



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Υπολογισμός της Δυναμικής Ροής
γύρω από Ιστιοπλοϊκό Σκάφος»



Ευαγγελία Βελέντζα

Αθήνα, Ιούλιος 2011

Επιβλέπον Καθηγητής

Γεώργιος Δ. Τζαμπίρας

Εξεταστική Επιτροπή

Αναπλ. Καθ. Γ. Ζαραφωνίτης, Αναπλ. Καθ. Γ. Πολίτης, Καθ. Γ. Τζαμπίρας

1. ABSTRACT

The ultimate purpose of the here below diplomatic thesis was the formation of a tool, which could be implemented and applied as a guide for hydrodynamic design and optimization of sailing vessels. For such a treatment though, adequate and satisfactory solutions are required in a small time margin. Because of this, we were orientated into a computational method of potential flow that combines rapidity with a relatively high accuracy.

The conceptual idea behind this, is the rapid and possibly precise computation of the free surface's geometry of the vessel, through the potential flow theory and its keel and bulb, as well, assuming that on the surface of the vessel and bulb we have sources, whereas on the surface of the keel vortices. The potential flow computational methods, which were used, have been developed by Professor George Tzabiras at NTUA and face the general problem of resistance about arbitrary three-dimensional bodies. In this code a special section of subroutines for the keel and bulb were added. A great contribution to all these is attributed to professor Costas Belibassakis.

The term “potential” refers to a flow of an ideal, non-compressible fluid, which lacks of any viscosity phenomena. These phenomena do not affect practically the wave formation at the bow; while at stern and the wake interacts forcefully with the free surface. The method solves the complete non – linear problem, that is, it satisfies the kinematic and dynamic boundary conditions onto the actual free surface. This is accomplished by using quadrilateral surface elements (panels) on the vessel and the free surface. The construction of the elements can be made by the conformal transformation, whereas the convergence of the method is based on an iterative procedure. Same as this is the procedure, which has been followed for the computation of the keel, approximating its surface with panel elements.

With the intention to evaluate and confirm the method, a series of towing experiments of the sailing vessel was carried out. These test cases were carried out at the Laboratory of Ship and Marine Hydrodynamics of the National Technical University of Athens (N.T.U.A.). The comparison of the results has been done as follows: The calculated free surface from the potential flow computational method is being

compared with wavecuts, measured in the tank. Concerning these comparisons we conduct several conclusions for the effectiveness of the method and its new annexation to include the computation of sailing vessels, as well. Moreover, computations are carried out also for the absolute scale of the vessel, so as to check the principles of the experiential projection methods that experimental tanks use.

Last but not least, annotation of the results and some significant observations are mentioned, as well as, conclusions for the capabilities and the implementation boundaries of the methods.

2. ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελ.
3. Περίληψη	4
4. Εισαγωγή	6
1. Το περιβάλλον του πλοίου	6
2. Αντίσταση του πλοίου	11
3. Ποιοτική εξέταση της αντίστασης του πλοίου, φαινομενολογικές μέθοδοι και θεωρία ομοιότητας	13
4. Αντίσταση Κυματισμού	18
5. Κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον	26
6. Γραμμική θεωρία κυματισμών ελεύθερης επιφάνειας	28
7. Τρισδιάστατο σύστημα κυματισμών πλοίου – Κυματισμοί Kelvin	30
8. Σχεδίαση και κατασκευή ιστιοπλοϊκού σκάφους	39
5. Θεωρητικό Μέρος	41
A. Ροή γύρω από ιστιοπλοϊκά σκάφη	41
1. Αριθμητικά πλέγματα	41
2. Εξισώσεις μεταφοράς και διακριτοποίησης σε ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα	67
B. Ροές με άνωση	95
1. Γεωμετρία υδροτομών	95
2. Θεωρία φέρουσας γραμμής για τρισδιάστατη πτέρυγα	107
3. Αναλυτικές μέθοδοι στη σχεδίαση ελίκων	152
4. Εισαγωγή στη θεωρητική και υπολογιστική αεροδυναμική	164
5. Αεροδυναμική χαμηλών ταχυτήτων. Από τη θεωρία πτερυγίων στις μεθόδους πάνελς	199
Γ. Δυναμικές ροές χωρίς άνωση	243
6. Πειραματικό μέρος	288
A. Περιγραφή της μεθόδου του κώδικα	288
B. Πειραματική Διαδικασία	316
Γ. Ανάλυση αποτελεσμάτων	332
7. Συμπεράσματα – Επίλογος	335
8. Βιβλιογραφία	337
9. Ευχαριστίες	339

3. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Απώτερος σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας ήταν η παραγωγή ενός εργαλείου που θα μπορούσε να χρησιμοποιείται ως οδηγός για την υδροδυναμική σχεδίαση και βελτιστοποίηση ιστιοπλοϊκών σκαφών. Για μία τέτοια χρήση όμως, απαιτούνται ικανοποιητικές λύσεις σε μικρό χρονικό διάστημα. Για αυτό τον λόγο προσανατολιστήκαμε προς ένα κώδικα δυναμικής ροής που συνδυάζει την ταχύτητα και τη σχετικά μεγάλη ακρίβεια.

Η βασική ιδέα είναι ο υπολογισμός γρήγορα και κατά το δυνατόν ορθά της γεωμετρίας της ελεύθερης επιφάνειας του σκάφους μέσω της θεώρησης της δυναμικής ροής, και εν συνεχεία της καρίνας του και του βολβού της, θεωρώντας στην επιφάνεια της γάστρας και του βολβού της καρίνες πηγές, ενώ στην ίδια την καρίνα δίνες. Οι κώδικες δυναμικής ροής που χρησιμοποιήθηκαν, έχουν αναπτυχθεί στο ΕΜΠ από τον καθηγητή Γεώργιο Τζαμπίρα, και αντιμετωπίζουν το γενικό πρόβλημα της αντίστασης γύρω από πλοίο τυχαίας γεωμετρίας. Σε αυτό τον κώδικα προστέθηκε ειδικό τμήμα για την καρίνα και το βολβό της, ιδιαίτερη συμβολή στο οποίο είχε ο αναπληρωτής καθηγητής Κώστας Μπελιμπασάκης.

Με τον όρο «δυναμική» εννοείται η ροή ιδανικού ασυμπίεστου ρευστού που δεν περιλαμβάνει φαινόμενα συνεκτικότητας. Τα φαινόμενα αυτά δεν επηρεάζουν πρακτικά τον σχηματισμό του κύματος στην πλώρη, ενώ αντίθετα στην πρύμνη και στον ομόρου αλληλεπιδρούν ισχυρά με την ελεύθερη επιφάνεια. Η μέθοδος επιλύει το πλήρες μη γραμμικό πρόβλημα, δηλαδή ικανοποιεί την κινηματική και την δυναμική συνθήκη πάνω στην πραγματική ελεύθερη επιφάνεια. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση τετράπλευρων επιφανειακών στοιχείων (panels), πάνω στην γάστρα και την ελεύθερη επιφάνεια. Η κατασκευή των στοιχείων γίνεται με χρήση του σύμμορφου μετασχηματισμού, ενώ η σύγκλιση της μεθόδου βασίζεται σε μία επαναληπτική διαδικασία. Παρόμοια διαδικασία ακολουθήθηκε και στον υπολογισμό της καρίνας, όπου πάλι προσεγγίσθηκε με στοιχεία πάνελ.

Για τον έλεγχο και την επιβεβαίωση της μεθόδου, πραγματοποιήθηκε μια σειρά πειραμάτων ρυμούλκησης ιστιοπλοϊκού σκάφους. Τα πειράματα έγιναν στην πειραματική δεξαμενή του εργαστηρίου Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής

(ΕΝΘΥ) του Ε.Μ.Π. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγινε ως εξής: Η υπολογισμένη ελεύθερη επιφάνεια από το κώδικα δυναμικής ροής συγκρίνεται με κυματομορφές (wavecuts) μετρημένες στην δεξαμενή, από τις οποίες συγκρίσεις άγονται διάφορα συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα του κώδικα και της νέας προσάρτησής του για να συμπεριλάβει και τον υπολογισμό ιστιοπλοϊκών σκαφών. Επιπλέον γίνονται υπολογισμοί και για την πλήρη κλίμακα (πλοίο), έτσι ώστε να ελεγχθούν οι βασικές αρχές των εμπειρικών μεθόδων προεκβολής που χρησιμοποιούν οι δεξαμενές.

Τέλος, παρατίθενται σχολιασμός των αποτελεσμάτων και κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις, ενώ δίδονται και τα μέχρι στιγμής συμπεράσματα για τις δυνατότητες της μεθόδου και τα όρια εφαρμογής της.

4. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ

Οι παράγοντες που επιδρούν πάνω στο πλοίο σαν σύνολο και στα εκτεθειμένα τμήματά του είναι το νερό στο οποίο πλέει το πλοίο (γλυκό ή θαλασσινό) και το κλίμα.

1.Το νερό

Μερικές φυσικές ιδιότητες του νερού στο οποίο πλέει το πλοίο έχουν εξαιρετική σπουδαιότητα για το Ναυπηγό. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

- ✿ Πυκνότητα. Αυτή επηρεάζει το βύθισμα και τη διαγωγή του πλοίου και εξαρτάται κυρίως από τη θερμοκρασία και την αλατότητα.
- ✿ Κινηματικό ιξώδες. Αυτό επηρεάζει την αντίσταση τριβής του πλοίου, γιατί μπαίνει στον ορισμό του αριθμού Reynolds.
- ✿ Αλατότητα. Για τους υπολογισμούς αυτή παίρνεται σταθερή 3.5%. Από την αλατότητα εξαρτώνται και οι τιμές της πυκνότητας και του κινηματικού ιξώδους, οι οποίες στην πραγματικότητα διαφέρουν από περιοχή σε περιοχή ανάλογα με την αλατότητα της θάλασσας.

2.Το κλίμα

- ✿ Ο άνεμος. Η κύρια επίδραση του ανέμου γίνεται αισθητή έμμεσα από τα κύματα που δημιουργεί στην επιφάνεια της θάλασσας. Το μέγεθος των δημιουργούμενων κυμάτων εξαρτάται από την ένταση (δηλαδή την ταχύτητα) του ανέμου, από τον χρόνο που διαρκεί και από την απόσταση πάνω στην οποία επενεργεί. Η ένταση του ανέμου χαρακτηρίζεται διεθνώς με την κλίμακα Beaufort. Αυτή εισήχθηκε με τους αριθμούς 0 έως 12 από τον Άγγλο Ναύαρχο Sir Francis Beaufort το 1806. Το 0 αναφέρεται σε άπνοια, ενώ το 12 σε άνεμο με ένταση τυφώνα. Αρχικά, οι αριθμοί της κλίμακας δεν αναφέρονταν σε συγκεκριμένες ταχύτητες ανέμου, αλλά το 1939 υιοθετήθηκαν σε μία διεθνή σύνοδο οι τιμές που αναφέρονται στον πίνακα III.

Οι τιμές των ταχυτήτων ανέμου του πίνακα ΙΙΙ σχετίζονται με ένα ανεμόμετρο που βρίσκεται σε ύψος 6 μέτρων πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

ΘΕΡΜΟ- ΚΡΑΣΙΑ	ΓΑΛΚΟ ΝΕΡΟ		ΘΑΛΑΣΣΙΝΟ ΝΕΡΟ		ΘΕΡΜΟ- ΚΡΑΣΙΑ	ΓΑΛΚΟ ΝΕΡΟ		ΘΑΛΑΣΣΙΝΟ ΝΕΡΟ	
	Πυκνότητα ρ	Κινηματικό ιξώδες ν	Πυκνότητα ρ	Κινηματικό ιξώδες ν		Πυκνότητα ρ	Κινηματικό ιξώδες ν	Πυκνότητα ρ	Κινηματικό ιξώδες ν
	$\frac{\text{lb}-\text{sec}^2}{\text{ft}^4}$	$\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}} \times 10^5$	$\frac{\text{lb}-\text{sec}^2}{\text{ft}^4}$	$\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}} \times 10^5$		$\frac{\text{lb}-\text{sec}^2}{\text{ft}^4}$	$\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}} \times 10^5$	$\frac{\text{lb}-\text{sec}^2}{\text{ft}^4}$	$\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}} \times 10^5$
32	1.9395	1.92314	1.9947	1.96818	62	1.9179	1.17411	1.9898	1.22754
33	1.9395	1.88710	1.9946	1.93224	63	1.9177	1.15761	1.9895	1.21115
34	1.9404	1.85200	1.9946	1.89744	64	1.9175	1.14147	1.9893	1.19506
35	1.9404	1.81799	1.9945	1.86367	65	1.9173	1.12570	1.9890	1.17937
36	1.9401	1.78485	1.9944	1.83093	66	1.9171	1.11027	1.9888	1.16396
37	1.9401	1.75273	1.9943	1.79914	67	1.9169	1.09518	1.9885	1.14892
38	1.9401	1.72150	1.9942	1.76625	68	1.9167	1.08042	1.9882	1.13421
39	1.9401	1.69114	1.9941	1.73382	69	1.9165	1.06597	1.9879	1.11979
40	1.9401	1.66160	1.9940	1.70904	70	1.9162	1.05190	1.9876	1.10568
41	1.9401	1.63285	1.9939	1.68065	71	1.9160	1.03806	1.9873	1.09185
42	1.9401	1.60488	1.9937	1.65317	72	1.9158	1.02452	1.9870	1.07830
43	1.9401	1.57756	1.9936	1.62631	73	1.9155	1.01132	1.9867	1.06502
44	1.9400	1.55123	1.9934	1.60025	74	1.9152	0.99839	1.9864	1.05200
45	1.9400	1.52541	1.9933	1.57476	75	1.9150	0.98567	1.9861	1.03924
46	1.9399	1.50034	1.9931	1.55007	76	1.9147	0.97327	1.9858	1.02673
47	1.9398	1.47591	1.9930	1.52591	77	1.9144	0.96112	1.9854	1.01452
48	1.9398	1.45203	1.9928	1.50244	78	1.9142	0.94917	1.9851	1.00248
49	1.9397	1.42882	1.9926	1.47956	79	1.9139	0.93751	1.9848	0.99068
50	1.9395	1.40620	1.9924	1.45724	80	1.9136	0.92608	1.9844	0.97915
51	1.9395	1.38414	1.9923	1.43541	81	1.9133	0.91487	1.9841	0.96779
52	1.9394	1.36263	1.9921	1.41418	82	1.9130	0.90389	1.9837	0.95669
53	1.9393	1.34164	1.9919	1.39346	83	1.9127	0.89312	1.9834	0.94574
54	1.9392	1.32116	1.9917	1.37323	84	1.9124	0.88256	1.9830	0.93504
55	1.9390	1.30124	1.9914	1.35355	85	1.9121	0.87220	1.9827	0.92450
56	1.9389	1.28172	1.9912	1.33426	86	1.9117	0.86208	1.9823	0.91418
57	1.9387	1.26274	1.9910	1.31544					
58	1.9386	1.24434	1.9908	1.29701					
59	1.9384	1.22603	1.9905	1.27908					
60	1.9383	1.20828	1.9903	1.26150					
61	1.9381	1.19100	1.9901	1.24430					

(άλλαξης 3.5%)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

ΘΕΡΜΟ- ΚΡΑΣΙΑ	ΓΑΛΚΟ ΝΕΡΟ		ΘΑΛΑΣΣΙΝΟ ΝΕΡΟ	
	Πυκνότητα ρ	Κινηματικό ιξώδες ν	Πυκνότητα ρ	Κινηματικό ιξώδες ν
	$\frac{\text{lb}-\text{sec}^2}{\text{m}^4}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \times 10^6$	$\frac{\text{kg}-\text{sec}^2}{\text{m}^4}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \times 10^6$
0	101.95	1.78167	104.83	1.82844
1	101.95	1.72701	104.82	1.76931
2	101.96	1.67740	104.81	1.71306
3	101.96	1.63665	104.81	1.65988
4	101.96	1.56557	104.80	1.60940
5	101.96	1.51698	104.79	1.56142
6	101.96	1.47070	104.77	1.51584
7	101.95	1.42657	104.76	1.47242
8	101.95	1.38471	104.74	1.43102
9	101.94	1.34463	104.73	1.39152
10	101.93	1.30641	104.71	1.35383
11	101.92	1.26988	104.69	1.31773
12	101.91	1.23495	104.68	1.28324
13	101.90	1.20159	104.65	1.25028
14	101.88	1.16964	104.63	1.21862
15	101.87	1.13902	104.61	1.18831
16	101.86	1.10966	104.59	1.15916
17	101.84	1.08155	104.56	1.13125
18	101.82	1.05456	104.54	1.10438
19	101.80	1.02865	104.52	1.07854
20	101.78	1.00374	104.49	1.05372
21	101.76	0.97984	104.46	1.02981
22	101.74	0.95682	104.43	1.00678
23	101.71	0.93471	104.40	0.98467
24	101.69	0.91340	104.37	0.96315
25	101.66	0.89292	104.34	0.94252
26	101.64	0.87313	104.31	0.92255
27	101.61	0.85409	104.28	0.90331
28	101.58	0.83572	104.24	0.88470
29	101.55	0.81798	104.21	0.86671
30	101.52	0.80091	104.18	0.84931

(άλλαξης 3.5%)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

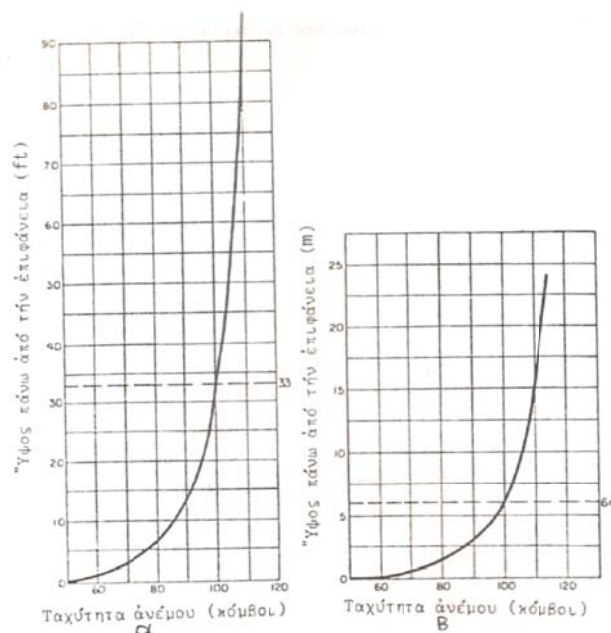
* Η κλίμακα Beaufort

Αριθμός Beaufort	Χαρακτηρισμός	Ταχύτητα ανέμου (κόμβοι)
0	Άπνοια (calm)	0 - 1
1	Ύποκλυον (Light air)	2 - 3
2	Ώδευός (Light breeze)	4 - 7
3	Αετός (Gentle breeze)	8 - 11
4	Μέτριος (Moderate breeze)	12 - 16
5	Λαμπρός (Fresh breeze)	17 - 21
6	Ίσχυρός (Strong breeze)	22 - 27
7	Σφοδρός (Moderate gale)	28 - 33
8	Εκληρός (Fresh gale)	34 - 40
9	Καταιγίζων (Strong gale)	41 - 48
10	Καταιγίδα (Whole gale)	49 - 56
11	Σφοδρή καταιγίδα (storm)	57 - 65
12	Τυφώνας (Hurricane)	Μεγαλύτερη από 65

Πίνακες Ι, ΙΙ, ΙΙΙ.

Η ταχύτητα του ανέμου μεταβάλλεται με το ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας, στην οποία η σχετική ταχύτητα είναι μηδέν λόγω της επιδράσεως του οριακού στρώματος. Στην εργασία των Sarchin και Goldberg (trans. SNAME 1962) ορίζεται μία ονομαστική ταχύτητα ανέμου σε ύψος 33ft πάνω από την ίσαλο, και η μεταβολή της ταχύτητας του ανέμου με το ύψος υποτίθεται ότι ακολουθεί την καμπύλη του σχήματος 1α. Οι ονομαστικές ταχύτητες του σχήματος 1α είναι περίπου 6% μικρότερες από εκείνες που ορίζονται από την κλίμακα Beaufort και φαίνονται στο σχήμα 1β. Για ονομαστικές ταχύτητες διαφορετικές από 100 κόμβους, οι πραγματικές ταχύτητες υπολογίζονται απευθείας ανάλογες προς τις ονομαστικές.

Οι περισσότερες άμεσες επιδράσεις του ανέμου γίνονται αισθητές από το πλοίο σαν δυνάμεις που επενεργούν στα πάνω από το νερό τμήματα του σκάφους και τις υπερκατασκευές. Οι κατά το διάμηκες του πλοίου συνιστώσες των δυνάμεων αυτών θα βοηθούν ή θα αντιστέκονται στην κίνηση του πλοίου. Οι εγκάρσιες δυνάμεις θα προκαλούν ροπή κλίσεως στο πλοίο. Έτσι, τα περιθώρια ευστάθειας που δίνονται κατά τη σχεδίαση ενός πλοίου πρέπει να παίρνουν υπόψιν και το μέγεθος μιας πιθανής ροπής κλίσεως, π.χ. πλοία με μεγάλη πλευρική επιφάνεια εξάλων χρειάζονται μεγαλύτερη ευστάθεια.



Σχήμα 1: Μεταβολή της ταχύτητας του ανέμου με το ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας (ονομαστική ταχύτητα του ανέμου 100 κόμβοι).

Άλλη άμεση επίδραση του ανέμου, μαζί με εκείνη της ταχύτητας του πλοίου, είναι η πρόκληση τοπικών ταχυτήτων ανέμου στην περιοχή των υπερκατασκευών που μπορούν να παρασύρουν καυσάερια από την καπνοδόχο προς τα πυρμναία καταστρώματα, ή να προκαλέσουν δυνατούς ανέμους σε καταστρώματα παιχνιδιών με συνέπεια την ενόχληση των επιβατών. Οι επιδράσεις αυτές μελετώνται συχνά με πειράματα προτύπων που γίνονται σε μία σήραγγα δοκιμών (wind tunnel), για επίτευξη κατάλληλης σχεδιάσεως της καπνοδόχου και των υπερκατασκευών.

- ❁ Ο αέρας του περιβάλλοντος. Ένα πλοίο περιβάλλεται τελείως από δύο ρευστές: τον αέρα στο ανώτερο και το νερό στο κατώτερο τμήμα του. Επειδή η ειδική θερμότητα του νερού είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη του αέρα, στο νερό έχουμε πολύ βραδύτερη μεταβολή της θερμοκρασίας λόγω κλιματικών αλλαγών. Για τον ορισμό του θερμοκρασιακού περιβάλλοντος του πλοίου είναι ανάγκη να αναφέρουμε θερμοκρασίες τόσο για το νερό όσο και για τον αέρα. Επίσης, είναι γνωστό ότι η υγρασία του αέρα είναι σημαντικό στοιχείο στον καθορισμό του βαθμού ανέσεως στα θερμά κλίματα. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη να προδιαγραφεί η θερμοκρασία που μετριέται στο θερμόμετρο «υγρού βολβού» και στο θερμόμετρο «ξηρού βολβού».

Οι θερμοκρασίες αυτές έχουν σημασία για τη σχεδίαση του πλοίου.

Για παράδειγμα, η θερμοκρασία του αέρα επηρεάζει:

- ❁ Την ποσότητα θερμάνσεως ή ψύξεως του αέρα που μπαίνει στο πλοίο για να διατηρηθεί μια ορισμένη εσωτερική θερμοκρασία.
- ❁ Την ποσότητα θερμομονώσεων που μπορεί να δικαιολογηθεί από οικονομική άποψη.
- ❁ Την αλλαγή ιδιοτήτων μερικών υλικών.
- ❁ Την ποσότητα πάγου που μπορεί να συσσωρευτεί πάνω στο πλοίο στα κρύα κλίματα και το επίπεδο ευστάθειας που πρέπει να έχει το πλοίο για να αντισταθμίσει την επίδραση του πάγου, όπως και την πρόβλεψη ειδικών διατάξεων τήξεως του πάγου.

Η θερμοκρασία του νερού επηρεάζει:

- ☀ Την πυκνότητα του νερού και επομένως το βύθισμα του πλοίου.
- ☀ Την απόδοση των μηχανημάτων π.χ. ατμοκίνητα μηχανήματα είναι δυνατόν να παρουσιάσουν απώλεια ισχύος κατά 3% στους τροπικούς σε σύγκριση με την εύκρατη ζώνη. Η επίδραση σε άλλα μηχανήματα μπορεί να είναι ακόμα μεγαλύτερη, αλλά όλα τα είδη μηχανημάτων επηρεάζονται μέχρι ένα βαθμό, συμπεριλαμβανομένων μερικών βοηθητικών μηχανημάτων, όπως ηλεκτρογεννητριών, αντλιών και συσκευών κλιματισμού.
- ☀ Την ενίσχυση που θα χρειασθεί η κατασκευή του πλοίου λόγω ναυσιπλοΐας σε περιοχές που είναι πιθανή η υπαρξη πάγου στην επιφάνεια του νερού.

Τόσο η θερμοκρασία του αέρα όσο και του νερού μπορούν να προκαλέσουν διαστολή ή συστολή υλικών με συνέπεια τη δημιουργία τάσεων στις ενώσεις μεταξύ ανόμοιων υλικών. Διαφορές θερμοκρασίας μεταξύ του αέρα και του νερού μπορούν να προκαλέσουν σχετική διαστολή ή συστολή του ανωτέρου καταστρώματος σε σχέση με την τρόπιδα με συνέπεια κάμψη του πλοίου προς τα πάνω (hogging) ή προς τα κάτω (sagging). Αυτό οδηγεί σε τάσεις της δοκού του πλοίου που μπορούν να χαλάσουν τη σχετική ευθυγράμμιση εξαρτημάτων που απέχουν λίγο μεταξύ τους κατά το διάμηκες. Επίσης, αν η μία πλευρά του πλοίου βρίσκεται σε δυνατό ηλιακό φως, το πλοίο θα τείνει να καμφθεί σε ένα οριζόντιο επίπεδο.

2.ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΠΛΟΙΟΥ

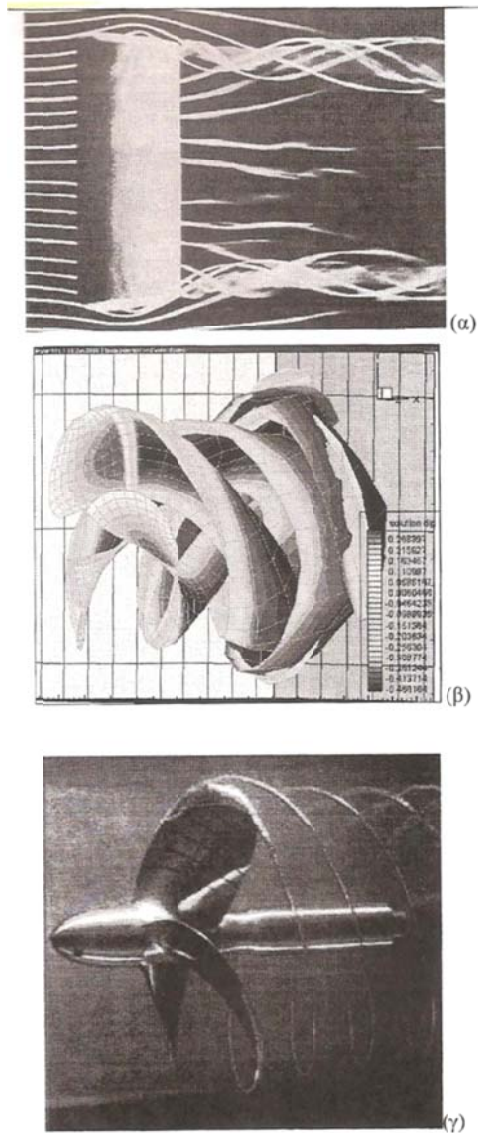
Ένα πλοίο διαφέρει από τις μεγάλες μηχανολογικές κατασκευές της ξηράς στο γεγονός ότι πρέπει να σχεδιαστεί έτσι, ώστε να μπορεί να κινείται «αποδοτικά» στο νερό ικανοποιώντας συγχρόνως ένα πλήθος άλλων κριτηρίων. Ο σχεδιαστής πρέπει να εξασφαλίσει επαρκή άντωση και ευστάθεια για το πλοίο, ακόμα και σε κατάσταση βλάβης, και επαρκή αντοχή της μεταλλικής κατασκευής τόσο σε ήρεμη θάλασσα, όσο και σε κυματώδη. Επίσης, ο συνδυασμός μορφής γάστρας και προωστήριας εγκατάστασης πρέπει να είναι εκείνος που εξασφαλίζει την μικρότερη αντίσταση πρόωσης και την μεγαλύτερη απόδοση (ελάχιστη κατανάλωση καυσίμου).

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει την υδροδυναμική σχεδίαση ενός πλοίου είναι η ανάγκη να εξασφαλιστεί η καλή συμπεριφορά του όχι μόνο σε ήρεμο νερό, αλλά και σε ένα εύρος συνθηκών λειτουργίας, δηλαδή να μην υφίσταται έντονους κραδασμούς, διαβροχή των καταστρωμάτων ή μεγάλη απώλεια ταχύτητας όταν ταξιδεύει σε κατάσταση κυματώδους θάλασσας. Επιπλέον, πρέπει να μπορεί να διατηρεί την επιθυμητή πορεία (πηδαλιουχία) και να ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στην όποια επιλογή αλλαγής κατεύθυνσης.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η σχεδίαση ενός πλοίου είναι ένα περίπλοκο πρόβλημα, όπου πλήθος απαιτήσεων σχεδίασης αλληλεπιδρούν, μία από τις βασικές πτυχές του οποίου είναι η εκτίμηση της αντίστασης.

Το φαινόμενο της αντίστασης (resistance) του πλοίου χωρίς την παρουσία του «προωστήρα» (π.χ. έλικα) θα μας απασχολήσει στις επόμενες παραγράφους. Το φαινόμενο αυτό βεβαίως είναι «εικονικό», αφού το πλοίο λειτουργεί πάντα αυτοπροωθούμενο. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα «αντίσταση ρυμούλκησης» προκύπτει στα πλαίσια της αποσύζευξης του προβλήματος του αυτοπροωθούμενου πλοίου σε επιμέρους (απλούστερα και άρα πιο ελκυστικά) προβλήματα. Η δυνατότητα χωριστής μελέτης της αντίστασης ρυμούλκησης, καθώς και η βελτιστοποίησή της, βασίζονται στην υπόθεση «ασθενούς αλληλεπίδρασης» μεταξύ

των επιμέρους προβλημάτων που προκύπτουν από τη διαδικασία αποσύζευξης του αυτοπροωθούμενου πλοίου σε επιμέρους προβλήματα.



Σχήμα 2: Ροή με κυκλοφορία. (α) Γραμμές ροής γύρω από πτέρυγα, (β) επιφάνεια έντονου στροβιλισμού στον ομόρρου της έλικας, (γ) δίνη ακροπτερυγίου έλικας «οπτικοποιημένη» μέσω του φαινομένου της σπηλαίωσης.

3.ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΗΣ «ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ ΠΛΟΙΟΥ», ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Η αντίσταση ενός πλοίου σε μία δεδομένη ταχύτητα είναι η δύναμη που απαιτείται για να ρυμουλκηθεί το πλοίο σε αυτή την ταχύτητα σε ήρεμο νερό. Αν η γάστρα δεν έχει παρελκόμενα (ή προσαρτήματα - appendages), τότε η αντίσταση καλείται αντίσταση γυμνής γάστρας (bare hull) ή ρυμούλκησης (towing). Η αντίσταση ρυμούλκησης δεν είναι ίδια με την αντίσταση πρόωσης (propulsion resistance) – αν και διαφέρουν συνήθως λίγο – διότι στην τελευταία εμπλέκονται και οι αλληλεπιδράσεις γάστρας/έλικας.

Σε κάθε σημείο επαφής της γάστρας με το περιβάλλον ρευστό ασκείται μια στοιχειώδης δύναμη, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η συνισταμένη μιας κάθετης στην επιφάνεια συνιστώσας που οφείλεται στην πίεση και μιας εφαπτόμενης στην επιφάνεια συνιστώσας που οφείλεται στη συνεκτικότητα (Νευτώνειες τάσεις). Η αντίσταση του πλοίου είναι (εξ ορισμού) η προβολή κατά τη διεύθυνση κίνησης του πλοίου του ολοκληρώματος των στοιχειωδών αυτών δυνάμεων στην επιφάνεια της γάστρας. Προκύπτουν έτσι με φυσικό τρόπο οι δύο βασικές συνιστώσες της αντίστασης του πλοίου. Η αντίσταση τριβής και η αντίσταση πίεσης:

- ✿ Αντίσταση τριβής: είναι η συνιστώσα της αντίστασης που παράγεται με ολοκλήρωση στην επιφάνεια της γάστρας των εφαπτομενικών τάσεων (τάσεις συνεκτικότητας) και προβολή κατά τη διεύθυνση της ροής.
- ✿ Αντίσταση πίεσης: είναι η συνιστώσα της αντίστασης που παράγεται με ολοκλήρωση στην επιφάνεια της γάστρας των καθέτων τάσεων (δυνάμεις πίεσης) και προβολή κατά τη διεύθυνση της ροής.

Η περίπτωση ενός σώματος υδροδυναμικού σχήματος (streamlined body), το οποίο κινείται σε μία ευθεία οριζόντια γραμμή με σταθερή ταχύτητα, βαθιά βυθισμένο σε έναν ωκεανό που εκτείνεται στο άπειρο, αποτελεί την «απλούστερη» από πλευράς φαινομένων περίπτωση αντίστασης. Αφού δεν υπάρχει ελεύθερη επιφάνεια, δεν

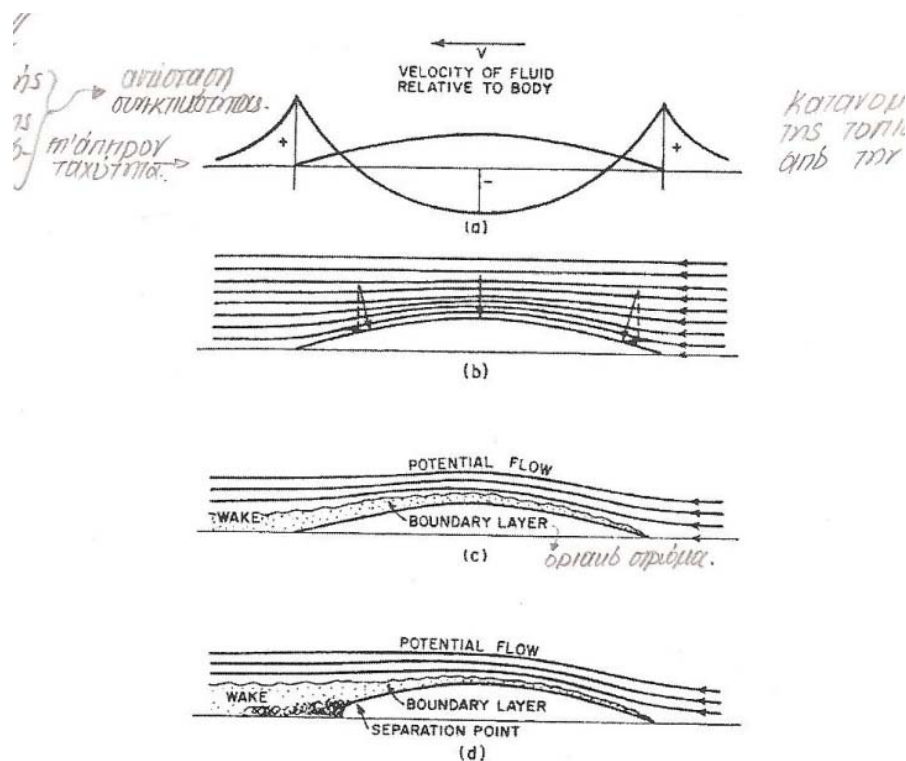
υπάρχει και δημιουργία κυματισμού και επομένως ούτε η αντίστοιχη συνιστώσα αντίστασης. Για ένα ιδανικό (μη συνεκτικό) ρευστό η ταχύτητα πηγαίνει από χαμηλότερες σε υψηλότερες σε σχέση με την επ' άπειρον ταχύτητα τιμές, καθώς προχωράμε από τις περιοχές της πρύμνης και της πλώρης προς το μέσο τμήμα. Η κατανομή πίεσης, όπως προκύπτει από το νόμο του Bernoulli, θα ακολουθήσει το αντίστροφο σχήμα: υψηλότερη στην πρύμνη και την πλώρη και χαμηλότερη στη μέση. Αφού το ρευστό θεωρείται ιδανικό, δηλαδή μη συνεκτικό, η αντίσταση τριβής θα είναι μηδενική. Οι μόνες δυνάμεις που θα υπάρχουν θα οφείλονται στις πιέσεις, άρα θα είναι παντού κάθετες στη γάστρα, και μπορεί ναδειχθεί ότι θα αλληλοεξουδετερώνονται, δηλαδή το σώμα θα έχει μηδενική αντίσταση πίεσης. Η συνολική λοιπόν αντίστασή του θα είναι μηδενική.

Σε ένα πραγματικό (συνεκτικό) ρευστό τα υλικά σημεία του ρευστού που είναι σε άμεση επαφή με την επιφάνεια του σώματος θα έχουν την ίδια ταχύτητα με την επιφάνεια του σώματος. Λόγω συνεκτικότητας τα αμέσως επόμενα στρώματα ρευστού θα τεθούν σε κίνηση ίδιας κατεύθυνσης με το σώμα. Έτσι δημιουργείται ένα οριακό στρώμα που γίνεται βαθμιαία παχύτερο από την πλώρη προς την πρύμνη και στο οποίο η κατανομή της ταχύτητας ξεκινά από μία τιμή ίδια με εκείνη του σώματος πάνω στην επιφάνειά του και καταλήγει στην τιμή που δίνεται από τη δυναμική ροή στο τέλος του οριακού στρώματος. Η ύπαρξη του οριακού στρώματος οδηγεί σε μία εικονική διαφοροποίηση του σχήματος και του μήκους του σώματος. Σαν αποτέλεσμα η κατανομή πίεσης στην πρύμνη μεταβάλλεται (μειώνεται) εν συγκρίσει με το ιδανικό ρευστό και συνεπώς η οριζόντια συνιστώσα της μειώνεται σε σύγκριση με την αντίστοιχη τιμή για υδροδυναμική ροή ιδανικού ρευστού, αυξάνοντας έτσι την αντίσταση πίεσης του σώματος. Η ύπαρξη της συνεκτικότητας οδηγεί επίσης και στην ανάπτυξη αντίστασης τριβής. Αν το σώμα είναι παχύγραμμο (blunt) στο πίσω μέρος η ροή μπορεί να αποκολληθεί σε κάποιο σημείο, το οποίο ονομάζεται σημείο αποκόλλησης (separation point), μειώνοντας έτσι περαιτέρω την ολική πίεση στο πίσω τμήμα και αυξάνοντας ακόμα περισσότερο την αντίσταση πίεσής του. Άλλα παρελκόμενα της αποκόλλησης είναι:

- ✿ Η δημιουργία «δρόμου δινών» (vortex street), οι οποίες κινούνται με την συνισταμένη ταχύτητα της ροής ακολουθώντας τους νόμους του Helmholtz

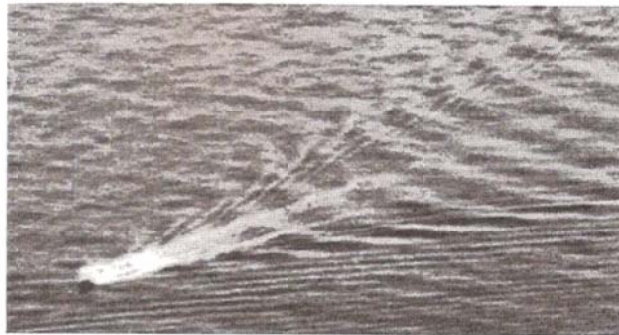
και μπορούν να παρομοιαστούν με ένα «κανάλι» συγκεντρωμένης ενέργειας που παροχετεύεται από το σώμα εντός της ροής, πράγμα που οδηγεί σε επιπλέον αύξηση της αντίστασης (eddy resistance) και

- ✿ Η δημιουργία «ανάστροφης ροής» στην επιφάνεια του σώματος με αποτέλεσμα τη διαφοροποίηση των εφαιπτομενικών τάσεων. Η ύπαρξη λοιπόν του οριακού στρώματος, καθώς και των λοιπών φαινομένων που οφείλονται στη συνεκτικότητα (π.χ. αποκόλληση, συνεπακόλουθος «δρόμος δινών» κλπ.) οδηγεί σε αντίσταση πίεσης διαφορετική του μηδενός (περίπτωση ιδανικού ρευστού). Για το λόγο αυτό η σχετική συνιστώσα αντίστασης είναι γνωστή ως «αντίσταση πίεσης λόγω συνεκτικότητας» (viscous pressure drag). Η αντίσταση τριβής μαζί με την αντίσταση πίεσης λόγω συνεκτικότητας ονομάζονται αντίσταση συνεκτικότητας του σώματος.

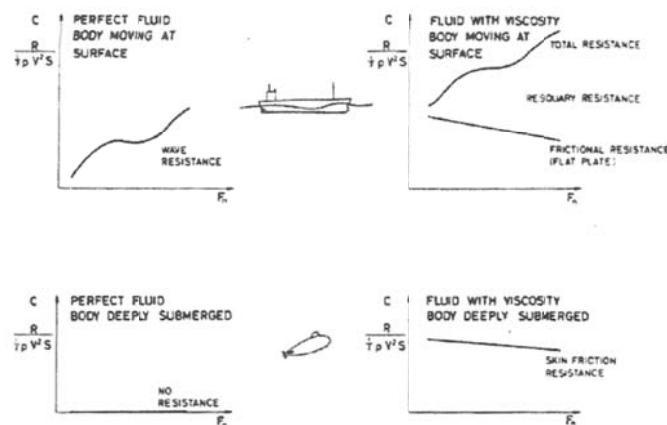


Σχήμα 3: Παραδείγματα ροών γύρω από ένα σώμα βυθισμένο σε άπειρο ρευστό.

Ένα πλοίο που κινείται στην επιφάνεια της θάλασσας υφίσταται όλα τα παραπάνω είδη αντίστασης περίπου με τον ίδιο τρόπο με το βυθισμένο σώμα. Ωστόσο, η παρουσία ελεύθερης επιφάνειας προσθέτει μία επιπλέον συνιστώσα. Η κατανομή πίεσης πάνω στη γάστρα τροποποιείται λόγω δημιουργίας ενός συστήματος κυματισμών, το οποίο απλώνεται πίσω από το πλοίο και πρέπει να τροφοδοτείται συνεχώς με ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι το πλοίο πρέπει να παρέχει συνεχώς ενέργεια, η οποία αντιστοιχεί στην αντίσταση κυματισμού. Δεδομένου ότι ο κυματισμός τροποποιεί κυρίως τις πιέσεις της γάστρας και δευτερευόντως τις εφαπτομενικές τάσεις η προκύπτουσα συνιστώσα αντίστασης είναι κυρίως αντίσταση πίεσης.



Σχήμα 4: Σύστημα κυματισμών του Kelvin.



Σχήμα 5: «Σύνθεση» της ολικής αντίστασης πλοίου από επιμέρους συνιστώσες, R : αντίσταση πλοίου, V : ταχύτητα πλοίου, S : βρεχόμενη επιφάνεια, Fn : ο αριθμός Froude, L : μήκος του πλοίου, g : η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Εκτός από τις παραπάνω συνιστώσες αντίστασης υπάρχει και μια ποικιλία άλλων (δευτερευόντων) συνιστωσών, όπως:

- ✿ Η αντίσταση θραύσεως κύματος (wave breaking resistance) για ένα πλοίο που ταξιδεύει,
- ✿ Η αντίσταση αφρού (spray resistance) λόγω δημιουργίας αφρού κυρίως στην περιοχή επαφής με τη γάστρα (ίσαλος πλευσης) με την ελεύθερη επιφάνεια.
- ✿ Η αντίσταση αέρα (air resistance) λόγω κίνησης της υπερκατασκευής του πλοίου στον αέρα.
- ✿ Η αντίσταση παρελκομένων (πηδάλιο, παρατροπίδια, άξονες, στηρίγματα αξόνων κλπ.)
- ✿ Η πρόσθετη αντίσταση λόγω στροφής (added resistance due to turning) για πλοία σε κατάσταση ελιγμών.

Η αντίσταση του πλοίου μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται στην αντίσταση συνεκτικότητας (ή συνεκτική αντίσταση – viscous resistance) και στην αντίσταση κυματισμού (wave resistance). Η αντίσταση συνεκτικότητας απαρτίζεται από την αντίσταση τριβής και την αντίσταση πίεσης λόγω συνεκτικότητας. Η αντίσταση κυματισμού μπορεί περαιτέρω να διασπαστεί σε αντίσταση σχηματισμού κυματισμών (wave pattern resistance) και αντίσταση θραύσεως κυματισμού (wave breaking resistance). Το άθροισμα της αντίστασης κυματισμού με την αντίσταση πίεσης λόγω συνεκτικότητας ονομάζεται (ολική) αντίσταση πίεσης.

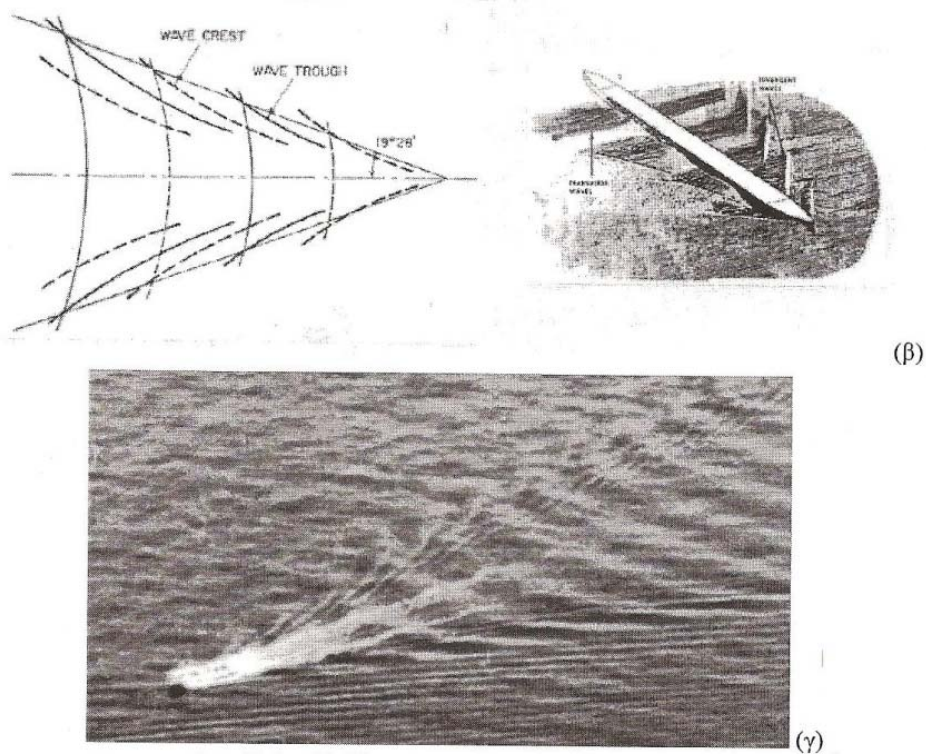
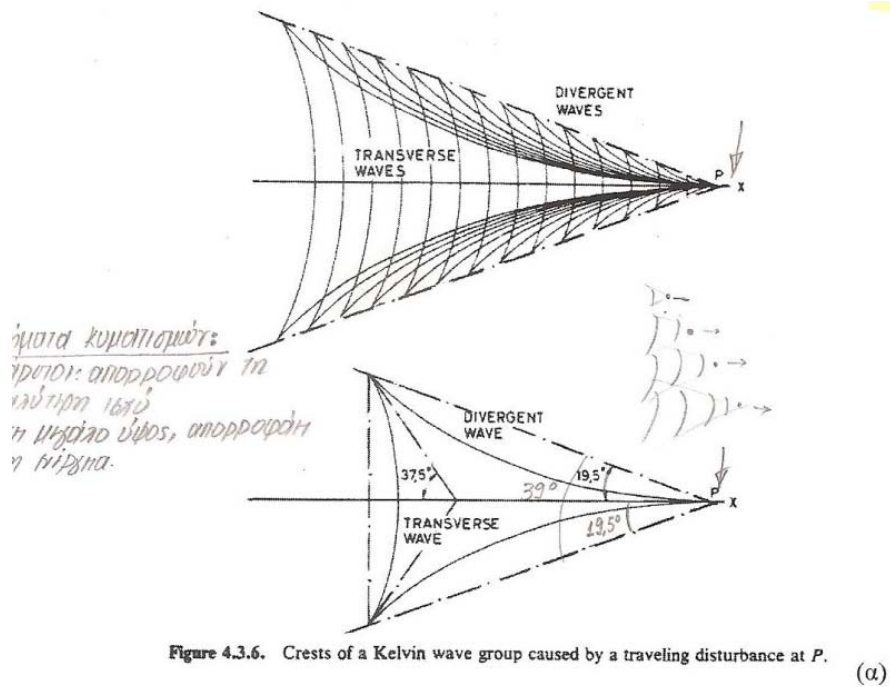
Εισάγουμε ακολούθως το εικονικό φαινόμενο παράλληλης συνεκτικής ροής σε «άπειρο ρευστό» γύρω από επίπεδη πλάκα στον ίδιο αριθμό Reynolds με αυτόν του πλοίου. Για το εικονικό αυτό φαινόμενο η μόνη συνιστώσα αντίστασης είναι η αντίσταση τριβής, αφού η αντίσταση πίεσης είναι μηδέν. Ορίζεται έτσι η αντίσταση τριβής (ισοδύναμης) επίπεδης πλάκας (flat plate frictional resistance) και ο αντίστοιχος αδιάστατος συντελεστής αντίστασης. Ο όρος «ισοδύναμη» τοποθετείται για να δείξει ότι αναφερόμαστε στον ίδιο αριθμό Reynolds πράγμα που εξασφαλίζει δυναμική ομοιότητα μεταξύ της ροής στη γάστρα και της ροής στην επίπεδη πλάκα (η ελεύθερη επιφάνεια έχει παραληφθεί). Παρόλα αυτά δεν έχουμε πλήρη ομοιότητα,

αφού τα δύο σώματα (γάστρα και επίπεδη πλάκα) έχουν διαφορετική γεωμετρία. Άρα η ροή στις δύο περιπτώσεις διαφέρει λόγω διαφοράς της γεωμετρικής «μορφής». Η διαφορά της αντίστασης συνεκτικότητας της γάστρας από την αντίσταση τριβής (ισοδύναμης) επίπεδης πλάκας ονομάζεται αντίσταση μορφής (form resistance). Η διαφορά της αντίστασης τριβής επίπεδης πλάκας από την ολική αντίσταση (total resistance) ονομάζεται υπόλοιπη αντίσταση (residuary resistance).

4.ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η αντίσταση κυματισμού ενός πλοίου σχετίζεται με τη συνισταμένη δύναμη που είναι αποτέλεσμα (κυρίως) των καθέτων πιέσεων του ρευστού που δρουν στη γάστρα, ακριβώς όπως η αντίσταση τριβής είναι το αποτέλεσμα των εφαπτομενικών τάσεων του ρευστού. Αν το σώμα ταξιδεύει στην (ή κοντά στην) ελεύθερη επιφάνεια τα «κινούμενα σημεία πίεσης» προκαλούν κύματα που απλώνονται μακριά από το σώμα και μεταφέρουν μαζί τους ορισμένο ποσό ενέργειας το οποίο διασκορπίζεται στη θάλασσα. Η αντίσταση κυματισμού μπορεί λοιπόν να χαρακτηριστεί επίσης από την ενέργεια που δαπανάται από το πλοίο για να διατηρηθεί το σύστημα των κυματισμών. Ο θεωρητικός προσδιορισμός της αντίστασης κυματισμού απαιτεί γνώση του συστήματος των κυματισμών που δημιουργείται από ένα κινούμενο πλοίο.

Η πρώτη σοβαρή θεωρητική προσπάθεια προς τον ποσοτικό προσδιορισμό του συστήματος κυματισμών του πλοίου έγινε από τον Lord Kelvin στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Ο Kelvin θεώρησε ένα μοναδικό σημείο πίεσης (pressure point) που ταξιδεύει σε μια ευθεία γραμμή πάνω στην επιφάνεια του νερού, δημιουργώντας κύματα τα οποία έχουν μια χαρακτηριστική μορφή. Ειδικότερα εμφανίζεται ένα σύστημα εγκάρσιων (transverse) κυματισμών που ακολουθεί το σημείο πίεσης, μαζί με μια σειρά αποκλινόντων (divergent) κυματισμών που απλώνονται πίσω από το σημείο πίεσης. Ο συνολικός σχηματισμός κυμάτων βρίσκεται ως επί το πλείστον μέσα σε δύο ευθείες γραμμές που ξεκινούν από το σημείο πίεσης και σχηματίζουν γωνίες περίπου 19.5° μοιρών ως προς τη διεύθυνση της κίνησης.



Σχήμα 6: Σύστημα κυματισμών του Kelvin.

Το σύστημα κυματισμών του Kelvin δείχνει και εξηγεί πολλά από τα χαρακτηριστικά του συστήματος κυματισμών του πλοίου. Το σύστημα κυματισμών κινείται μαζί με το πλοίο και έτσι για έναν παρατηρητή πάνω στο πλοίο τα κύματα φαίνονται να είναι στατικά. Αν και εν πρώτοις μπορεί να θεωρηθεί ότι η αντικατάσταση του πλοίου από ένα μοναδικό σημείο πίεσης είναι πολύ απλοποιημένη, θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι πρόκειται για προσέγγιση που ισχύει μακριά από το σώμα, όπου τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της γάστρας δεν είναι «ορατά» (δηλαδή από μαθηματική άποψη η επίδρασή τους οδηγεί σε διαταραχές υψηλότερης τάξης οι οποίες μπορεί να αμεληθούν). Ο Kelvin κατόρθωσε να φτάσει στο μοντέλο του χρησιμοποιώντας μια γενική τεχνική της ασυμπτωτικής ανάλυσης, που ονομάζεται μέθοδος της σταθερής φάσης (stationary phase), την οποία ανέπτυξε ακριβώς για το πρόβλημα της αντίστασης κυματισμού. Η μέθοδος επιτρέπει την προσεγγιστική εκτίμηση ορισμένων ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που ταλαντώνονται πολύ γρήγορα και παράγει δύο συστήματα κυματισμών: ένα που είναι μέσα στις δύο ευθείες που προαναφέρθηκαν και ένα που είναι έξω από αυτές. Η διαταραχή των εσωτερικών κυματισμών μειώνεται με την απόσταση από το πλοίο, ενώ η διαταραχή των εξωτερικών κυματισμών μειώνεται με το νόμο $O(1/R)$ και επομένως μπορεί να αμεληθεί για μεγάλα R . Η μέθοδος της σταθερής φάσης προβλέπει για την αντίσταση δημιουργίας κυματισμού R_w :

$$R_w = \frac{1}{2} \pi \rho V^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |A(\theta)|^2 \cos^3 \theta d\theta \quad (1)$$

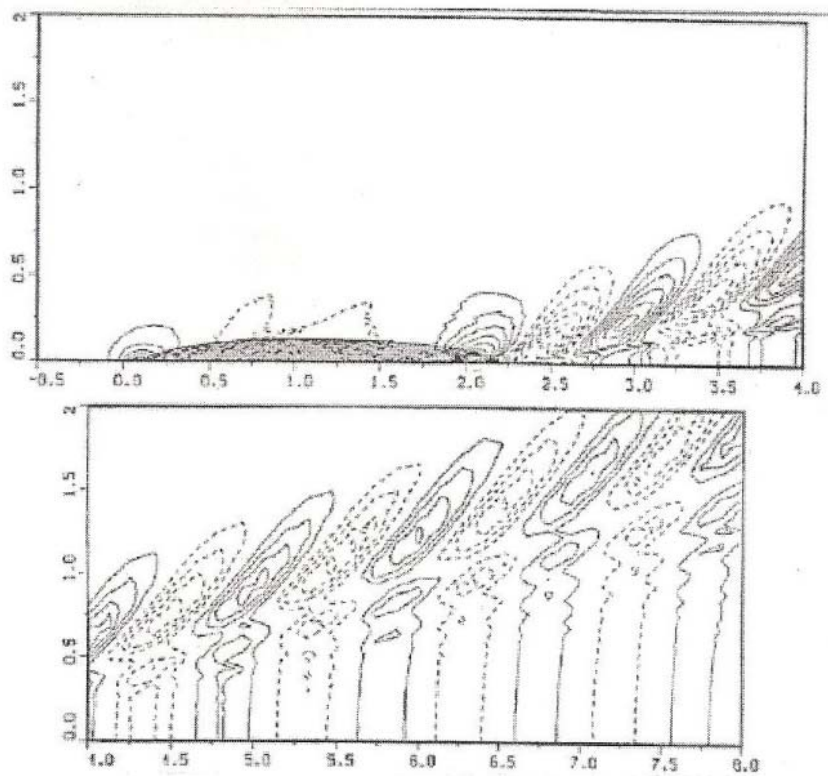
Η εξίσωση (1) εκφράζει την αντίσταση κυματισμού ενός κινούμενου σκάφους σαν το ολοκλήρωμα του τετραγώνου του πλάτους κύματος $A(\theta)$. Ο παράγοντας $\cos^3 \theta$ δείχνει ότι το κυρίαρχο κομμάτι της αντίστασης σχετίζεται με τα εγκάρσια κύματα, όπου η γωνία θ είναι μικρότερη. Μπορούμε να δούμε ότι $R_w \sim V^2 A^2$ και αφού $A \sim V$ (τουλάχιστον) προκύπτει ότι $R_w \sim V^4$ (ή περισσότερο). Αφού τώρα η αντίσταση τριβής αυξάνεται με το V^2 ή λιγότερο μπορούμε να δούμε ότι σε υψηλές ταχύτητες (ή υψηλούς Froude) η αντίσταση κυματισμού θα κυριαρχήσει στην ολική αντίσταση του πλοίου και θα δημιουργήσει ένα «φράγμα» στην ταχύτητα που δεν μπορεί να επιτευχθεί, λόγω των πολύ μεγάλων απαιτήσεων σε ισχύ.

Πιο πρόσφατες αριθμητικές μελέτες της αντίστασης δημιουργίας κυματισμού ακολουθούν τις ονομαζόμενες μεθόδους συνοριακών στοιχείων (panel methods). Σε αυτές η επιφάνεια του πλοίου προσεγγίζεται από μία σειρά στοιχείων (panels) με κατανεμημένες πηγές και καταβόθρες. Η μέθοδος είναι παρόμοια με την προσέγγιση λεπτόγραμμου πλοίου, με τη διαφορά ότι η κατανομή πηγών/καταβοθρών είναι πάνω στην πραγματική επιφάνεια αντί στο κεντρικό επίπεδο. Αυτό επιτρέπει να ληφθεί υπόψιν η πραγματική γεωμετρία της γάστρας, και επομένως μπορούν να επιβληθούν κάποιες μικρές τροποποιήσεις προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η αντίσταση κυματισμού, για παράδειγμα με το σωστό σχεδιασμό βολβού στην πλώρη.

Η χρήση του ολοκληρώματος (1) μαζί με πειραματικές μετρήσεις της συνάρτησης πλάτους $A(\theta)$ παρέχει μια άμεση μέτρηση της αντίστασης κυματισμού χωρίς να υπάρχει η ανάγκη της υπόθεσης του Froude. Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως ανάλυση της μορφής των κυματισμών (wave pattern analysis). Η ανάλυση της μορφής των κυματισμών απαιτεί προσεκτική μελέτη της περιοχής του ομόρρου για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πλάτους $A(\theta)$ για όλες τις σχετικές γωνίες κύματος και είναι ένα πολύτιμο διαγνωστικό εργαλείο, ιδίως όταν συνδυάζεται με μετρήσεις της ταχύτητας του ρευστού στην περιοχή του συνεκτικού ομόρρου (momentum defect). Αυτές οι τεχνικές έχουν οδηγήσει στην ανακάλυψη μιας επιπλέον συνιστώσας αντίστασης που σχετίζεται με το σπάσιμο του κύματος (wave breaking) και σε καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας των βολβοειδών πλωρών των υπερδεξαμενοπλοίων και άλλων πλοίων με χαμηλούς αριθμούς Froude.

Στα λεπτόγραμμα σκάφη υψηλής ταχύτητας, όπως τα καταδρομικά (destroyers) και τα επιβατηγά (passenger liners), μια βολβοειδής πλώρη έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της αντίστασης κυματισμού. Αρχικά η βολβοειδής πλώρη τοποθετήθηκε σε υπερδεξαμενόπλοια (supertankers) όπου από τις πειραματικές μετρήσεις παρατηρήθηκαν σημαντικές μειώσεις στη συνολική αντίσταση. Αυτές οι μειώσεις όμως συχνά ξεπερνούσαν την προβλεπόμενη αντίσταση κυματισμού. Για να βρεθεί η αιτία που οδηγούσε σε αυτό το προφανές παράδοξο έγιναν προσεκτικές πειραματικές μετρήσεις της ροής ενέργειας κυματισμού και της τροποποίησης της ορμής (momentum defect) στον ομόρρο εξαιτίας της αντίστασης μορφής που οφείλεται στη

συνεκτικότητα. Η τελευταία μέτρηση αποκάλυψε την ύπαρξη ορμής που σχετίζεται με τα κύματα που σπάνε, κυρίως στην πλώρη, και άρα την ύπαρξη μιας ακόμη συνιστώσας αντίστασης, της αντίστασης θραύσεως κύματος. Η χαμένη με αυτόν τον τρόπο ενέργεια μεταφέρεται κατάντι της ροής (downstream) υπό την μορφή μεγάλης κλίμακας τύρβης ή δινών. Για τα δεξαμενόπλοια και τα παρόμοια σκάφη, η βολβοειδής πλώρη είναι αποτελεσματική στη μείωση του μεγέθους του κύματος στην πλώρη και έτσι στην αποφυγή της θραύσης αυτού. Για τα πολεμικά πλοία αυτό είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον, αφού σχετίζεται με θέματα αποφυγής θορύβου από τη θραύση των κυμάτων και άρα μη εντοπισμού τους από άλλα πλοία.



Σχήμα 7: Πρόβλεψη κυματισμών που οφείλονται στην κίνηση του πλοίου.

Ένα τυπικό διάγραμμα του συντελεστή αντίστασης κυματισμού συναρτήσει του αριθμού Froude φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου η καμπύλη παρουσιάζει τυπικές κορυφές (humps) και κοιλάδες (hollows). Οι διακυμάνσεις στην αντίσταση

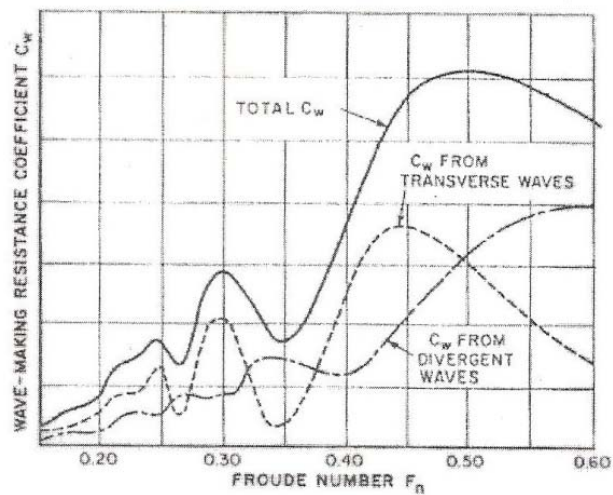
κυματισμού αποδίδονται στις αλληλεπιδράσεις των τεσσάρων κυρίων συστημάτων κυματισμών, τα οποία δημιουργούνται:

- ✿ Στην πλώρη, ξεκινώντας με μια κορυφή (crest)
- ✿ Στο μπροστινό κυρίως τμήμα (forward shoulder), ξεκινώντας με μία κοιλάδα (trough)
- ✿ Στο πίσω κυρίως τμήμα (aft shoulder), ξεκινώντας με μία κοιλάδα
- ✿ Στην πρύμνη, ξεκινώντας με μία κορυφή.

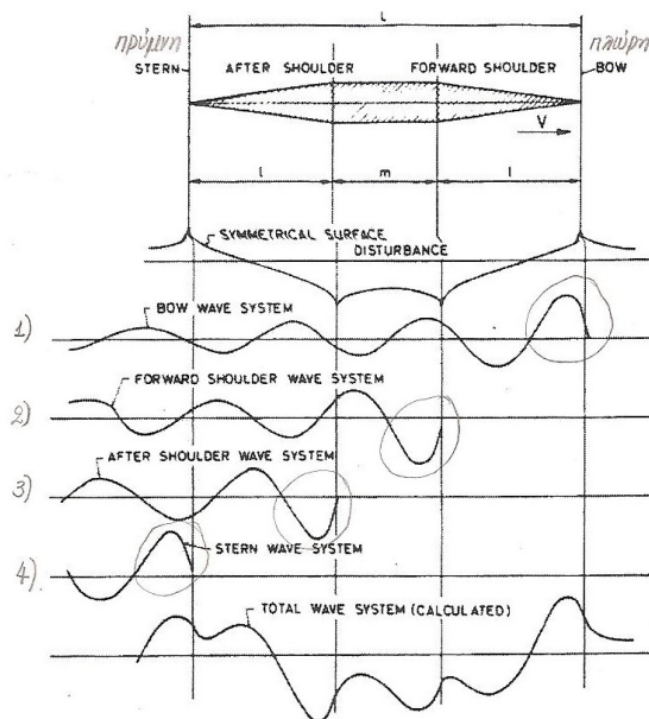
Στο σχήμα 10 παρουσιάζεται μία σύγκριση τιμών του συντελεστή αντίστασης κυματισμού, οι οποίες προέρχονται από υπολογισμούς και από πειραματικές μετρήσεις. Εν γένει βλέπουμε ότι υπάρχει αρκετά καλή προσέγγιση, αν και οι καμπύλες που έχουν προκύψει από υπολογισμούς παρουσιάζουν περισσότερες ταλαντώσεις από τις πειραματικές. Αυτές οι διαφορές αποδίδονται σε τρεις κυρίως αιτίες:

1. Λάθη λόγω απλοποιήσεων που εισάγονται στη μαθηματική ανάλυση.
2. Λάθη λόγω του ότι αμελούνται οι επιδράσεις της συνεκτικότητας στην αντίσταση κυματισμού.
3. Λάθη λόγω των επιδράσεων των κινήσεων του κύματος στην αντίσταση τριβής.

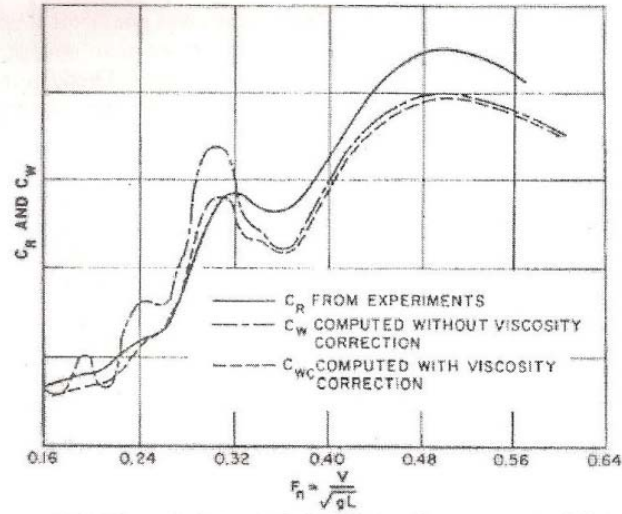
Σε πολύ χαμηλές ταχύτητες η αντίσταση κυματισμού είναι μικρή και εξαρτάται κυρίως από τη μορφή της ισάλου στην πλώρη (γωνία εισόδου), ενώ σε πολύ υψηλές ταχύτητες ($F_n > 1$) μεταβάλλεται περίπου με το τετράγωνο του εκτοπίσματος. Επιπλέον στις πολύ υψηλές ταχύτητες η μορφή της γάστρας είναι σχετικά ασήμαντη, ενώ πιο σημαντικό είναι το εκτόπισμα που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο μήκος.



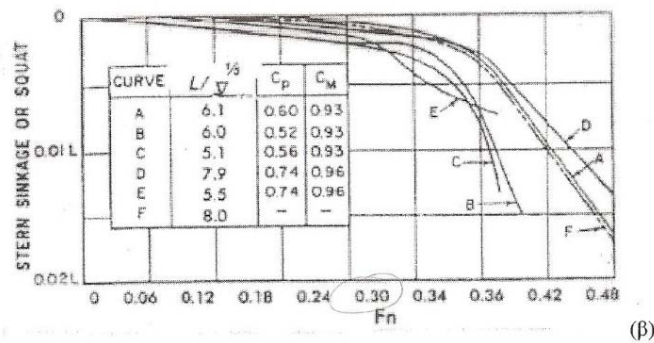
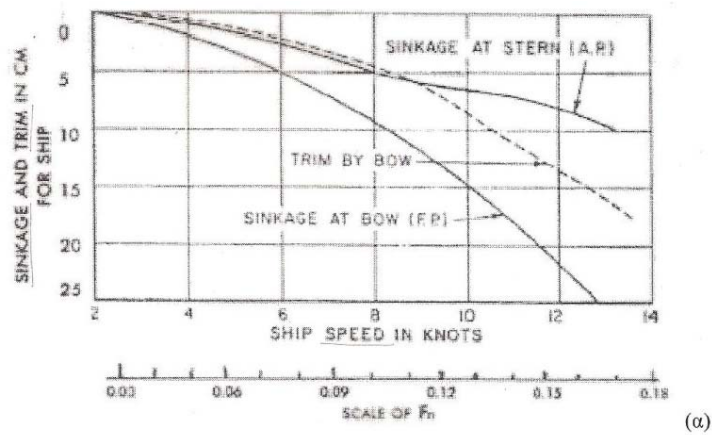
Σχήμα 8: Τυπικές καμπύλες του συντελεστή αντίστασης κυματισμού.



Σχήμα 9: Κύρια συστήματα κυματισμού πλοίου και η αλληλεπίδρασή τους.



Σχήμα 10: Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με θεωρητικές προβλέψεις του συντελεστή αντίστασης κυματισμού.



Σχήμα 11: Μεταβολές στο βύθισμα και τη διαγωγή συναρτήσει της ταχύτητας.

5.ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΘΑΛΑΣΣΙΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Στο θαλάσσιο περιβάλλον εξελίσσεται ταυτόχρονα ένα πλήθος κυματικών φαινομένων, αρκετά από τα οποία βρίσκονται σε ουσιώδη σύζευξη μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό αν λάβουμε υπόψιν μας ότι:

- ✿ το θαλασσινό νερό είναι ένα ελαφρά συμπιεστό, ανομοιογενές και αγωγίμο υγρό, το οποίο εδράζεται πάνω σε ένα πολυστρωματοποιημένο (multilayered) παραμορφώσιμο στερεό πυθμένα (sea bed), και περατούται σε μια ελεύθερη επιφάνεια (free surface), δια της οποίας δέχεται την ηλιακή ακτινοβολία και την επίδραση του υπερκείμενου πεδίου του ανέμου, και
- ✿ η μάζα του θαλάσσιου νερού βρίσκεται πάνω σε ένα ελαφρά μαγνητισμένο, περιστρεφόμενο, περίπου σφαιρικό στερεό σώμα (Γη), το οποίο αλληλεπιδρά μέσω δυνάμεων βαρύτητας με άλλα ουράνια σώματα (κυρίως με τη Σελήνη και τον Ήλιο).

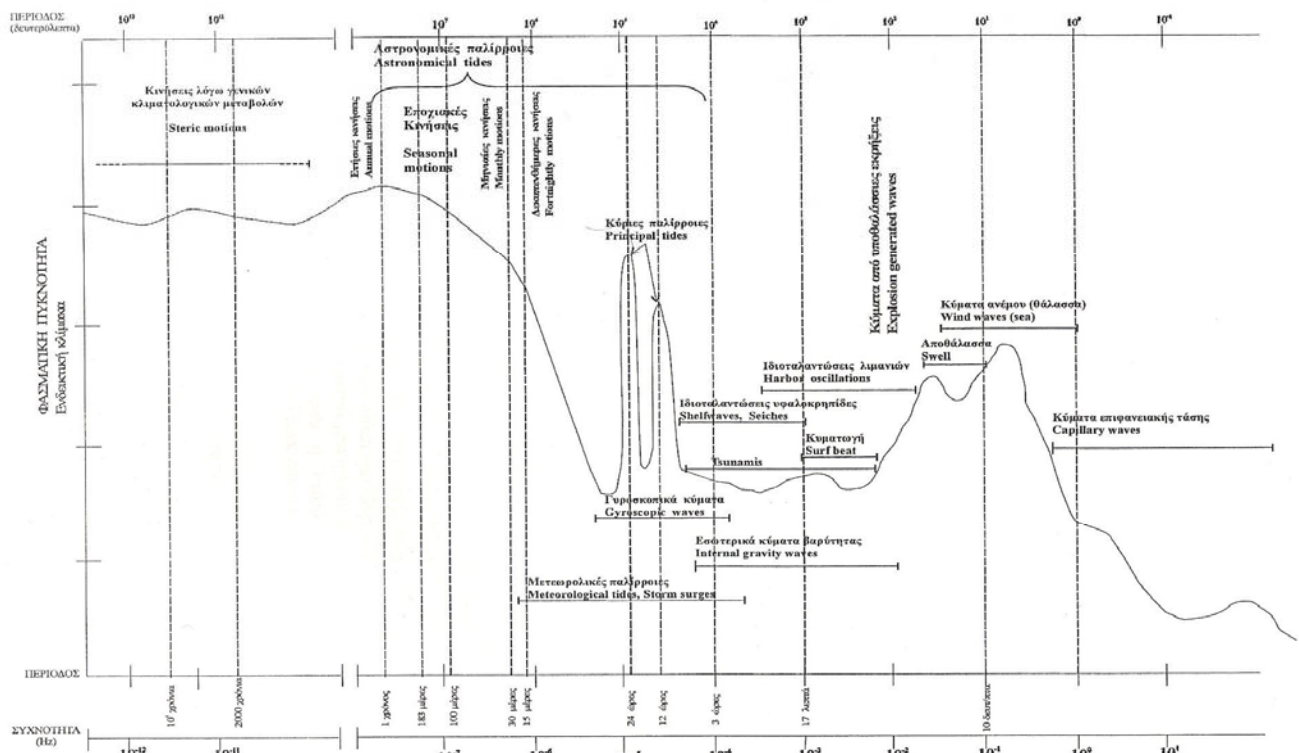
Χρησιμοποιώντας φαινομενολογικά κριτήρια, μπορούμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες κύριες κατηγορίες κυματικών φαινομένων στη θάλασσα:

- ✿ Επιφανειακά κύματα (surface waves)
- ✿ Εσωτερικά κύματα (internal waves), τα οποία οφείλονται στη μεταβολή της πυκνότητας της θαλάσσιας μάζας στο χώρο και στο χρόνο.
- ✿ Γυροσκοπικά κύματα (inertial or gyroscopic waves), τα οποία οφείλονται στην αλληλεπίδραση της ελεύθερης επιφάνειας και της περιστροφής της γης.
- ✿ Πλανητικά κύματα (planetary or Rossby waves), τα οποία οφείλονται στη μεταβολή της δύναμης Coriolis στην κατεύθυνση Βορρά – Νότου, καθώς και στη μεταβολή του βάθους της θάλασσας.
- ✿ Παλίρροιες (tides), οι οποίες οφείλονται στην βαρυτική έλξη των θαλάσσιων μαζών από τη Σελήνη και τον Ήλιο,
- ✿ Ακουστικά κύματα, τα οποία οφείλονται στη συμπιεστότητα του θαλάσσιου νερού, διαδίδονται στο εσωτερικό της υδάτινης μάζας (hydroacoustic waves) και είναι συζευγμένα με ακουστικά και ελαστικά κύματα που διαδίδονται στα υποστρώματα του πυθμένα.

Εξετάζοντας αναλυτικότερα τους επιφανειακούς θαλάσσιους κυματισμούς, διακρίνουμε τις εξής κύριες κατηγορίες ανάλογα με το αίτιο δημιουργίας τους:

- ο Ανεμογενείς κυματισμούς,
- ο Σεισμογενείς κυματισμούς (σεισμικά κύματα, tsunamis),
- ο Κύματα παραγόμενα από κινήσεις επιπλεόντων ή βυθισμένων αντικειμένων (σωματογενείς κυματισμούς, body generated waves), και
- ο Κύματα επιφανειακής τάσης (capillary waves).

Μια γενική εικόνα όλων των ανωτέρων φαινομένων (πλην των ακουστικών κυμάτων) δίνεται μέσω του γενικού φάσματος των θαλάσσιων κυματισμών, το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 12: Το γενικό φάσμα των θαλάσσιων κυματισμών.

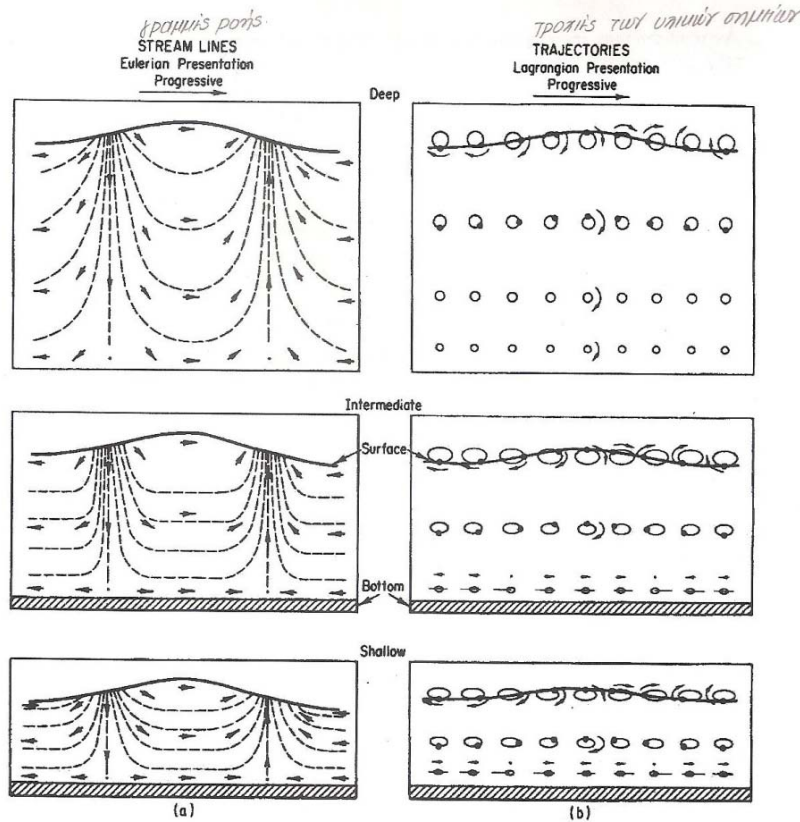
6.ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Το νοούμενο κάτω από τη λέξη «κυματισμός» είναι σε όλους σαφές, αφού ο καθένας μας έχει βιώσει με τις αισθήσεις του την κίνηση της επιφάνειας της θάλασσας είτε σαν παρατηρητής από την ξηρά είτε κολυμπώντας ή κινούμενος με κάποιο πλωτό μέσο.

Κάθε γνώστης της μηχανικής των ρευστών, προσπαθώντας να κατανοήσει τους φυσικούς μηχανισμούς που διέπουν το φαινόμενο, θα διαισθάνεται ότι οι κυματισμοί της ελεύθερης επιφάνειας είναι, όπως και κάθε άλλο φαινόμενο ρευστομηχανικής, προϊόν «ανταγωνισμού» δυνάμεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι δυνάμεις βαρύτητας που αναπτύσσονται στη μάζα του ρευστού ανταγωνίζονται με τις δυνάμεις πίεσης και αδράνειας, κάθε δε προσπάθεια διαταραχής της ελεύθερης επιφάνειας από την κατάσταση ισορροπίας, την οδηγεί (λόγω βαρύτητας) σε διαδικασία επαναφοράς στη θέση ισορροπίας και παρελκόμενη δημιουργία «κυματισμού ελεύθερης επιφάνειας». Τίθεται λοιπόν το ερώτημα αν, στα πλαίσια των καθιερωμένων μεθόδων αναπαράστασης της ροής ρευστού (ρευστομηχανική), μπορεί να αναπτυχθεί θεωρία που να μας δίνει προβλεπτική δυνατότητα για το φαινόμενο αυτό της εμπειρίας μας. Η απάντηση είναι καταφατική και υπό την προϋπόθεση κάποιων απλοποιητικών παραδοχών ο Ναυπηγός έχει στα χέρια του μαθηματικά μοντέλα που μπορεί να τον στηρίξουν στην πολύπλοκη διαδικασία μελέτης και σχεδίασης ενός πλοίου ή πλωτής κατασκευής.

Η ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου για την περίπτωση ροής με ελεύθερη επιφάνεια, ακόμα και υπό την παραδοχή μηδενικής συνεκτικότητας και αστρόβιλης ροής (οπότε οι εξισώσεις Navier – Stokes εκφυλλίζονται στην εξίσωση του Bernoulli), είναι από τα δυσκολότερα μαθηματικά προβλήματα, αφού εισάγει «εσωτερική μη γραμμικότητα» (implicit nonlinearity) στο πρόβλημα μέσω της άγνοιας του συνόρου στο οποίο θα πρέπει να ικανοποιηθούν οι πεδιακές εξισώσεις (διατήρηση μάζας και ορμής), αλλά και οι οριακές συνθήκες (συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας). Δηλαδή το πεδίο ορισμού (support) των αγνώστων συναρτήσεων (π.χ. πίεση και ταχύτητα) είναι καταρχήν άγνωστο και πρέπει να υπολογιστεί σαν μέρος της λύσης του προβλήματος

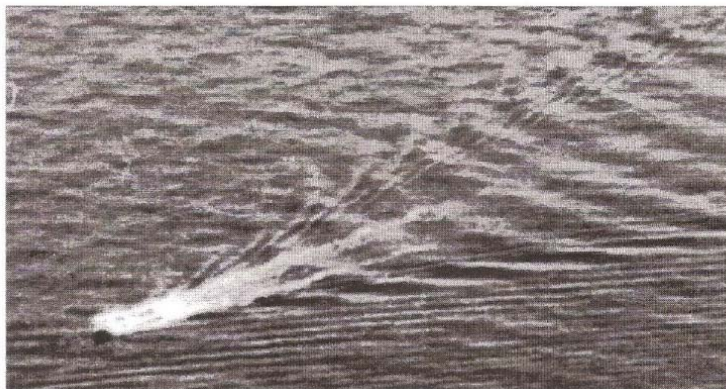
(free boundary problem). Επιπλέον, η ελεύθερη επιφάνεια (που στην πραγματικότητα είναι η διεπιφάνεια μεταξύ αέρα και νερού) πρέπει να ικανοποιεί την «κινηματική» και τη «δυναμική» οριακή συνθήκη, η δεύτερη από τις οποίες είναι μη γραμμική. Οι δυσκολίες αυτές οδήγησαν αρκετά νωρίς τους ερευνητές στην εισαγωγή απλοποιητικών παραδοχών (γραμμικοποιήσεων) μέσω των οποίων είναι δυνατή η παραγωγή ελκυστικών μαθηματικών μοντέλων, δηλαδή μοντέλων που μπορεί να οδηγήσουν σε μαθηματικούς τύπους για τα άγνωστα μεγέθη, που να περιέχουν μόνο τις συνήθεις συναρτήσεις της μαθηματικής φυσικής.



Σχήμα 13: Γραμμές ροής και τροχιές των υλικών σημείων για τις τρεις περιπτώσεις κυματισμού σε: βαθύ νερό (*deep*), ρηχό νερό (*shallow*) και γενική περίπτωση (*intermediate*).

7.ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΠΛΟΙΟΥ – ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ KELVIN

Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι το σύστημα κυματισμών που δημιουργεί ένα πλοίο κατά την κίνησή του είναι τρισδιάστατο και ειδικότερα αποτελείται τόσο από εγκάρσιους όσο και αποκλίνοντες κυματισμούς.



Σχήμα 14: Τρισδιάστατο σύστημα κυματισμών πλοίου.

Η πρώτη σοβαρή θεωρητική προσπάθεια προς τον ποσοτικό προσδιορισμό του συστήματος κυματισμών του πλοίου έγινε από τον λόρδο Kelvin στα τέλη του 19^{ου} αιώνα (1870). Ο Kelvin θεώρησε ένα σημείο πίεσης (pressure point), που ταξιδεύει σε μία ευθεία γραμμή πάνω στην επιφάνεια του νερού με ταχύτητα V , δημιουργώντας κύματα. Το εντυπωσιακότερο από τα αποτελέσματα του Kelvin είναι ότι σε βαθύ νερό τα κύματα που θα δημιουργηθούν περιορίζονται σε μία σφηνοειδή περιοχή (wedge shaped region – Kelvin wedge) με κλίση 19.5° (η ακριβής τιμή είναι 19.4712°) σε σχέση με την ταχύτητα κίνησης του σημείου πίεσης, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τα πειράματα.

Ας δούμε όμως πως μπορούμε να φθάσουμε στο συμπέρασμα αυτό. Έστω «πλοίο» (σημείο πίεσης) που κινείται από το σημείο O'' στο σημείο O με σταθερή ταχύτητα

V. Αν για τη μετάβαση του πλοίου από το σημείο O''' στο σημείο O απαιτείται χρόνος t τότε ισχύει:

$$OO''' = Vt$$

Καθώς το πλοίο μεταβαίνει από τη θέση O''' στη θέση O , κάθε ενδιάμεσο σημείο της πορείας του μπορεί να θεωρηθεί «ως πηγή» ενός τρισδιάστατου συστήματος κυματισμών.

Όταν το πλοίο φτάσει στο σημείο O το εγκάρσιο σύστημα κυματισμών (δηλαδή $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ σύμφωνα με το σχήμα 15) που δημιουργήσε το πλοίο όταν ήταν στη θέση O''' , θα έχει διανύσει τη μισή απόσταση, δηλαδή θα έχει φτάσει στο σημείο K , σχήμα 15.

Στη γενική περίπτωση, όταν το πλοίο βρίσκεται στην (κάθε) θέση O''' διεγείρει τοπικά σύστημα κυματισμών κατά κατεύθυνση α : $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Στο σχήμα 15 διακρίνουμε τις διευθύνσεις των κορυφογραμμών για $\alpha = \alpha_P$ και $\alpha = \alpha_Q$. Να σημειωθεί ότι οι γραμμές $O'''P$ και $O'''Q$ αναπαριστούν αποκλειστικά τις «διευθύνσεις» των κορυφογραμμών που δημιουργούνται τοπικά στο σημείο O''' που βρίσκεται το πλοίο και σε καμία περίπτωση δεν δίνουν πληροφορία για την έκταση του κυματισμού. Είναι δεδομένο γεγονός της εμπειρίας μας ότι οι κορυφές των κυματισμών που δημιουργεί το πλοίο κατά την πορεία του είναι ακίνητες ως προς παρατηρητή πάνω στο πλοίο. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η ταχύτητα C_a της κορυφογραμμής γωνίας α να δίνεται από τη σχέση:

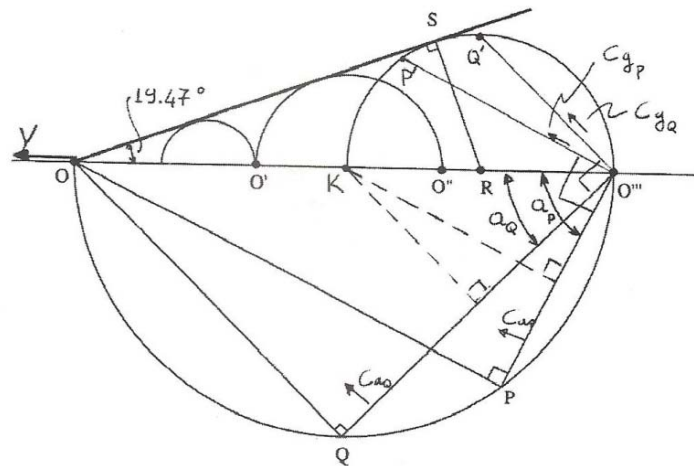
$$C_a = V \sin(\alpha)$$

και

$$PO = C_a t = V \sin(\alpha_P) t, \quad QO = C_a t = V \sin(\alpha_Q) t,$$

Όπου PO, QO οι αποστάσεις που διήνυσαν οι συγκεκριμένες κορυφές ακολουθώντας το πλοίο από τη O''' θέση στη θέση O. Από τη στιγμή όμως της γέννησης της συγκεκριμένης κορυφής στη θέση O''' δημιουργείται ένα εμπρόσθιο μέτωπο, το οποίο θα κινηθεί με την ταχύτητα ομάδας που είναι η μισή από τη φασική:

$$C_g = \frac{C_a}{2} = \frac{V \sin a}{2}$$



Σχήμα 15: Όταν το πλοίο βρίσκεται στο σημείο Oη διαταραχή που έχει δημιουργήσει όταν ήταν στο σημείο O''' έχει «απλωθεί» στην περιοχή που περικλείει ο κύκλος

$$\text{κέντρου } R \text{ και ακτίνας } RS = \frac{OO'''}{4}.$$

Συνεπώς όταν το πλοίο φτάσει στο σημείο O το μέτωπο του κυματισμού που άρχισε να δημιουργείται όταν το πλοίο ήταν στο O''' έχει φτάσει στα σημεία P', Q' με

$$O'''P' = \frac{OP}{2}, O'''Q' = \frac{OQ}{2}.$$

Δεδομένου ότι η γωνία α μεταβάλλεται στην περιοχή $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ τα σημεία P', Q' σαρώνουν τον κύκλο διαμέτρου $KO''' = \frac{OO'''}{2}$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το $R\left(O R = \frac{3}{4} O O'''\right)$ και ακτίνα $R S = \frac{O O'''}{4}$ και δείχνει την περιοχή που έχει «σαρώσει» η διαταραχή που δημιουργήσε το πλοίο όταν ήταν στη θέση O''' κατά το χρονικό διάστημα t , δηλαδή μέχρι να φτάσει στη θέση O . Αν επαναλάβουμε την κατασκευή για όλα τα σημεία επί της OO''' θα προκύψει μία σειρά από κύκλους, οι οποίοι δείχνουν την περιοχή της διαταραχής που έχει δημιουργήσει πλοίο που την παρούσα χρονική στιγμή βρίσκεται στην κορυφή της σφήνας. Στο σχήμα 15 φαίνονται οι κύκλοι που αφορούν τις θέσεις O'' και O' . Η θέση της περιβάλλουσας των κύκλων αυτών μπορεί να βρεθεί αν από το σημείο O φέρω την εφαπτομένη στον κύκλο ακτίνας RS , οπότε η γωνία της σφήνας θα είναι:

$$\sin^{-1} \frac{RS}{RO} = \sin^{-1} \frac{1}{3} = 19.47^\circ$$

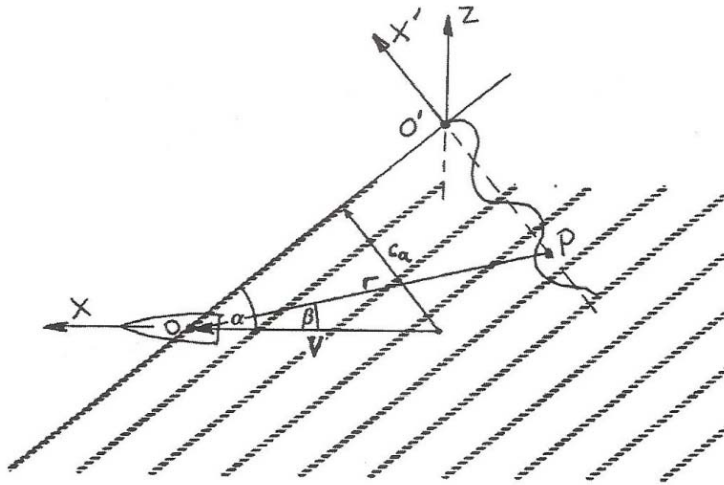
Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι τα ανωτέρω επιβεβαιώνονται στην πράξη.

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι το τρισδιάστατο σύστημα κυματισμών πλοίου που παρατηρητής επί του πλοίου βλέπει τη χρονική στιγμή t , προέρχεται από τη συμβολή κυμάτων που το πλοίο δημιουργεί, καθώς διέρχεται από τις διαδοχικές θέσεις της πορείας του κατά τις προηγούμενες χρονικές στιγμές. Έστω λοιπόν ότι το σημείο πίεσης, που στην παρούσα χρονική στιγμή βρίσκεται στο σημείο O , έχει δημιουργήσει σύστημα κυματισμών με κορυφές που σχηματίζουν γωνία α , $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, με την ταχύτητα του πλοίου V . Έστω επίσης σημείο P που απέχει από το O απόσταση r και σχηματίζει γωνία β σε σχέση με το διάνυσμα της ταχύτητας του σημείου O (τα r, β μπορεί να θεωρηθούν σαν οι πολικές συντεταγμένες του P σε σχέση με το O). Ισχύει η σχέση:

$$C_a = V \sin(\alpha)$$

Όπου C_a η ταχύτητα κίνησης των κορυφών του συστήματος κυματισμών. Υποθέτοντας βαθύ νερό η ταχύτητα του κύματος C_a σχετίζεται με τον αριθμό κύματος k_a με τη σχέση:

$$k_a = \frac{g}{C_a^2} \Rightarrow k_a = \frac{g}{(V \sin(a))^2} \quad (2)$$



Σχήμα 16: Σύστημα κυματισμών που περιγράφεται από τις κορυφές του και δημιουργείται από πηγή διαταραχής (σημείο O) που κινείται με ταχύτητα V .

Στο σύστημα συντεταγμένων x', z το οποίο κινείται μαζί με το κύμα, παραπάνω σχήμα, η μορφή της επιφάνειας του κυματισμού δίνεται από τη σχέση:

$$\eta(x', a) = A(a) \sin(k_a x') \quad (3)$$

Όπου το $A(a)$ συμβολίζει το πλάτος του κύματος που μπορεί να είναι συνάρτηση της διεύθυνσης του κυματισμού a . για το σημείο $P(r, \beta)$ έχουμε:

$$x'_p = r \sin(\alpha - \beta) \quad (4)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3) για το σημείο P με τη βοήθεια και των σχέσεων (2) και (4) λαμβάνουμε:

$$\eta(x'_p, a) = A(a) \sin \left(\frac{g}{(V \sin(a))^2} r \sin(\alpha - \beta) \right) = A(\alpha) \sin \left(\frac{g}{V^2} \frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(a)} \right) \quad (5)$$

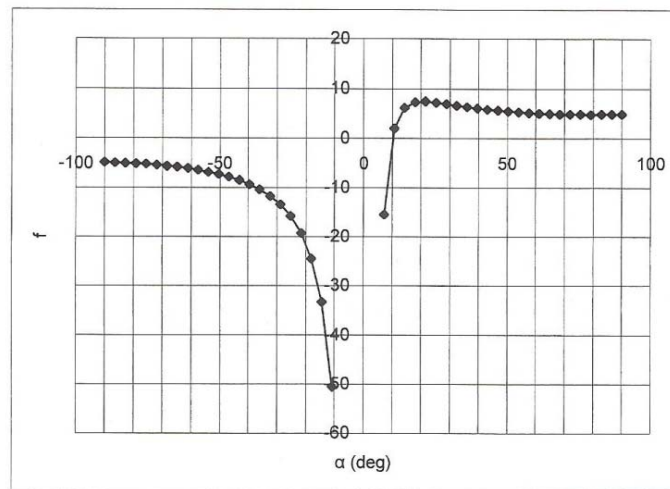
Δεδομένου ότι στο σημείο P μπορεί να συμβάλλουν κυματισμοί με γωνίες $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ το αποτέλεσμα της συμβολής εκφράζεται από τη σχέση:

$$\eta(x'_p) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta(x'_p, a) da = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(a) \sin \left(\frac{g}{V^2} \frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(a)} \right) da \quad (6)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(a) = \frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(a)} \quad (7)$$

Για $r=5$, $\beta=10^\circ$. Η συνάρτηση αυτή είναι το όρισμα του ημιτόνου στη σχέση (6). Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει κάποιες περιοχές με περίπου σταθερή τιμή και κάποιες άλλες με ισχυρά μεταβαλλόμενη τιμή. Παρατηρούμε επίσης ότι αυξάνοντας την τιμή του r η μορφή της συνάρτησης ως προς τα σημεία στασιμότητας δεν αλλάζει αφού το r εμφανίζεται ως σταθερός πολλαπλασιαστής. Αντιθέτως η μεταβολή της συνάρτησης στις περιοχές που αυτή δεν παρουσιάζει σημείο στασιμότητας πολλαπλασιάζεται επί r και γίνεται πιο απότομη.



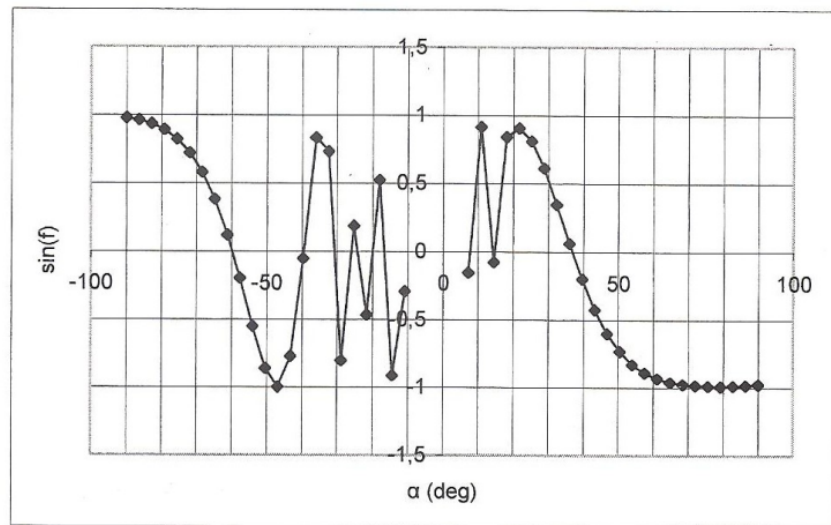
Σχήμα 17: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(a) = \frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(a)}$ για $r=5$, $\beta=10^\circ$.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή της συνάρτησης $\sin\left(\frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha)}\right)$

που είναι ο πυρήνας ολοκλήρωσης στη σχέση (6) (με παράλειψη των όρων $\frac{g}{V^2}$ και

$A(a)$) για τις ίδιες τιμές του r , β . Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα της σχέσης (6) παρουσιάζει ισχυρότατη ταλάντωση παντού εκτός των περιοχών στασιμότητας του α . Η δε ταλάντωση γίνεται πιο βίαιη, καθώς αυξάνεται η τιμή του r (δηλαδή απομακρυνόμαστε από το σημείο O). Τελικά για $r \rightarrow \infty$ οι περιοχές του α όπου η ολοκληρωτέα παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά θα αλληλοαναιρεθούν (κατά την ολοκλήρωση) και έτσι η τιμή του ολοκληρώματος της σχέσης (6) καθορίζεται κυρίως μόνο από τις τιμές του α (διευθύνσεις κυματισμών)

που αντιστοιχούν σε σημείο στασιμότητας της συνάρτησης $f(a) = \frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha)}$.



Σχήμα 18: Μεταβολή του $\sin\left(\frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha)}\right)$

Για τον υπολογισμό των γωνιών α που η συνάρτηση $f(a)$ παρουσιάζει σημείο στασιμότητας την παραγωγίζουμε ως προς α :

$$\frac{df}{da} = \frac{\sin(a)\cos(a-\beta) - 2\sin(a-\beta)\cos(a)}{\sin^3(a)} = -\frac{\cos(a)\cos(\beta)}{\sin^2(a)} + \frac{\sin(\beta)}{\sin(a)} + \frac{2\cos^2(a)\sin(\beta)}{\sin^3(a)}$$

Στα σημεία στασιμότητας:

$$\frac{df}{da} = 0 \Rightarrow -\cos(a)\cos(\beta)\sin(a) + \sin(\beta)\sin^2(a) + 2\cos^2(a)\sin(\beta) = 0 \Rightarrow$$

$$\tan \beta (2\cos^2(a) + \sin^2(a)) = \sin(a)\cos(a) \Rightarrow$$

$$\tan \beta = \frac{\tan a}{2 + \tan^2 a} \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\tan a}{2 + \tan^2 a} \right) \quad (8)$$

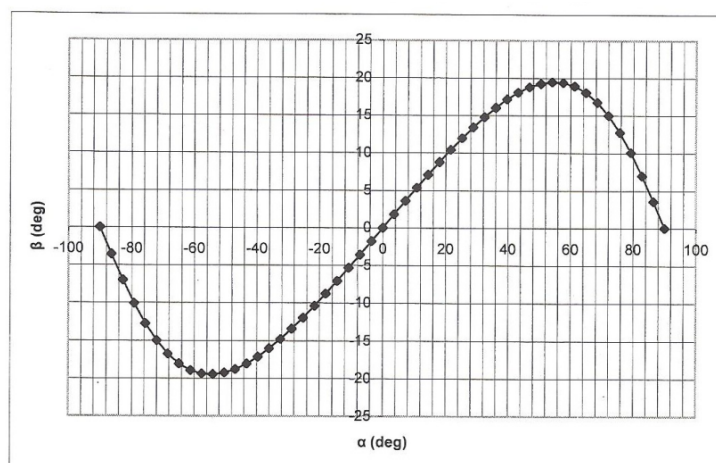
Γραφική παράσταση του δεύτερου μέλους της σχέσης (8) βλέπουμε στο σχήμα που ακολουθεί. Η σχέση (8) είναι δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς $\tan a$ με λύσεις:

$$\tan a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8 \tan^2 \beta}}{2 \tan \beta} \quad (9)$$

Η σχέση (8) έχει μία λύση για $1 - 8 \tan^2 \beta = 0 \Rightarrow \tan \beta = \sqrt{\frac{1}{8}} \Rightarrow \beta = 19.4712^\circ$ και καμία λύση αν $\beta > 19.4712^\circ \Leftrightarrow 1 - 8 \tan^2 \beta < 0$. Δηλαδή το σημείο P για να εμφανίσει κυματισμό πρέπει να περιέχεται σε μία σφηνοειδή περιοχή με γωνία 19.4712° . Στο σύνορο της σφήνας του Kelvin: $\beta = 19.4712^\circ$ και η γωνία κορυφής, σχέση (9), γίνεται:

$$\tan a = \frac{1}{2 \tan \beta} \Rightarrow \tan a = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{8}}} \Rightarrow \tan a = 1.4142 \Rightarrow a = 54.735^\circ$$

Στα εσωτερικά σημεία της σφήνας του Kelvin η σχέση (9) ορίζει δύο κύριες διευθύνσεις κυματισμών. Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται και στο σχήμα. Στο σχήμα 20 φαίνεται η σφήνα του Kelvin και τα κυρίαρχα συστήματα κυματισμών που δημιουργεί το πλοίο.



Σχήμα 19: Γραφική παράσταση της σχέσης (8) – Για κάθε ακτίνα της σφήνας του Kelvin με γωνία $\beta < 19.47^\circ$ υπάρχουν δύο κυρίαρχες διευθύνσεις κυματισμών. Για $\beta = 19.47^\circ$ οι δύο κυρίαρχες διευθύνσεις εκφυλίζονται σε μία. Για $\beta > 19.47^\circ$ δεν υπάρχουν κυρίαρχες διευθύνσεις κυματισμών.

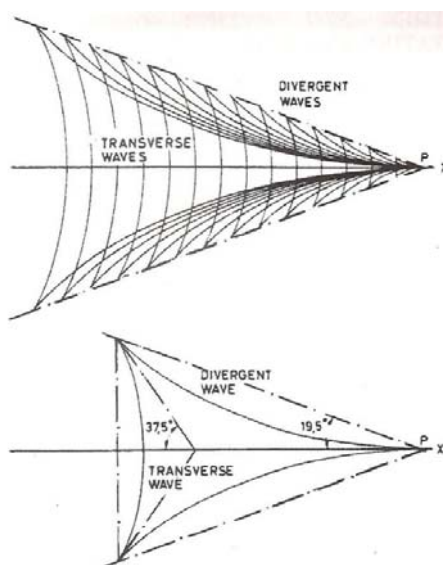
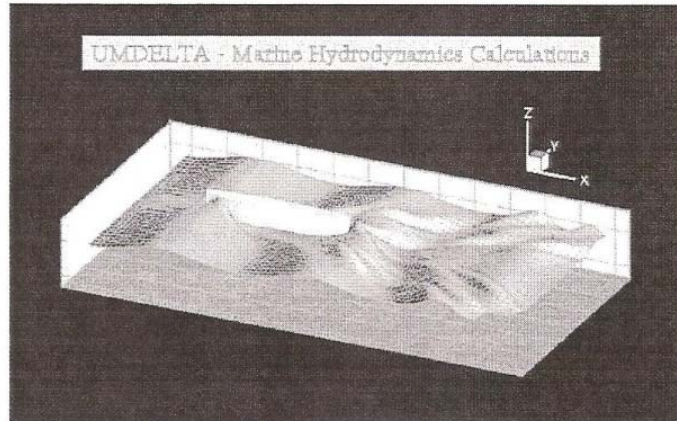


Figure 4.3.6. Crests of a Kelvin wave group caused by a traveling disturbance at P.

Σχήμα 20: Σφήνα του Kelvin και σύστημα τρισδιάστατων κυματισμών πλοίου.



Σχήμα 21: Εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων CFD στον υπολογισμό 3-D κυματισμού του πλοίου.

8.ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΙΣΤΙΟΠΛΟΙΚΟΥ ΣΚΑΦΟΥΣ

Το περιβάλλον μέσα στο οποίο είναι σχεδιασμένο να επιχειρεί ένα ιστιοπλοϊκό σκάφος είναι η διεπιφάνεια μεταξύ δύο ρευστών, του αέρα και της θάλασσας. Από το πρώτο παρέχεται η πρόωση του σκάφους και από το δεύτερο η στήριξή του. Αυτό εξηγεί και την πολυπλοκότητα της σχεδιάσής του. Τα δύο ρευστά είναι ευμετάβλητα στις ατμοσφαιρικές διαφοροποιήσεις. Σε αυτό, λοιπόν, το πολύπλοκο περιβάλλον δεν είναι τυχαίο ότι πολλοί παράμετροι σχεδίασης δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν μαθηματικά, για όλες τις συνθήκες που καλείται να αντιμετωπίσει το σκάφος. Η σχεδίαση, επομένως, βασίζεται τόσο στην τέχνη – εμπειρία όσο και στην επιστήμη.

Αναφέρθηκε ότι το σκάφος λειτουργεί στην ελεύθερη επιφάνεια των δύο ρευστών. Το τμήμα του σκάφους που βρίσκεται βυθισμένο κινείται στην πορεία του σκάφους, ενώ τα έξαλα, τα ιστία και ο ιστός δέχονται την φαινόμενη ταχύτητα που προέρχεται από το διανυσματικό άθροισμα της πραγματικής ταχύτητας του ανέμου V_f και του ανέμου που προκαλείται από την κίνηση του σκάφους στον άνεμο V_a . Ο άνεμος που αισθάνονται τα ιστία καλείται φαινόμενος.

Έστω ότι το ιστιοπλοϊκό σκάφος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ήρεμη θάλασσα. Στην κατάσταση αυτής της δυναμικής ισορροπίας το άθροισμα των δυνάμεων που

δρουν στο άνω από την ελεύθερη επιφάνεια τμήμα του ιστιοπλοϊκού $F_{a_{tot}}$ προωθεί το βυθισμένο τμήμα, το οποίο παράγει μία ίση και αντίθετη δύναμη την $F_{h_{tot}}$. Με τις ρυθμίσεις των ιστίων και του πηδαλίου το σκάφος εκτελεί σταθερή πορεία. Το επίπεδο της θάλασσας, αν και παραμορφωμένο από το σύστημα κυματισμών του σκάφους, αντιμετωπίζεται στους υπολογισμούς ως η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των αεροδυναμικών και υδροδυναμικών δυνάμεων. Η συμπεριφορά του σκάφους είναι το αποτέλεσμα της ισορροπίας αυτών των δύο συστημάτων δυνάμεων.

5. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

A. ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΙΣΤΙΟΠΛΟΪΚΑ ΣΚΑΦΗ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΩΔΙΚΩΝ Η/Υ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΠΑΡΕΛΚΟΜΕΝΩΝ

ΙΣΤΙΟΠΛΟΙΟΚΩΝ ΣΚΑΦΩΝ

Οι βασικοί στόχοι της εργασίας που παρουσιάζεται είναι δύο. Πρώτον, η ανάπτυξη μίας αριθμητικής μεθόδου υπολογισμού της ροής και των βασικών υδροδυναμικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ιστιοπλοϊκά σκάφη, και δεύτερον, η μετατροπή των κωδικών σε κατάλληλους για παράλληλη επεξεργασία. Ένα από τα δυσκολότερα σημεία της εργασίας είναι ο ταυτόχρονος υπολογισμός της ροής γύρω από τη γάστρα και τα πιθανά παρελκόμενά της (π.χ. καρίνα). Για να ελεγχθεί η αξιοπιστία της μεθόδου, έγιναν και πειράματα στα οποία μετρήθηκαν οι συνιστώσες της υδροδυναμικής αντίστασης ενός προτύπου ιστιοπλοϊκού. Οι συνιστώσες αυτές συγκρίνονται με τα αριθμητικά αποτελέσματα.

1.ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ

Η αριθμητική μέθοδος υπολογισμού του πεδίου ροής γύρω από τη γάστρα ενός ιστιοπλοϊκού σκάφους που αναπτύσσεται βασίζεται, κυρίως, στην συνδυασμένη επίλυση δύο υποπεριοχών. Η πρώτη περιβάλλει τη γάστρα του πλοίου και η δεύτερη την καρίνα που έχει το σχήμα μίας τρισδιάστατης συμμετρικής πτέρυγας. Στη συνέχεια περιγράφονται τα βασικά στοιχεία των μεθόδων δημιουργίας των τρισδιάστατων πλεγμάτων που καλύπτουν τις δύο περιοχές και χρησιμοποιούνται από τους υδροδυναμικούς κώδικες για την επίλυση του ρευστομηχανικού προβλήματος. Και στις δύο περιοχές η γένεση των πλεγμάτων βασίζεται στη μέθοδο του σύμμορφου μετασχηματισμού τυχαίου περιγράμματος σε κύκλο.

Σε κάθε περίπτωση το τρισδιάστατο πλέγμα αποτελείται από διαδοχικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων ως προς τα οποία αναφέρονται οι τοπικές συνιστώσες της ταχύτητας. Η χρησιμοποίηση αυτού του συστήματος είναι ιδιαίτερα ευνοϊκή σε ότι αφορά τη σύγκλιση του προβλήματος σε σχέση με άλλες

γενικευμένες μεθόδους που εισάγουν ενιαία καρτεσιανά συστήματα. Η αποδοτικότητα της οφείλεται αφενός στην απλή έκφραση των όρων διάχυσης και αφετέρου, κατά κύριο λόγο, στην απλή συσχέτιση των παραγώγων της πίεσης με τις ταχύτητες που είναι κρίσιμης σημασίας για τον υπολογισμό του πεδίου πιέσεων.

1.1 Το πλέγμα γύρω από την καρίνα (πτέρυγα)

Το αριθμητικό πλέγμα που παράγεται γύρω από την καρίνα αποτελείται από διαδοχικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα πλέγματα, κάθε ένα από τα οποία δημιουργείται μέσω της σύμμορφης απεικόνισης της αντίστοιχης τομής σε κύκλο. Τα περιγράμματα των τομών της καρίνας έχουν σχήμα υδροτομής (τυχαίο κλειστό σχήμα) και απαιτούν την εφαρμογή του γενικού σύμμορφου μετασχηματισμού.

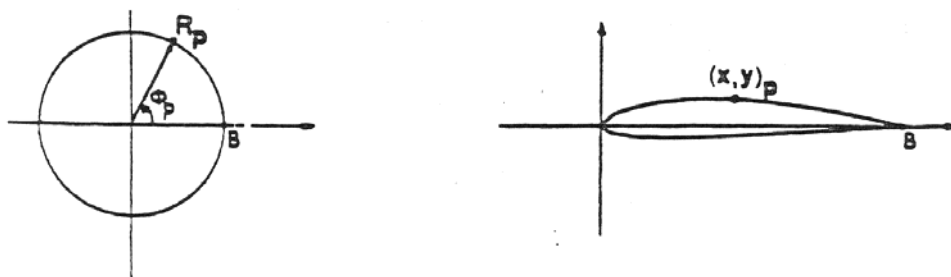
1.1.1 Ο σύμμορφος μετασχηματισμός τυχαίας υδροτομής

Ο γενικός μετασχηματισμός μιας τυχαίας υδροτομής σε κύκλο αναπτύσσεται ως σειρά:

$$\zeta = C_{-1} \frac{z}{R_c} + C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{R_c^n}{z^n}$$

Όπου ζ είναι το μιγαδικό επίπεδο της υδροτομής, z το μιγαδικό επίπεδο του κύκλου ακτίνας R_c και C_n , $n=-1, \dots, \infty$ οι μιγαδικοί (σταθεροί) συντελεστές του μετασχηματισμού, που αντιστοιχούν στη δεδομένη υδροτομή και πρέπει να υπολογιστούν. Αν θεωρηθεί ότι $C_n = A_n + iB_n$, τότε για κάθε γωνία φ στον κύκλο αντιστοιχούν οι συντεταγμένες $x(\varphi)$ και $y(\varphi)$ στο επίπεδο της υδροτομής, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= A_{-1} \cos \varphi - B_{-1} \sin \varphi + A_o + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] \\ y(\varphi) &= B_{-1} \cos \varphi + A_{-1} \sin \varphi + B_o + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \cos n\varphi - A_n \sin n\varphi] \end{aligned} \quad (10)$$



Σχήμα 22: Ο μετασχηματισμός τυχαίας υδροτομής σε κύκλο.

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι κατάλληλες ολοκληρώσεις των παραπάνω σχέσεων καταλήγουν στις εξής κλειστές εκφράσεις για τους πραγματικούς συντελεστές A_n, B_n :

$$\begin{aligned}
 A_o &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\varphi) d\varphi, \\
 A_{-1} - A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \\
 A_{-1} + A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \\
 A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 B_o &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) d\varphi, \\
 B_{-1} + B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \\
 B_1 - B_{-1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \\
 B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Αν οι συναρτήσεις $x(\varphi)$ και $y(\varphi)$ είναι γνωστές, ο υπολογισμός των A_n, B_n είναι πολύ απλός. Στην πραγματικότητα όμως τα (x, y) είναι ένα σύνολο διακριτών σημείων που περιγράφουν την υδροτομή και στις πιο απλές των περιπτώσεων μπορεί να δίνεται η συνάρτηση $y(x)$. Άμεσα λκοιπόν ανακύπτει το πρόβλημα της συσχέτισης των (x, y) με τις γωνίες φ στο επίπεδο του κύκλου. Σε αυτό ακριβώς το σημείο έγκειται και η δυσκολία της εφαρμογής όλων των συναφών μεθόδων του σύμμορφου μετασχηματισμού.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα εφαρμόζεται μία επαναληπτική διαδικασία που ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Για ένα σύνολο δεδομένων συντεταγμένων (x_p, y_p) του περιγράμματος της υδροτομής, σχήμα 1, υπολογίζονται προσεγγιστικά οι αρχικοί συντελεστές A_n, B_n , $n=1, \dots, N$, $N=18$ σύμφωνα με τη θεωρία λεπτών υδροτομών που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $x(\varphi) = (1 + \cos \varphi) / 2$ και επομένως εισάγει μια γνωστή αντιστοιχία γωνιών και σημείων.
2. Για τις υπολογισμένες τιμές των A_n, B_n υπολογίζονται διαδοχικά οι γωνίες φ_p που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες (x_p, y_p) για κάθε σημείο. Ο προσδιορισμός κάθε φ_p γίνεται έμμεσα, βρίσκοντας την ελάχιστη απόσταση

$$E_i = [x_p - x(\varphi_i)]^2 + [y_p - y(\varphi_i)]^2$$

Όπου $[\varphi_i]$ είναι μια προκαθορισμένη διαμέριση γωνιών στο επίπεδο του κύκλου (που διαφέρουν κατά σταθερή τιμή) και οι τιμές $x(\varphi_i), y(\varphi_i)$ υπολογίζονται από τις αναλυτικές εκφράσεις που δόθηκαν παραπάνω. Με αυτή τη διαδικασία θεωρείται ότι η ζητούμενη γωνία προσδιορίζεται από το εγγύτατο σημείο της εκάστοτε συνάρτησης σύμμορφου μετασχηματισμού.

3. Με δεδομένες τις τιμές (x_p, y_p) και φ_p υπολογίζονται οι συντελεστές A_n, B_n από τα ολοκληρώματα (1.3). Για την ακριβή προσέγγιση αυτών των ταχέως μεταβαλλόμενων ολοκληρωμάτων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ υποτίθεται ότι οι

συναρτήσεις $x(\varphi)$ και $y(\varphi)$ μεταβάλλονται γραμμικά μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων πάνω στην υδροτομή.

4. Τα βήματα 2 και 3 επαναλαμβάνονται μέχρι να συγκλίνουν οι τιμές των A_n, B_n και φ_p , έτσι ώστε:

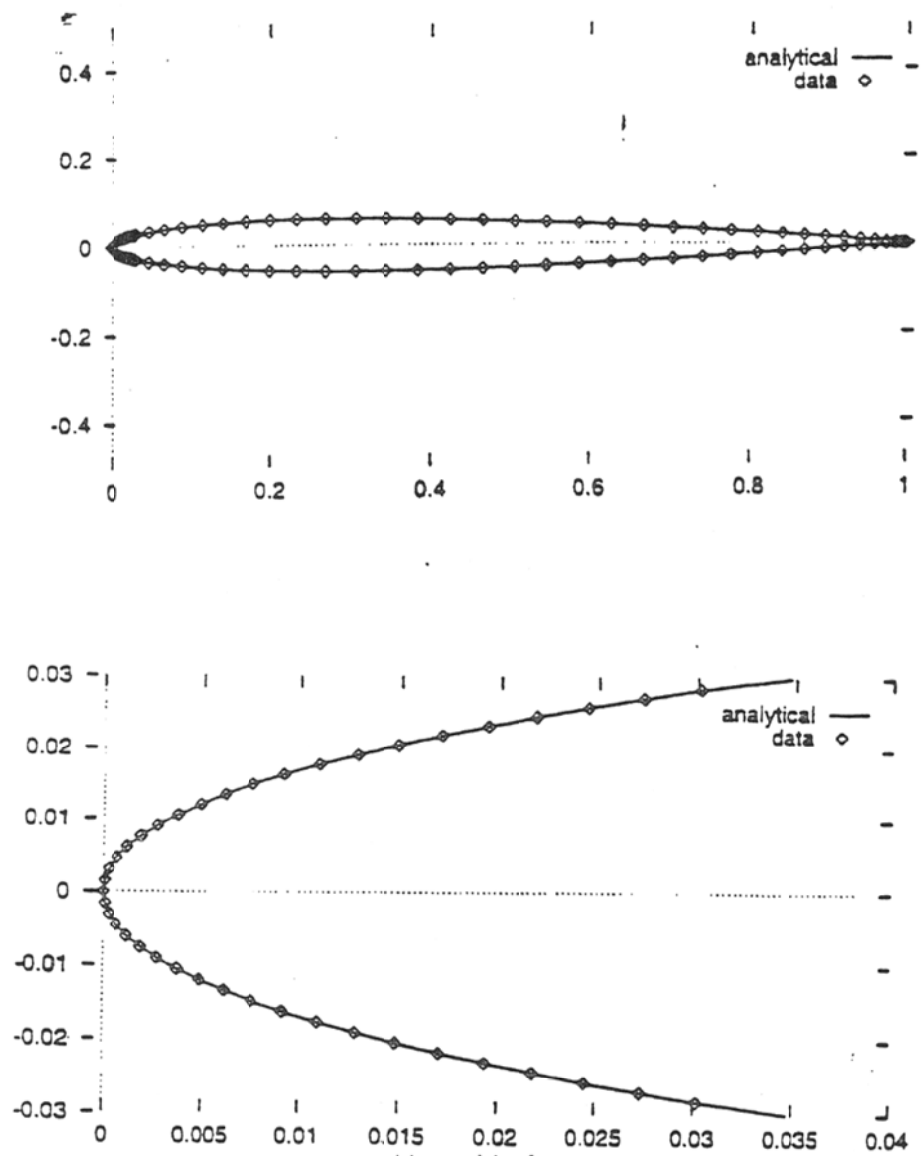
$$\left| A_n^k - A_n^{k-1} \right| < a, \left| B_n^k - B_n^{k-1} \right| < a, \left| \varphi_n^k - \varphi_n^{k-1} \right| < b$$

Όπου με k σημειώνεται ο αύξων αριθμός του επαναληπτικού βήματος και a,b είναι προκαθορισμένες σταθερές. Προδιαγράφεται επίσης και ένας μέγιστος αριθμός επαναληπτικών βημάτων.

5. Τα βήματα 2-4 επαναλαμβάνονται αυξάνοντας συνεχώς τον αριθμό των συντελεστών N έως ότου επιτευχθεί ικανοποιητική προσέγγιση της γεωμετρίας της υδροτομής, δηλαδή όταν για κάποιο θετικό αριθμό c ισχύει το κριτήριο

$$\sum_p \left[\left[x_p - x(\varphi_p) \right]^2 + \left[y_p - y(\varphi_p) \right]^2 \right] < c$$

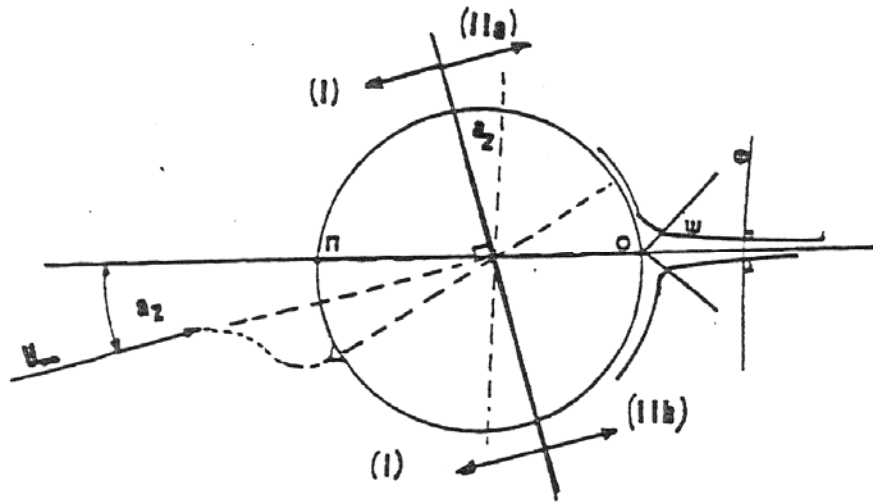
Ο αλγόριθμος σύγκλισης που περιγράφεται ακολουθεί τη λογική της μεθόδου [3] ως προς την εκτίμηση των γωνιών, με τη βασική διαφορά ότι στην αρχική εργασία (που αναφέρεται σε άλλου τύπου γεωμετρίες) η κάθε γωνία φ_p υπολογίζεται αναζητώντας την ελάχιστη απόσταση μόνο στο διάστημα $[\varphi_{p-1}, 2\pi]$. Στις διάφορες εφαρμογές όμως, για τυχαίες υδροτομές διαπιστώθηκε ότι λόγω των πολύ μεγάλων παραγώγων των συντεταγμένων ως προς τις γωνίες στην περιοχή του χείλους πρόσπτωσης, η προηγούμενη μέθοδος αποτυγχάνει να υπολογίσει με ακρίβεια τις γωνίες και η όλη διαδικασία αποκλίνει. Το μειονέκτημα αυτό διορθώθηκε με τον έλεγχο κάθε φ_p σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi]$. Η εμπειρία από την εφαρμογή της μεθόδου έδειξε ότι για τις συνηθισμένες υδροτομές (ή αεροτομές) αρκούν 25 συντελεστές για την επαρκή αναπαράστασή τους με τη μέθοδο του σύμμορφου μετασχηματισμού. Στο σχήμα 2 φαίνεται η πολύ καλή σύμπτωση που επιτυγχάνεται για μια αεροτομή NACA-0012 με 25 συντελεστές.



Σχήμα 23: Προσέγγιση του περιγράμματος υδροτομής NACA -0012.

1.1.2 Ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα με δεδομένους συντελεστές

Μόλις υπολογιστούν οι συντελεστές A_n, B_n η κατασκευή ορθογώνιων καμπυλόγραμμων πλεγμάτων γύρω από την υδροτομή προκύπτει απλά μετασχηματίζοντας οποιοδήποτε αντίστοιχο ορθογώνιο πλέγμα στο επίπεδο του κύκλου, εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.2). για τη δημιουργία ενός συστήματος τύπου “C” το πεδίο γύρω από τον κύκλο υποδιαιρείται σε δύο περιοχές (I) και (II), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 24: Υποδιαίρεση περιοχών στο επίπεδο του κύκλου.

Αν υποθεθεί το διδιάστατο πεδίο γύρω από τον κύκλο που προκύπτει από το συνδυασμό παράλληλης ροής, διπόλου και σημείου δίνης, τότε για μια οποιαδήποτε γωνία πρόσπτωσης α_z ορίζεται το σημείο πρόσπτωσης στη γωνία $\varphi=2\alpha_z$ και το σημείο εκφυγής στη γωνία $\varphi=0$. Η περιοχή (I) ορίζεται στο διάστημα $[\pi/2 + \alpha_z, 3\pi/2 + \alpha_z]$ και το αντίστοιχο ορθογώνιο πλέγμα αποτελείται απλούστατα από ομόκεντρες περιφέρειες και ακτίνες. Στην περιοχή (II) διακρίνονται οι υπο-περιοχές (IIa) $[0, \pi/2 +$

$\alpha_z]$ και (IIβ) $[3\pi/2 + \alpha_z, 2\pi]$. Εδώ το ορθογώνιο πλέγμα προκύπτει από τις τομές ισοδυναμικών και ισοροϊκών γραμμών. Λόγω των πεπλεγμένων εκφράσεων των σχετικών μεταβλητών απαιτείται και πάλι μια επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων σημείων. Η ροϊκή συνάρτηση Ψ και το δυναμικό Φ προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\Psi(r, \varphi) &= \left[1 - \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 \right] U_\infty r \sin(\varphi - a_z) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{R_c} \right) \\ \Phi(r, \varphi) &= \left[1 - \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 \right] U_\infty r \cos(\varphi - a_z) + \frac{\Gamma}{2\pi} (\varphi - a_z)\end{aligned}\quad (12)$$

Όπου U_∞ είναι η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο και Γ η κυκλοφορία που ορίζεται ως $\Gamma = (4\pi U_\infty R_c) \sin a_z$. Οι συνοριακές τιμές του Ψ ορίζονται στα κομβικά σημεία της περιοχής (I) πάνω στις ακτίνες που αντιστοιχούν στις γωνίες $\pi/2 + \alpha_z$ και $3\pi/2 + \alpha_z$, ενώ οι συνοριακές τιμές του Φ πάνω στην υδροτομή και στον ομόρρου όπου $\Psi=0$. Με δεδομένες τις συνοριακές τιμές το πρόβλημα του καθορισμού των κομβικών τιμών ανάγεται στον υπολογισμό των (r_o, φ_o) που αντιστοιχούν σε δεδομένα Ψ_o και Φ_o . Αν υποθεθεί ότι είναι γνωστός ο κόμβος με δεδομένα $(r, \varphi) \rightarrow (\Psi, \Phi)$ τότε η περιφερειακή C_u και η ακτινική C_r συνιστώσα της ταχύτητας ορίζονται ως:

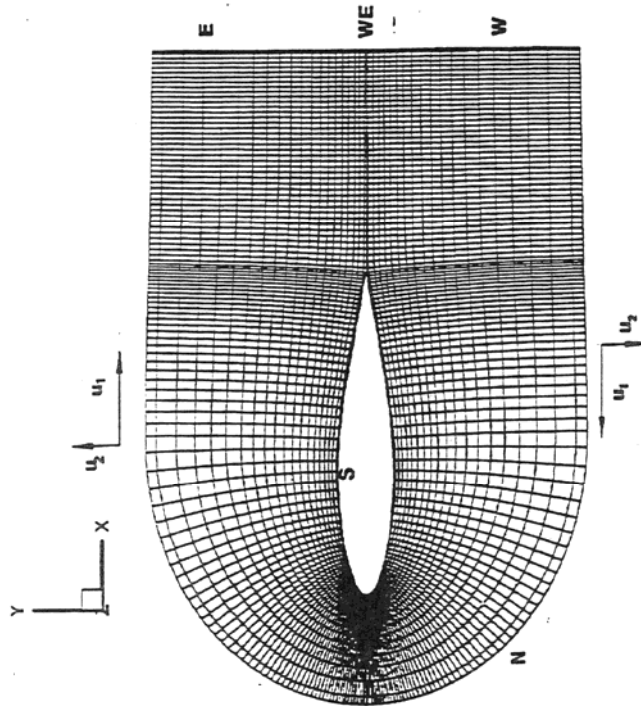
$$\begin{aligned}C_u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\left[1 + \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 \right] U_\infty \sin(\varphi - a_z) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ C_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \left[1 - \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 \right] U_\infty r \cos(\varphi - a_z)\end{aligned}\quad (13)$$

Θεωρώντας αναπτύγματα Taylor πρώτης τάξης, είναι απλό να αποδειχθεί ότι οι μεταβολές της γωνίας και της ακτίνας συνδέονται με τις μεταβολές του δυναμικού και ροϊκής συνάρτησης ως εξής:

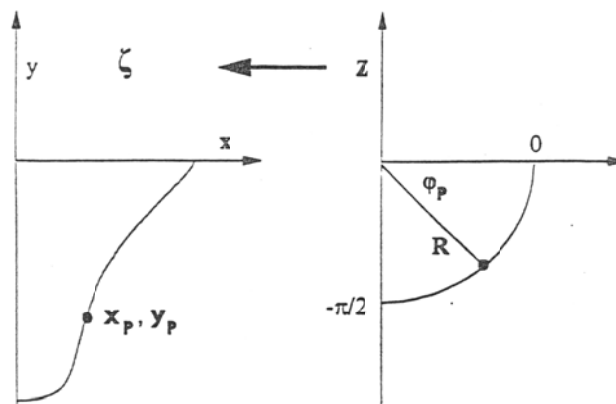
$$\begin{aligned}\delta r &= \frac{C_r(\Psi_o - \Psi) + C_u(\Phi_o - \Phi)}{r(C_r^2 + C_u^2)} \\ \delta \varphi &= \frac{-C_u(\Psi_o - \Psi) + C_r(\Phi_o - \Phi)}{(C_r^2 + C_u^2)}\end{aligned}\quad (14)$$

Οι σχέσεις (1.6) υποδεικνύουν και τον τρόπο προσέγγισης των τιμών (r_o, φ_o) . Η νέα προσέγγιση της ακτίνας και της γωνίας είναι προφανώς $r=r+\delta r$, $\varphi=\varphi+\delta\varphi$, οπότε υπολογίζονται εκ νέου οι συναρτήσεις Φ, Ψ από τις (12), C_r, C_u από τις (13) και τα $\delta r, \delta\varphi$ από τις (14), έως ότου η διαδικασία συγκλίνει, δηλαδή $r \rightarrow r_o, \varphi \rightarrow \varphi_o$.

Ασφαλώς υπάρχουν πολλές παράμετροι που προσδιορίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του πλέγματος για δεδομένο αριθμό κόμβων, όπως είναι τα εξωτερικά σύνορα, η διαμέριση των σημείων πάνω στην υδροτομή και στη γραμμή $\Psi=0$ του ομόρρου, η γωνία πρόσπτωσης που δεν συμπίπτει αναγκαστικά με αυτή της πραγματικής ροής και η απόσταση των πρώτων κόμβων από το στερεό σύνορο. Έχει αναπτυχθεί μία αυτόματη διαδικασία με συγκεκριμένες τοπολογικές αρχές, η οποία παράγει τα σύνορα του πλέγματος προκαθορίζοντας λίγες μόνο μεταβλητές.



Σχήμα 25: Το πλέγμα γύρω από διδιάστατο πετρύγιο.



Σχήμα 26: Ο μετασχηματισμός συμμετρικής τομής σε κύκλο.

1.2 Το πλέγμα γύρω από τη γάστρα

Στις επόμενες παραγράφους περιγράφεται η διαδικασία της δημιουργίας πλεγμάτων γύρω από γενικές μορφές πλοίων. Όλες οι ειδικές περιπτώσεις που εξετάζονται βασίζονται και πάλι στο γενικό μετασχηματισμό ενός τυχαίου περιγράμματος σε κύκλο που γράφεται ως

$$\zeta = (c_1 + ib_1) + \sum_{n=2}^N (c_n + ib_n) z^{1-n}$$

Όπου ζ είναι το μιγαδικό επίπεδο της τομής του πλοίου και z το αντίστοιχο του μοναδιαίου κύκλου.

1.2.1 Ο μετασχηματισμός συμμετρικών τομών

Όταν το σώμα έχει δύο επίπεδα συμμετρίας, που αντιστοιχούν στην αδιατάρακτη επίπεδη ελεύθερη επιφάνεια και στο διάμηκες επίπεδο συμμετρίας του πλοίου, τότε κάθε εγκάρσια τομή έχει δύο άξονες συμμετρίας (x, y) και ο γενικός μετασχηματισμός απλοποιείται στον:

$$\zeta = \sum_{n=1}^N a_n z^{3-2n}$$

Που ορίζεται πλήρως αν είναι γνωστοί οι πραγματικοί συντελεστές a_n , $n=1, \dots, N$.

Το περίγραμμα της τομής ορίζεται από P ζεύγη διακριτών σημείων (x_p, y_p) που αντιστοιχούν στις γωνίες φ_p πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Η μέθοδος του προσδιορισμού των συντελεστών a_n βασίζεται στην εργασία του von Kerczeck and Tuck. Προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x_p = \sum_{n=1}^N a_n \cos[(3-2n)\varphi_p] + E'_p$$

$$y_p = \sum_{n=1}^N a_n \sin[(3-2n)\varphi_p] + E''_p$$

Οι όροι E'_p, E''_p εκφράζουν το λάθος της μαθηματικής αναπαράστασης του περιγράμματος και η ελαχιστοποίηση του συνολικού σφάλματος

$$E = \sum_{p=1}^P (E'_p + E''_p)$$

Χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των συντελεστών a_n του σύμμορφου μετασχηματισμού (1.8). Η εφαρμογή του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης καταλήγει στις $N \times P$ εξισώσεις:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 = \sum_{p=1}^P [x_p \cos[(3-2j)\varphi_p] + y_p \sin[(3-2j)\varphi_p]] - \sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^N a_n \cos[2(j-n)\varphi_p], j=1, \dots, N$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_i} = 0 = \sum_{l=1}^N a_l (3-2l) [x_i \sin[(3-2l)\varphi_i] - y_i \cos[(3-2l)\varphi_i]] - \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N a_n a_l (3-2l) \sin[2(n-l)\varphi_i], i=1, \dots, P$$

(15)

Οι εξισώσεις (15) λύνονται για κάθε προκαθορισμένο αριθμό συντελεστών $N_{\max}$ με την εξής επαναληπτική μέθοδο:

1. Γίνεται μία πρώτη εκτίμηση των συντελεστών a_n για $N < N_{\max}$ (συνήθως η πρώτη προσέγγιση γίνεται από τους συντελεστές των μορφών Lewis).
2. Με δεδομένους τους a_n προσδιορίζονται διαδοχικά οι γωνίες φ_p , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η απόσταση μεταξύ της απεικόνισης (1.8) και των αντίστοιχων σημείων της τομής. Η μέθοδος αυτή είναι πιο ευстаθής και πιο αποδοτική από τη λύση του συστήματος (1.10β).
3. Οι γωνίες φ_p που βρέθηκαν στο βήμα 1 χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n από τη λύση του γραμμικού συστήματος (1.10α).
4. Για το συγκεκριμένο N επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 και 3 μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση για τους a_n και τις φ_p .
5. Ο αριθμός N αυξάνεται κατά 1 και επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 έως 4.
6. Η διαδικασία 2-5 συνεχίζεται ώσπου το συνολικό σφάλμα E να γίνει μικρότερο από κάποια τιμή ή μέχρι $N = N_{\max}$.

Για εγκάρσιες τομές (νομείς) που έχουν ομαλά περιγράμματα, όπως συμβαίνει στην περιοχή της πλώρης και της πρύμνης των συνηθισμένων συμβατικών πλοίων, αρκούν 6-10 συντελεστές a_n για την αναπαράστασή τους. Αντίθετα, βολβοειδείς πλώρες ή πρύμνες, καθώς και πυρμναίοι νομείς που παρουσιάζουν απότομες μεταβολές καμπυλότητας απαιτούν ακόμη και 50-70 συντελεστές.

Εάν οι συντελεστές a_n του μετασχηματισμού (15) είναι γνωστοί, το ορθογώνιο πλέγμα γραμμών στο επίπεδο (x,y) του νομέα μπορεί να δημιουργηθεί εύκολα από το αντίστοιχο πλέγμα στο επίπεδο του κύκλου που αποτελείται από ομόκεντρους κύκλους $R = \text{σταθ.}$ και ακτίνες $\varphi = \text{σταθ.}$ Αυτή η μέθοδος παραγωγής διδιάστατων πλεγμάτων γύρω από νομείς ενδείκνυται πολλές φορές, γιατί οι γραμμές του πλέγματος που αντιστοιχούν σε σταθερές ακτίνες πυκνώνουν ανάλογα με το πάχος του οριακού στρώματος. Από σχετικά πειράματα έχει παρατηρηθεί ότι το μικρότερο πάχος του οριακού στρώματος βρίσκεται στην περιοχή του περιγράμματος που στρέφει τα κοίλα στο εσωτερικό του νομέα και παρουσιάζει μεγάλη καμπυλότητα. Αντίθετα, όταν η καμπυλότητα είναι μικρή ή η καμπύλη του περιγράμματος στρέφει τα κοίλα προς την περιοχή του ρευστού, το πάχος του οριακού στρώματος μεγαλώνει.

Σ' αυτήν την αυξομείωση του πάχους του οριακού στρώματος αντιστοιχεί και η αραίωση ή η πύκνωση των γραμμών του πλέγματος παράλληλα προς το περίγραμμα (R =σταθερό στο επίπεδο του κύκλου), οπότε επιτυγχάνεται ομοιογενής διακριτοποίηση του πεδίου υπολογισμού. Εξάλλου η αναλυτικότητα της συνάρτησης μετασχηματισμού (15) στην εξωτερική περιοχή του νομέα εξασφαλίζει και την ύπαρξη παραγώγων όλων των τάξεων των συναρτήσεων $x(R,\varphi)$ και $y(R,\varphi)$, άρα και των παραγώγων της καμπυλότητας που εμφανίζονται στις εξισώσεις ορμής, όταν χρησιμοποιούνται καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.

1.2.2 Ασυνέχειες στο διάμηκες περίγραμμα

Με τον τρόπο κατασκευής του πλέγματος που περιγράφεται στην παράγραφο 1.3.1 προκύπτει ένα πρόβλημα ασυνέχειας στους νομείς K και K' της πρύμνης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου στην πρώτη περίπτωση υπάρχει ασυνέχεια στις εγκάρσιες τομές του πλοίου και στη δεύτερη, ασυνέχεια του πλέγματος από το στερεό όριο στον ομόρρου. Οι νομείς K_1 και K_2 του σχήματος 1.7β βρίσκονται αντίστοιχα λίγο πριν και λίγο μετά από τον K . Εάν τα πλέγματα των K_1 και K_2 δημιουργηθούν σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (15), τότε το σημείο του A_1 του K_1 θα είναι το B_2 του K_2 , οπότε παρουσιάζεται μία απότομη μεταβολή του πλέγματος ως προς τη διεύθυνση της κύριας ροής. Αυτή η μεταβολή εκτός από τα πιθανά προβλήματα σύγκλισης θα έχει και δυσμενή επίδραση στον υπολογισμό των διάφορων παραμέτρων της ροής, που ιδιαίτερα σ' αυτήν την περιοχή επηρεάζεται έντονα από το γειτονικό πεδίο του ομόρρου. Η αντιμετώπιση του προβλήματος γίνεται με την εφαρμογή ενός δεύτερου μετασχηματισμού για τους πρυμναίους νομείς, σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται στη συνέχεια.

Για να μεταβάλλεται ομαλά το πλέγμα κατά τη διεύθυνση K θα πρέπει η αντίστοιχη καμπύλη της $y = C_1$ στο επίπεδο του K_1 να είναι περίπου η διακεκομμένη $y = C_2$ στο νομέα K_2 . Βρίσκεται αρχικά το σημείο A_2 στον K_2 , έτσι ώστε $O_1A_1 = O_2A_2$ και με τον αντίστροφο μετασχηματισμό ζ^{-1} του (15) προσδιορίζεται το σημείο A_2' στο επίπεδο του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχεί στον K_2 . Πρέπει λοιπόν να δημιουργηθεί ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα στο επίπεδο του κύκλου, στο οποίο οι γραμμές $y' = C_2$ θα έχουν τη μορφή της διακεκομμένης y' . Αυτό μπορεί να

γίνει με τον μετασχηματισμό του κυκλικού τμήματος $[0, \pi/2]$ στο ευθύγραμμο τμήμα $O_2''B_2''$:

$$w = z + \frac{1}{z} \quad (16)$$

όπου οι γωνίες θ στο επίπεδο του κύκλου μεταβάλλονται τώρα στο διάστημα $[0, \pi/2]$, δηλ. $\theta = \varphi + \pi/2$. Από την (16) προσδιορίζεται το σημείο A_2'' στο επίπεδο w που αντιστοιχεί στο σημείο A_2' του επιπέδου του κύκλου. Το πλέγμα των ορθογώνιων καμπυλών ($x_w = \text{σταθ.}$, $y_w = \text{σταθ.}$) προκύπτει από τον μετασχηματισμό του ευθύγραμμου τμήματος $O_2''A_2''$ σε κύκλο ακτίνας R'

$$w = c \left(z' + \frac{1}{z'} \right) \quad (17)$$

Αν υποτεθεί ότι $\zeta' = R' e^{i\theta'}$, θα είναι:

$$w = c \left[(R' + 1/R') \cos \theta' + i(R' - 1/R') \sin \theta' \right] \quad (18)$$

όπου η σταθερά c προσδιορίζεται από την εξίσωση

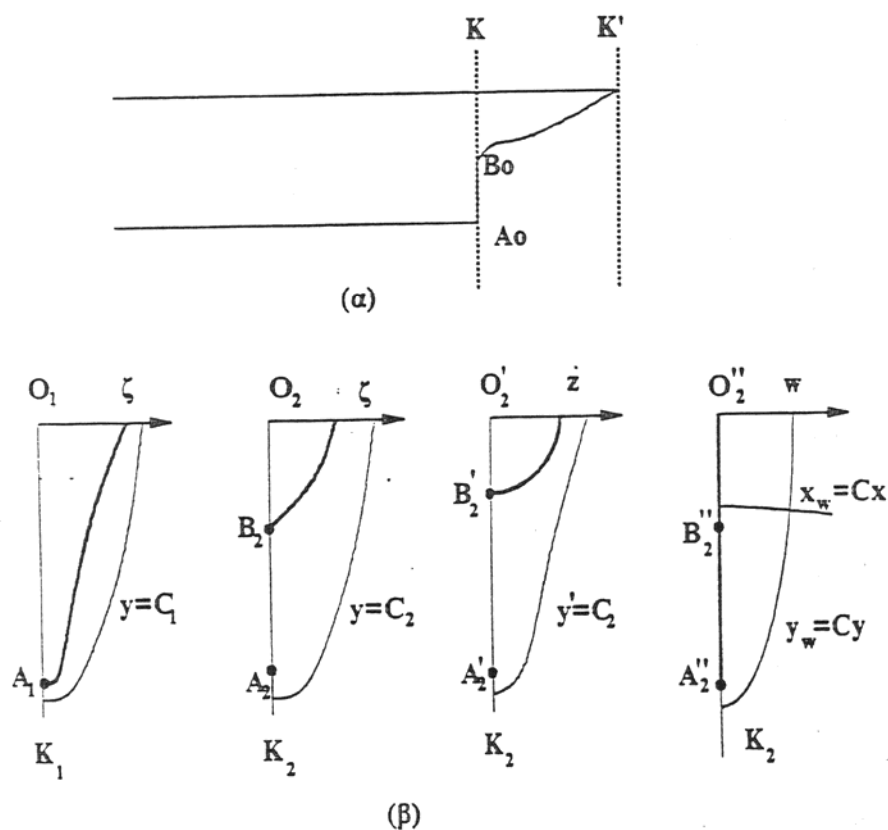
$$c = |O_2''A_2''| / 2$$

που προκύπτει από την (18) για $\theta' = \pi/2$. Από το ορθογώνιο πλέγμα (R', θ') στο επίπεδο του κύκλου z' βρίσκεται το αντίστοιχο πλέγμα (x_w, y_w) στο επίπεδο w με εφαρμογή της (18). Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό w^{-1} του (16) το πλέγμα (x_w, y_w) μετασχηματίζεται στο ζητούμενο (x, y) του νομέα K_2 . Πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι ο μετασχηματισμός w^{-1} έχει αναλυτική λύση, δηλαδή αν δίνεται το σημείο (x_w, y_w) στο επίπεδο w , το αντίστοιχό του στο επίπεδο ζ προκύπτει από τις εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} x_w &= \left(R + \frac{1}{R} \right) \cos \theta \\ y_w &= \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x_w^2}{(R + 1/R)^2} + \frac{y_w^2}{(R - 1/R)^2} = 1 \quad (19)$$

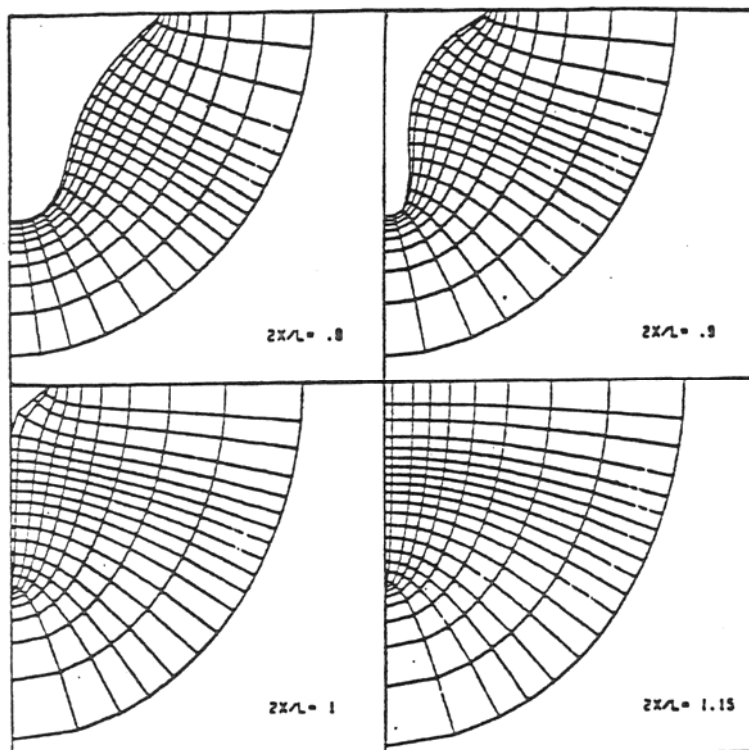
$$\tan \theta = \frac{y_w}{x_w} \left(\frac{R + 1/R}{R - 1/R} \right)$$

Από τις οποίες προσδιορίζεται η R και η θ . Η ίδια διαδικασία χρησιμοποιείται για όλους τους νομείς μεταξύ του K και του K' , διατηρώντας πάντα σταθερό το σημείο A_2 . Το πλέγμα στις τομές του ομόρρου ταυτίζεται με το πλέγμα (x_w, y_w) του τελευταίου νομέα και στην απλούστερη περίπτωση είναι σταθερό για όλο το υπόλοιπο υπολογιστικό πεδίο.



Σχήμα 27: Ασυνέχειες στην πρόμνη.

Στο σχήμα 28 απεικονίζονται ορθογώνια πλέγματα σε τέσσερις εγκάρσιες τομές του κατά μήκος του προτύπου SSPA-720.



Σχήμα 28: Ορθογώνια καμπυλόγραμμα πλέγματα κατά μήκος της πρύμνης συμβατικού πλοίου.

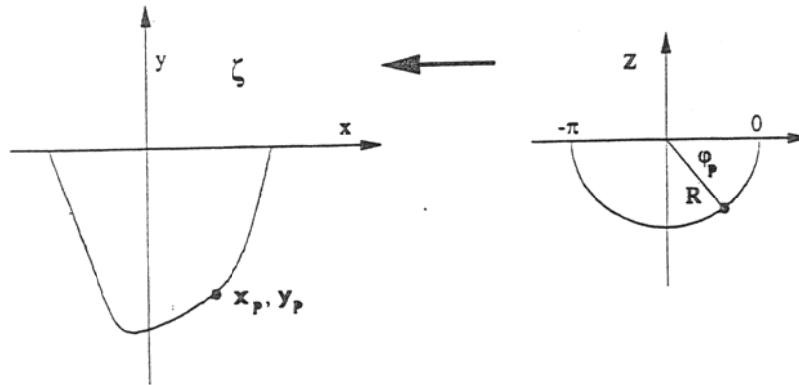
1.2.3 Ασύμμετρες τομές

Στην περίπτωση που μια εγκάρσια τομή παρουσιάζει ασυμμετρία ως προς τον άξονα Oy, σχήμα 29, ο γενικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το εξωτερικό του περιγράμματος στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου γράφεται:

$$\zeta = \alpha_1 \zeta + \sum_1^N \alpha_n z^{1-n} \quad (20)$$

που αναλύεται σε αναπτύγματα συντεταγμένων ως:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos \phi + \sum_2^N \alpha_n \cos(1-n)\phi \\ y(\phi) &= \alpha_1 \sin \phi + \sum_2^N \alpha_n \sin(1-n)\phi \end{aligned} \quad (21)$$



Σχήμα 29: Μετασχηματισμός ασύμμετρων τομών.

Οι τιμές των γωνιών ϕ στο επίπεδο του κύκλου μεταβάλλονται από $-\pi$ έως 0 , ενώ ο συντελεστής α_0 λαμβάνει υπόψη τις (πιθανά) διαφορετικές αποστάσεις του περιγράμματος από τον άξονα Oy , για $y=0$. Η διαδικασία που ακολουθείται για τον προσδιορισμό των α_n ακολουθεί τον επαναληπτικό αλγόριθμο που αναπτύχθηκε για συμμετρικές τομές. Αν υποθεθεί ότι οι γωνίες ϕ_p που αντιστοιχούν στα δεδομένα στο επίπεδο του κύκλου είναι γνωστές, τότε οι α_n υπολογίζονται από τις παρακάτω $N+1$ εξισώσεις που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση του συνολικού σφάλματος των αποστάσεων:

συντελεστής α_0

$$\sum_{p=1}^{N_p} x_p - \alpha_0 N_p - \alpha_1 \sum_{p=1}^{N_p} \cos \phi_p - \sum_{n=2}^{N_p} \sum_{n=2}^N \alpha_n \cos(1-n)\phi_p = 0 \quad (22)$$

συντελεστής α₁

$$\sum_{p=1}^{N_p} [x_p \cos \phi_p + y_p \sin \phi_p] - \alpha_0 \sum_{p=1}^{N_p} [\cos \phi_p] - \alpha_1 N_p - \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=2}^N [\alpha_n \cos \phi_p \cos(1-n)\phi_p] - \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=2}^N [\alpha_n \sin \phi_p \sin(1-n)\phi_p] = 0 \quad (23)$$

συντελεστές α_j, j = 2, ..., N

$$\sum_{p=1}^{N_p} [x_p \cos(1-j)\phi_p + y_p \sin(1-j)\phi_p] - \alpha_0 \sum_{p=1}^{N_p} [\cos(1-j)\phi_p] - \alpha_1 \sum_{p=1}^{N_p} [\cos \phi_p \cos(1-j)\phi_p + \sin \phi_p \sin(1-j)\phi_p] - \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=2}^N [\alpha_n \cos(1-j)\phi_p \cos(1-n)\phi_p] - \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=2}^N [\alpha_n \sin(1-j)\phi_p \sin(1-n)\phi_p] = 0 \quad (24)$$

Σύμφωνα με την αρχική μέθοδο που αναπτύχθηκε για συμμετρικές τομές, οι γωνίες φ_p προσδιορίζονται από τον υπολογισμό της σειράς των λαθών E_p(φ):

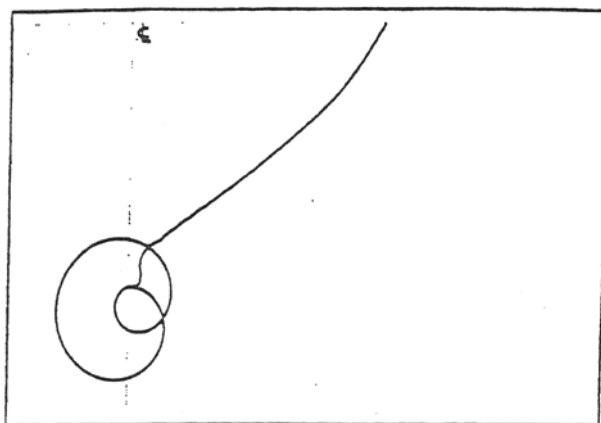
$$E_p(\phi_p - \delta\phi), E_p(\phi_p), \dots, E_p(\phi_p + K\delta\phi) \quad (25)$$

Που σταματά όταν

$$E_p(\phi_p + K\delta\phi) > E_p[\phi_p + (K-1)\delta\phi] \quad (26)$$

Στις σχέσεις (25), (26) το δφ είναι αρχικά ίσο με [φ_{K-1}-φ_{K-2}]/10 και μειώνεται διαδοχικά στο 1/100 της αρχικής του τιμής, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ικανοποιητική προσέγγιση του φ_p. Αυτή η διαδικασία εφαρμόστηκε με επιτυχία για την αναπαράσταση ομαλών και συμμετρικών τομών. Στην περίπτωση όμως ασύμμετρων ή και συμμετρικών τομών που έχουν περιγράμματα με μεγάλες μεταβολές καμπυλότητας μπορούν να προκύψουν τελείως ασυνήθιστες

προσεγγίσεις, σχήμα 30. Διεξοδική μελέτη του προβλήματος έδειξε ότι οι μεγάλες μεταβολές των παραγώγων του $\delta\phi$ σε ευαίσθητες περιοχές του περιγράμματος οδηγούν σε εσφαλμένες εκτιμήσεις του ϕ_p , μολονότι καταλήγουν σε συγκλίνουσες λύσεις, παράγουν τελείως ακανόνιστες μορφές.



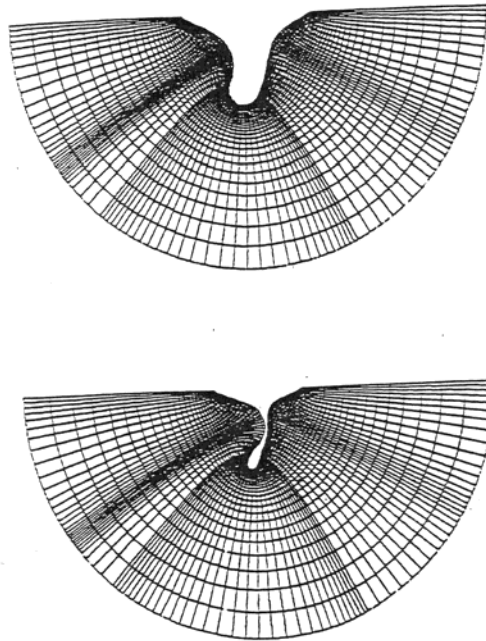
Σχήμα 30: Ασυνεπής απεικόνιση νομέα.

Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα, εφαρμόστηκε μια νέα μέθοδος υπολογισμού των ϕ_p που βασίζεται στην παρεμβολή μεταξύ δεδομένων σημείων. Υποθέτοντας τους συντελεστές a_n γνωστούς, το διάστημα $[-\pi, 0]$ υποδιαιρείται σε μια επαρκή διαμέριση M σημείων που αντιστοιχούν σε γωνίες ϕ_n στο επίπεδο του κύκλου που διαφέρουν κατά $\pi/(M-1)$. Κατόπιν υπολογίζονται αναλυτικά τα σημεία (x_m, y_m) στο επίπεδο της τομής συναρτήσει του (19), καθώς και τα επικαμπύλια ολοκληρώματα S_m .

$$S_m = S_m - 1 + \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (y_m - y_{m-1})^2} \quad (26)$$

Αφού υπολογιστούν τα $S_m(\phi_m)$, οι γωνίες ϕ_p βρίσκονται με γραμμική παρεμβολή ως προς το πραγματικό επικαμπύλιο μήκος S_p που υπολογίζεται όπως στην (26)

συναρτήσει των δεδομένων σημείων του περιγράμματος. Παρόλο που η μέθοδος βασίζεται σε επικαμπύλια ολοκληρώματα που μπορεί να διαφέρουν σημαντικά καθώς ο αριθμός των συντελεστών αυξάνει, η εφαρμογή της οδηγεί σε εκπληκτικά γρήγορες, ευσταθείς και αποτελεσματικές αναπαραστάσεις, απαιτώντας μόνο το 1/10 του υπολογιστικού χρόνου της κλασικής μεθοδολογίας. Επίπλέον, με την εφαρμογή της έγινε εφικτή και η αναπαράσταση τομών με ασυνέχειες ή και διπλών συνεκτικών χωρίων, όπως μία βολβοειδής πρύμνη. Η παραγωγή των ορθογωνίων πλεγμάτων στις τομές αυτές γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις συμμετρικές τομές. Στο σχήμα 31 απεικονίζεται το ορθογώνιο καμπυλόγραμμα πλέγμα σε δύο τομές ενός πλοίου με ασύμμετρη πρύμνη.



Σχήμα 31: Ορθογώνια καμπυλόγραμμα πλέγματα σε ασύμμετρες πρυμναίες τομές.

1.2.4 Ασυνέχειες στην ίσαλο

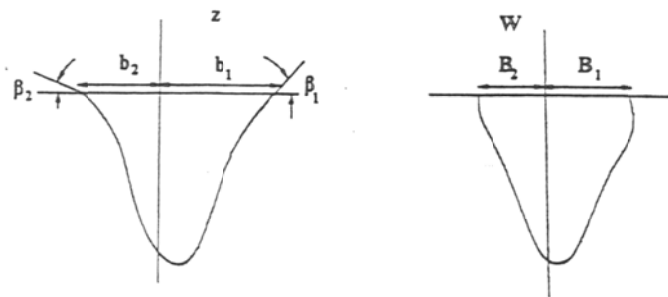
Η μέθοδος του σύμμορφου μετασχηματισμού εγκαρσίων συμμετρικών ή ασύμμετρων τομών που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους βασίζεται στην υπόθεση ότι το περίγραμμα είναι κάθετο στον άξονα Ox που βρίσκεται στο

επίπεδο της ισάλου πλευσης. Σε ένα τυχαίο, όμως, επιπλέον σώμα το περίγραμμα της τομής σχηματίζει τις γωνίες β_1 και β_2 με το ίχνος της ισάλου, σχήμα 32. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται αρχικά ο μετασχηματισμός Karman-Trefftz:

$$\frac{W - B_1}{W + B_2} = \frac{(z - b_1)^{\alpha_1}}{(z - b_2)^{\alpha_2}} \quad (27)$$

που απεικονίζει το μιγαδικό επίπεδο z του πραγματικού νομέα στο επίπεδο W ενός ενδιάμεσου περιγράμματος που είναι κάθετο στην ίσαλο. Στην (27) b_1 και b_2 είναι οι αποστάσεις των ακραίων σημείων του περιγράμματος από τον άξονα αναφοράς Oy στην πραγματική τομή και B_1, B_2 οι αντίστοιχες αποστάσεις στη μετασχηματισμένη. Προφανώς ισχύει η σχέση :

$$\arg(W - B_1) - \arg(W - B_2) = \alpha_1 \arg(z - b_1) - \alpha_2 \arg(z - b_2) \quad (28)$$



Σχήμα 32: Μη ορθογώνιες τομές στην ίσαλο.

Η απαίτηση της καθετότητας του περιγράμματος στα σημεία $(B_1, 0)$ και $(-B_2, 0)$ του επιπέδου W συνεπάγεται στις σχέσεις:

σημείο $(B_1, 0)$

$$\lim[\arg(W - B_1)] = \frac{3\pi}{2}, \quad \lim[\arg(W + B_2)] = 2\pi \quad (29)$$

σημείο $(-B_2, 0)$

$$\lim[\arg(W + B_2)] = \frac{3\pi}{2}, \quad \lim[\arg(W - B_1)] = \pi \quad (30)$$

Στα αντίστοιχα σημεία του πραγματικού περιγράμματος ισχύουν εξ ορισμού οι σχέσεις

σημείο $(b_1, 0)$

$$\lim[\arg(z - b_1)] = \pi + \beta_1, \quad \lim[\arg(z + b_2)] = 2\pi \quad (31)$$

σημείο $(-b_2, 0)$

$$\lim[\arg(z + b_2)] = 2\pi - \beta_2, \quad \lim[\arg(z - b_1)] = \pi \quad (32)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (1.25), (1.26) στην (1.24) προκύπτουν οι τιμές των x_1 , x_2 ως εξής:

$$x_1 = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi + \beta_1 - 2\pi \frac{\beta_1}{\beta_2}}, \quad x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} x_1 \quad (33)$$

Οπότε οι τιμές z προσδιορίζονται από την πεπλεγμένη μορφή (29). Στην ειδική περίπτωση όπου $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2(\pi - \beta_1)} \quad (34)$$

Και αν, επιπλέον, $b_1=b_2=b$ προκύπτει από την (29) η ρητή μορφή

$$Z = b \left(\frac{1+G}{1-G} \right) \quad , \quad G = \left(\frac{W - \frac{b}{d}}{W + \frac{b}{d}} \right)^4 \quad (35)$$

Όπου

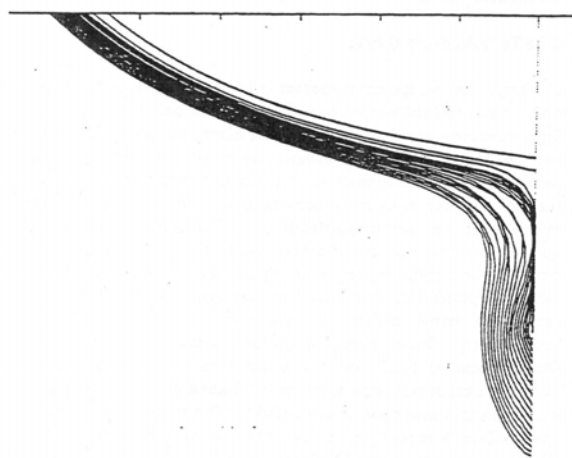
$$d = \frac{2(\pi - \beta)}{\pi} \quad (36)$$

Στην ειδική περίπτωση που ένα συμμετρικό περίγραμμα ως προς τον άξονα Oy τέμνει τον άξονα αυτό σε μη ορθογώνια γωνία, εφαρμόζεται πρώτα ένας μετασχηματισμός (29) που καθετοποιεί το μετασχηματισμένο περίγραμμα στον Oy και στη συνέχεια, ένας δεύτερος που καθετοποιεί το περίγραμμα στην ίσαλο. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο δεύτερος μετασχηματισμός διατηρεί την ορθογωνιότητα που προκύπτει από τον πρώτο. Σε κάθε περίπτωση, ακολουθεί ο υπολογισμός των συντελεστών του γενικού μετασχηματισμού στον διορθωμένο νομέα.

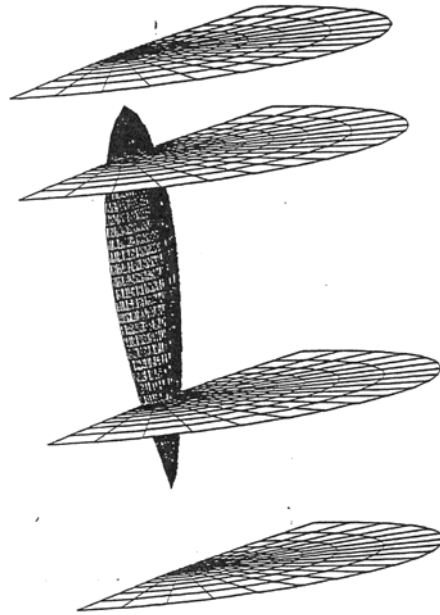
1.2.5 Το τρισδιάστατο πλέγμα

Η γάστρα του πλοίου περιγράφεται συνήθως από ένα μικρό σχετικά αριθμό νομέων, ενώ οι υπολογισμοί του υδροδυναμικού πεδίου απαιτούν πολύ πυκνή διακριτοποίηση κατά το διάμηκες. Χρειάζεται, επομένως, ένας γρήγορος και ακριβής τρόπος παραγωγής ενδιάμεσων τομών. Η μέθοδος του σύμμορφου μετασχηματισμού ικανοποιεί και τις δύο απαιτήσεις. Υπολογίζονται αρχικά (με τις μεθόδους που περιγράφονται στις προηγούμενες παραγράφους) οι συντελεστές του μετασχηματισμού στις δεδομένες τομές. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται ως βάση για τον άμεσο υπολογισμό των συντελεστών σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο νομέα με τη

μέθοδο της κυβικής παρεμβολής. Σε ειδικές περιπτώσεις, όπως είναι η περιοχή των απότομων γεωμετρικών μεταβολών στην πλώρη, η γραμμική παρεμβολή δίνει καλύτερες προσεγγίσεις. Όταν στους αρχικούς νομείς έχει χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός (29) για την καθετότητα στην ίσαλο παρεμβάλλονται αντίστοιχα και οι τιμές των συντελεστών b και d των σχέσεων (35) και (36) και ο τελικός νομέας προκύπτει ως σύνθεση δύο απεικονίσεων. Στο σχήμα 33 απεικονίζεται η παρεμβολή νομέων στην περιοχή της πρύμνης για το πρότυπο, όπου για την αναπαράσταση των αρχικών νομέων απαιτήθηκαν 55 συντελεστές. Είναι αξιοσημείωτο ότι η γεωμετρία της βολβοειδούς πρύμνης περιγράφεται από ένα διπλά συνεκτικό χωρίο. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόστηκε ο υπολογισμός των γωνιών στο επίπεδο του κύκλου όπως περιγράφεται στην παράγραφο 1.3.3 που καταδεικνύει και τις δυνατότητες της μεθόδου. Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών στους ενδιάμεσους νομείς, η παραγωγή των ορθογωνίων πλεγμάτων γίνεται άμεσα από τα αντίστοιχα στον κύκλο. Στο σχήμα 34 φαίνονται ορισμένα χαρακτηριστικά εγκάρσια πλέγματα κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου γύρω από τη γάστρα ενός ιστιοπλοϊκού.



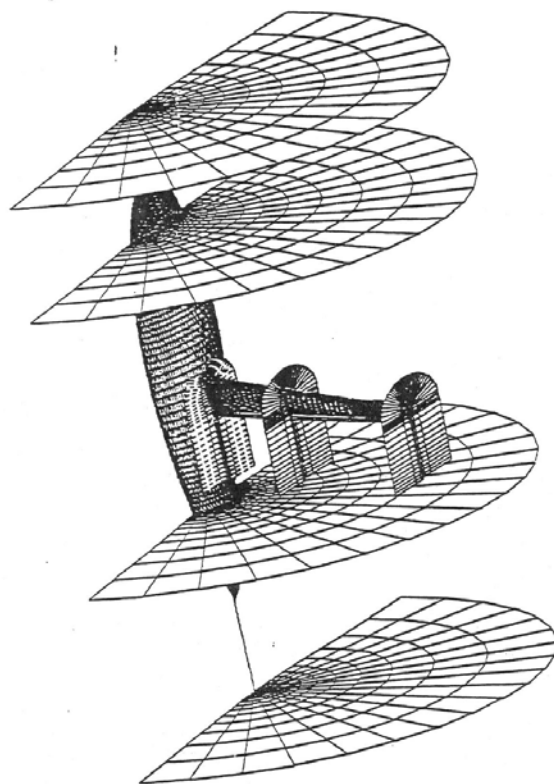
Σχήμα 33: Νομείς παρεμβολής σε βολβοειδή πρύμνη.



Σχήμα 34: Χαρακτηριστικές τομές πλέγματος κατά μήκος της γάστρας ιστιοπλοϊκού.

1.3 Ο συνδυασμός των πλεγμάτων

Οι μέθοδοι παραγωγής πλεγμάτων γύρω από την πτέρυγα και τη γάστρα του ιστιοπλοϊκού συνδυάζονται για τη δημιουργία του συνολικού πλέγματος που χρησιμοποιείται στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Δημιουργούνται δύο υπο-περιοχές, όπως φαίνεται από τα χαρακτηριστικά πλέγματα του σχήματος 35, γύρω από τα οποία υπολογίζονται ανεξάρτητα τα επί μέρους πεδία ροής. Τα υπο-πεδία επικοινωνούν μέσω συνοριακών συνθηκών.



Σχήμα 35: Ο συνδυασμός των πλεγμάτων στα υπο-πεδία.

2.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρεται στο πρώτο κεφάλαιο, η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς, τόσο γύρω από τη γάστρα όσο και γύρω από την καρίνα του ιστιοπλοϊκού, γίνεται σε ένα τρισδιάστατο πλέγμα που είναι ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σε μία ακολουθία καθέτων τομών. Προφανώς στην τρίτη αυτή κατεύθυνση το πλέγμα είναι μη ορθογώνιο, γιατί η γεωμετρία που εξετάζεται μεταβάλλεται ανάλογα με τη μορφή του σώματος. Δημιουργείται έτσι μια διαδοχή από τοπικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα που έχουν κοινό μόνο τον άξονα που είναι κάθετος στις εγκάρσιες τομές.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την τυρβώδη κίνηση του ρευστού (όπως και η αριθμητική ανάλυση που ακολουθεί) διατυπώνονται κατά Euler σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Οι μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν περιέχουν τους όρους καμπυλότητας του συστήματος, ενώ οι μετρικές μετατρέπονται σε επικαμπύλια μήκη στο φυσικό χώρο. Το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας αναλύεται σε τρεις διευθύνσεις που είναι παράλληλες προς τις τοπικές πλεγματικές γραμμές. Οποτεδήποτε η γεωμετρία ενός ρευστομηχανικού πεδίου μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια από μία ακολουθία παράλληλων τομών, αυτός ο τρόπος ανάλυσης προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς την έκφραση των συνεκτικών όρων που υπεισέρχονται στις διακριτοποιημένες εξισώσεις, καθώς και τη σύγκλιση του προβλήματος.

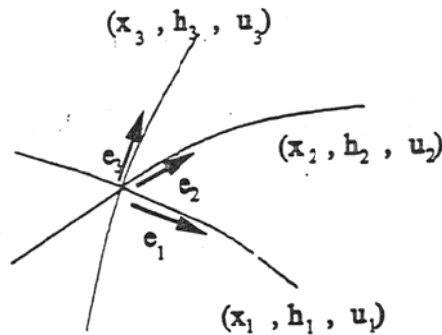
2.2 Οι εξισώσεις μεταφοράς σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Η μόνιμη και τυρβώδης ροή ασυμπίεστου ρευστού γύρω από ένα υδροδυναμικό σώμα περιγράφεται από τις εξισώσεις ορμής και συνέχειας. Σε κάθε τοπικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (x_i, x_j, x_l) με μετρικές (h_i, h_j, h_l) , σχήμα 36, η u_i -εξίσωση ορμής Reynolds (μέση χρονικά Navier-Stokes) γράφεται:

$$\begin{aligned}
C(u_i) = & -\frac{1}{h_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho u_j^2 K_{ji} + \rho u_i^2 K_{ii} - \rho u_i u_j K_{ij} - \rho u_i u_i K_{ii} + (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) K_{ji} + \\
& + (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) K_{ii} + \sigma_{ij} (2K_{ij} + K_{jj}) + \sigma_{ii} (2K_{ii} + K_{jj}) + \\
& + \frac{1}{h_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{1}{h_j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial \sigma_{jj}}{\partial x_i}
\end{aligned} \quad (37)$$

όπου u_i , u_j και u_i είναι οι μέσες τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας και $C(\Phi)$ το σύνολο των όρων μεταφοράς που για μία οποιαδήποτε μεταβλητή Φ αναπτύσσονται ως εξής:

$$C(\Phi) = \frac{\rho}{h_i h_j h_i} \left[\frac{\partial (h_j h_i u_i \Phi)}{\partial x_i} + \frac{\partial (h_i h_i u_i \Phi)}{\partial x_j} + \frac{\partial (h_i h_j u_i \Phi)}{\partial x_i} \right]$$



Σχήμα 36: Οι συνιστώσες του ορθογώνιου καμπυλόγραμμου συστήματος.

Οι εξισώσεις ορμής κατά τις δύο άλλες διευθύνσεις, δηλαδή οι u_j και u_i , μπορούν εύκολα να εξαχθούν με κυκλική εναλλαγή των δεικτών ($i, j, 1$) στην εξίσωση (37). Ο τανυστής των τάσεων σ_{ij} στο δεύτερο μέλος των εξισώσεων (37) συνδέεται γραμμικά με τον τανυστή των "παραμορφώσεων" e_{ij} σύμφωνα με τις εκφράσεις (38):

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= 2\mu_e e_{ii} = 2\mu_e \left[\frac{1}{h_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_j K_{ij} + u_i K_{ii} \right] \\ \sigma_{ij} &= \mu_e e_{ij} = \mu_e \left[\frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) + \frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) \right]\end{aligned}\quad (38)$$

Βασική προϋπόθεση για να ισχύουν οι (38) είναι η παραδοχή της ισότροπης ενεργού συνεκτικότητας μ_e που, στην παρούσα εφαρμογή, υπολογίζεται σύμφωνα με διάφορες παραλλαγές του μοντέλου τύρβης k-ε ως:

$$\mu_e = \mu + \mu_t = \mu + \rho f_\mu C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (39)$$

όπου $C_\mu=0.09$, f_μ σταθερά του εκάστοτε μοντέλου τύρβης, μ είναι η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού, μ_t η τυρβώδης συνεκτικότητα, ρ η πυκνότητα του ρευστού, k η κινητική ενέργεια της τύρβης και ε ο ρυθμός καταστροφής της. Οι πεδιακές τιμές των k και ε υπολογίζονται από την επίλυση δύο επιπλέον διαφορικών εξισώσεων μεταφοράς που γράφονται στην ενιαία μορφή:

$$\begin{aligned}C(\Phi) &= S_\Phi + \\ &+ \frac{1}{h_i h_j h_l} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{h_i h_l}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{h_i h_l}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\Phi} \frac{h_i h_l}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right) \right]\end{aligned}\quad (40)$$

όπου

$$\begin{aligned}\Phi &= k \text{ or } \varepsilon, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \\ S_k &= G - \rho(\varepsilon + D) \\ S_\varepsilon &= 1.44 f_1 G \frac{\varepsilon}{k} - 1.92 \rho f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E\end{aligned}\quad (41)$$

Ο όρος G που συμβολίζει την δημιουργία της κινητικής ενέργειας της τύρβης είναι συνάρτηση της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t και του τανυστή των παραμορφώσεων e_{ij} :

$$G = 2\mu_t \left[e_{ii}^2 + e_{jj}^2 + e_{kk}^2 + \frac{1}{2} (e_{ij}^2 + e_{ji}^2 + e_{ii}^2 + e_{jj}^2 + e_{kk}^2) \right] \quad (42)$$

ενώ οι μεταβλητές D , E , f_1 , f_2 και f_μ δίνονται στον πίνακα 2.1, ανάλογα με το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται.

Πίνακας 2.1
Συναρτήσεις των μοντέλων τύρβης δύο εξισώσεων

	Turbulence Model		
	Standard	Lauder-Sharma [4]	Lam-Bremhorst [4]
f_μ	1	$\exp\left[\frac{-3.4}{(1+R_T/50)^2}\right]$	$\frac{[1-\exp(-0.0165R_y)]^2}{\chi(1+20.5/R_T)}$
f_1	1	1	$1+(0.05/f_\mu)^3$
f_2	1	$1-0.3\exp(-R_T^2)$	$1-\exp(-R_T^2)$
D	0	$2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_2}\right)^2$	0
E	0	$2\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right)^2$	0

Η διεύθυνση x_2 στον πίνακα 2.1 συμβολίζει την κάθετη απόσταση από το στερεό σύνορο, η ταχύτητα U είναι παράλληλη προς το στερεό σύνορο, ενώ οι τοπικοί αριθμοί Reynolds R_T και R_y ορίζονται από τις σχέσεις:

$$R_T = \frac{x_2 \sqrt{k}}{\nu} \quad , \quad R_y = \frac{k^2}{\nu \epsilon} \quad (43)$$

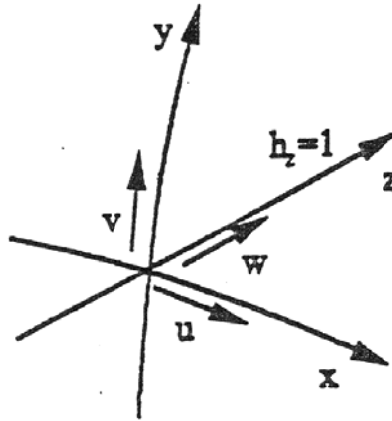
Οι καμπυλότητες K_{ij} που εμφανίζονται στις εξισώσεις ορμής (37) και στις εκφράσεις του τανυστή παραμορφώσεων (38) δίνονται από τις σχέσεις :

$$K_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \quad i \neq j \quad (44)$$

2.3 Το ειδικό τοπικό σύστημα συντεταγμένων

Αν υιοθετηθεί το τοπικό σύστημα $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$, σχήμα 37, στο οποίο ο άξονας z είναι πάντοτε παράλληλος προς μία κατεύθυνση, ενώ οι (x, y) αντιστοιχούν σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες διευθύνσεις, τότε ισχύουν οι εξής απλοποιήσεις:

$$h_z = 1, \quad K_{xz} = K_{yz} = K_{zx} = K_{zy} = 0 \quad (45)$$



Σχήμα 37: Το τοπικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα.

Η εφαρμογή της (45) απλοποιεί σημαντικά την αριθμητική ανάλυση της μεθόδου. Σ' αυτή την περίπτωση η γενική εξίσωση μεταφοράς του μεγέθους Φ γράφεται στο τοπικό σύστημα ως εξής:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u h_y \Phi) + \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u h_x \Phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \Phi) \right] \\ & + \frac{1}{h_x h_y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_x \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_x \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_\Phi = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

όπου h_x και h_y είναι οι μετρικές του καμπυλόγραμμου συστήματος κατά x και y και το μέγεθος Φ μπορεί να είναι μια από τις τρεις συνιστώσες u, v, w της μέσης ταχύτητας, η κινητική ενέργεια της τύρβης k ή η απορρόφησή της ϵ . Οι τρεις πρώτοι όροι αντιστοιχούν στη μεταφορά του Φ από τη μέση ταχύτητα και οι τρεις δεύτεροι στη διάχυση του Φ κατά x, y, z . Ο όρος της πηγής S_Φ στο β' μέλος δίνεται στον

πίνακα 2.2. Στον ίδιο πίνακα δίνονται και οι εκφράσεις του Γ_e . Οι όροι του μοντέλου τύρβης, καθώς και όλης της ανάλυσης που ακολουθεί, αντιστοιχούν στο κλασσικό μοντέλο δύο εξισώσεων k- ϵ , χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα.

Ο όρος G που εμφανίζεται στον όρο S_Φ των εξισώσεων των k και ϵ δίνεται από την επόμενη σχέση, που είναι η απλοποιημένη έκφραση της (43):

$$G = 2\mu_t \left[e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2(e_{xy}^2 - e_{yz}^2 + e_{xz}^2) \right] \quad (47)$$

όπου οι συνιστώσες του τρισδιάστατου τανυστή των παραμορφώσεων αναλύονται στις σχέσεις (48).

Πίνακας 2.2
Όροι πηγής και συντελεστές διάχυσης των εξισώσεων μεταφοράς

Εξίσωση	S_Φ	Γ_Φ
u	$ \begin{aligned} & -\frac{1}{h_x} \frac{\partial p}{\partial x} - \\ & -\frac{\rho u v \partial h_x}{h_x h_y \partial y} + \frac{\rho v^2 \partial h_y}{h_x h_y \partial x} + \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h_y}{h_x} \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2v}{h} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[h_x \mu_t \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\mu_t}{h_x h_y} \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) \frac{\partial h_x}{\partial y} - \\ & - \frac{2\mu_t}{h_x h_y} \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{h_x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} $	μ_t
v	$ \begin{aligned} & -\frac{1}{h_y} \frac{\partial p}{\partial y} - \\ & -\frac{\rho u v \partial h_y}{h_x h_y \partial x} + \frac{\rho u^2 \partial h_x}{h_x h_y \partial y} + \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h_x}{h_y} \mu_t \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2u}{h_x} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t h_y \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\mu_t}{h_x h_y} \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \frac{\partial h_y}{\partial x} - \\ & - \frac{2\mu_t}{h_x h_y} \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{h_y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} $	μ_t
w	$ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{h_x h_y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h_y \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_x \mu_t \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] $	μ_t
k	$G - \rho \epsilon$	$\frac{\mu_t}{G_k}$
ϵ	$C_1 G \frac{\epsilon}{k} - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k}$	$\frac{\mu_t}{G_\epsilon}$

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \left[\frac{1}{h_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right] \\
e_{yy} &= \left[\frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right] \\
e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
e_{xy} &= \left[\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right] \\
e_{xz} &= \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
e_{yz} &= \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{48}$$

2.4 Η ολοκλήρωση της γενικής εξίσωσης μεταφοράς σε όγκους ελέγχου

Η γενική εξίσωση μεταφοράς – διάχυσης – πηγής (46) ολοκληρώνεται στους όγκους ελέγχου κάθε μεταβλητής Φ για το ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων που αντιστοιχεί σε μία εγκάρσια τομή. Οι όροι μεταφοράς και διάχυσης για κάθε μία από τις διευθύνσεις $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \rightarrow (x, y, z)$ του καμπυλόγραμμου συστήματος ολοκληρώνεται ως εξής:

Διεύθυνση x

$$\begin{aligned}
& \int_{V_e} \left[\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u h_y \Phi) - \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_e \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] dV = \\
& = \int_{V_e} \left[\left(\rho u \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{h_x h_y} \right) \bar{i} \right] dV = \\
& = \int_{S_e} \left(\rho u \Phi - \Gamma_e \frac{1}{h_x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \bar{i} \bar{n} ds
\end{aligned} \tag{49a}$$

Διεύθυνση y

$$\begin{aligned}
& \int_{V_e} \left[\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v h_x \Phi) - \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_e \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] dV = \\
& = \int_{V_e} \left[\left(\rho v \Phi - \Gamma_e \frac{1}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \bar{j} \right] dV = \\
& = \int_{S_e} \left(\rho v \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \bar{j} \bar{n} ds
\end{aligned} \tag{49b}$$

Διεύθυνση z

$$\int_{V_p} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\rho w \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] dV = \int_{S_p} \left(\rho w \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \bar{k} \bar{n} ds \quad (49\gamma)$$

Όπου V_p είναι ο στοιχειώδης όγκος ελέγχου της μεταβλητής Φ και S_p η εξωτερική του επιφάνεια, στην οποία ορίζεται το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{n}$ με θετική φορά προς τα έξω. Τα επιφανειακά ολοκληρώματα των (49) υπολογίζονται με το θεώρημα της μέσης τιμής:

$$\begin{aligned} \int_{S_p} \left(\rho u_j \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \frac{\bar{x}_j}{|\bar{x}_j|} \bar{n} ds = & \left[\left(\rho u_j \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} \right) \cdot (EXX \cdot \bar{i} + EXY \cdot \bar{j} + EXZ \cdot \bar{k}) \bar{e} \right]_w^e + \\ & + \left[\left(\rho u_j \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} \right) (EYY \cdot \bar{j} + EYX \cdot \bar{i} + EYZ \cdot \bar{k}) \bar{e} \right]_s^a + \\ & \left[\left(\rho u_j \Phi - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} \right) EZZ \right]_v^d, \quad \bar{e} = \frac{\bar{x}_j}{|\bar{x}_j|}, u_j = u, v, w \end{aligned} \quad (50)$$

Όπου τα εμβαδά $EXX, EXY, EXZ, EYY, EYZ, EZZ$ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} EXX &= \int \bar{i} \cdot \bar{n} ds \\ EXY &= \int \bar{j} \cdot \bar{n} ds \\ EXZ &= \int \bar{k} \cdot \bar{n} ds \\ EYY &= \int \bar{j} \cdot \bar{n} ds \\ EYX &= \int \bar{i} \cdot \bar{n} ds \\ EYZ &= \int \bar{k} \cdot \bar{n} ds \\ EZZ &= \int \bar{k} \cdot \bar{k} ds \end{aligned} \quad (51)$$

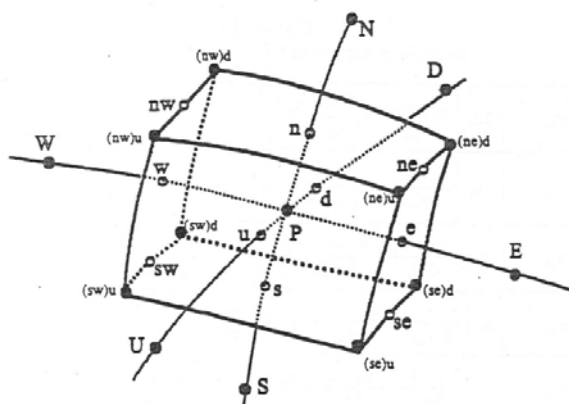
Η μεταβλητή x'_j στις παραπάνω σχέσεις (2.14) ισούται με το μήκος της καμπύλης κατά τη διεύθυνση x_j του καμπυλόγραμμου συστήματος και ισχύει:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_j} = \frac{1}{h_j}, \quad j = x, y, z \quad (52)$$

Οι μέσες τιμές των ολοκληρωμένων όρων μεταφοράς και διάχυσης στο β' μέλος της (50) γράφονται:

$$\overline{\rho u_j \Phi} - \Gamma_e \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} = \rho \overline{u_{jd}} \Phi_d - \left(\Gamma_s \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} \right)_a \quad (53)$$

όπου ο δείκτης a μπορεί να είναι οποιοσδήποτε των (e, w, n, s, v, d) που συμβολίζουν τα σημεία τομής των εδρών του όγκου ελέγχου με τις γραμμές του πλέγματος που διέρχεται από τον κεντρικό κόμβο P , σχήμα 38.



Σχήμα 38: Τα χαρακτηριστικά σημεία στον όγκο ελέγχου του κόμβου P .

Στη σχέση (53) έχει γίνει η παραδοχή ότι η μέση τιμή του όρου της διάχυσης συμπίπτει με την τιμή του όρου στο σημείο α και ότι η μέση τιμή του όρου μεταφοράς είναι ανάλογη της παροχής της μάζας κατά τη διεύθυνση x_j επί την τιμή της Φ στο α . Αν θεωρηθεί πως η μεταβολή οποιουδήποτε μεγέθους μεταξύ των βασικών κόμβων του πλέγματος είναι γραμμική, η παραπάνω παραδοχή τουλάχιστον για τους όγκους ελέγχου των μεταβλητών w , p , k , ε ισοδυναμεί με τη σχέση:

$$\overline{\rho u_j \Phi - \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j}} \cong \overline{\rho u_{j\alpha}} \Phi_\alpha - \overline{\Gamma_\varepsilon}_\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'_j} \right)_\alpha \quad (:) \quad (54)$$

η οποία ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι διάφορες συναρτήσεις είναι περίπου σταθερές σε όλη την επιφάνεια κάθε έδρας του όγκου ελέγχου. Αυτό όμως είναι ανακριβές για τις έδρες που είναι κάθετες στην επιφάνεια του σώματος, γιατί οι κατά το ύψος του οριακού στρώματος μεταβολές είναι μεγάλες. Επομένως απαιτείται επαρκής διακριτοποίηση, τουλάχιστον σ' αυτή τη διεύθυνση.

Στους πίνακες 2.4 ως 2.7 που ακολουθούν, αναλύονται αριθμητικά με προσέγγιση δεύτερης τάξης οι όροι μεταφοράς, διάχυσης και πηγής για τις εξισώσεις των τριών συνιστωσών της ταχύτητας, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάπτυξη στο τοπικό σύστημα και τον πίνακα 2.2. Οι όροι πηγής των χαρακτηριστικών της τύρβης προκύπτουν άμεσα από τα αναπτύγματα των τάσεων στον πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3
Οι αριθμητικές εκφράσεις για τις τυρβώδεις τάσεις

σ_{xx}	$2\mu_e \left[\frac{u_e - u_w}{\delta x'_{ew}} + v_p \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \right]$
σ_{yy}	$2\mu_e \left[\frac{u_n - u_s}{\delta y'_{ns}} + v_p \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x} \right)_p \right]$
σ_{zz}	$2\mu_e \left[\frac{w_d - d_v}{\delta z_{dv}} - \frac{w_e - w_w}{\delta x'_{ew}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_p - \frac{w_n - w_s}{\delta y'_{ns}} \left(\frac{\delta y}{\delta z} \right)_p \right]$
σ_{xy}	$\mu_e \left[\frac{v_e - v_w}{\delta x_{ew}} + \frac{u_n - u_s}{\delta y'_{ns}} - v_p \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} \right) - u_p \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]$
σ_{xz}	$\mu_e \left[\frac{w_e - w_w}{\delta x'_{ew}} + \frac{u_d - u_v}{\delta z_{dv}} - \frac{u_e - u_w}{\delta x'_{ew}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_p - \frac{u_n - u_s}{\delta y'_{ns}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_p \right]$
σ_{yz}	$\mu_e \left[\frac{w_n - w_s}{\delta y'_{ns}} + \frac{v_d - v_v}{\delta z_{dv}} - \frac{v_e - v_w}{\delta x'_{ew}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_p - \frac{v_n - v_s}{\delta y'_{ns}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_p \right]$

Πίνακας 2.4

Η αριθμητική ανάλυση των όρων μεταφοράς και διάχυσης για οποιαδήποτε μεταβλητή

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V -\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u h_y \Phi - \Gamma_\Phi \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV =$ $= \left[\left(\rho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right) EXX \right]_e^w +$ $+ \left[\left(\rho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right) EYX \right]_n^s$	$-\rho \bar{u}_e \Phi_e EXX_e + \overline{\Gamma_\Phi} EXX_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x'_{EP}} +$ $+ \rho \bar{u}_w \Phi_w EXX_w - \overline{\Gamma_\Phi} EXX_w \frac{\Phi_P - \Phi_w}{\delta x'_{PW}} -$ $- \rho \bar{u}_n \Phi_n EYX_n + \overline{\Gamma_\Phi} EYX_n \frac{\Phi_n - \Phi_{nw}}{\delta x'_n} +$ $+ \rho \bar{u}_s \Phi_s EYX_s - \overline{\Gamma_\Phi} EYX_s \frac{\Phi_s - \Phi_{sw}}{\delta x'_s}$
$\int_V -\frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v h_x \Phi - \Gamma_\Phi \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dV =$ $= \left[\left(\rho v \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) EYY \right]_n^s +$ $+ \left[\left(\rho v \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) EXY \right]_e^w$	$-\rho \bar{v}_n \Phi_n EYY_n + \overline{\Gamma_\Phi} EYY_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta y'_{NP}} +$ $+ \rho \bar{v}_s \Phi_s EYY_s - \overline{\Gamma_\Phi} EYY_s \frac{\Phi_P - \Phi_s}{\delta y'_{PS}} -$ $- \rho \bar{v}_e \Phi_e EXY_e + \overline{\Gamma_\Phi} EXY_e \frac{\Phi_e - \Phi_{ew}}{\delta y'_e} +$ $+ \rho \bar{v}_w \Phi_w EXY_w - \overline{\Gamma_\Phi} EXY_w \frac{\Phi_{nw} - \Phi_{sw}}{\delta y'_w}$

Πίνακας 2.4 (Συνέχεια)

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V -\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho w \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dV =$ $\left[\overline{\left(\rho w \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) EZZ} \right]_d^u +$ $\left[\overline{\left(\rho w \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) EXZ} \right]_e^w +$ $\left[\overline{\left(\rho w \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) EYZ} \right]_n^s =$ $= \left[\overline{\rho w \Phi EZZ} \right]_d^u + \left[\overline{\rho w \Phi EXZ} \right]_e^w +$ $+ \left[\overline{\rho w \Phi EYZ} \right]_n^s +$ $\left[EZZ \Gamma_\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_a^d +$ $- \left[EXZ \Gamma_\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_e^w +$ $+ \left[EYZ \Gamma_\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_n^s$	$- (\bar{\rho} \bar{w}_d EZZ_d) \Phi_d + (\bar{\rho} \bar{w}_u EZZ_u) \Phi_u$ $- (\bar{\rho} \bar{w}_e EXZ_e) \Phi_e + (\bar{\rho} \bar{w}_w EXZ_w) \Phi_w$ $- (\bar{\rho} \bar{w}_n EYZ_n) \Phi_n + (\bar{\rho} \bar{w}_s EYZ_s) \Phi_s$ $+ EZZ_d \bar{\Gamma}_\Phi \left[\frac{\Phi_d - \Phi_p}{\delta z_{pD}} - \frac{\Phi_{ds} - \Phi_{pw}}{\delta x'_{(cw)_d}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_d \right.$ $\left. - \frac{\Phi_{dn} - \Phi_{ds}}{\delta y'_{(ns)_d}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_d \right]$ $- EZZ_u \bar{\Gamma}_\Phi \left[\frac{\Phi_p - \Phi_u}{\delta z_{pu}} - \frac{\Phi_{us} - \Phi_{pw}}{\delta x'_{(cw)_u}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_u \right.$ $\left. - \frac{\Phi_{un} - \Phi_{us}}{\delta y'_{(ns)_u}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_u \right]$ $+ EXZ_e \bar{\Gamma}_\Phi \left[\frac{\Phi_{ds} - \Phi_{us}}{\delta z_{du}} - \frac{\Phi_e - \Phi_p}{\delta x'_{ep}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_e \right.$ $\left. - \frac{\Phi_{ne} - \Phi_{us}}{\delta y'_e} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_e \right]$ $- EXZ_w \bar{\Gamma}_\Phi \left[\frac{\Phi_{dw} - \Phi_{uw}}{\delta z_{dw}} - \frac{\Phi_p - \Phi_w}{\delta x'_{pw}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_w \right.$ $\left. - \frac{\Phi_{nw} - \Phi_{pw}}{\delta y'_w} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_w \right]$ $+ EYZ_n \bar{\Gamma}_\Phi \left[\frac{\Phi_{dn} - \Phi_{un}}{\delta z_{dn}} - \frac{\Phi_{ne} - \Phi_{nw}}{\delta x'_n} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_n \right.$ $\left. - \frac{\Phi_{un} - \Phi_p}{\delta y'_{np}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_n \right]$ $- EYZ_s \bar{\Gamma}_\Phi \left[\frac{\Phi_{ds} - \Phi_{us}}{\delta z_{ds}} - \frac{\Phi_{se} - \Phi_{us}}{\delta x'_s} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_s \right.$ $\left. - \frac{\Phi_p - \Phi_s}{\delta y'_{ps}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_s \right]$

Πίνακας 2.5

Η αριθμητική ανάλυση του όρου πηγής για τη μεταβλητή u

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h_y}{h_x} \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2v}{h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] dV$ $= \left[EXX \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + 2v \frac{1}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]_w^e +$ $+ \left[EYX \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + 2v \frac{1}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]_i^n$	$\bar{\mu}_e EXX_e \left[\frac{u_E - u_P}{\delta x'_{EP}} + 2\bar{v}_e \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_e \right] -$ $- \bar{\mu}_e EXX_w \left[\frac{u_P - u_W}{\delta x'_{PW}} + 2\bar{v}_w \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_w \right]$ $+ \bar{\mu}_e EYX_n \left[\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\delta x'_n} + 2\bar{v}_n \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_n \right]$ $- \bar{\mu}_e EYX_i \left[\frac{u_{se} - u_{sw}}{\delta x'_i} + 2\bar{v}_i \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_i \right]$
$\int_V \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_e h_x \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u h_x}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] dV$ $= \left[EYY \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{v}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} - \frac{u}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]_i^n +$ $+ \left[EXY \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{v}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} - \frac{u}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]_w^e$	$\bar{\mu}_e EYY_n \left[\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\delta x'_n} - \bar{u}_n \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_n \right] -$ $- \bar{u}_n \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_n - \bar{\mu}_e EYY_i \left[\frac{v_{se} - v_{sw}}{\delta x'_i} -$ $- \bar{v}_i \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_i - \bar{u}_i \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_i \right] +$ $\bar{\mu}_e EXY_e \left[\frac{u_E - u_P}{\delta x'_{EP}} -$ $- \bar{v}_e \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_e - \bar{u}_e \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_e \right] -$ $- \bar{\mu}_e EXY_w \left[\frac{u_P - u_W}{\delta x'_{PW}} - \bar{v}_w \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_w -$ $- \bar{u}_w \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_w \right]$

Πίνακας 2.5 (Συνέχεια)

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{h_x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV =$ $= \left[EZZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \right) \right]_U^d +$ $+ \left[EYZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \right) \right]_s^n + \left[EXZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \right) \right]_w^e$	$\bar{\mu}_{e_d} EZZ_d \frac{w_{de} - w_{dw}}{\delta x'_{ewd}} - \bar{\mu}_{e_u} EZZ_u \frac{w_{ue} - w_{uw}}{\delta x'_{euu}} +$ $+ \bar{\mu}_{e_s} EYZ_s \frac{w_{ne} - w_{nw}}{\delta x'_{ns}} - \bar{\mu}_{e_n} EYZ_n \frac{w_{se} - w_{sw}}{\delta x'_{s}} +$ $+ \bar{\mu}_{e_w} EXZ_e \frac{w_{\bar{e}} - w_{\bar{p}}}{\delta x'_{ep}} - \bar{\mu}_{e_w} EXZ_w \frac{w_{\bar{p}} - w_{\bar{w}}}{\delta x'_{pw}} +$
$\int_V -\frac{1}{h_x} \frac{\partial p}{\partial x} dV$	$-\frac{p_e - p_w}{\delta x'_{ew}} \delta V_p$
$\int_V \left[-\frac{\rho u v}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\rho v^2}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right] dV$	$-\rho u_p v_p \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \delta V_p$ $+ \rho v_p^2 \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_p \delta V_p$
$\int_V \mu_e \left[\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right] \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} dV$	$\mu_{e_p} \left[\frac{v_e - v_w}{\delta x'_{ew}} + \frac{u_n - u_s}{\delta y'_{ns}} - u_p \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_p - \right.$ $\left. - u_p \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \right] \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \delta V_p$
$\int_V -\frac{2\mu_e}{h_x h_y} \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) \frac{\partial h_y}{\partial x} dV$	$-2\mu_{e_p} \left[u_p \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} \right)_p + \frac{v_s - u_s}{\delta y'_{ns}} \right]$ $\left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_p \delta V_p$

Πίνακας 2.6

Η αριθμητική ανάλυση του όρου πηγής για τη μεταβλητή v

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2u}{h_x} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) dV =$ $= \left[EYY \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{2u}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} \right) \right]_s^n +$ $+ \left[EXY \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{2u}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} \right) \right]_w^e$	$\bar{\mu}_{e,n} EYY_n \left[\frac{v_n - v_p}{\delta y'_{np}} + 2\bar{u}_n \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_n \right] -$ $\bar{\mu}_{e,s} EYY_s \left[\frac{v_p - v_s}{\delta y'_{ps}} + 2\bar{u}_s \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_s \right] +$ $\bar{\mu}_{e,e} EXY_e \left[\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta y'_e} + 2\bar{u}_e \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_e \right] -$ $\bar{\mu}_{e,w} EXY_w \left[\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta y'_w} + 2\bar{u}_w \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_w \right]$
$\int_V \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left[h_y \mu_e \left(\frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] dV =$ $\left[EXX \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial y'} - \frac{v}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} - \frac{u}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]_w^e +$ $+ \left[EYX \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial y'} - \frac{v}{h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x'} - \frac{u}{h_x} \frac{\partial h_x}{\partial y'} \right) \right]_s^n$	$\bar{\mu}_{e,e} EXX_e \left[\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta y'_e} - \bar{v}_e \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_e - \right.$ $\left. - \bar{u}_e \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_e \right] -$ $- \bar{\mu}_{e,w} EXX_w \left[\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta y'_w} - \bar{v}_w \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_w - \right.$ $\left. - \bar{u}_w \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_w \right] -$ $+ \bar{\mu}_{e,n} EYX_n \left[\frac{u_n - u_p}{\delta y'_{np}} - \bar{v}_n \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_n - \right.$ $\left. - \bar{u}_n \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_n \right] -$ $- \bar{\mu}_{e,s} EYX_s \left[\frac{u_p - u_s}{\delta y'_{ps}} - \bar{v}_s \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_s - \right.$ $\left. - \bar{u}_s \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_s \right]$

Πίνακας 2.6 (Συνέχεια)

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_e}{h_y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dV =$ $\left[EZZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial y'} \right) \right]_u^d +$ $\left[EYZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial y'} \right) \right]_i^n + \left[EXZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial y'} \right) \right]_w^e$	$\bar{\mu}_e EZZ_d \frac{w_{dn} - w_{ds}}{\delta y'_{nsd}} - \bar{\mu}_e EZZ_v \frac{w_{vn} - w_{vs}}{\delta y'_{nsv}}$ $+ \bar{\mu}_e EXZ_e \frac{w_{ne} - w_{se}}{\delta y'_e} - \bar{\mu}_e EXZ_w \frac{w_{nw} - w_{sw}}{\delta y'_w}$ $+ \bar{\mu}_e EYZ_n \frac{w_{Nn} - w_{Pp}}{\delta y'_{NP}} - \bar{\mu}_e EYZ_s \frac{w_{Ps} - w_{Is}}{\delta y'_{sp}}$
$\int_V -\frac{1}{h_y} \frac{\partial p}{\partial y} dV$	$-\frac{p_n - p_s}{\delta y'_{ns}} \delta V_p$
$\int_V \left[-\frac{\rho u v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{\rho u^2}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right] dV$	$-\rho u_p v_p \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta x'} \right)_p \delta V_p$ $+ \rho u_p^2 \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \delta V_p$
$\int_V \mu_e \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{u}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} dV$	$-2\mu_e \left[\frac{v_e - v_w}{\delta x'_{ew}} + \frac{u_n - u_s}{\delta y'_{ns}} - v_p \left(\frac{1}{h_y} \frac{\delta h_y}{\delta y'} \right) - u_p \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right) \right] \cdot \frac{1}{h_x} \left(\frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \delta V_p$
$\int_V -\frac{2\mu_e}{h_x h_y} \left(\frac{1}{h_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \frac{\partial h_x}{\partial y} dV$	$-2\mu_e \left[\frac{u_e - u_w}{\delta x'_{ew}} + v_p \left(\frac{1}{h_x} \frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \right] \cdot \frac{1}{h_x} \left(\frac{\delta h_x}{\delta y'} \right)_p \delta V_p$

Πίνακας 2.7
 Η αριθμητική ανάλυση του όρου πηγής για τη μεταβλητή w

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left(h_y \mu_e \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV =$ $\left[EXX_{\mu_e} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_w^e$ $+ \left[EYX_{\mu_e} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_s^n$	$EXX_{\mu_e} \bar{\mu}_e \left[\frac{u_{de} - u_{ue}}{\delta z_{du}} - \frac{u_E - u_P}{\delta x'_{EP}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_e \right.$ $\left. - \frac{u_{ne} - u_{ue}}{\delta y'_e} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_e \right]$ $- EXX_{\mu_e} \bar{\mu}_e \left[\frac{u_{dw} - u_{uw}}{\delta z_{dw}} - \frac{u_P - u_W}{\delta x'_{PW}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_w \right.$ $\left. - \frac{u_{nw} - u_{uw}}{\delta y'_w} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_w \right]$ $+ EYX_{\mu_e} \bar{\mu}_e \left[\frac{u_{dn} - u_{un}}{\delta z_{dn}} - \frac{u_{ne} - u_{nw}}{\delta x'_n} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_n \right.$ $\left. - \frac{u_N - u_P}{\delta y'_{NP}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_n \right]$ $- EYX_{\mu_e} \bar{\mu}_e \left[\frac{u_{ds} - u_{us}}{\delta z_{ds}} - \frac{u_{se} - u_{sw}}{\delta x'_s} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_s \right.$ $\left. - \frac{u_P - u_S}{\delta y'_{PS}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_s \right]$

Πίνακας 2.7 (Συνέχεια)

Ολοκληρωμένος όρος	Αριθμητική ανάλυση $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$
$\int_V \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(h_y \mu_e \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV =$ $\left[EYY \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial v}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial v}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_n^n$ $+ \left[EXY \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial v}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial v}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_w^e$	$EYY_n \bar{\mu}_e \left[\frac{v_{dn} - v_{un}}{\delta z_{du}} - \frac{v_{ne} - v_{nw}}{\delta x'_n} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_n \right.$ $\left. - \frac{v_n - v_p}{\delta y'_{NP}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_n \right]$ $- EYY_e \bar{\mu}_e \left[\frac{v_{de} - v_{ue}}{\delta z_{du}} - \frac{v_{se} - v_{sw}}{\delta x'_e} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_e \right.$ $\left. - \frac{v_p - v_s}{\delta y'_{PS}} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_e \right]$ $+ EXY_e \bar{\mu}_e \left[\frac{v_{de} - v_{ue}}{\delta z_{dv}} - \frac{v_E - v_P}{\delta x'_{EP}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_e \right.$ $\left. - \frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta y'_e} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_e \right] -$ $EXY_w \bar{\mu}_e \left[\frac{v_{dw} - v_{uw}}{\delta z_{dv}} - \frac{v_P - v_W}{\delta x'_{PW}} \left(\frac{\delta x'}{\delta z} \right)_w \right.$ $\left. - \frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta y'_w} \left(\frac{\delta y'}{\delta z} \right)_w \right]$
$\int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV =$ $\left[EZZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial w}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial w}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_v^d$ $+ \left[EXZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial w}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial w}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_w^e$ $+ \left[EYZ \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\partial w}{\partial x'} \frac{dx'}{dz} - \frac{\partial w}{\partial y'} \frac{dy'}{dz} \right) \right]_i^n$	(όπως στον πίνακα 2.4)
$\int_V \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) dV$	$- [\bar{p}_d EZZ_d - \bar{p}_v EZZ_v] -$ $- [\bar{p}_n EYZ_n - \bar{p}_i EYZ_i] -$ $- [\bar{p}_e EXZ_e - \bar{p}_w EXZ_w]$

2.5 Οι τελικές αλγεβρικές εξισώσεις

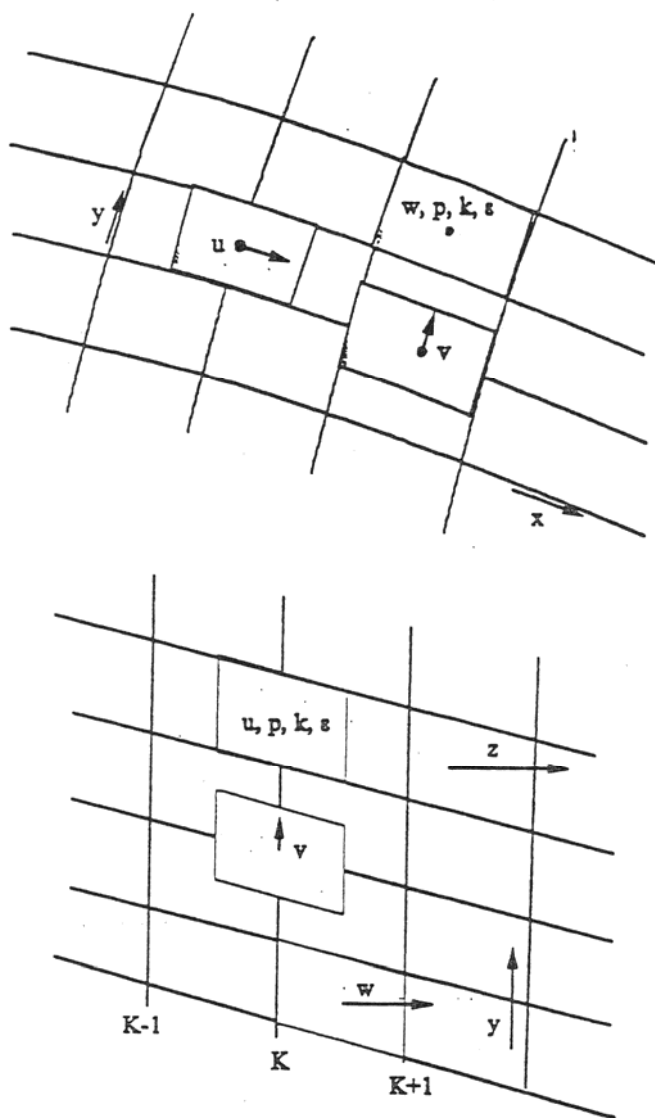
Οι εξισώσεις ορμής και μοντέλου τύρβης ολοκληρώνονται σε στοιχειώδεις όγκους που αντιστοιχούν σε ένα μετατοπισμένο κομβικό σύστημα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Το πλεονέκτημα αυτού του συστήματος είναι ότι συνδέει άμεσα τις μεταβολές της ταχύτητας με αντίστοιχες μεταβολές της πίεσης με μία διαδικασία που είναι απόλυτα συνεπής ως προς τη διακριτοποίηση των εξισώσεων και ταυτόχρονα διευκολύνει τη σύγκλιση του πεδίου πιέσεων. Στη συνέχεια οι διαφορικές εξισώσεις διακριτοποιούνται με τον τρόπο που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο, όπου οι συμβολισμοί αναφέρονται στον ειδικό όγκο ελέγχου κάθε μεταβλητής. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία προκύπτουν συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_D \Phi_D + A_U \Phi_U + S_\Phi \quad (55)$$

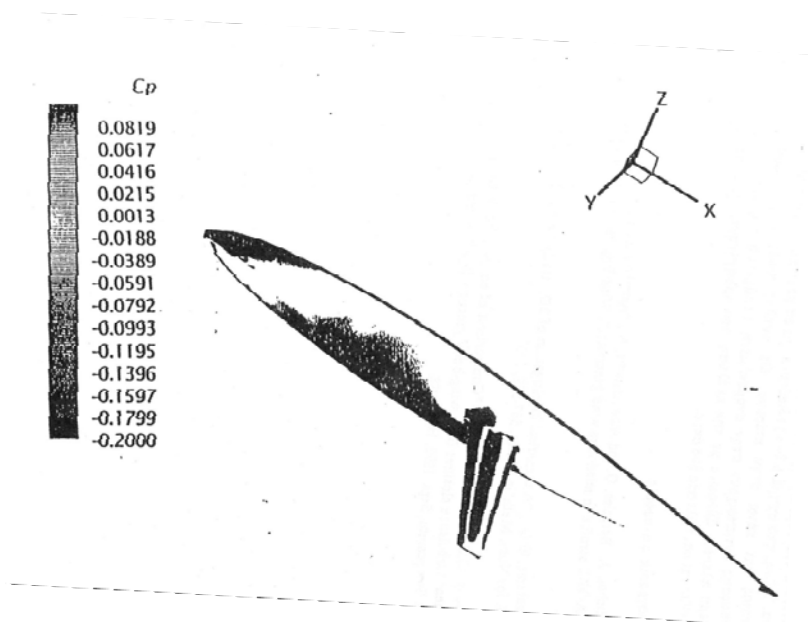
όπου Φ είναι οποιοδήποτε βαθμωτό μέγεθος (u, v, w, p, k, ϵ) και N, S, E, W, D, U οι έξι γειτονικοί κόμβοι του βασικού P , ο οποίος αντιστοιχεί στον εξεταζόμενο όγκο ελέγχου, σχήμα 37. Οι όροι $A_i, i=N, S, E, W, D, U$ περιλαμβάνουν τους ολοκληρωμένους όρους μεταφοράς και διάχυσης που ενυπάρχουν στις αρχικές διαφορικές εξισώσεις, ενώ ο A_P περιλαμβάνει το άθροισμα των A_i , καθώς και ορισμένους θετικούς όρους που εκφράζονται ως γινόμενα του Φ_P . Οι όροι διάχυσης προσεγγίζονται με πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης ακρίβειας (κεντρικές διαφορές), ενώ οι όροι μεταφοράς με κεντρικό ή άναντες σχήμα διαφορών πρώτης τάξης, έτσι ώστε να ικανοποιείται πάντοτε η θεμελιώδης σχέση:

$$|A_P| \geq \sum_i |A_i| \quad (56)$$

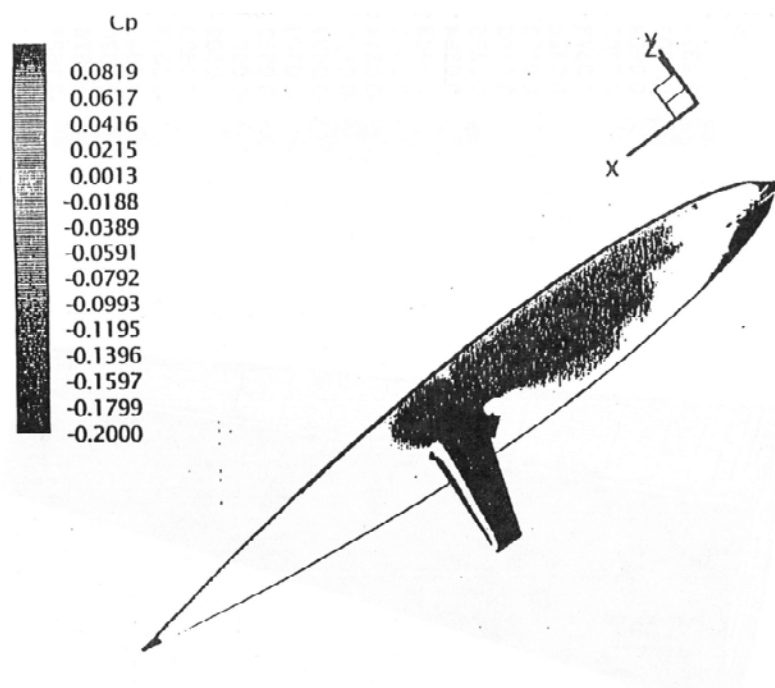
που εκφράζει την ικανή συνθήκη ώστε ένα συντηρητικό και φραγμένο σχήμα διαφορών να εξασφαλίζει την σύγκλιση των ισχυρά μη γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων (50). Προφανώς τα συστήματα είναι μη γραμμικά, γιατί τόσο οι συντελεστές όσο και οι όροι πηγής είναι συναρτήσεις των αγνώστων Φ .



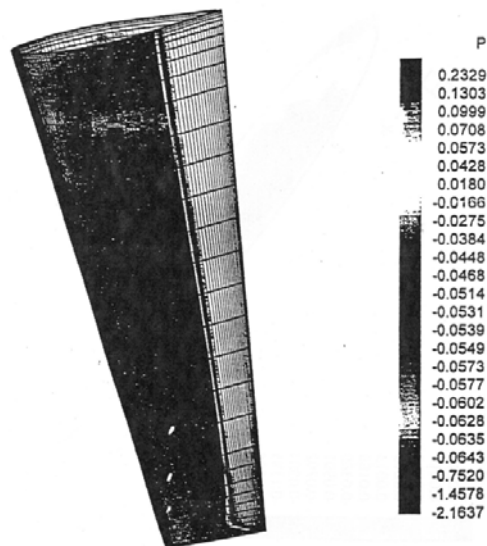
Σχήμα 38: Οι μετατοπισμένοι υπολογιστικοί όγκοι στα επίπεδα (x,y) και (y,z) .



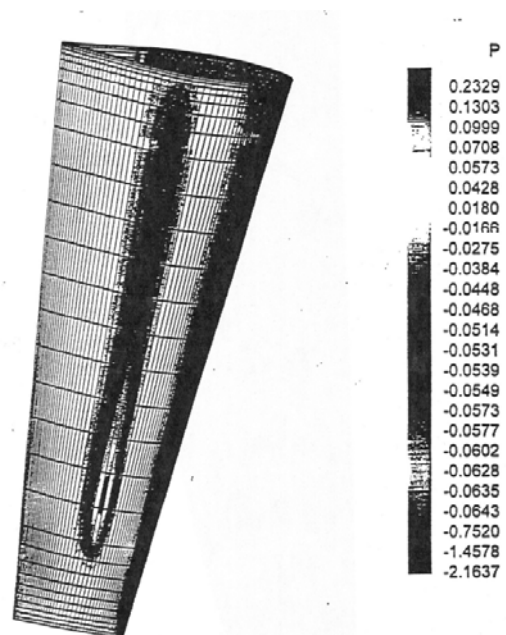
Σχήμα 39: Το επιφανειακό πεδίο πιέσεων: προσήνεμη πλευρά (πρόσπτωση).



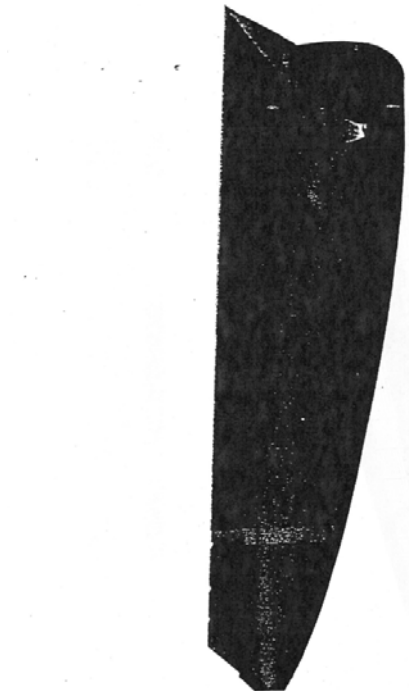
Σχήμα 40: Το επιφανειακό πεδίο πιέσεων: Υπήνεμη πλευρά (υποπίεση).



Σχήμα 41: Το επιφανειακό πεδίο πιέσεων στην καρίνα. Υπήνεμη πλευρά (υποπίεση).



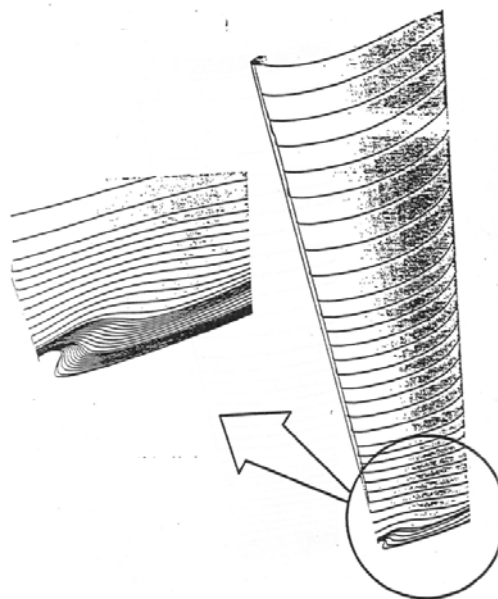
Σχήμα 42: Το επιφανειακό πεδίο πιέσεων στην καρίνα. Προσήνεμη πλευρά (πίεση).



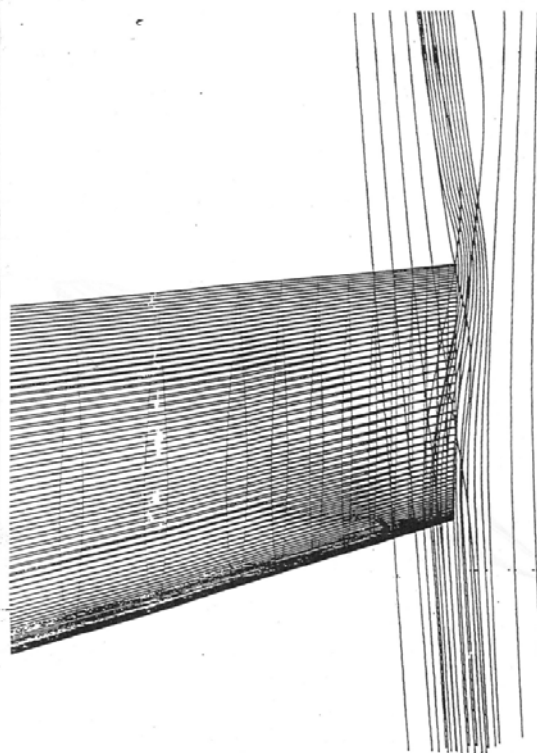
Σχήμα 43: Επιφάνειες σταθερής πίεσης γύρω από την καρίνα.



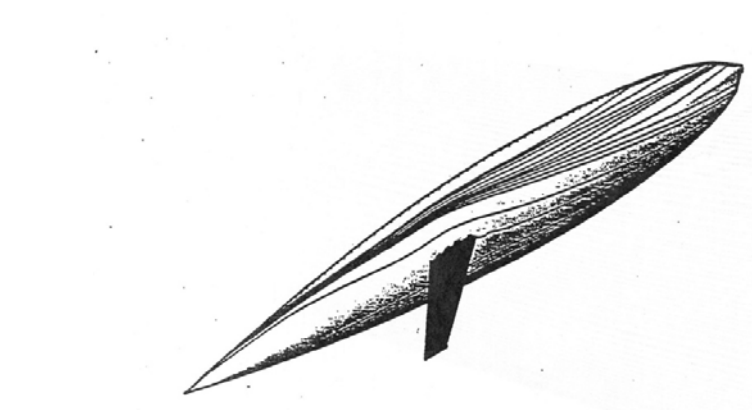
Σχήμα 44: Γραμμές ροής στην υπήνεμη επιφάνεια της καρίνας.



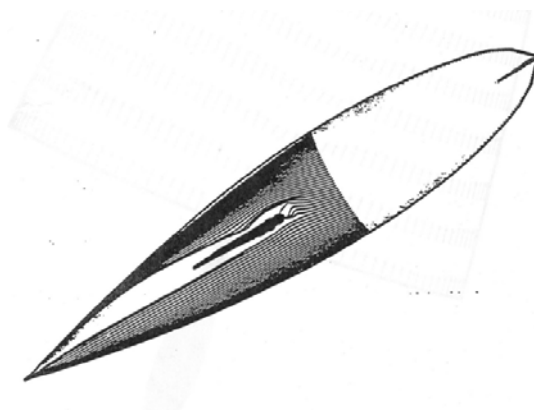
Σχήμα 45: Γραμμές ροής στην προσήνεμη επιφάνεια της καρίνας.



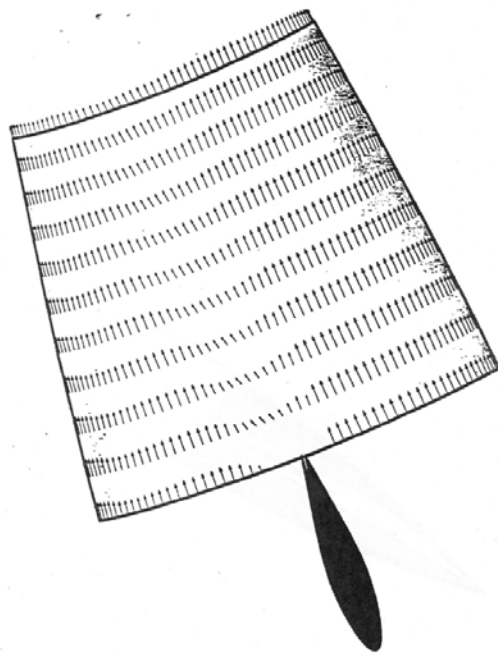
Σχήμα 46: Ο σχηματισμός στροβίλου στο ακροπτερύγιο.



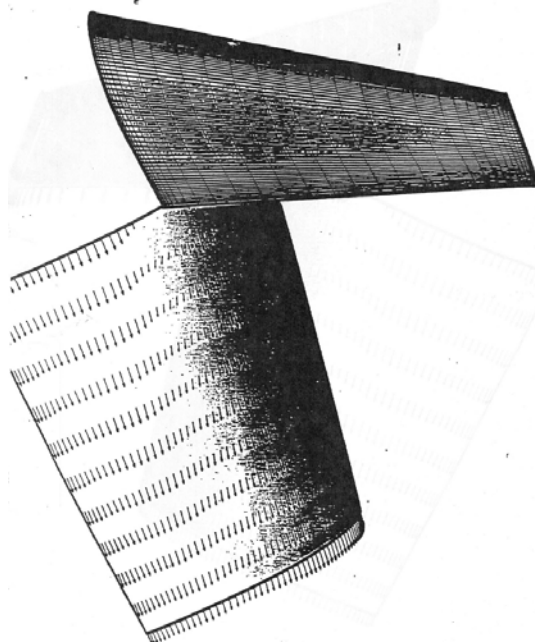
Σχήμα 47: Γραμμές ροής στην επιφάνεια της γάστρας (πρόσπτωση 7°).



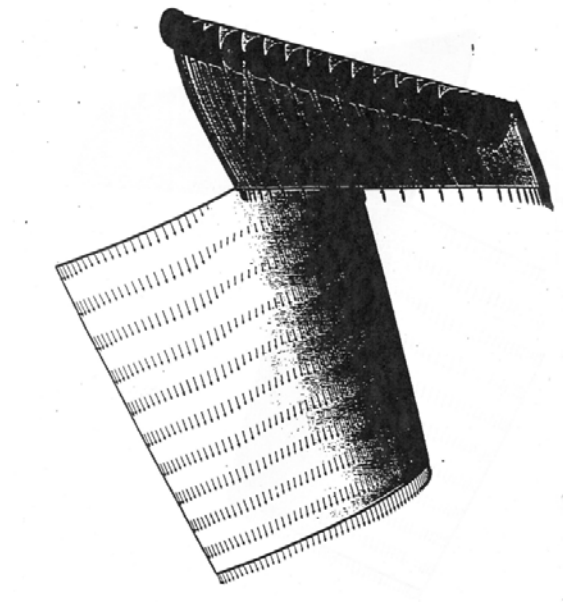
Σχήμα 48: Γραμμές ροής στην επιφάνεια της γάστρας (πρόσπτωση 7°).



Σχήμα 49: Διανύσματα επιφανειακών ταχυτήτων γάστρας στον ομόρρου της καρίνας.



Σχήμα 50: Διανύσματα επιφανειακών ταχυτήτων γάστρας στον ομόρρου της καρίνας.



***Σχήμα 51:** Διανύσματα επιφανειακών ταχυτήτων γάστρας και καρίνας.*

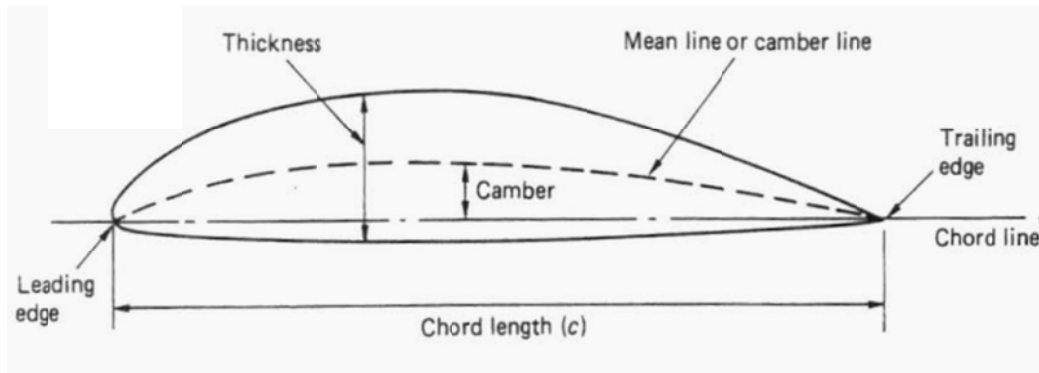
B. ΡΟΕΣ ΜΕ ΑΝΩΣΗ

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΩΣΗΣ

1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΥΔΡΟΤΟΜΩΝ

Στις αρχές της δεκαετίας του 30' η NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) στις ΗΠΑ – η οποία σήμερα είναι γνωστή ως NASA – πραγματοποίησε μια σειρά από πειράματα με αεροτομές, η γεωμετρία των οποίων αναπτύχθηκε με βάση τις ανάγκες της εποχής στην αεροπορική βιομηχανία. Μερικές από αυτές τις αεροτομές έχουν χρησιμοποιηθεί και σε ναυτικές έλικες από κατασκευαστές σε όλον τον κόσμο. Γι' αυτόν τον λόγο η ακόλουθη συζήτηση για τη γεωμετρία αεροτομών θα έχει ως βάση τους ορισμούς της NACA, τονίζοντας όμως ότι σήμερα μερικοί σχεδιαστές αρχίζουν να δημιουργούν τις δικές τους μορφές υδροτομών προκειμένου να ανταποκριθούν σε συγκεκριμένες απαιτήσεις σχεδίασης ελίκων και ιδιαίτερα σχετικά με το φαινόμενο της σπηλαίωσης.

Στο σχήμα 52 φαίνονται τα κύρια γεωμετρικά μεγέθη μιας υδροτομής. Η *μέση γραμμή* ή *γραμμή κυρτότητας* (camber line) είναι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων σημείων (μετρώντας κάθετα στη γραμμή κυρτότητας) μεταξύ της άνω και κάτω επιφάνειας. Τα άκρα της γραμμής κυρτότητας λέγονται *ακμές πρόσπτωσης* και *εκφυγής* της αεροτομής και η ευθεία γραμμή που τις ενώνει λέγεται *χορδή* (chord line). Η απόσταση μεταξύ των ακμών πρόσπτωσης και εκφυγής λέγεται *μήκος χορδής* (chord length) της τομής. Η *κυρτότητα* (camber) της υδροτομής είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ της μέσης γραμμής κυρτότητας και της χορδής, μετρημένη κάθετα στη χορδή. Το *πάχος* (thickness) της αεροτομής είναι η απόσταση μεταξύ της άνω και κάτω όψης, επίσης μετρημένη κάθετα στην χορδή. Οι ακμές πρόσπτωσης είναι συνήθως κυκλικές, με μια αντίστοιχη *ακτίνα ακμής πρόσπτωσης* (leading edge radius) που ορίζεται με κέντρο ένα σημείο πάνω στη γραμμή κυρτότητας. Για τις ναυτικές έλικες οι πρακτικές για τον ορισμό της ακμής εκφυγής διαφέρουν σημαντικά από κατασκευαστή σε κατασκευαστή και χρειάζεται προσοχή για την πρακτική που εφαρμόζεται στην εκάστοτε έλικα.



Σχήμα 52: Τα κύρια γεωμετρικά μεγέθη μιας υδροτομής.

Η διαδικασία συνδυασμού μιας επιλεγμένης γραμμής κυρτότητας με μια μορφή πάχους για δεδομένο μήκος χορδής c προκειμένου να σχεδιαστεί η υδροτομή φαίνεται στο σχήμα 53. Στο σχήμα φαίνεται μόνο η ακμή πρόσπτωσης για λόγους ευκρίνειας, αλλά η ακμή εκφυγής είναι αντίστοιχη. Η γραμμή κυρτότητας ορίζεται από τις συντεταγμένες (y_c), οι οποίες μετρώνται κάθετα στην χορδή. Οι άνω (upper) και κάτω (lower) επιφάνειες ορίζονται από τις συντεταγμένες y_t της επιλεγμένης συμμετρικής κατανομής πάχους και μετρώνται κάθετα στη γραμμή κυρτότητας. Έτσι ένα σημείο P_u της άνω επιφάνειας της υδροτομής ορίζεται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} x_u &= x_c - y_t \sin \psi \\ y_u &= y_c + y_t \cos \psi \end{aligned} \right\} (57\alpha)$$

όπου ψ είναι η κλίση (slope) της γραμμής κυρτότητας στην αδιάστατη χορδική θέση x_c .

Όμοια, για ένα σημείο P_L στην κάτω επιφάνεια της υδροτομής ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} x_l &= x_c + y_t \sin \psi \\ y_l &= y_c - y_t \cos \psi \end{aligned} \right\} (57\beta)$$

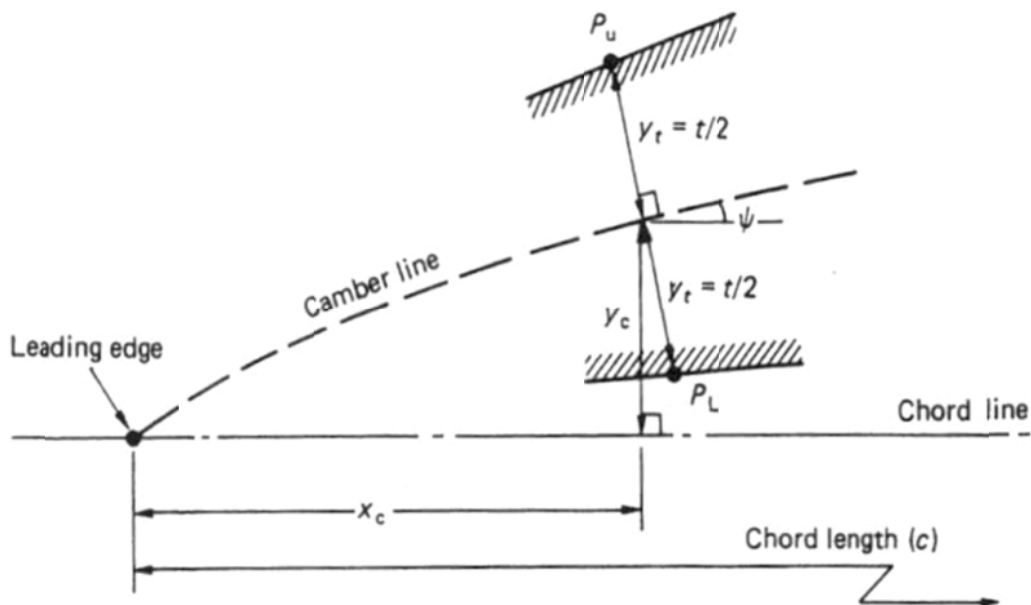
Οι εξισώσεις (57α,β) ορίζουν τα πραγματικά σημεία της επιφάνειας της υδροτομής, αλλά επειδή το y_c/c είναι συνήθως της τάξης του 0.02-0.06 για τις ναυτικές έλικες, συνεπάγεται ότι η τιμή του ψ είναι μικρή. Αυτό σημαίνει ότι $\sin \psi \rightarrow 0$ και $\cos \psi \rightarrow 1$. Έτσι είναι δυνατό να γίνει η προσέγγιση:

$$\left. \begin{array}{l} x_u = x_c \\ y_u = y_c + y_t \end{array} \right\}, (58)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_l = x_c \\ y_l = y_c - y_t \end{array} \right\}$$

όπου $y_t = \frac{t(x_c)}{2}$ (δηλαδή το τοπικό ημι-πάχος της τομής). Η προσέγγιση της εξίσωσης

(58) χρησιμοποιείται ευρέως. Τα λάθη στα οποία οδηγεί αυτή η προσέγγιση είναι κατά κανόνα μικρά, συνήθως μικρότερα του 0.5 mm και σίγουρα μέσα στις συνήθεις κατασκευαστικές ανοχές. Εξαίρεση αποτελεί η περιοχή του χείλους πρόσπτωσης όταν η έλικα είναι ειδικών προδιαγραφών για θόρυβο και σπηλαίωση.



Σχήμα 53: Διαδικασία σχεδίασης υδροτομής για δεδομένη κατανομή κυρτότητας και πάχους.

Το κέντρο της ακτίνας της ακμής πρόσπτωσης βρίσκεται σύμφωνα με την NACA ως εξής: Χαράζεται μια γραμμή εφαπτόμενη στην γραμμή κυρτότητας στη γειτονιά της

ακμής πρόσπτωσης (συχνά λαμβάνεται η κλίση σε ένα σημείο $x_c=0.005$, καθώς η κλίση ακριβώς στην ακμή πρόσπτωσης είναι θεωρητικά άπειρη – π.χ περίπτωση χρήσης NACA α γραμμών κυρτότητας). Στην συνέχεια πάνω σε αυτήν τη γραμμή μετريέται ένα μήκος ίσο με την ακτίνα της ακμής πρόσπτωσης και έτσι προσδιορίζεται το κέντρο της ακτίνας της ακμής πρόσπτωσης.

Στους πίνακες 2 και 3 παρουσιάζονται οι πιο συνήθεις μορφές υδροτομών NACA (στη βιβλιογραφία μπορούν να βρεθούν όλες οι τομές NACA). Στον πίνακα 6.3 η μορφή πάχους NACA 66 (Mod) έχει προέλθει από τον Brockett, ο οποίος ‘πάχυνε’ την ακραία περιοχή (χείλος πρόσπτωσης και εκφυγής) της γονικής NACA 66 για την περίπτωση των ναυτικών ελίκων για να είναι δυνατή η κατασκευή της (πεπερασμένο πάχος στο χείλος εκφυγής) . Στην πράξη, για την περίπτωση των ναυτικών ελίκων, όλες οι μορφές NACA χρειάζονται πάχυνση στα άκρα, αλλιώς είναι εύκολο να υποστούν φθορά. Τυπικές παχύνσεις υδροτομών στα άκρα φαίνονται στον πίνακα 4 σαν αναλογία του μεγίστου πάχους της τομής για συμβατικές έλικες που δεν έχουν μεγάλη πλευρική απόκλιση (skew). Στην αντίθετη περίπτωση των ελίκων με μεγάλη πλευρική απόκλιση, οι οποίες ορίζονται από τον Lloyd’s Register ως οι έλικες με γωνία πλευρικής απόκλισης που ξεπερνά τις 25ο, τα πάχη των ακμών εκφυγής θα αναμένετο να αυξηθούν σε σχέση με αυτά του πίνακα 4 κατά ποσά που εξαρτώνται από τον τύπο και την έκταση της πλευρικής απόκλισης. Να σημειωθεί τέλος ότι οι τιμές του πίνακα 4. είναι απλώς τα πάχη που θα υπήρχαν στα άκρα αν γινόταν παρεκβολή της κατανομής του πάχους της τομής στα άκρα, χωρίς στρογγύλευση που τελικά βεβαίως γίνεται.

64 mean line			65 mean line		66 mean line	
x_e (per cent c)	y_e (per cent c)	dy_e/dx_e	y_e (per cent c)	dy_e/dx_e	y_e (per cent c)	dy_e/dx_e
0	0	0.30000	0	0.24000	0	0.20000
1.25	0.369	0.29062	0.296	0.23400	0.247	0.19583
2.5	0.726	0.28125	0.585	0.22800	0.490	0.19167
5.0	1.406	0.26250	1.140	0.21600	0.958	0.18333
7.5	2.039	0.24375	1.665	0.20400	1.406	0.17500
10	2.625	0.22500	2.160	0.19200	1.833	0.16667
15	3.656	0.18750	3.060	0.16800	2.625	0.15000
20	4.500	0.15000	3.840	0.14400	3.333	0.13333
25	5.156	0.11250	4.500	0.12000	3.958	0.11667
30	5.625	0.07500	5.040	0.09600	4.500	0.10000
40	6.000	0	5.760	0.04800	5.333	0.06667
50	5.833	-0.03333	6.000	0	5.833	0.03333
60	5.333	-0.06667	5.760	-0.04800	6.000	0
70	4.500	-0.10000	5.040	-0.09600	5.625	-0.07500
80	3.333	-0.13333	3.840	-0.14400	4.500	-0.15000
90	1.833	-0.16667	2.160	-0.19200	2.625	-0.22500
95	0.958	-0.18333	1.140	-0.21600	1.406	-0.26250
100	0	-0.20000	0	-0.24000	0	-0.30000

$a = 0.8$ mean line			$a = 0.8$ (mod) mean line		$a = 1.0$ mean line	
x_e (per cent c)	y_e (per cent c)	dy_e/dx_e	y_e (per cent c)	dy_e/dx_e	y_e (per cent c)	dy_e/dx_e
0	0		0		0	
0.5	0.287	0.48535	0.281	0.47539	0.250	0.42120
0.75	0.404	0.44925	0.396	0.44004	0.350	0.38875
1.25	0.616	0.40359	0.603	0.39531	0.535	0.34770
2.5	1.077	0.34104	1.055	0.33404	0.930	0.29155
5.0	1.841	0.27718	1.803	0.27149	1.580	0.23430
7.5	2.483	0.23868	2.432	0.23378	2.120	0.19995
10	3.043	0.21050	2.981	0.20618	2.585	0.17485
15	3.985	0.16892	3.903	0.16546	3.365	0.13805
20	4.748	0.13734	4.651	0.13452	3.980	0.11030
25	5.367	0.11101	5.257	0.10873	4.475	0.08745
30	5.863	0.08775	5.742	0.08595	4.860	0.06745
35	6.248	0.06634	6.120	0.06498	5.150	0.04925
40	6.528	0.04601	6.394	0.04507	5.355	0.03225
45	6.709	0.02613	6.571	0.02559	5.475	0.01595
50	6.790	0.00620	6.651	0.00607	5.515	0
55	6.770	-0.01433	6.631	-0.01404	5.475	-0.01595
60	6.644	-0.03611	6.508	-0.03537	5.355	-0.03225
65	6.405	-0.06010	6.274	-0.05887	5.150	-0.04925
70	6.037	-0.08790	5.913	-0.08610	4.860	-0.06745
75	5.514	-0.12311	5.401	-0.12058	4.475	-0.08745
80	4.771	-0.18412	4.673	-0.18034	3.980	-0.11030
85	3.683	-0.23921	3.607	-0.23430	3.365	-0.13805
90	2.435	-0.25583	2.452	-0.24521	2.585	-0.17485
95	1.163	-0.24904	1.226	-0.24521	1.580	-0.23430
100	0	-0.20385	0	-0.24521	0	

Πίνακας 2: Γραμμές κυρτότητας της σειράς NACA.

	x/c	<i>NACA 16</i> $y/t_{\max}$	<i>NACA 66 (Mod)</i> $y/t_{\max}$				
L.E.	0	0	0				
	0.005	—	0.0665				
	0.0075	—	0.0812				
	0.0125	0.1077	0.1044				
	0.0250	0.1504	0.1466				
	0.0500	0.2091	0.2066				
	0.0750	0.2527	0.2525				
	0.1000	0.2881	0.2907				
	0.1500	0.3445	0.3521				
	0.2000	0.3887	0.4000				
	0.2500	—	0.4363				
	0.3000	0.4514	0.4637				
	0.3500	—	0.4832				
	0.4000	0.4879	0.4952				
	0.4500	—	0.5000				
	0.5000	0.5000	0.4962				
	0.5500	—	0.4846				
	0.6000	0.4862	0.4653				
	0.6500	—	0.4383				
	0.7000	0.4391	0.4035				
	0.7500	—	0.3612				
	0.8000	0.3499	0.3110				
	0.8500	—	0.2532				
	0.9000	0.2098	0.1877				
	0.9500	0.1179	0.1143				
T.E.	1.0000	0.0100	0.0333				
Section $t_{\max}/c$	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	$\rho_L = 0.448c \left(\frac{t_{\max}}{c} \right)^2$
L.E. radius/c (%)	0.176	0.396	0.703	1.100	1.584	2.156	

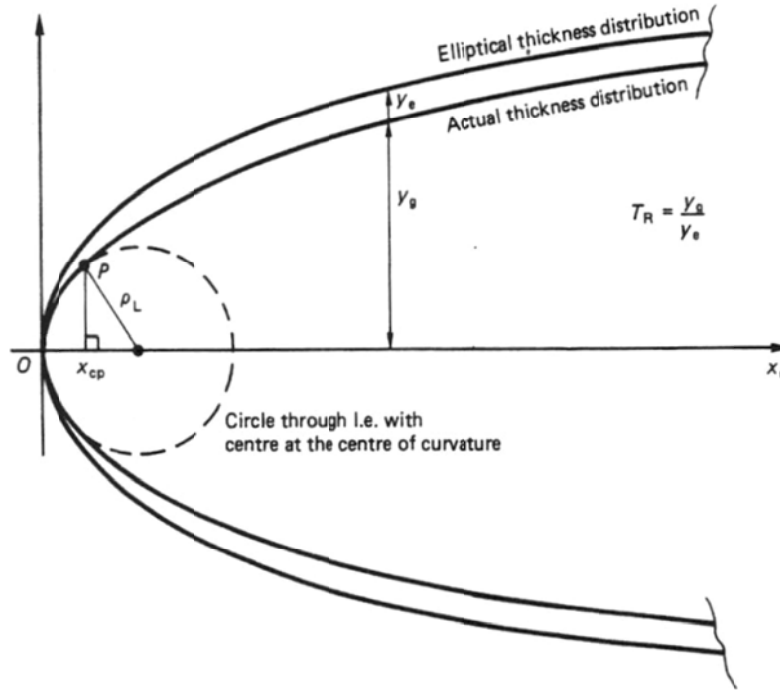
Πίνακας 3: Τυπικές κατανομές πάχους τομών NACA.

r/R	$\frac{t(x_c/x = 0 \text{ or } 1.0)}{t_{\max}}$	
	<i>Leading edge</i>	<i>Trailing edge</i>
0.9	0.245	0.245
0.8	0.170	0.152
0.7	0.143	0.120
0.6	0.134	0.100
0.5	0.130	0.085
0.4	0.127	0.075
0.3	0.124	0.068
0.2	0.120	0.057

Πίνακας 4: Τυπικοί λόγοι πάχους των ακμών για συμβατικές, όχι μεγάλης πλευρικής απόκλισης έλικες.

Συχνά είναι απαραίτητο να γίνει παρεμβολή στις συντεταγμένες της κυρτότητας και του πάχους σε θέσεις μακριά από εκείνες που ορίζονται στους πίνακες 2 και 3. Για κοινές μορφές γραμμών κυρτότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν τυπικές μέθοδοι παρεμβολής, με την προϋπόθεση ότι βασίζονται σε πολυώνυμα δεύτερης ή τρίτης τάξης. Το ίδιο ισχύει και για την κατανομή πάχους μακριά από τις απότομες αλλαγές της καμπυλότητας που υπάρχουν κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία ο van Oossanen, πρότεινε μια μέθοδο που βασίζεται στον ορισμό μιας ισοδύναμης έλλειψης με λόγο πάχους προς χορδή ίδιο με εκείνον της υδροτομής που σχεδιάζεται. Το σχήμα 54 δείχνει τον τρόπο κατά τον οποίο μπορεί να διαμορφωθεί ένας λόγος πάχους TR μεταξύ της πραγματικής υδροτομής και της ισοδύναμής της:

$$T_R = \frac{y_t}{y_{t\max} \sin \left[\cos^{-1} (1 - 2x_c / c) \right]}$$



Σχήμα 54: Η μέθοδος παρεμβολής για την κατανομή του πάχους του Oossanen.

Έχοντας επομένως ορίσει τη βάση της γεωμετρίας της υδροτομής, είναι δυνατό να επιστρέψουμε στις σχέσεις και να ορίσουμε τις συντεταγμένες για οποιοδήποτε σημείο P στην επιφάνεια της υδροτομής. Το σχήμα 55 δείχνει αυτήν τη διαδικασία και οι εξισώσεις που ορίζουν το σημείο P σε σχέση με το τοπικό (στραμμένο κατά φ) σύστημα συντεταγμένων (Ox , Oy , Oz) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= -[i_G + r\theta_i \tan(\theta_m)] + (0.5c - x_c) \sin(\theta_m) + y_{u,l} \cos(\theta_m) \\ y_p &= -r \sin \left[\theta_i - \frac{[(0.5c - x_c) \cos(\theta_m) - y_{u,l} \sin(\theta_m)]}{r} \right] \\ z_p &= r \cos \left[\theta_i - \frac{[(0.5c - x_c) \cos(\theta_m) - y_{u,l} \sin(\theta_m)]}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Όπου

$$y_{u,l} = y_c \pm y_t \cos \psi$$

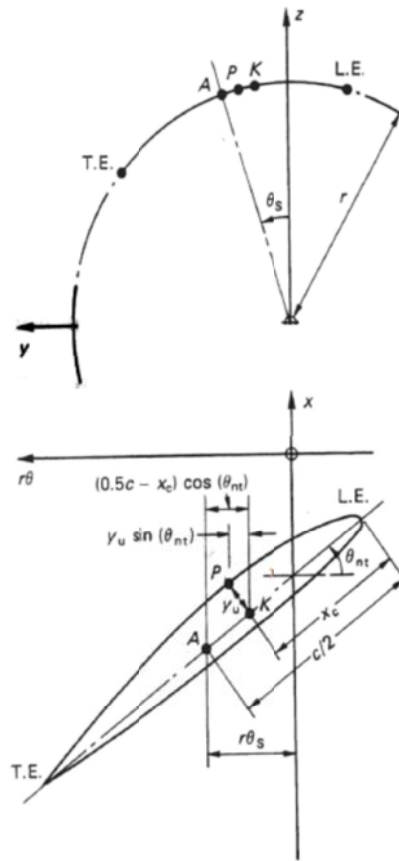
όπως στις εξισώσεις (57) και

$$0 \leq x_c \leq c.$$

Για να βρούμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες σε σχέση με το ολικό σ.σ. (OX, OY, OZ), γράφουμε απλώς τον μετασχηματισμό:

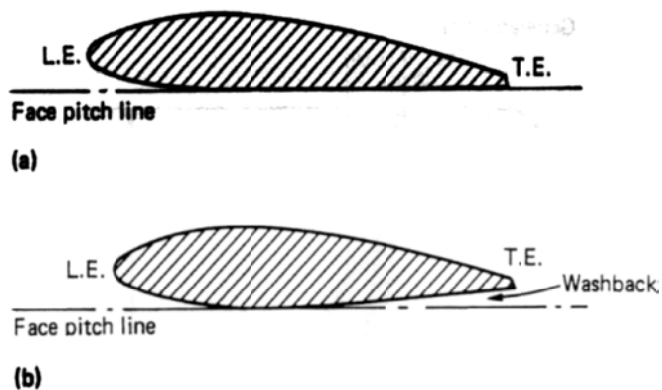
$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, \quad (60)$$

όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (59) και (60) και θέτοντας τις κατάλληλες τιμές για τα μεγέθη x_c , $y_{u,l}$, μπορούν να προκύψουν οι εκφράσεις για τα σημεία των ακμών πρόσπτωσης και εκφυγής και τα μέσα των χορδών.



Σχήμα 55: Ορισμός των συντεταγμένων ενός τυχαίου σημείου P στην επιφάνεια ενός πτερυγίου.

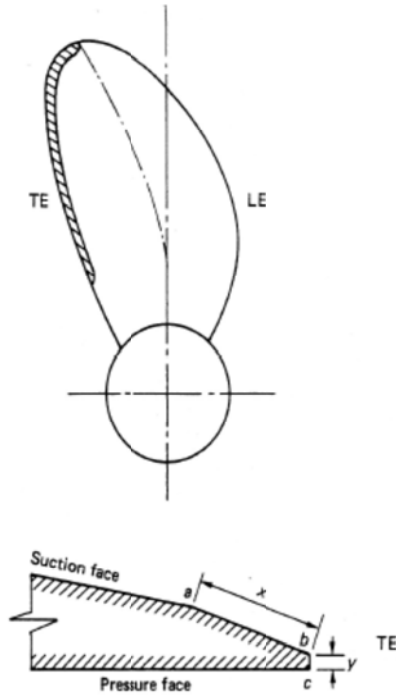
Σε παλαιότερες μελέτες και κανονισμούς βρίσκεται μερικές φορές ο όρος ‘ανύψωση υδροτομής’ “washback”. Ο όρος αυτός σχετιζόταν με την μορφή του τμήματος της όψης υπερπίεσης της υδροτομής από τη θέση μεγίστου πάχους ως το χείλος εκφυγής. Στο σχήμα 56 φαίνεται ότι για να μην έχει ανύψωση μια υδροτομή πρέπει αυτή η περιοχή να συμπίπτει με τη γραμμή που αντιστοιχεί στο βήμα πρόσωσης.



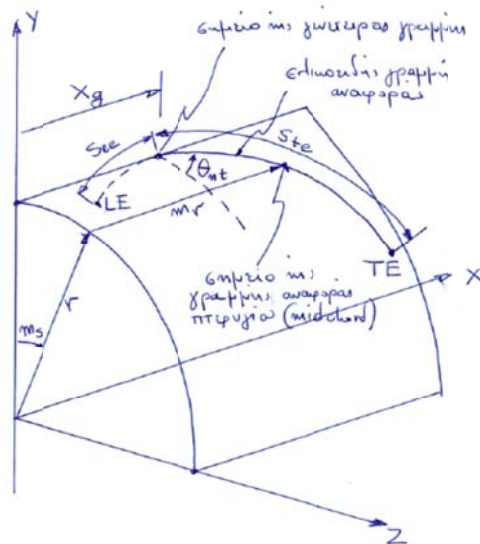
Σχήμα 56: Υδροτομή χωρίς (a) και με (b) washback.

Η γεωμετρία του χείλους πρόσπτωσης της υδροτομής είναι γενικά ένα περίπλοκο αντικείμενο και έχει μεγάλη επίδραση στα φαινόμενα σπηλαίωσης που μπορούν να παρουσιαστούν. Στις σύγχρονες αναλυτικές σχεδιάσεις γίνεται όλο και πιο δημοφιλές το να χρησιμοποιείται μια μορφή τύπου NACA. Ωστόσο συναντά κανείς και τρόπους σχεδίασης, οι οποίοι συχνά έχουν προέλθει από την εμπειρία, πριν την εξέλιξη των υπολογιστικών μεθόδων. Συνεπώς χρειάζεται μεγάλη προσοχή στην μελέτη σχεδίων που προέρχονται από διαφορετικούς κατασκευαστές.

Σε σχέση με το χείλος εκφυγής έχει προταθεί η διαμόρφωση που φαίνεται στο σχήμα 57. Η διαμόρφωση αυτή, η οποία συνήθως εκτείνεται περίπου από το $0,5R$ ως το $0,975R$, έχει στόχο την αντιμετώπιση ενός φαινομένου που παρουσιάζεται μερικές φορές στις έλικες: το θόρυβο που οφείλεται σε υδροελαστικό συντονισμό (propeller singing), δηλαδή συντονισμό του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας με το χείλος εκφυγής.

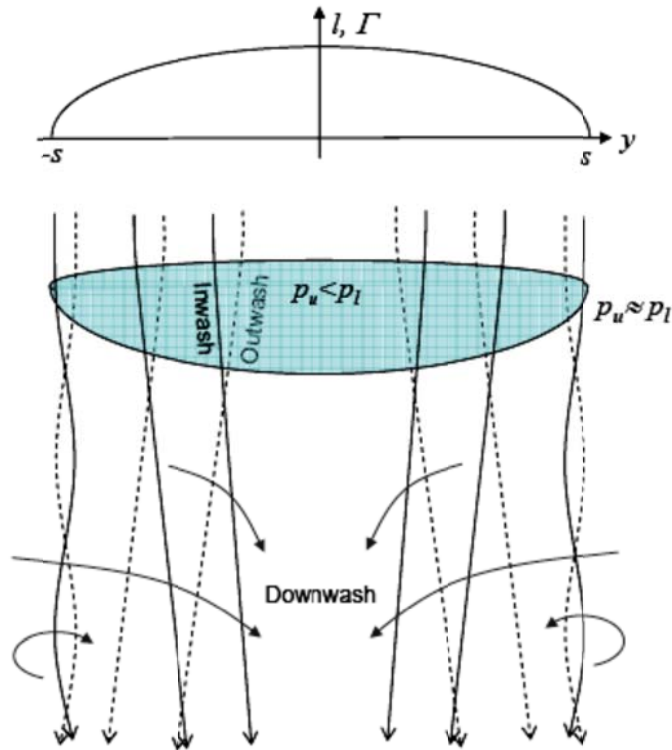


Σχήμα 57: Διαμόρφωση του χείλους εκφυγής για την αποφυγή θορύβου (*anti-singing trailing edge*).



Σχήμα 58: Σύστημα συντεταγμένων που συνήθως χρησιμοποιείται στην αναλυτική σχεδίαση έλικας (ο X άξονας δείχνει την πλώρα).

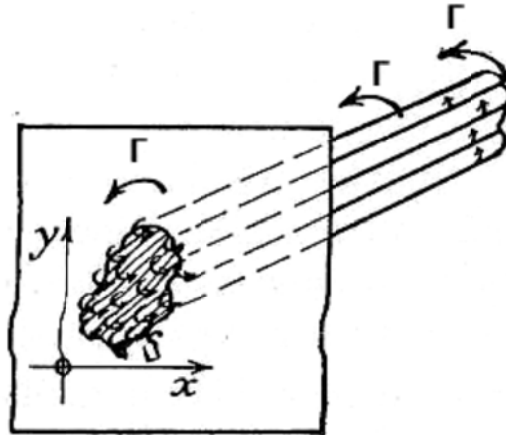
2.ΘΕΩΡΙΑ ΦΕΡΟΥΣΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΓΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΤΕΡΥΓΑ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ)



Σχήμα 59

Η θεωρία στροβιλότητας για τρισδιάστατη πτέρυγα αναπτύχθηκε από τους Lanchester και Prandtl. Πριν την ανάπτυξη της θεωρίας στροβιλότητας η μοναδική πηγή άντλησης των ιδιοτήτων των τρισδιάστατων πτερύγων ήταν τα πειράματα. Η ανάπτυξη της θεωρίας Lanchester και Prandtl επέτρεψε τόσο τον υπολογισμό της φόρτισης πτερυγίου δεδομένης γεωμετρίας (πρόβλημα συμπεριφοράς ή ανάλυσης) όσο και τον υπολογισμό της γεωμετρίας πτερυγίου όταν η φόρτιση είναι προκαθορισμένη (πρόβλημα σχεδίασης). Στις παραγράφους που ακολουθούν θα εξετάσουμε τις λεπτομέρειες της θεωρίας των Lanchester και Prandtl.

2.1 Οι νόμοι που διέπουν την κίνηση της στροβιλότητας. Τα θεωρήματα Helmholtz



Σχήμα 60: Σχηματική παράσταση σωλήνα στροβιλότητας.

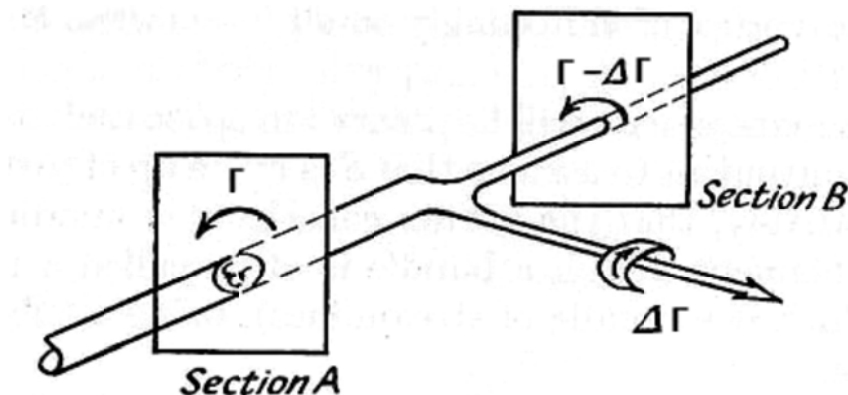
Στο σχήμα 60 παρατηρούμε ένα «σωλήνα στροβιλότητας» πεπερασμένης διατομής. Ο σωλήνας στροβιλότητας χαρακτηρίζεται (ορισμός) από περιοχή του ρευστού όπου η στροβιλότητα ($= \text{rot} \vec{V}$) είναι διάφορη του μηδενός. Στην περίπτωση που η επιφάνεια S του σωλήνα στροβιλότητας τείνει στο μηδέν αλλά με την συνολική στροβιλότητα ($= \iint_S \text{rot} \vec{V} d\vec{S}$) σταθερή, τότε στο όριο έχουμε τη γραμμή δίνης ή απλώς δίνη. Το ολοκλήρωμα ονομάζεται και ένταση του σωλήνα στροβιλότητας. Το θεώρημα του Stokes εφαρμοσμένο για το σωλήνα στροβιλότητας του σχήματος 1 είναι:

$$\iint_S \text{rot} \vec{V} d\vec{S} = \oint_L \vec{V} d\vec{l} = \Gamma \quad (61)$$

όπου Γ η κυκλοφορία γύρω από μία κλειστή καμπύλη L που περιβάλλει πλήρως τον σωλήνα στροβιλότητας S . Δηλαδή η ένταση του σωλήνα στροβιλότητας ισούται με την κυκλοφορία. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes για συγκεκριμένη κλειστή καμπύλη L και διαφορετικές επιλογές της επιφάνειας S (έτσι ώστε η L να είναι σταθερό σύνορο όλων των S), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ένταση του σωλήνα στροβιλότητας είναι σταθερή ανεξάρτητα της διατομής. Η ιδιότητα αυτή του σωλήνα στροβιλότητας ονομάζεται «συνέχεια της στροβιλότητας». Το ότι η στροβιλότητα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση της συνέχειας και άρα συμπεριφέρεται (από άποψη συνέχειας) όπως το πεδίο ταχύτητας, μπορεί να

αποδειχθεί και άμεσα αφού ισχύει η ταυτότητα $\text{div}(\text{rot}\vec{V})=0$. Επακόλουθο της συνέχειας της στροβιλότητας είναι ότι όταν η διατομή μικραίνει η στροβιλικότητα $\text{rot}\vec{V}$ θα πρέπει να μεγαλώνει και αντιθέτως. Η συνέχεια της στροβιλικότητας ονομάζεται και πρώτο θεώρημα του Helmholtz.

Η δίνη είναι μία εξιδανίκευση του σωλήνα στροβιλικότητας για παρατηρητή που βρίσκεται μακριά (από το σωλήνα στροβιλικότητας). Στη γενική περίπτωση η δίνη είναι μία καμπύλη στο χώρο που χαρακτηρίζεται από την κυκλοφορία της Γ . Λόγω της συνέχειας η δίνη θα πρέπει κατ'ανάγκη να είναι είτε κλειστή καμπύλη είτε ανοιχτή καμπύλη που τερματίζει στα σύνορα της περιοχής (στερεά σύνορα ή ελεύθερη επιφάνεια). Στο σχήμα 2 φαίνεται το επακόλουθο της συνέχειας της στροβιλικότητας για σωλήνα κυκλοφορίας Γ .



Σχήμα 61: Επακόλουθο της συνέχειας της στροβιλικότητας.

Εκτός από το πρώτο θεώρημα του Helmholtz που ονομάζεται και κινηματικό θεώρημα γιατί η απόδειξή του δεν απαιτεί τη χρήση του θεωρήματος της ορμής (εξισώσεις Navier-Stokes) υπάρχουν δύο ακόμα θεωρήματα, των οποίων η απόδειξη μπορεί να βρεθεί σε προχωρημένα βιβλία θεωρητικής ρευστομηχανικής. Ακολουθώς παρατίθενται χωρίς απόδειξη:

Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα του Helmholtz οι σωλήνες στροβιλικότητας αποτελούνται συνεχώς από τα ίδια υλικά σημεία. Με άλλα λόγια υλικά σημεία που

δεν έχουν (ή έχουν) στροβιλικότητα το χρόνο t δεν μπορεί να αποκτήσουν (ή να τη χάσουν) το χρόνο $t+\Delta t$ (ποιοτικό θεώρημα που προϋποθέτει μη συνεκτικό ρευστό).

Σύμφωνα με το τρίτο θεώρημα του Helmholtz η ένταση του σωλήνα στροβιλικότητας δεν αλλάζει καθώς αυτός μετακινείται ακολουθώντας τα υλικά σημεία (ποσοτικό θεώρημα που προϋποθέτει μη συνεκτικό ρευστό).

Συνεπακόλουθο των δυναμικών θεωρημάτων του Helmholtz είναι ότι η στροβιλικότητα είναι «ιδιότητα των υλικών σημείων» (material property).

Να σημειωθεί ότι στην προηγούμενη διατύπωση των θεωρημάτων Helmholtz (δεύτερο, τρίτο) το ρευστό θεωρείται μη συνεκτικό. Η ύπαρξη συνεκτικότητας δημιουργεί μικρή αλλαγή στα θεωρήματα επιτρέποντας τελικά τόσο την μικρή ανταλλαγή στροβιλικότητας μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων όσο και την υποβάθμιση της έντασης του σωλήνα στροβιλικότητας κατά την κίνησή του (συνεκτική διάχυση της στροβιλικότητας).

2.2 Φαινομενολογία της ροής γύρω από πτέρυγα, το σύστημα δινών και το μοντέλο παγωμένου ομόρρου.

Η συνεισφορά του Lanchester, στην ανάπτυξη μοντέλου για την προσομοίωση της ροής γύρω από πτερύγιο, αφορούσε την αντικατάσταση του πτερυγίου και ιδιαίτερα της ιδιότητάς του να παράγει άνωση, από σύστημα δινών, σχήμα 62. Το σύστημα δινών που χρησιμοποίησε ο Lanchester μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσυστήματα:

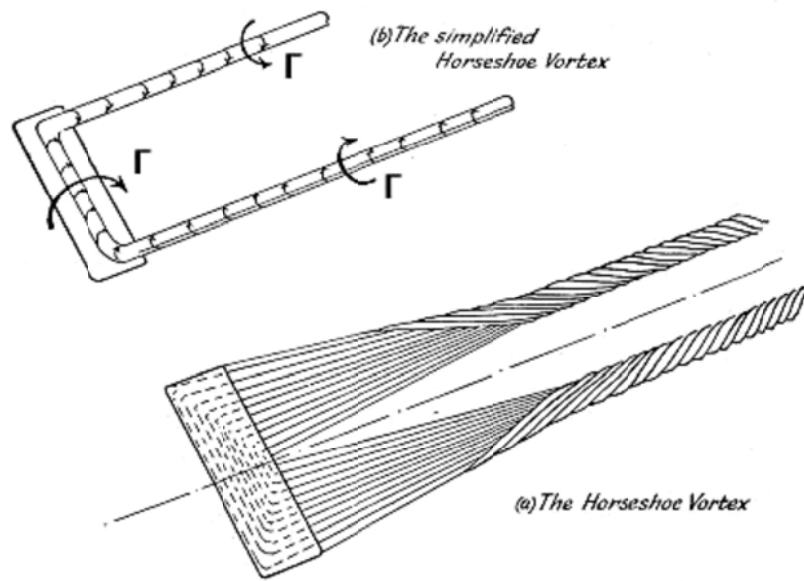
- ✿ Το σύστημα προσδεδεμένων δινών (bound vortex system), το οποίο τοποθετείται πάνω στο πτερύγιο και είναι υπεύθυνο για την αναπαράσταση του μηχανισμού δημιουργίας άνωσης, σχήμα 62α.
- ✿ Το σύστημα ακολουθούντων δινών (trailing vortex system), το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν το ίχνος του οριακού στρώματος του πτερυγίου στον ομόρρου. Στα σχήματα 62γ,δ φαίνονται οι λεπτομέρειες της ανάπτυξης του οριακού στρώματος (περιοχή με στροβιλικότητα) στην επιφάνεια μιας υδροτομής. Να σημειωθεί ότι η ‘κατανομή της στροβιλικότητας’ στον ομόρρου του πτερυγίου είναι επακόλουθο των νόμων του Helmholtz (κινηματικού-έντασης- και δυναμικών-θέσης-) για την στροβιλικότητα.
- ✿ Τη δίνη εκκίνησης (starting vortex), η οποία παρατηρείται μόνο κατά την εκκίνηση του πτερυγίου από ακινησία ή κατά τις μεταβατικές καταστάσεις. Η

δίνη αυτή αναπτύσσεται και εξελίσσεται επίσης ακολουθώντας τους νόμους του Helmholtz, σχήμα 62β.

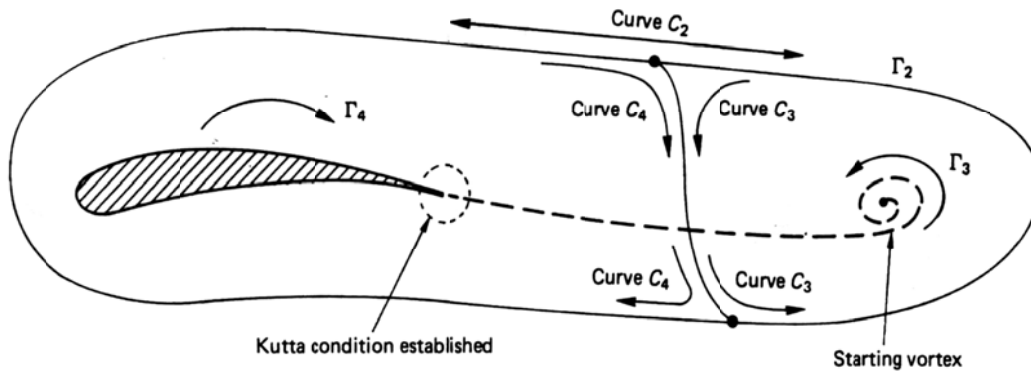
Αναλύοντας περαιτέρω τη σημασία των τριών προηγούμενων συστημάτων δινών θα πρέπει να διαχωρίσουμε τις προσδεδεμένες δίνες από τις ακολουθούσες και τη δίνη εκκίνησης. Ειδικότερα οι ακολουθούσες δίνες και η δίνη εκκίνησης είναι «μορφές ροής» (ελεύθερες δίνες) και ως εκ τούτου θα πρέπει να ικανοποιούν φυσικούς νόμους όπως η συνέχεια και η διατήρηση της ορμής ή των ισοδυνάμων (με τη συνέχεια και τη διατήρηση της ορμής) νόμων του Helmholtz. Επιπλέον οι ακολουθούσες δίνες και η δίνη εκκίνησης μπορεί να ανιχνευθούν πειραματικά με μεθόδους οπτικοποίησης της ροής, όπως ο μετρητής στροβιλότητας. Το πρόβλημα της αναπαράστασης της γεωμετρίας του συστήματος των ακολουθούντων δινών εισάγει μία εσωτερική μη γραμμικότητα στην μαθηματική μοντελοποίηση της ροής γύρω από πτέρυγα αφού αποτελεί 'σύνορο του προβλήματος' το οποίο όμως είναι κατ' αρχήν άγνωστο (free boundary problem)!! Δηλαδή για να είναι γνωστή η θέση του πρέπει να είναι γνωστή η ροή αφού οι νόμοι του Helmholtz εμπεριέχουν την συνολική ταχύτητα (αδιατάρακτη + διαταραχή)!!. Για την παράκαμψη της μη γραμμικότητας οι ερευνητές προχώρησαν σε 'ευρηματικές' απλοποιήσεις σχετικά με την γεωμετρία του συστήματος των ακολουθούντων δινών. Ειδικότερα εάν η ροή είναι μόνιμη είναι τετριμμένο αποτέλεσμα των νόμων του Helmholtz ότι οι ακολουθούσες δίνες θα κείνται σε επιφάνεια ροής!! Οι ακολουθούσες δίνες ξεκινούν από το χείλος εκφυγής αφού είναι αποτέλεσμα του οριακού στρώματος του πτερυγίου. Αν επί πλέον υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες διαταραχής (λόγω ύπαρξης της πτέρυγας) είναι μικρό ποσοστό της έπ' άπειρον ταχύτητας $\overline{V_\infty}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μια πρώτη προσέγγιση –σύμφωνη με τους νόμους του Helmholtz- για την γεωμετρία του συστήματος των ακολουθούντων δινών παρέχεται από την επιφάνεια που ορίζεται από ευθείες παράλληλες στην έπ' άπειρον ταχύτητα $\overline{V_\infty}$ δια του χείλους εκφυγής. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται και 'μοντέλο παγωμένου ομόρρου' (frozen wake model ή prescribed wake shape - PWS). Αν επί πλέον η $\overline{V_\infty}$ είναι παράλληλη στον άξονα των X ή σχηματίζει μικρή γωνία σε σχέση με αυτόν, και το πτερύγιο είναι επίπεδο η γεωμετρία του συστήματος των ακολουθούντων δινών συμπίπτει με το επίπεδο XY, σχήμα 6α. Στις επόμενες παραγράφους θα χρησιμοποιηθεί το *μοντέλο παγωμένου ομόρρου* στα πλαίσια της θεωρίας φέρουσας γραμμής.

Αντιθέτως οι προσδεδεμένες δίνες είναι μαθηματικό δημιούργημα για την προσομοίωση της ροής γύρω από πτερύγιο και ειδικότερα του φαινομένου δημιουργίας διαφοράς πίεσης μεταξύ των δύο όψεων του πτερυγίου. Να σημειωθεί ότι η χρήση προσδεδεμένης στροβιλότητας δε μπορεί να προσομοιάσει φαινόμενα που σχετίζονται με το πάχος του πτερυγίου. Για την προσομοίωση του πάχους απαιτείται επιπρόσθετη κατανομή πηγών πάνω στο πτερύγιο.

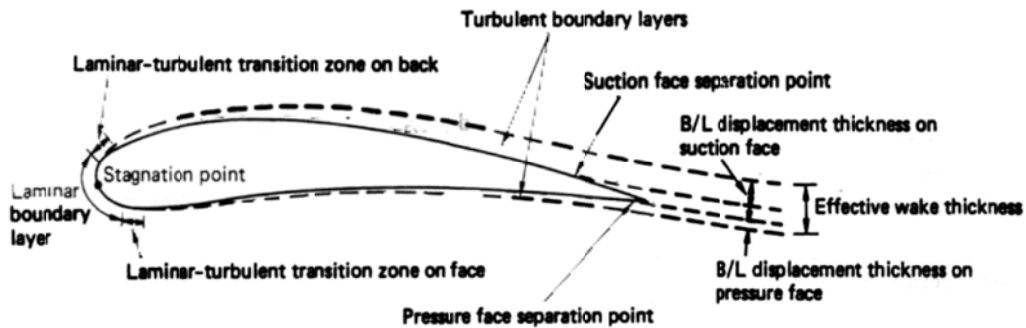
Τέλος στο σχήμα 62ε φαίνεται η ανάπτυξη ‘δευτερεύουσας ροής’ στο ακροπτερύγιο επακόλουθο της οποίας είναι ο μηδενισμός της φόρτισης (διαφοράς πίεσης – άνωσης) στην περιοχή αυτή. Η φυσική αυτή παρατήρηση χρησιμοποιείται στα επόμενα για τον καθορισμό των οριακών συνθηκών της προσδεδεμένης στροβιλότητας στα πλαίσια της ανάπτυξης της θεωρίας φέρουσας γραμμής για πτερύγιο.



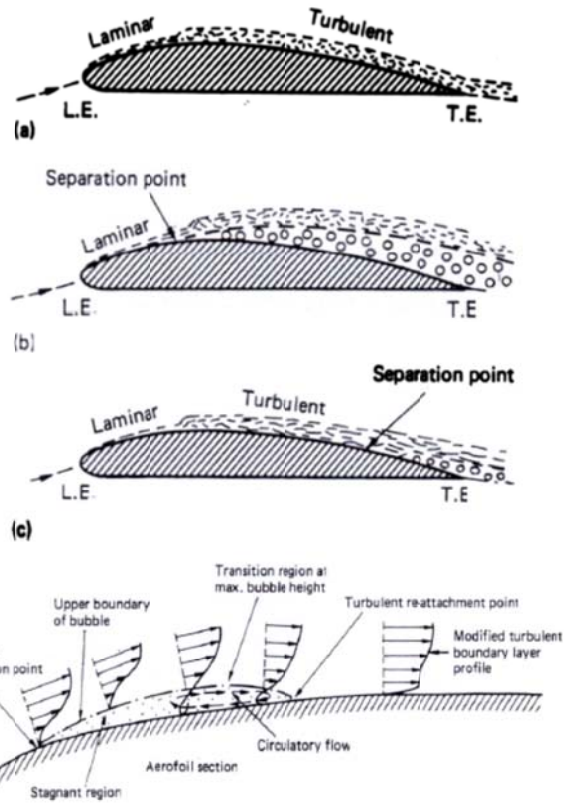
Σχήμα 62α: Σύστημα προσδεδεμένων και ακολουθούντων δινών για την προσομοίωση της ροής γύρω από πτερύγιο.



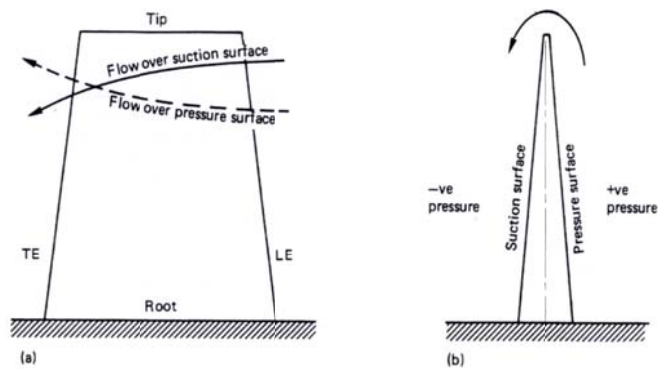
Σχήμα 62β: Δίνη εκκίνησης για την προσομοίωση της ροής γύρω από περύγιο.



Σχήμα 62γ: Το ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας (ακολουθούσες δίνες) σαν αποτέλεσμα του οριακού στρώματος του περυγίου.



Σχήμα 62δ: Λεπτομέρειες της ροής στην όψη υποπίεσης υδροτομής.



Σχήμα 62ε: Δευτερεύουσα ροή στο ακροπερύγιο.

2.3 'Ευρηματική' εισαγωγή στη θεωρία φέρουσας γραμμής για πτερύγια. Προαπαιτούμενα για μια αυστηρή εισαγωγή στην θεωρία φέρουσας γραμμής Lanchester - Prandtl

Η χρήση συστήματος 'πεταλοειδών δινών' (horseshow vortices) για την αναπαράσταση τόσο της (αναμενόμενης) διαφοράς πίεσης στις δύο όψεις της πτέρυγας όσο και της (αναμενόμενης - Helmholtz) ελεύθερης στροβιλότητας στον ομόρρου της πτέρυγας είναι από τα πρώτα επιτυχημένα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν. Στο σχήμα 62a.a φαίνεται το σύστημα πεταλοειδών δινών που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση της ροής γύρω από τρισδιάστατη πτέρυγα. Ειδικότερα κάθε πεταλοειδής δίνη έχει ένα 'προσδεδεμένο' κομμάτι και ένα 'ακολουθούν' κομμάτι. Το σύστημα των προσδεδεμένων δινών αποτελείται από μεγάλο αριθμό δινών κατά τη διεύθυνση του ανοίγματος του πτερυγίου. Η συνέχεια της στροβιλότητας ικανοποιείται ταυτοτικά αφού κάθε προσδεδεμένη δίνη, ως τμήμα μιας πεταλοειδούς δίνης, είναι αναγκασμένη σε κάποια θέση να στραφεί προς τα πίσω (δηλαδή κατά τη διεύθυνση της ροής) και να εξέλθει από το χείλος εκφυγής στο ομόρρου.

Μία περαιτέρω εξιδανίκευση της ροής γύρω από πτερύγιο φαίνεται στο σχήμα 62a.b, όπου το πτερύγιο αντικαθίσταται από μία και μοναδική πεταλοειδή δίνη συνολικής έντασης Γ . Η ένταση αυτή είναι ίση με την ένταση του σωλήνα στροβιλότητας στο μέσον του πτερυγίου του σχήματος 62a.a.

Η θεωρία φέρουσας γραμμής των *Lanchester - Prandtl* προέκυψε από περαιτέρω επεξεργασία και βελτίωση της τελευταίας ιδέας. Εξετάζοντας κριτικά την τελευταία ιδέα παρατηρούμε ότι είναι τόσο σωστότερη όσο ο λόγος της χορδής του πτερυγίου προς το άνοιγμα του τείνει στο μηδέν!! Π.χ. ένα πτερύγιο ανεμόμυλου έχει λόγο χορδής προς άνοιγμα πολύ μικρότερο από τον αντίστοιχο σε μια πτέρυγα αεροπλάνου και πολύ μικρότερο από τον αντίστοιχο πτερυγίου έλικας πλοίου. Η θεωρία 'φέρουσας γραμμής' μπορεί να προκύψει με εντελώς αυστηρό μαθηματικό τρόπο αν γράψουμε τις ακριβείς εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ροής γύρω από τρισδιάστατη πτέρυγα και στη συνέχεια το επεξεργαστούμε με ασυμπτωτικές μεθόδους στα πλαίσια της 'θεωρίας διαταραχών' (perturbation theory). Το μαθηματικό πρόβλημα διαταραχών που προκύπτει είναι ιδιόμορφο (singular perturbation problem), διότι στο όριο $\frac{c}{s} \rightarrow 0$ (c : χορδή, s : άνοιγμα) με σταθερό s ,

χάνονται οι λεπτομέρειες της γεωμετρίας του πτερυγίου. Για την ανάκτηση της

πληροφορίας που αφορά την γεωμετρία του πτερυγίου είμαστε αναγκασμένοι να εισάγουμε και ένα δεύτερο ασυμπτωτικό πρόβλημα, όπου $\frac{c}{s} \rightarrow 0$ με c : σταθερό, οπότε $s \rightarrow \infty$. Προκύπτουν λοιπόν δύο ξεχωριστά προβλήματα ένα «εξωτερικό - outer» ($\frac{c}{s} \rightarrow 0$, σταθερό s) και ένα «εσωτερικό - inner» ($\frac{c}{s} \rightarrow 0$, σταθερό c). Κάθε ένα από τα δύο είναι ελλιπές, αφού τμήμα της πληροφορίας του αρχικού προβλήματος έχει εκφυλιστεί (και τελικά χαθεί) από την οριακή διαδικασία. Συνεπώς απαιτείται μία «σχέση συναρμογής - *matching relation*» μεταξύ εξωτερικού και εσωτερικού προβλήματος για να υπάρξει μονοσήμαντη λύση.

‘Μεταφράζοντας’ τα ‘πρωτοτάξια’ αποτελέσματα της ασυμπτωτικής θεώρησης από τη μαθηματική γλώσσα σε συνήθη γλώσσα μπορούμε να πούμε ότι το *εξωτερικό πρόβλημα* αφορά παρατηρητή ‘μακριά’ από το πτερύγιο ο οποίος ‘δεν βλέπει’ τις λεπτομέρειες της ροής γύρω από αυτό αλλά το ‘μέσο αποτέλεσμα’ της επίδρασης της προσδεδεμένης και ακολουθούσης στροβιλότητας στην περιοχή της πτέρυγας! Για ένα τέτοιο παρατηρητή (και εφόσον η πτέρυγα έχει μικρό λόγο χορδής/άνοιγμα) η προσδεδεμένη στροβιλότητα του πτερυγίου φαίνεται συγκεντρωμένη σε μια γραμμή - *φέρουσα γραμμή (lifting line)*- με μεταβλητή ένταση κυκλοφορίας $\Gamma(y)$, σχήμα 6α. Αντιθέτως το *εσωτερικό πρόβλημα* αφορά παρατηρητή ‘προσδεδεμένο’ σε μια πτερυγοτομή στην πτέρυγα που ‘βλέπει μόνο την πολύ κοντινή σε αυτόν ροή’. Ο παρατηρητής αυτός θεωρεί ότι η ροή γύρω από την πτερυγοτομή είναι δυσδιάστατη αλλά με ‘τροποποιημένη επ’ άπειρο ταχύτητα’ από τρισδιάστατα φαινόμενα όπως μοντελοποιούνται από το ‘εξωτερικό πρόβλημα’. Οι εξισώσεις της *θεωρίας φέρουσας γραμμής* παράγονται από ‘*συναρμογή*’ των δύο διαφορετικών θεωρήσεων (εσωτερική - εξωτερική).

2.4 Η έννοια της επαγόμενης ταχύτητας (νόμος των Biot - Savart)

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της διανυσματικής ανάλυσης, ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο $\vec{V}$ μπορεί να αναπαρασταθεί μονοσήμαντα από το ακόλουθο «θεώρημα αναπαράστασης»:

$$4\pi \vec{V}_p = - \int_V \left(\operatorname{div} \vec{V} \frac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot} \vec{V} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) dV + \int_S \left((\vec{V} \cdot \vec{n}) \frac{\vec{r}}{r^3} + (\vec{n} \times \vec{V}) \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) dS \quad (62)$$

αν είναι γνωστή η απόκλιση του $(\operatorname{div} \vec{V})$, η περιστροφή του $(\operatorname{rot} \vec{V})$ στον όγκο V και η τιμή του στην επιφάνεια S (σύνορο του όγκου V). Εφαρμόζοντας το θεώρημα αναπαράστασης για την περίπτωση τρισδιάστατης γραμμής δίνης, παράγεται η ακόλουθη σχέση (οι λεπτομέρειες της παραγωγής παραλείπονται):

$$\vec{V}_p = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\vec{n} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) dl \quad (63)$$

όπου L το ίχνος (γεωμετρικό) της τρισδιάστατης γραμμής δίνης, Γ η ένταση της δίνης (κυκλοφορία) και $\vec{n}$ διάνυσμα μοναδιαίο εφαπτόμενο στη γραμμή δίνης. Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, η ύπαρξη γραμμής δίνης φαίνεται ότι «επάγει» πεδίο ταχύτητας που δίνεται από το αντίστοιχο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Η σχέση (63) ονομάζεται και νόμος των Biot-Savart από αντίστοιχη σχέση που ισχύει μεταξύ ηλεκτρικού ρεύματος σε αγωγό και επαγόμενου μαγνητικού πεδίου, που ισχύει στον ηλεκτρομαγνητισμό.

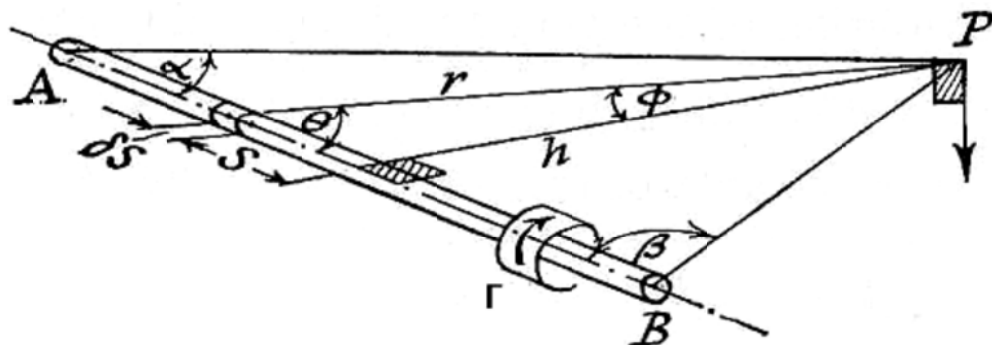
Στο σχήμα 4 βλέπουμε ευθύγραμμη δίνη AB, έντασης Γ. Έστω διαφορικό τμήμα δs της δίνης. Η συνεισφορά στην επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο P από το διαφορικό δs δίνεται από την σχέση ($\vec{n}$ κατά τη διεύθυνση AB και $\vec{r}$ από τη δίνη προς το σημείο ελέγχου P):

$$d\vec{V}_p = - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\vec{n} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \int_{\delta s} dl = - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\vec{n} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \delta s \quad (64)$$

ή, σε βαθμωτή μορφή και σύμφωνα με τους συμβολισμούς του σχήματος 63:

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \theta \cdot \delta s \quad (65)$$

όπου η διεύθυνση της ταχύτητας δv είναι κάθετα προς το επίπεδο APB στο σημείο P.



Σχήμα 63: Επαγόμενη ταχύτητα από ευθύγραμμη δίνη.

Για να υπολογίσουμε την επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο P από την πεπερασμένου μήκους δίνη AB, αρκεί να αθροίσουμε τις επαγόμενες ταχύτητες των διαφορικών της στοιχείων. Για το σκοπό αυτό γίνεται η ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών (φ αρνητικό για το δs του σχήματος 4, α, β θετικά):

$$\phi = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \phi_A = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \phi_B = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \beta)\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (66)$$

οπότε:

$$\sin \theta = \cos \phi, \quad r = h / \sin \theta \Rightarrow r^2 = h^2 \sec^2 \phi \quad (67\alpha)$$

$$ds = d(h \tan \phi) = h \sec^2 \phi d\phi \quad (67\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (66) και (67) στην (65) και ολοκληρώνοντας από A ως B, έχουμε:

$$v = \int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \frac{\Gamma}{4\pi h} \cos \phi d\phi = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \right] \quad (68)$$

$$\text{ή } v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (69)$$

Η σχέση (69) θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την παραγωγή της επαγόμενης ταχύτητας από πεταλοειδή δίνη. Η πεταλοειδής δίνη μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από μία ευθύγραμμη δίνη AB και δύο ημιάπειρες δίνες που ξεκινούν από τα άκρα της. Εφαρμοζόμενη η σχέση (69) για ημιάπειρη δίνη (σχήμα 64a) δίνει:

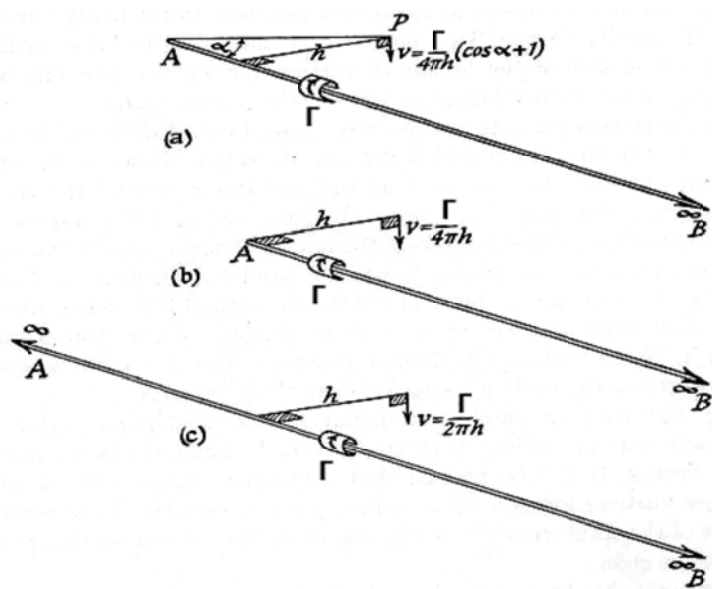
$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + 1) \quad (70)$$

Στην περίπτωση που το σημείο P υπολογισμού της ταχύτητας (σημείο ελέγχου – control point) βρεθεί στο επίπεδο το κάθετο στη δίνη στο σημείο A (σχήμα 64b), η σχέση (70) γίνεται:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (71)$$

Τέλος στην περίπτωση που η δίνη εκτείνεται στο άπειρο και από τις δύο πλευρές (σχήμα 64c) η σχέση (70) γίνεται:

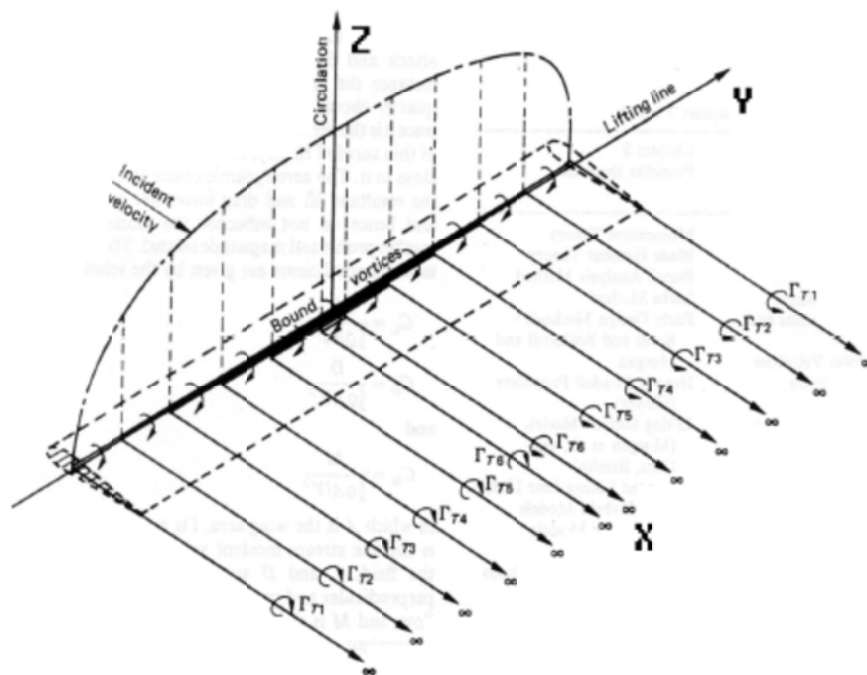
$$v = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (72)$$



Σχήμα 64: Ημιάπειρη και άπειρη ευθύγραμμη δίνη.

2.5 Σχέση μεταξύ της φόρτισης του πτερυγίου και της ακολουθούσης στροβιλότητας, το μοντέλο της θεωρίας φέρουσας γραμμής.

Όπως είδαμε στις παραγράφους 2.2 και 2.3, το περύγιο μπορεί να αντικατασταθεί από σύστημα πεταλοειδών δινών. Αν ακολουθήως θεωρήσουμε ότι ο λόγος της χορδής του περυγίου προς το άνοιγμα τείνει στο μηδέν, με σταθερό άνοιγμα (span), προκύπτει το μοντέλο ‘φέρουσας γραμμής’ (Prandl) για την αναπαράσταση της ροής γύρω από πτέρυγα (εξωτερικό πρόβλημα). Η διαδικασία αντικατάστασης του περυγίου από φέρουσα γραμμή φαίνεται στο σχήμα 6α. Ακολουθώς θα παράγουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη θεωρία φέρουσας γραμμής με ‘ευρηματικό’ τρόπο. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης για την αυστηρά μαθηματική παραγωγή των εξισώσεων μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Van Dyke.



Σχήμα 65α: Μοντέλο θεωρίας φέρουσας γραμμής κατά Prandl για τη δράση του πτερυγίου, αντικατάσταση του πτερυγίου από σύστημα πεταλοειδών δινών.

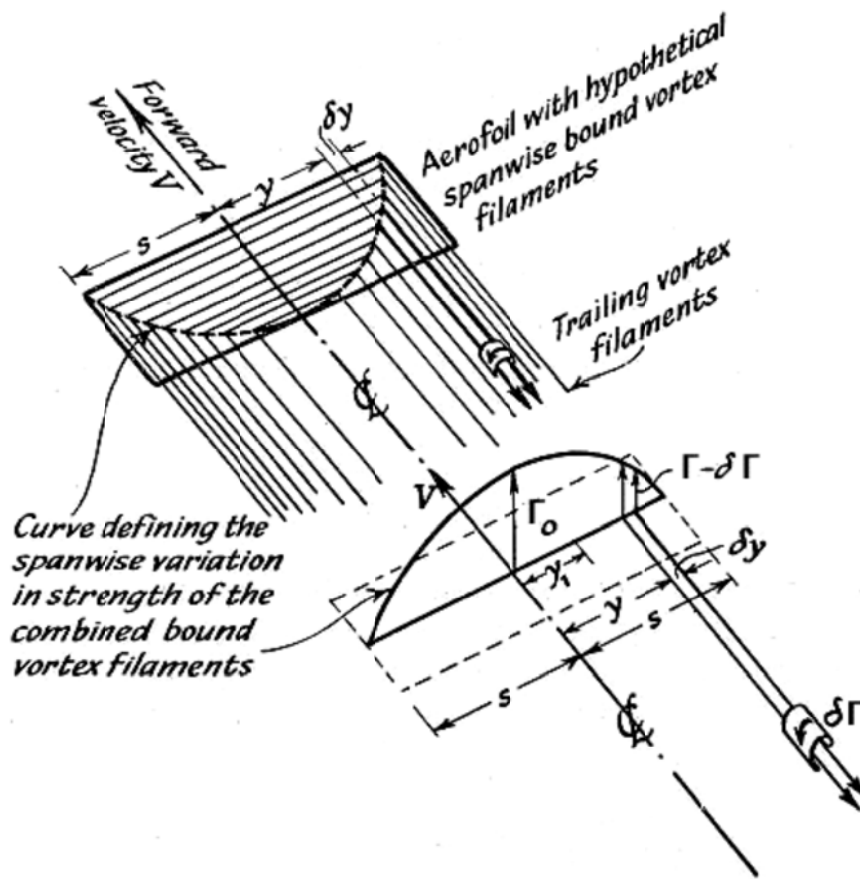
Εξετάζοντας προσεκτικότερα τα σχήματα 63α και 65α, παρατηρούμε ότι η ένταση της στροβιλότητας του σωλήνα στροβιλότητας που βρίσκεται πάνω στο περύγιο (προσδεσμένη στροβιλότητα) μεταβάλλεται βαθμιαία μειούμενη καθώς κινούμαστε προς την περιοχή του ακροπερυγίου όπου και μηδενίζεται (βλέπε τέλος παραγράφου 2.2). Ειδικότερα η ένταση του σωλήνα στροβιλότητας σε κάθε θέση κατά τη διεύθυνση του ανοίγματος είναι το άθροισμα των εντάσεων των πεταλοειδών δινών που κόβει επίπεδο κάθετο στο περύγιο και παράλληλο στην επερχόμενη ροή. Για την ικανοποίηση του πρώτου νόμου του Helmholtz (συνέχεια στροβιλότητας) στα σημεία του περυγίου είναι απαραίτητο η διαφορά έντασης στροβιλότητας μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων κατά μήκος του ανοίγματος να παροχετεύεται στον ομόρρου. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται στο σχήμα 65β που ακολουθεί. Ειδικότερα έστω δύο θέσεις y και $y+\delta y$ κατά το άνοιγμα του περυγίου. Αν με Γ συμβολίσουμε την κυκλοφορία (ένταση του σωλήνα στροβιλότητας) στη θέση y και $\delta\Gamma$ την παροχή στροβιλότητας στον ομόρρου μεταξύ των θέσεων y και $y+\delta y$, τότε η κυκλοφορία στη θέση $y+\delta y$ θα είναι $\Gamma(y+\delta y)=\Gamma-\delta\Gamma$ (προκειμένου να ισχύει η συνέχεια της στροβιλότητας). Δηλαδή:

$$\delta\Gamma = \Gamma(y) - \Gamma(y+\delta y) \Rightarrow \delta\Gamma = \frac{-d\Gamma(y)}{dy} \delta y \Rightarrow \delta\Gamma = -\Gamma'(y) \delta y \quad (73)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Kutta – Zoukowski η άνοση του περυγίου (lift) ανά μονάδα ανοίγματος δίνεται από την σχέση:

$$\vec{l} = \rho \vec{V} \times \vec{\Gamma}$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, $\vec{V}$ η ταχύτητά του και $\vec{\Gamma}$ η ένταση του σωλήνα στροβιλότητας.



Σχήμα 65β: Σχέση μεταξύ προσδεμένης και ακολουθούσης στροβιλότητας.

Στα σχήματα 65α και 65β μπορούμε να παρατηρήσουμε δύο ακόμα πράγματα:

Η ένταση του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας (trailing vortex sheet) είναι περίπου μηδέν στο μέσο του ανοίγματος του πτερυγίου και μεγαλώνει καθώς πλησιάζουμε σημεία του ακροπτερυγίου.

Καθώς αυξάνεται το άνοιγμα s (span) του πτερυγίου η κεντρική περιοχή (με περίπου μηδενική ακολουθούσα στροβιλότητα) επεκτείνεται και στο όριο (απείρου ανοίγματος) η ροή τείνει να γίνει διδιάστατη.

2.6 Κατώρευμα

Έστω σημείο y_1 κατά μήκος του ανοίγματος του πτερυγίου (σχήμα 65β). Η επαγόμενη ταχύτητα από την ημίαιρη ακολουθούσα δίνη έντασης $\delta\Gamma$ δια του σημείου 1γγ δίνεται από την σχέση:

$$\delta w_{y_1} = \frac{-\Gamma'(y)d\gamma}{4\pi(y-y_1)}$$

Προσθέτοντας τις συνεισφορές όλων των ακολουθούντων δινών, η συνολική ταχύτητα στο σημείο y_1 δίνεται από την σχέση:

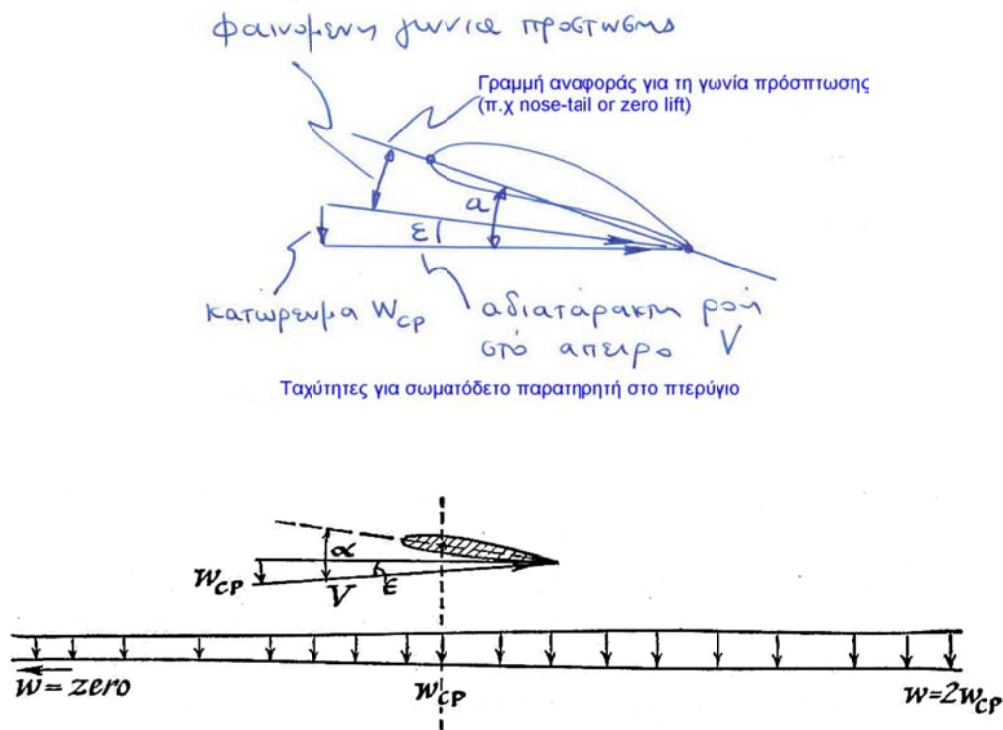
$$w_{y_1} = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'(y)d\gamma}{y-y_1} \quad (74)$$

Η συνολική επαγόμενη ταχύτητα ονομάζεται και κατώρευμα (downwash).

2.6.1 Οι συνέπειες του κατωρέματος – Αντίσταση λόγω ακολουθούσης στροβιλότητας

Η επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο y_1 από την ακολουθούσα στροβιλότητα έχει γενικά διεύθυνση κάθετη στην επ' άπειρο ταχύτητα V και φορά προς τα κάτω (κατώρευμα) (ισχύει μόνο για την γραμμική θεωρία δηλαδή με ομόρρου στο επίπεδο XY). Η κατανομή του κατωρέματος σε σημεία μπροστά (από όπου έρχεται η ροή) και πίσω από την πτέρυγα φαίνεται στο σχήμα 66. Ειδικότερα καθώς απομακρυνόμαστε μπροστά από την πτέρυγα το κατώρευμα μηδενίζεται (απομακρυνόμαστε από την διαταραχή). Καθώς πλησιάζουμε στο σημείο y_1 της πτέρυγας το κατώρευμα παίρνει τιμή που δίνεται από την σχέση (74). Καθώς προχωρούμε κατά τη φορά της ροής το κατώρευμα μεγαλώνει με οριακή τιμή το διπλάσιο της τιμής του στη θέση y_1 . Σαν αποτέλεσμα η φαινόμενη διεύθυνση της ροής για παρατηρητή πάνω στην πτέρυγα (εσωτερικό πρόβλημα) τροποποιείται κατά γωνία ε που δίνεται από την σχέση (σχήμα 66, 67):

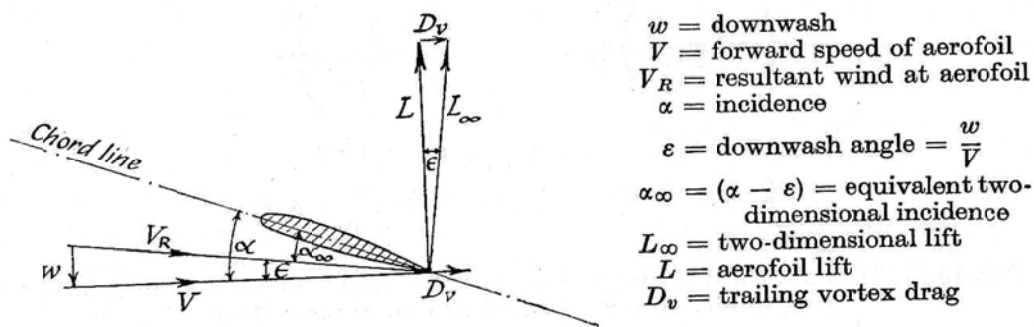
$$\varepsilon = \tan^{-1} \frac{w}{V} \cong \frac{w}{V}, \quad (\varepsilon \text{ σε ακτίνια})$$



Σχήμα 66: Μεταβολή του κατωρεύματος σε σημεία μπροστά και πίσω από την πτέρυγα, α συμβολίζει την γεωμετρική γωνία πρόσπτωσης, V την αδιατάρακτη ροή στο άπειρο.

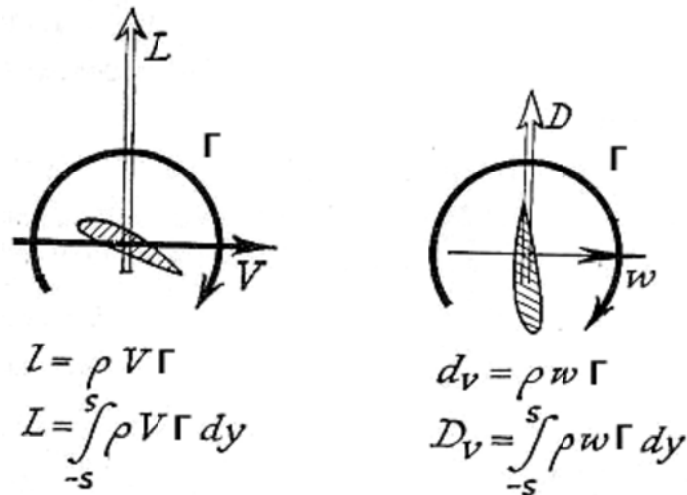
Η επίδραση της αλλαγής της διεύθυνσης της ταχύτητας στις δυνάμεις που αναπτύσσονται από την πτερυγοτομή στη θέση y_1 φαίνεται στο σχήμα 67. Πιο συγκεκριμένα στο σχήμα 67 φαίνεται η άνωση L_∞ που ο εσωτερικός παρατηρητής θεωρεί ότι αναπτύσσεται λαμβανομένου υπόψη και του καταρεύματος (κάθετη στην φαινόμενη ταχύτητα VR) και L η προβολή της L_∞ κάθετα στην αδιατάρακτη ροή V. Προβάλλοντας την άνωση L_∞ κατά τις διευθύνσεις κάθετα και παράλληλα στην επ' άπειρο (αδιατάρακτη) ταχύτητα V προκύπτουν οι συνιστώσες $L = L_\infty \cos \varepsilon \approx L_\infty$ και $D_v = L_\infty \sin \varepsilon \approx L_\infty \varepsilon$. Δηλαδή η ύπαρξη του ακολουθούντος φύλλου

στροβιλότητας (εξωτερική ροή) οδηγεί στην ανάπτυξη δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση του πτερυγίου κατά τη διεύθυνση V . Η δύναμη αυτή ονομάζεται και «αντίσταση λόγω ακολουθούσης στροβιλότητας» (trailing vortex drag) ή «επαγόμενη αντίσταση» (**induced drag**) ή και «οπισθέλκουσα». Η οπισθέλκουσα είναι τμήμα του κόστους που θα πρέπει να πληρώσουμε προκειμένου μία τρισδιάστατη πτέρυγα να αναπτύξει άνοση (κόστος πρόωσης). Το υπόλοιπο κόστος που θα πρέπει να πληρωθεί σχετίζεται με συνεκτικά φαινόμενα, τα οποία προς το παρόν έχουν παραληφθεί από τη θεωρία μας. Τέλος, να σημειωθεί ότι η οπισθέλκουσα αντιπροσωπεύει την απώλεια ενέργειας για τον σχηματισμό ενός ολοένα αυξανόμενου σε μήκος ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας.



Σχήμα 67: Η επίδραση του κατωρεύματος στην ταχύτητα και τις δυνάμεις της πτερυγοτομής στη θέση y_1 . α συμβολίζει την γεωμετρική γωνία πρόσπτωσης, V την αδιατάρακτη ροή στο άπειρο και V_R την 'φαινόμενη' επ' άπειρο ταχύτητα για εσωτερικό παρατηρητή λαμβανομένου υπ' όψιν του κατωρεύματος.

Στο σχήμα 68 βλέπουμε την εφαρμογή του νόμου Kutta – Zoukowski στον υπολογισμό της άνοσης και της επαγόμενης αντίστασης πτερυγίου:



Σχήμα 68: Εφαρμογή του νόμου Kutta – Zoukowski για την άνωση και την επαγόμενη αντίσταση.

Πιο συγκεκριμένα η άνωση ανά μονάδα ανοίγματος $\left(l = \frac{dL}{dy} \right)$ στην περυγοτομή (θέση y_1) δίνεται από την σχέση:

$$l = \rho V \Gamma \quad (75)$$

Η συνολική άνωση του περυγίου δίνεται από την σχέση:

$$L = \int_{-s}^s \rho V \Gamma dy \quad (76)$$

Η επαγόμενη αντίσταση ανά μονάδα ανοίγματος $\left(d_v = \frac{dD_v}{dy} \right)$ στην περυγοτομή (θέση y_1) δίνεται από την σχέση:

$$d_v = \rho w \Gamma \quad (77)$$

Η συνολική επαγόμενη αντίσταση του περυγίου δίνεται από την σχέση:

$$D_v = \int_{-s}^s \rho w \Gamma dy \quad (78)$$

Από την σχέση (78) είναι προφανές ότι μηδενισμός του κατωρρέυματος οδηγεί σε μηδενισμό της επαγόμενης αντίστασης.

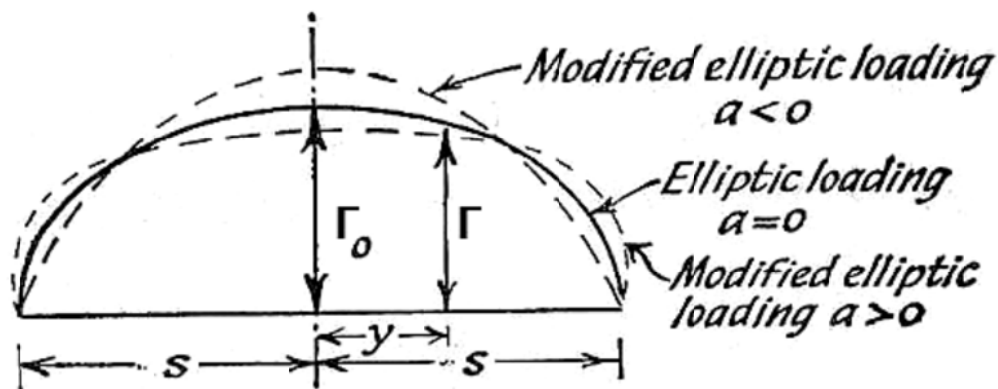
2.7 Υπολογισμός των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών πτέρυγας για την περίπτωση απλής φόρτισης ελλειπτικής μορφής

Θα εξετάσουμε ακολούθως τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά πτερυγίου με δεδομένη φόρτιση κατά μήκος του ανοίγματος. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με φόρτιση ελλειπτικής μορφής ενώ τη γενικότερη περίπτωση θα εξετάσουμε στην παράγραφο 2.7.2.

Η εξίσωση της έλλειψης με ημιάξονες Γ_0 και s (σχήμα 69) είναι:

$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1$$

$$\text{ή } \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} \quad (79)$$



Σχήμα 69: Ελλειπτική και τροποποιημένη ελλειπτική φόρτιση για σταθερή συνολική άνωση.

Η εξίσωση (79) για την κατανομή της κυκλοφορίας κατά μήκος του ανοίγματος μπορεί να αντικατασταθεί στις σχέσεις (76), (74) και (78) προκειμένου να υπολογιστούν η άνωση, το κατώρευμα και η επαγόμενη αντίσταση του πτερυγίου ως ακολούθως:

Άνωση (ελλειπτική κατανομή φόρτισης):

$$L = \int_{-s}^s \rho V T dy = \int_{-s}^s \rho V T_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} dy \Rightarrow L = \rho V T_0 \pi \frac{s}{2} \quad (80)$$

Ως εκ τούτου:

$$\Gamma_0 = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V \pi s}$$

ή εισάγοντας τον συντελεστή άνωσης

$$C_L: L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

(σχέση ορισμού για το C_L , S: εμβαδόν επιφάνειας πτερυγίου), οπότε η σχέση (20) γίνεται:

$$\Gamma_0 = \frac{C_L V S}{\pi s} \quad (81)$$

Η σχέση (81) δίνει την κυκλοφορία στο μέσον του ανοίγματος του πτερυγίου (μοναδική παράμετρος καθορισμού της κατανομής της κυκλοφορίας στη σχέση (79)) συναρτήσει του συνολικού συντελεστή άνωσης του πτερυγίου και των γεωμετρικών παραμέτρων s (ημιάνοιγμα πτερυγίου) και S (εμβαδόν επιφάνειας πτερυγίου).

Κατώρευμα (ελλειπτική κατανομή φόρτισης):

Παραγωγίζοντας την σχέση (79) έχουμε:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\Gamma_0 \frac{y}{s^2} \left[1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{\Gamma_0}{s} \frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (74) έχουμε:

$$w_{y_1} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \int_{-s}^s \frac{y dy}{\sqrt{s^2 - y^2} (y - y_1)}$$

Προσθέτοντας το $y_1 - y_1$ στον αριθμητή έχουμε:

$$w_{y_1} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \int_{-s}^s \frac{(y - y_1) + y_1}{\sqrt{s^2 - y^2} (y - y_1)} dy = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \left[\int_{-s}^s \frac{dy}{\sqrt{s^2 - y^2}} + y_1 \int_{-s}^s \frac{dy}{\sqrt{s^2 - y^2} (y - y_1)} \right]$$

Υπολογίζοντας το πρώτο ολοκλήρωμα του τρίτου μέλους και συμβολίζοντας με I το δεύτερο ολοκλήρωμα του τρίτου μέλους έχουμε:

$$w_{y_1} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} [\pi + y_1 I] \quad (82)$$

Όπως μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μιγαδικές συναρτήσεις και το θεώρημα των υπολοίπων (residue theorem), το ολοκλήρωμα $I=0$. Ως εκ τούτου η σχέση για το κατώρευμα γίνεται:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4s} \quad (83)$$

Δηλαδή στην περίπτωση της ελλειπτικής φόρτισης **το κατώρευμα είναι σταθερό** σε κάθε σημείο y_1 κατά μήκος του ανοίγματος της πτέρυγας.

Επαγόμενη αντίσταση ελλειπτικής κατανομής φόρτισης

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (83) στην εξίσωση (78) παράγεται η ακόλουθη σχέση για την επαγόμενη αντίσταση:

$$D_v = \int_{-s}^s \rho w \Gamma dy = \int_{-s}^s \rho \frac{\Gamma_0}{4s} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} dy$$

ή, μετά από πράξεις:

$$D_v = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 \quad (84)$$

Εισάγοντας τον συντελεστή επαγόμενης αντίστασης C_{D_v} από την ακόλουθη σχέση:

$$D_v = C_{D_v} \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

και υπενθυμίζοντας την σχέση (81):

$$\Gamma_0 = \frac{C_L V S}{\pi s}$$

η σχέση (84) γίνεται:

$$C_{D_v} \frac{1}{2} \rho V^2 S = \left(\frac{C_L V S}{\pi s} \right)^2 \frac{\pi}{8} \rho$$

ή ισοδύναμα:

$$\boxed{C_{D_v} = \frac{C_L^2}{\pi A R}} \quad (85)$$

όπου για την παραγωγή της (85) χρησιμοποιήθηκε ο ακόλουθος ορισμός του «λόγου επιμήκους» (aspect ratio) AR της πτέρυγας:

$$AR \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \frac{span^2}{area} = \frac{(2s)^2}{S}$$

(για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πτερύγιο: $AR = \frac{span}{chord}$)

Η σχέση (85) δείχνει ότι:

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης είναι ανάλογος του συντελεστή άνωσης στη δευτέρα δύναμη. Προφανώς για μηδενική άνωση (συμμετρική πτέρυγα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης) η επαγόμενη αντίσταση είναι μηδέν.

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου επιμήκους της πτέρυγας. Για τον ίδιο συντελεστή άνωσης, αυξανόμενου του λόγου επιμήκους ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης μικραίνει. Στο όριο $AR \rightarrow \infty$ η πτέρυγα τείνει να αποκτήσει παντού διδιάστατη ροή και η σχέση (85) δείχνει ότι η επαγόμενη αντίσταση τείνει στο μηδέν!!!.

2.7.1 Υπολογισμός των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών πτέρυγας για την περίπτωση τροποποιημένης ελλειπτικής κατανομής φόρτισης

Η χρήση ελλειπτικής κατανομής φόρτισης δίνει ιδιαίτερα απλές εκφράσεις για τους συντελεστές άνωσης, επαγόμενης αντίστασης και κατωρεύματος. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την περίπτωση φόρτισης που προκύπτει σαν διαταραχή της ελλειπτικής φόρτισης, διατηρεί όμως τη συμμετρία γύρω από το μέσο του ανοίγματος του πτερυγίου, ενώ ικανοποιεί και τις ίδιες συνθήκες (μηδενικής φόρτισης) στα άκρα.

Η εξίσωση της «τροποποιημένης ελλειπτικής κατανομής» είναι η ακόλουθη:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} \left(1 + a \left(\frac{y}{s}\right)^2\right)$$

Γραφική αναπαράσταση της τροποποιημένης ελλειπτικής φόρτισης για διαφορετικές τιμές του a φαίνεται στο σχήμα 69.

Άνωση (τροποποιημένη ελλειπτική κατανομή φόρτισης):

Από την εξίσωση (76) η άνωση δίνεται από την σχέση:

$$L = \int_{-s}^s \rho V T d\psi = \int_{-s}^s \rho V T_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} \left(1 + a \left(\frac{y}{s}\right)^2\right) d\psi$$

Χρησιμοποιώντας την συμμετρία του πυρήνα ολοκλήρωσης η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$L = 2\rho V T_0 \int_0^s \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} \left(1 + a \left(\frac{y}{s}\right)^2\right) d\psi$$

Για τον αναλυτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος του δευτέρου μέλους της προηγούμενης σχέσης κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών: $y = s \sin \phi$, οπότε:

$$d\psi = s \cos \phi d\phi$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση στο ολοκλήρωμα για την άνωση και παρατηρώντας ότι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς ϕ είναι από 0 έως $\pi/2$, έχουμε:

$$L = 2\rho V T_0 s \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi (1 + a \sin^2 \phi) d\phi$$

Γράφοντας όπου $a=4\lambda$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$L = 2\rho V T_0 s \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \phi + 4\lambda \cos^2 \phi \sin^2 \phi) d\phi$$

Και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα παίρνουμε:

$$L = 2\rho V T_0 s \left[\frac{\pi}{4} + 4\lambda \frac{\pi}{16} \right]$$

ή:

$$L = \rho V T_0 s \frac{\pi}{2} (1 + \lambda) \quad (86)$$

ή, συναρτήσει του συντελεστή άνωσης:

$$C_L = \frac{\pi \Gamma_0 s}{VS} (1 + \lambda) \quad (87)$$

Κατώρευμα (τροποποιημένη ελλειπτική κατανομή φόρτισης):

Υπενθυμίζουμε την σχέση (14) για το κατώρευμα:

$$w_{y_1} = \frac{-1}{4\pi} \int_{-s}^s \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y - y_1}$$

Στην ακριβώς προηγούμενη παράγραφο (δηλαδή στον υπολογισμό της άνωσης) η ύπαρξη συμμετρίας της ολοκληρωτέας ποσότητας είχε οδηγήσει στην επιλογή της αντικατάστασης $y = s \sin \theta$. Στην παρούσα περίπτωση δεν έχουμε τέτοια συμμετρία και μια πιο κατάλληλη αντικατάσταση παρέχεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$y = -s \cos \theta, \quad y_1 = -s \cos \theta_1 \quad (88)$$

οπότε:

$$\text{για } y = -s, \theta = 0, \quad \text{για } y = +s, \theta = \pi$$

Θέτουμε επίσης (όπως προηγουμένως): $a = 4\lambda$. Έτσι η σχέση για το κατώρευμα γίνεται:

$$w_{\theta_1} = \frac{-1}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{\left(\frac{d\Gamma}{d\theta}\right) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} \quad (89)$$

και οι σχέσεις για την κατανομή φόρτισης γίνονται:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (1 + 4\lambda \cos^2 \theta) \\ \frac{d\Gamma}{d\theta} &= \Gamma_0 \{ \cos \theta [1 + 4\lambda \cos^2 \theta] + (-8\lambda \sin^2 \theta \cos \theta) \} \\ &= \Gamma_0 \{ \cos \theta [1 + 4\lambda \cos^2 \theta] + (-8\lambda (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta) \} \\ &= \Gamma_0 [(1 - 8\lambda) \cos \theta + 12\lambda \cos^3 \theta] \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$$

η σχέση για την κλίση της κατανομής φόρτισης γίνεται:

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = \Gamma_0 [(1 + \lambda) \cos \theta + 3\lambda \cos 3\theta]$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη στην σχέση (89) έχουμε:

$$w_{\theta_1} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \int_0^\pi \left\{ \frac{(1 + \lambda) \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} + \frac{3\lambda \cos 3\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} \right\} d\theta$$

Τα ολοκληρώματα της προηγούμενης σχέσης παρουσιάζουν πυρήνα με ιδιομορφία τύπου Cauchy. Έτσι ως τιμή του ολοκληρώματος νοείται η κύρια τιμή κατά Cauchy (Cauchy principal value). Για τον υπολογισμό τους θα χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα του Glauert:

$$G_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_1}{\sin \theta_1}$$

Το ολοκλήρωμα του Glauert μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μιγαδικών συναρτήσεων και η απόδειξή του βρίσκεται σε βιβλία αεροδυναμικής.

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Glauert η σχέση για το κατώρευμα γίνεται:

$$w_{\theta_1} = \frac{\Gamma}{4\pi s} \left[(1+\lambda) \frac{\pi \sin \theta_1}{\sin \theta_1} + 3\lambda \frac{\pi \sin 3\theta_1}{\sin \theta_1} \right]$$

Χρησιμοποιώντας επιπλέον τις σχέσεις:

$$\frac{\sin 3\theta_1}{\sin \theta_1} = (4 \cos^2 \theta_1 - 1), \quad y_1 = -s \cos \theta_1,$$

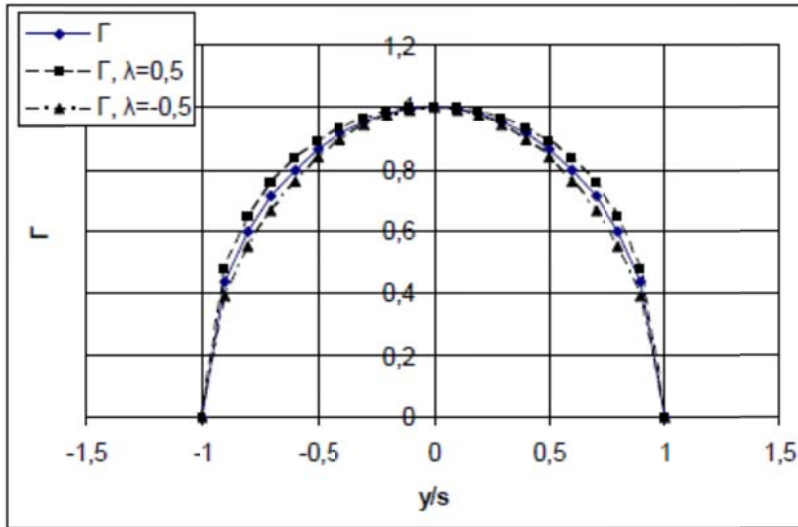
η σχέση για το κατώρευμα γίνεται:

$$w_{\theta_1} = \frac{\Gamma_0}{4s} \left\{ (1+\lambda) + 12\lambda \left(\frac{y_1}{s} \right)^2 - 3\lambda \right\}$$

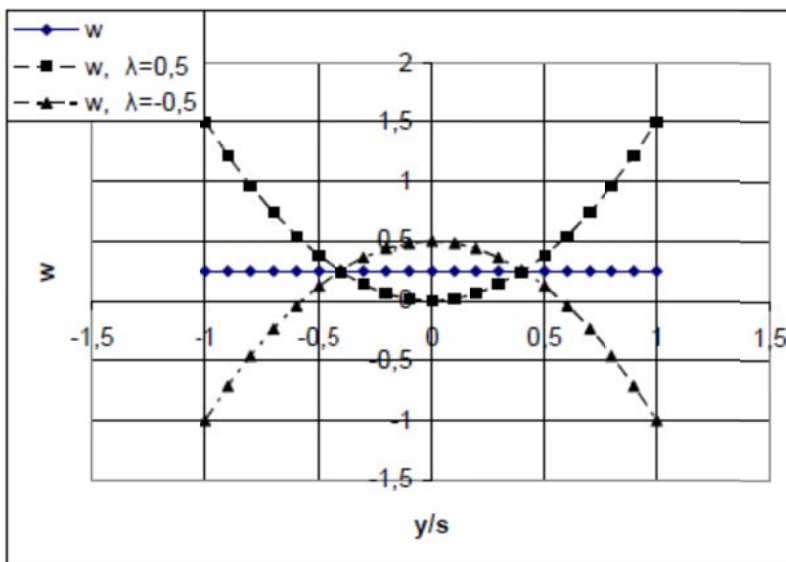
ή ισοδύναμα:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4s} \left\{ 1 - 2\lambda + 12\lambda \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right\} \quad (90)$$

Από την σχέση (90) παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της τροποποιημένης ελλειπτικής φόρτισης το **κατώρευμα μεταβάλλεται κατά μήκος του ανοίγματος**. Μπορεί δε να πάρει ακόμα και αρνητική τιμή στην περιοχή του ακροπτερυγίου (upwash) στην περίπτωση που το $\lambda < -0,1$, βλέπε ακολουθούντα σχήματα.



Κατανομή κυκλοφορίας (ή φόρτισης) για $\Gamma_0=1$, $s=1$ και $\lambda=0$ (elliptic loading), $\lambda=0.5$ (loaded tip), $\lambda=-0.5$ (unloaded tip).



Κατανομή κατωρρέματος (σχέση 90) για $\Gamma_0=1$, $s=1$ και $\lambda=0$ (elliptic loading), $\lambda=0.5$ (loaded tip), $\lambda=-0.5$ (unloaded tip).

Επαγόμενη αντίσταση τροποποιημένης ελλειπτικής κατανομής φόρτισης

Υπενθυμίζουμε την σχέση (78) για την επαγόμενη αντίσταση:

$$D_v = \int_{-s}^s \rho w \Gamma \phi y$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (90) για το κατώρεμα έχουμε:

$$D_v = \int_{-s}^s \frac{\rho \Gamma_0}{4s} \left\{ 1 - 2\lambda + 12\lambda \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right\} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s} \right)^2} \left(1 + 4\lambda \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right) dy$$

Λαμβάνοντας υπόψη την συμμετρία του πυρήνα της προηγούμενης σχέσης και αλλάζοντας μεταβλητές σύμφωνα με τις σχέσεις: $y=s \sin\phi$, $dy=s \cos\phi d\phi$, έχουμε:

$$D_v = \frac{2\rho\Gamma_0^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\lambda + 12\lambda \sin^2 \phi) \cos^2 \phi (1 + 4\lambda \sin^2 \phi) d\phi$$

ή μετά από πράξεις:

$$D_v = \frac{\rho\Gamma_0^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1 - 2\lambda) \cos^2 \phi + (16\lambda - 8\lambda^2) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + 48\lambda^2 \sin^4 \phi \cos^2 \phi] d\phi$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$D_v = \frac{\rho\Gamma_0^2}{2} \left[(1 - 2\lambda) \frac{\pi}{4} + (16\lambda - 8\lambda^2) \frac{\pi}{16} + 48\lambda^2 \frac{\pi}{32} \right]$$

ή

$$D_v = \frac{\pi\rho\Gamma_0^2}{2} [1 + 2\lambda + 4\lambda^2] \quad (91)$$

Εισάγοντας και πάλι το συντελεστή επαγόμενης αντίστασης:

$$C_{D_v} = \frac{D_v}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (87) η σχέση (91) γίνεται:

$$C_{D_v} = \frac{\pi\rho C_L^2 V^2 S^2 [1 + 2\lambda + 4\lambda^2]}{8\pi^2 s^2 (1 + \lambda)^2}$$

ή ισοδύναμα:

$$(92) \quad C_{D_v} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \left[1 + \frac{3\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right]$$

Εισάγοντας περαιτέρω:

$$\delta = 3 \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^2$$

η σχέση (32) γίνεται:

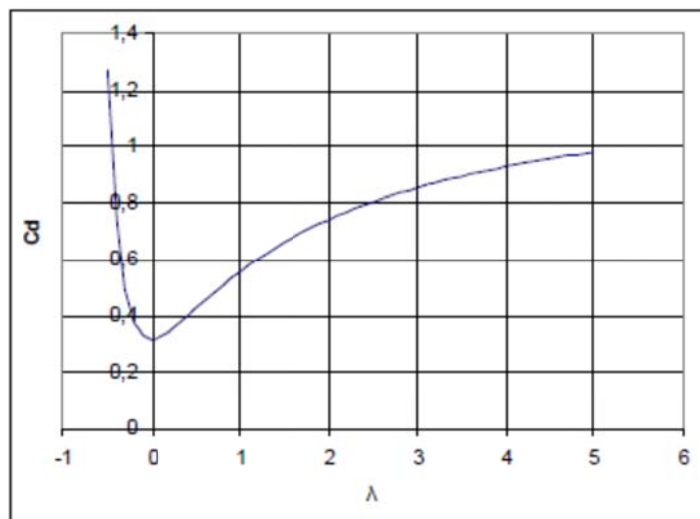
$$C_{D_v} = \frac{C_L^2}{\pi AR} [1 + \delta]$$

(93)

Υπενθυμίζεται ότι

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{s}\right)^2} \left(1 + 4\lambda \left(\frac{y}{s}\right)^2\right), \alpha = 4\lambda,$$

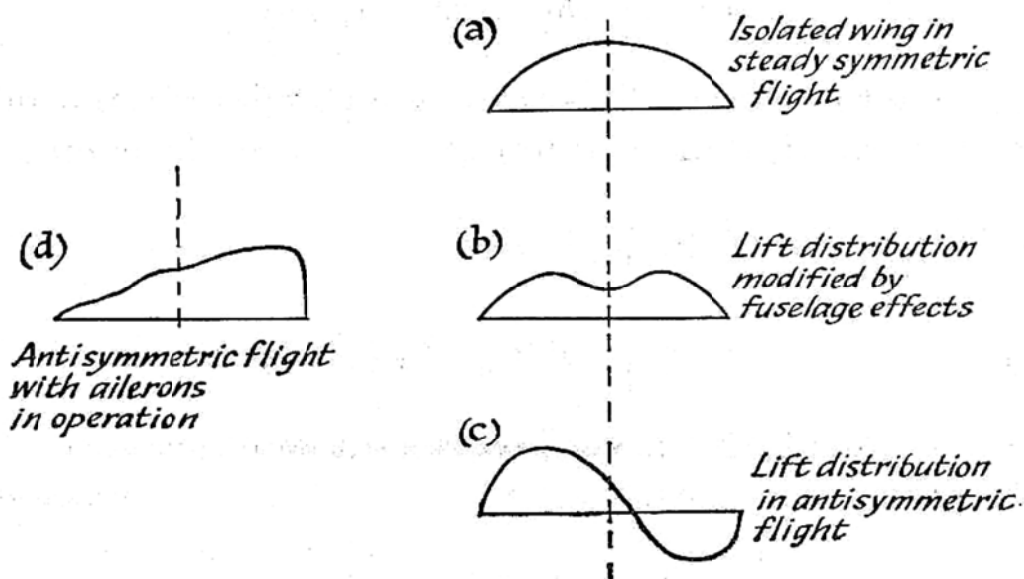
Συγκρίνοντας την σχέση (93) με την αντίστοιχη σχέση επαγόμενης αντίστασης ελλειπτικής φόρτισης (σχέση 85), παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε τροποποίηση της ελλειπτικής φόρτισης οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή επαγόμενης αντίστασης (το δ είναι πάντα θετικό), βλέπε και σχήμα που ακολουθεί. Αντιθέτως προκειμένου η επαγόμενη αντίσταση να είναι ελάχιστη θα πρέπει το $\delta=0$, οπότε $\lambda=0$ και η φόρτιση θα πρέπει να είναι ελλειπτική. Παρατηρήστε επίσης (επόμενο σχήμα) την ασυμμετρία του CD ως προς μεταβολές του λ στη γειτονιά της ελλειπτικής φόρτισης. Ειδικότερα θετικές τιμές του λ (tip loading) επηρεάζουν λιγότερο την επαγόμενη αντίσταση από ότι οι αντίστοιχες αρνητικές τιμές του λ (tip unloading). Να σημειωθεί τέλος ότι για κατανομές φόρτισης σημαντικά διαφέρουσες από την ελλειπτική η ισχύς της (παρούσας) γραμμικής θεωρίας (επίπεδος ομόρρους) είναι αμφισβητήσιμη.



Επαγόμενη αντίσταση (σχέση 93, $CL=1$, $AR=1$) συναρτήσει της μορφής της φόρτισης – συντελεστής λ .

2.7.2 Υπολογισμός των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών πτέρυγας για την περίπτωση γενικής κατανομής φόρτισης στα πλαίσια της θεωρίας φέρουσας γραμμής

Στις παραγράφους 2.7 και 2.7.1 εξετάστηκε η περίπτωση ελλειπτικής και τροποποιημένης ελλειπτικής φόρτισης κατά μήκος του ανοίγματος του πτερυγίου. Χαρακτηριστικό των περιπτώσεων αυτών ήταν η συμμετρία της φόρτισης γύρω από το μέσο του ανοίγματος της πτέρυγας (συμμετρική πτήση, σχήμα 70a,b). Η απλότητα της φόρτισης των δύο προηγούμενων παραγράφων μας έδωσε την δυνατότητα παραγωγής αναλυτικών εκφράσεων για την άνωση, την επαγόμενη αντίσταση και το κατώρευμα. Στη γενική περίπτωση ασύμμετρης φόρτισης (σχήμα 70c,d) η προηγούμενη μεθοδολογία θα πρέπει να αντικατασταθεί από την αριθμητική μέθοδο που έχει ιστορικά υιοθετηθεί για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων του μοντέλου της θεωρίας φέρουσας γραμμής. Η βασική διαφορά της μεθόδου αυτής από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους είναι ότι καταλήγει σε εκφράσεις που απαιτούν στοιχειώδη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για να υλοποιηθούν.



Σχήμα 70: Φορτίσεις κατά μήκος του ανοίγματος για συμμετρική ή μη συμμετρική πτήση.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Kutta – Zoukowski η άνωση l ανά μονάδα ανοίγματος στη θέση y_1 της πτερυγοτομής συνδέεται με την κυκλοφορία Γ στην ίδια θέση με την σχέση:

$$l = \rho V \Gamma, \text{ όπου } \Gamma = \oint \frac{dL}{dy}$$

(94)

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συντελεστή άνωσης η σχέση (94) γίνεται:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{dC_L}{dy} V \cdot S \quad (95)$$

Στην σχέση (95) παρατηρούμε ότι οι διαστάσεις της κυκλοφορίας είναι ίδιες με τις διαστάσεις του γινομένου ταχύτητας επί μήκος. Στη συνέχεια και για λόγους απλότητας των τελικών σχέσεων εισάγουμε την αδιάστατη κυκλοφορία G από την σχέση:

$$G \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \frac{\Gamma}{4Vs} \quad (96)$$

όπου s το ημίανοιγμα της πτέρυγας. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της ανάλυσης κάθε ομαλή συνάρτηση $G(\theta)$ που ικανοποιεί τις (περιοδικές) συνθήκες:

$$G(0)=0, G(\pi)=0 \quad (97)$$

μπορεί να αναπαρασταθεί από σειρά Fourier ως ακολούθως:

$$G = \sum_1^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (98)$$

Η σχέση (98) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση της αδιάστατης κατανομής φόρτισης πτέρυγας όπου το θ συνδέεται με το y μέσω των ακολούθων σχέσεων:

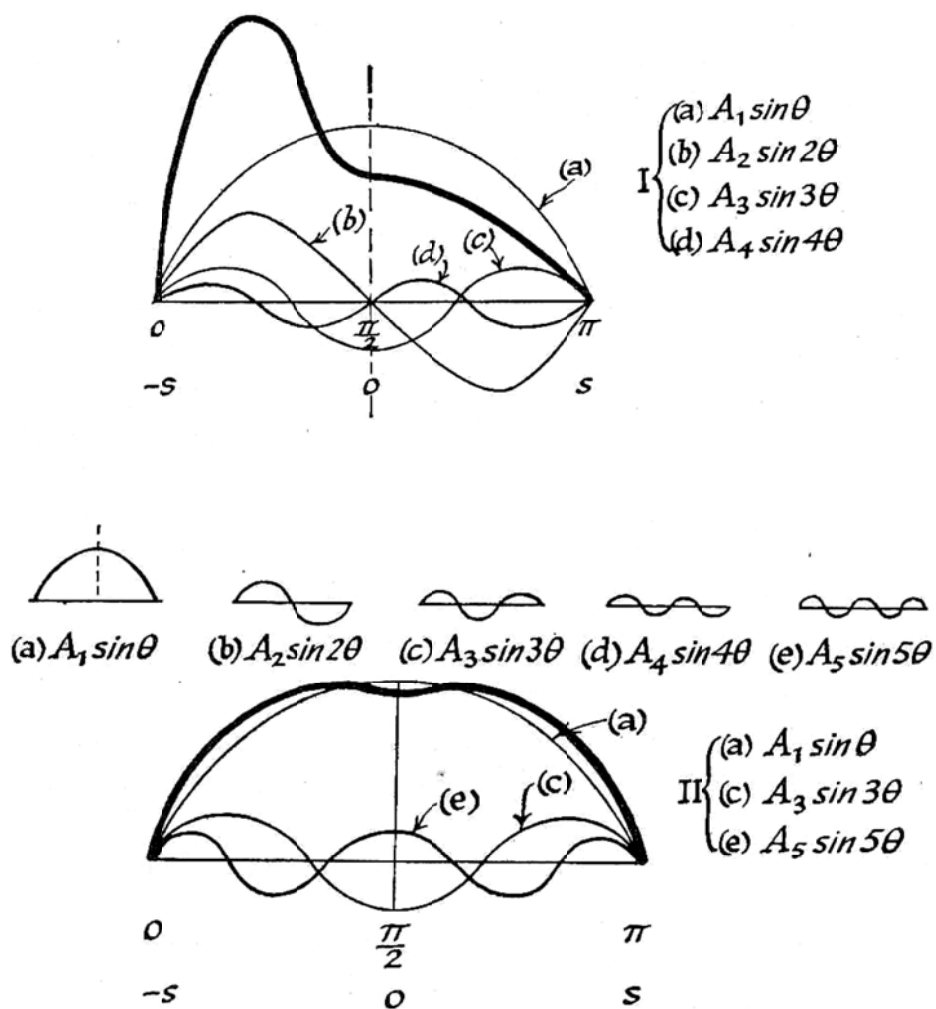
$$y = -s \cos \theta \quad (\text{για } y = -s, \theta = 0, \quad \text{για } y = +s, \theta = \pi) \quad (99)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (96) τη σχέση (98) έχουμε:

$$\Gamma = 4sV \sum_1^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (100)$$

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση (94):

$$l = 4\rho V^2 s \sum_1^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (101)$$



Σχήμα 71: Χρήση σειράς Fourier για την αναπαράσταση της κατανομής κυκλοφορίας κατά μήκος του ανοίγματος.

Άνωση (γενική κατανομή φόρτισης):

Υπενθυμίζουμε την σχέση (76) για την άνωση του πτερυγίου:

$$L = \int_{-s}^s \rho V T dy$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή ολοκλήρωσης σύμφωνα με τη σχέση $y = -s \cos \theta$, η άνωση γίνεται

$$L = \int_0^\pi \rho V T s \sin \theta d\theta$$

Αντικαθιστώντας και τη σχέση (100) έχουμε:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \rho V 4Vs^2 \sum A_n \sin n\theta \sin \theta d\theta \\ &= 4s^2 \rho V^2 \int_0^\pi \sum \frac{1}{2} A_n (\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta) d\theta \\ &= 4s^2 \rho V^2 \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^\infty A_n \left(\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right) \right]_0^\pi \end{aligned}$$

Καταγράφοντας τους όρους της σειράς μέσα στις αγκύλες παρατηρούμε ότι για $\theta=0$ ή $\theta=\pi$ είναι όλοι μηδέν (οι αριθμητές είναι μηδέν) με εξαίρεση τον πρώτο όρο ο οποίος έχει την απροσδιόριστη μορφή 0/0. Ως εκ τούτου:

$$\frac{\sin 0\theta}{0} + \frac{\sin 1\theta}{1} + \dots - \frac{\sin 2\theta}{2} - \dots \bigg|_0^\pi = \frac{\sin 0\theta}{0} \bigg|_0^\pi = \theta \bigg|_0^\pi = \pi$$

αφού:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r\theta}{r} = \theta$$

οπότε:

$$L = A_1 \pi \frac{1}{2} \rho V^2 4s^2 = C_L \frac{1}{2} \rho v^2 S$$

και εισάγοντας το λόγο επιμήκους:

$$AR = \frac{(2s)^2}{S}$$

Έχουμε:

$$\boxed{C_L = \pi A_1 AR} \quad (102)$$

Η σχέση (102) δείχνει ότι ο συντελεστής άνωσης δεν εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της κατανομής φόρτισης αλλά μόνο από τον πρώτο όρο του αναπτύγματος της σε σειρά.

Αντικαθιστώντας τον ορισμό του C_L στη σχέση (102) έχουμε:

$$L = 2\pi\rho V^2 s^2 A_1$$

Κατώρευμα (γενική κατανομή φόρτισης):

Αλλάζοντας την μεταβλητή ολοκλήρωσης και τα όρια στη σχέση (74) για το κατώρευμα έχουμε:

$$w_{\theta_1} = \frac{1}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{\frac{d\Gamma}{d\theta} d\theta}{\cos\theta - \cos\theta_1}$$

Στην περίπτωση μας ισχύει η σχέση (100) για την κυκλοφορία:

$$\Gamma = 4sV \sum A_n \sin n\theta$$

Παραγωγίζοντας:

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = 4sV \sum nA_n \cos n\theta$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη στην έκφραση για το κατώρευμα έχουμε:

$$w_{\theta_1} = \frac{4sV}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{\sum nA_n \cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_1} d\theta = \frac{V}{\pi} \sum nA_n \frac{\pi \sin n\theta_1}{\sin\theta_1}$$

Όπου για τη μετάβαση από το δεύτερο στο τρίτο μέλος της ισότητας χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα Glauert.

Συμβολίζοντας με θ το γενικό σημείο κατά το άνοιγμα της πτέρυγας η σχέση για το κατώρευμα γίνεται:

$$w = V \frac{\sum nA_n \sin n\theta}{\sin\theta} \quad (103)$$

Όπως φαίνεται η σχέση για το κατώρευμα περιλαμβάνει όλους τους όρους για την κατανομή φόρτισης σε αντίθεση με την άνωση που εξαρτάται από τον πρώτο μόνο όρο.

Επαγόμενη αντίσταση γενικής κατανομής φόρτισης

Αντικαθιστώντας την σχέση (103) για το κατώρευμα στην $D_v = \int_{-s}^s \rho w \Gamma dy$ σχέση έχουμε:

$$D_v = \int_0^\pi \rho \frac{V \sum nA_n \sin n\theta}{\sin\theta} 4sV (\sum A_n \sin n\theta) s \sin\theta d\theta$$

Όπου έγινε αλλαγή μεταβλητής και ορίου ολοκλήρωσης αντίστοιχη με αυτήν υπολογισμού της άνωσης. Μετά από πράξεις η προηγούμενη σχέση παίρνει την μορφή:

$$D_v = 4\rho V^2 s^2 \int_0^\pi (\sum n A_n \sin n\theta) (\sum A_n \sin n\theta) d\theta$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (A_1 \sin \theta + 2A_2 \sin 2\theta + 3A_3 \sin 3\theta \dots) (A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta \dots) d\theta \\ &= \int_0^\pi (A_1^2 \sin^2 \theta + 2A_2^2 \sin^2 2\theta + 3A_3^2 \sin^2 3\theta \dots + (A_1 A_2 \sin \theta \sin 2\theta \dots)) d\theta \end{aligned}$$

Κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος όλοι οι όροι εκτός από τους υψωμένους στο τετράγωνο μηδενίζονται διότι ισχύει:

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ ακέραιοι και } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ ακέραιοι και } m = n \end{cases}$$

Άρα έχουμε

$$I = \int_0^\pi (A_1^2 \sin^2 \theta + 2A_2^2 \sin^2 2\theta + 3A_3^2 \sin^2 3\theta + \dots) d\theta = \frac{\pi}{2} (A_1^2 + 2A_2^2 + 3A_3^2 + \dots) = \frac{\pi}{2} \sum n A_n^2$$

Με τις τελευταίες παρατηρήσεις η σχέση για την επαγόμενη αντίσταση γίνεται:

$$D_v = 4\rho V^2 s^2 \frac{\pi}{2} \sum n A_n^2 = C_{D_v} \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

Η ισοδυναμία

$$C_{D_v} = \pi A R \sum n A_n^2 \quad (104)$$

Από τη σχέση (102) έχουμε:

$$A_1^2 = \frac{C_L^2}{\pi^2 A R^2}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (104) παίρνουμε:

$$C_{D_v} = \frac{C_L^2}{\pi A R} \sum n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = \frac{C_L^2}{\pi A R} \left[1 + \left(\frac{2A_2^2}{A_1^2} + \frac{3A_3^2}{A_1^2} + \frac{4A_4^2}{A_1^2} + \dots \right) \right]$$

Η εισάγοντας:

$$\delta = \frac{2A_2^2}{A_1^2} + \frac{3A_3^2}{A_1^2} + \frac{4A_4^2}{A_1^2} + \dots$$

Η σχέση για την επαγόμενη αντίσταση γίνεται:

$$\boxed{C_{D_s} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)} \quad (104a)$$

Όπως και στην περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου το δ είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Άρα ελάχιστη επαγόμενη αντίσταση θα έχουμε όταν $\delta=0$, οπότε $A_2=A_3=\dots=0$ και η κατανομή της κυκλοφορίας θα δίνεται από τη σχέση $\Gamma=4sVA_1\sin\theta$ (δηλαδή ελλειπτική φόρτιση).

Ροπές (γενική περίπτωση φόρτισης)

Στο σχήμα 72 φαίνονται οι ροπές που ασκούνται στην πτέρυγα. Η ροπή «διατοιχισμού» (rolling) δίνεται από τη σχέση (το πρόσημο «-» μπήκε διότι για άνωση κατά τη διεύθυνση Z η ροπή διατοιχισμού –συμφωνα με το σχήμα 72- είναι αρνητική!):

$$L_R = - \int_{-s}^s l y dy = - \int_{-s}^s \rho V \Gamma y dy \quad (105)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $l = \rho V \Gamma$.

Θέτοντας

$$\Gamma = 4sV \sum A_n \sin n\theta$$

Στην σχέση (105) και αλλάζοντας μεταβλητή και όρια ολοκλήρωσης, προκύπτει:

$$\begin{aligned} L_R &= 4\rho s^3 V^2 \int_0^\pi \left(\sum A_n \sin n\theta \right) (s \cos \theta) (s \sin \theta) d\theta = 4\rho s^3 V^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} \left(\sum A_n \sin n\theta \right) \sin 2\theta d\theta \\ &= 2\rho s^3 V^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} \sum A_n [\cos(n-2)\theta - \cos(n+2)\theta] d\theta \\ &= \rho s^3 V^2 \left[\sum_{n=1}^\infty A_n \left(\frac{\sin(n-2)\theta}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\theta}{n+2} \right) \right]_0^\pi \end{aligned} \quad (106)$$

Και υπολογίζοντας το άθροισμα (με τρόπο αντίστοιχο αυτού που χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της άνωσης) προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$L_R = \rho s^3 V^2 A_2 \pi \quad (107)$$

Εισάγοντας τον «συντελεστή ροπής διατοιχισμού» C_R από τη σχέση:

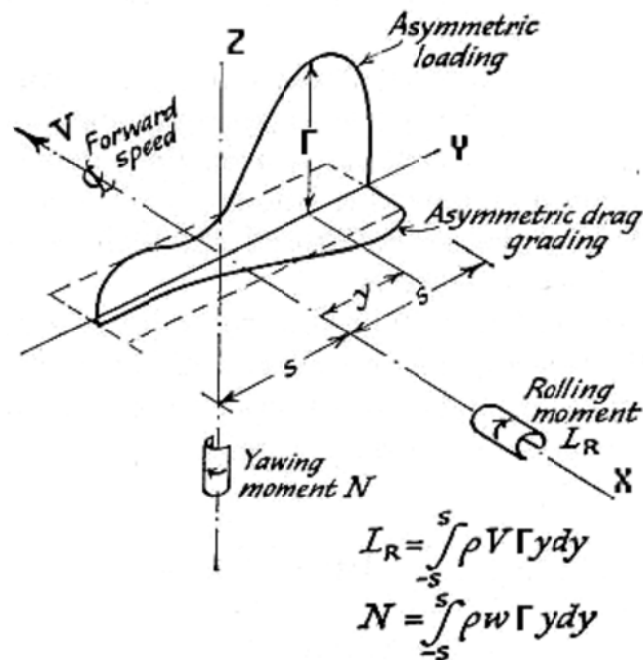
$$C_R^{\text{ορισμός}} = \frac{L_R}{\frac{1}{2} \rho V^2 S s}$$

Η σχέση (107) γράφεται ισοδύναμα:

$$C_R = \frac{\pi}{2} AR A_2 \quad (108)$$

(χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός $AR \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \frac{(2s)^2}{S}$)

Η σχέση (108) δείχνει ότι ο συντελεστής ροπής διατοιχισμού δεν εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της κατανομής κυκλοφορίας (ισοδύναμα: φόρτισης) αλλά μόνο από τον δεύτερο όρο του αναπτύγματός της σε σειρά.



Σχήμα 72: Ασύμμετρο φορτίο και ροπές στην πτέρυγα.

Η «στροφική ροπή» (yawing) δίνεται από την σχέση:

$$N = \int_{-s}^s d\omega y dy = \int_{-s}^s \rho \omega \Gamma y dy \quad (109)$$

Εισάγοντας και πάλι τις εκφράσεις για την κυκλοφορία και το κατώρευμα έχουμε ($y = -s \cos \theta$):

$$\begin{aligned} N &= - \int_0^\pi \rho V \frac{\sum n A_n \sin n\theta}{\sin \theta} 4sV (\sum A_n \sin n\theta) (s \cos \theta) (s \sin \theta) d\theta \\ &= -4\rho s^3 V^2 \int_0^\pi (\sum n A_n \sin n\theta) (\sum A_n \sin n\theta) \cos \theta d\theta = C_N \frac{1}{2} \rho V^2 S s \end{aligned}$$

Όπου C_N ο «συντελεστής στροφικής ροπής». Λύνοντας την τελευταία ως προς C_N λαμβάνουμε:

$$C_N = 2AR \int_0^\pi (\sum n A_n \sin n\theta) (\sum A_n \sin n\theta) \cos \theta d\theta$$

Ή μετά από πράξεις:

$$C_N = \frac{\pi}{2} AR [3A_1 A_2 + 5A_2 A_3 + 7A_3 A_4 + \dots + (2n+1)A_n A_{n+1}] \quad (110)$$

2.8 Η ολοκληρωτική/διαφορική εξίσωση φέρουσας γραμμής για την πτέρυγα. Προβλήματα συμπεριφοράς και σχεδίασης.

Στις προηγούμενες παραγράφους παρήχθησαν σχέσεις μεταξύ της κατανομής της προσδεδμεμένης κυκλοφορίας και των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών μιας πτέρυγας (άνωση, κατώρευμα, επαγόμενη αντίσταση κλπ). Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι σε όλες τις προηγούμενες παραγράφους η γεωμετρία των υδροτομών (σχήμα 62β) δεν εμφανίζεται πουθενά!!! Ο λόγος είναι ότι η συζήτηση των παραγράφων 2.7, 2.7.1, και 2.7.2 αφορούσε το «εξωτερικό πρόβλημα». Όπως ήδη αναφέραμε η θεωρία φέρουσας γραμμής ως ιδιόμορφο πρόβλημα της θεωρίας διαταραχών έχει και ένα «εσωτερικό πρόβλημα». Μεταξύ δε του «εσωτερικού» και του «εξωτερικού» προβλήματος ισχύει μία «σχέση συναρμογής». Παραλείποντας τις λεπτομέρειες της μαθηματικής ανάπτυξης (Van Dyke, 1975) η **σχέση συναρμογής** είναι η ακόλουθη:

$$Ανωση φέρουσας γραμμής|_y \equiv Ανωση διδιαστατης πτερυγοτομης|_y$$

Η φυσική σημασία της σχέσης συναρμογής είναι ότι οι φορμαλισμοί του εξωτερικού και εσωτερικού προβλήματος πρέπει να οδηγούν στην ίδια τιμή για την άνωση της πτερυγοτομής στη θέση y (κατά μήκος του ανοίγματος της πτέρυγας) για κάθε y .

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί η σχέση συναρμογής για να παραχθεί η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση του προβλήματος της ροής γύρω από πτέρυγα. Με βάση την τελευταία αυτή εξίσωση θα εξεταστεί η λύση των προβλημάτων συμπεριφοράς (αν γνωρίζουμε τη γεωμετρία τρισδιάστατης πτέρυγας πως υπολογίζουμε τη φόρτιση της) και σχεδίασης (αντίστροφο πρόβλημα – αν γνωρίζουμε τη φόρτιση της πτέρυγας πως υπολογίζουμε τη γεωμετρία της).

Με βάση την 2-D θεωρία υδροτομών και υποθέτοντας ότι η σχέση άνωσης – γωνίας πρόσπτωσης της διδιάστατης πτερυγοτομής στη θέση y_1 είναι γραμμική έχουμε:

$$C_L = a_\infty [\alpha_\infty - \alpha_0] \quad (111)$$

Όπου $\alpha_\infty = \frac{dC_L}{da}$, α_0 η γωνία μηδενικής άνωσης και α_∞ η φαινόμενη γωνία

πρόσπτωσης (σχήμα 8). Έστω τώρα ε η γωνία κατωρεύματος ($\varepsilon = \frac{w}{V}$ - σχήμα 67).

Τότε $\alpha_\infty = \alpha - \varepsilon$, όπου α η γεωμετρική γωνία πρόσπτωσης. Θέτοντας $\alpha_\infty = \alpha - \varepsilon$ στη σχέση (111) έχουμε:

$$C_L = a_\infty [(\alpha - \alpha_0) - \varepsilon] \quad (112)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό του συντελεστή άνωσης έχουμε:

$$C_L = \frac{\text{lift per unit span}}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \frac{l}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \frac{\rho V \Gamma}{\frac{1}{2} \rho V^2 c}$$

Η ισοδύναμη:

$$C_L = \frac{2\Gamma}{Vc} \quad (113)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (112) και (113) (εφαρμογή της σχέσης συναρμογής) έχουμε:

$$\frac{2\Gamma}{ca_{\infty}} = V(\alpha - \alpha_0) - V\varepsilon \quad (114\alpha)$$

Αλλά:

$$V\varepsilon = w = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s}^s \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y - y_1}$$

$$\frac{2\Gamma}{ca_{\infty}} = V(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^s \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{y - y_1} \quad (114\beta)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (114α) προκύπτει:

Η εξίσωση (114β) είναι η ολοκληρωτική – διαφορική εξίσωση που συνδέει την κυκλοφορία με τη γεωμετρία του πτερυγίου στα πλαίσια των υποθέσεων της θεωρίας φέρουσας γραμμής.

Για να παράγουμε μια πιο ελκυστική μορφή για τη σχέση (114β) αντικαθιστούμε την κυκλοφορία από την ακόλουθη σειρά Fourier:

$$\Gamma = 4sV \sum A_n \sin n\theta$$

Και το κατώρευμα από τη σχέση:

$$w = V \frac{\sum nA_n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

(βλέπε παράγραφο 2.7.2), οπότε λαμβάνουμε:

$$2 \frac{4sV \sum A_n \sin n\theta}{ca_{\infty}} = V(\alpha - \alpha_0) - \frac{V \sum nA_n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

Εισάγοντας την παράμετρο

$$\mu(y) = \frac{c(y)a_z(y)}{8s}$$

Η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\mu(y)(\alpha(y) - \alpha_0(y)) = \sum A_n \sin n\theta \left(1 + \frac{\mu(y)n}{\sin \theta} \right) \quad (115)$$

Εξετάζοντας τις παραμέτρους της σχέσης (115) παρατηρούμε ότι μπορεί να χωριστούν στις ακόλουθες ομάδες:

- $A_1, A_2, \dots$ που χαρακτηρίζουν τη φόρτιση της πτέρυγας (κατανομή κυκλοφορίας κατά μήκος του ανοίγματος).
- $\mu(y)$, παράμετρος που εξαρτάται από την γεωμετρία της τρισδιάστατης πτέρυγας (χορδή και άνοιγμα) και από το συντελεστή $\alpha_\infty = \frac{dC_L}{da}$. Στη γενική περίπτωση η χορδή εξαρτάται από τη θέση y . Το α_∞ εξαρτάται και αυτό από τη θέση y , αλλά πολύ ασθενέστερα και εφ' όσον λάβουμε υπόψη τη συνεκτικότητα. Για μη συνεκτικό ρευστό η θεωρητική τιμή του α_∞ είναι 2π .
- α_0 , που είναι ιδιότητα μιας ισοδύναμης διδιάστατης πτερυγοτομής στη θέση y_1 (γωνία μηδενικής άνωσης – διδιάστατη θεώρηση). Στη γενική περίπτωση η γωνία μηδενικής άνωσης εξαρτάται από την θέση y και έχει σχέση με την κυρτότητα (camber) της υδροτομής στη θέση y .
- α , η γεωμετρική γωνία πρόσπτωσης (σχήμα 67) στη θέση y_1 . Στη γενική περίπτωση πτέρυγας «με συστροφή» (twist) η γεωμετρική γωνία πρόσπτωσης εξαρτάται από την θέση y .

Πρόβλημα συμπεριφοράς (ή ανάλυσης): Για δεδομένη γεωμετρία του πτερυγίου, δεδομένη επ' άπειρο ροή και δεδομένη θέση του (σε σχέση με την επ' άπειρο ροή) να βρεθεί η κατανομή κυκλοφορίας και οι δυνάμεις και ροπές.

Λύση: Όταν όλα τα στοιχεία είναι γνωστά, η σχέση (115) είναι μία γραμμική εξίσωση για τον υπολογισμό των $A_1, A_2, \dots$. Ο υπολογισμός των $A_1, A_2, \dots$ μπορεί να γίνει αριθμητικά γράφοντας τη σχέση (115) για τόσα σημεία κατά μήκος του ανοίγματος της πτέρυγας όσα ο αριθμός των συντελεστών $A_1, A_2, \dots$ που απαιτείται να υπολογιστούν.

Το πρόβλημα συμπεριφοράς είναι «καλώς τεθημένο» (*well posed*), αφού οδηγεί σε γραμμικό σύστημα που καθορίζει μονοσήμαντα τους άγνωστους συντελεστές $A_1, A_2, \dots$.

Πρόβλημα σχεδίασης (αντίστροφο πρόβλημα):

Παραλλαγή 1^η - βέλτιστη σχεδίαση: Στην περίπτωση αυτή δίνεται η 'μεταφορική ικανότητα' του πτερυγίου και ζητείται η βέλτιστη γεωμετρία.

Παραλλαγή 2^η - σχεδίαση με δεδομένη κατανομή φόρτισης κατά μήκος του ανοίγματος: Δίδεται η φόρτιση κατά μήκος του ανοίγματος και ζητείται η γεωμετρία του πτερυγίου. Το πρόβλημα είναι 'κακώς τεθημένο' (*ill posed*) αφού η ικανοποίηση της εξίσωσης (115) σε μία θέση δεν μπορεί να δώσει τιμές στα μ , α και α_0 αλλά μόνο μία σχέση μεταξύ τους στη θέση γ . Ως εκ τούτου κάποια από τα άγνωστα μεγέθη πρέπει να επιλεγούν με άλλα κριτήρια.

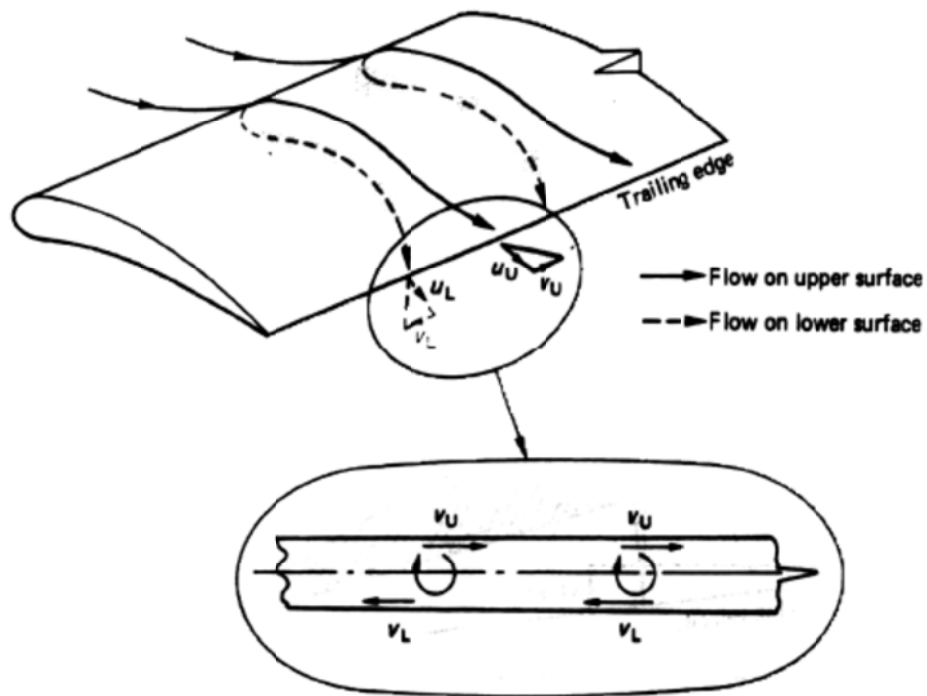
Στην περίπτωση της 2^{ης} παραλλαγής (φόρτιση γνωστή) τα $A_1, A_2, \dots$ είναι γνωστά και η σχέση (115) συσχετίζει τις γεωμετρικές παραμέτρους της πτέρυγας. Για τον μονοσήμαντο καθορισμό τους όμως απαιτούνται και επιπλέον συνθήκες.

2.9 Μη γραμμικά μοντέλα ομόρρου

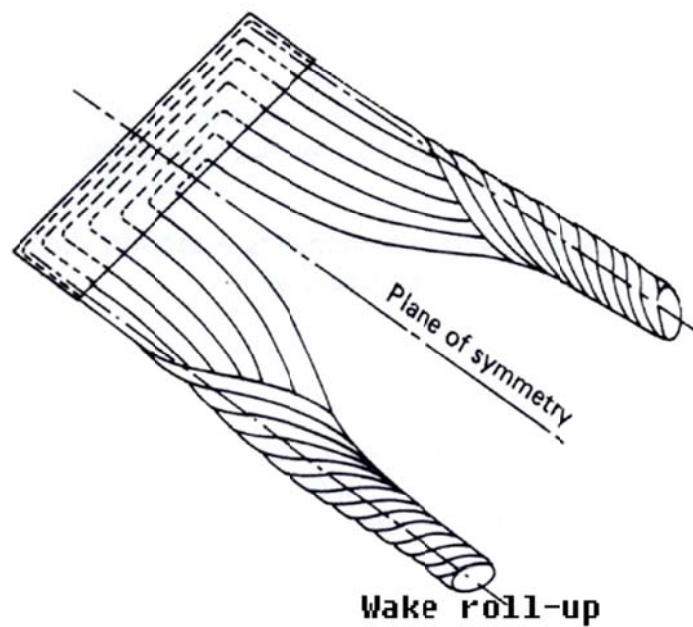
Στο σχήμα 73α φαίνεται η ροή στο χείλος εκφυγής του πτερυγίου και ο σχηματισμός του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας σαν αποτέλεσμα της «συμβολής» των οριακών στρωμάτων των δύο όψεων. Η στροβιλότητα που δημιουργείται στα δύο οριακά στρώματα (όψεις υποπίεσης και υπερπίεσης) ακολουθώντας τη ροή εκβάλλεται στον ομόρρου από την περιοχή του χείλους εκφυγής. Σύμφωνα με τους νόμους του Helmholtz η στροβιλότητα είναι ιδιότητα των υλικών σημείων και ως εκ τούτου μεταφέρεται στον ομόρρου ακολουθώντας τα υλικά σημεία και επηρεάζοντας την μορφή της ροής εκεί (Θ. αναπαράστασης, σχέση 62). Εξετάζοντας ποσοτικά την ένταση του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας παρατηρούμε (σχήματα 65α, 65β) ότι η δίνη ακροπτερυγίου είναι η ισχυρότερη από όλες τις άλλες. Σαν αποτέλεσμα η δίνη αυτή 'κυριαρχεί' απορροφώντας τις ασθενέστερες δίνες. Έτσι στην πραγματικότητα η γεωμετρία του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας δεν είναι επίπεδη αλλά μοιάζει με αυτό που φαίνεται στο σχήμα 73β- μοντέλο ομόρρου με συστροφή. Με την ανάπτυξη των H/Y έχουν αναπτυχθεί μεθοδολογίες αριθμητικού υπολογισμού της πολύπλοκης γεωμετρίας του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας

με σοβαρό βεβαίως υπολογιστικό κόστος. Το θέμα είναι ιδιαίτερα περίπλοκο και ξεφεύγει του σκοπού της παρούσας παρουσίασης. Στις προηγούμενες παραγράφους χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο του ‘παγωμένου ομόρρου’. Ένα βήμα προς την ‘μη γραμμικότητα’ που έγινε αρκετά νωρίς από τους ερευνητές είναι η τροποποίηση της γεωμετρίας των ακολουθούντων γραμμών δίνης ώστε να ευθυγραμμίζονται με την συνιστάμενη ταχύτητα V_R (σχήμα 67) στα σημεία της φέρουσας γραμμής. Το τελευταίο ισοδυναμεί με την ικανοποίηση των δυναμικών νόμων του Helmholtz στα σημεία επί της φέρουσας γραμμής. Το μοντέλο ομόρρου που προκύπτει έτσι ονομάζεται ‘γενικευμένος ομόρρος’ (*generalized wake*). Για την επίλυση του προβλήματος της φέρουσας γραμμής με χρήση του γενικευμένου μοντέλου ομόρρου απαιτείται διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων ως ακολούθως (wake relaxation method – WRM):

- Λύνεται το πρόβλημα όπως περιγράφηκε στις προηγούμενες παραγράφους και υπολογίζεται το κατώρευμα w .
- Υπολογίζεται η συνισταμένη ταχύτητα $\vec{V}_R = \vec{V} + \vec{w}$ στα σημεία επί της φέρουσας γραμμής και υπολογίζεται η νέα γεωμετρία των ακολουθούντων δινών ώστε να είναι ευθυγραμμισμένες με το $\vec{V}_R$. Εάν σε δύο διαδοχικά βήματα η γεωμετρία των ακολουθούντων δινών δεν αλλάζει τότε το πρόβλημα έχει συγκλίνει και οι διαδοχικές προσεγγίσεις σταματούν.
- Επανερχόμαστε στο βήμα 1 και επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό με τη νέα γεωμετρία των ακολουθούντων δινών.



Σχήμα 73α: Ροή στο χείλος εκφυγής πτερυγίου, σχηματισμός του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας σαν αποτέλεσμα της 'συμβολής' των οριακών στρωμάτων των δύο όψεων.



Σχήμα 73β: Ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας με συστροφή (wake roll-up).

3. ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΕΛΙΚΩΝ

3.1 Θεωρίες Φέρουσας γραμμής και Φέρουσας Επιφάνειας

Οι θεωρίες *φέρουσας γραμμής* (lifting line) και *φέρουσας επιφάνειας* (lifting surface) είναι μαθηματικά μοντέλα που προσομοιάζουν τη ροή γύρω από μία ναυτική έλικα χωρίς περιορισμούς σχετικά με τις συνθήκες της εισερχόμενης ροής και την επιλογή των παραμέτρων μορφής της. Ως αποτέλεσμα ο σχεδιαστής μπορεί να επιλέξει τις παραμέτρους μορφής τις έλικας έχοντας υπόψη όλες τις σχεδιαστικές απαιτήσεις (ενότητα 2.7.2) και είτε:

Να υπολογίσει την ακτινική κατανομή βήματος και την ακτινική και χορδική κατανομή κυρτότητας που ελαχιστοποιούν την ισχύ που απορροφά η έλικα σε ένα ακτινικά μεταβαλλόμενο πεδίο πραγματικού ομόρρου (wake adapted optimum propeller)

Ή να επιλέξει μια μη βέλτιστη κατανομή βήματος που ικανοποιεί άλλα κριτήρια όπως ελαχιστοποίηση της σπηλαίωσης, του θορύβου και των κραδασμών (πχ. σχεδίαση μιας έλικας με αποφορτισμένο ακροπτερύγιο).

Οι προωστήρες που έχουν σχεδιαστεί με αυτόν τον τρόπο συνήθως ονομάζονται «προσαρμοσμένοι στον ομόρρο» (wake adapted) σε αντιδιαστολή με τους προωστήρες που σχεδιάζονται από σειρές, όπου μόνο ένα μέσο βήμα αναφοράς προσαρμόζεται στην μέση τιμή του πραγματικού ομόρρου πάνω στην επιφάνεια του δίσκου της έλικας.

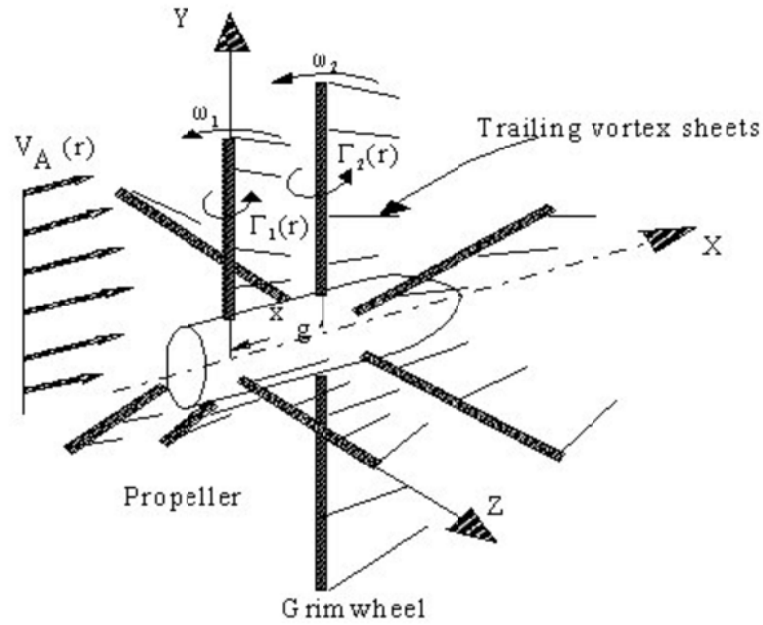
Θα δοθεί ακολούθως μια σύντομη περιγραφή του τι είναι οι θεωρίες φέρουσας γραμμής και φέρουσας επιφάνειας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες στη βιβλιογραφία.

Οι θεωρίες φέρουσας γραμμής και φέρουσας επιφάνειας είναι μαθηματικά μοντέλα που προσομοιάζουν τη ροή γύρω από μία ναυτική έλικα χρησιμοποιώντας έναν αριθμό απλοποιητικών υποθέσεων (γραμμικοποιητικών υποθέσεων), ως ακολούθως:

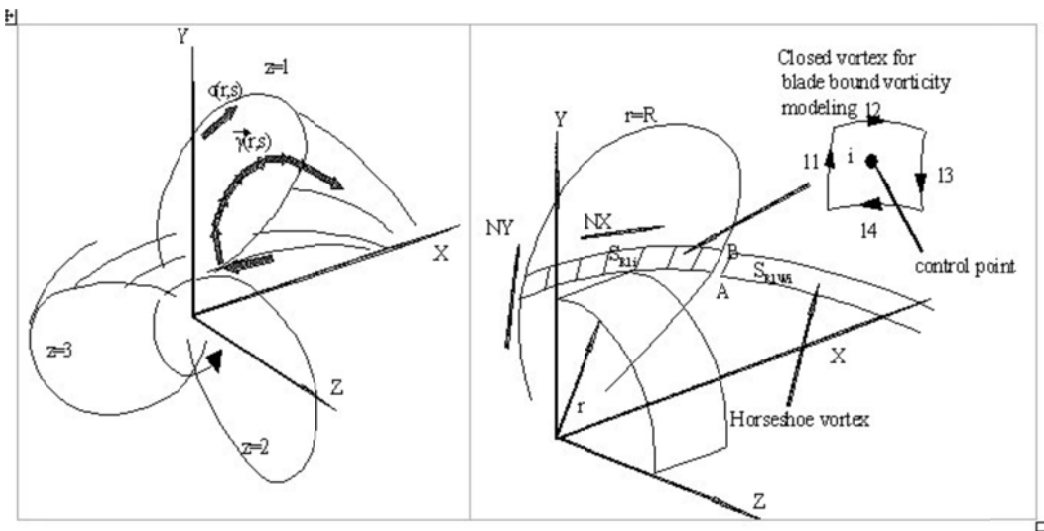
- Η θ.φ.γ. (θεωρία φέρουσας γραμμής) υποθέτει ότι η χορδή του πτερυγίου είναι μικρή σχετικά με το άνοιγμα του πτερυγίου. Έτσι το πτερύγιο «εκφυλίζεται» σε μια «φέρουσα γραμμή». Η ακτινική κατανομή φόρτισης μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας *προσδεσμένη στροβιλότητα* (bound

vorticity) με ακτινικά μεταβαλλόμενη ένταση $\Gamma(r)$. Για την ικανοποίηση του πρώτου νόμου του Helmholtz (συνέχεια της στροβιλότητας) ένα ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας ξεκινά από το χείλος εκφυγής κάθε πτερυγίου. Για μία ευρηματική ικανοποίηση των άλλων δύο νόμων του Helmholtz (δυναμική της στροβιλότητας), χρησιμοποιείται συνήθως μια προαποφασισμένη γεωμετρία για το ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας (PWS – prescribed wake shape). Παραλαγές αυτού του μοντέλου με αυξανόμενο υπολογιστικό κόστος είναι η χρήση μιας «wake relaxation» μεθόδου ή παραλλαγών της όπως η θεωρία του Lerbs[4](1952) ή μιας μεθόδου «time stepping». Σύμφωνα με τη μεθοδολογία χειρισμού του ομόρρου που πρότεινε ο Lerbs οι δυναμικοί νόμοι του Helmholtz ικανοποιούνται μόνο στα σημεία της φέρουσας γραμμής. Η μη γραμμική αυτή εκδοχή της θεωρίας φέρουσας γραμμής συνήθως δίνει καλές προβλέψεις για την υδροδυναμική συμπεριφορά της έλικας. Το σχ. 74 δείχνει ένα μοντέλο φέρουσας γραμμής για έναν προωστήρα που αποτελείται από δύο τμήματα.

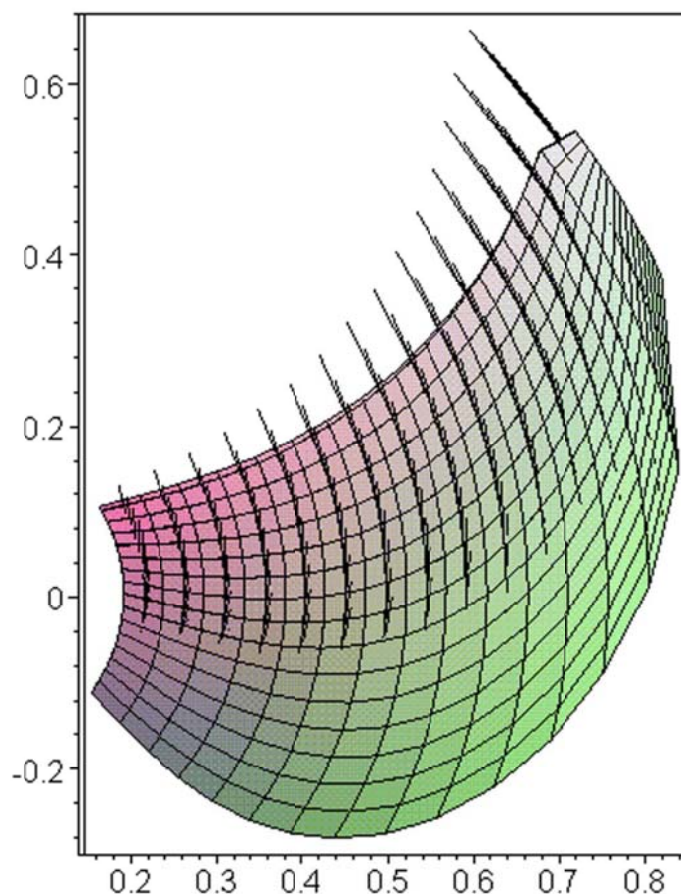
- Η θεωρία φέρουσας επιφάνειας (θ.φ.ε.) υποθέτει ότι το πάχος του πτερυγίου είναι μικρό σε σχέση με τη χορδή. Έτσι το πτερύγιο «εκφυλίζεται» στην *μέση επιφάνεια κυρτότητάς του* (mean camber surface). Εφαρμόζοντας μια συνεπή διαδικασία γραμμικοποίησης η επίδραση του πάχους πτερυγίου μπορεί να εισαχθεί μέσω μιας κατάλληλα επιλεγμένης κατανομής σημειακών πηγών $\sigma(r,s)$. Η ακτινική και χορδική κατανομή της φόρτισης μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας προσδεσμένη στροβιλότητα με ένταση μεταβαλλόμενη και κατά τη χορδή και κατά το άνοιγμα $\gamma(r,s)$. Για την ικανοποίηση του πρώτου θεωρήματος του Helmholtz ένα ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας ξεκινά από το χείλος εκφυγής κάθε πτερυγίου. Για τη γεωμετρία του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας χρησιμοποιούνται θεωρήσεις αντίστοιχες με αυτές της θ.φ.γ. Το σχ. 75 δείχνει ένα μοντέλο φέρουσας επιφάνειας για έλικα. Το σχ. 76 δείχνει τα επιφανειακά συνοριακά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στους αριθμητικούς υπολογισμούς με τη θεωρία φέρουσας επιφάνειας μαζί με την ολική ταχύτητα στα *σημεία ελέγχου* (control points).



Σχήμα 74: Μοντέλο φέρουσας γραμμής ενός προωστήρα που αποτελείται από δύο τμήματα (έλικα και τροχός Grim).



Σχήμα 75: Μοντέλο φέρουσας επιφάνειας για μια έλικα.



Σχήμα 76: Επιφανειακά συνοριακά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς με τη θεωρία φέρουσας επιφάνειας με την απεικόνιση της ολικής ταχύτητας στα σημεία ελέγχου.

3.2 Η μέθοδος συνοριακών στοιχείων για τα μόνιμα και μη μόνιμα προβλήματα ανάλυσης των ελίκων

Η μέθοδος συνοριακών στοιχείων (surface panel ή boundary element method) είναι μια μεγάλη καινοτομία στους υπολογισμούς συμπεριφοράς της έλικας για το μόνιμο και το μη μόνιμο πρόβλημα. Αν και οι θ.φ.γ./θ.φ.ε. και οι μέθοδοι συνοριακών στοιχείων μπορούν να επιλύσουν παρόμοια προβλήματα, οι δεύτερες προσεγγίζουν την πραγματική γεωμετρία έλικας-δακτυλίου-πλήμνης χωρίς γραμμικοποιητικές υποθέσεις σε σχέση με τη χορδή, την κυρτότητα και το πάχος. Έτσι μπορούν να προβλέψουν την κατανομή πίεσης του πτερυγίου (και του δακτυλίου) με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια από τις πρώτες. Γι' αυτό και οι κώδικες συνοριακών στοιχείων

μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο τελευταίο στάδιο της σχεδίασης ενός προωστήρα για να προβλέψουν τις μόνιμες και μη μόνιμες κατανομές πίεσης στο πτερύγιο (ιδιαίτερα στην περιοχή του χείλους πρόσπτωσης) επιτρέποντας έτσι στον σχεδιαστή να διακρίνει και να διορθώσει πιθανά προβλήματα έναρξης σπηλαίωσης.

Η μέθοδος που περιγράφεται στη συνέχεια έχει αναπτυχθεί από τον γράφοντα και βασίζεται σε μια τροποποίηση της μεθόδου των Hess και Valarezo[11]. Λεπτομερή αποτελέσματα αυτής της μεθόδου έχουν παρουσιαστεί σε ένα συνέδριο της ITTC πάνω στις μεθόδους συνοριακών στοιχείων και στις εξισώσεις Navier – Stokes (RANS) στην Grenoble. Μια μέθοδος συνοριακών στοιχείων για το μη μόνιμο πρόβλημα συμπεριφοράς έχει επίσης αναπτυχθεί αλλά δεν θα παρουσιαστεί εδώ. Λεπτομέρειες της αντίστοιχης μεθόδου δίνονται στη βιβλιογραφία[13].

Μια σύντομη περιγραφή των βασικών μαθηματικών σχέσεων που στηρίζεται η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων για το μόνιμο πρόβλημα, έχει ως εξής:

Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

Η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση για τον προσδιορισμό της επιφανειακής κατανομής πηγών και στροβιλότητας που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ροής γύρω από τον συνδυασμό πτερυγίου έλικας – πλήμνης - δακτύλιου (αν υπάρχει δακτύλιος), είναι η ακόλουθη:

$$\frac{1}{4\pi} \bar{n} \iint_{S_b} \left(q \frac{\bar{r}}{r^3} + \frac{\bar{\gamma}_b \times \bar{r}}{r^3} \right) dS - \frac{1}{2} q = \bar{V}_\infty \cdot \bar{n} - \frac{1}{4\pi} \bar{n} \iint_{S_f} \left(\frac{\bar{\gamma}_f \times \bar{r}}{r^3} \right) dS,$$

όπου:

SB είναι η επιφάνεια πτερυγίου+(πλήμνης +δακτυλίου)

SW είναι η επιφάνεια του ακολουθούντος φύλλου στροβιλότητας (έλικας +δακτυλίου)

$\bar{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο σημείο ελέγχου

q είναι η άγνωστη επιφανειακή κατανομή πηγών

$\bar{\gamma}_b$ είναι η άγνωστη κατανομή προσδεδεμένης στροβιλότητας

$\bar{\gamma}_f$ είναι η κατανομή στροβιλότητας στο ακολουθούν φύλλο

$\vec{V}_\infty$ είναι η αδιατάραχτη ταχύτητα του ρευστού στο σημείο ελέγχου (ένας συνδυασμός μεταφορικής, περιστροφικής ταχύτητας και ταχύτητας του πραγματικού ομόρρου).

ΣΥΝΘΗΚΗ KUTTA:

Στο χείλος εκφυγής κάθε πτερυγίου και στο χείλος εκφυγής του δακτυλίου έχει εφαρμοστεί μια συνθήκη Kutta πίεσης (pressure type) - χωρίς γραμμικοποιήσεις:

$$p^+ = p^-$$

ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ:

Οι επιφάνειες της έλικας, του δακτυλίου και της πλήμνης έχουν προσεγγιστεί με τετράκομβα διγραμμικά επιφανειακά στοιχεία. Στο σχήμα 77 φαίνεται η τοπική και η ολική αρίθμηση, μαζί με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Η άγνωστη κατανομή πηγών προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας σταθερή ένταση πηγής για κάθε επιφανειακό στοιχείο. Η άγνωστη κατανομή προσδεδεμένης στροβιλότητας προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας λωρίδες με σταθερή επιφανειακή στροβιλότητα γV μαζί με συγκεντρωμένες γραμμές στροβιλότητας, γραμμικώς μεταβαλλόμενης έντασης $\Gamma(u)$ κατά μήκος των συνόρων $v \approx 1$ κάθε λωρίδας, προκειμένου να ικανοποιηθεί η συνέχεια της επιφανειακής προσδεδεμένης στροβιλότητας (σχ. 78).

Η στροβιλότητα του ακολουθούντος φύλλου υποτίθεται ότι «κείται» πάνω σε μια αναδιπλωμένη (παγωμένη) επιφάνεια που ξεκινά από το χείλος εκφυγής του πτερυγίου (ή του δακτυλίου) και αποτελείται από ιδιόμορφες γραμμές δίνης (δηλαδή με συγκεντρωμένη στροβιλότητα). Η θέση του αναδιπλωμένου ομόρρου αποφασίζεται χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία[14] (μοντέλο PWS).

Η προσδεδεμένη στροβιλότητα (και ο αντίστοιχος ομόρρος) κατανέμεται μόνο στα ανωστικά σώματα (δηλαδή η πλήμνη δε φέρει στροβιλότητα).

Χρησιμοποιούνται δύο τύποι επιφανειακών πλεγμάτων για το πτερύγιο. Ο πρώτος τύπος τοποθετεί τους κόμβους έτσι, ώστε κατά την ακτινική διεύθυνση να ισαπέχουν μεταξύ τους (σχήμα 79). Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιήθηκαν 600 στοιχεία για την προσέγγιση της έλικας ITTC P4679. Ο δεύτερος τύπος θεωρεί αρχικά τις γραμμές ισο- s/C (όπου s το χορδικό καμπυλόγραμμο μήκος και C τα μήκη των χορδών) και

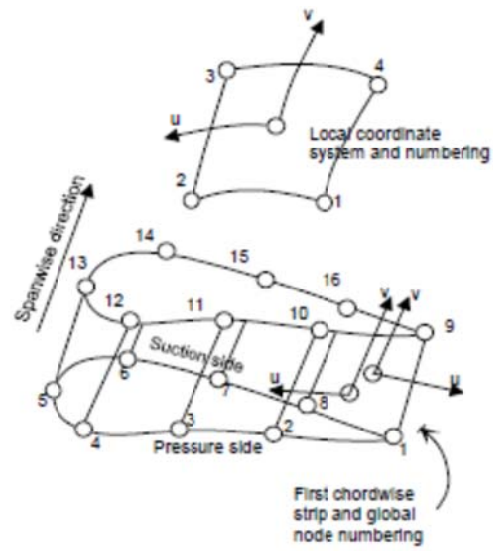
τοποθετεί πάνω σε αυτές τους κόμβους σε ίσες μεταξύ τους καμπυλόγραμμες αποστάσεις κατά την ακτινική διεύθυνση (σχήμα 80). Για τους χορδικούς κόμβους χρησιμοποιείται συνημιτονοειδής διαμέριση του καμπυλόγραμμου μήκους της όψης υποπίεσης ή υπερπίεσης. Ο δεύτερος τύπος πλέγματος προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματική επιφάνεια με μικρότερο αριθμό στοιχείων, αλλά και οι δύο τύποι την προσεγγίζουν με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΗ ΜΟΝΙΜΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΛΙΚΑΣ:

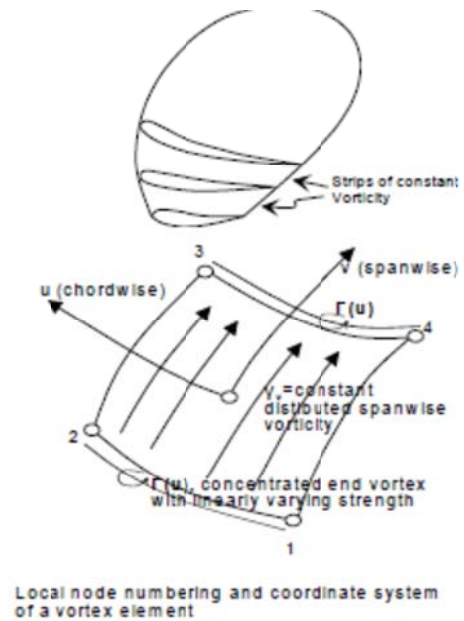
Το προηγούμενο αριθμητικό σχήμα μπορεί επίσης να εφαρμοστεί στο μη μόνιμο πρόβλημα έλικας, δακτυλίου και πλήμνης με κάποιες τροποποιήσεις, ως ακολούθως: Η ελεύθερη ακτινική στροβιλότητα πρέπει να κατανεμηθεί στην επιφάνεια του ομόρρου. Αυτή η στροβιλότητα έχει ξεκινήσει από το χείλος εκφυγής του πτερυγίου (και του δακτυλίου) σε προηγούμενα χρονικά βήματα και έτσι μπαίνει ως γνωστός ολοκληρωτικός όρος στο δεξί μέλος της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Η συνθήκη Kutta πρέπει επίσης να τροποποιηθεί προκειμένου να περιέχει την παράγωγο του δυναμικού της ταχύτητας. Το πρόβλημα πρέπει τώρα να επιλυθεί στο πεδίο του χρόνου με εσωτερικές επαναλήψεις σε κάθε χρονικό βήμα (χρησιμοποιώντας την τεχνική Newton-Raphson) για να ικανοποιηθεί η μη γραμμική συνθήκη Kutta πίεσης.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΠΙΕΣΗΣ ΣΤΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ:

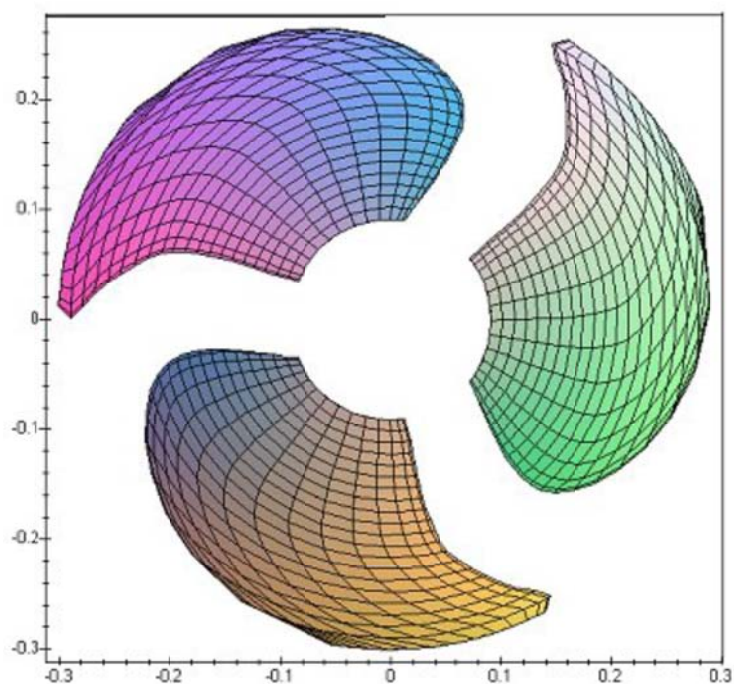
Μετά την αποπεράτωση μιας σχεδίασης προωστήρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος συνοριακών στοιχείων για να επιβεβαιώσει τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν με χρήση των θ.φ.γ./θ.φ.ε. σχετικά με την παραγωγή της (μέσης) ώσης και την απορρόφηση της (μέσης) ροπής και για να προβλεφθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια οι κατανομές πίεσης στο πτερύγιο. Έτσι μπορούν να αναγνωριστούν περιοχές που είναι ευάλωτες σε σπηλαίωση και να προταθεί τροποποίηση της τοπικής γεωμετρίας του πτερυγίου για να βελτιστοποιηθεί η κατανομή πίεσης. Οι κατανομές πίεσης για μια έλικα σε δακτύλιο όπως και για την έλικα με γεωμετρία σύμφωνα με τον πίνακα 7.2 φαίνονται στα σχ. 80, 81, 82, 83 και 84.



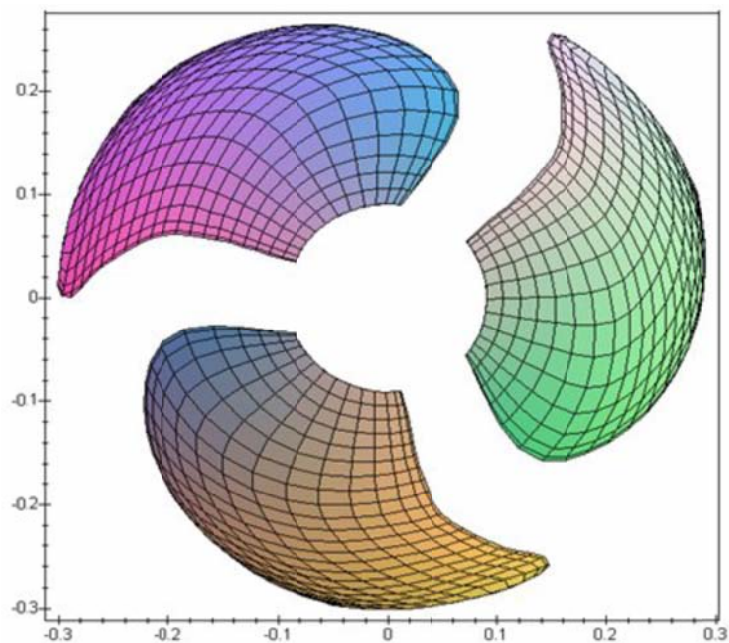
Σχήμα 77: Ολική και τοπική αρίθμηση.



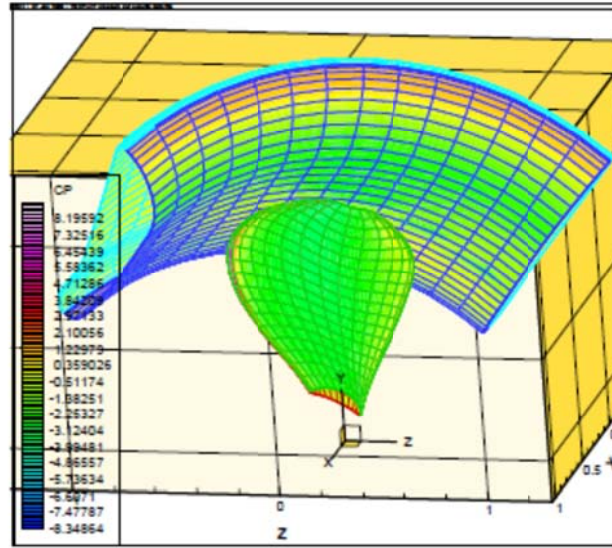
Σχήμα 78: Στοιχεία στροβιλότητας.



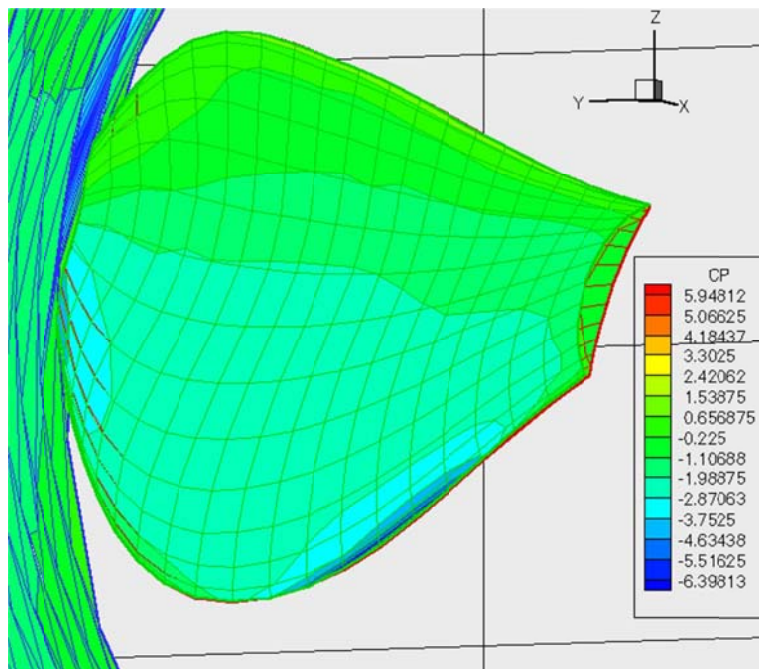
Σχήμα 79: Διακριτοποίηση σε συνοριακά στοιχεία της έλικας ITTC P4679, με κόμβους σε θέσεις ίσων αποστάσεων κατά την ακτινική διεύθυνση. 600 στοιχεία (20 λωρίδες ακτινικά, $2 \cdot 15 = 30$ λωρίδες χορδών).



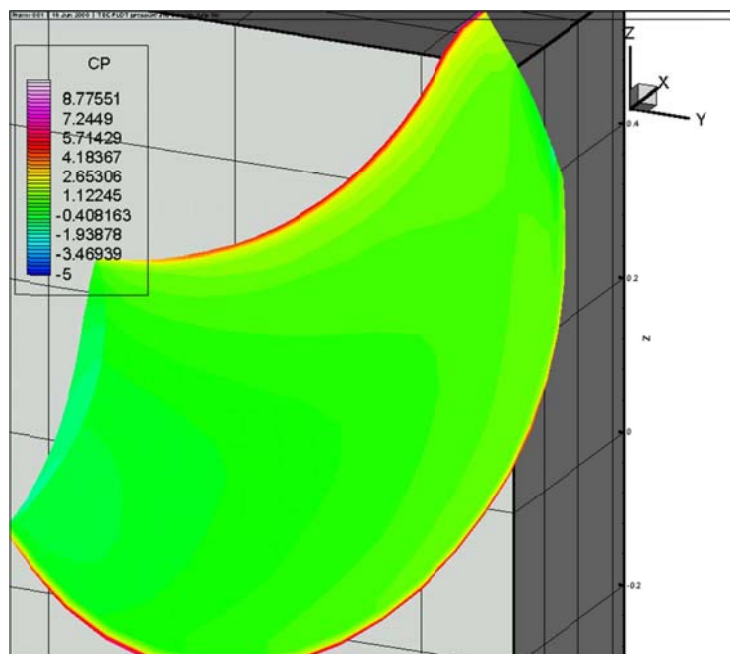
Σχήμα 80: Διακριτοποίηση σε συνοριακά στοιχεία της έλικας ITTC P4679, βελτιστοποιημένο πλέγμα (20 λωρίδες ακτινικά, $2 \cdot 15 = 30$ λωρίδες χορδών).



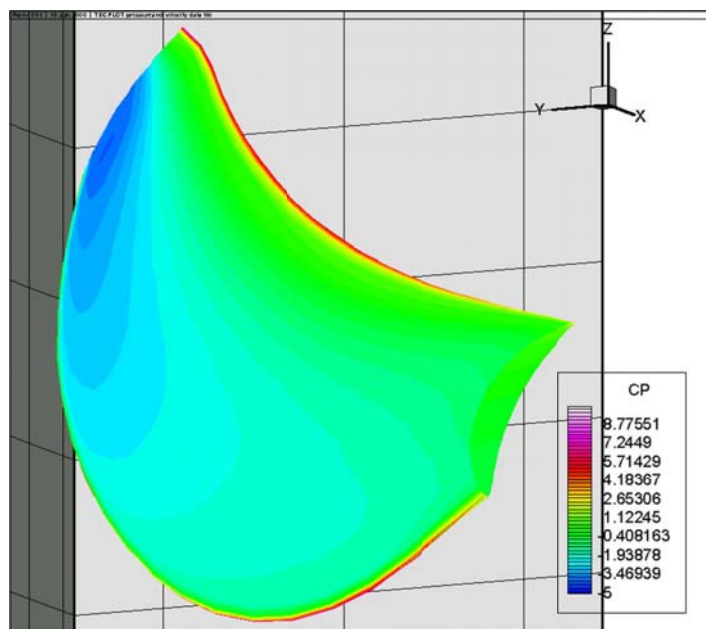
Σχήμα 81: Διακριτοποίηση σε συνοριακά στοιχεία και κατανομές πίεσης πτερυγίου (όψη υποπίεσης) σε δακτύλιο.



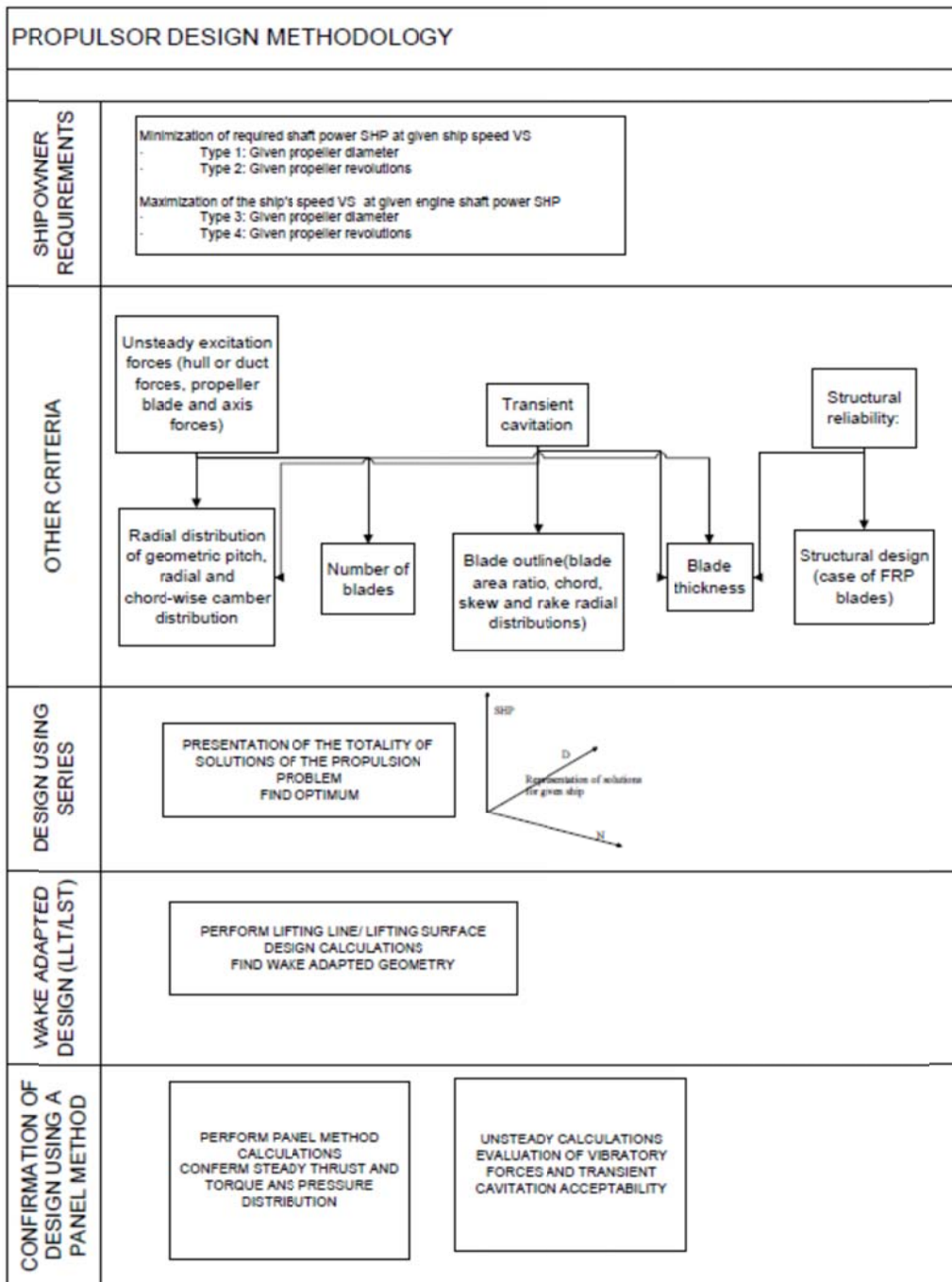
Σχήμα 82: Διακριτοποίηση σε συνοριακά στοιχεία και κατανομή πίεσης πτερυγίου (όψη υποπίεσης) σε δακτύλιο.



***Σχήμα 83:** Κατανομές πίεσης πτερυγίου (όψη υπερπίεσης, γεωμετρία πτερυγίου σύμφωνα με τον πίνακα 7.2).*



***Σχήμα 84:** Κατανομή πίεσης πτερυγίου (όψη υποπίεσης, γεωμετρία πτερυγίου σύμφωνα με τον πίνακα 7.2).*

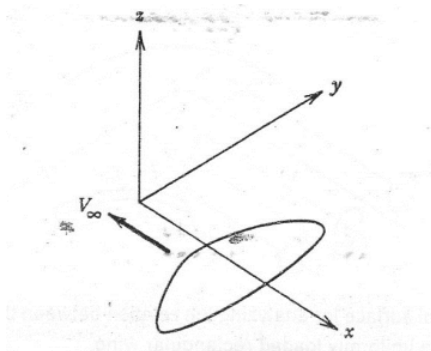


4.ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

4.1 Πτέρυγες πεπερασμένου ανοίγματος

4.1.1 Το σύστημα δινών για μία λεπτή επίπεδη πτέρυγα πεπερασμένου ανοίγματος

Θεωρούμε την ροή που επάγεται από την κίνηση ενός λεπτού πτερυγίου πεπερασμένου ανοίγματος διαμέσου ενός κατά τα άλλα αδιατάρακτου ρευστού. Καταρχάς, ακριβώς επειδή θα εστιαστούμε απλά στην ποιοτική περιγραφή της ροής, θα κάνουμε κάποιες απλοποιητικές παραδοχές, οι οποίες αργότερα θα αρθούν.



Σχήμα 85

Είναι βολικό να υιοθετήσουμε την άποψη ενός παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται στην αδιατάρακτη ροή, παρά το συνηθισμένο σωματόδετο σύστημα αναφοράς. Η αλλαγή αυτή στους άξονες σημαίνει ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας και στους τρεις άξονες είναι μικρές, όχι μόνο οι κάθετες στην ροή έναρξης, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που δουλεύουμε με συντεταγμένες για μία λεπτή αεροτομή. Μία άλλη αλλαγή προς τη συνηθισμένη πρακτική είναι ότι δεν θα θέσουμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών γι το δυναμικό της ταχύτητας, αλλά θα δούμε την πτέρυγα σαν μία πηγή δύναμης στο ρευστό και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την ροή του ρευστού που άγεται από αυτή τη δύναμη. Έτσι, γράφουμε την εξίσωση της κίνησης ως εξής:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f} \quad (116)$$

Όπου $\mathbf{f}$ είναι η δύναμη ανά μονάδα όγκου που καταβάλλεται από την πτέρυγα στο ρευστό.

Καθώς η επαγόμενη ταχύτητα του ρευστού από την κίνηση της πτέρυγας είναι μικρή, προσεγγίζουμε την επαγόμενη επιτάχυνση

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

Επίσης υποθέτουμε ότι η πτέρυγα βρίσκεται στο επίπεδο xy , καθώς κινείται με ταχύτητα V_∞ στην αρνητική κατεύθυνση του άξονα x και ότι η δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι κατά κύριο λόγο στην κατεύθυνση z . Έτσι, η εξίσωση της κίνησης προσεγγίζεται ως εξής:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \approx -\nabla p - f \hat{\mathbf{k}} \quad (117)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε την πίεση από την παραπάνω εξίσωση παίρνοντας την συστροφή της:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \text{curl } \mathbf{V} = 0 - \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{j}} \quad (118)$$

Εισάγουμε την γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{V}$$

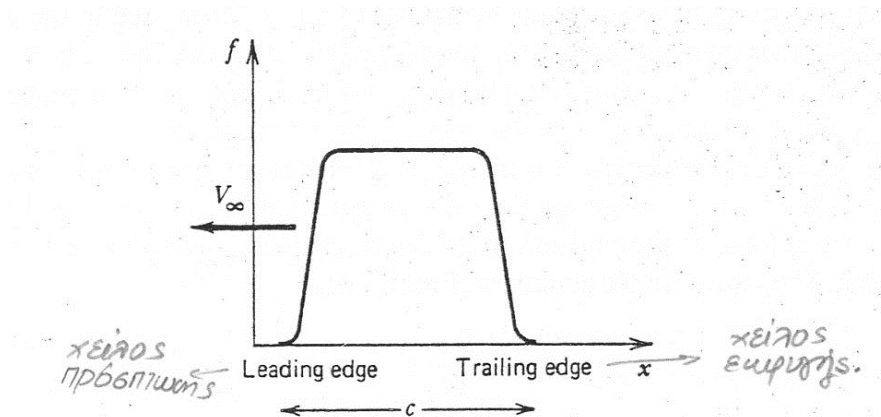
Έτσι, προκύπτει

$$2\rho \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$2\rho \frac{\partial \omega_y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$2\rho \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 0$$

Θα επικεντρωθούμε τώρα κυρίως σε μία ομοιόμορφα φορτισμένη ορθογωνική πτέρυγα, όπου η f είναι σταθερή, εκτός από τις άκρες του ορθογωνικού περιγράμματος κάτοψης, όπου αλλάζει αμέσως από ή σε μηδέν.



Σχήμα 86: Κατανομή της δύναμης σε ένα ομοιόμορφα φορτισμένο περύγιο.

Στην περίπτωση μας, καθώς το χείλος πρόσπτωσης ξεπερνά ένα δεδομένο σημείο, βλέπουμε από την παραπάνω εικόνα ότι το $\frac{\partial f}{\partial x}$ γίνεται μεγάλο και θετικό και έπειτα επιστρέφει στο μηδέν.

Έτσι, η y συνιστώσα του ω αυξάνεται απότομα, καθώς προχωράει το χείλος πρόσπτωσης περνάει. Η ίδια αιτία δείχνει το ω να μειώνεται με τον ερχομό και το πέρασμα από το χείλος εκφυγής. Για την ακρίβεια, γίνεται πάλι μηδέν. Για την περιοχή μακριά από τα άκρα, η f έχει σταθερή κατανομή, ταξιδεύοντας με ταχύτητα V_∞ κατά την κατεύθυνση x και έτσι μπορεί να γραφεί:

$$f(x, y, t) = F(x + V_\infty t)$$

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F' = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$2\rho \frac{\partial \omega_y}{\partial t} = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial f}{\partial t}$$

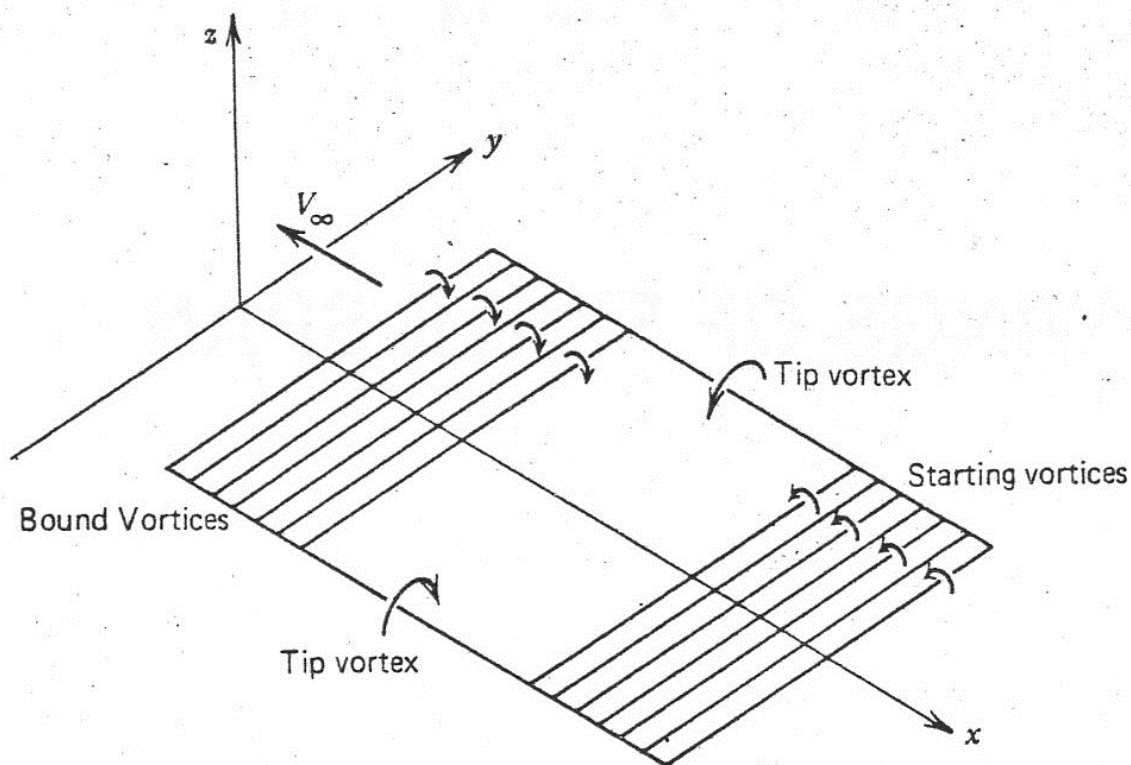
Το οποίο αν ολοκληρωθεί δίνει

$$\omega_y = \frac{1}{2\rho V_\infty} f$$

Η εξαρτημένη x συνιστώσα της ολοκλήρωσης υπολογίζεται μία χρονική στιγμή πριν το εν λόγω σημείο προσεγγισθεί από την πτέρυγα. Έτσι, το ω_y επιστρέφει στο μηδέν, όταν και η f . Παρ' όλα αυτά, όσο βρίσκεται σε επαφή με το πτερύγιο, το ρευστό κινείται γύρω από έναν άξονα, ο οποίος είναι προσανατολισμένος κατά την κατεύθυνση του ανοίγματος (spanwise – oriented axis).

Κατά τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι όταν το πτερύγιο περνά ένα σημείο, το ω_x αυξάνεται, καθώς το $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ εκεί. Αυτή η περιστροφή συσσωρεύεται, καθώς το άκρο του πτερυγίου προχωράει και παραμένει σταθερό όταν το πτερύγιο ολοκληρώσει την κίνησή του. Στο αριστερό άκρο, μία αρνητική περιστροφή γύρω από τον x άξονα δημιουργείται για τον ίδιο λόγο.

Όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, η προκύπτουσα μορφή ροής αποτελείται από ένα σύνολο δινών, κάποιων προσδεδεδεμένων στο πτερύγιο (δεν έχουν ακόμα ακυρωθεί από το πέρασμα του χείλους εκφυγής), κάποιες ακολουθούσες πίσω από τα άκρα του πτερυγίου (τις δίνες ακροπτερυγίου) και κάποιες που απομένουν μακριά πίσω στον ομόρρου, εκεί όπου το πτερύγιο άρχισε την κίνησή του (ήταν εξαρχής πίσω από το χείλος πρόσπτωσης και έτσι επηρεάζονταν μόνο από το χείλος εκφυγής).



Σχήμα 87: Σύστημα δινών που δημιουργείται από την κίνηση ενός ομοιόμορφα φορτισμένου ορθογωνικού πτερυγίου.

Υπάρχει μία σημαντική σχέση μεταξύ της αντοχής των ακροπτερυγίων και αυτής των οριακών δινών. Ας θεωρήσουμε ένα σωλήνα με γωνία, το ένα από τα άκρα του περικλείει την δίνη ακροπτερυγίου και το άλλο την προσδεδεμένη. Αποκόπτουμε το σωλήνα, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, και έπειτα κατασκευάζουμε το κλειστό περίγραμμα $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Σε αυτό το περίγραμμα και στην επιφάνεια S που περικλείει,

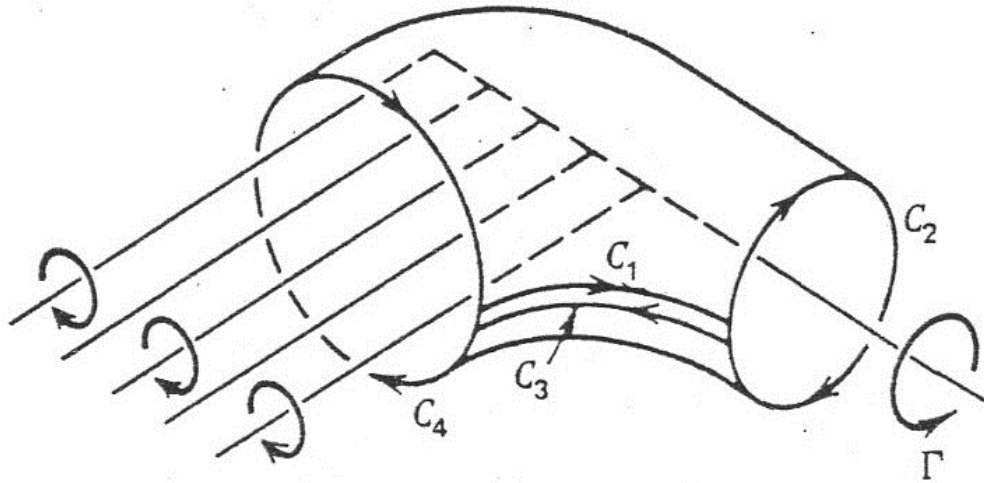
$$\mathbf{V} = \nabla \phi$$

Καθώς η συστροφή οποιούδηποτε βαθμωτού ανύσματος (gradient) είναι μηδέν,

$$\int_S \text{curl } \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

Και έτσι από το θεώρημα του Stokes

$$0 = \oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$



Σχήμα 88: Επιφάνεια ελέγχου για την ανάλυση της σχέσης μεταξύ των προσδεδωμένων δινών και των δινών ακροπτερυγίου ενός ομοιόμορφα φορτισμένου ορθογωνικού πτερυγίου.

Τα επιφανειακά ολοκληρώματα στα C_1 και C_3 αλληλοαναιρούνται (το $\mathbf{V}$ είναι το ίδιο σε κάθε αντίστοιχο σημείο, αλλά το $d\mathbf{l}$ είναι ανάποδα προσανατολισμένο), και έτσι

$$\oint_{C_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \equiv \Gamma$$

Όπου Γ είναι η καθαρή δύναμη των προσδεδωμένων δινών, που φαίνεται τώρα ότι είναι ίση με τη δύναμη του δεξιού ακροπτερυγίου. Αυτό σημαίνει ότι αν η δύναμη ανά μονάδα μήκους των προσδεδωμένων δινών ευθυγραμμισθεί με τον y άξονα θα γίνει $\gamma_y(x)$,

$$\Gamma \equiv \int_0^c \gamma_y(x) dx$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η αριστερή δίνη ακροπτερυγίου είναι ίσης και αντίθετης δύναμης με την καθαρή δύναμη των δινών έναρξης. Η ισότητα των δυνάμεων των δύο

ακροπτερυγίων με αυτών των προσδεδεμένων και των δινών έναρξης μπορεί να αποδοθεί σε ένα θεώρημα του Helmholtz για τις δίνες, το οποίο δηλώνει ότι καμία δίνη δεν μπορεί να τελειώνει στο ρευστό. Δηλαδή, εάν είχαμε μία δίνη προσδεδεμένη στο πτερύγιο, θα έπρεπε να συνεχίζει πίσω στον ομόρρου ως μέρος της δίνης ακροπτερυγίου.

Τώρα μπορούμε να σχηματίσουμε μία εικόνα του συστήματος δινών συσχετιζόμενη με ένα πτερύγιο τυχαίας φόρτισης και περιγράμματος κάτοψης. Απλά θεωρούμε το πτερύγιο και τη φόρτισή του σαν το άθροισμα ενός άπειρου συνόλου ομοιόμορφα φορτισμένων ορθογωνικών πτερυγίων. Όπως παρουσιάζεται στην εικόνα παρακάτω, κάθε ορθογώνιο συμβάλλει στην εικόνα της ροής με ένα κατανεμημένο σύνολο προσδεδεμένων δινών ευθυγραμμισμένων στην κατεύθυνση y με επιπλέον δίνες ακροπτερυγίου παράλληλα στον άξονα x . Το συμπέρασμα, λοιπόν, είναι ένα σύνολο δινών και στην διεύθυνση x και στην y πάνω στο πτερύγιο (προσδεδεμένες δίνες), με επιπλέον ένα σύστημα δινών παράλληλων στην κατεύθυνση πτήσης που εκφεύγει πίσω από το χείλος εκφυγής του πτερυγίου (οι δίνες εκφυγής).

Θεωρούμε $\gamma_y(x, y)$ την δύναμη ανά μονάδα μήκους των προσδεδεμένων δινών που είναι ευθυγραμμισμένες στην y διεύθυνση και

$$\Gamma(y) \equiv \int_{\text{chord}} \gamma_y(x, y) dx$$

Την κυκλοφορία γύρω από το πτερύγιο σε ένα σταθερό y επίπεδο. Επίσης, το $\gamma_y(y)$ είναι η δύναμη ανά μονάδα πλάτους του συστήματος των δινών εκφυγής. Δηλαδή $\gamma_y(y)$ είναι η δύναμη των δινών που είναι ευθυγραμμισμένες στην x διεύθυνση και οι οποίες εκφεύγουν πίσω από το χείλος εκφυγής μεταξύ y και $y+\Delta y$. Εάν καλύψουμε το πτερύγιο με ορθογώνια $\Delta x+\Delta y$, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, η συμβολή στο $\gamma_y(y)\Delta y$ προέρχεται από τις δίνες ακροπτερυγίου αυτών των ορθογωνίων προς το κέντρο του $y+\Delta y/2$ και επίσης αυτών από πάνω στην ίδια θέση. Οι συνεισφορές από τα εσωτερικά ορθογώνια εξισώνουν την καθαρή κυκλοφορία γύρω από τις προσδεδεμένες δίνες σε αυτά τα ορθογώνια, ενώ τα εξωτερικά ορθογώνια συνεισφέρουν το αρνητικό μέρος της ίδιας ποσότητας. Για παράδειγμα, το ορθογώνιο που βρίσκεται στο εσωτερικό του

$$(x, x + \Delta x) \times \left(y + \frac{\Delta y}{2}, y + 3\frac{\Delta y}{2} \right)$$

Συνεισφέρει μία δίνη ακροπτερυγίου δύναμης

$$- \int_x^{x+\Delta x} \gamma_y(x', y + \Delta y) dx'$$

Ενώ το ορθογώνιο που περιγράφεται από

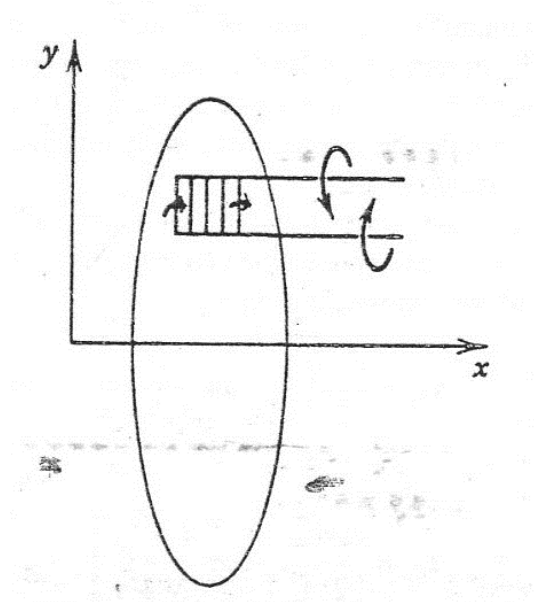
$$(x, x + \Delta x) \times \left(y - \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{\Delta y}{2} \right)$$

Συνεισφέρει μία δίνη ακροπτερυγίου

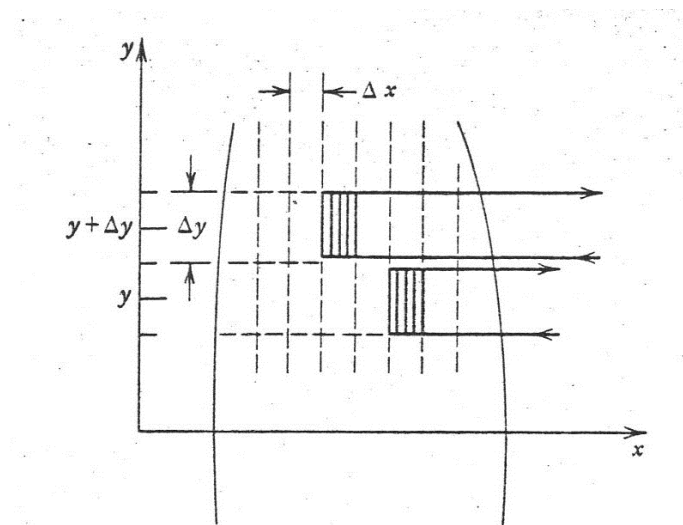
$$+ \int_x^{x+\Delta x} \gamma_y(x', y) dx'$$

Το αποτέλεσμα λοιπόν είναι

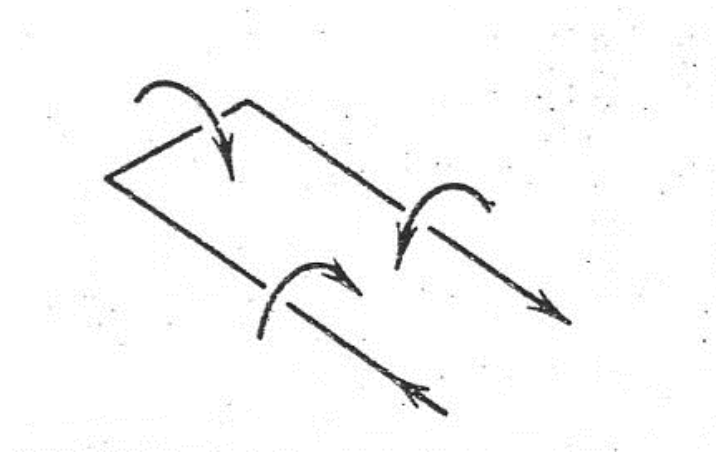
$$\begin{aligned} \gamma_x(y)\Delta y &= - \int_{\text{chord}} \gamma_y(x', y + \Delta y) dx' + \int_{\text{chord}} \gamma_y(x', y) dx' \\ &= - \Gamma(v + \Delta v) + \Gamma(v) \end{aligned}$$



Σχήμα 89: Ανάλυση ενός τυχαίου περυγίου ως το άθροισμα ομοιόμορφα φορτισμένων ορθογωνίων.



Σχήμα 90: Ανάλυση του συστήματος δίνης εκφυγής ενός τυχαίου περυγίου.



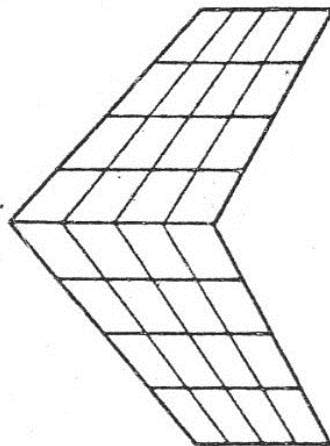
Σχήμα 91: Δίνες “horseshoe”.

Εδώ η εξίσωση 117 χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των ολοκληρωμάτων. Τότε

$$\begin{aligned} \gamma_x(y) &= -\frac{\Gamma(y + \Delta y) - \Gamma(y)}{\Delta y} \\ &\rightarrow -\frac{d\Gamma}{dy} \end{aligned} \quad (119)$$

Δηλαδή η δύναμη ανά μονάδα πλάτους του συστήματος δινών εκφυγής είναι ίση με την ένταση της κλίσης της κατανομής της κυκλοφορίας.

Όπως με τη μέθοδο πάνελ, το μοντέλο μπορεί να γίνει ακριβές με την κάλυψή της επιφάνειας του πτερυγίου με δίνες “horseshoe”. Δηλαδή, δίνες που εκφεύγουν πίσω από την επιφάνεια του σώματος με αμείωτη δύναμη, όπως φαίνεται στην προηγούμενη εικόνα,. Από τη στιγμή που δίνες (ή τουλάχιστον μέρος τους) που δεν είναι προσδεδμεμένες στην επιφάνεια πρέπει να παρασύρονται με τη ροή, το σύστημα δινών εκφυγής είναι μία επιφάνεια συνεχούς ροής. Δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί επακριβώς το σχήμα του. Συνήθως προσεγγίζεται σαν μία επιφάνεια παράλληλη στην αδιατάρακτη ροή έναρξης. Οι δυνάμεις των κατανεμημένων προσδεδμεμένων και εκφυγής δινών πρέπει να προσδιορίζονται ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σώματος, συμπεριλαμβανομένου και της συνθήκης Kutta. Συνήθως, όπως και στην μέθοδο πάνελ, αυτή η αποστολή απαιτεί έναν υπολογιστή για την υλοποίηση.



Σχήμα 92: Επένδυση με τετράπλευρα για τη μέθοδο vortex-lattice.

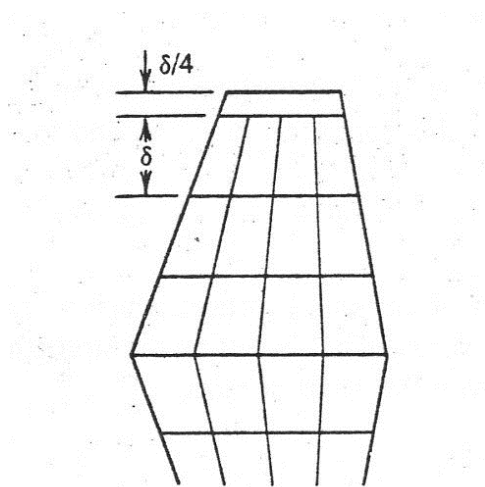
4.1.2 Η μέθοδος vortex – lattice (πλέγματος δινών).

Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εκδοχή της επιφανειακής ιδιομορφίας κατανομής είναι η επονομαζόμενη μέθοδος vortex – lattice, που βασίζεται σε διακριτές horseshoe δίνες, όπως ακολουθεί.

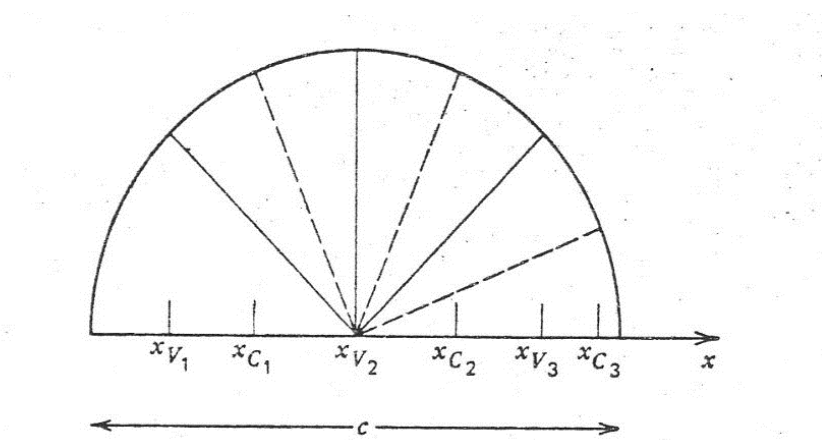
Η επιφάνεια που θα καλυφθεί με δίνες σπάει σε τετράπλευρα πάνελς, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα,. Αν και δεν είναι απαραίτητο αυτό, ωστόσο απλοποιείται πολύ η κατάσταση αν η επιφάνεια είναι ένα επίπεδο. Η μορφή κοίλου πτερυγίου μπορεί να προσμετρηθεί σε μία λεπτή που μοιάζει με αεροτομή προσέγγιση, απαιτώντας εφαιπτότητα ροής στη μέση επιφάνεια. Επίσης, θα χρειαστούν δύο πλευρές κάθε πάνελ να είναι παράλληλες προς την κατεύθυνση της ελεύθερης ροής.

Συσσωρεύουμε την στροβιλώδη κίνηση φοράς κατά το άνοιγμα (spanwise) σε κάθε πάνελ σε μία ξεχωριστή δίνη κατά μήκος του ενός τετάρτου της χορδής του. Σε αντιστοιχία με την εικόνα έχουμε τώρα τις ακολουθούσες δίνες και συνεχίζουμε τη συγκεκριμένη δίνη ως horseshoe στον ομόρρου με δύο ημιάπειρα νήματα παράλληλα στην κατεύθυνση της ελεύθερης ροής. Το αποτέλεσμα είναι ένα σύστημα horseshoe δινών, μία για κάθε πάνελ της επιφάνειας. Οι δυνάμεις τους προσδιορίζονται επιβάλλοντας συνθήκη εφαιπτότητας ροής στο μέσο σημείο των τριών τετάρτων της χορδής κάθε πάνελ.

Η ακρίβεια αυτής της μεθόδου φαίνεται να είναι ανεπτυγμένη για ένα δεδομένο αριθμό πάνελ, εάν αυτά είναι ίσου εύρους δ στην κατεύθυνση του ανοίγματος και εάν τα πάνελ δεν εκτείνονται μέχρι τα ακροπερύγια, αλλά μόνο μέχρι μία απόσταση $\delta/4$ από τα άκρα, όπως φαίνεται παρακάτω. Τα πάνελ πρέπει επίσης να έχουν ίσα μήκη σε οποιαδήποτε θέση κατά το άνοιγμα. Γυρισμένα και σπασμένα περύγια αντιμετωπίζονται καλύτερα χρησιμοποιώντας ξεχωριστά συστήματα πάνελ για τα περύγια και για γεωμετρικά ξεχωριστά τμήματα του περιγράμματος κάτοψης.



Σχήμα 93: Βελτιώνοντας την ακρίβεια μίας μεθόδου vortex – lattice αφαιρώντας πάνελς από τα ακροπερύγια.



Σχήμα 94: Συνημιτονική διάταξη στο χώρο των δινών και σημεία ελέγχου.

Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, θεωρούμε το επίπεδο ορθογώνιο πτερύγιο μηδενικού πάχους που φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί. Έστω N_x και N_y ο αριθμός των πάνελς που χρησιμοποιούνται στις x και y διευθύνσεις, αντίστοιχα, σε κάθε ημιάνοιγμα (φυσιολογικά θα εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία γύρω από το μέσο) και Δx και Δy οι διαστάσεις κάθε πάνελ. Τότε

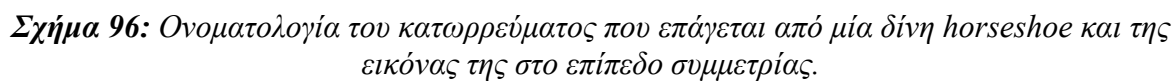
$$N_x \Delta x = c, \quad 2 \left(N_y \Delta y + \frac{\Delta y}{4} \right) = b \quad (120)$$

Όπου b και c είναι το άνοιγμα του πτερυγίου και η χορδή του, αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε μία διπλή επισήμανση για κάθε πάνελ και την αντίστοιχη δίνη του. Δηλαδή έστω το ij -ιοστό πάνελ ότι είναι αυτό στο κέντρο $y=(i-1/2)\Delta y$, $x=(j-1/2)\Delta x$. Για παράδειγμα το πάνελ στην εικόνα 95 είναι το (3-2)-ιοστό.

Η οριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιηθεί στο σημείο στα τρία τέταρτα της χορδής κάθε πάνελ είναι απλά

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Συνεισφορές στην z συνιστώσα της ταχύτητας προέρχεται από την αρχική ροή (ειδικότερα, $V_\infty \sin x$) και από τις δίνες πάνω σε κάθε πάνελ. Από τη στιγμή που η επαγόμενη από τις δίνες ταχύτητα είναι γενικότερα με φορά προς τα κάτω, είναι βολικό να την ορίσουμε ως θετική εάν βρίσκεται προς την αρνητική πλευρά του άξονα z και να αναφερόμαστε σε αυτήν ως κατώρρευμα (downwash).



Έστω ότι το κατώρρευμα που επάγεται στο $(x,y,0)$ από την ij -ιοστή δίνη είναι $\Gamma_{ij} w_{ij}(x,y)$. Δηλαδή το w_{ij} είναι το κατώρρευμα που θα επαγόταν από αυτή τη δίνη και θα ήταν η μονάδα της δύναμης, από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το πεδίο ταχύτητας εξαιτίας ενός μίας δίνης

είναι απευθείας ανάλογο της δύναμής της. Εάν οι γωνίες της δίνης είναι στα (x_a, y_a) και (x_a, y_b) , τότε το κατώρρευμα της στο $(x, y, 0)$ είναι

$$w_{ij}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{y - y_a} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}}{x - x_a} \right\} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{y - y_b} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_b)^2}}{x - x_a} \right\} \quad \text{if } x \neq x_a$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{y - y_a} - \frac{1}{y - y_b} \right) \quad \text{if } x = x_a \quad (121)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την συνθήκη εφαπτότητας ροής στο σημείο ελέγχου (x_p, y_p) με τη μορφή

$$V_\infty \sin \alpha - \sum_{i,j} \Gamma_{ij} w_{ij}(x_p, y_p) = 0 \quad (122)$$

Μιας και υπάρχουν τόσες πολλές εξισώσεις αυτής της μορφής (δηλαδή όσα τα σημεία ελέγχου) όσα και τα πάνελς, υπάρχει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τις δυνάμεις δινών Γ_{ij} .

Για να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του προβλήματος, πρέπει να συνδυάσουμε τους δύο όρους που περιλαμβάνουν δίνες στις αντίθετες πλευρές του άξονα x, καθώς οι δυνάμεις αυτών των δινών είναι ίσες. Όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα, εάν η ij-ιοστή δίνη έχει γωνίες στα (x_a, y_a) και (x_a, y_b) , το αντίστοιχό του έχει γωνίες στα $(x_a, -y_a)$ και $(x_a, -y_b)$. Ονομάζοντας το αντίστοιχο i'j-ιοστή δίνη, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση 122 ως εξής

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij} [w_{ij}(x_p, y_p) + w_{i'j}(x_p, y_p)] = V_\infty \sin \alpha \quad (123)$$

Όπου το άθροισμα τώρα εκτείνεται μόνο πάνω στις δίνες στη θετική πλευρά του x-z επιπέδου.

4.1.3 Επαγόμενη οπισθέλκουσα

Μία μοναδική άποψη της μεθόδου vortex – lattice είναι ο τρόπος που υπολογίζεις τη δύναμη και τη ροπή σε μία πτέρυγα, από τη στιγμή που γνωρίζεις τις δυνάμεις των δινών. Η δύναμη σε κάθε πάνελ υπολογίζεται εφαρμόζοντας το θεώρημα Kutta – Joukowski στην προσδεδεμένη δίνη σε αυτό το πάνελ. Δηλαδή η δύναμη ανά μονάδα μήκους της προσδεδεμένης δίνης στο ij -ιοστό πάνελ είναι

$$\mathbf{F}'_{ij} = \rho \mathbf{V}_{\text{eff}} \times \mathbf{\Gamma}_{ij} \quad (124)$$

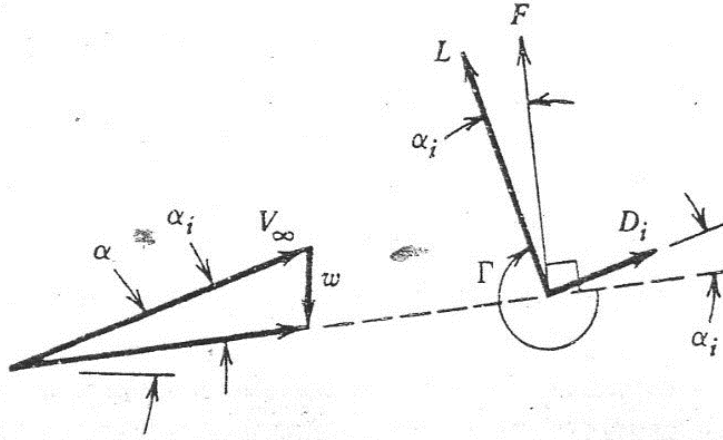
Στην οποία το διάνυσμα $\mathbf{\Gamma}_{ij}$ έχει κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα της δίνης, ενώ το $\mathbf{V}_{\text{eff}}$ είναι το άθροισμα της ταχύτητας μακριά αντίθετα από το ρεύμα V_∞ και του κατωρρεύματος που επάγεται από όλες τις άλλες δίνες και έτσι είναι η τοπική «αποτελεσματική» ταχύτητα της αρχικής ροής.

Η δύναμη στο πάνελ είναι κάθετη στην τοπική αποτελεσματική αρχική ταχύτητα παρά στην αρχική ροή μακριά αντίθετα από το ρεύμα. Έπειτα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η δύναμη έχει μία συνιστώσα προς την κατεύθυνση της πτήσης. Με άλλα λόγια, το πάνελ υπόκειται σε μία δύναμη οπισθέλκουσας. Αυτή ονομάζεται επαγόμενη οπισθέλκουσα. Οφείλεται στο κατώρρευμα που επάγεται από το σύστημα ακολουθουσών δινών, χωρίς το οποίο $\mathbf{V}_{\text{eff}} = V_\infty$ και η δύναμη θα ήταν εξολοκλήρου στην κατεύθυνση άντωσης. Όπως μπορούμε να δούμε στην εικόνα, εάν η γωνία πρόσπτωσης της αρχικής ροής είναι α και w είναι το κατώρρευμα που επάγεται από τις ακολουθούσες δίνες,

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} = V_\infty \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + (V_\infty \sin \alpha - w) \hat{\mathbf{k}}$$

Για την περίπτωση του ορθογωνίου περυγίου που απεικονίζεται στην εικόνα 95, οι προσδεδεμένες δίνες είναι στην κατεύθυνση y , έτσι

$$\mathbf{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{ij} \hat{\mathbf{j}}$$



Σχήμα 97: Επαγόμενη οπισθέλκουσα και επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης.

Και η δύναμη στο ij-ιοστό πάνελ προκύπτει από την εξίσωση 124 ότι είναι

$$F_{ij} = \rho \Delta y \Gamma_{ij} [V_{\infty} \cos \alpha \hat{k} - (V_{\infty} \sin \alpha - w) \hat{i}]$$

Αναλύοντας αυτό σε συνιστώσες κατά μήκος και κάθετα στην ολική αρχική ροή, βρίσκουμε ότι αν τα α και w/V_{∞} είναι μικρά, η οπισθέλκουσα και η άντωση στο ij-ιοστό πάνελ είναι

$$\begin{aligned} D_{ij} &\approx \rho \Delta y w \Gamma_{ij} \\ L_{ij} &\approx \rho \Delta y V_{\infty} \Gamma_{ij} \end{aligned} \quad (125)$$

Στην εξίσωση 125 το w υπολογίζεται αθροίζοντας για όλες τις δίνες. Όπως προηγουμένως, εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία του συστήματος δινών όσον αφορά το μεσαίο άνοιγμα και γράφουμε

$$w = \sum_{kl} \Gamma_{kl} [w_{kl}(x_p, y_p) + w_{k'l}(x_p, y_p)] \quad (126)$$

Όπου (x_p, y_p) είναι τώρα οι συντεταγμένες του σημείου στο $1/4$ της χορδής του ij-ιοστού πάνελ.

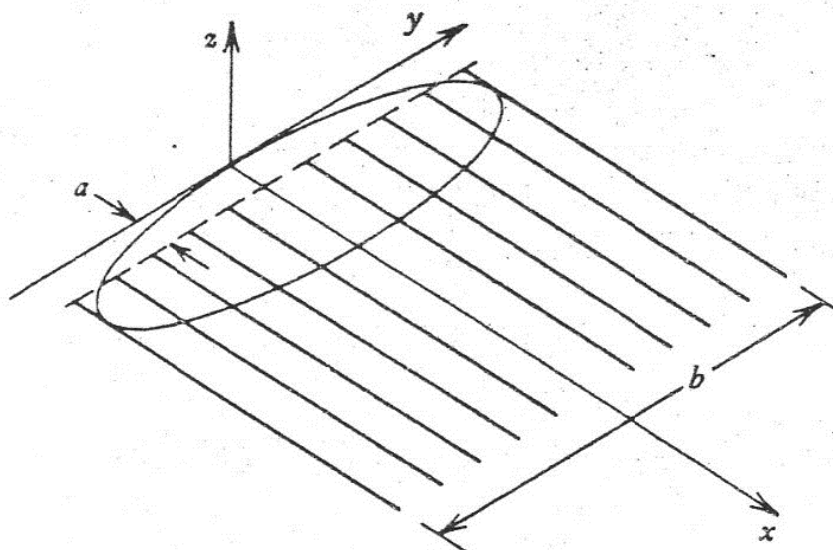
Η γωνία μεταξύ V_{eff} και V_{∞} ονομάζεται επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης α_i και είναι η μείωση στην πραγματική γωνία πρόσπτωσης εξαιτίας των ακολουθούντων δινών. Από την προηγούμενη εικόνα,

$$\alpha_i \approx \frac{w}{V_\infty} \quad (127)$$

Ένα υπολογιστικό πρόγραμμα που ονομάζεται VORLAT έχει γραφτεί για την υλοποίηση της μεθόδου vortex – lattice για την περίπτωση που περιγράφεται εδώ, ένα επίπεδο, «ξεστριμμένο», ορθογώνιο πτερύγιο με ισομεγέθη πάνελ. Τα αποτελέσματα που δίνει αυτό το πρόγραμμα δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά. Συγκεκριμένα, η επαγόμενη οπισθέλκουσα συγκλίνει πολύ αργά για πτερύγια λοξά προς τα πίσω. Το πρόβλημα είναι μία ιδιομορφία συνδεδεμένη με την εκκεντρότητα στις ακολουθούσες δίνες στο επίπεδο $y=0$. Υπάρχουν πολλές θεραπείες για αυτό, αλλά για να είμαστε σίγουροι ότι θα πάρουμε ακριβή αποτελέσματα για λοξά πτερύγια, πρέπει να πάμε σε πιο πολύπλοκες μεθόδους πάνελ που βασίζονται σε συνεχείς κατανομές πηγών και δινών ή ζευγών. Υπάρχει μία πληθώρα τέτοιων μεθόδων, οι οποίες διαφέρουν από την μέθοδο vortex – lattice κυρίως στον υπολογισμό της δύναμης και της ροπής. Απουσία διακριτών δινών, αυτό γίνεται με ολοκλήρωση της κατανομής της πίεσης παρά εφαρμόζοντας το θεώρημα των Kutta – Joukowski.

4.1.4 Θεωρία ανωστικής γραμμής

Μία εναλλακτική προσέγγιση της άνωσης και της επαγόμενης οπισθέλκουσας μπορεί να βρεθεί, κάποιες φορές αναλυτικά, από την θεωρία ανωστικής γραμμής του Prandtl. Είναι βολικό για εμάς να περιγραφεί αυτή η θεωρία σαν μία παραλλαγή της πιο σύγχρονης μεθόδου vortex – lattice που αναπτύχθηκε από τον Falkner.



Σχήμα 98: Η προσέγγιση της ανωστικής γραμμής.

Από αυτή την οπτική γωνία, η θεωρία ανωστικής γραμμής μπορεί να θεωρηθεί σαν μία μέθοδο vortex – lattice, η οποία χρησιμοποιεί μόνο ένα πάνελ δίνης στην κατεύθυνση κατά τη χορδή (chordwise direction), αλλά άπειρο αριθμό πάνελ κατά το άνοιγμα. Δηλαδή χρησιμοποιεί μόνο μία προσδεσμένη δίνη, η οποία είναι ευθεία και παράλληλη στον y άξονα, της οποίας όμως η δύναμη είναι μία συνεχής συνάρτηση $\Gamma(y)$. Το ακολουθόν σύστημα δινών είναι τότε το ημι-άπειρο επίπεδο

$$\begin{aligned} x &> a, & \text{say} \\ |y| &< \frac{b}{2} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται στη παραπάνω εικόνα. Με αυτό το μοντέλο, η θεωρία δεν είναι επαρκής για πολύ λοξά πτερύγια, αλλά τα καταφέρνει πολύ καλά στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Όπως στη θεωρία vortex – lattice, η άνωση ανά μονάδα πλάτους L' και η επαγόμενη οπισθέλκουσα ανά μονάδα εύρους D' υπολογίζονται από την εξίσωση των Kutta – Joukowski.

Για τη συνήθη περίπτωση μικρής γωνίας πρόσπτωσης α και μικρού κατωρρεύματος w (σε σχέση με το V_∞) οι εξισώσεις 125 δίνουν:

$$L'(y) \approx \rho V_\infty \Gamma(y) \quad (128)$$

$$D'_i(y) \approx \rho w(y) \Gamma(y) \quad (129)$$

$$\approx \rho V_\infty \Gamma(y) \alpha_i(y)$$

Όπου $\alpha_i(y)$ είναι η επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης που ορίζεται στην εξίσωση 127 και στην εικόνα 97.

Η κύρια διαφορά μεταξύ των μεθόδων της ανωστικής γραμμής (lifting – line) και της vortex – lattice είναι ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται η δύναμη της προσδεδεμένης δίνης $\Gamma(y)$. Αντί του να ικανοποιήσει την συνθήκη συνέχειας της ροής ρητά σε κάθε σημείο κατά μήκος του πτερυγίου, η θεωρία ανωστικής γραμμής απλά υποθέτει ότι σε οποιαδήποτε θέση κατά το άνοιγμα του πτερυγίου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα δύο διαστάσεων για το τμήμα του συντελεστή άνωσης c_l , δηλαδή

$$c_l = m_0(\alpha - \alpha_{L0} - \alpha_i) \quad (130)$$

Εδώ m_0 και α_{L0} είναι διδιάστατα αποτελέσματα (θεωρητικά ή πειραματικά) για την κλίση της καμπύλης άνωσης και τη γωνία μηδενικής άνωσης, αντίστοιχα, και η επαγόμενη γωνία πρόσπτωσης α_i υπολογίζει την μείωση της πραγματικής γωνίας πρόσπτωσης από τις ακολουθούσες δίνες. Τότε

$$c_l \equiv \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y)} \quad (131)$$

Όπου $c(y)$ είναι η τοπική χορδή, η γνωστή κατανομή φόρτισης $\Gamma(y)$ βρίσκεται από τις εξισώσεις 129, 130 και 131 ότι είναι

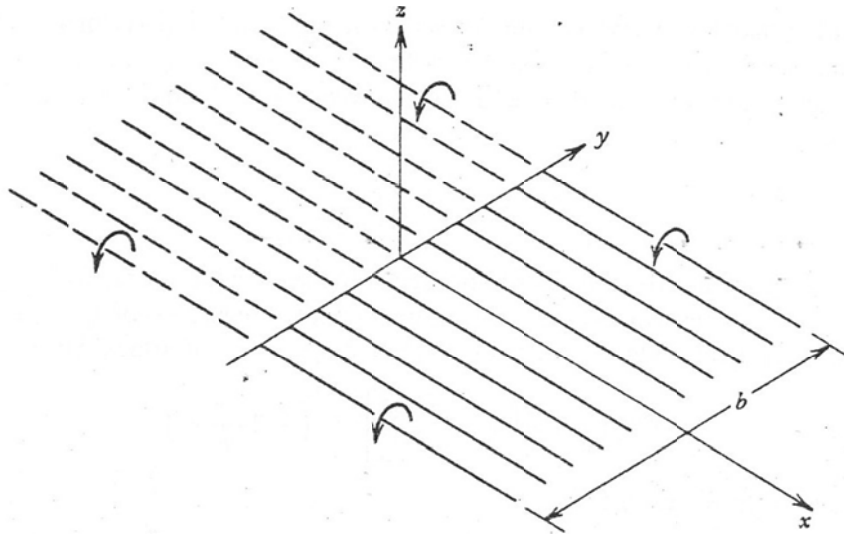
$$\begin{aligned}\Gamma(y) &= \frac{L'}{\rho V_\infty} = \frac{1}{2} c_l V_\infty c. \\ &= \frac{1}{2} m_0 V_\infty c (\alpha - \alpha_{L0} - \alpha_i)\end{aligned}\quad (132)$$

Η υπόθεση μιας τοπικής διδιάστατης ροής σε κάθε σταθερό επίπεδο y είναι ξεκάθαρα η καλύτερη εάν το άνοιγμα του περυγίου b είναι μεγάλο σε σύγκριση με τη μέση χορδή του, δηλαδή όταν ο λόγος επιμήκους (aspect ratio) είναι

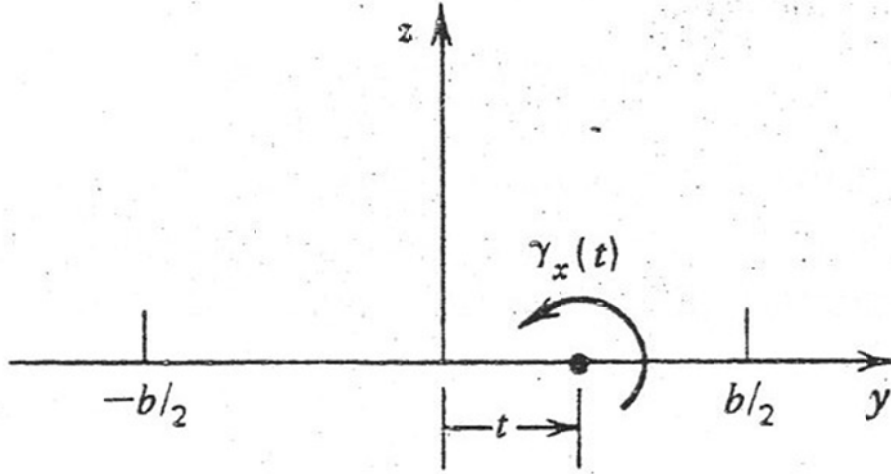
$$\mathcal{R} \equiv b^2/S \quad (133)$$

Όπου S είναι η περιοχή του περιγράμματος κάτοψης (οπότε το S/b είναι η «μέση χορδή») και είναι μεγάλη.

Ο υπολογισμός του a_i στην ανωστική γραμμή (δηλαδή στην προσδεδεμένη δίνη) απλοποιείται πάρα πολύ από την ορθογωνική δομή του φύλλου στροβιλότητας. Λόγω συμμετρίας, το κατώρρευμα στο χείλος πρόσπτωσης του φύλλου (το οποίο, όπως φαίνεται από την παρακάτω εικόνα, το τοποθετούμε στο $x=0$) είναι ακριβώς το μισό από αυτό που θα ήταν εάν το φύλλο δινών ήταν διπλά άπειρο (και έτσι διδιάστατο).



Σχήμα 99: Κατώρρευμα εξαιτίας του συστήματος ακολουθούντων δινών από μία ανωστική γραμμή.



Σχήμα 100: Η ακολουθούσα δίνη όπως φαίνεται κατά την κατεύθυνση του ρεύματος.

Έτσι, υιοθετούμε την σκοπιά της παραπάνω εικόνας και σχεδιάζουμε βάσει των διδιάστατων αποτελεσμάτων για να πάρουμε την κατανομή του κατώρρεύματος στην ανωστική γραμμή:

$$2w(y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\gamma_x(t) dt}{t - y} \quad (135)$$

Απαλοίφοντας τα γ_x και w με την εξίσωση 121 και 129, έχουμε

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'(t) dt}{y - t} \quad (136)$$

Βάζοντας αυτό στην εξίσωση 134, παίρνουμε μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση για το $\Gamma(y)$ (εάν τα a_{L0} , c και m_0 είναι δεδομένες συναρτήσεις του y):

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V_\infty c m_0 \left[\alpha - \alpha_{L0} - \frac{1}{4\pi V_\infty} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'(t) dt}{y - t} \right] \quad (137)$$

4.1.5 Η ελλειπτική κατανομή άνωσης

Αντί να αντιμετωπίσουμε το «άμεσο» πρόβλημα εύρεσης του $\Gamma(y)$ για ένα δεδομένο περίγραμμα κάτοψης πτερυγίου και κατανομής τμήματος (δηλαδή αντι του να προσδιορίσουμε τα $a_{L0}(y), c(y)$ και $m_o(y)$), είναι χρήσιμο να ξεκινήσουμε με μία «αντίστροφη» διαδικασία. Παίρνουμε την κατανομή φόρτισης Γ ως ελλειπτική:

$$\Gamma(y) = \Gamma_s \left[1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (138)$$

Όπως θα φανεί σύντομα, η κατανομή δίνει την ελάχιστη επαγόμενη οπισθέλκουσα για δεδομένη άνωση και άνοιγμα, ανεξάρτητα από το πως επιτυγχάνεται, δηλαδή ανεξάρτητα από τα $a_{L0}(y)$ και $c(y)$.

Ας υπολογίσουμε αρχικά την απόκλιση της επαγόμενης γωνίας πρόσπτωσης. Τότε

$$\Gamma'(y) = \Gamma_s \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(-2 \cdot \frac{4}{b^2} y \right)$$

Και από την εξίσωση 136 έχουμε

$$\alpha_i(y) = - \frac{\Gamma_s}{\pi V_\infty b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{t dt}{(1 - 4t^2/b^2)^{1/2} (y - t)}$$

Εξαιτίας του τετραγωνικού όρου, είναι βολικό να εισάγουμε μία τριγωνομετρική αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} t &= \frac{b}{2} \cos \theta \\ y &= \frac{b}{2} \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (139)$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\alpha_i(y) &= -\frac{\Gamma_s}{\pi V_\infty b^2} \int_{\pi}^0 \frac{\frac{b}{2} \cos \theta \cdot \left(-\frac{b}{2} \sin \theta\right) d\theta}{(1 - \cos^2 \theta)^{1/2} \frac{b}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta)} \\ &= -\frac{\Gamma_s}{2\pi V_\infty b} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}\end{aligned}$$

Αλλά αυτή είναι μία ειδική περίπτωση της γνωστής εξίσωσης

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (140)$$

Επομένως,

$$\alpha_i = \frac{\Gamma_s}{2V_\infty b} \quad (141)$$

Και από την εξίσωση 129,

$$w = \frac{\Gamma_s}{2b} \quad (142)$$

Έτσι, για μία ελλειπτική κατανομή φόρτισης, το κατώρρευμα που επάγεται από τις ακολουθούσες δίνες είναι σταθερό πάνω από το άνοιγμα.

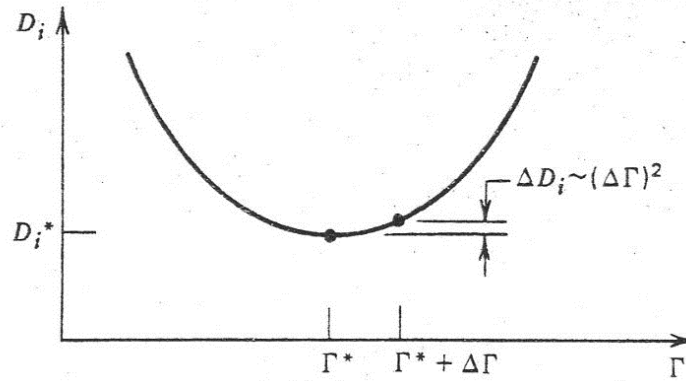
Προτού προχωρίσουμε, θα αποδείξουμε ότι αυτή σταθερή διάταξη κατωρρεύματος όντως ελαχιστοποιεί την επαγόμενη οπισθέλκουσα για δεδομένη άνωση και άνοιγμα. Γενικά, η συνολική άνωση και οπισθέλκουσα προκύπτουν αν ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις 130 και 131:

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (143)$$

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} D'(y) dy = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w(y) \Gamma(y) dy \quad (144)$$

Έστω, $\Gamma^*(y)$ η βέλτιστη κατανομή φόρτισης. Τότε, εάν το $\Gamma(y)$ άλλαζε λίγο από το $\Gamma^*(y)$ χωρίς να αλλάξει η άνωση, η αλλαγή στην επαγόμενη οπισθέλκουσα πρέπει να είναι τάξης τετραγώνου της αλλαγής του Γ . Αυτό φαίνεται στην επόμενη εικόνα, η οποία είναι ένα

θεμελιώδες σχέδιο της επαγόμενης οπισθέλκουσας έναντι της συνάρτησης κατανομής φόρτισης. Κατά τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι εάν ένα μη-βέλτιστο Γ αλλάξει λίγο, η αλλαγή στην επαγόμενη οπισθέλκουσα είναι τάξης πρώτης δύναμης της αλλαγής του Γ .



Σχήμα 101: Θεμελιώδης όψη της βέλτιστης (ελάχιστη οπισθέλκουσα) κατανομής φόρτισης.

Επομένως, θα δείξουμε ότι η ελλειπτική κατανομή φόρτισης $\Gamma_e(y)$, είναι βέλτιστη αποδεικνύοντας ότι εάν το Γ αλλάξει από Γ_e χωρίς να αλλάξει η ολική άνωση, η αλλαγή στην επαγόμενη οπισθέλκουσα είναι τάξης τετραγώνου της αλλαγής στο Γ . εάν η αλλαγή στην κατανομή φόρτισης είναι $\delta\Gamma(y)$, έτσι ώστε

$$\Gamma(y) = \Gamma_e(y) + \delta\Gamma(y) \quad (145)$$

Επειδή η αλλαγμένη κατανομή φόρτισης $\Gamma(y)$ πρέπει να παράγει την ίδια άνωση με την ελλειπτική κατανομή $\Gamma_e(y)$, βλέπουμε από τις εξισώσεις 143 και 145 ότι

$$\int_{-b/2}^{b/2} \delta\Gamma(y) dy = 0 \quad (146)$$

Η κατανομή του κατωρρέματος που σχετίζεται με το $\Gamma(y)$ είναι από τις εξισώσεις 129 και 136,

$$\begin{aligned} w(y) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'_e(t) dt}{y-t} + \frac{1}{4\pi} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\delta\Gamma'(t) dt}{y-t} \\ &= w_e + \frac{1}{4\pi} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\delta\Gamma'(t) dt}{y-t} \end{aligned} \quad (147)$$

Στην οποία το w_e είναι το κατώρρευμα εξαιτίας της ελλειπτικής φόρτισης. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 145 και 147 στην 144, παίρνουμε

$$\begin{aligned} D_i &= \rho \int_{-b/2}^{b/2} w_e \Gamma_e(y) dy + \rho \int_{-b/2}^{b/2} w_e \delta\Gamma(y) dy \\ &\quad + \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma_e(y) \delta\Gamma'(t)}{y-t} dt dy + \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\delta\Gamma(y) \delta\Gamma'(t)}{y-t} dt dy \end{aligned} \quad (148)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην εξίσωση 148 είναι από την εξίσωση 144 απλά η επαγόμενη οπισθέλκουσα της ελλειπτικής κατανομής D_e . Από την εξίσωση 142 έχουμε ότι το w_e είναι σταθερό και έτσι στην εξίσωση 146 το δεύτερο ολοκλήρωμα εξαφανίζεται. Όσο για το τρίτο,

$$f(t) \equiv \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma_e(y) dy}{y-t}$$

Έτσι, το τρίτο ολοκλήρωμα στην εξίσωση 148 μπορεί τώρα να γραφεί

$$\frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \delta\Gamma'(t) f(t) dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\rho}{4\pi} \delta\Gamma(t) f(t) \Big|_{-b/2}^{b/2} - \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \delta\Gamma(t) f'(t) dt$$

Αλλά $\Gamma = \Gamma_e = 0$ στα ακροπερύγια, έτσι $\delta\Gamma(\pm b/2) = 0$ επίσης, και το κομμάτι που ολοκληρώθηκε εξαφανίζεται. Επίσης, από τον ορισμό του $f(t)$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma_e(y) dy}{y-t} \\ &= \oint_{-b/2}^{b/2} \Gamma_e(y) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{y-t} \right) dy \\ &= - \oint_{-b/2}^{b/2} \Gamma_e(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y-t} \right) dy \end{aligned}$$

Τώρα ολοκληρώνοντας κατά μέλη συναρτήσει του y , παίρνουμε

$$f'(t) = - \frac{\Gamma_e}{y-t} \Big|_{y=-b/2}^{y=b/2} + \oint_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'_e(y) dy}{y-t}$$

Ξανά το κομμάτι που ολοκληρώθηκε εξαφανίζεται, ενώ ότι μένει είναι από τις εξισώσεις 129 και 136 ανάλογο της σταθεράς w_e :

$$f'(t) = 4\pi w_e$$

Συνεπώς, το τρίτο ολοκλήρωμα στην εξίσωση 148 είναι

$$-\frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \delta\Gamma(t) 4\pi w_e dt$$

Το οποίο από τη σταθερότητα του w_e και την εξίσωση 146, είναι μηδέν. Η εξίσωση 148 είναι επομένως μειωμένη στο εξής

$$D_i = D_e + O(\Delta\Gamma)^2$$

Το οποίο είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε: ότι οποιαδήποτε αλλαγή στο Γ από το Γ_e , η οποία δεν αλλάζει την άνωση, αυξάνει την επαγόμενη οπισθέλκουσα με κάτι δευτέρου βαθμού στο $\Delta\Gamma$. Συνεπώς, η ελλειπτική φόρτιση είναι, όπως υποστηρίχθηκε, βέλτιστη, με την έννοια ότι ελαχιστοποιεί την επαγόμενη οπισθέλκουσα για δεδομένη άνωση και άνοιγμα.

4.1.6 Το βέλτιστο περύγιο.

Θα εξετάσουμε τώρα την συμπεριφορά και γεωμετρία του βέλτιστου περυγίου, του περυγίου του οποίου η επαγόμενη οπισθέλκουσα είναι ελάχιστη για δεδομένη άνωση και άνοιγμα, εξαιτίας της ελλειπτικής του φόρτισης. Για να υπολογιστεί η άνωσή του, πρέπει να αντικαταστήσουμε το $\Gamma(y)$ στην εξίσωση 143 από την εξίσωση 148. Για ακόμα μία φορά είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς του συνημιτόνου,

$$\begin{aligned} L &= \rho V_{\infty} \Gamma_s \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} dy \\ &= \rho V_{\infty} \Gamma_s \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{1/2} \left(-\frac{b}{2} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \rho V_{\infty} \Gamma_s \frac{\pi b}{4} \end{aligned} \quad (149)$$

Μιας και το α είναι σταθερό όταν η φόρτιση είναι ελλειπτική, έχουμε από τις εξισώσεις 142, 144 και 145,

$$\begin{aligned} D_i &= \alpha_i L \\ &= \frac{\Gamma_s}{2 V_{\infty} b} L \end{aligned}$$

Αλλά από την εξίσωση 149,

$$\Gamma_s = \frac{4}{\pi b} \frac{L}{\rho V_{\infty}}$$

Και έτσι

$$D_i = \frac{1}{\pi} \frac{L^2}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 b^2} \quad (150)$$

Σε μορφή συντελεστή η επαγόμενη οπισθέλκουσα είναι

$$C_{D_i} \equiv \frac{D_i}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{1}{\pi} \frac{S}{b^2} \left(\frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} \right)^2 \quad (151)$$

$$= \frac{1}{\pi AR} C_L^2$$

Όπου ο συντελεστής της άνωσης περιγράφεται ως

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} \quad (152)$$

Και ο λόγος επιμήκους ορίζεται στην εξίσωση 134.

Να σημειωθεί ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι συνέπειες μίας κατανομής ελλειπτικής φόρτισης (Γ) και δεν έχει αναφερθεί τίποτα για το σχήμα του περιγράμματος κάτοψης $[c(y)]$. Για να εισάγουμε και το περίγραμμα της κάτοψης επιστρέφουμε στη βασική εξίσωση 133, όπου αντικαθιστούμε για Γ και α_i τα αποτελέσματα της ελλειπτικής φόρτισης των σχέσεων 138 και 141,

$$\Gamma_s \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2} m_0 V_\infty c \left(\alpha - \alpha_{L0} - \frac{\Gamma_s}{2V_\infty b} \right)$$

Και λύνουμε ως προς $c(y)$ συναρτήσει των $m_0(y)$ και $\alpha_{L0}(y)$:

$$c(y) = \frac{2\Gamma_s}{V_\infty m_0} \frac{[1 - (2y/b)^2]^{1/2}}{[\alpha - \alpha_{L0} - (\Gamma_s/2V_\infty b)]} \quad (153)$$

Εάν τα m_0 και α_{L0} είναι σταθερά κατά μήκος του ανοίγματος, η κατανομή της χορδής που απαιτείται για την παραγωγή της βέλτιστης (ελλειπτικής) κατανομής φόρτισης φαίνεται να είναι επίσης ελλειπτική, δηλαδή

$$c = c_s \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (154)$$

Όπου c_s είναι η βασική – αρχική χορδή. Ο ολικός συντελεστής άνωσης για το επίπεδο ελλειπτικό πτερύγιο είναι

$$C_L = \frac{m_0(\alpha - \alpha_{L0})}{1 + m_0/\pi AR} \quad (155)$$

Παρ' όλα αυτά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξίσωση 153 για να προσδιορίσουμε την βέλτιστη κατανομή του α_{L0} (και έτσι της κύρτωσης και της περιστροφής) που αντιστοιχεί σε δεδομένο περίγραμμα κάτοψης (και επομένως του $c(y)$):

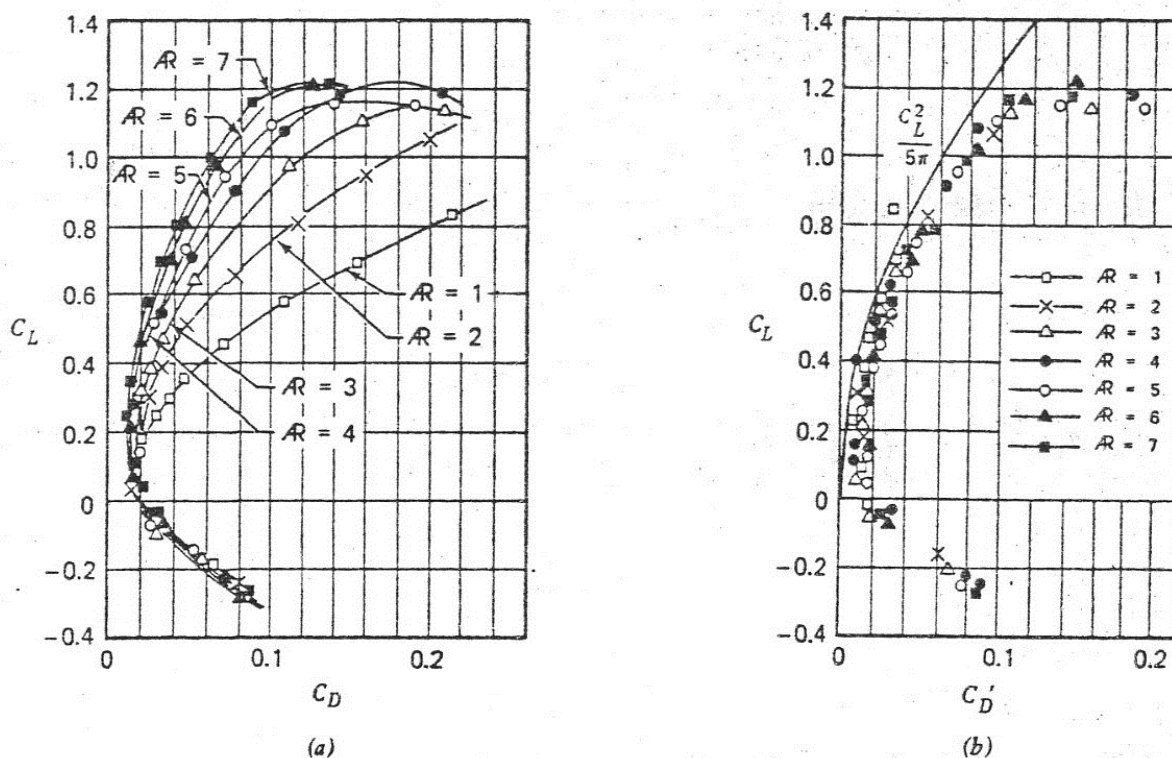
$$\alpha_{L0}(y) = \alpha - \frac{\Gamma_s}{2V_\infty b} \left[1 + \frac{4b}{m_0 c(y)} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \quad (156)$$

Υπενθυμίζεται ότι για την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας για δεδομένη άνωση και άνοιγμα, είναι η φόρτιση $\Gamma(y)$ που πρέπει να είναι ελλειπτική, όχι απαραίτητα το περίγραμμα της κάτοψης.

Μία από τις ομορφιές μίας βέλτιστης σχεδίασης είναι ότι ακόμα και όταν, για τον έναν ή τον άλλο λόγο, δεν μπορούμε να πετύχουμε ακριβώς τις συνθήκες που κάνουν τη σχεδίαση βέλτιστη, η συμπεριφορά είναι πολύ πιθανό να είναι αρκετά κοντά στην βέλτιστη διάταξη. Επιστρέφοντας στο θεμελιώδες σκίτσο της εικόνας 131, βλέπουμε ότι η επαγόμενη οπισθέλκουσα αλλάζει πολύ λίγο με μικρές απομακρύνσεις από την βέλτιστη κατανομή φόρτισης. Συνεπώς, η εξάρτηση της επαγόμενης οπισθέλκουσας από την άνωση και το λόγο επιμήκους, προβλέπεται γενικά πολύ καλά από την γνωστή εξίσωση που προκύπτει για το βέλτιστο πτερύγιο, εξίσωση 141. ο Prandtl το έδειξε αυτό στην εργασία του το 1921 πλοτάροντας πειραματικά δεδομένα για το C_L και το C_D για κυρτές ορθογωνικές πτέρυγες λόγου επιμήκους από 1 μέχρι 7. Όπως φαίνεται από την παρακάτω εικόνα αυτά τα δεδομένα μπορούν, για τιμές του C_L όχι πολύ μεγάλες, να προσεγγιστούν καλά από μία παραβολή και το μήκος εστίασης της παραβολής αυξάνει με το λόγο επιμήκους, όπως προβλέπεται από την εξίσωση 141. το γεγονός ότι η ελάχιστη οπισθέλκουσα δεν είναι σε μηδενική άνωση

αντικατοπτρίζει την κυρτότητα των ακροπτερυγίων και το ότι δεν είναι μηδέν οφείλεται φυσικά στα φαινόμενα συνεκτικότητας.

Η συμφωνία των δεδομένων με την εξίσωση 141 είναι πολύ καλύτερη από ποιοτική παρ' όλα αυτά. Ο Prandtl αφαίρεσε το $C_L^2 / \pi AR$ από τις μετρήσεις της οπισθέλκουσας που είχε και βρήκε ότι η επαγόμενη οπισθέλκουσα ήταν σχεδόν ανεξάρτητη από τα C_L^2 και AR . Αυτό φαίνεται στην εικόνα 102b, στην οποία η επαγόμενη οπισθέλκουσα έχει επιπλέον τροποποιηθεί προσθέτοντας τον όρο $C_L^2 / 5\pi$. Συγκρίνοντας την παραβολή $C_L^2 / 5\pi$ με τα δεδομένα, μπορούμε να δούμε ότι η διαφορά μεταξύ της ολικής οπισθέλκουσας των ορθογωνικών ακροπτερυγίων και της επαγόμενης οπισθέλκουσας ενός βέλτιστου πτερυγίου ίδιου λόγου επιμήκους αυξάνει κατά κάποιο τρόπο με το C_L .



Σχήμα 102: Οπισθέλκουσα σε πολικές συντεταγμένες για κυρτά ορθογωνικά πτερύγια διαφόρων λόγων επιμήκους. (α) Βασικά δεδομένα. (β) Συρρίκνωση των δεδομένων αφαιρώντας τη θεωρητική επαγόμενη οπισθέλκουσα (σύμφωνα με τη θεωρία ανωστικής γραμμής για βέλτιστο πτερύγιο) από τις μετρημένες οπισθέλκουσες.

Δεδομένα άνωσης και οπισθέλκουσας παρουσιάζονται συνήθως στη μορφή που παρουσιάζεται στην εικόνα 102. Τα γραφήματα άνωσης έναντι οπισθέλκουσας ονομάζονται drag polars.

Η εξάρτηση της άνωσης από την γωνία πρόσπτωσης για μία τυχαία πτέρυγα είναι συχνά πολύ κοντά σε αυτή που έχει προβλεφθεί για τη βέλτιστη επίπεδη πτέρυγα, εξίσωση 155. Ξαναγράφοντας αυτή την εξίσωση ως

$$C_L = m_0 \left(\alpha - \frac{C_L}{\pi AR} - \alpha_{L0} \right) \quad (157)$$

Καταλαβαίνουμε τον ορισμό του Prandtl για τη μειωμένη γωνία πρόσπτωσης

$$\alpha' = \alpha - \frac{C_L}{\pi AR} + \frac{C_L}{5\pi}$$

Και εκτιμούμε την αξιοσημείωτη ανεξαρτησία του AR από τα πειραματικά αποτελέσματα σε ορθογωνικά πτερύγια. Όπως φαίνεται από τα γραφήματα των εικόνων 102 και 103, η θεωρία της ανωστικής γραμμής δήθεν ακριβής μόνο για «μεγάλους» λόγους επιμήκους, είναι στην πραγματικότητα πολύ καλή κάτω από AR=1. Αυτό σίγουρα δεν φαίνεται από τα δεδομένα του σχήματος 103α, στα οποία η εξάρτηση του C_L από το α είναι οριστικά μη γραμμική. Φυσικά η εξίσωση 155 από μόνη της δεν προβλέπει την μη γραμμικότητα. Είναι μόνο όταν αναδιαμορφώνεται στην εξίσωση 157 που κερδίζει αξιοπιστία.

4.1.7 Μη ελλειπτικές ανωστικές κατανομές

Ας επιστρέψουμε στο άμεσο πρόβλημα: δεδομένων $\alpha_{L0}(y), c(y)$ και $m_0(y)$ - δηλαδή δεδομένου ενός συγκεκριμένου πτερυγίου και των τοπικών αεροδυναμικών ιδιοτήτων του - να βρεθεί το $\Gamma(y)$ έτσι ώστε να ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση 137. όπως στο πρόβλημα της κυρτότητας της θεωρίας λεπτών αεροτομών, είναι βολικό να εισάγουμε τριγωνομετρικές μεταβλητές από την εξίσωση 140 και μία σειρά Fourier για το $\Gamma(y)$:

$$\Gamma(y) = g(\theta_0) = \frac{1}{2} m_{0s} c_s V_\infty \sum_{n=1} A_n \sin n\theta_0 \quad (158)$$

Στην οποία η σταθερά έξω από την άθροιση περιλαμβάνεται για διευκόλυνση παρακάτω (ο δείκτης “s” δηλώνει τιμές του m_0 και του c στο επίπεδο συμμετρίας $y=0$). Τότε,

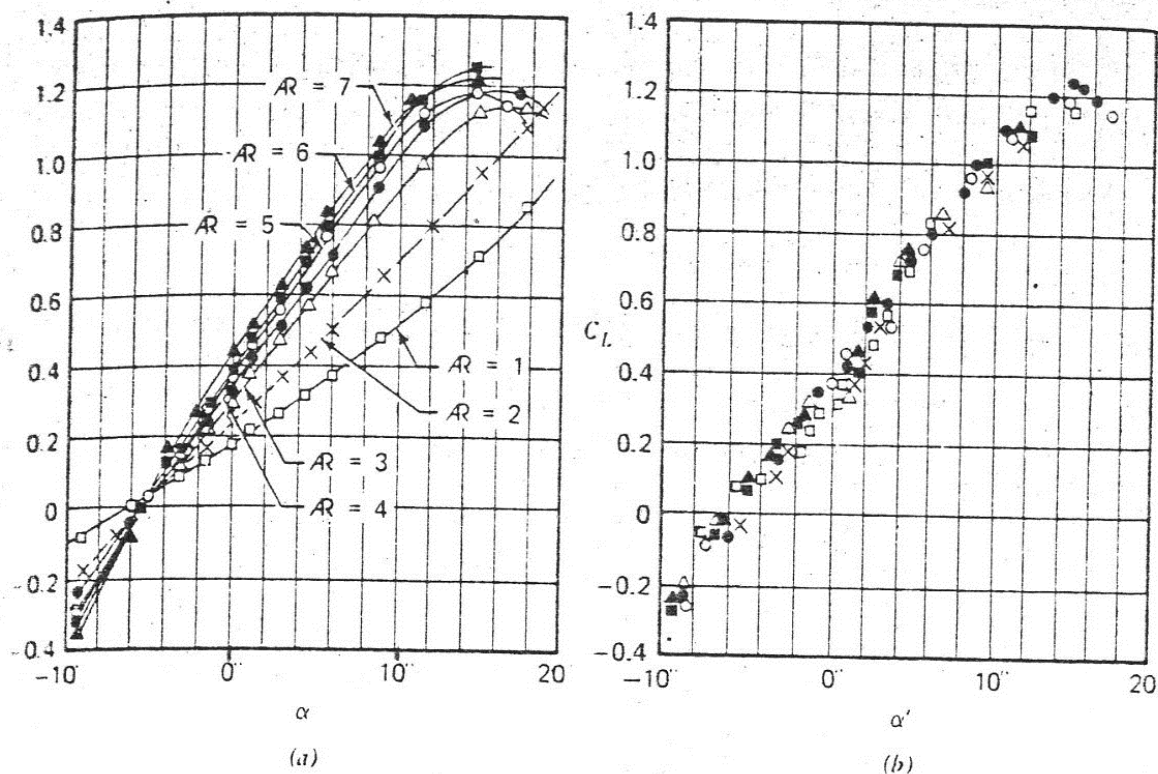
$$\begin{aligned} \Gamma'(t) dt &= \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} dt = g'(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} m_{0s} c_s V_\infty \sum_{n=1} n A_n \cos n\theta d\theta \end{aligned} \quad (159)$$

Και

$$\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'(t) dt}{y-t} = \frac{1}{2} m_{0s} c_s V_\infty \sum_{n=1} n A_n \int_{\pi}^0 \frac{\cos n\theta d\theta}{\frac{b}{2}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 140 για να αξιολογήσουμε το ολοκλήρωμα, και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα και την εξίσωση 158 στην 138, έχουμε

$$\sum_{n=1} A_n \sin n\theta_0 = \frac{cm_0}{c_s m_{0s}} (\alpha - \alpha_{L0}) - \frac{cm_0}{4b} \sum_{n=1} n A_n \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (160)$$



Σχήμα 103: Άνωση – γωνία πρόσπτωσης για κυρτά ορθογωνικά πτερύγια διαφόρων λόγων επιμήκους. (α) Βασικά δεδομένα, (β) Συρρίκνωση των δεδομένων ορίζοντας την μειωμένη γωνία πρόσπτωσης σύμφωνα με τη θεωρία ανωστικής για βέλτιστο πτερύγιο.

Η επίλυση της εξίσωσης 160 για τα A_n δεν είναι εύκολη. Στη μέθοδο συγκριτικής παράθεσης, αρχικά περικόπτουμε τη σειρά (158) για $g(\theta_0)$ (θέτουμε $A_n=0$ πάνω από κάποιο συγκεκριμένο n), ούτως ώστε να μειώσουμε το πρόβλημα σε ένα με πεπερασμένο αριθμό αγνώστων και έπειτα να υπολογίσουμε την εξίσωση 160 αρκετά για διάφορες τιμές του θ_0 , ώστε να βρούμε τους αγνώστους. Για να ελέγξουμε κατά πόσο η περικοπή είναι πολύ αυστηρή, πρέπει να ξαναδουλέψουμε το πρόβλημα, περικόπτοντας τις σειρές με κάποιο άλλο διαφορετικό τρόπο.

Η διαδικασία αυτή είναι λίγο ευκολότερη στην περίπτωση συμμετρικής φόρτισης

$$\Gamma(y) = \Gamma(-y)$$

Καθώς οι άρτιοι συντελεστές $A_2, A_4, \dots$ είναι τότε όλοι μηδενικοί. Για να το δούμε αυτό σημειώνουμε ότι η εξίσωση 139 υποδηλώνει ότι

$$-y = \frac{b}{2} \cos(\pi - \theta_0)$$

Συνεπώς, όσον αφορά τη συνάρτηση $g(\theta_0)$ που ορίζεται στην εξίσωση 157, συμμετρική φόρτιση σημαίνει

$$g(\theta_0) = g(\pi - \theta_0)$$

Ή, αντικαθιστώντας για g τη σειρά επέκτασής του,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} A_n \sin n\theta_0 &= \sum_{n=1} A_n \sin n(\pi - \theta_0) \\ &= \sum_{n=1} A_n (\sin n\pi \cos n\theta_0 - \cos n\pi \sin n\theta_0) \\ &= - \sum_{n=1} A_n \cos n\pi \sin n\theta_0 \end{aligned}$$

Λόγω της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων του ημιτόνου, αυτό μπορεί να είναι αληθινό μόνο όταν για κάθε n και θ_0

$$A_n \sin n\theta_0 = -A_n \cos n\pi \sin n\theta_0$$

Τότε

$$\begin{aligned} \cos n\pi &= +1 && \text{if } n \text{ is even} \\ &= -1 && \text{if } n \text{ is odd} \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$A_n = 0 \quad \text{if } n \text{ is even}$$

Για κάθε περίπτωση που η φόρτιση είναι συμμετρική γύρω από το μέσο άνοιγμα.

5. ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΧΑΜΗΛΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ **ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ ΣΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΠΑΝΕΛ**

5.1 Τρισδιάστατες αριθμητικές λύσεις

Οι τρισδιάστατες αριθμητικές λύσεις που βασίζονται σε επιφανειακές κατανομές ιδιομορφίας είναι ίδιες, κατά βάση, με τις μεθόδους που παρουσιάζονται για τις διδιάστατες περιπτώσεις. Από θεωρητικής άποψης, μόνο η συνθήκη ομόρρου και χείλους εκφυγής (τρिसδιάστατη συνθήκη Kutta) απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Το πιο δύσκολο πράγμα στο τρισδιάστατο πρόβλημα είναι η μοντελοποίηση της γεωμετρίας, ιδιαίτερα όταν αναζητείται τυχαία γεωμετρική ικανότητα.

Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου η γεωμετρία (του πτερυγίου) διατηρείται σχετικά απλή και η αεροδυναμική μία λεπτής ανωστικής επιφάνειας μοντελοποιείται. Κατά βάση, αυτή η απλή μέθοδος έχει όλα τα στοιχεία των πιο πολύπλοκων μεθόδων πάνελ και είναι ικανή να μοντελοποιήσει την επίδραση του περιγράμματος κάτοψης σχήματος πτέρυγας στις ρευστομηχανικές φορτίσεις. Επιπλέον, τα παραδείγματα που παρουσιάζονται απαιτούν μόνο περιορισμένη υπολογιστική προσπάθεια και, έτσι, είναι κατάλληλα για καθοδήγηση.

Στο δεύτερο τμήμα αυτού του κεφαλαίου, θα παρουσιαστούν οι αρχές των κωδίκων πάνελ που είναι ικανές να λύσουν τη ροή γύρω από σώματα με τυχαία τρισδιάστατη γεωμετρία. Με τα χρόνια πολλές τέτοιες μέθοδοι εξελίχθηκαν και βελτιώθηκαν, αλλά πρόσφατες τάσεις δείχνουν μία αυξημένη χρήση της προσέγγισης που βασίζεται στο συνδυασμό επιφανειακών πηγών και κατανομών ζευγών με την εσωτερική δυναμική οριακή συνθήκη (για κλειστά σώματα). Κατά συνέπεια, μόνο αυτή η προσέγγιση μπορεί να παρουσιαστεί μέσα από μία σύντομη περιγραφή μίας χαμηλότερης τάξης μεθόδου πάνελ κατά ένα βαθμό και μίας μεθόδου πάνελ μεγαλύτερης κατά μία τάξη.

5.1.1 Λύση ανωστικής γραμμής με στοιχεία horseshoe

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα θεωρούμε την αριθμητική λύση του προβλήματος ανωστικής γραμμής. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τις υποθέσεις και τους περιορισμούς της γραμμικής μεθόδου απλής δίνης, η οποία σε αυτή την αριθμητική μορφή μπορεί να επεκταθεί εύκολα ώστε να συμπεριλάβει επιδράσεις σάρωσης πτερυγίου, διέδρα η ακόμα και

πλάγια ολίσθηση. Χάριν απλότητας μία μόνο δίνη κατά τη χορδή χρησιμοποιείται, αλλά εύκολα μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει περισσότερες δίνες κατά τη χορδή (chordwise). Γίνεται επίσης υπόθεση μικρής διαταραχής και θεωρούμε ένα λεπτό ανωστικό πτερύγιο μεγάλου λόγου επιμήκους ($AR > 4$). Αυτό το πρόβλημα ορίζεται σε συμφωνία με την κατανομή δινών και το μοντέλο horseshoe δινών μπορεί να θεωρηθεί ως η απλούστερη προσέγγιση για την επίλυσή του.

Όσον αφορά την επίλυση της εξίσωσης Laplace, η δίνη γραμμής είναι μία λύση αυτής της εξίσωσης και η μόνη συνοριακή συνθήκη που χρειάζεται να ικανοποιηθεί είναι η μηδενική κανονική ροή κατά μήκος της συμπαγούς επιφάνειας του λεπτού πτερυγίου:

$$\nabla(\Phi + \Phi_r) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (161)$$

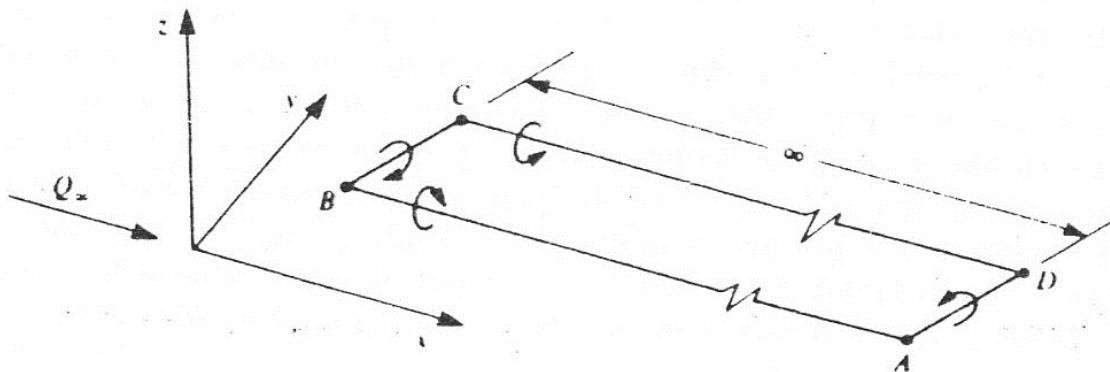
Στην κλασική περίπτωση του μοντέλου ανωστικής γραμμής του Prandtl, το πτερύγιο τοποθετείται στο xy επίπεδο και έπειτα η οριακή αυτή συνθήκη απαιτεί το άθροισμα της συνιστώσας της κανονικής ταχύτητας που επάγεται από τις δίνες στο σύνορο του πτερυγίου w_b , από τον ομόρρου w_i και από την ταχύτητα της ελεύθερης ροής Q_∞ να είναι μηδέν:

$$w_b + w_i + Q_\infty \alpha = 0 \quad (162)$$

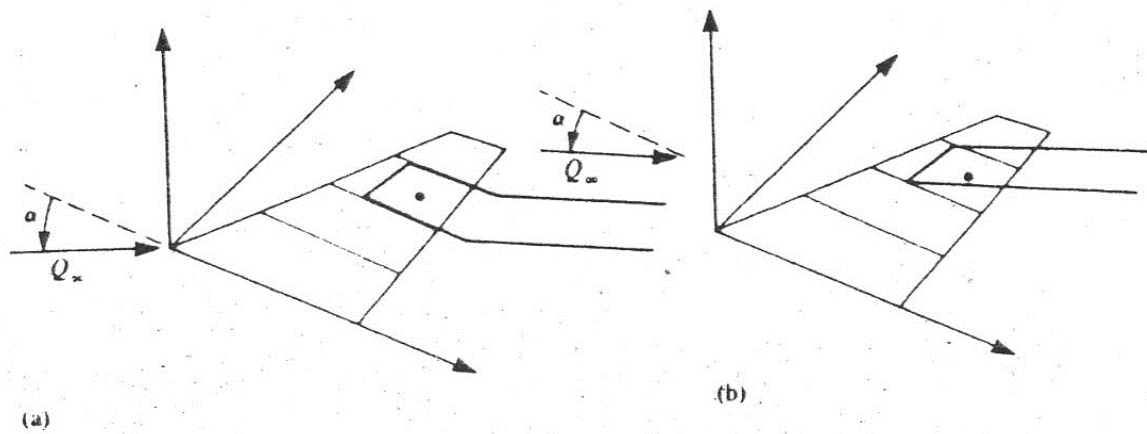
Βασιζόμενοι στο προτεινόμενο στοιχείο horseshoe και στην ανωτέρω συνοριακή συνθήκη, θα κατασκευάσουμε μία αριθμητική λύση.

Επιλογή του στοιχείου ιδιομορφίας. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος επιλέγεται το στοιχείο horseshoe που φαίνεται στην εικόνα 104. Αυτό το στοιχείο αποτελείται από ένα τμήμα ευθυτενούς προσδεδεμένης δίνης (η BC στο σχήμα 104) που μοντελοποιεί τις ανωστικές ιδιότητες και από δύο ημιάπειρες γραμμές ακολουθουσών δινών που μοντελοποιούν τον ομόρρου. Το τμήμα BC δεν χρειάζεται να είναι απαραίτητα παράλληλο στον y άξονα, αλλά στα άκρα του πτερυγίου η δίνη απορρέει στην ροή όπου πρέπει να είναι παράλληλη στη στρωτή ροή, ώστε να μην επιδρά καμία δύναμη στις ακολουθούσες δίνες. Για να μην παραβιάσουμε την συνθήκη του Helmholtz, αυτά τα στοιχεία δίνης διερευνώνται ως τα κοντινά τμήματα των δαχτυλιδιών της δίνης, των οποίων οι αρχικές ροές εκτείνονται πολύ πίσω, κατά τρόπο τέτοιο ώστε η επίδραση αυτού του τμήματος να είναι αμελητέα (τμήμα AD στο σχήμα 104). Η

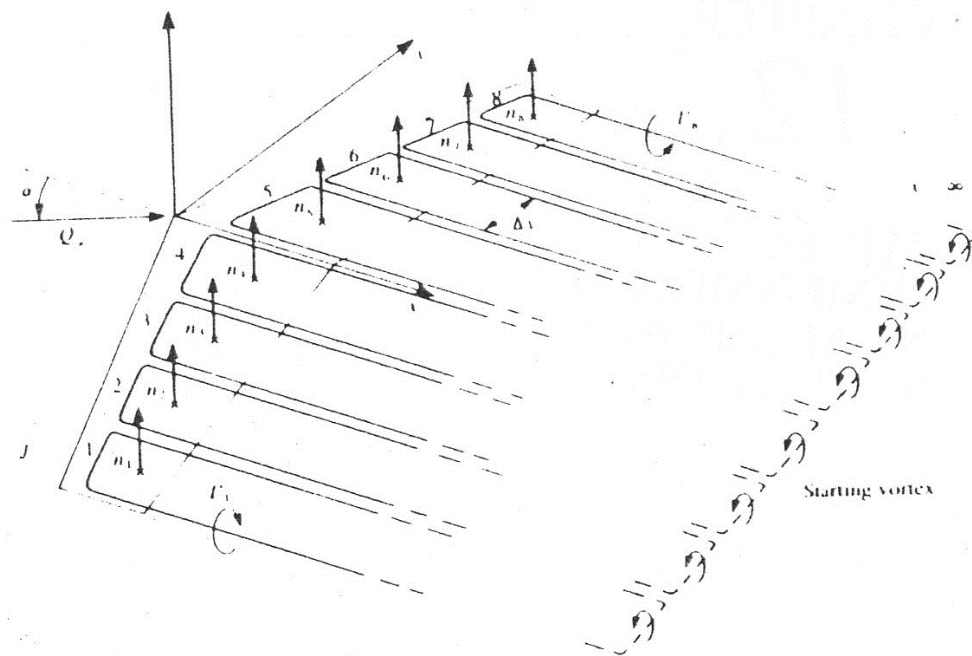
απαίτηση ότι ο «απομακρυσμένος ομόρρους» πρέπει να είναι παράλληλος στην ελεύθερη ροή θέτει κάποιες δυσκολίες μοντελοποίησης (οι οποίες δεν εμφανίστηκαν καθόλου όταν κατασκευαζόταν το κλασικό μοντέλο ανωστικής γραμμής). Αυτό φαίνεται στο σχήμα 105α, το οποίο δείχνει ότι ο ακολουθών ομόρρους πρέπει να καμπυλώσει κοντά στο χείλος εκφυγής ούτως ώστε να ικανοποιήσει τη συνθήκη του ελεύθερου ομόρρου. Μία άλλη πιθανότητα φαίνεται στην εικόνα 105b, όπου κρατείται η απλή δίνη horseshoe, αλλά τα ακολουθούντα τμήματα δεν απορρέουν στο χείλος εκφυγής. Φυσικά η υπόθεση μικρής γωνίας πρόσπτωσης (όπως και στην περίπτωση του μοντέλου της ανωστικής γραμμής) επιτρέπει την τοποθέτηση του ομόρρου στο επίπεδο xy σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στην εικόνα 106. Από τη στιγμή που σε αυτό το κομμάτι αποτολμάται η αριθμητική επίλυση του μοντέλου της ανωστικής γραμμής, πρέπει να προσαρμόσουμε το μοντέλο που φαίνεται στην εικόνα 106, το οποίο υποθέτει μικρές γωνίες πρόσπτωσης. Παρ' όλα αυτά η μέθοδος μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί ώστε να αντιμετωπίζει και τη γενικότερη κατάσταση, όπως φαίνεται στην εικόνα 105α, και ένα ακόμα πιο περίπλοκο μοντέλο θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.



Σχήμα 104: Μοντέλο “horseshoe” ενός ανωστικού πτερυγίου.



Σχήμα 105: Δυσκολίες στην επίτευξη της συνθήκης «ομόρρου παράλληλου στην τοπική ταχύτητα» από μία απλή παρουσίαση δίνης horseshoe.



Σχήμα 106: Μοντέλο πλέγματος δινών horseshoe (horseshoe vortex lattice) για την επίλυση του προβλήματος της ανωστικής γραμμής.

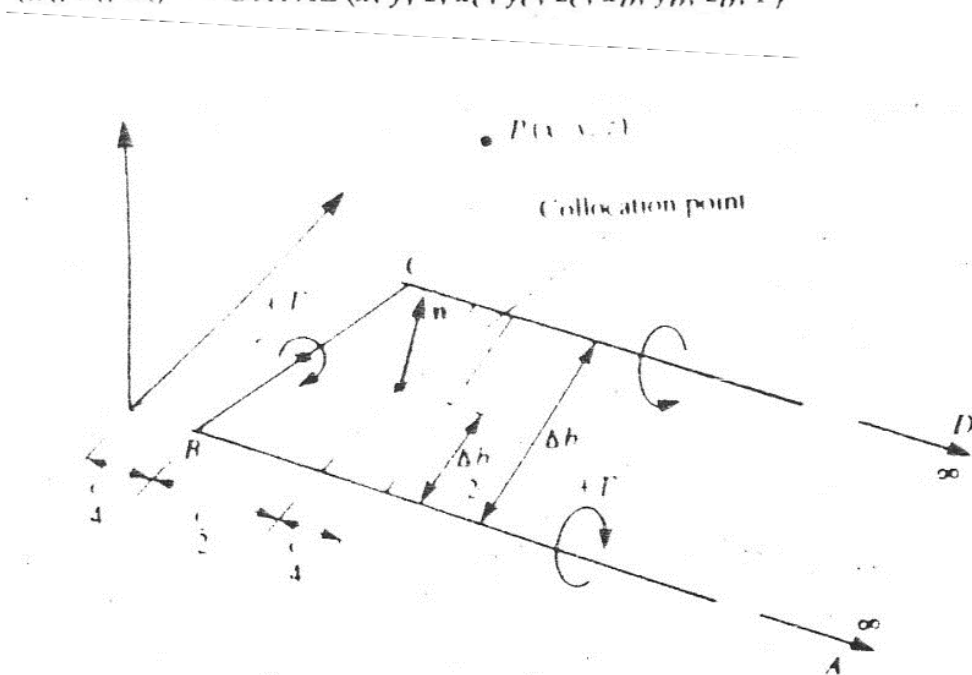
Η μέθοδος με την οποία το περίγραμμα κάτοψης λεπτού πτερυγίου χωρίζεται σε στοιχεία φαίνεται στη εικόνα 106 και ένα τυπικό στοιχείο κατά τη φορά του ανοίγματος (spanwise)

φαίνεται στην εικόνα 107. Εδώ, βασιζόμενοι στα αποτελέσματα του κυματώδους – τυχαίου μοντέλου δίνης, η προσδεσμένη δίνη τοποθετείται στο ένα τέταρτο της χορδής του πάνελ και το συνδετικό σημείο βρίσκεται στο κέντρο των τριών τετάρτων της χορδής του πάνελ. Η δύναμη της δίνης Γ θεωρείται ότι είναι σταθερή για το στοιχείο horseshoe και μία θετική κυκλοφορία ορίζεται όπως φαίνεται στην εικόνα. Από τη στιγμή που αυτή η μέθοδος βασίζεται στο μοντέλο τυχαίας δίνης, που περιλαμβάνει τη διδιάστατη συνθήκη Kutta, υποτίθεται ότι το τρισδιάστατο μοντέλο υπολογίζει (κατά έναν προσεγγιστικό τρόπο) τη συνθήκη Kutta:

$$\gamma_{T.E.} = 0 \quad (163)$$

Όπου ο δείκτης T.E. είναι το χείλος εκφυγής (trailing edge). Η επαγόμενη ταχύτητα από ένα τέτοιο στοιχείο σε ένα τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$ φαίνεται στην εικόνα 107 και μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τρεις φορές την ρουτίνα (κώδικα) της γραμμής δίνης VORTXL:

$$\begin{aligned} (u_1, v_1, w_1) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, \Gamma) \\ (u_2, v_2, w_2) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, \Gamma) \\ (u_3, v_3, w_3) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D, \Gamma) \end{aligned} \quad (164)$$



Σχήμα 107: Ένα στοιχείο Horseshoe δίνης κατά τη διεύθυνση του ανοίγματος (spanwise).

Σε αυτό το σημείο θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση της ανωστικής γραμμής μικρών διαταραχών υποθέτοντας

$$y_A = y_B \quad y_C = y_D \quad \text{and} \quad x_A = x_D \rightarrow \infty \quad (165)$$

Φυσικά το ∞ σημαίνει ότι η επίδραση της γραμμής δίνης μεταξύ x_A και x_D είναι αμελητέα, το οποίο από πρακτικής άποψης σημαίνει ότι τουλάχιστον 20 ανοίγματα πτερυγίων πίσω από το πτερύγιο. Είναι πιθανό, σε αυτό το σημείο, να ευθυγραμμίσουμε τον ομόρρου με την ελεύθερη ροή προσαρμόζοντας τα σημεία στο $x = \infty$ (για παράδειγμα $z_A = x_A \sin a$ και $z_D = x_D \sin a$). Είναι επίσης πιθανό να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο της εικόνας 105α, το οποίο απαιτεί να σπάσουμε τα δύο τμήματα ακολουθουσών δινών σε δύο το καθένα και να υπολογίσουμε την επαγόμενη ταχύτητά τους κατά τον ίδιο τρόπο.

Η επαγόμενη ταχύτητα από τα τρία τμήματα δινών είναι τότε

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) \quad (166)$$

Είναι βολικό να συμπεριλάβουμε αυτούς τους υπολογισμούς (εξισώσεις 164 και 165) σε μία υπορουτίνα έτσι ώστε

$$(u, v, w) = HSHOE(x, y, z, x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D, \Gamma)$$

Είναι βολικό σε αυτό το σημείο να χωρίσουμε και να αποθηκεύσουμε το επαγόμενο κατώρρευμα από τον ομόρρου της ακολουθούσης δίνης $(u, v, w)^*$ από την επαγόμενη ταχύτητα από τα τμήματα προσδεδεμένης δίνης. Αυτή η πληροφορία χρειάζεται για τον υπολογισμό της επαγόμενης οπισθέλκουσας και αν γίνει σε αυτό το στάδιο θα αυξήσει μονάχα λίγο την υπολογιστική προσπάθεια. Η επίδραση από το ακολουθόν τμήμα αποκτιέται απλά παραλείποντας το κομμάτι (u_2, v_2, w_2) από την εξίσωση 166:

Έτσι, σε αυτό το σημείο υποτίθεται ότι το $(u, v, w)^*$ λαμβάνεται αυτόματα ως υπο-προϊόν της υπορουτίνας HSHOE.

Διακριτοποίηση και δημιουργία του πλέγματος. Σε αυτή τη φάση το περύγιο διαιρείται σε N στοιχεία κατά τη διεύθυνση του ανοίγματος, όπως φαίνεται στην εικόνα 106 (η άκρη στην πλευρά του πάνελ θεωρείται ότι είναι παράλληλη στον άξονα x). Για αυτό το παράδειγμα το άνοιγμα διαιρείται ισότιμα σε $N=8$ πάνελ, και ο δείκτης j στην κατεύθυνση του ανοίγματος (spanwise) θα έχει τιμές μεταξύ $1 \rightarrow N$. Επίσης, γεωμετρικές πληροφορίες, όπως η περιοχή του πάνελ S_j , το κανονικό διάνυσμα n_j και οι συντεταγμένες των σημείων σύνδεσης (x_j, y_j, z_j) υπολογίζονται σε αυτή τη φάση. Για παράδειγμα, εάν το πάνελ προσεγγίζεται από μία επίπεδη πλάκα τότε το κανονικό n_j είναι μία συνάρτηση της τοπικής γωνίας α_j :

$$\mathbf{n}_j = (\sin \alpha_j, \cos \alpha_j) \quad (167)$$

Συντελεστές επίδρασης. Για να ικανοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες, εξίσωση 162, προσδιορίζονται σε κάθε ένα από τα σημεία σύνδεσης. Η επαγόμενη ταχύτητα από το στοιχείο δίνης horseshoe αριθμού 1 στο σημείο σύνδεσης αριθμού 1 (εξ ου και η ένδειξη 1,1) μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ρουτίνα HSHOE που αναπτύχθηκε προηγουμένως:

$$(u, v, w)_{11} = \text{HSHOE}(x_1, y_1, z_1, x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}, x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}, x_{C1}, y_{C1}, z_{C1}, x_{D1}, y_{D1}, z_{D1}, \Gamma = 1.0)$$

Η μη κανονική ροή κατά την συνοριακή συνθήκη του περυγίου, σε αυτό το στάδιο, μπορεί να ξαναγραφεί για το πρώτο σημείο σύνδεσης (collocation point) ως εξής:

$$[(u, v, w)_{11}\Gamma_1 + (u, v, w)_{12}\Gamma_2 + (u, v, w)_{13}\Gamma_3 + \dots + (u, v, w)_{1N}\Gamma_N + (U_\infty, V_\infty, W_\infty)] \cdot \mathbf{n}_1 = 0$$

Και οι δυνάμεις των δινών Γ_j δεν είναι γνωστές σε αυτή τη φάση.

Επαληθεύοντας την ίδια διαδικασία για κάθε σημείο σύνδεσης τα αποτελέσματα στην διακριτοποιημένη μορφή της συνοριακής συνθήκης είναι:

$$\begin{aligned}
a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + a_{13}\Gamma_3 + \dots + a_{1N}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_1 \\
a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + a_{23}\Gamma_3 + \dots + a_{2N}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_2 \\
a_{31}\Gamma_1 + a_{32}\Gamma_2 + a_{33}\Gamma_3 + \dots + a_{3N}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_3 \\
\dots &= \dots \\
\dots &= \dots \\
a_{N1}\Gamma_1 + a_{N2}\Gamma_2 + a_{N3}\Gamma_3 + \dots + a_{NN}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_N
\end{aligned}$$

Όπου οι συντελεστές επίδρασης ορίζονται ως εξής:

$$a_{ij} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \quad (168)$$

Οι συντεταγμένες της κανονικής ταχύτητας της ελεύθερης ροής $\mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_i$ είναι γνωστές και μετακινούνται στο δεξιό τμήμα της εξίσωσης:

$$\text{RHS}_i \equiv -(\mathbf{U}_\infty, \mathbf{V}_\infty, \mathbf{W}_\infty) \cdot \mathbf{n}_i \quad (169)$$

Αυτό είναι ένα σύνολο N γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων αγνώστων Γ_j που μπορεί να επιλυθεί με τις συνηθισμένες τεχνικές επίλυσης πινάκων.

Σαν παράδειγμα, για την περίπτωση ενός επίπεδου πτερυγίου με συνεχή γωνία πρόσπτωσης αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ακόλουθο σει εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{pmatrix} = -Q_\infty \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Στην πράξη προτείνεται να αυτοματοποιείται ο υπολογισμός των συντελεστών a_{ij} με δύο “DO loops- βρόχους”. Ο πρώτος θα εξετάζει τα σημεία σύνδεσης και ο εσωτερικός βρόχος θα αναλύει τα στοιχεία δίνης για κάθε σημείο σύνδεσης:

```

DO 1 i = 1, N      collocation point loop
RHSi = -Q∞ · ni
DO 1 j = 1, N      vortex element loop
    (u, v, w)ij = HSHOE (xi, yi, zi, xAj, yAj, zAj, xBj, yBj,
                        zBj, xCj, yCj, zCj, xDj, yDj, zDj, Γ = 1.0)
    aij = (u, v, w)ij · ni
    bij = (u, v, w)ij* · ni
1   END

```

Εδώ το b_{ij} είναι η κανονική συνιστώσα του επαγόμενου από τον ομόρρου κατωρρεύματος που θα χρησιμοποιηθεί για τους υπολογισμούς της επαγόμενης οπισθέλκουσας και το $(u, v, w)_{ij}^*$ δίνεται από την εξίσωση (166).

Επαλήθευση του διανύσματος RHS. Το δεξιόστροφο διάνυσμα, εξίσωση (169), είναι στην πραγματικότητα η κανονική συνιστώσα της ελεύθερης ροής που μπορεί να υπολογιστεί από το εξωτερικό DO-loop των υπολογισμών των συντελεστών επίδρασης (όπως φαίνεται παραπάνω). Παρ' όλα αυτά, εάν σχεδιάζεται μία αναβάθμιση του κώδικα ώστε να συμπεριλάβει μη στρωτά φαινόμενα ή την προσομοίωση κανονικών ροών «διαπίδυσης», τότε προτείνεται ο υπολογισμός να γίνει ξεχωριστά.

Επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων. Η επίλυση του προβλήματος που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να γίνει από τις μεθόδους πινάκων. Επίσης, μιας και η επίδραση ενός τέτοιου στοιχείου στον εαυτό του είναι η μεγαλύτερη, ο πίνακας θα έχει μία κυριαρχούσα διαγώνιο και το αποτέλεσμα θα είναι ισταθερό.

Δευτερεύοντες υπολογισμοί: πιέσεις, φορτίσεις, ταχύτητες, κλπ. Η επίλυση του παραπάνω συνόλου εξισώσεων δίνει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N)$. Η άνωση κάθε τμήματος προσδεδεμένης δίνης λαμβάνεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Kutta – Joukowski:

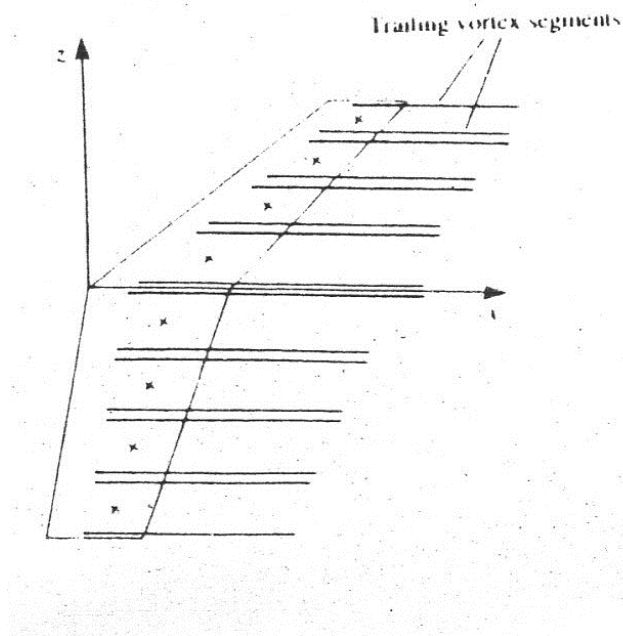
$$\Delta L_j = \rho Q \Gamma_j \Delta y_j \quad (170)$$

Όπου Δy_i είναι η προβολή του πάνελ της προσδεδεμένης δίνης που είναι κανονική στην ελεύθερη ροή. Ο υπολογισμός της επαγόμενης οπισθέλκουσας είναι κατά κάποιο τρόπο πιο περίπλοκος. Οι ολικές αεροδυναμικές φορτίσεις είναι το άθροισμα των συνεισφορών των χαρακτηριστικών πάνελ. Ακολουθώντας τα αποτελέσματα της ανωστικής γραμμής:

$$\Delta D_j = -\rho w_{ind,j} \Gamma_j \Delta y_j \quad (171)$$

Όπου το επαγόμενο κατώρρευμα $w_{ind,j}$ σε κάθε σημείο σύνδεσης j υπολογίζεται αθροίζοντας την επαγόμενη ταχύτητα από όλα τα τμήματα ακολουθούντων δινών (δες την παρακάτω εικόνα). Αυτό μπορεί να γίνει κατά τη διάρκεια του υπολογισμού των συντελεστών επίδρασης ή και αργότερα, χρησιμοποιώντας την ρουτίνα HSHOE με την επίδραση των τμημάτων προσδεδεμένης δίνης κλειστή. Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνοψισθεί στον επόμενο πίνακα, όπου όλα τα b_{ij} και Γ_j είναι γνωστά:

$$\begin{pmatrix} w_{ind,1} \\ w_{ind,2} \\ w_{ind,3} \\ \vdots \\ w_{ind,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2N} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & \dots & b_{3N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{pmatrix}$$



Σχήμα 108: Παράταξη τμημάτων ακολουθουσών δινών υπεύθυνων για το επαγόμενο κατώρρευμα σε ένα τρισδιάστατο πτερόγιο.

Το επαγόμενο από τον ομόρρου κατώρρευμα σε κάθε γραμμή ακολουθούσας δίνης είναι:

$$w'_{ind,i} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_m} \frac{x_j - x_i}{(z_j - z_i)^2 + (x_j - x_i)^2}$$

Όπου N_m είναι ο αριθμός των γραμμών ακολουθούσας δίνης και η επίδραση της γραμμής δίνης στον εαυτό της τίθεται μηδέν. Όταν ο επαγόμενος ομόρρους εξασφαλίζεται σε κάθε γραμμή δίνης, η επαγόμενη οπισθέλκουσα αξιολογείται από την εξίσωση:

$$D = -\frac{\rho}{2} \int_{h_w/2}^{h_w/2} \Gamma(y) w dy = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N_m} \Gamma_i w_{ind,i} \Delta y_i \quad (172)$$

Εάν χρησιμοποιούνται ρουτίνες συσσώρευσης του ομόρρου προτείνεται πρώτα να υπολογιστεί η κυκλοφορία του πτερυγίου με τον συσσωρευμένο ομόρρου και για τον υπολογισμό αυτής της επαγόμενης ταχύτητας και οπισθέλκουσας να χρησιμοποιηθεί η δημιουργία διαστημάτων Δy_i των γραμμών δίνης, όπως απελευθερώνεται στο χείλος εκφυγής. (Αυτή είναι η απλούστερη

προσέγγιση για έναν ελεύθερο από δυνάμεις ομόρρου, καθώς πολλές συσσωρευτικές ρουτίνες ομόρρου μπορεί να μην συγκλίνουν σε αυτή τη συνθήκη). Επίσης, να σημειωθεί ότι η εξίσωση 172a είναι ίδια με την 172, αλλά έχει ένα συντελεστή $\frac{1}{2}$ που είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι το πρώτο υπολογίστηκε στο επίπεδο του Trefftz (όπου οι ακολουθούσες δίνες μοιάζουν να είναι διδιάστατες), ενώ η εξίσωση 172 υπολογίζεται στην κατεύθυνση του ανοίγματος της γραμμής της προσδεδεμένης δίνης (και εκεί οι ακολουθούσες δίνες φαίνεται να είναι ημι-άπειρες).

Αυτό το πρώτο απλό παράδειγμα παρουσιάζει μία αριθμητική λύση για το μοντέλο ανωστικής γραμμής. Κάποιους από τους περιορισμούς όσον αφορά το μοντέλο του ομόρρου και τις συνθήκες στο χείλος εκφυγής θα μελετηθούν στο μοντέλο του δαχτυλιδιού δινών που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια. Επίσης, η μέθοδος που παρουσιάζεται εδώ δεν εκμεταλλεύεται το γεγονός της συμμετρίας του περυγίου για να μειώσει την υπολογιστική προσπάθεια. Αυτή η σημαντική τροποποίηση αναλύεται στην επόμενη παράγραφο.

5.2 Μοντελοποίηση κατοπτρισμών από συμπαγή όρια

Σε περιπτώσεις όπου έχουμε συμμετρία μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μισού της επιφάνειας του σώματος, ή όταν η εγγύτητα του εδάφους μοντελοποιείται, μία σχετικά απλή μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να περιλαμβάνει αυτά τα χαρακτηριστικά στο αριθμητικό σχήμα. Όταν προγραμματίζουμε αυστηρά αυτές οι τροποποιήσεις θα επιδράσουν μόνο στο κομμάτι του υπολογισμού των συντελεστών επίδρασης στον κώδικα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι τη συμμετρική πτέρυγα (από τα δεξιά προς τα αριστερά), που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, όπου μόνο το δεξιό μισό κομμάτι του περυγίου πρέπει να μοντελοποιηθεί. Η επίδραση ενός πάνελ j στο σημείο P μπορεί να ληφθεί από γνωστές υπορουτίνες. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, θα χρησιμοποιηθεί η HSHOE ρουτίνα της προηγούμενης παραγράφου. Συνεπώς, η επαγόμενη ταχύτητα στο σημείο P από το j -ιοστό στοιχείο είναι

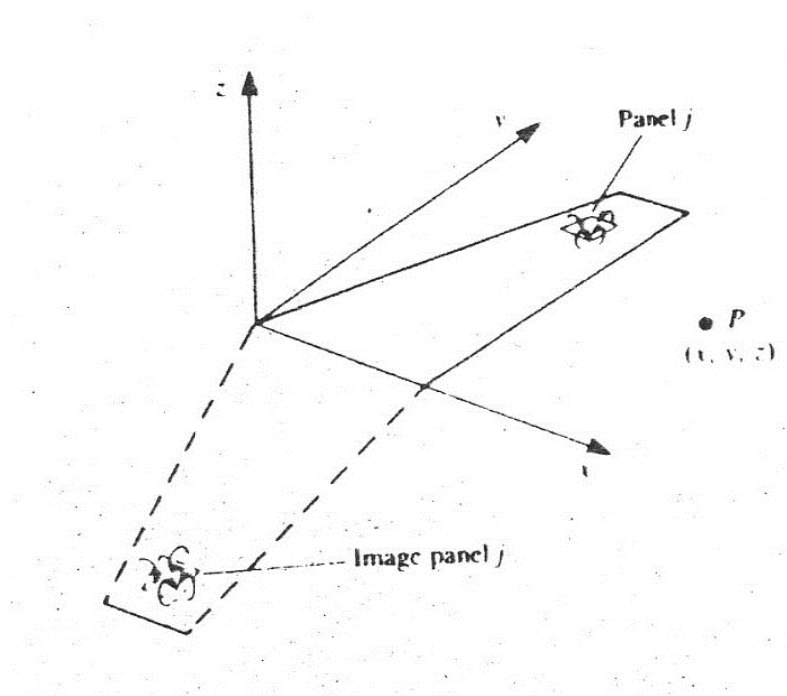
$$(u_i, v_i, w_i) = \text{HSHOE}(x, y, z, x_{Aj}, y_{Aj}, z_{Aj}, x_{Bj}, y_{Bj}, z_{Bj}, x_{Cj}, y_{Cj}, z_{Cj}, x_{Dj}, y_{Dj}, z_{Dj}, \Gamma_j)$$

Εξαιτίας όμως της αριστερής/δεξιάς συμμετρίας, το πάνελ εικόνας στο δεξιό μισό του πτερυγίου στην εικόνα που ακολουθεί θα έχει την ίδια ένταση, και η επίδρασή της μπορεί να υπολογιστεί βρίσκοντας την επίδραση της πραγματικής δίνης στο σημείο $(x, -y, z)$. Να σημειωθεί ότι το πρόσημο άλλαξε για την y – συνιστώσα. Συνεπώς,

$$(u_{ii}, v_{ii}, w_{ii}) = \text{HSHOE}(x, -y, z, x_{Aj}, y_{Aj}, z_{Aj}, x_{Bj}, y_{Bj}, z_{Bj}, x_{Cj}, y_{Cj}, z_{Cj}, x_{Dj}, y_{Dj}, z_{Dj}, \Gamma_j)$$

Και η επαγόμενη ταχύτητα από τα δύο στοιχεία ίδιας έντασης στο σημείο P είναι

$$(u, v, w) = (u_i + u_{ii}, v_i - v_{ii}, w_i + w_{ii}) \quad (173)$$



Σχήμα 109: Εικόνα της δεξιάς πλευράς ενός μοντέλου συμμετρικού πτερυγίου.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να μειώσει τον αριθμό των αγνώστων κατά το ήμισυ και μόνο οι δίνες του δεξιού ημι-πτερυγίου πρέπει να μοντελοποιηθούν. Κατ' αυτό τον τρόπο, όταν εξετάζουμε τα

στοιχεία του ημι-ανοίγματος στο βήμα του «συντελεστή επίδρασης» οι συντελεστές a_{ij} τροποποιούνται έτσι ώστε

$$a_{ij} = (u, v, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i = (u_i + u_{ii}, v_i - v_{ii}, w_i + w_{ii})_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \quad (174)$$

Ο συνυπολογισμός της επίδρασης του πυθμένα μπορεί να επιτευχθεί με την ίδια μέθοδο. Σε αυτή την περίπτωση, που περιγράφεται στην επόμενη εικόνα, το επίπεδο του πυθμένα προσομοιώνεται μοντελοποιώντας μία κατοπτρική εικόνα του περυγίου κάτω από το επίπεδο xy. Ξανά, η ταχύτητα σε ένα σημείο P που επάγεται από τα στοιχεία στο πραγματικό περύγιο (u_K, v_K, w_K) και στο φανταστικό περύγιο (u_{KK}, v_{KK}, w_{KK}) προστίθενται. Χρησιμοποιώντας την ρουτίνα HSHOE για να αποδείξουμε αυτή την αρχή, η επαγόμενη ταχύτητα του άνω κομματιού είναι

$$(u_K, v_K, w_K) = \text{HSHOE}(x, y, z, x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}, x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}, x_{C1}, y_{C1}, z_{C1}, x_{D1}, y_{D1}, z_{D1}, \Gamma_1)$$

Και η επαγόμενη ταχύτητα από το ίδιο σημείο, αλλά στο σημείο $(x, y, -z)$ είναι

$$(u_{KK}, v_{KK}, w_{KK}) = \text{HSHOE}(x, y, -z, x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}, x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}, x_{C1}, y_{C1}, z_{C1}, x_{D1}, y_{D1}, z_{D1}, \Gamma_1)$$

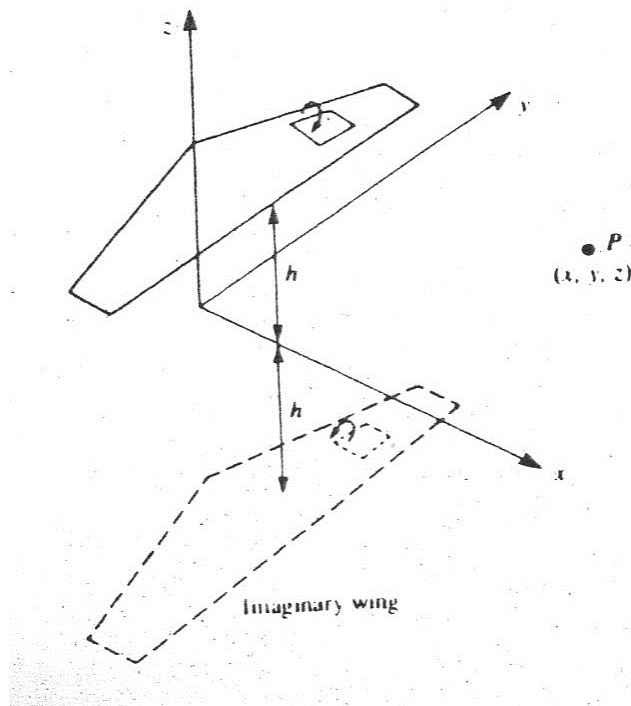
Και η συνδυασμένη επίδραση είναι

$$(u, v, w) = (u_K + u_{KK}, v_K + v_{KK}, w_K - w_{KK}) \quad (175)$$

Ο συντελεστής a_{ij} που περιλαμβάνει την «επίδραση πυθμένα» είναι

$$a_{ij} = (u, v, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i = (u_K + u_{KK}, v_K + v_{KK}, w_K - w_{KK})_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \quad (176)$$

Να σημειωθεί ότι η πτέρυγα στην παρακάτω εικόνα ανυψώνεται στο x,y,z σύστημα και το επίπεδο του πυθμένα θεωρείται ότι είναι στο επίπεδο $z=0$.



Σχήμα 110: Μοντελοποίηση της επίδρασης πυθμένα χρησιμοποιώντας την τεχνική της εικόνας.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την μέθοδο για τον υπολογισμό της ροής γύρω από συμμετρικό περύγιο στην εγγύτητα του πυθμένα, μειώνουμε τον αριθμό των άγνωστων στοιχείων με ένα συντελεστή 4. Καθώς ένα μεγάλο τμήμα της υπολογιστικής προσπάθειας καταναλίσκεται στην αντιστροφή του πίνακα, που αυξάνει σε ένα βαθμό τάξης N^2 , η χρήση αυτής της κατοπτρικής μεθόδου μπορεί να μειώσει τον υπολογιστικό χρόνο κατά περίπου στο 1/16!

5.3 Επίλυση ανωστικής επιφάνειας με στοιχεία πηγής δίνης

Σε αυτή την παράγραφο το πρόβλημα της τρισδιάστατης λεπτής ανωστικής επιφάνειας θα λυθεί με τη χρήση πηγαίων στοιχείων δίνης. Το κύριο πλεονέκτημα αυτού του στοιχείου έγκειται στην απλό προγραμματισμό του (παρ' όλο που η υπολογιστική αποτελεσματικότητά του μπορεί να βελτιωθεί). Επιπλέον, οι ακριβείς συνοριακές συνθήκες θα ικανοποιηθούν πάνω στην επιφάνεια της πτέρυγας, που μπορεί να έχει κύρτωση και διάφορες σχήματα περιγράμματος κάτοψης τομής.

Όπως και με το προηγούμενο παράδειγμα το στοιχείο ιδιομορφίας βασίζεται στην επίλυση της γραμμής δίνης της ασυμπίεστης εξίσωσης συνέχειας. Η συνοριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιηθεί από τη λύση είναι η μηδενική κανονική ροή κατά μήκος της λεπτής στέρεως επιφάνειας του πτερυγίου:

$$\nabla(\Phi + \Phi_s) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (177)$$

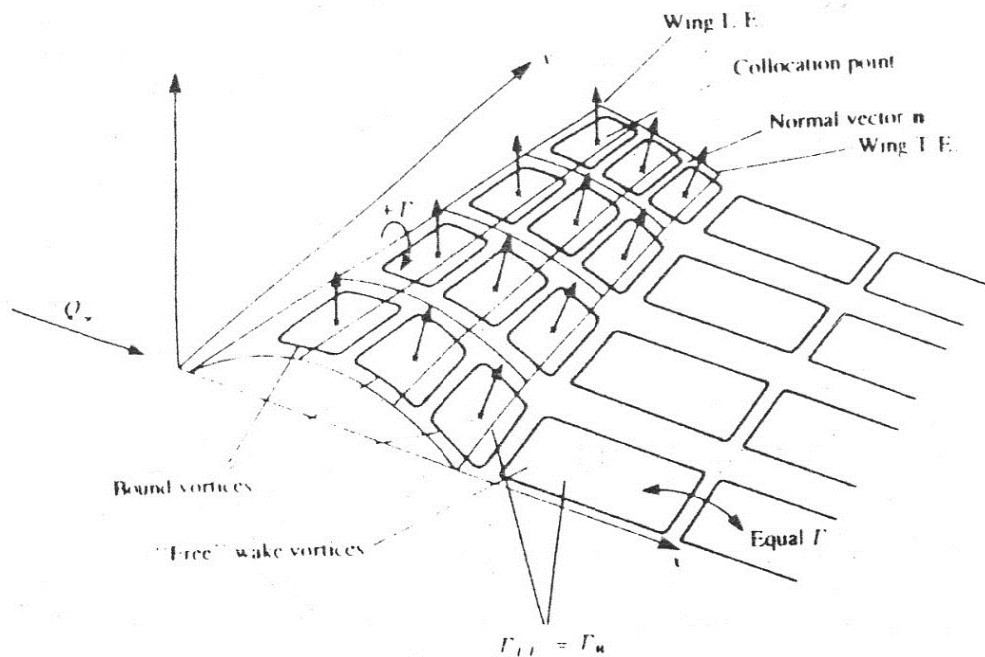
Στην γραμμικοποιημένη διατύπωση της ανωστικής επιφάνειας αυτή η συνοριακή συνθήκη εκφραζόταν με την κατανομή μίας επιφανειακής δίνης, όπως ακολουθεί

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{wing+wake} \frac{\gamma_y(x-x_0) + \gamma_z(y-y_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} dx_0 dy_0 = Q \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \alpha \right) \quad (178)$$

Να σημειωθεί ότι στην εξίσωση 178 η προσέγγιση της μικρής διαταραχής στην συνοριακή συνθήκη ικανοποιήθηκε στην επιφάνεια του πτερυγίου την προβεβλημένη στο επίπεδο xy, ενώ στο επόμενο παράδειγμα θα εφαρμοστεί η πραγματική συνοριακή συνθήκη.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα ανωστικής επιφάνειας αριθμητικά, το πτερύγιο πρέπει να χωριστεί σε στοιχεία που περιλαμβάνουν ιδιομορφίες δινών όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Οι διαδικασίες επίλυσης είναι όπως ακολουθούν.

Επιλογή του στοιχείου ιδιομορφίας. Η μέθοδος με την οποία το περίγραμμα κάτοψης του λεπτού πτερυγίου χωρίζεται σε πάνελ φαίνεται στην εικόνα 111 και κάποια τυπικά στοιχεία πάνελ φαίνονται στην εικόνα 112. Το τμήμα πρόσπτωσης του δαχτυλιδιού δίνης τοποθετείται στο ένα τέταρτο της χορδής του πάνελ και το σημείο συσχέτισης είναι στο κέντρο των τριών τετάρτων της χορδής. Το κανονικό διάνυσμα $\mathbf{n}$ ορίζεται επίσης σε αυτό το σημείο. Ένα θετικό Γ ορίζεται εδώ σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού (για το κομμάτι πρόσπτωσης), όπως φαίνεται στην εικόνα.



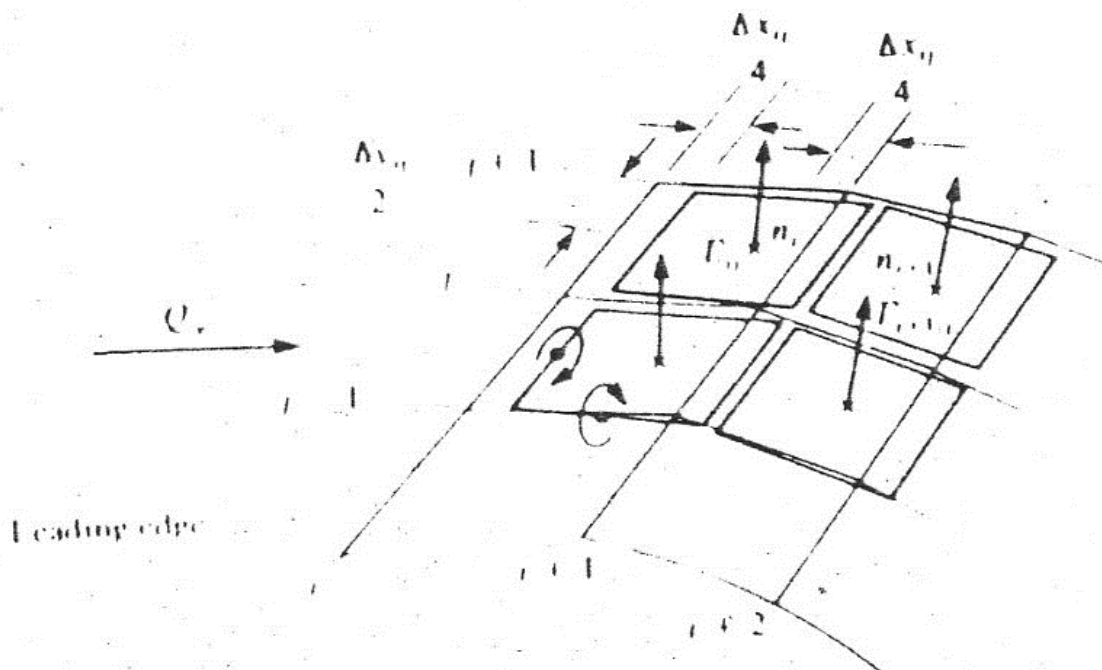
Σχήμα 111: Μοντέλο δινών για λεπτή ανώστική επιφάνεια.

Από την αριθμητική σκοπιά αυτά τα στοιχεία δινών αποθηκεύονται σε μικρά κομμάτια (πίνακες) με i,j αρίθμηση όπως φαίνεται στην εικόνα 113. Η επαγόμενη ταχύτητα σε ένα τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$ από μία τυπική δίνη στη θέση i,j μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τη ρουτίνα της γραμμής δίνης VORTXL στα τέσσερα κομμάτια του δαχτυλιδιού:

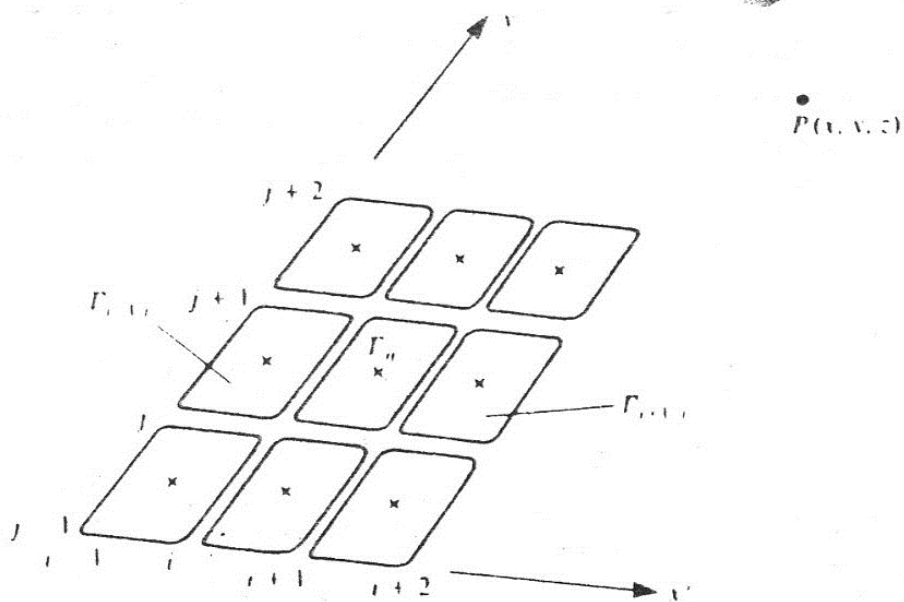
$$\begin{aligned}
 (u_1, v_1, w_1) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_{i,p}, y_{i,p}, z_{i,p}, x_{i,j+1}, y_{i,j+1}, z_{i,j+1}, \Gamma_{i,j}) \\
 (u_2, v_2, w_2) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_{i,j+1}, y_{i,j+1}, z_{i,j+1}, x_{i+1,j+1}, y_{i+1,j+1}, z_{i+1,j+1}, \Gamma_{i,j}) \\
 (u_3, v_3, w_3) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_{i+1,j+1}, y_{i+1,j+1}, z_{i+1,j+1}, x_{i+1,p}, y_{i+1,p}, z_{i+1,p}, \Gamma_{i,j}) \\
 (u_4, v_4, w_4) &= \text{VORTXL}(x, y, z, x_{i+1,p}, y_{i+1,p}, z_{i+1,p}, x_{i,p}, y_{i,p}, z_{i,p}, \Gamma_{i,j})
 \end{aligned}$$

Η επαγόμενη ταχύτητα από τα τέσσερα κομμάτια δινών είναι τότε

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) + (u_4, v_4, w_4) \quad (179)$$



Σχήμα 112: Ονοματολογία των στοιχείων του «δαχτυλιδιού» δίνης.



Σχήμα 113: Διευθέτηση δαχτυλιδιών δινών σε ορθογώνιο πίνακα.

Είναι βολικό να συμπεριλάβουμε αυτούς τους υπολογισμούς σε μία υπορουτίνα όπως,

$$(u, v, w) = \text{VORING}(x, y, z, i, j, \Gamma) \quad (180)$$

Να σημειωθεί ότι αυτή η διατύπωση υποτίθεται ότι καθορίζοντας τους μετρητές i, j οι συνιστώσες (x, y, z) αυτού του πάνελ αναγνωρίζονται αυτόματα, σχήμα 113.

Η χρήση αυτής της υπορουτίνας μπορεί να μειώσει σημαντικά την υπολογιστική προσπάθεια. Παρ' όλα αυτά για το τμήμα της δίνης μεταξύ δύο τέτοιων «δαχτυλιδιών» η επαγόμενη ταχύτητα υπολογίζεται δύο φορές. Για λόγους απλότητας αυτή η ρουτίνα θα χρησιμοποιηθεί σε αυτό το πρόβλημα, αλλά πιο ανεπτυγμένοι προγραμματιστικοί κώδικες μπορούν να διορθώσουν εύκολα αυτή την έλλειψη υπολογιστικής προσπάθειας.

Προτείνεται σε αυτό το σημείο, επίσης, να υπολογιστεί η επαγόμενη ταχύτητα από τα τμήματα του χείλους εκφυγής μόνο (οι γραμμές των δινών να είναι παράλληλες στην ελεύθερη ροή, όπως στην εικόνα 118). Αυτή η πληροφορία είναι απαραίτητη για τους υπολογισμούς της επαγόμενης οπισθέλκουσας και εάν γίνει σε αυτή τη φάση θα αυξήσει πολύ λίγο την υπολογιστική προσπάθεια. Η επίδραση των ακολουθούντων τμημάτων αποκτάται απλά παραλείποντας το κομμάτι που ακολουθεί από την εξίσωση 179:

$$(u_1, v_1, w_1) + (u_3, v_3, w_3) \\ (u, v, w)^* = (u_2, v_2, w_2) + (u_4, v_4, w_4) \quad (181)$$

Οπότε σε αυτό το σημείο υποτίθεται ότι το $(u, v, w)^*$ λαμβάνεται αυτόματα σαν υπο-προϊόν της υπορουτίνας VORING.

Διακριτοποίηση και δημιουργία του πλέγματος (grid). Η μέθοδος με την οποία το περίγραμμα κάτοψης του λεπτού πτερυγίου χωρίζεται σε στοιχεία φαίνεται στην εικόνα 111 και κάποια τυπικά πάνελ στην εικόνα 112. Επίσης, μόνο το ημιάνοιγμα του πτερυγίου μοντελοποιείται και η μέθοδος κατοπτρισμού θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του άλλου μισού κομματιού. Το τμήμα πρόσπτωσης του «δαχτυλιδιού» δινών τοποθετείται στο ένα τέταρτο της χορδής του πάνελ και το σημείο συσχέτισης (collocation point) στο κέντρο των τριών τετάρτων της χορδικής γραμμής. Το κανονικό διάνυσμα n ορίζεται σε αυτό το σημείο, όπως φαίνεται στην εικόνα 112. Ένα θετικό Γ ορίζεται εδώ με δεξιόστροφη φορά, όπως φαίνεται στην

εικόνα. Για τους υπολογισμούς της κατανομής πίεσης χρειαζόμαστε την τοπική κυκλοφορία, η οποία για το πάνελ του χείλους πρόσπτωσης είναι ίση με Γ_i , αλλά για όλα τα στοιχεία πίσω από αυτό είναι ίση με τη διαφορά $\Gamma_i - \Gamma_{i-1}$. Στην περίπτωση αυξανόμενης επιφανειακής καμπυλότητας, τα «δαχτυλίδια» δινών που περιγράφηκαν παραπάνω δεν θα τοποθετηθούν ακριβώς πάνω στην ανωστική επιφάνεια, και ένα πιο λεπτομερές πλέγμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί, ή η επιφάνεια του πτερυγίου πρέπει να επανοριστεί κατάλληλα. Τοποθετώντας το τμήμα πρόσπτωσης του «δαχτυλιδιού» δίνης στο ένα τέταρτο της χορδής του πάνελ η διδιάστατη συνθήκη Kutta ικανοποιείται κατά μήκος της χορδής (ας θυμηθούμε το στοιχείο προεξέχουσας δίνης). Επίσης, κατά μήκος των ακροπτερυγίων εκφυγής, η δίνη εκφυγής της τελευταίας γραμμής πάνελ (που στην πραγματικότητα προσομοιώνει την αρχική δίνη έναρξης) πρέπει να ακυρωθεί για να ικανοποιηθεί η τριδιάστατη συνθήκη στο χείλος εκφυγής:

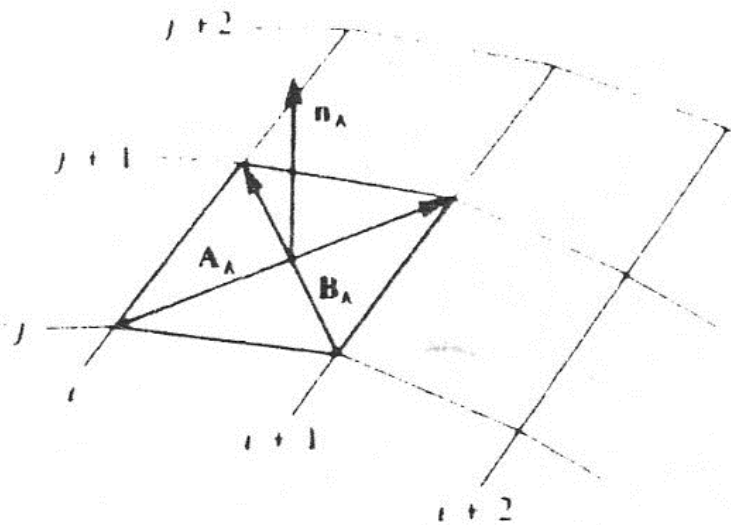
$$\gamma_{TE} = 0 \quad (182)$$

Για στρωτή ροή αυτό γίνεται προσπαθώντας να ευθυγραμμίσουμε τα πάνελ στον ομόρορο της δίνης να είναι παράλληλα με τις τοπικές γραμμές ροής, και η ισχύ τους να είναι ίση με αυτή των διασκορπισμένων πάνελς στο χείλος εκφυγής (δες σχήμα 111 όπου $\Gamma_{TE} = \Gamma_w$ για κάθε γραμμή).

Για αυτό το παράδειγμα (στην εικόνα 111) η χορδή είναι χωρισμένη ισοδύναμα σε $M=3$ πάνελς και το ημι-άνοιγμα είναι χωρισμένο σε $N=4$ ισοδύναμα πάνελς. Επομένως, ο μετρητής κατά τη χορδή (chordwise) i θα έχει τιμές από $1 \rightarrow M$ και ο μετρητής κατά το άνοιγμα (spanwise) θα έχει τιμές μεταξύ $1 \rightarrow N$. επίσης, γεωμετρικές πληροφορίες, όπως τα ωνιακά σημεία των «δαχτυλιδιών» δίνης, η περιοχή πάνελ S_k , το κανονικό διάνυσμα n_k και οι συντεταγμένες των σημείων συσχέτισης υπολογίζονται σε αυτή τη φάση (σημειώνεται ότι ο μετρητής K θα έχει τιμές μεταξύ 1 και $M \times N$). Μία απλή και σχετικά γενική μέθοδος αξιολόγησης του κανονικού διανύσματος φαίνεται στην εικόνα 114. Τα γωνιακά σημεία σε αντίθετα πάνελς ορίζουν δύο διανύσματα A_k και B_k και το διανυσματικό γινόμενο τους θα έχει κατεύθυνση προς αυτή του

n_A

$$\mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{A}_k \times \mathbf{B}_k}{|\mathbf{A}_k \times \mathbf{B}_k|} \quad (183)$$

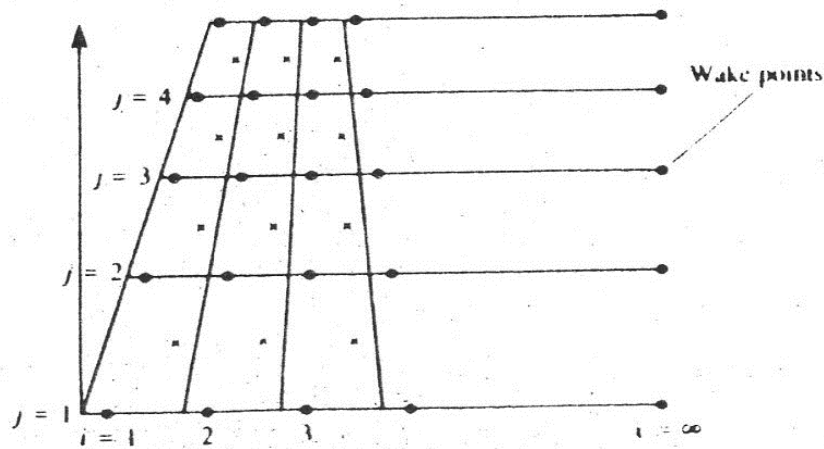


Σχήμα 114: Ορισμός του εξωτερικού κανονικού διανύσματος πτερυγίου.

Τα αποτελέσματα της δημιουργίας του πλέγματος φαίνονται σχηματικά στο σχήμα 115.

Συντελεστές επίδρασης. Ο υπολογισμός των συντελεστών επίδρασης γίνεται με έναν τρόπο παρόμοιο με τις μεθόδους που έχουν παρουσιαστεί μέχρι εδώ, αλλά σε αυτή την τρισδιάστατη περίπτωση περισσότερη προσοχή απαιτείται στην ακολουθία εξέτασης και σάρωση των επιφανειακών πάνελ.

Θα αποδείξουμε μία διαδικασία σάρωσης σημείου συσχέτισης, η οποία παίρνει την πρώτη γραμμή κατά τη χορδή όπου $i=1$ και σαρώνει κατά την φορά του ανοίγματος με $j=1 \rightarrow N$ κ.λ.π. (δες το σχήμα 113). Αυτή η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με δύο «DO - loops» βρόχους που φαίνονται στην εικόνα 116. Καθώς η σάρωση των πάνελ αρχίζει, ένας ακόλουθος μετρητής απονέμει μια τιμή K σε κάθε πάνελ (η ακολουθία των K φαίνεται στην εικόνα 117) που θα έχει τιμές από $1 \rightarrow M \times N$.



Σχήμα 115: Πίνακας γωνιακών σημείων πάνελ του περυγίου και του ομόρρου (σημεία) και των σημείων συσχέτισης (σύμβολα x).

```

K=0
DO 11 I=1,M          chordwise loop (scan collocation points)
DO 11 J=1,N          spanwise loop (scan collocation points)
K=K+1
L=0
DO 10 I1=1,M          chordwise loop (scan vortex rings)
DO 10 J1=1,N          spanwise loop (scan vortex rings)
L=L+1
CALL VORING(QC(I,J,1),QC(I,J,2),QC(I,J,3),I1,J1,GAMA=1,U,V,W)
C ADD INFLUENCE OF WING'S OTHER HALF
CALL VORING(QC(I,J,1),-QC(I,J,2),QC(I,J,3),I1,J1,GAMA=1,U1,V1,W1)
U2=U+U1
V2=V-V1
W2=W+W1
C ADD INFLUENCE OF WAKE
IF (J1.LT.M) GOTO 10
CALL VORING(QC(I,J,1), QC(I,J,2),QC(I,J,3),I1+1,J1,GAMA=1,U3,V3,W3)
CALL VORING(QC(I,J,1),-QC(I,J,2),QC(I,J,3),I1+1,J1,GAMA=1,U4,V4,W4)
U2=U2+U3+U4
V2=V2+V3-V4
W2=W2+W3+W4
10 A(K,L)=U2*AL(I,J)+V2*AM(I,J)+W2*AN(I,J)
C A(K,L) is influence coefficient and
C (AL(I,J),AM(I,J),AN(I,J)) is the normal vector of panel (I,J)
11 CONTINUE

```

Σχήμα 116: Παράδειγμα ενός διπλού «DO - loop» βρόχου για τον υπολογισμό των συντελεστών επίδρασης ενός μοντέλου δινών.

Υποθέτουμε ότι η σάρωση των σημείων συσχέτισης έχει ξεκινήσει και $K=1$ (που είναι το σημείο $(i=1, j=1)$ στην εικόνα 115). Τότε η επαγόμενη ταχύτητα από το πρώτο «δαχτυλίδι» δίνης είναι

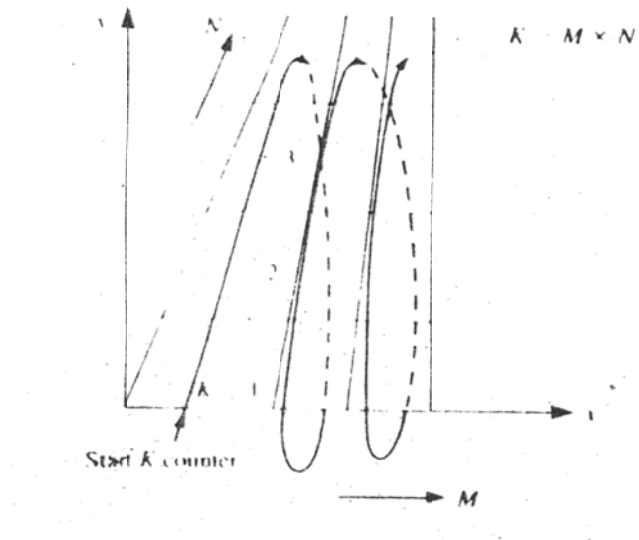
$$(u_i, v_i, w_i)_{11} = \text{VORING}(x, y, z, i=1, j=1, \Gamma=1.0)$$

Και από την εικόνα του στο δεξιό ημι – άνοιγμα

$$(u_u, v_u, w_u)_{11} = \text{VORING}(x, -y, z, i=1, j=1, \Gamma=1.0)$$

Και η επαγόμενη ταχύτητα από τη μοναδιαία δύναμη Γ_i και της εικόνας του στο σημείο συσχέτισης 1 είναι:

$$(u, v, w)_{11} = (\bar{u}_i + u_u, v_i - v_u, w_i + w_u) \quad (184)$$



Σχήμα 117: Ακολουθία σάρωσης των πάνελ πτερυγίου (με τον μετρητή K).

Ας σημειωθεί ότι ο δείκτης 11 στη σχέση 184 αντιπροσωπεύει την επίδραση της πρώτης δίνης στο πρώτο σημείο συσχέτισης, και μαζί και οι δύο μετρητές μπορούν να έχουν τιμές από 1 μέχρι

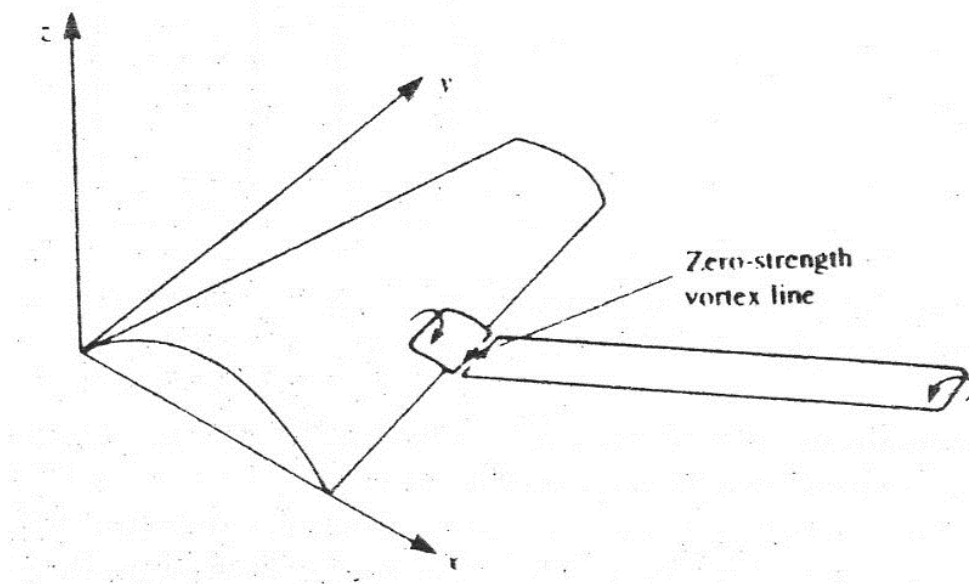
$M \times N$. Επίσης, μία δίνη μοναδιαίας ισχύος χρησιμοποιείται στη διαδικασία αξιολόγησης του συντελεστή επίδρασης a_{11} , που είναι

$$a_{11} = (u, v, w)_{11} \cdot \mathbf{n}_1$$

Για να σαρώσουμε όλα τα δαχτυλίδια που επηρεάζουν αυτό το σημείο, ένας εσωτερικός βρόχος σάρωσης χρειάζεται με τον μετρητή $L = 1 \rightarrow N \times M$ (εικόνα 116). Συνεπώς, σε αυτό το σημείο ο μετρητής K είναι στο σημείο 1 και ο μετρητής L θα σαρώσει όλα τα «δαχτυλίδια» δίνης στην επιφάνεια του πτερυγίου, και όλοι οι συντελεστές επίδρασης a_{1L} υπολογίζονται

$$a_{1L} = (u, v, w)_{1L} \cdot \mathbf{n}_1 \quad (185)$$

Όταν ένα συγκεκριμένο «δαχτυλίδι» δίνης είναι στο χείλος εκφυγής, ένα «ελευθέρου ομόρρου» (free wake) «δαχτυλίδι» δίνης με την ίδια ισχύ προστίθεται για να ακυρώσει την γραμμή δίνης έναρξης κατά την κατεύθυνση του ανοίγματος (όπως φαίνεται στην εικόνα 118). Κατ' αυτό τον τρόπο, όταν υπολογίζεται η επίδραση ενός πάνελ δίνης στο χείλος εκφυγής ($1=M$, στον εσωτερικό βρόχο δίνης στην εικόνα 116) η συμβολή αυτού του τμήματος προστίθεται.



Σχήμα 118: Μέθοδος επισύναψης ενός πάνελ ομόρρου δίνης για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη Kutta.

Όταν το περύγιο είναι συμμετρικό όπως σε αυτή την περίπτωση και μόνο το δεξιό μισό περίγραμμα πανελοποιείται, τότε οι συντεταγμένες ταχύτητας (u,v,w) του χείλους εκφυγής και των πάνελ του ομόρρου περιλαμβάνουν την επίδραση της αριστερής πλευράς (όπως στην εξίσωση 185). Ο αντίστοιχος συντελεστής επίδρασης είναι

$$a_{19} = [(u, v, w)_{19} + (u, v, w)_{19w}] \cdot \mathbf{n}_1 \quad (186)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, παράλληλα με τον υπολογισμό των συντελεστών επίδρασης a_{KL} , η συνιστώσα της κανονικής ταχύτητας που επάγεται από τα τμήματα που βρίσκονται στο ρεύμα της ροής μπορούν επίσης να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας το τμήμα (u,v,w)*. Τότε για το πρώτο στοιχείο είναι

$$b_{1L} = (u, v, w)_{1L}^* \cdot \mathbf{n}_1 \quad (187)$$

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι όλα τα σημεία συσχέτισης έχουν σαρωθεί.

Απόδειξη του διανύσματος RHS. Το διάνυσμα RHS υπολογίζεται όπως πριν τη σάρωση των σημείων συσχέτισης στην πτέρυγα:

$$RHS_K = -Q_\infty \cdot \mathbf{n}_K \quad (188)$$

Επίλυση γραμμικού συνόλου εξισώσεων. Όταν οι υπολογισμοί των συντελεστών επίδρασης και του δεξιόστροφου διανύσματος έχουν ολοκληρωθεί, η μηδενική κανονική συνοριακή συνθήκη ροής σε κάθε σημείο συσχέτισης θα έχει ως αποτέλεσμα το ακόλουθο σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ RHS_m \end{pmatrix}$$

Εδώ το K είναι ο μετρητής του κατακόρυφου σημείου συσχέτισης και L ο οριζόντιος μετρητής και η τάξη αυτού του πίνακα είναι $m=M \times N$.

Δευτερεύοντες υπολογισμοί: πιέσεις, δυνάμεις, ταχύτητες, κλπ. Η επίλυση του ανωτέρω συνόλου εξισώσεων έχει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_K, \dots, \Gamma_m)$. Εάν ο μετρητής K αναλυθεί στους αρχικούς μετρητές i, j τότε η άνωση κάθε τμήματος προσδεδεμένης δίνης αποκτάται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Kutta – Joukowski:

$$\Delta L_{ij} = \rho Q_\infty (\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{ij} \quad i > 1 \quad (189)$$

Και όταν το πάνελ είναι στο χείλος πρόσπτωσης ($i=1$) τότε

$$\Delta L_{ij} = \rho Q_\infty \Gamma_{ij} \Delta y_{ij} \quad i = 1 \quad (190)$$

Η διαφορά πίεσης κατά μήκος του πάνελ είναι

$$\Delta p_{ij} = \frac{\Delta L_{ij}}{\Delta S_{ij}} \quad (191)$$

Όπου ΔS_{ij} είναι η επιφάνεια του πάνελ.

Ο υπολογισμός της επαγόμενης οπισθέλκουσας είναι πιο πολύπλοκος. Οι ολικές αεροδυναμικές φορτίσεις είναι τότε το άθροισμα των συμβολών του κάθε πάνελ. Σε αυτή την περίπτωση

$$\Delta D_{ij} = -\rho w_{ind,i} (\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{ij}, \quad i > 1 \quad (192)$$

$$\Delta D_{ij} = -\rho w_{ind,i} \Gamma_{ij} \Delta y_{ij} \quad i = 1 \quad (192a)$$

Όπου το επαγόμενο κατώρρευμα σε κάθε σημείο συσχέτισης i, j υπολογίζεται αθροίζοντας την επαγόμενη ταχύτητα με όλα τα τμήματα ακολουθούντων δινών. Αυτό μπορεί να γίνει κατά τη φάση υπολογισμού του συντελεστή επίδρασης χρησιμοποιώντας τη ρουτίνα VORING με την επίδραση των τμημάτων προσδεδεμένων δινών απενεργοποιημένη. Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνοψισθεί από την ακόλουθη διατύπωση του πίνακα όπου όλα τα b_{KL} και Γ_K είναι γνωστά:

$$\begin{pmatrix} w_{ind_1} \\ w_{ind_2} \\ w_{ind_3} \\ \dots \\ \dots \\ w_{ind_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \dots \\ \dots \\ \Gamma_m \end{pmatrix}$$

Όπου πάλι $m=M \times N$.

Η επαγόμενη οπισθέλκουσα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$D = -\frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N_w} \Gamma_k w_{ind_k} \Delta y_k$$

Εδώ ο μετρητής K σαρώνει τις δίνες στο χείλος εκφυγής και N_w είναι ο αριθμός των δινών του χείλους εκφυγής. Καθώς ο ομόρρους είναι ελεύθερος δυνάμεων, οι ακολουθούσες γραμμές δινών θα είναι κανονικές σε αυτό το επίπεδο και οι επαγόμενες ταχύτητές τους μπορούν αν υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη διδιάστατη σχέση.

5.4 Εισαγωγή στους κώδικες πάνελ. Μία σύντομη ιστορία

Από μία σύντομη παρατήρηση της ιστορία των επιλύσεων δυναμικών ροών, είναι φανερό ότι υπάρχει ιδιαίτερη κλίση στη χρήση κατανομών στοιχειωδών επιλύσεων με σταδιακά αυξανόμενη πολυπλοκότητα και ορίζοντας την ισχύ τους μέσω των συνοριακών συνθηκών. Έτσι, κατά βάση εάν ένα πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί κατανέμοντας την άγνωστη ποσότητα στην συνοριακή επιφάνεια παρά σε ολόκληρο τον όγκο που περιβάλλει το σώμα (όπως στις μεθόδους πεπερασμένων - διαφορών), τότε μία γρηγορότερη αριθμητική επίλυση αποκτάται. Αυτή η παρατήρηση είναι γεγονός για τα περισσότερα προβλήματα ροών (για παράδειγμα άνωση πτερυγίων σε επισυναπτόμενες ροές, κλπ.)

Αυτή η μείωση του υπολογιστικού πεδίου από τις τρεις διαστάσεις σε ένα διδιάστατο (σε ένα τρισδιάστατο σύνορο) οδήγησε στην ταχύτερη ανάπτυξη κωδίκων υπολογιστών για την

εφαρμογή των μεθόδων πάνελ και κάποιες από αυτές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Πιθανότατα η πρώτη πετυχημένη τρισδιάστατη μέθοδος πάνελ είναι γνωστή ως ο κώδικας του Hess, ο οποίος αναπτύχθηκε από την εταιρεία Douglas Aircraft και χρησιμοποιούσε μία Neumann συνοριακή συνθήκη ταχύτητας. Αυτή η μέθοδος βασίστηκε σε επίπεδα στοιχεία πηγών και είχε μία αληθινή τρισδιάστατη ικανότητα για μη ανωστικές δυναμικές ροές.

TABLE 12.1
Chronological list of some panel methods and their main features

Method	Geometry of panel	Singularity distribution	Boundary conditions	Remarks
1962, Douglas-Neumann ^{12.1}	Flat	Constant source	Neumann	
1966, Woodward I ^{12.2}	Flat	Linear sources Constant vortex	Neumann	$M > 1$
1973, USSAERO ^{12.3}	Flat	Linear sources Linear vortex	Neumann	$M > 1$
1972, Hess I ^{12.4}	Flat	Constant source Constant doublet	Neumann	
1980, MC AIR ^{12.5}	Flat	Constant source Quadratic doublet	Dirichlet	Coupling with B. L. design mode
1980, SOUSSA ^{12.6}	Parabolic	Constant source Constant doublet	Dirichlet	Linearized unsteady
1981, Hess II ^{12.7}	Parabolic	Linear source Quadratic doublet	Neumann	
1981, PAN AIR ^{12.8,12.9}	Flat subpanels	Linear source Quadratic doublet	both	$M > 1$
1982, VSAERO ^{12.10,12.11}	Flat	Constant source and doublet	both	Coupling with B. L., wake rollup
1983, QUADPAN ^{12.12}	Flat	Constant source and doublet	Dirichlet	
1987, PMARC ^{12.13,12.14}	Flat	Constant source Constant doublet	both	Unsteady wake rollup

Μέχρι τις αρχές της δεκαετίας 1980 οι περισσότεροι κώδικες στοιχείων ήταν περιορισμένοι (μαζί και με την διαθεσιμότητα των υπολογιστών) στις μεγάλες αεροναυπηγικές εταιρείες. Παρ' όλα αυτά η τεχνολογία υπολογιστών εξελίχθηκε ραγδαία και το κόστος μειώθηκε σε αυτά τα χρόνια, έτσι που ήταν οικονομικά λογικό για μικρότερες εταιρείες (π.χ. γενικούς κατασκευαστές αεροπλοΐας, κατασκευαστές πλοίων, ομάδων αγωνιστικών αυτοκινήτων, κλπ.) να χρησιμοποιήσουν αυτή την τεχνολογία.

Σε αυτό το σημείο φαίνεται ότι η θεωρία των μεθόδων στοιχείων πάνελ έχει ωριμάσει και η περισσότερη προσπάθεια επενδύεται στην προ- και μετα- επεξεργασία (αυτόματα δημιουργία επιφανειακών πλεγμάτων και γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων). Επίσης, αλληλεπιδρούσες σχεδιάσεις αεροτομών και πτερυγίων αναπτύσσονται, στις οποίες ο σχεδιαστής μπορεί να τροποποιήσει τη γεωμετρία του σώματος με σκοπό την απόκτηση μίας επιθυμητής κατανομής πιέσεων.

Μερικές ακόμα βελτιώσεις αυτών των μεθόδων στο δεύτερο μισό της δεκαετίας του 80 ήταν η προσθήκη της επιλογής μη στρωτής κίνησης και μία συνολική βελτιστοποίηση της μεθόδου (όσον αφορά την απαίτηση υπολογιστικής μνήμης και της αποτελεσματικότητας του επιλυτή πινάκων).

Η πρόσφατη τάση κάποιων προγραμματιστών κωδίκων είναι προς μεθόδους χαμηλής τάξης και το γεγονός ότι πλέον χρησιμοποιούνται πολλές μέθοδοι οδήγησε σε πολλές συγκριτικές μελέτες. Η συγκεκριμένη μελέτη δείχνει ότι η μέθοδοι χαμηλών τάξεων είναι ξεκάθαρα και γρηγορότερες και φθηνότερες. Κάποια από τα πλεονεκτήματα της κάθε μεθόδου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα και η απόφαση για το ποια θα επιλέξουμε συχνά δεν είναι εύκολη. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι «κάθε μέθοδος θα δώσει καλά αποτελέσματα εάν επικυρωθεί μέσα από ένα μεγάλο αριθμό τρεξιμάτων (test cases)», όπως είπε ο Dr. John Hess.

5.5 Δυναμικές μέθοδοι στοιχείων πάνελ πρώτης τάξης

Σαν παράδειγμα των πιο πρόσφατων μεθόδων πάνελ πρώτης τάξης, αναφέρονται κάποια χαρακτηριστικά ακολουθούμενα από τα έξι βήματα που χρησιμοποιούνταν στις προηγούμενες υπολογιστικές μεθόδους.

Επιλογή των στοιχείων ιδιομορφίας. Το κύριο στοιχείο πάνελ που χρησιμοποιείται σε αυτή τη μέθοδο έχει πηγή συνεχούς δύναμης ή ένα ζεύγος και η επιφάνεια είναι επίσης επίπεδη (αλλά τα ζεύγη των πάνελ που είναι ισοδύναμα με μία δίνη μπορούν να αναστραφούν). Η συνοριακή συνθήκη Dirichlet σε ένα παχύ σώμα μπορεί να μειωθεί στην εξής σχέση:

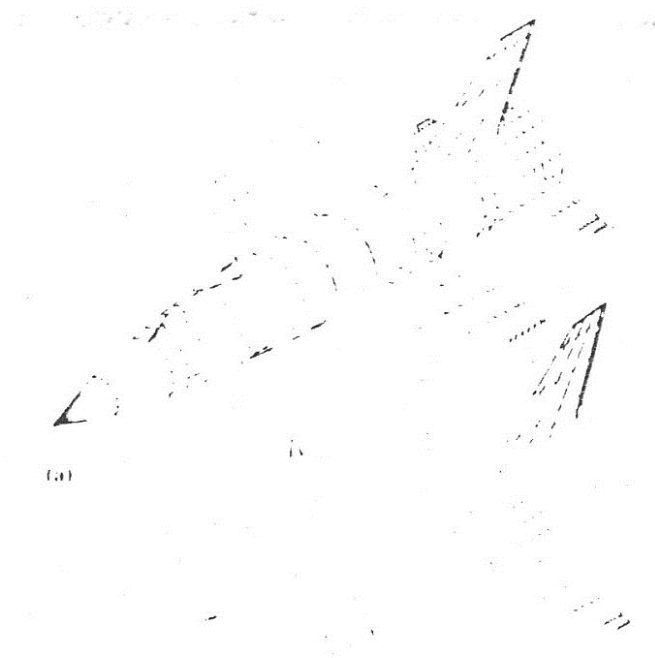
$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k = 0 \quad (193)$$

Αυτή η σχέση θα υπολογιστεί για κάθε σημείο συσχέτισης μέσα στο σώμα και οι συντελεστές συσχέτισης C_A, C_l του σώματος και των ζευγών ομόρρου και το B_k των πηγών υπολογίζονται από σχετικές εξισώσεις της βιβλιογραφίας.

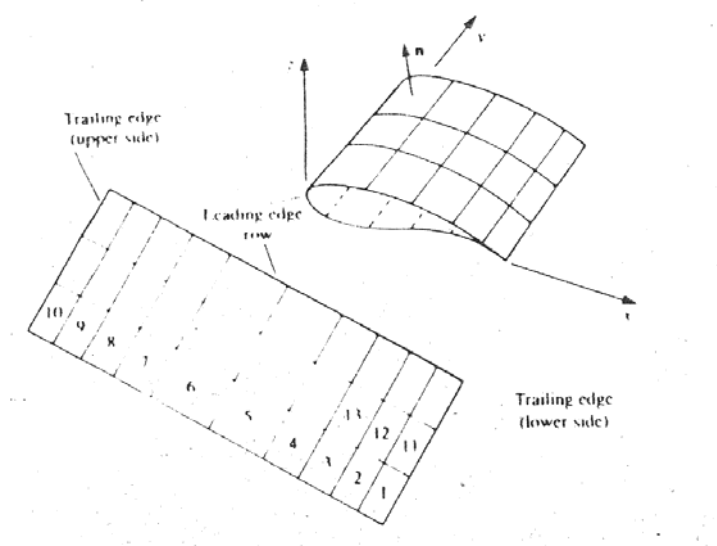
Και το VSAERO και το PMARC υπολογιστικά προγράμματα επιτρέπουν την επιπλέον μοντελοποίηση επιφανειών μηδενικού πάχους από πλέγματα vortex – lattice. Σε αυτές τις επιφάνειες η συνοριακή συνθήκη μηδενικής κανονικής ταχύτητας χρησιμοποιείται και έχει ως αποτέλεσμα ένα ίδιο σύνολο εξισώσεων στα σημεία συσχέτισης του πάνελ i:

$$\sum_{k=1}^N C_k^* \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l^* \mu_l + \sum_{k=1}^N B_k^* \sigma_k = -\mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_i \quad (194)$$

Διακριτοποίηση και δημιουργία του πλέγματος. Σε αυτή τη φάση το σχήμα του σώματος χωρίζεται σε επιφανειακά στοιχεία πάνελ όπως φαίνεται στην εικόνα 119. Είναι χρήσιμο να έχουμε μία γραφική απεικόνιση του πλέγματος ώστε πιθανά λάθη στα δεδομένα εισόδου, όπως κενά μεταξύ των πάνελς και γωνιακά σημεία τοποθετημένα σε λάθος σημεία να μπορούν να διορθωθούν. Το πλέγμα συνήθως κατασκευάζεται από ορθογώνια υποπλέγματα και κάποια από αυτά σχηματίζουν το μοντέλο του παρακάτω σχήματος, το οποίο φαίνεται επίσης. Να σημειωθεί ότι τριγωνικά πάνελς, όπως στην ακραία γωνιακή περιοχή, είναι στην πραγματικότητα ορθογώνια πλέγματα με δύο σημεία τα οποία ταυτίζονται. Σε αυτή τη φάση τα γωνιακά σημεία των πάνελς, τα σημεία συσχέτισης (τα οποία μπορεί να είναι πάνω στο σώμα ή ελαφρών προς τα μέσα), και τα εξωτερικά κανονικά διανύσματα $\mathbf{n}_A$ αναγνωρίζονται. Επίσης, ο μετρητής K για κάθε πάνελ αποδίδεται και ένα τυπικό παράδειγμα δημιουργίας του πλέγματος ενός πτερυγίου και του ανεπτυγμένου κομματιού του φαίνεται στην εικόνα 120.



Σχήμα 119: Απεικόνιση της επιφανειακής γεωμετρίας ενός αεροπλάνου από υποπίνακες:
(α)ολοκληρωμένο μοντέλο, (β)ξεχωριστά κομμάτια.



Σχήμα 120: Μέθοδος αποθήκευσης της πληροφορίας του πλέγματος σε ένα τμήμα του πτερυγίου (patch) (και προσδιορισμός της εξωτερικής επιφάνειας του πτερυγίου).

Συντελεστές επίδρασης. Σε αυτή τη φάση οι συνοριακές συνθήκες της εξίσωσης 193 (ή 194) αξιολογούνται και για αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, εξίσωση 193, δεν είναι μοναδικό και συνδυασμός πηγών ζευγών – διπόλων πρέπει να επιλεγεί. Για παράδειγμα, εάν οι δυνάμεις των πηγών σταθεροποιηθούν σε

$$\sigma_k = \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{Q}_k \quad (195)$$

Θα έχουν ως αποτέλεσμα ένα μοναδικό σύνολο εξισώσεων με τις δυνάμεις των ζευγών όπως στις αγνώστους. Η ανωτέρω επιλογή των πηγών περιλαμβάνει τις περισσότερες συνιστώσες κανονικής ταχύτητας που απαιτούνται για τη συνοριακή συνθήκη μηδενικής κανονικής ταχύτητας (στην περίπτωση μη άνωσης). Κατά συνέπεια, οι άγνωστες μ_k δυνάμεις θα είναι μικρότερες.

Έτσι, σε αυτό το σημείο, το δυναμικό στο σημείο συσχέτισης κάθε πάνελ (μέσα στο σώμα) επηρεάζεται από όλα τα άλλα N πάνελς και η εξίσωση 193 μπορεί να προκύψει. Τώρα, θα θεωρήσουμε ένα πάνελ ομόρρου το οποίο διαχέεται από ένα ανώτερο πάνελ με δείκτη l και ένα χαμηλότερο πάνελ με δείκτη m , όπως φαίνεται στην εικόνα 121. Η εξίσωση 193 για το πρώτο σημείο συσχέτισης μπορεί να προκύψει ως εξής:

$$C_{11}\mu_1 + \dots + C_{1l}\mu_l + \dots + C_{1m}\mu_m + \dots + C_{1N}\mu_N + \sum_{p=1}^{N_w} C_{1p}\mu_p + \sum_{k=1}^N B_{1k}\sigma_k = 0 \quad (196)$$

Η επίδραση αυτού του συγκεκριμένου πάνελ ομόρρου στο σημείο 1, όταν βγει από τον όρο $\sum_{p=1}^{N_w} C_{1p}\mu_p$ είναι τότε

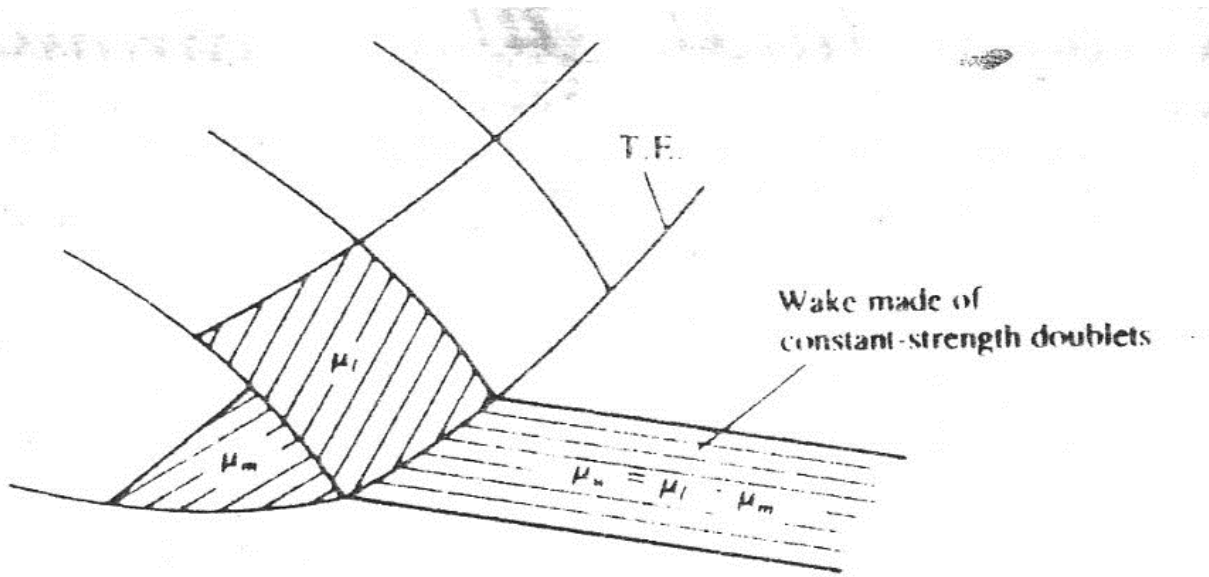
$$C_{1p}(\mu_l - \mu_m) \quad (197)$$

Όπου ο δείκτης p σαρώνει τα πάνελ ομόρρου. Αλλά αυτή η δεύτερη άθροιση των επιδράσεων ομόρρου στην σχέση 193 δεν περιέχει επιπλέον άγνωστες τιμές του μ . κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα αυτής της δεύτερης άθροισης μπορούν αν αναδιανεμηθούν στην εξίσωση, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της συνθήκης Kutta (εξίσωση 197). Στην συγκεκριμένη περίπτωση της εικόνας 121 η εξίσωση για το πρώτο σημείο γίνεται

$$C_{11}\mu_1 + \dots + (C_{1l} + C_{1p})\mu_l + \dots + (C_{1m} - C_{1p})\mu_m + \dots + C_{1N}\mu_N + \sum_{k=1}^N B_{1k}\sigma_k = 0$$

Κατά συνέπεια, αυτή η εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή

$$\sum_{k=1}^N A_{1k}\mu_k = - \sum_{k=1}^N B_{1k}\sigma_k \quad (198)$$



Σχήμα 121: Ένα τυπικό πάνελ ομόρρου διαχεόμενο από τα πάνω και κάτω πάνελς στο χείλος εκφυγής.

Όπου $A_{1k} = C_{1k}$ εάν δεν διαχέεται ομόρρους από αυτό το πάνελ και $A_{1k} = C_{1k} \pm C_{1p}$ εάν διαχέεται. Αυτή η εξίσωση έχει τώρα τη μορφή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_N \end{pmatrix} \quad (199)$$

Που είναι ένα σύνολο N γραμμικών εξισώσεων για τις N άγνωστες μ_k (τα σ_k είναι γνωστά από τις εξισώσεις 195). Επίσης, να σημειωθεί ότι $\alpha_{kk} = 1/2$, εκτός αν το πάνελ βρίσκεται στο χείλος εκφυγής.

Απόδειξη του RHS. Ο πολλαπλασιασμός της δεξιάς πλευράς του πίνακα μπορεί να γίνει μιας και οι δυνάμεις των πηγών είναι γνωστές. Αυτή η διαδικασία ορίζει το διάνυσμα RHS και η εξίσωση 199 μειώνεται στη μορφή:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2N} \\ \dots \\ \dots \\ a_{N1}, a_{N2}, \dots, a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{RHS}_1 \\ \text{RHS}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \text{RHS}_N \end{pmatrix}$$

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Ο παραπάνω πίνακας είναι γεμάτος και έχει μη μηδενική διαγώνιο και μία σταθερή αριθμητική λύση είναι πιθανή. Συνήθως όταν ο αριθμός των πάνελ είναι μικρός (για παράδειγμα μικρότερος του 500) μπορεί να χρησιμοποιηθεί έναν απευθείας επιλύτης. Παρ' όλα αυτά, καθώς ο αριθμός των πάνελ αυξάνεται (προσφάτως μέχρι 10000), επαναληπτικοί επιλύτες χρησιμοποιούνται έτσι ώστε μόνο μία σειρά του πίνακα να απασχολεί υπολογιστική μνήμη κατά τη διάρκεια της επίλυσης.

Υπολογισμός ταχυτήτων, πιέσεων και φορτίσεων. Ένα από τα πλεονεκτήματα της διατύπωσης της ταχύτητας δυναμικού είναι ότι ο υπολογισμός των συνιστωσών των επιφανειακών ταχυτήτων και πιέσεων είναι προσδιορίσιμος από τις τοπικές ιδιότητες της λύσης (δυναμικό ταχύτητας σε αυτή την περίπτωση). Οι συνιστώσες της ταχύτητας διαταραχής στην επιφάνεια του πάνελ μπορούν να αποκτηθούν στις εφαπτόμενες κατευθύνσεις,

$$q_l = \frac{\partial \mu}{\partial l}, \quad q_m = \frac{\partial \mu}{\partial m} \quad (200)$$

Και στην κανονική κατεύθυνση,

$$q_n = \sigma \quad (200a)$$

Όπου l, m είναι οι τοπικές, εφαπτομενικές συντεταγμένες (δες την εικόνα 122). Για παράδειγμα, οι συνιστώσες της ταχύτητας διαταραχής στην κατεύθυνση l μπορούν να σχηματιστούν (για παράδειγμα χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές) ως

$$q_l = \frac{1}{2 \Delta l} (\mu_{l+1} - \mu_{l-1}) \quad (201)$$

Όπου το Δl είναι το μήκος του πάνελ στην κατεύθυνση l . Στις περισσότερες περιπτώσεις τα πάνελς δεν έχουν ίσα μεγέθη και αντί της απλής εξίσωσης μία πιο περίπλοκη μπορεί να χρησιμοποιηθεί (κάποιες φορές μόνο ο όρος Δl μπορεί να τροποποιηθεί). Η ολική ταχύτητα στο σημείο συσχέτισης k είναι το άθροισμα της ελεύθερης ροής και της ταχύτητας διαταραχής

$$\mathbf{Q}_k = (Q_{x_l}, Q_{x_m}, Q_{x_n})_k + (q_l, q_m, q_n)_k \quad (202)$$

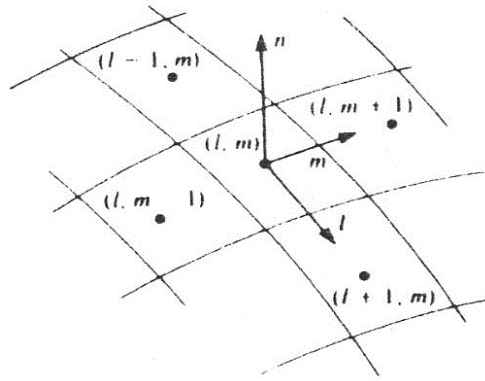
Όπου l_k, m_k, n_k είναι οι τοπικές συντεταγμένες κατευθύνσεις του πάνελ (που φαίνονται και στην εικόνα) και φυσικά η κανονική συνιστώσα ταχύτητας είναι μηδέν. Ο συντελεστής πίεσης μπορεί τώρα να υπολογιστεί για κάθε πάνελ με την εξίσωση:

$$C_{p_k} = 1 - \frac{Q_k^2}{Q_\infty^2} \quad (203)$$

Η συμβολή αυτού του στοιχείου στην αεροδυναμική φόρτιση ΔF_A είναι

$$\Delta \mathbf{F}_k = -C_{p_k} \left(\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2 \right) \Delta S_k \mathbf{n}_k \quad (204)$$

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτούνται, επίσης, πληροφορίες για το πεδίο ταχύτητας έξω από το σώμα.



Σχήμα 122: Η ονοματολογία που χρησιμοποιείται για τη διάκριση του δυναμικού ταχύτητας για υπολογισμούς τοπικών εφαπτομενικών ταχυτήτων.

5.6 Μέθοδοι πάνελ υψηλότερης τάξης

Η μαθηματική αρχή πίσω από αυτές τις μεθόδους είναι ίδια με αυτή των μεθόδων χαμηλότερης τάξης, αλλά η πολυπλοκότητα του στοιχείου όσον αφορά τη γεωμετρική και ιδιομορφή κατανομή αυξάνεται. Οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να επιλυθούν είναι ακόμη η 195 (Dirichlet) και η 196 (Neumann) ή ένας συνδυασμός και των δύο (δηλαδή, σε κάποια πάνελ θα χρησιμοποιηθεί η συνθήκη Neumann και σε κάποια άλλα η Dirichlet – αλλά όχι και οι δύο συνθήκες στο ίδιο πάνελ).

Οι συντελεστές αλληλεπίδρασης είναι πιο περίπλοκοι και εξαρτώνται από περισσότερες της μίας παραμέτρου ιδιομορφίας (μόνο μία τέτοια παράμετρος απαιτούνταν για μία πηγή σταθερής δύναμης ή ενός στοιχείου ζεύγους). Στο ακόλουθο κομμάτι παρουσιάζεται μία σύντομη περιγραφή μίας τέτοιας μεθόδου.

Επιλογή των στοιχείων ιδιομορφίας. Χρησιμοποιώντας μία πρώτη τάξης και μία δεύτερης τάξης κατανομή ζευγών, μπορούμε να προσδιορίσουμε την επίδραση κάθε πάνελ όσον αφορά τις τιμές του στα εννέα σημεία (όπως φαίνεται στην εικόνα 123). Η επιφάνεια χωρίζεται σε 5 υποστοιχεία και η σχετική θέση αυτών των σημείων φαίνεται στην εικόνα 124, επίσης. Η επίδραση των υποστοιχείων του πάνελ μπορεί να συνοψισθεί στο εξής:

$$\Delta\Phi = F_S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) = f_S(\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y) \quad (205)$$

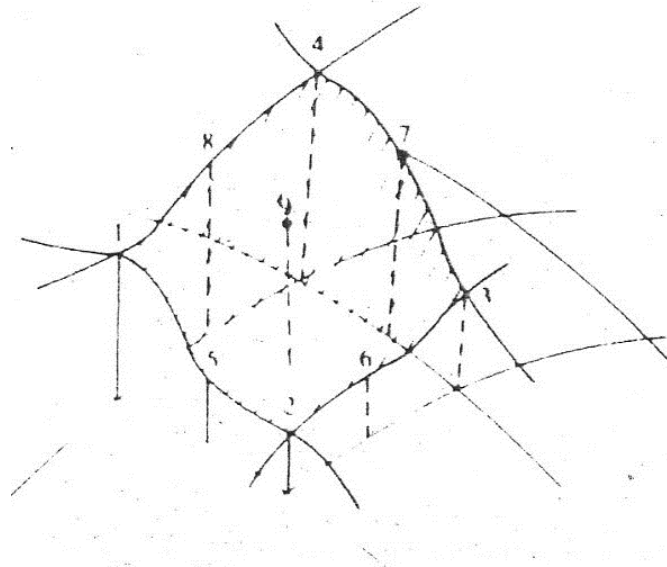
$$\Delta(u, v, w) = G_S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) = g_S(\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y) \quad (206)$$

Για το στοιχείο πρώτης τάξης και

$$\Delta\Phi = F_D(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9) = f_D(\mu_0, \mu_x, \mu_y, \mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yy}) \quad (207)$$

$$\begin{aligned} \Delta(u, v, w) &= G_D(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9) \\ &= g_D(\mu_0, \mu_x, \mu_y, \mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yy}) \end{aligned} \quad (208)$$

Για το δεύτερης τάξης ζεύγος. Ο δείκτης από 1 έως 9 σηματοδοτεί τη δύναμη της κατανομής ιδιομορφίας σε αυτό το σημείο σύμφωνα με την ακολουθούσα εικόνα 123. Να σημειωθεί ότι για μία πηγή χρησιμοποιούνται πέντε άγνωστοι, αλλά υποθέτοντας γραμμική κατανομή δύναμης αυτοί μπορεί να μειωθούν με αλγεβρικούς χειρισμούς σε τρεις. Ομοίως, υποθέτοντας παραβολική κατανομή για την δύναμη του ζεύγους ο αριθμός των αγνώστων μειώνεται στους έξι για κάθε πάνελ.



Σχήμα 123: Τυπικά σημεία που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της επίδρασης μίας υψηλότερης τάξης κατανομής ιδιομορφίας.

Διακριτοποίηση και δημιουργία του πλέγματος. η διαδικασία δημιουργίας του πλέγματος είναι ίδια με τη διαδικασία που περιγράφηκε στη μέθοδο μηδενικής τάξης, αλλά τώρα όλα τα εννέα κομβικά σημεία αποθηκεύονται στη μνήμη. Επίσης, κενά στη γεωμετρία δεν επιτρέπονται από τη στιγμή που θεωρείται μία συνεχής γεωμετρία.

Συντελεστές επίδρασης. Ξανά θα ακολουθήσουμε την περίπτωση όπου η δύναμη της πηγής (για παχιά σώματα) ορίζεται από την εξίσωση 194:

$$\sigma_k = \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{Q}_\infty$$

Η συνοριακή συνθήκη Dirichlet μπορεί να μειωθεί στη μορφή

$$\sum_{k=1}^{6N} C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \sigma_k = 0 \quad (209)$$

Ή αν χρησιμοποιείται η συνθήκη Neumann τότε στο i-ιοστό σημείο συσχέτισης θα είναι

$$\sum_{k=1}^{6N} C_k^* \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l^* \mu_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k^* \sigma_k = \mathbf{Q}_\infty \cdot \mathbf{n}_i \quad (210)$$

Κατά βάση, για N πάνελς έχουμε 6N άγνωστα ζεύγη, αλλά συνδυάζοντας τα μεγέθη (ή κλίσεις) των γειτονικών πάνελς, 5N πολύ απλές εξισώσεις μπορούν να προκύψουν. Αυτές οι συσχετίσεις των γειτονικών πάνελς αναδιανέμονται στις εξισώσεις 209 και 210, έτσι ώστε για N πάνελς N γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις να πρέπει να λυθούν. Επίσης, όπως προηγουμένως, τα ζεύγη του ομόρρου μ_i δεν περιέχουν καινούριες αγνώστους και βασιζόμενοι σε αντίστοιχες τιμές των ζευγών των πάνελς που διαχέονται στον ομόρρου, η επίδραση του ομόρρου μπορεί να υποκατασταθεί με τους συντελεστές C_k, C_k^* . Έτσι, για κάθε πάνελ i,

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} \mu_k = - \sum_{k=1}^N B_{ik} \sigma_k \quad (211)$$

Όπου ο δείκτης σημείου συσχέτισης είναι από 1 έως N.

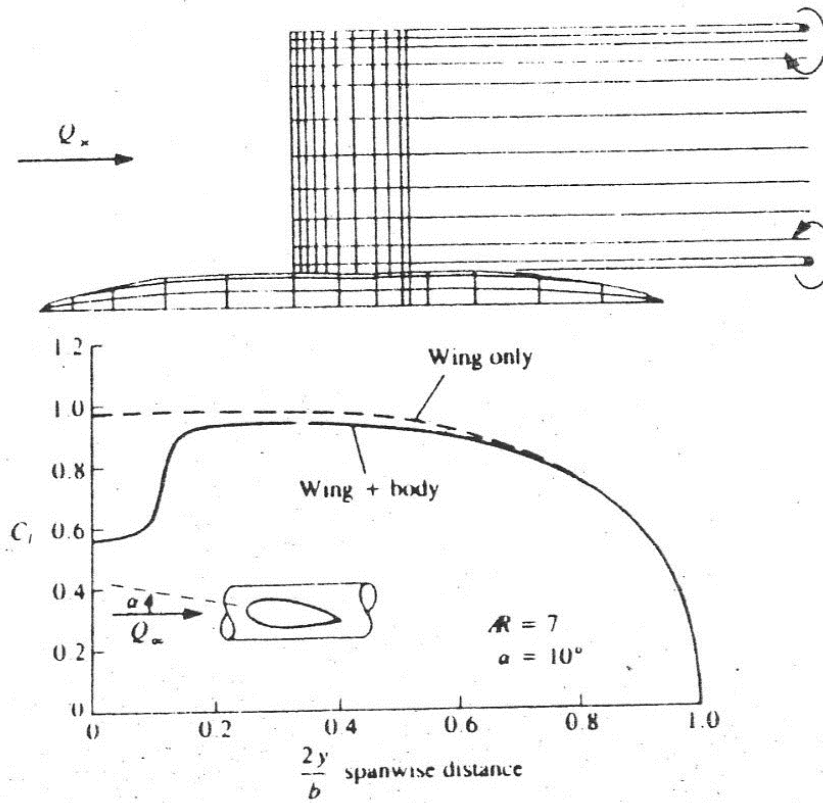
Προσδιορισμός του RHS. Το δεξί μέλος της εξίσωσης περιλαμβάνει τις γνωστές δυνάμεις πηγών (για τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet) και τη συνιστώσα της ελεύθερης ροής που είναι κανονική στην επιφάνεια (για την περίπτωση της συνοριακής συνθήκης Neumann) και έτσι

μπορεί να υπολογιστεί. Οι επιπλέον 2N εξισώσεις για τις τιμές των γωνιακών σημειακών πηγών αποκτώνται αντιστοιχώντας τη δύναμη πηγών στις άκρες των πάνελ.

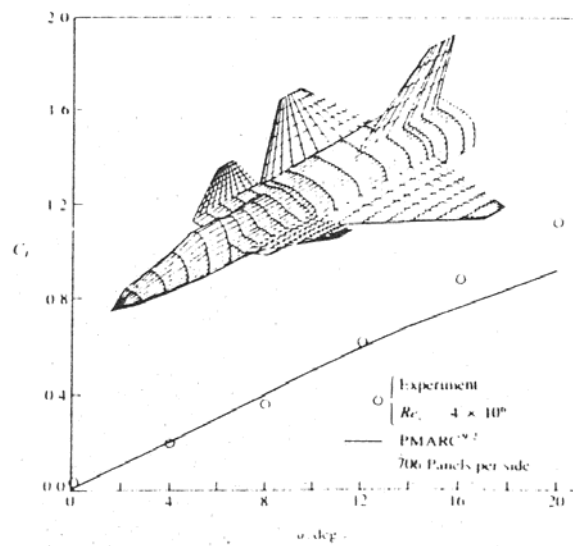
Επίλυση των γραμμικών εξισώσεων. Είναι η ίδια όπως και με την επίλυση μεθόδων χαμηλότερης τάξης.

Υπολογισμός ταχυτήτων και πιέσεων. Η τοπική εφαπτομενική ταχύτητα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση 200, αλλά καθώς σε κάθε πάνελ υπάρχουν εννέα τιμές του μ χρησιμοποιείται ένα πιο λεπτομερές αριθμητικό σχέδιο για να υπολογιστούν τα τοπικά βαθμωτά ανύσματα του δυναμικού ταχύτητας. Όταν οι συνιστώσες της ταχύτητας βρεθούν ο τοπικός συντελεστής πίεσης και οι αεροδυναμικές φορτίσεις βρίσκονται από τις εξισώσεις 203 και 204.

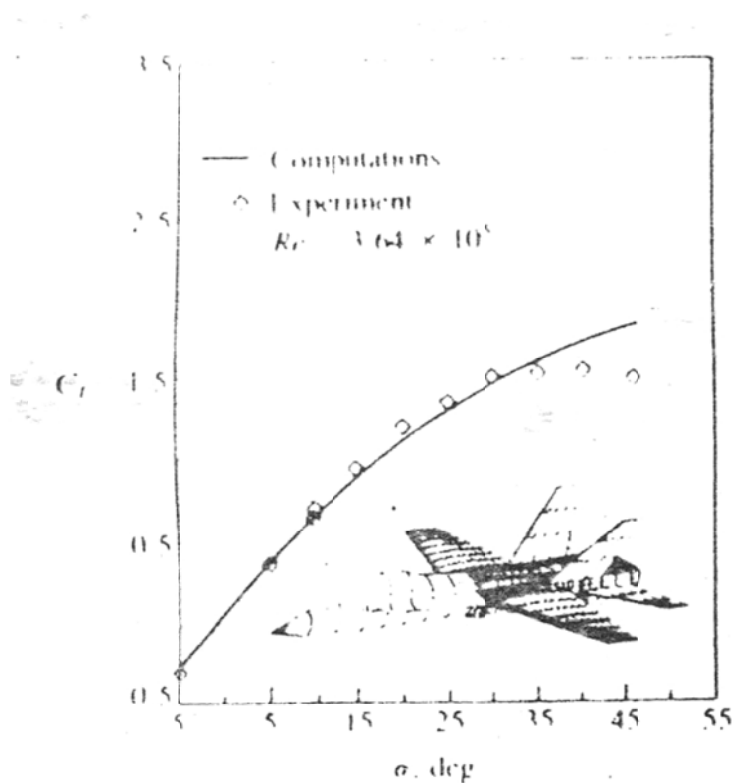
Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν πάνελς έχουν το πλεονέκτημα της μοντελοποίησης της ροής γύρω από περίπλοκα τρισδιάστατα σχήματα. Παρ' όλα αυτά το πρώτο πράγμα που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι αυτή η μέθοδος βασίζεται σε επιλύσεις δυναμικής ροής και έτσι επιλύει καλύτερα πεδία προσαρτημένα στη ροή. Στην περίπτωση τέτοιων πεδίων η υπολογισμένη κατανομή πίεσης και η άνωση θα είναι κοντά στα πειραματικά αποτελέσματα, αλλά για τη δύναμη οπισθέλκουσας μόνο το κομμάτι της οπισθέλκουσας που επάγεται από την άνωση παρέχεται από την επίλυση δυναμικής ροής και μία εκτίμηση της οπισθέλκουσας του ιξώδους απαιτείται. Για ροές με σημαντικές περιοχές αποκόλλησης της ροής η μέθοδος συνήθως δείχνει προς περιοχές μεγάλων κλίσεων της πίεσης που προκαλούν την αποκόλληση της ροής, αλλά η κατανομή πίεσης που υπολογίζεται θα είναι λάθος. Παρακάτω ακολουθούν κάποια σχήματα παραδειγμάτων εφαρμογής αυτών των μεθόδων.



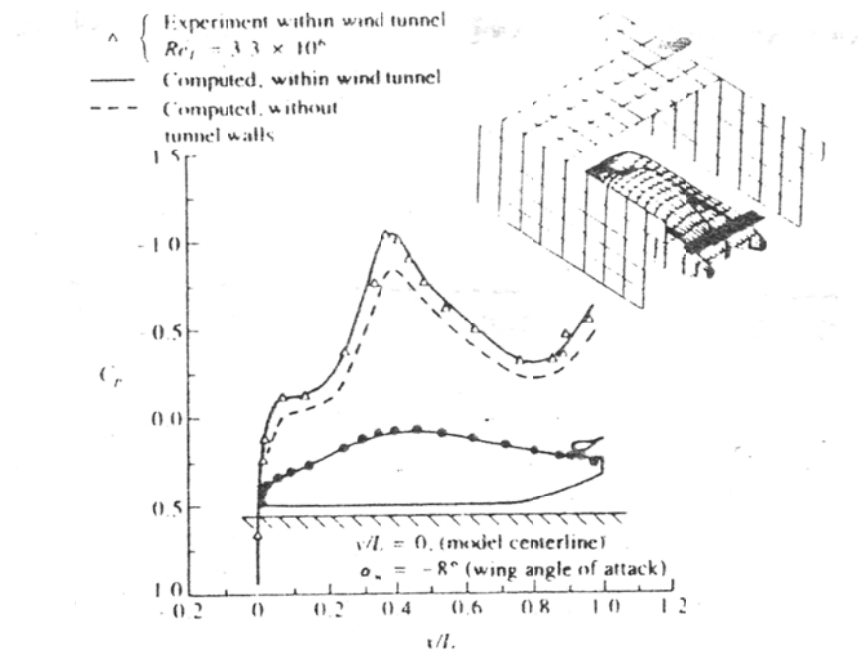
Σχήμα 124: Επίδραση ατράκτου αεροσκάφους στη φόρτιση κατά το άνοιγμα (spanwise) ενός ορθογωνικού πτερυγίου.



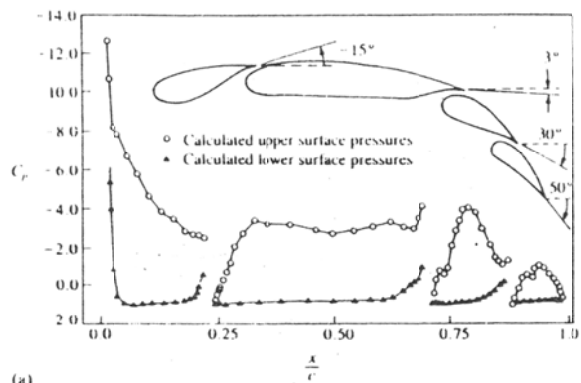
Σχήμα 125: Σύγκριση μεταξύ υπολογιστικών και πειραματικών ανωστικών συντελεστών για μία σχεδίαση πολεμικού αεροσκάφους (τα πειραματικά αποτελέσματα αντλήθηκαν από του σStoll F. And Koenig D. G. “Large Scale Wind Tunnel Investigation of a Close Coupled Canard Delta Wing Fighter Model through High Angles of Attack”).



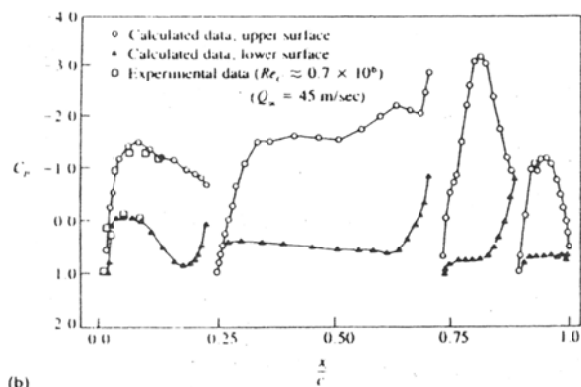
Σχήμα 126: Σύγκριση μεταξύ υπολογισμένων και μετρημένων συντελεστών άνωσης για το McDonnell Douglas F/A-18 αεροπλάνο (χρησιμοποιώντας 668 πάνελς σε κάθε πλευρά).



Σχήμα 127: Επίδραση των τοιχωμάτων μίας σήραγγας στην κατανομή των πιέσεων στην άνω επιφανειακή centerline (που καθορίζεται με τα μαύρα στίγματα) ενός ευθυγραμμισμένου στη ροή οχήματος.

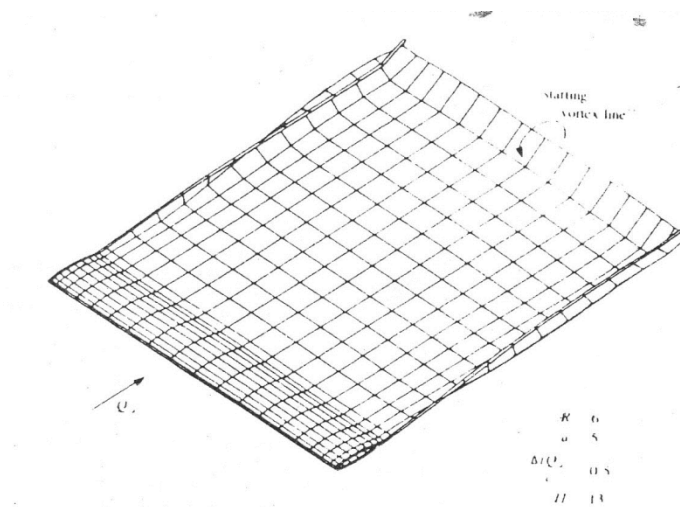


(a)

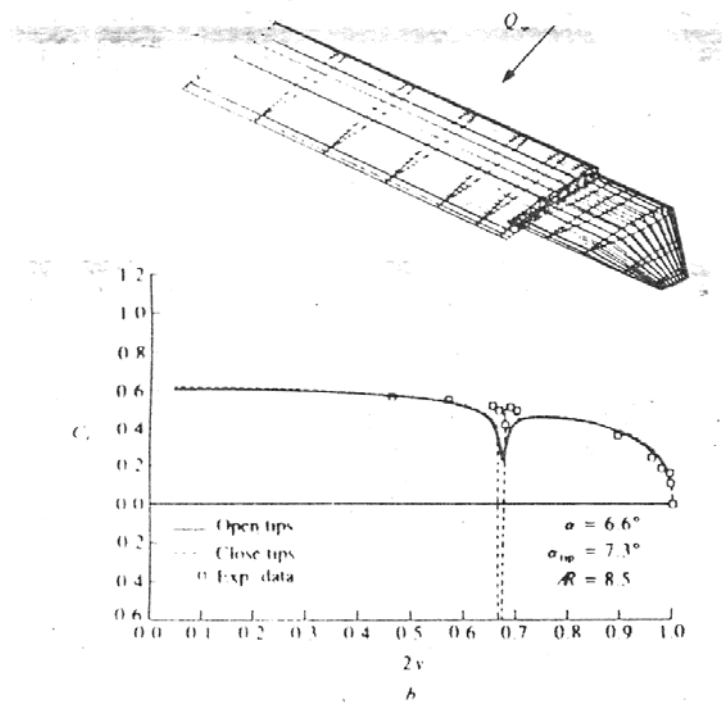


(b)

Σχήμα 129: Κατανομή πίεσης σε μία διδιάστατη τεσσάρων στοιχείων αεροτομή (α) και στην centerline με λόγου επιμήκους $AR=1.5$, ορθογώνιου πτερυγίου, που έχει την ίδια τομή αεροτομής και γωνία πρόσπτωσης (b).



Σχήμα 130: Θέση της δίνης έναρξης στην περίπτωση προσδιορισμού ενός μικρού ομόρρου για ένα ορθογώνιο πτερόγιο σε μία στρωτή ροή.



Σχήμα 131: Επίδραση κενού μεταξύ ενός επιπλέοντος ακροπτερυγίου φορτιζόμενο κατά το άνοιγμα (spanwise).

Γ. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΧΩΡΙΣ ΑΝΩΣΗ

Οι υπολογισμοί βασίστηκαν κυρίως στην μελέτη των John L. Hess και A.M.O. Smith για τον υπολογισμό της ασυμπίεστης δυναμικής ροής γύρω από ακαθόριστα, μη-ανωστικά, τρισδιάστατα σώματα.

Η μέθοδος χρησιμοποιεί μία κατανομή (πυκνότητας) πηγών στην επιφάνεια του σώματος και λύνει την απαραίτητη κατανομή, ώστε η κανονική ταχύτητα στο όριο να είναι μηδέν.

Για την προσέγγιση της επιφάνειας χρησιμοποιούνται επίπεδα τετράπλευρα στοιχεία επιφανείας και η ολοκληρωτική εξίσωση για τις πηγές στην επιφάνεια αντικαθίσταται από ένα σετ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τις τιμές της κατανομής πυκνότητας των πηγών σε κάθε ένα τετράπλευρο στοιχείο.

Αφού λυθούν αυτές οι εξισώσεις, το οποίο επιτυγχάνεται με μία επαναληπτική διαδικασία Seidel, υπολογίζονται οι ταχύτητες ροής πάνω και έξω από την επιφάνεια του σώματος.

Είναι απαραίτητο το σώμα να προσεγγισθεί ικανοποιητικά, το οποίο επιτυγχάνεται με το μέγιστο αριθμό επιφανειακών στοιχείων που μας επιτρέπει η αποθηκευτική ικανότητα του H/Y.

Η ακρίβεια των ταχυτήτων της υπολογισμένης επιφάνειας εξετάζεται από τη σύγκριση με αναλυτικές λύσεις για μία σφαίρα, ελλειψοειδή εκ περιστροφής και τριαξονικά ελλειψοειδή.

Τέλος, ο σκοπός της μεθόδου απεικονίζεται μέσω της παρουσίασης των υπολογισμένων ταχυτήτων και κατανομών πίεσης για μία ποικιλία σωμάτων, τα οποία περιλαμβάνουν συνδυασμούς ατράκτων, αγωγούς, ένα σώμα σε αεροσήραγγα, δύο σώματα το ένα δίπλα στο άλλο και γάστρες πλοίων.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μία κατανομή πηγών στην επιφάνεια του σώματος και λύνει την απαραίτητη κατανομή για την ικανοποίηση των απαραίτητων οριακών συνθηκών.

Η βασική εξίσωση που ορίζει την κατανομή πυκνότητας των πηγών είναι μία διδιάστατη ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm 2^{ου} είδους πάνω στην επιφάνεια του σώματος.

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου έναντι μεθόδων πλεγμάτων είναι:

- Η εξίσωση που πρέπει να λυθεί είναι διδιάστατη πάνω στην επιφάνεια του σώματος, αντί μιας τρισδιάστατης πάνω σε ολόκληρο το εξωτερικό πεδίο ροής.
- Οποιοδήποτε σώμα μπορεί να υπολογιστεί με ευκολία, χωρίς να υπάρχουν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μέθοδοι δικτύων, όταν η επιφάνεια του σώματος τέμνει το πλέγμα κατά ακαθόριστο τρόπο. Το πλεονέκτημα της μεθόδου έναντι μεθόδων που χρησιμοποιούν μοναδιαίες κατανομές μέσα στην επιφάνεια του σώματος, π.χ. σε ένα επίπεδο, είναι ότι αυτή η μέθοδος μπορεί να υπολογίσει ροές γύρω από τυχαία σώματα.
- Παρ'όλο που προς το παρόν η μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει μόνο περιπτώσεις όπου το σώμα είναι βυθισμένο σε ομοιόμορφη ροή/ρεύμα, μία σχετική, μικρή τροποποίηση θα επιτρέψει τον υπολογισμό και όταν το σώμα είναι σε μία τυχαία, μη ομοιόμορφη, δυναμική αρχική ροή.

2.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Έχουμε σταθερή ροή ενός τέλει ρευστού γύρω από ένα τρισδιάστατο σώμα. Η επιφάνεια του σώματος S περιγράφεται από την εξίσωση $F(x, y, z) = 0$.

Η αρχική ροή (ροή έναρξης) θεωρείται ως ένα ομοιόμορφο ρεύμα μοναδιαίου μεγέθους $\vec{V}_\infty = (V_{\infty x}, V_{\infty y}, V_{\infty z})$. Ισχύει $V_\infty = \sqrt{V_{\infty x}^2 + V_{\infty y}^2 + V_{\infty z}^2} = 1$. Ο περιορισμός για ομοιόμορφη ροή έναρξης δεν είναι απαραίτητος, αλλά γίνεται για απλότητα.

Η ταχύτητα του ρευστού σε ένα σημείο μπορεί να εκφραστεί από το αρνητικό βαθμωτό άνυσμα μιας συνάρτησης δυναμικού Φ . Η συνάρτηση Φ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στην περιοχή R' , εξωτερικά του S , έχει μηδενική πρώτη παράγωγο στο S και προσεγγίζει την κανονική ομοιόμορφη δυναμική ροή στο άπειρο. Συμβολικά,

$$\Delta\Phi = 0 \text{ στο } R' \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \right)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_S = \vec{n} \cdot \text{grad}\Phi|_{F=0} = 0$$

$$\Phi \rightarrow -(V_{\infty x} \cdot x + V_{\infty y} \cdot y + V_{\infty z} \cdot z) \text{ για } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

$$\vec{n} = \pm \left[\frac{\text{grad}F}{|\text{grad}F|} \right]_{F=0}$$

Έστω $\Phi = \varphi_\infty + \varphi$, όπου φ_∞ , η ομοιόμορφη ροή δυναμικού και φ , το δυναμικό διαταραχής λόγω της παρουσίας του σώματος.

$$\varphi_\infty = -(V_{\infty x} \cdot x + V_{\infty y} \cdot y + V_{\infty z} \cdot z)$$

$$\Delta\varphi = 0 \text{ στο } R'$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = \vec{n} \cdot \text{grad}\varphi|_{F=0} = +\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_\infty|_{F=0}$$

$$\varphi \rightarrow 0 \text{ για } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

$$\varphi(x, y, z) = \oiint_S \frac{\sigma(q)}{r(P, q)} dS \quad (12),$$

όπου $\sigma(q)$, είναι η επιφανειακή κατανομή πυκνότητας πηγών και $r(P, q)$, είναι η απόσταση από το σημείο ολοκλήρωσης q στην επιφάνεια στο πεδιακό σημείο P με συντεταγμένες x, y, z , όπου το δυναμικό υπολογίζεται.

Η κύρια τιμή είναι $-2\pi\sigma(p)$, έτσι πάνω στην επιφάνεια του σώματος η κανονική παράγωγος του φ είναι

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = -2\pi \cdot \sigma(p) + \oiint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \cdot \sigma(q) dS$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση για το σ είναι

$$2\pi \cdot \sigma(p) - \oiint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \cdot \sigma(q) dS = -\vec{n}(p) \cdot \vec{V}_\infty,$$

όπου το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα έχει γραφεί $\vec{n}(p)$ για να δηλώνει επακριβώς την εξάρτησή του από τη θέση. Αυτή φαίνεται ως μια διδιάστατη ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm 2^{ου} είδους στην επιφάνεια S . Όταν αυτή η εξίσωση λυθεί ως προς σ , το δυναμικό διαταραχής φ υπολογίζεται από την εξίσωση (12) και οι ταχύτητες της ροής διαταραχής από τις παραγώγους της εξίσωσης (12) στις διάφορες καρτεσιανές συντεταγμένες. Είναι απαραίτητο η επιφάνεια του σώματος να έχει ένα συνεχές διάνυσμα $\vec{n}$. Αλλιώς, η συνθήκη υπό ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση είναι ιδιόμορφη και η δεξιά πλευρά ασυνεχής. Έτσι, η μέθοδος δεν εγγυάται καλά αποτελέσματα για σώματα με ασυνέχειες κλίσης, όπως γωνίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις η γωνία αποκαθίσταται από μικρές περιοχές μεγάλης, αλλά πεπερασμένης καμπυλότητας χωρίς να επηρεάζεται σημαντικά η ροή σε άλλα σημεία. Ακόμα και αυτό μπορεί να είναι περιττό, καθώς η μέθοδος έχει δείξει ότι δίνει σωστά αποτελέσματα σε περιπτώσεις γωνιών, αρκεί αυτές οι γωνίες να είναι κυρτές.

Στην περίπτωση όπου η αρχική ροή δεν είναι ομοιόμορφο ρεύμα, δηλαδή το $\vec{V}_\infty$ δεν είναι ανεξάρτητο της θέσης, αντιμετωπίζεται κατά τον ίδιο τρόπο, όπως η περίπτωση του ομοιόμορφου ρεύματος.

3.ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

3.1 Η προσέγγιση της επιφάνειας του σώματος

Για να ληφθούν υπόψιν τυχαία σώματα, είναι φυσικό να απαιτηθεί η επιφάνεια του σώματος να καθοριστεί από ένα σύνολο σημείων στο χώρο.

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι προσέγγισης. Ο πρώτος χρησιμοποιεί μία απλή αναλυτική έκφραση ή μερικές τέτοιες εκφράσεις για να προσεγγίσει ολόκληρη την επιφάνεια. Η δεύτερη χρησιμοποιεί ένα μεγάλο αριθμό αναλυτικών εκφράσεων, καθεμία από τις οποίες προσεγγίζει την επιφάνεια σε μία μικρή περιοχή. Παρ'όλο που η πρώτη είναι πιο ικανοποιητική κατά πολλούς τρόπους, κατέχει το ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό που περιγράφηκε παραπάνω για τις ακριβείς αναπαραστάσεις, δηλαδή απαιτούνται πολύ λεπτομερείς εκφράσεις.

Όταν αποφασιστεί η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσέγγιση της επιφάνειας του σώματος, υπάρχουν διάφορες πιθανές προσεγγίσεις για την αριθμητική επίλυση της παραπάνω εξίσωσης.

Η εξίσωση μπορεί να αντιμετωπιστεί κατευθείαν σαν ολοκληρωτική εξίσωση χρησιμοποιώντας μία επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση Fredholm ολοκληρωτικών εξισώσεων. Σε αυτή τη μέθοδο το ολοκλήρωμα της σχέσης υπολογίζεται με αριθμητικά μέσα. Εναλλακτικά, η εξίσωση αντικαθίσταται με ένα σετ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να το πετύχουμε αυτό, όλες όμως είναι ισοδύναμες με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην εξίσωση από ένα τετράγωνικό τύπο στα πλαίσια κάποιων συγκεκριμένων τιμών των πηγών πυκνότητας. Αυτές μπορεί να είναι οι πραγματικές τιμές της κατανομής πυκνότητας πηγών σε επιλεγμένα σημεία στην επιφάνεια του σώματος ή μπορούν να αντιπροσωπεύουν μέσες τιμές της κατανομής πηγών, κατά μία έννοια πάνω από συγκεκριμένες περιοχές της επιφάνειας. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται η εξίσωση να μείνει σε ένα συγκεκριμένο αριθμό σημείων της επιφάνειας και έτσι να δίνει ένα σετ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τις άγνωστες τιμές της κατανομής πυκνότητας πηγών.

Η επιφάνεια του σώματος προσεγγίζεται από ένα μεγάλο αριθμό μικρών επίπεδων στοιχείων, τα οποία σχηματίζονται από τα αρχικά σημεία που ορίζουν την επιφάνεια του σώματος.

Η κατανομή πηγών υποτίθεται ότι είναι σταθερή πάνω από καθένα από αυτά τα στοιχεία. Αυτή η υπόθεση μειώνει το πρόβλημα του καθορισμού της συνεχούς συνάρτησης σ στο πρόβλημα του καθορισμού ενός πεπερασμένου αριθμού τιμών της σ , ένα για κάθε ένα από τα επίπεδα στοιχεία.

Η συμβολή κάθε στοιχείου του ολοκληρώματος στην εξίσωση αποκτάται παίρνοντας τη σταθερή, αλλά άγνωστη τιμή του σ , σε αυτό το σημείο έξω από το ολοκλήρωμα και μετά εφαρμόζοντας την συγκεκριμένη ολοκλήρωση των γνωστών γεωμετρικών ποσοτήτων επάνω σε αυτό το στοιχείο. Έτσι, απαιτώντας η εξίσωση να μένει σε ένα σημείο P , μας δίνει μία γραμμική σχέση μεταξύ των άγνωστων τιμών των σ στα επίπεδα στοιχεία.

Ο αριθμός των γραμμικών εξισώσεων είναι ίσος με τον αριθμό των άγνωστων τιμών του σ . Όταν αυτές θα έχουν λυθεί, οι ταχύτητες ροής μπορούν να υπολογιστούν σε κάθε σημείο, αθροίζοντας τη συμβολή σ των επιπέδων στοιχείων και προσθέτοντας κατάλληλες συνιστώσες στην αρχική ροή. Οι ταχύτητες ροής μπορούν να υπολογιστούν σε σημεία είτε πάνω είτε έξω από το σώμα. Εάν οι ταχύτητες υπολογίζονται πάνω στο σώμα, πρέπει να υπολογίζονται κάθε φορά στα ίδια σημεία όπου η εξίσωση απαιτείται να μένει σταθερή, δηλαδή στα σημεία όπου η κανονική ταχύτητα εξαφανίζεται. Οι ταχύτητες σε άλλα σημεία της επιφάνειας του σώματος αποκτώνται μέσω παρεμβολής αυτών των τιμών παρά από απευθείας υπολογισμό.

Υπάρχουν τρεις λόγοι γιατί υιοθετήθηκε η σχετικά αργή προσέγγιση επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης. Πρώτον, είναι απλούστερη από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους, οι οποίες είναι αρκετά ευπροσάρμοστες ώστε να μπορούν να διαχειριστούν όλα τα σχήματα σωμάτων που μας ενδιαφέρουν στις εφαρμογές. Το κύριο μειονέκτημα μιας απλής μεθόδου είναι ότι απαιτούνται μεγάλοι υπολογιστικοί χρόνοι για υψηλότερη ακρίβεια.

Ένας δεύτερος λόγος είναι ότι η φυσική σημασία της προσέγγισης είναι εμφανής. Αυτό είναι γεγονός και όσον αφορά το βαθμό προσέγγισης στην αληθινή επιφάνεια του σώματος που γίνεται από τα επίπεδα στοιχεία και όσον αφορά συγκεκριμένα ενδιάμεσα μαθηματικά αποτελέσματα. Το στοιχείο αυτό ήταν εξαιρετικά χρήσιμο όχι μόνο για τον έλεγχο της μεθόδου και την ελαχιστοποίηση των λαθών, αλλά επίσης έχει συνεχή αξία στους χρήστες του προγράμματος, επειδή κάνει ξεκάθαρο σε κάποιο

ποσοστό πως τα αρχικά σημεία που ορίζουν την επιφάνεια του σώματος πρέπει να κατανεμηθούν για τα βέλτιστα/καλύτερα αποτελέσματα.

Ο τρίτος και σημαντικότερος λόγος για την επιλογή αυτής της μεθόδου είναι ότι αποτελεί το τρισδιάστατο ανάλογο της μεθόδου που έδωσε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για διδιάστατα και αξονοσυμμετρικά σώματα.

4.Η ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

4.1 Περιγραφή της μεθόδου

Το εδάφιο αυτό περιγράφει σύντομα τον τρόπο με τον οποίο η μέθοδος επίλυσης διεξάγεται στην υπολογιστική μηχανή.

Η επιφάνεια του σώματος ορίζεται από ένα σύνολο σημείων στον τρισδιάστατο χώρο. Αυτά θα ονομάζονται τα σημεία εισόδου (input). Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο δίνονται αυτά τα σημεία προσδιορίζεται ως σύστημα αναφοράς. Αυτά τα σημεία πρέπει να κατανεμηθούν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να προκύπτει η καλύτερη αναπαράσταση για το σώμα με το μικρότερο δυνατό αριθμό σημείων.

Συγκεκριμένα, τα σημεία πρέπει να συγκεντρώνονται σε περιοχές όπου η καμπυλότητα της επιφάνειας του σώματος είναι μεγάλη και σε περιοχές όπου η ταχύτητα ροής αναμένεται να αλλάζει γρήγορα, ενώ τα σημεία κατανέμονται αραιά σε περιοχές όπου ούτε η γεωμετρία του σώματος, ούτε οι ταχύτητες ροής μεταβάλλονται σημαντικά. Εάν το σώμα έχει επίπεδα συμμετρίας, μόνο τα μη περιττά (τα μη πλεονάζοντα) κομμάτια της επιφάνειας είναι αναγκαίο να καθοριστούν από σημεία εισόδου (input points).

Η επιφάνεια του σώματος προσεγγίζεται από ένα σύνολο επίπεδων τετραγωνικών στοιχείων πηγής, καθένα από τα οποία σχηματίζεται από τέσσερα σημεία εισόδου. Για να αποφύγουμε τώρα να έχουμε τέσσερα σημεία εισόδου για κάθε στοιχείο, τα σημεία εισόδου οργανώνονται κατά έναν συγκεκριμένο τρόπο, έτσι ώστε να μπορούν να συνδεθούν σε ομάδες των τεσσάρων για το σχηματισμό των στοιχείων, όπου κάθε σημείο εισόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχηματισμό μέχρι τεσσάρων στοιχείων.

Για να το πετύχουμε αυτό, κάθε σημείο θεωρείται ότι αναγνωρίζεται από ένα ζευγάρι ακεραίων, το ένα καθορίζει τη σειρά (row) των σημείων που αυτό ανήκει και το άλλο τη στήλη (column). Η επιλογή του τι αποτελεί μία σειρά ή στήλη είναι πολύ ελεύθερη. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι αν όλα τα σημεία μίας στήλης ενωθούν με μία γραμμή πάνω στο σώμα, απαγορεύεται δύο τέτοιες καμπύλες να τέμνουν η μία την άλλη και ομοίως για τις σειρές. Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι αυτές οι καμπύλες αποτελούν απαραίτητα καμπύλες ενός διδιάστατου συστήματος συντεταγμένων που κείται πάνω στο σώμα. Γενικά, τα τέσσερα σημεία που συνιστούν ένα στοιχείο δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο.

Τα επίπεδα τετραγωνικά επιφανειακά στοιχεία σχηματίζονται από τα τέσσερα κατάλληλα σημεία εισόδου, όπως περιγράφεται ακολούθως. Πρώτα υπολογίζονται δύο διανύσματα. Αυτά είναι τα δύο διαγώνια διανύσματα, καθένα από τα οποία είναι η διαφορά των διανυσμάτων θέσης δύο σημείων που δεν είναι ούτε στην ίδια σειρά, ούτε στην ίδια στήλη. Το γινόμενο αυτών των διανυσμάτων διαιρεμένο με το μήκος του λαμβάνεται ως το μοναδιαίο (πρότυπο) διάνυσμα (ισοκατανομής) του επιπέδου του στοιχείου. Το γινόμενο των διανυσμάτων γίνεται κατά τέτοιο τρόπο που παράγει ένα εξωτερικό πρότυπο στην επιφάνεια του σώματος.

Για να περιγραφεί πλήρως το επίπεδο του στοιχείου, χρειάζεται ακόμα ένα σημείο στο επίπεδο. Αυτό το σημείο λαμβάνεται ως το σημείο που οι συντεταγμένες του είναι ο μέσος όρος των συντεταγμένων των τεσσάρων σημείων εισόδου και ονομάζεται μέσο σημείο (average point).

Εξαιτίας του τρόπου που ορίζεται το επίπεδο, όλα τα τέσσερα σημεία εισόδου ισαπέχουν από αυτό – τα δύο χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν ένα διαγώνιο διάνυσμα στην μία πλευρά και τα άλλα δύο στην άλλη πλευρά. Τα τέσσερα σημεία στο επίπεδο είναι οι γωνίες του επιπέδου τετραγωνικού στοιχείου πηγών, και ονομάζονται γωνιακά σημεία (corner points). Αυτά είναι και τα σημεία που χρησιμοποιούνται σε όλους τους υπολογισμούς από τη στιγμή που το ολοκληρωμένο σύνολο επιφανειακών στοιχείων έχει σχεδιαστεί, παρά τα σημεία εισόδου.

Η αρχή των αξόνων του στοιχειώδους συστήματος συντεταγμένων (element coordinate system) ορίζεται προσωρινά στο μέσο σημείο. Το σύστημα αυτό καθορίζεται από τρία διανύσματα, δύο εκ των οποίων βρίσκονται στο επίπεδο του στοιχείου και το τρίτο είναι κάθετο και έχει ήδη υπολογισθεί.

Για τον υπολογισμό των ταχυτήτων που επάγονται από ένα επίπεδο τετραγωνικό στοιχείο πηγών σε σημεία στο χώρο, φαίνεται ότι είναι πολύ χρονοβόρο να χρησιμοποιηθούν οι ακριβείς τύποι ταχύτητας σε όλα τα σημεία. Για αυτό το λόγο προσεγγιστικοί τύποι οι οποίοι προκύπτουν από πολύπλοκες επεκτάσεις χρησιμοποιούνται για σημεία που είναι ικανοποιητικά μακριά από το στοιχείο, ώστε η προσέγγιση να είναι αποδεκτά ακριβής. Αυτοί οι προσεγγιστικοί τύποι απαιτούν την περιοχή του τετραγώνου, τις συντεταγμένες του κεντροειδούς της περιοχής, τις δεύτερες ροπές της επιφάνειας και το μήκος της μέγιστης διαγωνίου του τετραγωνικού στοιχείου. Όταν υπολογισθεί το κεντροειδές αντικαθιστά την αρχή των αξόνων του element coordinate system το μέσο σημείο.

Στη συνέχεια είναι σημαντικό να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο σημείο σε κάθε τετραγωνικό στοιχείο, όπου η κανονική ταχύτητα απαιτείται να εξαφανίζεται και όπου οι ταχύτητες της ροής υπολογίζονται. Το σημείο αυτό λαμβάνεται εκεί όπου το τετραγωνοειδές δεν επάγει ταχύτητα στο δικό του επίπεδο. Το σημείο αυτό ορίζεται ως το μηδενικό σημείο (null point).

Σκοπός είναι η εύρεση και μείωση των λαθών στις πληροφορίες εισόδου (input data) πριν αρχίσουν οι μακροσκελείς υπολογισμοί ροής. Τέτοια λάθη είναι αρκετά συχνά λόγω των πολλών input που απαιτούνται. Μία εξέταση της ποικιλίας των παραπάνω γεωμετρικών ποσοτήτων από στοιχείο σε στοιχείο συχνά αποκαλύπτει τέτοια λάθη.

Τώρα πρέπει να υπολογιστούν οι ταχύτητες που επάγονται από τα τετραγωνικά στοιχεία πηγών στα μηδενικά σημεία του άλλου. Αυτό γίνεται υποθέτοντας ότι η κατανομή των πηγών σε κάθε στοιχείο έχει μοναδιαία ισχύ.

Ανάλογα με την απόσταση του μηδενικού σημείου από το κεντροειδές του στοιχείου χρησιμοποιείται ένα από τα τρία σύνολα εξισώσεων. Εάν ο λόγος αυτής της απόστασης προς τη μέγιστη διαγώνιο του στοιχείου είναι μικρότερος από μία συγκεκριμένη προκαθορισμένη τιμή, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις για την ακριβή ταχύτητα. Εάν ο λόγος είναι μεγαλύτερος, η ταχύτητα υπολογίζεται από εξισώσεις κατάλληλες για ένα πηγαίο σημείο επιπλέον ενός σημείου συστήματος δύο πόλων ή ενός πηγαίου σημείου μόνου του.

Το τελικό αποτέλεσμα των υπολογισμών αυτών είναι ένα ολοκληρωμένο σύνολο επαγόμενων ταχυτήτων σε κάθε μηδενικό σημείο από κάθε τετραγωνικό στοιχείο,

όλα εκ των οποίων θεωρούνται ότι έχουν μοναδιαία πυκνότητα πηγών. Αυτός ο πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως ένας «πίνακας συντελεστών επίδρασης» (matrix of influence coefficients), τα στοιχεία του οποίου είναι διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο.

Για κάθε στοιχείο απαιτούνται εικοσιοκτώ ποσότητες. Το αποτέλεσμα είναι ότι ο μέγιστος αριθμός στοιχείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν την επιφάνεια του σώματος περιορίζεται από την υψηλής ταχύτητας αποθηκευτική ικανότητα της μηχανής που δοκιμάζεται σε αυτό το στάδιο της διαδικασίας.

Η παραπάνω παράγραφος αφορά μη συμμετρικά σώματα. Για σώματα με ένα ή περισσότερα επίπεδα συμμετρίας η διαδικασία είναι όμοια με παραπάνω, εκτός από το γεγονός ότι μετά τον υπολογισμό των συνιστωσών των επαγόμενων ταχυτήτων από ένα στοιχείο σε ένα συγκεκριμένο μηδενικό σημείο οι συνιστώσες της ταχύτητας που επάγονται στο ίδιο μηδενικό σημείο από την εικόνα ή τις εικόνες του στοιχείου υπολογίζονται επίσης με την ίδια μέθοδο. Έτσι, ενώ στην περίπτωση της μη συμμετρικότητας υπάρχει μόνο ένα σύνολο επαγόμενων συνιστωσών ταχυτήτων που απεικονίζονται την επίδραση ενός στοιχείου σε ένα μηδενικό σημείο, υπάρχουν κατά αντιστοιχία δύο, τέσσερα ή οκτώ σύνολα επαγόμενων συνιστωσών ταχύτητας στις περιπτώσεις ενός, δύο ή τριών επιπέδων συμμετρίας. Αυτά συνδυάζονται με κατάλληλο τρόπο για να χρησιμοποιηθούν στις αρχικές ροές στις τρεις κατευθύνσεις των συντεταγμένων. Το αποτέλεσμα είναι δύο «πίνακες συντελεστών επίδρασης» στις περιπτώσεις με ένα επίπεδο συμμετρίας και τρεις τέτοιοι πίνακες σε περιπτώσεις με δύο ή τρία επίπεδα συμμετρίας.

Για να αποκτήσουμε ένα σύνολο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τις άγνωστες τιμές της πυκνότητας πηγών στα στοιχεία, το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις κανονικές ταχύτητες που επάγονται σε κάθε μηδενικό σημείο από τα διάφορα στοιχεία, καθένα από τα οποία ακόμα υποτίθεται ότι έχει μία μοναδιαία κατανομή πηγών. Αυτό γίνεται λαμβάνοντας το αποτέλεσμα/ προϊόν σημείων από τις επαγόμενες ταχύτητες που περιγράφονται παραπάνω με τα κανονικά διανύσματα των στοιχείων στον οποίον τα μηδενικά σημεία (null points) αυτές οι ταχύτητες υπολογίσθηκαν.

Το αποτέλεσμα είναι ένας βαθμωτός πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι οι κανονικές επαγόμενες ταχύτητες στα διάφορα μηδενικά σημεία από τα διάφορα

τετραγωνικά στοιχεία με μοναδιαία πυκνότητα πηγών. Αυτός ο πίνακας είναι ο πίνακας συντελεστών των απαιτούμενων συνόλων γραμμικών εξισώσεων, μιας και πολλαπλασιάζοντας αυτό με τον πίνακα – στήλη των αγνώστων τιμών της πυκνότητας πηγών σε κάθε στοιχείο προφανώς δίνει έναν πίνακα – στήλη του οποίου τα στοιχεία είναι οι πραγματικές κανονικές ταχύτητες που επάγονται στα μηδενικά σημεία από ολόκληρη την προσεγγιστική επιφάνεια του σώματος.

Σε κάθε περίπτωση, τρία σύνολα ταυτόσημων γραμμικών εξισώσεων λύνονται για τρία ολοκληρωμένα σύνολα τιμών της κατανομής πηγών της επιφάνειας. Οι λύσεις διενεργούνται από μία Seidel επαναληπτική διαδικασία.

Όταν οι τιμές της κατανομής πυκνότητας επιφανειακών πηγών έχουν βρεθεί, οι συνιστώσες της ταχύτητας σε κάθε μηδενικό σημείο υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τις συνιστώσες της επαγόμενης ταχύτητας που περιγράφονται παραπάνω (οι οποίες υπολογίστηκαν υποθέτοντας μια μοναδιαία κατανομή πηγών) με τις κατάλληλες υπολογισμένες τιμές της κατανομής πηγών και προσθέτοντας όλα τα γινόμενα που είναι κατάλληλα για το υπό ερώτηση μηδενικό σημείο. Αυτή η άθροιση είναι επομένως επάνω από όλα τα στοιχεία μίας σειράς του «πίνακα συντελεστών επίδρασης». Στα αποτελέσματα αυτής της άθροισης πρέπει να προστεθούν οι κατάλληλες συνιστώσες της ροής έναρξης. Οι καταληκτικές ταχύτητες και πιέσεις υπολογίζονται εύκολα από τις συνιστώσες της ταχύτητας. Οι παραπάνω ποσότητες και κάποιες άλλες που μας ενδιαφέρουν είναι το τελικό αποτέλεσμα της μεθόδου και συνθέτουν το δεύτερο output του προγράμματος της μηχανής. Υπάρχει ένα ολοκληρωμένο σύνολο αποτελεσμάτων για κάθε μία από τις τρεις αρχικές (onset) ροές.

4.2 Συζήτηση περί κάποιων πιθανών εναλλακτικών

Για την εκτέλεση της μεθόδου και την κατασκευή μιας πρακτικής υπολογιστικής διαδικασίας, πολλές αποφάσεις πάρθηκαν που δεν βασίστηκαν στη μέθοδο. Σε αυτό το κομμάτι οι αιτίες για κάποιες από αυτές τις επιλογές δίνονται και συζητώνται εναλλακτικές.

Αποφασίστηκε τα επίπεδα στοιχεία πηγών που προσεγγίζουν την επιφάνεια του σώματος να παρθούν ως τετράπλευρα παρά σαν κάποιο άλλο επίπεδο σχήμα και να

οργανωθούν αυτά τα στοιχεία με τη χρήση ενός συστήματος συντεταγμένων πάνω στο σώμα, δηλαδή με «σειρές» και «στήλες», όπως περιγράφηκε παραπάνω, παρά την ύπαρξη κάποιων ανεπιθύμητων χαρακτηριστικών αυτής της προσέγγισης.

Ένα μειονέκτημα στη χρήση τετραπλεύρων είναι ότι αντίστοιχα στοιχεία δεν έχουν γενικά συμπίπτουσες άκρες. Αυτό, βέβαια, έχει εξαιρετικά μικρή επίδραση για κανονικά σχήματα σωμάτων.

Η οργάνωση των τετραγωνικών στοιχείων με σύστημα συντεταγμένων στην επιφάνεια του σώματος έχει το ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό ότι φυσιολογικά ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων έχει ένα σημείο συγκέντρωσης (concentration point) όπου ένα σύνολο συντεταγμένων γραμμών έρχεται μαζί. Όταν συμβαίνει αυτό προκαλεί αρκετές δυσκολίες που σχετίζονται με την κατανομή των στοιχείων στην γύρω περιοχή και με τον καθορισμό των μηδενικών σημείων. Επίσης, τα αποτελέσματα των υπολογισμών είναι γενικά λιγότερο ακριβή κοντά σε ένα τέτοιο σημείο.

Οι παραπάνω επιλογές απλοποιούν τα στοιχεία εισόδου κατά δύο τρόπους. Πρώτα, επιτρέπουν ένα δεδομένο σημείο εισόδου (input point) να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή αρκετών στοιχείων (elements). Αυτό σε φυσιολογικές περιπτώσεις οδηγεί στο ότι ο απαιτούμενος αριθμός σημείων εισόδου είναι ελαφρώς μεγαλύτερος από αυτόν των στοιχείων. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με μία μέθοδο όπου όλα τα γωνιακά σημεία για κάθε στοιχείο είναι inputs και άρα ο απαιτούμενος αριθμός σημείων εισόδου είναι τέσσερις φορές ο αριθμός των στοιχείων στην περίπτωση των τετραπλεύρων (quadrilaterals).

Η κατά το δυνατόν μείωση των απαιτούμενων εισαγόμενων δεδομένων είναι σημαντική όχι μόνο για την μείωση των πιθανοτήτων λάθους, αλλά επίσης και γιατί ένα μεγάλο ποσοστό απαιτούμενων τέτοιων στοιχείων οδηγεί σε μια απροθυμία χρήσης της μεθόδου.

Δευτερευόντως, το σχέδιο/ πλάνο οργάνωσης είναι εύκολο στο να οπτικοποιηθεί και απλοποιεί θεμελιωδώς τα δεδομένα εισόδου. Πετυχαίνει το μεγαλύτερο πλεονέκτημα απέναντι σε ανταγωνιστικά πλάνα στη συχνά εμφανιζόμενη περίπτωση, όπου είναι φυσικό να έχουμε κάθε σημείο σε μία «στήλη» στην ίδια τιμή με μία από τις συντεταγμένες, για παράδειγμα παρέχοντας δεδομένα εισόδου σε σταθερές

«chordwise» και «spanwise» θέσεις/σταθμούς. Αυτή η ιδιότητα δεν αποτελεί τριτομμένη θεωρήση. Έχει βρεθεί στην πράξη ότι θεμελιώδεις δυσκολίες μπορούν να αυξήσουν τη δυσκολία έξυπνης κατανομής των σημείων εισόδου. Ομοίως, η ερμηνεία του αποτελέσματος (output) απλοποιείται με το να κάνουμε τη σειρά των σημείων στο φύλλο των αποτελεσμάτων (που είναι η ίδια σειρά με αυτή των δεδομένων εισόδου) να ανταποκρίνεται στα φυσικά σημεία με μία φυσική ακολουθία.

Τα τριγωνικά στοιχεία είναι τα μόνα άλλα που λήφθηκαν σοβαρά υπόψιν. Έχουν τα πλεονεκτήματα ότι οι άκρες αντίστοιχων στοιχείων συμπίπτουν και ότι τα σημεία συγκέντρωσης μπορούν να αποφευχθούν, αλλά δεν υπάρχει εμφανής τρόπος να τα οργανώσουμε, ώστε ταυτόχρονα να αποκτούν ένα ελάχιστο απαιτούμενο σημείων εισόδου και επιπλέον θεμελιώδους απλότητας. Τα τριγωνικά στοιχεία έχουν επιπλέον το μειονέκτημα συγκρινόμενα με τα τετραγωνικά ότι η επιλογή του σημείου πάνω στο στοιχείο όπου οι ταχύτητες θα υπολογισθούν είναι πιο κρίσιμη.

Η θέση του σημείου στο τετράπλευρο σημείο όπου οι ταχύτητες πρέπει να υπολογιστούν είναι ένα θέμα σημασίας στο ότι πρέπει να έχει μία σημαντική επίδραση στην ακρίβεια του υπολογισμού. Δυστυχώς, δεν υπάρχει προφανής επιλογή για αυτό το σημείο και όντως δεν υπάρχει τρόπος για να αποφασίσουμε εάν ένας συγκεκριμένος τρόπος είναι καλύτερος από κάποιον άλλο. Είναι εμφανές ότι σε ένα ορθογώνιο στοιχείο το κατάλληλο σημείο είναι το κέντρο. Έτσι, το επιλεγόμενο σημείο πρέπει να ορισθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να πέφτει στο κέντρο όταν το στοιχείο γίνεται ορθογώνιο. Αυτός ο περιορισμός, όμως, επιτρέπει πολλές επιλογές. Στα περισσότερα σώματα που μας ενδιαφέρουν, τα τετράπλευρα στοιχεία είναι σχεδόν ορθογώνια σχεδόν σε ολόκληρη την επιφάνεια του σώματος και έτσι οι τελικές απαντήσεις δεν εξαρτώνται ιδιαίτερα από το σημείο που χρησιμοποιείται. Υπάρχουν όμως περιοχές όπου τα στοιχεία δεν είναι ακριβώς ορθογώνια και οι υπολογιζόμενες ταχύτητες ροής μπορεί να αλλάξουν σημαντικά με την επιλογή του σημείου. Τέτοιες περιοχές υπάρχουν, για παράδειγμα, κοντά στα σημεία συγκέντρωσης (concentration points), όπου τα στοιχεία γίνονται συνήθως τριγωνικά. Αυτό είναι μάλλον το γεγονός που αποτελεί την αιτία του ότι οι υπολογισμοί δεν είναι καθόλου ακριβείς κοντά στα σημεία συγκέντρωσης. Τα τρία σημεία που θεωρήθηκαν πιο πιθανά είναι το μηδενικό σημείο (null point), το κεντροειδές (centroid) και το μέσο σημείο (average point). Το μηδενικό σημείο (null point) επιλέχθηκε όχι για κάποιο ιδιαίτερο λόγο παρά λόγω της προσωπικής άποψης ότι η

επιλογή θα πρέπει να ελαχιστοποιεί τα λάθη. Ένας μικρός αριθμός περιπτώσεων που έτρεξαν είτε με το κεντροειδές είτε με το μέσο σημείο, αντικαθιστώντας το μηδενικό σημείο, δεν δείχνει ότι κάποιο από τα τρία είναι σημαντικά καλύτερο από τα άλλα. Το μηδενικό σημείο είναι πιο δύσκολο να υπολογιστεί από το κεντροειδές ή το μέσο σημείο και έτσι μια αλλαγή σε κάποιο από αυτά θα αντιπροσώπευε απλοποίηση της μεθόδου.

Υπάρχουν ακόμα δύο δυσκολίες που συνδέονται με τη χρήση του μηδενικού σημείου, οι οποίες ανακαλύφθηκαν αφότου είχε γραφεί ο κώδικας. Δηλαδή υπάρχουν δύο περιπτώσεις όπου η επαναληπτική διαδικασία που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του μηδενικού σημείου δεν συγκλίνει στο σωστό σημείο. Το πρώτο συμβαίνει όταν ένα στοιχείο είναι τριγωνικό ή σχεδόν τριγωνικό, όπως για παράδειγμα μπορεί να συμβεί κοντά σε ένα σημείο συγκέντρωσης. Εάν ένα στοιχείο έχει δύο μακριές πλευρές και δύο κοντές και είναι σχεδόν τριγωνικό στο σχήμα με την έννοια ότι είτε οι δύο μακριές πλευρές είναι γειτονικές ή μία μικρή είναι λιγότερο από το $1/5$ της άλλης μικρής πλευράς, και εάν ο λόγος της βάσης με το ύψος του τριγώνου είναι λιγότερο από το $1/30$, τότε το υπολογισθέν μηδενικό στοιχείο βρίσκεται έξω από το στοιχείο. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται το κεντροειδές αντί του μηδενικού στοιχείου για αυτό το στοιχείο.

Η δεύτερη περίπτωση προκύπτει όταν ένα στοιχείο έχει μια διαγώνιο πολύ κοντύτερη από την άλλη και πολύ κοντύτερη από όλες τις τέσσερις πλευρές, για παράδειγμα ένα μακρύ, λεπτό παραλληλόγραμμο. Εάν ο λόγος των διαγωνίων είναι μικρότερος από το $1/30$, η επαναληπτική διαδικασία δε συγκλίνει, επειδή η επαγόμενη ταχύτητα είναι πολύ ευαίσθητη στη θέση στη γειτονιά του μηδενικού σημείου. Σε αυτή την περίπτωση το προσεγγιστικό μηδενικό σημείο (null point), που βρίσκουμε στην τριακοστή επανάληψη, χρησιμοποιείται και η πληροφορία παρατηρείται στο πρώτο output.

Καμία από αυτές τις περιπτώσεις δεν έχει πρακτική σημασία. Μία κατανομή σημείων που οδηγεί σε στοιχεία με τόσο ακραίο σχήμα πιθανώς να μην είναι πολύ καλή και η εμφάνιση τέτοιων καταστάσεων συνήθως υποδηλώνει ότι τα σημεία εισόδου πρέπει να ανακαταταξινομηθούν. Σε κάθε περίπτωση τα λάθη που προκύπτουν από τη χρήση εναλλακτικών στη θέση του μηδενικού σημείου είναι πιθανώς λιγότερα από αυτά της βασικής κατανομής των στοιχείων.

Σε πολλές περιπτώσεις το πιο πολύχρονο κομμάτι του υπολογισμού είναι ο υπολογισμός των ταχυτήτων που επάγονται από τα τετράπλευρα στοιχεία του ενός στου άλλου το μηδενικό σημείο – ο «πίνακας των συντελεστών επιρροής». Έτσι, η κυρίαρχη σκέψη κατά τη διαδικασία οργάνωσης του υπολογισμού αυτού του πίνακα ήταν η ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου. Ως αποτέλεσμα, το μέγιστο επιτρεπόμενο νούμερο στοιχείων που θα χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση της επιφάνειας του σώματος είναι κατά κάποιο τρόπο χαμηλότερο από αυτό που θα ήταν διαφορετικά. Η πιο σημαντική μείωση του χρόνου προήλθε από την αντικατάσταση των ακριβών εξισώσεων επαγόμενων ταχυτήτων από εξισώσεις που προκύπτουν από πολυπολική επέκταση σε αποστάσεις όπου οι τελευταίες είναι αρκετά ακριβείς. Υποθέτοντας το κριτήριο ακρίβειας, η χρήση πολυπολικής επέκτασης (multipole expansion) μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο του «πίνακα των συντελεστών επίδρασης» με ένα συντελεστή περίπου 5. Το κριτήριο ακρίβειας είναι τυχαίο και μπορεί να προσαρμοστεί έτσι ώστε οι ακριβείς εξισώσεις να χρησιμοποιούνται αποκλειστικά όπως επιθυμείται με μία αντίστοιχη μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Μία ακόμη μείωση στον υπολογιστικό χρόνο επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τις επαγόμενες ταχύτητες, εκτός από αυτές που προέρχονται/είναι εξαιτίας μιας απλής πηγής, στο στοιχειώδες σύστημα συντεταγμένων (element coordinate system), με το αποτέλεσμα ο πίνακας μετασχηματισμού/μετατροπής (transformation matrix) για τα στοιχεία πρέπει να χρησιμοποιείται για να μετασχηματίσει ταχύτητες και σημεία μεταξύ του στοιχείου και του συστήματος συντεταγμένων αναφοράς.

Από τη στιγμή που οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για να λύσουν τις γραμμικές εξισώσεις για την κατανομή πηγών χρησιμοποιούν τον πίνακα συντελεστών σειρά – σειρά, αυτή η διαδικασία απαιτεί αντιμετάθεση του πίνακα. Ένας μεγάλος πίνακας συντελεστών υπερβαίνει την υψηλής ταχύτητας αποθηκευτική χωρητικότητα της μηχανής με ένα συντελεστή περίπου εικοσιπέντε και έτσι η αντιμετάθεση του πίνακα είναι μάλλον χρονοβόρα. Επομένως, ο «πίνακας των συντελεστών επίδρασης» υπολογίζεται σειρά – σειρά και έτσι οι εικοσιοκτώ ποσότητες για όλα τα στοιχεία πρέπει να είναι ταυτοχρόνως διαθέσιμα στην υψηλής ταχύτητας μνήμη (μνήμη RAM). Η αποθηκευτική ικανότητα της μνήμης RAM της μηχανής μπορεί έτσι να περιορίσει το μέγιστο αριθμό στοιχείων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει την επιφάνεια του σώματος. Το αποτέλεσμα είναι ότι η χωρητικότητα της μνήμης RAM είναι ο περιοριστικός παράγοντας της μηχανής για συμμετρικά και μη-

συμμετρικά σώματα και ότι οι περιορισμοί που επιβάλλονται από την χαμηλής ταχύτητας αποθηκευτική χωρητικότητα θα επέτρεπαν μία σημαντική αύξηση στον μέγιστο αριθμό στοιχείων.

Λαμβάνοντας υπόψιν οποιαδήποτε επίπεδα συμμετρίας που μπορεί να κατέχει ένα σώμα, υποτίθεται ότι τα στοιχεία που γειτνιάζουν στα επίπεδα συμμετρίας έχουν άκρες που βρίσκονται σε αυτά τα επίπεδα. Έτσι, οι ταχύτητες ροής, που υπολογίζονται στα μηδενικά σημεία, δεν υπολογίζονται σε σημεία της επιφάνειας συμμετρίας που βρίσκονται σε επίπεδα συμμετρίας. Αυτό το φαινομενικά ασήμαντο σημείο είναι ενοχλητικό, επειδή οι ταχύτητες στα σημεία ενός επιπέδου συμμετρίας είναι συχνά επιθυμητά, και πρέπει να αποκτηθούν με εξαγωγή συμπερασματική (extrapolation).

Οι ταυτόχρονες (simultaneous) γραμμικές εξισώσεις για τις τιμές των επιφανειακών πηγών της κατανομής πυκνότητας στα διάφορα σημεία επιλύονται με μία από τις δύο εναλλακτικές μορφές μίας επαναληπτικής διαδικασίας Seidel. Η πρώτη από αυτές αποκτά σε κάθε επανάληψη ένα ολοκληρωμένο σύνολο τιμών της κατανομής πηγών από τις τιμές στην προηγούμενη επανάληψη, ενώ η δεύτερη πάντα χρησιμοποιεί τις πιο πρόσφατες υπολογισμένες τιμές της κατανομής πηγών για να αποκτήσει βελτιωμένες τιμές. Η δεύτερη έχει αποδειχθεί τουλάχιστον τόσο γρήγορη όσο η πρώτη σε όλες τις περιπτώσεις και πολύ συχνά και πιο γρήγορη. Έτσι, χρησιμοποιείται αυτή, εκτός εάν καλείται ειδικά η άλλη. Ο πίνακας συντελεστών των κανονικών επαγόμενων ταχυτήτων είναι καλώς ορισμένος για αυτό το σχετικά απλό επαναληπτικό σχέδιο, επειδή τα διαγώνια στοιχεία είναι πολύ μεγαλύτερα από τα υπόλοιπα στοιχεία.

Εάν ένα πιο εξελιγμένο σχέδιο επαναλήψεων ήταν υπό μελέτη, θα απαιτούσε μία πολύ προσεκτική αρχική έρευνα για να σιγουρευτεί ότι ο χρόνος για τη λύση δεν θα αυξανόταν. Σε πολλές περιπτώσεις ο απαιτούμενος χρόνος για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων είναι μικρότερος από τον απαιτούμενο για τον υπολογισμό του σκετ των επαγόμενων ταχυτήτων και μία μείωση του πρώτου δεν θα μείωνε σημαντικά τον συνολικό υπολογιστικό χρόνο. Υπάρχουν ορισμένα σχήματα σωμάτων για τα οποία ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης των γραμμικών εξισώσεων είναι ένα μεγάλο κλάσμα του συνολικού υπολογιστικού χρόνου και μία μείωση θα ήταν αρκετά ευεργετική. Αυτό το θέμα έχει διερευνηθεί και ένας πολλά υποσχόμενος τρόπος

επιτάχυνσης της σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας έχει ευρεθεί. Παρ' όλα αυτά έχει αποφασισθεί να μην συμπεριληφθεί στη μέθοδο η τεχνική αυτή τη φορά.

Η μέθοδος έχει κατασκευασθεί κατά τρόπο τέτοιο ώστε να υπολογίζει τις ταχύτητες ροής για τρεις διακριτές ροές κίνησης (onset flows). Κανονικά, είναι επιθυμητό να χρησιμοποιήσουμε αυτό το χαρακτηριστικό από τη στιγμή που η εξάλειψη ενός ή δύο αρχικών ροών (onset flows) επηρεάζει μόνο το χρόνο που απαιτείται για την επίλυση των γραμμικών εξισώσεων και έτσι συχνά δε μειώνει σημαντικά τον συνολικό υπολογιστικό χρόνο. Οποιαδήποτε αρχική ροή μπορεί να εξαλειφθεί αποτελεσματικά με τον καθορισμό ενός μηδενικού διανύσματος για την ροή αυτή. Στην περίπτωση αυτή οι πραγματικές μηδενικές τιμές της κατανομής πυκνότητας για αυτή τη ροή αποκτώνται απλά στην πρώτη επανάληψη. Αυτό πρέπει να γίνεται με επιφυλακτικότητα, όμως, καθώς εάν χρειάζονται αργότερα πρόσθετες αρχικές ροές, ολόκληρος ο υπολογισμός πρέπει να επαναληφθεί.

5.ΟΙ ΕΠΑΓΟΜΕΝΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΠΗΓΗΣ

5.1 Ακριβείς εκφράσεις για τις επαγόμενες ταχύτητες

Σε αυτό το τμήμα εξάγονται οι ακριβείς σχέσεις για τις συνιστώσες των επαγόμενων ταχυτήτων σε σημεία στο χώρο από ένα επίπεδο τετραγωνικό στοιχείο πηγής με μία μοναδιαία τιμή της κατανομής πυκνοτήτων. Αυτές οι σχέσεις είναι η βάση της παρούσας μεθόδου υπολογισμού της ροής. Η παραγωγή είναι τέτοια που η επέκταση στην περίπτωση οποιουδήποτε επίπεδου πολυγωνικού στοιχείου πηγής είναι εμφανής.

5.2 Σχηματισμός του προβλήματος και κατασκευή της ουσιώδους δυναμικής συνάρτησης για μία πλευρά του τετραπλεύρου

Είναι επιθυμητό οι συνιστώσες των επαγόμενων ταχυτήτων από το στοιχείο πηγής να ορισθούν σε ένα γενικό σημείο P στο χώρο με συντεταγμένες x, y, z . Το δυναμικό στο σημείο P είναι

$$\varphi = \oint_A \frac{1}{r} dA = \oint_A \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας στο P είναι

$$V_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \oint_A \frac{(x-\xi) \cdot d\xi \cdot d\eta}{r^3}$$

$$V_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \oint_A \frac{(y-\eta) \cdot d\xi \cdot d\eta}{r^3}$$

$$V_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \oint_A \frac{z \cdot d\xi \cdot d\eta}{r^3}$$

Είναι βολικό να χωρίσουμε την επίδραση ολόκληρου του τετραπλεύρου σε ένα σύνολο συναρτήσεων, καθεμία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από μία πλευρά του τετραπλεύρου. Αυτός ο διαχωρισμός επιτρέπει επίσης τα αποτελέσματα να μπορούν να γενικευθούν και στην περίπτωση οποιονδήποτε πολυγωνικού στοιχείου πηγής. Για να το πετύχουμε αυτό ένα από τα γωνιακά σημεία λαμβάνεται ως το αρχικό γωνιακό σημείο και τα άλλα απαριθμούνται με τη σειρά με την οποία διασχίζουμε την περίμετρο του στοιχείου με το εξωτερικό της περιοχής στα αριστερά. Για κάθε πλευρά του στοιχείου μία δεξιά και μία αριστερή πλευρά μπορεί να οριστεί τότε σύμφωνα με την κατεύθυνση της εγκάρσιας διάβασης (traversal) της άκρης από ένα χαμηλό αριθμημένο σημείο σε ένα υψηλότερο. Η περιοχή του στοιχείου είναι στα δεξιά. Τώρα μια ουσιώδης δυναμική συνάρτηση για κάθε πλευρά κατασκευάζεται ως το άθροισμα των δυναμικών δύο ημι-άπειρων λωρίδων πηγής των οποίων τα όρια αποτελούνται από την πλευρά του τετραπλεύρου και ημι-άπειρες γραμμές παράλληλες σε έναν από τους άξονες συντεταγμένων. Η λωρίδα στα δεξιά της πλευράς έχει μία τιμή της κατανομής πυκνότητας της πηγής $\sigma = +1/2$, ενώ η λωρίδα στα αριστερά έχει $\sigma = -1/2$. Τα ημι-άπειρα όρια των λωρίδων μπορεί να είναι παράλληλα σε οποιονδήποτε/στον έναν ή στον άλλο άξονα συντεταγμένων, αλλά πρέπει όλα να είναι παράλληλα στον ίδιο άξονα.

Εάν οι λωρίδες τοποθετηθούν κοντά ώστε να σχηματίσουν το τετράπλευρο, οι πυκνότητες των πηγών στις λωρίδες ακυρώνουν εξωτερικά το τετράπλευρο και προσθέτουν μέσα για να δώσουν μία μοναδιαία τιμή. Έτσι, το δυναμικό και η ταχύτητα από το τετράπλευρο είναι αθροίσματα των δυναμικών και των ταχυτήτων από τα τέσσερα ζευγάρια των ημι-άπειρων λωρίδων πηγών. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αυτή η πρόταση είναι αληθινή ανεξάρτητα από τις σχετικές θέσεις των γωνιακών σημείων και ακόμα περισσότερο είναι αληθινή για πολύγωνα οποιουδήποτε αριθμού πλευρών.

Το πρόβλημα εύρεσης των ταχυτήτων που επάγονται από το τετράπλευρο μειώνεται κατ' αυτό τον τρόπο στο πρόβλημα εύρεσης των επαγόμενων ταχυτήτων από το ζευγάρι των ημιάπειρων λωρίδων που σχετίζονται με τη μία πλευρά.

5.3 Παραγωγή των επαγόμενων συνιστωσών ταχύτητας παράλληλα στο επίπεδο του τετραπλεύρου

$$V_{y_{12}} = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \left\{ \int_{-\infty}^{\eta_2} - \int_{\eta_2}^{\infty} \right\} \frac{(y-\eta)d\eta}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

όπου το η_{12} χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη συντεταγμένη ενός σημείου πάνω στη γραμμή μεταξύ (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) . Αυτή είναι η σωστή μορφή εάν $\xi_2 > \xi_1$. Εάν $\xi_1 > \xi_2$, τα πρόσημα των ολοκληρωμάτων σε σχέση με το η είναι αντεστραμμένα και το πρόσημο του ολοκληρώματος όταν αφορά το ξ είναι επίσης αποτελεσματικά αντεστραμμένο. Το τελικό αποτέλεσμα είναι έγκυρο για οποιοδήποτε από τα δύο πρόσημα του $\xi_2 - \xi_1$, όπως μπορεί να αποδειχθεί. Μετά την ολοκλήρωση, οι συνεισφορές των άπειρων ορίων σβήνουν, ενώ των πεπερασμένων προσθέτονται. Το αποτέλεσμα είναι

$$V_{y_{12}} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{r}$$

όπου r είναι η απόσταση από το σημείο P σε ένα σημείο στην γραμμή μεταξύ (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) . Αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης στο μήκος τόξου s στην γραμμή μεταξύ (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) με αντικατάσταση

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}}$$

όπου d_{12} είναι το μήκος της πλευράς.

$$V_{y_{12}} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}} \int_0^{d_{12}} \frac{ds}{r}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι το δυναμικό στο σημείο P από μία πεπερασμένη γραμμή πηγής μίας συμπίπτουσας μοναδιαίας γραμμικής κατανομής πηγής με την άκρη του τετραπλεύρου.

$$\begin{aligned} V_{y_{12}} &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}} \int_0^{d_{12}} \frac{ds}{\sqrt{a^2 - 2s_1 s + s_1^2 + f^2}} = \\ &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}} \log \frac{r_2 + d_{12} - s_1}{r_1 - s_1} = \\ &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}} \log \frac{r_2 - s_2}{r_1 - s_1} = \\ &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}} \log \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{1 - \cos \beta_2}{1 - \cos \beta_1} \right) \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι απροσδιόριστο όταν $\beta_1 = \beta_2 = 0$, δηλαδή στην επέκταση της πλευράς του τετραπλεύρου. Η δυσκολία μπορεί να απομακρυνθεί με τον ακόλουθο τρόπο. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε,

$$\cos \beta_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d_{12}^2}{2r_1 d_{12}}, \cos \beta_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2 - d_{12}^2}{2r_2 d_{12}}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{1 - \cos \beta_2}{1 - \cos \beta_1} \right) &= \frac{2r_2 d_{12} - r_1^2 + r_2^2 + d_{12}^2}{2r_1 d_{12} - r_1^2 + r_2^2 - d_{12}^2} = \\ &= \frac{(r_2 + d_{12})^2 - r_1^2}{(r_2 + d_{12} - r_1)(r_2 + r_1 - d_{12})} = \frac{r_2 + r_1 + d_{12}}{r_2 + r_1 - d_{12}} \end{aligned}$$

Έτσι, τελικά η y-συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο P με συντεταγμένες x,y,z λόγω της θεμελιώδους συνάρτησης δυναμικού στην πλευρά μεταξύ των (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) μπορεί να γραφεί:

$$V_{y_{12}} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{d_{12}} \log \left(\frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right)$$

$$\text{όπου } r_1 = \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2 + z^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}$$

Για την x-συνιστώσα της ταχύτητας, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, έχουμε:

$$V_{x_{12}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{d_{12}} \log \left(\frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right)$$

5.4 Παραγωγή των επαγόμενων συνιστωσών ταχύτητας κανονικά στο επίπεδο του τετραπλεύρου

Για τη συνιστώσα της ταχύτητας V_2 στο σημείο P, η θεμελιώδης συνάρτηση δυναμικού για την πλευρά του τετραπλεύρου μεταξύ (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) κατασκευάζεται με τη χρήση ημι-άπειρων λωρίδων παράλληλων στον y-άξονα, όπως έγινε μρ το V_y .

$$V_{z_{12}} = \frac{z}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \left\{ \int_{-\infty}^{\eta_2} - \int_{\eta_2}^{\infty} \right\} \frac{d\eta}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

$$V_{z_{12}} = -z \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(y-\eta_{12}) d\xi}{\left[(x-\xi)^2 + z^2 \right] \sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta_{12})^2 + z^2}}$$

Υπενθυμίζεται ότι το η_{12} υποδηλώνει ένα μεταβλητό σημείο στη γραμμή μεταξύ (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) . Έτσι, το η_{12} μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση του ξ στη μορφή

$$\eta_{12} = m_{12}\xi + b_{12}, \text{ όπου}$$

$m_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}$ είναι η κλίση (slope) στην πλευρά του τετραπλεύρου και

$$b_{12} = \frac{\xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2}{\xi_2 - \xi_1}$$

Επίσης ορίζονται οι ποσότητες $q_{12} = y - b_{12} - m_{12}x$, $u = x - \xi$.

Οπότε,

$$V_{z_{12}} = z \int_{x-\xi_1}^{x-\xi_2} \frac{(m_{12}u + q_{12}) du}{\left[u^2 + z^2 \right] \sqrt{u^2 + (m_{12}u + q_{12})^2 + z^2}}$$

Από τις μεθόδους του Hardy, προκύπτει

$$\int \frac{(m_{12}u + q_{12})du}{[u^2 + z^2]\sqrt{u^2 + (m_{12}u + q_{12})^2 + z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{z} \tan^{-1} \left\{ \frac{q_{12}\sqrt{q_{12}^2 + m_{12}^2 z^2} [m_{12}^2 z^2 - m_{12} q_{12} u]}{z\sqrt{q_{12}^2 [m_{12}^2 z^2 - m_{12} q_{12} u]^2 + [q_{12}^2 + m_{12} q_{12} u]^2 \cdot [(1 + m_{12}^2) z^2 + q_{12}^2] m_{12}^2}} \right\}$$

$$\int \frac{(m_{12}u + q_{12})du}{[u^2 + z^2]\sqrt{u^2 + (m_{12}u + q_{12})^2 + z^2}} = -\frac{1}{z} \tan^{-1} \left\{ \frac{m_{12}z^2 - q_{12}u}{z\sqrt{u^2 + z^2 + [q_{12} + m_{12}u]^2}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{z} \tan^{-1} \left\{ \frac{m_{12}(u^2 + z^2) - (y - \eta_{12})u}{z\sqrt{u^2 + (y - \eta_{12})^2 + z^2}} \right\}$$

Οπότε η z-συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο P με συντεταγμένες x,y,z από τη θεμελιώδη δυναμική συνάρτηση της πλευράς μεταξύ (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) , είναι

$$V_{z_{12}} = \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_1 - h_1}{z \cdot r_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_2 - h_2}{z \cdot r_2} \right)$$

όπου $e_1 = z^2 + (x - \xi_1)^2 \quad e_2 = z^2 + (x - \xi_2)^2$

$$h_1 = (y - \eta_1)(x - \xi_1) \quad h_2 = (y - \eta_2)(x - \xi_2)$$

5.5 Σύνοψη της ακριβούς σχέσης της επαγόμενης ταχύτητας για ένα τετράπλευρο στοιχείο πηγής

Οι συνιστώσες της ταχύτητας που εξάγονται από ένα πολυγωνικό στοιχείο πηγής μοναδιαίας κατανομής αποκτώνται προσθέτοντας όρους της μορφής που προέκυψαν στο προηγούμενο εδάφιο. Για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας υπάρχει ένας όρος της παραπάνω μορφής για κάθε πλευρά του πολυγώνου. Οι όροι για τις άλλες πλευρές

αποκτώνται από εκείνους για την πλευρά μεταξύ των (ξ_1, η_1) και (ξ_2, η_2) με κυκλική περιφορά των γωνιακών σημείων. Μιας και τα τετράπλευρα στοιχεία πηγής είναι αυτά που μας ενδιαφέρουν στην παρούσα μέθοδο, οι σχέσεις για τις επαγόμενες ταχύτητες σε αυτή την περίπτωση γράφονται επακριβώς εδώ.

Ένα τετράπλευρο στοιχείο πηγής μοναδιαίας πυκνότητας που βρίσκεται στο επίπεδο xy και με γωνιακά σημεία (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) και (ξ_4, η_4) επάγει τις παρακάτω συνιστώσες ταχύτητας σε ένα σημείο P με συντεταγμένες x, y, z :

$$V_x = \frac{\eta_2 - \eta_1}{d_{12}} \log \left(\frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right) + \frac{\eta_3 - \eta_2}{d_{23}} \log \left(\frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right) +$$

$$+ \frac{\eta_4 - \eta_3}{d_{34}} \log \left(\frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} \right) + \frac{\eta_1 - \eta_4}{d_{41}} \log \left(\frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right)$$

$$V_y = \frac{\xi_1 - \xi_2}{d_{12}} \log \left(\frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} \right) + \frac{\xi_2 - \xi_3}{d_{23}} \log \left(\frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right) +$$

$$+ \frac{\xi_3 - \xi_4}{d_{34}} \log \left(\frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} \right) + \frac{\xi_4 - \xi_1}{d_{41}} \log \left(\frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right)$$

$$V_z = \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_1 - h_1}{z \cdot r_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_2 - h_2}{z \cdot r_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{m_{23}e_2 - h_2}{z \cdot r_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{23}e_3 - h_3}{z \cdot r_3} \right) +$$

$$+ \tan^{-1} \left(\frac{m_{34}e_3 - h_3}{z \cdot r_3} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{34}e_4 - h_4}{z \cdot r_4} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{m_{41}e_4 - h_4}{z \cdot r_4} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{41}e_1 - h_1}{z \cdot r_1} \right)$$

όπου $d_{12} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}$

$$d_{23} = \sqrt{(\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2}$$

$$d_{34} = \sqrt{(\xi_4 - \xi_3)^2 + (\eta_4 - \eta_3)^2}$$

$$d_{41} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_4)^2 + (\eta_1 - \eta_4)^2}$$

$$m_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad m_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\xi_3 - \xi_2}, \quad m_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\xi_4 - \xi_3}, \quad m_{41} = \frac{\eta_1 - \eta_4}{\xi_1 - \xi_4}$$

$$\text{και } r_k = \sqrt{(x - \xi_k)^2 + (y - \eta_k)^2 + z^2}, k = 1, 2, 3, 4$$

$$e_k = z^2 + (x - \xi_k)^2, k = 1, 2, 3, 4$$

$$h_k = (y - \eta_k) \cdot (x - \xi_k), k = 1, 2, 3, 4$$

Αυτές είναι οι βασικές σχέσεις της μεθόδου.

Οι V_x και V_y γίνονται άπειρες στα άκρα/στις πλευρές του τετραπλεύρου, αλλά πρακτικά δεν υπολογίζονται εκεί. Η συνιστώσα V_z απαιτεί συγκεκριμένη «μεταχείριση» σε κάποιες περιπτώσεις. Καθώς το $z \rightarrow 0$, $V_z \rightarrow 0$, εάν το σημείο P πλησιάζει ένα σημείο στο επίπεδο έξω από τα όρια του τετραπλεύρου. Εάν το P προσεγγίζει ένα σημείο εντός του τετραπλεύρου, $V_z \rightarrow 2\pi(\text{sgn}z)$, καθώς $z \rightarrow 0$. Κατά τη διάρκεια της μεθόδου του υπολογισμού της ροής απαιτείται ο υπολογισμός του V_z σε σημεία στο επίπεδο των τετράπλευρων στοιχείων. Συγκεκριμένα, το null point κάθε στοιχείου είναι στο επίπεδο εκείνου του στοιχείου και εντός του τετραπλεύρου. Σε ένα τέτοιο σημείο, το V_z πρέπει να είναι ίσο με $+2\pi$, από τη στιγμή που η περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι όταν $z \rightarrow 0$ για θετικές τιμές, παρά για αρνητικές τιμές, παραδείγματος χάριν το πεδιακό σημείο (field point) προσεγγίζει την επιφάνεια του σώματος από το εξωτερικό πεδίο ροής παρά από το εσωτερικό του σώματος.

Μπορεί επίσης να απαιτηθεί ο υπολογισμός των συνιστωσών των επαγόμενων ταχυτήτων σε σημεία στο επίπεδο του τετραπλεύρου έξω από τα όρια του τετραπλεύρου, για παράδειγμα στα μηδενικά σημεία (null points) άλλων στοιχείων εάν η επιφάνεια του σώματος έχει μια επίπεδη περιοχή. Σημεία στο επίπεδο του

τετραπλεύρου πρέπει να έχουν $z=0$, αλλά λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης, μπορεί να έχουν μικρές τιμές του z με οποιοδήποτε πρόσημο.

Για να αποφευχθεί αυτό το σφάλμα, η απόλυτη τιμή του z ελέγχεται πριν τον υπολογισμό των ταχυτήτων, και εάν είναι μικρότερη από κάποια προκαθορισμένη τιμή, είναι παρόλα αυτά μεγάλη σε σύγκριση με το αναμενόμενο σφάλμα στρογγυλοποίησης, τίθεται ίση με + μηδέν και κάθε $\tan^{-1}$ τίθεται ίσο με $\pi/2$ με το πρόσημο του αριθμητή του κλάσματος του ορίσμάτος του. Αυτό δίνει $V_z=0$ για σημεία έξω από το τετράπλευρο και $V_z=+2\pi$ για σημεία εντός του τετραπλεύρου.

Μια άλλη κατάσταση που μπορεί να δημιουργήσει πρόβλημα στην υπολογιστική μηχανή είναι όταν η κλίση (slope) κάποιας πλευράς του τετραπλεύρου είναι άπειρη, δηλαδή όταν μία πλευρά είναι παράλληλη στον άξονα y .

Για την αποφυγή δυσκολιών κάθε μία από τις ποσότητες $(\xi_2-\xi_1)$, $(\xi_3-\xi_2)$, $(\xi_4-\xi_3)$, και $(\xi_1-\xi_4)$ εξετάζονται ώστε να ελεγχθεί εάν είναι μηδενικές και αν κάποια από αυτές είναι μηδενική, οι δύο αντίστροφες εφαπτομένες ($\tan^{-1}$) που αντιστοιχούν σε αυτή την πλευρά τίθενται ίσες με το μηδέν.

5.6 Παράδειγμα επαγόμενης ταχύτητας από τετράπλευρο στοιχείο

Οι εξισώσεις που δίνουν τις V_x , V_y , και V_z χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συνιστωσών των επαγόμενων ταχυτήτων για μία ποικιλία τετράπλευρων σχημάτων. Τα αποτελέσματα για δύο από τα σχήματα, το τετράγωνο και το ισοσκελές τρίγωνο, χρησιμοποιούνται σε ένα μετέπειτα εδάφιο για την αξιολόγηση της ακρίβειας της πολυπολικής επέκτασης.

6.ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΕΠΑΓΟΜΕΝΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΜΙΑΣ ΠΟΛΥΠΟΛΙΚΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ

Η εύρεση των τιμών των επαγόμενων ταχυτήτων με τις παραπάνω σχέσεις είναι χρονοβόρα. Για τη μείωση του υπολογιστικού χρόνου χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές εκφράσεις αντί αυτών των εξισώσεων όπου είναι εφικτό. Σε αυτό το εδάφιο προσεγγιστικές εκφράσεις εξάγονται από την πολυπολική επέκταση.

6.1 Εξαγωγή προσεγγιστικών σχέσεων για τις συνιστώσες των επαγόμενων ταχυτήτων

Το δυναμικό στο σημείο P είναι

$$\varphi = \oint\oint_A \frac{1}{r} dA = \oint\oint_A \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \quad (a)$$

Τώρα στην πολυπολική επέκταση η ποσότητα που ολοκληρώνεται, δηλαδή στην παραπάνω σχέση το $1/r$, επεκτείνεται σε μία σειρά δυνάμεων ξ και η .

Ως αποτέλεσμα το δυναμικό μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία σειρά όρων καθένας από τους οποίους είναι παράγωγος μίας συνάρτησης του x, y, z , που είναι ανεξάρτητη του σχήματος του τετραπλεύρου, και ένα ολοκλήρωμα συγκεκριμένων δυνάμεων του ξ και του η , που εξαρτάται μόνο από το σχήμα του τετραπλεύρου και είναι ανεξάρτητο από το σημείο στο οποίο υπολογίζεται το δυναμικό. Πρώτα ορίζονται

$$r_o = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \omega = \frac{1}{r_o}$$

και έπειτα λόγω όρων δεύτερης τάξης η επέκταση της σχέσης (α) είναι

$$\varphi = A\omega - (M_x\omega_x + M_y\omega_y) + \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_{xx} + 2I_{xy}\omega_{xy} + I_{yy}\omega_{yy}) + \dots (\beta)$$

$$\text{όπου } A = \oint\oint_A d\xi d\eta$$

$$M_x = \oint\oint_A \xi d\xi d\eta, \quad M_y = \oint\oint_A \eta d\xi d\eta$$

$$I_{xx} = \oint\oint_A \xi^2 d\xi d\eta, \quad I_{xy} = \oint\oint_A \xi\eta d\xi d\eta, \quad I_{yy} = \oint\oint_A \eta^2 d\xi d\eta$$

Ο προσδιορισμός της πολυπολικής επέκτασης εγείρεται από το γεγονός ότι διάφοροι τύποι στην επέκταση (β) μπορούν να μεταφραστούν ως τα δυναμικά σημειακών ιδιομορφιών διαφόρων τάξεων, καθένα από τα οποία κατασκευάζεται από τη συμβολή δύο ιδιομορφιών της επόμενης χαμηλότερης τάξης.

Μία τέτοια πολυπολική επέκταση φαίνεται να συγκλίνει για όλα τα σημεία αρκετά μακριά από την πηγή. Στην παρούσα εφαρμογή η σύγκλιση δεν είναι πρόβλημα. Η πολυπολική επέκταση χρησιμοποιείται εδώ μόνο σε σημεία αρκετά μακριά από το στοιχείο, έτσι ώστε η επέκταση όχι μόνο συγκλίνει, αλλά συγκλίνει ταχύτατα, τόσο ώστε όροι μεγαλύτερης τάξης από τη δεύτερη να μπορούν να αμεληθούν.

Οι προσεγγιστικοί τύποι για τις συνιστώσες των επαγόμενων ταχυτήτων προκύπτουν από τη σχέση (β), αφού περικόψουμε τους όρους δεύτερης τάξης και διαφορίσουμε με $M_x=M_y=0$. Τα αποτελέσματα είναι:

$$V_x = \frac{-\partial\varphi}{\partial x} = - \left[A\omega_x + \frac{1}{2}I_{xx}\omega_{xxx} + I_{xy}\omega_{xxy} + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_{xyy} \right]$$

$$V_y = \frac{-\partial\varphi}{\partial y} = - \left[A\omega_y + \frac{1}{2}I_{xx}\omega_{xyy} + I_{xy}\omega_{xyx} + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_{yyy} \right]$$

$$V_z = \frac{-\partial\varphi}{\partial z} = - \left[A\omega_z + \frac{1}{2}I_{xx}\omega_{xxz} + I_{xy}\omega_{xyz} + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_{yyz} \right]$$

Οι παράγωγοι του ω είναι

$$\omega_x = -x \cdot r_o^{-3}$$

$$\omega_y = -y \cdot r_o^{-3}$$

$$\omega_z = -z \cdot r_o^{-3}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xxx} &= 3x(3p+10x^2) \cdot r_o^{-7} \\ \omega_{xy} &= 3yp \cdot r_o^{-7} \\ \omega_{xyy} &= 3xq \cdot r_o^{-7} \\ \omega_{yyy} &= 3y(3q+10y^2) \cdot r_o^{-7} \\ \omega_{xxz} &= 3zp \cdot r_o^{-7} \\ \omega_{xyz} &= -15xyz \cdot r_o^{-7} \\ \omega_{yyz} &= 3zq \cdot r_o^{-7} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{όπου } r_o = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad p = y^2 + z^2 - 4x^2, \quad q = x^2 + z^2 - 4y^2$$

6.2 Σύγκριση των ακριβών και των προσεγγιστικών σχέσεων για τις επαγόμενες ταχύτητες

Οι προσεγγιστικοί τύποι για τις επαγόμενες ταχύτητες χρησιμοποιούνται σε δύο μορφές. Στη μία χρησιμοποιούνται ακριβώς όπως είναι, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να αντικατασταθεί το τετράπλευρο στοιχείο με ένα σημείο πηγής και ένα σύστημα δύο διπόλων. Στη δεύτερη, μόνο ο πρώτος όρος σε κάθε εξίσωση διατηρείται, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να αντικατασταθεί το τετράπλευρο με ένα σημείο πηγής μόνο. Οι συνιστώσες της ταχύτητας που υπολογίζονται από αυτές τις σχέσεις έχουν σοβαρό σφάλμα εάν χρησιμοποιούνται σε σημεία κοντά στο τετράπλευρο στοιχείο, αλλά είναι αρκετά ακριβείς εάν το σημείο όπου υπολογίζονται οι ταχύτητες είναι αρκετά μακριά από το τετράπλευρο. Το κριτήριο που χρησιμοποιείται για να αποφανθεί εάν η χρήση των προσεγγιστικών εξισώσεων είναι έγκυρη για ένα συγκεκριμένο σημείο είναι ο λόγος της απόστασης μεταξύ εκείνου του σημείου και του κεντροειδούς του τετραπλεύρου προς μία χαρακτηριστική διάσταση του τετραπλεύρου.

Η χαρακτηριστική διάσταση του τετραπλεύρου που χρησιμοποιείται για να σχηματιστεί ο λόγος είναι μία ποσότητα που ονομάζεται μέγιστη διαγώνιος του τετραπλεύρου. Για τα περισσότερα τετράπλευρα η ποσότητα αυτή, t , είναι η μέγιστη διάσταση του τετραπλεύρου. Για συγκεκριμένα είδη στοιχείων αυτό δεν είναι αληθές. Συγκεκριμένα, για τριγωνικά στοιχεία η μέγιστη διαγώνιος μπορεί να προκύψει το

μήκος της δεύτερης μακρύτερης πλευράς. Σε κάθε περίπτωση που μας ενδιαφέρει, όμως, είναι μεταξύ ενός παράγοντα των δύο μεγαλύτερων πλευρών.

Από συγκρίσεις των ταχυτήτων που προέκυψαν από τις ακριβείς και τις προσεγγιστικές εξισώσεις για μια ποικιλία τετράπλευρων σχημάτων και για το μέγεθος της ταχύτητας και για τις συνιστώσες της, προέκυψε ότι οι απλές εξισώσεις πηγής είναι αρκετά ακριβείς, εάν το σημείο όπου υπολογίζεται η ταχύτητα έχει μία απόσταση από το κεντροειδές του τετράπλευρου στοιχείου το λιγότερο τέσσερις φορές το μήκος της μέγιστης διαγωνίου του στοιχείου. Οι εξισώσεις πηγής – διπόλου είναι ικανοποιητικά ακριβείς εάν η απόσταση είναι το λιγότερο $\sqrt{6} = 2,45$ φορές το μήκος της μέγιστης διαγωνίου. Εάν αυτές οι τιμές χρησιμοποιηθούν, το μέγιστο σφάλμα σε οποιαδήποτε συνιστώσα της ταχύτητας εξαιτίας της χρήσης των προσεγγιστικών τύπων είναι μικρότερο του 0,001 στη χειρότερη περίπτωση.

7.Η ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

7.1 Σχέδιο εισαγωγής πληροφοριών

7.1.1 Γενική διαδικασία εισαγωγής πληροφοριών

Τα στοιχεία εισόδου (input) του προγράμματος αποτελούνται από τις συντεταγμένες ενός αριθμού σημείων. Αυτά τα σημεία ορίζουν την επιφάνεια του τρισδιάστατου σώματος γύρω από το οποίο υπολογίζεται η ροή. Οι συντεταγμένες του δίνονται σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς. Με σκοπό την οργάνωση αυτών των σημείων για υπολογισμό, κάθε σημείο προσδιορίζεται με ένα ζεύγος ακεραίων, m και n . Αυτοί οι ακεραίοι δε χρειάζεται να εισαχθούν στο σύστημα, αλλά η χρήση τους πρέπει να γίνει κατανοητή, ώστε να επιβεβαιωθεί η ορθότητα των στοιχείων εισόδου (input) και να διευκολυνθεί η ερμηνεία των στοιχείων εξόδου/αποτελεσμάτων (output).

Εάν ένας παρατηρητής βρίσκεται στη ροή και είναι προσανατολισμένος έτσι ώστε να βλέπει τα σημεία στην επιφάνεια με m τιμές να αυξάνουν προς τα πάνω, πρέπει τότε να βλέπει αυτά με τιμές n να αυξάνουν προς τα δεξιά.

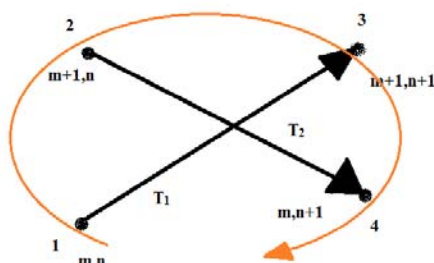
Ένα στοιχείο αναγνωρίζεται από ένα ζεύγος ακεραίων που είναι οι ίδιοι όπως αυτοί που χρησιμοποιούνται για να αναγνωριστεί το σημείο με τις χαμηλότερες τιμές των m και n από τα τέσσερα που χρησιμοποιούνται για να σχηματιστεί το στοιχείο. Το στοιχείο που προσδιορίζεται από τους ακεραίους m και n σχηματίζεται από τα σημεία που έχουν: m,n ; $m+1,n$; $m,n+1$ και $m+1,n+1$.

Η επιφάνεια του σώματος υποτίθεται ότι είναι χωρισμένη σε περιοχές, που μπορεί να είναι φυσικός ο διαχωρισμός ή να έχει επιλεγεί για διευκόλυνση.

Εάν είναι επιθυμητός ο υπολογισμός των ταχυτήτων ροής σε σημεία έξω από την επιφάνεια του σώματος, πρέπει και αυτά να εισαχθούν στο σύστημα. Η σειρά με την οποία εισάγονται τα εξωτερικά σημεία είναι άνευ σημασίας. Για καλή ακρίβεια, η απόσταση από ένα εξωτερικό σημείο στην επιφάνεια του σώματος πρέπει να είναι τουλάχιστον δύο φορές η χαρακτηριστική διάσταση σε αυτό το τμήμα της επιφάνειας. Οι ιδιότητες της ροής σε σημεία κοντά στην επιφάνεια πρέπει να λαμβάνονται με παρεμβολή μεταξύ των εξωτερικών σημείων (off-body points) και των μηδενικών σημείων (null points). Η παρεμβολή είναι απλούστερη και η βασική υπολογιστική ακρίβεια είναι υψηλότερη, εάν τα εξωτερικά σημεία που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια είναι κατά μήκος καθέτων στην επιφάνεια που την τέμνουν στα null points. Εξωτερικά σημεία που βρίσκονται κοντά στις άκρες των στοιχείων είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στο σφάλμα εξαιτίας των άπειρων ταχυτήτων που προκύπτουν σε αυτές τις άκρες.

8.ΣΩΜΑΤΑ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

8.1 Σχηματισμός του επίπεδου τετραγωνικού στοιχείου πηγής



$$1: x_1^i \quad y_1^i \quad z_1^i$$

$$2: x_2^i \quad y_2^i \quad z_2^i$$

$$3: x_3^i \quad y_3^i \quad z_3^i$$

$$4: x_4^i \quad y_4^i \quad z_4^i$$

i: input coordinates

$$\vec{N} = \vec{T}_2 \times \vec{T}_1 \rightarrow \begin{cases} N_x = T_{2y}T_{1z} - T_{1y}T_{2z} \\ N_y = T_{1x}T_{2z} - T_{2x}T_{1z} \\ N_z = T_{2x}T_{1y} - T_{1x}T_{2y} \end{cases}$$

$$\vec{n} \quad n_x = \frac{N_x}{N}, n_y = \frac{N_y}{N}, n_z = \frac{N_z}{N}$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{4} [x_1^i + x_2^i + x_3^i + x_4^i]$$

$$\vec{y} = \frac{1}{4} [y_1^i + y_2^i + y_3^i + y_4^i]$$

$$\vec{z} = \frac{1}{4} [z_1^i + z_2^i + z_3^i + z_4^i]$$

Η προκαθορισμένη απόσταση από το κ-ιστό σημείο εισόδου ($\kappa=1,2,3,4$) από το επίπεδο είναι $d_k = n_x (\vec{x} - x_k^i) + n_y (\vec{y} - y_k^i) + n_z (\vec{z} - z_k^i), k=1,2,3,4$.

$$d_k = (-1)^{k-1} d_1, k=1,2,3,4.$$

$$t_{1x} = \frac{T_{1x}}{T_1}, t_{1y} = \frac{T_{1y}}{T_1}, t_{1z} = \frac{T_{1z}}{T_1} \quad d = |d_1|$$

Οι συντεταγμένες των γωνιακών σημείων στο σύστημα αναφοράς είναι

$$\begin{aligned}x'_k &= x_k^i + n_x d_k \\y'_k &= y_k^i + n_y d_k \quad k = 1, 2, 3, 4 \\z'_k &= z_k^i + n_z d_k\end{aligned}$$

$$t_{1x} = \frac{T_{1x}}{T_1}, t_{1y} = \frac{T_{1y}}{T_1}, t_{1z} = \frac{T_{1z}}{T_1}$$

$$T_1 = \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2 + T_{1z}^2}$$

$$\vec{t}_2 = \vec{n} \times \vec{t}_1$$

$$t_{2x} = n_y t_{1z} - n_z t_{1y}, t_{2y} = n_z t_{1x} - n_x t_{1z}, t_{2z} = n_x t_{1y} - n_y t_{1x}$$

Το διάνυσμα $\vec{t}_1$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλα στον x ή ξ άξονα του στοιχειώδους συστήματος συντεταγμένων (element coordinate system), ενώ το $\vec{t}_2$ είναι παράλληλο στον y ή η άξονα και το $\vec{n}$ στον z ή ζ άξονα αυτού του συστήματος συντεταγμένων.

Έστω ότι ο πίνακας μετατροπής είναι (transformation matrix):

$$\begin{aligned}a_{11} &= t_{1x} & a_{12} &= t_{1y} & a_{13} &= t_{1z} \\a_{21} &= t_{2x} & a_{22} &= t_{2y} & a_{23} &= t_{2z} \\a_{31} &= t_{3x} & a_{32} &= t_{3y} & a_{33} &= t_{3z}\end{aligned}$$

Για να μετατρέψουμε τις συντεταγμένες σημείων από το ένα σύστημα στο άλλο, οι συντεταγμένες της πηγής (origin) του στοιχειώδους συστήματος συντεταγμένων στο σύστημα αναφοράς απαιτούνται. Ας τις ορίσουμε x_o, y_o, z_o . Τότε εάν ένα σημείο έχει συντεταγμένες x', y', z' στο σύστημα αναφοράς και x, y, z στο στοιχειώδες σύστημα, η μετατροπή από το αναφοράς στο στοιχειώδες σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$x = a_{11}(x' - x_o) + a_{12}(y' - y_o) + a_{13}(z' - z_o)$$

$$y = a_{21}(x' - x_o) + a_{22}(y' - y_o) + a_{23}(z' - z_o)$$

$$z = a_{31}(x' - x_o) + a_{32}(y' - y_o) + a_{33}(z' - z_o)$$

και η μετατροπή από το στοιχειώδες στο σύστημα αναφοράς

$$x' = x_o + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z$$

$$y' = y_o + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z$$

$$z' = z_o + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z$$

Αντίστοιχα, έχουμε για τα διανύσματα.

Οι συντεταγμένες των γωνιακών σημείων στο στοιχειώδες σύστημα αναφοράς με πηγή το average point ορίζονται ως $\xi_k^*, \eta_k^*, 0$, όπου

$$\xi_k^* = a_{11}(x'_k - \bar{x}) + a_{12}(y'_k - \bar{y}) + a_{13}(z'_k - \bar{z})$$

$$\eta_k^* = a_{21}(x'_k - \bar{x}) + a_{22}(y'_k - \bar{y}) + a_{23}(z'_k - \bar{z})$$

$$k = 1, 2, 3, 4$$

Αυτά τα γωνιακά σημεία λαμβάνονται ως οι γωνίες ενός τετραπλεύρου στοιχείου που είναι το θεμελιώδες στοιχείο που χρησιμοποιείται σε αυτή τη μέθοδο.

Με το μέσο σημείο (average point) ως αρχή (origin) οι συντεταγμένες του κεντροειδούς στο στοιχειώδες σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\xi_o = \frac{1}{3} \frac{1}{\eta_2^* - \eta_4^*} \left[\xi_4^* (\eta_1^* - \eta_2^*) + \xi_2^* (\eta_4^* - \eta_1^*) \right]$$

$$\eta_o = -\frac{1}{3} \eta_1^*$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \xi_k^* - \xi_o \\ \eta_k &= \eta_k^* - \eta_o \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned}x_o &= \bar{x} + a_{11}\xi_o + a_{21}\eta_o \\y_o &= \bar{y} + a_{12}\xi_o + a_{22}\eta_o \\z_o &= \bar{z} + a_{13}\xi_o + a_{23}\eta_o\end{aligned}$$

Το μήκος των δύο διαγωνίων του τετραπλεύρου, t_1 και t_2 , υπολογίζεται ως εξής:
 $t_1^2 = (\xi_3 - \xi_1)^2, t_2^2 = (\xi_4 - \xi_2)^2 + (\eta_4 - \eta_2)^2$. Το μεγαλύτερο από αυτά επιλέγεται και ορίζεται η μέγιστη διαγώνιος t .

Η περιοχή του τετραπλεύρου όσον αφορά τις συντεταγμένες των γωνιακών σημείων είναι $A = \frac{1}{2}(\xi_3 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_4)$.

8.2 Καθορισμός του μηδενικού σημείου (null point)

Το σημείο του τετράπλευρου στοιχείου στο οποίο οι επαγόμενες ταχύτητες υπολογίζονται είναι το λεγόμενο μηδενικό σημείο (null point), δηλαδή το σημείο στο οποίο το στοιχείο από μόνο του δεν επάγει ταχύτητα στο επίπεδό του. Οι x, y συνιστώσες του σημείου αυτού στο στοιχειώδες σύστημα συντεταγμένων είναι η λύση δύο παράλληλων μη-γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}V_x(x, y) &= 0 \\V_y(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται με επαναληπτική διαδικασία, η οποία χρησιμοποιεί αναλυτικές εκφράσεις για τις παραγώγους των V_x, V_y .

Η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν οι συνιστώσες της επαγόμενης ταχύτητας στο προσεγγιστικό μηδενικό σημείο είναι και οι δύο μικρότερες ως προς την απόλυτη τιμή από μία προκαθορισμένη τιμή. Αυτή η τιμή ορίζεται ως 0,0001.

Συνήθως η σύγκλιση είναι γρήγορη – τρεις ή τέσσερις επαναλήψεις. Αυτό είναι εν μέρει λόγω του ότι για τα περισσότερα τετράπλευρα το κεντροειδές είναι αρκετά κοντά στο μηδενικό σημείο (null point).

Υπάρχει μία περίπτωση στην οποία η διαδικασία συγκλίνει στο λάθος σημείο. Αυτό συμβαίνει για τετραγωνικά στοιχεία που είναι προσεγγιστικά μακριά, λεπτά τρίγωνα. Ακριβέστερα, η μη επιθυμητή περίπτωση συμβαίνει όταν ένα στοιχείο έχει δύο πλευρές που είναι αρκετά μακρύτερες από τις άλλες δύο και είτε οι μακριές πλευρές είναι απέναντι ή η μία από τις κοντές πλευρές είναι μεγάλη σε σύγκριση με την άλλη.

Για τέτοια στοιχεία η επαγόμενη ταχύτητα είναι μία αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση της θέσης κατά μήκος της μεγάλης διάστασης του στοιχείου και η πρώτη διόρθωση που γίνεται χρησιμοποιώντας το κεντροειδές είναι τέτοια που η επόμενη προσέγγιση είναι ένα σημείο έξω από το στοιχείο.

Εάν η απόσταση μεταξύ του κεντροειδούς και του null point είναι μικρότερη από τη μέγιστη διαγώνιο του στοιχείου, ο υπολογισμός συνεχίζει κανονικά, επειδή το πραγματικό μηδενικό σημείο είναι το μόνο σημείο τόσο κοντά στο κεντροειδές, όπου οι συνιστώσες της επαγόμενης ταχύτητας είναι επαρκώς μικρές για την επαναληπτική διαδικασία να συγκλίνει. Εάν η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη διαγώνιο, το υπολογισμένο null point είναι έξω από το στοιχείο και έτσι παραπετάται. Σε αυτή την περίπτωση το κεντροειδές αντικαθιστά το μηδενικό σημείο σε όλους τους υπολογισμούς που ακολουθούν.

Υπάρχει ακόμα ένας τύπος στοιχείου για τον οποίο η διαδικασία δεν συγκλίνει, δηλαδή όταν ένα στοιχείο έχει μία διαγώνιο πολύ κοντύτερη από οποιαδήποτε πλευρά. Για τέτοια στοιχεία η επαγόμενη ταχύτητα αλλάζει γρήγορα με την απόσταση κατά μήκος της κοντής διάστασης.

8.3 Τα πρώτα αποτελέσματα

$$\begin{array}{cccccccc}
 n & m & x_1^i & x_2^i & x_3^i & x_4^i & n_x & x'_{np} & d(1or2) \\
 & & y_1^i & y_2^i & y_3^i & y_4^i & n_y & y'_{np} & t \\
 & & z_1^i & z_2^i & z_3^i & z_4^i & n_z & z'_{np} & A
 \end{array}$$

Ο χαρακτηρισμός 1 ή 2 τελείως δεξιά καθορίζει στοιχεία για τα οποία το μηδενικό σημείο της επαναληπτικής διαδικασίας αποτυγχάνει όπως αναπτύχθηκε παραπάνω και είναι απών για κανονικά στοιχεία. Το σύμβολο 1 υπποδηλώνει ότι το υπολογισμένο null point ήταν έξω από το στοιχείο και έτσι το καταχωρημένο ως null point είναι κανονικά το κεντροειδές. Το σύμβολο 2 καταδεικνύει ότι η επαναληπτική διαδικασία δεν συνέκλινε και έτσι το καταχωρημένο ως null point είναι μόνο προσεγγιστικό. Και στις 2 ακραίες περιπτώσεις η καταχωρημένη τιμή του d είναι λάθος.

Ο κύριος σκοπός αυτών των δεδομένων εξόδου είναι να κάνει δυνατή την εύρεση λαθών στα δεδομένα εισόδου, προτού οι μακροσκελείς υπολογισμοί ροής ξεκινήσουν. Λάθη στα σημεία εισόδου συμβαίνουν αρκετά συχνά εξαιτίας του μεγάλου ποσοστού δεδομένων εισόδου που απαιτούνται.

9.ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΤΩΝ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ. ΟΙ ΕΠΑΓΟΜΕΝΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ.

9.1 Οργάνωση των στοιχείων

Απαιτείται τώρα ο υπολογισμός των επαγόμενων ταχυτήτων από τα τετράπλευρα στοιχεία του ενός στον άλλου τα μηδενικά σημεία. Όλα τα στοιχεία υποτίθεται ότι έχουν μοναδιαία πυκνότητα πηγής.

Ένα στοιχείο ορίζεται από τις παρακάτω ποσότητες: τις συντεταγμένες του μηδενικού σημείου και το κεντροειδές, που είναι η αρχή του στοιχειώδους συστήματος συντεταγμένων, στο σύστημα αναφοράς, τα στοιχεία του πίνακα μετατροπής (transformation matrix), τις συντεταγμένες των 4 γωνιακών σημείων στο στοιχειώδες σύστημα συντεταγμένων, τη μέγιστη διαγώνιο και την περιοχή και τις δεύτερες ροπές του τετραπλεύρου.

9.2 Μη συμμετρικά σώματα

Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό των συνιστωσών της ταχύτητας που επάγονται στο μηδενικό σημείο του i-ιοστού στοιχείου από το j-ιοστό στοιχείο είναι να υπολογίσουμε την απόσταση r_o μεταξύ του μηδενικού σημείου και της αρχής του j-ιοστού στοιχείου του συστήματος συντεταγμένων.

$$r_o = \sqrt{(x'_{np} - x_o)^2 + (y'_{np} - y_o)^2 + (z'_{np} - z_o)^2}$$

Εάν $r_o \geq \rho_2 t$, το j-ιοστό στοιχείο προσεγγίζεται από μία σημειακή πηγή στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων του.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα συντεταγμένων αναφοράς δίνονται από:

$$V'_x = Ar_o^{-3} (x'_{np} - x_o)$$

$$V'_y = Ar_o^{-3} (y'_{np} - y_o)$$

$$V'_z = Ar_o^{-3} (z'_{np} - z_o)$$

Εάν $r_o < \rho_2 t$, οι συντεταγμένες του i-ιοστού null point $x'_{np}, y'_{np}, z'_{np}$ μετασχηματίζονται σε j-ιοστό στοιχειώδες σύστημα συντεταγμένων λαμβάνοντας x_{np}, y_{np}, z_{np} . Τώρα το r_o συγκρίνεται με την παράγωγο της μέγιστης διαγωνίου t και έναν δεύτερο αριθμό ρ_1 που είναι ίσος με $\sqrt{6} = 2.45$, εκτός και εάν καθορίζεται αλλιώς.

Εάν $r_o \geq \rho_1 t$, το j-ιοστό στοιχείο προσεγγίζεται από ένα σημείο πηγής και επιπλέον ένα σημείο συστήματος δύο διπόλων στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Εάν, αντιθέτως, $r_o < \rho_1 t$, οι συνιστώσες της ταχύτητας υπολογίζονται από τις ακριβείς εξισώσεις για ένα τετράπλευρο.

Η κανονική ταχύτητα που επάγεται στο μηδενικό σημείο του i-ιοστού στοιχείου από μία μοναδιαία κατανομή πυκνότητας πηγής στο j-ιοστό στοιχείο αποκτάται από το

εσωτερικό γινόμενο του $\vec{V}_{ij}$ με το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα του i-ιοστού στοιχείου $\vec{n}_i$. Αυτή η επαγόμενη κανονική ταχύτητα ορίζεται ως A_{ij} . Δίνεται

$$A_{ij} = \vec{n}_i \cdot \vec{V}_{ij} = n_{ix} \cdot X_{ij} + n_{iy} \cdot Y_{ij} + n_{iz} \cdot Z_{ij}$$

Το ολοκληρωμένο σύνολο των A_{ij} σχηματίζει τον πίνακα των συντελεστών για το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων για τις τιμές της επιφανειακής πυκνότητας πηγής στα τετραγωνικά στοιχεία. Για μη συμμετρικά σώματα οι πίνακες $\vec{V}_{ij}$ και A_{ij} χρησιμοποιούνται για όλες τις εναρκτήριες ροές.

9.3 Σώματα με ένα επίπεδο συμμετρίας

Εάν ένα σώμα έχει ένα επίπεδο συμμετρίας, μόνο το μη πλεονάζον μέρος του σώματος χρειάζεται να εισαχθεί. Το άλλο μισό του σώματος αναγεννάται κατοπτρίζοντας το μισό που έχει εισαχθεί ως δεδομένο εισόδου στο συμμετρικό επίπεδο.

9.4 Σώματα με δύο επίπεδα συμμετρίας

Σώματα με δύο επίπεδα συμμετρίας χωρίζονται με μία προφανή επέκταση της διαδικασίας του προηγούμενου εδαφίου. Μόνο το 1/4 της επιφάνειας του σώματος καθορίζεται από τα σημεία εισόδου, ενώ τα άλλα 3/4 λαμβάνονται υπόψιν με κατοπτρισμούς. Όπως προηγουμένως τα στοιχεία που σχηματίζονται από σημεία εισόδου ορίζονται ως βασικά στοιχεία. Σε κάθε βασικό στοιχείο αντιστοιχούν τρία κατοπτρικά στοιχεία, τα οποία αποκτώνται/διασφαλίζονται από διαδοχικούς κατοπτρισμούς στα συμμετρικά επίπεδα.

9.5 Σώματα με τρία επίπεδα συμμετρίας

Το 1/8 της επιφάνειας του σώματος καθορίζεται από εισόδου, ενώ τα υπόλοιπα 7/8 λαμβάνονται υπόψη με κατοπτρισμούς. Σε κάθε βασικό στοιχείο, που σχηματίζεται από τα σημεία εισόδου, αντιστοιχούν 7 κατοπτρικά στοιχεία, τα οποία ορίζονται ως πρώτο κατοπτρικό στοιχείο, δεύτερο κατοπτρικό στοιχείο, κλπ.

Εάν η ροή έναρξης είναι παράλληλη με έναν από τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, οι τιμές της πυκνότητας πηγής σε ένα βασικό στοιχείο και στα αντίστοιχα 7 κατοπτρικά στοιχεία είναι όλες ίσες σε μέγεθος. Το πρόσημο των κατανομών πυκνοτήτων εξαρτάται από την κατεύθυνση της ροής έναρξης.

10.ΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΠΗΓΩΝ ΠΥΚΝΟΤΗΤΩΝ.

10.1 Διατύπωση των εξισώσεων

Τώρα οι τιμές της κατανομής πυκνότητας της επιφάνειας στα στοιχεία θα ληφθούν ως η λύση ενός συνόλου αλγεβρικών εξισώσεων. Θυμηθείτε ότι η πυκνότητα πηγής υποτίθεται σταθερή σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο. Έτσι, υπάρχουν N άγνωστες τιμές της πυκνότητας πηγών, όπου N είναι ο αριθμός των στοιχείων που σχηματίζονται από τα σημεία εισόδου (βασικά στοιχεία στην περίπτωση συμμετρίας). Η ολική κανονική ταχύτητα απαιτείται να εξαφανίζεται στο μηδενικό σημείο κάθε στοιχείου που σχηματίζεται από τα σημεία εισόδου και έτσι υπάρχουν N εξισώσεις για τις N άγνωστες τιμές της κατανομής πυκνότητας.

Η ολική κανονική ταχύτητα που επάγεται στο i-ιοστό μηδενικό σημείο (null point) από όλα τα τετράπλευρα στοιχεία είναι

$$N_i^{(s)} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)}$$

10.2 Λύση των εξισώσεων

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων $\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)} = -V_{\infty i}^{(s)}, i=1,2,\dots,N$ είναι ένα

σημαντικό ποσοστό του συνολικού υπολογισμού.

Από τις διάφορες πιθανότητες, η μοναδική που στην πραγματικότητα προγραμματίζεται είναι δύο μορφές της επαναληπτικής διαδικασίας Seidel. Αυτή η διαδικασία έχει το πλεονέκτημα να είναι πολύ απλή, έτσι ώστε ο χρόνος ανά επανάληψη ελαχιστοποιείται, παρόλο που ο απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων ώστε να αποκτηθεί μία επαρκώς ακριβή λύση μπορεί να είναι μεγαλύτερος από μία πιο σύνθετη μέθοδο.

Η πρώτη μορφή

$$\partial \sigma_i^{(s)(p)} = -\frac{1}{A_{ii}^{(s)}} \left[\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)(p)} + V_{\infty i}^{(s)} \right], i=1,2,\dots,N$$

Η δεύτερη μορφή

$$\partial \sigma_i^{(s)(p)} = -\frac{1}{A_{ii}^{(s)}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)(p+1)} + \sum_{j=i+1}^N A_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)(p)} + V_{\infty i}^{(s)} \right], i=1,2,\dots,N$$

Η δεύτερη μορφή της επανάληψης πάντα συγκλίνει τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο η πρώτη και σχεδόν πάντα συγκλίνει σημαντικά γρηγορότερα. Γενικά, η πρώτη μορφή απαιτεί 7 με 60 επαναλήψεις για να συγκλίνει, με τις τυπικές περιπτώσεις να απαιτούν 30 με 40. Η δεύτερη μορφή απαιτεί 7 με 40 επαναλήψεις για σύγκλιση, με τυπικές περιπτώσεις να απαιτούν 15 με 25. Έτσι, η μορφή δύο χρησιμοποιείται πάντα στην πράξη. Η άλλη παρουσιάζεται εδώ χάριν ολότητας. Η σειρά με την οποία τα στοιχεία λαμβάνονται μπορεί να επηρεάσει το ρυθμό της σύγκλισης για τη δεύτερη μορφή της επανάληψης, ενώ για την πρώτη δεν μπορεί. Αυτό, βέβαια, δεν ήταν ποτέ ένας παράγοντας για την ταχύτητα της λύσης.

11.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΡΟΗΣ. ΤΑ ΔΕΥΤΕΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.

11.1 Ταχύτητες και πιέσεις στην επιφάνεια του σώματος

Η ολική ταχύτητα ροής στο null point του i-ιοστού στοιχείου ορίζεται με το διάνυσμα $\overrightarrow{V_i^{(s)}}$ με συντεταγμένες $V_{ix}^{(s)}, V_{iy}^{(s)}, V_{iz}^{(s)}$. Αυτές οι συντεταγμένες δίνονται από

$$\begin{aligned} V_{ix}^{(s)} &= \sum_{j=1}^N X_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty x}^{(s)} \\ V_{iy}^{(s)} &= \sum_{j=1}^N Y_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty y}^{(s)} \\ V_{iz}^{(s)} &= \sum_{j=1}^N Z_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty z}^{(s)} \end{aligned}$$

Οι παραπάνω συντεταγμένες είναι τα βασικά αποτελέσματα αυτής της υπολογιστικής μεθόδου.

Το μέγεθος της ταχύτητας είναι $V_i^{(s)} = \sqrt{\left(V_{ix}^{(s)}\right)^2 + \left(V_{iy}^{(s)}\right)^2 + \left(V_{iz}^{(s)}\right)^2}$.

Ο συντελεστής πίεσης $C_{p_i}^{(s)} = 1 - \left(V_i^{(s)}\right)^2$ και τα συνημίτονα κατευθύνσεως του διανύσματος της συνολικής ταχύτητας ροής

$$\begin{aligned} \gamma_{ix}^{(s)} &= \frac{V_{ix}^{(s)}}{V_i^{(s)}} \\ \gamma_{iy}^{(s)} &= \frac{V_{iy}^{(s)}}{V_i^{(s)}} \\ \gamma_{iz}^{(s)} &= \frac{V_{iz}^{(s)}}{V_i^{(s)}} \end{aligned}$$

Τελικά, σαν ένα μέτρο της ακρίβειας της λύσης, η ολική κανονική ταχύτητα σε κάθε μηδενικό σημείο υπολογίζεται από

$$V_{ni}^{(s)} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty i}^{(s)}$$

11.2 Ταχύτητες και πιέσεις σε σημεία έξω από την επιφάνεια του σώματος

Τα σημεία που βρίσκονται έξω από το σώμα (off-body points) αναγνωρίζονται από έναν ακέραιο δείκτη n , ο οποίος καθορίζει τη σειρά με την οποία εισήχθησαν στο σύστημα.

Τα $X_{ni}^{(s)}, Y_{ni}^{(s)}, Z_{ni}^{(s)}$ είναι οι συντεταγμένες της ταχύτητας που επάγονται στο σημείο έξω από το σώμα από μία μοναδιαία κατανομή πυκνότητας πηγής στο j -ιοστό στοιχείο (ή από το j -ιοστό βασικό και κατοπτρικό στοιχείο σε περιπτώσεις συμμετρίας). Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε ένα σημείο εκτός του σώματος υπολογίζονται τότε από

$$\begin{aligned} V_{nx}^{(s)} &= \sum_{j=1}^N X_{nj}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty x}^{(s)} \\ V_{ny}^{(s)} &= \sum_{j=1}^N Y_{nj}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty y}^{(s)} \\ V_{nz}^{(s)} &= \sum_{j=1}^N Z_{nj}^{(s)} \sigma_j^{(s)} + V_{\infty z}^{(s)} \end{aligned} \quad j=1,..,N, s=1,2,3$$

11.3 Όρια αποθηκευτικής ικανότητας. Ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων

Ο μέγιστος αριθμός στοιχείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσεγγισθεί η επιφάνεια του σώματος καθορίζεται από την αποθηκευτική ικανότητα της υπολογιστικής μηχανής.

Από τον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία σχηματίζονται από τα σημεία εισόδου είναι φανερό ότι ο αριθμός των σημείων εισόδου δεν ξεπερνάει κατά πολύ τον αριθμό των στοιχείων.

11.4 Υπολογιστικός χρόνος

Η ακολουθούσα ανάλυση δείχνει τη βασική εξάρτηση του υπολογιστικού χρόνου από τον αριθμό των στοιχείων για διάφορα τμήματα του προγράμματος και δείχνει που είναι σημαντική η γεωμετρία του σώματος. Για μια γνωστή γεωμετρία σώματος αυτή η ανάλυση ορίζει τον υπολογιστικό χρόνο σαν μία συνάρτηση του αριθμού των στοιχείων σε συνάρτηση κάποιων συγκεκριμένων χρονικών σταθερών.

Με σκοπό την εκτίμηση του υπολογιστικού χρόνου είναι βολικό να υποδιαιρεθεί ο συνολικός υπολογισμός σε τέσσερα μέρη. Αυτά είναι:

- (1) Ο σχηματισμός των στοιχείων από τα σημεία εισόδου.
- (2) Ο υπολογισμός των επαγόμενων ταχυτήτων.
- (3) Η επίλυση των γραμμικών εξισώσεων και
- (4) Ο υπολογισμός των συνολικών ταχυτήτων ροής.

Ο υπολογιστικός χρόνος του (1) είναι αμελητέος, ενώ αυτός του (4) είναι σίγουρα απειροελάχιστος. Τα μέρη (2) και (3) είναι αυτά που καταναλώνουν τον περισσότερο χρόνο και οποιοδήποτε από τα δύο είναι το μεγαλύτερο.

12.ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΕΝΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ.

12.1 Σφαίρα

Επειδή η κατανομή των στοιχείων δεν έχει σφαιρική συμμετρία, οι υπολογισμένες κατανομές ταχυτήτων δεν είναι ακριβώς οι ίδιες για διάφορες κατευθύνσεις από την αρχική ροή.

12.2 Ελλειψοειδή εκ περιστροφής

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι το σημείο συγκέντρωσης των στοιχείων προφανώς δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα για κανένα από τα ελλειψοειδή εκ περιστροφής.

12.3 Τριαξονικά ελλειψοειδή

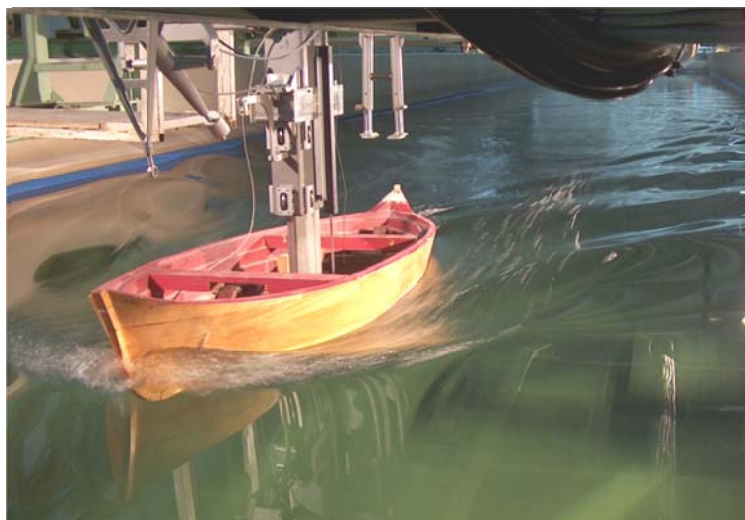
Μπορεί να γίνει φανερό ότι σε όλες τις περιπτώσεις η ταχύτητα στο επίπεδο το κάθετο στο διάνυσμα της αρχικής ροής είναι μία σταθερά αναξάρτητη της θέσης και ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της ροής. Οι αναλυτικές και οι υπολογισμένες κατανομές ταχυτήτων φαίνεται να συμφωνούν με την σχεδιαστική ακρίβεια, εκτός από την περιοχή κοντά στον άξονα y στο xy επίπεδο για την περίπτωση μίας αρχικής ροής παράλληλης στον άξονα z . Πιστεύεται ότι αυτό το σφάλμα είναι λόγω της σχετικά υψηλής καμπυλότητας της επιφάνειας του σώματος σε αυτή την περιοχή και μπορεί να αφαιρεθεί με συγκεντρωτικά στοιχεία εκεί.

Η χρήση αυτής της μεθόδου υπολογισμού της ροής κάνει πιθανή την πρόβλεψη της επίδρασης των τοιχωμάτων των wind tunnels στις κατανομές της ταχύτητας και της πίεσης στην επιφάνεια του σώματος.

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για τον υπολογισμό, σε πρώτη προσέγγιση, της ροής γύρω από ένα σώμα που κινείται κάτω από μία ελεύθερη επιφάνεια στα όρια του πεδίου ταχυτήτων.

6. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Α. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ - ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ



Σχήμα 132

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της αντίστασης σε ήρεμο νερό είναι από τα σημαντικότερα στην μελέτη ενός πλοίου. Παρόλα αυτά μέχρι και σήμερα, η πρόβλεψη της συμπεριφοράς του πλοίου σε πλήρη κλίμακα, βασίζεται κυρίως σε πειραματικές μετρήσεις σε μοντέλα. Το κόστος όμως, μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης βασισμένης σε πειραματικές μετρήσεις είναι εξαιρετικά μεγάλο.

Για τον λόγο αυτό, μια διαφορετική αντιμετώπιση του προβλήματος έχει κερδίσει έδαφος τα τελευταία χρόνια. Αυτή βασίζεται στην χρήση εργαλείων υπολογιστικής ρευστομηχανικής ώστε να επιλεγούν οι βέλτιστες μορφές γαστρών μεταξύ ενός πλήθους εναλλακτικών σχεδιάσεων, και να μειωθεί κατά αυτόν τον τρόπο, ο αριθμός των μοντέλων που θα δοκιμαστούν πειραματικά. Μία τέτοια αντιμετώπιση ενθαρρύνεται τόσο από την τελειοποίηση των εργαλείων αυτών, όσο και από τις ραγδαία αυξανόμενες δυνατότητες των υπολογιστών, ενώ παράλληλα ανοίγει τον δρόμο για την αξιοποίηση άλλων γνωστικών περιοχών, όπως η τεχνολογία βελτιστοποίησης (γενετικοί αλγόριθμοι). Επιπλέον τα υπολογιστικά αυτά εργαλεία

μπορούν να βοηθήσουν και στην καλύτερη κατανόηση τόσο του τρόπου επίδρασης των διαφορετικών σχεδιάσεων στην ολική αντίσταση, όσο και των επιδράσεων κλίμακας μεταξύ μοντέλου και πλοίου, που με την σειρά της μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση των εμπειρικών μεθόδων προεκβολής που χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα στις πειραματικές δεξαμενές. Προφανώς για όλα τα παραπάνω απαιτούνται αξιόπιστοι, και δοκιμασμένοι κώδικες.

Η μεθοδολογία που περιγράφεται στην συνέχεια, βασίστηκε αποκλειστικά σε υπολογιστικά εργαλεία τα οποία έχουν αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής (ΕΝΘΥ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Η επιλογή αυτή, έγινε γιατί η χρήση αυτών των προγραμμάτων επιτρέπει την πλήρη γνώση των θεωρήσεων που έχουν γίνει και των αδυναμιών που προκύπτουν από αυτές, οδηγεί σε κατανόηση όχι μόνο των φυσικών φαινομένων αλλά και φαινομένων που δημιουργούνται από την μαθηματική μοντελοποίηση και την αριθμητική επίλυση τους, προάγει την υψηλού επιπέδου ανάπτυξη στην χώρα μας, συμβάλλει με τον καλύτερο τρόπο στην εκπαίδευση των εμπλεκομένων, και πάνω από όλα δημιουργεί ένα εργαλείο το οποίο είναι ανοιχτό στον χρήστη και θα μπορεί να βελτιώνεται στο μέλλον από αυτόν.

Για τον έλεγχο της αναπτυχθείσας μεθόδου αλλά και την διερεύνηση των δυνατοτήτων της, πραγματοποιήθηκε μία σειρά πειραμάτων ρυμούλκησης στην πειραματική δεξαμενή της σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ, σε ιστιοπλοϊκό σκάφος και σε διάφορες ταχύτητες.

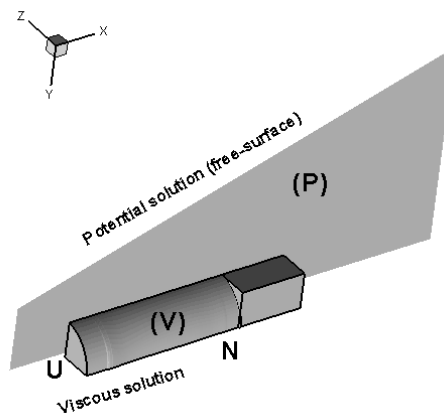
Οποιαδήποτε υπολογιστική μεθοδολογία φιλοδοξεί να δώσει ακριβείς προβλέψεις για την αντίσταση, πρέπει αναπόφευκτα να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της ελεύθερης επιφάνειας γύρω από το πλοίο. Παγκοσμίως έχουν αναπτυχθεί αρκετοί κώδικες πραγματικής ροής έχοντας αυτή την δυνατότητα. Κοινό μειονέκτημα όλων, είναι οι μεγάλοι υπολογιστικοί χρόνοι.

Μία άλλη ενδιαφέρουσα προσέγγιση που έχει αναπτυχθεί για τον γρηγορότερο υπολογισμό της ολικής αντίστασης των πλοίων βασίζεται στην αποσύζευξη του προβλήματος, δηλαδή την πραγματοποίηση υπολογισμών συνεκτικής ροής κάτω από «παγωμένη» ελεύθερη επιφάνεια. Ο προσδιορισμός αυτής της ελεύθερης επιφάνειας μέσω λεπτομερών πειραματικών μετρήσεων, αν και έχει πραγματοποιηθεί στο παρελθόν γύρω από ορισμένα μοντέλα, απορρίπτεται ως χρονοβόρος και πολυέξοδος.

Η κύρια εναλλακτική σε αυτή την περίπτωση, είναι ο υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας από έναν κώδικα δυναμικής ροής.

Στην περίπτωση αυτή, η λύση του προβλήματος δυναμικής ροής χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της ελεύθερης επιφάνειας (P) γύρω από την γάστρα. Στην συνέχεια κάτω από αυτή την «παγωμένη» ελεύθερη επιφάνεια και σε περιορισμένο χωρίο (V) γύρω από την γάστρα, επιλύονται οι εξισώσεις συνεκτικής ροής. Αυτή η υβριδική διαδικασία είναι σημαντικά ταχύτερη από την επίλυση του πλήρους προβλήματος με τις έως τώρα γνωστές μεθόδους (surface tracking & surface capturing). Επιπλέον επιτρέπει την εφαρμογή πολύ πυκνότερων πλεγμάτων τα οποία είναι απαραίτητα για την επίτευξη σωστών λύσεων.

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι που υιοθετούν αυτήν τη λογική οι οποίες διαφέρουν στον τρόπο επίλυσης τόσο του δυναμικού όσο και του συνεκτικού προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση η ελεύθερη επιφάνεια που προκύπτει από τη δυναμική λύση αγνοεί τις επιδράσεις της συνεκτικότητας στις περιοχές της πρύμνης και του ομόρρου. Επίσης είναι αδύνατο, μέχρι σήμερα, να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της θραύσης των κυματισμών που εμφανίζεται γύρω από την πλώρη σε υψηλούς αριθμούς Froude. Συνεπώς, η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου εξαρτάται άμεσα από αυτές τις επιδράσεις.



Σχήμα 133: Αναπαράσταση της θεωρούμενης ανάλυσης και των πεδίων επίλυσης των εξισώσεων του προβλήματος.

1.ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΑΣΤΡΑΣ

1.1 Σύμμορφος Μετασχηματισμός

Για την αναλυτική περιγραφή της γυμνής γάστρας του πλοίου, χρησιμοποιήθηκε ο σύμμορφος μετασχηματισμός. Μέσω του μετασχηματισμού αυτού οποιαδήποτε εγκάρσια τομή του πλοίου, μπορεί να μετασχηματιστεί στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, και αντίστροφα. Στο παρελθόν παρόμοιες διαδικασίες έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία, επικεντρώνονταν όμως σε εφαρμογές δυναμικής ροής, και για αυτό ο κύριος στόχος τους ήταν μόνο η ακριβής αναπαράσταση της γάστρας. Στην παρούσα μεθοδολογία, εκτός από την κατασκευή των panels που είναι απαραίτητα για τον κώδικα δυναμικής ροής, ο σύμμορφος μετασχηματισμός εφαρμόζεται και για την κατασκευή διδιάστατων πλεγμάτων γύρω από τυχαίους νομείς. Για την εφαρμογή αυτή, γίνεται εκμετάλλευση της βασικής ιδιότητας του σύμμορφου μετασχηματισμού, να διατηρεί σταθερές τις γωνίες, ως προς μέτρο και προσανατολισμό.

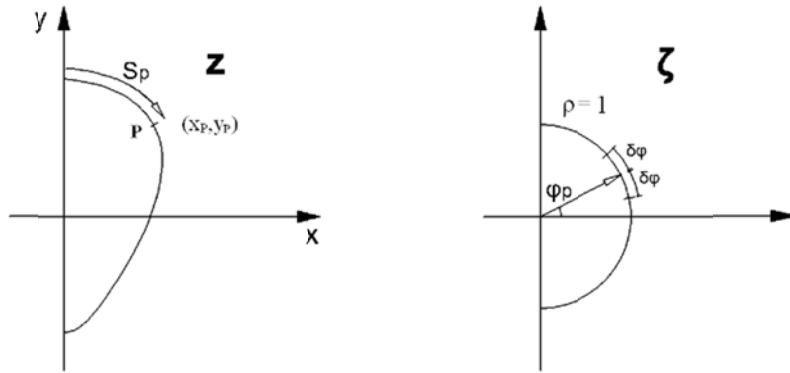
Για το παραπάνω σκοπό χρησιμοποιήθηκε μια νέα προσέγγιση, παλαιότερης ιδέας, οι βασικές αρχές και οι λεπτομέρειες της οποίας, δίδονται στην συνέχεια.

1.2 Γενικός Μετασχηματισμός διδιάστατης τομής

Ο γενικός σύμμορφος μετασχηματισμός μιας τομής σαν αυτή του πλοίου, στον μοναδιαίο κύκλο, μπορεί να γραφτεί ως :

$$z = c_0 + c_1 \zeta + \sum_{n=1}^N c_n \zeta^{-n} \quad (1)$$

Όπου z τα σημεία της διδιάστατης τομής του πλοίου, και ζ τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου, στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 134: Μετασχηματισμός μιας δισδιάστατης τομής στον μοναδιαίο κύκλο.

Αν η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y (σχ. 134) οι μιγαδικοί (σταθεροί) συντελεστές c_n εκφυλλίζονται στους πραγματικούς a_n . Σε αυτήν την περίπτωση, το ανάπτυγμα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του ζ είναι :

Στην εξίσωση (2) με φ συμβολίζεται το όρισμα του σημείου (x,y) στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Οι συντελεστές a_n μπορούν να υπολογισθούν είτε μέσω των ολοκληρωμάτων (3a) :

—

—

—

είτε μέσω των ολοκληρωμάτων (3b) :

$$\begin{aligned}
a_0^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) d\varphi \\
a_{-1}^{(2)} - a_1^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \\
a_n^{(1)} &= \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, n > 2
\end{aligned} \tag{3b}$$

Οι εκφράσεις (3a) και (3b) δείχνουν πως οι συντελεστές $a_{-1}, a_0, \dots, a_n$ μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά με δύο τρόπους, οι οποίοι για άπειρο πλήθος συντελεστών ($N \rightarrow \infty$) οδηγούν σε ίσες τιμές. Παρόλα αυτά από την στιγμή που ο αριθμός N είναι πεπερασμένος σε όλες τις πραγματικές εφαρμογές, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων (3a) και (3b) καταλήγει σε διαφορετικές τιμές $a_n^{(1)}$ και $a_n^{(2)}$ για τους συντελεστές, η αποτελεσματικότητα των οποίων εξαρτάται από την μορφή του νομέα. Στην προσπάθεια εύρεσης της βέλτιστης αναπαράστασης για την τυχαία τομή, στην παρούσα μέθοδο θεωρείται μία γραμμική σχέση (4) μεταξύ των δύο προσεγγίσεων.

$$a_n = r a_n^{(1)} + (1 - r) a_n^{(2)}, \quad n = -1, \dots, N \tag{4}$$

Ο συντελεστής βαρύτητας r ορίζεται από την εξίσωση ελαχιστοποίησης (5) του ολικού σφάλματος απεικόνισης.

$$E_t = \sum_P [(x_P - x_{aP})^2 + (y_P - y_{aP})^2] \tag{5}$$

Όπου P είναι ο αριθμός των σημείων (x_P, y_P) που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του νομέα, και (x_{aP}, y_{aP}) οι αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις αυτών, μέσω της εξίσωσης (2).

Αντικαθιστώντας κατάλληλα, προκύπτουν οι τελικές εκφράσεις (6) :

$$\begin{aligned}
x_{aP} &= \left[r a_{-1}^{(1)} + (1 - r) a_{-1}^{(2)} \right] \cos \varphi_P + \sum_{n=1}^N \left[r a_n^{(1)} + (1 - r) a_n^{(2)} \right] \cos(-n\varphi_P) \\
y_{aP} &= \left[r a_0^{(1)} + (1 - r) a_0^{(2)} \right] + \left[r a_{-1}^{(1)} + (1 - r) a_{-1}^{(2)} \right] \sin \varphi_P + \sum_{n=1}^N \left[r a_n^{(1)} + (1 - r) a_n^{(2)} \right] \sin(-n\varphi_P)
\end{aligned} \tag{6}$$

Το r προσδιορίζεται επιλύοντας την παρακάτω γραμμική εξίσωση (7) :

$$\frac{\partial E_t}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί πως οι συντελεστές α_I και α_{-I} προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο από την επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει από το δεύτερο ολοκλήρωμα των (3a) και (3b). Καθώς ο αριθμός των συντελεστών αυξάνει, ο συντελεστής βαρύτητας r αλλάζει. Η γενική τάση είναι πως για $H \gg B \rightarrow 0$, ενώ για $B \gg H \rightarrow I$, όπου B είναι το πλάτος, και H το βύθισμα του εν λόγω νομέα.

Για έναν συγκεκριμένο νομέα, ακολουθείται η επαναληπτική διαδικασία όπως αυτή περιγράφεται στην εργασία των Kerczek & Tuck. Αυτή εν συντομία μπορεί να περιγραφεί ως εξής : οι υπολογισμοί ξεκινούν με τέσσερις συντελεστές, και συνεχίζουν αυξάνοντας τον αριθμό τους μέχρι έναν προκαθορισμένο αριθμό, ή μέχρι το σφάλμα να γίνει μικρότερο ενός κριτηρίου, όποιο από τα δύο ικανοποιηθεί πρώτο.

Σε κάθε περίπτωση όμως, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων (3a) και (3b) απαιτεί τον καθορισμό των γωνιών φ_P , δηλαδή του ορίσματος του P στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Στην αρχική εργασία η γωνία φ_P καθορίζεται από την εύρεση της ελάχιστης απόστασης μεταξύ του συγκεκριμένου σημείου και της αναλυτικής αναπαράστασης, καθώς η γωνία φ αυξάνει μονοτονικά. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή αποτυγχάνει όταν εφαρμόζεται σε πολύπλοκους νομείς, δίνοντας σε αυτή την περίπτωση ακανόνιστες αναπαραστάσεις. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, η γωνία φ_P υπολογίζεται μέσω μίας βελτιωμένης διαδικασίας σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα, γίνεται η υπόθεση πως η γωνία είναι συνάρτηση του S_P , όπου S είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της τομής, το οποίο αριθμητικά υπολογίζεται μέσω της σχέσης (8) :

$$S_P = S_{P-1} + \sqrt{(x_P - x_{P-1})^2 + (y_P - y_{P-1})^2} \quad (8)$$

Στην συνέχεια εισάγοντας ένα σύνολο γνωστών γωνιών φ_i η τιμή του S_i μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά μέσω της σύμμορφης απεικόνισης. Κατόπιν οι γωνίες φ_P καθορίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής ή παρεμβολής με κυβική spline του αντίστοιχου μήκους S_P εξίσωσης (8) σε σχέση με το μήκος S_i . Η κατανομή των φ_i εξαρτάται από την μεταβολή της καμπυλότητας κατά μήκος του περιγράμματος του νομέα, δηλαδή συνεπάγεται συγκέντρωση σημείων στις κοίλες περιοχές. Η παραπάνω

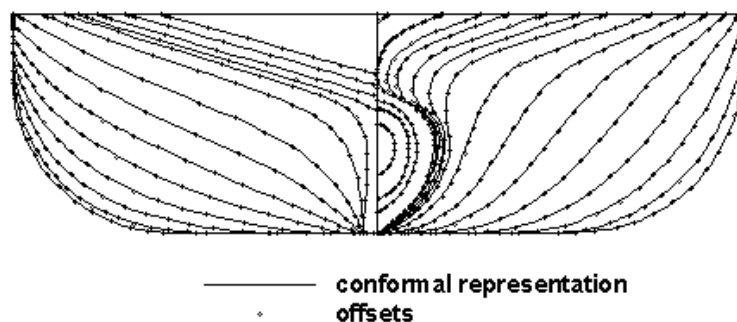
μέθοδος έχει αποδειχθεί σταθερή και αρκετά γρήγορη, αλλά από την στιγμή που βασίζεται στην εκτίμηση του επικαμπύλιου μήκους S_P μέσω των αρχικών δεδομένων σημείων, μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αναπαραστάσεις περιοχών με μεγάλη καμπυλότητα και μικρή πυκνότητα σημείων. Για τον παραπάνω λόγο εφαρμόζεται μόνο για τα ενδιάμεσα βήματα, ενώ κατά την τελευταία επανάληψη (N) εφαρμόζεται μια δεύτερη διαφορετική διαδικασία. Η δεύτερη αυτή διαδικασία, βασίζεται στην εύρεση της ελάχιστης απόστασης του σημείου P από την αναλυτική αναπαράσταση του νομέα σε ένα προκαθορισμένο εύρος γωνιών $[\varphi_P - \delta\varphi, \varphi_P + \delta\varphi]$, δηλαδή όχι μονοτονικά (σχ.134). Η τιμή που χρησιμοποιείται για το $\delta\varphi$ είναι $\delta\varphi \cong 0.1\pi$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί είτε για τομές του βολβού, είτε για νομείς του πλοίου όπου μπορεί να είναι συμμετρικοί μόνο ως προς άξονα y (συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης της ασύμμετρης πρύμνης). Για κοινούς νομείς του πλοίου, οι οποίοι έχουν συμμετρία και ως προς τον άξονα x , ο γενικός μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως :

$$z = \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{3-2n} \quad (9)$$

Εντούτοις, στους περισσότερους κοινούς νομείς, το περίγραμμα της τομής δεν τέμνει τον άξονα των x ορθογώνια. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε με εφαρμογή του μετασχηματισμού Karman-Trefftz. Συνεπώς, ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε δύο βήματα.

Παρόλο που αυτή η μέθοδος έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε εφαρμογές πραγματικής ροής, μπορεί να προκαλέσει αστάθειες και λάθη κατά την παρεμβολή νομέων, λόγω της μεγάλης της ευαισθησίας στην γωνία τομής. Για αυτό τον λόγο χρησιμοποιήθηκε η αρχική υπόθεση, λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι οποιαδήποτε πιθανή απόκλιση περιορίζεται στο πάνω μέρος του πλοίου, βρίσκεται δηλαδή πάνω από τη ελεύθερη επιφάνεια. Επιπλέον, σημαντική βελτίωση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας ικανοποιητικό αριθμό σημείων στην περιοχή αυτή.



Σχήμα 135: Αναπαράσταση εγκάρσιων τομών πλοίου μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού.

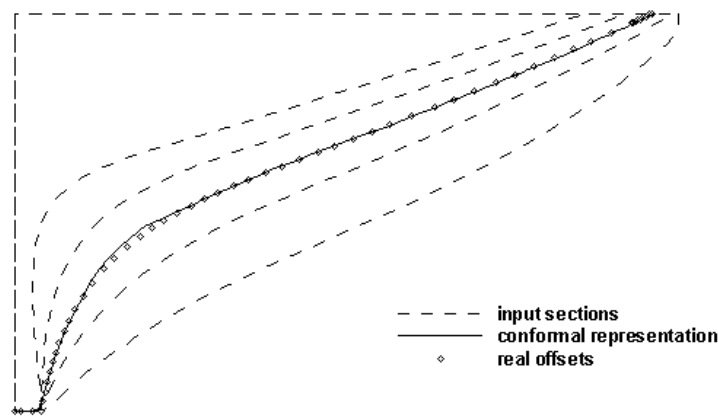
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της αποτελεσματικότητας της μεθόδου παρουσιάζεται στο σχήμα 135, για μια γάστρα πλοίου με βολβό στην πλώρη, και ποδόστημα στην πρύμνη. Για την αναπαράσταση του βολβού έγινε χρήση 20 συντελεστών, για το προωαίο κομμάτι της γάστρας ακριβώς μετά τον βολβό 150 συντελεστές, ενώ 60 συντελεστές χρησιμοποιήθηκαν για την πρύμνη. Τα αρχικά σημεία παρεμβολής ήταν 100 για κάθε τομή, ενώ οι υπολογισθείσες τιμές του συντελεστή βαρύτητας γ κυμαίνονταν μεταξύ 0.7 και 0.9 για τους νομείς της γάστρας με κανονική μορφή.

1.3 Παρεμβολή νομέων

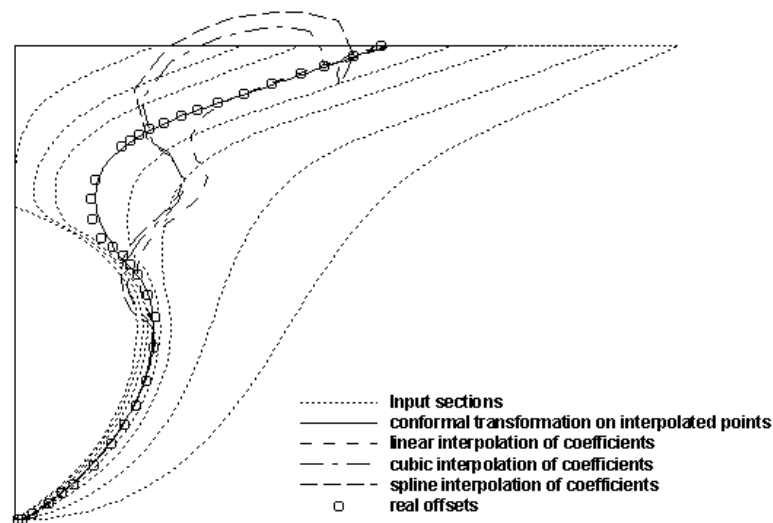
Ενώ ο σύμμορφος μετασχηματισμός εφαρμόζεται αρχικά μόνο σε έναν αριθμό δεδομένων νομέων, η αποτελεσματική παρεμβολή ενδιάμεσων νομέων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την παραγωγή πυκνών πλεγμάτων, τα οποία με την σειρά τους είναι απαραίτητα για την πραγματοποίηση ορθών υπολογισμών στον κώδικα πραγματικής ροής αλλά και στην δυναμική ροή. Σε όλες τις σχετικές μεθοδολογίες, η γενική ιδέα είναι ο υπολογισμός των συντελεστών της επιθυμητής τομής, με παρεμβολή μεταξύ των συντελεστών που προέκυψαν από τα αρχικά δεδομένα. Η πρώτη απόπειρα βασίστηκε σε πολωνυμική παρεμβολή, η οποία όμως σε πολλές περιπτώσεις ήταν

αναποτελεσματική, και για αυτό στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν κυβικές splines για την παρεμβολή, οι οποίες ήταν πολύ πιο ακριβείς.

Μια επίσης αποτελεσματική εναλλακτική, για πολύπλοκες μορφές πλοίων με έντονη διαμήκη αλλαγή της γεωμετρίας, είναι η εφαρμογή απλής κυβικής παρεμβολής στους γειτονικούς νομείς. Ένα παράδειγμα αυτού δίδεται στην σχήμα 4 όπου παρουσιάζεται η παραγωγή ενός νομέα πρύμνης με ποδόστημα μέσω παρεμβολής των συντελεστών των τεσσάρων γειτονικών νομέων. Παρατηρείται πλήρης εναρμόνιση του με τα πραγματικά σημεία του νομέα.



Σχήμα 136: Κυβική παρεμβολή νομέα πρύμνης με ποδόστημα.

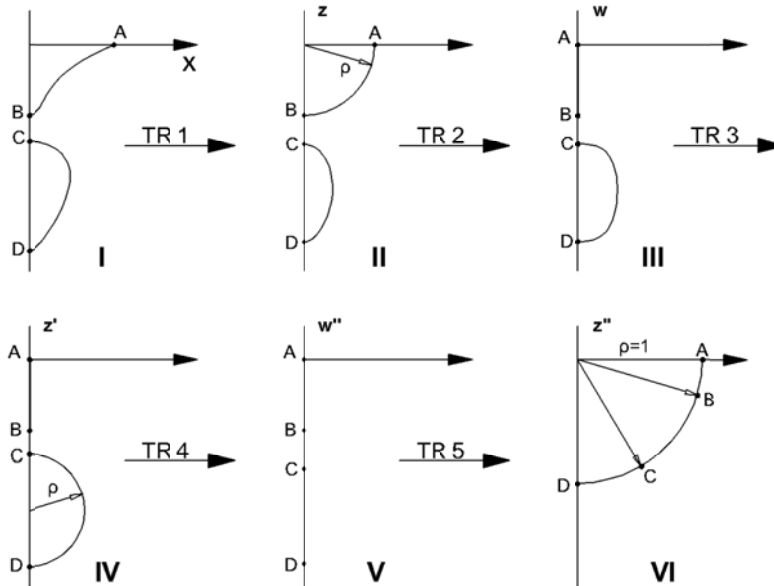


Σχήμα 137: Παρεμβολή νομέα βολβοειδούς πλώρης.

Ωστόσο, όλοι οι προαναφερθέντες τρόποι αποτυγχάνουν πλήρως στην περίπτωση βολβοειδούς πλώρης ή πρύμνης, όπου κάθε προσπάθεια παρεμβολής των συντελεστών, οδηγεί σε εξωπραγματικές αναπαραστάσεις όπως φαίνεται στο σχήμα 137. Στο σχήμα αυτό εμφανίζονται αρχικά επτά νομείς της πλώρης ενός πλοίου, όπως περιγράφονται με χρήση 150 συντελεστών. Όπως είναι εμφανές τόσο η γραμμική, η κυβική, όσο και η spline παρεμβολή των συντελεστών, αδυνατούν να σχεδιάσουν σωστά έναν ενδιάμεσο νομέα.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος αναπτύχθηκε μια νέα διαδικασία, η οποία σε πρώτη φάση παράγει σημεία στο επιθυμητό επίπεδο τομής μέσω κυβικής παρεμβολής σημείων των τεσσάρων γειτονικών νομέων. Τα τελευταία αυτά παράγονται μέσω του μετασχηματισμού, και για ίσες γωνίες στον μοναδιαίο κύκλο. Στην συνέχεια, τα παραχθέντα σημεία μετασχηματίζονται σύμφωνα με την προαναφερθείσα τεχνική σύμμορφης απεικόνισης, και οι συντελεστές αποθηκεύονται ως επιπλέον δεδομένα. Το αποτέλεσμα είναι ένας ενδιάμεσος νομέας, ο οποίος είναι πάντα πολύ κοντά στα αρχικά δεδομένα (σχ. 137). Η όλη διαδικασία είναι πλήρως αυτοματοποιημένη, πράγμα που σημαίνει πως μπορεί εξ αρχής να δηλωθεί ένα πλήθος από διαμήκεις θέσεις σε ευαίσθητες περιοχές του πλοίου, για τις οποίες θα υπολογισθούν και θα αποθηκευτούν οι συντελεστές της σύμμορφης απεικόνισης, αμέσως μετά το πέρας των υπολογισμών των αρχικών νομέων.

Μετά το τέλος και των παρεμβολών, μπορεί να παραχθεί άμεσα ένα δισδιάστατο ορθογώνιο ή μη-ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα σε κάθε τομή, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού ενός πλέγματος στο μιγαδικό επίπεδο. Το απλούστερο από τα πλέγματα που μπορούν να παραχθούν προκύπτει με αντίστροφο μετασχηματισμό τεμνόμενων ομόκεντρων κύκλων και ακτίνων. Όταν αντιμετωπίζεται το πρόβλημα τις ελεύθερης επιφάνειας, οι γωνίες σε κάθε κύκλο καθορίζονται αντίστοιχα, και τα παραγόμενα πλέγματα είναι μη-ορθογώνια.



Σχήμα 138: Σύμμορφος μετασχηματισμός νομέων με δύο τμήματα.

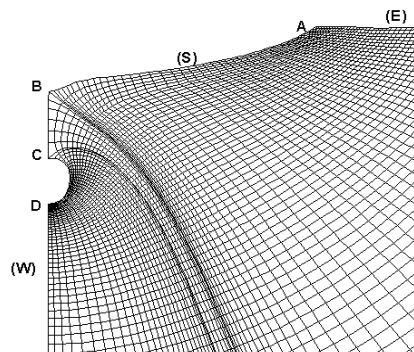
1.4 Διπλά συνεκτικά χωρία

Σε περιοχές όπου οι νομείς έχουν δύο τμήματα, όπως μια βολβοειδής πλώρη ή μια πρύμνη με διαμόρφωση εξόδου του άξονα, τότε μπορεί να εφαρμοστεί μια σειρά από μετασχηματισμούς έτσι ώστε να κατασκευαστεί ένα σωστό πλέγμα για τους υπολογισμούς συνεκτικής ροής. Αρχικά η τομές της γάστρας και του βολβού μετασχηματίζονται αυτόνομα, και οι συντελεστές της σύμμορφης απεικόνισης αποθηκεύονται ξεχωριστά. Στην συνέχεια για την δημιουργία του πλέγματος λαμβάνοντας υπόψη και τα δύο σύνορα (π.χ. πλώρη και βολβός), ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα, (σχ.138) :

1. Πρώτος μετασχηματισμός (TR1). Με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού ζ^{-1} και στις δύο περιοχές, η τομή του πλοίου μετασχηματίζεται στον μοναδιαίο τεταρτοκύκλιο, ενώ η τομή του βολβού σε ένα διαφορετικό βολβοειδές σχήμα (CD).
2. Δεύτερος μετασχηματισμός (TR2). Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό ζ , ο μοναδιαίος κύκλος μετασχηματίζεται στο ευθύγραμμο σχήμα (AB) και ο βολβός πάλι σε ένα νέο βολβοειδές σχήμα (CD).

3. Τρίτος μετασχηματισμός (TR3). Ο «νέος» βολβός μετασχηματίζεται στο μοναδιαίο τεταρτοκύκλιο (CD) του επιπέδου z' εφαρμόζοντας τον γενικό μετασχηματισμό (2), ενώ η τομή της πλώρης παραμένει ευθύγραμμο τμήμα (AB) με διαφορετική όμως έκφραση.
4. Τέταρτος μετασχηματισμός (TR4). Μέσω της απεικόνισης $w' = z' + 1/z'$, ο μοναδιαίος κύκλος μετασχηματίζεται σε ευθύγραμμο σχήμα (CD).
5. Πέμπτος μετασχηματισμός (TR5). Μέσω του τελικού αντίστροφου μετασχηματισμού $(z'' + 1/z'')^{-1} = w'$, καθορίζονται πάνω στο τελικό, κοινό, μοναδιαίο τεταρτοκύκλιο του επιπέδου z'' , τα πραγματικά ακραία σημεία A, B, C, D των δύο τμημάτων.

Η παραπάνω διαδικασία έχει σαν αποτέλεσμα να μετασχηματίζει με απόλυτη ακρίβεια τις δύο περιοχές και την μεταξύ τους απόσταση σε ένα μόνο μοναδιαίο κύκλο. Μετά από αυτό μπορεί να παραχθεί ένα πλέγμα στο εγκάρσιο επίπεδο του πλοίου μέσω οποιασδήποτε κατανομής των γωνιών φ στους ομόκεντρους κύκλους του (VI) ή με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού, μέσω οποιασδήποτε κατανομής σημείων πάνω στον πραγματικό νομέα, συμπεριλαμβανομένης μιας κατανομής σταθερών επικαμπύλιων μηκών. Επιπλέον ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι η κατασκευή πλεγμάτων όπου οι γραμμές τους θα τέμνουν τον νομέα ακριβώς στα άκρα A, B, C, D των δύο τμημάτων. Ένα παράδειγμα δημιουργίας διδιάστατου πλέγματος γύρω από νομέα δύο περιοχών, δίδεται στο σχήμα 139.



Σχήμα 139: Διδιάστατο πλέγμα γύρω από πρυμναίο νομέα με βολβοειδή διαμόρφωση εξόδου του άξονα.

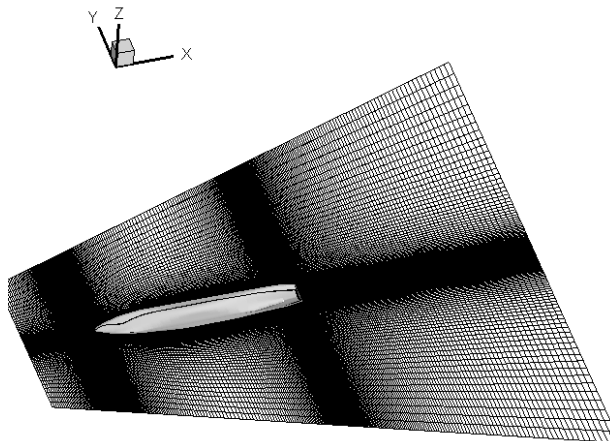
2.ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

2.1 Γενικά

Η μέθοδος επίλυσης του ιδεατού (ατριβούς) μόνιμου πεδίου ροής γύρω από τυχαίο πλοίο βασίστηκε στην χρήση επιφανειακών πηγών που καλύπτουν την επιφάνεια της γάστρας και την ελεύθερη επιφάνεια των κυματισμών. Η κεντρική ιδέα του κώδικα μη-γραμμικής δυναμικής ροής, Γ.Τζαμπίρας, είναι η αποσύζευξη των δύο συνοριακών συνθηκών της ελεύθερης επιφάνειας (κινηματική και δυναμική) με σκοπό να υπολογισθεί η τελική γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας.

Ακολουθώντας την κλασσική προσέγγιση των Hess&Smith, οι δύο επιφάνειες (γάστρας και κυματισμών) καλύπτονται από επίπεδα τετράπλευρα στοιχεία με σταθερή κατανομή πηγών. Οι εντάσεις των πηγών υπολογίζονται από την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης, δηλαδή η κάθετη ταχύτητα σε συγκεκριμένο σημείο («null point») κάθε στοιχείου να είναι ίση με το μηδέν. Η αναπαράσταση αυτή του πεδίου αντιστοιχεί στην λύση της εξίσωσης Laplace και ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας σε κάθε σημείο του. Επιπλέον η ταχύτητα σε κάθε σημείο υπολογίζεται άμεσα ως το άθροισμα των επαγόμενων συνεισφορών όλων των στοιχείων. Θεωρητικά, για να είναι ακριβής η λύση, θα έπρεπε όλη η ελεύθερη επιφάνεια να καλύπτεται από στοιχεία, αλλά προφανώς κάτι τέτοιο είναι ανέφικτο. Ως εκ τούτου, το υπολογιστικό πεδίο εκτείνεται σε ένα περιορισμένο χώρο γύρω από το πλοίο, που επιλέγεται έτσι ώστε ο υπολογισμός της γεωμετρίας του κύματος κοντά στο πλοίο να μην επηρεάζεται πρακτικά από τη θέση των εξωτερικών συνόρων.

Για την επίλυση του προβλήματος, γίνεται χρήση δυο καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων. Το πρώτο εκ των οποίων είναι το σωματόδετο που χρησιμοποιείται για την κατασκευή των στοιχείων μέσω της σύμμορφης αναπαράστασης και το δεύτερο είναι το απόλυτο σύστημα με $z=0$ στην αδιατάραχτη ελεύθερη επιφάνεια όπου επιλύονται όλες οι εξισώσεις του ρευστού.



Σχήμα 140: Επιφανειακά στοιχεία.

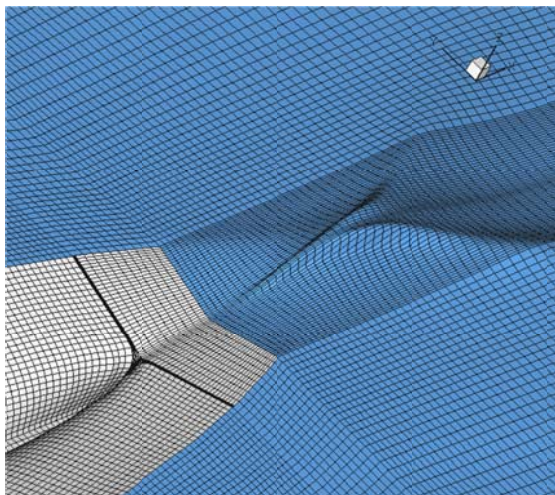
2.2 Η κατασκευή των πάνελς

Η γεωμετρική κατασκευή των επιφανειακών στοιχείων (panels) αποτελεί ένα βασικό υπολογιστικό βήμα στην όλη διαδικασία, γιατί η επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος απαιτεί συνεχή ανανέωση της ελεύθερης επιφάνειας και ως εκ τούτου ένα γρήγορο και ακριβή τρόπο επαναπροσδιορισμού τους. Το ρόλο αυτό έρχεται να καλύψει η αναλυτική αναπαράσταση των εγκάρσιων τομών του πλοίου με την μέθοδο του σύμμορφου μετασχηματισμού, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Επιπλέον, η αναλυτική έκφραση των νομέων και η δυνατότητα αυτόματης παρεμβολής νέων προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα για τον γεωμετρικό προσδιορισμό της τομής του κύματος με την επιφάνεια της γάστρας, σχήμα 144, καθώς και τον τρόπο διαμέρισης των σημείων πάνω σε κάθε εγκάρσια τομή.

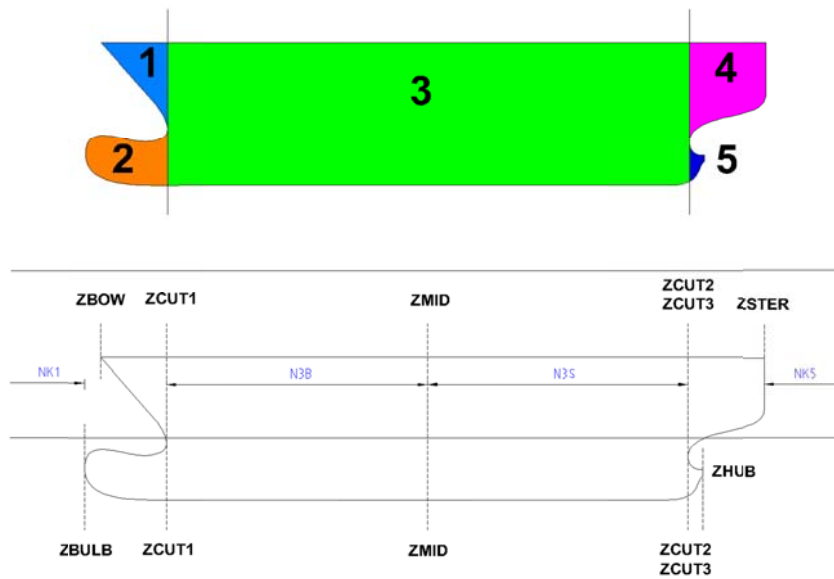
Στη γενικότερη περίπτωση η γάστρα του πλοίου χωρίζεται σε πέντε επιμέρους περιοχές, (σχ. 142), οι οποίες είναι : η πλώρη (I), ο βολβός (II), η περιοχή που καθορίζεται μεταξύ της βάσης του βολβού και τον πρυμναίο νομέα ασυνέχειας (III), η πρύμνη (IV) και η διαμόρφωση εξόδου του άξονα και η πλήμνη της έλικας (V). Σε κάθε περιοχή χρησιμοποιείται διαφορετικός αριθμός σημείων τόσο κατά το εγκάρσιο όσο και κατά το διάμηκες (σχ.142). Υποθέτοντας ότι η διαμέριση κατά μήκος

περιλαμβάνει NK σημεία και κατά το εγκάρσιο NI, τότε ο αριθμός των στοιχείων μίας συγκεκριμένης περιοχής είναι $(NI-1)*(NK-1)$. Στην παρούσα μελέτη η επιλογή της εγκάρσιας διαμέρισης είναι τέτοια ώστε να αντιστοιχεί σε ίσα επικαμπύλια μήκη μεταξύ σημείων. Προφανώς κάθε φορά που επαναπροσδιορίζεται η ελεύθερη επιφάνεια, τα στοιχεία της γάστρας ξανακατασκευάζονται αυτόματα μετά την αναλυτική εύρεση του σημείου τομής της ελεύθερης επιφάνειας με τον εγκάρσιο νομέα.

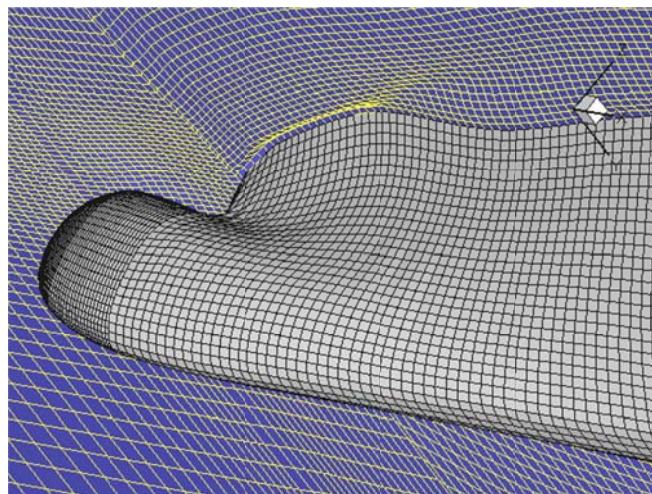
Όσον αφορά τον αριθμό των στοιχείων της ελεύθερης επιφάνειας, αφενός κατά το διάμηκες είναι κοινός με τις αντίστοιχες περιοχές του πλοίου, αφετέρου κατά το εγκάρσιο επιλέγεται ενιαία διαμέριση NI με εκθετική όμως κατανομή. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με εύρεση του λόγου της γεωμετρικής προόδου που αντιστοιχεί σε δεδομένη απόσταση μεταξύ του πρώτου σημείου πάνω στη γάστρα και του επόμενου. Στην ειδική περίπτωση που το πλοίο έχει πρύμνη «καθρέφτη» που δεν βυθίζεται στο νερό, η ελεύθερη επιφάνεια μετά τη γάστρα περιλαμβάνει και αριθμό σημείων ίσο με αυτό της πρύμνης, σχήμα 141.



Σχήμα 141: Διδιάστατο πλέγμα γύρω από πρυμναίο νομέα, με βολβοειδή διαμόρφωση εξόδου του άξονα.



Σχήμα 142: Οι πέντε περιοχές μιας γάστρας και τα βασικά διαμήκη σημεία αναφοράς.



Σχήμα 143: Τομή ελεύθερης επιφάνειας με την γάστρας στην περιοχή της πλώρης.

2.3 Ο αλγόριθμος επίλυσης

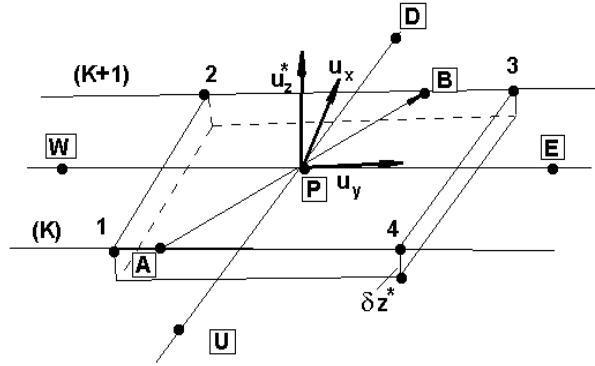
Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, σκοπός του κώδικα είναι η ταυτόχρονη ικανοποίηση της κινηματικής και της δυναμικής συνοριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας τα κύρια βήματα της οποίας είναι συνοπτικά τα ακόλουθα :

1. Για γνωστή γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας, και μετά την κατασκευή των panels όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, λύνεται κάτω από αυτά η εξίσωση Laplace θέτοντας την κάθετη ταχύτητα του κάθε στοιχείου ίση με μηδέν (κινηματική συνθήκη μη-εισχώρησης στην γάστρα και στην επιφάνεια του ρευστού).
2. Λύνεται η κατακόρυφη εξίσωση της ορμής, εισάγοντας τη μεταβολή της πίεσης (pressure gradient) στην ελεύθερη επιφάνεια που υπολογίζεται από το Βήμα 1 χρησιμοποιώντας την εξίσωση Bernoulli. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας.
3. Επαναπροσδιορίζεται η ελεύθερη επιφάνεια μέσω μιας Lagrangian - Eulerian διαδικασίας σε δύο στάδια, η οποία χρησιμοποιεί τις συνιστώσες τις ταχύτητας που υπολογίσθηκαν στο Βήμα 2.
4. Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση, που συμβαίνει όταν η δυναμική συνοριακή συνθήκη ικανοποιεί ένα προκαθορισμένο κριτήριο.

Αναλυτικότερα, μετά τον υπολογισμό των πηγών κατά Hess & Smith (Βήμα 1), οι συνιστώσες της ταχύτητας (u_x , u_y , u_z) (σχ.144) υπολογίζονται στο σημείο ελέγχου κάθε επιφανειακού στοιχείου, και η ολική πίεση εξάγεται από την εξίσωση Bernoulli. Η ολική πίεση p^* υπολογίζεται ως το άθροισμα της στατικής πίεσης p_s και της

υδροστατικής που λαμβάνεται από τον όρο ρgh . Προφανώς, σε ένα οποιοδήποτε ενδιάμεσο βήμα, όπου έχουμε μια αυθαίρετη ελεύθερη επιφάνεια, η στατική πίεση p_s είναι διάφορη της περιβάλλουσας ατμοσφαιρικής πίεσης (την οποία θεωρούμε ίση με μηδέν). Αυτή η διαφορά χρησιμοποιείται σαν όρος πηγής για τον υπολογισμό της κατακόρυφης ταχύτητας u_z^* στην ελεύθερη επιφάνεια, μέσω της επίλυσης της εξίσωσης ορμής μη συνεκτικού ρευστού :

$$\rho \left[\frac{\partial u_x u_z^*}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_z^*}{\partial y} + \frac{\partial u_z u_z^*}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial z} \quad (10)$$



Σχήμα 144: Επιφανειακός όγκος ελέγχου.

Η εξίσωση (10) επιλύεται αριθμητικά μετά από ολοκλήρωση στους επιφανειακούς όγκους ελέγχου, όπως φαίνεται στο σχήμα 144. Το αποτέλεσμα αυτής της ολοκλήρωσης είναι ένα σύνολο μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που αναφέρονται στα επιφανειακά στοιχεία και έχουν την παρακάτω μορφή :

$$A_P u_{zP}^* = A_E u_{zE}^* + A_W u_{zW}^* + A_U u_{zU}^* + A_D u_{zD}^* + E_{(1234)} (p_P^* - \rho g z_P) \quad (11)$$

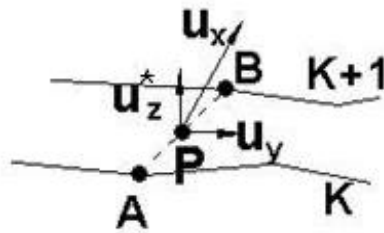
Η επιφάνεια $E_{(1234)}$ στην εξίσωση 11 αντιπροσωπεύει την προβολή της επιφάνειας (1234) (σχ.12) στο οριζόντιο επίπεδο, ενώ η κατακόρυφη πλευρά δz^* του όγκου ελέγχου είναι μια αυθαίρετη παράμετρος που ελέγχει την σύγκλιση της μεθόδου.

Αυτή επιδρά στους όρους μεταφοράς Ai της εξίσωσης 11, αλλά ουσιαστικά καθορίζει την επίδραση του όρου μεταβολής της πίεσης (gradient). Μετά από αρκετές αριθμητικές δοκιμές σε διάφορα πλοία και αριθμούς Froude, βρέθηκε πως το δz^* πρέπει να παίρνει τιμές ίδιας τάξης με το $(\delta x \delta y)$.

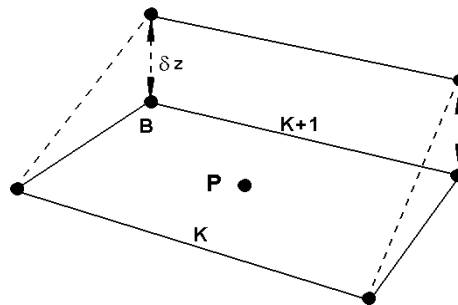
Οι όροι μεταφοράς Ai μπορούν να προσεγγιστούν από οποιοδήποτε άναντες σχήμα διαφορών ανώτερης τάξης. Παρόλα αυτά, στην συγκεκριμένη μελέτη κατά την διεύθυνση της ροής (διεύθυνση UD) χρησιμοποιήθηκε το πρωτοτάξιο άναντες σχήμα διαφορών, για να αποφευχθούν κατά το δυνατό κατάντη ανακλάσεις. Αυτό συνεπάγεται πως αρκεί μόνο μία σάρωση του υπολογιστικού χωρίου, για τον υπολογισμό της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας. Αν και η λύση εξαρτάται μόνο από την ανανέωση της ελεύθερης επιφάνειας, το μειονέκτημα της πρωτοτάξιας προσέγγισης είναι ότι απαιτεί πολύ πυκνή διακριτοποίηση ώστε να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Η υπολογισθείσα κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας χρησιμοποιείται για των υπολογισμό της νέας γεωμετρίας της ελεύθερης επιφάνειας μέσω δύο διορθωτικών βημάτων. Πρώτον, ακολουθώντας τις τοπικές ροϊκές γραμμές, τα σημεία A μιας εγκάρσιας τομής (K) της ελεύθερης επιφάνειας, μεταφέρονται στα σημεία B στην επόμενη εγκάρσια τομή (K+1), κατά το διάνυσμα της ταχύτητας, ώστε να δημιουργηθεί μια νέα εγκάρσια τομή κατά την διεύθυνση της ροής, όπως φαίνεται στα σχήματα 12 και 13. Στη συνέχεια η τομή αυτή διορθώνεται κατά δz ώστε η συνολική παροχή διά του επιφανειακού στοιχείου να είναι ίση με το μηδέν (κινηματική συνθήκη), σχήμα 146.

Για να επιταχυνθεί η διαδικασία σύγκλισης, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες από μία φορές κατά μήκος του στοιχείων, πριν επαναυπολογισθούν οι ταχύτητες. Ολόκληρη δε η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση και της δυναμικής οριακής συνθήκης.



Σχήμα 145



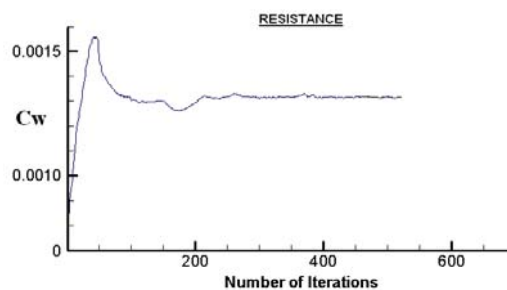
Σχήμα 146

Επειδή η ακρίβεια των υπολογισμών εξαρτάται σημαντικά από τον αριθμό των panels, για να μειωθεί η υπολογιστική προσπάθεια μπορεί η επίλυση να ξεκινήσει με ένα αραιό πλέγμα, το οποίο όμως με σταδιακή πυκνωση θα φτάνει στον μέγιστο αριθμό panels που έχει καθοριστεί στα δεδομένα. Εκτός των γεωμετρικών παρεμβολών δεν υπάρχει άλλη δυσκολία στο να περάσεις από το ένα πλέγμα στο αμέσως πυκνότερο, λόγω της ανάλυσης η οποία χρησιμοποιείται. Σε κάθε περίπτωση, για να αποφευχθούν προβλήματα σύγκλισης, η ανανέωση της ελεύθερης επιφάνειας περιορίζεται από μία εξωτερική παράμετρο, η οποία σταθεροποιεί την όλη διαδικασία, αλλά ταυτόχρονα επιβραδύνει την σύγκλιση.

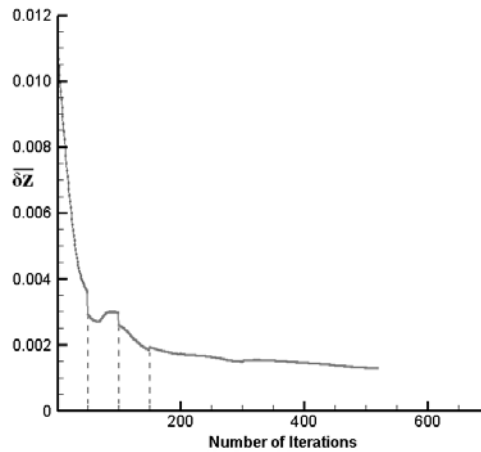
Ένα παράδειγμα της ιστορίας σύγκλισης δίδεται στα σχήματα 147a και 147b για την γάστρα του σχήματος 3 σε αριθμό Froude $Fn=0.244$. Η ελεύθερη επιφάνεια αρχικά περιγράφεται με 5,000 στοιχεία και με σταδιακή πυκνωση κάθε 50 επαναλήψεις

καταλήγει τελικά στα 25,000 στοιχεία. Όπως γίνεται αντιληπτό από το σχήμα 9a ο συντελεστής αντίστασης κυματισμού έχει πρακτικά σταθεροποιηθεί μετά από 300 επαναλήψεις. Η ικανοποίηση της δυναμικής συνθήκης ελέγχεται μέσω του όρου $|\overline{\delta z}|$, (σχ.147b) ο οποίος ισούται με τον μέσο όρο των απολύτων τιμών, της διαφοράς μεταξύ υπολογισμένης και θεωρητικής υδροστατικής πίεσης σε κάθε επιφανειακό στοιχείο, εκφρασμένες σε [m]. Προφανώς, λόγω της προσπάθειας περιγραφής της ελεύθερης επιφάνειας με τετράπλευρα στοιχεία, η τιμή του όρου αυτού, καθώς συγκλίνει το πρόβλημα τείνει ασυμπτωτικά σε ένα κάτω όριο το οποίο είναι μεγαλύτερο του μηδέν. Για αυτό τον λόγο σύγκλιση με βάση το $|\overline{\delta z}|$ θεωρείται πως επιτυγχάνεται, όταν ο όρος αυτός γίνει μικρότερος από μία τιμή η οποία εξαρτάται από τον αριθμό Froude, την κλίμακα και το πλήθος των στοιχείων.

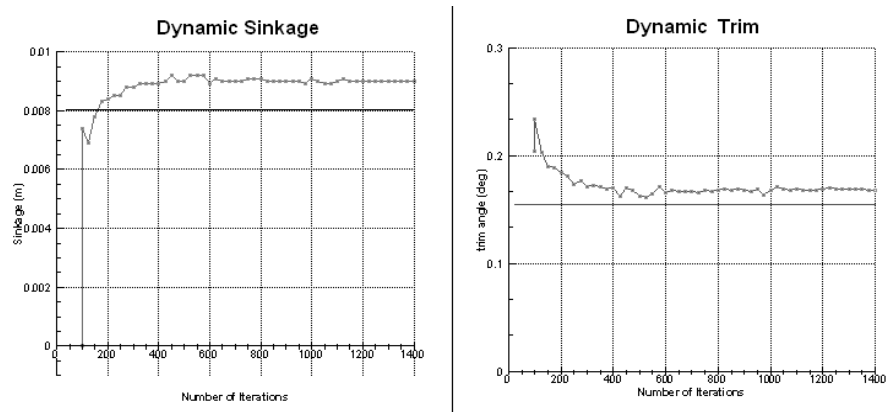
Στην περίπτωση υπολογισμών με ελεύθερο sinkage και trim, μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο, η ολική διαδικασία σύγκλισης ελέγχεται από την επιμέρους σύγκλιση του βυθίσματος και της διαγωγής. Παράδειγμα τέτοιας διαδικασίας σύγκλισης παρουσιάζεται στα σχήματα 148a, 148b και 148c για την ίδια γάστρα και για αριθμό Froude $F_n=0.284$. Παρατηρείται πως η σύγκλιση εδώ, ουσιαστικά επιτυγχάνεται μετά από 600 επαναλήψεις.



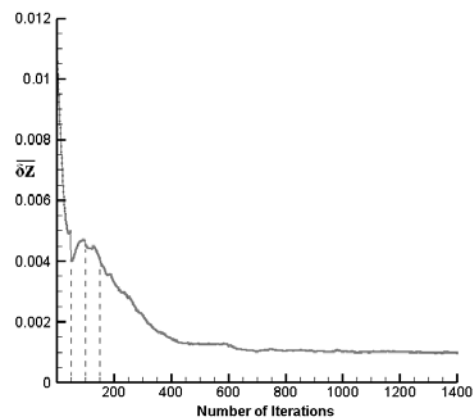
Σχήμα 147a: Σύγκλιση του συντελεστή αντίστασης κυματισμού.



Σχήμα 147b: Σύγκλιση της δυναμικής συνοριακής συνθήκης.



Σχήμα 148a-b: Σύγκλιση της παράλληλης βύθισης και της δυναμικής διαγωγής.



Σχήμα 148c: Σύγκλιση της δυναμικής συνοριακής συνθήκης με ελεύθερο sinkage και trim.

2.4 Υπολογισμός sinkage και trim

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παράλληλης βύθισης και της δυναμικής διαγωγής, όποτε αυτά ζητούνται (runs with free trim & sinkage), βασίζεται σε μια επαναληπτική διαδικασία εξισορρόπησης του βάρους του πλοίου, από τις ασκούμενες δυνάμεις και ροπές στην γάστρα. Οι κατακόρυφες δυνάμεις και ροπές πάνω στην γάστρα, υπολογίζονται όπως και η αντίσταση κυματισμού, δηλαδή με ολοκλήρωση της στατικής πίεσης στα panels της γάστρας.

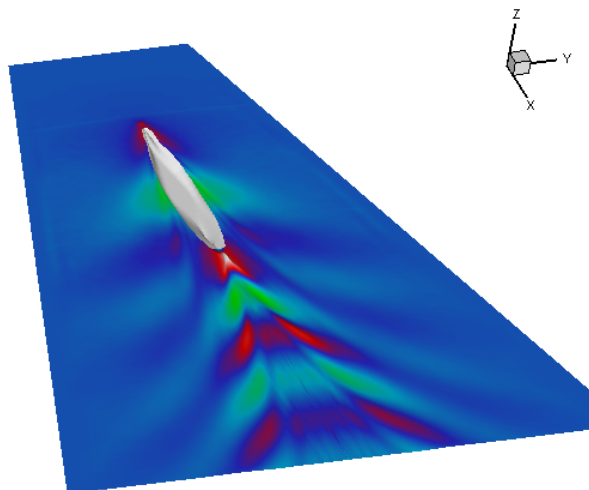
Η διαδικασία ξεκινά μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων όπου αυτά κρατούνται σταθερά ώστε να διαμορφωθεί μια πρώτη ελεύθερη επιφάνεια. Για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση γίνεται χρήση συντελεστών υποχαλάρωσης στον υπολογισμό των απαραίτητων μεταβολών, ενώ η διόρθωση του βυθίσματος και της διαγωγής γίνεται κάθε 25 βήματα διόρθωσης της ελεύθερης επιφάνειας, έτσι ώστε η τελευταία να προλαβαίνει να συγκλίνει.

Η εξισορρόπηση επιτυγχάνεται διορθώνοντας τις τιμές του βυθίσματος και της διαγωγής από τους υδροστατικούς τύπους (12) & (13) :

$$\delta h = r_h \frac{W - D}{\gamma A_W} \quad (12)$$

$$\tan(\theta) = r_\theta \frac{D (x_W - x_B)}{\gamma I_{yy}} \quad (13)$$

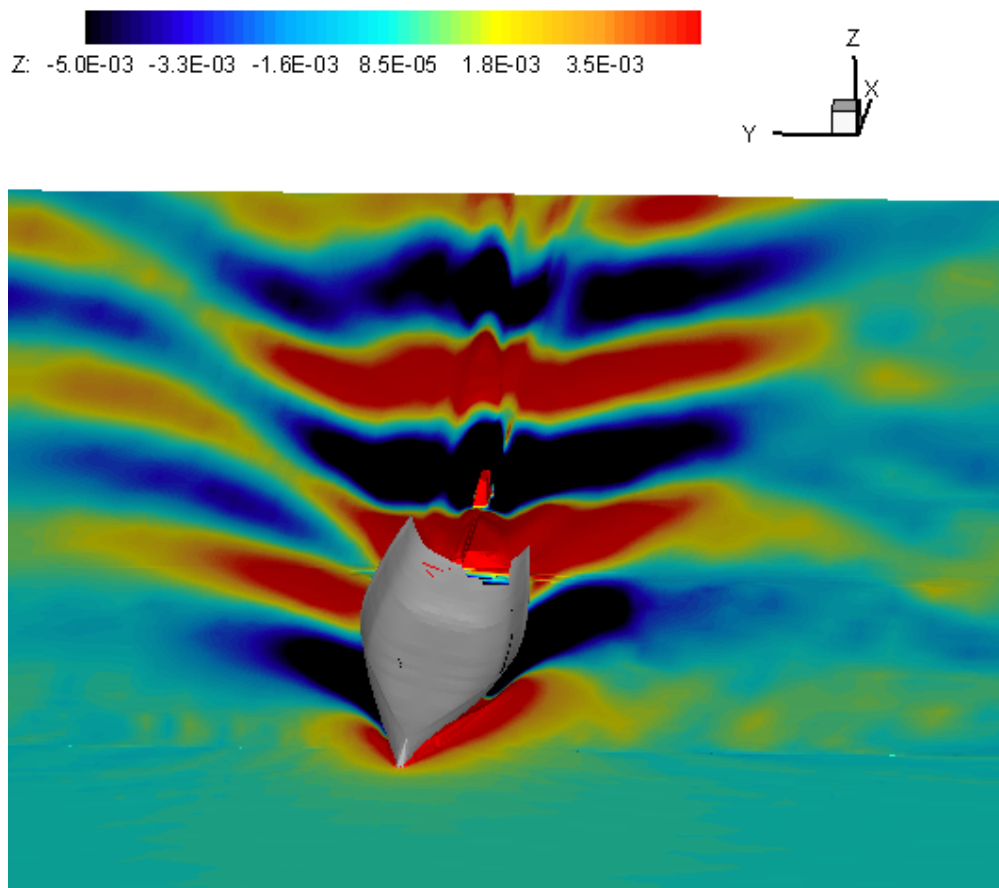
Όπου : W το εκτόπισμα του πλοίου υπολογίζεται στην πρώτη επανάληψη (ήρεμο νερό), D : η άντωση υπολογίζεται με ολοκλήρωση της στατικής πίεσης στα panels της γάστρας, γ : το ειδικό βάρος του ρευστού, A_W το εμβαδό της ισάλου επιφανείας, I_{yy} η δεύτερη ροπή της ισάλου επιφανείας ως προς τον εγκάρσιο κύριο άξονα, x_W η διαμήκης θέση του κέντρου βάρους του πλοίου, πρέπει να δίδεται, x_B η διαμήκης θέση του κέντρου άντωσης, υπολογίζεται από θεώρημα ροπών στα ύφαλα, r_h , r_θ συντελεστές υποχαλάρωσης.



Σχήμα 149: Πεδίο κυματισμών υπολογισμένο με βάση τον κώδικα δυναμικής ροής για την γάστρα του σχ.3 σε αριθμό Froude $Fn=0.284$.

Επιπλέον, στο συγκεκριμένο κώδικα προσεγγίστηκε το μοντέλο του ομόρρου της καρίνας, δηλαδή το φύλλο στροβιλότητας. Αυτό έγινε χρησιμοποιώντας διδιάστατο κώδικα για αεροτομές, όπου επιλύθηκε η πτέρυγα σε γωνία πρόσπτωσης 7° για $\Psi=0$. Επιλύσαμε πολλές τέτοιες γραμμές αεροτομών καθ' ύψος από τις οποίες προέκυψε το φύλλο στροβιλότητας. Κύρια παρατήρηση είναι ότι καθώς απομακρυνόμαστε από την πτέρυγα, η στροβιλότητα τείνει στο μηδέν.

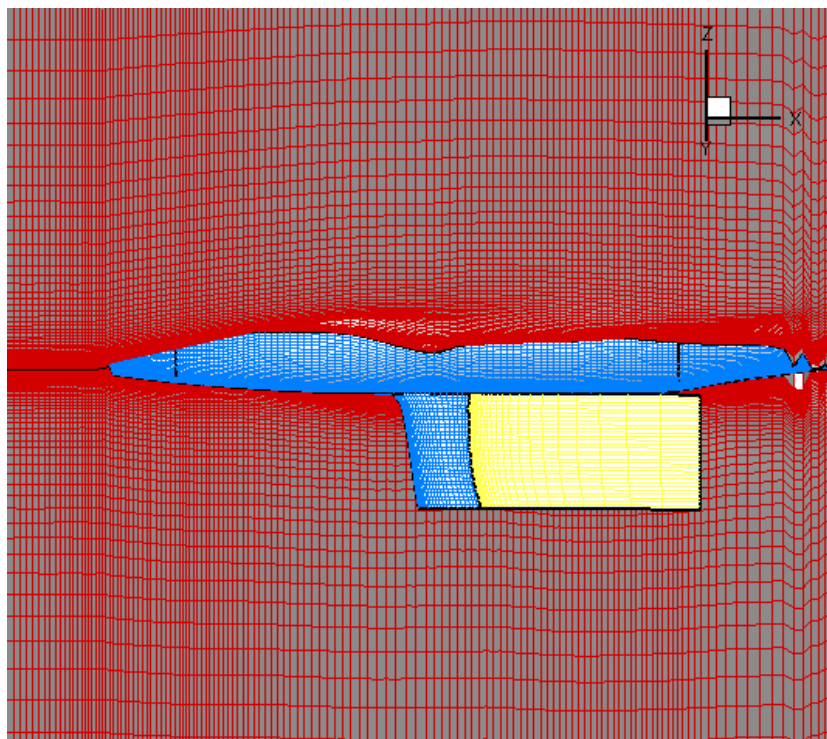
Ακόμη, ο κώδικας υπέστη κατάλληλη μετατροπή, ώστε χειριζόμενος τη γεωμετρία να «πιάσει»/προσεγγίσει τις αλλαγές που υφίστανται λόγω της ύπαρξης του roll (είναι η περιστροφή γύρω από το διαμήκη άξονα του σώματος).



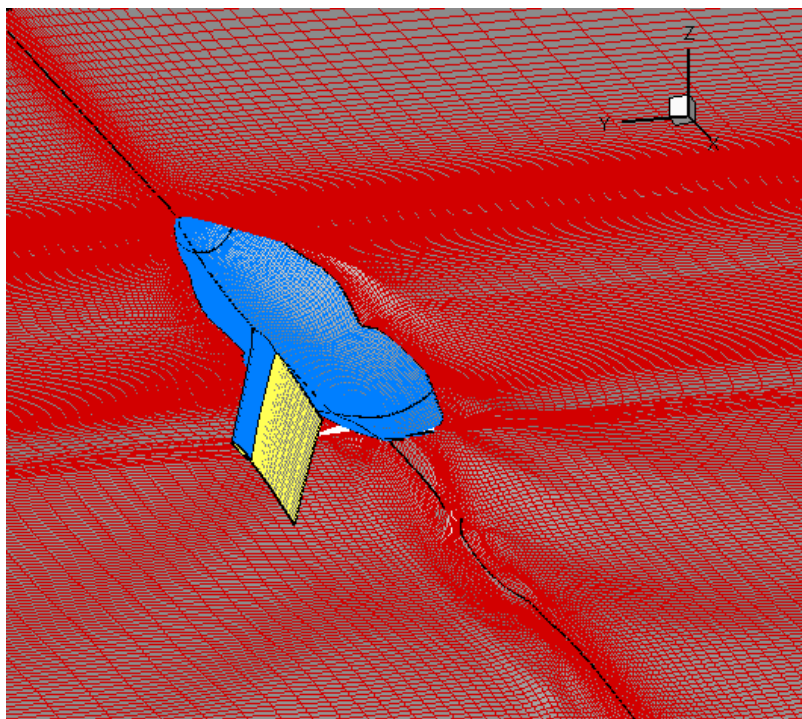
Σχήμα 150: Η γάστρα του σκάφους με την καρίνα (keel), όπως φαίνεται από πάνω.



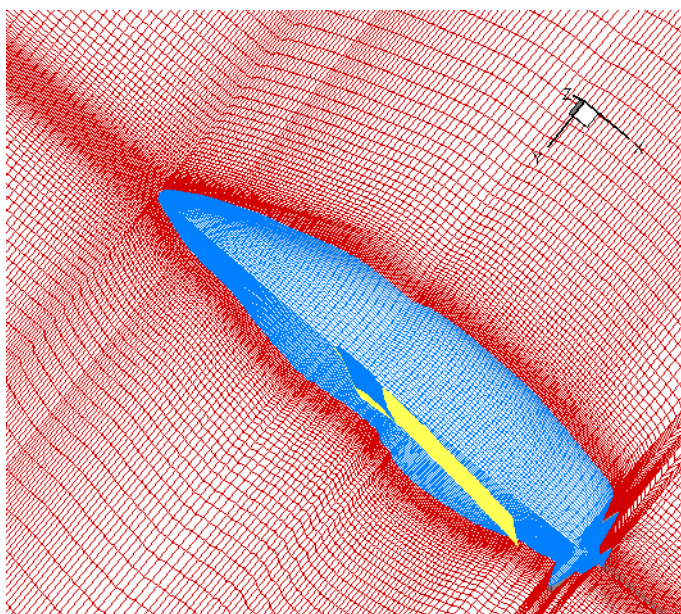
Σχήμα 151: Κυματισμοί που προκαλούνται στην ελεύθερη επιφάνεια.



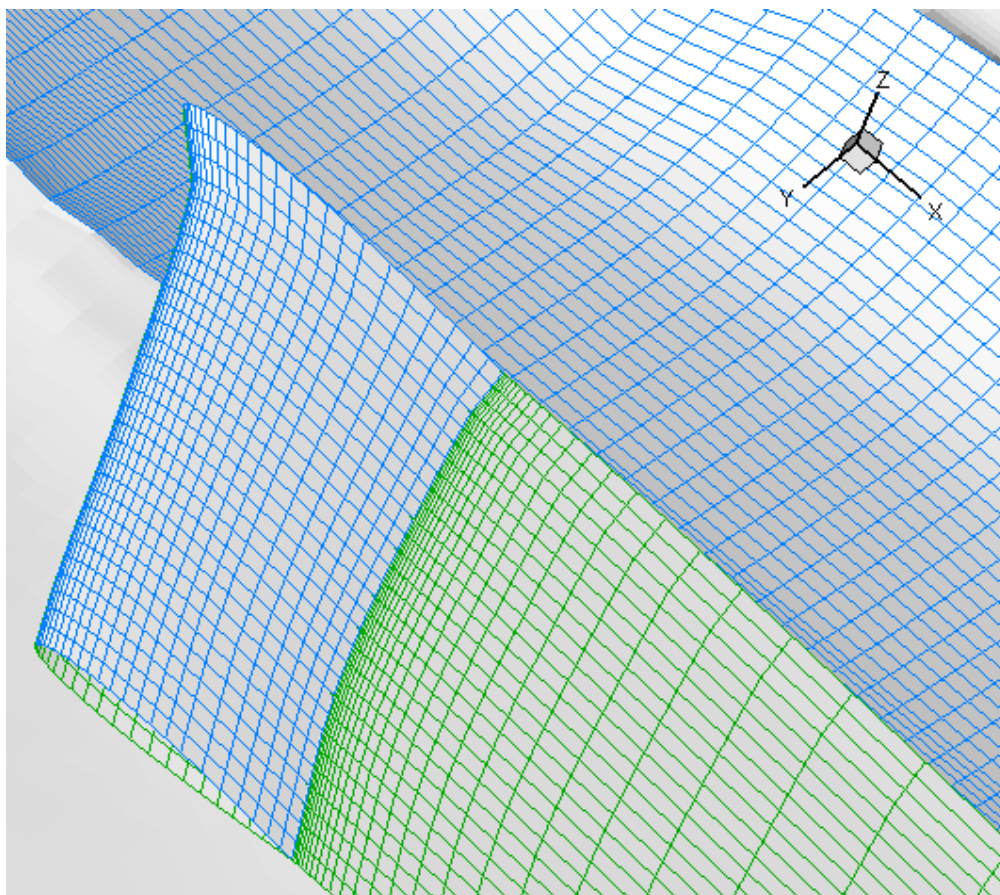
Σχήμα 152: Η γάστρα του ιστιοπλοϊκού σκάφους, η καρίνα του και ο ομόρρους (wake) πίσω από την καρίνα.



Σχήμα 153: Γίνεται εμφανής η ελεύθερη επιφάνεια.



Σχήμα 154: Ελεύθερη επιφάνεια και γάστρα του σκάφους.



Σχήμα 155: Όψη των πάνελς πάνω στο σώμα, στην καρίνα και στον ομόρρου της.

B. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Ο καλύτερος τρόπος να επαληθευθούν τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος, είναι η διεξαγωγή πειραμάτων υπό κλίμακα. Για το λόγο αυτό πραγματοποιήθηκαν δοκιμές στην πειραματική δεξαμενή του Εργαστηρίου Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής (ΕΝΘΥ) του ΕΜΠ.

Πρόκειται για δεξαμενή μήκους 100 m, πλάτους 4.6m και βάθους 3m. Η Πειραματική αυτή Δεξαμενή είναι εξοπλισμένη με φορείο δοκιμών και με σύστημα παραγωγής και αποσβέσεως. Για τη παρακολούθηση των πειραμάτων, υπάρχουν κατά μήκος της μιας πλευράς της δεξαμενής 18m ειδικών παραθύρων ύψους 1m.

Στη μια άκρη της δεξαμενής υπάρχει το σύστημα παραγωγής κυματισμών, το οποίο αποτελείται περύγιο ανοξείδωτου χάλυβα (πλάτος 4.6mm και ύψος 2m) εδρασμένο σε βάθρο χάλυβα ύψους 1.30m από τον πυθμένα της δεξαμενής. Το περύγιο κινείται μέσω υδραυλικού συστήματος ισχύος 15KW. Το νερό από την πίσω πλευρά του περυγίου αντλείται κατά τη διάρκεια της λειτουργίας.

Στο άλλο άκρο της δεξαμενής έχει κατασκευαστεί ειδική ημιπερατή ακτή συνολικού μήκους 11.1m για την απόσβεση των προσπιπτόντων κυματισμών, που πετυχαίνει μέσο συντελεστή απόσβεσης 95%. Το φορείο έχει βάρος 5.5 tons και κινείται πάνω σε σιδηροτροχιές κατά μήκος της δεξαμενής με μέγιστη ταχύτητα 5.5m/s ή 10.5 knots. Το φορείο δοκιμών οδηγείται από ειδικό χειριστήριο και διαθέτει γέφυρα προσδέσεως των προτύπων και γέφυρα παρακολούθησης των πειραμάτων. Στο πίσω μέρος του φορείου υπάρχει σύστημα αναρτήσεως για τη βαθμονόμηση μεγάλων οργάνων μέτρησης ταχύτητας νερού. Πάνω στο φορείο τοποθετείται όλος ο αναγκαίος εξοπλισμός για τη διεξαγωγή των διαφόρων πειραμάτων. Η ταχύτητα του φορείου μετριέται με ειδικό τροχό με φωτοηλεκτρικό σύστημα με ακρίβεια 0.1mm/s .

Το φορείο κινείται στην περιοχή των χαμηλών ταχυτήτων (μέχρι 0.5m/s) με ειδικό ηλεκτροκινητήρα συνεχούς ρεύματος, που τροφοδοτείται με ανορθωμένη από το δίκτυο τάση. Για μεγαλύτερες ταχύτητες, υπάρχουν τέσσερις κινητήρες συνεχούς

ρεύματος που τροφοδοτούνται από σύστημα 51KW μέσω εναέριων ροηφόρων αγωγών.

Για την διεξαγωγή των πειραμάτων αντίστασης, το μοντέλο συνδέεται με το φορείο μέσω του δυναμόμετρου. Η ώση στο μοντέλο μεταφερόταν από το δυναμόμετρο το οποίο στερεωνόταν στο μέσο του πλάτους κατά το εγκάρσιο (CL) και στην θέση του διαμήκους κέντρου άντωσης (LCB) κατά το διάμηκες. Η τελευταία αυτή θέση, επιλέχθηκε με βάση την πείρα του εργαστηρίου, τόσο γιατί βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το κέντρο βάρους του πλοίου (LCG), όσο και γιατί, για συνήθεις μορφές πλοίων, βρίσκεται κοντά στο κέντρο πλευστότητας, γύρω από το οποίο γίνονται οι περιστροφές, σύμφωνα με την θεωρία μικρών μεταβολών.

Ανάμεσα στο πρυμναίο όργανο στήριξης και το δυναμόμετρο υπάρχει το φρένο, το οποίο είναι υπεύθυνο για τη συγκράτηση του μοντέλου όταν αυτό είναι ακίνητο.

Τέλος, στο πίσω μέρος του φορείου ακολουθεί ένας μηχανισμός βίαιης απόσβεσης υψηλών κυματισμών που δημιουργεί το πρότυπο και δεν αποσβαίνονται γρήγορα από μόνοι τους (σιδερώστρα). Η απόσβεση αυτή επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση της σιδερώστρας εφαπτομενικά της επιφάνειας του νερού κατά την επιστροφή του φορείου στη θέση εκκίνησης. Επίσης ένας άλλος τρόπος απόσβεσης των κυματισμών ήταν η τοποθέτηση στα άκρα και κατά μήκος της δεξαμενής, φελλών απόσβεσης.

Τα μετρητικά συστήματα επί του φορείου είναι πλήρως αυτοματοποιημένα με χρήση Η/Υ, ο οποίος κάνει στη συνέχεια και την ανάλυση των πειραματικών μετρήσεων. Η πειραματική δεξαμενή διαθέτει όλα τα όργανα που απαιτούνται για τη μέτρηση των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν (δυνάμεις, ροπές, κινήσεις, ταχύτητες ρευστού, πιέσεις ρευστού) καθώς και πλήρες σύστημα βιντεοσκοπήσεως των πειραμάτων.

Τα πειράματα έγιναν σε μοντέλο μήκους 2.24m (κλίμακας 1/4) και για ένα εύρος ταχυτήτων.

Έγινε σύγκριση της γεωμετρίας της ελεύθερης επιφάνειας που παράγει το μοντέλο στην δεξαμενή, με την αντίστοιχη που υπολογίζει ο κώδικας δυναμικής ροής.



Σχήμα156: Πειραματική δεξαμενή ΕΜΠ.



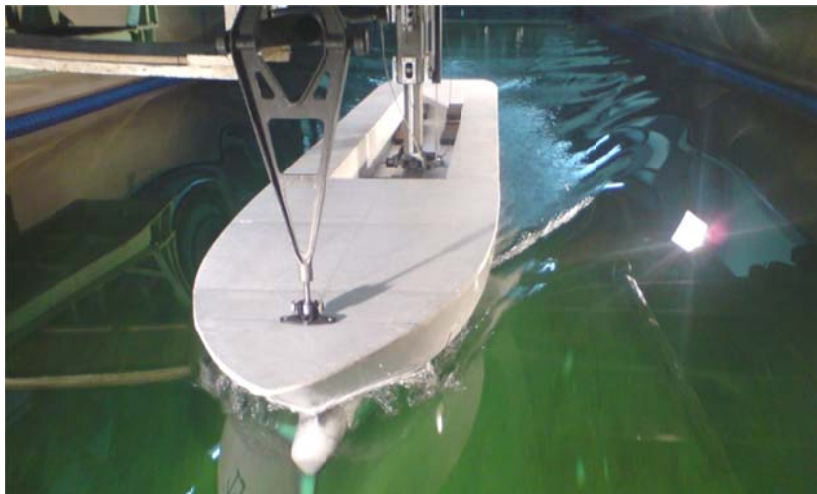
Σχήμα 157: Μοντέλο τη στιγμή της μέτρησης.



Σχήμα 158

Ο πιο εύκολος και ταυτόχρονα αξιόπιστος τρόπος να μετρήσουμε τη γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας, είναι να μετρηθούν διαμήκεις τομές (wavecuts) του συστήματος κυματισμών που παράγει το μοντέλο στη δεξαμενή, οι οποίες στην συνέχεια θα μπορούσαν να συγκριθούν με αντίστοιχες τομές της επιφάνειας που παράγει ο κώδικας δυναμικής ροής. Λόγω της μονιμότητας του φαινομένου της αντίστασης, η διαμήκης τομή της ελεύθερης επιφάνειας σε δεδομένη απόσταση από το μοντέλο, ισοδυναμεί με την μέτρηση σε σταθερή θέση, της χρονικής ιστορίας του κυματισμού που παράγει το κινούμενο μοντέλο.

Για την διεξαγωγή των πειραμάτων το μοντέλο στερεώνεται στο δυναμόμετρο του φορείου της δεξαμενής. Για λόγους ελέγχου της επαναληψιμότητας των πειραματικών αποτελεσμάτων, σε κάθε ταχύτητα παίρναμε μέτρηση ισορροπίας, αφήναμε δηλαδή το μοντέλο να ηρεμήσει.



Σχήμα 159: Μοντέλο σε κίνηση, εμφανής η σύνδεση του μέσω οδηγού και δυναμόμετρου.



Σχήμα 160



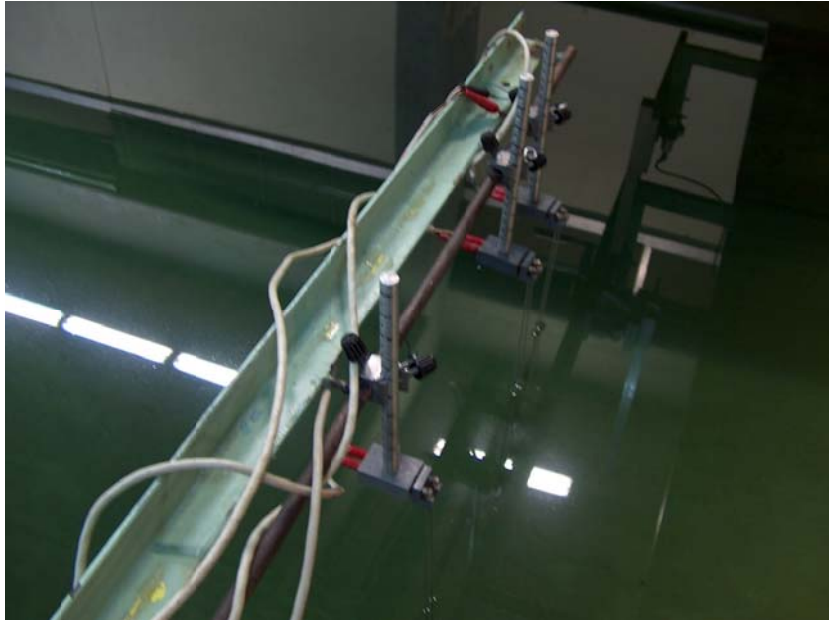
Σχήμα 161: Φορείο της δεξαμενής.

1.ΔΙΑΤΑΞΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

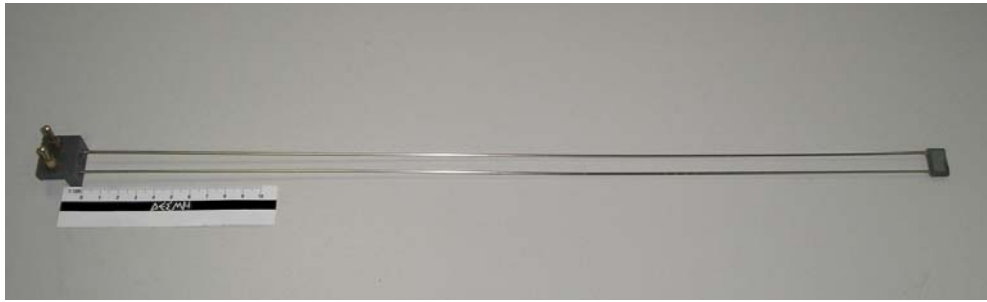
Για την μέτρηση των τομών της ελεύθερης επιφάνειας (wavcuts) χρησιμοποιήθηκε ένας σταθερός οριζόντιος πρόβολος, κάθετος στην πλευρά της δεξαμενής, άρα και στην διεύθυνση κίνησης του μοντέλου. Ο πρόβολος στερεώθηκε στην εσωτερική πλευρά της δεξαμενής με τρόπο που του εξασφάλιζε σταθερότητα και ταυτόχρονα δεν εμποδίζει την διέλευση του φορείου. Στο πάνω μέρος του προβόλου ήταν τοποθετημένα ένας αριθμημένος κανόνας και η ράβδος στερέωσης των μετρητικών ύψους κύματος (wave probes).

Τα όργανα μέτρησης της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τύπου αντίστασης (resistance type wave probe). Το καθένα από αυτά αποτελείται από δύο παράλληλα τοποθετημένα λεπτά σύρματα. Το μήκος τους είναι 40cm και η μεταξύ τους απόσταση 6mm. Τα σύρματα ενώνονται στο κάτω άκρο τους ώστε να δημιουργούν ένα κλειστό κύκλωμα. Το πάνω μέρος τους τοποθετείται σε ειδική βάση που είναι αναρτημένη στο πρόβολο, έτσι ώστε το probe να είναι μισοβυθισμένο και κάθετο στην ελεύθερη επιφάνεια. Για τις μετρήσεις τοποθετήθηκαν τρία waveprobes σε αποστάσεις 75cm, 90cm και 105cm, ανάλογες των διαστάσεων του μοντέλου, και μετρούμενες από το σημείο περιστροφής του μοντέλου.





Σχήμα 162: Πρόβολος στήριξης των waveprobes.



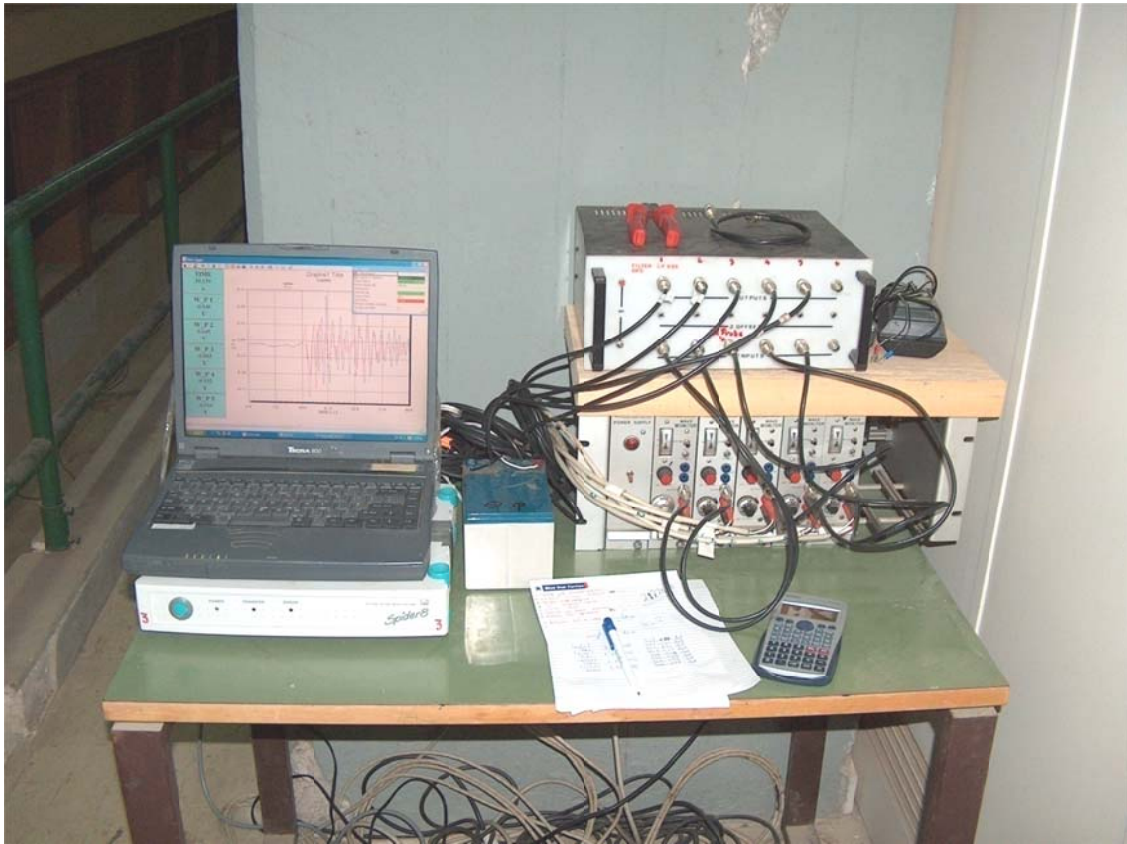
Σχήμα 163: Wave probe τύπου αντίστασης.

Η λειτουργία του οργάνου βασίζεται στη διαφορά αντίστασης ενός γυμνού σύρματος όταν αυτό βρίσκεται στον αέρα και όταν είναι βυθισμένο στο νερό. Καθώς διέρχεται ένα κύμα από το waveprobe, μεταβάλλεται η αναλογία του ελεύθερου προς το βυθισμένο μήκος του. Η αναλογία αυτή, λόγω της σταθερής τάσης, οδηγεί σε αλλαγή της έντασης του ρεύματος, η οποία μέσω κατάλληλης βαθμονόμησης μεταφράζεται σε ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Πολύ σημαντική για την ακρίβεια των μετρήσεων ήταν η διαδικασία βαθμονόμησης, η οποία αποσκοπεί στην εξαγωγή μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ έντασης ρεύματος και βυθισμένου μήκους. Λόγω της μεγάλης ευαισθησίας του οργάνου στις περιβαλλοντολογικές αλλαγές, έπρεπε μερικές φορές να γίνεται ακόμα και δύο φορές την ίδια μέρα. Για τους ίδιους λόγους πριν από κάθε μέτρηση λαμβανόταν μία μηδενική μέτρηση (μέτρηση θορύβου), ο μέσος όρος της οποίας αφαιρούνταν από την κανονική μέτρηση που ακολουθούσε. Επίσης, ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε και στις ελάχιστες αποστάσεις μεταξύ των probes, για να μην επάγει το μαγνητικό πεδίο του ενός, ρεύμα στο άλλο.

Μετρήσεις έγιναν για τρεις διαφορετικές αποστάσεις από τον διαμήκη άξονα του μοντέλου.

Το δε σήμα από τα τρία waveprobes μεταφέρονταν μέσω καλωδίων στη βάση μέτρησης που βρισκόταν παραπλεύρως της δεξαμενής σε σταθερό σημείο. Εκεί ενισχυόταν, φιλτράρονταν για υψίσυχο θόρυβο, ψηφιοποιούνταν και τελικά κατέληγε σε ένα φορητό υπολογιστή όπου καταγράφονταν. Για την ψηφιοποίηση χρησιμοποιήθηκε σταθερή συχνότητα δειγματοληψίας 200Hz.



Σχήμα 164: Βάση ενίσχυσης, φιλτραρίσματος και καταγραφής του σήματος των waveprobes.

Όπως αναφέρθηκε, πάνω στο φορείο υπάρχουν μετρητικά συστήματα, τα οποία κατά τη διάρκεια των πειραμάτων, λαμβάνουν μετρήσεις για διάφορα μεγέθη, όπως της αντίστασης ρυμούλκησης (resistance), της γωνίας διαγωγής (pitch) και της ανύψωσης (heave) του προτύπου. Οι μετρήσεις αυτές οι οποίες είναι σε Volts ανάγονται στις φυσικές μονάδες μέτρησης των μετρούμενων μεγεθών που είναι σε Kp, μοίρες και cm αντίστοιχα, με την βοήθεια μια συνάρτησης μεταφοράς, η οποία προκύπτει από τη διαδικασία της βαθμονόμησης ή «καλιμπραρίσματος» του οργάνου και προηγείται του πειράματος.

Κατά την διαδικασία της βαθμονόμησης, από γνωστά ζεύγη τιμών (x,y), όπου x οι μετρήσεις σε Volts των γνωστών y φυσικών μεγεθών, προκύπτουν οι τρεις συναρτήσεις μεταφοράς που είναι γραμμικές, δηλαδή της μορφής:

$$y = a \cdot x + b$$

Κατά τη διάρκεια της κύριας πειραματικής διαδικασίας, πριν από κάθε «τρέξιμο», λαμβάνεται μηδενική μέτρηση x_0 σε κατάσταση ακινησίας για κάθε μετρούμενο μέγεθος. Κατά το τρέξιμο μετράται τιμή x_1 , οπότε το ζητούμενο φυσικό μέγεθος προκύπτει από:

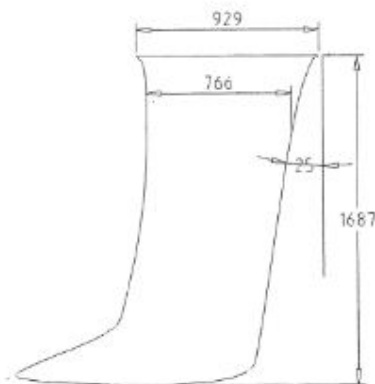
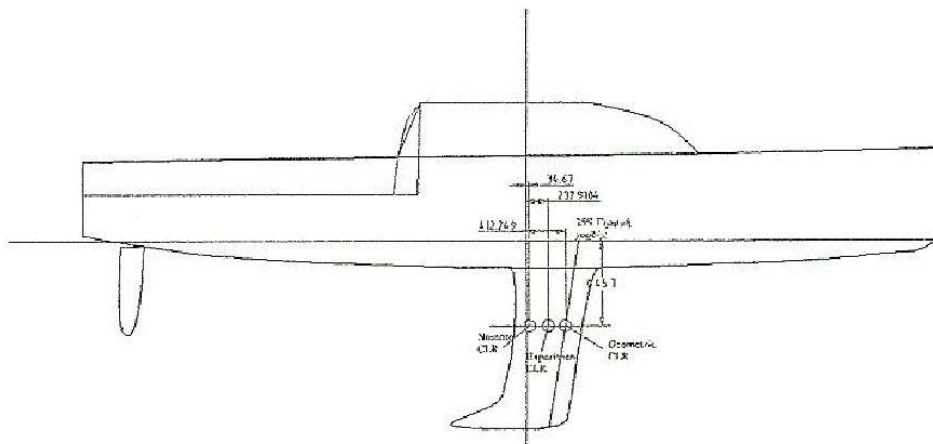
$$y = y - y_0 = [a \cdot x_1 + b] - [a \cdot x_0 + b] = a (x_1 - x_0)$$

Η εξαγωγή και χρήση της συνάρτησης μεταφοράς για τον υπολογισμό της τελικής τιμής της μέτρησης γίνεται αφενός για να ληφθούν υπόψη διαταραχές που επηρεάζουν το σύστημα μέτρησης – όπως η συχνότητα και η τάση του δικτύου τροφοδοσίας ρεύματος, η διαφοροποίηση της θερμοκρασίας των οργάνων κλπ. – και αφετέρου η μετατροπή των τιμών από μονάδες ρεύματος σε μονάδες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

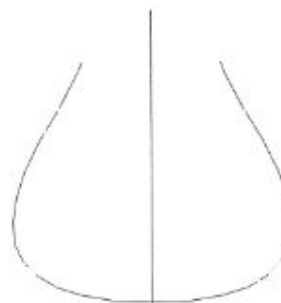
Στα πειράματα των Wavecuts, όπως αναφέρθηκε, χρησιμοποιήθηκαν τρία wave probes, δηλαδή λαμβάνονταν μετρήσεις για τρεις διαφορετικές εγκάρσιες αποστάσεις από τον διαμήκη άξονα του μοντέλου. Οι αποστάσεις αυτές ήταν σταθερές για τις διάφορες ταχύτητες, αλλά άλλαζαν από μοντέλο σε μοντέλο. Το δε μήκος καταγραφής ήταν τέτοιο ώστε να μην έχουν προλάβει να επιστρέψουν ανακλάσεις των κυματισμών από τα τοιχώματα.

Τα αρχεία με τις τιμές που προκύπτουν από τα πειράματα περιλαμβάνουν τρεις στήλες. Η πρώτη αποτελεί την χρονική ιστορία του πειράματος, και οι υπόλοιπες τρεις αντιπροσωπεύουν μετρήσεις των κάθετων διαταραχών της ελεύθερης επιφάνειας που αντιστοιχούν στα τρία Wave Probes, που χρησιμοποιήθηκαν στις μετρήσεις. Με βάση αυτές τις τιμές γίνεται η παραγωγή των κυματομορφών για κάθε Probe. Ο άξονας αντιπροσωπεύει μήκος, και προκύπτει από πολλαπλασιασμό της χρονικής ιστορίας με την ταχύτητα στην οποία πραγματοποιήθηκε η μέτρηση. Ο άξονας y , αντιπροσωπεύει τις κάθετες μετατοπίσεις της επιφάνειας του νερού και προκύπτει ως εξής: κατά τη διάρκεια των πειραμάτων – όπως και σε όλα τα πειράματα- λαμβάνουμε μία μέτρηση σε κατάσταση ηρεμίας. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε την μέτρηση, στην επιθυμητή ταχύτητα. Αφαιρώντας από τις

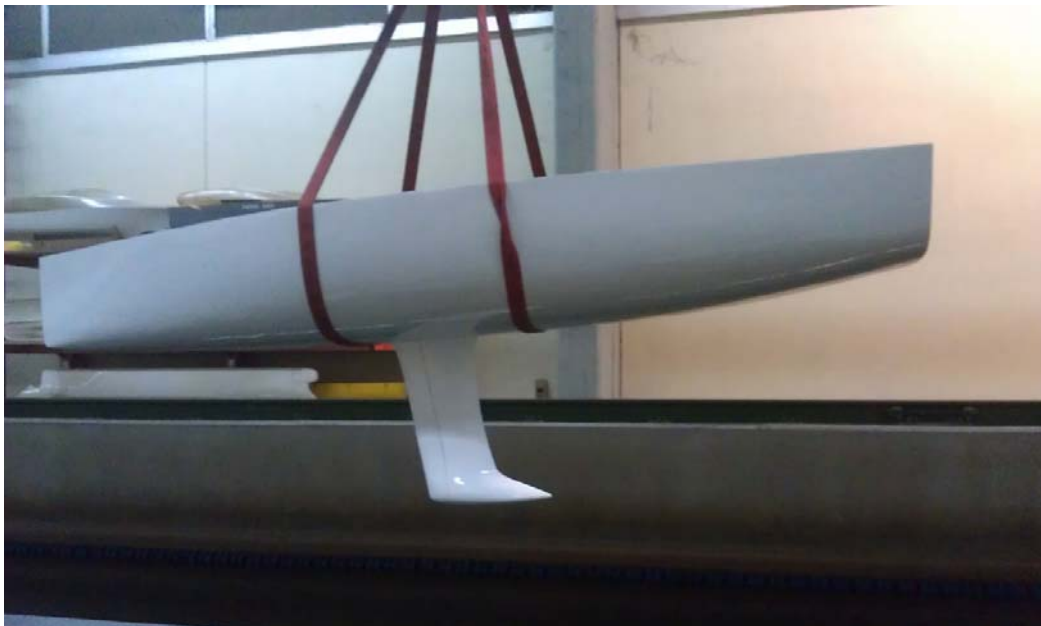
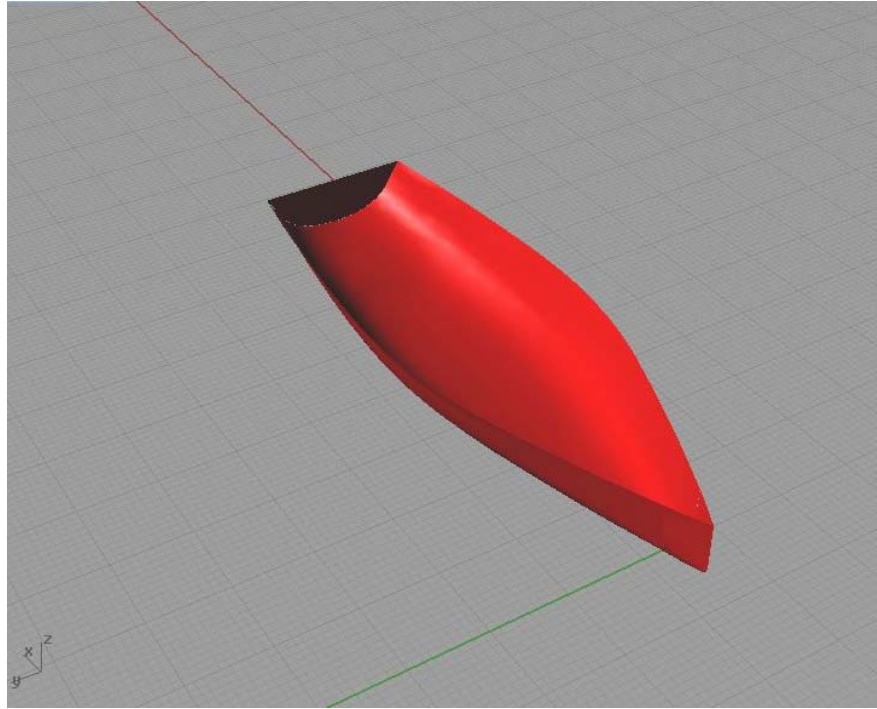
αντίστοιχες τιμές του πειράματος (για κάθε probe) τις τιμές που αντιστοιχούν στην κατάσταση ηρεμίας – για κάθε χρονική στιγμή – προκύπτουν οι πραγματικές τιμές των κάθετων μετατοπίσεων. Τέλος, οι διαφορές που προκύπτουν, τις μετατρέπουμε με τη βοήθεια των συναρτήσεων μεταφοράς από μονάδες ρεύματος σε μονάδες μήκους, προκειμένου να κατασκευάσουμε τα διαγράμματα των κυματομορφών.

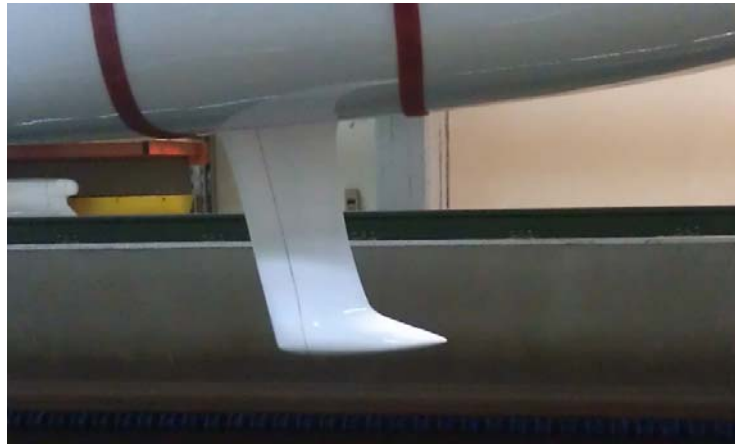


Προφίλ καρίνας



Τομή βολβού









Σχήμα 165: Εικόνες από το μοντέλο ILC30, την καρίνα του και την επεξεργασία του.

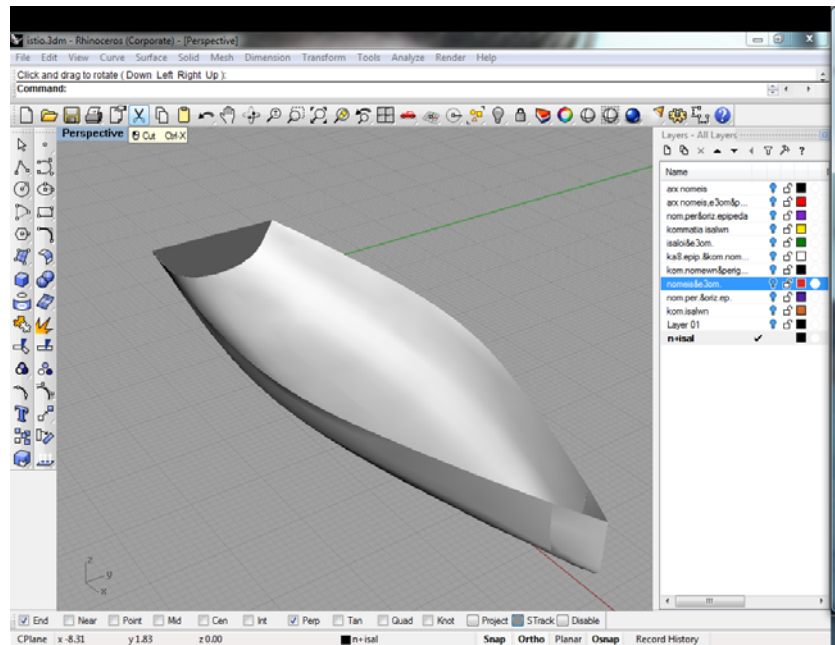
Γ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

1. ΣΥΝΟΛΟ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ – ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

Για να ελεγχθεί η ακρίβεια της μεθόδου κρίθηκε απαραίτητη, όπως ήδη αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η σύγκριση με πειραματικά δεδομένα. Για να διερευνηθούν οι δυνατότητες της μεθόδου, έπρεπε να δοκιμαστεί σε έναν αριθμό μοντέλων-προτύπων, με κατά το δυνατόν διαφορετικά χαρακτηριστικά, και για ένα εύρος αριθμών Froude που να καλύπτουν τις δυνατότητες εφαρμογής της.

Με γνώμονα τα παραπάνω, επιλέχθηκαν το μοντέλο ILC30 από τα υπάρχοντα στο Εργαστήριο Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής του ΕΜΠ. Για το μοντέλο αυτό πραγματοποιήθηκαν πειράματα σε ταχύτητες 1.32m/s, 1.85m/s και 2.12m/s παρουσία και απουσία roll και yaw. Στην συνέχεια περιγράφεται η γάστρα και η καρίνα του ιστιοπλοϊκού σκάφους ILC30 που επιλέχθηκε. Στον παρακάτω πίνακα δίδονται συγκεντρωτικά τα βασικά χαρακτηριστικά τους σε πλήρη κλίμακα.

ΑΕΡΟ – ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΚΑΡΙΝΑΣ	
Καρίνα	NACA 0012
Μέγιστο άνοιγμα	1.690m
Η ακμή προσβολής σχηματίζει περίπου 25° γωνία από την κατακόρυφο.	
Μέση χορδή μήκους	766mm
Χορδή επαφής με το σκάφος μήκους	929mm
Η καρίνα παρουσιάζει διαμόρφωση τυπικού τριγωνικού βολβού.	
Επιφάνεια προσβολής	0.247m
Προβεβλημένη επιφάνεια	1.300m ²
Βρεχόμενη επιφάνεια	2.712m ²
Κατακόρυφο κέντρο επιφάνειας	861.298mm κάτω από τη χορδή επαφής
Οριζόντιο κέντρο επιφάνειας	612.208mm πρύμνηθεν της ακμής προσβολής
Taper ratio	0.986
Aspect ratio	2.202
Ολικός όγκος	0.149m ³
Βάρος	1656.247kg
Κατακόρυφο κέντρο βάρους	1156.873mm
Οριζόντιο κέντρο βάρους	678.124mm
Θέση καρίνας	3.576m πρύμνηθεν της προωραίας καθέτου.



ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΓΑΣΤΡΑΣ	
L	8.96m
B	3.07m
D	1.78m
Δ	2586kg
L/B	2.9
B/D	1.7
T	0.29m
Cb	0.626
LCB	4.257 from stern
LCF	4.055 from stern
WS	14605m ²

2.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΟΗΣ – ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ WAVECUTS

Ο κώδικας δυναμικής ροής, όπως περιγράφηκε, εφαρμόστηκε με σκοπό την πρόβλεψη της γεωμετρίας της ελεύθερης επιφάνειας. Κατά μέσο όρο, σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν περίπου 43,000 στοιχεία (panels), εκ των οποίων τα 40,000 απ αυτά κάλυπταν την ελεύθερη επιφάνεια.

Οι υπολογισμοί δυναμικής ροής έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι στιγμής για τις γάστρες ILC30 και BOC.

Στην συνέχεια, για όλες τις περιπτώσεις που έτρεξε ο κώδικας, δίνονται οι συγκρίσεις μεταξύ πειραματικά μετρημένων κυματομορφών και των αντίστοιχων υπολογισμένων από τον κώδικα δυναμικής ροής. Οι μετρήσεις δίδονται ανά γάστρα για τις διάφορες ταχύτητες, και για το κοντινότερο probe στο εκάστοτε μοντέλο. Επίσης, όπου απαιτείται δίδονται σχόλια και συμπεράσματα.

Όσον αφορά τις κυματομορφές, αυτές στα μεν πειραματικά παράγονται με μετατροπή της χρονικής ιστορίας σε στιγμιότυπο μέσω της ακριβής τιμής της πραγματικής ταχύτητας του μοντέλου (μόνιμο φαινόμενο), στα δε αριθμητικά προκύπτουν από διαμήκη τομή της επιφάνειας των στοιχείων (ορισμός wavecut) στην ίδια εγκάρσια θέση με το wave probe.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΕΠΙΛΟΓΟΣ

- ❁ Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν πάνελς έχουν το πλεονέκτημα της μοντελοποίησης της ροής γύρω από περίπλοκα τρισδιάστατα σχήματα. Παρ' όλα αυτά το πρώτο πράγμα που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι αυτή η μέθοδος βασίζεται σε επιλύσεις δυναμικής ροής και έτσι επιλύει καλύτερα πεδία προσαρτημένα στη ροή. Στην περίπτωση τέτοιων πεδίων η υπολογισμένη κατανομή πίεσης και η άνωση θα είναι κοντά στα πειραματικά αποτελέσματα, αλλά για τη δύναμη οπισθέλκουσας μόνο το κομμάτι της οπισθέλκουσας που επάγεται από την άνωση παρέχεται από την επίλυση δυναμικής ροής και μία εκτίμηση της οπισθέλκουσας του ιξώδους απαιτείται. Για ροές με σημαντικές περιοχές αποκόλλησης της ροής η μέθοδος συνήθως δείχνει προς περιοχές μεγάλων κλίσεων της πίεσης που προκαλούν την αποκόλληση της ροής, αλλά η κατανομή πίεσης που υπολογίζεται θα είναι λάθος.
- ❁ Η πρόσφατη τάση κάποιων προγραμματιστών κωδίκων είναι προς μεθόδους χαμηλής τάξης και το γεγονός ότι πλέον χρησιμοποιούνται πολλές μέθοδοι οδήγησε σε πολλές συγκριτικές μελέτες. Η απόφαση για το ποια θα επιλέξουμε συχνά δεν είναι εύκολη. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι «κάθε μέθοδος θα δώσει καλά αποτελέσματα εάν επικυρωθεί μέσα από ένα μεγάλο αριθμό τρεξιμάτων (test cases)», όπως είπε ο Dr. John Hess.
- ❁ Οι διαφορές που δημιουργεί η ύπαρξη roll όσο απομακρυνόμαστε από το σώμα, γίνονται ολοένα και λιγότερο έντονες.
- ❁ Όταν έχουμε περιστροφή γύρω από το διαμήκη άξονα (roll), παρουσιάζεται ένα πειραματικό σπάσιμο. Το roll ενισχύει το ύψος κύματος μετά το πτερύγιο και κάνει πιο έντονο αυτό το σπάσιμο. Παρατηρούμε ότι αυτό το σπάσιμο δεν εμφανίζεται στα αριθμητικά αποτελέσματα, γεγονός που καταδεικνύει την ανάγκη για καλύτερη διακριτοποίηση (περισσότερα πάνελς).

- ✿ Παρατηρούμε επίσης ότι τα πειραματικά αποτελέσματα διαφέρουν μεταξύ τους, ενώ τα αριθμητικά ελάχιστα ως προς το ύψος.
- ✿ Όσο πιο κοντά στο σώμα βρισκόμαστε, οι διαφορές είναι τόσο πιο εμφανείς και προς τη σωστή κατεύθυνση. Δηλαδή, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω δημιουργείται κοιλάδα και μετά έχουμε ανύψωση του κύματος. Αυτό δείχνει ότι ο κώδικας «πιάνει» την επίδραση (effect) του roll.
- ✿ Όσο απομακρυνόμαστε από την πτέρυγα η στροβιλότητα τείνει στο μηδέν.
- ✿ Μετά το πλοίο έχουμε σχετικά καλή σύμπτωση, καθώς επικρατούν τα συνεκτικά φαινόμενα.
- ✿ Κατά μήκος του σώματος τα γενικά χαρακτηριστικά συμφωνούν, αλλά υπάρχει απώλεια προσέγγισης όλων των λεπτομερειών. Αυτό οφείλεται είτε στο σπάσιμο του κυματισμού που συμβαίνει στην πραγματικότητα, είτε στην ανάγκη για περισσότερα πάνελς. Υπενθυμίζεται ότι χρησιμοποιήθηκαν 43000 πάνελς εκ των οποίων τα 40000 ήταν στην ελεύθερη επιφάνεια.
- ✿ Χρησιμοποιήθηκαν διάφορα μήκη ομόρρου του φύλλου στροβιλότητας, τα οποία κυμαίνονταν από ένα μήκος μέχρι έξι μήκη χορδής. Ωστόσο, δεν παρατηρήθηκαν ουσιαστικές διαφορές στη δημιουργία των κυματισμών.
- ✿ Οι υπολογισμοί σε κλίμακα πλοίου, έδειξαν πως οι υπολογιστικές μεθοδολογίες θα μπορούσαν να προσφέρουν σημαντική βοήθεια στον μέχρι σήμερα εμπειρικό τρόπο προεκβολής των μετρήσεων που χρησιμοποιούν οι πειραματικές δεξαμενές, και κυρίως όσον αφορά την βρεχόμενη επιφάνεια η οποία χρησιμοποιείται.
- ✿ Η πρόβλεψη του συστήματος κυματισμού είναι ακριβής εκτός από την περιοχή της πρύμνης και του ομόρρου.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- «Ανάπτυξη υβριδικής μεθόδου υπολογισμού της αντίστασης των πλοίων σε ήρεμο νερό», Κωνσταντίνος Κοντογιάννης, Αθήνα 2009, Τομέας Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής.
- «Θεωρία Φέρουσας Γραμμής για τρισδιάστατη πτέρυγα (Προβλήματα σχεδίασης και συμπεριφοράς)», Γ.Κ. Πολίτη, Αναπλ. Καθηγητή ΕΜΠ.
- «Η γεωμετρία της έλικας», Γ.Κ. Πολίτη, Αναπλ. Καθηγητή, Φ.Α. Σκαμνέλη, ΝΜΜ, ΕΜΠ.
- «Μεθοδολογία Σχεδίασης για υποσπληνιζόμενες ναυτικές έλικες», Γ.Κ. Πολίτη, Αναπλ. Καθηγητή.
- «Δυναμική Πλοίου – Δυναμική Συμπεριφορά Πλοίου σε κυματισμούς», ΕΜΠ, Αθήνα 2008.
- «Ανεμογενείς Θαλάσσιοι Κυματισμοί – Φαινομενολογία, Μαθηματική Μοντελοποίηση και Εφαρμογές», Γ.Κ. Αθανασούλη, Καθηγητή ΕΜΠ, Αθήνα 2007.
- «Γραμμική Θεωρία Κυματισμών Ελεύθερης Επιφάνειας», Γ.Κ. Πολίτη, Αναπλ. Καθηγητή ΕΜΠ, Μάρτιος 2005, ΕΜΠ.
- «Σημειώσεις Αντίστασης Πλοίου», 2^η Έκδοση, Γ.Κ. Πολίτη, Αναπλ. Καθηγητή ΕΜΠ, Φ.Α. Σκαμνέλη, ΝΜΜ, ΕΜΠ.
- «Υδροδυναμική Πλοίου (Αντίσταση - Πρόωση), Στοιχεία για υπολογισμούς», Θ.Α. Λουκάκης, Αθήνα 1982, ΕΜΠ.
- «Αριθμητική Μελέτη των υδροδυναμικών δυνάμεων πηδαλίου πλοίου», Λαμπροπούλου Ευδοκία, Αθήνα, Σεπτέμβριος 1996, ΕΜΠ.
- «Αριθμητικές Προσομοιώσεις υδροδυναμικών ροών», Γεώργιος Δ. Τζαμπίρας, Καθηγητής ΕΜΠ, Αθήνα, Δεκέμβριος 1998.
- «Ανάπτυξη κωδίκων H/Y για το σχεδιασμό παρελκομένων ιστιοπλοϊκών σκαφών», Γ. Δ. Τζαμπίρας, Καθηγητής ΕΜΠ, Αθήνα, Νοέμβριος 1998.

Αγγλική

- “Calculation of Non – Lifting Potential Flow about arbitrary three – dimensional bodies”, John L. Hess and A.M.O. Smith, Report No. E.S. 40622, 15 March 1962, Douglas Aircraft Co., Inc., Aircraft Division, Long Beach, California.
- “An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics”, Jack Morgan, University of Minnesota, John Wiley and Sons.
- “Low – speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods”, Joseph Katz, Allen Plotkin, Professors of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, San Diego State University, McGraw – Hill, Inc.
- “Calculation of Potential Flow about arbitrary three – dimensional Lifting Bodies – Final Technical Report”, Oct. 1972, John L. Hess, Long Beach, California, National Technical Information Service.
- “The Problem of three – dimensional Lifting Potential Flow and its Solution by means of Surface Singularity Distribution”, John L. Hess, Theoretical Aerodynamics Section, Douglas Aircraft Company, Long Beach, California, USA, 18 June 1974, North – Holland Publishing Company.
- “The Representation of Ship Hulls by Conformal Mapping Functions: Fractional Maps. J of Ship Research”, Kerczek von C, Stern F. 1983.
- “The Use of Higher – Order Surface Singularity Distributions to obtain improved potential flow solutions for two – dimensional lifting airfoils”, John L. Hess, Theoretical Aerodynamics Section, Douglas Aircraft Company, Long Beach, California, USA, 18 June 1974, North – Holland Publishing Company.
- “Calculations of Potential Flow about arbitrary bodies”, John L. Hess & A.M.O. Smith, Douglas Aircraft Company, Aircraft Division, Long Beach, California.
- “Numerical Investigation of the Wave Resistance of Catamaran Ships using Potential Solvers”, Stylianos P. Polyzos, Athens, July 2010, National Technical University of Athens, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Laboratory for Ship and Marine Hydrodynamics.

9. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω

- ✿ Το Θεό, που μου δίνει δύναμη και φώτιση,
- ✿ Τους γονείς και την αδελφή μου, που αποτελούν το καλύτερο δώρο που θα μπορούσα ποτέ να ζητήσω,
- ✿ Την γιαγιά και τον παππού μου, που με καθοδηγούν πάντα με τις σωστές συμβουλές τους,
- ✿ Τον κ. Τζαμπίρα, για τόσα πράγματα που τον θεωρώ δεύτερο πατέρα μου,
- ✿ Τον κ. Ζαραφονίτη, τον κ. Πολίτη και τον κ. Μπελιμπασάκη, για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν, την υπομονή και την καλοσύνη που μου έδειξαν,
- ✿ Τον φίλο μου Αλέξανδρο, που με στήριξε σε όλο αυτό το έργο με κάθε τρόπο,
- ✿ Τον Στέλιο και τον Κώστα, που ήταν πηγή γνώσεων κάθε στιγμή που τους χρειάστηκα,
- ✿ Τον κ. Γιάννη Τραχανά και τον κ. Διονύση Συνετό, που χωρίς αυτούς δεν θα είχαν εκτελεστεί τα πειράματα,
- ✿ Καθώς και όλους τους ανθρώπους του εργαστηρίου, για τις ευχάριστες στιγμές που περάσαμε και το κέφι τους,
- ✿ Όπως επίσης και όλους μου τους φίλους και ιδιαίτερα το φίλο μου Μάριο.

Σας ευχαριστώ όλους, καθώς όλοι σας συμβάλλατε λίγο ή πολύ στη συγγραφή της παρούσης διπλωματικής εργασίας.