ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Αναλυτική και αριθμητική επίλυση ειδικών προβλημάτων δινορευμάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Μαγουλάς

Επιβλέπουσα: Ευαγγελία Κοντού
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η μέθοδος Μη Καταστροφικού Ελέγχου των υλικών με δινορεύματα. Συγκεκριμένα, σκοπός της εργασίας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ αναλυτικών και αριθμητικών μοντέλων σε διάφορες περιπτώσεις εμφάνισης δινορευμάτων.

Για τον σκοπό αυτό θεωρήθηκε πηνίο οδηγούμενο από εναλλασσόμενο ρεύμα ποικίλων συχνοτήτων, το οποίο προκαλεί την εμφάνιση δινορευμάτων. Η εμφάνιση αυτών των επαγόμενων ρευμάτων επιφέρει αλλαγές στην τιμή εμπέδησης του πηνίου. Η σύγκριση των δύο μεθόδων έγινε για τις τιμές της εμπέδησης που προβλέπει η κάθε μία σε κάθε κατηγορία προβλήματος.

Η αναλυτική λύση των προβλημάτων βασίστηκε στα καθιερωμένα μοντέλα των Dodd και Deeds, τα οποία προσαρμόστηκαν από τους Θεοδουλίδη και Κριεζή μετατρέποντας τις ολοκληρωτικές εκφράσεις της εμπέδησης σε αναπτύγματα σειρών.

Η υπολογιστική λύση των προβλημάτων στηρίχτηκε στην ανάπτυξη των αντίστοιχων μοντέλων στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων COMSOL.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο μοντέλων απέδειξαν την ταυτόσιμη συμπεριφορά των δύο λύσεων και την δυνατότητα χρήσης του ΜΚΕ με δινορεύματα σε ένα ευρύ πεδίο ελέγχων.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια, κύρια Ευαγγελία Κοντού, τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κυρίους Χαράλαμπο Γεωργιάδη και Ευστάθιο Θεοτόκογλου καθώς επίσης και τον κύριο Γεώργιο Τσαμασφύρο για την στήριξή του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να εκφράσω την ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη μου στον υποψήφιο διδάκτορα κύριο Άγγελο Χριστόπουλο για το χρόνο του, το ενδιαφέρον του και την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Μη καταστροφικός έλεγχος υλικών 1
1.1 Οι κυριότερες μέθοδοι μη καταστροφικού ελέγχου 4
1.1.1 Ραδιογραφικές μέθοδοι 4
1.1.2 Μαγνητικές μέθοδοι 8
1.1.3 Διεισδυτικά υγρά 12
1.1.4 Θερμογραφία 13
1.1.5 Μέθοδοι υπερήχων 16
1.2 Δινορεύματα 19
1.2.1 Ιστορικά στοιχεία του ελέγχου δινορευμάτων 20
1.2.2 Εφαρμογές ελέγχου δινορευμάτων 20
1.2.3 Έρευνα στην περιοχή των δινορευμάτων 21
1.2.4 Διάταξη ανίχνευσης 21
Κεφάλαιο 2: Αναλυτικές λύσεις προβλημάτων δινορευμάτων 23
2.1 Στοιχεία θεωρίας ηλεκτρομαγνητισμού 23
2.1.1 Οι εξισώσεις Maxwell και η δύναμη Lorentz 23
2.1.2 Ο νόμος του Ohm 24
2.1.3 Εμπέδηση και επαγωγική αντίσταση πηνίου 25
2.2 Υπολογισμός εμπέδησης πηνίου πάνω από το επίπεδο δύο αγωγών 26
2.2.1 Εύρεση του διανυσματικού δυναμικού 26
2.2.2 Πηνίο πάνω από περιοχές διαφορετικής αγωγιμότητας 30
2.2.3 Το διανυσματικό δυναμικό πηνίου τετράγωνης διατομής 33
2.2.4 Υπολογισμός εμπέδησης 36
2.2.5 Προσεγγιστική λύση με ανάπτυξη σε σειρά 38
2.2.6 Σύγκλιση σειράς 39
Κεφάλαιο 3: Αριθμητική επίλυση προβλημάτων και σύγκριση με θεωρητικές λύσεις 41
3.1 Προβλήματα δινορευμάτων αξονικής συμμετρίας δύο διαστάσεων 41
3.1.1 Ορίζοντας τη γεωμετρία των προβλημάτων, τις φυσικές ιδιότητες και παραμέτρους του 41
3.1.2 Προετοιμασία υπολογιστικής προσομοίωσης 44
3.1.3 Επεξεργασία αποτελεσμάτων υπολογιστικής προσομοίωσης 44

3.1.4 Σύγκλιση της λύσης και πυκνότητα καμβά 45
3.1.5 Πηνίο στον αέρα 49
3.1.6 Πηνίο πάνω από ημιάπειρη πλάκα 50
3.1.7 Πηνίο πάνω από πεπερασμένη πλάκα 57
3.2 Συμπεράσματα 61
3.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων αναλυτικής και υπολογιστικής λύσης 61
3.2.2 Φυσικές ιδιότητες και παρατηρήσεις 62
Παράρτημα Α Κώδικες Mathematica 65
Παράρτημα Β Κώδικες COMSOL 3.4 68

Κεφάλαιο 1:

Μη καταστροφικός έλεγχος υλικών

Μη καταστροφικός έλεγχος (ΜΚΕ) ονομάζεται ο έλεγχος που δεν επιφέρει αλλοιώσεις στο εξεταζόμενο αντικείμενο. Οι μέθοδοι ΜΚΕ είναι ζωτικής σημασίας για τη δημιουργία και συντήρηση κάθε εξαρτήματος και κατασκευής.

Ο πρωταρχικός σκοπός των μεθόδων του ΜΚΕ είναι να γίνεται συνδυασμός των ελέγχων με τη θεωρία της Μηχανικής των Θραύσεων, ώστε να προβλέπεται η επέκταση τυχόν ρωγμών και να υπολογίζεται ο κίνδυνος αστοχίας του υλικού και της κατασκευής. Οι Μη Καταστροφικοί Έλεγχοι χρησιμοποιούνται για να διαπιστώνεται η ύπαρξη και το μέγεθος των ελαττωμάτων σε μια κατασκευή, χωρίς όμως να καταστρέφεται ούτε να επηρεάζεται η λειτουργικότητά της. Με τη συνδυασμένη χρήση των μεθόδων Μη Καταστροφικού Ελέγχου και της Μηχανικής των Θραύσεων, μπορούμε να είμαστε συνεχώς ενήμεροι για την καλή κατάσταση λειτουργίας μιας κατασκευής (Health Monitoring) και για τον προβλεπόμενο χρόνο ζωής της (Residual Lifetime).

Ο ΜΚΕ δεν περιορίζεται στην ανίχνευση ρωγμών, αλλά σε ένα ευρύτερα αναπτυσσόμενο πεδίο που ασχολείται με τις ιδιότητες των υλικών, όπως της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, αλλά και με τα χαρακτηριστικά μικροδομής, όπως η σκλήρυνση ρητίνης στην διαδικασία ψησίματος των σύνθετων υλικών.

Πολλές κατασκευές, κατά τη διάρκεια της λειτουργίας τους, χρειάζονται περιοδικούς ελέγχους ώστε να εντοπιστούν πιθανές ζημιές που δεν θα γίνονταν αντιληπτές με τους απλούς καθημερινούς τρόπους ελέγχου. Παραδείγματα τέτοιων κατασκευών είναι: ο σκελετός ή η επένδυση των αεροσκαφών, οι υπόγειες σωληνώσεις, οι κατασκευές από σκυρόδεμα και ο οπλισμός τους, τα πιεστικά δοχεία χημικών αντιδραστηρίων, τα συρματόσχοινα γεφυρών, κ.ά.

Οι εφαρμογές των ΜΚΕ, σήμερα, καλύπτουν ένα τεράστιο φάσμα κατασκευαστικών και βιομηχανικών δραστηριοτήτων και τις συναντάμε σχεδόν παντού:

- στην αυτοκινητοβιομηχανία (κινητήρα, πλαίσιο)
- στην αεροδιαστημική (πλαίσια αεροπλάνων, διαστημοπλοίων, πυραύλων)
- στις κατασκευές (κτίρια, γέφυρες)
- σε εγκαταστάσεις πετροχημικές, πυρηνικές, παραγωγής ρεύματος, ορυχεία (δεξαμενές, λέβητες, εναλλάκτες θερμότητας, τουρμπίνες, σωληνώσεις, συγκολλήσεις)

- στο σιδηρόδρομο (σιδηροτροχιές, τροχοί και άξονες)
- σε αγωγούς φυσικού αερίου και πετρελαίου
- στα πάρκα αναψυχής (παιχνίδια και τραίνα μεγάλης ταχύτητας)
- στην ιατρική (τομογραφίες, υπέρηχοι, ακτινογραφίες, καρδιογραφήματα, εγκεφαλογραφήματα, κλπ.).

Οι λόγοι οι οποίοι οδήγησαν σε τόσο ραγδαία ανάπτυξη τις τεχνικές ΜΚΕ συνοψίζονται στους εξής:

- Αυξημένη πολυπλοκότητα των σύγχρονων μηχανημάτων και εξαρτημάτων
- Αυξημένη ζήτηση κατασκευών
- Απαίτηση για ασφαλέστερες κατασκευές
- Υψηλό κόστος των αστοχιών σε κατασκευές και μηχανήματα

Ο ΜΚΕ χρησιμοποιεί διάφορες μεθόδους, κάθε μια από τις οποίες βασίζεται σε συγκεκριμένη επιστημονική παραδοχή ή αρχή λειτουργίας και επίσης μπορεί να διακρίνεται σε περισσότερες από μια τεχνικές.

Η αξία κάθε μεθόδου εξαρτάται από το είδος του προβλήματος. Μια μέθοδος ή τεχνική, λόγω της φύσης και της λειτουργίας της, μπορεί να είναι από ιδανική έως και εντελώς άχρηστη για την εφαρμογή που έχουμε υπ' όψιν μας. Για το λόγο αυτό η σωστή επιλογή είναι σημαντική για την τελική απόδοση του ΜΚΕ.

Οι κυριότερες κατηγορίες μεθόδων και τεχνικές ΜΚΕ στις οποίες θα εστιάσουμε είναι οι εξής:

- Ραδιογραφία
- Μαγνητικές μέθοδοι
- Διεισδυτικά υγρά
- Θερμογραφία
- Υπέρηχοι
- Δινορεύματα

Εικόνα 1.1 Ενδεικτικές εφαρμογές Μη Καταστροφικού Ελέγχου

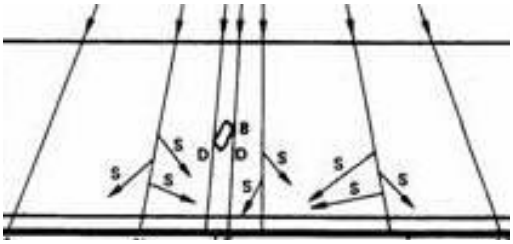
1.1 Οι κυριότερες μέθοδοι μη καταστροφικού ελέγχου

1.1.1 Ραδιογραφικές μέθοδοι

Ακτίνες Χ και Γάμα

Από την ανακάλυψή τους το 1895 μέχρι και σήμερα, οι ακτίνες-Χ χρησιμοποιούνται για τον ΜΚΕ ανθρώπων και υλικών. Οι ακτίνες-Χ έχουν τέτοιο μήκος κύματος που τους επιτρέπει να διαπερνούν όλα τα υλικά με κάποιο ποσοστό απορρόφησης που εξαρτάται από το κάθε υλικό. Το μήκος κύματος ποικίλει από τα 10nm (Grenz ή «απαλές» ακτίνες-Χ) έως τα 10-4nm («σκληρές» ακτίνες-Χ) που μπορούν να διαπεράσουν ακόμη και ατσάλι πάχους μισού μέτρου.

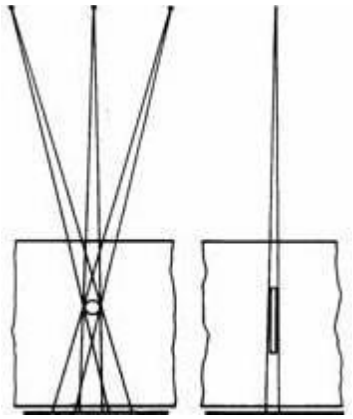
Οι ακτίνες Γάμα εκπέμπονται από ραδιενεργές πηγές σε παρόμοια μήκη κύματος, είναι και αυτές ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις ακτίνες Χ και χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανική ραδιογραφία. Οι ακτίνες-Χ και Γάμα ταξιδεύουν πάντα σε ευθείες γραμμές και δεν εστιάζονται γι' αυτό και η διάταξη λειτουργίας είναι πάντοτε: πηγή – εξεταζόμενο δείγμα – ραδιογραφική πλάκα.



Εικόνα 1.2 Ραδιογραφική απεικόνιση σε φιλμ

Μια σημαντική παράμετρος που πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν είναι ότι η πηγή της ακτινοβολίας αν και μικρή δεν είναι σημειακή. Το αποτέλεσμα είναι μια ελαφρά θολή εικόνα στα όρια των ελαττωμάτων και ιδιαίτερα αυτών που είναι μικρότερα σε μέγεθος από την πηγή. Το τελικό αποτέλεσμα μπορεί συχνά να βελτιωθεί με την ψηφιακή επεξεργασία των εικόνων.

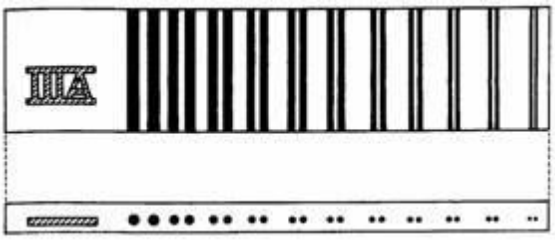
Οι ραδιογραφικές μέθοδοι, όπως και όλες οι αποτυπώσεις σε φιλμ, αποτελούν την δισδιάστατη προβολή τρισδιάστατων αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι το σχήμα που προκύπτει εξαρτάται από τη κατεύθυνση των ακτινών και την θέση του ελαττώματος στο υλικό. Για να μπορέσουμε να έχουμε δεδομένα σχετικά με την τρίτη διάσταση απαιτούνται δυο αποτυπώσεις από διαφορετική γωνία γα να δημιουργηθεί μια στερεοσκοπική εικόνα του υλικού.



Εικόνα 1.3 Απλή δισδιάστατη προβολή σε ραδιογραφία

Όταν μελετάμε την παρουσία ατελειών σε ένα υλικό η μεγαλύτερη «ποιότητα» ή «ευαισθησία» μιας ραδιογραφικής μεθόδου σημαίνει την ικανότητα της να διακρίνει μια μικρότερων διαστάσεων ατέλεια.

Για να μετρηθεί αυτή η ικανότητα της μεθόδου χρησιμοποιούνται κατάλληλοι δείκτες πού είναι σύρματα ή ελάσματα, διαφορετικού πάχους και διαμέτρου, με συγκεκριμένη βαθμονόμηση και τυποποίηση. Η ραδιογραφίες αυτών των δεικτών μας δείχνει απ' ευθείας την ικανότητα κάθε μεθόδου ή συσκευής.



Εικόνα 1.4 Δείκτες μέτρησης της ευαισθησίας των ραδιογραφικών μεθόδων

Προέλευση ιονίζουσων ακτινοβολιών

Οι ακτίνες Χ δημιουργούνται όταν ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας συγκρούονται με τα μόρια ενός μεταλλικού αντικείμενου. Οι ακτίνες Γάμα προέρχονται από τον πυρήνα ραδιενεργών στοιχείων. Και οι δυο ακτινοβολίες ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός, σε ευθείες γραμμές και είναι αόρατες.

Οι ηλεκτρομαγνητικές αυτές ακτινοβολίες δεν είναι συνεχείς (θεωρία Planck), αλλά εκπέμπονται σε μικρά πακέτα ενέργειας που ονομάζονται φωτόνια ή κβάντα (quanta). Η ενέργεια ενός quantum μετριέται σε eV (ηλεκτρονιοβόλτ). Η ενέργεια των ακτίνων Χ και Γάμα εξαρτάται από το μήκος κύματος και αναφέρεται σε keV και MeV.

Σήμερα συνυπάρχουν ακόμα το παλαιό με το μετρικό σύστημα μονάδων. Με το παλαιότερο σύστημα η ποσότητα ή «έκθεση» σε ακτινοβολία μετριέται σε Roentgens ή mR, η μονάδα

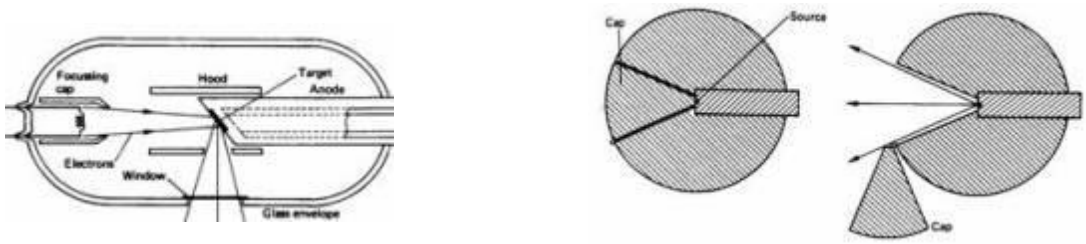
«απορροφούμενης δόσης» είναι το rad, και η μονάδα «ισοδύναμης απορροφούμενης δόσης» το rem. Στο μετρικό σύστημα η «έκθεση» σε ακτινοβολία σαν ενέργεια που είναι μετριέται σε Coulomb/kg (1 C/kg = 3876 R), η μονάδα «απορροφούμενης δόσης» είναι το gray (1 Gy = 1 J/k = 100 rad), και η μονάδα «ισοδύναμης απορροφούμενης δόσης» το sievert (1 Sv = 100 rem).

Στη πρακτική ραδιογραφία η έξοδος μιας συσκευής ακτίνων Χ αναφέρεται σε mA και μιας ακτίνων Γάμα σε curie (Ci). Στο μετρικό σύστημα το Ci θεωρήθηκε πολύ μεγάλο και αντικαταστάθηκε από το Becquerel (Bq) (1 Ci = 3.7x1010 Bq).

Οι πηγές ακτίνων Χ και Γάμα

Οι λυχνίες ακτίνων Χ περιέχουν την κάθοδο που παράγει τα ηλεκτρόνια και τον μεταλλικό στόχο στον οποίο προσπίπτουν τα ηλεκτρόνια. Είναι τοποθετημένα μέσα σε κενό αέρος και τροφοδοτούνται με υψηλή τάση μερικών χιλιάδων ή και εκατομμυρίων βολτ.

Οι πηγές των ακτίνων Γάμα επιλέγονται μέσα από τα λίγα φυσικά ραδιενεργά υλικά και τα εκατοντάδες τεχνητά ραδιοϊσότοπα που εκπέμπουν συνδυασμούς από ακτίνες α, β, γ και νετρόνια. Μόνο λίγα από αυτά έχουν ιδιότητες που να τα κάνουν κατάλληλα για βιομηχανικές ραδιογραφικές εφαρμογές.



Εικόνα 1.5 Λυχνία ακτίνων Χ και κάψουλα φύλαξης ραδιενεργών πηγών ακτίνων Γάμα

Μέχρι το 1955 χρησιμοποιούσαν φυσικές πηγές όπως το ράδιο και το ράδονιο τα οποία όμως ήταν επικίνδυνα και έχουν αντικατασταθεί σήμερα από ραδιοϊσότοπα, όπως τα πλέον χρησιμοποιούμενα κοβάλτιο-60, ιρίδιο-192, και υττερβίο-169 και τα λιγότερο διαδεδομένα καίσιο-137, θούλιο-170, και νάτριο-24. Ο αριθμός που ακολουθεί το όνομα είναι η ατομική μάζα του ισοτόπου. Τα τεχνητά ραδιοϊσότοπα κατασκευάζονται σε ατομικούς αντιδραστήρες ή εξάγονται από τα χρησιμοποιημένα πυρηνικά καύσιμα. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι όταν ένα τέτοιο υλικό αρχίσει την ραδιενεργή διάσπαση δεν μπορεί να σταματήσει ή να σβήσει. Το υλικό ακτινοβολεί συνέχεια μέχρι να εξαντληθεί. Τον ρυθμό εξάντλησης ενός ραδιενεργού υλικού τον μετράμε με το «χρόνο ημιζωής» που είναι ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί στο μισό η ακτινοβολία του. Κάποια υλικά έχουν ημιζωή μερικές ώρες και κάποια άλλα μερικές εκατοντάδες χρόνια.

Οι πηγές ακτινών Γάμα απαιτούν αυστηρό, προσεκτικό και ασφαλή χειρισμό. Αφού ενεργοποιηθούν σφραγίζονται σε ειδικές κάψουλες οι οποίες περιβάλλονται από

απορροφητικό υλικό, ενώ τηρούνται αποστάσεις ασφαλείας και όλες οι ενέργειες πρέπει να είναι σύντομες και ταχύτατες.

Κίνδυνοι και Προφύλαξη

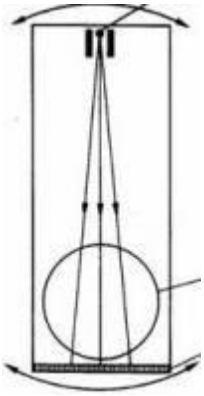
Η ιονίζουσα ακτινοβολία είναι ιδιαίτερα επικίνδυνη και καταστρέφει τους ζωντανούς ιστούς, γι' αυτό απαιτεί τη λήψη κατάλληλων μέτρων προφύλαξης και ειδικές εγκαταστάσεις. Η ετήσια δόση ακτινοβολίας σε ολόκληρο το σώμα δεν πρέπει να ξεπερνά τα 5 mSv (= 0.5 rem) για το κοινό και τα 15 mSv για τους εργαζόμενους σε σχετικές εγκαταστάσεις.

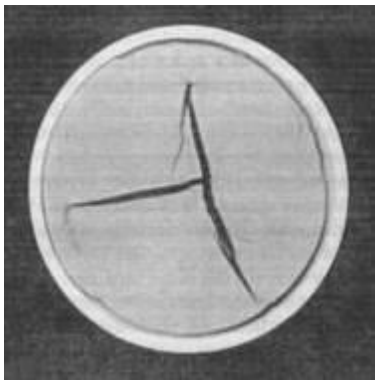
Η κυριότερη αρχή που πρέπει να τηρείται είναι αυτή της ελάχιστης δυνατής έκθεσης (ALARP – As Low As Reasonably Possible). Οι οδηγίες προφύλαξης γίνονται όλο και πιο αυστηρές με τη πάροδο του χρόνου καθώς διαπιστώνεται το πραγματικό επίπεδο βλάβης που μπορούν να προξενήσουν οι ιονίζουσες ακτινοβολίες ακόμη και σε χαμηλές δόσεις.

Ψηφιακή Ραδιογραφία – Τομογραφία (Computed Tomography)

Η τομογραφία είναι ένα σύνολο από ραδιογραφίες που αποτυπώνονται ψηφιακά και τις επεξεργαζόμαστε με Η/Υ. Αντί του ραδιογραφικού φιλμ, κάθε ραδιογραφία αποτυπώνεται σαν ψηφιακή πληροφορία μετατρέποντας τη φωτεινότητα κάθε κόκκου του φιλμ σε bytes.

Για να δημιουργηθεί η τρισδιάστατη τομογραφία συνθέτουμε δεκάδες ψηφιακές ραδιογραφίες. Κάθε ραδιογραφία έχει ληφθεί από διαφορετικό σημείο, είτε περιστρέφοντας το αντικείμενο είτε περιστρέφοντας τη συσκευή ραδιογραφίας. Η σύνθεση γίνεται από τα πρόγραμμα του Η/Υ που ελέγχουν τη συσκευή και γνωρίζουν ακριβώς τις θέσεις και τις γωνίες λήψης των εικόνων.





Εικόνα 1.6 Τομογραφία με περιστροφή της πηγής και τομογραφία υλικού με ρωγμή

Ραδιογραφία νετρονίων

Νετρόνια κατάλληλης ενέργειας παρουσιάζουν παρόμοιες ιδιότητες απορρόφησης από τα υλικά, παρ' όλο που είναι ατομικά σωματίδια και όχι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η χρήση υποατομικών σωματιδίων (νετρονίων ή πρωτονίων) έχει καθιερωθεί ευρέως σαν τεχνική και συνήθως αναφέρεται με το όνομα «νετρονική ραδιογραφία».

Η αξία της μεθόδου οφείλεται στο ότι η απορρόφηση των νετρονίων από τα υλικά δεν είναι ίδια με την απορρόφηση των ακτίνων Χ που αυξάνει ομαλά με τον ατομικό αριθμό του στοιχείου. Υλικά όπως το υδρογόνο και το λίθιο έχουν πολύ μεγάλο συντελεστή απορρόφησης ενώ υλικά όπως το αλουμίνιο και ο σίδηρος έχουν 500-2000 φορές μικρότερο συντελεστή απορρόφησης. Η ιδιότητα αυτή κάνει τη μέθοδο πολύ αποτελεσματική στον εντοπισμό ατελειών, ειδικά όσων περιέχουν υδρογόνο όπως το νερό, λάδι, πλαστικό κλπ. ακόμα και σε πολύ παχιές πλάκες μετάλλου ή άλλων υλικών.

Στη πράξη οι κύρια πηγή νετρονίων είναι ο πυρηνικός αντιδραστήρας. Άλλες πηγές που χρησιμοποιούνται είναι το ραδιοϊσότοπο Californium-252, ή, συνδυασμός ακτίνων Χ με Uranium ή Beryllium.

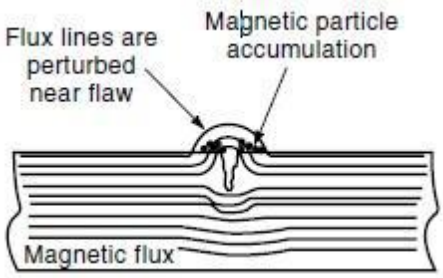
1.1.2 Μαγνητικές μέθοδοι

Οι μαγνητικές μέθοδοι ΜΚΕ βασίζονται στον εντοπισμό των απωλειών της μαγνητικής ροής λόγω ατελειών του υλικού. Όταν ένα δοκίμιο μαγνητιστεί και περιέχει μια ασυνέχεια στην επιφάνειά του ή κάτω από αυτήν, δημιουργείται μια διαταραχή στη μαγνητική ροή η οποία προκαλεί ένα τοπικό πεδίο απώλειας μαγνητικής ροής. Οι μέθοδοι βασίζονται στους νόμους του Maxwell (1873) και χρησιμοποιούν σύγχρονες μεθόδους ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων και πολύ ισχυρούς υπολογιστές.

Οι μαγνητικές μέθοδοι ΜΚΕ μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε υλικά που μαγνητίζονται. Η πλέον χρησιμοποιούμενη μαγνητική μέθοδος ελέγχου είναι η τεχνική των μαγνητικών ρινιδίων σε μελάνι ή σκόνη.

Έλεγχος με μαγνητικά ρινίδια

Ο έλεγχος με μαγνητικά ρινίδια αναπτύχθηκε κατά τη δεκαετία του 1930 από την εταιρία Magnaflux. Η μέθοδος βασίστηκε στην τυχαία ανακάλυψη ότι τα ρινίδια έτειναν να συσσωρεύονται κοντά στις ασυνέχειες κατά τη διαδικασία της άλεσης. Η εταιρία Magnaflux μετέτρεψε αυτήν την παρατήρηση σε επιτυχή εμπορική μέθοδο ανίχνευσης ασυνεχειών στο χάλυβα. Ο έλεγχος με ρινίδια εξαρτάται από τη διαρροή της μαγνητικής ροής στην επιφάνεια σιδηρομαγνητικών υλικών σε περιοχές ασυνεχειών. Για να είναι αποτελεσματική η μέθοδος, το μαγνητικό υλικό πρέπει να μαγνητιστεί σε μια γειτονική περιοχή της ατέλειας.



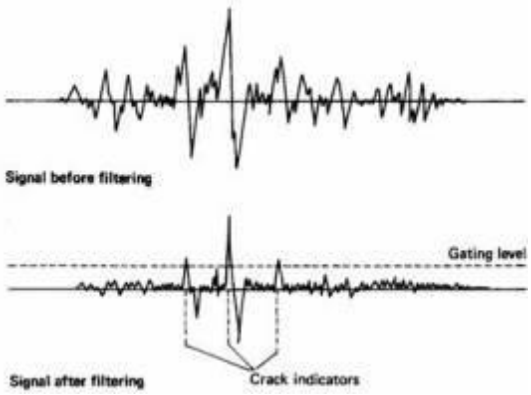
Εικόνα 1.7 Κατανομή μαγνητικής ροής γύρω από ασυνέχεια

Ο έλεγχος με ρινίδια είναι αξιόπιστος, εάν χρησιμοποιηθεί σωστά, για την ανίχνευση επιφανειακών ατελειών ή ατελειών οι οποίες βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια του υλικού επαρκούς μακροσκοπικού μεγέθους και δίνει μια ένδειξη της τοποθεσίας και του μήκους της ατέλειας. Το πεδίο πρέπει να είναι αρκετά ισχυρό ώστε να κρατάει τα σωματίδια. Σε αντίθετη περίπτωση οι πολύ ρηχές ρωγμές μπορεί να μην ανιχνευθούν.

Η μέθοδος έχει και περιορισμούς. Για το βέλτιστο αποτέλεσμα το μαγνητικό πεδίο πρέπει να βρίσκεται κάθετα στην κατεύθυνση της ασυνέχειας. Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να μην ανιχνευθεί η ατέλεια. Επιπλέον ενώ είναι δυνατή η γνωστοποίηση του μήκους της ατέλειας, το βάθος αυτής πρέπει να υποτεθεί.

Μαγνητογραφία

Εναλλακτικά η μέτρηση της μαγνητικής ροής μπορεί να γίνει με ένα είδος μαγνητοταινίας η οποία πιέζεται στην επιφάνεια του μαγνητισμένου υλικού. Στη συνέχεια η ταινία αφαιρείται για επεξεργασία και ανάλυση των ενδείξεων. Η διαδικασία αυτή λέγεται μαγνητογραφία αλλά δεν είναι ακόμα ιδιαίτερα διαδεδομένη.



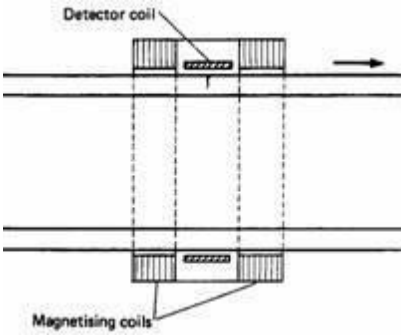
Εικόνα 1.8 Μαγνητογραφικά σήμερα πριν και μετά το φιλτράρισμά τους

Εντοπισμός απωλειών μαγνητικής ροής (MFL)

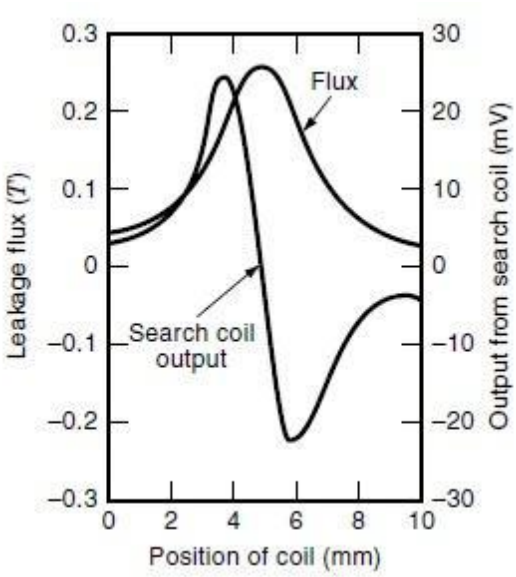
Όπως και με τη μέθοδο μαγνητικών ρινιδίων, η μέθοδος απωλειών της μαγνητικής ροής εξαρτάται από την διατάραξη της μαγνητικής ροής που προκαλείται από ατέλειες στην επιφάνεια ή κοντά στην επιφάνεια. Η μέθοδος αυτή διαφέρει από τον έλεγχο με ρινίδια στο ότι χρησιμοποιεί μια συσκευή για την ανίχνευση των διαταραχών οι οποίες σχετίζονται με την ατέλεια.

Η μέθοδος MFL προσφέρει επιπλέον πληροφορίες επειδή μπορεί να μετρήσει την πυκνότητα ροής σε τρεις κατευθύνσεις, παράλληλα και κάθετα προς την κατεύθυνση της ατέλειας και κάθετα προς την επιφάνεια. Η μέθοδος είναι ικανή να ανιχνεύσει επιφανειακές και εσωτερικές ατέλειες στην εσωτερική επιφάνεια χαλύβδινων σωλήνων. Πλέον η μέθοδος είναι ακόμα πιο αναπτυγμένη με την έννοια ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την ανίχνευση ατελειών αλλά και για τον χαρακτηρισμό των ατελειών αυτών.

Ο αισθητήρας απωλειών είναι συνήθως ένα πηνίο επαγωγής, Ο αισθητήρας συνοδεύεται από έναν μαγνήτη ο οποίος μαγνητίζει το δείγμα σε μια γειτονική του περιοχή. Καθώς ο αισθητήρας διαπερνά την επιφάνεια του δείγματος, η ανίχνευση ανωμαλιών στην πυκνότητα της ροής υποδεικνύουν την τοποθεσία της ατέλειας.



Εικόνα 1.9 Μέτρηση μαγνητικών απωλειών κατά μήκος αγωγού



Εικόνα 1.10 Απόκλιση της μαγνητικής ροής λόγο ασυνέχειας

Το μειονέκτημα της μεθόδου απωλειών μαγνητικής ροής σε σύγκριση με αυτήν των μαγνητικών ρινιδίων, είναι ότι για την ανίχνευση απώλειας μαγνητικής ροής κατά μήκος ενός αντικειμένου απαιτείται πολύς χρόνος, σε αντίθεση με τη μέθοδο μαγνητικών ρινιδίων όπου μπορούν να ελεγχθούν μεγάλες επιφάνειες αντικειμένων πολύ γρήγορα.

Έλεγχος θορύβου Barkhausen

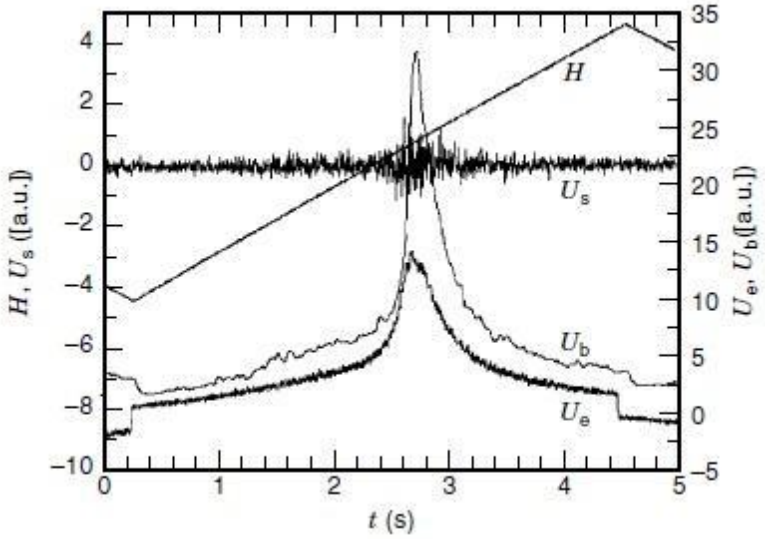
Οι ατέλειες στη κρυσταλλική δομή ενός υλικού, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τις μηχανικές ιδιότητές του, είναι ο ίδιες που επηρεάζουν και τις μαγνητικές του ιδιότητες. Η μεταξύ τους σχέση δεν έχει γίνει ακόμη πλήρως κατανοητή αλλά διαπιστώθηκε ότι οι μετρήσεις του

μαγνητικού θορύβου Barkhausen και των βημάτων Barkhausen παρέχουν πληροφορίες για τις μηχανικές ιδιότητες.

Ο μαγνητισμός των υλικών συμβαίνει με μια σειρά μικρών βημάτων από τον ένα κόκκο στον άλλο. Αν συνδέσουμε το πηνίο μαγνητισμού με ένα μεγάφωνο, τα βήματα αυτά ακούγονται σαν μια σειρά από κλικ και συνθέτουν ένα θόρυβο (ένα ανάλογο φαινόμενο είναι η μαγνητοακουστική εκπομπή). Ο θόρυβος Barkhausen είναι ευαίσθητος στη παρουσία τάσεων, ρωγμών, μικρο-ατελειών, θερμικής κατεργασίας και πλαστικής παραμόρφωσης και παρουσιάζει αιχμές και ακραίες τιμές που βοηθούν στον εντοπισμό τους.

Το φαινόμενο Barkhausen είναι μια από τις πιο σημαντικές μαγνητικές μεθόδους μη καταστροφικού ελέγχου για την διερεύνηση των εγγενών ιδιοτήτων μαγνητικών υλικών.

Το παραληφθέν Barkhausen σήμα επηρεάζεται από τις συνθήκες διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού σήματος στο υλικό καθώς και από τις ιδιότητες του αισθητήρα.



Εικόνα 1.11 Χρονική μεταβολή του εφαρμοσμένου πεδίου H, η ληφθείσα τάση πηνίου U_e, η Barkhausen τάση του στοιχείου U_s και η ενίσχυση U_b.

Το μέγεθος των κόκκων επηρεάζει τις μαγνητικές ιδιότητες των υλικών με δύο τρόπους. Πρώτον με την αλλαγή της δομής του τομέα λόγο παραγωγής κλειστών τομέων στα σύνορα του κόκκου και δεύτερον με την αλλαγή των συνθηκών κίνησης καθώς παρουσιάζονται εμπόδια στην κίνηση. Η αύξηση του μεγέθους των κόκκων λοιπόν προκαλεί αύξηση στον συνολικό αριθμό φαινομένων Barkhausen, στο πλάτος και στη διάρκεια του παλμού.

Το φαινόμενο Barkhausen και η μαγνητοακουστική εκπομπή έχουν εδραιωθεί ως μέθοδοι Μη Καταστροφικού Ελέγχου για αξιολόγηση αλλαγών μικροδομής. Οι φυσικοί μηχανισμοί των μικροδομικών επιρροών στο φαινόμενο αυτό πρέπει να διευκρινιστούν περεταίρω.

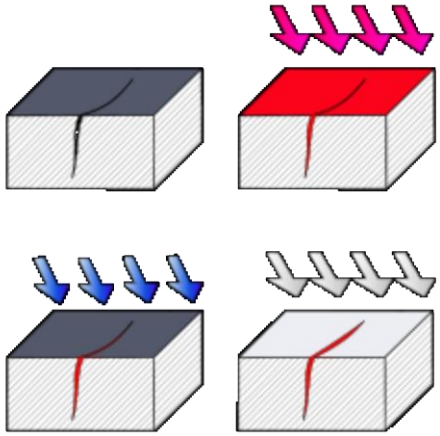
Επιπλέον οι συνθήκες μετρήσεων και επεξεργασίας σημάτων πρέπει να οριοθετηθούν προσεκτικά ώστε να καθιερωθούν συγκεκριμένες διαδικασίες.

1.1.3 Διεισδυτικά υγρά

Ο έλεγχος με διεισδυτικό υγρό ή χρωστική ουσία χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό επιφανειακών ρωγμών σε μη σιδηρούχα κράματα ή σε σιδηρούχα κράματα στα οποία δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάποια αντίστοιχη ηλεκτρική ή μαγνητική μέθοδος. Μερικές φορές εφαρμόζεται και σε μη μεταλλικά υλικά.

Τα βασικά στάδια της μεθόδου είναι τα εξής:

1. Το υπό εξέταση υλικό το οποίο περιέχει ρωγμές μη ορατές με γυμνό οφθαλμό, καθαρίζεται επιμελώς.
2. Το διεισδυτικό υγρό απλώνεται στην επιφάνειά του υλικού ώστε να εισχωρήσει μέσα στις ρωγμές. Μικρότερα αντικείμενα βυθίζονται και ολόκληρα μέσα στο υγρό.
3. Στη συνέχεια το πλεονάζον υγρό αφαιρείται και η επιφάνεια καθαρίζεται ώστε στο υλικό να παραμείνει μόνο το υγρό που έχει εισχωρήσει στις ρωγμές.
4. Τέλος στην επιφάνεια του υλικού απλώνεται ένα υγρό ή σκόνη «εμφάνισης» (developer), η οποία όταν έρχεται σε επαφή με το διεισδυτικό υγρό δημιουργεί έντονη χρωματική αντίθεση. Η έντονη αλλαγή στο χρώμα κάνει τις επιφανειακές ρωγμές ορατές.



Εικόνα 1.12 Τα τέσσερα στάδια του ελέγχου με διεισδυτικά υγρά

Η επιλογή του κατάλληλου διεισδυτικού υγρού καθορίζεται από την ευκολία διείσδυσής του στις ρωγμές και φυσικά την ευκολία εξαγωγής του από αυτές μετά τον έλεγχο. Η απλούστερη και παλαιότερη μέθοδος χρησιμοποιεί για διεισδυτικό υγρό λεπτόρρευστο λάδι και για την εμφάνιση λευκή σκόνη ανθρακικού ασβεστίου, η οποία χρωματίζεται έντονα από το λάδι των ρωγμών. Παραλλαγές της μεθόδου περιλαμβάνουν φωσφορίζουσες χρωστικές που γίνονται εύκολα ορατές με τη χρήση υπεριώδους ακτινοβολίας.

Συνδυασμός διεισδυτικού υγρού και ραδιογραφίας

Μια πιο ενδιαφέρουσα παραλλαγή είναι ο συνδυασμός διεισδυτικού υγρού και ραδιογραφίας. Στις ραδιογραφίες δεν εντοπίζονται εύκολα οι επιφανειακές ρωγμές και τα διεισδυτικά υγρά δεν μας πληροφορούν για το τι γίνεται κάτω από την επιφάνεια. Ο συνδυασμός των δύο μεθόδων αφ' ενός αυξάνει την ποιότητα των ραδιογραφιών (contrast) με την επιλογή του κατάλληλου υγρού και εφ' ετέρου μας πληροφορεί για το βάθος της επιφανειακής ρωγμής. Στη τεχνική αυτή χρησιμοποιούνται οι διεισδυτικές ουσίες νιτρικός άργυρος (silver nitrate), ιωδιούχος ψευδάργυρος (zinc iodide), χλωροφόρμιο (chloroform) και κυρίως διιωδιούχο μεθάνιο (diiodomethane).

Έλεγχοι διαρροής

Πολλές συσκευές σχεδιάζονται να λειτουργούν με υψηλή εσωτερική πίεση και κατά συνέπεια πρέπει να ελέγχονται για τυχόν διαρροές. Με τη μέθοδο εντοπισμού διαρροών διοχετεύεται αέριο ή υγρό υπό πίεση στη συσκευή και ελέγχουμε την παρουσία του στην άλλη πλευρά του τοιχώματος καθώς και τυχόν μειώσεις στη πίεση του.

Υπάρχουν πολλές τεχνικές, σε άλλες διοχετεύεται αέριο ενώ το σώμα είναι βυθισμένο σε υγρό οπότε δημιουργούνται φυσαλίδες (bubble testing) και σε άλλες διοχετεύεται χρωματιστό ή φωσφορίζον υγρό το οποίο εντοπίζεται στην άλλη πλευρά με ειδικό φωτισμό π.χ. υπέρυθρες λυχνίες. Το αέριο που χρησιμοποιείται σήμερα είναι το ήλιο, λόγω της αδρανούς του φύσης. Κάθε τεχνική έχει διαφορετικές προδιαγραφές, ευαισθησία αλλά και κόστος. Ο επόμενος πίνακας παραθέτει μερικές από τις μεθόδους ελέγχου διαρροής.

Method	Probe	Minimum detectable leak (cm^3/s)	Comment
Water immersion	air/He	10^{-3}	low cost
Dye penetrant	—	10^{-4}	low cost
Pressure changes	—	10^{-5}	low cost
Ionisation gauge	H, He, O	10^{-7}	—
Ultrasonic	air	10^{-2}	—
Radioisotope K-85	counter	10^{-10}	special safety precautions needed
Mass spectrometer	He	10^{-10}	versatile; very costly
Sniffer	He	10^{-6}	versatile; costly

Εικόνα 1.13 Μέθοδοι ελέγχου διαρροής

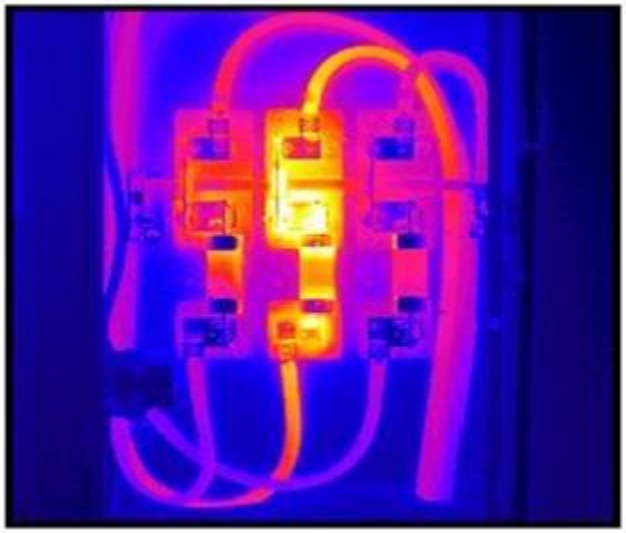
1.1.4 Θερμογραφία

Οι θερμικές μέθοδοι ΜΚΕ αφορούν τη μέτρηση και χαρτογράφηση των επιφανειακών θερμοκρασιών καθώς η θερμότητα ρέει από ή και διαμέσου ενός αντικειμένου. Οι

απλούστερες θερμικές μετρήσεις αφορούν τις μετρήσεις σημείων με ένα θερμοστοιχείο. Αυτό το είδος μέτρησης μπορεί να είναι χρήσιμο στον εντοπισμό θερμών σημείων.

Σε μια πιο προχωρημένη μορφή, η χρήση της θερμικής απεικόνισης συστημάτων επιτρέπει θερμικές πληροφορίες να συλλέγονται πολύ γρήγορα σε μια ευρεία περιοχή χωρίς την ανάγκη επαφής. Τα συστήματα θερμικής απεικόνισης είναι εργαλεία που δημιουργούν εικόνες θερμικής ροής και όχι φωτός. Η θερμική απεικόνιση είναι ένας γρήγορος και οικονομικός τρόπος υλοποίησης λεπτομερούς θερμικής ανάλυσης.

Η βασική αρχή της θερμογραφίας ως μέθοδος ΜΚΕ είναι ότι η ροή της θερμότητας από την επιφάνεια ενός στερεού επηρεάζεται από εσωτερικές ασυνέχειες, όπως κενά, τρύπες και ρωγμές.

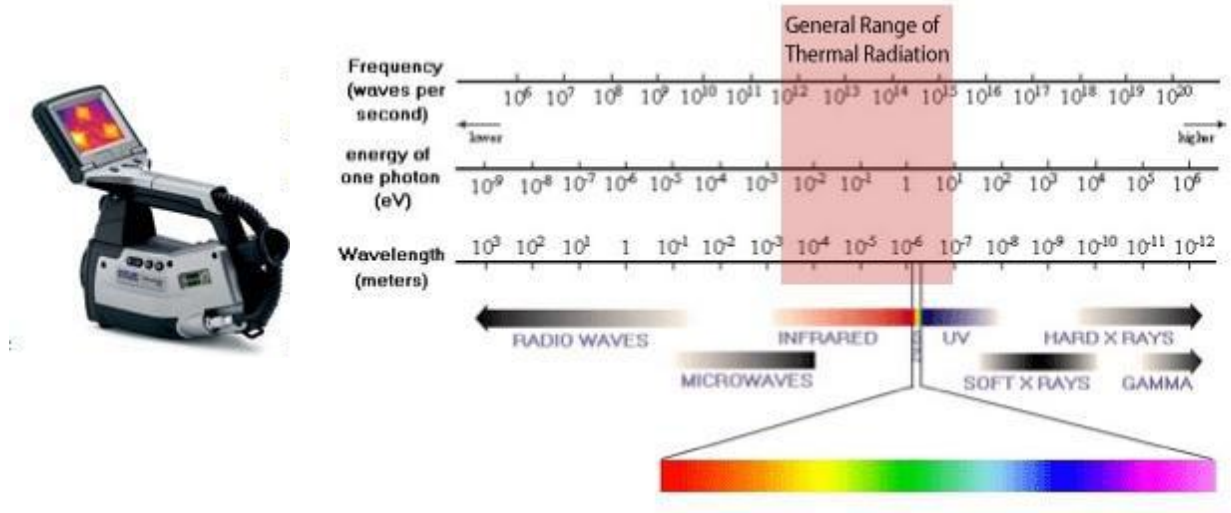


Εικόνα 1.14 Έλεγχος θερμογραφίας σε ηλεκτρικά κυκλώματα

Μηχανισμοί Μετάδοσης Θερμότητας

Η μεταφορά θερμικής ενέργειας επιτυγχάνεται μέσω τριών μηχανισμών: αγωγή, μεταφορά (ή συναγωγή) και ακτινοβολία. Η αγωγή παρατηρείται κυρίως στα στερεά και σε μικρότερο βαθμό στα υγρά καθώς θερμότερα, πιο ενεργητικά μόρια μεταφέρουν την ενέργειά τους σε ψυχρότερα μόρια. Η θερμική συναγωγή λαμβάνει χώρα σε υγρά και αέρια και περιλαμβάνει την μαζική μετακίνηση των μορίων.

Ο τρίτος τρόπος κατά τον οποίο η θερμότητα μεταφέρεται είναι μέσω ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία δεν χρειάζεται κάποιο μέσο να διαδοθεί και ως εκ τούτου μπορεί να παρατηρηθεί ακόμα και στο κενό. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία παράγεται όταν τα ηλεκτρόνια χάνουν την ενέργεια τους και πέσουν σε μια χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Τόσο το μήκος κύματος όσο και η ένταση της ακτινοβολίας έχουν άμεση σχέση με την θερμοκρασία των μορίων ή ατόμων.

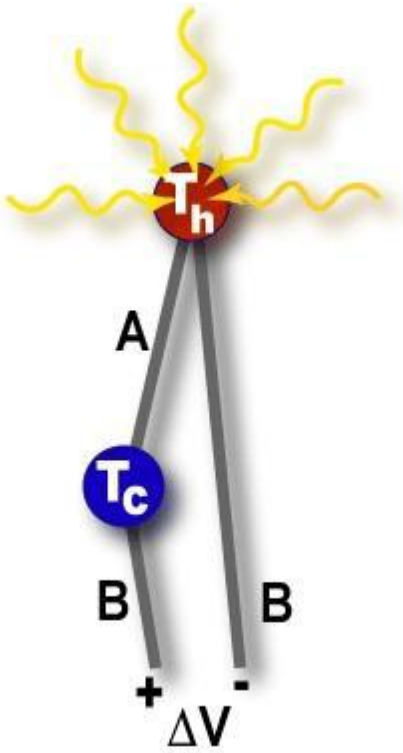


Εικόνα 1.15 Συσκευή θερμογραφίας και φάσμα συχνοτήτων θερμικής ακτινοβολίας

Το Φαινόμενο Seebeck

Το 1821 ο Thomas Johann Seebeck διαπίστωσε ότι ένα κύκλωμα κατασκευασμένο από δύο διαφορετικά μέταλλα με τους κόμβους του να βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες, προκαλούσε εκτροπή της βελόνας των πυξίδων. Αρχικά πίστευε ότι αυτό οφείλεται στο μαγνητισμό που προκαλείται από την διαφορά θερμοκρασίας, αλλά σύντομα συνειδητοποίησε ότι δημιουργούταν ένα ηλεκτρικό ρεύμα. Πιο συγκεκριμένα, η διαφορά θερμοκρασίας παράγει ένα ηλεκτρικό δυναμικό (τάση) το οποίο μπορεί να οδηγηθεί μέσω ενός κλειστού κυκλώματος. Σήμερα αυτό είναι γνωστό ως φαινόμενο Seebeck.

Η διαφορά τάσης ΔV που παράγεται στους ακροδέκτες ενός ανοικτού κυκλώματος το οποίο δημιουργείται από ένα ζευγάρι διαφορετικών μετάλλων A και B, των οποίων τα άκρα βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες, είναι ευθέως ανάλογη προς τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του πιο θερμού και του πιο ψυχρού άκρου, T_h - T_c. Η τάση Seebeck δεν εξαρτάται από την κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος των μετάλλων, αλλά μεταξύ των άκρων. Αυτή είναι η φυσική βάση για ένα θερμοστοιχείο, η οποία εφευρέθηκε από τον Nobili το 1829.



Εικόνα 1.16 Αρχή λειτουργίας θερμοστοιχείου

Θερμικός ανιχνευτής

Ο Melloni χρησιμοποίησε την τεχνολογία του θερμοστοιχείου για την παραγωγή ενός θερμικού ανιχνευτή. Η συσκευή αυτή είναι κατασκευασμένη από θερμοστοιχεία τα οποία συνδέονται σε σειρά. Η απορρόφηση της θερμικής ακτινοβολίας από ένα από τα θερμοστοιχεία, το οποίο ονομάζεται ενεργός κόμβος, προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας του. Η θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ του ενεργού κόμβου και ενός κόμβου αναφοράς, ο οποίος διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία, παράγει μια ηλεκτρεγερτική δύναμη ανάλογη με τη διαφορά θερμοκρασίας που δημιουργήθηκε. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται θερμοηλεκτρική επίδραση. Ο Melloni ήταν σε θέση να αποδείξει ότι ένα άτομο 10 μέτρα μακριά μπορούσε να ανιχνευθεί με την εστίαση της θερμικής του ενέργειας στον ανιχνευτή.

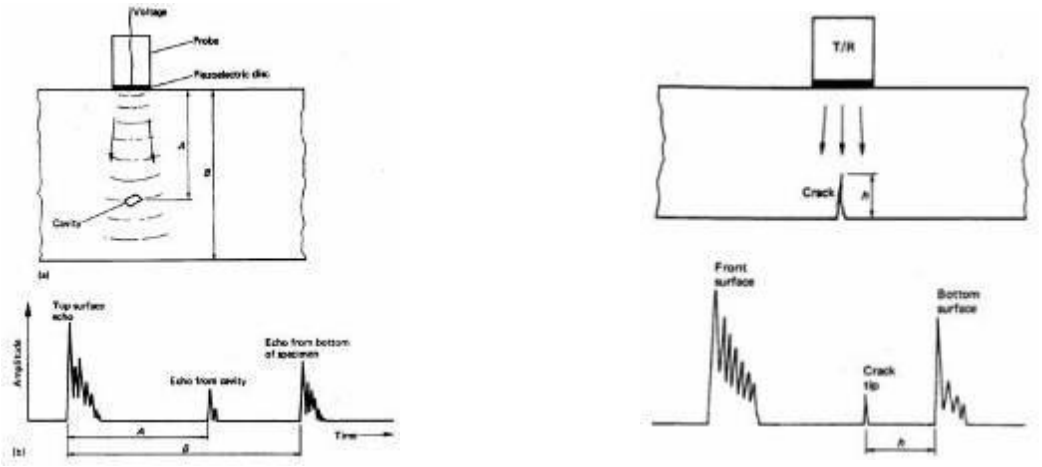
1.1.5 Μέθοδοι υπερήχων

Οι μηχανικές δονήσεις διαδίδονται μέσα από στερεά, υγρά και αέρια καθώς η δόνηση μεταφέρεται από το ένα σωματίδιο της ύλης στο διπλανό του. Όταν τα σωματίδια της ύλης ταλαντώνουν και η κίνησή τους είναι κανονική τότε μετριέται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο (Hz = sec^{-1}). Όταν μάλιστα η συχνότητα της δόνησης είναι μεταξύ 10 και 20000 Hz, ο ήχος ακούγεται από το ανθρώπινο αυτί. Για δονήσεις με συχνότητα πάνω από 20000 Hz οι «ήχοι» δεν γίνονται αντιληπτοί και ονομάζονται υπέρηχοι (ultrasound ή ultrasonic).

Τα ηχητικά κύματα δεν είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, αλλά είναι κύματα κίνησης παρόμοια με τα θαλάσσια κύματα. Τα κύματα των ήχων και υπερήχων διαδίδονται μέσα στα υλικά, υφίστανται απόσβεση και ανακλώνται, διαθλώνται ή σκεδάζονται όταν συναντούν εμπόδια ή ασυνέχειες, ανάλογα με τη συχνότητά τους. Την ιδιότητα αυτή τη χρησιμοποιούμε για να εντοπίσουμε τυχόν ατέλειες στο εσωτερικό ενός σώματος χωρίς να το τεμαχίσουμε (ΜΚΕ).

Αρχή λειτουργίας

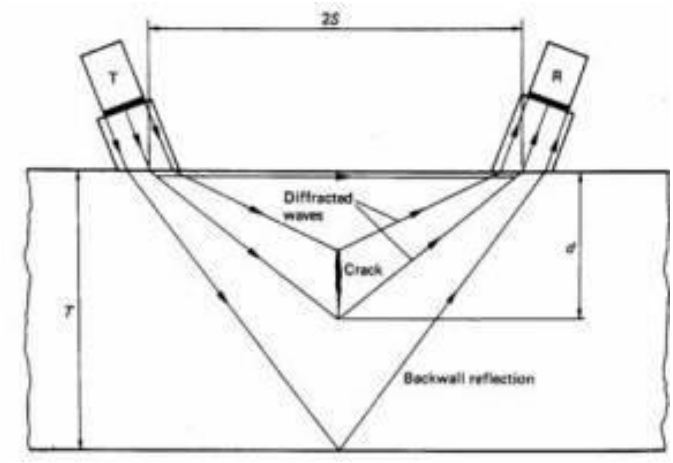
Η λειτουργία της μεθόδου βασίζεται στην εκπομπή ενός παλμού υπερήχων μέσα στο υλικό και την καταγραφή των ανακλάσεων που επιστρέφουν. Ο παλμός υπερήχων δημιουργείται με την εφαρμογή ενός παλμού υψηλής τάσης σε ένα πιεζοηλεκτρικό δίσκο. Οι ανακλάσεις δονούν τον ίδιο ή άλλο πιεζοηλεκτρικό δίσκο ο οποίος τις μετατρέπει πάλι σε τάσεις. Κάθε επιφάνεια ανακλά μια ηχώ του παλμού, με πρώτη απ' όλες την επιφάνεια στην οποία εφάπτεται ο δίσκος και τελευταία την απέναντι επιφάνεια του υλικού. Ανάμεσα στις δύο ανακλάσεις θα βρίσκεται η ηχώ από οποιοδήποτε ατέλεια υπάρχει μέσα στο υλικό και με εύρος που εξαρτάται από το μέγεθος κάθε ατέλειας.



Εικόνα 1.17 Αρχή λειτουργίας ελέγχου υπερήχων και μέτρηση βάθους ρωγμής

Χρόνος περίθλασης

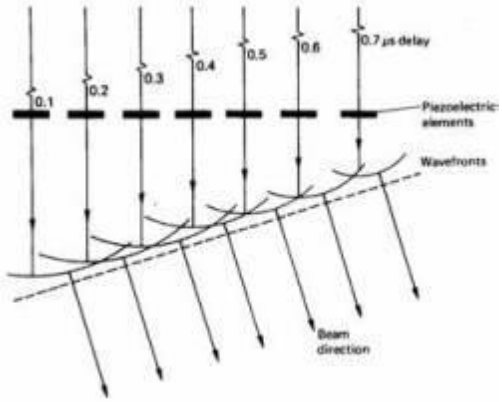
Μια παραλλαγή της κλασικής μεθόδου που μετρά το χρόνο ανάκλασης είναι η μέτρηση του χρόνου διάθλασης του παλμού υπερήχων. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί τα κύματα που διαθλούνται στα χείλη των ρωγμών και βάσει της γεωμετρίας του δοκιμίου και των θέσεων του πομπού και του δέκτη υπολογίζει το βάθος και μήκος των ατελειών.



Εικόνα 1.18 Εντοπισμός ρωγμής με την διάθλαση των υπερήχων

Συστοιχία φάσης με υπερήχους

Οι σύγχρονες τεχνικές που είχαν επιτυχία σε παρόμοιους επιστημονικούς κλάδους, εφαρμόζονται και στις μεθόδους υπερήχων. Η συστοιχία φάσης, γνωστή από τα ραντάρ και σόναρ, υλοποιείται και εδώ με μια συστοιχία από πιεζοηλεκτρικά στοιχεία και μας δίνει τη δυνατότητα να κατευθύνουμε τη δέσμη των παλμών με μεγάλη ακρίβεια χωρίς τη παρεμβολή μηχανικών ή άλλων μέσων.



Εικόνα 1.19 Αρχή λειτουργίας συστοιχίας φάσης υπερήχων και εικόνα μωρού με χρήση της μεθόδου

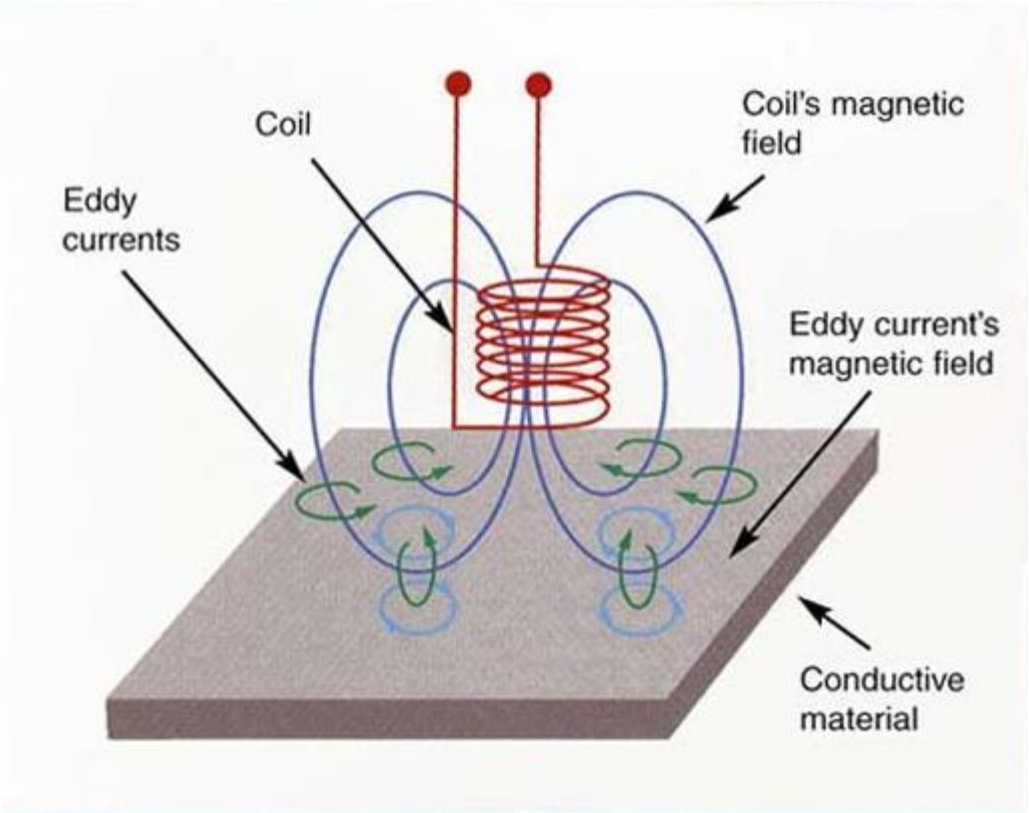
Περιστρεφόμενο σύστημα για αγωγούς

Για την εφαρμογή των μεθόδων σε ειδικές κατασκευές έχουν αναπτυχθεί επί μέρους τεχνικές. Ειδικά για το εσωτερικό των αγωγών έχουν αναπτυχθεί συστήματα όπως το περιστρεφόμενο σύστημα ελέγχου (IRIS) που τοποθετείται μέσα στον αγωγό και τον σαρώνει κυκλικά και κατά μήκος για τον εντοπισμό ρωγμών και διαβρώσεων.

1.2 Δινορεύματα

Ο έλεγχος με δινορεύματα (Eddy Current Inspection) είναι μία ακόμα από τις πολλές μεθόδους ΜΚΕ που χρησιμοποιούνε τις αρχές του ηλεκτρομαγνητισμού για την διενέργεια των ελέγχων.

Δινορεύματα δημιουργούνται μέσω της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Εφαρμόζοντας εναλλασσόμενο ρεύμα σε ένα πηνίο, αυτό δημιουργεί ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο γύρω του. Αυτό το πεδίο εξαπλώνεται όσο το ρεύμα κορυφώνεται και συρρικνώνεται καθώς το ρεύμα μηδενίζεται. Αν εντός του μαγνητικού πεδίου βρεθεί κάποιο άλλο ηλεκτρικά αγώγιμο υλικό δημιουργούνται και σε αυτό επαγόμενα ρεύματα. Δινορεύματα ονομάζονται αυτά τα επαγόμενα ρεύματα τα οποία έχουνε κυκλική μορφή.



Εικόνα 1.20 Μηχανισμός παραγωγής δινορευμάτων

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των δινορευμάτων ως εργαλείο ΜΚΕ είναι το πλήθος τον εφαρμογών και ελέγχων που μπορούν να καταφέρουν. Υπό κατάλληλες συνθήκες τα δινορεύματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως:

- Ανίχνευση ρωγμών
- Μετρήσεις πάχους
- Μετρήσεις πάχους επιστρώσεων
- Μετρήσεις αγωγιμότητας για

- Προσδιορισμό υλικού
- Ανίχνευση θερμικής βλάβης
- Παρακολούθηση πολυμερισμού υλικών

Κάποια απ' τα υπόλοιπα πλεονεκτήματα του ελέγχου δινορευμάτων είναι

- Ευαισθησία σε μικρές ρωγμές και ελαττώματα
- Ανίχνευση επιφανειακών και μικρού βάθους ελαττωμάτων
- Άνετη φορητότητα του απαραίτητου εξοπλισμού
- Ο αισθητήρας δεν χρειάζεται να βρίσκεται σε άμεση επαφή με το μετρούμενο αντικείμενο
- Είναι δυνατός ο έλεγχος πολύπλοκων σχημάτων και μεγεθών

Παρ' όλα αυτά υπάρχουνε και κάποιοι περιορισμοί

- Μόνο ηλεκτρικά αγώγιμα υλικά μπορούν να εξεταστούν
- Απαιτείται καλά εκπαιδευμένο προσωπικό
- Μικρό βάθος εισχώρησης
- Ατέλειες παράλληλες στο επίπεδο των περιελίξεων του πηνίου δεν είναι ανιχνεύσιμες

1.2.1 Ιστορικά στοιχεία του ελέγχου δινορευμάτων

Ο έλεγχος με δινορεύματα έχει προέλευση από το 19^{ο} αιώνα με την ανακάλυψη της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής από το Michael Faraday. Στην συνέχεια ο επιστήμονας Hughes το 1879 κατέγραψε αλλαγές στις ιδιότητες των πηνίων όταν έρχονται σε επαφή με μέταλλα διαφόρων αγωγιμοτήτων και μαγνητικής διαπερατότητας. Παρ' όλα αυτά οι δυνατότητες των αισθητήρων δεν αξιοποιήθηκαν μέχρι τον 2^{ο} Παγκόσμιο Πόλεμο. Μεγάλη έρευνα έγινε τις δεκαετίες του '50 και του '60 από την βιομηχανία αεροπλάνων και πυρηνικών.

1.2.2 Εφαρμογές ελέγχου δινορευμάτων

Πλέον ο έλεγχος μέσω δινορευμάτων είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος. Χρησιμοποιείται σε πολλές βιομηχανίες για την ανίχνευση ελαττωμάτων και διεξαγωγή μετρήσεων. Γενικότερα η μέθοδος χρησιμοποιείται για τον έλεγχο μικρών επιφανειών και με μία εκ των προτέρων ποιοτική γνώση του ελαττώματος, ώστε να γίνει κατάλληλη επιλογή του αισθητήρα και των παραμέτρων, όπως η συχνότητα.

Σε λεπτά αντικείμενα τα δινορεύματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μέτρηση του πάχους τοιχώματος. Αυτή η δυνατότητα καθιστά τον έλεγχο κατάλληλο για ανίχνευση διάβρωσης και άλλων βλαβών που προκαλούν λέπτυνση των τοιχωμάτων. Αυτή η τεχνική έχει εφαρμογή στην αεροπορική βιομηχανία και στην μελέτη σωληνώσεων σε διάφορες

κατασκευές όπως εναλλάκτες θερμότητας. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μετρήσεις πάχους βαφών και άλλων επιστρώσεων.

Τα δινορεύματα επίσης επηρεάζονται από την ηλεκτρική αγωγιμότητα και την μαγνητική διαπερατότητα των υλικών. Έτσι προσφέρεται η δυνατότητα για ταξινόμηση των υλικών και διάγνωση για πιθανή έκθεση σε υψηλές θερμοκρασίες, κάτι που αλλάζει την αγωγιμότητα κάποιων υλικών.

Εικόνα 1.21 Παχυμέτρηση επίστρωσης και έλεγχος κατάστασης σωληνώσεων

1.2.3 Έρευνα στην περιοχή των δινορευμάτων

Αρκετοί πόροι εξακολουθούν να δαπανώνται για την βελτίωση των τεχνικών ανίχνευσης με δινορεύματα. Κάποιες από αυτές είναι:

Φωτοεπαγωγική απεικόνιση

Η τεχνική της φωτοεπαγωγικής απεικόνισης παρέχει την δυνατότητα για ισχυρή, υψηλής ανάλυσης σάρωση. Η υψηλή ανάλυση επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας συνήθους μεγέθους ανιχνευτές δινορευμάτων και μέσης ισχύος laser (5W). Η τεχνική της φωτοεπαγωγικής απεικόνισης χρησιμοποιείται για την μελέτη τοπικών τάσεων και ρωγμών και συγκολλήσεων.

Παλμικά δινορεύματα

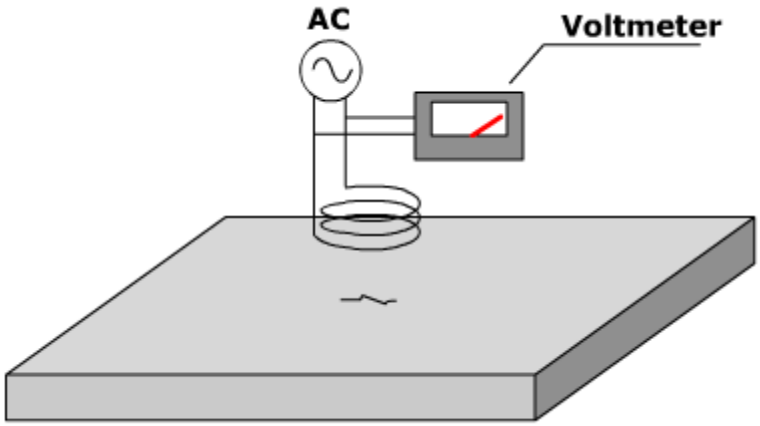
Η τεχνική των παλμικών δινορευμάτων χρησιμοποιείται για την ανίχνευση διάβρωσης και ρωγμών σε αεροπορικές κατασκευές πολλαπλών στρωμάτων. Οι παλμοί αποτελούνται από ένα μεγάλο εύρο συχνοτήτων, με κάθε παλμό να έχει και διαφορετικό βάθος διείσδυσης. Έτσι επιτυγχάνεται μεγάλο διείσδυσης με την χρήση χαμηλών συχνοτήτων παλμών.

1.2.4 Διάταξη ανίχνευσης

Ο εξοπλισμός για τον έλεγχο με δινορεύματα υπάρχει σε μεγάλη ποικιλία διατάξεων. Συνήθως ταξινομείται ανάλογα με το είδος των δεδομένων που προβάλλονται στην οθόνη.

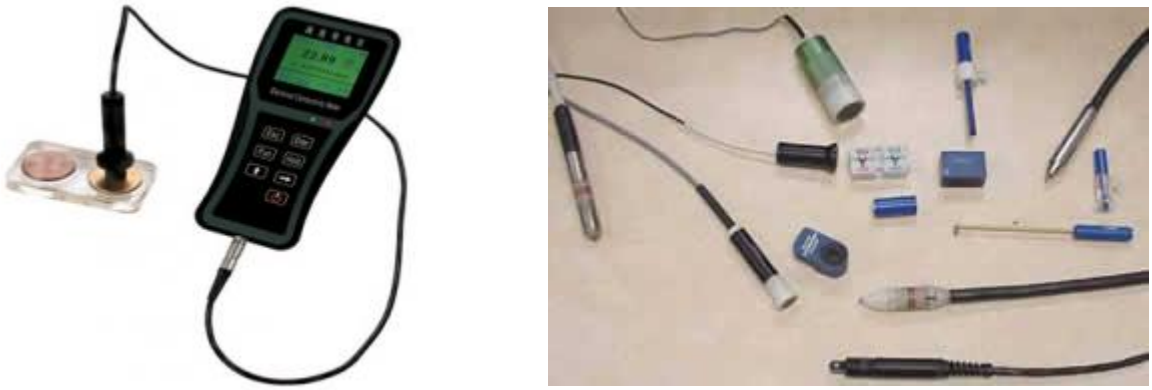
Αυτές είναι οι οθόνες χωρίζονται σε αναλογικής ή ψηφιακής ανάγνωσης, επίπεδο εμπέδησης και έντασης σήματος.

Η απλούστερη διάταξη αποτελείται από μία πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος, ένα πηνίο και ένα βολτόμετρο ή αμπερόμετρο. Αν και είναι δυνατή η ανίχνευση ατελειών με αυτό τον εξοπλισμό, συνήθως οι διατάξεις δινορευμάτων είναι πιο εξελιγμένες.



Εικόνα 1.22 Τυπική διάταξη εξοπλισμού μη καταστροφικού ελέγχου

Οι ανιχνευτές δινορευμάτων είναι διαθέσιμοι σε μία μεγάλη ποικιλία σχημάτων και μεγεθών. Μάλιστα αυτό είναι ένα από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου ελέγχου με δινορεύματα μιας και οι αισθητήρες μπορούν να σχεδιαστούν για πολλά είδη εφαρμογών. Κατατάσσονται ανάλογα με την διάταξη του ή των πηνίων που περιέχει και ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας τους σε απόλυτους, διαφορικούς, ανακλαστικούς και υβριδικούς.



Εικόνα 1.23 Φορητός εξοπλισμός ελέγχου δινορευμάτων και ποικιλία αισθητήρων

Κεφάλαιο 2:

Αναλυτικές λύσεις προβλημάτων δινορευμάτων

Τα προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού συνήθως χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες: χαμηλής συχνότητας, μέσης και υψηλής. Προβλήματα επαγόμενων ρευμάτων προερχόμενα από πηνίο, γνωστά και ως δινορεύματα, εντάσσονται στην μεσαία κατηγορία. Για την αντιμετώπισή τους χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Maxwell από τις οποίες προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού. Η επίλυση αυτών των εξισώσεων οδηγεί σε κάποια κλειστής-μορφής λύση. Έχοντας την λύση για το διανυσματικό δυναμικό οποιαδήποτε φυσικό ηλεκτρομαγνητικό μέγεθος μπορεί να υπολογιστεί, όπως η πυκνότητα των επαγόμενων ρευμάτων και η εμπέδηση του πηνίου.

2.1 Στοιχεία θεωρίας ηλεκτρομαγνητισμού

Ηλεκτρομαγνητισμός είναι το κομμάτι της θεωρητικής φυσικής που μελετά τα αποτέλεσμα των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων καθώς και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ αυτών. Η θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού αναπτύχθηκε κατά τον 19° αιώνα, κυρίως από τον φυσικό James Clerk Maxwell. Οι διαφορικές εξισώσεις Maxwell μαζί με τον νόμο της δύναμης Lorentz αποτελούν τα θεμέλια για την περιγραφή του ηλεκτρομαγνητισμού.

2.1.1 Οι εξισώσεις Maxwell και η δύναμη Lorentz

Οι εξισώσεις του Maxwell ουσιαστικά περιγράφουνε το πώς ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα δρούνε σαν πηγές ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Ακριβέστερα, περιγράφουν το πως ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο και αντίστροφα. Είναι ένα σετ τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων εκ των οποίων οι δυο περιγράφουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων και οι άλλες δύο τον τρόπο με τον οποίο παράγονται. Συγκεκριμένα οι εξισώσεις Maxwell [1] είναι οι:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4}$$

όπου $\mathbf{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, $\mathbf{H}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου, $\mathbf{D}$ η πυκνότητα του ηλεκτρικού πεδίου, $\mathbf{B}$ η πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου, $\mathbf{J}$ η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και σ το ηλεκτρικό φορτίο.

- Η εξίσωση (1) περιγράφει τον νόμο του Ampere, ο οποίος συνδέει μαγνητικά πεδία με τα ηλεκτρικά ρεύματα που τα παράγουν.
- Η σχέση (2) αποτελεί την εξίσωση Maxwell-Faraday, η οποία υλοποιεί τον νόμο του Faraday για την επαγωγή. Ο νόμος αναφέρει το πώς η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη παράγεται από την χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή
- Η εξίσωση (3) είναι ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό. Αναφέρει ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίο είναι ίση με το μηδέν. Ο ορισμός αυτός ουσιαστικά ισοδυναμεί με την πρόταση ότι η στοιχειώδης μονάδα του μαγνητισμού είναι το μαγνητικό δίπολο.
- Η εξίσωση (4) ονομάζεται νόμος του Gauss και περιγράφει το πώς η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο.

Η δύναμη Lorentz [1] δίνεται από την σχέση

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})] \tag{5}$$

και περιγράφει την δύναμη που ασκείται σε ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σώμα κινούμενο με ταχύτητα v εντός ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

2.1.2 Ο νόμος του Ohm

Εκτός όμως από τους τρόπους αλληλεπίδρασης των κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων με μαγνητικά πεδία, εξίσου σημαντικό είναι να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται τα ηλεκτρικά ρεύματα. Τον μηχανισμό αυτό περιγράφει ο νόμος του Ohm [1], ο οποίος αναφέρει ότι το ηλεκτρικό ρεύμα είναι ανάλογο με την διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία ενός αγωγού. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει αυτή τη σχέση είναι

$$I = V/R \tag{6}$$

όπου I είναι η ένταση του ρεύματος μετρημένη σε Ampere, V η διαφορά δυναμικού μετρημένη κατά μήκος του αγωγού σε μονάδες Volt και R η αντίσταση του αγωγού μετρημένη σε μονάδες Ohm.

Συνδυάζοντας τον νόμο του Ohm με την πυκνότητα ρεύματος και το ηλεκτρικό πεδίο παίρνουμε την σχέση

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{7}$$

με σ την αγωγιμότητα του υλικού μετρημένη σε μονάδες Ohm/m.

Σε ηλεκτρικά κυκλώματα όπου υπάρχει η παρουσία στοιχείων όπως πυκνωτές και πηνία σε συνδυασμό με εναλλασσόμενο ρεύμα ο νόμος του Ohm που ορίστηκε παραπάνω δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα. Στα κυκλώματα αυτά η διαφορά δυναμικού και τα ηλεκτρικά ρεύματα ακολουθούν μία κυματομορφή του τύπου $Ae^{j\omega t}$. Έτσι ο νόμος του Ohm [2] μετατρέπεται σε

$$V = I \cdot Z \tag{8}$$

όπου πλέον V και I αποτελούν μιγαδικά βαθμωτά μεγέθη και Z η μιγαδική γενίκευση της αντίστασης, ονομαζόμενη εμπέδηση.

2.1.3 Εμπέδηση και επαγωγική αντίσταση πηνίου

Η εμπέδηση, όντας μιγαδικό βαθμωτό μέγεθος, μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$Z = R + jX \tag{9}$$

όπου το πραγματικό μέρος R είναι η ωμική αντίσταση του κυκλώματος και το φανταστικό μέρος X η επαγωγική ηλεκτρική αντίσταση.

Η ωμική αντίσταση προέρχεται από αντιστάτη ο οποίος ακολουθεί την κλασική μορφή του νόμου του Ohm [1], δηλαδή

$$Z_{\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\eta} = R = \frac{V(t)}{I(t)} \tag{10}$$

Η επαγωγική αντίσταση μπορεί να προκληθεί από τα δύο άλλα βασικά μέρη ενός κυκλώματος, τον πυκνωτή και το πηνίο. Η επαγωγική αντίσταση πυκνωτή δίνεται από τον τύπο

$$Z_{\pi\upsilon\kappa\nu\omega\tau\acute{\eta}} = \frac{1}{j\omega C} \tag{11}$$

όπου C η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Η επαγωγική αντίσταση πηνίου δίνεται από τον τύπο

$$Z_{\pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon} = j\omega L \tag{12}$$

όπου L ο συντελεστής επαγωγής του πηνίου. Θέτοντας $\omega=2\pi f$ βλέπουμε ότι η επαγωγική αντίσταση είναι ανάλογη της συχνότητας του ρεύματος.

2.2 Υπολογισμός εμπέδησης πηνίου πάνω από το επίπεδο δύο αγωγών

Για να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό θα πρέπει να καταλήξουμε σε μία εξίσωση που θα το περιγράφει. Η εξίσωση αυτή θα προκύψει από την επίλυση των εξισώσεων Maxwell.

2.2.1 Εύρεση του διανυσματικού δυναμικού

Για την εύρεση μια κλειστής-μορφής λύσης του διανυσματικού δυναμικού θα υποτεθεί ένα γραμμικό, ισότροπο και ομογενές μέσο διάδοσης καθώς και ημιτονοειδούς μορφής εφαρμοζόμενα ρεύματα. Σε ένα γραμμικό και ισότροπο υλικό ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία [3]:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{14}$$

όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού και ε η διηλεκτρική σταθερά του. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7) και (14) στην εξίσωση (1) παίρνουμε

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{15}$$

Επίσης για εναλλασσόμενο ρεύμα ημιτονοειδούς μορφής έχουμε ότι

$$\frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{E}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = j\varepsilon\omega \boldsymbol{E} \tag{16}$$

Ο όρος $j\varepsilon\omega\boldsymbol{E}$ μπορεί να απαλειφτεί, γιατί ισχύει ότι για μέταλλα $\sigma \approx 10^7$και $\varepsilon \approx 10^{-11}$. Άρα για κυκλικές συχνότητες ω έως και 10^8, $\sigma \gg \varepsilon\omega$ άρα και $\sigma\boldsymbol{E} \gg \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{E}}{\partial t}$.

Από την εξίσωση (3) συμπεραίνουμε ότι το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο **B** μπορεί να εκφραστεί ως η στροβιλότητα ενός διανυσματικού πεδίου **A**

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{17}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \Leftrightarrow$$
$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{18}$$

και επομένως

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \tag{19}$$

όπου φ το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό. Πολλαπλασιάζοντας με την αγωγιμότητα σ του υλικού έχουμε

$$\sigma\boldsymbol{E} = -\sigma\nabla\varphi - \sigma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{20}$$

όμως το πηλίκο της διαφοράς δυναμικού $\nabla\varphi$ με την αντίσταση $1/\sigma$ ισούται με την εφαρμοζόμενη εναλλασσόμενη πυκνότητα ρεύματος i_0. [3]. Έτσι έχουμε

$$\sigma\boldsymbol{E} = -\sigma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + i_0 \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (13) και (17) στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (15) και τη σχέση (21) και στο δεξιό λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \Rightarrow \\ &\nabla \times \left[\frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A})\right] = -\sigma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + i_0 \end{aligned} \tag{22}$$

και σύμφωνα με τις ταυτότητες της διανυσματικής ανάλυσης έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A})\right] &= \left(\nabla\frac{1}{\mu}\right) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \left(\nabla\frac{1}{\mu}\right) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{23}$$

Έως τώρα, στον ορισμό του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}$, δεν επιβάλαμε συγκεκριμένη συνθήκη. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε κάποια συμμετρία βαθμίδας περιορίζοντας την αυθαιρεσία στον ορισμό του $\mathbf{A}$ και απλοποιώντας το πρόβλημα. Σε προβλήματα επαγωγής χρησιμοποιείται η βαθμίδα του Coulomb η οποία ορίζει ότι η απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού είναι μηδέν [3], δηλαδή

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{24}$$

Έτσι η εξίσωση (22) μέσω των εξισώσεων (23) και (24) γίνεται

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu i_0 + \mu\sigma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mu\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right) \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{25}$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση του διανυσματικού δυναμικού σε γραμμικό, ισότροπο και μη ομογενές μέσο λόγω πυκνότητας ρεύματος i_0. Εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία του πηνίου γύρω από άξονα θεωρούμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων r, θ, z. Λόγω της

αξονικής συμμετρίας, το ρεύμα και κατά συνέπεια και το διανυσματικό δυναμικό θα έχουνε μόνο θ μέλος. Αναπτύσσοντας την εξίσωση (25) ως προς τη συντεταγμένη θ έχουμε

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{A}{r^2}=-\mu i_0+\mu\sigma\frac{\partial A}{\partial t}-\mu\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial r\left[\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r}\right]}+\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial z}\right)\frac{\partial A}{\partial z}\right\} \tag{26}$$

Θεωρώντας το i_0 ως ημιτονοειδή συνάρτηση του χρόνου έχουμε $i_0 = {i_0}' e^{j\omega t}$. Έτσι το διανυσματικό δυναμικό θα είναι κι αυτό μία ημιτονοειδής συνάρτηση, δηλαδή

$$A = A' e^{j\omega t} \tag{27}$$

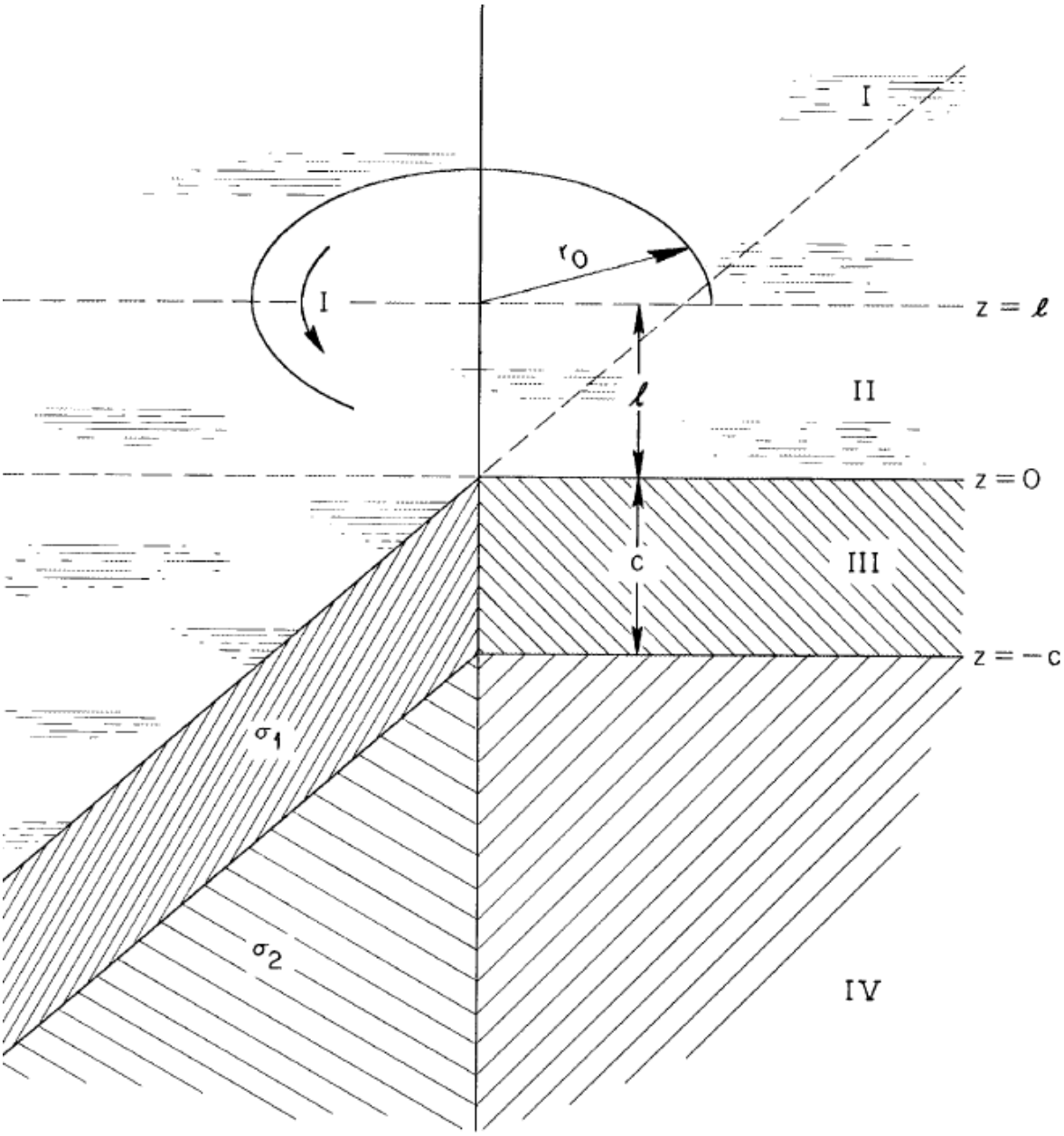
Έτσι η εξίσωση (26) γίνεται

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2 A'}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A'}{\partial r}+\frac{\partial^2 A'}{\partial z^2}-\frac{A'}{r^2}\right]e^{j\omega t}\\&\qquad=\left[-\mu i_0+j\omega\mu\sigma\frac{\partial A'}{\partial t}-\mu\left\{\frac{\partial(1/\mu)}{\partial r\left[(1/r)\frac{\partial A'}{\partial r}\right]}+\left(\frac{\partial(1/\mu)}{\partial z}\right)\frac{\partial A'}{\partial z}\right\}\right]e^{j\omega t}\end{aligned} \tag{28}$$

Απαλείφοντας τον όρο $e^{j\omega t}$ και αλλάζοντας το A' σε A για λόγους ευκολίας στη γραφή έχουμε

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{A}{r^2}=-\mu i_0+j\omega\mu\sigma\frac{\partial A}{\partial t}-\mu\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial r\left[\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r}\right]}+\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial z}\right)\frac{\partial A}{\partial z}\right\} \tag{29}$$

Όμως για ένα γραμμικό, ισότροπο και ομογενές μέσο, ο όρος εντός των αγκύλων μηδενίζεται. Αν I το ρεύμα ενός δέλτα-πηνίου στη θέση (r_0, z_0), τότε η πυκνότητα του ρεύματος μπορεί να εκφραστεί ως εξής: $i_0 = I\delta(r-r_0)(z-z_0)$.



Εικόνα 2.1 Δέλτα-πηνίο στη θέση $(\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{z_0})$

Έτσι τώρα η εξίσωση (29) γράφεται

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} - j\omega\mu\sigma\frac{\partial A}{\partial t} + \mu I\delta(r - r_0)(z - z_0) = 0 \tag{30}$$

Από την στιγμή που θα λυθεί αυτή η διαφορική εξίσωση, τότε έχοντας το διανυσματικό δυναμικό, θα μπορεί να υπολογιστεί οποιαδήποτε διάταξη πηνίου μέσω της υπέρθεσης των λύσεων πολλών δέλτα-πηνίων.

2.2.2 Πηνίο πάνω από περιοχές διαφορετικής αγωγιμότητας

Χωρίζουμε το πρόβλημα σε 4 περιοχές (Εικόνα 2.1):

- I η περιοχή πάνω από το δέλτα-πηνίο
- II η περιοχή ενδιάμεσα του πηνίου και της πρώτης πλάκας
- III η περιοχή της πλάκας του πρώτου υλικού
- IV η περιοχή της δεύτερης πλάκας

Για τις περιοχές I και II η διαφορική εξίσωση για τον αέρα γίνεται (σ=0)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = 0 \tag{31}$$

Για τις περιοχές όπου υπάρχει αγωγός (III και IV) η διαφορική εξίσωση (30) είναι

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} - j\omega\mu\sigma_\iota \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{32}$$

Θέτοντας $A(r,z) = R(r)Z(z)$ και διαιρώντας με $R(r)Z(z)$ έχουμε:

$$\left(\frac{1}{R(r)}\right)\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{rR(r)}\right)\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left(\frac{1}{Z(z)}\right)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} - j\omega\mu\sigma_\iota = 0 \tag{33}$$

Λύνοντας ως προς Z έχουμε

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{Z(z)}\right)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \sigma\tau\alpha\theta = a^2 + j\omega\mu\sigma_i \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow Z(z) = A\exp(a^2 + j\omega\mu\sigma_i)^{1/2} z + B\exp\left[-(a^2 + j\omega\mu\sigma_i)^{1/2}\right] z \end{aligned} \tag{34}$$

Ορίζουμε $\alpha_\iota \equiv (a^2 + j\omega\mu\sigma_i)^{1/2}$ οπότε η εξίσωση (33) γίνεται

$$\left(\frac{1}{R(r)}\right)\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{rR(r)}\right)\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left(\frac{1}{Z(z)}\right)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \alpha^2 - \frac{1}{r^2} = 0 \tag{35}$$

Η εξίσωση (35) είναι μία πρώτης τάξεως εξίσωση Bessel με λύση

$$R(r) = CJ_1(ar) + DY_1(ar)0) \tag{36}$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις (34) και (36) έχουμε την λύση του διανυσματικού δυναμικού

$$A(r,z) = [A\mathrm{e}^{+a_i z} + B\,\mathrm{e}^{-a_i z}] \cdot [CJ_1(ar) + DY_1(ar)] \tag{37}$$

Τώρα θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε τις σταθερές A, B, C και D. Επειδή όμως αυτές είναι διαφορετικές για κάθε τιμή του α η πλήρης λύση θα είναι το άθροισμα της κάθε λύσης ξεχωριστά και επειδή το α είναι συνεχής μεταβλητή θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα σε όλο το εύρος του α. Έτσι η γενική λύση είναι

$$A(r,z) = \int_0^{+\infty} [A(a)\mathrm{e}^{+a_i z} + B(a)\,\mathrm{e}^{-a_i z}] \times [C(a)J_1(ar) + D(a)Y_1(ar)]\,da \tag{38}$$

Στην περιοχή I θα πρέπει να είναι $A(\alpha)=0$ γιατί το z τείνει στο άπειρο. Λόγω της απόκλισης του Y_1 στην αρχή των αξόνων το $D(\alpha)$ πρέπει να είναι μηδέν σε όλες τις περιοχές [2]. Στην περιοχή IV, όπου το z συγκλίνει στο άπειρο, πρέπει να μηδενιστεί ο όρος $B(\alpha)$. Έτσι οι λύσεις για κάθε περιοχή ξεχωριστά γίνονται

$$A^I(r,z) = \int_0^{+\infty} B_I(a)\,\mathrm{e}^{-al} J_1(ar)\,da \tag{39}$$

$$A^{II}(r,z) = \int_0^{+\infty} [C_{II}(a)\,\mathrm{e}^{+al} + B_{II}(a)\;\mathrm{e}^{-al}] J_1(ar)\,da \tag{40}$$

$$A^{III}(r,z) = \int_0^{+\infty} [C_{III}(a)\,\mathrm{e}^{+a_1 z} + B_{III}(a)\;\mathrm{e}^{-a_1 z}] J_1(ar)\,da \tag{41}$$

$$A^{IV}(r,z) = \int_0^{+\infty} C_{IV}(a)\mathrm{e}^{+a_2 z} J_1(ar)\,da \tag{42}$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$A^I(r,l) = A^{II}(r,l) \tag{43}$$

$$(\partial/\partial z)A^I(r,z)|_{z=l} = (\partial/\partial z)A^{II}(r,z)|_{z=l} - \mu I\delta(r-r_0) \tag{44}$$

$$A^{II}(r,0) = A^{III}(r,0) \tag{45}$$

$$(\partial/\partial z)A^{II}(r,z)|_{z=0} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) A^{III}(r,z)|_{z=0} \tag{46}$$

$$A^{III}(r,-c) = A^{IV}(r,-c) \tag{47}$$

$$(\partial/\partial z)A^{III}(r,z)|_{z=-c} = (\partial/\partial z)A^{IV}(r,z)|_{z=-c} \tag{48}$$

Λόγω της συνοριακής συνθήκης (43) έχουμε

$$\int_0^{+\infty} B_I(a)\;\mathrm{e}^{-al} J_1(ar)\,da = \int_0^{+\infty} [C_{II}(a)\,\mathrm{e}^{+al} + B_{II}(a)\,\mathrm{e}^{-al}] J_1(ar)\,da \tag{49}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον όρο

$$\int_0^{+\infty} J_1(a'r) r\,dr \tag{50}$$

και αντιστρέφοντας την σειρά ολοκλήρωσης

$$\int_0^{+\infty} \frac{B_I(a)\,\mathrm{e}^{-al}}{\alpha}\left[\int_0^{+\infty} J_1(ar)J_1(a'r)ardr\right]da$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a}[C_{II}(a)\,\mathrm{e}^{+al} + B_{II}(a)\ \mathrm{e}^{-al}]\left[\int_0^{+\infty} J_1(ar)J_1(a'r)ardr\right]da \tag{51}$$

Η εξίσωση (51) μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση Fourier-Bessel, η οποία είναι

$$F(a') = \int_0^{+\infty} F(a)\int_0^{+\infty} J_1(ar)J_1(a'r)ardrda \tag{52}$$

Έτσι η εξίσωση (51) απλοποιείται σε

$$\frac{B_I}{\alpha'}\mathrm{e}^{-a'l} = \frac{C_{II}}{a'}\mathrm{e}^{+a'l} + \frac{B_{II}}{a'}\mathrm{e}^{-a'l} \tag{53}$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα και για τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες και αντικαθιστώντας το α’ με α παίρνουμε

$$-B_I\mathrm{e}^{-al} = C_{II}\mathrm{e}^{+\alpha l} - B_{II}\mathrm{e}^{-\alpha l} - \mu I r_0 J_1(ar_0) \tag{54}$$

$$\frac{C_{II}}{a} + \frac{B_{II}}{\alpha} = \frac{C_{III}}{a} + \frac{B_{III}}{a} \tag{55}$$

$$C_{II} - B_{II} = \frac{a_1}{a}C_{III} - \frac{a_1}{a}B_{III} \tag{56}$$

$$\frac{C_{III}}{a}\mathrm{e}^{-a_1c} + \frac{B_{III}}{a}\mathrm{e}^{+a_1c} = \frac{C_{IV}}{a}\mathrm{e}^{-a_2c} \tag{57}$$

$$\frac{a_1}{a}C_{III}\mathrm{e}^{-a_1c} - \frac{a_1}{a}B_{III}\mathrm{e}^{+a_1c} = \frac{a_2}{a}C_{IV}\mathrm{e}^{-a_2c} \tag{58}$$

Έτσι καταλήγουμε σε ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους. Η λύση του συστήματος είναι

$$B_I = \frac{1}{2}\mu I r_0 J_1(ar_0)\left\{e^{al} + \left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]e^{-al}\right\} \tag{59}$$

$$C_{II} = \frac{1}{2}\mu I r_0 J_1(ar_0)e^{-al} \tag{60}$$

$$B_{II} = \frac{1}{2}\mu I r_0 J_1(ar_0)\left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]e^{-al} \tag{61}$$

$$C_{III} = \mu I r_0 J_1(ar_0)\left[\frac{a(a_2+a_1)e^{-al+2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right] \tag{62}$$

$$B_{III} = \mu I r_0 J_1(ar_0)\left[\frac{a(a_1-a_2)e^{-al}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right] \tag{63}$$

$$C_{IV} = \mu I r_0 J_1(ar_0)\left[\frac{2a_1 a e^{(a_2+a_1)c}e^{-al}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right] \tag{64}$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις του διανυσματικού δυναμικού για κάθε περιοχή

$$\begin{aligned} A^I(r,z) = \frac{1}{2}\mu I r_0 \int_0^{+\infty} J_1(ar_0)J_1(ar)\mathrm{e}^{-al-az}\Bigg\{ & e^{2al} \\ & + \left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]\Bigg\} da \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} A^{II}(r,z) = \frac{1}{2}\mu I r_0 \int_0^{+\infty} J_1(ar_0)J_1(ar)\mathrm{e}^{-al}\Bigg\{ & e^{az} \\ & + \left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]e^{-az}\Bigg\} da \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} & A^{III}(r,z) \\ & = \mu I r_0 \int_0^{+\infty} J_1(ar_0)J_1(ar)\mathrm{e}^{-al} a \left[\frac{(a_2+a_1)e^{2a_1c}e^{a_1z}+(a_1-a_2)e^{-a_1z}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right] da \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} & A^{IV}(r,z) \\ & = \mu I r_0 \int_0^{+\infty} J_1(ar_0)J_1(ar)\mathrm{e}^{-al} a \left[\frac{2a_1 e^{(a_2+a_1)c}e^{+a_2z}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right] da \end{aligned} \tag{68}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις του διανυσματικού δυναμικού για ένα δέλτα-πηνίο.

2.2.3 Το διανυσματικό δυναμικό πηνίου τετράγωνης διατομής

Εφόσον έχουμε τις εξισώσεις του διανυσματικού δυναμικού για ένα δέλτα-πηνίο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα οποιοδήποτε πηνίο ως υπέρθεση δέλτα-πηνίων. Γενικότερα ισχύει

$$A_{tot}(r,z) = \sum_{i=1}^{n} A_i(r,z) = \sum_{i=1}^{n} A(r,z,r_i,l_i) \tag{69}$$

Θεωρώντας συνεχή κατανομή ρεύματος στο πηνίο παίρνουμε

$$A_{tot}(r,z) = \int\limits_{\delta\iota\alpha\tau o\mu\acute{\eta}\ \pi\eta\nu\acute{\iota}o\upsilon} A(r,z,r_0,l)d(\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha) \tag{70}$$

Έτσι για τετράγωνη διατομή έχουμε

$$A_{tot}(r,z) = \int_{r_1}^{r_2}\int_{l_1}^{l_2} A(r,z,r_0,l)dr_0dl \tag{71}$$

Όπου $A(r,z,r_0,l)$ είναι το διανυσματικό δυναμικό που παράγεται από ρεύμα i_0 στην θέση r_0,l. Υποθέτοντας τώρα ότι το ρεύμα έχει την ίδια ένταση και φάση σε κάθε σπείρα του πηνίου έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A^I(r,z) = \int_0^{+\infty}\int_{r_1}^{r_2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{1}{2}\mu i_0 r_0 J_1(ar_0)J_1(ar)\mathrm{e}^{-al-az}\Bigg\{e^{2al} \\ + \left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]\Bigg\}dadr_0dl \end{aligned} \tag{72}$$

Το ολοκλήρωμα κατά r_0 γράφεται ως

$$\int_{r_1}^{r_2} r_0 J_1(ar_0)d\,r_0 = \left(\frac{1}{a^2}\right)\int_{ar_1}^{ar_2} ar_0 J_1(ar_0)d\,ar_0 = \left(\frac{1}{a^2}\right)\int_{ar_1}^{ar_2} xJ_1(x)d\,x \equiv \left(\frac{1}{a^2}\right)I(r_2,r_1) \tag{73}$$

Το ολοκλήρωμα κατά l γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{l_1}^{l_2} e^{-a(l+z)}(e^{2al}+1)d\,l = e^{-az}\int_{l_1}^{l_2} e^{+al}+e^{-al}d\,l \\ = \frac{e^{-az}}{a}\left[\left(e^{al_2}-e^{al_1}\right)-\left(e^{-al_2}-e^{-al_1}\right)\right] \end{aligned} \tag{74}$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις (73) και (74) για κάθε περιοχή έχουμε τα εξής

$$\begin{aligned} A^I(r,z) = \frac{1}{2}\mu i_0\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^3}I(r_2,r_1)J_1(ar)\mathrm{e}^{-az}\Bigg\{\left(e^{al_2}-e^{al_1}\right) \\ -\left(e^{-al_2}-e^{-al_1}\right)\left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]\Bigg\}da \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} A^{II}(r,z) = \frac{1}{2}\mu i_0\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^3}I(r_2,r_1)J_1(ar)\left(e^{-al_2}-e^{-al_1}\right)\Bigg\{e^{az} \\ + \left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]e^{-az}\Bigg\}da \end{aligned} \tag{76}$$

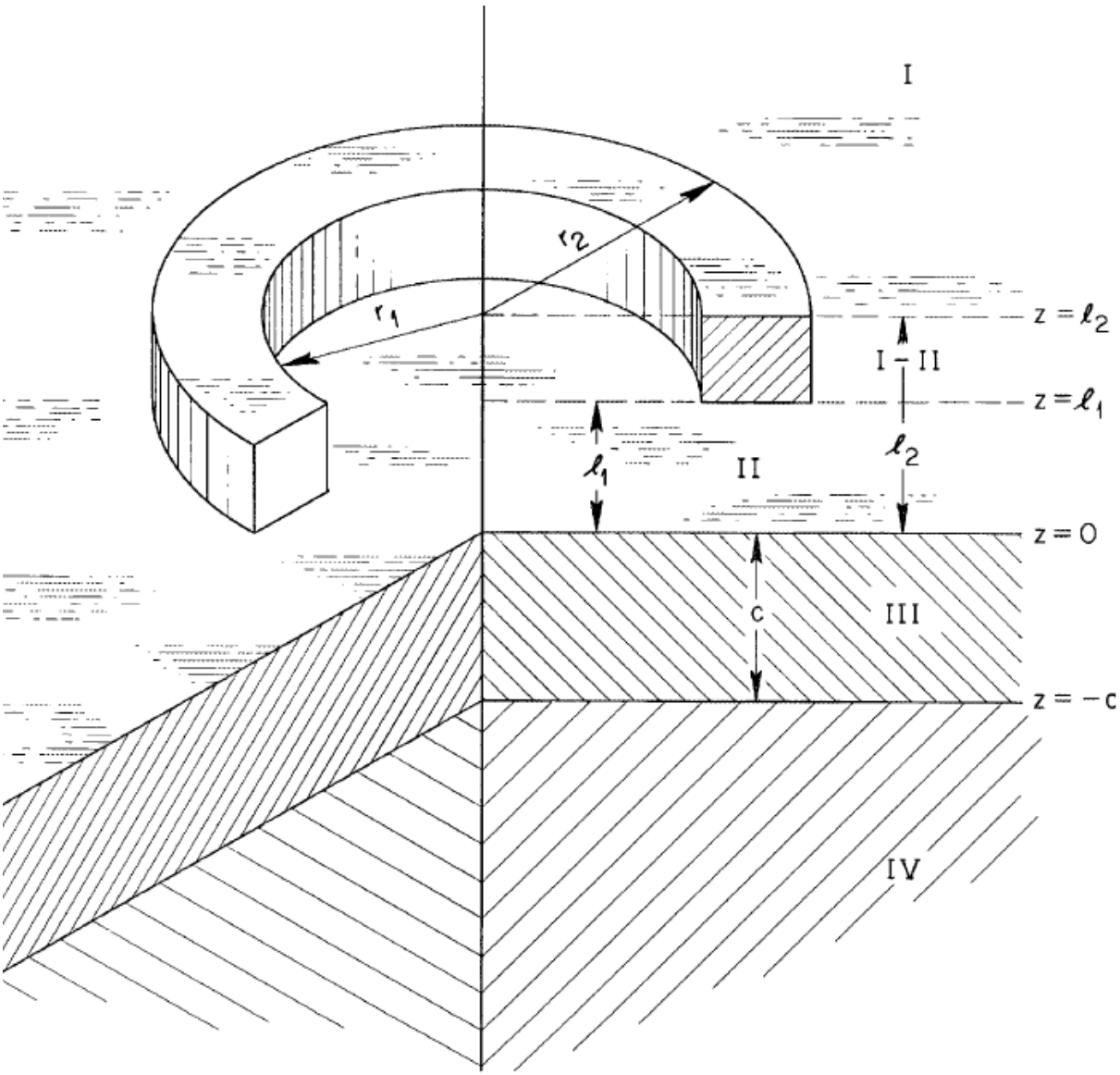
$$A^{III}(r,z) = \mu i_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^3} I(r_2,r_1) J_1(ar)\big(e^{-al_2} - e^{-al_1}\big)\left[a\frac{(a_2+a_1)e^{2a_1c}e^{a_1z} + (a_1-a_2)e^{-a_1z}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]da \quad (77)$$

$$A^{IV}(r,z) = \mu i_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^3} I(r_2,r_1) J_1(ar)\big(e^{-al_2} - e^{-al_1}\big)\left[a\frac{2a_1e^{(a_2+a_1)c}e^{+a_2z}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]da \quad (78)$$

Η εξίσωση (75) είναι έγκυρη για την περιοχή πάνω από το πηνίο και η εξίσωση (76) για την περιοχή κάτω από αυτό και έως την πλάκα. Η ενδιάμεση περιοχή I-II που βρίσκεται το πηνίο χρειάζεται ειδική μεταχείριση. Το σημείο z δέχεται επίδραση από το κάτω τμήμα του πηνίου από l_1 έως z και από το πάνω τμήμα του πηνίου από z έως l_2. Άρα αρκεί να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (75) το l_2=z, στην εξίσωση (76) το l_1=z και να αθροίσουμε ώστε

$$A^{I,II}(r,z) = \frac{1}{2}\mu i_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^3} I(r_2,r_1) J_1(ar)\left\{2 - e^{a(z-l_2)} - e^{-a(z-l_1)} + \mathrm{e}^{-az}\big(e^{-al_1} - e^{-al_2}\big)\left[\frac{(a+a_1)(a_1-a_2)+(a-a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}{(a-a_1)(a_1-a_2)+(a+a_1)(a_2+a_1)e^{2a_1c}}\right]\right\}da \quad (79)$$

Έτσι έχουμε πλέον το διανυσματικό δυναμικό για κάθε περιοχή για πηνίο με τετράγωνη διατομή.



Εικόνα 2.2 Πηνίο τετράγωνης διατομής πάνω από επίπεδο δύο αγωγών

2.2.4 Υπολογισμός εμπέδησης

Την εμπέδηση του πηνίου μπορούμε να την υπολογίσουμε από την σχέση

$$V = ZI \leftrightarrow Z = V/I \tag{80}$$

Η τάση του επαγόμενου ρεύματος πάνω σε μία καμπύλη είναι

$$V = j\omega \int A \cdot ds \tag{81}$$

Για ένα αξονικά συμμετρικό πηνίο με μία σπείρα ακτίνας r θα έχουμε

$$V = j\omega 2\pi r A(r,z) \tag{82}$$

Έτσι η συνολική τάση σε πηνίο n σπειρών είναι

$$V = j\omega 2\pi \sum_{i=1}^{n} r_i A(r_i, z_i) \tag{83}$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το παραπάνω άθροισμα με ολοκλήρωμα πυκνότητας N σπειρών ανά μονάδα επιφάνειας διατομής, δηλαδή

$$V \approx j\omega 2\pi \iint_{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \delta\iota\alpha\tau o\mu\acute{\eta}\varsigma} rA(r,z)Ndrdz \tag{84}$$

Για σταθερό αριθμό σπειρών ανά επιφάνεια έχουμε

$$V = \frac{j\omega 2\pi n}{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \delta\iota\alpha\tau o\mu\acute{\eta}\varsigma} \iint_{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \delta\iota\alpha\tau o\mu\acute{\eta}\varsigma} rA(r,z)drdz \tag{85}$$

Αυτή είναι η εξίσωση για την επαγόμενη τάση σε ένα πηνίο από οποιοδήποτε ομοαξονικό πηνίο. Αν η επαγόμενη τάση προέρχεται από το ίδιο το πηνίο τότε η εξίσωση γίνεται

$$V = \frac{j\omega 2\pi n}{(l_2 - l_1)(r_2 - r_1)} \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} rA^{I,II}(r,z)drdz \tag{86}$$

Η ένταση του ρεύματος σε μία σπείρα συνδέεται με την πυκνότητα ρεύματος από τη σχέση

$$i_0 = \frac{nI}{(l_2 - l_1)(r_2 - r_1)} \tag{87}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (79) και (80) με την (86), η εμπέδηση γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} Z = \frac{j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^5} I^2(r_2, r_1) \Bigg(& 2(l_2 - l_1) \\ & + \frac{1}{a} \Bigg\{ 2e^{-a(l_2 - l_1)} - 2 \\ & + \left[e^{-2al_2} + e^{-2al_1} \right. \\ & \left. - 2e^{-a(l_2 + l_1)} \right] \left[\frac{(a + a_1)(a_1 - a_2) + (a - a_1)(a_2 + a_1)e^{2a_1 c}}{(a - a_1)(a_1 - a_2) + (a + a_1)(a_2 + a_1)e^{2a_1 c}} \right] \Bigg\} \Bigg) da \end{aligned} \tag{88}$$

Για να βρούμε την εμπέδηση του πηνίου ελεύθερο στον αέρα αρκεί να θέσουμε $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, οπότε

$$Z_{air} = \frac{2j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^5} I^2(r_2, r_1) \left((l_2 - l_1) + \frac{1}{a} \left\{ e^{-a(l_2 - l_1)} - 1 \right\} \right) da \tag{89}$$

Για να βρούμε την μεταβολή της εμπέδησης λόγω των δινορευμάτων σε ημιάπειρη πλάκα θέτουμε $a_2=a_1$ και έχουμε

$$\Delta Z_\infty = Z - Z_{air} = \frac{j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^6} I^2(r_2, r_1) \left(e^{-al_1} - e^{-al_2} \right)^2 \left(\frac{a - a_1}{a + a_1} \right) da \tag{90}$$

Ενώ στην περίπτωση που η πλάκα είναι πεπερασμένου πάχους c, θέτουμε $a_2=a$ και έχουμε

$$\Delta Z_c = Z - Z_{air} = \frac{j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^6} I^2(r_2, r_1) \left(e^{-al_1} - e^{-al_2} \right)^2 \left(\frac{({a_1}^2 - a^2)(1 - e^{2a_1 c})}{(a - a_1)^2 + (a + a_1)^2 e^{2a_1 c}} \right) da \tag{91}$$

2.2.5 Προσεγγιστική λύση με ανάπτυξη σε σειρά

Έως τώρα η αντιμετώπιση του προβλήματος έγινε με αναλυτικό τρόπο θεωρώντας άπειρη την περιοχή λύσης στην ακτινική κατεύθυνση. Για να γίνει ανάπτυξη σε σειρά θα θεωρηθεί μία πεπερασμένη περιοχή λύσης ($0<r<b$) και ομογενής Dirichlet συνθήκες στο $r=b$ [4]. Βασιζόμενοι στην ανάπτυξη σε ιδιοσυναρτήσεις της Bessel συνάρτησης η ολοκληρωτική έκφραση της εμπέδησης μετατρέπεται σε ανάπτυξη σε σειρά και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των Bessel συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{92}$$

η εμπέδηση του πηνίου γίνεται

$$Z_{air} = \frac{2j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I^2(r_2, r_1, q_i)}{{q_i}^5 [(q_i b) J_0(q_i b)]^2} 2\left(q_i (l_2 - l_1) + e^{-q_i (l_2 - l_1)} - 1 \right) \tag{93}$$

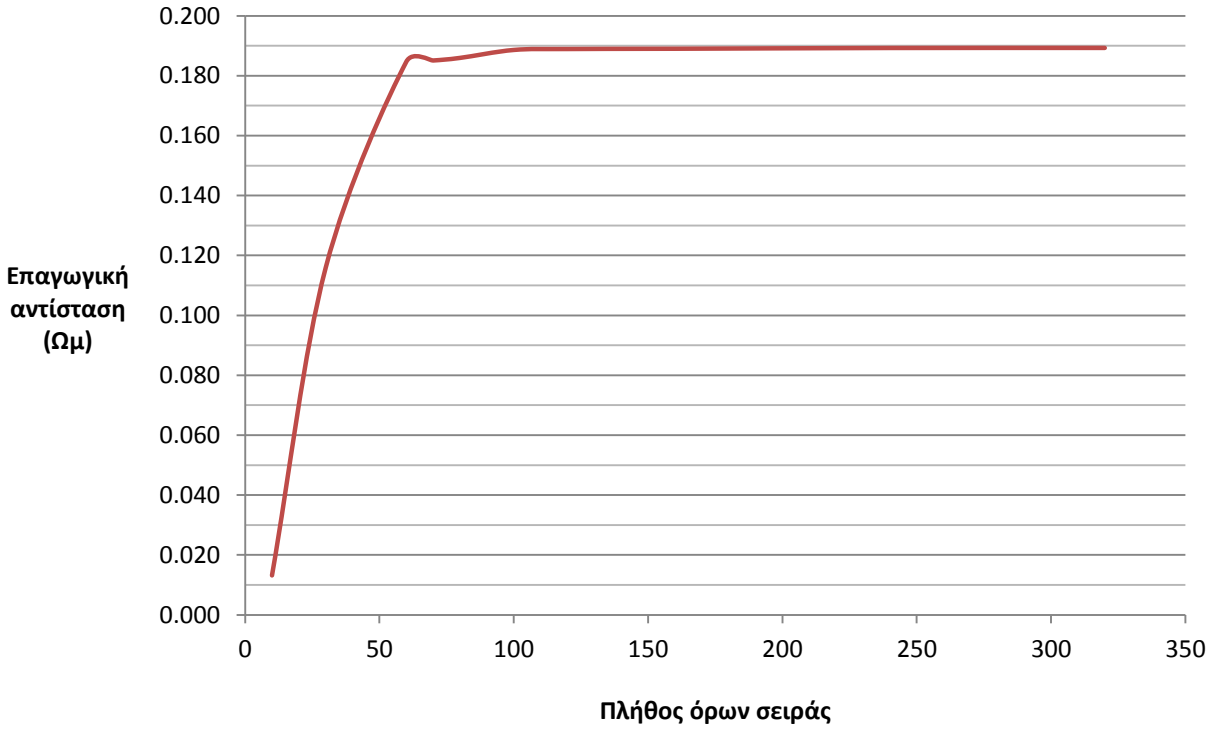
$$\Delta Z_\infty = \frac{2j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I^2(r_2, r_1, q_i)}{{q_i}^5 [(q_i b) J_0(q_i b)]^2} \left(e^{-q_i l_1} - e^{-q_i l_2} \right)^2 \left(\frac{q_i - a_i}{q_i + a_i} \right) \tag{94}$$

$$\Delta Z_c = \frac{2j\omega\pi\mu n^2}{(l_2 - l_1)^2 (r_2 - r_1)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I^2(r_2, r_1, q_i)}{{q_i}^5 [(q_i b) J_0(q_i b)]^2} \left(e^{-q_i l_1} - e^{-q_i l_2} \right)^2 \left(\frac{({a_i}^2 - {q_i}^2)(1 - e^{2a_i c})}{(q_i - a_i)^2 + (q_i + a_i)^2 e^{2a_i c}} \right) \tag{95}$$

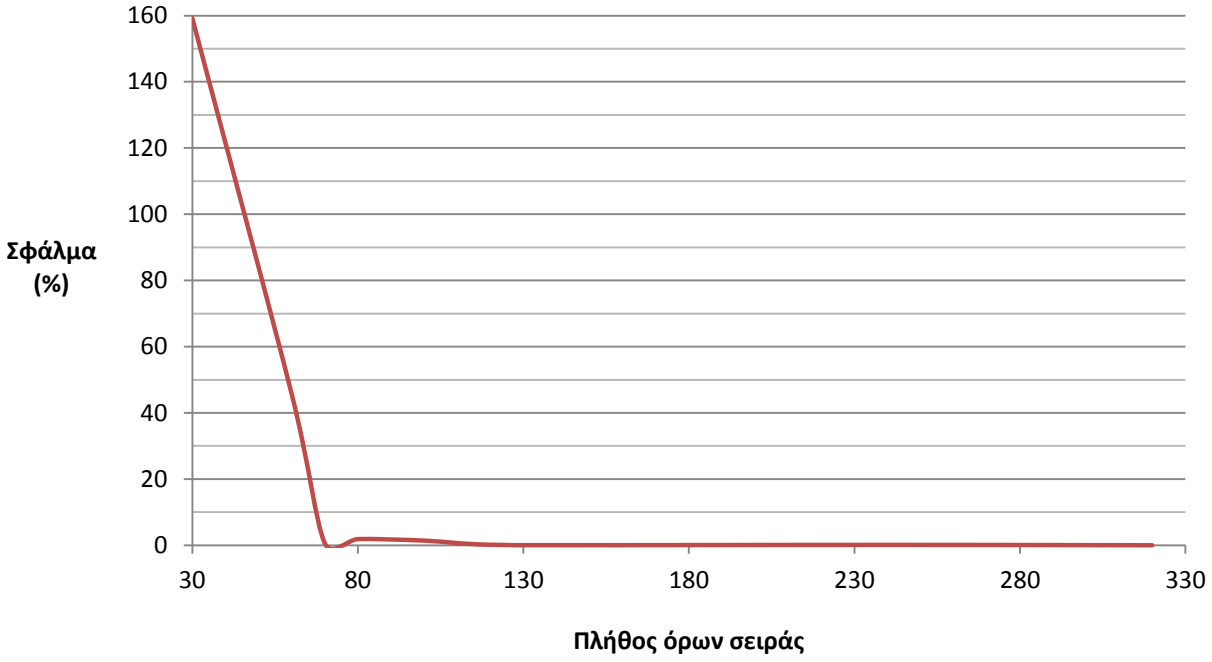
όπου οι τιμές του q_i μπορούν να υπολογιστούν από την λύση των ιδιοτιμών του προβλήματος $J_1(x_i) = 0$ με $q_i = \frac{x_i}{b}$ [4].

2.2.6 Σύγκλιση σειράς

Η μελέτη της σύγκλισης της αναλυτικής λύσης έγινε με βάση τη σύγκλιση της τιμής της επαγωγικής αντίστασης στον αέρα αυξάνοντας όλο και περισσότερο τους όρους της σειράς.



Διάγραμμα 2.1 Σύγκλιση της επαγωγικής αντίστασης στα 10 kHz



Διάγραμμα 2.2 Η σύγκλιση της μεθόδου

Η μέθοδος ουσιαστικά έχει συγκλίνει ήδη από τους 120 όρους. Για να εξασφαλίσουμε μία ασφάλεια για τους υπολογισμούς μας παρακάτω θα χρησιμοποιηθούν 160 όροι. Η σύγκλιση της μεθόδου ακολουθεί ακριβώς την ίδια εξέλιξη για οποιαδήποτε τιμή της συχνότητας έως και το 1MHz.

Κεφάλαιο 3:

Αριθμητική επίλυση προβλημάτων και σύγκριση με θεωρητικές λύσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει η μελέτη ειδικών περιπτώσεων προβλημάτων δινορευμάτων με ανάπτυξη σειρών που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο καθώς και με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Κύριος στόχος είναι ο υπολογισμός της εμπέδησης πηνίου υπό διάφορες συνθήκες, η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων προσέγγισης, καθώς και κάποια πιο εξειδικευμένα προβλήματα εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες που μας παρέχουν οι υπολογιστικές μέθοδοι.

3.1 Προβλήματα δινορευμάτων αξονικής συμμετρίας δύο διαστάσεων

Αξιοποιώντας την αξονική συμμετρία πηνίου είναι δυνατή η επίλυση μεγάλου μέρους προβλημάτων μειώνοντας σημαντικά το υπολογιστικό κόστος και αυξάνοντας την ακρίβεια της λύσης.

3.1.1 Ορίζοντας τη γεωμετρία των προβλημάτων, τις φυσικές ιδιότητες και παραμέτρους του

Στα προβλήματα αξονικής συμμετρίας χρησιμοποιήθηκαν 3 διαφορετικές γεωμετρίες:

- Πηνίο ελεύθερο στον αέρα
- Πηνίο πάνω από ημιάπειρη (πολύ παχιά) πλάκα
- Πηνίο πάνω από πεπερασμένου πάχους πλάκα.

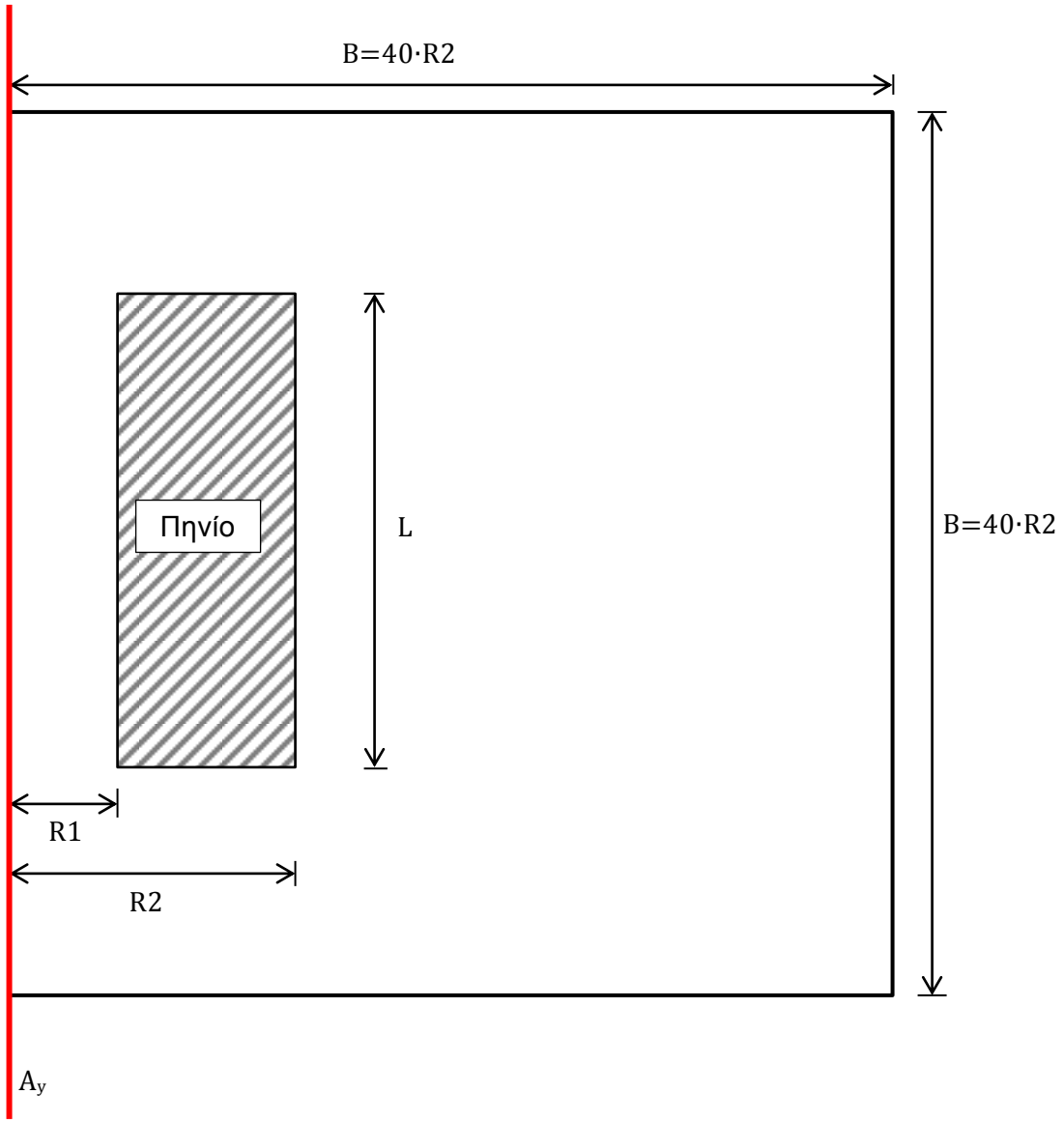
Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, μεταβλητή είναι η απόσταση του πηνίου από την πλάκα καθώς επίσης και το πάχος της πλάκας για την τρίτη περίπτωση μόνο.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου επιλέχθηκαν να είναι τα ίδια με αυτά από τον υπολογισμό των αναλυτικών λύσεων ώστε να είναι άμεσα συγκρίσιμα τα αποτελέσματα. Το πηνίο θεωρήθηκε τετράγωνης διατομής μιας και αυτή προσεγγίζει πολύ καλά ένα πηνίο με μεγάλο αριθμό σπειρών.

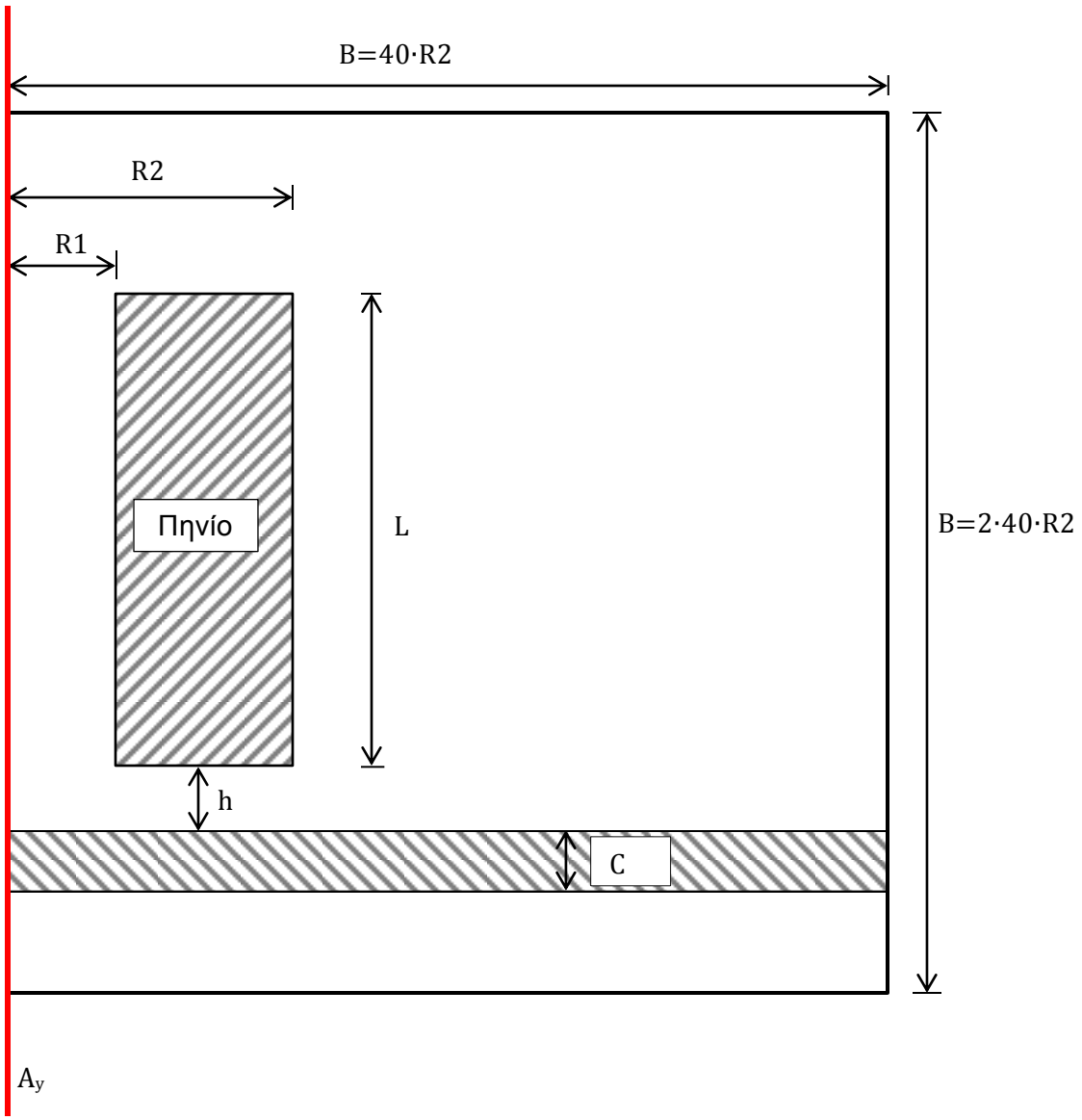
	Τιμή (mm)
Εσωτερική ακτίνα πηνίου (R1)	2
Εξωτερική ακτίνα πηνίου (R2)	5
Ύψος πηνίου (L)	12
Αριθμός βρόχων	36

Πίνακας 3.1 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά πηνίου

Επίσης οι διαστάσεις του χωρίου μέσα στο οποίο βρίσκεται το πηνίο είναι αρκετά μεγάλες ώστε τα αποτελέσματα να μην επηρεαστούν από πιθανές απώλειες ή αποκλίσεις λόγω των ορίων του προβλήματος.



Εικόνα 3.1 Η γεωμετρία του προβλήματος για τα πεπερασμένα στοιχεία



Εικόνα 3.2 Η γεωμετρία του προβλήματος σε πεπερασμένη πλάκα

Στο πρόβλημα δύο διαστάσεων αξονικής συμμετρίας που μελετάμε δύο είναι οι φυσικές παράμετροι που μας ενδιαφέρουν. Η βασικότερη είναι η συχνότητα του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο η οποία ευθύνεται και για τον σχηματισμό των δινορευμάτων. Έχει επιλεχθεί ένα αρκετά μεγάλο εύρος τιμών, από 1 kHz έως και 1MHz. Ακριβώς λόγω της υψηλής συχνότητας του ρεύματος στο πηνίο παρουσιάζεται το skin effect, δηλαδή η συγκέντρωση του μεγαλύτερου μέρους της ροής του ρεύματος περιμετρικά του πηνίου. Για την αποφυγή του φαινομένου, ώστε να γίνεται αξιόπιστα η σύγκριση μεταξύ των μεθόδων, επιλέχθηκε πολύ υψηλή ηλεκτρική αντίσταση για το πηνίο χωρίς όμως αυτή να επηρεάζει την μέτρηση για την μεταβολή της εμπέδησης λόγω των επαγόμενων ρευμάτων.

Η δεύτερη φυσική παράμετρος του προβλήματος είναι η αγωγιμότητα της πλάκας. Η πλάκα απαιτείται να είναι αγώγιμη, ώστε να δημιουργούνται τα δινορεύματα τα οποία εξετάζουμε. Η αγωγιμότητα συγκεκριμένων αντιπροσωπευτικών υλικών επιλέχθηκε ώστε τα αποτελέσματα να ανταποκρίνονται σε ρεαλιστικές συνθήκες.

3.1.2 Προετοιμασία υπολογιστικής προσομοίωσης

Ο τύπος της υπολογιστικής προσομοίωσης που θέλουμε να υλοποιήσουμε αφορά την παραγωγή επαγόμενων ρευμάτων προερχόμενα από αρμονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Επειδή η γεωμετρία ικανοποιεί την αξονική συμμετρία ο κατάλληλος τύπος της προσομοίωσης περιλαμβάνει την μοντελοποίηση του πηνίου στο επίπεδο rz και την χρήση αξονοσυμμετρίας με αρμονικά παραγόμενα ρεύματα (Axisymmetric Quasi-statics Azimuthal Currents with time-harmonic formulation). Σε αυτή την περίπτωση γίνεται η επίλυση της θ συντεταγμένης του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση [5]:

$$(j\omega\sigma - \omega^2\varepsilon)A_\theta + \nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times A_\theta) = \frac{\sigma V_{loop}}{2\pi r}$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι στον άξονα r αξονική συμμετρία, στα εξωτερικά σύνορα μαγνητική μόνωση, δηλαδή $\mathbf{A}=0$ και στο σύνορο πηνίου-αέρα και πλάκας-αέρα συνέχεια του μαγνητικού δυναμικού.

Καθώς μας ενδιέφερε η μελέτη των φαινομένων για ένα εύρος συχνοτήτων, αυτή δόθηκε ως παράμετρος. Η αγωγιμότητα του υλικού του πηνίου δόθηκε ίση με 1 $\mathrm{S/m}$, πάρα πολύ χαμηλή (μέταλλα $\sim 10^7$) για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Το δυναμικό που εφαρμόστηκε στο πηνίο δόθηκε αυθαίρετα ίσο με 1, αφού το μετρούμενο μέγεθος, η εμπέδηση, εξαρτάται μόνο από τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου. Για την αγωγιμότητα της πλάκας δόθηκε ένα εύρος τιμών από ~2 έως ~60 $\mathrm{MS/m}$ ενώ η μαγνητική διαπερατότητα ορίστηκε στο $1.01\mu_0$ όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

3.1.3 Επεξεργασία αποτελεσμάτων υπολογιστικής προσομοίωσης

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η επίλυση του προβλήματος γίνεται για το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό. Δεν υπάρχει κάποιο εργαλείο ώστε να γίνεται άμεσα ο υπολογισμός της εμπέδησης του πηνίου. Μας παρέχεται όμως η πυκνότητα της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου σύμφωνα με τον παρακάτω ισότητα [5]

$$w_{mav} = \frac{1}{4} Re(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}^*)$$

πολλαπλασιάζοντας με $2\pi\mathrm{r}$ και ολοκληρώνοντας σε όλο τον χώρο της προσομοίωσης έχουμε

$$W_m' = \int_A 2\pi r w_{mav} dA = \int_A 2\pi r \frac{1}{4} Re(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}^*) dA = \frac{1}{4} \int_A 2\pi r Re(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}^*) dA =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2} \int_A 2\pi r Re(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}^*) dA = \frac{1}{2} W_m$$

Όμως επίσης ισχύει για την ενέργεια ενός πηνίου [1]

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \Leftrightarrow 2W_m' = \frac{1}{2} L I^2 \Leftrightarrow L = \frac{4W_m'}{I^2}$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε την επαγωγική αντίσταση X του πηνίου σύμφωνα με την σχέση

$$X = \omega L = 2\pi f L = 2\pi f \frac{W_m}{I^2}$$

Αντίστοιχα για να υπολογίσουμε την ωμική αντίσταση του πηνίου μας δίνεται η μέση θερμική ενέργεια λόγω αντίστασης Q_{av} και κάνοντας αντίστοιχους υπολογισμούς καταλήγουμε σε

$$R = \frac{2Q}{I^2}$$

όπου

$$Q = \int_A 2\pi r Q_{av} dA$$

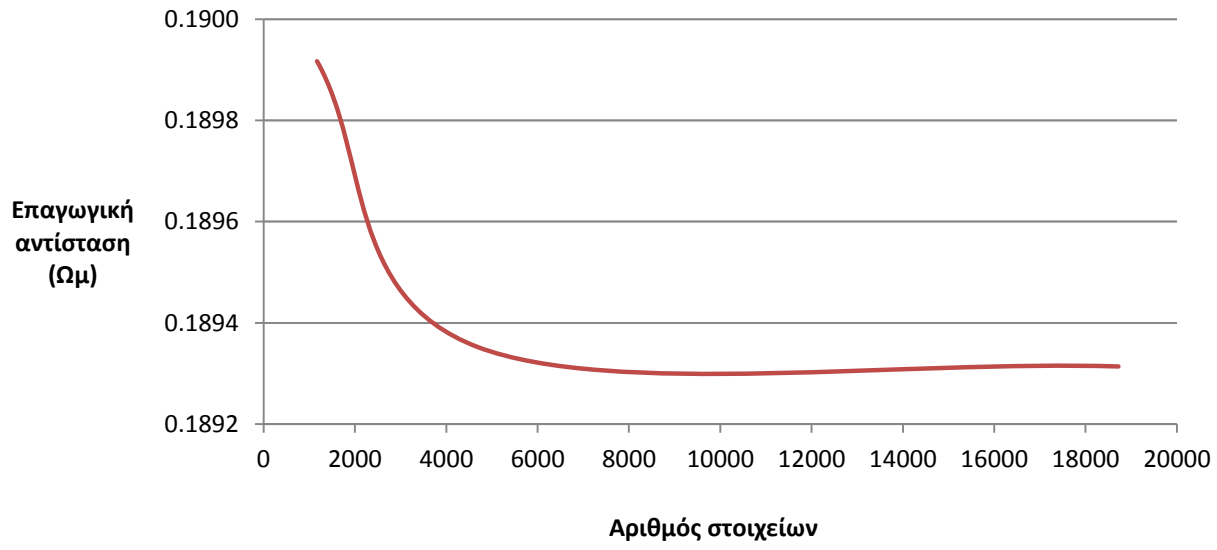
Το συνολικό ρεύμα I υπολογίζεται αν ολοκληρώσουμε τον πυκνότητα του ρεύματος ως προς την θ συντεταγμένη, J_{phi}, δηλαδή

$$I = \int_A 2\pi r J_{phi} dA$$

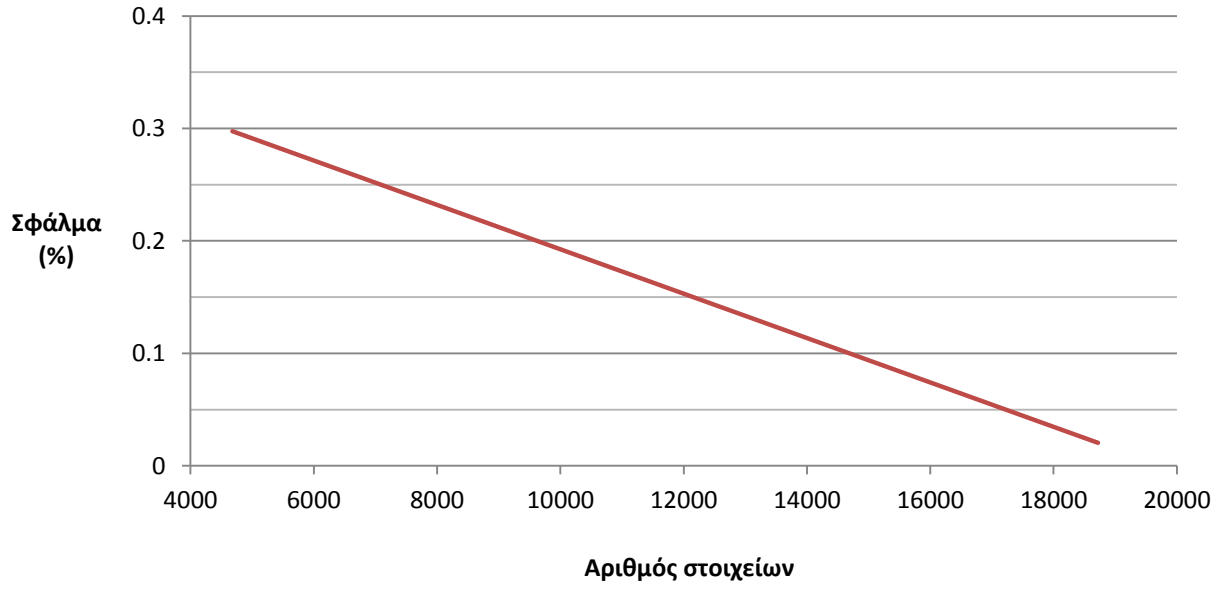
3.1.4 Σύγκλιση της λύσης και πυκνότητα καμβά

Η μελέτη της σύγκλισης της υπολογιστικής προσομοίωσης έγινε για την τιμή της επαγωγικής αντίστασης του πηνίου στον αέρα αυξάνοντας σταδιακά την πυκνότητα του καμβά. Για την δημιουργία του καμβά επιλέχθηκε η αυτόματη διακριτοποίηση της γεωμετρίας μέσω της έτοιμης λειτουργίας που παρείχε το πρόγραμμα. Για την περαιτέρω

πύκνωση του πλέγματος χρησιμοποιήθηκε και πάλι μία ενσωματωμένη λειτουργία του προγράμματος.



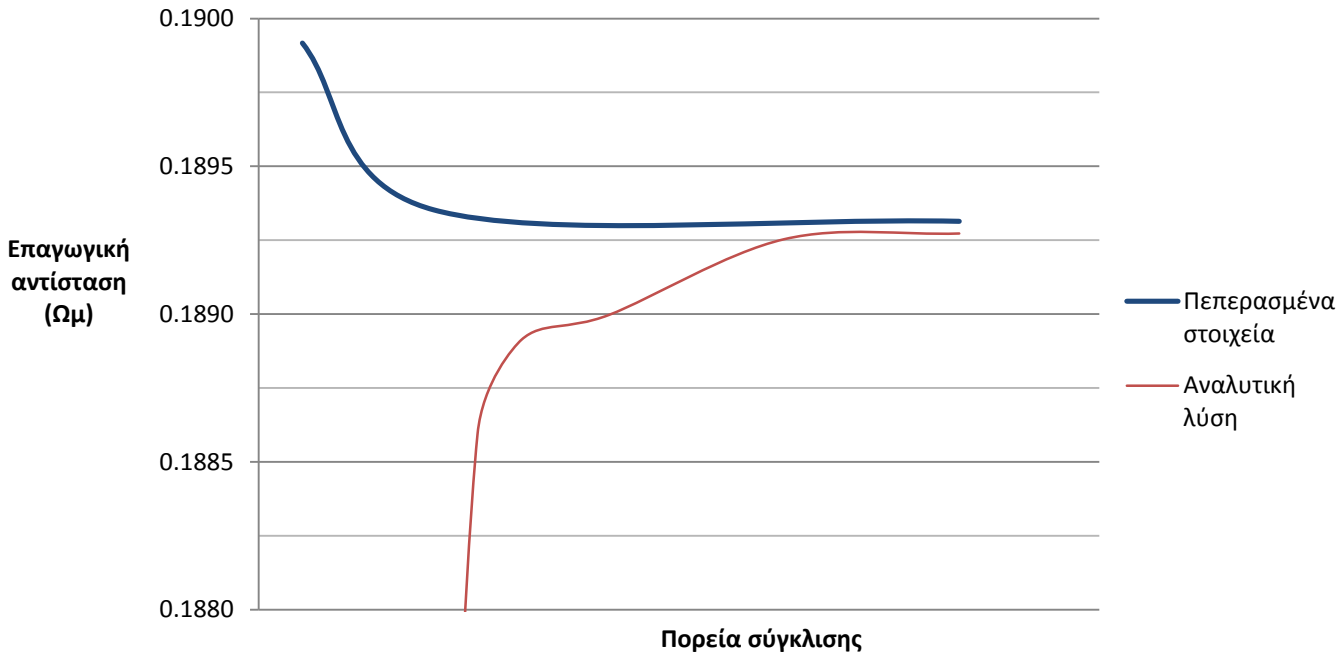
Διάγραμμα 3.1 Σύγκλιση της επαγωγικής αντίστασης στα 10 kHz



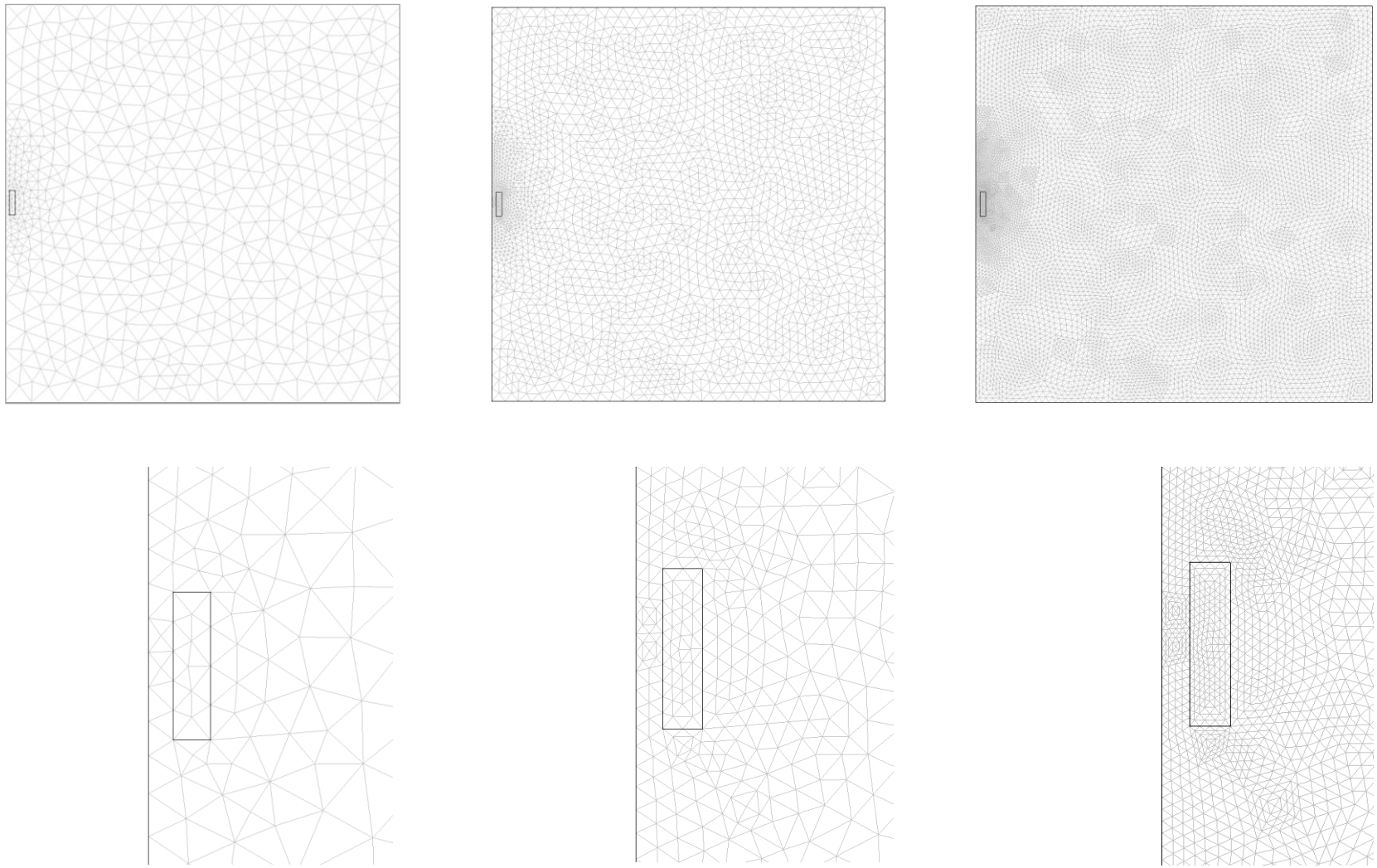
Διάγραμμα 3.2 Η σύγκλιση της μεθόδου

Όπως παρατηρείται η μέτρηση της επαγωγής του πηνίου ήδη από την αρχική διακριτοποίηση έδωσε αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα. Εκτελώντας ένα βήμα παραπέρα την πύκνωση του πλέγματος καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακρίβεια της λύσης είναι αρκετά μεγάλη ώστε περαιτέρω αύξηση του πλήθους των στοιχείων και παράλληλα του υπολογιστικού κόστους να μην είναι απαραίτητη.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το παρακάτω διάγραμμα στο οποίο φαίνεται η σύγκλιση των δύο μεθόδων με την μία να συγκλίνει στην τιμή της άλλης.



Διάγραμμα 3.3 Συγκριτική πορεία σύγκλισης των δύο λύσεων



Εικόνα 3.3 Τα τρία διαφορετικά πλέγματα με 1170, 4680, 18720 στοιχεία

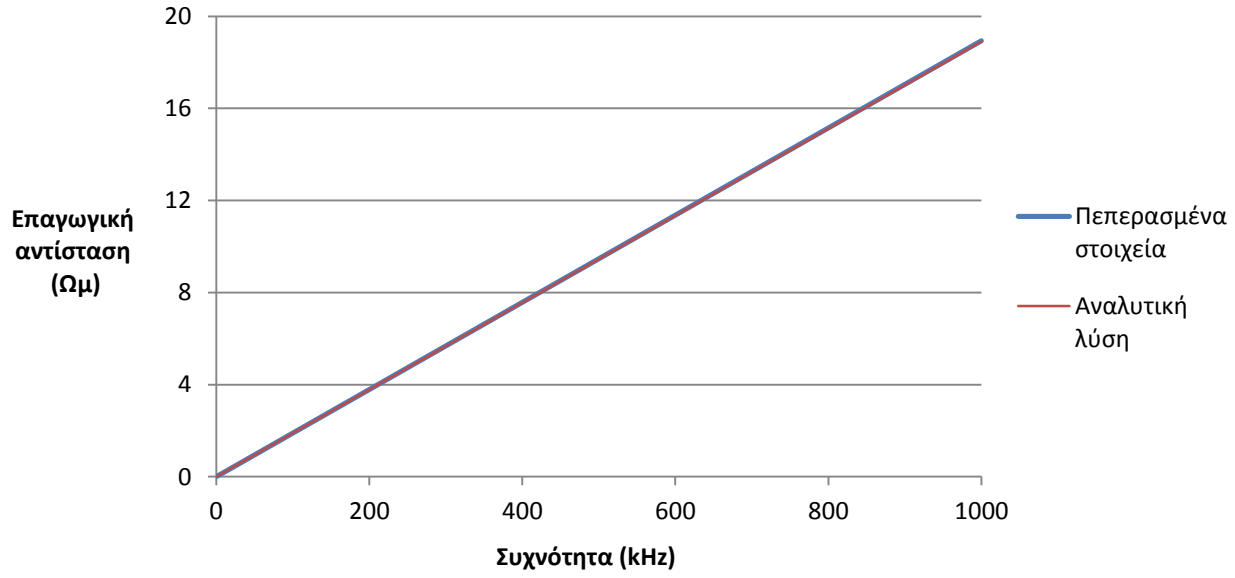
3.1.5 Πηνίο στον αέρα

Η χρησιμότητα της προσομοίωσης ενός ελεύθερου πηνίου στον αέρα έγκειται στο γεγονός ότι θα ληφθούν κάποιες αρχικές τιμές για την εμπέδησή του, ώστε στις επόμενες προσομοιώσεις να είναι μετρήσιμες οι αλλαγές της για τις διαφορετικές παραμέτρους του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αν και η αναλυτική λύση του προβλήματος όσο και η υπολογιστική προσφέρουν την δυνατότητα άμεσου υπολογισμού του φανταστικού μέρους της εμπέδησης του πηνίου (επαγωγική αντίσταση X), το πραγματικό μέρος της εμπέδησης (ωμική αντίσταση R) υπολογισμένο από τις δύο μεθόδους δεν είναι άμεσα συγκρίσιμο, γιατί όπως αναφέρθηκε παραπάνω επιλέχθηκε αγωγός ασυνήθιστα υψηλής αντίστασης, ώστε να αποκλειστεί το skin effect. Έτσι λοιπόν η σύγκριση ανάμεσα στις δύο μεθόδους θα γίνει στην μεταβολή της αντίστασης την οποία προκαλούν τα δινορεύματα και όχι στην απόλυτη τιμή αυτής.

Στον επόμενο πίνακα παρατίθενται οι τιμές της επαγωγικής αντίστασης και κάτω από αυτόν το αντίστοιχο διάγραμμα.

Συχνότητα	1 kHz	5 kHz	10 kHz	50 kHz	100 kHz	500 kHz	1 MHz
Πεπερασμένα στοιχεία	0.01894	0.09468	0.18935	0.94676	1.89353	9.46763	18.93527
Αναλυτική λύση	0.01890	0.09450	0.18900	0.94499	1.88997	9.44986	18.89972
Απόκλιση (%)	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19

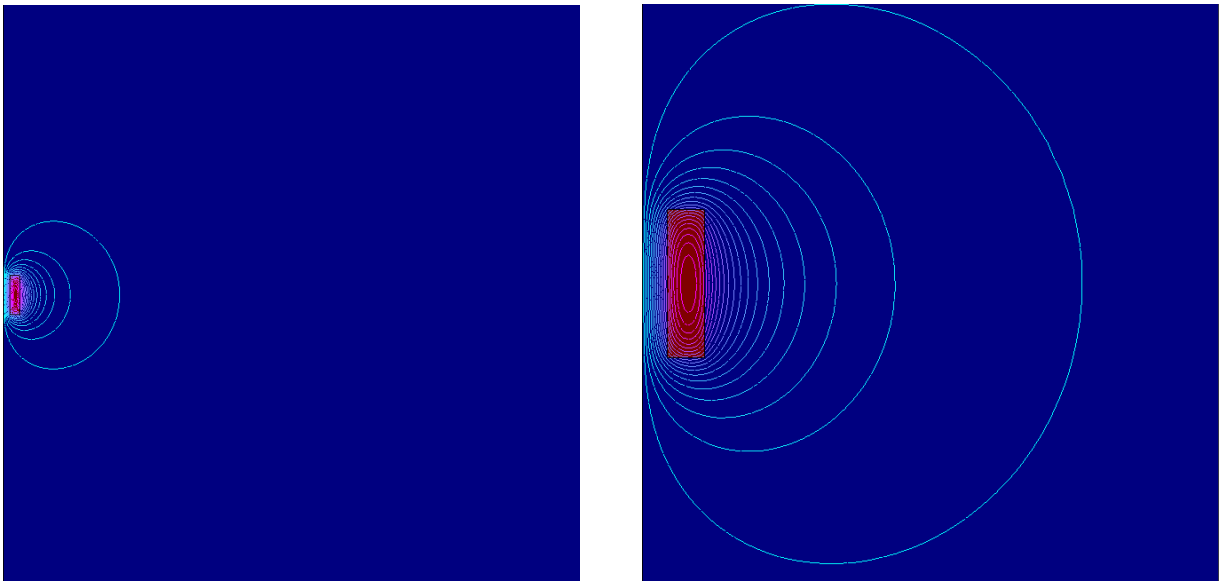
Πίνακας 3.2 Τιμές της επαγωγικής αντίστασης σε Ωμ



Διάγραμμα 3.4 Η επαγωγική αντίσταση στον αέρα

Όπως φαίνεται η απόκλιση των δύο μεθόδων είναι ελάχιστη, πολύ μικρότερη του 1% σε όλο το εύρος των συχνοτήτων. Για την ακρίβεια στο διάγραμμα της επαγωγικής αντίστασης

δεν είναι καν ορατές οι δύο διαφορετικές λύσεις, αφού συμπίπτει η μία πάνω στην άλλη. Το γεγονός αυτό αποτελεί μία αρχική ένδειξη της αξιοπιστίας τόσο της αναλυτικής λύσης όσο και της υπολογιστικής προσομοίωσης που κατασκευάστηκε.



Εικόνα 3.4 Ποιοτικό διάγραμμα του μαγνητικού δυναμικού σε όλο το χωρίο της προσομοίωσης και σε μεγέθυνση κοντά στο πηνίο

3.1.6 Πηνίο πάνω από ημιάπειρη πλάκα

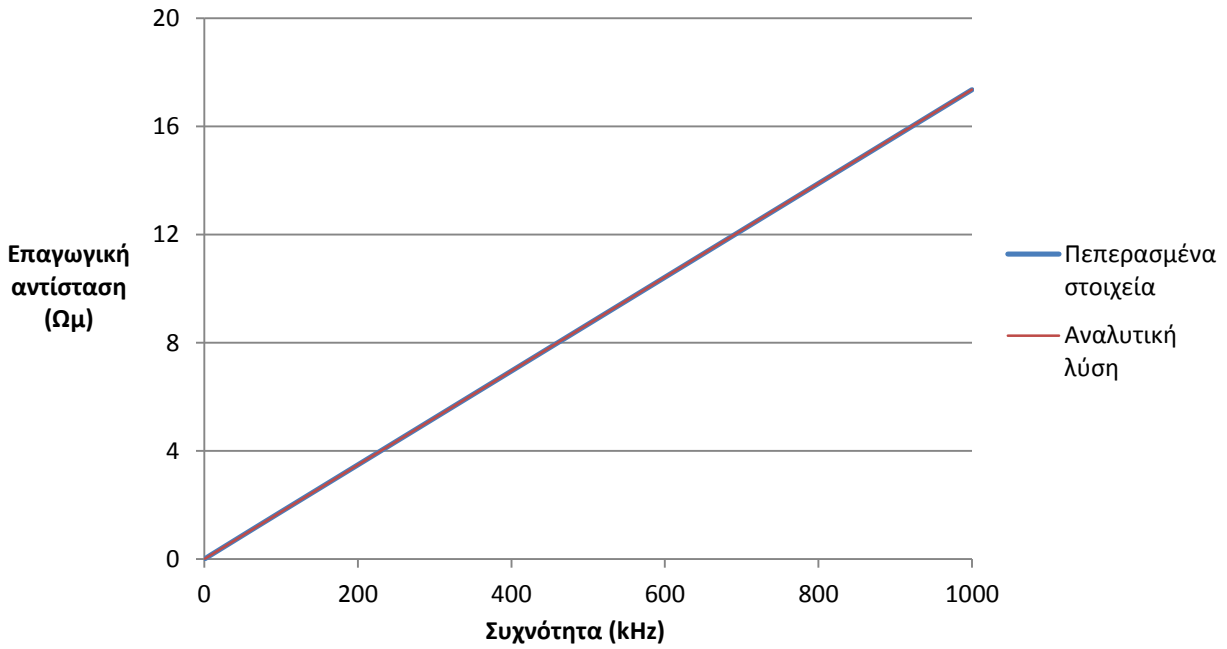
Στην περίπτωση όπου ένα πηνίο βρίσκεται πάνω από μία πλάκα πολύ μεγάλου πάχους, ώστε αυτή να θεωρείται πρακτικά άπειρη, δύο είναι οι παράμετροι σύμφωνα με τις οποίες θα μελετηθεί η μεταβολή της εμπέδησης του αισθητήρα. Αυτές είναι η απόσταση από την πλάκα και η αγωγιμότητα του υλικού της πλάκας.

Στον επόμενο πίνακα παρατίθενται οι τιμές της επαγωγικής αντίστασης και κάτω από αυτόν το αντίστοιχο διάγραμμα.

Στον παρακάτω πίνακα και διάγραμμα βλέπουμε μια πρώτη σύγκριση μεταξύ των δύο λύσεων, σε απόσταση 1 mm και αγωγιμότητα πλάκας 16.45 $\mathrm{MS/m}$.

Συχνότητα	1 kHz	5 kHz	10 kHz	50 kHz	100 kHz	500 kHz	1 MHz
Πεπερασμένα στοιχεία	0.01849	0.09017	0.17862	0.87942	1.75076	8.69005	17.35985
Αναλυτική λύση	0.01845	0.08996	0.17820	0.87749	1.74809	8.69366	17.36497
Απόκλιση (%)	0.22	0.23	0.23	0.22	0.15	0.04	0.03

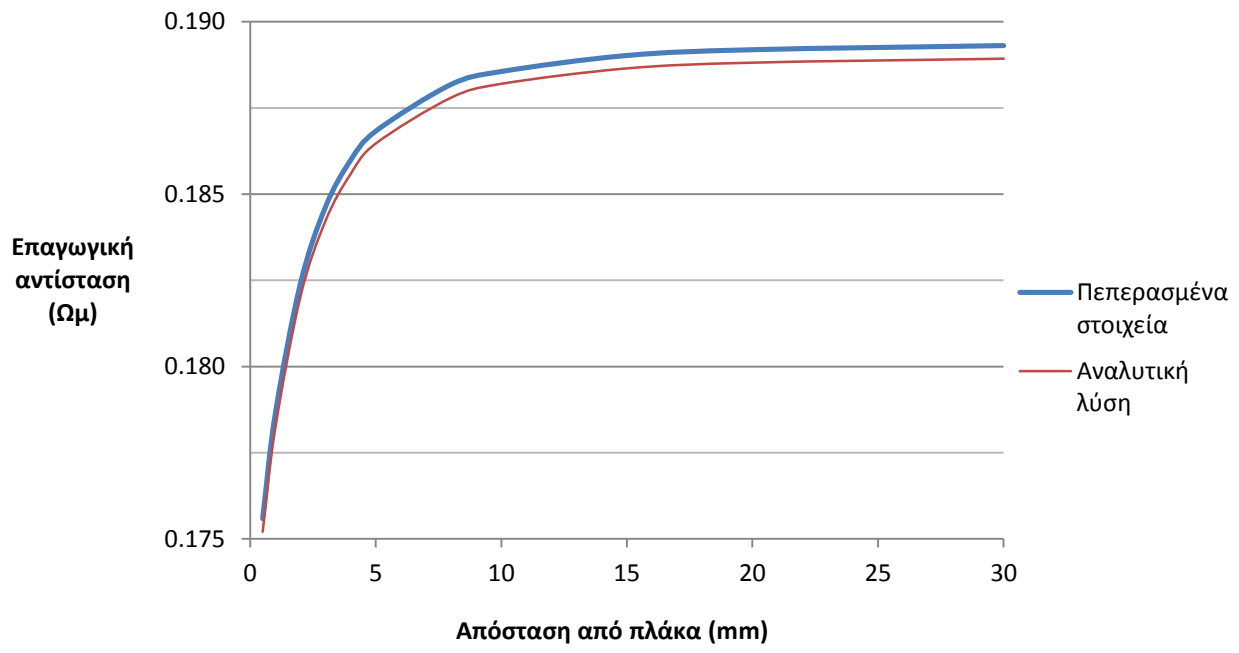
Πίνακας 3.3 Τιμές της επαγωγικής αντίστασης σε Ωμ



Διάγραμμα 3.5 Η επαγωγική αντίσταση σε απόσταση 1mm από την πλάκα και αγωγιμότητα πλάκας 16.45 MS/m

Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση οι δύο μέθοδοι συμφωνούν με μεγάλη ακρίβεια στα αποτελέσματά.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της εμπέδησης καθώς αλλάζει η απόσταση του πηνίου από την πλάκα. Πιθανή «ευαισθησία» της εμπέδησης ανάλογα με την απόσταση αποτελεί απόδειξη για την δυνατότητα χρήσης των αισθητήρων δινορευμάτων ως proximity sensors.



Διάγραμμα 3.6 Η επαγωγική αντίσταση στα 10 kHz

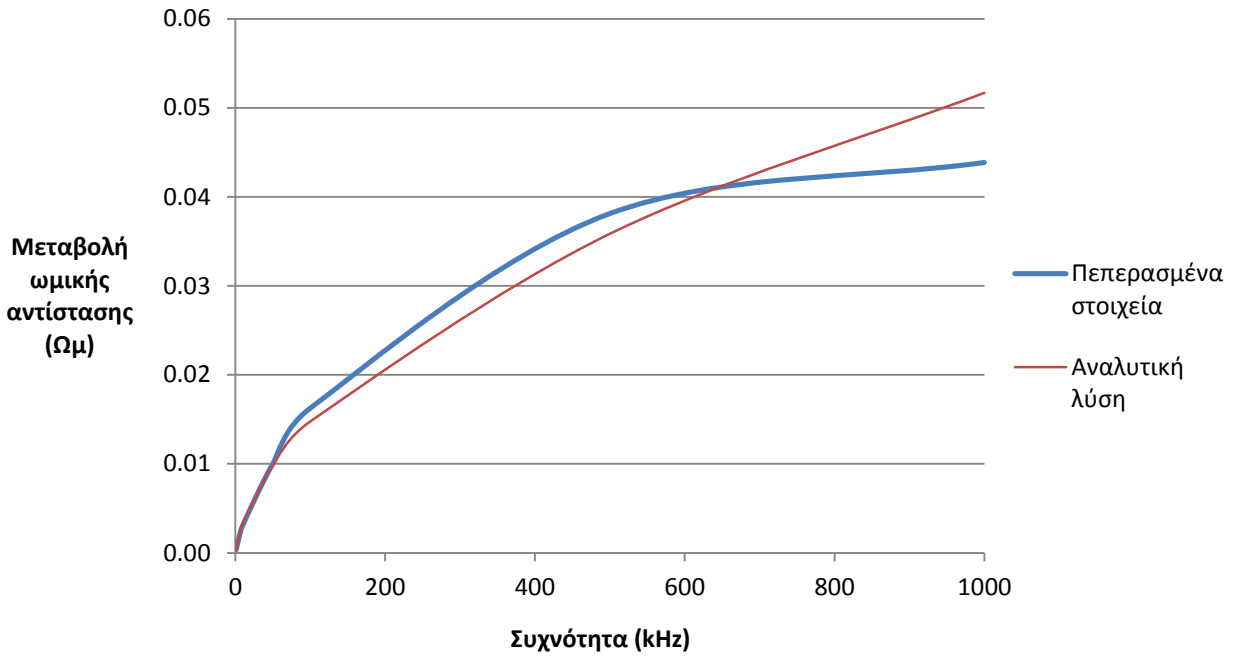
Για άλλη μια φορά η απόκλιση των λύσεων των δύο μεθόδων είναι πολύ μικρή, της τάξεως του 0.2% και φαίνεται να δίνουν πολύ καλά και αξιόπιστα αποτελέσματα. Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει σαφής σχέση ανάμεσα στην επαγωγική αντίσταση και την απόσταση του αισθητήρα από την πλάκα. Συγκεκριμένα στην απόσταση των 15 χιλιοστών ο αισθητήρας εμφανίζει να έχει μία απόκριση η οποία και γίνεται πολύ εντονότερη κάτω από τα 10 χιλιοστά.

Η εμφάνιση όμως των δινορευμάτων δεν επηρεάζει μόνο την επαγωγική αντίσταση του πηνίου, αλλά και το πραγματικό μέρος της εμπέδησης, δηλαδή την ωμική του αντίσταση. Επειδή όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο 3.1.5 δεν είναι δυνατή η άμεση σύγκριση της απόλυτης ωμικής αντίστασης του πηνίου, η σύγκριση των δύο μεθόδων θα γίνει στην μεταβολή της R που προκαλείται από τα δινορεύματα.

Στον επόμενο πίνακα παρατίθενται οι τιμές της μεταβολής της ωμικής αντίστασης και κάτω από αυτόν το αντίστοιχο διάγραμμα.

Συχνότητα	1 kHz	5 kHz	10 kHz	50 kHz	100 kHz	500 kHz	1 MHz
Πεπερασμένα στοιχεία	0.000332	0.001767	0.003130	0.010013	0.016263	0.038123	0.043860
Αναλυτική λύση	0.000365	0.001897	0.003323	0.009805	0.014768	0.035851	0.051680
Απόκλιση (%)	9.26	7.12	5.97	2.10	9.64	6.14	16.37

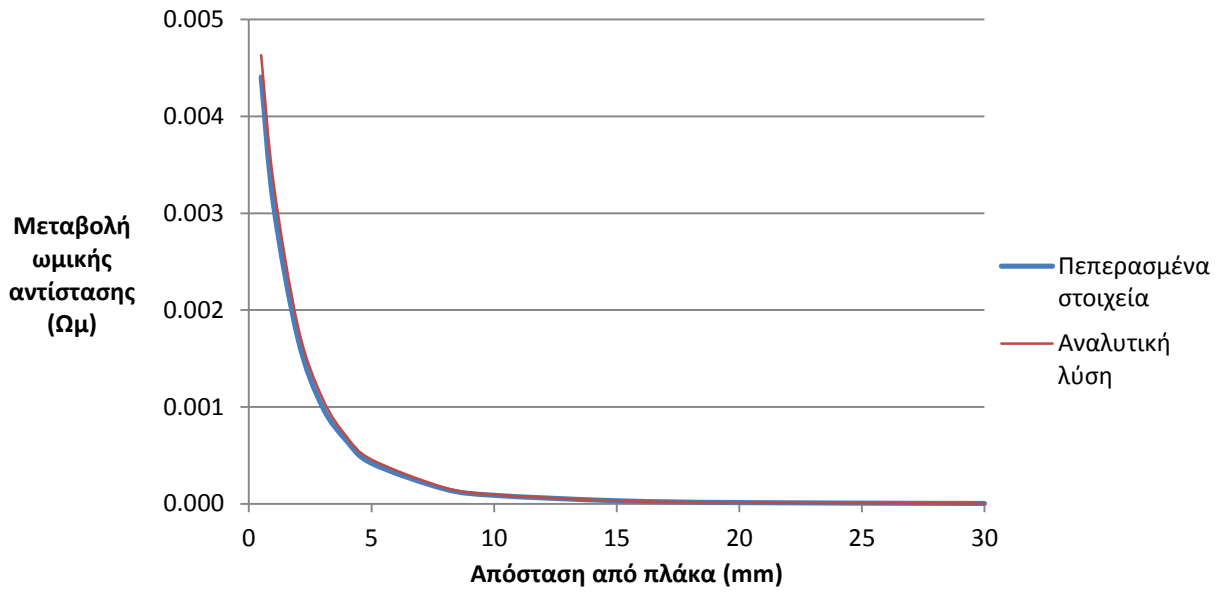
Πίνακας 3.4 Τιμές της ωμικής αντίστασης σε Ωμ



Διάγραμμα 3.7 Η μεταβολή της ωμικής αντίστασης σε απόσταση 1mm από την πλάκα και αγωγιμότητα πλάκας 16.45 MS/m

Σε αυτή την περίπτωση οι δύο μέθοδοι φαίνεται να έχουνε κάποιες σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματά τους. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο καθώς παρ' όλα τα «μέτρα» που πάρθηκαν για να μειωθεί το skin effect, αυτό κάνει την εμφάνισή του σε τέτοιο βαθμό ώστε να αλλάζει τις μετρήσεις της ωμικής αντίστασης, η οποία επηρεάζεται πολύ περισσότερο από αυτό το φαινόμενο εν αντιθέσει με την επαγωγική αντίσταση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά της ωμικής αντίστασης καθώς ένας αισθητήρας πλησιάζει ένα αγώγιμο υλικό.



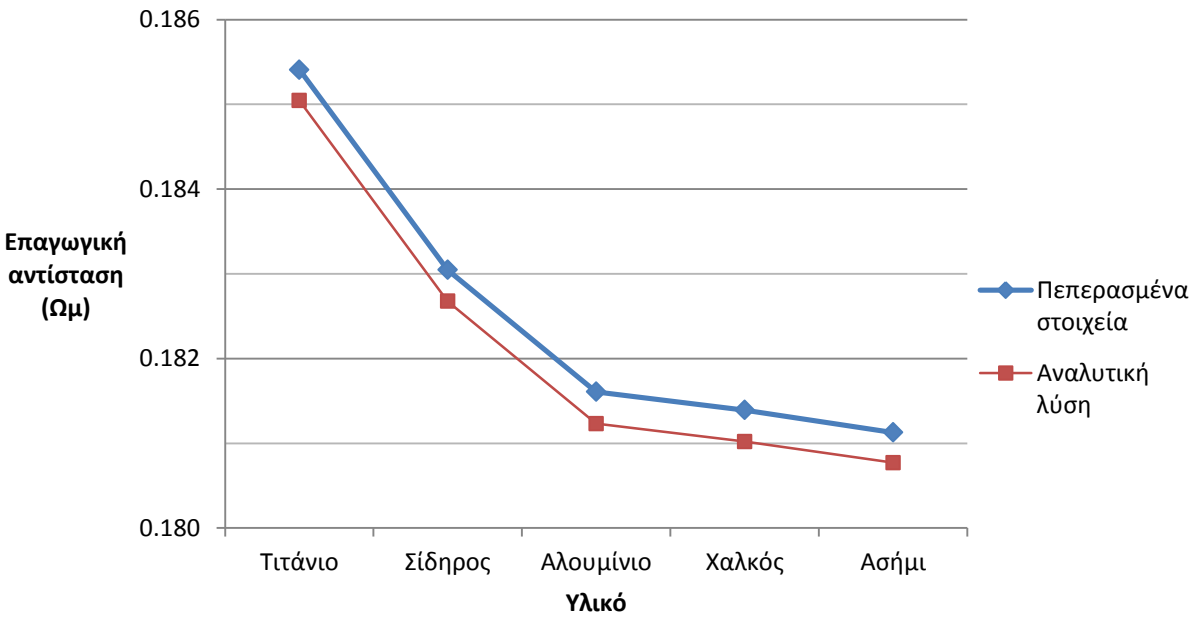
Διάγραμμα 3.8 Η μεταβολή της ωμικής αντίστασης στα 10 kHz

Σε αντίθεση με την επαγωγική αντίσταση, η οποία μειώνεται όσο πλησιάζουμε κάποιο αγώγιμο υλικό, η ωμική αντίσταση αυξάνεται. Έως τα 15 χιλιοστά δεν υπάρχει κάποια μεταβολή της αντίστασης, από κει και πέρα όμως υπάρχει μια αλλαγή η οποία γίνεται πλέον πολύ εντονότερη κάτω από τα 10 χιλιοστά. Παρ' όλα αυτά οι δύο μέθοδοι έχουνε μια απόκλιση στις προβλέψεις τους κατά 5-8%.

Η επόμενη φυσική παράμετρος του προβλήματος που εξετάζεται είναι η αγωγιμότητα της πλάκας. Η μελέτη θα γίνει για υλικά ποικίλης αγωγιμότητας.

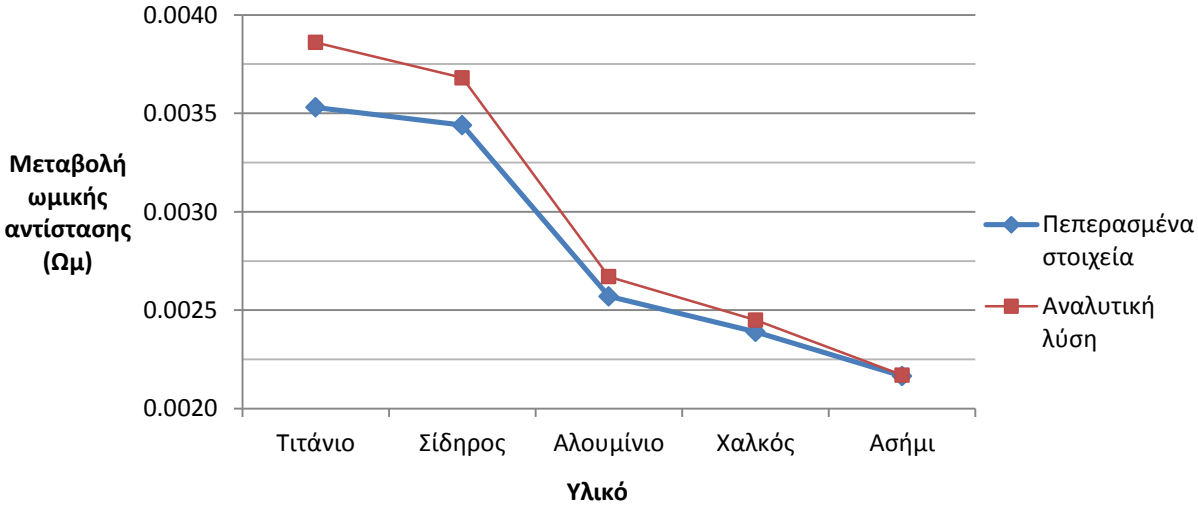
Υλικό	Αγωγιμότητα (MS/m)
Τιτάνιο	2.38
Σίδηρος	10
Αλουμίνιο	35
Χαλκός	45
Ασήμι	63

Πίνακας 3.5 Λίστα με τα υλικά και την αντίστοιχη αγωγιμότητά τους



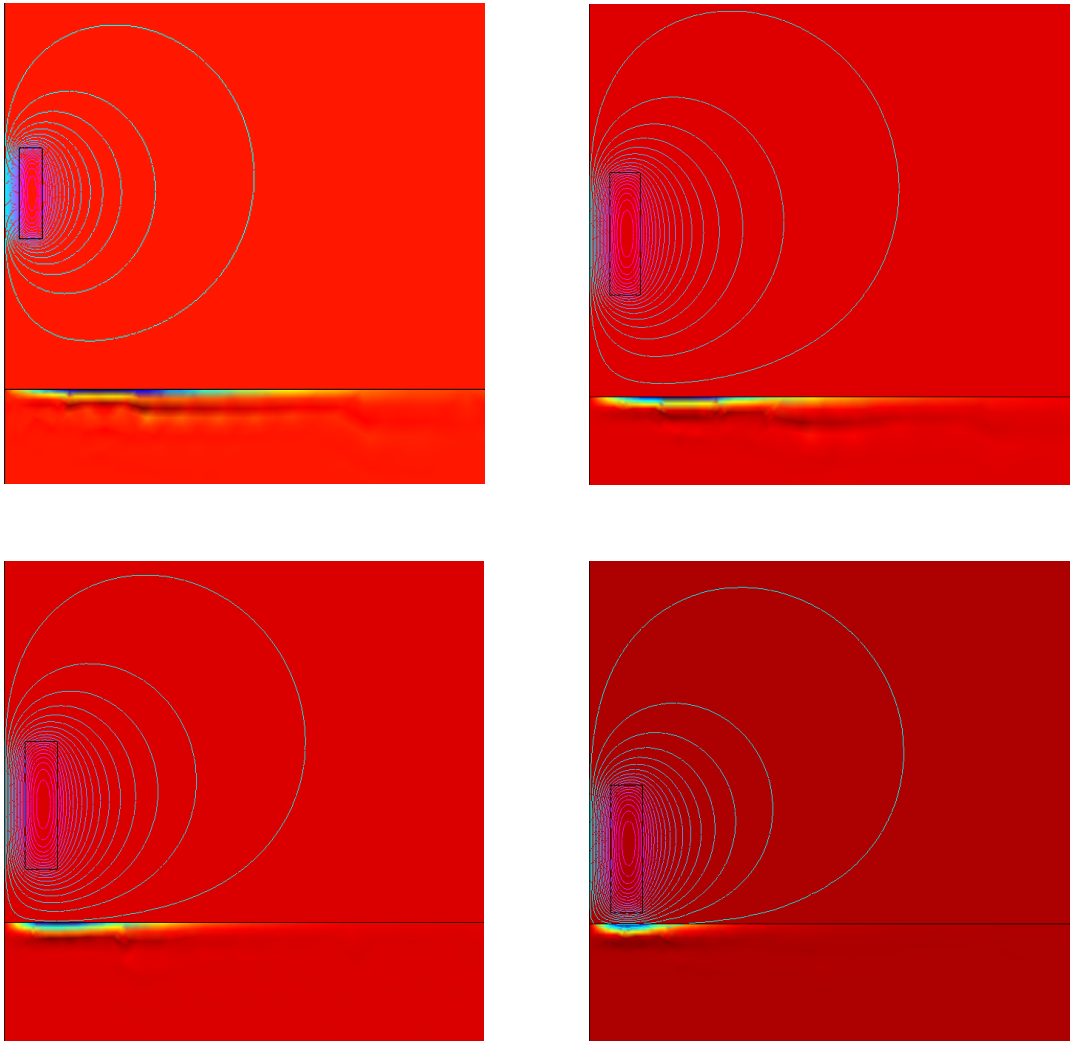
Διάγραμμα 3.9 Η επαγωγική αντίσταση για τα διάφορα υλικά της πλάκας στα 10 kHz

Οι προβλέψεις της αντίστασης και των δύο μεθόδων φαίνεται και πάλι σχεδόν να ταυτίζονται. Η απόκλισή τους βρίσκεται σταθερά γύρω από το 0.2% όπως και στις προηγούμενες δοκιμές. Παρατηρούμε ότι με την αύξηση της αγωγιμότητας της πλάκας μειώνεται η επαγωγική αντίσταση του πηνίου, άλλο ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των αισθητήρων δινορευμάτων. Αντίστοιχη συμπεριφορά εμφανίζει και η ωμική αντίσταση όπως φαίνεται στο διάγραμμα παρακάτω



Διάγραμμα 3.10 Η μεταβολή της ωμικής αντίστασης για διάφορα υλικά στα 10 kHz

Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις των δύο μεθόδων φαίνεται να πλησιάζουν όσο αυξάνεται η αγωγιμότητα της πλάκας.



Εικόνα 3.5 Μαγνητικό δυναμικό και δινορεύματα σε απόσταση 20, 10, 5, 1 mm στα 50 kHz

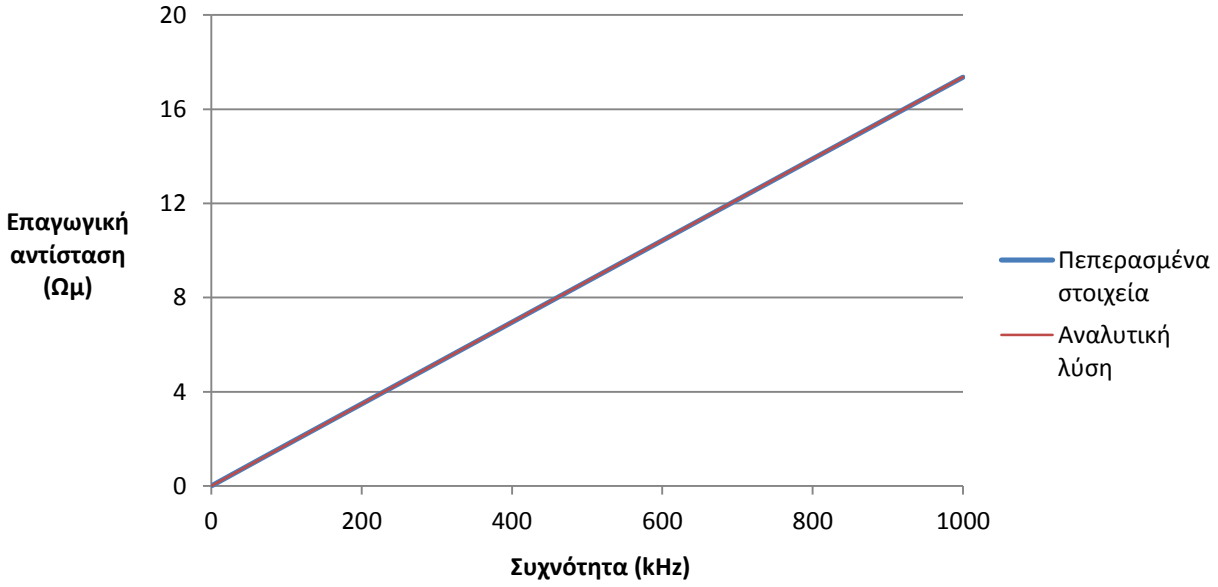
3.1.7 Πηνίο πάνω από πεπερασμένη πλάκα

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η πιθανή δυνατότητα χρήσης των δινορευμάτων για το δομικό έλεγχο υλικών, ιδιαίτερα για την μέτρηση του πάχους τοιχωμάτων. Καθώς είδαμε προηγουμένως τον τρόπο μεταβολής της επαγωγικής αντίστασης ανάλογα με το υλικό της εξεταζόμενης πλάκας και την απόσταση του αισθητήρα από αυτή, σε αυτή την προσομοίωση θα μας απασχολήσει μόνο το πάχος της. Τιμές αναφοράς της απόστασης από την πλάκα θα είναι το $1\ \mathrm{mm}$ και της αγωγιμότητάς της τα $16.45\ \mathrm{MS/m}$.

Στον παρακάτω πίνακα και διάγραμμα βλέπουμε μια πρώτη σύγκριση μεταξύ των δύο λύσεων, με το πάχος της πλάκας στα 10 mm.

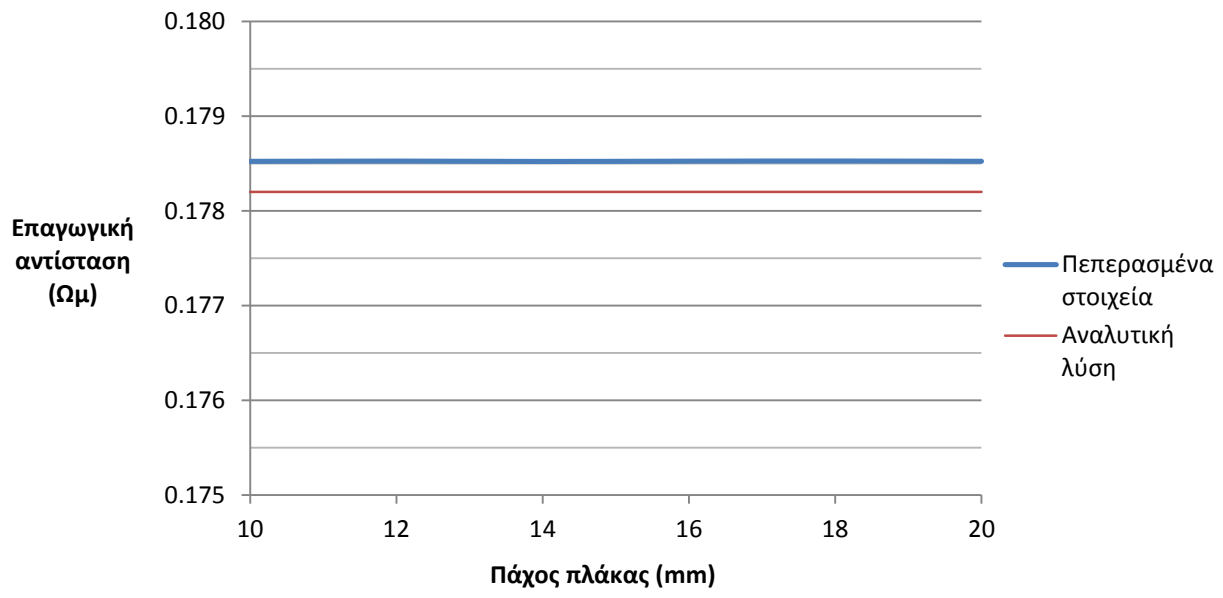
Συχνότητα	1 kHz	5 kHz	10 kHz	50 kHz	100 kHz	500 kHz	1 MHz
Πεπερασμένα στοιχεία	0.01849	0.09015	0.17858	0.87930	1.75020	8.68703	17.35640
Αναλυτική λύση	0.018449	0.089965	0.178201	0.877489	1.748089	8.693657	17.36497
Απόκλιση (%)	0.19	0.21	0.22	0.21	0.12	0.08	0.05

Πίνακας 3.6 Τιμές της επαγωγικής αντίστασης σε Ωμ



Διάγραμμα 3.11 Η επαγωγική αντίσταση σε απόσταση 1mm από την πλάκα, αγωγιμότητα πλάκας 16.45 MS/m και πάχος πλάκας 10mm

Για ακόμα μία φορά δεν διαπιστώνεται καμία ουσιαστική διαφορά των δύο μεθόδων.



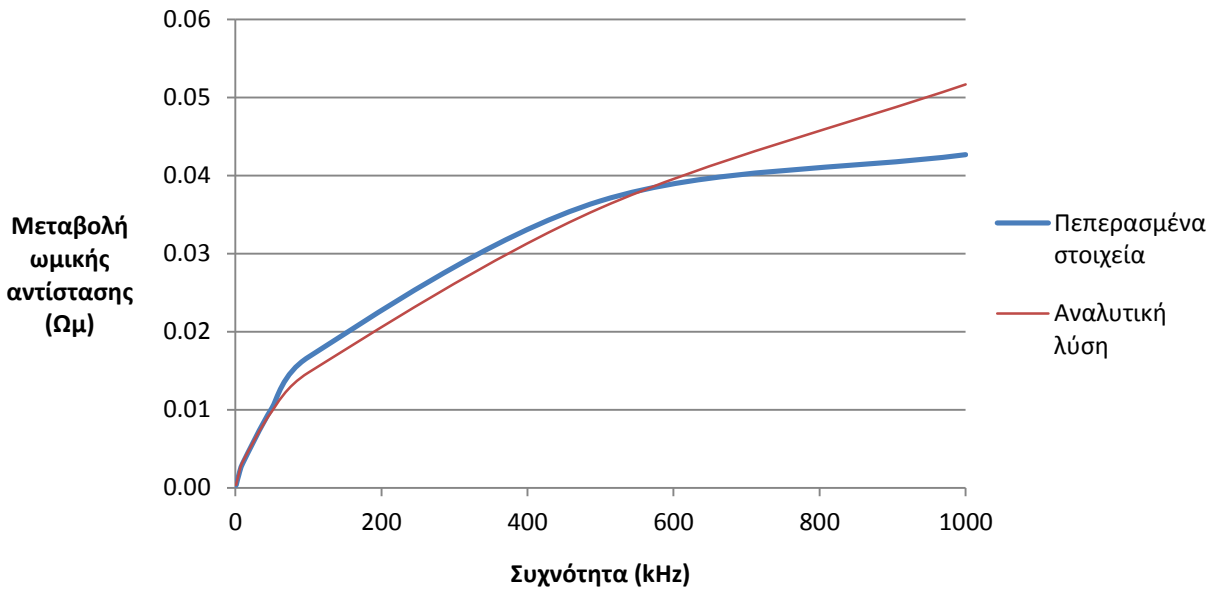
Διάγραμμα 3.12 Η επαγωγική αντίσταση στα 10 kHz

Όπως βλέπουμε οι δύο μέθοδοι δεν αποκλίνουν, το εντυπωσιακό όμως είναι ότι η αντίσταση δεν φαίνεται να μεταβάλλεται με την αλλαγή του πάχους. Ο λόγος είναι ότι τα παραγόμενα δινορεύματα έχουνε μικρή διεισδυτική ικανότητα στο υλικό, συγκεντρώνονται κυρίως στην επιφάνεια της πλάκας.

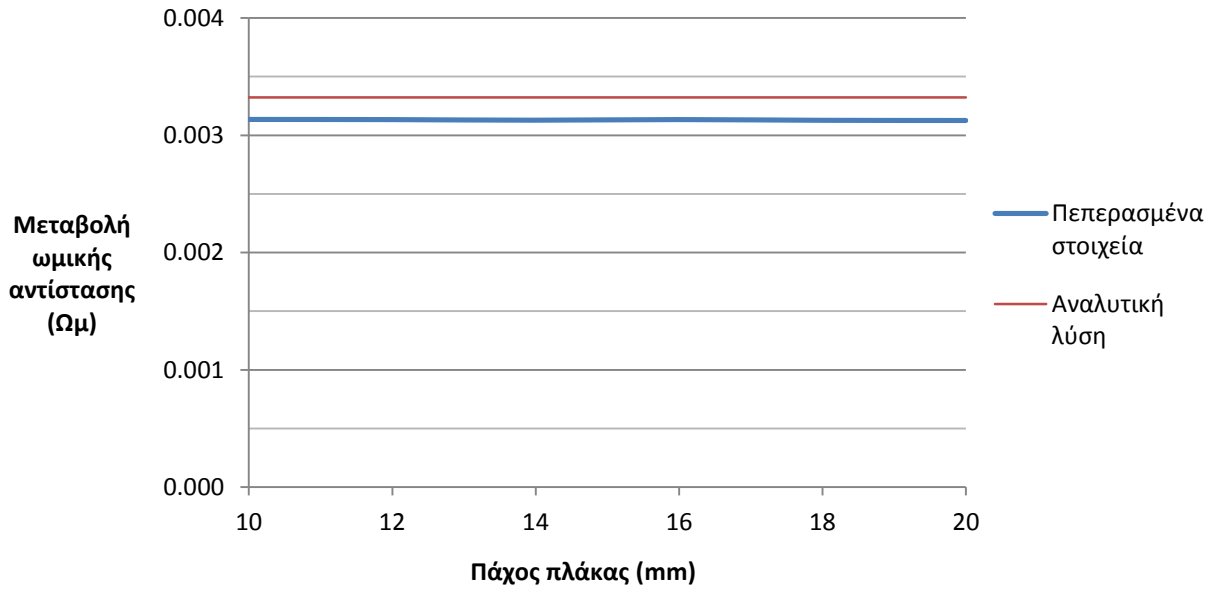
Για ακριβώς τον ίδιο λόγο και η ωμική αντίσταση παρουσιάζει αντίστοιχη συμπεριφορά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα και διαγράμματα.

Συχνότητα	1 kHz	5 kHz	10 kHz	50 kHz	100 kHz	500 kHz	1 MHz
Πεπερασμένα στοιχεία	0.000332	0.001767	0.003135	0.010219	0.016750	0.036759	0.042681
Αναλυτική λύση	0.000363	0.001897	0.003323	0.009805	0.014768	0.035851	0.051680
Απόκλιση (%)	9.04	7.07	5.82	4.14	12.58	2.50	19.07

Πίνακας 3.7 Τιμές της ωμικής αντίστασης σε Ωμ

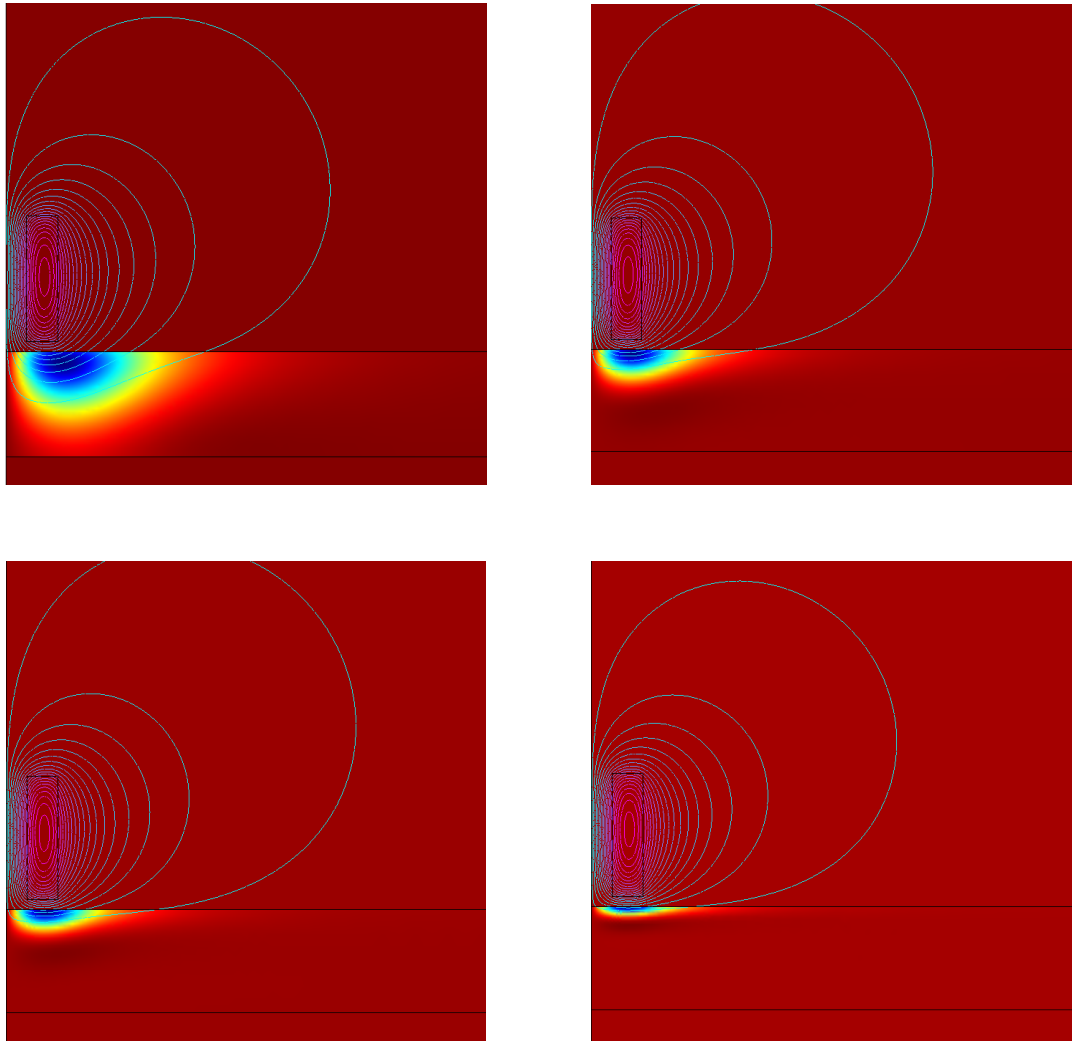


Διάγραμμα 3.13 Η μεταβολή της ωμικής αντίστασης σε απόσταση 1mm από την πλάκα, αγωγιμότητα πλάκας 16.45 MS/m και πάχος πλάκας 10mm



Διάγραμμα 3.14 Η μεταβολή της ωμικής αντίστασης στα 10 kHz

Η αδυναμία των δινορευμάτων να εμφανιστούν αρκετά βαθιά στο υλικό ώστε να γίνει μετρήσιμο το πεπερασμένο πλάτος της πλάκας φαίνεται χαρακτηριστικά στις εικόνες που ακολουθούν.



Εικόνα 3.6 Ένταση δινορευμάτων στη συχνότητα των 1, 5, 10 και 50 kHz με πάχος πλάκας 10 mm

3.2 Συμπεράσματα

Πρωταρχικός στόχος της διπλωματικής αυτής ήταν η μελέτη της εμπέδησης αισθητήρων δινορευμάτων. Τα εργαλεία για να γίνει αυτό ήταν η πρόβλεψη της εμπέδησης μέσω θεωρητικών-αναλυτικών λύσεων καθώς και μέσω υπολογιστικής προσομοίωσης. Η μεν αναλυτική λύση προσφέρει την σιγουριά της ακρίβειας στους υπολογισμούς ή δε υπολογιστική προσφέρει την δυνατότητα υπολογισμών σε περίπλοκες γεωμετρίες και περιβάλλοντα υλικών.

3.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων αναλυτικής και υπολογιστικής λύσης

Ένα πρώτο βήμα για να διαπιστωθεί η αξιοπιστία της υπολογιστικής λύσης είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων της με αυτά της αναλυτικής λύσης.

Ο παράγοντας που διερευνήθηκε περισσότερο ήταν αυτός του φανταστικού μέρους της εμπέδησης, δηλαδή η επαγωγική αντίσταση. Σε κάθε περίπτωση αποδείχθηκε ότι οι δύο λύσεις είχανε μία απόκλιση της τάξεως του 0.2%. Αυτή η διαφορά ανάμεσα στις δύο λύσεις είναι τόσο μικρή ώστε να μπορούμε με σιγουριά να ισχυριστούμε ότι οι δύο λύσεις μας παρέχουν απολύτως αξιόπιστες μετρήσεις.

Ένα ακόμα σημείο σύγκρισης των δύο μεθόδων ήταν η μεταβολή της αντίστασης που προκαλούν τα δινορεύματα στο πηνίο. Σε αυτή την περίπτωση η σύγκριση ανάμεσα στις δύο μεθόδους είναι δυσκολότερη. Ο λόγος είναι το φαινόμενο της συγκέντρωσης της ροής ενός μεταβαλλόμενου ρεύματος περιμετρικά του αγωγού, γνωστό και ως skin effect. Συνέπεια αυτού του φαινομένου είναι η μείωση της ενεργής επιφάνειας από την οποία διέρχεται το ρεύμα και κατά συνέπεια η αύξηση της ωμικής αντίστασης του πηνίου. Ενώ λοιπόν στην αναλυτική λύση είναι εύκολο να εφαρμόσουμε την υπόθεση της σταθερής πυκνότητας ρεύματος σε όλη την επιφάνεια της διατομής του πηνίου στην υπολογιστική προσομοίωση δεν μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο στον βαθμό του να εξαλειφτεί τελείως το φαινόμενο. Αυτός λοιπόν είναι ένας παράγοντας εισαγωγής λάθους ανάμεσα στις δύο λύσεις. Πράγματι η διαφορά στις προβλέψεις των δύο μεθόδων αυτή τη φορά είναι ανάμεσα στο 2 έως και 16%. Οι μεγάλες αποκλίσεις εμφανίζονται κυρίως στις υψηλές συχνότητες, εκεί όπου τις αναμέναμε αφού το skin effect είναι όλο και πιο ισχυρό με την αύξηση της συχνότητας.

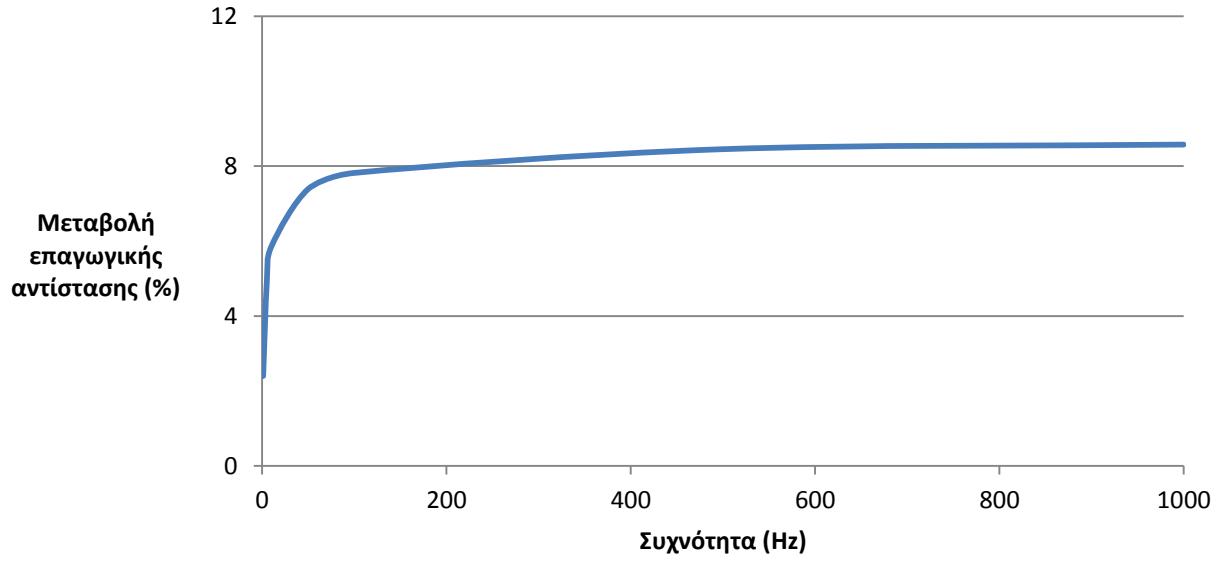
Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται ότι η προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία είναι πολύ αξιόπιστη, ιδιαίτερα για την περίπτωση της μέτρησης της επαγωγικής αντίστασης και μπορεί να επεκταθεί η χρήση της και σε άλλα πιο περίπλοκα προβλήματα. Παρ' όλα αυτά υπάρχει μία κατηγορία προβλημάτων στα οποία η αναλυτική λύση υπερτερεί εμφανώς της υπολογιστικής. Αυτή είναι η περίπτωση της εμφάνισης δινορευμάτων σε μαγνητικά υλικά. Η εμφάνιση των δινορευμάτων σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται σε πάρα πολύ μικρό βάθος, τόσο μικρό ώστε να απαιτείται πολύ μεγάλος αριθμός στοιχείων κοντά στην επιφάνεια της μετρούμενης πλάκας, πράγμα που ανεβάζει το υπολογιστικό κόστος, αλλά και προβλήματα

δημιουργίας του πλέγματος μια και αυτά τα στοιχεία φτάνουν ίσως και τις τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερα σε διαστάσεις. Η αναλυτική λύση δεν αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα μιας και υπολογίζει πολύ εύκολα το αποτέλεσμα και σε αυτές τις περιπτώσεις.

3.2.2 Φυσικές ιδιότητες και παρατηρήσεις

Οι ιδιότητες των αισθητήρων δινορευμάτων τους καθιστούν κατάλληλους για διάφορες εφαρμογές. Τέτοιες είναι η μέτρηση της αγωγιμότητας των υλικών, η παχυμέτρηση και χρήση ως αισθητήρα απόστασης.

Η μέτρηση της αγωγιμότητας των υλικών μπορεί να γίνει πολύ εύκολα. Φέρνοντας τον αισθητήρα αρκετά κοντά στο μετρούμενο υλικό η επαγωγική αντίσταση του πηνίου μειώνεται όσο μεγαλύτερη είναι η αγωγιμότητα του υλικού. Αντίθετο δρόμο ακολουθεί η ωμική αντίσταση η οποία μειώνεται. Σ' αυτή την περίπτωση ενδιαφέρον παρουσιάζει η ποσοστιαία μεταβολή της επαγωγικής αντίστασης ανάλογα με την επιλεγμένη συχνότητα όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο παρακάτω διάγραμμα



Διάγραμμα 3.15 Μεταβολή επαγωγικής αντίστασης σε απόσταση 1 mm

Όπως γίνεται φανερό η ευαισθησία του αισθητήρα βελτιώνεται σημαντικά αυξανόμενης της συχνότητας έως τα 100 kHz, όπου από εκεί και πέρα δείχνει να μην υπάρχει σημαντική βελτίωση.

Η δεύτερη ιδιότητα των αισθητήρων αυτών είναι η δυνατότητά τους να ανιχνεύουν αγώγιμα υλικά έως μια μερική απόσταση από αυτούς ακόμα και με την παρεμβολή άλλων μη αγώγιμων υλικών. Το γεγονός αυτό τους καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμους πχ στις μετρήσεις πάχους επιστρώσεων πάνω σε αγώγιμα υλικά, όπως μπογιά ή άλλα προστατευτικά στρώματα.

Ακόμα εξακριβωμένη είναι η δυνατότητα των αισθητήρων για την ανίχνευση ατελειών στα υλικά. Σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην συχνότητα και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου που θα επιλεχθεί. Όπως είδαμε τα δινορεύματα συγκεντρώνονται κυρίως κοντά στην επιφάνεια των αγωγών και μάλιστα σε όλο και μειούμενο στρώμα όσο αυξάνει η συχνότητα του ρεύματος. Για να γίνουνε λοιπόν αντιληπτές εσωτερικές ατέλειες και όχι μόνο επιφανειακές απαιτείται η χρήση γενικά χαμηλών συχνοτήτων.

Παράρτημα Α
Κώδικες Mathematica

Εμπέδηση πηνίου στον αέρα

```
<< NumericalMath`BesselZeros`

kHz = 10^3;
mm = 10^-3;
MSm = 10^6;
m0 = 4.*10^-7*Pi;
omega = 2.*f*Pi;

WT = 36;
z1 = 1*mm;
z2 = 13*mm;
r1 = 2*mm;
r2 = 5*mm;
h = 40*r2;
Ns = 160;
coef = I*omega*m0*2*Pi*WT^2/(r2 - r1)^2/(z2
 - z1)^2

Precomputed quatities;

q = BesselJZeros[1, Ns]/h;
Hyper[x_] := (x^3 HypergeometricPFQ[{3/2},
 {2.5, 2}, -(x^2/4)])/6;
intJx = Hyper[q*r2] - Hyper[q*r1];
BesJ = intJx^2/((q*h)*BesselJ[0, q*h])^2/q^5;

Series computation;
dz = coef*Apply[Plus , (2.*(q*(z2 - z1) - 1 +
 E^(q*(z1 - z2)))*BesJ)];
m = Im[{{dz /. (f -> 1.*kHz)}, {dz /. (f ->
 5.*kHz)},
 {dz /. (f -> 10.*kHz)}, {dz /. {f -> 50.*kHz}},
 {dz /. (f -> 100.*kHz)}, {dz /. {f -> 500.*kHz}},
 {dz /. (f ->
          1000.*kHz)}}];
m = Transpose[m];
Clear[f]

Export["X.xls", m, "XLS"];
```

Εμπέδηση πηνίου πάνω από ημιάπειρη πλάκα

```
<< NumericalMath`BesselZeros`

kHz = 10^3;
mm = 10^-3;
MSm = 10^6;
m0 = 4.*10^-7*Pi;
omega = 2.*f*Pi;
conductivity = {2.38*10^6, 1.00*10^7,
 3.50*10^7, 4.50*10^7, 6.30*10^7};
liftoff = {30, 20, 15, 10, 8, 5, 4, 3, 2, 1, .5};
WT = 36;
z1 = hi*mm;
z2 = (12 + hi)*mm;
r1 = 2*mm;
r2 = 5*mm;
h = 40*r2;
Ns = 160;
coef = I*omega*m0*2*Pi*WT^2/(r2 - r1)^2/(z2
 - z1)^2

Precomputed quatities;
q = BesselJZeros[1, Ns]/h;
p = Sqrt[q^2 + I*omega*m0*sigma];
Hyper[x_] := (x^3 HypergeometricPFQ[{3/2},
 {2.5, 2}, -(x^2/4)])/6;
intJx = Hyper[q*r2] - Hyper[q*r1];
BesJ = intJx^2/((q*h)*BesselJ[0, q*h])^2/q^5;

Series computation;
Clear[hi];
Clear[sigma];
Zair =
  coef*Apply[Plus , (2.*(q*(z2 - z1) - 1 +
 E^(q*(z1 - z2)))*BesJ)];
dz = coef*
   Apply[Plus, (E^(-q*z1) - E^(-
 q*z2))^2*(BesJ*(q - p)/(q + p))];
z = Zair + dz;
x = {{1}, {5}, {10}, {50}, {100}, {500},
 {1000}};
```

```
r = {{1}, {5}, {10}, {50}, {100}, {500},
 {1000}};
For[j = 1, j <= Length[conductivity], j++,
 For[i = 1, i <= Length[liftoff], i++,
  hi = liftoff[[i]];
  sigma = conductivity[[j]];
  m = Im[{{z /. (f -> 1.*kHz)}, {z /. (f ->
5.*kHz)},
          {z /. (f -> 10.*kHz)}, {z /. {f ->
50.*kHz}},
          {z /. (f -> 100.*kHz)}, {z /. {f ->
500.*kHz}}, {z /. (f ->
          1000.*kHz)}}];
  x = ArrayFlatten@{{x, m}};
  m1 = Re[{{z /. (f -> 1.*kHz)}, {z /. (f ->
5.*kHz)},
          {z /. (f -> 10.*kHz)}, {z /. {f ->
50.*kHz}},
          {z /. (f -> 100.*kHz)}, {z /. {f ->
500.*kHz}}, {z /. (f ->
          1000.*kHz)}}];
  r = ArrayFlatten@{{r, m1}};]]
Clear[hi];
Clear[sigma];
x = Transpose[x];
Export["X.xls", x, "XLS"];
r = Transpose[r];
Export["dR.xls", r, "XLS"];
```

Εμπέδηση πηνίου πάνω από πεπερασμένη πλάκα

```
<< NumericalMath`BesselZeros`

kHz = 10^3;
mm = 10^-3;
MSm = 10^6;
m0 = 4.*10^-7*Pi;
omega = 2.*f*Pi
thickness = {20, 18, 16, 14, 12, 10};
conductivity = {16.45*MSm};
liftoff = {4, 3, 2, 1};
WT = 36;
z1 = hi*mm;
z2 = (12 + hi)*mm;
r1 = 2*mm;
r2 = 5*mm;
h = 40*r2;
Ns = 160;
coef = I*omega*m0*2*Pi*WT^2/(r2 - r1)^2/(z2
 - z1)^2

Precomputed quatities;
q = BesselJZeros[1, Ns]/h;
p = Sqrt[q^2 + I*omega*m0*sigma];
Hyper[x_] := (x^3 HypergeometricPFQ[{3/2},
 {2.5, 2}, -(x^2/4)])/6;
intJx = Hyper[q*r2] - Hyper[q*r1];
BesJ = intJx^2/((q*h)*BesselJ[0, q*h])^2/q^5;

Series computation;
Clear[hi];
Clear[sigma];
Clear[c];
Zair =
  coef*Apply[Plus , (2.*(q*(z2 - z1) - 1 +
 E^(q*(z1 - z2)))*BesJ)];
dz = coef*
   Apply[Plus, ((E^(-q*z1) - E^(-q*z2))^2)*(p^2
- q^2*(1 -
          E^(2.*p*c))*
          BesJ/((q - p)^2 + (E^(2.*p*c))*((q +
p)^2))];
z = Zair + dz;
x = {{1}, {5}, {10}, {50}, {100}, {500},
 {1000}};
r = {{1}, {5}, {10}, {50}, {100}, {500},
 {1000}};
For[k = 1, k <= Length[thickness], k++,
 For[j = 1, j <= Length[conductivity], j++,
  For[i = 1, i <= Length[liftoff], i++,
   hi = liftoff[[i]];
   sigma = conductivity[[j]];
   c = thickness[[k]];
   m = Im[{{z /. (f -> 1.*kHz)}, {z /. (f ->
5.*kHz)},
          {z /. (f -> 10.*kHz)}, {z /. {f ->
50.*kHz}},
```

```
        {z /. (f -> 100.*kHz)}, {z /. {f ->
500.*kHz}}, {z /. (f ->
        1000.*kHz)}}];
  x = ArrayFlatten@{{x, m}};
  m1 = Re[{{z /. (f -> 1.*kHz)}, {z /. (f ->
5.*kHz)},
        {z /. (f -> 10.*kHz)}, {z /. {f ->
50.*kHz}},
        {z /. (f -> 100.*kHz)}, {z /. {f ->
500.*kHz}}, {z /. (f ->
        1000.*kHz)}}];
  r = ArrayFlatten@{{r, m1}};]]]
Clear[hi];
Clear[sigma];
Clear[c];
x = Transpose[x];
Export["X.xls", x, "XLS"];
r = Transpose[r];

Export["dR.xls", r, "XLS"];
```

Παράρτημα Β
Κώδικες COMSOL 3.4

Αρχείο εισόδου για πηνίο στον αέρα

```
% COMSOL Multiphysics Model M-file
% Generated by COMSOL 3.4
flclear fem

% COMSOL version
clear vrsn
vrsn.name = 'COMSOL 3.4';
vrsn.ext = '';
vrsn.major = 0;
vrsn.build = 248;
vrsn.rcs = '$Name:  $';
vrsn.date = '$Date: 2007/10/10 16:07:51 $';
fem.version = vrsn;

% Constants
V0=0;
%For applied electric potential uncomment next
line
%V0=1;
I0=0;
%For applied electric current uncomment next
line
I0=1;
mm=.001;
l1=0*mm;
l2=12*mm;
r1=2*mm;
r2=5*mm;
hi=-(l2-l1)/2;
Br=40*r2;
cond=1;
%For copper conductivity uncomment next line
%cond=5.998e7;
N=36;
freq=[1000,5000,10000,50000,100000,500000,1
000000];
fem.const = {'V0',num2str(V0), ...
  'I0',num2str(I0), ...
  'Br',num2str(Br), ...
  'r1',num2str(r1), ...
  'r2',num2str(r2), ...
  'l1',num2str(l1), ...
  'l2',num2str(l2), ...
  'hi',num2str(hi), ...
  'cond',num2str(cond), ...
  'N',num2str(N)};

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'AzimuthalCurrents';
appl.mode.type = 'axi';
appl.module = 'ACDC';
appl.assignsuffix = '_emqa';
clear prop
prop.analysis='harmonic';
appl.prop = prop;
clear pnt
pnt.I0 = {};
pnt.name = {};
pnt.ind = [];
appl.pnt = pnt;
clear bnd
bnd.chsrcdst = {};
bnd.murbnd = {};
bnd.sigmabnd = {};
bnd.eta = {};
bnd.d = {};
bnd.index = {};
bnd.Esphi = {};
bnd.pertype = {};
bnd.type = {};
bnd.A0phi = {};
bnd.name = {};
bnd.H0 = {};
bnd.Js0phi = {};
bnd.epsilonrbnd = {};
bnd.murext = {};
bnd.ind = [];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.Vloop = {};
equ.Sd = {};
equ.magconstrel = {};
```

```
equ.srcpnt = {};
equ.M = {};
equ.S0 = {};
equ.Pphi = {};
equ.gporder = {};
equ.coordOn = {};
equ.sigma = {};
equ.name = {};
equ.epsilonr = {};
equ.rOn = {};
equ.dr = {};
equ.cporder = {};
equ.mur = {};
equ.normfH = {};
equ.Br = {};
equ.init = {};
equ.Stype = {};
equ.Drphi = {};
equ.R0 = {};
equ.elconstrel = {};
equ.fH = {};
equ.v = {};
equ.Jephi = {};
equ.usage = {};
equ.srcaxis = {};
equ.user = {};
equ.ind = [];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Geometry
g1=rect2(Br,Br,'base','corner','pos',[0,-Br/2]);
g2=rect2(r2-r1,l2-l1,'base','corner','pos',[r1,hi]);

% Analyzed geometry
clear s
s.objs={g1,g2};
s.name={'R1','R2'};
s.tags={'g1','g2'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'AzimuthalCurrents';
appl.mode.type = 'axi';
appl.module = 'ACDC';
appl.assignsuffix = '_emqa';
clear prop
prop.analysis='harmonic';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = {'A0','cont','ax'};
bnd.ind = [3,1,1,2,2,2,2,1];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.Vloop = {0,'V0'};
equ.Jephi = {0,'I0'};
equ.sigma = {0,'cond'};
equ.name = {'Air','Coil'};
equ.ind = [1,2];
appl.equ = equ;
appl.var = {'nu','freq'};
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% Scalar expressions
```

```
fem.expr = {'X','4*Wm/abs(Itot)^2*2*pi*freq',
...
  'R','2*Q/abs(Itot)^2'};

% Coupling variable elements
clear elemcpl
% Integration coupling variables
clear elem
elem.elem = 'elcplscalar';
elem.g = {'1'};
src = cell(1,1);
clear equ
equ.expr =
{{'2*pi*r*Wmav_emqa','2*pi*r*Wmav_emqa'},
{{},'Jphi_emqa/N'},{ ...
  '2*pi*r*Qav_emqa','2*pi*r*Qav_emqa'}};
equ.ipoints = {{'4','4'},{{},'4'},{'4','4'}};
equ.frame = {{'ref','ref'},{{},'ref'},{'ref','ref'}};
equ.ind = {{'1'},{'2'}};
src{1} = {{},{},equ};
elem.src = src;
geomdim = cell(1,1);
geomdim{1} = {};
elem.geomdim = geomdim;
elem.var = {'Wm','Itot','Q'};
elem.global = {'1','2','3'};
elem.maxvars = {};
elemcpl{1} = elem;
fem.elemcpl = elemcpl;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Initialize mesh
fem.mesh=meshinit(fem, ...
                  'hauto',5);

% Refine mesh
fem.mesh=meshrefine(fem, ...
                    'mcase',0, ...
                    'rmethod','regular');



% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femstatic(fem, ...
                  'solcomp',{'Aphidr'}, ...
                  'outcomp',{'Aphidr'}, ...
                  'pname','freq', ...
                  'plist',freq, ...
                  'oldcomp',{});

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;

[X,R] = posteval(fem,'X','R','Solnum','all');
x=getfield(X,'d');
r=getfield(R,'d');
xlswrite('X.xls',[x(:,1)]');
xlswrite('R.xls',[r(:,1)]');
```

Αρχείο εισόδου για πηνίο πάνω από ημιάπειρη πλάκα

```
% COMSOL Multiphysics Model M-file
% Generated by COMSOL 3.4
i=1;
permeability=[1.01];
conductivity=[16.45e06];
liftoff=[1];
for pm=1:length(permeability)
for cd=1:length(conductivity)
for lf=1:length(liftoff)
flclear fem

% COMSOL version
clear vrsn
vrsn.name = 'COMSOL 3.4';
```

```
vrsn.ext = '';
vrsn.major = 0;
vrsn.build = 248;
vrsn.rcs = '$Name:  $';
vrsn.date = '$Date: 2007/10/10 16:07:51 $';
fem.version = vrsn;

% Constants
V0=0;
%For applied electric potential uncomment next
line
%V0=1;
I0=0;
%For applied electric current uncomment next
line
I0=1;
mm=.001;
hi=liftoff(lf)*mm;
l1=liftoff(lf)*mm;
l2=(12+liftoff(lf))*mm;
r1=2*mm;
r2=5*mm;
Br=40*r2;
cond=1;
%For copper conductivity uncomment next line
%cond=5.998e7;
plcond=conductivity(cd);
mr=permeability(pm);
N=36;
l=Br;
t=Br;
freq=[1000,5000,10000,50000,100000,500000,1
000000];
fem.const = {'V0',num2str(V0),...
  'I0',num2str(I0),...
  'Br',num2str(Br), ...
  'r1',num2str(r1), ...
  'r2',num2str(r2), ...
  'l1',num2str(l1), ...
  'l2',num2str(l2),...
  'hi',num2str(hi),...
  'cond',num2str(cond),...
  'plcond',num2str(plcond),...
  'N',num2str(N),...
  'l',num2str(l),...
  't',num2str(t),...
  'mr',num2str(mr)};

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'AzimuthalCurrents';
appl.mode.type = 'axi';
appl.module = 'ACDC';
appl.assignsuffix = '_emqa';
clear prop
prop.analysis='harmonic';
appl.prop = prop;
clear pnt
pnt.I0 = {};
pnt.name = {};
pnt.ind = [];
appl.pnt = pnt;
clear bnd
bnd.chsrcdst = {};
bnd.murbnd = {};
bnd.sigmabnd = {};
bnd.eta = {};
bnd.d = {};
bnd.index = {};
bnd.Esphi = {};
bnd.pertype = {};
bnd.type = {};
bnd.A0phi = {};
bnd.name = {};
bnd.H0 = {};
bnd.Js0phi = {};
bnd.epsilonrbnd = {};
bnd.murext = {};
bnd.ind = [];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.Vloop = {};
equ.Sd = {};
equ.magconstrel = {};
equ.srcpnt = {};
equ.M = {};
equ.S0 = {};
equ.Pphi = {};
```

```
equ.gporder = {};
equ.coordOn = {};
equ.sigma = {};
equ.name = {};
equ.epsilonr = {};
equ.rOn = {};
equ.dr = {};
equ.cporder = {};
equ.mur = {};
equ.normfH = {};
equ.Br = {};
equ.init = {};
equ.Stype = {};
equ.Drphi = {};
equ.R0 = {};
equ.elconstrel = {};
equ.fH = {};
equ.v = {};
equ.Jephi = {};
equ.usage = {};
equ.srcaxis = {};
equ.user = {};
equ.ind = [];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Geometry
g1=rect2(Br,2*Br,'base','corner','pos',[0,-Br]);
g2=rect2(r2-r1,l2-l1,'base','corner','pos',[r1,hi]);
g3=rect2(l,t,'base','corner','pos',[0,-t]);

% Analyzed geometry
clear s
s.objs={g1,g2,g3};
s.name={'R1','R2','R3'};
s.tags={'g1','g2','g3'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'AzimuthalCurrents';
appl.mode.type = 'axi';
appl.module = 'ACDC';
appl.assignsuffix = '_emqa';
clear prop
prop.analysis='harmonic';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = {'A0','cont','ax'};
bnd.ind = [3,1,3,2,1,2,2,2,2,1,1];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.Vloop = {0,0,'V0'};
equ.Jephi = {0,0,'I0'};
equ.sigma = {'plcond',0,'cond'};
equ.name = {'Plate','Air','Coil'};
equ.mur = {mr,1,1};
equ.ind = [1,2,3];
appl.equ = equ;
appl.var = {'nu','freq'};
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% Coupling variable elements
clear elemcpl
% Integration coupling variables
```

```
clear elem
elem.elem = 'elcplscalar';
elem.g = {'1'};
src = cell(1,1);
clear equ
equ.expr =
{{'2*pi*r*Wmav_emqa','2*pi*r*Wmav_emqa'},
{{},'Jphi_emqa/N'},{ ...
  '2*pi*r*Qav_emqa','2*pi*r*Qav_emqa'}};
equ.ipoints = {{'4','4'},{{},'4'},{'4','4'}};
equ.frame = {{'ref','ref'},{{},'ref'},{'ref','ref'}};
equ.ind = {{'1','2'},{'3'}};
src{1} = {{},{},equ};
elem.src = src;
geomdim = cell(1,1);
geomdim{1} = {};
elem.geomdim = geomdim;
elem.var = {'Wm','Itot','Q'};
elem.global = {'1','2','3'};
elemcpl{1} = elem;
fem.elemcpl = elemcpl;

% Scalar expressions
fem.expr = {'X','4*Wm/abs(Itot)^2*2*pi*freq',
...
  'R','2*Q/abs(Itot)^2'};

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Initialize mesh
fem.mesh=meshinit(fem, ...
                  'hauto',5);

% Refine mesh
fem.mesh=meshrefine(fem, ...
                  'mcase',0, ...
                  'rmethod','regular');

% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femstatic(fem, ...
                  'solcomp',{'Aphidr'}, ...
                  'outcomp',{'Aphidr'}, ...
                  'pname','freq', ...
                  'plist',freq, ...
                  'oldcomp',{});

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;

X = posteval(fem,'X','Solnum','all');
x=getfield(X,'d');
x1(1:4,i)=[pm plcond hi t];
x1(5:length(freq)+4,i)=x(1:length(freq),1);
R = posteval(fem,'R','Solnum','all');
res=getfield(R,'d');
res1(1:4,i)=[pm plcond hi t];
res1(5:length(freq)+4,i)=res(1:length(freq),1);
i=i+1;
end
end
end
xlswrite('X.xls',[x1(:,1:lf*cd*pm)]');
xlswrite('R.xls',[res1(:,1:lf*cd*pm)]');
```

Αρχείο εισόδου πάνω από πεπερασμένη πλάκα

```
% COMSOL Multiphysics Model M-file
% Generated by COMSOL 3.4 (COMSOL
3.4.0.248, $Date: 2007/10/10 16:07:51 $)
i=1;
permeability=[1.01];
conductivity=[16.45e6];
liftoff=[1];
thickness=[10];
for pm=1:length(permeability)
for cd=1:length(conductivity)
for lf=1:length(liftoff)
```

```
for i1=1:length(thickness)

flclear fem

% COMSOL version
clear vrsn
vrsn.name = 'COMSOL 3.4';
vrsn.ext = '';
vrsn.major = 0;
vrsn.build = 248;
vrsn.rcs = '$Name:  $';
vrsn.date = '$Date: 2007/10/10 16:07:51 $';
fem.version = vrsn;

% Constants
V0=0;
%For applied electric potential uncomment next
line
%V0=1;
I0=0;
%For applied electric current uncomment next
line
I0=1;
mm=.001;
hi=liftoff(lf)*mm;
l1=liftoff(lf)*mm;
l2=(12+liftoff(lf))*mm;
r1=2*mm;
r2=5*mm;
Br=40*r2;
cond=1;
%For copper conductivity uncomment next line
%cond=5.998e7;
plcond=conductivity(cd);
mr=permeability(pm);
N=36;
l=Br;
t=thickness(i1)*mm;
freq=[1000,5000,10000,50000,100000,500000,1
000000];
fem.const = {'V0',num2str(V0),...
  'I0',num2str(I0),...
  'Br',num2str(Br), ...
  'r1',num2str(r1), ...
  'r2',num2str(r2), ...
  'l1',num2str(l1), ...
  'l2',num2str(l2),...
  'hi',num2str(hi),...
  'cond',num2str(cond),...
  'plcond',num2str(plcond),...
  'N',num2str(N),...
  'l',num2str(l),...
  't',num2str(t),...
  'mr',num2str(mr)};

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'AzimuthalCurrents';
appl.mode.type = 'axi';
appl.module = 'ACDC';
appl.assignsuffix = '_emqa';
clear prop
prop.analysis='harmonic';
appl.prop = prop;
clear pnt
pnt.I0 = {};
pnt.name = {};
pnt.ind = [];
appl.pnt = pnt;
clear bnd
bnd.chsrcdst = {};
bnd.murbnd = {};
bnd.sigmabnd = {};
bnd.eta = {};
bnd.d = {};
bnd.index = {};
bnd.Esphi = {};
bnd.pertype = {};
bnd.type = {};
bnd.A0phi = {};
bnd.name = {};
bnd.H0 = {};
bnd.Js0phi = {};
bnd.epsilonrbnd = {};
bnd.murext = {};
bnd.ind = [];
appl.bnd = bnd;
clear equ
```

```
equ.Vloop = {};
equ.Sd = {};
equ.magconstrel = {};
equ.srcpnt = {};
equ.M = {};
equ.S0 = {};
equ.Pphi = {};
equ.gporder = {};
equ.coordOn = {};
equ.sigma = {};
equ.name = {};
equ.epsilonr = {};
equ.rOn = {};
equ.dr = {};
equ.cporder = {};
equ.mur = {};
equ.normfH = {};
equ.Br = {};
equ.init = {};
equ.Stype = {};
equ.Drphi = {};
equ.R0 = {};
equ.elconstrel = {};
equ.fH = {};
equ.v = {};
equ.Jephi = {};
equ.usage = {};
equ.srcaxis = {};
equ.user = {};
equ.ind = [];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Geometry
g1=rect2(Br,2*Br,'base','corner','pos',[0,-Br]);
g2=rect2(r2-r1,l2-l1,'base','corner','pos',[r1,hi]);
g3=rect2(l,t,'base','corner','pos',[0,-t]);

% Analyzed geometry
clear s
s.objs={g1,g2,g3};
s.name={'R1','R2','R3'};
s.tags={'g1','g2','g3'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'AzimuthalCurrents';
appl.mode.type = 'axi';
appl.module = 'ACDC';
appl.assignsuffix = '_emqa';
clear prop
prop.analysis='harmonic';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = {'A0','cont','ax'};
bnd.ind = [3,1,3,2,3,2,1,2,2,2,2,1,1,1];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.Vloop = {0,0,'V0'};
equ.Jephi = {0,0,'I0'};
equ.sigma = {'plcond',0,'cond'};
equ.name = {'Plate','Air','Coil'};
equ.mur = {mr,1,1};
equ.ind = [2,1,2,3];
appl.equ = equ;
appl.var = {'nu','freq'};
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'r','z'};
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
```

```
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% Scalar expressions
fem.expr = {'X','4*Wm/abs(Itot)^2*2*pi*freq', ..
  'R','2*Q/abs(Itot)^2'};

% Coupling variable elements
clear elemcpl
% Integration coupling variables
clear elem
elem.elem = 'elcplscalar';
elem.g = {'1'};
src = cell(1,1);
clear equ
equ.expr =
{{'2*pi*r*Wmav_emqa','2*pi*r*Wmav_emqa','
2*pi*r*Wmav_emqa'},{ ...
{},{},'Jphi_emqa/N'},{'2*pi*r*Qav_emqa','2*pi
*r*Qav_emqa', ...
  '2*pi*r*Qav_emqa'}};
equ.ipoints = {{'4','4','4'},{{},'4','4'},{'4','4','4'}};
equ.frame =
{{'ref','ref','ref'},{{},'ref','ref'},{'ref','ref','ref'}};
equ.ind = {{'1','2'},{'3'},{'4'}};
src{1} = {{},{},equ};
elem.src = src;
geomdim = cell(1,1);
geomdim{1} = {};
elem.geomdim = geomdim;
elem.var = {'Wm','Itot','Q'};
elem.global = {'1','2','3'};
elem.maxvars = {};
elemcpl{1} = elem;
fem.elemcpl = elemcpl;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Initialize mesh
fem.mesh=meshinit(fem, ...
                  'hauto',5);

% Refine mesh
fem.mesh=meshrefine(fem, ...
                  'mcase',0, ...
                  'rmethod','regular');
% Refine mesh
fem.mesh=meshrefine(fem, ...
                  'mcase',0, ...
                  'rmethod','regular');

% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femstatic(fem, ...
                  'solcomp',{'Aphidr'}, ...
                  'outcomp',{'Aphidr'}, ...
                  'pname','freq', ...
                  'plist',freq, ...
                  'oldcomp',{});

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;

X = posteval(fem,'X','Solnum','all');
x=getfield(X,'d');
x1(1:4,i)=[pm plcond hi t];
x1(5:length(freq)+4,i)=x(1:length(freq),1);
R = posteval(fem,'R','Solnum','all');
res=getfield(R,'d');
res1(1:4,i)=[pm plcond hi t];
res1(5:length(freq)+4,i)=res(1:length(freq),1);
i=i+1;
end
end
end
end
xlswrite('X.xls',[x1(:,1:i1*lf*cd*pm)]');
xlswrite('R.xls',[res1(:,1:i1*lf*cd*pm)]');
```

Βιβλιογραφία

[1] W. Benenson, J. W. Harris, H. Stocker και H. Lutz, Handbook of Physics, 2002, pp. 431, 496.

[2] C. V. Dodd και W. E. Deeds, «Analytical Solutions to Eddy-Current Probe-Coil Problems,» *Journal of Applied Physics,* τόμ. 39, αρ. 6, pp. 2829-2838, 1968.

[3] C. V. Dodd και W. E. Deeds, Analytical Solutions to Eddy-Current Probe Coil Problems, Oak Ridge National Laboratory, 1987.

[4] T. Theodoulidis and E. Kriezis, "Series expansions in eddy current nondestructive evaluation models," *Materials Processing Technology,* no. 161, pp. 343-347, 2005.

[5] *Inductance Coil,* COMSOL 3.4 Documentation, 2007.

[6] P. E. Mix, Introduction to nondestructive testing: a training guide, John Wiley & Sons, 2005.