με επιπλέον δύο ανοίγματα, μήκους 5m κατά τη διεύθυνση x , ύψους 60m και ένα άνοιγμα μήκους 5m κατά τη διεύθυνση y , ύψους 48m.



Σχήμα 4.21: Γεωμετρία πολυώροφου μη συμμετρικού φορέα

Ως αντιπροσωπευτική φόρτιση επιλέγεται, πάλι, ο σεισμός της Σάμου (30/10/2020) 4.22α'. Στη συνέχεια με χρήση **4000** στιγμιότυπων, στο χρονικό διάστημα 10-20 sec, της απόκρισης του προσομοιώματος πλήρους τάξης (FOM) κατασκευάζονται δύο προσομοιώματα μειωμένης τάξης. Το πρώτο με επιλογή **20** διανυσμάτων βάσης (POD μορφές) (ROM₂₀) και το δεύτερο με επιλογή **100** διανυσμάτων βάσης (ROM₁₀₀). Το χρονικό παράθυρο λήψης στιγμιότυπων επιλέγεται έτσι ώστε να περιέχει τα πιο έντονα μέρη της εδαφικής κίνησης (strong motion), καθώς τότε αναμένεται να προκληθούν βλάβες στον φορέα και άρα να εμφανιστεί πλαστική συμπεριφορά. Αυτή η πληροφορία της μη γραμμικής συμπεριφοράς, είναι ιδιαίτερα

σημαντικό να καταγραφεί στο μητρώο στιγμιότυπων και άρα στις ιδιάζουσες τιμές του, προκειμένου να προκύψει ένα προσομοίωμα μειωμένης τάξης (ROM) ικανό να προσεγγίσει με ακρίβεια τη μη γραμμική συμπεριφορά.

Ακολουθώντας οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης του ROM επιλύονται αριθμητικά με χρήση της μεθόδου Newmark, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα βήματα καθορισμού της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος (υπολογισμός των μη γραμμικών δυνάμεων επαναφοράς), διενεργούνται στον αρχικό χώρο του προβλήματος.

Επιλογή 20 POD μορφών (ROM₂₀):

Όπως προκύπτει (Σχ. 4.23), το ROM₂₀ προσεγγίζει με μικρό σφάλμα τη συμπεριφορά του πλήρους συστήματος πριν την πλαστικοποίηση. Κατά την πλαστικοποίηση του φορέα, το πιο σημαντικό ίσως στάδιο της απόκρισης, η ακρίβεια του ROM₂₀ αυξάνεται, γεγονός ιδιαίτερα ενθαρρυντικό. Τέλος, μετά την έντονη εδαφική κίνηση, το ROM₂₀ παρουσιάζει πάλι ένα μικρό σφάλμα το οποίο όμως είναι μικρής σημασίας. Το κέρδος στον υπολογιστικό χρόνο είναι μεγάλο καθώς σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, με χρήση του ROM₂₀ επιτυγχάνεται αρκετά ακριβής προσέγγιση της απόκρισης του φορέα, με κέρδος περισσότερο του 50% στον υπολογιστικό χρόνο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου η διέγερση δεν προκαλεί μη γραμμική απόκριση στον φορέα (Σχ. 4.24γ' και Σχ. 4.25). Σε αυτήν την περίπτωση το προσομοίωμα μειωμένης τάξης με τις 20 POD μορφές, αδυνατεί να προσεγγίσει με ακρίβεια την πραγματική απόκριση του συστήματος και παρουσιάζει μεγάλο σφάλμα.

Επιλογή 100 POD μορφών (ROM₁₀₀):

Σε περίπτωση που το σφάλμα του ROM₂₀ δεν είναι αποδεκτό, χρειάζεται να αυξηθούν τα διανύσματα βάσης (POD μορφές) για τη μόρφωση της μειωμένης βάσης. Μετά από διερεύνηση, προέκυψε ότι με χρήση 100 POD μορφών το σφάλμα μειώνεται δραστικά κρατώντας ταυτόχρονα τους χρόνους ανάλυσης μειωμένους¹. Το ROM₁₀₀, με λίγο αυξημένο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με το ROM₂₀, προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια την απόκριση του FOM σε όλες τις διεγέρσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις για όλες τις διεγέρσεις του Πίνακα 4.1 (Σχ. 4.22 έως 4.35). Στους Πίνακες 4.7 και 4.8 καταγράφονται οι χρόνοι ανάλυσης των δύο προσομοιωμάτων μειωμένης τάξης για κάθε διεγέρση και οι L_2 νόρμες των σφαλμάτων για κάθε περίπτωση.

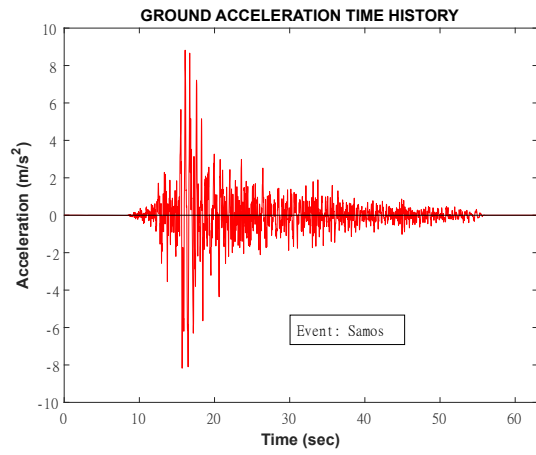
Πίνακας 4.7: Χρόνοι μη γραμμικής ανάλυσης πολυώροφου πλαισίου

	Σάμος	Αντικύθηρα	Αθήνα	Imperial Valley	Kobe	Λευκάδα	Northridge
FOM (sec/hr)	15594 / 4.33	21488 / 5.97	10226 / 2.84	10619 / 2.95	13236 / 3.68	13690 / 3.80	11370 / 3.16
ROM₂₀ (sec/hr)	6066 / 1.68	9724 / 2.70	4332 / 1.20	4033 / 1.12	5497 / 1.53	6957 / 1.93	4478 / 1.24
ROM₁₀₀ (sec/hr)	11412 / 3.17	13243 / 3.68	6828 / 1.90	6539 / 1.82	8874 / 2.46	7837 / 2.18	6909 / 1.92

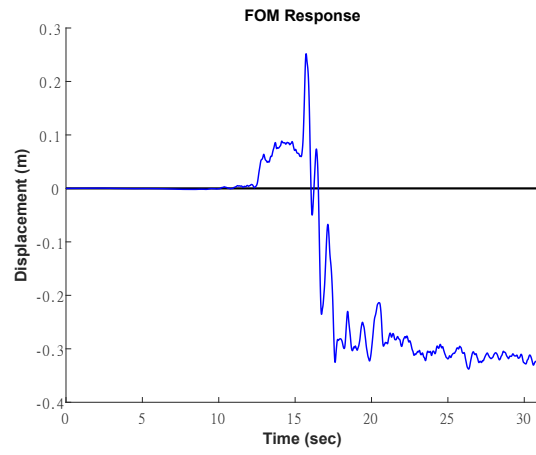
Πίνακας 4.8: L_2 νόρμες των σφαλμάτων των ROM₂₀ και ROM₁₀₀

	Σάμος	Αντικύθηρα	Αθήνα	Imperial Valley	Kobe	Λευκάδα	Northridge
ROM₂₀	2.0965	0.1769	0.3045	1.1086	2.5060	0.1030	1.2673
ROM₁₀₀	0.4811	0.0780	0.0829	0.1530	1.3620	0.0311	1.0698

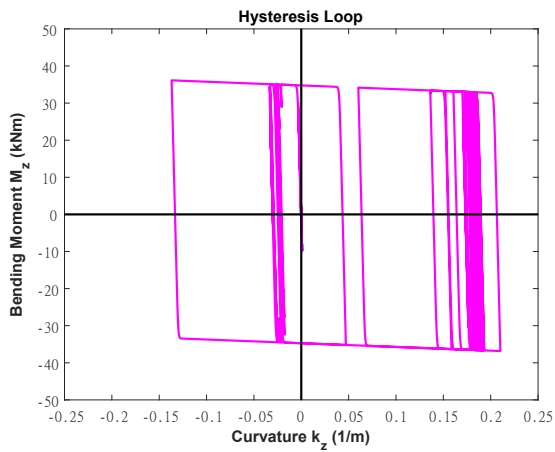
¹Είναι σημαντικό να επιλέγεται πλήθος POD μορφών σημαντικά χαμηλότερο από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος για να επιτευχθεί υπολογιστικό κέρδος. Ειδικά για την περίπτωση της μη γραμμικής ανάλυσης, το κόστος για τους συνεχείς μετασχηματισμούς από τον μειωμένο υπόχωρο στον αρχικό χώρο του προβλήματος για τον υπολογισμό των δυνάμεων επαναφοράς, μπορεί να προκύψει μεγαλύτερο από το κέρδος της μείωσης τάξης για όλη την υπόλοιπη επίλυση.



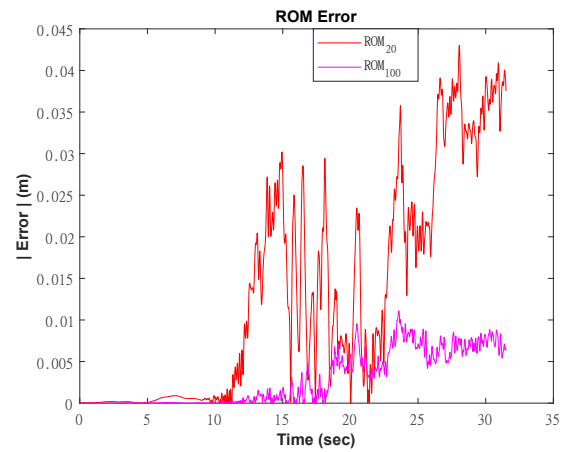
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



(β') Απόκριση FOM

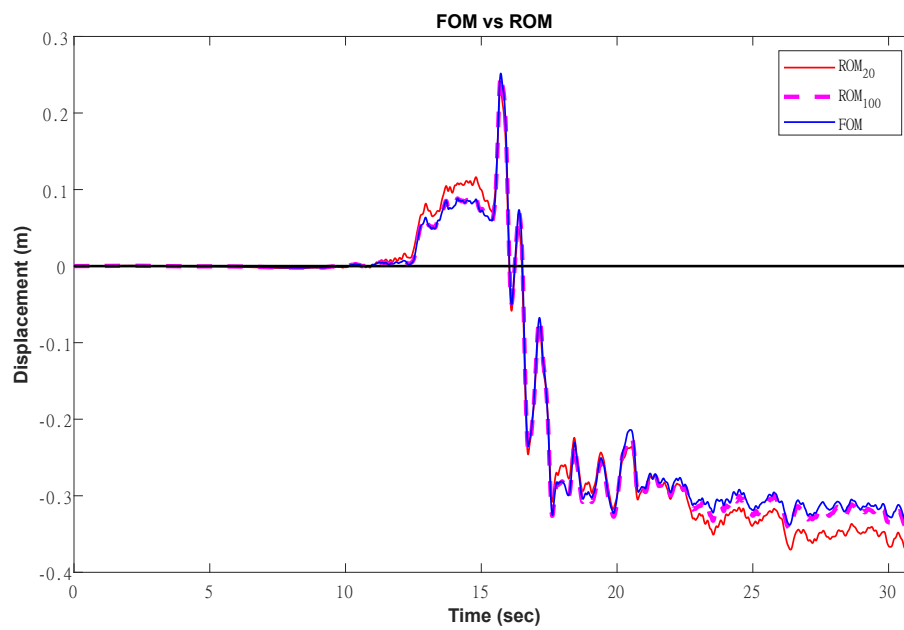


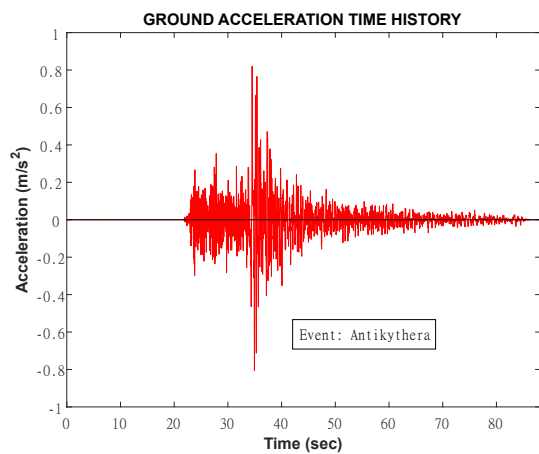
(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



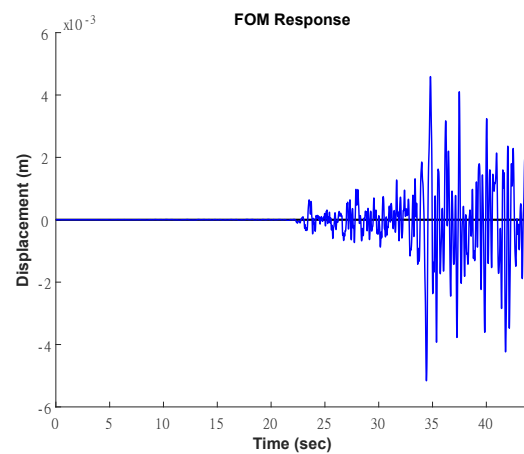
(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.22: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΣΑΜΟΣ (2020)

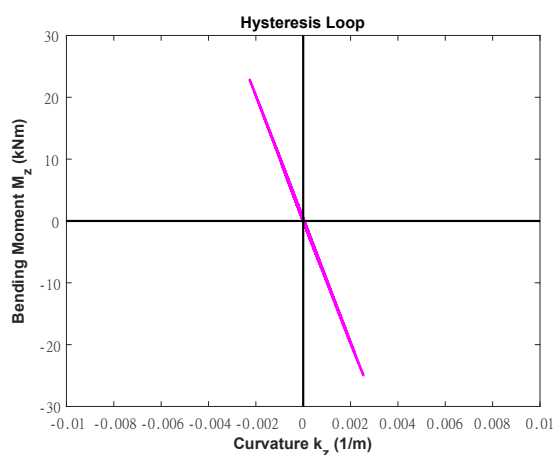
Σχήμα 4.23: ΣΑΜΟΣ (2020): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM₂₀, ROM₁₀₀



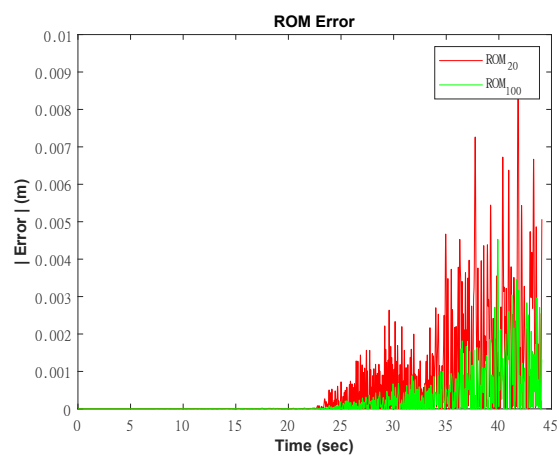
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



(β') Απόκριση FOM

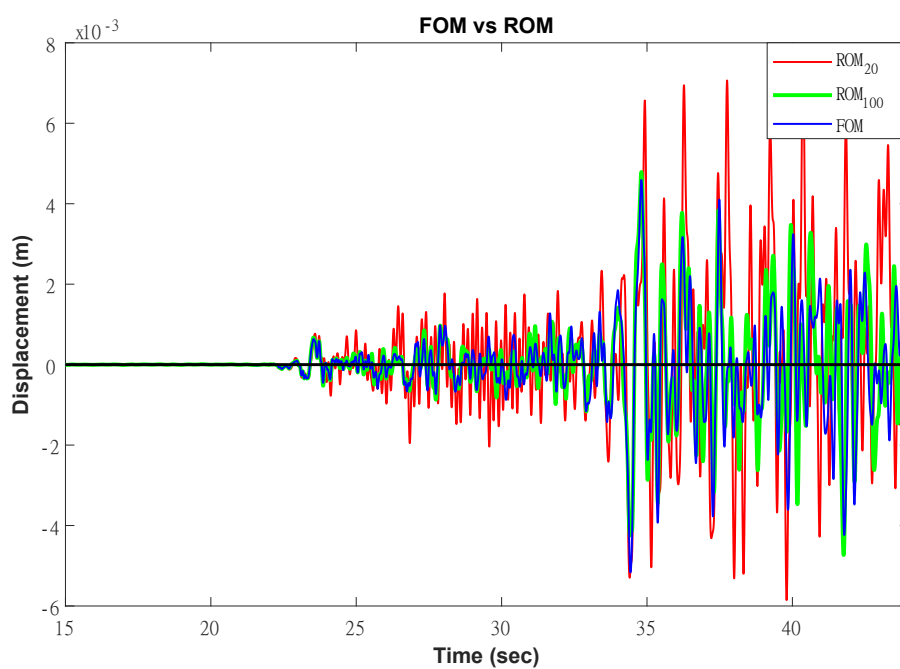


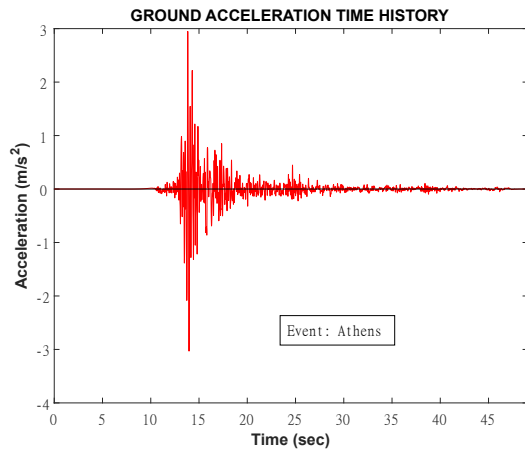
(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



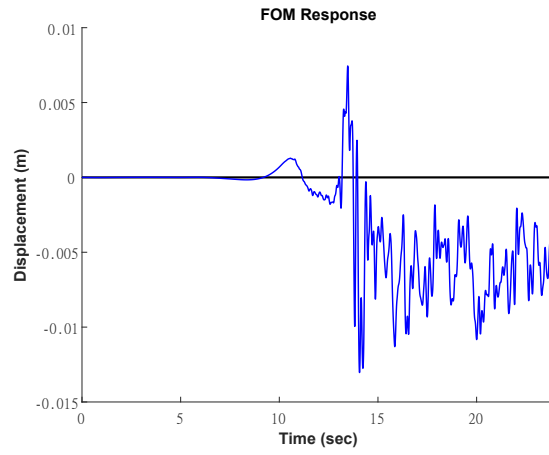
(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.24: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΑ (2019)

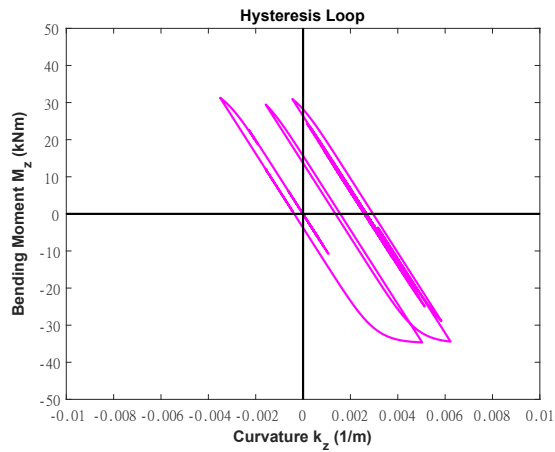
Σχήμα 4.25: ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΑ (2019): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM₂₀, ROM₁₀₀ (στο διάστημα 15-43sec)



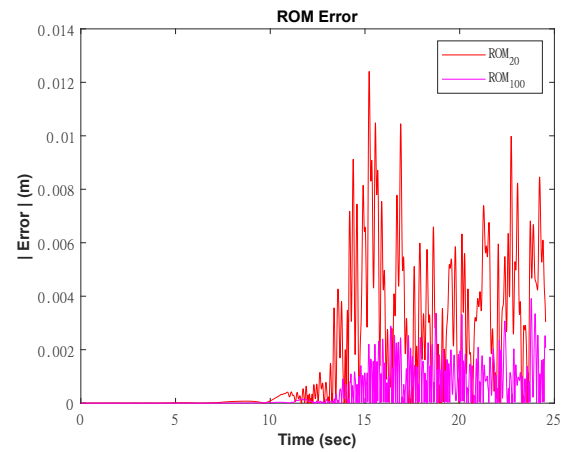
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



(β') Απόκριση FOM

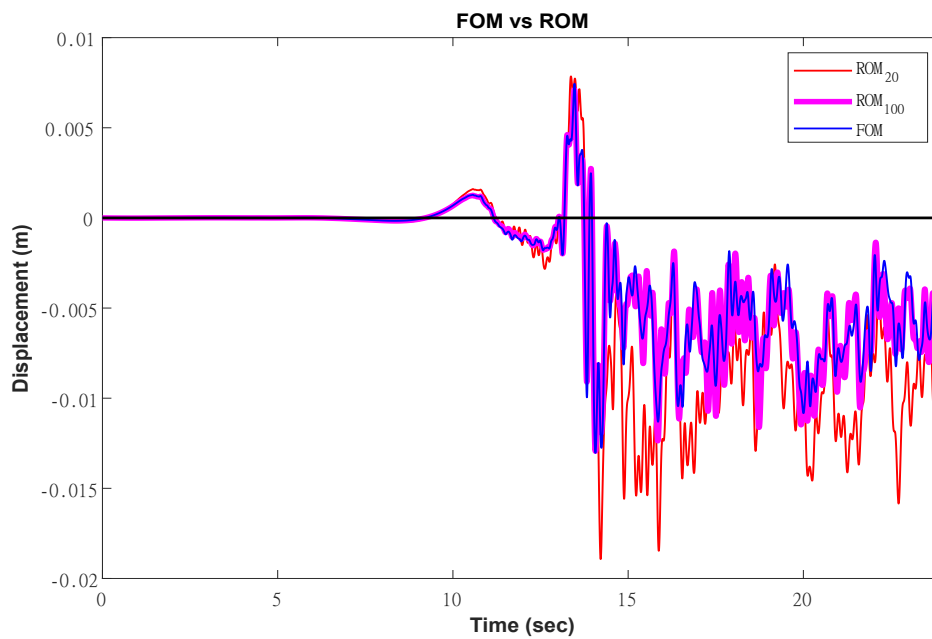


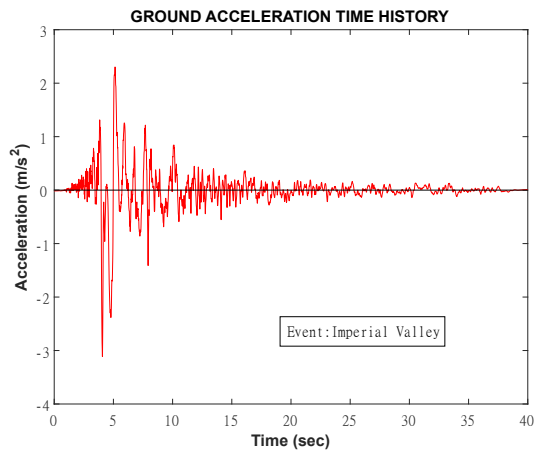
(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



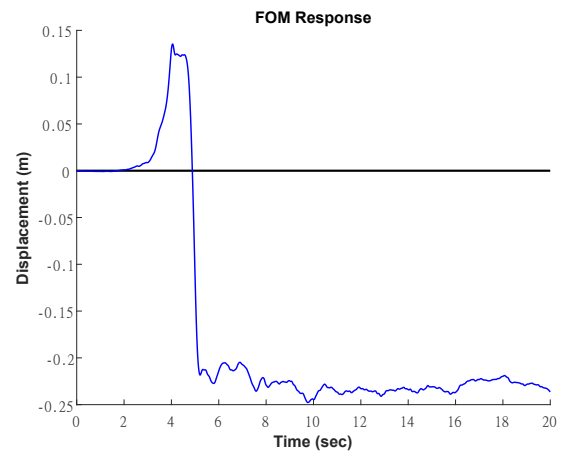
(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.26: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΑΘΗΝΑ (1999)

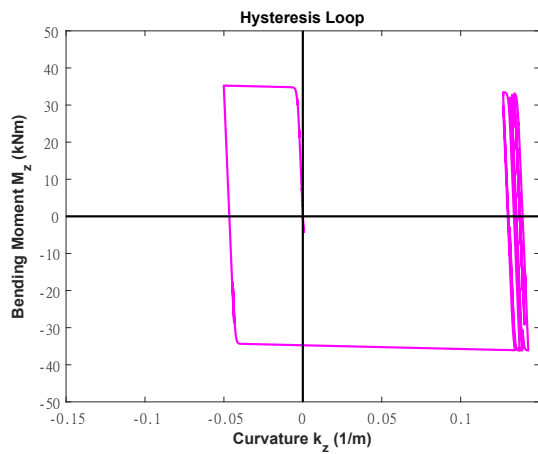
Σχήμα 4.27: ΑΘΗΝΑ (1999): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM₂₀, ROM₁₀₀



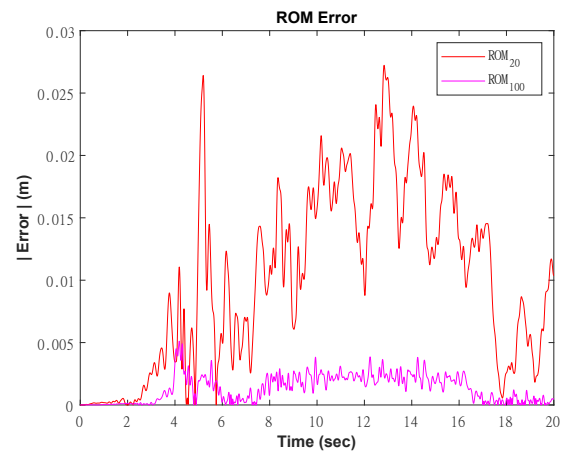
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



(β') Απόκριση FOM

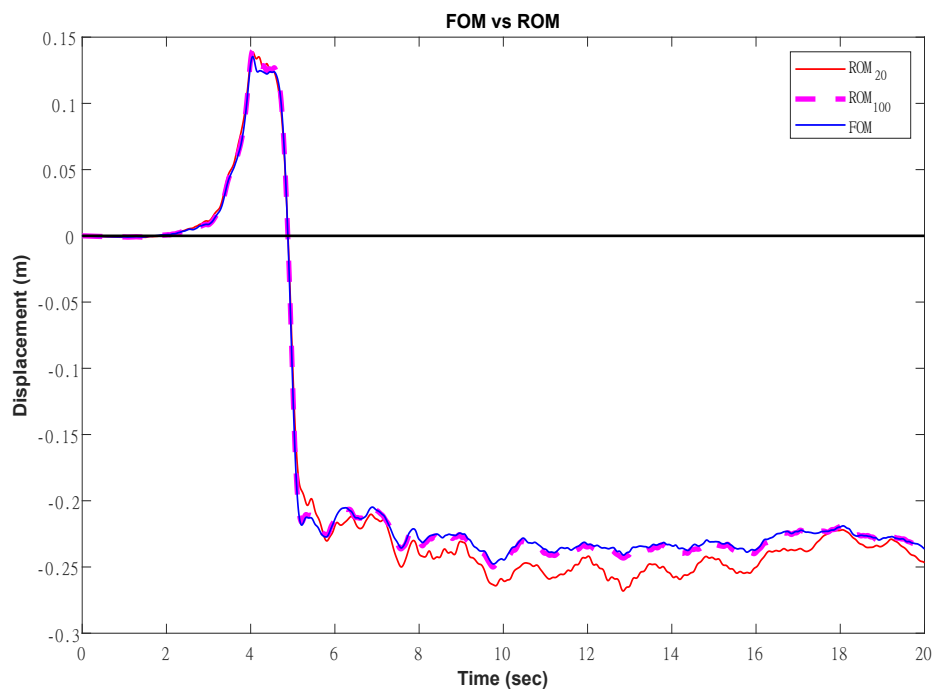


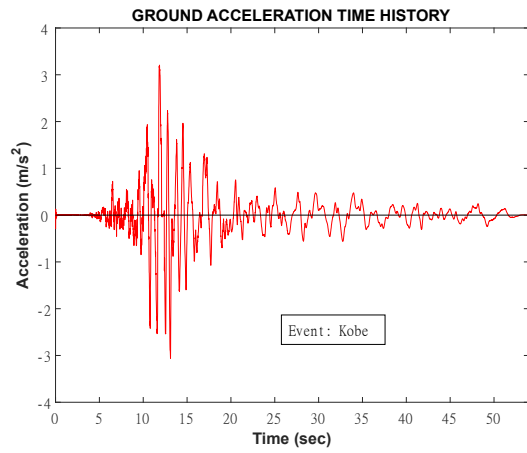
(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



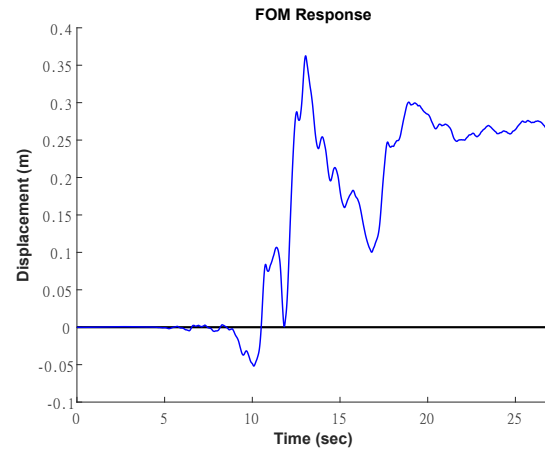
(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.28: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: IMPERIAL VALLEY (1979)

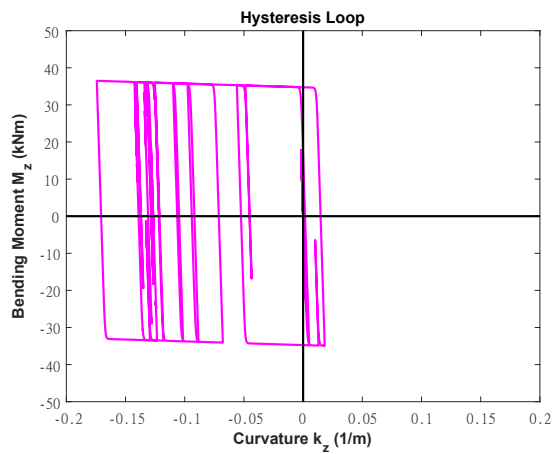
Σχήμα 4.29: IMPERIAL VALLEY (1979): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM₂₀, ROM₁₀₀



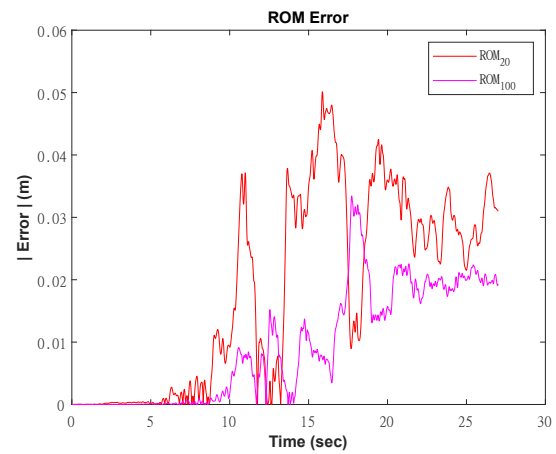
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



(β') Απόκριση FOM

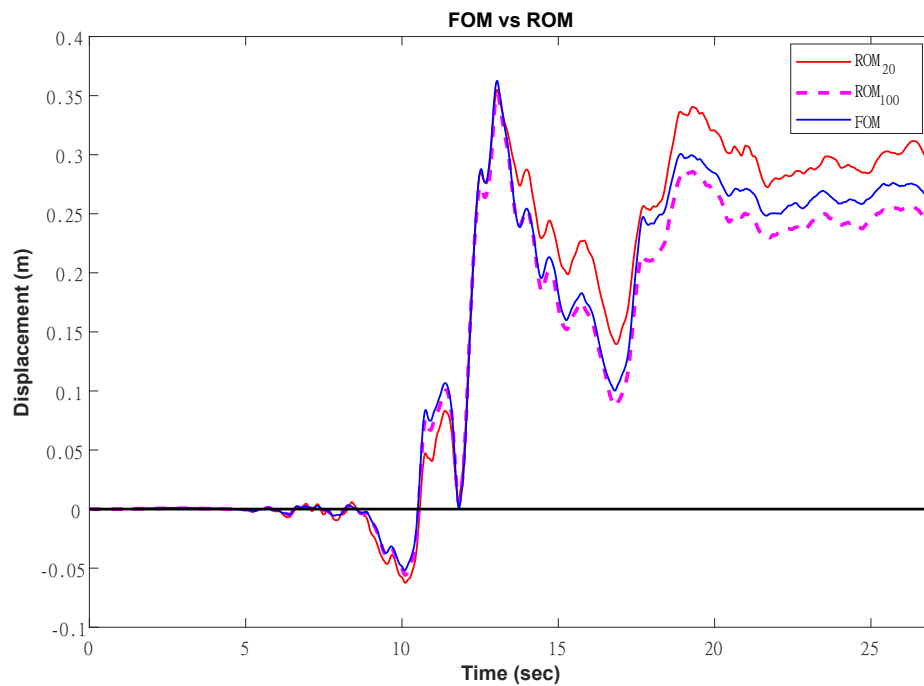


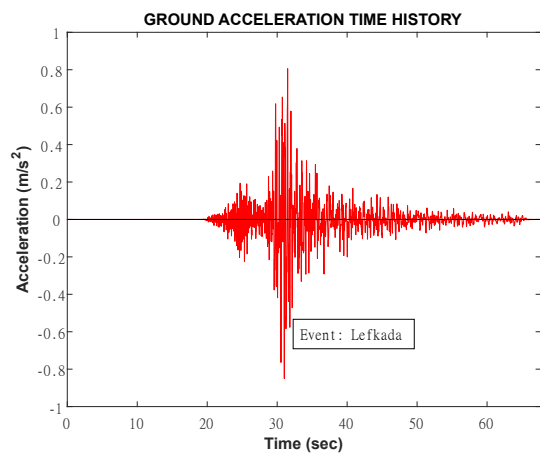
(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



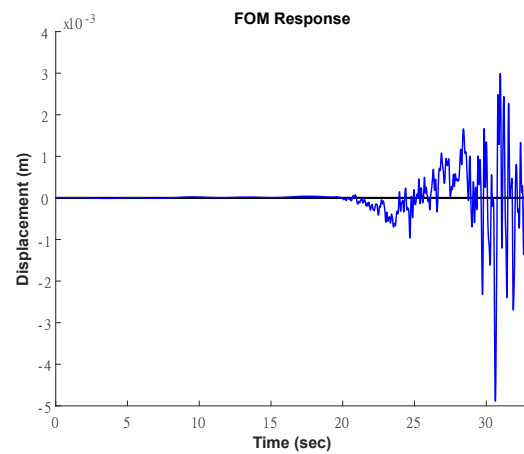
(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.30: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΚΟΒΕ (1995)

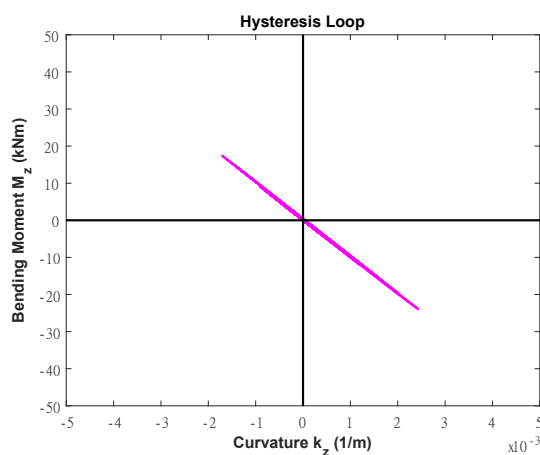
Σχήμα 4.31: ΚΟΒΕ (1995): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM_{20} , ROM_{100}



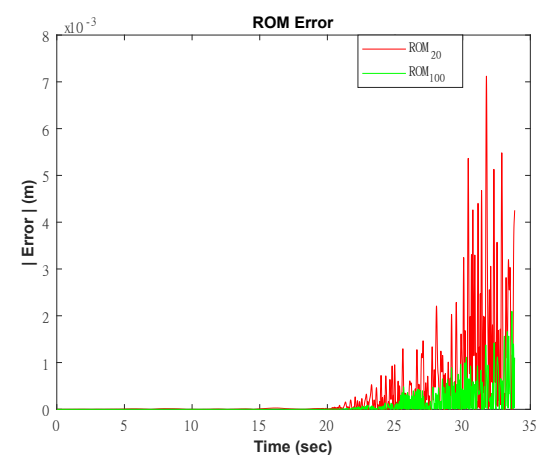
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



(β') Απόκριση FOM

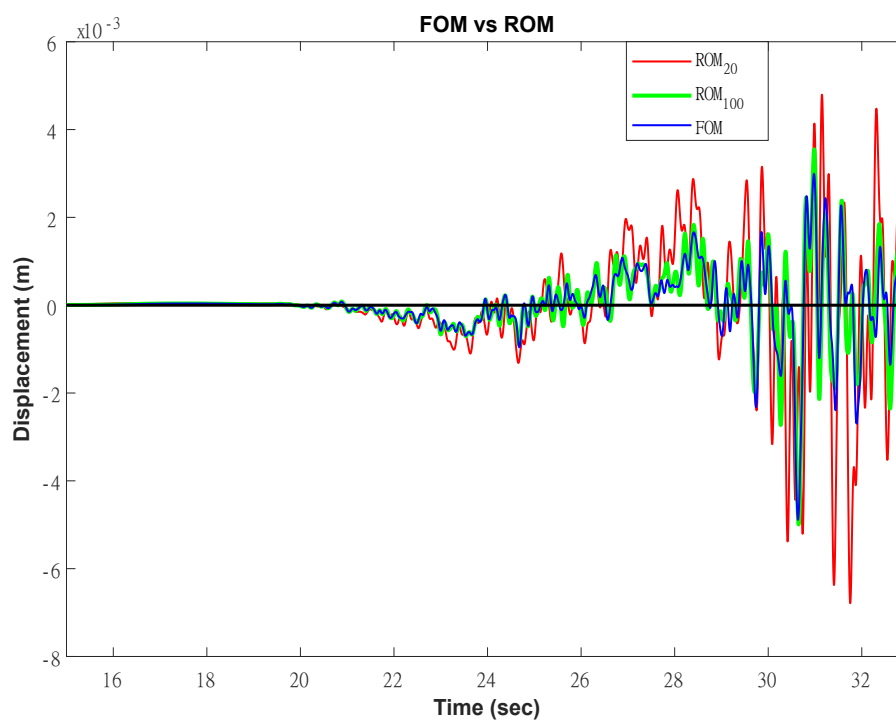


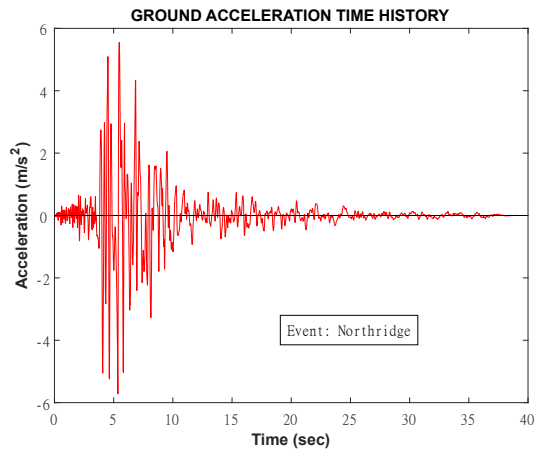
(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



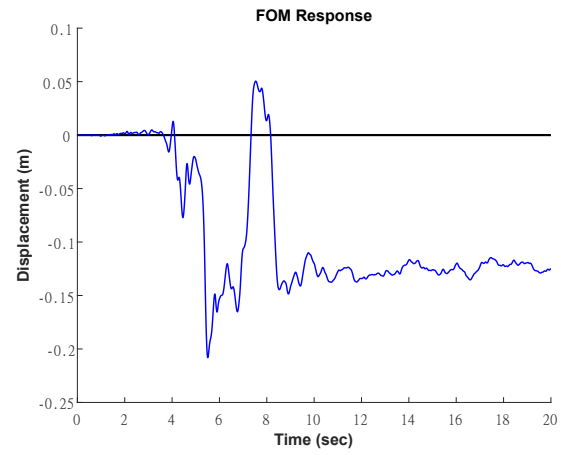
(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.32: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΛΕΥΚΑΔΑ (2015)

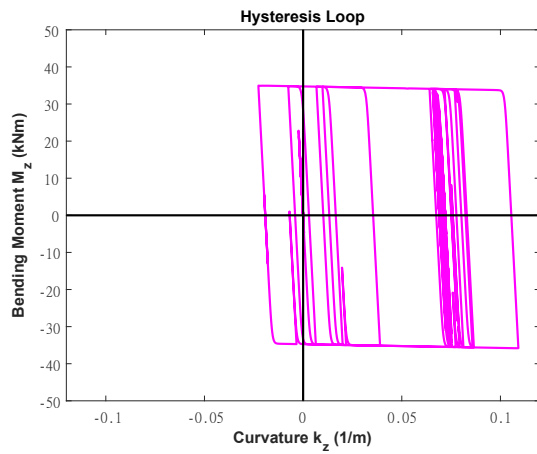
Σχήμα 4.33: ΛΕΥΚΑΔΑ (2015): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM₂₀, ROM₁₀₀ (στο διάστημα 15-33 sec)



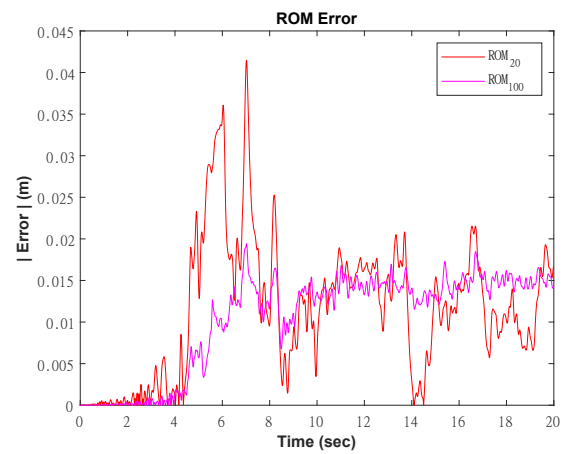
(α') Χρονοϊστορία εδαφικής επιτάχυνσης



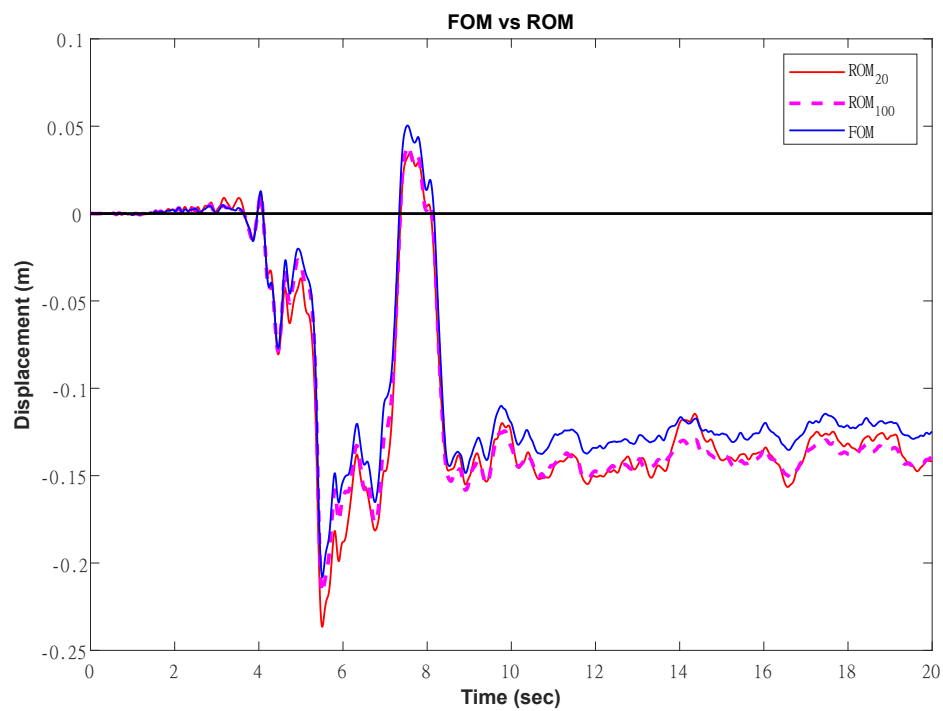
(β') Απόκριση FOM



(γ') Διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων



(δ') Σφάλματα των ROM

Σχήμα 4.34: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: NORTHRIDGE (1994)**Σχήμα 4.35: NORTHRIDGE (1994): Σύγκριση αποκρίσεων FOM, ROM₂₀, ROM₁₀₀**

Κεφάλαιο 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

5.1 Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο τη διερεύνηση της αποδοτικότητας της μεθόδου POD, ως μια μέθοδο μείωσης τάξης (MOR) σε προβλήματα δυναμικής ανάλυσης κατασκευών. Η αξιολόγηση αυτή έγινε μέσα από μια σειρά αριθμητικών εφαρμογών, τόσο για γραμμικά όσο και μη γραμμικά προβλήματα. Η POD αποτελεί μια μέθοδο οδηγούμενη από τα δεδομένα (data-driven) και επομένως είναι ανεξάρτητη του συστήματος από το οποίο αυτά πηγάζουν. Παρά το γεγονός ότι οι σεισμικές διεγέρσεις αποτελούν τυχαία φαινόμενα, η προσέγγιση ενός συστήματος μέσω της μεθόδου POD, χρησιμοποιώντας στιγμιότυπα ενός μικρού μόνο μέρους της απόκρισης, είναι ιδιαίτερα ακριβής. Σε σύγκριση με την ιδιομορφική ανάλυση, το πλεονέκτημα χρήσης της POD, δεν είναι μόνο η βέλτιστη αναπαράσταση των δεδομένων της απόκρισης σε έναν υπόχωρο μικρότερης διάστασης, αλλά και η εφαρμοσιμότητά της σε μη γραμμικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα των εφαρμογών και για τις δύο περιπτώσεις ανάλυσης, δείχνουν ότι η POD είναι μια πολύ αποδοτική μέθοδος για τη μείωση των βαθμών ελευθερίας.

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας συνοψίζονται επιγραμματικά:

1. Η POD είναι μια απλή στην εφαρμογή μέθοδος, ακόμη και σε περιπτώσεις μη γραμμικών προβλημάτων.
2. Η POD είναι μια αποδοτική μέθοδος η οποία μπορεί, με σχετικά μικρό όγκο δεδομένων της απόκρισης μιας κατασκευής, να κατασκευάσει ένα προσομοίωμα μειωμένης τάξης (ROM), το οποίο προσεγγίζει με ακρίβεια την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος.
3. Η μειωμένη βάση που υπολογίζεται από τα δεδομένα απόκρισης της κατασκευής σε μια διέγερση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθεί η λύση για άλλες διεγέρσεις.
4. Η μείωση των χρόνων ανάλυσης που απαιτούνται είναι σημαντική και το κέρδος να αναδεικνύεται ακόμα περισσότερο όταν υπάρχει ανάγκη να γίνει μελέτη για πολλά διαφορετικά σενάρια φόρτισης, καθώς το ROM κατασκευάζεται μόνο μια φορά.
5. Στην περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης, η POD υπερτερεί της κλασικής μεθόδου υπέρθεσης ιδιομορφών. Συγκεκριμένα, οι αναλύσεις έδειξαν κατά μέσο όρο 97.5% μείωση του χρόνου ανάλυσης σε σύγκριση με το προσομοίωμα πλήρους τάξης και 90.5% μείωση σε σύγκριση με την ιδιομορφική ανάλυση.
6. Η εφαρμογή της POD και σε μη γραμμικές αναλύσεις αποδίδει ακριβείς προσεγγίσεις, με το μειονέκτημα βέβαια ότι είναι απαραίτητη η ανάλυση του πλήρους συστήματος, έστω και για μικρό χρονικό διάστημα. Μέσα από τις εφαρμογές, επετεύχθη 57.7% κατά μέσο όρο μείωση του χρόνου ανάλυσης με χρήση του ROM₂₀ και 36% μείωση με χρήση του ROM₁₀₀.

7. Η POD παρέχει μεγάλη ευελιξία για την προσαρμογή της ισορροπίας μεταξύ του υπολογιστικού κόστους και της επιθυμητής ακρίβειας, απαιτώντας την κατάλληλη μεταχείριση δύο μόνο παραμέτρων: του πλήθους των στιγμιότυπων εκπαίδευσης και του πλήθους των POD μορφών που χρησιμοποιούνται.

5.2 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Τα αποτελέσματα, στην πλειονότητά τους, ήταν θετικά και τα συμπεράσματα τα οποία συνοψίζονται παραπάνω δημιουργούν κίνητρο για περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο της προσομοίωσης μειωμένης τάξης για την επίλυση δυναμικών προβλημάτων, τόσο πολιτικού μηχανικού, αλλά και κάθε άλλου κλάδου μηχανικής. Παρά το μεγάλο εύρος εφαρμοσιμότητας και την ευελιξία που προσφέρει, η POD χαρακτηρίζεται από δύο βασικά μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι η ανάγκη προσομοίωσης του πλήρους συστήματος, έστω και για μικρό χρονικό διάστημα, για την απόκτηση του προσομοιώματος μειωμένης τάξης. Αυτό το μεγάλο offline κόστος της ανάλυσης, μπορεί να είναι περιοριστικό, εάν οι απαραίτητοι υπολογιστικοί πόροι δεν είναι διαθέσιμοι. Σε αναλύσεις, ωστόσο, που τα offline κόστη έχουν μικρή σημασία, η POD αποτελεί ιδιαίτερα ελκυστική επιλογή. Το δεύτερο μειονέκτημα έχει να κάνει με την εγγενή στατιστική φύση της μεθόδου. Από την ανάλυση δεδομένων εκπαίδευσης, μόνο οι δυναμικές πτυχές του πλήρους συστήματος που εμφανίζονται στα δεδομένα αυτά, ενσωματώνονται στο προσομοίωμα μειωμένης τάξης. Είναι επομένως σημαντικό να διεξάγονται προσομοιώσεις για την απόκτηση των δεδομένων εκπαίδευσης, στις οποίες αποδίδεται η πλήρης δυναμική του συστήματος. Τα μειονεκτήματα αυτά, αποτελούν κίνητρο για τη διερεύνηση, επέκταση αλλά και ανάπτυξη νέων μεθόδων, όπως μέθοδοι μείωσης, που δεν απαιτούν εκ των προτέρων προσομοιώσεις (simulation-free), που θα προσπερνούν τα εμπόδια αυτά.

Βιβλιογραφία

- [1] Chopra, Anil K.: *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 5th edn, Pearson Education Limited, (2019)
- [2] Bathe, Klaus-Jürgen: *Finite element procedures*, 2nd edn, Prentice Hall, (2014)
- [3] Κατσικαδέλης, Ι.Θ.: *Δυναμική των Κατασκευών*, ΤΟΜΟΣ Ι,ΙΙ, Εκδόσεις Συμμετρία, (2004)
- [4] Przemieniecki, J.S: *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications, (1985)
- [5] Wilson, Edward L.: *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, 3rd edn, CSI inc., (2002)
- [6] Clough, Ray W., Penzien, Joseph: *Dynamics of Structures*, 3rd edn, CSI inc., (2003)
- [7] Rajasekaran, S.: *Structural Dynamics of Earthquake Engineering, Theory and Application using MATHEMATICA and MATLAB*, CRC Press, (2009)
- [8] Moore, G. E.: *Cramming more components onto integrated circuits*. In Electronics 38:8,(1965)
- [9] Qu, Z.Q.: *Model Order Reduction Techniques with Application in Finite Element Analysis*. Springer-Verlag London Limited, London,(2004)
- [10] B. J.W. S. Lord Rayleigh: *Theory of Sound*, Vol. 1. 2nd. London and New York: Macmillan and Co., (1894)
- [11] Golub G.H., Van Loan C.F.: *Matrix Computations*, 2nd edn, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, (1990)
- [12] Joliffe I.T.: *Principal Component Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1986)
- [13] Rutzmoser, Johannes Baptist: *Model Order Reduction for Nonlinear Structural Dynamics - Simulation-free Approaches*, PhD Thesis, TU München, (2018)
- [14] Τριανταφύλλου, Σάββας Π.: *Hysteretic Finite Elements and Macro-Elements for Nonlinear Dynamic Analysis of Structures*, PhD Thesis, NTUA, (2011)
- [15] Gavin, Henri P. CEE 541. Structural Dynamics, Lecture notes, Duke University. <http://people.duke.edu/~hpgavin/StructuralDynamics/>
- [16] CME 345: Model Reduction, Lecture notes, Stanford University https://web.stanford.edu/group/frg/course_work/CME345/CA-CME345-Ch4.pdf
- [17] Advanced Structural Analysis: Inelastic Beam Elements, Lecture notes, The University of Nottingham
- [18] Bamer F., Bucher C.: *Application of the proper orthogonal decomposition for linear and nonlinear structures under transient excitation*, *Acta Mechanica*, **223**:2549-2563, (2012)
- [19] Bamer F., Amiri, A.K.,Bucher C.: *A new model order reduction strategy adapted to nonlinear problems in earthquake engineering*, (2016)

- [20] Newmark, N.M.: *A Method of Computation for Structural Dynamics*. ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol 85. No EM3, (1959)
- [21] Sirovich L.: *Turbulence and the dynamics of coherent structures*. Part 1: Coherent structures. Quarterly of Applied Mathematics XLV, No 3, pp. 561-571, (1987)
- [22] Sirovich L.: *Turbulence and the dynamics of coherent structures*. Part 2: Symmetries and transformations. Quarterly of Applied Mathematics XLV, No 3, pp. 573-582, (1987)
- [23] Sirovich L.: *Turbulence and the dynamics of coherent structures*. Part 3: Dynamics and scaling. Quarterly of Applied Mathematics XLV, No 3, pp. 583-590, (1987)
- [24] Obukhov A.M.: *Statistical description of continuous fields*. Trudy Geophys. Int. Akad. Nauk. SSSR, 24, pp 3-42, (1954)
- [25] Tubino F, Carassale L, Solari G.: *Seismic response of multi-supported structures by proper orthogonal decomposition*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics; 32:1639–1654, (2003)
- [26] Bucher C.: *Stabilization of explicit time integration by modal reduction*, Proceedings, Trends in Computational Mechanics, Barcelona: CINME, (2001)
- [27] Gutierrez E, Cela J.J.L.: *Improving explicit time integration by modal truncation techniques*, Earthquake Engineering And Structural Dynamics; 27:1541–1557, (1998)
- [28] Gutierrez E, Zaldivar J.M.: *The application of Karhunen-Loeve, or principal component analysis method, to study the nonlinear seismic response of structures*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics; 29:1261-1286
- [29] D. J. Ewins.: *Modal testing: Theory and practice*. Vol. 15. Chichester: Research studies press, (1984).
- [30] Kosambi D.: *Statistics in function space*, Journal of the Indian Mathematical Society; 7:76–88, (1943)
- [31] Karhunen K.: *Zur spektral theorie stochastischer prozesse*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A1, 34, (1946)
- [32] Karhunen K.: *Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung*, PhD thesis, University of Helsinki, (1947)
- [33] Loeve M.: *Fonctions al eatoire de second ordre*, Revue Scientifique; 48:195–206, (1946)
- [34] Loeve M.: *Probability Theory*, Van Nostrand, (1963)
- [35] Cusumano J.P, Sharkady M.T, Kimble B.W.: *Spatial coherence measurements of a chaotic flexible-beam impact oscillator*, American Society of Mechanical Engineers, Aerospace Division (Publication) AD; 33:13–22, (1993)
- [36] Feeny, B.F., Kappagantu, R.: *On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations* J. Sound Vib. 211(4), 607–616, (1998)
- [37] Kappagantu, R., Feeny, B.: *An “optimal” modal reduction of a system with frictional excitation*. J. Sound Vib. 224(5), 863–877, (1999)
- [38] Kappagantu, R., Feeny, B.: *Dynamical characterization of a frictionally excited beam*.;Part 1, Nonlinear Dyn. 22, 317–333, (2000)
- [39] Kappagantu, R., Feeny, B.: *Proper orthogonal modal modeling of a frictionally excited beam*.;Part 2, Nonlinear Dyn. 23, 1–11, (2000)

- [40] Liang Y.C.: Lee H.P., Lim S.P., Lin W.Z., Lee K.H., Wu C.G.: *Proper orthogonal decomposition and its applications Part 1: theory. Proper Orthogonal Decomposition Theory*. Journal of Sound and Vibration; 252:527–544, (2002)
- [41] Kerschen G., Golivani J.C.: *Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition*, Journal of Sound and Vibration; 249:849–865, (2002)
- [42] Kerschen G, Golivani J.C.: *A model updating strategy of non-linear vibrating structures*, International Journal of Numerical Methods in Engineering; 60:2147–2164, (2003)
- [43] Qu Z, Shi Y, Hua H.: *A reduced-order modeling technique for tall buildings with active tuned mass damper*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics; 30:349–362, (2001)
- [44] Schemann, A.G., Smith, H.A.: *Vibration control of cable-stayed bridges - part 1: modelling issues*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics; 27:811–824, (1998)
- [45] Krysl, P., Lall, S., Marsden, J.E.: *Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering IJNME; 51:479–504, (2001)
- [46] Ritto, T., Buezas, F., Sampaio, R.: *A new measure of efficiency for model reduction: application to a vibroimpact system*, J. Sound Vib. 1977–1984, (2010)
- [47] Computational Complexity theory, Stanford encyclopedia of Philosophy, <https://plato.stanford.edu/entries/computational-complexity/>
- [48] Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER). Homepage: <https://ngawest2.berkeley.edu/>.
- [49] Engineering Strong Motion Database (ESM). Homepage: <https://esm-db.eu/#/home>