



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»
ΚΤΙΡΙΟ Α, 1^{ος} ΟΡΟΦΟΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ, Τ.Κ. 157 80, ΑΘΗΝΑ

**Τίτλος: Συμπάγεια, Θεωρήματα Σταθερού Σημείου, και Εφαρμογές
στην Οικονομική Θεωρία**

Μεταπτυχιακή διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των προϋποθέσεων
απόκτησης Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Αθανασούλη.

Ηλίας Μπουλτζής
2011

Η διατριβή του Ηλία Μπουλτζή εγκρίνεται:

Ο Επιβλέπων Καθηγητής:

Αθανασούλης Γεράσιμος

Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

.....

Αθήνα, / / 20...

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Αθανασούλη για τις πολύωρες συζητήσεις μας και τον ευχάριστο τρόπο με τον οποίο με εισήγαγε σε ένα θέμα για το οποίο προηγουμένως δεν ήξερα σχεδόν τίποτα.

Επίσης, ευχαριστώ την Κατερίνα για την βοήθεια της στην αισθητική επιμέλεια της διατριβής, αλλά κυρίως για την ηθική της συμπαράσταση, η οποία είναι ανεκτίμητη.

Πίνακας Περιεχομένων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κεφάλαιο 1^ο

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΥΝΟΛΑ

1.1 Γενικά

1.2 Ορισμοί και Βασικά Θεωρήματα

1.3 Συμπαγή Σύνολα και Συνεχείς Απεικονίσεις

1.4 Συμπαγή Σύνολα σε Χώρους Συναρτήσεων Θεώρημα Ascoli-Arzelà

Κεφάλαιο 2^ο

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ (ΤΕΛΕΣΤΕΣ)

2.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

2.2 Βασικά Θεωρήματα

Κεφάλαιο 3^ο

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

3.1 Εισαγωγή στις Αντιστοιχίες

3.2 Ορισμός Σταθερού Σημείου

3.3 Θεωρήματα Σταθερού Σημείου για Συμπαγή Σύνολα

3.4 Θεωρήματα Σταθερού Σημείου για Απεικονίσεις Συστολής

Κεφάλαιο 4^ο

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 Ύπαρξη Ισορροπίας κατά Walras σε μια Οικονομία Ανταλλαγής

4.2 Εφαρμογή στη Θεωρία Menu Auctions με Εξωτερικότητες

Βιβλιογραφία

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο στόχος της παρούσας διατριβής είναι η παρουσίαση διαφόρων θεωρημάτων σταθερού σημείου, που χρησιμοποιούνται συχνά στις εφαρμογές, καθώς και ειδικών παραδειγμάτων του τρόπου χρήσης των θεωρημάτων αυτών στην οικονομική θεωρία.

Για λόγους πληρότητας, παρουσιάζονται επίσης εδώ κάποια στοιχεία της ανάλυσης, που είναι κρίσιμα στις αποδείξεις των σχετικών θεωρημάτων. Κυρίως, παρουσιάζονται θεωρήματα σχετικά με τα συμπαγή σύνολα (σε γενικούς χώρους και χώρους συναρτήσεων), τους συμπαγείς τελεστές, αλλά και κάποια στοιχεία θεωρίας για αντιστοιχίες (πλειότιμες απεικονίσεις).

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται δυο εφαρμογές από τα οικονομικά (μια γνωστή και μια πρωτότυπη), με στόχο να δώσουμε και έναν εφαρμοσμένο χαρακτήρα στην διατριβή.

Το υπόλοιπο κείμενο είναι οργανωμένο ως εξής. Το κεφάλαιο 1 αφορά στα συμπαγή σύνολα. Το κεφάλαιο 2 στις συμπαγείς απεικονίσεις. Το κεφάλαιο 3 παρουσιάζει τα πιο γνωστά θεωρήματα σταθερού σημείου και το κεφάλαιο 4 τις εφαρμογές στα οικονομικά.

1. ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΥΝΟΛΑ¹

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Λόγω του κεντρικού ρόλου που έχει η συμπαγεια σε κάποια από τα θεωρήματα σταθερού σημείου είναι απαραίτητη μια εισαγωγική αναφορά στις έννοιες των συμπαγών συνόλων και απεικονίσεων.

Στόχος μας είναι η συζήτηση των παραπάνω θεμάτων σε μετρικούς χώρους (μ.χ.) Κατά περίπτωση όμως, οι ορισμοί και οι προτάσεις που παρουσιάζονται, μπορεί να αφορούν τις γενικότερες έννοιες του τοπολογικού χώρου (τ.χ.) ή του τοπολογικού χώρου Hausdorff (T_2).

Ο ορισμός και η πρόταση που ακολουθούν διευκρινίζουν την έννοια των T_2 τοπολογικών χώρων και τη σχέση τους με τους μετρικούς χώρους.

1.1.1 Ορισμός²

Έστω $(X, T.)$ τ.χ. και $x, y \in X, x \neq y$. Αν υπάρχουν ανοικτές περιοχές των x, y ξένες μεταξύ τους, τότε ο $(X, T.)$ καλείται Hausdorff (T_2).

1.1.2 Πρόταση

Έστω $(X, \rho.)$ μ.χ. Ο $(X, \rho.)$ είναι T_2 .

Απόδειξη

Έστω $x, y \in X, x \neq y$. Τότε $\rho(x, y) = \varepsilon > 0$. Οπότε οι ανοικτές μπάλες $B(x, \frac{\varepsilon}{3}), B(y, \frac{\varepsilon}{3})$ ικανοποιούν τον παραπάνω ορισμό. ■

1.2 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα θα συζητηθεί η έννοια των συμπαγών συνόλων και θα παρουσιαστούν οι βασικές ιδιότητες τους, καθώς και κάποιες προτάσεις που επιτρέπουν τον χαρακτηρισμό τους.

¹ Το κείμενο εκτός από τις περιπτώσεις που γίνεται ειδική αναφορά σε άλλη πηγή στηρίζεται στις σημειώσεις πραγματικής ανάλυσης Αργυρού.

² Βλ. Kolmogorov και Fomin σελ. 85.

1.2.1 Ορισμός

Έστω $(X, T.)$ τ.χ. και $K \subset X$. Μια οικογένεια $(u_i)_{i \in I}$ από ανοικτά υποσύνολα του X λέγεται ανοικτό κάλυμμα του K αν $K \subset \bigcup_{i \in I} u_i$

1.2.2 Ορισμός

Έστω $(X, T.)$ τ.χ. και $K \subset X$. Επίσης έστω $(u_i)_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K . Το $(u_{i_k})_{k \in \{1, 2, \dots, n\}}$ είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $(u_i)_{i \in I}$ αν υπάρχει $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$ ώστε $K \subset \bigcup_{k=1}^n u_{i_k}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Ορισμός

Έστω $(X, T.)$ τ.χ. και $K \subset X$. Το K λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Αν το X είναι συμπαγές ο $(X, T.)$ λέγεται συμπαγής.

1.2.4 Πρόταση

Έστω $(X, \rho.)$ μ.χ. και $K \subset X$. Τότε αν το K είναι συμπαγές είναι κλειστό.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα T_2 των μετρικών χώρων.

Αρκεί να δείξω ότι το $X \setminus K$ είναι ανοικτό. Δηλαδή $\forall x \in X \setminus K, \exists u_x$ ανοικτή περιοχή του x , ώστε $u_x \cap K = \emptyset$.

Έστω $x \in X \setminus K$, τότε $\forall y \in K, \exists u_x, u_y$ (ανοικτές περιοχές των x, y αντίστοιχα) ώστε $u_x \cap u_y = \emptyset$ (από T_2).

Τότε $\bigcup_{y \in K} u_y \supset K$, δηλαδή η οικογένεια $(u_y)_{y \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του

K . Επειδή K συμπαγές $\exists (y_i)_{i=1}^n \subset K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n u_{y_i}$

Άρα, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \exists u_x^i$ ώστε: $u_x^i \cap u_{y_i} = \emptyset$ ή $(\bigcap_{i=1}^n u_x^i) \cap (\bigcup_{i=1}^n u_{y_i}) = \emptyset$ ή

$u_x \cap K = \emptyset$, όπου $u_x = (\bigcap_{i=1}^n u_x^i)$ ανοικτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών. ■

Γενικά, η αντίστροφη της πρότασης 1.2.4 δεν ισχύει. Σχετική, όμως, είναι η παρακάτω ιδιότητα.

1.2.5 Πρόταση

Έστω (X, ρ) μ.χ. και $K \subset X$, συμπαγές. Τότε αν $L \subset K$ και L κλειστό, τότε το L είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Έστω $(u_i)_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του L . Τότε το $(u_i)_{i \in I} \cup X/L$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K . Επειδή K συμπαγές έπεται ότι υπάρχει $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$, ώστε $K \subset \bigcup_{k=1}^n u_{i_k} \cup X/L$ και επειδή $(X/L) \cap L = \emptyset$, θα ισχύει $L \subset \bigcup_{k=1}^n u_{i_k}$ άρα το L είναι συμπαγές. ■

Η πρόταση 1.2.5. σημαίνει ότι τα κλειστά υποσύνολα συμπαγών μετρικών χώρων είναι συμπαγή.

Γενικά, τα συμπαγή υποσύνολα μετρικών χώρων είναι κλειστά. Το αντίστροφο όμως ισχύει μόνο αν ο μετρικός χώρος είναι συμπαγής.

1.2.6 Πρόταση

Έστω (X, ρ) μ.χ. συμπαγής και $(K_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$, (ii) υπάρχει $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$ πεπερασμένο ώστε: $\bigcap_{j=1}^n K_{i_j} = \emptyset$.

Απόδειξη

Από το (ii) στο (i) είναι άμεσο.

Από το (i) στο (ii) έχουμε:

$(X/K_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X , γιατί X/K_i ανοικτό και $\bigcup_{i \in I} (X/K_i) = X / (\bigcap_{i \in I} K_i) = X$.

Άρα, από συμπάγεια υπάρχει $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$ ώστε $\bigcup_{j=1}^n X / K_{i_j} = X$ ή

$$X / (\bigcap_{j=1}^n K_{i_j}) = X \text{ ή } \bigcap_{j=1}^n K_{i_j} = \emptyset. \blacksquare$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως η *ιδιότητα της πεπερασμένης τομής*.

1.2.7 Πρόταση

Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος. Δηλαδή, έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο, το οποίο έχει μη κενή τομή, με κάθε ανοικτό υποσύνολο του χώρου (πυκνό).

Απόδειξη

Έστω (X, ρ) μ.χ. Η οικογένεια $\left(B(x, \frac{1}{n}) \right)_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Αφού ο X είναι συμπαγής, η παραπάνω οικογένεια έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Άρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $D_n \subset X$ πεπερασμένο ώστε: $X = \bigcup_{x \in D_n} B(x, \frac{1}{n})$

Ορίζω: $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Το D είναι αριθμήσιμο γιατί είναι αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων. Πρέπει να δείξω ότι είναι πυκνό.

Δηλαδή, ότι $\forall x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in D$ τέτοιο ώστε $y \in B(x, \varepsilon)$ ή $\rho(x, y) < \varepsilon$

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Έστω ένα τέτοιο n .

Τότε, από συμπάγεια έχω ότι $X = \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$. Άρα, υπάρχει $y \in D_n$ τέτοιο ώστε

$$x \in B(y, \frac{1}{n}) \text{ ή } \rho(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon. \blacksquare$$

1.2.8 Πρόταση

Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό του Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους ο οποίος παρατίθεται χωρίς απόδειξη³.

Έστω (X, ρ) μ.χ. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο (X, ρ) είναι πλήρης (ii) Αν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\text{diam}(f_n) \rightarrow 0$ τότε: $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n \neq \emptyset$.

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ. και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών υποσυνόλων του X . Επειδή η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών συνόλων, κάθε πεπερασμένη τομή τους δεν είναι κενή. Συνεπώς, και η άπειρη τομή τους δεν είναι κενή (από ιδιότητα πεπερασμένης τομής). Άρα, από τον χαρακτηρισμό Cantor έπεται ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης. ■

1.2.9 Πρόταση

Έστω (X, ρ) μ.χ. και $K \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το K είναι συμπαγές
- (ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει στο K .

Απόδειξη

Θα δείξουμε μόνο ότι το (i) συνεπάγεται το (ii). Η απόδειξη του αντιστρόφου παραλείπεται γιατί είναι μεγάλη⁴.

Έστω K συμπαγές και ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ τέτοια ώστε δεν έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο K . Άρα, για κάθε $y \in K$ υπάρχει v_y (ανοικτή περιοχή του y) τέτοια ώστε το σύνολο $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap v_y$ να είναι πεπερασμένο.

³ Για την απόδειξη βλ. Νεγρεπόντης κ.α. σελ. 53.

⁴ Για την απόδειξη βλ. ο.π. σελ 165.

Παρατηρώ ότι η οικογένεια $(v_y)_{y \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K . Άρα, από συμπάγεια υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subset K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^k v_{y_i}$. Επειδή το $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap v_y$ είναι πεπερασμένο, $\forall y \in K$, έπεται ότι το σύνολο $\bigcup_{i=1}^k ((x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap v_{y_i}) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap (\bigcup_{i=1}^k v_{y_i}) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης πεπερασμένο, πράγμα που είναι προφανώς άτοπο. Η τελευταία ισότητα έπεται από το ότι: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K \subset \bigcup_{i=1}^k v_{y_i}$. ■

Η παραπάνω πρόταση οδηγεί σε έναν άμεσο χαρακτηρισμό των συμπαγών συνόλων στο R^n . Συγκεκριμένα, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

1.2.10 Πρόταση

Έστω $K \subset R^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

- (i) Το K είναι συμπαγές
- (ii) Το K είναι κλειστό και φραγμένο

Απόδειξη

Το (i) συνεπάγεται το (ii), γιατί ο R^n με την ευκλείδια μετρική είναι μετρικός χώρος⁵. Το αντίστροφο ισχύει από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass (κάθε φραγμένη ακολουθία στο R^n έχει υπακολουθία που συγκλίνει) και την παραπάνω πρόταση. ■

Προκειμένου να διευκολυνθεί η διαισθητική διάκριση ανάμεσα στην συμπάγεια και άλλες συγγενείς έννοιες, είναι χρήσιμο να αναφέρουμε μερικά παραδείγματα κλειστών και φραγμένων συνόλων που δεν είναι συμπαγή.

Πρώτα ας θεωρήσουμε το R με την τετριμμένη μετρική $(\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq y \\ 0 & \text{αν } x = y \end{cases})$.

Παρατηρούμε ότι το R είναι κλειστό και φραγμένο, αλλά δεν είναι συμπαγές.

Πράγματι, η οικογένεια $\left(B(x, \frac{1}{2}) \right)_{x \in R}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του R το οποίο,

προφανώς, δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Παρόλο που το παραπάνω αποτέλεσμα στηρίζεται σε μια μετρική που δεν είναι «συνηθισμένη», μας επιτρέπει

⁵ Για το ότι τα συμπαγή είναι και φραγμένα βλ. πρόταση 1.2.14 παρακάτω.

να κατανοήσουμε γιατί ένα κλειστό και φραγμένο δεν είναι πάντα συμπαγές. Ο λόγος είναι ότι σε ορισμένους μετρικούς χώρους μπορούμε να βρούμε υποσύνολα κλειστών και φραγμένων συνόλων, που έχουν άπειρα στοιχεία τα οποία είναι όλα «μακριά» μεταξύ τους. Σε αυτό το πνεύμα είναι και τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν, τα οποία συναντάμε σε πιο «φυσιολογικούς» μετρικούς χώρους.

Έστω η μοναδιαία σφαίρα $\bar{B}(0,1) = \{x \in l_\infty : \|x\| \leq 1\}$ στον l_∞ , η οποία προφανώς, είναι κλειστή και φραγμένη. Έστω, επίσης, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{B}(0,1)$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$x_1 = \{1,0,0,0,\dots\}, x_2 = \{1,1,0,0,\dots\}, x_3 = \{1,1,1,0,0,\dots\}, \dots$$

Προφανώς, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ θα ισχύει ότι $\|x_n - x_m\| = 1$ και άρα, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, δεν έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Άρα, η κλειστή μοναδιαία σφαίρα δεν είναι συμπαγής.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι η μοναδιαία σφαίρα του $C[0,1]$ δεν είναι συμπαγής. Συγκεκριμένα, αρκεί να βρούμε μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[0,1]$ ώστε $\|f_n\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ με $\|f_n - f_m\| = 1$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι μια τέτοια ακολουθία δίνεται από τις ακόλουθες⁶:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n+1} \\ n(n+1)(t - \frac{1}{n+1}), & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ n(1-n)(t - \frac{1}{n-1}), & \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n-1} \\ 0, & \frac{1}{n-1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Εκτός από τον χαρακτηρισμό των συμπαγών συνόλων με βάση τις ακολουθίες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η έννοια του ολικά φραγμένου συνόλου που θα δούμε αμέσως.

⁶ Βλ. Kumaresan 2005.

1.2.11 Ορισμός

Έστω (X, ρ) μ.χ. και $A \subset X$. Το A λέγεται ολικά φραγμένο, αν για κάθε ε θετικό, υπάρχει πεπερασμένο $F \subset A$ ώστε $A \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$.

Παρατηρήσεις

- Ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται για $A = X$ (ολικά φραγμένος μ.χ.).
- Το κενό σύνολο είναι ολικά φραγμένο.
- Τα συμπαγή σύνολα είναι ολικά φραγμένα. Το αντίστροφο ισχύει υπό προϋποθέσεις που θα συζητήσουμε παρακάτω.
- Τα ολικά φραγμένα σύνολα είναι φραγμένα. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Επίσης, τα ολικά φραγμένα σύνολα έχουν τις ιδιότητες που περιγράφει η πρόταση που ακολουθεί.

1.2.12 Πρόταση

Έστω (X, ρ) μ.χ. και $A \subset X$, ολικά φραγμένο. Τότε:

- (i) Το $B \subset A$ είναι ολικά φραγμένο.
- (ii) Το $\bar{A}$ (κλειστότητα) είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη

(i) Αφού το A είναι ολικά φραγμένο, υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο, ώστε:

$B \subset A \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Θεωρώ, επίσης, $F' = \{x_i \in F : B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset\}$, οπότε:

$B \subset \bigcup_{x_j \in F'} B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Επίσης, έστω τυχόν $y_j \in B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B$, τότε

$B(y_j, \varepsilon) \supset B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$ και $B \subset \bigcup_{x_j \in F'} B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{y_j : x_j \in F'} B(y_j, \varepsilon)$ άρα, το B είναι ολικά φραγμένο.

(ii) Αφού το A είναι ολικά φραγμένο, τότε υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο, ώστε

$A \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Έστω $y \in \bar{A}$ τότε κάθε ανοικτή περιοχή του y περιέχει στοιχείο του

A . Δηλαδή, υπάρχει $x \in A$ ώστε $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης, υπάρχει $x_i \in F$ ώστε:

$x \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, άρα $\rho(x_i, y) \leq \rho(x_i, x) + \rho(x, y) < \varepsilon$. Οπότε $\forall y \in \bar{A}$, υπάρχει $x_i \in F$

ώστε: $y \in B(x_i, \varepsilon)$. Συνεπώς, $\bar{A} \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$ και άρα το $\bar{A}$ είναι ολικά φραγμένο. ■

Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν χαρακτηρίζουν τα συμπαγή σύνολα με την βοήθεια της έννοιας του ολικά φραγμένου συνόλου. Για την απόδειξή τους χρειάζεται να κάνουμε χρήση του ακόλουθου λήμματος.

1.2.13 Λήμμα

Έστω (X, ρ) μ.χ. και ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, τέτοια ώστε, κάθε υποακολουθία της δεν είναι Cauchy. Τότε υπάρχει, ε θετικό και $M \subset \mathbb{N}$ άπειρο, ώστε $\forall M' \subset M$ άπειρο, $\text{diam}(x_m : m \in M') > \varepsilon$.

Απόδειξη Λήμματος

Έστω ότι δεν ισχύει. Άρα $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall M \subset \mathbb{N}$ άπειρο, υπάρχει $M' \subset M$ άπειρο, ώστε $\text{diam}(x_m : m \in M') \leq \varepsilon$.

Έστω $M = \mathbb{N}$ και $\varepsilon = 1$. Τότε, υπάρχει $M'_1 \subset M$ άπειρο ώστε: $\text{diam}(x_m : m \in M'_1) \leq 1$

Έστω $M = M'_1$ και $\varepsilon = \frac{1}{2}$ τότε, υπάρχει $M'_2 \subset M'_1$ άπειρο ώστε: $\text{diam}(x_m : m \in M'_2) \leq \frac{1}{2}$.

Γενικά, $\mathbb{N} \supset M'_1 \supset M'_2 \supset \dots$ με $\text{diam}(x_m : m \in M'_n) \leq \frac{1}{n}$.

Επειδή τα M'_i είναι απειροσύνολα, μπορώ να διαλέξω μια ακολουθία από $m_i \in M'_i$ ώστε $m_1 < m_2 \dots$

Παρατηρώ ότι το σύνολο $\{m_k : k \geq n\}$ είναι υποσύνολο του M'_n και συνεπώς

$$\text{diam}(x_{m_k} : k \geq n) \leq \text{diam}(x_m : m \in M'_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Όμως, επειδή $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ έπεται ότι $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει

$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, ώστε $\forall \kappa, \lambda \geq m_{n_\varepsilon}$ να ισχύει ότι $\rho(x_\kappa, x_\lambda) \leq \text{diam}(x_{m_k} : k \geq n_\varepsilon) \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

Δηλαδή, η x_{m_k} είναι ακολουθία Cauchy που είναι άτοπο. ■

1.2.14 Πρόταση

Έστω (X, ρ) μ.χ. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο (X, ρ) είναι συμπαγής
- (ii) Ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος και πλήρης

Απόδειξη

Από (i) σε (ii):

Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής τότε είναι και πλήρης. Επίσης για κάθε ε θετικό η οικογένεια $(B(x, \varepsilon))_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X . Συνεπώς, υπάρχει $F \subset X$ πεπερασμένο ώστε $X = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$ και άρα, ο X είναι ολικά φραγμένος.

Από (ii) σε (i):

Θα δείξω ότι κάθε ακολουθία στον X έχει υπακολουθία Cauchy. Αν ισχύει αυτό, τότε επειδή ο X είναι πλήρης κάθε ακολουθία του, έχει υπακολουθία που συγκλίνει και άρα ο X είναι συμπαγής.

Έστω $A \subset X$, ολικά φραγμένο και έστω επίσης ότι υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ που δεν έχει υπακολουθία Cauchy. Τότε, από το λήμμα θα ισχύει ότι υπάρχει ε θετικό και $M \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $\forall M' \subset M$ άπειρο, $\text{diam}(x_m : m \in M') > \varepsilon$. Επίσης, αφού το A είναι ολικά φραγμένο θα υπάρχει $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in A$ ώστε $A \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ θέτω $M_i = \left\{ m \in M : x_m \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \right\}$ οπότε $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots$

Επειδή το M είναι απειροσύνολο τουλάχιστον ένα από τα M_i θα είναι, επίσης, απειροσύνολο. Άρα υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_i})_{m_i \in M_i}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που είναι υποσύνολο της $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ ή $\text{diam}(x_{m_i} : m_i \in M_i) \leq \varepsilon$ το οποίο είναι άτοπο γιατί $M_i \subset M$.

Προφανώς, αν $A = X$ έχουμε δείξει το ζητούμενο. ■

Στη διάρκεια της παραπάνω απόδειξης δείξαμε ότι τα ολικά φραγμένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου έχουν την ιδιότητα, όλες οι ακολουθίες στοιχείων τους να έχουν μια υπακολουθία Cauchy. Σχετική είναι η πρόταση που ακολουθεί, η οποία χρησιμοποιεί την έννοια του σχετικά συμπαγούς συνόλου.

1.2.15 Ορισμός⁷

Έστω (X, τ) τ.χ. και $A \subset X$. Το A λέγεται σχετικά συμπαγές αν η κλειστότητα του $(\bar{A} \subset X)$ είναι συμπαγές σύνολο.

1.2.16 Πρόταση⁸

Έστω (X, ρ) μ.χ. πλήρης και $A \subset X$. Το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη

Αν το A είναι σχετικά συμπαγές, το $\bar{A}$ είναι συμπαγές και άρα ολικά φραγμένο. Επειδή το A είναι υποσύνολο του $\bar{A}$ είναι και αυτό ολικά φραγμένο. Αντίστροφα. Αν το A είναι ολικά φραγμένο τότε όπως είδαμε παραπάνω, έχει την ιδιότητα κάθε ακολουθία του να έχει υπακολουθία Cauchy. Αυτές όμως συγκλίνουν στο $\bar{A}$, γιατί τα κλειστά υποσύνολα μετρικών χώρων που είναι πλήρεις είναι και αυτά πλήρη. Συνεπώς, το $\bar{A}$ είναι συμπαγές και άρα, το A είναι σχετικά συμπαγές. ■

1.3 ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με απεικονίσεις από συμπαγείς μετρικούς χώρους σε άλλους μετρικούς χώρους.

1.3.1 Πρόταση

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και $f: X \rightarrow Y$ συνεχής. Τότε, αν το $K \subset X$ είναι συμπαγές, το $f(K) \subset Y$ είναι επίσης συμπαγές.

⁷ Βλ. Kolmogorov και Fomin σελ. 97

⁸ Βλ. Kolmogorov και Fomin σελ. 101

Απόδειξη

Έστω $(u_i)_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(K)$. Τότε το $(f(u_i)^{-1})_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K , γιατί: $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} u_i \Rightarrow K \subset f(\bigcup_{i \in I} u_i)^{-1} \Rightarrow K \subset \bigcup_{i \in I} f(u_i)^{-1}$ και το $f(u_i)^{-1}$ είναι ανοικτό από τη συνέχεια της f . Επίσης, επειδή το K είναι συμπαγές, θα υπάρξει J πεπερασμένο ώστε $K \subset \bigcup_{i \in J} f(u_i)^{-1}$. Τότε, $K \subset \bigcup_{i \in J} f(u_i)^{-1} \Rightarrow K \subset f(\bigcup_{i \in J} u_i)^{-1} \Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{i \in J} u_i$ και άρα, το $f(K)$ είναι συμπαγές. ■

Η παραπάνω πρόταση σημαίνει ότι αν ο X είναι συμπαγής, το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y . Στην περίπτωση που η f είναι $1-1$, τότε ο Y είναι συμπαγής.

1.3.2 Πρόταση

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ., (Y, d) μ.χ. και $f: X \rightarrow Y$ συνεχής, $1-1$ και επί. Τότε η f^{-1} είναι επίσης συνεχής και άρα, η f είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξω ότι η f^{-1} , αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά. Έστω $K \subset X$ κλειστό. Πρέπει να δείξω ότι $(f^{-1})^{-1}(K) = f(K)$ είναι κλειστό. Επειδή ο X είναι συμπαγής και το K κλειστό, το K είναι συμπαγές. Επειδή η f είναι συνεχής, το $f(K)$ είναι επίσης συμπαγές και άρα, κλειστό. ■

1.3.3 Πρόταση

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ., και $f: X \rightarrow R$ συνεχής. Τότε, η f είναι φραγμένη και μάλιστα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη

Επειδή ο X είναι συμπαγής και η f συνεχής, το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R . Δηλαδή, είναι κλειστό και φραγμένο. Αφού είναι φραγμένο, υπάρχουν τα $\sup$, $\inf$ και αφού είναι κλειστό, αυτά θα ανήκουν στο σύνολο. ■

Παρατήρηση: Αν ο τελεστής f από ένα συμπαγή μετρικό χώρο (X, ρ) σε ένα γενικό μετρικό χώρο (Y, d) είναι συνεχής, τότε ακολουθώντας την παραπάνω απόδειξη, βλέπουμε ότι υπάρχουν τα $\min_{x, y \in X} d(f(x), f(y))$ και $\max_{x, y \in X} d(f(x), f(y))$.

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη πρόταση πρέπει να αναφερθούμε στην έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας.

1.3.4 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και $f : X \rightarrow Y$. Η f καλείται ομοιόμορφα συνεχής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta$ να ισχύει: $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Παρατήρηση: Αν η f είναι απλώς συνεχής στο x , τότε το δ δεν εξαρτάται μόνο από το ε αλλά και από το x . Προφανώς, αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, είναι και συνεχής.

1.3.5 Πρόταση

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ., (Y, d) γενικός μ.χ. και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα.

Βήμα 1^ο

Θα δείξουμε ότι αν η οικογένεια $(G_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X , τότε υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $A \subset X$ με $\text{diam}(A) < \delta$, να υπάρχει $i \in I$, ώστε $A \subset G_i$. Εφόσον η οικογένεια $(G_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X , υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{1, 2, \dots, k\} \subset I$, ώστε $X = \bigcup_{i=1}^k G_i$. Επίσης, επειδή τα G_i είναι ανοικτά σύνολα, για κάθε $x \in X$ θα υπάρχει ε_x και $i_x \in \{1, 2, \dots, k\}$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) \subset G_{i_x}$.

Επειδή η οικογένεια $\left(B(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) \right)_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X , υπάρχει $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$. Ορίζω $\delta = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \dots, \varepsilon_{x_k}\}$. Τότε, για κάθε $y \in X$ και για κάθε $A \subset X$ με $\text{diam}(A) < \delta$ και $y \in A$, θα υπάρξει $x_y \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$,ώστε $A \subset B(y, \delta) \subset B(x_y, \varepsilon_{x_y}) \subset G_i$.

Βήμα 2^ο

Έστω $\varepsilon > 0$, αφού η f είναι συνεχής τότε η οικογένεια $\left(f^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{2})) \right)_{y \in Y}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X . Άρα, από το προηγούμενο βήμα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ να ισχύει ότι: $x_1, x_2 \in f^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{2}))$ για κάποιο $y \in Y$ ή $f(x_1), f(x_2) \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ και άρα, $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Δηλαδή, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. ■

1.4 ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΥΝΟΛΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ASCOLI -ARZELA

Τα δύο κριτήρια συμπαγείας που έχουμε παρουσιάσει ως τώρα, στηρίζονται είτε στην σύγκλιση υπακολουθιών είτε στη διαπίστωση ότι ένα σύνολο είναι ολικά φραγμένο. Αυτά τα δύο κριτήρια είναι ιδιαίτερα δύσκολο να ελεγχθούν απ' ευθείας σε απειροδιάστατους χώρους όπως για παράδειγμα οι χώροι συναρτήσεων ή τελεστών. Για αυτούς τους χώρους, ένα πιο εύχρηστο (ευκολότερα εφαρμόσιμο) κριτήριο συμπαγείας παρέχεται από το θεώρημα **ASCOLI-ARZELA**, μια γενικευμένη εκδοχή του οποίου θα παρουσιάσουμε σε αυτή την ενότητα. Το θεώρημα αυτό στηρίζεται στην έννοια της ισοσυνέχειας.

1.4.1 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και F μια οικογένεια τελεστών από τον X στον Y . Η F λέγεται ισοσυνεχής στο $x_o \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_o) < \delta$ να ισχύει: $d(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$, για κάθε $f \in F$.

Αν η F είναι ισοσυνεχής για κάθε $x_o \in X$, τότε λέγεται απλά ισοσυνεχής.

Παρατηρήσεις

- Αν η F είναι ισοσυνεχής στο $x_o \in X$, τότε κάθε στοιχείο της είναι συνεχές στο $x_o \in X$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η ισοσυνέχεια απαιτεί το δ να μην εξαρτάται από το f .
- Αν η F είναι πεπερασμένη οικογένεια συνεχών είναι ισοσυνεχής.
- Σε αναλογία με την ομοιόμορφη συνέχεια ορίζεται και η ομοιόμορφη ισοσυνέχεια (το δ εκτός από το f δεν εξαρτάται επίσης και από το x_o). Σχετικά ισχύουν τα εξής: **(α)** Μια πεπερασμένη οικογένεια από ομοιόμορφα συνεχείς είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής. **(β)** Μια ισοσυνεχής οικογένεια τελεστών από ένα συμπαγή μ.χ. σε έναν γενικό μ.χ. είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής⁹.

Παράδειγμα¹⁰

Έστω $F \subset C[a, b]$ με την ιδιότητα ότι κάθε $f \in F$ είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και μάλιστα για κάθε $f \in F$ ισχύει ότι: $|f'(x)| \leq M < +\infty$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε από το θεώρημα μέσης τιμής, $|f(u) - f(v)| \leq M|u - v|$. Θέτοντας $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, βλέπουμε ότι η οικογένεια είναι ισοσυνεχής στο $[a, b]$.

Χρήσιμοι για την πρόταση που ακολουθεί είναι και οι ακόλουθοι ορισμοί.

1.4.2 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και F μια οικογένεια τελεστών από τον X στον Y . Η F λέγεται κατά σημείο φραγμένη αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $M_x \in \mathbb{R}$, ώστε

⁹ Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με την απόδειξη της πρότασης 1.3.5

¹⁰ Βλ. Royder και Fitzpatrick 2010, σελ. 207

$\text{diam}\{f(x): f \in F\} \leq M_x$. Η F λέγεται απλώς φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, ώστε $\text{diam}\{f(x): f \in F\} \leq M$, για κάθε $x \in X$.

Παρατηρούμε ότι αν μια οικογένεια τελεστών είναι φραγμένη είναι φραγμένη και ως υποσύνολο του $C(X, Y)$.

1.4.3 Πρόταση (ASCOLI – ARZELA σε μετρικούς χώρους)¹¹

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ. και (Y, d) γενικός μ.χ. Συμβολίζω $C(X, Y)$ τον χώρο των συνεχών τελεστών μεταξύ των δύο χώρων, εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική¹². Έστω επίσης, $A \subset C(X, Y)$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) Το σύνολο A είναι ισοσυνεχές για κάθε $x \in X$
- (ii) Για κάθε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ το σύνολο $\{f_n(x): n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ είναι σχετικά συμπαγές για κάθε $x \in X$

Τότε, το A είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $C(X, Y)$.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στον $C(X, Y)$. Γιατί τότε κάθε ακολουθία στο $\bar{A}$ θα έχει υπακολουθία που συγκλίνει (ομοιόμορφα, δηλαδή με την μετρική του $C(X, Y)$) στο $\bar{A}$. Άρα, το $\bar{A}$ θα είναι συμπαγές και συνεπώς το A θα είναι σχετικά συμπαγές.

Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα.

Βήμα 1^ο

Έστω τυχαία ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Θα δείξουμε ότι έχει υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x \in X$.

Εφόσον ο X είναι συμπαγής χώρος, είναι διαχωρίσιμος. Υπάρχει δηλαδή $D \subset X$ αριθμήσιμο και πυκνό. Έστω $D = \{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Θεωρώ το x_1 . Τότε το σύνολο $B_1 = \{f_n(x_1): n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ είναι σχετικά συμπαγές. Άρα, υπάρχει $M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε

¹¹ Βλ. άσκηση 8, σελ. 210, Royder και Fitzpatrick 2010.

¹² Έστω $f, g \in C(X, Y)$ τότε η συνήθης μετρική $\mu(f, g)$ ορίζεται ως

$\mu(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Η μετρική αυτή είναι καλά ορισμένη γιατί αν οι f, g είναι συνεχείς

τότε η $d(f(\cdot), g(\cdot))$ είναι ένα συνεχές συναρτησιακό στον X . Επειδή ο X είναι συμπαγής θα έχει μέγιστο.

η ακολουθία στοιχείων του Y , $(f_n(x_1))_{n \in M_1}$ να συγκλίνει στο $\bar{B}_1 \subset Y$ (με την μετρική d).

Θεωρώ το x_2 . Τότε το σύνολο $B_2 = \{f_n(x_2) : n \in M_1\}$ είναι σχετικά συμπαγές. Άρα, υπάρχει άπειρο $M_2 \subset M_1$ ώστε η ακολουθία $(f_n(x_2))_{n \in M_2}$ να συγκλίνει στο $\bar{B}_2 \subset Y$.

Γενικά, θα υπάρχουν $M_i, i=1,2,\dots$ με άπειρα στοιχεία, ώστε $N \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$ και η ακολουθία $(f_n(x_k))_{n \in M_k}$ να συγκλίνει σε στοιχείο του Y .

Μπορώ τώρα να διαλέξω $n_i \in M_i$ ώστε $n_1 < n_2 < \dots$. Θεωρώ την υπακολουθία $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Θα δείξω ότι αυτή συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x \in D$. Έστω $x_j \in D$ τότε η $(f_{n_k}(x_j))_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε στοιχείο του Y . Αυτό συμβαίνει, γιατί για κάθε $k \geq j$ το $n_k \in M_j$ και η $(f_n(x_j))_{n \in M_j}$ είναι ακολουθία που συγκλίνει.

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτή η υπακολουθία συγκλίνει για κάθε $x \in X$. Για λόγους απλούστευσης συμβολίζουμε και την συγκλίνουσα υπακολουθία με $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Αυτή θα συγκλίνει για κάθε $x \in D$ και άρα, θα είναι Cauchy για κάθε τέτοιο x . Δηλαδή, για κάθε $x \in D$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m > k$, $d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, από ομοιόμορφη ισοσυνέχεια στο $x_0 \in X$, θα υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $x \in X$ και ικανοποιεί $\rho(x, x_0) < \delta$ να ισχύει ότι: $d(f(x_0), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, για κάθε $f \in A$. Τέλος, επειδή το D είναι πυκνό, υπάρχει $x \in D$ ώστε $\rho(x, x_0) < \delta$.

Οπότε, για τυχόν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, μπορώ να βρω $x \in D$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m > k$, να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$d(f_n(x_0), f_m(x_0)) \leq d(f_n(x_0), f_n(x)) + d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(x_0)) < \varepsilon$$

Δηλαδή, η ακολουθία $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Όμως, το σύνολο $B_1 = \{f_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ είναι από υπόθεση σχετικά συμπαγές και άρα, το σύνολο $\bar{B}_1$ είναι συμπαγές και άρα, πλήρες. Συνεπώς, η $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\bar{B}_1 \subset Y$. Εδώ ολοκληρώνεται το 1^ο βήμα οπότε και δείξαμε ότι κάθε ακολουθία στο A έχει

υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x \in X$. Στο 2^ο βήμα θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία στο A έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο χώρο συναρτήσεων.

Βήμα 2^ο

Έστω τυχαία ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Θα δείξουμε ότι έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του χώρου $C(X, Y)$ (με την αντίστοιχη μετρική).

Από το 1^ο βήμα γνωρίζουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο. Για λόγους απλούστευσης συμβολίζουμε και την συγκλίνουσα υπακολουθία με $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Από ομοιόμορφη ισοσυνέχεια, για κάθε $\varepsilon > 0$, θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$, για κάθε $f \in A$.

Επίσης, επειδή ο X είναι συμπαγής και το $(B(x, \delta))_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X , θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Άρα, θα υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$. Άρα, για κάθε $x \in X$ υπάρχει x_i , ώστε $\rho(x, x_i) < \delta$ ή $d(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$, για κάθε $f \in A$.

Τέλος, επειδή η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x \in X$. Θα είναι Cauchy για κάθε $x \in X$, άρα και για κάθε $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Δηλαδή, για κάθε $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m > k$, $d(f_n(x_i), f_m(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Οπότε για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, μπορώ να βρω $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m > k$, να ισχύει το ακόλουθο:

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_m(x_i)) + d(f_m(x_i), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Όμως αφού αυτό ισχύει για κάθε $x \in X$, θα ισχύει επίσης ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m > k$, $\max_{x \in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ (η ομοιόμορφη σύγκλιση ταυτίζεται με τη σύγκλιση στον $C(X, Y)$).

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε ακολουθία στο A έχει υπακολουθία Cauchy. Αν γνωρίζαμε ότι ο $C(X, Y)$ είναι πλήρης, η απόδειξη θα τελείωνε εδώ. Ωστόσο επειδή

αυτό δεν ισχύει γενικά, πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία Cauchy στο A συγκλίνει στο $C(X, Y)$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι, αν η f είναι συνεχής, η εικόνα της $(f(X))$, θα είναι συμπαγές σύνολο και άρα, φραγμένο. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε τον χώρο $C(X, Y)$ σαν υπόχωρο του $B(X, Y)$ ¹³, δηλαδή των φραγμένων τελεστών από το X στο Y .

Έστω τώρα $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στο A . Τότε, για κάθε $x \in X$, η ακολουθία $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y , γιατί $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in X$. Επειδή το σύνολο $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές, είναι πλήρες και φραγμένο. Δηλαδή, η ακολουθία $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον Y , για κάθε $x \in X$. Ορίζω ως $f(x)$ αυτό το όριο σε κάθε $x \in X$. Παρατηρώ ότι η $f(\cdot)$ είναι φραγμένη και ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > k$, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Επειδή αυτό ισχύει σε κάθε $x \in X$, θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε: $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall n > k$.

Δείξαμε λοιπόν ότι αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στο A , θα συγκλίνει ως στοιχείο του $B(X, Y)$. Αν δείξουμε ότι ο $C(X, Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(X, Y)$ θα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Για αυτό το σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω (X, ρ) και (Y, d) μ.χ. και $B(X, Y)$ ο μ.χ. των φραγμένων τελεστών από τον X στον Y . Έστω ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα (με την μετρική του $B(X, Y)$) στην $f \in B(X, Y)$.

Τότε, η f είναι συνεχής.

¹³ Προφανώς η κατάλληλη μετρική για αυτόν το χώρο είναι η $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$, η οποία όμως ταυτίζεται με την $\max_{x \in X} d(f(x), g(x))$ όταν ο $B(X, Y)$ περιορίζεται στον $C(X, Y)$.

Απόδειξη Λήμματος

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, θα υπάρξει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο

ώστε για κάθε $n > k$, $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in X$.

Επίσης, επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο $x_0 \in X$, θα υπάρξει $\delta > 0$ ώστε για

κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ να ισχύει ότι $d(f_n(x_0), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Άρα, για κάθε $x \in X$ ώστε $\rho(x, x_0) < \delta$ θα υπάρξει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > k$, να ισχύει ότι:

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0 και αφού αυτό επιλέχτηκε τυχαία, η f είναι συνεχής. ■

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος και της πρότασης.

Στους πραγματικούς αριθμούς γνωρίζουμε ότι τα συμπαγή ταυτίζονται με τα κλειστά και φραγμένα. Αυτό σημαίνει ότι αν $B \subset \mathbb{R}$ φραγμένο, τότε επειδή η κλειστότητα του $(\overline{B})$, θα είναι επίσης φραγμένο σύνολο θα είναι και συμπαγές. Άρα, το B είναι σχετικά συμπαγές. Γενικά, κάθε φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών είναι σχετικά συμπαγές.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε την πρόταση για απεικονίσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$.

1.4.4 Πρόταση (ASCOLI – ARZELA)

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ. Συμβολίζω $C(X, \mathbb{R})$ τον χώρο των συνεχών συναρτησιακών από τον X στο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική¹⁴. Έστω επίσης $A \subset C(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) Η οικογένεια A είναι ισοσυνεχής.
- (ii) Η οικογένεια A είναι κατά σημείο φραγμένη.

Τότε, το A είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y .

¹⁴ Έστω $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ τότε η συνήθης μετρική $\mu(f, g)$ ορίζεται ως

$$\mu(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Για τον $C(X, R)$ μπορούμε επιπλέον να δείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

1.4.5 Πρόταση¹⁵

Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ. Έστω, επίσης, $A \subset C(X, R)$. Το A είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό φραγμένο και ισοσυνεχές.

Απόδειξη

Αν το A είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές τότε από το θεώρημα Ascoli-Arzelà είναι και συμπαγές.

Αν το A είναι συμπαγές τότε είναι κλειστό και φραγμένο. Θα δείξουμε ότι είναι και ισοσυνεχές.

Αν το A δεν είναι ισοσυνεχές στο $x \in X$, τότε για κάθε $n \in N$ υπάρχει $f_n \in A$ και $x_n \in X$ ώστε $|f_n(x_n) - f_n(x)| > \varepsilon$ και $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$, για κάποιο $\varepsilon > 0$.

Επειδή το A είναι συμπαγές, η ακολουθία $(f_n)_{n \in N}$ έχει υπακολουθία $(f_{n_k})_{k \in N}$ που συγκλίνει. Άρα, υπάρχει $k_0 \in N$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει ότι $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $x \in X$.

Από τη συνέχεια της f στο $x \in X$ έπεται ότι υπάρχει $k_1 \in N$ ώστε για κάθε $l \geq k_1$ να ισχύει ότι $|f(x_{n_l}) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Άρα, μπορώ να βρω $k \in N$ ώστε:

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \leq \varepsilon, \text{ το οποίο}$$

όπως είδαμε είναι άτοπο, γιατί το A δεν είναι ισοσυνεχές. ■

Παραδείγματα εφαρμογής της θεωρίας Ascoli-Arzelà

(α) Συνεχείς κατά Holder¹⁶

Μια πραγματική συνάρτηση f στο $[0, 1]$ λέγεται συνεχής κατά Holder τάξης α , αν υπάρχει σταθερά C ώστε

¹⁵ Βλ. Royder και Fitzpatrick 2010, σελ. 209.

¹⁶ Βλ. άσκηση 5, σελ. 210, Royder και Fitzpatrick 2010.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^a \text{ για κάθε } x, y \in [0, 1].$$

Ως νόρμα Holder ορίζουμε:

$$\|f\|_a = \max_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \{ |f(x)| + |f(x) - f(y)|/|x - y|^a \}$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο των συνεχών κατά Holder, για τις οποίες $\|f\|_a \leq 1$, είναι σχετικά συμπαγές ως υποσύνολο του $C[0, 1]$.

Παρατηρούμε ότι αν θέσω $\delta = (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{a}}$ προκύπτει ότι η παραπάνω οικογένεια είναι ισοσυνεχής. Επίσης, εφόσον $\|f\|_a \leq 1$ έχουμε ότι για κάθε συναρτησιακό της οικογένειας θα ισχύει:

$$\max_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \{ |f(x)| + |f(x) - f(y)|/|x - y|^a \} \leq 1 \Rightarrow \max_{x \in [0, 1]} \{ |f(x)| \} \leq 1$$

Η οικογένεια λοιπόν είναι ισοσυνεχής και φραγμένη και άρα, από το θεώρημα Ascoli-Arzelà είναι σχετικά συμπαγής.

(β) Οι παραγωγίσιμες ως υποσύνολο των συνεχών¹⁷

Ορίζουμε ως $C^1[a, b]$ το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο $[a, b]$ οι οποίες επιπλέον έχουν συνεχείς παραγώγους, εφοδιασμένο με την μετρική $\|\cdot\|_1 = \max_{x \in [a, b]} \{ |f(x)| \} + \max_{x \in [a, b]} \{ |f'(x)| \}$.

Θα δείξουμε ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του $C^1[a, b]$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $C[a, b]$.

Παρατηρούμε ότι αν μια οικογένεια συναρτήσεων είναι φραγμένη στο $C^1[a, b]$, τότε:

(i) η ποσότητα $\max_{x \in [a, b]} \{ |f(x)| \}$ είναι φραγμένη και άρα, η οικογένεια είναι φραγμένη στο $C[a, b]$.

(ii) η ποσότητα $\max_{x \in [a, b]} \{ |f'(x)| \}$ είναι φραγμένη και άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για να δείξουμε ότι είναι ισοσυνεχής όπως ακριβώς στο παράδειγμα που είδαμε στην αρχή της ενότητας.

¹⁷ Βλ. Brown 1993 σελ. 15.

Άρα, μια φραγμένη οικογένεια στον $C^1[a, b]$, είναι φραγμένη και ισοσυνεχής στον $C[a, b]$ και άρα από το θεώρημα Ascoli-Arzelà είναι σχετικά συμπαγής.

Το παραπάνω επιχείρημα γενικεύεται ομαλά. Όλα τα φραγμένα υποσύνολα του $C^{k+1}[a, b]$ είναι σχετικά συμπαγή υποσύνολα του $C^k[a, b]$.

(γ) Οι συναρτήσεις προϊόν ολοκλήρωσης¹⁸

Έστω F οικογένεια τελεστών από το $L^p([0, 1])$ στο $C[0, 1]$ με

$$F = \left\{ G(\cdot): G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad g \in L^p([0, 1]), \quad \|g\|_p \leq 1 \right\}$$

όπου $p > 1$ και $\|\cdot\|_p$ η νόρμα στον L^p . Θα δείξουμε ότι το σύνολο F είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $C[0, 1]$. Παρατηρούμε ότι:

$$|G(x) - G(y)| = \left| \int_0^x g(t) dt - \int_0^y g(t) dt \right| = \left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq \int_x^y |g(t)| dt,$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για $y > x$ παίρνουμε:

$$\int_x^y |g(t)| dt \leq \left(\int_x^y |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_x^y 1 dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_x^y 1 dt \right)^{\frac{1}{q}} = |x - y|^{\frac{1}{q}}.$$

Συνεπώς, $|G(x) - G(y)| \leq |x - y|^{\frac{1}{q}}$.

Δείξαμε ότι το σύνολο F ικανοποιεί την συνέχεια κατά Holder (με $C = 1$ και $\alpha = \frac{1}{q}$) και άρα είναι σχετικά συμπαγές ως υποσύνολο του $C[0, 1]$.

¹⁸ Βλ. λήμμα Ascoli-Arzelà στο Wikipedia.

2. ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ (ΤΕΛΕΣΤΕΣ)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις συμπαγείς απεικονίσεις ή τελεστές. Αυτές οι απεικονίσεις έχουν κεντρικό ρόλο σε μεγάλο μέρος της θεωρίας σταθερών σημείων και όπως θα δούμε, σχετίζονται άμεσα με τα συμπαγή σύνολα και ιδιαίτερα με τη θεωρία Ascoli-Arzelà.

2.1 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.1.1 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και τελεστής $f : X \rightarrow Y$. Ο f καλείται συμπαγής αν απεικονίζει τα φραγμένα υποσύνολα του X σε σχετικά συμπαγή υποσύνολα του Y . Δηλαδή, αν για κάθε $D \subset X$ φραγμένο, το σύνολο $f(D) \subset Y$ είναι σχετικά συμπαγές. Ισοδύναμα, ο f είναι συμπαγής αν κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X , έχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, ώστε η ακολουθία $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει στον Y .

2.1.2 Ορισμός

Αν ένας συμπαγής τελεστής είναι και συνεχής, τότε καλείται απολύτως συνεχής.

Παρατήρηση: Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα σχετικά συμπαγή σύνολα είναι και φραγμένα. Επειδή οι γραμμικοί τελεστές που απεικονίζουν φραγμένα σε φραγμένα είναι συνεχείς, έπεται ότι στους γραμμικούς τελεστές οι έννοιες συμπαγής και απολύτως συνεχής τελεστής ταυτίζονται.

2.1.3 Παραδείγματα

(i) Οι τελεστές συμπερίληψης (inclusion), του $C^{k+1}[a, b]$ στο $C^k[a, b]$ και των συνεχών κατά Holder στο $[0, 1]$, στο $C[0, 1]$ είναι συμπαγείς, όπως προκύπτει από τα παραδείγματα (α) και (β) στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου.

(ii)¹⁹ Ο γραμμικός τελεστής $T : L^p([0,1]) \rightarrow C[0,1]$ με $(Tg)(x) = \int_0^x g(t)dt$ που περιγράφεται στο παράδειγμα (γ) του προηγούμενου κεφαλαίου είναι συμπαγής. Επίσης, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0,1]$, είναι και ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επειδή ο τελεστής συμπερίληψης (inclusion) j του $C[0,1]$ στο $L^p([0,1])$ είναι συνεχής, ο τελεστής $T \circ j$ είναι συμπαγής²⁰. Δηλαδή, ο γραμμικός τελεστής $(Tg)(x) = \int_0^x g(t)dt$ ορίζει μια συμπαγή απεικόνιση από το $L^p([0,1])$ στο $L^p([0,1])$.

(iii)²¹ Έστω $K : [a,b] \times [a,b] \rightarrow R$ συνεχής. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $T : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ με $(Tf)(t) = G(t)$ ο οποίος ορίζεται μέσω της $G(t) = \int_a^b K(s,t)f(s)ds$ είναι συμπαγής. Θεωρούμε ένα φραγμένο σύνολο F στον $C[a,b]$. Δηλαδή θεωρούμε πραγματικό αριθμό M ώστε: $F = \{f \in C[a,b] : \|f\| \leq M\}$. Επίσης, θεωρούμε την οικογένεια $A = \{Tf : f \in F\}$. Πρώτα, παρατηρούμε ότι η A είναι μια ομοιόμορφα φραγμένη οικογένεια. Συγκεκριμένα, η K είναι συνεχής σε ένα συμπαγές υποσύνολο του R^2 . Άρα, έχει μέγιστο και ελάχιστο σε αυτό το σύνολο, οπότε και η απόλυτη τιμή της K , θα έχει μέγιστο σε αυτό το σύνολο. Έστω $N \geq 0$ αυτό το μέγιστο. Τότε, για κάθε $t \in [a,b]$ μπορώ να γράψω $|G(t)| = \left| \int_a^b K(s,t)f(s)ds \right| \leq \int_a^b |K(s,t)| |f(s)| ds \leq NM(b-a)$. Δηλαδή, η οικογένεια A είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι η A είναι και ισοσυνεχής. Συγκεκριμένα έστω $t_o \in [a,b]$ και $\varepsilon > 0$.

Τότε, για κάθε $t \in [a,b]$, $t \neq t_o$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} |G(t_o) - G(t)| &= \left| \int_a^b K(s,t_o)f(s)ds - \int_a^b K(s,t)f(s)ds \right| \leq \int_a^b |K(s,t_o) - K(s,t)| |f(s)| ds \leq \\ &\leq M \int_a^b |K(s,t_o) - K(s,t)| ds \end{aligned}$$

Όμως, από τη συνέχεια της K ως προς t έπεται ότι για κάθε $s \in [a,b]$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in [a,b]$ με $|t - t_o| < \delta$ να ισχύει

¹⁹ Βλ. wikipedia ο.π.

²⁰ Βλ. πρόταση 2.2.1 παρακάτω.

²¹ Βλ. Goldberg et al. 2003.

$|K(s, t_o) - K(s, t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$ ή $|G(t_o) - G(t)| < \varepsilon$. Άρα, η οικογένεια A είναι ισοσυνεχής.

Από το θεώρημα Ascoli-Arzelà έπεται ότι η οικογένεια A είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $C[a, b]$ και άρα, ο τελεστής T είναι συμπαγής.

2.2 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

2.2.1 Πρόταση²²

Έστω (X, ρ) , (Y, d) , (Z, μ) μ.χ., $f : X \rightarrow Y$ συμπαγής και $g : Y \rightarrow Z$ συνεχής. Τότε, ο $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη

Έστω $S \subset X$ φραγμένο και $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $g \circ f(S)$. Άρα, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ ώστε $g \circ f(x_n) = z_n$. Επειδή, ο f είναι συμπαγής τελεστής η ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ έχει υπακολουθία $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει στον Y . Επειδή ο g είναι συνεχής, απεικονίζει συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, αφού $f(x_{n_k}) \rightarrow y$ τότε $z_{n_k} \rightarrow g(y)$. Προκύπτει, λοιπόν, ότι η ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Z . Συνεπώς, το $g \circ f(S)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Z και άρα, ο τελεστής $g \circ f$ είναι συμπαγής. ■

2.2.2 Πρόταση

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και τελεστές $f, g : X \rightarrow Y$ συμπαγείς. Τότε, ο $g + f : X \rightarrow Y$ είναι επίσης συμπαγής.

Απόδειξη

Έστω φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Τότε επειδή ο f είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε η $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει. Επειδή η $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ είναι και αυτή φραγμένη ακολουθία και επειδή ο g είναι επίσης συμπαγής τελεστής,

²² Βλ. ο.π. σελ. 13.

υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ ώστε η ακολουθία $(g(x_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει. Επίσης, επειδή η $(f(x_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει και αυτή. Τέλος, από τη συνέχεια της πρόσθεσης έπεται ότι η $(f(x_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}} + (g(x_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$ επίσης συγκλίνει.

Άρα, για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, υπάρχει υπακολουθία $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, ώστε η ακολουθία $((g + f)(x'_n))_{n \in \mathbb{N}} = (g(x'_n) + f(x'_n))_{n \in \mathbb{N}}$, να συγκλίνει στον Y . Δηλαδή, ο $g + f$ είναι συμπαγής. ■

2.2.3 Πρόταση

Έστω (X, ρ) γενικός μ.χ., και (Y, d) πλήρης μ.χ. Αν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(X, Y)$ μια ακολουθία από συμπαγείς τελεστές που συγκλίνει στο $f \in B(X, Y)$. Τότε, ο f είναι επίσης συμπαγής.

Απόδειξη

Έστω φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Αφού η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και ο f_1 είναι συμπαγής, τότε η ακολουθία $(f_1(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Δηλαδή, υπάρχει υπακολουθία $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε η $(f_1(x_n^1))_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει.

Επειδή η $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης φραγμένη ακολουθία και ο f_2 επίσης συμπαγής, έπεται ότι η $(f_2(x_n^1))_{n \in \mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Δηλαδή, υπάρχει $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε η $(f_2(x_n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει.

Με αντίστοιχο τρόπο μπορώ να βρω φραγμένη ακολουθία $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε η $(f_k(x_n^k))_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει. Έτσι, η ακολουθία $(f_k(x_n^l))_{n \in \mathbb{N}}$, επίσης θα συγκλίνει για κάθε $l \geq k$, επειδή η $(x_n^l)_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι υπακολουθία της $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$.

Τότε, για την ακολουθία $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}} = \{x_1^1, x_2^2, \dots\}$ θα ισχύει ότι η ακολουθία $(f_k(x_n^n))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n^n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $f_k \rightarrow f$ έπεται ότι υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $k > N_1$, να ισχύει $d(f_k(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, για κάθε $x \in X$.

Επίσης, επειδή η ακολουθία $(f_k(x_n))_{n \in N}$, συγκλίνει για κάθε $k \in N$, θα είναι και Cauchy. Δηλαδή, για κάθε $k \in N$, θα υπάρχει $N_2 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n, n' > N_2$, να ισχύει $d(f_k(x_n), f_k(x_{n'})) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε πάντα $M \in N$, ώστε για κάθε $n, n' > M$, να ισχύει ότι:

$$d(f(x_n), f(x_{n'})) \leq d(f(x_n), f_k(x_n)) + d(f_k(x_n), f_k(x_{n'})) + d(f_k(x_{n'}), f(x_{n'})) < \varepsilon$$

Συνεπώς, η $(f(x_n))_{n \in N}$ είναι Cauchy, και επειδή ο Y είναι πλήρης θα συγκλίνει. Άρα, για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in N} \subset X$, μπορώ να βρω υπακολουθία $(x_n)_{n \in N}$, ώστε η $(f(x_n))_{n \in N}$ να συγκλίνει. Δηλαδή, ο f είναι συμπαγής. ■

3. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε τα πιο γνωστά θεωρήματα σταθερού σημείου και θα δούμε μερικές εφαρμογές τους στα οικονομικά. Σε τέτοιες εφαρμογές συναντάμε συχνά απεικονίσεις που η εικόνα τους δεν είναι απαραίτητα μοναδική (πλειότιμες απεικονίσεις ή αντιστοιχίες)²³. Πριν προχωρήσουμε είναι σκόπιμο να κάνουμε μια πολύ μικρή εισαγωγή σε αυτές τις απεικονίσεις.

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ

3.1.1 Βασικοί ορισμοί

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. $A \subset X$, $B \subset Y$ και αντιστοιχία $f: X \rightarrow Y$. Ορίζω τα εξής:

- (i) **Εικόνα του A:** $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(x)$
- (ii) **Άνω αντίστροφη εικόνα του B:** $f^u(B) = \{x \in X : f(x) \subset B\}$
- (iii) **Κάτω αντίστροφη εικόνα του B:** $f^l(B) = \{x \in X : f(x) \cap B \neq \emptyset\}$
- (iv) **Αντίστροφη εικόνα του $y \in Y$:** $f^{-1}(y) = \{x \in X : y \in f(x)\}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στις αντιστοιχίες δεν έχουμε μοναδική έννοια της αντιστροφής εικόνας. Σα συνέπεια αυτού και η έννοια της συνέχειας δεν είναι μοναδική.

3.1.2 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και αντιστοιχία $f: X \rightarrow Y$. Λέμε ότι οι τιμές της f έχουν μια ιδιότητα π.χ. κυρτές, κλειστές κ.λ.π. όταν το σύνολο $f(x)$ έχει αυτή την ιδιότητα για κάθε $x \in X$.

3.1.3 Ορισμοί συνέχειας

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και αντιστοιχία $f: X \rightarrow Y$. Ορίζω τα εξής:

- (i) Η f καλείται άνω ημισυνεχής (upper hemicontinuous)²⁴ στο $x \in X$, αν για κάθε $U \subset Y$ ανοικτό, με $f(x) \subset U$, υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό, ώστε:
 $x \in V \subset f^u(U)$.

²³ Ο όρος *πλειότιμες απεικονίσεις* αναφέρεται στον Πολυράκη (2010), ενώ ο όρος *αντιστοιχία* που θα χρησιμοποιείται εφεξής αποτελεί απόδοση του αντίστοιχου αγγλικού όρου *correspondence*.

²⁴ Εφιστώ την προσοχή στον αναγνώστη, καθώς συχνά οι όροι άνω/κάτω ημισυνεχής χρησιμοποιούνται για να αποδώσουν στα Ελληνικά του όρους upper/lower semicontinuous που έχουν διαφορετικό νόημα.

- (ii) Η f καλείται κάτω ημισυνεχής (lower hemicontinuous) στο $x \in X$, αν για κάθε $U \subset Y$ ανοικτό, με $f(x) \cap U \neq \emptyset$, υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό, ώστε: $x \in V \subset f^l(U)$.
- (iii) Η f καλείται συνεχής στο $x \in X$, αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω ημισυνεχής στο $x \in X$.
- (iv) Η f καλείται άνω ημισυνεχής, κάτω ημισυνεχής, συνεχής αν έχει την αντίστοιχη ιδιότητα για κάθε $x \in X$.

Η πρόταση που ακολουθεί επιτρέπει τον ευκολότερο χαρακτηρισμό της συνέχειας.

3.1.4 Πρόταση

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και αντιστοιχία $f : X \rightarrow Y$. Ισχύουν τα εξής:

- (i) Η f είναι άνω ημισυνεχής $\Leftrightarrow f''(U)$ ανοικτό, για κάθε $U \subset Y$ ανοικτό.
- (ii) Η f είναι κάτω ημισυνεχής $\Leftrightarrow f^l(U)$ ανοικτό, για κάθε $U \subset Y$ ανοικτό.

Απόδειξη

(i) lhs $\Rightarrow$ rhs. Έστω f άνω ημισυνεχής και $U \subset Y$ ανοικτό. Τότε, για κάθε $x \in f''(U)$, έχουμε: $f(x) \subset U$. Από τον ορισμό της άνω ημισυνέχειας παίρνουμε ότι: υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό, ώστε $x \in V \subset f''(U)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in f''(U)$ μπορώ να βρω ανοικτή περιοχή του x που είναι υποσύνολο του $f''(U)$. Δηλαδή, το $f''(U)$ είναι ανοικτό.

rhs $\Rightarrow$ lhs. Έστω $x \in X$ και $U \subset Y$ ανοικτό ώστε $f(x) \subset U$. Τότε, $x \in f''(U)$ και το $f''(U)$ είναι ανοικτό από υπόθεση και άρα, η f είναι άνω ημισυνεχής (ο ορισμός ικανοποιείται με $V = f''(U)$).

(ii) lhs $\Rightarrow$ rhs. Έστω f κάτω ημισυνεχής και $U \subset Y$ ανοικτό. Τότε, για κάθε $x \in f^l(U)$ έχουμε: $f(x) \cap U \neq \emptyset$. Από τον ορισμό της κάτω ημισυνέχειας παίρνουμε ότι: υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό, ώστε $x \in V \subset f^l(U)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in f^l(U)$ μπορώ να βρω ανοικτή περιοχή του x που είναι υποσύνολο του $f^l(U)$. Δηλαδή, το $f^l(U)$ είναι ανοικτό.

rhs $\Rightarrow$ lhs. Έστω $x \in X$ και $U \subset Y$ ανοικτό, ώστε: $f(x) \cap U \neq \emptyset$. Τότε, $x \in f^l(U)$ και το $f^l(U)$ είναι ανοικτό από υπόθεση και άρα, η f είναι κάτω ημισυνεχής (ο ορισμός ικανοποιείται με $V = f^l(U)$). ■

Τέλος, οι δύο προτάσεις που ακολουθούν αφορούν στη σχέση συνέχειας και συμπάγειας σε αντιστοιχίες.

3.1.5 Πρόταση

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και αντιστοιχία $f : X \rightarrow Y$. Αν η f έχει κλειστές τιμές και ο Y είναι συμπαγής, τότε ισχύει το εξής:

Η f είναι άνω ημισυνεχής $\Leftrightarrow$ Η f έχει κλειστό γράφημα. Δηλαδή, το σύνολο $Gr(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$.

Απόδειξη

rhs $\Rightarrow$ lhs. Έστω ότι η f έχει κλειστό γράφημα και δεν είναι άνω ημισυνεχής. Άρα, υπάρχει $x \in X$ και $U \subset Y$ ανοικτό με $f(x) \subset U$ ώστε, για κάθε $V \subset X$ ανοικτό, με $x \in V$ να ισχύει $V \not\subset f^u(U)$. Δηλαδή, σε κάθε ανοικτή περιοχή V του x υπάρχει $z \in V$ με $z \notin f^u(U)$. Δηλαδή, $f(z) \not\subset U$. Μπορώ να πάρω μια ακολουθία (από ανοικτές μπάλες) $\{V_n\} = \left\{B(x, \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοιων περιοχών του x και αντίστοιχα να επιλέξω ένα σημείο z_n από κάθε τέτοια περιοχή που ικανοποιεί τα παραπάνω και επιπλέον $z_n \rightarrow x$. Άρα, θα υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}$ με $y_n \in f(z_n)$ και $y_n \notin U$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή ο Y είναι συμπαγής, έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $\{y_{n_k}\}$ που συγκλίνει στο $y \in Y$. Επειδή το γράφημα είναι κλειστό και $(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (x, y)$, έπεται ότι $y \in f(x) \subset U$ και επειδή $y_{n_k} \notin U$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, y_{n_k} δεν συγκλίνει στο $y \in U$ που είναι άτοπο.

lhs $\Rightarrow$ rhs. Έστω ότι η f είναι άνω ημισυνεχής. Θα δείξουμε ότι έχει κλειστό γράφημα. Δηλαδή, ότι το $Gr(f)^c$ είναι ανοικτό ή ισοδύναμα ότι για κάθε $(x, y) \notin Gr(f)$ υπάρχει $u \times v \subset X \times Y$ ανοικτό, ώστε: $(u \times v) \cap Gr(f) = \emptyset$.

Έστω $(x, y) \notin Gr(f)$, τότε $y \notin f(x)$. Επειδή το $f(x)$ είναι κλειστό, υπάρχουν ανοικτά σύνολα w_1, w_2 με $f(x) \subset w_1$, $y \in w_2$ και $w_1 \cap w_2 = \emptyset$ ²⁵. Επειδή η f είναι άνω ημισυνεχής, υπάρχει $u \subset X$ ανοικτό ώστε $x \in u \subset f''(w_1)$. Δηλαδή, για κάθε $z \in u$, $f(z) \subset w_1$. Συνεπώς, το $u \times w_2$ είναι ανοικτό και για κάθε $z \in u$, $f(z) \cap w_2 = \emptyset$ και συνεπώς: $(u \times w_2) \cap Gr(f) = \emptyset$. ■

3.1.6 Πρόταση

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και άνω ημισυνεχής αντιστοιχία $f: K \rightarrow Y$. Αν η f έχει συμπαγείς (άρα και κλειστές) τιμές και το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X , τότε το σύνολο $f(K)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Έστω $\{U_a\}_{a \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(K)$. Έστω $x \in K$, αφού το $f(x)$ είναι συμπαγές, θα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_x^n\}_{n=1}^{n_x} \subset \{U_a\}_{a \in I}$ του $f(x)$. Ορίζω $V_x = \bigcup_{n=1}^{n_x} U_x^n$, το οποίο είναι ανοικτό. Επειδή η f είναι άνω ημισυνεχής, το σύνολο $f''(V_x)$ είναι ανοικτή περιοχή του x . Επειδή η οικογένεια $\{V_x\}_{x \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K και το K είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{x_i\}_i^l \subset K$ ώστε: $K = \bigcup_{i=1}^l f''(V_{x_i})$. Άρα, $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^l V_{x_i}$ και η οικογένεια $\left\{ \left\{ U_{x_i}^n \right\}_{n=1}^{n_{x_i}} \right\}_{i=1}^l$ είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{U_a\}_{a \in I}$. ■

3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Πριν προχωρήσουμε με την παρουσίαση των γνωστότερων θεωρημάτων σταθερού σημείου είναι σκόπιμο να εξηγήσουμε τι εννοούμε με τον όρο σταθερό σημείο.

²⁵ Χρησιμοποιούμε το ότι οι μετρικοί χώροι είναι φυσιολογικοί. Βλ. σελ. 262-263 του Νεγρεπόντη κ.α.

3.2.1 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , μ.χ. $A \subset X$ και τελεστής $f : A \rightarrow X$. Ο f έχει σταθερό σημείο αν υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = x$.

Στην περίπτωση των αντιστοιχιών, ο ορισμός του σταθερού σημείου τροποποιείται ως εξής:

3.2.2 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , μ.χ., $A \subseteq X$ και αντιστοιχία $f : A \rightarrow X$. Η f έχει σταθερό σημείο αν υπάρχει $x \in A$ ώστε $x \in f(x)$.

Για τις εφαρμογές που θα συναντήσουμε αργότερα μας ενδιαφέρουν κυρίως, απεικονίσεις από ένα υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα στον εαυτό του. Για αυτόν το λόγο, τα θεωρήματα σταθερού σημείου που θα συζητήσουμε παρακάτω, θα αφορούν σε τέτοιες απεικονίσεις.

Γενικά, υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες θεωρημάτων σταθερού σημείου. Αυτά που στηρίζονται στην έννοια των συμπαγών συνόλων και αυτά που αφορούν στις απεικονίσεις συστολής (contraction).

3.3 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΓΙΑ ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΥΝΟΛΑ

Το πρώτο και πιο γνωστό αποτέλεσμα σε αυτή την κατηγορία είναι το θεώρημα του Brower του 1912.

3.3.1 Πρόταση (Brower)

Κάθε συνεχής συνάρτηση, από ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του R^n στον εαυτό του, έχει σταθερό σημείο.

Το θεώρημα του Brower επεκτάθηκε προς δύο κατευθύνσεις.

Πρώτον, σε αντιστοιχίες στο R^n .

3.3.2 Πρόταση (Kakutani)²⁶

Κάθε άνω ημισυνεχής αντιστοιχία, με μη κενές, κυρτές και κλειστές τιμές, από ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του R^n στον εαυτό του, έχει σταθερό σημείο.

²⁶ Επειδή η εικόνα της αντιστοιχίας είναι συμπαγές σύνολο αντί για άνω ημισυνεχείς αντιστοιχίες με κλειστές τιμές μπορούμε να θεωρήσουμε αντιστοιχίες με κλειστά γραφήματα.

Δεύτερον, σε χώρους με νόρμα.

3.3.3 Πρόταση (Schauder)

Κάθε συνεχής τελεστής, από ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα, στον εαυτό του, έχει σταθερό σημείο.

Ένας συνηθισμένος δρόμος για την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων είναι να αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα του Brower με την χρήση της θεωρίας «homology groups» και στη συνέχεια με την βοήθεια των ιδιοτήτων των συμπαγών συνόλων να πάρουμε τα άλλα δύο θεωρήματα²⁷.

Εδώ, θα ακολουθήσουμε έναν άλλο δρόμο. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο γενικό θεώρημα για αντιστοιχίες, που περιλαμβάνει τα τρία προαναφερθέντα θεωρήματα ως ειδικές περιπτώσεις.

3.3.4 Πρόταση (Glicksberg-Fan)²⁸

Κάθε άνω ημισυνεχής αντιστοιχία, με μη κενές, κυρτές και κλειστές τιμές, από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα στον εαυτό του, έχει σταθερό σημείο.

Το θεώρημα Kakutani είναι προφανώς ειδική περίπτωση της παραπάνω πρότασης, καθώς ο R^n είναι χώρος με νόρμα. Για το θεώρημα Schauder και άρα, και για το θεώρημα Brower, αρκεί να παρατηρήσουμε, ότι αν μια αντιστοιχία είναι μονότιμη, είναι δηλαδή τελεστής, η άνω αντίστροφη εικόνα της, θα ταυτίζεται με την αντίστροφη εικόνα της και άρα, λόγω της πρότασης 3.1.4, η συνέχεια θα ταυτίζεται με την άνω ημισυνέχεια. Επίσης, τα μονοσύνολα σε έναν χώρο με νόρμα είναι κλειστά και τετριμμένα κυρτά.

Προκειμένου να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση, θα χρησιμοποιήσουμε τρία θεωρήματα τα οποία θα αναφέρουμε στην συνέχεια χωρίς απόδειξη.

²⁷ Για αυτή την προσέγγιση βλ. Brown (1993) κεφάλαια 3 και 4 και παράρτημα D και Border (2003) σελ. 72.

²⁸ Για την διατύπωση βλ. Ok 2005. Η απόδειξη ακολουθεί την απόδειξη του γενικότερου θεωρήματος Halpern-Bergman που βρίσκεται στον Πολυράκη (2010) - σελ. 100 - αυτό το θεώρημα αντί να υποθέτει ότι η αντιστοιχία απεικονίζει ένα κυρτό και συμπαγές στον εαυτό του, υποθέτει ότι απεικονίζει ένα κυρτό και συμπαγές σε έναν γενικό χώρο με νόρμα και η αντιστοιχία είναι επιπλέον inward pointing. Το θεώρημα Halpern-Bergman γενικεύεται ακόμα περισσότερο (βλ. θεώρημα Fan-Browder στη σελ. 78 του Border 2003).

3.3.5 Πρόταση

Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και K, F μη κενά, κλειστά, κυρτά και ξένα υποσύνολα του X με το K συμπαγές. Τότε, υπάρχουν $x^* \in X^*$ ²⁹ και $\lambda \in R$ ώστε: $K \subset \{x \in X : x^*(x) > \lambda\}$ και $F \subset \{x \in X : x^*(x) < \lambda\}$.

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή και ως «δεύτερη γεωμετρική μορφή του θεωρήματος Hahn Banach»³⁰.

Για την εφαρμογή της παραπάνω πρότασης παρατηρούμε τα ακόλουθα:

Πρώτον: Οι χώροι με νόρμα είναι τοπικά κυρτοί.

Δεύτερον: Αν $f : X \rightarrow Y$ είναι μια αντιστοιχία χωρίς σταθερό σημείο, τότε για κάθε $x \in K$ τα $x, f(x)$ είναι ξένα μεταξύ τους. Επίσης, αν η f έχει μη κενές, κλειστές και κυρτές τιμές, η πρόταση 3.3.5 μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε το x από τα $f(x)$, καθώς το x , ως μονοσύνολο σε ένα χώρο με νόρμα, είναι κλειστό, συμπαγές και τετριμένα κυρτό.

3.3.6 Πρόταση (ύπαρξη πεπερασμένων διαμερίσεων της μονάδας)

Έστω φυσιολογικός χώρος³¹ X και $\{U_1, U_2 \dots U_n\}$ ένα πεπερασμένο κάλυμμα του. Τότε υπάρχουν συνεχείς, μη αρνητικές συναρτήσεις $f_1, f_2 \dots f_n$ ώστε: $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 1$, για κάθε $x \in X$ και $\overline{\{x \in X : f_k(x) > 0\}} \subset U_k$ για $k = 1, 2, \dots, n$.

Η πρόταση ισχύει επίσης αν το $\{U_1, U_2 \dots U_n\}$ είναι πεπερασμένο κάλυμμα ενός συμπαγούς υποσυνόλου του φυσιολογικού χώρου X .

Για την απόδειξη παραπέμπω στη σελίδα 364 του Νεγρεπόντη κ.α. Στηρίζεται στο λήμμα του Urysohn, το οποίο αποδεικνύεται στη σελίδα 363 του ίδιου βιβλίου.

²⁹ Ο X^* είναι ο χώρος των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών από το X στο R .

³⁰ Βλ. πρόταση 14.35 στη σελ. 391 του Νεγρεπόντη κ.α. και πρόταση 3.8 στη σελ. 50 του Πολυράκη (2010).

³¹ Ο ορισμός του φυσιολογικού χώρου αναφέρεται στις σελ. 262-263 του Νεγρεπόντη κ.α. Σημειώνεται ότι οι χώροι με νόρμα και γενικότερα οι μετρικοί χώροι είναι φυσιολογικοί (βλ. και υποσημείωση 25).

3.3.7 Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα και $K \subset X$ μη κενό, συμπαγές και κυρτό. Έστω επίσης $p: K \rightarrow X^*$. Αν η απεικόνιση $(x, y) \rightarrow \langle y, p(x) \rangle$ είναι συνεχής ως απεικόνιση από το $K \times K$ στο R υπάρχει $x \in K$ ώστε: $\langle x, p(x) \rangle \leq \langle y, p(x) \rangle$ για κάθε $y \in K$.

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στη σελίδα 99 του Πολυράκη (2010). Στηρίζεται στο λήμμα του Fan το οποίο αποδεικνύεται στην σελίδα 96 του Πολυράκη (2010) και στο θεώρημα Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz το οποίο αποδεικνύεται στη σελίδες 26-27 του Border (2003).

Τώρα, μπορούμε να προχωρήσουμε με την απόδειξη της πρότασης 3.3.4.

Απόδειξη της πρότασης 3.3.4³²

Έστω X χώρος με νόρμα, $A \subset X$ συμπαγές, μη κενό και κυρτό και αντιστοιχία $f: A \rightarrow A$ με μη κενές, κυρτές και κλειστές τιμές. Έστω ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο, δηλαδή για κάθε $x \in A$, $x \notin f(x)$.

Επομένως, από την πρόταση 3.3.5, υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $Q_x: X \rightarrow R$ και $a_x \in R$ ώστε $Q_x(x) > a_x$ και $Q_x(y) < a_x$ για κάθε $y \in f(x)$.

Παρατηρώ ότι τα σύνολα $(-\infty, a_x)$ και $(a_x, +\infty)$ είναι ανοικτά στο R . Συνεπώς, από τη συνέχεια του Q_x , τα σύνολα $\{z \in A: Q_x(z) < a_x\}$ και $\{z \in A: Q_x(z) > a_x\}$ είναι επίσης ανοικτά. Επειδή η f είναι άνω ημισυνεχής, το σύνολο $f''(\{z \in A: Q_x(z) < a_x\})$ είναι επίσης ανοικτό και υποσύνολο του A . Άρα, και το $U_x = f''(\{z \in A: Q_x(z) < a_x\}) \cap \{z \in A: Q_x(z) > a_x\}$

είναι ανοικτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών. Επίσης, το σύνολο U_x είναι μη κενό γιατί το x ανήκει σε αυτό. Είναι, λοιπόν, ανοικτή περιοχή του x . Συνεπώς, η οικογένεια $\{U_x\}_{x \in A}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του A . Επειδή το A είναι συμπαγές, θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, θα υπάρχουν $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ ώστε: $A = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.

Συνεπώς, μπορώ να εφαρμόσω την πρόταση 3.3.6 οπότε, για κάθε $x \in A$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα f_i με $f_i(x) > 0$ (γιατί $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$)
ώστε: $\{x \in X: f_i(x) > 0\} \subset U_{x_i}$.

³² Η απόδειξη ακολουθεί τον Πολυράκη (2010) σελ. 100-101.

Από τον ορισμό του U_{x_i} θα έχω: $f_i(x) > 0 \Rightarrow Q_{x_i}(y) < a_x$ και $Q_{x_i}(x) > a_x$ για

κάθε $y \in f(x)$. Ορίζω: $p: K \rightarrow X^*$ με $p(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) Q_{x_i}$.

Η απεικόνιση $(x, y) \rightarrow \langle y, p(x) \rangle = \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) Q_{x_i} \right)(y)$ είναι συνεχής γιατί, τα Q_{x_i}

και τα f_i είναι συνεχή άρα, μπορώ να εφαρμόσω την πρόταση 3.3.7. Συνεπώς, μπορώ να βρώ ένα $x_o \in A$ ώστε για κάθε $y \in A$ να ισχύει: $\langle x_o, p(x_o) \rangle \leq \langle y, p(x_o) \rangle$ ή ισοδύναμα:

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x_o) Q_{x_i} \right)(y) \geq \left(\sum_{i=1}^n f_i(x_o) Q_{x_i} \right)(x_o).$$

Έστω $x \in A$ και $y \in f(x)$. Τότε θα ισχύει:

$$\langle x, p(x) \rangle = \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) Q_{x_i} \right)(x) > \sum_{i=1}^n f_i(x) a_x > \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) Q_{x_i} \right)(y) = \langle y, p(x) \rangle$$

Άρα, για κάθε $x \in A$ και $y \in f(x)$, $\langle x, p(x) \rangle > \langle y, p(x) \rangle$.

Ξέρω, όμως, ότι υπάρχει $x_o \in A$ ώστε: $\langle x_o, p(x_o) \rangle \leq \langle y, p(x_o) \rangle$ για κάθε $y \in A$.

Συνεπώς, για κάθε $y \in f(x_o)$ θα ισχύει: $\langle x_o, p(x_o) \rangle \leq \langle y, p(x_o) \rangle$, το οποίο είναι άτοπο.

■

Το θεώρημα Schauder συναντιέται στην βιβλιογραφία και με άλλες μορφές. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο από αυτές (προτάσεις 3.3.8 και 3.3.11).

3.3.8 Πρόταση

Κάθε απολύτως συνεχής τελεστής (όχι απαραίτητα γραμμικός) από ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος χρειαζόμαστε το θεώρημα συμπίεσης του Mazur που παρατίθεται χωρίς απόδειξη.³³

3.3.9 Πρόταση (Θεώρημα Συμπίεσης Mazur)

Η κλειστότητα της κυρτής θήκης, ενός σχετικά συμπαγούς υποσυνόλου ενός χώρου Banach, είναι συμπαγές σύνολο.

³³ Για την απόδειξη δεξ Ok (2005) σελ.470-471.

Απόδειξη της πρότασης 3.3.8³⁴

Έστω $S \subset X$, κλειστό, φραγμένο και κυρτό και $f: X \rightarrow X$ σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος. Τότε, το σύνολο $f(S) \subset S$, είναι σχετικά συμπαγές και άρα, η κλειστότητα της κυρτής θήκης του, δηλαδή το σύνολο $T \equiv \overline{cof(S)}$, είναι συμπαγές σύνολο από την πρόταση 3.3.8 και κυρτό εκ κατασκευής. Επίσης $T \subset S$. Επειδή το S είναι κυρτό, $cof(S) \subset S \Rightarrow f(cof(S)) \subset f(S) \Rightarrow \overline{f(cof(S))} \subset \overline{f(S)}$.

Επίσης, $f(S) \subset cof(S) \Rightarrow \overline{f(S)} \subset \overline{cof(S)} \equiv T$.

Τέλος, $f(T) \subset \overline{f(T)} \equiv \overline{f(\overline{cof(S)})} = \overline{f(cof(S))}$.

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε τα εξής. Επειδή η f είναι συνεχής, για κάθε $A \subset S$ θα ισχύει ότι $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ ³⁵. Οπότε $\overline{f(\overline{A})} \subset \overline{f(A)}$. Επίσης $A \subset \overline{A} \Rightarrow f(A) \subset f(\overline{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})}$, συνεπώς $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα παίρνουμε $f(T) \subset \overline{f(cof(S))} \subset \overline{f(S)} \subset T$.

Συνεπώς, ο περιορισμός του f στο T ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Schauder και άρα, ο f έχει σταθερό σημείο. ■

Παρατήρηση: Από την απόδειξη προκύπτει ότι οι υποθέσεις ότι ο τελεστής f είναι συμπαγής και ότι το σύνολο S είναι φραγμένο, μπορούν να αντικατασταθούν από την υπόθεση ότι το σύνολο $f(S)$ είναι σχετικά συμπαγές.

Συχνά, μπορεί να είναι δύσκολο να εντοπίσουμε ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο που ένας τελεστής απεικονίζει στον εαυτό του. Η πρόταση 3.3.11, που θα δούμε παρακάτω, είναι πόρισμα της πρότασης 3.3.9 και αντικαθιστά τη συμπάγεια από την ακόλουθη ιδιότητα.

³⁴ Σε ότι ακολουθεί $\overline{A}$ είναι η κλειστότητα του A και coA είναι η κυρτή θήκη του A .

³⁵ Βλ. Νεγρεπόντη κ.α. σελ. 242.

3.3.10 Ορισμός (Leray Schauder Boundary Condition-LSBC)

Έστω X χώρος με νόρμα και τελεστής $f : X \rightarrow X$. Ο τελεστής f ικανοποιεί την ιδιότητα LSBC, αν υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε $\|x\| = r$ συνεπάγεται $f(x) \neq \lambda x$ για κάθε $\lambda > 1$.

Αν ο f ικανοποιεί την LSBC τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $\|f(x)\| \leq r$ για κάθε x τέτοιο ώστε $\|x\| = r$.

Ένας τρόπος που συναντάμε την LSBC στις εφαρμογές είναι ως μια συνθήκη μεγέθυνσης (growth condition). Καθώς το $\|x\|$ μεγαλώνει το $\|f(x)\|$ μεγαλώνει λιγότερο, με αποτέλεσμα, κάποια στιγμή να γίνεται μικρότερο από το $\|x\|$.

3.3.11 Πρόταση

Έστω X χώρος Banach και απολύτως συνεχής τελεστής $f : X \rightarrow X$ που ικανοποιεί την ιδιότητα LSBC. Ο f έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Έστω η κλειστή μπάλα $\overline{B_r} = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ όπου το r ικανοποιεί την LSBC. Έστω, επίσης, ο περιορισμός $f|_{\overline{B_r}} : \overline{B_r} \rightarrow X$ της f στο $\overline{B_r}$. Επειδή το $\overline{B_r}$ είναι φραγμένο και η f είναι απολύτως συνεχής, το $f(\overline{B_r})$ είναι σχετικά συμπαγές. Δηλαδή, υπάρχει $K \subset X$ συμπαγές ώστε: $f(\overline{B_r}) \subset K$. Ορίζω τελεστή $\rho : X \rightarrow \overline{B_r}$ ως εξής:

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{αν } \|x\| < r \\ \frac{r}{\|x\|} x & \text{αν } \|x\| \geq r \end{cases}$$

Ο ρ είναι συνεχής, γιατί η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε ανοικτού υποσυνόλου του $\overline{B_r}$ μας δίνει το ίδιο ανοικτό υποσύνολο του $\overline{B_r}$. Άρα, ο τελεστής $f^* = \rho \circ f$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών και συμπαγής από την πρόταση 2.2.1, άρα απολύτως συνεχής.

Συνεπώς από την πρόταση 3.3.8 ο $f^* : \overline{B_r} \rightarrow \overline{B_r}$ έχει σταθερό σημείο. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \overline{B_r}$ ώστε $x = f^*(x)$. Ο ισχυρισμός είναι ότι $f^*(x) = f(x)$, δηλαδή, ότι: $\|f(x)\| \leq r$.

Αν αυτό δεν ισχύει, τότε: $\|f(x)\| > r$ και:

$$x = f^*(x) = \rho(f(x)) = \frac{rf(x)}{\|f(x)\|} \Rightarrow \|x\| = r.$$

Άρα, υπάρχει x ώστε: $\|x\| = r$ με $\|f(x)\| > r$, το οποίο είναι άτοπο (παραβιάζει την LSBC). ■

Η πρόταση 3.3.8 και άρα και η πρόταση 3.3.11 μπορούν να αποδειχθούν για γενικούς χώρους με νόρμα (χωρίς να είναι απαραίτητη η πληρότητα)³⁶.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα αναφέροντας ένα θεώρημα σταθερού σημείου για κάτω ημισυνεχείς αντιστοιχίες (πρόταση 3.3.14). Το θεώρημα αυτό απαιτεί ένα θεώρημα συνεχούς επιλογής. Η έννοια του όρου *επιλογή* εξηγείται στον παρακάτω ορισμό.

3.3.12 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , (Y, d) μ.χ. και αντιστοιχία $\Phi : X \rightarrow Y$. Ο τελεστής $f : X \rightarrow Y$ ώστε: $f(x) \in \Phi(x)$, για κάθε $x \in X$ λέγεται επιλογή της Φ . Αν επιπλέον ο f είναι συνεχής, λέμε ότι ο f είναι συνεχής επιλογή της Φ .

Η ύπαρξη επιλογής προκύπτει άμεσα από το αξίωμα της επιλογής³⁷. Για την ύπαρξη συνεχούς επιλογής σχετικό είναι το παρακάτω θεώρημα το οποίο παρατίθεται χωρίς απόδειξη³⁸.

3.3.13 Πρόταση (Michael)

Έστω X μετρικός χώρος και Y χώρος με νόρμα. Αν ο X είναι συμπαγής και η αντιστοιχία $\Phi : X \rightarrow Y$ είναι κάτω ημισυνεχής με μη κενές, κλειστές και κυρτές τιμές, υπάρχει συνεχής επιλογή $f : X \rightarrow Y$ της Φ .

³⁶ Για την απόδειξη βλ. Brown (1993) κεφ. 4.

³⁷ Για μια διατύπωση του αξιώματος βλ. Ok (2005) σελ. 22.

³⁸ Για την απόδειξη βλ. Πολυράκη (2010) σελ. 93

Το θεώρημα αυτό ισχύει και αν η αντιστοιχία Φ ορίζεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου.

3.3.14 Πρόταση

Κάθε κάτω ημισυνεχής αντιστοιχία, με μη κενές, κυρτές και κλειστές τιμές, από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα στον εαυτό του, έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Από την πρόταση 3.3.13 υπάρχει συνεχής επιλογή, η οποία μάλιστα ικανοποιεί το θεώρημα σταθερού σημείου Schauder. Συνεπώς, η συνεχής επιλογή και άρα, και η αντιστοιχία έχει σταθερό σημείο. ■

3.4 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΓΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΣΥΣΤΟΛΗΣ

Το πιο γνωστό αποτέλεσμα σε αυτή τη κατηγορία είναι το θεώρημα Banach. Αυτό το θεώρημα χρησιμοποιεί την πληρότητα και την έννοια της συστολής που περιγράφεται στον παρακάτω ορισμό.

3.4.1 Ορισμός

Έστω (X, ρ) , μ.χ. και τελεστής $f : X \rightarrow X$. Ο f είναι συστολή αν υπάρχει $a \in (0,1)$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq a\rho(x, y)$

Παρατήρηση: Είναι άμεσο ότι κάθε συστολή είναι συνεχής.

3.4.2 Πρόταση (Banach)

Έστω (X, d) , πλήρης μ.χ. και τελεστής $f : X \rightarrow X$ ο οποίος είναι συστολή. Τότε, ο f έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Δηλαδή, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x$.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in X$. Ορίζω $x_{n+1} = f(x_n)$ οπότε $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0)$

Από την ιδιότητα της συστολής: $d(x_{n+r}, x_n) = d(f(x_{n+r-1}), f(x_{n-1})) \leq ad(x_{n+r-1}, x_{n-1})$

και εφαρμόζοντας διαδοχικά: $d(x_{n+r}, x_n) \leq a^n d(x_r, x_0)$.

Εφαρμόζουμε επίσης την τριγωνική ανισότητα διαδοχικά στο $d(x_r, x_0)$:

$$d(x_r, x_0) \leq d(x_r, x_{r-1}) + d(x_{r-1}, x_{r-2}) + \dots + d(x_1, x_0)$$

Από την διαδοχική εφαρμογή της συστολής έχω: $d(x_r, x_{r-1}) \leq a^{r-1} d(x_1, x_0)$, για κάθε r .

$$\text{Συνεπώς, } d(x_{n+r}, x_n) \leq a^n (a^{r-1} + a^{r-2} + \dots + 1) d(x_1, x_0) = a^n \frac{1-a^r}{1-a} d(x_1, x_0)$$

Παρατηρώ ότι: $d(x_{n+r}, x_n) \rightarrow 0$ καθώς, $n \rightarrow \infty$ άρα, η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Επειδή ο χώρος είναι πλήρης, η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, υπάρχει $x^* \in X$ ώστε $x_n \rightarrow x^*$.

Επειδή: $x_{n+1} = f(x_n)$, παίρνοντας το όριο στο δεξί και το αριστερό μέρος βρίσκω ότι: $x^* = f(x^*)$. Άρα, το x^* είναι σταθερό σημείο.

Τέλος, για να δείξουμε ότι το σταθερό σημείο είναι μοναδικό, εργαζόμαστε ως εξής: Έστω ότι υπάρχουν περισσότερα και έστω x_1, x_2 δύο από αυτά. Τότε:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq ad(x_1, x_2) \Rightarrow (1-a)d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2. \blacksquare$$

Σημείωση:

Αν η f^n είναι συστολή για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε θα έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Σε αυτή την περίπτωση, αυτό θα είναι και το μοναδικό σταθερό σημείο της f . Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι το x^* είναι σταθερό σημείο της f^n , τότε: $f(f^n(x^*)) = f(x^*)$ και $f^{n+1}(x^*) = f(f^n(x^*)) = f^n(f(x^*))$. Οπότε $f(x^*) = f^n(f(x^*))$ και άρα, το $f(x^*)$ είναι σταθερό σημείο της f^n . Επειδή αυτό είναι μοναδικό, $f(x^*) = x^*$ οπότε το x^* είναι σταθερό σημείο της f . Επίσης, αν το x' είναι επίσης σταθερό σημείο της f , τότε: $f^n(x') = x'$ και άρα, το x' είναι σταθερό σημείο της f^n , οπότε: $x' = x^*$.

Το θεώρημα Banach γενικεύεται και σε αντιστοιχίες. Πριν προχωρήσουμε όμως στο σχετικό θεώρημα, είναι σκόπιμο να ορίσουμε την έννοια της συστολής για αντιστοιχίες. Για αυτό το σκοπό πρέπει να εισάγουμε την έννοια της μετρικής Hausdorf (h_d).

3.4.3 Ορισμός

Έστω (X, d) , μ.χ και μη κενά $A, B \subset X$ ορίζω:

$$h_d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b) \right\}. \text{ Θυμίζω ότι } d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

3.4.4 Ορισμός

Έστω (X, d) , μ.χ. και αντιστοιχία $f: X \rightarrow X$ με μη κενές, κλειστές και φραγμένες τιμές³⁹. Ο f είναι συστολή, αν υπάρχει $c \in (0, 1)$, ώστε $h_d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

3.4.5 Πρόταση (Nadler)

Κάθε αντιστοιχία συστολής σε ένα πλήρη μετρικό χώρο έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη⁴⁰

Βήμα 1^ο

Έστω αντιστοιχία συστολής $f: X \rightarrow X$ όπου ο (X, d) , είναι πλήρης μετρικός χώρος. Θα δείξω ότι για κάθε $A, B \subset X$ μη κενά, για κάθε $x_1 \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_2 \in B$ ώστε: $d(x_1, x_2) < h_d(A, B) + \varepsilon$. Επειδή, $d(x_1, B) = \inf_{b \in B} d(x_1, b)$, υπάρχει $x_2 \in B$ ώστε: $d(x_1, x_2) < \inf_{b \in B} d(x_1, b) + \varepsilon = d(x_1, B) + \varepsilon \leq \sup_{a \in A} d(a, B) + \varepsilon \leq h_d(A, B) + \varepsilon$.

Βήμα 2^ο

Θα δείξω ότι $d(x_{n+1}, x_n) < c^n d(x_1, x_0) + nc^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού η f είναι συστολή, θα υπάρχει $c \in (0, 1)$ ώστε: $h_d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Έστω $x_0 \in X$ και $x_1 \in f(x_0)$:

³⁹ Σημειώνεται ότι αν τα A, B είναι κλειστά, τότε η $h_d(A, B)$ έχει πεπερασμένη τιμή.

⁴⁰ Βλ. Πολυράκη (2010) σελ. 103-105.

Για $A = f(x_0), B = f(x_1)$, και $\varepsilon = c$ έχω ότι υπάρχει $x_2 \in f(x_1)$ ώστε:
 $d(x_1, x_2) < h_d(f(x_0), f(x_1)) + c$.

Για $A = f(x_1), B = f(x_2)$, και $\varepsilon = c^2$ έχω ότι υπάρχει $x_3 \in f(x_2)$ ώστε:
 $d(x_2, x_1) < h_d(f(x_1), f(x_2)) + c^2$.

Γενικά, θα υπάρχει $x_{n+1} \in f(x_n)$ ώστε $d(x_{n+1}, x_n) < h_d(f(x_n), f(x_{n-1})) + c^n$

Από συστολή: $h_d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1}) < ch_d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) + cc^{n-1}$.

Και άρα, $d(x_{n+1}, x_n) < ch_d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) + 2c^n$.

Με διαδοχικές επαναλήψεις: $d(x_{n+1}, x_n) < c^n d(x_1, x_0) + nc^n$.

Βήμα 3^ο

Έστω $m \in N$. Τότε, με διαδοχικές επαναλήψεις της τριγωνικής ανισότητας παίρνω: $d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \dots + d(x_1, x_0)$.

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Βήματος 2 έχω: $d(x_{n+m}, x_n) < (c^n d(x_1, x_0) + nc^n) + (c^{n+1} d(x_1, x_0) + (n+1)c^{n+1}) + \dots + (c^{n+m-1} d(x_1, x_0) + (n+m-1)c^{n+m-1}) =$
 $= c^n d(x_1, x_0)(1 + c + c^2 + \dots + c^{m-1}) + (nc^n + (n+1)c^{n+1} + \dots + (n+m-1)c^{n+m-1}) =$
 $= c^n \frac{1-c^m}{1-c} d(x_1, x_0) + nc^n \frac{1-c^m}{1-c} + c^n \frac{1-mc^{m-1} + (m-1)c^m}{1-c^2}$.

Παρατηρώ ότι το $d(x_{n+m}, x_n)$ είναι μικρότερο από μια ποσότητα που τείνει στο 0, καθώς $n \rightarrow \infty$. Επειδή, $d(x_{n+m}, x_n) \geq 0$ έπεται ότι το $d(x_{n+m}, x_n)$ τείνει στο 0, καθώς $n \rightarrow \infty$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in N}$ είναι Cauchy.

Επειδή ο χώρος είναι πλήρης, η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in N}$ συγκλίνει. Δηλαδή, υπάρχει $x^* \in X$ ώστε $x_n \rightarrow x^*$.

Από τον ορισμό των αντίστοιχων αποστάσεων και την ιδιότητα συστολής έχω ότι: $d(x_{n+1}, f(x^*)) \leq h_d(f(x_n), f(x^*)) \leq cd(x_n, x^*)$.

Παίρνοντας όρια για $n \rightarrow \infty$ βρίσκω ότι: $d(x^*, f(x^*)) = 0$. Συνεπώς, επειδή το $f(x)$ είναι κλειστό⁴¹, θα έχουμε ότι: $x^* \in f(x^*)$. ■

⁴¹ Σημειώνεται ότι $h_d(A, B) = 0$ αν και μόνο αν τα A, B έχουν την ίδια κλειστότητα.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση των αντιστοιχιών το σταθερό σημείο δεν είναι μοναδικό. Για παράδειγμα η $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ με $f(x) = [0,1]$ για κάθε $x \in [0,1]$ είναι συστολή με άπειρα σταθερά σημεία (παρατηρούμε ότι $h_d(f(x), f(y)) = 0$ για κάθε $x, y \in [0,1]$).

Το τελευταίο θεώρημα σταθερού σημείου που θα δούμε, αφορά τελεστές και είναι ιδιάζων, καθώς ανήκει και στις δύο κατηγορίες θεωρημάτων που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα, γενικεύει τόσο το θεώρημα Schauder όσο και το θεώρημα Banach.

3.4.5 Πρόταση (Krasnoselskii)

Έστω X χώρος Banach και $S \subset X$ κλειστό, φραγμένο και κυρτό. Έστω, επίσης, τελεστές $g, h: S \rightarrow X$, όπου ο g είναι συστολή και ο h είναι απολύτως συνεχής. Τέλος, έστω ότι $g(S) + h(S) \subset S$. Τότε, ο $g + h$ έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Έστω $f: S \rightarrow X$ με $f(x) = x - g(x)$. Προφανώς, ο f είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι και ο f^{-1} είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι: για κάθε $x, y \in S$,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|(x - y) + (g(y) - g(x))\| \geq \|x - y\| - \|g(y) - g(x)\| \geq \|x - y\| - k\|x - y\| \\ &= (1 - k)\|x - y\| \end{aligned}$$

Στο τέλος κάναμε χρήση της συστολής όπου k είναι ο αντίστοιχος συντελεστής.

Άρα, υπάρχει $c \in (0,1)$ ώστε: $\|f(x) - g(x)\| \geq c\|x - y\|$. Αν θέσω: $z_1 = f(x)$

και $z_2 = f(y)$, τότε έχω: $\|f^{-1}(z_1) - f^{-1}(z_2)\| \leq \frac{1}{c}\|z_1 - z_2\|$ από όπου προκύπτει ότι η

f^{-1} είναι συνεχής.

Έστω, τώρα, ο τελεστής $\Phi: S \rightarrow S$ με $\Phi = f^{-1} \circ h$. Ο Φ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και συμπαγής από την πρόταση 2.2.1, άρα είναι απολύτως συνεχής. Συνεπώς, ικανοποιεί την πρόταση 3.3.8 και άρα, ο Φ έχει σταθερό σημείο. Δηλαδή, υπάρχει $z \in S$ ώστε:

$$z = \Phi(z) \Rightarrow z = f^{-1}(h(z)) \Rightarrow f(z) = h(z) \Rightarrow z - g(z) = h(z) \Rightarrow z = g(z) + h(z). \blacksquare$$

Σημείωση: Όπως και στην πρόταση 3.3.8, η υπόθεση ότι το S είναι φραγμένο και ο h συμπαγής, μπορεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση ότι το $h(s)$ είναι σχετικά συμπαγές⁴².

⁴² Αυτή η γενίκευση δεν είναι τόσο άμεση όσο στην περίπτωση της πρότασης 3.3.8. Για λεπτομέρειες βλ. Ok 2005 σελ. 474.

4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσω δύο εφαρμογές της θεωρίας σταθερού σημείου που σχετίζονται με τα οικονομικά. Η πρώτη είναι μια κλασική εφαρμογή στη θεωρία γενικής ισορροπίας. Η δεύτερη είναι μια πρωτότυπη εφαρμογή και αφορά σε έναν τελεστή που συναντάμε στην θεωρία των “menu auctions”, αντικείμενο με το οποίο ασχολήθηκα στη διδακτορική μου διατριβή.

4.1 ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΤΑ WALRAS ΣΕ ΜΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ

4.1.1 Περιγραφή

Έστω μια οικονομία χωρίς παραγωγή με n αγαθά και m καταναλωτές (για τους καταναλωτές χρησιμοποιούμε τον δείκτη i και για τα αγαθά τον δείκτη j). Ο χώρος κατάστασης των αγαθών X είναι ο θετικός κώνος του R^n , δηλαδή: $X = R_+^n = \{x \in R^n : x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n\}$.

Ο κάθε καταναλωτής κατέχει μια αρχική ποσότητα από κάθε αγαθό που δίνεται από το διάνυσμα $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in})$ με $e_{ij} \geq 0, \forall i, j$. Το διάνυσμα $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ περιγράφει τις τιμές των αγαθών.

4.1.2 Σχέση προτίμησης. Αξιώματα ορισμού.

Στο σύνολο X ορίζουμε, για κάθε καταναλωτή, τη διμελή σχέση « $\succsim$ » (σχέση προτίμησης). Η σημασία του $x \succsim y$ είναι ότι το x είναι τουλάχιστον εξίσου καλό με το y . Ή με άλλα λόγια, ότι ο καταναλωτής προτιμά το x έναντι του y ή είναι αδιάφορος ανάμεσα στα δύο. Αν $x \succsim y$ και $y \succsim x$, τότε $y \sim x$ (ο καταναλωτής είναι αδιάφορος ανάμεσα στους δύο συνδυασμούς αγαθών). Επίσης, αν $x \succsim y$ και όχι $y \succsim x$, τότε $x \succ y$.

Η σχέση προτίμησης ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) **Πληρότητα:** $\forall x, y \in X$ είτε $x \succsim y$, είτε $y \succsim x$, είτε $y \sim x$.

(2) **Μεταβατικότητα:** $\forall x, y, z \in X$ με $x \succsim y$ και $y \succsim z$ ισχύει ότι $x \succsim z$.

(3) **Ανακλαστικότητα:** $\forall x \in X, x \succsim x$.

Παρατήρηση: Αν μια σχέση προτίμησης ικανοποιεί τις (1), (2) και (3) τότε λέμε ότι είναι ορθολογική (rational).

(4) Συνέχεια: Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθίες στο X με $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$.

Τότε, αν $x_n \succcurlyeq y_n$ θα ισχύει $x \succcurlyeq y$.

(5) Τοπικός μη κορεσμός (local non satiation): $\forall x \in X$ και $\varepsilon > 0, \exists y \in X$

ώστε: $\|y - x\| < \varepsilon$ και $y \succ x$.

Μια πιο ισχυρή και διαισθητικά εύλογη εκδοχή της (5) είναι η ακόλουθη ιδιότητα.

(6) Μονοτονικότητα: $\forall x, y \in X$ με $x \geq y$ και $x \neq y$ ισχύει ότι $x \succ y$. Με άλλα

λόγια, οι καταναλωτές προτιμάνε τους συνδυασμούς με τα περισσότερα αγαθά.

(7) Κυρτότητα (αυστηρή): $\forall x \in X$ το σύνολο $\{y \in X : y \succcurlyeq x\}$ είναι κυρτό

(αυστηρά).

Σημαντικό για την επεξεργασία της θεωρίας καταναλωτή με την βοήθεια της ανάλυσης είναι το ακόλουθο θεώρημα.

4.1.3 Θεώρημα (αναπαράστασης)⁴³

Αν μια σχέση προτίμησης είναι ορθολογική και συνεχής (ικανοποιεί τις (1)-(4)), τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.

Δηλαδή κάθε ορθολογική και συνεχής σχέση προτίμησης αναπαρίσταται (υλοποιείται) από την συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών, μέσω των τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης $u : X \rightarrow \mathbb{R}$

Με βάση τα παραπάνω, οι ποσότητες που επιθυμεί ο καταναλωτής για δεδομένο επίπεδο τιμών (αντιστοιχίες ζήτησης) δίνονται από τη λύση του ακόλουθου προβλήματος:

$$\begin{aligned} \max u(x) \\ \text{s.t. } px \leq pe_i \end{aligned} \quad 44$$

Παρατηρούμε ότι, κάτω από τις συνθήκες (1)-(4), το πρόβλημα αυτό έχει πάντα λύση, καθώς η u είναι συνεχής και το σύνολο $\{x \in X : px \leq pe_i\}$ είναι συμπαγές ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, αν ισχύει η (6) στη λύση θα έχουμε $px = pe_i$.

⁴³ Για την απόδειξη βλ. Mas-Colell et al. 1995 σελ. 47-49.

⁴⁴ Αν τα a, b είναι διανύσματα με το γινόμενο ab συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

Αν $x_i(p)$ είναι η αντιστοιχία ζήτησης του καταναλωτή i με δεδομένες τις τιμές p , ορίζω τις αντιστοιχίες

α) υπερβάλλουσας ζήτησης για κάθε καταναλωτή $z_i : R_+^n \rightarrow R_+^n$, με

$$z_i(p) = x_i(p) - e_i = \begin{cases} z_{i1}(p) = x_{i1}(p) - e_{i1} \\ \vdots \\ z_{in}(p) = x_{in}(p) - e_{in} \end{cases} \text{ και}$$

β) συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης $z : R_+^n \rightarrow R_+^n$, με

$$z(p) = \begin{cases} z_1(p) = \sum_{i=1}^m z_{i1}(p) \\ \vdots \\ z_n(p) = \sum_{i=1}^m z_{in}(p) \end{cases}$$

4.1.4 Πρόταση⁴⁵

Αν ισχύουν οι (1)-(4), (6), (7) (η (7) όχι αυστηρά) τότε, για τις αντιστοιχίες υπερβάλλουσας ζήτησης μπορούμε να δείξουμε τα ακόλουθα:

- (1) Ομογένεια μηδενικού βαθμού $z(ap) = z(p)$.
- (2) Νόμος του Walras $pz(p) = 0$.
- (3) Η $z(p)$ έχει κυρτές τιμές.
- (4) Η $z(p)$ είναι άνω ημισυνεχής.
- (5) Η $z(p)$ είναι φραγμένη.

4.1.5 Ισορροπία κατά Walras

Στην οικονομία που περιγράψαμε παραπάνω, λέμε ότι υπάρχει ισορροπία κατά Walras αν υπάρχουν τιμές ($p^* \geq 0$) ώστε να εκκαθαρίζεται η αγορά ($z(p^*) \leq 0$).

Ας σημειωθεί ότι εξαιτίας του νόμου του Walras, η συνθήκη ισορροπίας $z(p^*) \leq 0$ είναι ισοδύναμη με τα ακόλουθα:

$$(1) p_j^* > 0 \Rightarrow z_j^*(p^*) = 0$$

⁴⁵ Για την απόδειξη των 1-3 βλ. ο.π. σελ. 52, για την απόδειξη του 4 ο.π. σελ. 93 και για την απόδειξη του 5 ο.π. σελ. 582.

$$(2) \ z_j^*(p^*) < 0 \Rightarrow p_j^* = 0$$

Με απλά λόγια, τα παραπάνω σημαίνουν ότι στην αγορά ενός αγαθού σε ισορροπία, αν η τιμή ισορροπίας είναι θετική η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση. Αν η τιμή όμως είναι 0, η προσφορά μπορεί να ξεπερνάει τη ζήτηση. Δηλαδή, στην ισορροπία είναι δυνατόν να «πετιέται» ένα αγαθό μόνο αν δεν έχει «αξία».

Θα δείξουμε τώρα, με τη βοήθεια του θεωρήματος Kakutani⁴⁶ ότι στην οικονομία που περιγράψαμε υπάρχει ισορροπία κατά Walras .

Συγκεκριμένα θα δείξουμε το ακόλουθο.

4.1.6 Πρόταση

Αν ισχύουν οι (1)-(4), (6), (7) (η (7) όχι αυστηρά), τότε υπάρχει $p^* \in R_+^n$ ώστε $Z(p^*) \leq 0$.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι λόγω του νόμου του Walras υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας στον προσδιορισμό των τιμών. Με άλλα λόγια, αυτό που έχει σημασία για τον προσδιορισμό της ισορροπίας είναι οι σχετικές τιμές. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τιμές ανήκουν στο παρακάτω σύνολο:

$$S = \left\{ p \in R^n : p \geq 0, \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}$$

Προφανώς, το σύνολο S είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό.

Ορίζω την αντιστοιχία $g : S \rightarrow S$ με $g(p) = \arg \max_{p' \in S} p'z(p)$. Προκειμένου να εφαρμόσουμε το θεώρημα Kakutani πρέπει να δείξουμε ότι η g έχει κλειστό γράφημα με μη κενές και κυρτές τιμές.

Η g έχει μη κενές τιμές, γιατί η pz είναι συνεχής και το σύνολο S είναι συμπαγές. Επίσης, η g έχει κυρτές τιμές. Πράγματι, παρατηρούμε ότι αν $p', p'' \in g(p)$ τότε $p'z = p''z = \lambda p'z + (1 - \lambda)p''z = (\lambda p' + (1 - \lambda)p'')z$, οπότε προκύπτει ότι: $(\lambda p' + (1 - \lambda)p'') \in g(p)$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η g έχει κλειστό γράφημα. Για να το πετύχουμε αυτό, την εμφανίζουμε ως σύνθεση δύο αντιστοιχιών $g(p) = m(z(p))$, όπου

⁴⁶ Σημειώνεται ότι αν η ιδιότητα (7) ισχύει αυστηρά, οι αντιστοιχίες υπερβάλλουσας ζήτησης είναι μονότιμες (συναρτήσεις) και άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Brower.

$m(z) = \arg \max_{p \in S} pz$. Παρατηρούμε ότι, επειδή η z έχει κλειστό γράφημα, αν η m έχει

επίσης κλειστό γράφημα, τότε και η g θα έχει κλειστό γράφημα.

Για να δείξουμε το ζητούμενο εργαζόμαστε ως εξής. Έστω ότι η m δεν έχει κλειστό γράφημα. Άρα, μπορούμε να βρούμε ακολουθίες $(p_n)_{n \in N}$ και $(z_n)_{n \in N}$ με $p_n \rightarrow p$, $z_n \rightarrow z$, $p_n \in m(z_n)$ και $p \notin m(z)$.

Άρα υπάρχει $p' \in S$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $p'z > pz + \varepsilon$. Όμως, $p'z_n \rightarrow p'z$ και $p_n z_n \rightarrow pz$. Άρα, υπάρχει $n \in N$ ώστε: $|p'z_n - p'z| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|p_n z_n - pz| < \frac{\varepsilon}{2}$. Με διαδοχικές αντικαταστάσεις, $p'z > pz + \varepsilon \Rightarrow p'z_n > pz + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow p'z_n > p_n z_n$ το οποίο είναι άτοπο, καθώς $p_n \in m(z_n)$.

Συνεπώς, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Kakutani και άρα, υπάρχει $p^* \in S$ ώστε $p^* \in g(p^*)$. Αν δείξουμε ότι το p^* είναι τιμές ισορροπίας δηλαδή, $z(p^*) \leq 0$ έχουμε τελειώσει.

Αφού $p^* \in g(p^*)$, έχουμε ότι $p^* z(p^*) \geq pz(p^*)$, $\forall p \in S$. Επίσης, $p^* z(p^*) = 0$. Τότε, όμως: $z(p^*) \leq 0$. Αν όχι, υπάρχει j ώστε $z_j(p^*) > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρώ το $\bar{p} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^{47}$, το οποίο προφανώς ανήκει στο S . Τότε, όμως, θα ισχύει: $\bar{p} z(p^*) > 0 \geq p^* z(p^*)$, το οποίο είναι άτοπο.

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ MENU AUCTIONS ME ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΤΗΤΕΣ

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μια πρωτότυπη εφαρμογή της θεωρίας σταθερού σημείου, η οποία προέρχεται από τη θεωρία «menu auctions under externalities». Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε αποκλειστικά στην μαθηματική πλευρά του θέματος καθώς η συζήτηση των οικονομικών λεπτομερειών θα απαιτούσε μεγάλη έκταση⁴⁸. Συγκεκριμένα, θα ορίσουμε αρχικά έναν τελεστή σε ένα χώρο συναρτήσεων και στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ύπαρξη σταθερού σημείου. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach. Για την εφαρμογή του θεωρήματος, θα υποθέσουμε πρόσθετες ιδιότητες για τον τελεστή, οι οποίες προέρχονται επίσης από την σχετική οικονομική θεωρία.

⁴⁷ Η μονάδα βρίσκεται στη θέση j .

⁴⁸ Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα βρει όλες τις λεπτομέρειες και την σχετική βιβλιογραφία στο Μπουλτζής (2010) κεφ. 4.

4.2.1 Ο Τελεστής

Έστω σύνολο A , το οποίο κατ' αρχήν δεν προσδιορίζεται επακριβώς και συναρτήσεις $f_i: A \times R^n \rightarrow R$, με $f_i = f_i(a; x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Οι f_i είναι συνεχείς ως προς όλα τα x_j για κάθε $a \in A$ και επιπλέον κάθε συνάρτηση f_i , είναι διαφορίσιμη ως προς x_i και $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$.

Επίσης, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και κάθε $a \in A$, ορίζουμε $\overline{x_i(a)} \in R$. Ορίζουμε, επίσης, X_i το υποσύνολο του συνόλου των συναρτήσεων $x_i(\cdot): A \rightarrow R$, για το οποίο ισχύει ότι: $x_i(a) \in [0, \overline{x_i(a)}]$, για κάθε $a \in A$. Με άλλα λόγια, για κάθε $a \in A$, η τιμή της συνάρτησης $x_i(\cdot)$ έχει ένα κάτω όριο (0) και ένα πάνω όριο ($\overline{x_i(a)}$). Ορίζω ως X το σύνολο $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Έστω B_i το σύνολο $\{b_i \in R\}$ για το οποίο η εξίσωση:

$b_i = f_i(a; x_1(a), x_2(a), \dots, x_i, \dots, x_n(a))$ έχει λύση, ως προς x_i , για κάθε $a \in A$ και $\forall x_j(\cdot) \in X_j, j \neq i$.

Έστω $\overline{f_i} \in B_i$ και $\{x_j(\cdot)\}_{j \neq i}$ με $x_j(\cdot) \in X_j$ για κάθε $j \neq i$. Τότε, η εξίσωση $\overline{f_i} = f_i(a; x_1(a), x_2(a), \dots, x_i, \dots, x_n(a))$, ως προς x_i , έχει μοναδική λύση για κάθε $a \in A$, επειδή: $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$.

Συνεπώς, η λύση της παραπάνω εξίσωσης ορίζει μια συνάρτηση $\phi_i(\cdot): A \rightarrow R$ με $x_i = \phi_i(a) = \phi_i(a; \{x_j(a)\}_{j \neq i}; \overline{f_i})$.

Παρατηρώ ότι για την $x_i^T(\cdot) = \max\{0, \min\{\phi_i(\cdot), \overline{x_i(\cdot)}\}\}$ ισχύει $x_i^T(\cdot) \in X_i$.

Επειδή τα παραπάνω μπορούν να επαναληφθούν για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, η διαδικασία αυτή ορίζει έναν τελεστή $T: X \rightarrow X$.

Το αντικείμενο της τρέχουσας ενότητας είναι να εξετάσουμε κάτω από ποιες επιπλέον προϋποθέσεις ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο. Πριν προχωρήσουμε, ωστόσο, είναι σκόπιμο να δώσουμε **ένα απλό παράδειγμα** προκειμένου να γίνει πιο κατανοητή η λειτουργία του τελεστή.

Ας δώσουμε πρώτα τα δεδομένα του παραδείγματος:

$$n = 2, \quad A = [0,1], \quad \overline{x_1(a)} = \overline{x_2(a)} = \frac{1}{4} \quad \forall a \in A, \quad \overline{f_1} = 0, \overline{f_2} = 1$$

$$f_1(a, x_1, x_2) = ax_2 - x_1$$

$$f_2(a, x_1, x_2) = ax_1 - x_2$$

Παρατηρούμε ότι, λόγω της γραμμικότητας των f_i ως προς x_i , τα σύνολα B_i , ταυτίζονται με τους πραγματικούς αριθμούς. Επίσης, από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $X_1 = X_2 = \left\{ x_i(\cdot) : [0,1] \rightarrow R \text{ ώστε } x_i(a) \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \forall a \in [0,1] \right\}$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, τη λειτουργία του τελεστή σε διαδοχικά βήματα.

Βήμα 1^ο

Διαλέγουμε μια συνάρτηση από κάθε σύνολο X_1, X_2 . Για απλούστευση, θα διαλέξουμε δυο σταθερές συναρτήσεις: $x_1(a) = \frac{1}{4}$, $x_2(a) = \frac{1}{4}$.

Βήμα 2^ο

Σχηματίζουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις:

$$f_1(a, x_1, x_2(a)) = \overline{f_1}, \quad f_2(a, x_1(a), x_2) = \overline{f_2} \quad \text{ή} \quad a\frac{1}{4} - x_1 = 0, \quad a\frac{1}{4} - x_2 = 1.$$

Βήμα 3^ο

Λύνουμε ως προς x_1 και x_2 αντίστοιχα, προκειμένου να πάρουμε τις συναρτήσεις $\phi_1(\cdot)$, $\phi_2(\cdot)$. Έτσι: $\phi_1(a) = \frac{1}{4}a$, $\phi_2(a) = \frac{1}{4}a - 1$.

Βήμα 4^ο

Υπολογίζω το $\max\{0, \min\{\phi_i(\cdot), \overline{x_i(\cdot)}\}\}$.

Ουσιαστικά, για να κάνω αυτόν τον υπολογισμό πρέπει να ελέγξω αν υπάρχουν $a \in [0,1]$ ώστε $\phi_i(a) \notin \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Παρατηρώ ότι για το $\phi_1(\cdot)$ δεν υπάρχουν τέτοια a . Αντίθετα, βλέπω ότι $\phi_2(a) < 0, \forall a \in [0,1]$. Οπότε:

$$\max\{0, \min\{\phi_1(a), \overline{x_1(a)}\}\} = \phi_1(a) = \frac{1}{4}a, \quad \max\{0, \min\{\phi_2(a), \overline{x_2(a)}\}\} = 0.$$

Με το τέταρτο βήμα ολοκληρώθηκε η διαδικασία. Έχουμε:

$$(x_1^T(\cdot), x_2^T(\cdot)) = T(x_1(\cdot), x_2(\cdot)), \text{ όπου } x_1(a) = \frac{1}{4}, \quad x_2(a) = \frac{1}{4} \text{ και } x_1^T(a) = \frac{1}{4}a, \quad x_2^T(a) = 0.$$

4.2.2 Ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου.

Για να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach.

Επιπλέον των όσων έχουμε αναφέρει παραπάνω, θα υποθέσουμε και τα ακόλουθα:

(1) Υπάρχει $M \in R$ ώστε $\overline{x_i(a)} < M$, $\forall a \in A$ και $\forall i$. Συνεπώς, για τα σύνολα X_i ισχύει ότι: $X_i \subset B(A, R)$ και άρα, $X \subset B^n(A, R)$. Στον χώρο $B^n(A, R)$ θεωρούμε την εξής νόρμα. Αν $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) \in B^n(A, R)$, τότε:

$$\|x(\cdot)\| = \max_i \sup_a |x_i(a)|.$$

(2) $f_i = f_i(a; x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(a; x_i, x_{-i})$, $x_{-i} = \sum_{j \neq i} x_j$. Υποθέτουμε επίσης, ότι η

f_i είναι παραγωγίσιμη και ως προς x_{-i} και μάλιστα ισχύει ότι:

$$\frac{c}{n-1} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right| > \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{-i}} \right| \text{ για κάποιο } c \in (0, 1).$$

Οι υποθέσεις αυτές έχουν οικονομική ερμηνεία και μάλιστα σχετίζονται και με άλλα αποτελέσματα στην σχετική θεωρία⁴⁹.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ο τελεστής $T : B^n(A, R) \rightarrow X$ ⁵⁰ είναι συστολή και επειδή ο $B^n(A, R)$ είναι χώρος Banach, από το θεώρημα Banach έπεται ότι υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο στο σύνολο X .

Έστω $\overline{f_i} = f_i(a; x_i, x_{-i})$. Επειδή $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (implicit function theorem). Άρα, υπάρχει παραγωγίσιμη

$$\text{συνάρτηση } g_i : R \rightarrow R \text{ ώστε } x_i = g_i(x_{-i}; a) \text{ και } g_i'(\cdot) = -\frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_{-i}}(\cdot)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\cdot)}.$$

Επειδή η g_i είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής. Άρα, για κάθε $x_{-i}, x'_{-i} \in R$, υπάρχει $y \in (x_{-i}, x'_{-i})$ ώστε:

⁴⁹ Βλ. ο.π.

⁵⁰ Στα προηγούμενα έχουμε ορίσει τον τελεστή T στο σύνολο X . Ωστόσο, είναι άμεσο να δείξουμε ότι για κάθε $x(\cdot) \in B^n(A, R)$ θα ισχύει $Tx(\cdot) \in X$.

$$x_i - x'_i = g'_i(y)(x_{-i} - x'_{-i}) \Rightarrow |x_i - x'_i| = |g'_i(y)| |x_{-i} - x'_{-i}| \Rightarrow |x_i - x'_i| < \frac{c}{n-1} |x_{-i} - x'_{-i}|.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα, $x(\cdot), x'(\cdot) \in B^n(A, R)$. Επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $x_{-i}, x'_{-i} \in R$, θα ισχύει και για $x_{-i}(\alpha), x'_{-i}(\alpha), \forall \alpha \in A$. Μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση το x_i θα δίνεται από την αντίστοιχη συνάρτηση $\phi_i(a)$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$|\phi_i(\alpha) - \phi'_i(a)| < \frac{c}{n-1} |x_{-i}(a) - x'_{-i}(a)| \leq \frac{c}{n-1} \sum_{j \neq i} |x_j(a) - x'_j(a)| \leq \frac{c}{n-1} (n-1) |x_{mi}(a) - x'_{mi}(a)|$$

όπου: $|x_{mi}(a) - x'_{mi}(a)| = \max_{j \neq i} |x_j(a) - x'_j(a)|$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι: $|x_i^T(a) - x_i'^T(a)| \leq |\phi_i(\alpha) - \phi'_i(a)| \forall a \in A$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε: $|x_i^T(a) - x_i'^T(a)| < c |x_{mi}(a) - x'_{mi}(a)| \forall a \in A$ και άρα,

$$\sup_a |x_i^T(a) - x_i'^T(a)| \leq c \sup_a |x_{mi}(a) - x'_{mi}(a)| \Rightarrow$$

$$\max_i \sup_a |x_i^T(a) - x_i'^T(a)| \leq c \max_i \sup_a |x_i(a) - x'_i(a)|$$

ή $\|Tx(\cdot) - Tx'(\cdot)\| \leq c \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|$ για κάποιο $c \in (0,1)$. Δηλαδή, ο τελεστής T είναι συστολή.

4.2.3 Παραδείγματα

4.2.3.1 Μοναδικό σταθερό σημείο

Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου εφαρμόζονται οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου. Τα δεδομένα του παραδείγματος είναι τα ακόλουθα:

$$n = 2, A = [0,1], \overline{x_1(a)} = \overline{x_2(a)} = 2 \forall a \in A, \overline{f_1} = 0, \overline{f_2} = 0$$

$$f_1(a, x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2 - x_1 + a$$

$$f_2(a, x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1 - x_2 - a$$

Παρατηρούμε ότι: $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right| = 1$ και $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{-i}} \right| = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, οι προϋποθέσεις για την

ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου εκπληρώνονται. Σε αυτή την περίπτωση, το μοναδικό σταθερό σημείο θα δίνεται από τις: $x_1(a) = x_2(a) = 2a$.

Οι συναρτήσεις αυτές, είναι προφανώς τα σταθερά σημεία που αναζητούμε, γιατί $2a \in [0, 2]$, $\forall a \in A$ και γιατί αν θέσω $x_1(a) = x_2(a) = 2a$, οι εξισώσεις $\frac{1}{2}x_2 - x_1 + a = 0$ και $\frac{1}{2}x_1 - x_2 - a = 0$ επαληθεύονται.

Για να κατανοήσουμε τον ρόλο που παίζουν τα σύνολα A και X_i , ας αλλάξουμε το $\overline{x_i(a)}$ από 2 σε 1. Τότε, το μοναδικό σταθερό σημείο θα δίνεται από τις:

$$x_1(a) = x_2(a) = \begin{cases} 2a & \text{αν } a \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{αν } a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Για να δείξουμε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις αποτελούν το ζητούμενο σταθερό σημείο καταρχήν παρατηρούμε ότι $x_i(a) \in [0, 1]$, $\forall a \in A$. Επίσης αν $a \leq \frac{1}{2}$ όπως και παραπάνω οι αντίστοιχες εξισώσεις επαληθεύονται. Τέλος, αν $a > \frac{1}{2}$ τότε $x_i(a) = 1$.

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι $\phi_j(a) > 1$ και άρα $x_j^T(a) = 1$, $\forall a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

4.2.3.2 Δυο σταθερά σημεία

Ας δούμε, τώρα, ένα παράδειγμα όπου η συνθήκη για την ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου δεν ικανοποιείται, με αποτέλεσμα να μπορούμε να βρούμε δύο σταθερά σημεία. Τα δεδομένα του παραδείγματος έχουν ως εξής:

$$n = 2, a = (a_1, a_2), A = [0, 1] \times [0, 1], \overline{x_1(a)} = 1 - a_1, \overline{x_2(a)} = 1 - a_2, \overline{f_1} = 0, \overline{f_2} = 0$$

$$f_1(a, x_1, x_2) = 1 - a_1 - x_1 - 2(1 - a_2 - x_2)$$

$$f_2(a, x_1, x_2) = 1 - a_2 - x_2 - 2(1 - a_1 - x_1)$$

Παρατηρούμε ότι, αντίθετα από παραπάνω, $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right| = 1$ και $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{-i}} \right| = 2$. Συνεπώς,

δεν περιμένουμε να υπάρχει απαραίτητα μοναδικό σταθερό σημείο. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν 2 σταθερά σημεία.

Το πρώτο είναι οι συναρτήσεις: $x_i(a)=1-a_i$

Το δεύτερο οι συναρτήσεις:

$$x_i(a) = \begin{cases} -1-a_i+2a_j & \text{if } 2a_j > 1+a_i \\ 0 & \text{if } 2a_j \leq 1+a_i \end{cases}.$$

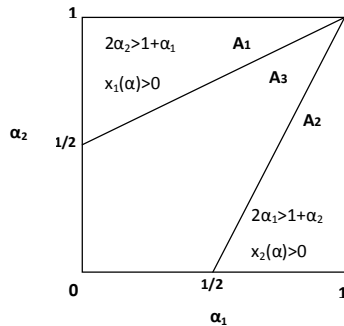
Για τις $x_i(a)=1-a_i$, προκύπτει άμεσα ότι είναι σταθερό σημείο καθώς προφανώς οι $1-a_i \in X_i$ και επαληθεύουν τις σχετικές εξισώσεις.

Για το δεύτερο σημείο χρειάζεται κάπως μεγαλύτερη προσπάθεια. Καταρχήν παρατηρούμε ότι $x_i(a) \geq 0$. Επίσης $x_i(a) \leq 1-a_i$, γιατί $-1-a_i+2a_j \leq 1-a_i \Leftrightarrow 2a_j \leq 2$, το οποίο είναι αληθές γιατί $a_j \in [0,1]$.

$$\text{Στη συνέχεια θεωρώ ότι } x_1(a) = \begin{cases} -1-a_1+2a_2 & \text{if } 2a_2 > 1+a_1 \\ 0 & \text{if } 2a_2 \leq 1+a_1 \end{cases}.$$

$$\text{Θα δείξω ότι } x_2^T(a) = \begin{cases} -1-a_2+2a_1 & \text{if } 2a_1 > 1+a_2 \\ 0 & \text{if } 2a_1 \leq 1+a_2 \end{cases}$$

Χωρίζω το σύνολο A σε τρία επιμέρους σύνολα (βλ. σχήμα):



Σύνολο A_1 $\{a \in A : 2a_2 > 1+a_1\}$

Σύνολο A_2 $\{a \in A : 2a_1 > 1+a_2\}$

Σύνολο A_3 $\{a \in A : a \notin A_1 \text{ και } a \notin A_2\}$.

Θα διαπιστώσω το ζητούμενο σε κάθε ένα από τα τρία σύνολα.

Γενικά ισχύει ότι $\phi_2(a) = -1-a_2+2a_1+2x_1(a)$.

Αν $a \in A_1$ τότε $\phi_2(a) = -3+3a_2 \leq 0$ και $x_2^T(a) = 0$. Παρατηρώντας επίσης ότι για κάθε $a \in A_1$ ισχύει $2a_1 \leq 1+a_2$, δείξαμε το ζητούμενο στο A_1 .

Αν $a \in A_2$ τότε $x_1(a)=0$. Οπότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα γιατί σε αυτή την περίπτωση $\phi_2(a) = -1 - a_2 + 2a_1 \geq 0$.

Τέλος αν $a \in A_3$, $x_1(a)=0$ και $\phi_2(a) = -1 - a_2 + 2a_1 \leq 0$. Οπότε $x_2^T(a) = 0$.

Σημειώνεται ότι λόγω της συμμετρίας δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε την διαδικασία για το $x_2(a)$ ⁵¹.

⁵¹ Με αφορμή και το τελευταίο παράδειγμα καταβλήθηκε προσπάθεια να γενικευθούν τα αποτελέσματα του εδαφίου. Συγκεκριμένα επιχειρήθηκε, να εντοπιστούν γενικότερες προϋποθέσεις για τον τελεστή, που οδηγούν στην ύπαρξη σταθερού σημείου, όχι απαραίτητα μοναδικού. Για το σκοπό αυτό διερευνήθηκε, η δυνατότητα χρήσης κάποιου θεωρήματος που στηρίζεται στη συμπάγεια. Δυστυχώς οι προσπάθειες αυτές δεν έφεραν αποτέλεσμα.

Βιβλιογραφία

- Αργυρός, Σπ., 2003. Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, 2^η έκδοση, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.
- Border, C.K., 1985. Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge University Press
- Dieudonné, J., 1969. Foundation of Modern Analysis, Academic Press
- Fitzpatrick, P.M., Royden, L.H., 2010. Real Analysis, 4th edition, Pearson
- Fomin, S.V., Kolmogorov, A.N., 1970. Introductory Real Analysis, Dover Publications, INC., New York
- Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M., 2003. Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser Verlag
- Kumaresan, S., 2005. Topology of Metric Spaces, Alpha Science International Ltd, Harrow, U.K.
- Mas-Colell, A., Whinston, D., M., Green, R., J. 1995. Microeconomic Theory. Oxford University Press.
- Μπουλτζής, Η., 2010. Essays on Efficiency in Common Agency Lobbying Games. Διδακτορική Διατριβή, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Ok, A., E., 2005. Real Analysis with Economic Applications, New York University
- O'Regan, D., Precup, R., 2001. Theorems of Leray-Schauder Type and Applications, Vol.3, Gordon and Breach Science Publishers
- Πολυράκης, Ι., 2010. Θέματα Ανάλυσης και Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, Αυτέκδοση
- Ζαχαριάδης, Θ., Καλαμίδας, Ν., Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β., 1997. Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία

http://en.wikipedia.org/wiki/Arzel%C3%A0%E2%80%93Ascoli_theorem