

**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών**



Τομέας Μαθηματικών

Σύμμορφες Απεικονίσεις και Εφαρμογές

**Διπλωματική εργασία
της
Τριανταφυλλοπούλου Βασιλικής**

**Επιβλέπων: Δ.Χ. Κραβαρίτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη των σύμμορφων απεικονίσεων τόσο μέσω της θεωρητικής τους ανάλυσης όσο και με εφαρμογές σε προβλήματα απεικόνισης πεδίων και με προβλήματα συνοριακών τιμών.

Οι μιγαδικές συναρτήσεις και οι σύμμορφες απεικονίσεις παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον καθώς αποτελούν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση πολλών μαθηματικών προβλημάτων που εμφανίζονται σε διάφορους κλάδους της φυσικής και της μηχανικής(υδροδυναμική, αεροδυναμική, θεωρία ελαστικότητας κ.α.). Οι σύμμορφες απεικονίσεις σε πολλές περιπτώσεις δίνουν απλές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων που αλλιώς θα ήταν αδύνατο να μελετηθούν αν δεν απεικονίζονταν σε πεδία που η λύση τους είναι υπολογίσιμη.

Στο κεφάλαιο 1 αναπτύσσεται η θεωρία των σύμμορφων απεικονίσεων. Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μια σημαντική γεωμετρική ιδιότητα. Διατηρούν την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό. Επίσης, η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μια σύμμορφη απεικόνιση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα μελετηθούν πολλά είδη σύμμορφων απεικονίσεων, οι σπουδαιότερες ιδιότητές τους και ο τρόπος με τον οποίο μετασχηματίζουν διάφορα πεδία.

Στο κεφάλαιο 2 δίνονται εφαρμογές της θεωρίας των σύμμορφων απεικονίσεων. Μελετάται η λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη χρήση σύμμορφων απεικονίσεων σε διάφορα πεδία.

Τέλος, για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Κραββαρίτη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθεί μια σημαντική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων, οι σύμμορφες απεικονίσεις και θα μελετηθούν οι διάφορες γεωμετρικές τους ιδιότητές τους.

Μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα πεδίο D ονομάζεται σύμμορφη στο D αν είναι ολόμορφη και $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μια σημαντική γεωμετρική ιδιότητα. Διατηρούν τη γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό. Επίσης η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφη απεικόνιση. Με αυτή την ιδιότητα ένα φυσικό πρόβλημα που περιέχει την εξίσωση Laplace και που ορίζεται σε ένα πολύπλοκο πεδίο να μετασχηματιστεί με μια κατάλληλη σύμμορφη απεικόνιση σε ένα πρόβλημα που ορίζεται σε ένα απλούστερο πεδίο και το οποίο εύκολα επιλύεται και στη συνέχεια με την αντίστροφη συνάρτηση επιλύεται το αρχικό πρόβλημα.

Επιπρόσθετα, στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί μία σημαντική κατηγορία σύμμορφων μετασχηματισμών, οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί.

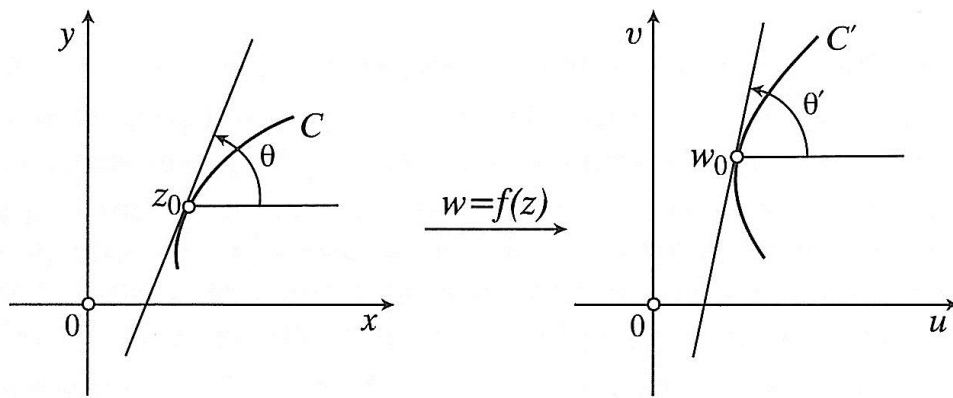
1.1. Σύμμορφες απεικονίσεις

Έστω $f(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο D με $f'(z) \neq 0$ στο D και $C: z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ μια λεία καμπύλη στο D που διέρχεται από το σημείο $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης C με τον θετικό x -άξονα (Σχήμα), τότε $\theta = \arg z'(t_0)$.

Έστω ότι C' είναι η εικόνα της C μέσω της απεικόνισως $w = f(z)$, δηλαδή $C': w(t) = f(z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ και w_0 η εικόνα του z_0 , δηλαδή $w_0 = f(z(t_0)) = f(z_0)$.

Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης ισχύει

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (1)$$



Σχ. 1

Επειδή $f'(z_0) \neq 0$ και $z'(t_0) \neq 0$, συμπεραίνεται ότι $w'(t_0) \neq 0$, δηλαδή η καμπύλη C' έχει μια εφαπτομένη στο σημείο w_0 . Έστω $\theta' = \arg w'(t_0)$.

Τότε από την (1) παίρνουμε

$$\theta' = \theta + \arg f'(z_0) \quad (2)$$

Η ποσότητα $\varphi = \theta' - \theta$ ονομάζεται **γωνία στροφής της καμπύλης C στο σημείο z_0 μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$** .

Από την (2) προκύπτει το συμπέρασμα ότι αν $f'(z_0) \neq 0$ η γωνία στροφής στο σημείο z_0 δεν εξαρτάται από την καμπύλη και είναι ίση με $\arg f'(z_0)$ δηλαδή όλες οι καμπύλες που διέρχονται από το z_0 στρέφονται μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$ με την ίδια γωνία.

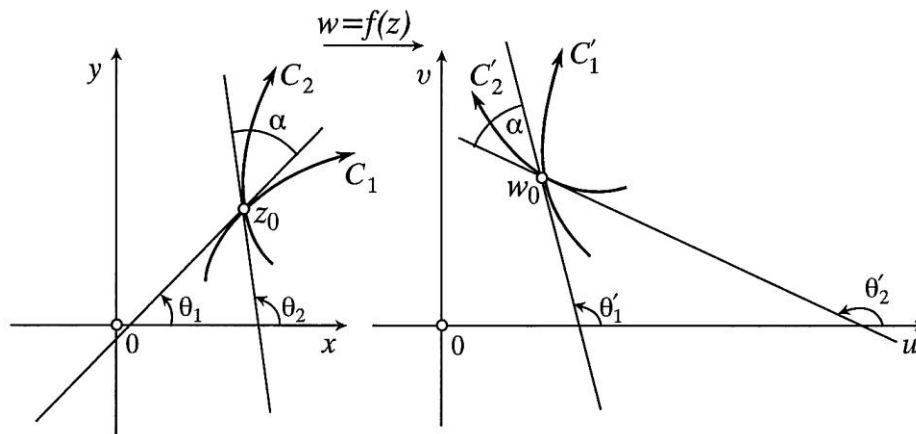
Έστω C_1, C_2 δύο λείες καμπύλες που διέρχονται από το z_0 και βρίσκονται μέσα στο D και C'_1, C'_2 οι εικόνες της, μέσω της f που διέρχονται από το w_0 .

Αν θ_1, θ_2 είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των καμπυλών C_1, C_2 με τον x -άξονα στο σημείο z_0 , τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, οι ποσότητες $\theta'_1 = \theta_1 + \arg f'(z_0)$, $\theta'_2 = \theta_2 + \arg f'(z_0)$

Είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στις C'_1 και C'_2 , στο σημείο $w_0 = f(z_0)$. Επομένως

$$\theta'_2 - \theta'_1 = \theta_2 - \theta_1,$$

δηλαδή η γωνία $\theta'_2 - \theta'_1$ από την C'_1 στην C'_2 είναι η ίδια σε μέτρο και προσανατολισμό με την γωνία $\theta_2 - \theta_1$ από τη C_1 στη C_2 . Οι γωνίες αυτές σημειώνονται με α στο σχήμα.



Σχ. 2

Παράδειγμα 1.1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ είναι σύμμορφη στα σημεία $z_1 = \frac{\pi}{2} + i$ και $z_2 = 0$ και να βρεθεί η γωνία στροφής $\alpha = \arg f'(z)$ στα σημεία αυτά.

Λύση. Επειδή $f'(z) = \cos z$, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $w = \sin z$ είναι σύμμορφη σε όλα τα σημεία εκτός από τα σημεία $z = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Επομένως η $f(z)$ είναι σύμμορφη στα σημεία z_1, z_2 . Έχουμε

$$\alpha = \arg \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \arg \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}}{2} = \arg \frac{i(e^{-1} - e)}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

και

$$\theta = \arg \cos 0 = \arg 1 = 0$$

Παράδειγμα 1.2. Να βρεθεί η γωνία στροφής $\alpha = \arg f'(z)$ της απεικονίσεως

$$f(z) = \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}, \text{ στο σημείο } z_0 \text{ με } \operatorname{Im} z_0 = y_0 > 0.$$

Λύση. Η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\bar{z}_0\}$ και ισχύει

$$f'(z) = \frac{z - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, \quad z \neq \bar{z}_0.$$

Επομένως

$$f'(z_0) = \frac{1}{2iy_0} = -\frac{i}{2y_0},$$

Οπότε

$$\alpha = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένας **σύμμορφος μετασχηματισμός** ή **σύμμορφη απεικόνιση** στο πεδίο $D \subset A$, αν η f είναι ολόμορφη στο D και $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μια σημαντική γεωμετρική ιδιότητα:

Διατηρούν το μέτρο και τον προσανατολισμό της γωνίας τομής μεταξύ δύο καμπυλών.

Πρόταση 1.1. Αν η f είναι ολόμορφη και αμφιμονοσήμαντη σε ένα πεδίο D , τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$, δηλαδή η f είναι σύμμορφη στο D .

Απόδειξη. Έστω $f'(z) = 0$ για κάποιο $z_0 \in D$. Τότε η συνάρτηση g που ορίζεται από τη σχέση $g(z) = f(z) - f(z_0)$ έχει το z_0 ρίζα τάξεως $n \geq 2$.

Από την υπόθεση, υπάρχει κύκλος $C : |z - z_0| = r$ που βρίσκεται μέσα στο D πάνω στον οποίο η g δεν μηδενίζεται και στο εσωτερικό του οποίου ισχύει $g'(z) = 0$ μόνο για $z = z_0$. Αν

$$0 < |a| < m = \min_C |g(z)|,$$

Τότε από το θεώρημα Rouché, η συνάρτηση $g(z) - a$ έχει ρίζες εντός του κύκλου C . Άρα $f(z) = f(z_0) + a$ για δύο ή περισσότερα σημεία εντός του C , που είναι άτοπο, αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D .

1.2. Το θεώρημα Riemann

Στις εφαρμογές οι σύμμορφες απεικονίσεις χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή ενός προβλήματος συνοριακών τιμών που περιέχει την εξίσωση

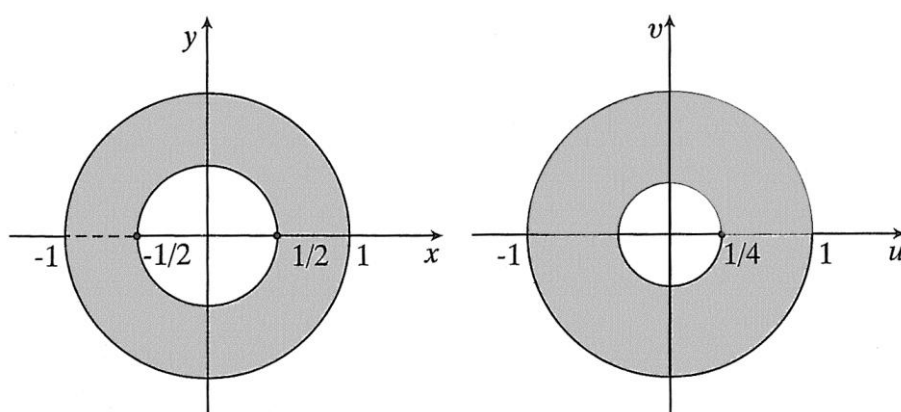
Laplace σε ένα άλλο απλούστερο. Η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης. Για να μελετήσουμε τις συνοριακές συνθήκες, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι το σύνορο απεικονίζεται στο σύνορο. Ωστόσο, όπως δείχνει και το επόμενο παράδειγμα, εν γένει δεν ισχύει.

Παράδειγμα 1.2.1 Έστω $f(z) = z^2$ και

$$D = \{w = re^{i\theta} : \frac{1}{4} < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}.$$

Η f είναι ολόμορφη στο D με $f'(z) = 2z \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Διαπιστώνουμε

ότι $f(D) = \{w = re^{i\theta} : \frac{1}{4} < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



Σχ. 3

Το τμήμα του συνόρου $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ απεικονίζεται στο $\frac{1}{4} \leq u \leq 1$ που είναι εσωτερικό του $f(D)$. Άρα η f δεν απεικονίζει το σύνορο του D στο εσωτερικό του $f(D)$.

Έστω D ένα πεδίο, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής απεικόνιση και C μια κλειστή καμπύλη μέσα στο D . Είναι φανερό ότι η εικόνα C' της C μέσω της f είναι μια κλειστή καμπύλη στο w -επίπεδο.

Θα λέμε ότι η f **διατηρεί τη φορά**, αν κατά τη συνεχή κίνηση ενός σημείου κατά τη θετική φορά πάνω στη C η εικόνα του στη C' κινείται επίσης κατά τη θετική φορά. Θετική φορά είναι η φορά που πρέπει να κινηθεί ένας παρατηρητής ώστε να βλέπει το εσωτερικό της C αριστερά του.

Έστω D και G δύο απλά συνεκτικά, φραγμένα πεδία με σύνορα τις απλές, κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες C_1 και C_2 . Θα αναφερθούν δύο βασικά αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.2.1. Αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων.

Αν η σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και απεικονίζει το πεδίο D επί του πεδίου G , τότε

- i) η $f(z)$ μπορεί να επεκταθεί στο $\bar{D}$ ώστε να είναι συνεχής
- ii) η επέκταση είναι αμφιμονοσήμαντη από τη C_1 επί της C_2 και διατηρεί τη φορά.

Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος αυτού.

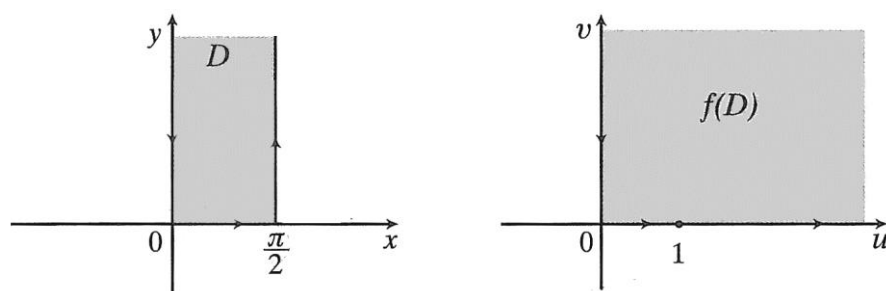
Θεώρημα 1.2.2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $w = f(z)$ είναι ολόμορφη στο D και συνεχής στο $\bar{D}$. Η απεικόνιση $f : C_1 \rightarrow C_2$ είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και απεικονίζει το D σύμμορφα επί του G .

Παρατήρηση. Τα θεωρήματα αυτά ισχύουν και για μη φραγμένα πεδία D με κατά τμήματα λεία σύνορα: μια αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση $f : D \rightarrow G$ απεικονίζει το σύνορο ενός πεδίου επί του συνόρου του $f(D)$ με αμφιμονοσήμαντο τρόπο και διατηρεί τη φορά.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω $f(z) = \sin z$ και $D = \{z = x + iy : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$.

Να βρεθεί το $f(D)$.

Λύση. Το πεδίο D είναι η ημιάπειρη λωρίδα του σχήματος.



Σχ. 4

Είναι φανερό ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και συνεχής στο σύνολο του D . Θα βρούμε καταρχήν την εικόνα του συνόρου. Για $z = x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(z) = \sin x$, οπότε η f απεικονίζει το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ επί του διαστήματος $[0, 1]$. Για $z = iy, y > 0$, έχουμε $f(z) = \sin iy = i \sinh y$, δηλαδή ένας φανταστικός αριθμός, επομένως η f απεικονίζει τον θετικό y -άξονα. Για $z = \frac{\pi}{2} + iy, y > 0$, έχουμε $f(z) = \sin(\frac{\pi}{2} + iy) = \cosh y$, οπότε η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$ στο διάστημα $[1, \infty]$. Λόγω της αρχής της αντιστοιχίας των συνόρων το $f(D)$ θα είναι το πρώτο τεταρτημόριο (βλ. Σχ. 4).

Θεώρημα 1.2.3 Riemann. Αν D είναι ένα απλά συνεκτικό πεδίο του επιπέδου διαφορετικό του $\mathbb{C}$, τότε υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ που απεικονίζει το D επί του μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$. Η απεικόνιση είναι μοναδική αν για κάποιο $z_0 \in D$ έχουμε $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$.

Παρατήρηση 1. Αν $D = \mathbb{C}$ το θεώρημα δεν ισχύει. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή θα έπρεπε για μια ακέραια και μη σταθερή συνάρτηση να ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, που αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Liouville είναι αδύνατο.

Παρατήρηση 2. Το θεώρημα **Riemann** παρουσιάζει κυρίως θεωρητικό ενδιαφέρον, αφού εξασφαλίζει μόνο την ύπαρξη και όχι την κατασκευή της απεικόνισης f που είναι σημαντικό για τις εφαρμογές.

1.3. Διγραμμικοί μετασχηματισμοί

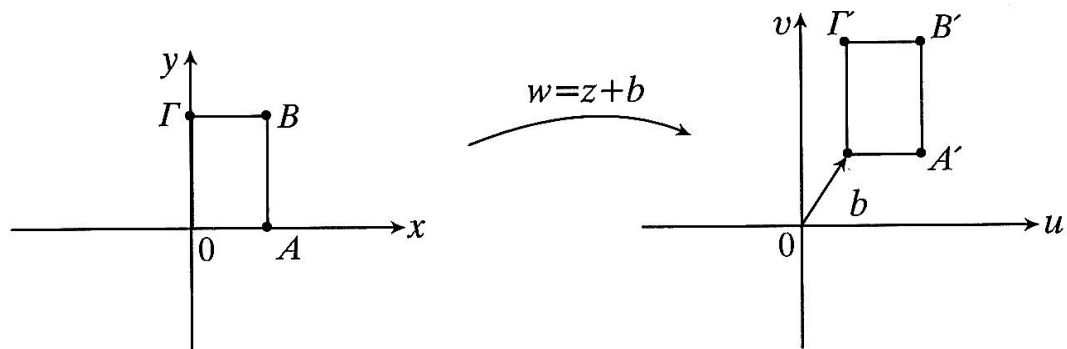
Οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί είναι οι πιο χρήσιμοι σύμμορφοι μετασχηματισμοί και έχουν πολλές εφαρμογές. Η ονομασία τους προκύπτει από το γεγονός ότι εκφράζονται ως πηλίκο δύο γραμμικών εκφράσεων.

Όπως θα δούμε παρακάτω ένας διγραμμικός μετασχηματισμός είναι η σύνθεση των ακολούθων στοιχειωδών μετασχηματισμών.

I) Μετατόπιση. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$w = f(z) = z + b, b \in \mathbb{C}.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη του z -επιπέδου επί του w -επιπέδου και ονομάζεται **παράλληλη μετατόπιση**. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι $z = w - b$.

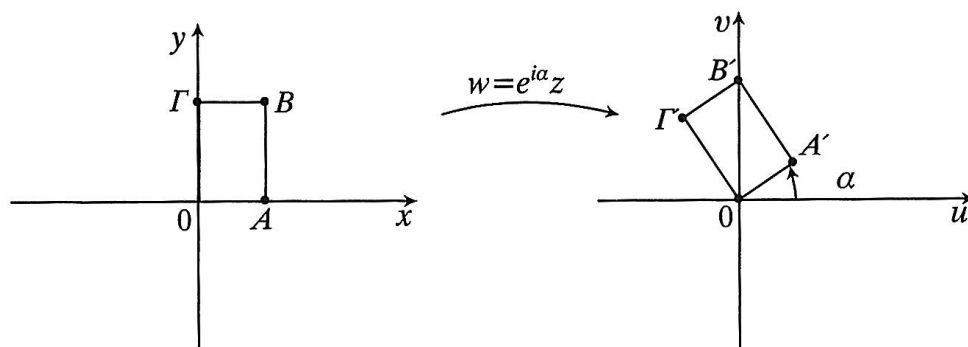


Σχ. 5. Παράλληλη μετατόπιση

II) Στροφή. Έστω α ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Τότε ο μετασχηματισμός

$$w = f(z) = ze^{i\alpha} = re^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$$

Είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του z -επιπέδου επί του w -επιπέδου και ονομάζεται **στροφή**. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι $z = we^{-i\alpha}$

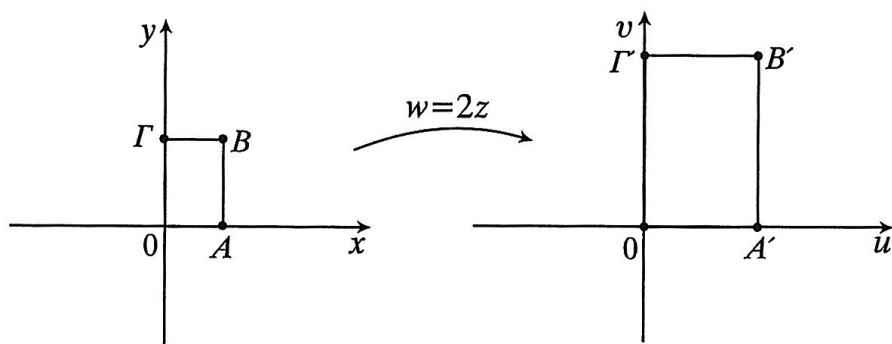


Σχ. 6. Στροφή

III) **Μεγέθυνση.** Έστω $\kappa > 0$ σταθερός. Ο μετασχηματισμός

$$w = f(z) = \kappa z$$

είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του z -επιπέδου επί του w -επιπέδου και ονομάζεται **μεγέθυνση**. Αν $\kappa > 1$ (αντ. $\kappa < 1$), τότε ο μετασχηματισμός αυξάνει (αντ. Μειώνει) την απόσταση μεταξύ δύο σημείων κατά τον παράγοντα κ . Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι $z = \frac{1}{\kappa} w$



Σχ. 7. Μεγέθυνση

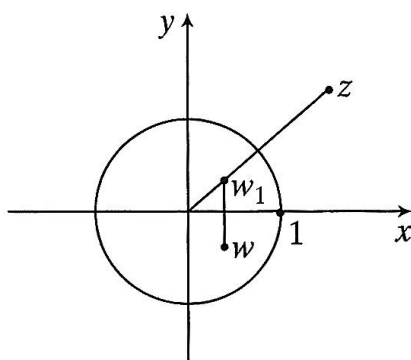
IV) **Αντιστροφή.** Ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{1}{z}, z \neq 0$$

είναι σύνθεση των μετασχηματισμών

$$w_1 = \frac{1}{|z|^2} z \text{ και } w = \bar{w}_1.$$

Ο πρώτος εκφράζει **αντιστροφή** ως προς τον μοναδιαίο κύκλο $C: |z|=1$, αφού $|w_1| |z|=1$ και $\text{Arg} w_1 = \text{Arg} z$ και ο δεύτερος συμμετρία ως προς τον πραγματικό άξονα.



Σχ. 8

ν) Γραμμικός μετασχηματισμός. Η απεικόνιση

$$w = f(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}$$

ονομάζεται **γραμμικός μετασχηματισμός**. Υποθέτουμε ότι $a \neq 0$. Αν $a = |\alpha|e^{i\theta}$, τότε $w = |\alpha|e^{i\theta}z + b$. Επομένως ο μετασχηματισμός f είναι σύνθεση μιας στροφής, μιας μεγέθυνσης και μιας μετατόπισης. Η στροφή γίνεται κατά τη γωνία $\theta = \text{Arg} a$, η μεγέθυνση κατά τον παράγοντα $\kappa = |\alpha|$ και η μετατόπιση κατά το διάνυσμα b . Η αντίστροφη απεικόνιση είναι

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$$

Ένας **διγραμμικός μετασχηματισμός** ή **μετασχηματισμός Möbius** είναι μια μιγαδική συνάρτηση της μορφής

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, z \neq -\frac{d}{c} \quad (1)$$

Όπου a, b, c, d είναι δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$ad \neq bc$$

αφού διαφορετικά η συνάρτηση $f(z)$ θα ήταν σταθερή.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $a \neq 0$ και $c \neq 0$.

Έτσι η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$w = f(z) = \lambda \frac{z + \alpha}{z + \beta}, \lambda = \frac{a}{c}, \alpha = \frac{b}{a}, \beta = \frac{d}{c}, \alpha \neq \beta. \quad (2)$$

Ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι σύμμορφος στο $\mathbb{C} \setminus \{-\beta\}$, αφού

$$f'(z) = \lambda \frac{\beta - \alpha}{(z + \beta)^2} \neq 0.$$

Το σημείο $-\beta$ είναι ένας απλός πόλος της f . Επίσης, ο μετασχηματισμός (2) είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{C} \setminus \{-\beta\}$, επί του $\mathbb{C} \setminus \{-\lambda\}$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι

$$z = \frac{-\beta w + \lambda \alpha}{w - \lambda}.$$

Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε τον μετασχηματισμό (2) έτσι ώστε να είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του επεκτεταμένου z -επιπέδου πάνω στο επεκτεταμένο w -επίπεδο, θέτοντας

$$f(-\beta) = \infty \text{ και } f(\infty) = \lambda.$$

Για την έκφραση ενός διγραμμικού μετασχηματισμού έχουμε τρεις αυθαίρετες παραμέτρους λ, α και β . Έτσι υπάρχουν άπειροι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το επεκτεταμένο z -επίπεδο στο επεκτεταμένο w -επίπεδο.

Θεώρημα 1.3.1. Υπάρχει μοναδικός διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τρία διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3 σε τρία διαφορετικά σημεία w_1, w_2, w_3 , αντίστοιχα και ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται από τη σχέση

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad (3)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι οι συνθήκες

$$f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2, f(z_3) = w_3,$$

Ορίζουν μονοσήμαντα τις τιμές των παραμέτρων λ, α και β .

Διαπιστώνεται ότι

$$w_2 - w_3 = \lambda \frac{(z_2 - z_3)(\beta - \alpha)}{(z_2 + \beta)(z_3 + \beta)}$$

και

$$w_2 - w_1 = \lambda \frac{(z_2 - z_1)(\beta - \alpha)}{(z_2 + \beta)(z_1 + \beta)}.$$

Άρα

$$\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{(z_2 - z_3)(z_1 + \beta)}{(z_2 - z_1)(z_3 + \beta)} \quad (4)$$

Παρατήρηση. Επειδή ένας διγραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει το επεκτεταμένο z -επίπεδο στο επεκτεταμένο w -επίπεδο, είναι δυνατόν ένα από τα σημεία z_i και ένα από τα w_i να είναι το ∞ . Επομένως, αν $z_1 = \infty$, τότε το δεύτερο μέλος της (3) γίνεται

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Αν $w_1 = \infty$, τότε το πρώτο μέλος της (3) γίνεται

$$\frac{w_2 - w_3}{w - w_3}.$$

Πρόταση 1.3.1. Έστω $f(z)$ ένας διγραμμικός μετασχηματισμός. Αν $E \subset \mathbb{C}$ είναι μια ευθεία και $K \subset \mathbb{C}$ ένας κύκλος στο z -επίπεδο, τότε το $f(E)$ είναι ευθεία ή κύκλος και το $f(K)$ είναι ευθεία ή κύκλος στο w -επίπεδο.

Απόδειξη. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους. Όμως, κάθε διγραμμικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών και μιας αντιστροφής, έτσι αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για $w = f(z) = \frac{1}{z}$.

Η εξίσωση της E στο z -επίπεδο θα είναι της μορφής

$$az + \bar{a}\bar{z} + b = 0$$

όπου $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $b \in \mathbb{R}$. Για $z = \frac{1}{w}$ στη σχέση αυτή έχουμε

$$bw\bar{w} + a\bar{w} + \bar{a}w = 0$$

η οποία παριστάνει ευθεία αν $b = 0$ ή κύκλο αν $b \neq 0$.

Η εξίσωση του K στο z -επίπεδο θα είναι της μορφής

$$azz + \bar{b}\bar{z} + b\bar{z} + \kappa = 0,$$

όπου $a, \kappa \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ και $|b^2| > a\kappa$. Με $z = \frac{1}{w}$ έχουμε

$$\kappa w\bar{w} + \bar{b}\bar{w} + bw + a = 0$$

που παριστάνει κύκλο αν $\kappa \neq 0$ ή ευθεία αν $\kappa = 0$.

Παρατήρηση. Στη θεωρία διγραμμικών μετασχηματισμών μια ευθεία θεωρείται κύκλος με άπειρη ακτίνα. Συνεπώς, η παραπάνω πρόταση αναφέρει ότι ένας διγραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει κύκλους του z -επιπέδου σε κύκλους του w -επιπέδου.

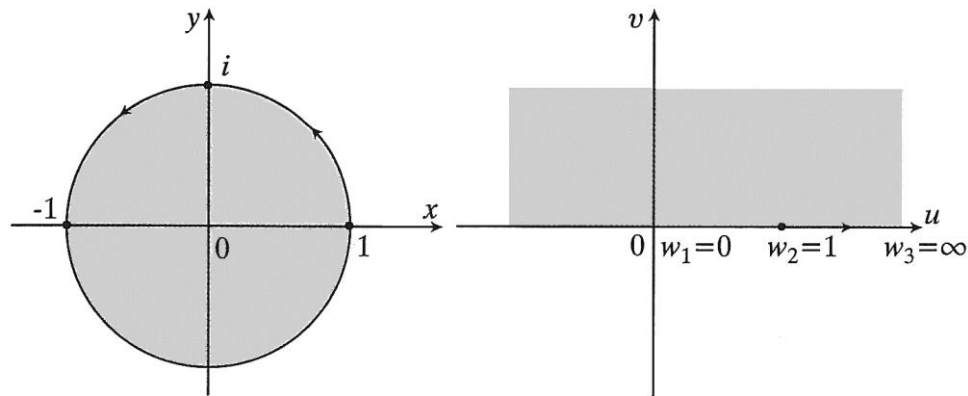
Παράδειγμα 1.3.2. Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο $|z| < 1$ επί του άνω ημιεπιπέδου $\text{Im } w > 0$.

Λύση. Πρέπει να βρούμε έναν διγραμμικό μετασχηματισμό τέτοιο ώστε

$$z_1 = 1 \longrightarrow w_1 = 0$$

$$z_2 = i \longrightarrow w_2 = 1$$

$$z_3 = -1 \longrightarrow w_3 = \infty$$



Σχ. 9

Ο μετασχηματισμός

$$w = \lambda \frac{z-1}{z+1}$$

απεικονίζει το 1 στο 0 και το -1 στο ∞ . Επειδή το i απεικονίζεται στο 1 έχουμε

$$1 = \lambda \frac{i-1}{i+1},$$

και επομένως $\lambda = -i$.

Άρα, ο μετασχηματισμός

$$w = i \frac{1-z}{1+z}$$

απεικονίζει κύκλο $|z|=1$ επί της ευθείας $u=0$ και επειδή η φορά διαγραφής διατηρείται, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.2, το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.

Παρατήρηση. Για να βρούμε σε ποιο ημιεπίπεδο βρίσκεται η απεικόνιση, μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου z και για αυτό το σημείο από τον μετασχηματισμό να βρούμε το πρόσημο του $f(z)$. Αν $f(z) > 0$ η απεικόνιση θα βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και αν

$f(z) < 0$ η απεικόνιση θα βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο. Για το παραπάνω παράδειγμα έστω ένα εσωτερικό σημείο του κύκλου $z = 0$. Τότε

$$w = i \frac{1-0}{1+0} = i > 0$$

Επομένως, η απεικόνιση βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο.

Συμμετρικά σημεία

Έστω E η ευθεία $az + \bar{a}\bar{z} + \kappa = 0$. Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία αν, και μόνο αν, ισχύει

$$az_1 + \bar{a}\bar{z}_2 + \kappa = 0$$

Έστω ο κύκλος C $|z - z_0| = r$. Δύο σημεία z_1 και z_2 είναι συμμετρικά ως προς κύκλο C αν τα z_1, z_2 ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\text{Arg}(z_1 - z_0) = \text{Arg}(z_2 - z_0) \quad (6)$$

$$|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = r^2 \quad (7)$$

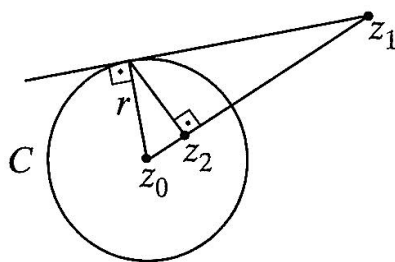
Το κέντρο z_0 και το ∞ θεωρούνται συμμετρικά ως προς τον κύκλο C .

Οι σχέσεις (6) και (7) μπορούν να γραφούν και στην εξής πιο απλή μορφή

$$(z_1 - z_0) \overline{(z_2 - z_0)} = r^2 \quad (8)$$

Από την (6) προκύπτει ότι δύο συμμετρικά σημεία z_1, z_2 και το κέντρο z_0 βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία και από την (7) ότι το γινόμενο των αποστάσεών τους από το κέντρο ισούται με r^2 .

Το συμμετρικό σημείο z_2 του z_1 ως προς τον κύκλο C κατασκευάζεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχ. 10

Αν το z_1 βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου C , τότε το συμμετρικό του ταυτίζεται με το z_1 .

Έστω $z_1 = z_0 + r_1 e^{i\theta}$ και z_2 το συμμετρικό του. Τα z_1 , z_2 και z_0 θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία σύμφωνα με τη σχέση (6) και από την (7) έχουμε ότι $z_2 = z_0 + r_2 e^{i\theta}$, όπου $r_2 = r^2 / r_1$. Έστω z ένα σημείο του κύκλου C και $z = z_0 + r e^{i\varphi}$. Τότε

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \left| \frac{r e^{i\varphi} - r_1 e^{i\theta}}{r e^{i\varphi} - r_2 e^{i\theta}} \right| = \frac{r_1}{r} \left| \frac{r e^{i\varphi} - r_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\varphi} - r e^{i\theta}} \right|,$$

Δηλαδή

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \frac{r_1}{r} = \frac{r}{r_2}.$$

Αντίστροφα, αν δοθεί μια εξίσωση της μορφής

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \kappa, \quad z_1 \neq z_2, \quad \kappa \geq 0,$$

Τότε η εξίσωση αυτή παριστάνει έναν κύκλο για τον οποίο τα σημεία z_1 , z_2 είναι συμμετρικά. Μπορούμε να βρούμε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα συναρτήσει των z_1 , z_2 και κ . Από τη σχέση $|z - z_1| = \kappa |z - z_2|$, αποδεικνύεται ότι

$$\left| (z - z_1) - \kappa^2 (z - z_2) \right| = \kappa \left| (z - z_1) - (z - z_2) \right|,$$

Άρα

$$\left| z - \frac{z_1 - \kappa^2 z_2}{1 - \kappa^2} \right| = \frac{\kappa |z_1 - z_2|}{|1 - \kappa^2|}.$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$a = \frac{z_1 - \kappa^2 z_2}{1 - \kappa^2} \quad \text{και ακτίνα} \quad R = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \kappa^2|}. \quad (9)$$

Ακόμα έχουμε

$$z_1 - a = \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} (z_2 - z_1) \quad \text{και} \quad z_2 - a = \frac{1}{1 - \kappa^2} (z_2 - z_1),$$

επομένως

$$(z_1 - a)(\overline{z_2 - a}) = R^2.$$

Άρα τα z_1, z_2 είναι όντως συμμετρικά ως προς τον κύκλο του οποίου το κέντρο και η ακτίνα δίνονται από τη σχέση (9). Αν $\kappa = 0$ ο κύκλος τότε είναι ένα σημείο αφού με αντικατάσταση προκύπτει ότι η ακτίνα ισούται με μηδέν. Αν τώρα $\kappa = 1$, η ακτίνα γίνεται άπειρη και έτσι ο κύκλος είναι μια ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ δίνει την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα z_1 και z_2 .

Η εξίσωση

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \kappa, \kappa > 0,$$

παριστάνει κύκλο ως προς τον οποίο τα σημεία z_1 και z_2 είναι συμμετρικά. Η οικογένεια των κύκλων που έχουν τα ίδια συμμετρικά σημεία z_1 και z_2 ονομάζεται **οικογένεια κύκλων του Απολλωνίου**.

Ιδιότητα διατήρησης της συμμετρίας.

Έστω ο διγραμμικός μετασχηματισμός

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (10)$$

C ένας κύκλος στο z -επίπεδο και z_1, z_2 δύο σημεία συμμετρικά ως προς αυτό τον κύκλο με $z_1 \neq z_2$. Αν C' είναι η εικόνα του C μέσω της f , τότε τα σημεία $w_1 = f(z_1)$ και $w_2 = f(z_2)$ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο C' . Θα αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή με την αλγεβρική μέθοδο (υπάρχει και η γεωμετρική μέθοδος).

Απόδειξη.

Ο κύκλος C μπορεί να παρασταθεί με τη σχέση

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \kappa, \kappa > 0. \quad (11)$$

ο αντίστροφος του μετασχηματισμού είναι (10) είναι

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στην (11) έχουμε

$$\left| \frac{(cz_1 + d)w - (az_1 + b)}{(cz_2 + d)w - (az_2 + b)} \right| = \kappa. \quad (12)$$

Αν $z_1, z_2 \neq -\frac{d}{c}$, τότε η (12) γράφεται

$$\left| \frac{w - w_1}{w - w_2} \right| = \kappa \left| \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \right| = \kappa', \quad \kappa' > 0$$

άρα τα w_1, w_2 είναι συμμετρικά σημεία του κύκλου C' .

Αν $z_1 = -\frac{d}{c}$, τότε $w_1 = f(z_1) = \infty$ και η (12) γίνεται

$$|w - w_2| = \frac{1}{\kappa} \left| \frac{az_1 + b}{cz_2 + d} \right|,$$

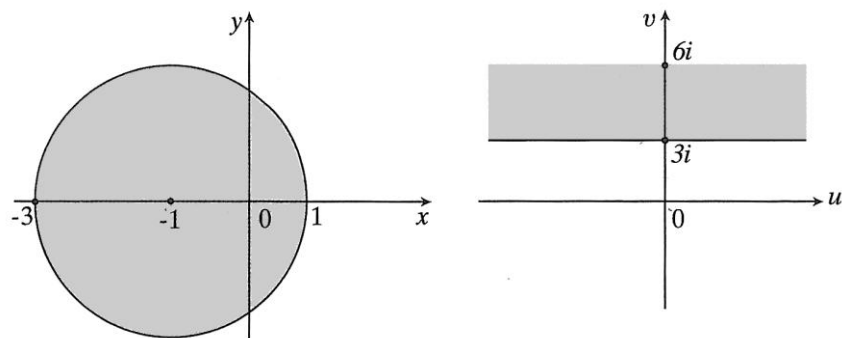
άρα το w_2 είναι το κέντρο του κύκλου C' και άρα τα w_1, w_2 συμμετρικά ως προς τον κύκλο C' . Το ίδιο ισχύει και αν είναι $z_2 = -\frac{d}{c}$.

Πρόταση 1.3.2. Ένας διγραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει συμμετρικά σημεία ως προς έναν κύκλο σε συμμετρικά σημεία ως προς την εικόνα του κύκλου.

Παράδειγμα 1.3.3. Να βρεθεί ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το δίσκο $|z+1| \leq 2$ στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z \geq 3$.

Λύση

Τα σημεία -1 και ∞ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο $|z+1|=2$ και τα σημεία 0 και $6i$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im} z = 3$.



Σχ. 11

Θέλουμε να βρούμε έναν μετασχηματισμό που να απεικονίζει

$$z_1 = -1 \rightarrow w_1 = 6i$$

$$z_2 = \infty \rightarrow w_2 = 0$$

$$z_3 = 1 \rightarrow w_3 = 3i$$

και επειδή το ∞ απεικονίζεται στο 0 θέλουμε έναν μετασχηματισμό της μορφής

$$w = \frac{a}{z + \beta}.$$

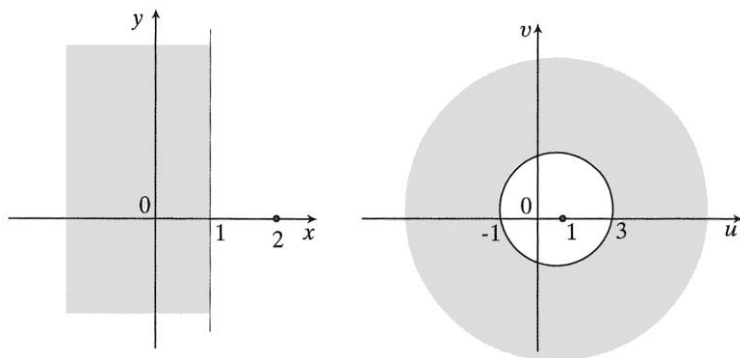
Επειδή

$$6i = \frac{a}{-1 + \beta} \text{ και } 3i = \frac{a}{1 + \beta},$$

έχουμε ότι

$$w = \frac{12i}{z + 3}.$$

Παράδειγμα 1.3.4. Να βρεθεί ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το ημιεπίπεδο $\operatorname{Re} z \leq 1$ επί του συνόλου $|z - 1| \geq 2$.



Σχ. 12

Λύση. Τα σημεία 0 και 2 είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Re} z = 1$. Από τον τύπο (8) προκύπτει ότι το συμμετρικό του 0 ως προς τον κύκλο $|z - 1| = 2$ είναι το -3 . Αναζητούμε ένα μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $z_1 = 0, z_2 = 2$ και $z_3 = 1$ στα σημεία $w_1 = -3, w_2 = 0$ και $w_3 = -1$ αντίστοιχα. Αν $f(z) = \lambda \frac{z + \alpha}{z + \beta}$ είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός θα πρέπει $\lambda\alpha = -3\beta$, $\alpha = -2$ και $\lambda = 1 + \beta$, οπότε $\lambda = 3$ και $\beta = 2$, που σημαίνει ότι

$$f(z) = 3 \frac{z - 2}{z + 2}.$$

Παράδειγμα 1.3.5. Να βρεθούν οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το δίσκο $|z| < 1$ επί του δίσκου $|w| < 1$ έτσι ώστε ένα δοσμένο εσωτερικό σημείο α να απεικονίζεται στο κέντρο του δίσκου.

Λύση. Τα σημεία α και $1/\bar{\alpha}$ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο $|z| = 1$. Εφόσον το α απεικονίζεται στο 0, το $1/\bar{\alpha}$ θα απεικονίζεται στο ∞ , που είναι συμμετρικό του 0 ως προς τον κύκλο $|w| = 1$. Επομένως, ένας τέτοιος μετασχηματισμός θα είναι της μορφής

$$w = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = -\lambda \bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Επειδή $|w| = 1$, θα είναι

$$\left| -\lambda \bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = |\lambda \bar{\alpha}| \left| \frac{e^{i\varphi} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}e^{i\varphi}} \right| = |\lambda \bar{\alpha}| \left| \frac{e^{i\varphi} - \alpha}{e^{-i\varphi} - \bar{\alpha}} \right| = |\lambda \bar{\alpha}| = 1,$$

αυτό σημαίνει ότι $-\lambda \bar{\alpha} = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Άρα οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί θα είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση. Η λύση του προβλήματος είναι μοναδική εκτός μιας σταθεράς θ . Παρατηρούμε ότι

$$f'(\alpha) = e^{i\theta} \frac{1}{1-|\alpha|^2}.$$

Επομένως

$$\arg f'(\alpha) = \theta,$$

που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός καθορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε το όρισμα της παραγώγου της f στο σημείο α .

Εφαρμογή. Να βρεθεί ο διγραμμικός μετασχηματισμός $w = f(z)$ που απεικονίζει το δίσκο $|z| < 1$ επί του δίσκου $|w| < 1$ έτσι, ώστε

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ και } \arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το δίσκο $|z| < 1$ επί του δίσκου $|w| < 1$ είναι

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = e^{i\theta} \frac{2z - 1}{2 - z}$$

Επειδή

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} e^{i\theta},$$

θα πρέπει $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \theta = \frac{\pi}{2}$, οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = i \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Παράδειγμα 1.3.6. Να βρεθούν οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z > 0$ επί του μοναδιαίου δίσκου και το σημείο $\alpha (\operatorname{Im} \alpha > 0)$ στο κέντρο $w = 0$ του δίσκου.

Λύση. Έστω

$$w = f(z) = \lambda \frac{z + \alpha}{z + \beta}$$

ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Το $\bar{\alpha}$ είναι συμμετρικό του α ως προς τον άξονα $\text{Im } z = 0$. Επειδή $f(\alpha) = 0$, θα πρέπει $f(\bar{\alpha}) = \infty$. Άρα οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί θα είναι της μορφής

$$f(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

Έχουμε $|f(0)| = \left| \kappa \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right| = |\kappa| = 1$, οπότε $\kappa = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \theta \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση. Αν $\alpha = \kappa + i\mu$, $\mu > 0$, τότε

$$f'(\alpha) = -i \frac{e^{i\theta}}{2\mu} \quad \text{ή} \quad f'(\alpha) = \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}}{2\mu},$$

οπότε $\arg f'(\alpha) = \theta - \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $\theta = \frac{\pi}{2} + \arg f'(\alpha)$. Επομένως, αν δίνεται το όρισμα της παραγώγου της f στο α , ο μετασχηματισμός ορίζεται μονοσήμαντα.

Εφαρμογή. Να βρεθεί ο διγραμμικός μετασχηματισμός $w = f(z)$ που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο $\text{Im } z > 0$ επί του δίσκου $|w| < 1$ έτσι, ώστε

$$f(i) = 0 \quad \text{και} \quad \text{Arg} f'(i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Λύση. Από τον τύπο προκύπτει

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}$$

Επειδή

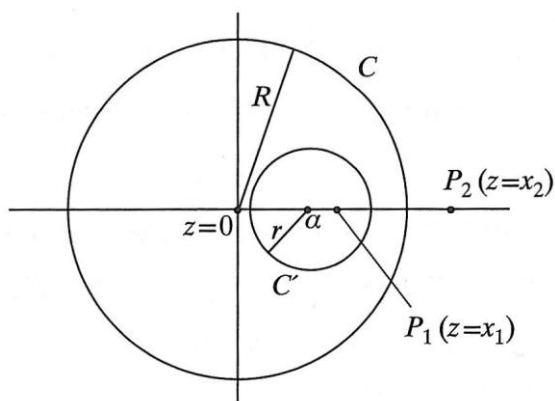
$$f'(i) = \frac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}}{2}$$

θα πρέπει $\text{Arg} f'(i) = \theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, δηλαδή $\theta = 0$, οπότε

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Παράδειγμα 1.3.7. Να βρεθεί ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα δακτύλιο μη ομόκεντρων κύκλων σε δακτύλιο ομόκεντρων κύκλων.

Λύση. Υποθέτουμε ότι το κέντρο του μεγαλύτερου κύκλου C είναι το $z = 0$ με ακτίνα R και το κέντρο του μικρότερου κύκλου C' με ακτίνα r βρίσκεται στο σημείο $z = \alpha$ του πραγματικού άξονα. Βρίσκουμε δύο σημεία P_1 και P_2 που είναι συμμετρικά και ως προς τους δύο κύκλους C και C' . Τα σημεία αυτά προφανώς βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα. (βλ. Σχ. 15).



Σχ. 13

Επειδή τα P_1 και P_2 είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους C και C' θα ισχύουν οι σχέσεις

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) = r^2 \quad (13)$$

$$x_1 x_2 = R^2 \quad (14)$$

Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε ότι τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\alpha x^2 - (R^2 - r^2 + \alpha^2)x + \alpha R^2 = 0 \quad (15)$$

Η ορίζουσα της εξίσωσης $(R^2 - r^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 R^2$ είναι θετική αφού ισχύει $R - r > \alpha$.

Θεωρούμε το διγραμμικό μετασχηματισμό

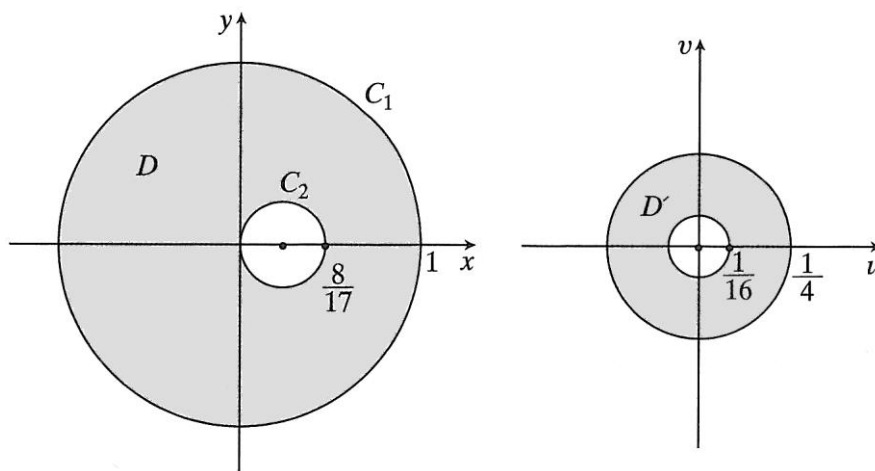
$$w = \lambda \frac{z - x_1}{z - x_2} \quad (16)$$

όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (15).

Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει τους κύκλους C και C' σε δύο κύκλους K και K' του w -επιπέδου. Το P_2 απεικονίζεται στο $w = \infty$. Το σημείο P_1 που

είναι συμμετρικό του P_2 ως προς τους κύκλους C και C' απεικονίζεται σε σημείο που είναι συμμετρικό του $w = \infty$ ως προς τους κύκλους K και K' . Αλλά ένα σημείο συμμετρικό του απείρου είναι το κέντρο του κύκλου. Άρα η (16) θα απεικονίζει το P_1 στο κοινό κέντρο των δύο κύκλων K και K' . Επομένως η (16) είναι η επιθυμητή απεικόνιση.

Παράδειγμα 1.3.8. Να βρεθεί ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D μεταξύ του κύκλου $C_1 : |z| = 1$ και $C_2 : \left| z - \frac{4}{17} \right| = \frac{4}{17}$ σε ένα δακτύλιο.



Σχ. 14

Δύο σημεία που είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους C_1 και C_2 ικανοποιούν την εξίσωση.

$$4x^2 - 17x + 4 = 0,$$

οπότε

$$x_1 = \frac{1}{4} \text{ και } x_2 = 4$$

Η οικογένεια των κύκλων που έχει συμμετρικά σημεία τα x_1, x_2 είναι

$$\left| \frac{z - \frac{1}{4}}{z - 4} \right| = \kappa$$

Ο κύκλος C_1 , λόγω της σχέσεως (9), αντιστοιχεί για $\kappa = \frac{1}{4}$ και ο κύκλος C_2 για

$\kappa = \frac{1}{16}$. Ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z - \frac{1}{4}}{z - 4}$$

απεικονίζει προφανώς τους κύκλους (17) σε μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων. Το πεδίο D απεικονίζεται στο D' που ορίζεται από τη σχέση

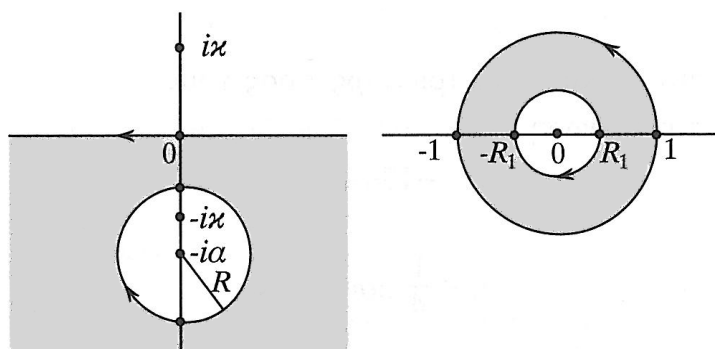
$$\frac{1}{16} < |w| < \frac{1}{4}$$

Παράδειγμα 1.3.9. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο

$$D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, |z + i\alpha| > R, \alpha > R > 0\}$$

σε ένα δακτύλιο με κέντρο το 0.

Λύση. Θα βρούμε καταρχήν δύο σημεία που είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im} z = 0$ και ως προς τον κύκλο $|z + i\alpha| = R$ ταυτόχρονα. Είναι φανερό ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται στον φανταστικό άξονα.



Σχ. 15

Επειδή τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im} z = 0$ θα είναι της μορφής $+i\kappa$ και $-i\kappa$ με $\kappa > 0$. Επειδή δε είναι συμμετρικά και ως προς τον κύκλο $|z + i\alpha| = R$, από τον τύπο (8) προκύπτει ότι $(\alpha + \kappa)(\alpha - \kappa) = R^2$, δηλαδή $\kappa = \sqrt{\alpha^2 - R^2}$. Θα δείξουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = \frac{z + i\kappa}{z - i\kappa} \quad (18)$$

Πράγματι, το σημείο $z = -ik$ απεικονίζεται στο $w = 0$, ενώ το σημείο $z = -ik$ απεικονίζεται στο $w = \infty$, επομένως η εικόνα της ευθείας $\text{Im } z = 0$ θα είναι ένας κύκλος C είναι $|w| = 1$. Με ανάλογο τρόπο, αποδεικνύεται ότι ο κύκλος $|z + i\alpha| = R$ απεικονίζεται σε έναν κύκλο $|w| = R_1$ όπου $R_1 = \frac{R + \alpha - \kappa}{R + \alpha + \kappa}$. Από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων ο μετασχηματισμός (8) απεικονίζει το πεδίο D σύμφωνα επί του δακτυλίου $R_1 < |w| < 1$.

1.4. Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το αποτέλεσμα ορισμένων στοιχειωδών μετασχηματισμών πάνω σε καμπύλες και πεδία του επιπέδου.

α) Ο μετασχηματισμός $f(z) = z^2$

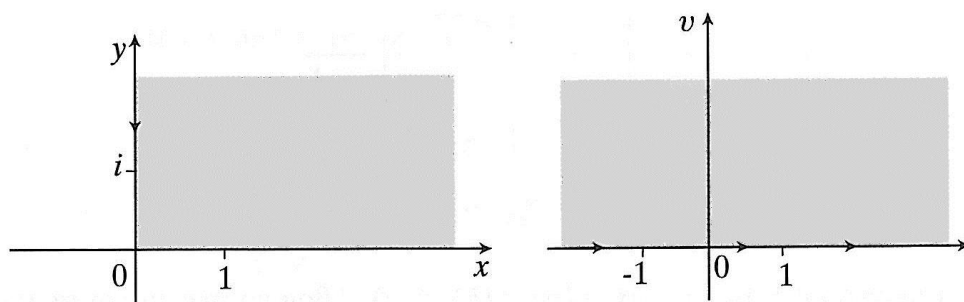
Είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι σύμμορφος στο $C \setminus \{0\}$. Αν $w = f(z)$, $w = Re^{i\varphi}$ και $z = re^{i\theta}$, τότε

$$w = z^2 = r^2 e^{2i\theta} \Rightarrow R = r^2 \text{ και } \varphi = 2\theta.$$

Επομένως, η f απεικονίζει το κύκλο $|z| = a$ στον κύκλο $|w| = a^2$. Επίσης, η f απεικονίζει μια ημιευθεία με αρχή το 0 έστω $\theta = \kappa$ στην ημιευθεία $\varphi = 2\kappa$.

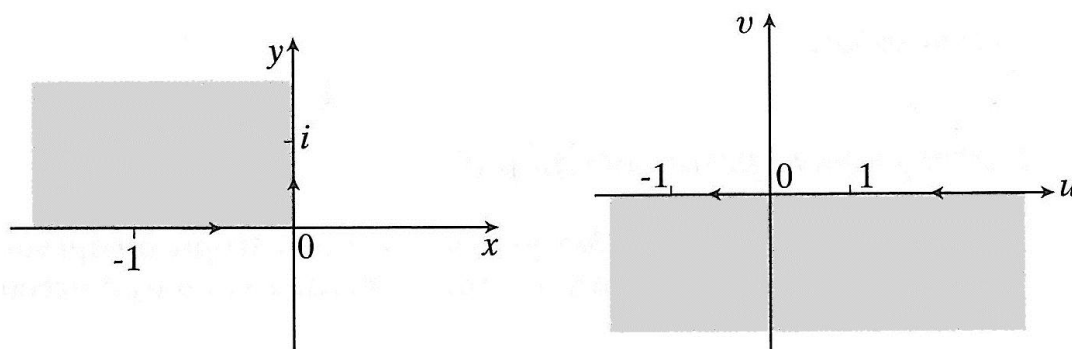
Αν $w = u + iv = f(z) = z^2$, τότε $u(x, y) = x^2 - y^2$ και $v(x, y) = 2xy$. Επομένως η f απεικονίζει τις ορθογώνιες οικογένειες των υπερβολών $x^2 - y^2 = C$ και $2xy = C$ του z -επιπέδου στις ορθογώνιες οικογένειες των ευθειών $u = c$ και $v = c$ του w -επιπέδου.

Επειδή $f(i) = -1$, $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, η f απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχ. 16

Με ανάλογο τρόπο, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f απεικονίζει το δεύτερο τεταρτημόριο στο κάτω ημιεπίπεδο.



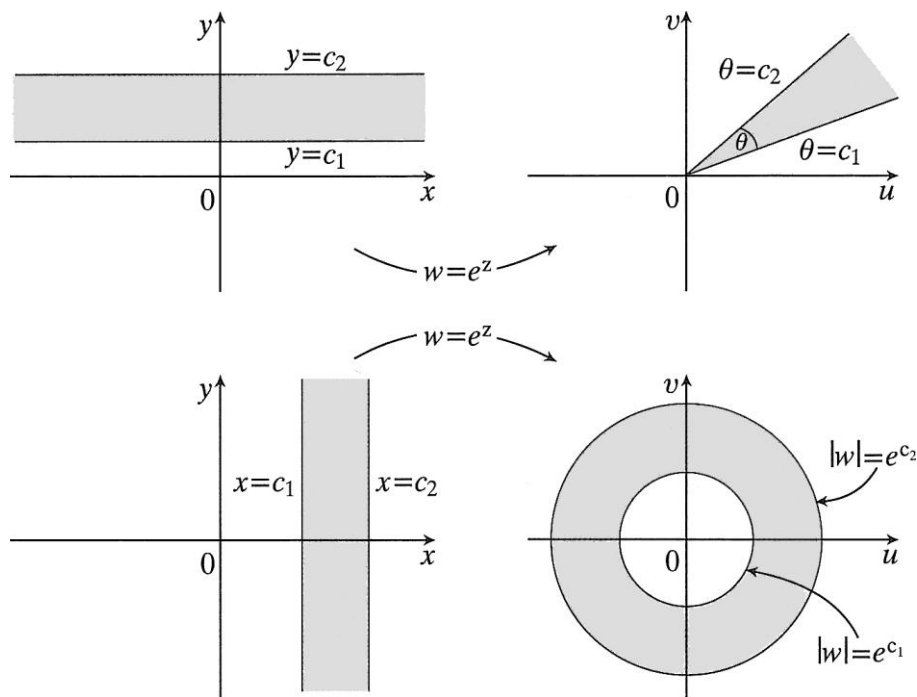
Σχ. 17

β) Εκθετικοί και λογαριθμικοί μετασχηματισμοί

Η συνάρτηση $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C}$ αλλά δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{C}$. Ο περιορισμός της f στο πεδίο $D = \{z = x + iy : -\pi < y \leq \pi\}$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Έστω $z = x + iy$ και $w = re^{i\varphi}$. Τότε αν $w = e^z$, έχουμε

$$r(x, y) = e^x \text{ και } \varphi(x, y) = y \quad (1)$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι η f απεικονίζει μια οριζόντια ευθεία $y = c$, όπου c σταθερά, σε μια ημιευθεία $\varphi = c$ με αρχή το 0, και μια κατακόρυφη ευθεία $x = c$ στον κύκλο $|w| = e^c$. Επομένως αν $c_2 > c_1$ με $c_2 - c_1 < 2\pi$, τότε η f απεικονίζει την οριζόντια λωρίδα που περιορίζεται από τις ευθείες $y = c_1$ και $y = c_2$ στο γωνιακό πεδίο με γωνία $\theta = c_2 - c_1$ (βλ. σχήμα). Επίσης η άπειρη λωρίδα που περιορίζεται από τις ευθείες $x = c_1$ και $x = c_2$ με $c_2 > c_1$ απεικονίζεται στο δακτύλιο που ορίζουν οι κύκλοι $|w| = e^{c_1}$ και $|w| = e^{c_2}$.

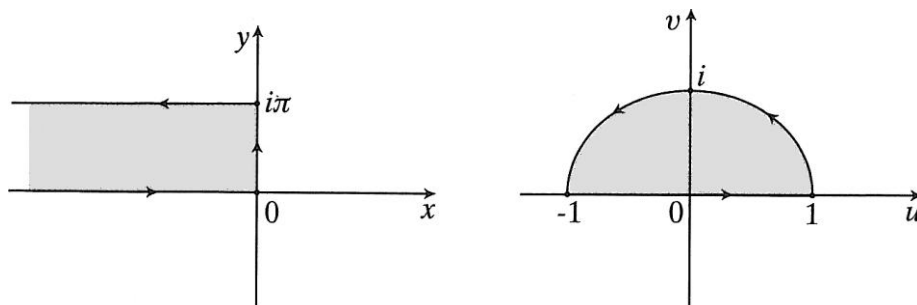


Σχ. 18

Παρατήρηση 1: Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός $f(z) = e^z$ απεικονίζει τη λωρίδα $0 < \text{Im } z < \pi$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα 1.4.1. Θεωρούμε πεδίο D στο z -επίπεδο που φαίνεται στο σχήμα 24. Να βρεθεί η εικόνα του D μέσω της απεικόνισης $f(z) = e^z$.

Λύση. Έχουμε $f(0) = 1$ και $f(\pi) = -1$. Επίσης αν $x \leq 0$ και $y = 0$, ισχύει ότι $w = e^x \in \mathbb{R}$ με $0 < w \leq 1$. Εξάλλου, αν $x = 0$ και $0 \leq y \leq \pi$, τότε $|w| = 1$ και $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi$. Για $x \leq 0$ και $y = \pi$, προκύπτει ότι $w = -e^{-x}$ και $-1 \leq w < 0$.



Σχ. 19

Άρα, το $f(D)$ είναι το άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου.

γ) Τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $w = f(z) = \sin z$. Επειδή $f'(z) = \cos z \neq 0$ για κάθε z με $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι σύμμορφος.

Έστω

$$u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Αν $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, τότε η κατακόρυφη ευθεία $x = \alpha$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις

$$u = \sin \alpha \cosh y, v = \cos \alpha \sinh y$$

Επειδή $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{u^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha} = 1$$

που είναι μια υπερβολή στο (u, v) επίπεδο με εστίες τα σημεία $(\pm 1, 0)$. Αν

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $u = \sin \alpha \cosh y > 0$ για κάθε y , άρα η ευθεία $x = \alpha$ απεικονίζεται

στο δεξιό κλάδο της υπερβολής. Αν $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, τότε η ευθεία $x = -\alpha$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $u = 0, u \geq 1$, που είναι μια εκφυλισμένη υπερβολή. Επίσης ο y -άξονας απεικονίζεται στον u -άξονα.

Έστω τώρα μια οριζόντια γραμμή $y = \beta (\beta > 0), -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

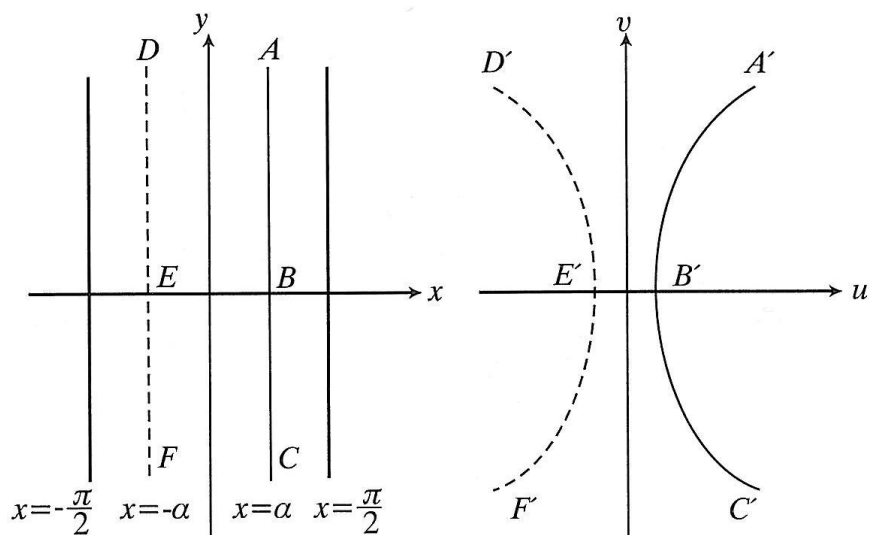
Έχουμε

$$u = \sin x \cosh \beta, v = \cos x \sinh \beta$$

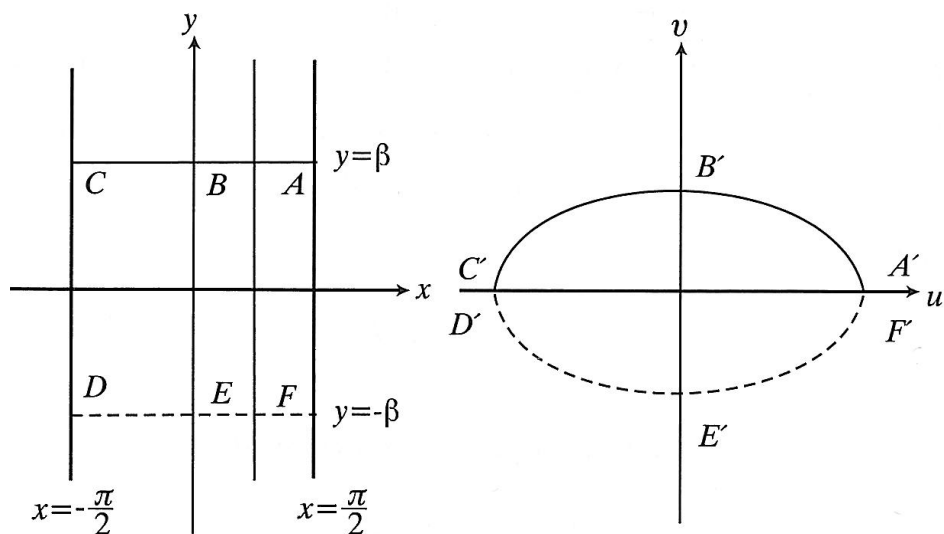
οπότε

$$\frac{u^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{v^2}{\sinh^2 \beta} = 1$$

που παριστάνει μια έλλειψη στο w -επίπεδο. Η γραμμή $y = \beta$ (αντ. $y = -\beta$) απεικονίζεται στο άνω (αντ. κάτω) μέρος της έλλειψης. Αν $\beta = 0$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $y = 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $u = 0, -1 \leq v \leq 1$ που είναι μια εκφυλισμένη έλλειψη.



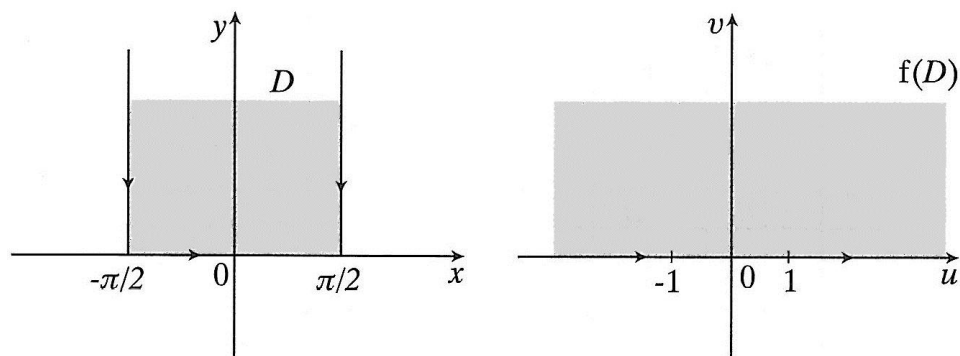
Σχ. 20. Κατακόρυφες ευθείες απεικονίζονται σε υπερβολές μέσω της απεικόνισης $w = \sin z$.



Σχ. 21. Οριζόντιες ευθείες απεικονίζονται σε ελλείψεις μέσω της απεικόνισης $w = \sin z$.

Παράδειγμα 1.4.2. Έστω $D = \left\{ z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0 \right\}$.

Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = \sin z$ απεικονίζει το D στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχ. 22

Για $z = -\frac{\pi}{2} + iy, y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\cosh y$. Άρα η f απεικονίζει την κατακόρυφη ημιευθεία $z = -\frac{\pi}{2} + iy, y \geq 0$, στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ απεικονίζεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Επίσης, για $z = \frac{\pi}{2} + iy, y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$, που σημαίνει ότι η κατακόρυφη ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$ απεικονίζεται στο διάστημα $[1, \infty)$. Έτσι, η f απεικονίζει το σύνορο του D στον πραγματικό άξονα. Από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων το D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.

δ) Σύθεση σύμμορφων απεικονίσεων

Πολλές φορές η κατασκευή μιας σύμμορφης απεικόνισης μεταξύ δύο πεδίων προκύπτει από τη σύθεση στοιχειωδών απεικονίσεων. Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία αυτή δίνουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.4.3. Να κατασκευαστεί μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει τη λωρίδα $0 < \operatorname{Re} z < \alpha$ επί του άνω ημιεπιπέδου $\operatorname{Im} w > 0$.

Λύση. Η απεικόνιση $w_1 = \frac{\pi}{\alpha} z$ απεικονίζει τη δοσμένη λωρίδα επί της λωρίδας

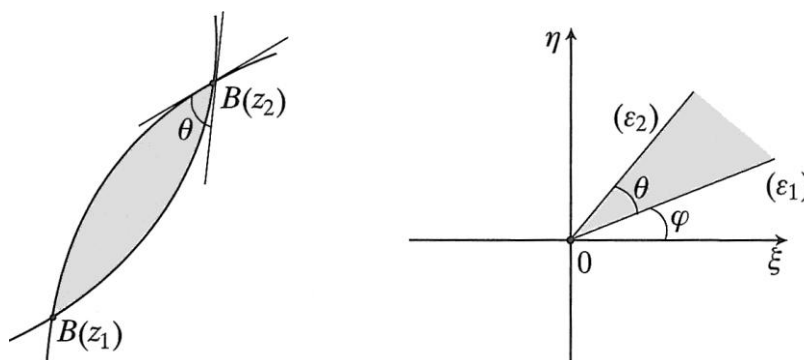
$I_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \pi$, ενώ η $w_2 = iw_1$ τη λωρίδα I_1 επί της $I_2 : 0 < \operatorname{Re} w_2 < \pi$.

Τέλος η απεικόνιση $w_3 = e^{w_2}$ απεικονίζει την I_2 επί του άνω ημιεπιπέδου. Επομένως η απεικόνιση

$$w = e^{i\frac{\pi}{\alpha}z}$$

είναι λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 1.4.4. Να βρεθεί μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει ένα πεδίο σχήματος φακού που σχηματίζεται από την τομή δύο κυκλικών δίσκων (βλ. σχήμα) στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχ. 23

Λύση. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$\zeta = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta) \quad (2)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει το σημείο $z = z_1$ στο σημείο $\zeta = 0$ και το σημείο $z = z_2$ στο $\zeta = \infty$. Λόγω της κυκλικής ιδιότητας ενός διγραμμικού μετασχηματισμού τα δύο κυκλικά τόξα του φακού θα απεικονίζονται μέσω της (2) σε δύο ημιευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) που έχουν αρχή το $\zeta = 0$ και σχηματίζουν γωνία θ .

Επομένως ο μετασχηματισμός (2) απεικονίζει το φακό του z -επιπέδου στο γωνιακό πεδίο του σχήματος στο ζ -επίπεδο. Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία (ϵ_1) με το θετικό ξ -άξονα. Ο μετασχηματισμός

$$w_1 = \zeta^{\frac{\pi}{\theta}}$$

απεικονίζει το γωνιακό πεδίο $\varphi < \arg z < \varphi + \theta$ στο ημιεπίπεδο $\frac{\varphi}{\theta}\pi < \arg w_1 < \frac{\varphi}{\theta}\pi + \pi$ (βλ. άσκηση 18). Το ημιεπίπεδο αυτό μέσω του μετασχηματισμού

$$w = e^{-i\frac{\varphi}{\theta}\pi} w_1$$

απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.

Επομένως ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = e^{-i\frac{\varphi}{\theta}\pi} w_1 = e^{-i\frac{\varphi}{\theta}\pi} z^{\frac{\pi}{\theta}},$$

Δηλαδή

$$w = e^{-i\frac{\varphi}{\theta}\pi} \left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right)^{\pi/\theta}$$

Εφαρμογή. Να κατασκευαστεί μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το άνω ήμισυ του δίσκου $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ επί του άνω ημιεπιπέδου $\operatorname{Im} w > 0$.

Είναι φανερό ότι το άνω ήμισυ του δίσκου είναι ένας φακός με κορυφές στα σημεία $z_1 = -1$ και $z_2 = 1$ και με γωνία κορυφής $\theta = \frac{\pi}{2}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η ζητούμενη σύμμορφη απεικόνιση είναι

$$w = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

Παράδειγμα 1.4.5. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το ήμισυ του δίσκου $D_1 = \{z : |z| < 1 \text{ και } \operatorname{Im} z > 0\}$ επί του μοναδιαίου δίσκου $D_2 = \{w : |w| < 1\}$.

Λύση. Από το παράδειγμα 1.3.7. γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός

$w_1 = \varphi(z) = i \frac{1-z}{1+z}$ απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο άνω ημιεπίπεδο.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει το D_1 στο

πρώτο τεταρτημόριο. Πράγματι, $\varphi\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$. Η απεικόνιση $w_2 = w_1^2$

απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο επί του άνω ημιεπιπέδου. Τέλος, η

απεικόνιση $w = \frac{i-w_2}{i+w_2}$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο επί του μοναδιαίου

δίσκου. Η απεικόνιση

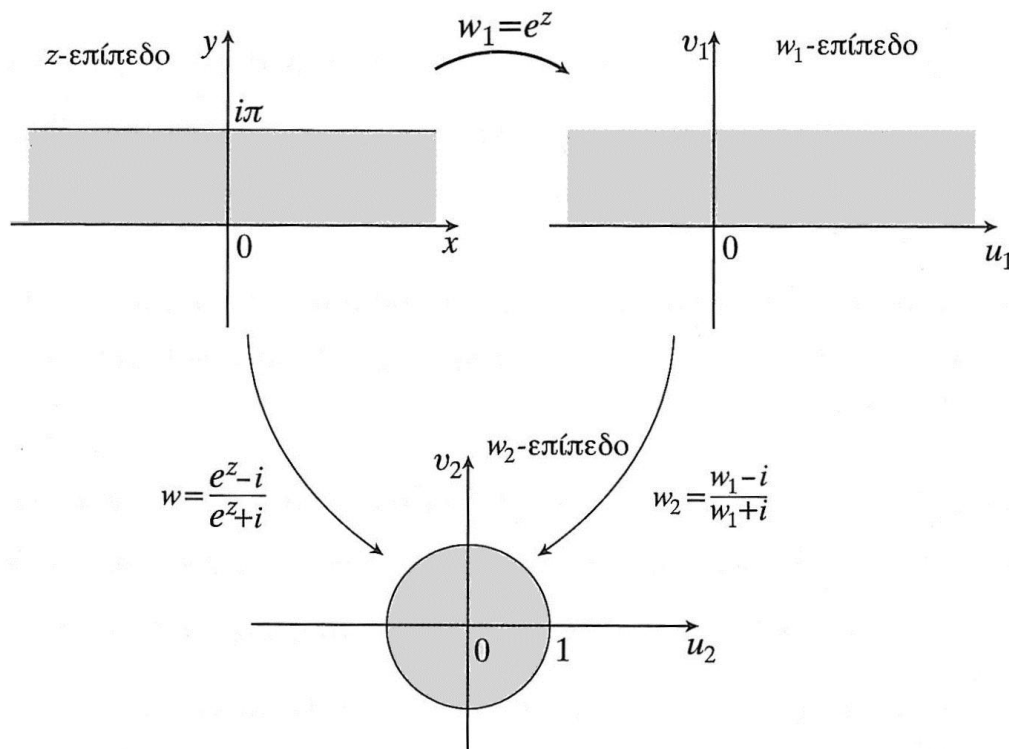
$$w = \frac{i-w_2}{i+w_2} = \frac{i-w_1^2}{i+w_1^2} = \frac{i - \left(i \frac{1-z}{1+z}\right)^2}{i + \left(i \frac{1-z}{1+z}\right)^2} = -i \frac{1+2iz+z^2}{1+2iz+z^2}$$

είναι η ζητούμενη απεικόνιση.

Παρατήρηση 2. Η ενδιάμεση απεικόνιση $w_2 = w_1^2 = -\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2$ είναι ενδιαφέρουσα. Απεικονίζει το D_1 επί του άνω ημιεπιπέδου.

Παράδειγμα 1.4.6. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την οριζόντια λωρίδα $0 < y < \pi$ επί του μοναδιαίου δίσκου.

Λύση. Ο μετασχηματισμός $w_1 = e^z$ απεικονίζει τη λωρίδα $0 < y < \pi$ στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχ. 24

Ο μετασχηματισμός $w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο μοναδιαίο

δίσκο, οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = \frac{e^z - i}{e^z + i}$$

Παράδειγμα 1.4.7. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ στο μοναδιαίο δίσκο.

Λύση. Η απεικόνιση $w_1 = e^z$ απεικονίζει το D στο άνω ήμισυ του δίσκου $D_1 = \{w_1 : |w_1| < 1, \operatorname{Im} w_1 > 0\}$. Από το παράδειγμα 1.4.5 ο μετασχηματισμός

$$w_2 = -i \frac{1 + 2iw_1 + w_1^2}{1 - 2iw_1 + w_1^2}$$

απεικονίζει το D_1 , στο μοναδιαίο κύκλο. Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = -i \frac{1 + 2ie^z + e^{2z}}{1 - 2ie^z + e^{2z}}$$

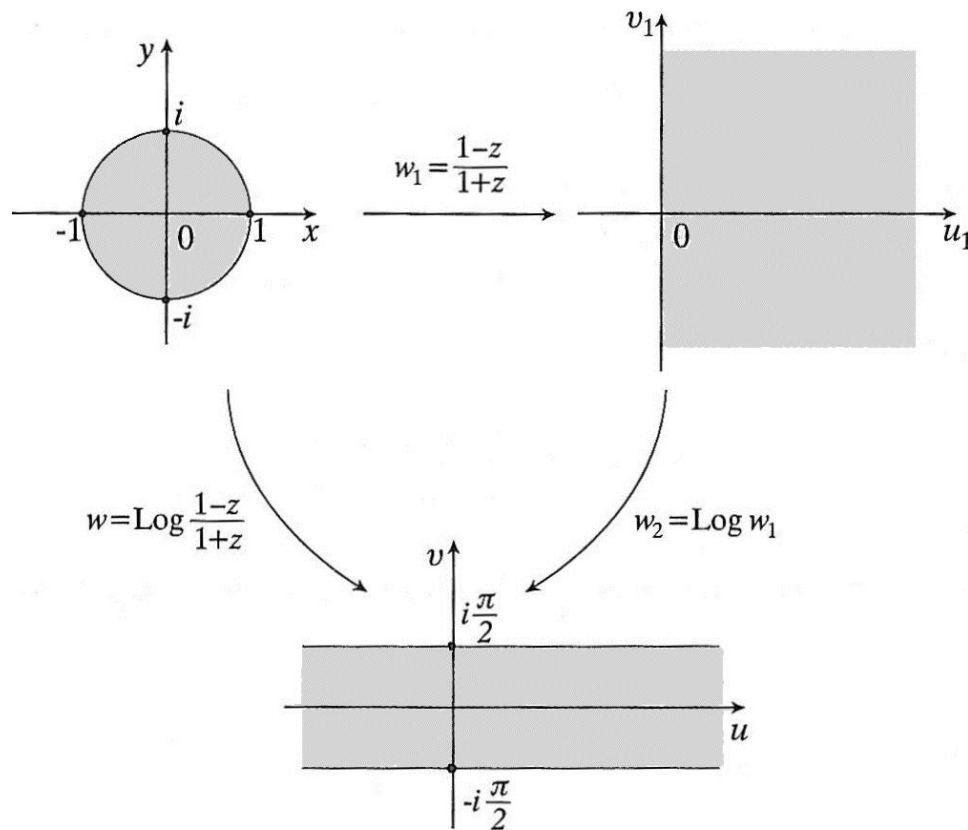
Παράδειγμα 1.4.8. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $|z| < 1$ στην οριζόντια λωρίδα $|u| < \frac{\pi}{2}$.

Λύση. Ο μετασχηματισμός $\varphi(z) = i \frac{1-z}{1+z}$ απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο

άνω ημιεπίπεδο. Επομένως ο μετασχηματισμός $w_1 = e^{-\frac{\pi}{2}i} \varphi(z) = -i\varphi(z)$ απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο δεξιό ημιεπίπεδο, δηλαδή

$$w_1 = \frac{1-z}{1+z}.$$

Η λογαριθμική συνάρτηση $w_2 = \operatorname{Log} w_1$ απεικονίζει το δεξιό ημιεπίπεδο στην οριζόντια λωρίδα $|u| < \frac{\pi}{2}$.



Σχ. 25

Άρα ο μετασχηματισμός $w = \text{Log} \frac{1-z}{1+z}$ είναι λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 1.4.9. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z| < 3$ επί του πρώτου τεταρτημορίου.

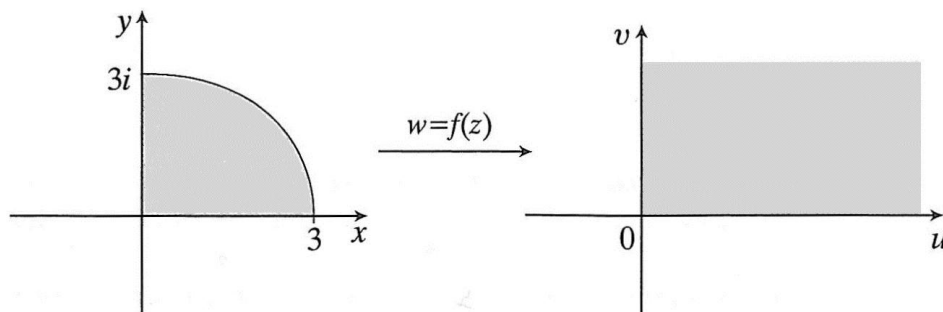
Λύση. Ο μετασχηματισμός $w_1 = \frac{z^2}{9}$ απεικονίζει το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z| < 3$ στο άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου. Ο μετασχηματισμός

$$w_2 = i \frac{1-w_1}{1+w_1}$$

απεικονίζει το άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου επί του πρώτου τεταρτημορίου.

Άρα, ένας ζητούμενος μετασχηματισμός θα είναι

$$w = f(z) = i \frac{1-w_1}{1+w_1} = i \frac{1-\frac{z^2}{9}}{1+\frac{z^2}{9}} = i \frac{9-z^2}{9+z^2}.$$

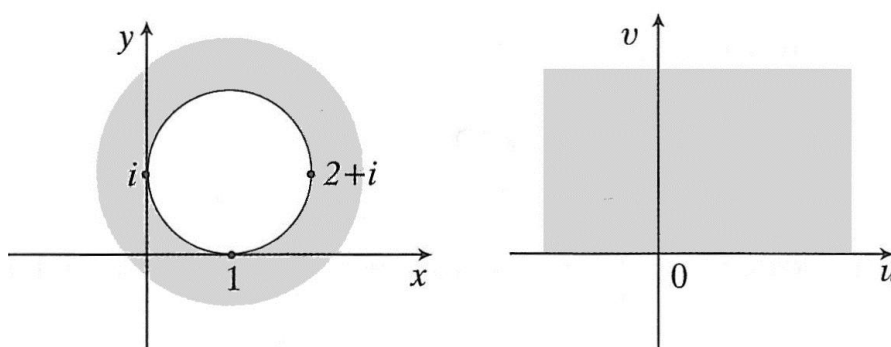


Σχ. 26

Παράδειγμα 1.4.10. Να βρεθεί ένα μετασχηματισμός που απεικονίζει το εξωτερικό του κύκλου $|z-1-i|=1$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση. Ο μετασχηματισμός $w_1 = z-1-i$ απεικονίζει το εξωτερικό του κύκλου $|z-1-i|=1$ στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Ο μετασχηματισμός $w_2 = 1/w_1$ απεικονίζει το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Τέλος ο μετασχηματισμός $w_3 = i \frac{1-w_2}{1+w_2}$ απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο στο άνω ημιεπίπεδο. Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο τελικός μετασχηματισμός είναι

$$w = f(z) = i \frac{z-2-i}{z-i}.$$



Σχ. 27

11.5. Ο μετασχηματισμός Joukowski

Η απεικόνιση

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ονομάζεται **μετασχηματισμός Joukowski**. Χρησιμοποιήθηκε από τον Ν.Ε. Joukowski για την επίλυση προβλημάτων της υδρο- και αεροδυναμικής.

Η σπουδαιότητά του βρίσκεται στο γεγονός ότι μετασχηματίζει κύκλους σε σχήματα τα οποία προσεγγίζουν το προφίλ του φτερού ενός αεροπλάνου και συμβάλουν στη μελέτη της ροής του αέρα γύρω από ένα φτερό.

Η συνάρτηση (1) είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου $z = 0$ που είναι πόλος πρώτης τάξεως. Η παράγωγος της f είναι

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

και είναι διαφορετική από το μηδέν σε όλα τα σημεία του z -επιπέδου εκτός από τα σημεία ± 1 . Επομένως η f είναι σύμμορφη παντού εκτός από τα δύο αυτά σημεία.

Επειδή $w = f(z) = f(1/z)$, δύο σημεία z_1, z_2 στο z -επίπεδο που ικανοποιούν τη σχέση $z_1 z_2 = 1$ έχουν την ίδια εικόνα στο w -επίπεδο.

Επομένως ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος σε ένα πεδίο D αν, και μόνον αν, δεν υπάρχουν δύο σημεία $z_1, z_2 \in D$ με $z_1 z_2 = 1$. Έτσι, ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος στα ακόλουθα πεδία:

α) $|z| < 1$, β) $|z| > 1$, γ) $\text{Im } z > 0$, δ) $\text{Im } z < 0$.

Έστω $z = re^{i\theta}$ και $w = u + iv$. Τότε

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (2)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η εικόνα του κύκλου $|z| = \rho < 1$ είναι η έλλειψη

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2} = 1 \quad (3)$$

με ημιάξονες $a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$ και $b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$ και εστίες τα σημεία ± 1 αφού

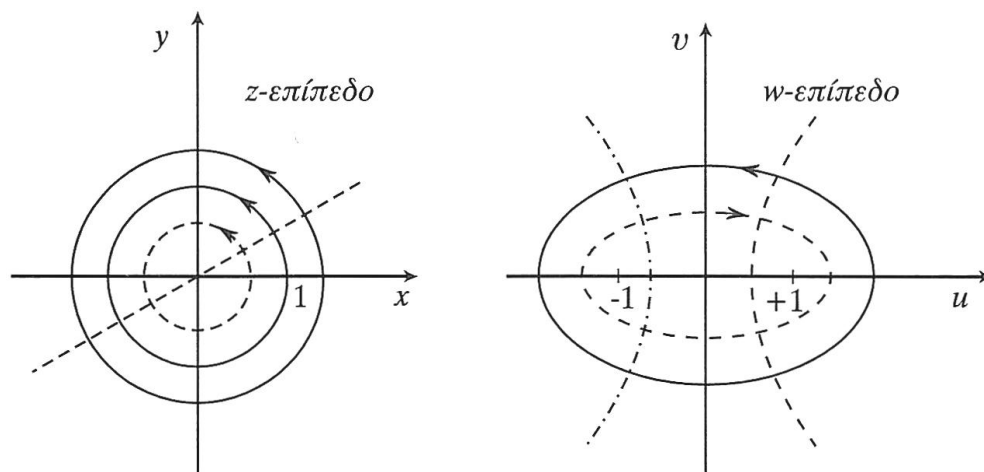
$$a_\rho^2 - b_\rho^2 = 1.$$

Για $\rho \rightarrow 1$ η έλλειψη εκφυλίζεται στο διάστημα $[-1,1]$ του u -άξονα, ενώ για $\rho \rightarrow 0$ οι άξονες της έλλειψης τείνουν στο άπειρο. Επομένως, η συνάρτηση Joukowski απεικονίζει σύμφωνα το μοναδιαίο δίσκο $|z| < 1$ στο $C \setminus [-1,1]$. Επίσης η συνάρτηση Joukowski απεικονίζει σύμφωνα το εξωτερικό $|z| > 1$ του δίσκου στο $C \setminus [-1,1]$, αφού $f(z) = f(1/z)$.

Έστω $z = \rho e^{i\theta}$ και $w = u + iv = |u + iv|e^{i\varphi}$, τότε από την (2) προκύπτει

$$\tan \varphi = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \tan \theta \quad (4)$$

Από την (4) συμπεραίνουμε τα ακόλουθα: αν το z διατρέχει τον κύκλο $|z| = \rho < 1$ κατά τη θετική φορά, τότε το w διατρέχει την έλλειψη (3) κατά την αρνητική φορά (σχ. 33). Όταν όμως το z διατρέχει τον κύκλο $|z| = \rho > 1$ κατά τη θετική φορά, τότε το w διατρέχει την έλλειψη (3) επίσης κατά τη θετική φορά.



Σχ. 28

Θεωρούμε τώρα την ημιευθεία

$$z = \rho e^{i\alpha}, \quad 0 < \rho < \infty$$

(α σταθερός). Μέσω του μετασχηματισμού Joukowski η ημιευθεία αυτή απεικονίζεται στην καμπύλη

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1, \quad \alpha \neq \frac{\kappa\pi}{2}$$

που είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία $w = +1$ και ασύμπτωτες $v = \pm u \tan \alpha$.

Παράδειγμα 1.5.1. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει το πεδίο $D = \{z : |z| > 1, 0 < \text{Arg} z < \pi\}$ στο άνω ημιεπίπεδο.

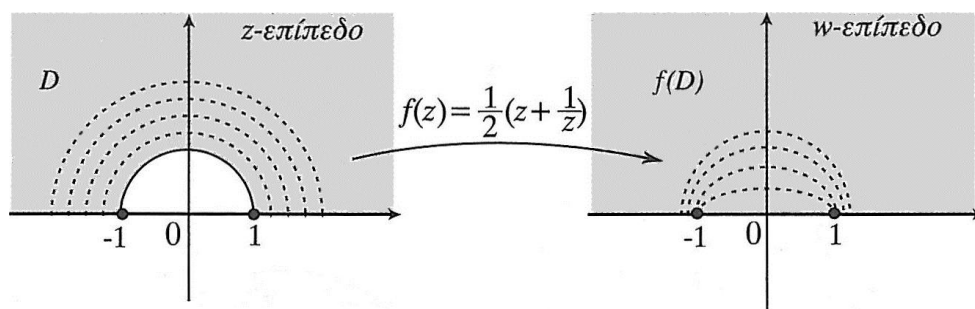
Λύση. Έστω $z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$, τότε

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta.$$

Επομένως όταν το θ μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το π , τότε το w μεταβάλλεται από το 1 στο -1 , που σημαίνει ότι η εικόνα του άνω ημικυκλίου είναι το διάστημα $[-1, 1]$. Για $z = x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(z) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$. Όταν το x διατρέχει το διάστημα $[1, \infty)$ ή $(-\infty, -1]$ το $f(x)$ διατρέχει το ίδιο διάστημα. Ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος στο D . Πράγματι, έστω $z_1 z_2 \in E$ με $f(z_1) = f(z_2)$. Τότε

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \Rightarrow (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - 1) = 0$$

οπότε $z_1 = z_2$ ή $z_1 z_2 = 1$. Επειδή όμως $|z_1| > 1$ και $|z_2| > 1$ δεν μπορεί να ισχύει $z_1 z_2 = 1$. Σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων το πεδίο D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχ. 29

Παράδειγμα 1.5.2. Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $D = \{z : |z| > 1, 0 < \text{Arg} z < \pi\}$ στο μοναδιαίο δίσκο.

Λύση. Ο μετασχηματισμός Joukowski $w_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ απεικονίζει το D στο άνω ημιεπίπεδο. Ο μετασχηματισμός $w_2 = \frac{i - w_1}{i + w_1}$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο μοναδιαίο δίσκο. Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = \frac{i - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{i + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\frac{z^2 - 2iz + 1}{z^2 + 2iz + 1}.$$

Παράδειγμα 1.5.3. Ναδειχτεί ότι ο μετασχηματισμός $w = \cosh z$ απεικονίζει τη μισή λωρίδα $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ επί του άνω ημιεπιπέδου $\operatorname{Im} w > 0$.

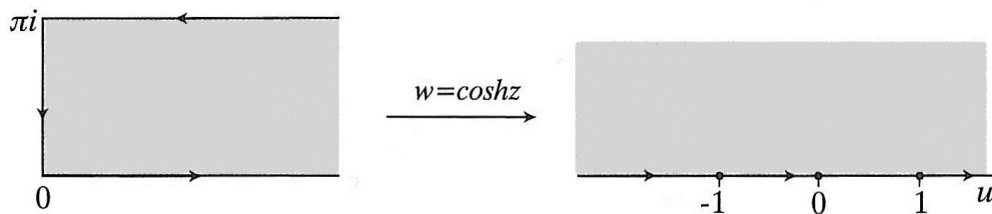
Λύση. Η συνάρτηση

$$w = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\zeta = e^z$ και $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$. Η συνάρτηση

$\zeta = e^z$ απεικονίζει τη μισή λωρίδα $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ επί του πεδίου $D = \{\zeta : |\zeta| > 1, 0 < \operatorname{Arg} \zeta < \pi\}$ (βλ. άσκηση 20). Η συνάρτηση Joukowski

$w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ απεικονίζει το D επί του άνω ημιεπιπέδου.



Σχ. 30

Παράδειγμα 1.5.4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $w = \cos z$ απεικονίζει τη μισή λωρίδα $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ επί του άνω ημιεπιπέδου $\operatorname{Im} w = 0$.

Λύση. Ισχύει $\cos z = \cosh(-iz)$, δηλαδή η συνάρτηση $w = \cos z$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\zeta = -iz$ που είναι στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$ και της $w = \cosh \zeta$ που μελετήσαμε προηγούμενα.

2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1. Γενικά

Οι μιγαδικές συναρτήσεις αποτελούν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση πολλών μαθηματικών προβλημάτων που εμφανίζονται σε διάφορους κλάδους των φυσικών επιστημών.

Για παράδειγμα, οι σύμμορφες απεικονίσεις σε πολλές περιπτώσεις δίνουν απλές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών που αφορούν στην εξίσωση Laplace, στα οποία ανάγονται διάφορα προβλήματα της υδρο-και αεροδυναμικής, της θεωρίας ελαστικότητας, της ηλεκτροστατικής κ.τ.λ.

Αυτό οφείλεται στη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ ολόμορφων και αρμονικών συναρτήσεων. Αποδείξαμε ότι μια συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ είναι ολόμορφη σε ένα πεδίο D αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι αρμονικές και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο D .

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι σημαντικές για την μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη βοήθεια σύμμορφων απεικονίσεων.

Πρόταση 2.1.1. Έστω φ αρμονική σε ένα πεδίο D του $\mathbb{C}$. Τότε η φ παραμένει αρμονική κάτω από κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό.

Σημείωση. Θα δώσουμε μια απόδειξη στην περίπτωση που το D είναι απλά συνεκτικό. Γενικά, είναι πιο εύκολο να αποδειχτεί εφαρμόζοντας τον αλυσιδωτό κανόνα στην εξίσωση Laplace.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το D είναι απλά συνεκτικό. Έστω F ένας σύμμορφος μετασχηματισμός με

$$w = u + i v = F(z) = F(x + i y)$$

Από την πρόταση 4.4.2., υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στο D τέτοια ώστε $f(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$.

Έστω $g(w) = f(z) = f(F^{-1}(w))$. Επειδή η F είναι σύμμορφη, η g είναι ολόμορφη στο $F(D)$. Έστω $g(w) = \varphi(u, v) + i \psi(u, v)$. Τότε από τη σχέση $g(w) = f(z)$, προκύπτει

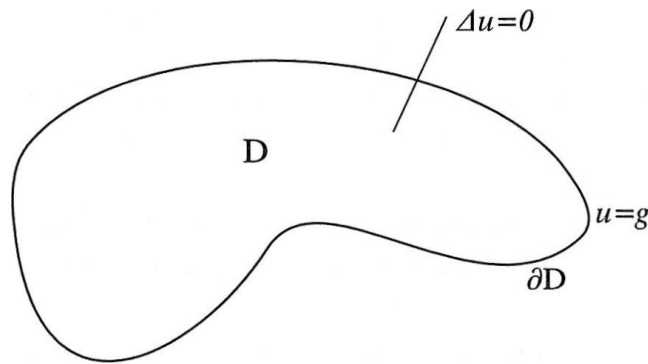
$$\varphi(u,v) = \varphi(x(u,v), y(u,v))$$

και επειδή $\varphi = \operatorname{Re} g$, η φ θα είναι αρμονική στο $F(D)$.

Δύο από τα βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών είναι τα ακόλουθα:

Πρόβλημα Dirichlet: Έστω D ένα πεδίο του $\mathbb{R}^2$ με σύνορο ∂D και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο ∂D . Το πρόβλημα Dirichlet συνίσταται στην εύρεση μιας συναρτήσεως g που είναι αρμονική στο D , συνεχής στο $\bar{D} = D \cup \partial D$ και ταυτίζεται με την g πάνω στο ∂D , δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } D \\ u = g & \text{στο } \partial D \end{cases} \quad (1)$$



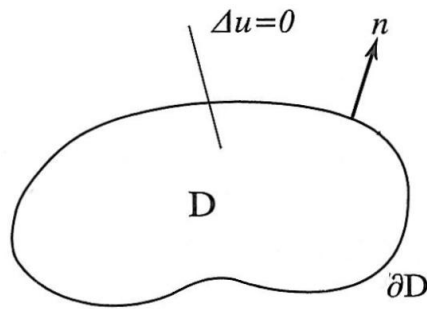
Σχ. 1

Αν το πρόβλημα (1) έχει λύση, τότε από την αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις προκύπτει ότι η λύση είναι μοναδική.

Πρόβλημα Neumann: Έστω D ένα πεδίο με σύνορο ∂D και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο ∂D . Το πρόβλημα Neumann συνίσταται στην εύρεση μιας συναρτήσεως u που είναι αρμονική στο D , συνεχής στο $\bar{D} = D \cup \partial D$ και της οποίας η παράγωγος ως προς την κατεύθυνση της κάθετου σε κάθε σημείο του συνόρου να ταυτίζεται με την g , δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{στο } \partial D \end{cases} \quad (2)$$

Με n συμβολίζεται το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς τα έξω.



Σχ. 2

Σε ένα πρόβλημα Neumann πρέπει να υποθέσουμε ότι το σύνορο είναι αρκετά λείο, ώστε να υπάρχει το κάθετο προς το σύνορο διάνυσμα n .

Για να υπάρχει λύση του προβλήματος Neumann θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη συμβιβαστότητας

$$\int_{\partial D} g ds = 0$$

Η συνθήκη αυτή προκύπτει άμεσα από την (2) και τη σχέση

$$\iint_D \Delta u dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Η συνθήκη συμβιβαστότητας έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: Υποθέτουμε ότι $u(x,y)$ είναι η λύση της στάσιμης κατανομής θερμοκρασίας εντός του D . Η

συνάρτηση $\frac{\partial u}{\partial n}$ πάνω στο ∂D παριστάνει τη ροή θερμότητας κατά μήκος του

συνόρου. Για να υπάρχει στάσιμη θερμοκρασία, θα πρέπει η συνολική ροή θερμότητας κατά μήκος του συνόρου να είναι μηδέν.

Η λύση του προβλήματος Neumann είναι μοναδική εκτός μιας προσθετικής σταθεράς.

Γενικά, οι συνοριακές συνθήκες σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μεταβάλλονται μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού. Υπάρχουν όμως δυο περιπτώσεις στις οποίες οι συνοριακές συνθήκες παραμένουν αμετάβλητες. Οι περιπτώσεις αυτές αφορούν σε ειδικά προβλήματα Dirichlet και Neumann.

Πρόταση 2.1.2. Έστω $w = F(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ μια σύμμορφη απεικόνιση ορισμένη στο πεδίο D , C μια λεία καμπύλη στο D και $C' = F(C)$. Αν η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\varphi(x, y) = \kappa, \kappa \text{ σταθερά ή } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ κατά μήκος της } C$$

τότε, η συνάρτηση $\Phi(u, v) = \varphi(x(u, v), y(u, v))$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\Phi(u, v) = \kappa \text{ και } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ κατά μήκος της } C'.$$

Απόδειξη. Αν $\varphi = \kappa$ πάνω στη C , τότε $\varphi = \kappa$ πάνω στη C' . Υποθέτουμε τώρα

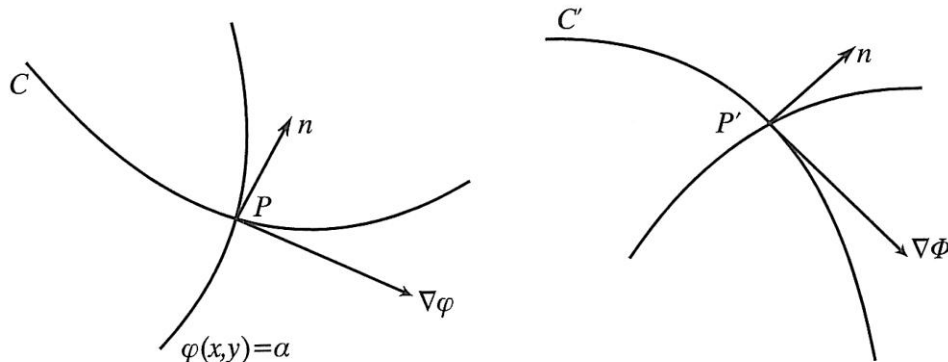
ότι $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot n = 0$ πάνω στη C , όπου $\nabla \varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$ και n είναι ένα μοναδιαίο

κάθετο διάνυσμα στη C στο σημείο $P(x, y)$. Τότε η $\nabla \varphi = 0$ ή $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στο n . Αν $\nabla \varphi = 0$, τότε είναι φανερό ότι $\nabla \Phi = (\Phi_u, \Phi_v) = 0$, οπότε

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Έστω $\nabla \varphi \neq 0$, οπότε το $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στο n . Αν $\nabla \varphi = 0$, τότε

είναι φανερό ότι $\nabla \Phi = (\Phi_u, \Phi_v) = 0$, οπότε $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$. Έστω $\nabla \varphi \neq 0$, οπότε το

$\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στο n και άρα εφαπτόμενο της C στο σημείο P .



Σχ. 3

Το $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στην καμπύλη $\varphi(x, y) = \alpha$ που περνάει από το P . Η

εικόνα της καμπύλης $\varphi(x, y) = \alpha$ μέσω της F είναι η καμπύλη $\Phi(u, v) = \alpha$ στο w -επίπεδο. Επειδή η F είναι σύμμορφη, οι γωνίες μεταξύ καμπυλών

διατηρούνται, άρα η C' είναι ορθογώνια της καμπύλης $\varphi(x, y) = \alpha$ στο P' .

Επομένως το $\nabla \Phi = (\Phi_u, \Phi_v)$ είναι εφαπτόμενο της C' στο P' και άρα ορθογώνιο στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της C' στο P' , οπότε $\nabla \Phi \cdot n = 0$,

άρα $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ πάνω στη C' .

Πολλές φορές, βασιζόμενοι στις προτάσεις 2.1.1. και 2.1.2., ακολουθούμε την ακόλουθη διαδικασία για την επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών που αφορά σε ένα πεδίο D του $\mathbb{R}^2$.

- Βρίσκουμε μια σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ που απεικονίζει το D σε ένα απλούστερο πεδίο D' .
- Μετασχηματίζουμε τις συνοριακές συνθήκες από το D στο D' .
- Επιλύουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο D' και έστω $\Phi(u,v)$ η λύση του.
- Θέτουμε $\varphi(x,y) = \Phi(u(x,y), v(x,y))$ και βρίσκουμε τη λύση του δοσμένου προβλήματος.

2.2. Προβλήματα συνοριακών τιμών

Παράδειγμα 2.2.1. (Πρόβλημα Dirichlet σε άπειρη κατακόρυφη λωρίδα).

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

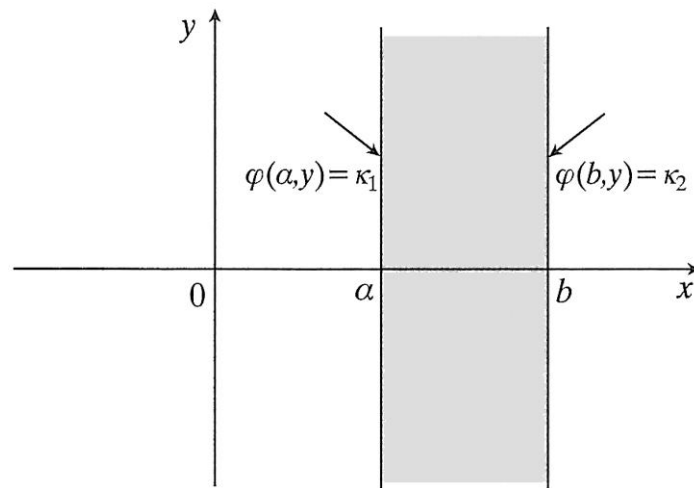
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & , \quad \alpha < x < b, y \in \mathbb{R} \\ \varphi(\alpha, y) = \kappa_1 \\ \varphi(b, y) = \kappa_2 \end{cases} \quad , y \in \mathbb{R}$$

Λύση. Επειδή οι συνοριακές τιμές δεν εξαρτώνται από το y , είναι εύλογο να αναζητήσουμε ως λύση μια αρμονική συνάρτηση που δεν εξαρτάται από το y , δηλαδή

$$\varphi(x, y) = f(x) \quad \alpha \leq x \leq b$$

Η σχέση $\Delta\varphi = 0$, γράφεται $f''(x) = 0$, οπότε $f(x) = \lambda x + \mu$ όπου λ, μ σταθερές. Λόγω των συνοριακών συνθηκών εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη λύση είναι

$$\varphi(x, y) = \kappa_1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{b - \alpha}(x - \alpha)$$



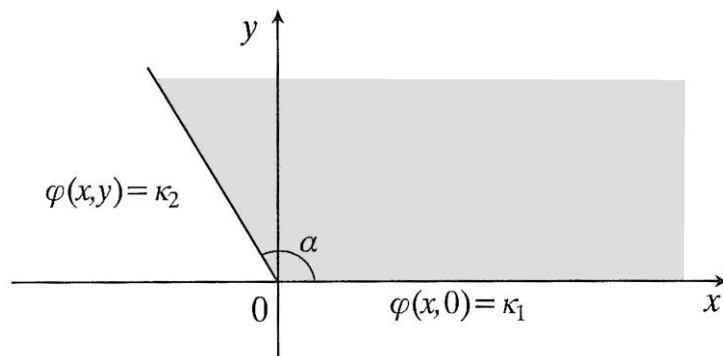
Σχ. 4

Παράδειγμα 2.2.2. (Πρόβλημα Dirichlet σε γωνιακό πεδίο).

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & , \quad 0 < \text{Arg} z < \alpha \quad (\alpha \leq \pi) \\ \varphi(x, 0) = \kappa_1 & , \quad x > 0 \\ \varphi(x, y) = \kappa_2 & , \quad r > 0 \quad \theta = \alpha \end{cases}$$

Λύση.



Σχ. 5

Η συνάρτηση $\text{Arg} z$ είναι αρμονική, αφού είναι το φανταστικό μέρος του $\text{Log} z$ και είναι σταθερή πάνω σε ημιευθείες με αρχή το 0. Αναζητούμε μια λύση της μορφής $\varphi(x, y) = b \text{Arg} z + c$, b, c σταθεροί αριθμοί. Λόγω των συνοριακών συνθηκών, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η λύση είναι

$$\varphi(x, y) = \kappa_1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\alpha} \text{Arg} z .$$

Παράδειγμα 2.2.3. (Πρόβλημα Dirichlet σε δακτύλιο).

Να λυθεί το πρόβλημα

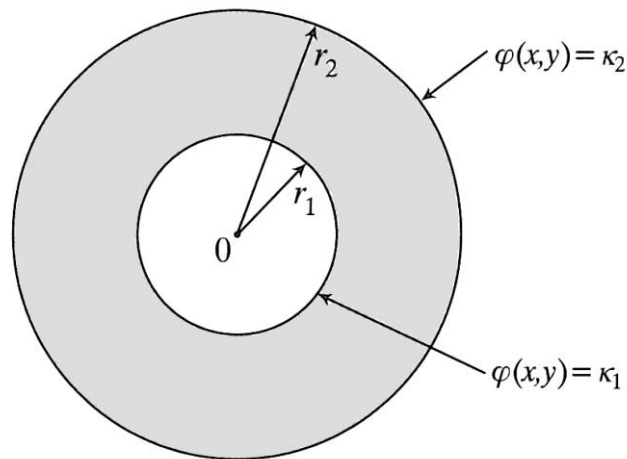
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & , r_1 < |z| < r_2 \\ \varphi(x,y) = \kappa_1 & , |z| = r_1 \\ \varphi(x,y) = \kappa_2 & , |z| = r_2 \end{cases}$$

Λύση. Επειδή οι συνοριακές συνθήκες είναι ανεξάρτητες του θ , αναζητούμε μια αρμονική συνάρτηση ανεξάρτητη του θ της μορφής

$$\varphi(x,y) = \alpha + b \ln|z|, \quad \alpha, b \text{ σταθεροί.}$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi(x,y) = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{\ln(|z|/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$



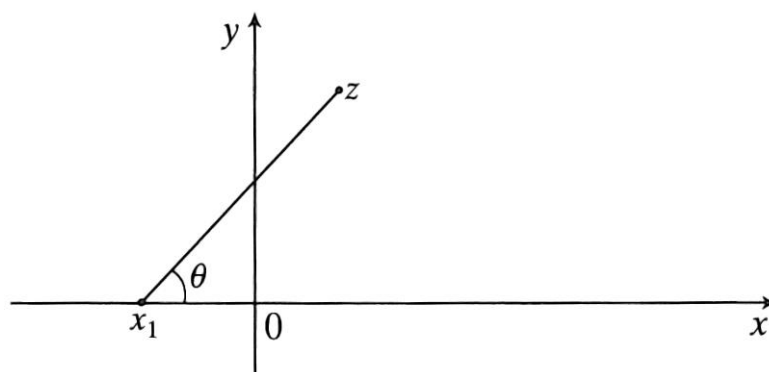
Σχ. 6

Παράδειγμα 2.2.4. (Πρόβλημα Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο).

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & -\infty < x < \infty, y > 0 \\ \varphi(x,0) = \begin{cases} \alpha_0, & -\infty < x < x_1 \\ \alpha_1, & x_1 < x < \infty \end{cases}, & \alpha_0, \alpha_1 \text{ σταθεροί} \end{cases}$$

Λύση. Είναι φανερό ότι $\theta = \text{Arg}(z - x_1)$



Σχ. 7

Η συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = A + B \operatorname{Arg}(z - x_1)$$

είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Λόγω των συνοριακών συνθηκών θα πρέπει

$$A = \alpha_1 \text{ και } A + B \cdot \pi = \alpha_0.$$

Επομένως η συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 + \frac{1}{\pi} (\alpha_0 - \alpha_1) \operatorname{Arg}(z - x_1)$$

είναι λύση του προβλήματος.

Η περίπτωση αυτή γενικεύεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.5. Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet.

$$\Delta \varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} \alpha_0, & -\infty < x < x_1 \\ \alpha_1, & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ \alpha_n, & x_n < x < \infty \end{cases}$$

Λύση. Με ανάλογο τρόπο, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, κατασκευάζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = \alpha_n + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \operatorname{Arg}(z - x_m).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο αφού είναι το φανταστικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης

$$f(z) = i\alpha_n + \sum_{m=1}^n \operatorname{Log} \left[\frac{\alpha_{m-1} - \alpha_m}{\pi} (z - x_m) \right]$$

Έστω κ σταθερή τιμή του m . Αν $z = x$ είναι ένα σημείο με $x_\kappa < x < y_{\kappa+1}$ τότε $Arg(z - x_\kappa) = 0$ για $1 \leq m \leq \kappa$, ενώ $Arg(z - x_m) = \pi$ για $\kappa + 1 \leq m \leq n$.

Επομένως

$$\begin{aligned}\varphi(x,0) &= \alpha_n + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\kappa} (\alpha_{m-1} - \alpha_m) Arg(z - x_m) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=\kappa+1}^n (\alpha_{m-1} - \alpha_m) Arg(z - x_m) = \\ &= \alpha_n + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\kappa} (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \cdot 0 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=\kappa+1}^n (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \pi = \\ &= \alpha_n + (\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa+1}) + (\alpha_{\kappa+1} - \alpha_{\kappa+2}) + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) = \alpha_\kappa\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα 2.2.6. Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

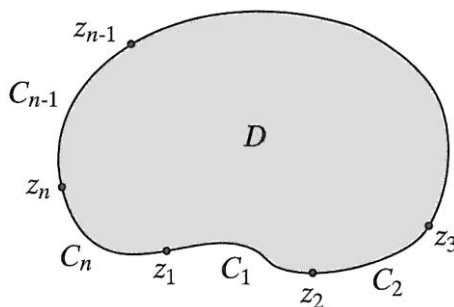
$$\varphi(x,0) = \begin{cases} 3, & -\infty < x < -3 \\ 7, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 2 \\ 4, & 2 < x < \infty \end{cases}$$

Λύση. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Άρα η λύση θα είναι

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= 4 - \frac{4}{\pi} Arg(z+3) + \frac{6}{\pi} Arg(z+1) - \frac{3}{\pi} Arg(z-2) = \\ &= 4 - \frac{4}{\pi} Arc \tan\left(\frac{y}{x+3}\right) + \frac{6}{\pi} Arc \tan\left(\frac{y}{x+1}\right) - \frac{3}{\pi} Arc \tan\left(\frac{y}{x-2}\right).\end{aligned}$$

Έστω D ένα απλά συνεκτικό πεδίο που περιορίζεται από μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη C και $z_1, z_2, \dots, z_n$, n σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στη C διατεταγμένα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω C_κ το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ z_κ και $z_{\kappa+1}$ ($\kappa = 1, 2, \dots, n-1$) και έστω C_n το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ z_n και z_1 . Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ στο } D \\ \varphi(x,y) = \alpha_1 \text{ για } z = x + iy \in C_1 \\ \varphi(x,y) = \alpha_2 \text{ για } z = x + iy \in C_2 \\ \vdots \\ \varphi(x,y) = \alpha_n \text{ για } z = x + iy \in C_n \end{cases} \quad (1)$$



Σχ. 8

Μία μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος (1) είναι η εύρεση μιας σύμμορφης απεικόνισης

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2)$$

του D επί του άνω ημιεπιπέδου $\text{Im} w > 0$ έτσι ώστε τα σημεία $z_1, z_2, \dots, z_n$ να απεικονίζονται στα σημεία $u_k = f(z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ και το z_n να απεικονίζεται στο $u_n = +\infty$ του u -άξονα στο w -επίπεδο.

Επομένως η απεικόνιση (2) δίνει ένα νέο πρόβλημα Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο για το οποίο η λύση δίνεται στο παράδειγμα 2.2.5. Αν θέσουμε $\alpha_0 = \alpha_n$, τότε η λύση του προβλήματος Dirichlet, θα είναι

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \alpha_{n-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \text{Arg}(f(z) - u_k) = \\ &= \alpha_{n-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \text{Arc tan} \frac{u(x, y)}{u(x, y) - u_k} \end{aligned}$$

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται, αν μπορούμε βέβαια να κατασκευάσουμε μια σύμμορφη απεικόνιση από το D επί του άνω ημιεπιπέδου $\text{Im} w > 0$. Το θεώρημα Riemann εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τέτοιας σύμμορφης απεικόνισης.

Παράδειγμα 2.2.7. Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \quad |z| < 1 \\ \varphi(x, y) &= 0, \quad z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi \\ \varphi(x, y) &= 1, \quad z = e^{i\theta}, \quad \pi < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

Λύση. Από το παράδειγμα 1.3.2. προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2 + y^2} \quad (3)$$

είναι μια σύμμορφη απεικόνιση, που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $|z| < 1$ επί του άνω ημιεπιπέδου.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα σημεία $z = x + iy$ που βρίσκονται στο άνω ημικύκλιο: $1 - x^2 - y^2 = 0, y > 0$ απεικονίζονται στο θετικό ημιάξονα, ενώ τα σημεία του κάτω ημικυκλίου στον αρνητικό ημιάξονα.

Η απεικόνιση (3) δημιουργεί ένα νέο πρόβλημα Dirichlet στο w -επίπεδο.

$$\Delta \varphi = 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad u > 0$$

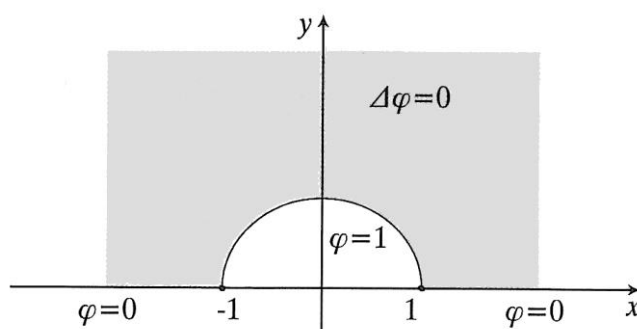
$$\Phi(u, 0) = 0, \quad u > 0$$

$$\Phi(u, 0) = 1, \quad u < 0$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.2.4, η λύση του προβλήματος, είναι

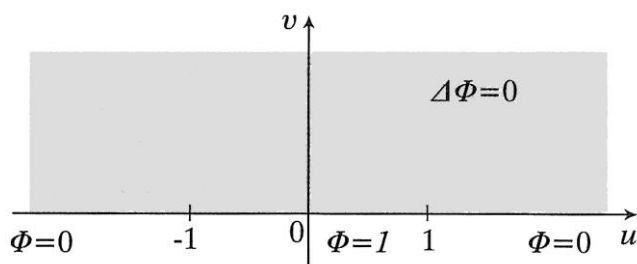
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \tan \frac{u(x, y)}{u(x, y)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \tan \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}$$

Παράδειγμα 2.2.8. Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet, όπως περιγράφεται στο σχήμα.



Σχ. 9

Λύση. Η απεικόνιση Joukowski $w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ μετασχηματίζει το δοσμένο πρόβλημα στο ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet του άνω ημιεπιπέδου.



Σχ. 10

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right)$$

(βλ. παράδειγμα 2.2.5).

Από τη σχέση $w = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ προκύπτει

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} \text{ και } v(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}.$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{4y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4) + (2x^2 - 2y^2 + 1)} \right).$$

Παράδειγμα 2.2.9. Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet.

$$\Delta \varphi = 0 \text{ στο } D$$

$$\varphi(x, 0) = 0$$

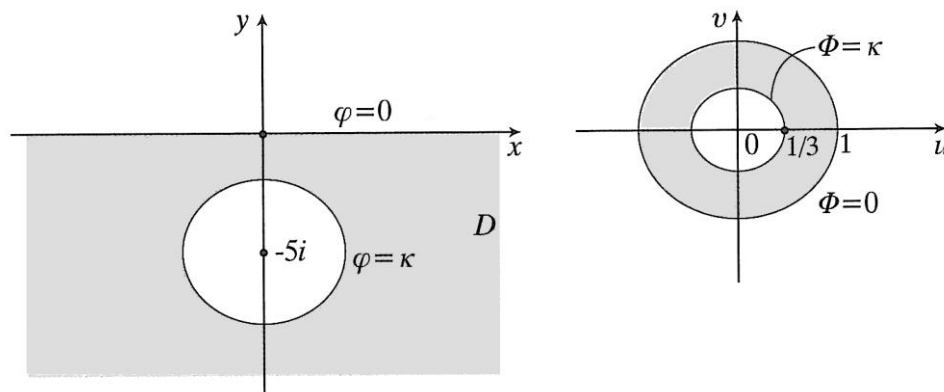
$$\varphi(x, y) = \kappa, |z + 5i| = 3$$

όπου $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, |z + 5i| > 3\}$.

Λύση. Σύμφωνα με το παράδειγμα 11.3.11, ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z + 4i}{z - 4i}$$

απεικονίζει το D στο δακτύλιο $1/3 < |w| < 1$.



Σχ. 11

Η λύση του προβλήματος Dirichlet στο δακτύλιο είναι

$$\Phi(u,v) = -\kappa \frac{\ln|w|}{\ln 3}$$

(βλ. παράδειγμα 2.2.3).

Επομένως η λύση του προβλήματος Dirichlet στο πεδίο D είναι

$$\varphi(x,y) = -\frac{\kappa}{\ln 3} \ln \left| \frac{z+4i}{z-4i} \right| = -\frac{\kappa}{2\ln 3} \ln \left(\frac{x^2 + (y+4)^2}{x^2 + (y-4)^2} \right).$$

Παράδειγμα 2.2.10. Δίνεται το πεδίο $D = \{z : |z| < 5, |z-2| > 2\}$

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta\varphi = 0, \text{ στο } D$$

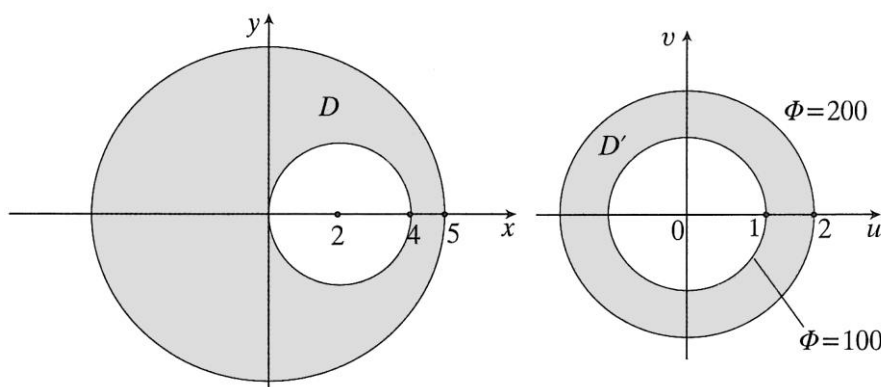
$$\varphi(x,y) = 100, |z| = 5$$

$$\varphi(x,y) = 200, |z-2| = 2$$

Λύση. Θα βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το D σε ένα δακτύλιο. Από το παράδειγμα 7 προκύπτει ότι δύο σημεία x_1, x_2 που είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους $|z| = 5$ και $|z-2| = 2$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2 = 25x + 50 = 2,$$

οπότε $x_1 = \frac{5}{2}$ και $x_2 = 10$.



Σχ. 12

Ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το D επί του D' είναι

$$w = \lambda \frac{z-10}{2z-5}.$$

Αν το $z = 5$ απεικονίζεται στο $w = -1$, τότε θα πρέπει $\lambda = -1$, οπότε ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z-10}{2z-5}$$

απεικονίζει το D επί του D' . Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.2.3, είναι

$$\Phi(u, v) = 100 + 100 \frac{\ln|w|}{\ln 2}.$$

Αν $w = u + iv$, τότε

$$u(x, y) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 25x + 50}{(2x-5)^2}, \quad v(x, y) = \frac{15y}{(2x-5)^2 + 4y^2}$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = 100 + 100 \frac{\ln|w(x, y)|}{\ln 2}.$$

Παράδειγμα 2.2.11. Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

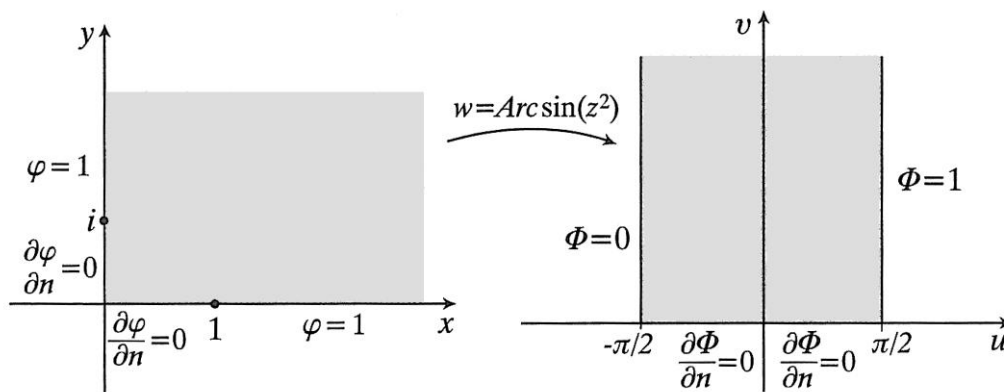
$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & x, y > 0 \\ \varphi(x, 0) = 1, & x > 1 \\ \varphi(0, y) = 0, & y > 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & 0 < y < 1, x = 0 \text{ και } 0 < x < 1, y = 0 \end{cases}$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός $w = z^2$ απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιεπίπεδο, ενώ ο μετασχηματισμός $w = \text{Arc sin } z$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στην ημιάπειρη κατακόρυφη λωρίδα $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v > 0$. Άρα ο μετασχηματισμός

$$w = \text{Arc sin}(z^2)$$

απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο επί του πεδίου

$$D = \left\{ (u, v) : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v > 0 \right\}$$



Σχ. 13

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το δοσμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών μετασχηματίζεται στο ακόλουθο

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, u > 0 \\ \Phi\left(-\frac{\pi}{2}, u\right) = 0, \quad u > 0 \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}, u\right) = 1 \quad , \quad u > 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, u = 0 \end{array} \right.$$

Η μορφή του πεδίου D και οι συνοριακές συνθήκες μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μια λύση Φ του νέου προβλήματος είναι μια γραμμική συνάρτηση του u , δηλαδή

$$\Phi(u, u) = Au + B, A, B \text{ σταθερές.}$$

Για τη συνοριακή καμπύλη $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, u = 0$, έχουμε $n = (0, -1)$, οπότε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot n = A \cdot 0 + 0(-1) = 0,$$

δηλαδή η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, u\right) = -A\frac{\pi}{2} + B = 0$$

και

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, u\right) = A\frac{\pi}{2} + B = 1$$

έχουμε $B = \frac{1}{2}$ και $A = \frac{1}{\pi}$, οπότε

$$\Phi(u, u) = \frac{1}{\pi} u + \frac{1}{2}.$$

Τελικά, η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}[\operatorname{Arc} \sin(z^2)] + \frac{1}{2}.$$

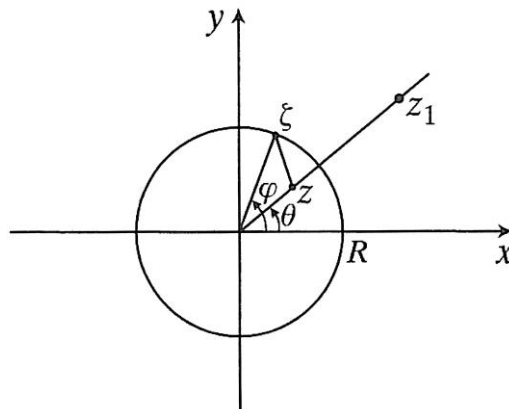
2.3. Το πρόβλημα Dirichlet για ένα δίσκο

Έστω $D = \{z : |z| < R\}$ και $f(z)$ μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη στο D και συνεχής στο $\bar{D}$. Αν $z \in D$, με $z \neq 0$ τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

όπου C ο κύκλος $|z| = R$ θετικά προσανατολισμένος. Έστω z_1 το συμμετρικό του z ως προς τον κύκλο C . Τότε

$$z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}}$$



Σχ. 14

Επειδή το z_1 βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου C , από το θεώρημα Cauchy - Goursat, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

Επομένως

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right) f(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

Θεωρούμε την ποσότητα

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \frac{\zeta \bar{\zeta}}{z}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (2)$$

Για $\zeta = Re^{i\varphi}$ και $z = re^{i\theta}$, έχουμε

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2},$$

αφού η ποσότητα $|\zeta - z|$ παριστάνει την απόσταση μεταξύ του ζ και z και από το γνωστό νόμο των συνημίτονων (βλ. Σχ. 13) είναι

$$|\zeta - z|^2 = R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2 > 0.$$

Επειδή $d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi = i\zeta d\varphi$, η σχέση (1) γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \quad (3)$$

Αν u είναι το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης f , τότε από τον τύπο (1) βρίσκουμε

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, \quad r < R \quad (4)$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson** για την αρμονική συνάρτηση u στο δίσκο $|z| < R$.

Η συνάρτηση

$$P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Poisson**.

Ιδιότητες του πυρήνα Poisson

α) Από την (2) έχουμε

$$P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right)$$

Η συνάρτηση $g(z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$ είναι ολόμορφη εντός του δίσκου $|z| < R$.

Επομένως το πραγματικό μέρος της που είναι $P(R, r, \varphi - \theta)$ θα είναι αρμονική συνάρτηση εντός του δίσκου.

β) Η συνάρτηση $u(r, \theta) = 1$ είναι αρμονική, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Poisson προκύπτει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) d\varphi = 1$$

γ) Για R, r, θ σταθερά, η μέγιστη τιμή της $P(R, r, \varphi - \theta)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, λαμβάνεται για $\varphi = \theta$ και είναι

$$\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{R+r}{R-r},$$

η οποία τείνει στο ∞ για $r \rightarrow R$.

Η ελάχιστη τιμή της $P(R, r, \varphi - \theta)$ λαμβάνεται είτε για $\varphi = \theta + \pi$ ή για $\varphi = \theta - \pi$ και είναι

$$\min_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{R-r}{R+r}$$

η οποία τείνει στο 0 όταν $r \rightarrow R$.

Ισχύει το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.3.1 (η λύση του προβλήματος Dirichlet για ένα δίσκο)

Έστω $g(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση πάνω στον κύκλο $C: |z| = R$ με περίοδο 2π . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$(1) \quad \begin{cases} u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) g(\varphi) d\varphi, & 0 \leq r < R \\ u(R, \theta) = g(\theta) \end{cases}$$

Τότε η u είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = R$ και συνεχής στο $|z| \leq R$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση P είναι αρμονική ως προς r, θ στο εσωτερικό του κύκλου C (ιδιότητα α), άρα και η συνάρτηση $u(r, \theta)$ είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου C . Απομένει να δείξουμε τη συνέχεια της u στον κλειστό δίσκο $|z| \leq R$. Έστω $Re^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ ένα σταθερό σημείο πάνω στη C . Θα δείξουμε ότι $u(r, \theta) \rightarrow g(\alpha)$ όταν $r \rightarrow R$ και $\theta \rightarrow \alpha$. Λόγω της ιδιότητας β) του πυρήνα Poisson, έχουμε

$$u(r, \theta) - g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) (g(\varphi) - g(\alpha)) d\varphi.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής πάνω στη C , υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$|g(\varphi) - g(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε φ με $|\varphi - \alpha| < \beta$, δηλαδή για κάθε φ τέτοιο, ώστε το $Re^{i\varphi}$ να βρίσκεται στο τόξο C_1 όπως φαίνεται στο σχήμα.

Είναι φανερό ότι

$$u(r, \theta) - g(\alpha) = I_1 + I_2,$$

όπου

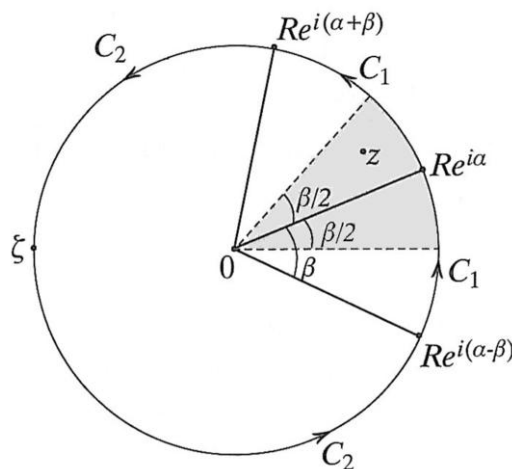
$$2\pi I_1 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} P(R, r, \varphi - \theta) (g(\varphi) - g(\alpha)) d\varphi$$

και

$$2\pi I_2 = \int_{\alpha+\beta}^{\alpha-\beta+2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) (g(\varphi) - g(\alpha)) d\varphi$$

Επειδή $P(R, r, \varphi - \theta) \geq 0$ για $r \leq 1$, έχουμε

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} P(R, r, \varphi - \theta) |g(\varphi) - g(\alpha)| d\varphi < \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}$$



Σχ. 15

Έστω $C_2 = C \setminus C_1$. Είναι φανερό ότι υπάρχει $m > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε z εντός του γραμμοσκιασμένου τμήματος όπου $|\theta - \alpha| < \frac{\beta}{2}$ και κάθε $\zeta \in C_2$ να ισχύει $|\zeta - z|^2 \geq m$. Επομένως

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha+\beta}^{\alpha-\beta+2\pi} \frac{(R^2 - r^2)}{|\zeta - z|^2} |g(\varphi) - g(\alpha)| d\varphi < \frac{2\pi M(R^2 - r^2)}{2\pi m},$$

όπου $M = \max_{\varphi \in C_2} |g(\varphi) - g(\alpha)|$. Επειδή δε $R + r < 2R$, θα έχουμε

$$|I_2| < \frac{2M(R-r)}{m} < \frac{2M\delta}{m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

αν $|r - R| < \delta$, όπου $\delta = \frac{m\varepsilon}{4M}$.

Επομένως,

$$|u(r, \theta) - g(\alpha)| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

για κάθε r με $|r - R| < \delta$ και θ με $|\theta - \alpha| < \frac{\beta}{2}$.

Παρατηρήσεις. 1) Είναι φανερό, λόγω της αρχής του μεγίστου μέτρου, ότι η λύση (1) του προβλήματος Dirichlet για τον δίσκο, είναι μοναδική.

2) Η λύση (1) του προβλήματος Dirichlet για τον δίσκο μπορεί να βρεθεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών ή με τη βοήθεια της συναρτήσεως Green.

3) Το θεώρημα γενικεύεται στην περίπτωση που η g είναι τμηματικά συνεχής πάνω στον κύκλο C (βλ. [24]).

Αν $R=1$, τότε λόγω της ιδιότητας α) του πυρήνα Poisson ο τύπος (1) γράφεται

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, |z| < 1 \quad (2)$$

Παράδειγμα 2.3.1. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$i(1, \theta) = \frac{\sin \theta}{5 + 4 \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Λύση. Αν $\zeta = e^{i\theta}$, τότε

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

οπότε

$$u(\zeta) = \frac{\zeta^2 - 1}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (2) για να βρούμε τη λύση του προβλήματος αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)\zeta} d\zeta$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων βρίσκουμε

$$I = \frac{z}{2i(z+2)}.$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{z}{2i(z+2)} = \frac{y}{(x+2)^2 + y^2}$$

ή

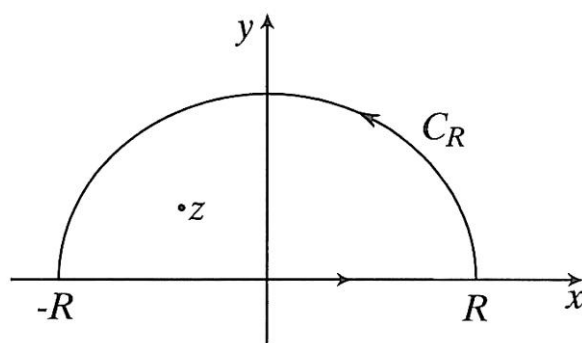
$$u(r, \theta) = \frac{r \cos \theta}{r^2 + 4r \cos \theta + 4}.$$

2.4. Το πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο

Έστω $f(z)$ ολόμορφη στο $\operatorname{Im} z > 0$ και συνεχής στο $\operatorname{Im} z \geq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές κ και M τέτοιες, ώστε

$$|z^\kappa f(z)| < M, \quad \operatorname{Im} z \geq 0$$

Έστω $C = C_R \cup [-R, R]$ η καμπύλη του σχήματος θετικά προσανατολισμένη.



Σχ. 16

Αν z ένα σημείο εντός της C , τότε, σύμφωνα με τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(t) dt}{t - z}$$

Επειδή $|f(\zeta)| < M/R^k$, το πρώτο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 όταν $R \rightarrow \infty$.

Επομένως

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{t - z}, \operatorname{Im} z > 0} \quad (1)$$

Η αναπαράσταση (1) είναι ένας **ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για το άνω ημιεπίπεδο** $\operatorname{Im} z > 0$.

Επειδή το $\bar{z}$ είναι στο εξωτερικό της C , έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{t - \bar{z}} = 0$$

Επομένως ο τύπος (1) γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \bar{z}} \right) f(t) dt$$

δηλαδή

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t) dt}{|t - z|^2}, y > 0.$$

Αν $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, τότε έχουμε

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t, 0) dt}{(t - x)^2 + y^2}, y > 0$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson για το άνω ημιεπίπεδο** ή **ολοκληρωτικός τύπος Schwarz**.

Η συνάρτηση

$$S(t - x, y) = \frac{y}{(t - x)^2 + y^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Schwarz**. Θέτοντας στον τύπο Schwarz $u(x, y) = 1$ και $u(t, 0) = 1$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t - x, y) dt = 1, y > 0.$$

Η μέγιστη τιμή της $S(t - x, y)$ σαν συνάρτηση του t λαμβάνεται για $t = x$ και ισχύει

$$\max_{t \in \mathbb{R}} S(t-x, y) = S(0, y) = \frac{1}{y} \rightarrow \infty, \text{ όταν } y \rightarrow 0.$$

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη λύση του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο [6].

Θεώρημα 2.4.1. (Η λύση του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο).

Έστω $f(x)$ μια δοσμένη συνάρτηση συνεχής και φραγμένη στον πραγματικό άξονα $\text{Im } z = 0$. Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, & -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2)$$

είναι αρμονική στο $\text{Im } z = 0$ και συνεχής στο $\text{Im } z = 0$.

Παράδειγμα 2.4.1. Να επιλυθεί το πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο, αν η δοσμένη συνάρτηση στο σύνορο είναι

$$f(x) = \begin{cases} \kappa, & \alpha < x < b \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λύση. Σύμφωνα με το θεώρημα, η λύση είναι

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\alpha}^b \frac{\kappa}{(t-x)^2 + y^2} dt.$$

Είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{y}{\pi} \cdot \frac{\kappa}{y^2} \int_{\alpha}^b \frac{1}{\left(\frac{t-x}{y}\right)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{\kappa}{\pi} \int_{\frac{\alpha-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{\kappa}{\pi} \left[\text{Arc tan } \frac{b-x}{y} + \text{Arc tan } \frac{x-\alpha}{y} \right]. \end{aligned}$$

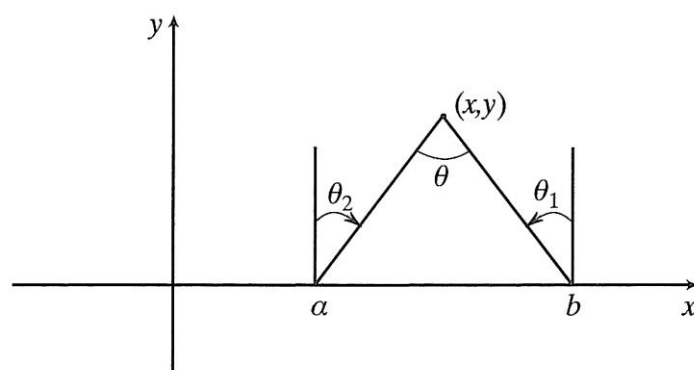
Η λύση αυτή έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. Αν

$$\theta_1 = \text{Arc tan } \frac{b-x}{y} \text{ και } \theta_2 = \text{Arc tan } \frac{x-\alpha}{y},$$

τότε

$$u(x, y) = \frac{\kappa}{\pi} (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\kappa}{\pi} \theta(x, y)$$

όπου θ η γωνία του σχήματος



Σχ. 17

Παράδειγμα 2.4.2. Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < y < \pi \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\ u(x, \pi) = 0 \end{cases}$$

Λύση. Η συνάρτηση $\zeta = e^z (\zeta = \xi + i\eta)$ απεικονίζει τη λωρίδα $0 < y < \pi$ σύμμορφα επί του άνω ημιεπιπέδου ($\eta > 0$). Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος γίνονται

$$\bar{u}(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \xi > 1 \\ 0, & \xi < 1 \end{cases}$$

Από τον τύπο (2) έχουμε

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\eta dt}{(\xi - t)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc tan} \frac{1 - \xi}{\eta}.$$

Επειδή $\xi = e^x \cos y$ και $\eta = e^x \sin y$, η λύση του προβλήματος θα είναι

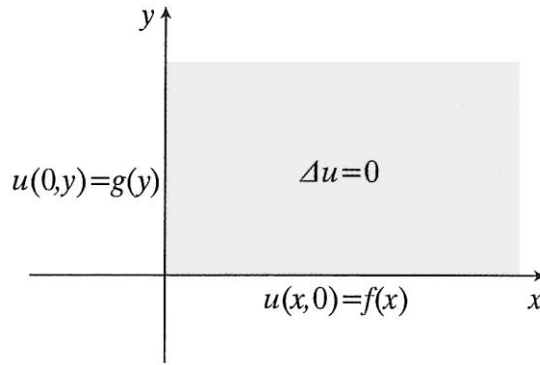
$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc tan} \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}.$$

Παράδειγμα 2.4.3. Να βρεθεί μια συνάρτηση $u(x, y)$ που είναι αρμονική στο πρώτο τεταρτημόριο $x > 0$ και $y > 0$ και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες:

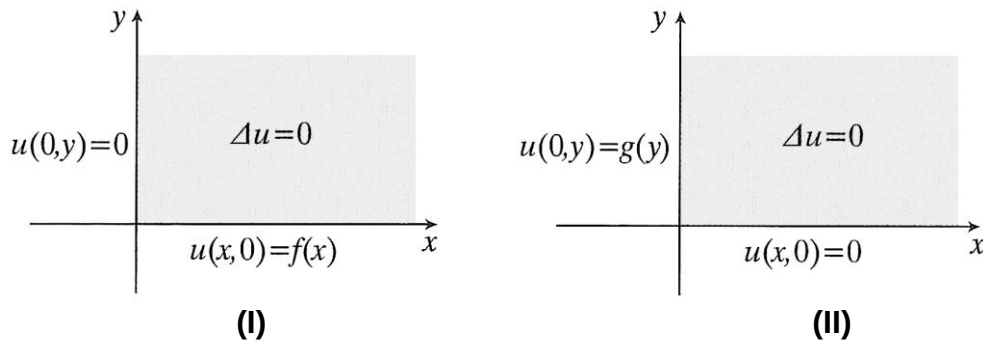
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0, y) = g(y), \quad 0 < y < \infty,$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$ είναι φραγμένες και συνεχείς.



Το πρόβλημα αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους προβλήματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Σχ. 18

Αν $u_1(x,y)$ είναι η λύση του προβλήματος (I) και $u_2(x,y)$ η λύση του προβλήματος (II), τότε η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y).$$

Για την επίλυση του προβλήματος (I) θεωρούμε την περιττή επέκταση $\tilde{f}(x)$ της $f(x)$. Η λύση $u_1(x,y)$ θα είναι

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt - \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f(-t)}{(t-x)^2 + y^2} dt = \\ &= \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(t+x)^2 + y^2} \right] f(t) dt, \quad x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

Για την επίλυση του προβλήματος (II), θεωρούμε την περιττή επέκταση $\tilde{g}(y)$ της $g(y)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} u_2(x,y) &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}(t)}{(t-y)^2 + x^2} dt = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(t)}{(t-y)^2 + x^2} dt - \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(-t)}{(t-y)^2 + x^2} dt = \\ &= \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(t-y)^2 + x^2} - \frac{1}{(t+y)^2 + x^2} \right] g(t) dt, \quad x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

2.5. Προβλήματα Neumann

α) Πρόβλημα Neumann για ένα δίσκο

Έστω C ο κύκλος $|z| = R$ και $g(\theta)$ μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στον κύκλο C με την ιδιότητα $\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{για } |z| < R \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{|z|=R} = g(\theta) \end{cases}$$

Έστω $\zeta = Re^{i\varphi}$ και $z = re^{i\theta}$, όπου $r < R$. Για σταθερό ζ η συνάρτηση

$$Q(R, r, \varphi - \theta) = -2R \ln|\zeta - z| = -R \ln(R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2)$$

είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου C , αφού είναι το πραγματικό μέρος της συναρτήσεως $-2R \operatorname{Log}(z - \zeta)$. Για $r \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{R}{r} \frac{2r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} = \frac{R}{r} [P(R, r, \varphi - \theta) - 1] \quad (1)$$

όπου P είναι ο πυρήνας Poisson. Η συνάρτηση

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(R, r, \varphi - \theta) g(\varphi) d\varphi + K, \quad K \text{ σταθερά}$$

είναι αρμονική, αφού η συνάρτηση Q είναι αρμονική ως προς r και θ . Επειδή

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$$

τότε, λόγω της (1), έχουμε

$$u_r(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{r} [P(R, r, \varphi - \theta) - 1] g(\varphi) d\varphi = \frac{R}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) g(\varphi) d\varphi$$

Άρα για z με $|z| = R$, ισχύει

$$u_r(r, \theta) = g(\theta)$$

Επομένως η συνάρτηση

$$u(r, \theta) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2) g(\varphi) d\varphi + K$$

είναι η λύση του προβλήματος Neumann για τον κύκλο $r = R$.

β) Πρόβλημα Neumann για το άνω ημιεπίπεδο

Έστω $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|x^\alpha g(x)| < M, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha > 1$. Για σταθερό $t \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $\text{Log}(z-t)$ είναι αρμονική στο ημιεπίπεδο $\text{Im} z > 0$. Επομένως η συνάρτηση

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|z-t| g(t) dt + K$$

ή

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t-x)^2 + y^2] g(t) dt + K, \quad K \text{ σταθερά} \quad (2)$$

είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Από τον τύπο (2) βρίσκουμε

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt,$$

οπότε

$$u_y(x, 0) = g(x) \quad y > 0$$

Επομένως ο τύπος (2) είναι η λύση του προβλήματος Neumann για το άνω ημιεπίπεδο.

2.6. Εφαρμογές

A. Μετάδοση θερμότητας

Το ποσό της θερμότητας που διαρρέει μια επιφάνεια, η οποία βρίσκεται μέσα σ' ένα στερεό σώμα, ανά μονάδα εμβαδού και ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται **ροή θερμότητας** ή **θερμική ροή** και συμβολίζεται με το διάνυσμα Q . Σε πολλές εφαρμογές η ροή θερμότητας δίνεται από τον τύπο $Q = -k \text{grad} T$, όπου T είναι η θερμοκρασία του στερεού και k είναι μια θετική σταθερά, ο **συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας**.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε δισδιάστατα και στατικά πεδία θερμικής ροής. Η ισοσταθμική γραμμή $T(x, y) = \text{σταθ.}$ ονομάζεται **ισόθερμη γραμμή** και, όπως είναι γνωστό, το διάνυσμα της κλίσεως $\text{grad} T$ είναι κάθετο στην ισοσταθμική και κατευθύνεται προς ισόθερμες μεγαλύτερης θερμοκρα-

σίας (μεγαλύτερης στάθμης). Έτσι το διάνυσμα Q της θερμικής ροής κατευθύνεται προς ψυχρότερα σημεία του σώματος.

Ένεκα της αρχής της διατηρήσεως της ενέργειας δεν υπάρχουν σημεία συσσώρευσης θερμότητας στο εσωτερικό μιας απλής κλειστής γραμμής C , π.χ. $f(s) = x(s) + iy(s)$, όπου s είναι το μήκος τόξου. Επομένως

$$\int_C Q \cdot n ds = 0 \quad (1)$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της C που κατευθύνεται προς το εξωτερικό της. Επειδή $n = \frac{1}{i} f'(s) = \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds}$, από την (1) βρίσκουμε

$$\int_C \left(-k \frac{\theta T}{\theta x}, -k \frac{\theta T}{\theta y} \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds = 0,$$

δηλαδή

$$\int_C \frac{\theta T}{\theta x} dy - \frac{\theta T}{\theta y} dx = 0.$$

Η τελευταία ισότητα με χρήση του τύπου Green δίνει $\frac{\theta^2 T}{\theta x^2} + \frac{\theta^2 T}{\theta y^2} = 0$, δηλαδή

η T ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση Laplace.

Αν $\Psi(x,y)$ είναι η συζυγής αρμονική της $T(x,y)$, τότε η συνάρτηση

$$G(z) = T(x,y) + i\Psi(x,y)$$

είναι ολόμορφη και ονομάζεται **μιγαδική θερμοκρασία** και η μονοπαραμετρική οικογένεια γραμμών $\Psi(x,y) = \mu$ ονομάζεται οικογένεια **γραμμών ροής**. Σε κάθε σημείο μιας γραμμής το διάνυσμα της θερμικής ροής Q είναι εφαπτόμενο της γραμμής και κατευθύνεται προς ψυχρότερα σημεία του στερεού. Τέλος, μια ισόθερμη γραμμή και μια γραμμή ροής τέμνονται ορθογώνια.

Παράδειγμα 2.6.1. Να βρεθεί η θερμοκρασία $T(x,y)$ σε κάθε σημείο στο ήμισυ του δίσκου: $\text{Im } z > 0, |z| < 1$ αν η θερμοκρασία στα σημεία του συνόρου είναι

$$\begin{aligned} T(x,y) &= 80, \text{ για } z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi \\ T(x,0) &= 40, \text{ για } -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο σύμμορφος μετασχηματισμός

$$w = u + iu = i \frac{1-z}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

απεικονίζει το άνω ήμισυ του δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο. Για το νέο πρόβλημα έχουμε

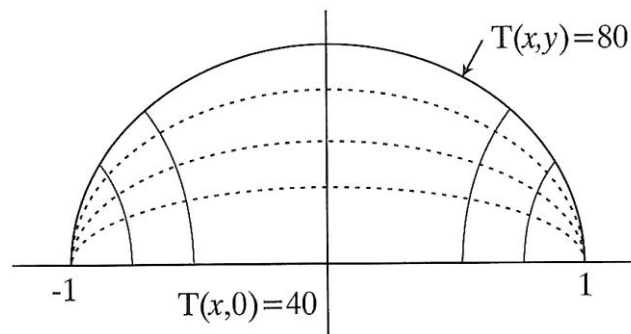
$$T^*(u,0) = 80 \text{ για } u > 0 \text{ και } T^*(0,u) = 40 \text{ για } u > 0$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.2.2 η αρμονική συνάρτηση $T^*(u,u)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές δίνεται από τη σχέση

$$T^*(u,u) = 80 + \frac{40-80}{\pi/2} \text{Arg} w = 80 - \frac{80}{\pi} \text{Arc tan } \frac{u}{u},$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$T(x,y) = 80 - \frac{80}{\pi} \text{Arc tan } \frac{1-x^2-y^2}{2y}$$



Σχ. 19

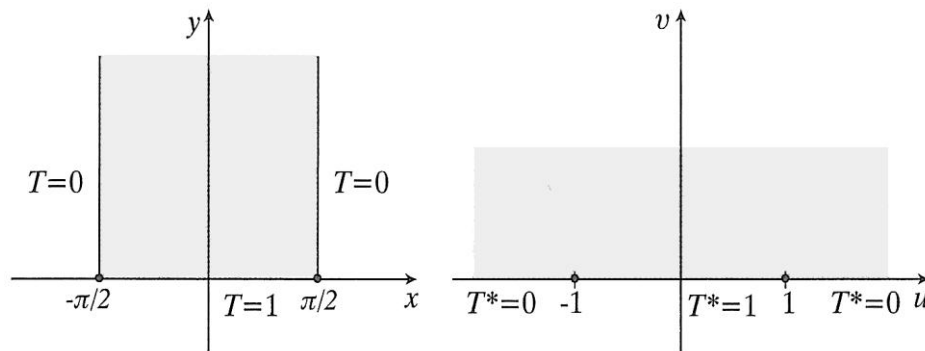
Οι ισόθερμες καμπύλες είναι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία ± 1 .

Παράδειγμα 2.6.2. Να βρεθεί η στάσιμη θερμοκρασία $T(x,y)$ σε κάθε σημείο της ημιάπειρης λωρίδας, αν η θερμοκρασία στα σημεία του συνόρου της είναι

$$T\left(\pm \frac{\pi}{2}, y\right) = 0$$

$$T(x,0) = 1$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός $w = \sin z$ απεικονίζει την ημιάπειρη λωρίδα στο άνω ημιεπίπεδο.



Σχ. 20

Οι συνοριακές συνθήκες του νέου προβλήματος είναι

$$T^*(u,0) = 0, \quad u < -1 \text{ ή } u > 1$$

$$T^*(u,0) = 1, \quad -1 \leq u \leq 1$$

Η λύση του αντιστοίχου προβλήματος Dirichlet είναι (βλ. παράδειγμα 2.2.5)

$$T^*(u,0) = \frac{1}{\pi} \left(\text{Arc tan} \frac{u}{u-1} - \text{Arc tan} \frac{u}{u+1} \right) = \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \left(\frac{2u}{u^2 + u^2 - 1} \right)$$

Είναι φανερό ότι $u(x,y) = \sin x \cosh y$ και $u(x,y) = \cos x \sinh y$, οπότε

$$u^2 + u^2 - 1 = \cosh^2 y - \cos^2 x.$$

Άρα η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \left(\frac{2 \cos x \sinh y}{\cosh^2 y - \cos^2 x} \right)$$

B. Ηλεκτροστατικό πεδίο

Μια κατανομή ηλεκτρικών φορτίων δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αν σε ένα σημείο A του πεδίου τεθεί φορτίο $q = +1$, τότε η δύναμη *Coulomb* **E** που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στο φορτίο αυτό ονομάζεται **ένταση του ηλεκτρικού πεδίου** στο σημείο A. Ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο ονομάζεται **ηλεκτροστατικό πεδίο**. Εδώ θα ασχοληθούμε με δισδιάστατα ηλεκτροστατικά πεδία. Ένα δισδιάστατο ηλεκτρικό πεδίο παράγεται από ένα σύστημα φορτισμένων συρμάτων, πλακών και κυλινδρικών αγωγών που είναι κάθετα στο z-επίπεδο.

Για την ένταση $E(x,y) = (E_1(x,y), E_2(x,y))$ υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(x,y)$, το **ηλεκτροστατικό δυναμικό**, τέτοια, ώστε

$$E(x,y) = -\text{grad}\Phi(x,y) \quad (1)$$

που σημαίνει

$$E_1(x,y) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \text{ και } E_2(x,y) = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (2)$$

Εξάλλου η ροή της έντασης E διά μέσου μιας απλής κλειστής καμπύλης του z -επιπέδου, που δεν περικλείει ηλεκτρικό φορτίο, είναι μηδέν, δηλαδή

$$\int_C E \cdot n ds = \int_C E_1(x,y) dy - E_2(x,y) dx = 0 \quad (3)$$

όπου $n = \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της C που κατευθύνεται προς το εξωτερικό της.

Η (3) είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Gauss $\int_C E \cdot n ds = 4\pi q$, όπου q

το φορτίο που βρίσκεται στο εσωτερικό της C .

Από την (3) με χρήση του τύπου του Green βρίσκουμε ότι σ' ένα πεδίο D που δεν περιέχει ηλεκτρικό φορτίο, ισχύει

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) βρίσκουμε $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, που σημαίνει ότι η Φ είναι

αρμονική στο D .

Αν $\Psi(x,y)$ είναι συζυγής αρμονική της $\Phi(x,y)$, τότε η συνάρτηση

$$G(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \quad (5)$$

είναι ολόμορφη στο D και ονομάζεται **μιγαδικό ηλεκτροστατικό δυναμικό** ή, απλά, **μιγαδικό δυναμικό**. Ακόμη έχουμε

$$E = E_1 + iE_2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{dG}{dz} = -\overline{G'(z)} \quad (6)$$

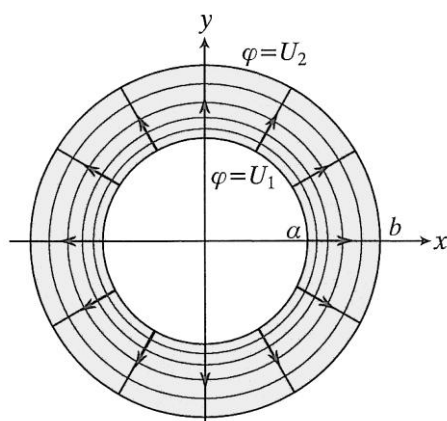
Οι μονοπαρομετρικές οικογένειες γραμμών $\Phi(x,y) = \lambda$ και $\Psi(x,y) = \mu$ ονομάζονται οικογένεια ισοδυναμικών γραμμών και οικογένεια γραμμών ροής αντίστοιχα. Οι γραμμές των οικογενειών αυτών τέμνονται ορθογώνια.

Παράδειγμα 2.6.3. Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(x,y)$ στο πεδίο μεταξύ δύο άπειρων ομοαξονικών κυλίνδρων $r = a$ και $r = b$, που έχουν σταθερά δυναμικά U_1 και U_2 , αντίστοιχα.

Λύση. Από το παράδειγμα 2.2.3, προκύπτει ότι η λύση είναι

$$\Phi(x,y) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\ln b - \ln a} (\ln|z| - \ln a)$$

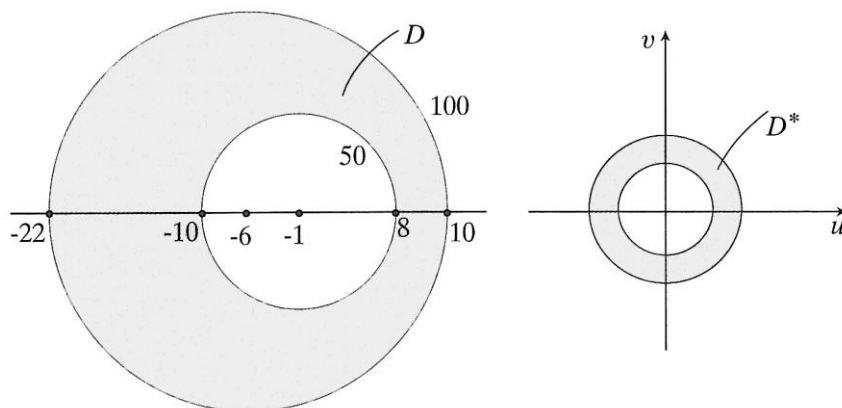
Οι ισοδυναμικές γραμμές $\Phi(x,y) = c$ είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το 0 και οι γραμμές ροής είναι τμήματα ημιευθειών με αρχή το 0. Αν $U_2 < U_1$, τότε η γεωμετρική παράσταση του πεδίου φαίνεται στο σχήμα.



Σχ. 21

Παράδειγμα 2.6.4. Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(x,y)$ εντός ενός πυκνωτή που αποτελείται από δυο άπειρους κυλινδρικούς αγωγούς, που ορίζονται από τις σχέσεις $|z+1| > 9$ και $|z+6| < 16$ (βλ. Σχ. 21).

Λύση. Θα βρούμε καταρχήν ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το πεδίο D σε ένα δακτύλιο D^* .



Σχ. 22

Έστω a και b δύο σημεία συμμετρικά ως προς τους δύο κύκλους. Τα σημεία αυτά ικανοποιούν τις σχέσεις $(a+1)(b+1)=81$ και $(a+6)(b+6)=256$, οπότε $a=2$ και $b=26$. Ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z-2}{z-26}$$

απεικονίζει το D σύμμορφα στο δακτύλιο $1/3 < |w| < 1/2$. Η λύση του προβλήματος στο πεδίο D^* είναι

$$\Phi^*(u, v) = 50 + 50 \frac{\ln|w| - \ln(1/3)}{\ln(1/2) - \ln(1/3)} = 50 + 50 \frac{\ln|w| + \ln 3}{\ln(3/2)}.$$

Άρα το ζητούμενο ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι

$$\varphi(x, y) = 50 + 50 \frac{\ln(|z-2|/|z-26|) + \ln 3}{\ln(3/2)} = 50 \left[1 + \frac{\ln(|x+iy-2|/|x+iy-26|) + \ln 3}{\ln(3/2)} \right]$$

Γ. Ροή ρευστών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε εφαρμογές της Μιγαδικής Αναλύσεως σε ροή ρευστού, που είναι διδιάστατη, στατική, ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Η ροή ρευστού ονομάζεται

- **διδιάστατη**, όταν οι ταχύτητες των σωματιδίων του ρευστού είναι παράλληλες προς ένα επίπεδο, το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με το μιγαδικό επίπεδο.
- **στατική**, όταν η ταχύτητα του ρευστού σ' ένα οποιοδήποτε σημείο $P(x, y)$, εξαρτάται από τις συντεταγμένες x, y και όχι από το χρόνο,
- **ασυμπίεστη**, όταν η πυκνότητα ρ του ρευστού είναι σταθερή.

Δίνεται η ταχύτητα $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ του ρευστού, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο D . Η γνωστή από τη μηχανική των ρευστών (βλ. επίσης [12]), εξίσωση συνέχειας σε διδιάστατη μορφή δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$

η οποία εκφράζει την **αρχή της διατηρήσεως της μάζας του ρευστού**. Επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη και η πυκνότητα ρ σταθερή η τελευταία εξίσωση στην περίπτωση μας παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Επειδή η ροή είναι αστρόβιλη ισχύει $rot F = 0$, δηλαδή $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Η εξίσωση αυτή είναι, με την προϋπόθεση ότι το πεδίο είναι απλά συνεκτικό, ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη συνάρτησης με

$$grad \Phi = V \text{ στο } D. \quad (2)$$

Η Φ ονομάζεται **δυναμικό ταχύτητας** της ροής. Από τις (1) και (2) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

δηλαδή το δυναμικό ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Επειδή η $\Phi(x,y)$ είναι αρμονική, υπάρχει συζυγής αρμονική $\Psi(x,y)$ στο D τέτοια, ώστε η μιγαδική συνάρτηση

$$G(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

να είναι ολόμορφη στο D . Η συνάρτηση $G(z)$ ονομάζεται **μιγαδικό δυναμικό της ροής**. Αν παραγωγίσουμε την $G(z)$ και λάβουμε υπόψη μας τις συνθήκες Cauchy-Riemann, παίρνουμε

$$G'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = u - iv.$$

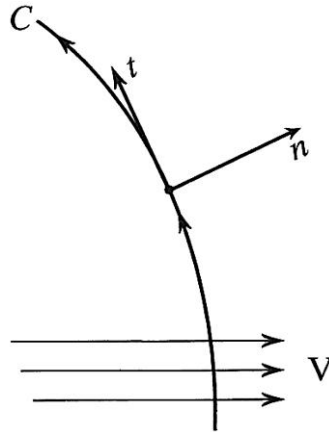
Αν γράψουμε την ταχύτητα ροής σε μιγαδική μορφή $V(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, τότε έχουμε

$$V(z) = \overline{G'(z)}.$$

Στην Υδροδυναμική σημαντικό ρόλο παίζουν οι έννοιες της **κυκλοφορίας** και της **ροής**. Θα εκφράσουμε τις ποσότητες αυτές με τη βοήθεια του μιγαδικού δυναμικού.

Έστω C μια λεία καμπύλη στο επίπεδο. Αν η C έχει μια παραμετρική έκφραση με παράμετρο το μήκος τόξου, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα t και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n της καμπύλης είναι

$$\mathbf{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right), \mathbf{n} = \left(\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right)$$



Σχ. 23

Ορίζουμε ως **ροή** του διανυσματικού πεδίου V διά της καμπύλης C το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$N = \int_C V \cdot \mathbf{n} ds$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζει την ποσότητα ρευστού που διέρχεται από την C ανά μονάδα χρόνου. Είναι φανερό ότι

$$N = \int_C u dy - v dx = \int_C \Phi_x dy - \Phi_y dx = \int_C \Psi_x dx + \Phi_x dy \quad (4)$$

Η **κυκλοφορία** κατά μήκος της C είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\Gamma = \int_C V \cdot \mathbf{t} ds$$

Το ολοκλήρωμα παριστάνει την ποσότητα ρευστού που κινείται ανά μονάδα χρόνου κατά μήκος της C . Είναι φανερό ότι

$$\Gamma = \int_C V \cdot \mathbf{t} ds = \int_C u dx - v dy = \int_C \Phi_x dx + \Phi_y dy = \int_C \Phi_x dx - \Psi_x dy \quad (5)$$

Ισχύει

$$\int_C G'(z) dz = \int_C \Phi_x dx - \Psi_x dy + i \int_C \Psi_x dx + \Phi_x dy,$$

οπότε από τις (4) και (5) προκύπτει

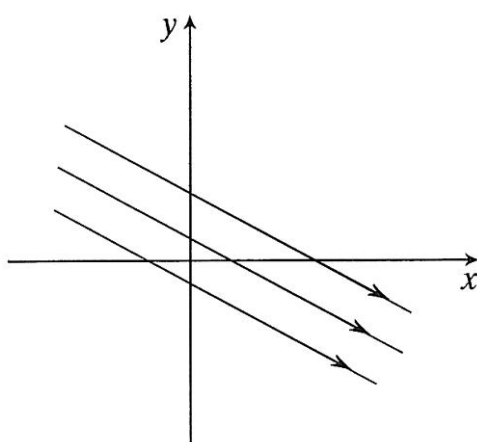
$$\boxed{\int_C G'(z) dz = \Gamma + iN} \quad (6)$$

Ο τύπος αυτός, που εκφράζει την κυκλοφορία και τη ροή μέσω του μιγαδικού δυναμικού βρίσκει πολλές εφαρμογές στην Υδροδυναμική.

Παράδειγμα 2.6.5. Έστω ότι το μιγαδικό δυναμικό μιας ροής έχει τη μορφή

$$G(z) = \alpha z,$$

όπου $\alpha = \kappa + i\lambda$ ένας δοσμένος μιγαδικός αριθμός. Τότε το δυναμικό ταχύτητας είναι $\Phi(x, y) = \kappa x - \lambda y$ και η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y) = \lambda x + \kappa y$. Οι γραμμές ροής $\Psi(x, y) = C$ είναι ευθείες παράλληλες η κλίση των οποίων ως προς τον x -άξονα δίνεται από τη σχέση $\tan \alpha = -\frac{\lambda}{\kappa}$.



Σχ. 24

Ισχύει $V(x, y) = \overline{G'(z)} = \bar{\alpha} = \kappa - i\lambda$, και άρα το διάνυσμα ταχύτητας είναι παράλληλο με τις γραμμές $\Psi(x, y) = C$.

Παράδειγμα 2.6.6. Έστω ότι το μιγαδικό δυναμικό μιας ροής έχει τη μορφή

$$G(z) = a \operatorname{Log} z, a \in \mathbb{R}.$$

Αν $z = re^{i\varphi}$, τότε το δυναμικό ταχύτητας και η συνάρτηση ροής σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Phi(r, \varphi) = a \ln r \text{ και } \Psi(r, \varphi) = a\varphi.$$

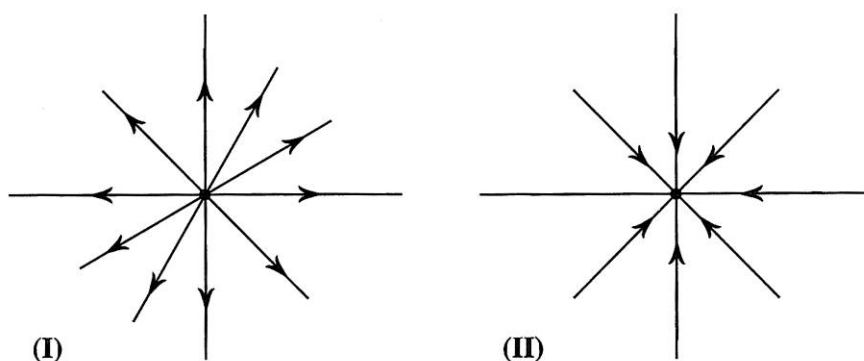
Οι γραμμές ροής είναι ημιευθείες με αρχή το 0 και οι ισοδυναμικές γραμμές κύκλοι με κέντρο το 0. Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|G'(z)| = \frac{|a|}{|z|} = \frac{|a|}{r}, \quad (7)$$

και το διάνυσμα της ταχύτητας είναι

$$V(x,y) = \overline{G'(z)} = \frac{\alpha}{z}.$$

Από την (7) προκύπτει ότι στην αρχή η ταχύτητα είναι άπειρη. Το σημείο $z = 0$ είναι ανώμαλο σημείο της G και είναι η πηγή της ροής. Αν $\alpha > 0$ τότε έχουμε θετική πηγή και το διάνυσμα ταχύτητας έχει κατεύθυνση απομάκρυνσης από τη πηγή (βλ. σχήμα 24,I), αν $\alpha < 0$, τότε έχουμε αρνητική πηγή ή καταβόθρα και το διάνυσμα ταχύτητας κατευθύνεται προς την πηγή (βλ. σχήμα 24,II).



Σχ. 25

Αν C είναι μια οποιαδήποτε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που περιέχει το 0, τότε από τον τύπο (6) έχουμε

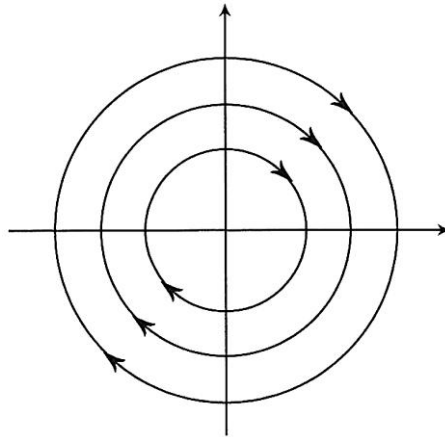
$$\int_C G'(z) dz = \int_C \frac{\alpha}{z} dz = 2\pi i \alpha = \Gamma + iN,$$

οπότε $N = 2\pi\alpha$. Επομένως η ροή ρευστού κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης που περιέχει την πηγή είναι σταθερή και ίση με $2\pi\alpha$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ένταση της πηγής.

Παράδειγμα 2.6.7. Θεωρούμε μια ροή με μιγαδικό δυναμικό

$$G(z) = i\alpha \text{Log} z$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε $N=0$ και $\Gamma = -2\pi\alpha$. Το σημείο 0 ονομάζεται **σημείο στροβιλισμού** της ροής.



Σχ. 26

Παράδειγμα 2.6.8. (Πηγή και καταβόθρα ίσης έντασης). Έστω μια πηγή και μια καταβόθρα μοναδιαίας έντασης που βρίσκονται στα σημεία $+1$ και -1 , αντίστοιχα. Το μιγαδικό δυναμικό της ροής είναι

$$\Gamma(z) = \text{Log}(z-1) - \text{Log}(z+1) = \text{Log}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Η συνάρτηση ροής είναι

$$\Psi(x, y) = \text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right),$$

οπότε οι γραμμές ροής δίνονται από τη σχέση

$$\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \text{Arg}\left(\frac{x^2 + y^2 - 1 + 2iy}{(x+1)^2 + y^2}\right) = \text{Arc tan}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right) = c,$$

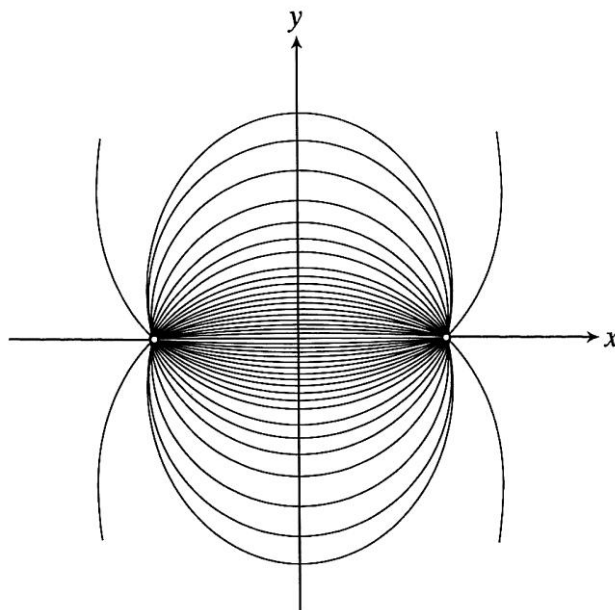
δηλαδή

$$(\tan c) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 2y.$$

Η τελευταία σχέση γράφεται στη μορφή

$$x^2 + (y - \cot c)^2 = 1 + \cot^2 c.$$

Επομένως οι γραμμές ροής είναι κύκλοι με κέντρα τα σημεία $(0, \cot c)$ που διέρχονται από τα σημεία $(\pm 1, 0)$ (βλ. σχήμα).



Σχ. 27

Πηγή και καταβόθρα ίσης έντασης

Παράδειγμα 2.6.9 (Δύο πηγές ίσης έντασης). Έστω δύο πηγές μοναδιαίας έντασης που βρίσκονται στα σημεία ± 1 . Το μοναδικό δυναμικό της ροής είναι

$$G(z) = \text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1) = \text{Log}(z^2 - 1).$$

Η συνάρτηση ροής είναι

$$\Psi(x, y) = \text{Arg}(z^2 - 1),$$

οπότε οι γραμμές ροής $\Psi(x, y) = c$ θα είναι

$$\text{Arg}(z^2 - 1) = \text{Arg}(x^2 - y^2 - 1 + 2ixy) = \text{Arc tan}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}\right) = c,$$

δηλαδή

$$x^2 + 2xy \cot c - y^2 = 1$$

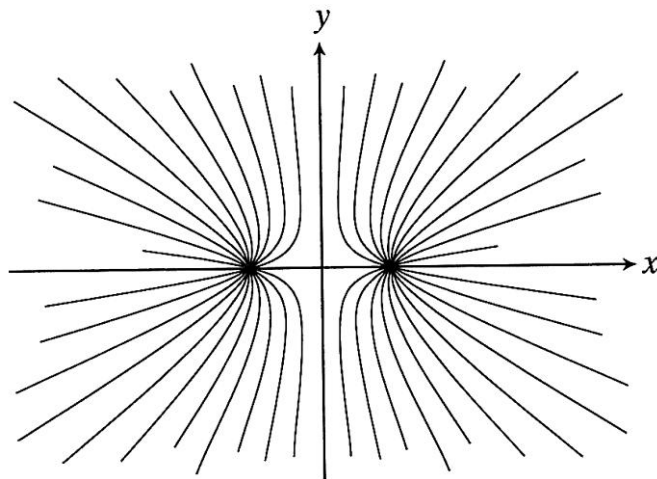
Η σχέση αυτή γράφεται

$$\left(x \cos \frac{c}{2} - y \sin \frac{c}{2}\right) \left(x \sin \frac{c}{2} + y \cos \frac{c}{2}\right) = \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} = \frac{\sin c}{2}$$

Κάνοντας στροφή των αξόνων κατά $-\frac{c}{2}$, δηλαδή

$$x' = x \cos\left(-\frac{c}{2}\right) + y \sin\left(-\frac{c}{2}\right), y' = -x \sin\left(-\frac{c}{2}\right) + y \cos\left(-\frac{c}{2}\right)$$

οι γραμμές ροής θα ικανοποιούν τη σχέση $x'y' = \frac{\text{sinc}}{2}$. Επομένως οι γραμμές ροής είναι υπερβολές με κέντρο την αρχή και οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(\pm 1, 0)$.



Σχ. 28

Δυο πηγές ίσης έντασης

Στα παραδείγματα που αναφέραμε μέχρι τώρα, καθορίσαμε τα χαρακτηριστικά της ροής με τη βοήθεια ενός δοσμένου μιγαδικού αριθμού. Θα μελετήσουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα. Δηλαδή την εύρεση του μιγαδικού δυναμικού γνωρίζοντας τα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά της. Σηειώνουμε ότι η ταχύτητα ροής εκφράζεται μέσω της παραγώγου του μιγαδικού δυναμικού και άρα το μιγαδικό δυναμικό δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο για μια δοσμένη ροή.

Ροή γύρω από ένα εμπόδιο

Θεωρούμε μια ροή που είναι σταθερή στο άπειρο, δηλαδή

$$V(z) \rightarrow V_\infty = \text{σταθερή όταν } z \rightarrow \infty.$$

Τοποθετούμε στο πεδίο ροής ένα εμπόδιο, του οποίου το σύνορο είναι μια λεία καμπύλη C και ζητάμε να βρούμε το μιγαδικό δυναμικό $G(z)$ της ροής. Η $G'(z)$ αναπτύσσεται στο εξωτερικό της C σε μια σειρά Laurent της μορφής

$$G'(z) = \bar{V}_\infty + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \dots$$

αφού $G'(z) = \bar{V}_\infty$ όταν $z \rightarrow \infty$ (βλ. τύπο (3)).

Επομένως

$$G(z) = \bar{V}_\infty z + \alpha + \alpha_{-1} \text{Log} z - \frac{\alpha_{-2}}{z} - \dots,$$

όπου α αυθαίρετη σταθερά. Για να γίνει κατανοητή η σημασία της σταθεράς α_{-1} χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int_{C'} G'(z) dz = \Gamma + iN,$$

όπου C' είναι μια οποιαδήποτε κλειστή, λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που περιέχει στο εσωτερικό της τη C . Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{C'} G'(z) dz = 2\pi i \alpha_{-1},$$

οπότε, από τη σχέση (6), βρίσκουμε

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma + iN).$$

Επειδή η ροή N πάνω στη C είναι μηδέν, έχουμε

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \Gamma.$$

Επομένως ισχύει

$$G(z) = \bar{V}_\infty \cdot z + \alpha + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log} z - \frac{\alpha_{-2}}{z} - \dots$$

Επειδή η καμπύλη C του εμποδίου είναι μια γραμμή ροής θα πρέπει να ισχύει

$$\Psi(x,y) = \text{σταθερά πάνω στη } C \quad (8)$$

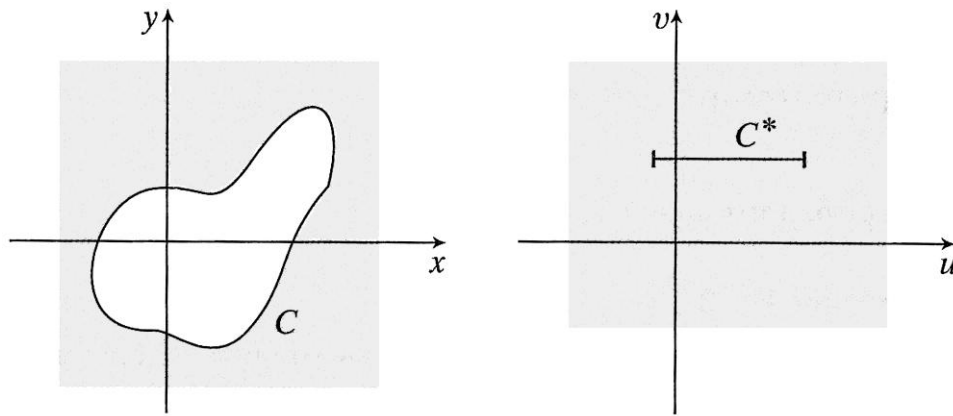
Αποδεικνύεται (βλ. [5]) ότι

Αν δοθεί η V_∞ και η κυκλοφορία Γ της ροής, τότε το μιγαδικό δυναμικό $G(z)$ της ροής είναι μονοσήμαντα ορισμένο μέχρι μιας προσθετικής σταθεράς.

Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $\Gamma = 0$. Έχουμε

$$G(z) = \bar{V}_\infty \cdot z + \alpha - \frac{\alpha_{-2}}{z} - \dots$$

Έστω $G(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$. Λόγω της (8) η εικόνα της C μέσω της $G(z)$ θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα C^* παράλληλο προς τον u -άξονα. Η G απεικονίζει το εξωτερικό της C σύμμορφα επί του εξωτερικού της C^* .



Σχ. 29

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη. Πράγματι, έστω w_0 ένα τυχαίο σημείο του w -επιπέδου με $w_0 \notin C^*$. Υποθέτουμε ότι το 0 ανήκει στο εσωτερικό της C . Έστω $N(w_0)$ το πλήθος των σημείων z με $G(z) = w_0$ και P το πλήθος των πόλων της G στο εξωτερικό της C . Αν $f(z) = G(z) - w_0$, τότε από την αρχή του ορίσματος, έχουμε

$$N(w_0) - P = N_f(0) - P_f = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G'(z)}{G(z) - w_0} dz = 0.$$

Επειδή $P_f = 1$ (το ∞ είναι ο μοναδικός πόλος τάξεως 1) θα είναι $N(w_0) = 1$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό z με $G(z) = w_0$.

Για τη μελέτη ροών σημαντική είναι η έννοια του **σημείου ανάκαμψης**. Ένα σημείο για το οποίο $G'(z) = 0$ ονομάζεται σημείο ανάκαμψης της ροής. Το μέτρο της ταχύτητας V στα σημεία αυτά είναι μηδέν. Είναι φανερό ότι στα σημεία ανάκαμψης η $G(z)$ δεν είναι σύμμορφη.

Παράδειγμα 2.6.10. Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της ροής γύρω από έναν κυκλικό κύλινδρο, ανάγοντας το πρόβλημα αυτό σε επίπεδο, θεωρώντας μια ροή γύρω από έναν κυκλικό δίσκο με σύνορο $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Στο άπειρο η ταχύτητα είναι σταθερή

$$V_\infty = |V_\infty| e^{i\varphi}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Κυκλοφορία $\Gamma = 0$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν $G(z)$ είναι το μιγαδικό δυναμικό της ροής, τότε η $G(z)$ απεικονίζει το εξωτερικό του κύκλου C επί του $C \setminus C^*$, όπου C^* είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τον u -άξονα. Η απεικόνιση G είναι σύμμορφη και αμφιμονοσήμαντη.

Η απεικόνιση Joukowski

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

έχει μια ανάλογη συμπεριφορά: απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$ επί του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία ± 1 .

Τροποποιούμε τώρα τη συνάρτηση $f(z)$, ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το μιγαδικό δυναμικό $G(z)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \lambda \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε

$$g'(z) = \lambda \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right) \rightarrow \frac{\lambda}{R}, \quad \text{όταν } z \rightarrow \infty.$$

Για το μιγαδικό δυναμικό $G(z)$ θα πρέπει

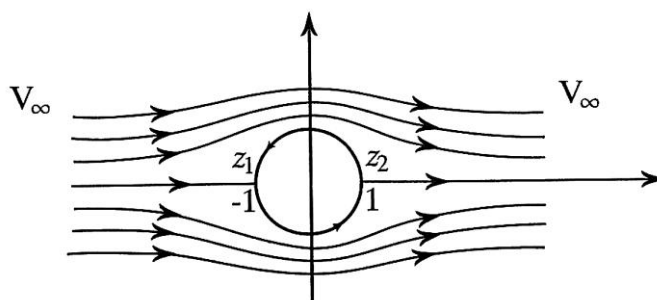
$$G'(z) \rightarrow \bar{V}_\infty = |V_\infty| e^{-i\varphi}, \quad \text{για } z \rightarrow \infty.$$

Επιλέγουμε $\lambda = |V_\infty| \cdot R$ και αντικαθιστούμε το z με το $ze^{-i\varphi}$. Έτσι το ζητούμενο δυναμικό είναι

$$G(z) = \frac{|V_\infty| R z e^{-i\varphi}}{R} + \frac{|V_\infty| R^2}{z e^{-i\varphi}}$$

$$\boxed{G(z) = \bar{V}_\infty \cdot z + \frac{R^2 \bar{V}_\infty}{z}}$$

Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνεται η ροή για $\Gamma=0$, $R=1$ και $V_\infty = \bar{V}_\infty$.



Τα σημεία ανάκαμψης της ροής προκύπτουν από τη σχέση

$$G'(z) = V_{\infty} - \frac{V_{\infty}}{z^2} = 0$$

δηλαδή είναι $z_1 = 1$ και $z_2 = -1$.

β) Κυκλοφορία $\Gamma \neq 0$

Το μιγαδικό δυναμικό ενός σημειακού στροβίλου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων είναι

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log} z$$

(βλ. παράδειγμα 12.7.7) .

Προσθέτοντας το δυναμικό αυτό με το δυναμικό που βρήκαμε προηγούμενα για $\Gamma = 0$, βρίσκουμε το μιγαδικό δυναμικό της ροής

$$G(z) = \overline{V_{\infty}} \cdot z + \frac{R^2 V_{\infty}}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log} z$$

Σημεία ανάκαμψης της ροής: Για $R = 1$ και $V_{\infty} = \overline{V_{\infty}}$ τα σημεία ανάκαμψης βρίσκονται από τη σχέση

$$G'(z) = V_{\infty} - \frac{V_{\infty}}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} = 0 ,$$

δηλαδή είναι ρίζες της εξίσωσης

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i V_{\infty}} z - 1 = 0 .$$

Επομένως

$$z_{1,2} = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \left(\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 V_{\infty}^2 - \Gamma^2} \right)$$

1) Αν $\Gamma \leq 4\pi V_{\infty}$, τότε

$$|z_{1,2}| = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \sqrt{\Gamma^2 + 16\pi^2 V_{\infty}^2 - \Gamma^2} = 1 ,$$

δηλαδή και τα δύο σημεία ανάκαμψης βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.

Θέτοντας $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, τότε

$$|G'(z)| = \left| V_{\infty} - \frac{V_{\infty}}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \right| = \left| (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) V_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \right| = \left| 2V_{\infty} \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \right| = 0 ,$$

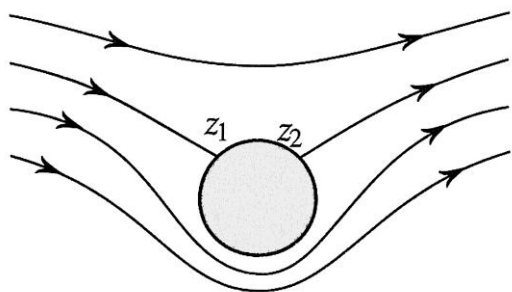
Δηλαδή

$$\sin\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}$$

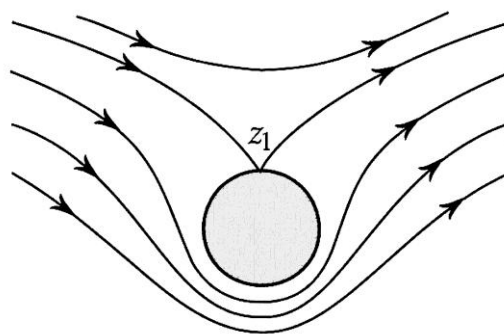
οπότε για τα δύο σημεία ανάκαμψης $z_1 = e^{i\varphi_1}$ και $z_2 = e^{i\varphi_2}$ έχουμε

$$\boxed{\varphi_1 = \text{Arc sin} \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}, \varphi_2 = \pi - \text{Arc sin} \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}} \quad (8)$$

Για $|\Gamma| < 4\pi V_\infty$ έχουμε μια ροή του σχήματος 30, ενώ για $|\Gamma| = 4\pi V_\infty$ έχουμε μια ροή του σχήματος 31 (τα δύο σημεία ανάκαμψης συμπίπτουν).



Σχ. 30. Ροή για $|\Gamma| < 4\pi V_\infty$



Σχ. 31. Ροή για $|\Gamma| = 4\pi V_\infty$

Παρατήρηση. Από την πρώτη των σχέσεων (8) έχουμε

$$|\Gamma| = 4\pi V_\infty = \sin\varphi_1$$

Επομένως είναι δυνατόν σε μια ροή να δίνεται αντί της κυκλοφορίας Γ το σημείο ανάκαμψης z_1 (δηλ. το φ_1).

2) Για $|\Gamma| > 4\pi V_\infty$, τα σημεία ανάκαμψης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$|z_1| > 1, |z_2| < 1$$

δηλαδή μόνο το σημείο z_1 είναι πράγματι σημείο ανάκαμψης.

Δύναμη που ασκείται από ροή πάνω σε ένα σώμα

Έστω ένα σώμα με σύνορο την τμηματικά λεία καμπύλη C . Η δύναμη που ασκεί μια ροή σε ένα στοιχειώδες τόξο ds της καμπύλης είναι ανάλογη της υδροδυναμικής πίεσης p και έχει τη διεύθυνση της καθέτου που κατευθύνεται

στο εσωτερικό της καμπύλης $-\mathbf{n} = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right)$.

Επομένως οι συνιστώσες της δύναμης F που ασκείται πάνω στη καμπύλη C είναι

$$F_x = -\int_C p dy, F_y = \int_C p dx.$$

Προσδιορίζοντας την υδροδυναμική πίεση p από τον τύπο Bernoulli

$$p = A - \frac{\rho u^2}{2},$$

όπου A σταθερά $u = |V|$, V είναι η ταχύτητα ροής και ρ η πυκνότητα του ρευστού και γράφοντας $F = F_x + iF_y$ βρίσκουμε

$$F = -\frac{\rho}{2} \int_C u^2 (dx - idy) = -\frac{\rho}{2} \int_C u^2 \overline{dz} \quad (9)$$

(το ολοκλήρωμα της σταθεράς A πάνω στην κλειστή καμπύλη C είναι μηδέν). Κατά μήκος της καμπύλης C η ταχύτητα V έχει την ίδια διεύθυνση με την εφαπτομένη, επομένως

$$V = ue^{i\varphi},$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης με τον x -άξονα.

Γνωρίζουμε ότι $|V|e^{i\varphi} = G'(z)$. Επίσης $\overline{dz} = dse^{-i\varphi}$.

Επομένως $|V|^2 \overline{dz} = |V|^2 dse^{-i\varphi} = |V|^2 e^{-2i\varphi} dse^{i\varphi} = G'^2(z) dz$, οπότε ο τύπος (9) παίρνει τη μορφή

$$F = -\frac{\rho}{2} \int_C G'^2(z) dz \quad (10)$$

Αυτός είναι ο **τύπος Chaplygin** ο οποίος δίνει τη δύναμη που ασκείται από μια ροή σε ένα σώμα που βρίσκεται στο πεδίο ροής. Το μιγαδικό δυναμικό έξω από το σώμα, είναι

$$G'(z) = \overline{V}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a'_n}{z^n}$$

και άρα

$$G'(z) = \frac{\overline{V}_\infty}{\pi i} + \frac{\Gamma}{z} + \overline{V}_\infty^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

Επομένως

$$\int_C G'^2(z) dz = 2\overline{V}_\infty \Gamma \quad (11)$$

Από τις (10) και (11) προκύπτει ο **τύπος Joukowski**

$$|F| = \rho |V_{\infty}| \cdot |\Gamma|$$

Με τη βοήθεια των ολόμορφων συναρτήσεων οι Joukowski, Chaplygin ανέπτυξαν μεθόδους για την επίλυση υδρο- και αεροδυναμικών προβλημάτων και που αφορούσαν στην κατασκευή αεροσκαφών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Κραββαρίτης Δ.Χ.:** Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμεών, 2006
2. **Γ.Ν. Παντελίδη, Κραββαρίτη Δ.Χ., Χατζησάββα Ν.Σ.:** Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Β' έκδοση, 1990.
3. **Ablowitz M.J., Fokas A.S.:** Complex Variables: Introduction and Applications, Cambridge University Press, 1997.
4. **Ahlfors, L.V.:** Complex Analysis, 3rd ed., London, McGraw-Hill, 1979.
5. **Bak J., D.J. Newman,** Complex Analysis, 2nd ed., Springer Verlag, 1996.
6. **Burg K., Haf. H., Wille F.:** Höhere Mathematik für Ingenieure, Band IV, Teubner Stuttgart 1994.
7. **Howie, J.M.:** Complex Analysis, Springer-Verlag, 2003.
8. **Marsden J.E., Hoffman, M.J.:** Βασική Μιγαδική Ανάλυση, μετάφραση Λ.Χ. Παπαλουκά, Εκδόσεις Συμμετρία, 1994.
9. **Roland Schinzinger, Patricio A.A. Laura.:** Conformal Mapping: Methods and Applications, Courier Dover Publications, 2003
10. **Saff E.B., Snider A.D.:** Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science, Pearson Education, Inc. 2003.
11. **Τερσένοβ Σ.:** Αναλυτικές συναρτήσεις και μερικές εφαρμογές τους, Εκδόσεις Δίαυλος, 1995.
12. <http://www.grc.nasa.gov/./map.html>
13. http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map
14. <http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>
15. <http://www.ifm.liu.se/courses/TFYY67/Lect5.pdf>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1.1. Σύμμορφες απεικονίσεις.....	2
1.2. Το θεώρημα Riemann.....	5
1.3. Διγραμμικοί Μετασχηματισμοί.....	8
1.4. Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί.....	26
1.5. Ο μετασχηματισμός Joukowski.....	38

Κεφάλαιο 2

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1. Γενικά.....	42
2.2. Προβλήματα συνοριακών τιμών.....	46
2.3. Το πρόβλημα Dirichlet για ένα δίσκο.....	57
2.4. Το πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο.....	62
2.5. Προβλήματα Neumann.....	67
2.6. Εφαρμογές.....	68