



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δυναμικός Προγραμματισμός στην Επιχειρησιακή Έρευνα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μ.Δ.Ε. Μαθηματική Προτυποποίηση στις Σύγχρονες Τεχνολογίες και
την Οικονομία

της

Φραντζέσκας Ι. Λάβδα

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος
Επικουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Φεβρουάριος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δυναμικός Προγραμματισμός στην Επιχειρησιακή Έρευνα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μ.Δ.Ε. Μαθηματική Προτυποποίηση στις Σύγχρονες Τεχνολογίες και
την Οικονομία

της

Φραντζέσκας Ι. Λάβδα

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 28/03/2012.

.....
Ιωάννης Κολέτσος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Ίον Χρυσοβέργης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Βασίλης Κοκκίνης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Φραντζέσκα Ι. Λάβδα

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π,
Διπλωματούχος Μ.Δ.Ε. Μαθηματική Προτυποποίηση στις Σύγχρονες Τεχνολογίες &
την Οικονομία,
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσης διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Ιωάννη Κολέτσο που συνεργάστηκε μαζί μου για δεύτερη φορά!

Περίληψη

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ένας επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την αριστοποίηση τους και τη λήψη αποφάσεων. Ένα σημαντικό κομμάτι της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ο Δυναμικός Προγραμματισμός. Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια αναδρομική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων. Εφαρμόζεται, όμως, μόνο σε προβλήματα βελτιστοποίησης και ως εκ τούτου ως εξειδικευμένη μέθοδος είναι γενικά περισσότερο αποτελεσματική από μια γενική αναδρομική λύση. Η γενική αρχή του δυναμικού προγραμματισμού δε διαφέρει ριζικά από την αναδρομική προσέγγιση. Το πρόβλημα στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων είναι ότι δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία λύσης, αλλά μόνο βασικά βήματα που ακολουθούνται, αφού δεν υπάρχει κάποιος τύπος που εφαρμόζεται σε όλα, αλλά δημιουργείται με βάση τα δεδομένα του κάθε προβλήματος. Για τον λόγο αυτό αντικείμενο αυτής της διπλωματικής είναι η επίλυση διαφορετικών ειδών προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού. Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path), το πρόβλημα της αντικατάστασης εξοπλισμού, το πρόβλημα κατανομής πόρων καθώς και το πρόβλημα του σακιδίου. Επειδή η φύση των υπολογισμών των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού καθιστά αδύνατη την ανάπτυξη ενός γενικού κώδικα υπολογιστή που μπορεί να χειριστεί όλα τα προβλήματα θα ασχοληθούμε επίσης με την επίλυση του προβλήματος κατανομής πόρων και του σακιδίου με χρήση excel.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
1.1	Στοιχεία Επιχειρησιακής Έρευνας	9
1.2	Προέλευση ονομασίας Δυναμικού Προγραμματισμού	12
1.3	Δυναμικός προγραμματισμός και Επιχειρησιακή Έρευνα	14
2	Δυναμικός Προγραμματισμός	16
2.1	Εισαγωγικά στοιχεία εφαρμογών και μεθόδου	16
2.2	Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού	18
2.3	Το πρόβλημα της αντικατάστασης εξοπλισμού	19
2.4	Ένα πρόβλημα επενδύσεων	23
3	Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)	27
3.1	Το βασικό πρόβλημα / A Simple Path Problem	27
3.2	Αριθμητική Εφαρμογή	28
3.3	Αποδοτικότητα Υπολογιστικής Διαδικασίας	35
3.4	Προς τα εμπρός Δυναμικός Προγραμματισμός	36
3.5	Ένα πιο σύνθετο πρόβλημα	37
3.6	Η διαδικασία Doubling-Up	43
3.7	Εφαρμογή συντομότερης διαδρομής	48
4	Το πρόβλημα αντικατάστασης - διατήρησης εξοπλισμού	53
4.1	Το βασικό πρόβλημα	53
4.2	Αριθμητική εφαρμογή	55
4.3	Λύση της εφαρμογής με βάση το πρόβλημα συντομότερης διαδρομής	58
4.4	Ένα ποιο σύνθετο μοντέλο αντικατάστασης	62
4.5	Εφαρμογή αντικατάστασης εξοπλισμού	63
5	Το πρόβλημα κατανομής πόρων	69
5.1	Το βασικό πρόβλημα	69
5.2	Αριθμητική εφαρμογή	71
5.3	Απροσδιόριστοι αρχικοί πόροι	74

Περιεχόμενα

5.4	Εφαρμογή κατανομής πόρων	76
5.5	Γενικευμένο πρόβλημα Κατανομής Πόρων	80
5.6	Το πρόβλημα του Σακιδίου	82
5.7	Εφαρμογή Σακιδίου	84
5.8	Εφαρμογή σακιδίου / εναλλακτική λύση	88
6	Επίλυση Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού με χρήση Excel	91
6.1	Πρόβλημα Σακιδίου	91
6.2	Πρόβλημα Κατανομής Πόρων	93
7	Εφαρμογές	96
7.1	Εφαρμογή 1 - Πρόβλημα απασχόλησης εργαζομένων	96
7.2	Εφαρμογή 2 - Πρόβλημα Απογραφής	104
		114

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στοιχεία Επιχειρησιακής Έρευνας

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ένας επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την αριστοποίηση τους και τη λήψη αποφάσεων. "Γεννήθηκε" κατά την διάρκεια του 2^{ου} Παγκοσμίου πολέμου. Οι ανάγκες για την κατανομή ανθρώπινου και υλικού δυναμικού στις πολεμικές επιχειρήσεις είχαν ως αποτέλεσμα κληθεί από Βρετανικές και Αμερικανικές διοικήσεις ένας μεγάλος αριθμός επιστημόνων. Έτσι δημιουργήθηκαν οι πρώτες ομάδες Ε.Ε. για αντιμετώπιση επιχειρησιακών προβλημάτων, οι οποίες παρουσίασαν σημαντική συμβολή στις νίκες των συμμάχων. Οι πρώτες μελέτες έγιναν από τον Patrick Blackett (UK, 1897-1974) και από τον George Dantzig (USA, 1914 –2005). Ο πρώτος ασχολήθηκε με τη μελέτη για τις εφοδιοποιμπές των Βρετανών και τα σημεία ενίσχυσης των αεροπλάνων της RAF, ενώ ο δεύτερος με την εφοδιαστική αλυσίδα για χιλιάδες είδη και ανθρώπους.

Οι στρατιωτικές επιτυχίες προσέλκυσαν το ενδιαφέρον της βιομηχανίας όπου παρουσιάζονται "ίδια προβλήματα" σε άλλο πλαίσιο με αποτέλεσμα να υπάρξει μετακίνηση πολλών επιστημόνων στη βιομηχανία από όπου ξεκινάει και η ραγδαία εξέλιξη της Ε.Ε. Οι παράγοντες που επηρέασαν την ανάπτυξη της Ε.Ε. είναι κατά κύριο λόγο:

- Γρήγορη ανάπτυξη μαθηματικών τεχνικών και εργαλείων
 - Γραμμικός προγραμματισμός – μέθοδος Simplex
 - Δυναμικός προγραμματισμός
 - Έλεγχος αποθεμάτων
 - Θεωρία αναμονής
- Επανάσταση της πληροφορικής: γρήγορη επίλυση προβλημάτων – διαχείριση δεδομένων

Ορισμοί Ε.Ε.

- Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων, η οποία σχετίζεται με τις επιχειρήσεις που πραγματοποιούνται μέσα σε οργανωμένα συστήματα.
- Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ο κλάδος της Διοίκησης Επιχειρήσεων που ασχολείται με την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων και τη βέλτιστη λήψη αποφάσεων για την επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων του αληθινού κόσμου.

Η γενική μεθοδολογία της Ε.Ε.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ουσιαστικά η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια στις επιχειρήσεις. Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου, του υπό μελέτη συστήματος, που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων. Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος όπου πρέπει να ληφθεί η βέλτιστη απόφαση περιλαμβάνει συνήθως τα εξής στάδια:

1. Παρατήρηση του συστήματος – διατύπωση προβλήματος

Αναζητούμε τις αιτίες του προβλήματος και καθορίζουμε τους στόχους με αντικειμενικό τρόπο. Η αναγνώριση του προβλήματος είναι το πλέον δύσκολο στάδιο, γι' αυτό η διατύπωση του προβλήματος απαιτεί μεγάλη προσοχή και συνεχή επανεξέταση. Σε αυτό το στάδιο οποιοδήποτε λάθος θα οδηγήσει σε αποτυχία τα επόμενα στάδια.

2. Δημιουργία μαθηματικού μοντέλου – ακριβής παράσταση χαρακτηριστικών προβλήματος

Σημαντικό σε αυτό το στάδιο είναι να εντοπίσουμε ποιοι παράγοντες επηρεάζουν τη λύση και πώς μεταβάλλονται, έτσι ώστε να αναπαραστήσουμε σωστά το μαθηματικό μας μοντέλο. Με τον όρο μαθηματικό μοντέλο εννοούμε την απεικόνιση καταστάσεων και διαδικασιών με μεταβλητές, εξισώσεις και σύμβολα. Για την κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου θα πρέπει να καθορίσουμε τον αντικειμενικό στόχο, να διατυπώσουμε την αντικειμενική συνάρτηση, να γίνει καθορισμός μεταβλητών, καθορισμός παραμέτρων, του είδους μοντέλου (Ντετερμινιστικό, Στοχαστικό)

3. Εύρεση της λύσης του μοντέλου

Η λύση του μοντέλου μπορεί να είναι αναλυτική λύση, από επίλυση εξισώσεων ή από την εφαρμογή αλγόριθμου. Η βέλτιστη λύση του μοντέλου θα πρέπει να είναι προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Σε περιπτώσεις πολύπλοκων προβλημάτων εφαρμόζονται ευριστικές μέθοδοι (heuristics). Σημαντική είναι η μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων στη λύση, δηλαδή η ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis) του μοντέλου μας.

4. Έλεγχος του μοντέλου και της λύσης

Σε αυτό το στάδιο πρέπει να γίνει έλεγχος για σφάλματα και τυχόν παραλείψεις. Αυτό γίνεται με συστηματικές διαδικασίες ελέγχου, αναδρομικούς ελέγχους δηλαδή με χρήση ιστορικών δεδομένων και εφαρμογή του μοντέλου για σύγκριση, με επαναληπτικές εφαρμογές του μοντέλου με σκοπό την ανίχνευση μεταβολών στο χρόνο και με ανάλυση ευαισθησίας.

Κατηγορίες μεθόδων Ε.Ε.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι μία επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση (optimization) της απόδοσης ενός συστήματος. Πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας (μαθηματικά) μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για τη λήψη αποφάσεων με σκοπό τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας του υπό μελέτη συστήματος. Παρακάτω επισυνάπτονται οι σημαντικότερες κατηγορίες μεθόδων της.

- Μαθηματικός Προγραμματισμός
 - Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)
 - Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming)
 - Μικτός Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός (Mixed Integer LP)
 - Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός, Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός,
 - Δυναμικός Προγραμματισμός . . .
- Δένδρα αποφάσεων (Decision trees)
- Πολυκριτηριακή Ανάλυση (Multiple Criteria Decision Analysis)
- Ανάλυση δικτύων (Network flows, PERT, CPM)
- Διαχείριση αποθεμάτων (Inventory control, EOQ)
- Ανάλυση γραμμών αναμονής (Queuing theory, simulation)
- Θεωρία παιγνίων (Game theory)

Οι μελέτες της επιχειρησιακής έρευνας αποσκοπούν στην παροχή επιστημονικά θεμελιωμένων προτάσεων για στήριξη και προώθηση αποφάσεων της διοίκησης μίας επιχείρησης. Οι προτάσεις αυτές αφορούν είτε μία βέλτιστη λύση στο μελετούμενο πρόβλημα είτε ένα σύνολο από εναλλακτικές αποτελεσματικές λύσεις, κατάλληλα αξιολογούμενες με σκοπό την αποτελεσματικότερη λειτουργία. Μία μελέτη Ε.Ε. δεν περιορίζεται μόνο στη διατύπωση ενός μαθηματικού μοντέλου και την επίλυσή του. Περιλαμβάνει μία σειρά φάσεων, από τη την πρωτογενή έρευνα και ανάλυση του συστήματος μέχρι και τη μέθοδο υλοποίησης των τελικών αποτελεσμάτων. Η λήψη αποφάσεων είναι μια από τις σημαντικότερες λειτουργίες στη διοίκηση μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού. Στο σημερινό επιχειρηματικό περιβάλλον, που χαρακτηρίζεται από συχνές αλλαγές, έντονο ανταγωνισμό, πληθώρα δεδομένων και μεγάλη διείδυση της τεχνολογίας της πληροφορικής και των επικοινωνιών, η λήψη αποφάσεων βασίζεται όλο και περισσότερο σε "δεδομένα" (στοιχεία) τα οποία καθίστανται αντικείμενο επεξεργασίας με τη χρησιμοποίηση συγκεκριμένων υποδειγμάτων (μοντέλων), τεχνικών και την αξιοποίηση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η μεθοδολογία που ακολουθείται καθώς και τα υποδείγματα που χρησιμοποιούνται αποτελούν το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας.

1.2 Προέλευση ονομασίας Δυναμικού Προγραμματισμού

Ο όρος Δυναμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στα τέλη της δεκαετίας του 1950 από τον Richard Bellman ο οποίος ήταν αυτός κυρίως που ανέπτυξε τη μέθοδο για να περιγράψει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Πρώτος αντιλήφθηκε ότι ο δυναμικός προγραμματισμός μπορούσε να εξελιχθεί σε ένα συστηματικό εργαλείο βελτιστοποίησης. Μέχρι το 1953, το είχε καθορίσει με την σύγχρονη έννοια. Το ιστορικό της ονομασίας αυτής, που σήμερα μπορεί να παρερμηνευθεί σαν προγραμματισμός υπολογιστού, έδωσε ο Bellman σε ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε λίγο μετά τον ξαφνικό του θάνατο το 1984 :

"Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι από που προήλθε η ονομασία δυναμικός προγραμματισμός. Η δεκαετία του 1950 δεν ήταν ιδανική για μαθηματική έρευνα. Υπήρχε ένας ενδιαφέρων κύριος στην Ουάσιγκτον με το όνομα Wilson. Ήταν γραμματέας του Υπουργείου Άμυνας και είχε ένα παθολογικό φόβο και μίσος στο άκουσμα της λέξης έρευνας. Και δεν χρησιμοποιώ τον όρο επιφανειακά, τον χρησιμοποιώ ακριβέστατα. Το πρόσωπό του θα γινόταν κόκκινο, και θα γινόταν βίαιος, αν οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν τον όρο έρευνα μπροστά του. Πόσο μάλλον τον όρο μαθηματική. Το σωματείο Rand ήταν απασχολημένο από την Air Force, και η Air Force είχε ουσιαστικά τον Wilson σαν αφεντικό του. Επομένως, ένιωθα ότι έπρεπε

να κάνω κάτι για να καλύψω από τον Wilson και την Air Force το γεγονός ότι στην πραγματικότητα ασχολιόμουν με μαθηματικά μέσα στο σωματείο Rand. Τι τίτλο, τι όνομα θα μπορούσα να διαλέξω; Από την αρχή ενδιαφερόμουν για σχεδιασμό, για λήψη απόφασης, για συλληγοισμό. Αλλά η λέξη σχεδιασμός δεν είναι μια καλή λέξη, για διάφορους λόγους. Έτσι αποφάσισα να χρησιμοποιήσω τη λέξη προγραμματισμός. Ήθελα να περάσω την ιδέα ότι αυτός ήταν δυναμικός, ήταν πολυπληθών σταδίων, ήταν χρονικά μεταβαλλόμενος. Είπα ας διαλέξω μια λέξη που έχει μία απόλυτα ακριβή σημασία, σύμφωνα με την κλασσική έννοια της φυσικής. Και έχει ακόμη μια σημαντική ιδιότητα σαν επίθετο, ότι είναι αδύνατον να χρησιμοποιήσεις τον όρο δυναμικός με μια υποτιμητική έννοια. Προσπάθησα να σκεφτώ κάποιους συνδυασμούς που πιθανώς να αποδίδουν μια υποτιμητική έννοια. Είναι αδύνατον. Έτσι σκέφτηκα ότι δυναμικός προγραμματισμός είναι μια καλή ονομασία. Ήταν μια ονομασία που ούτε κάποιος μέλος του Κογκρέσου μπορούσε να επικρίνει. Έτσι, το χρησιμοποίησα σαν ομπρέλα για τις δραστηριότητες μου.”

Όπως είδαμε, αρχικά η λέξη “προγραμματισμός” στο “δυναμικό προγραμματισμό” δεν είχε καμία σύνδεση με τον προγραμματισμό υπολογιστών, και προήλθε αντ’αυτού από τον όρο “μαθηματικός προγραμματισμός” - ένα συνώνυμο για τη βελτιστοποίηση. Εντούτοις, σήμερα πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης λύνονται καλύτερα με την δημιουργία ενός προγράμματος στον υπολογιστή, που εφαρμόζει έναν δυναμικό αλγόριθμο προγραμματισμού, παρά την πραγματοποίηση των εκατοντάδων κουραστικών υπολογισμών με το χέρι. Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μια σχεδιαστική περισσότερο τεχνική, χρήσιμη στην επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων. Ο Δυναμικός Προγραμματισμός βασίζεται στην λεγόμενη Αρχή του Βέλτιστου που δεν είναι παρά μια απλούστατη και εύκολα κατανοητή ιδιότητα της λύσης προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου. Οι συνέπειες όμως της ιδιότητας αυτής είναι σημαντικές και οδήγησαν σε μια οικογένεια αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων δυναμικής, αλλά και συνδυαστικής βελτιστοποίησης, τόσο αιτιοκρατικών, όσο και στοχαστικών. Οι εφαρμογές του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι πάμπολλες και εκτείνονται σε διάφορες περιοχές (Επιχειρησιακή Έρευνα, Τεχνικές Επιστήμες, Οικονομικές Επιστήμες) και σε διάφορους τύπους προβλημάτων (οργάνωση, σχεδιασμός, αυτόματος έλεγχος). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για να αναλύουμε προβλήματα βελτιστοποίησης, τα οποία χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι η λήψη της απόφασης ελέγχου την παρούσα στιγμή επηρεάζει τη συμπεριφορά του συστήματος στις μελλοντικές στιγμές. Επομένως, η λύση είναι μια ακολουθία αποφάσεων για όλη τη διάρκεια του ελέγχου και όχι απλά μια απόφαση για την παρούσα χρονική στιγμή. Αυτά τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα βελτιστοποίησης για διαδικασίες απόφασης πολλαπλών σταδίων (multistage decision processes). Τέτοια ακολουθιακά φαινόμενα συναντώνται πολύ συχνά στα προηγμένα τεχνολογικά προγράμματα και

στις οικονομικές αναλύσεις. Για τη λήψη αυτών των αποφάσεων εφαρμόζεται μια απλή και διαισθητική έννοια: η αρχή της βελτιστοποίησης που φέρει το όνομα του "εμπνευστή" της: Bellman's principle of optimality.

Αρχή της βελτιστοποίησης του Bellman : "Μία βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση και η αρχική απόφαση, οι αποφάσεις που απομένουν πρέπει να αποτελούν μια βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση που προκύπτει από την πρώτη απόφαση."

Ο ίδιος ο Bellman είχε πει:

"Το πρώτο μου θέμα στον δυναμικό προγραμματισμό ήταν να τον θέσω σε μια αυστηρή βάση. Ανακάθισα ότι χρησιμοποιούσα την ίδια τεχνική ξανά και ξανά για να παράγω μια συναρτησιακή εξίσωση. Αποφάσισα να ονομάσω αυτή την τεχνική "Η Αρχή της Βελτιστοποίησης". Ο Oliver Gross μια μέρα είπε: "Η Αρχή δεν είναι αυστηρή". Απάντησα: "Φυσικά όχι. Δεν είναι καν ακριβής.". Μια καλή Αρχή πρέπει να καθοδηγεί τη διαίσθηση."

Έτσι, παρόλο που ο όρος "αρχή" θα λέγαμε ότι είναι κάτι παραπλανητικό, ο δυναμικός προγραμματισμός τον αποδέχεται και παράγει από αυτόν τον αλγόριθμο υπολογισμού βέλτιστης πολιτικής.

1.3 Δυναμικός προγραμματισμός και Επιχειρησιακή Έρευνα

Τα προσδιοριστικά μοντέλα δυναμικού προγραμματισμού χρησιμοποιούνται σε προβλήματα, στα οποία η κατάσταση του επόμενου σταδίου προσδιορίζεται πλήρως από την κατάσταση και την απόφαση του τρέχοντος σταδίου. Στα προβλήματα αυτά δεν υπάρχει ούτε αβεβαιότητα ούτε και κατανομή πιθανότητας για το ποια είναι η επόμενη κατάσταση της διαδικασίας. Αντίθετα στα στοχαστικά μοντέλα δυναμικού προγραμματισμού η κατάσταση του επόμενου σταδίου δεν προσδιορίζεται πλήρως από την κατάσταση και την απόφαση του τρέχοντος σταδίου, αλλά υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας για την επόμενη κατάσταση. Τα πιο γνωστά δυναμικά μοντέλα, που βρίσκουν και εφαρμογές σε πολύ γνωστά προβλήματα είναι προσδιοριστικά. Ειδικότερα, τα σπουδαιότερα προβλήματα που επιλύονται με προσδιοριστικά μοντελοδυναμικού προγραμματισμού είναι τα εξής :

- **Προβλήματα κατανομής Πόρων (Allocation Problem)**

Αφορούν την κατανομή ενός πόρου, π.χ. χρήματα, μηχανές, ανθρώπινο δυναμικό κ.α., σε έναν αριθμό διαφορετικών δραστηριοτήτων. Η κατανομή μέρους

ή ολόκληρης της διαθέσιμης ποσότητας του πόρου σε μια δραστηριότητα συνεπάγεται μιαν απόδοση, το ύψος της οποίας εξαρτάται από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, καθώς και από την ποσότητα του πόρου που κατανέμεται στη δραστηριότητα. Αντικειμενικός σκοπός είναι η κατανομή της διαθέσιμης ποσότητας του πόρου στις διάφορες δραστηριότητες, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση.

- **Προβλήματα δικτύου (Network Problems)**

Στην κατηγορία αυτή εντάσσεται το πολύ γνωστό πρόβλημα της “Συντομότερης διαδρομής”. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στην εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ μιας προέλευσης και ενός προορισμού ενός συγκεκριμένου συνεκτικού δικτύου, όταν οι αποστάσεις των ακμών του δικτύου είναι γνωστές. Αποτελεί το χαρακτηριστικότερο, ίσως, παράδειγμα δυναμικού προγραμματισμού και οι εφαρμογές του είναι ευρύτατες κυρίως σε προβλήματα διαχείρισης και διανομής (κλάδος Logistics).

- **Προβλήματα Μεγιστοποίησης Αξίας (Knapsack Problem)**

Ο τύπος αυτών των προβλημάτων γενικά αναφέρεται ως “Το πρόβλημα του Σακιδίου”. Το πρόβλημα αφορά τον προσδιορισμό της ποσότητας από κάθε τύπο διαφορετικών αντικειμένων που πρέπει να τοποθετηθούν σε ένα σάκο, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία του σάκου, χωρίς ωστόσο να γίνει υπέρβαση της χωρητικότητάς του. Η χωρητικότητα συνήθως περιγράφεται με όρους συνολικού βάρους, και κάθε τύπος αντικειμένου έχει συγκεκριμένο βάρος και συγκεκριμένη αξία. Οι εφαρμογές του συγκεκριμένου προβλήματος είναι ευρύτατες, κυρίως στον τομέα της βιομηχανίας.

- **Προβλήματα Προγραμματισμού Παραγωγής (Scheduling Problem)**

Αυτά τα προβλήματα αφορούν τον προγραμματισμό της παραγωγής μιας βιομηχανίας λαμβάνοντας υπόψη την προβλεπόμενη ζήτηση, το κόστος αποθήκευσης των αποθεμάτων και άλλους καιρίους παράγοντες.

Αυτές είναι οι σημαντικότερες εφαρμογές του δυναμικού προγραμματισμού στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας. Παράλληλα υπάρχουν και άλλες σπουδαίες εφαρμογές σε διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η ακολουθία Fibonacci, ο αλγόριθμος του Early, και πολλοί άλλοι αλγόριθμοι με εύρος εφαρμογών από τη βιομηχανία έως την ιατρική. [8] [5] [6] [9] [10] [4] [3] [1] [7] [2]

Κεφάλαιο 2

Δυναμικός Προγραμματισμός

2.1 Εισαγωγικά στοιχεία εφαρμογών και μεθόδου

Ο Δυναμικός προγραμματισμός είναι μία μέθοδος η οποία εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθή μία σύνθετη απόφαση η οποία προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλοεξαρτώνται. Η αλληλεξάρτηση μπορεί να προκύπτει επειδή οι αποφάσεις είτε παρουσιάζουν κάποια χρονική διαδοχή (όπως στην περίπτωση αναζήτησης της συντομότερης διαδρομής), είτε συνδέονται με κοινούς περιορισμούς (όπως η περίπτωση περιορισμένων μέσων μεταξύ ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων). Οι αποφάσεις αυτές μπορεί να λαμβάνονται σε ένα περιβάλλον γνωστών συνθηκών (ντετερμινιστικός δυναμικός προγραμματισμός) ή ακόμα και σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας (στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός).

Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για γραμμικά καθώς και μη-γραμμικά προβλήματα. Επίσης για προβλήματα των οποίων οι παράμετροι είναι γνωστοί με βεβαιότητα καθώς και για στοχαστικά προβλήματα.

Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στη διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων με κατάλληλη αναδρομική σχέση ώστε η σύνθεση των επιμέρους αποφάσεων να δίνει την τελικά ζητούμενη απόφαση. Το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε επιμέρους υποπροβλήματα τα οποία συνδέονται με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων. Για να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων, τα υποπροβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή για όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων. Δηλαδή η επίλυση ενός προβλήματος με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, απαιτεί τη διαίρεση του προβλήματος σε βήματα. Χωρίζουμε δηλαδή το πρόβλημα σε τόσα υποπροβλήματα όσοι είναι και οι άγνωστοι του προβλήματος. Φροντίζουμε να έχουμε μορφώσει κατάλληλα το πρόβλημα έτσι ώστε κατά την επίλυση ενός βήματος να έχουμε μόνο μία άγνωστη η οποία μπορεί να επιλυθεί με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων. Δηλαδή σε κάθε βήμα προσπαθούμε να εντοπίσουμε την τιμή

μίας και μόνο μεταβλητής.

Παραδείγματα εφαρμογών

- Προβλήματα πολλαπλών χρονικών περιόδων (επενδύσεις, χρηματοοικονομικός προγραμματισμός, αντικατάσταση και συντήρησης εξοπλισμού, διαχείριση αποθεμάτων κτλ
- Προβλήματα δικτύων (συντομότερη διαδρομή)
- Προβλήματα κατανομής πόρων σε ανταγωνιστικές δραστηριότητες (κεφάλαια, ανθρώπινο δυναμικό, πρώτες ύλες, αξιοπιστία εξοπλισμού)

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια αναδρομική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων. Εφαρμόζεται, όμως, μόνο σε προβλήματα βελτιστοποίησης και ως εκ τούτου ως εξειδικευμένη μέθοδος είναι γενικά περισσότερο αποτελεσματική από μια γενική αναδρομική λύση [1]. Η γενική αρχή του δυναμικού προγραμματισμού δε διαφέρει ριζικά από την αναδρομική προσέγγιση. Το πρόβλημα χωρίζεται σε υποπροβλήματα και η λύση κάθε υποπροβλήματος προκύπτει αναδρομικά από την επίλυση άλλων υποπροβλημάτων. Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στη διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων με κατάλληλη αναδρομική σχέση, ώστε η σύνθεση των επιμέρους αποφάσεων να δίνει την τελικά ζητούμενη απόφαση. Το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε επιμέρους υποπροβλήματα τα οποία συνδέονται με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων. Για να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων, τα υποπροβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή για όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων. Αυτό αποτελεί και το κυρίως υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, το οποίο, αν και είναι σημαντικό, είναι πάντως πολύ μικρότερο από το κόστος της πλήρους απαρίθμησης και αξιολόγησης όλων των δυνατών λύσεων. Έχουμε αναφέρει ήδη ότι ο Δυναμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιείται σε προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Στα προβλήματα αυτά υπάρχει μια συνάρτηση της οποίας ζητείται το ελάχιστο ή το μέγιστο. Στην ορολογία της βελτιστοποίησης με περιορισμούς η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση. Είναι αρκετό να υπολογιστεί ο αναδρομικός τύπος με τον οποίο υπολογίζονται αναδρομικά οι βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στα διάφορα προβλήματα. Χαρακτηριστικό του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι ότι δεν υπάρχει γενικευμένη διατύπωση της μεθόδου που να έχει άμεση λειτουργική ισχύ. Οι αναδρομικές σχέσεις που συνεπάγεται η μέθοδος διαφοροποιούνται ριζικά από πρόβλημα σε πρόβλημα.

2.2 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

Χαρακτηριστικό του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι ότι δεν υπάρχει γενικευμένη διατύπωση της μεθόδου που να έχει άμεση λειτουργική ισχύ. Οι αναδρομικές σχέσεις που συνεπάγεται η μέθοδος διαφοροποιούνται ριζικά από πρόβλημα σε πρόβλημα.

Τα προβλήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. το πρόβλημα χωρίζεται σε στάδια όπου σε κάθε στάδιο χρειάζεται να παρθεί μια απόφαση πολιτικής.
2. Κάθε στάδιο έχει έναν αριθμό πιθανών καταστάσεων (πεπερασμένων ή απείρων).
3. Η απόφαση πολιτικής μετατρέπει την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος σε μια κατάσταση στο επόμενο στάδιο.
4. Η διαδικασία λύσης έχει σχεδιαστεί για να βρίσκει την βέλτιστη πολιτική για το συνολικό πρόβλημα.
5. Δεδομένης της τρέχουσας κατάστασης, μια βέλτιστη πολιτική για τα υπόλοιπα στάδια είναι ανεξάρτητη από την πολιτική που εφαρμόστηκε στα προηγούμενα στάδια (αρχή της βελτιστότητας).
6. Η διαδικασία λύσης ξεκινάει με την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής για το τελευταίο στάδιο.
7. Μια επαναληπτική σχέση που εντοπίζει τη βέλτιστη πολιτική για το στάδιο n , δεδομένης της βέλτιστης πολιτικής για το στάδιο $n + 1$.

π.χ. $f_n^*(s) = \min[c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)]$, όπου

N = ο αριθμός των σταδίων

n = η ετικέτα του τρέχοντος σταδίου ($n = 1, 2, \dots, N$)

s_n = η τωρινή κατάσταση για το στάδιο n

x_n = η μεταβλητή απόφασης για το στάδιο n

x_n^* = η βέλτιστη τιμή του x_n (δεδομένου του s_n)

$f_n(s_n, x_n)$ = η συνεισφορά των σταδίων $n, n + 1, \dots, N$ στην αντικειμενική συνάρτηση (συνολικό κόστος (κέρδος), αν το σύστημα ξεκινήσει από την κατάσταση s_n στο στάδιο n , η άμεση απόφαση είναι x και βέλτιστες αποφάσεις παρθούν από εκεί και πέρα.

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*) \quad (2.1)$$

Η επαναληπτική σχέση θα έχει πάντα τη μορφή:

$$f_n^*(s_n) = \max[f_n(s_n, x_n)] \text{ or } f_n^*(s_n) = \min[f_n(s_n, x_n)] \quad (2.2)$$

όπου το $f_n(s_n, x_n)$ είναι συνάρτηση των s_n, x_n και του $f_{n+1}^*(s_{n+1})$

8. Η διαδικασία λύσης προχωρεί προς τα πίσω στάδιο-στάδιο, βρίσκοντας κάθε φορά τη βέλτιστη πολιτική για το τρέχον στάδιο, μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική για το αρχικό στάδιο.

Τέτοιου είδους προβλήματα διέπονται από την "αρχή του Bellman" που χαρακτηρίζει τη βέλτιστη λύση:

"Μια βέλτιστη διαδοχή αποφάσεων έχει την ιδιότητα ότι, ανεξάρτητα από τις αρχικές αποφάσεις, οι αποφάσεις που απομένουν πρέπει να συνιστούν μία βέλτιστη στρατηγική (πολιτική) σε σχέση με την κατάσταση που απορρέει από τις αρχικές αποφάσεις".

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μία από τις λιγότερο διαισθητικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται η μελέτη πολλών παραδειγμάτων εφαρμογής της μεθόδου για την κατανόησή της, αφού σε κάθε παράδειγμα η λύση διαφοροποιείται αναλόγως με τα δεδομένα του προβλήματος.

2.3 Το πρόβλημα της αντικατάστασης εξοπλισμού

Έστω ένας φοιτητής στο εξωτερικό έχει σκοπό να δουλέψει ως ταχυδρόμος, που χρησιμοποιεί ποδήλατο για την παράδοση των γραμμάτων κατά την διάρκεια των σπουδών του, που υπολογίζει να είναι πέντε χρόνια. Θέλουμε να βρούμε τον οικονομικότερο τρόπο, που να συνδυάζει την αγορά και την συντήρηση του ποδηλάτου για το παραπάνω διάστημα. Γνωρίζουμε ότι ένα καινούργιο ποδήλατο κοστίζει 500 και το κόστος συντήρησης είναι 30 τον πρώτο χρόνο, 40 τον δεύτερο χρόνο και 60 για τον τρίτο χρόνο. Λαμβάνοντας υπόψιν μας την χρήση που θα γίνει, το ποδήλατο θα πρέπει να αντικατασταθεί το πολύ στα τρία χρόνια από την αγορά του. Βάσει στατιστικών στοιχείων αν πουληθεί το ποδήλατο μετά από ένα χρόνο χρήσης θα αξίζει 400, μετά από δύο χρόνια 300 και μετά από τρία 250.

Το ερώτημά μας είναι κάθε πότε θα πρέπει να αντικαθιστά το ποδήλατο έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος στο χρονοδιάγραμμα των πέντε χρόνων.

Για να διατυπώσουμε το παραπάνω πρόβλημα ως ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού πρέπει πρώτα να το χωρίσουμε στάδια και το κάθε στάδιο σε έναν

αριθμό πιθανών καταστάσεων. Σε κάθε στάδιο θα πρέπει μία απόφαση πολιτικής η οποία θα μετατρέψει την τρέχουσα κατάσταση σε μία νέα κατάσταση για το επόμενο στάδιο.

- Στάδια

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η πολιτική με το ελάχιστο συνολικό κόστος για ένα χρονικό διάστημα $t = 5$ έτη, όπου t είναι η εκάστοτε χρονική στιγμή ($t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Για αυτό το συγκεκριμένο πρόβλημα θα το χωρίσουμε με βάση τον χρόνο. Με προς τα πίσω αναδρομή το πρώτο πρόβλημα που δημιουργείται είναι άνευ σημασίας (ποια είναι η καλύτερη επιλογή στο χρονικό διάστημα από $t = 5$ έως $t = 5$). Το επόμενο στάδιο θα είναι να λύσουμε το πρόβλημα για t από 4 έως 5, στη συνέχεια από $t = 3$ έως $t = 5$, μετά για $t = 2$ έως $t = 5$, για $t = 1$ έως $t = 5$ έως ότου στο τέλος να προκύψει το ζητούμενο πρόβλημα, τι πρέπει να κάνουμε τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή τώρα, μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 5$, δηλαδή πέντε χρόνια μετά.

- Πιθανές καταστάσεις

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι πιθανές καταστάσεις είναι πολύ απλές: πόσα χρόνια απομένουν ακόμα μέχρι να φτάσουμε τα πέντε.

- Απόφαση πολιτικής στο στάδιο

Από την στιγμή που θα λύσουμε εξ αρχής το πρόβλημα για κάθε στάδιο δημιουργείται ένα καινούργιο ερώτημα: για πόσο καιρό πρέπει να κρατήσει το ποδήλατο που αγόρασε.

- Απόφαση με ενημέρωση του σταδίου

Δεδομένου ότι αγοράζει αγοράζει ένα ποδήλατο στην αρχή του τρέχοντος σταδίου και αποφασίζει να το κρατήσει για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, τότε το στάδιο "πόσα χρόνια ακόμα" ενημερώνεται αυτόματα.

Παραδείγματος χάρη αν αυτή τη στιγμή είμαστε στην κατάσταση 4, δηλαδή έχουμε το ποδήλατο ένα χρόνο και απομένουν άλλα τέσσερα μέχρι τα 5 που θα χρειάζεται το ποδήλατο η απόφαση που θα πρέπει να ληφθεί στην συγκεκριμένη κατάσταση είναι να αγοράσει τώρα ένα ποδήλατο και να το κρατήσει για τρία χρόνια. Τότε το στάδιο στο επόμενο σημείο απόφασης θα είναι $4 - 3 = 1$, δηλαδή ένα από τώρα, δηλαδή θα είναι από τώρα σε $t = 4$ με μόνο ένα χρόνο μέχρι να φτάσει στο 5.

- Αναδρομική σχέση

Αρχικά ορίζουμε τη συνάρτησή μας και τις μεταβλητές :

- $g(t)$: το ελάχιστο καθαρό κόστος από την χρονική στιγμή t μέχρι την χρονική στιγμή $t = 5$ δεδομένου ότι το νέο ποδήλατο έχει αγοραστεί τη χρονική στιγμή t .

- c_{tx} : το καθαρό κόστος της αγοράς ενός ποδηλάτου τη χρονική στιγμή t αν το κρατήσει μέχρι την χρονική στιγμή x συμπεριλαμβανομένου και του αρχικού κόστους αγοράς, του κόστους συντήρησης και την αξία που θα έχει όταν θα αποφασίσει να το πουλήσει.
- Η αναδρομική σχέση είναι

$$g(t) = \min[c_{tx} + g(x)], \text{ για } t = 0, 1, 2, 3, 4$$

Σημειώνουμε ότι η $g()$ εμφανίζεται και στα δύο μέρη της αναδρομικής σχέσης. Η βέλτιστη λύση από τη χρονική στιγμή t έως την $t = 5$ εξαρτάται από δύο πράγματα : την παρούσα αξία του c_{tx} και την βέλτιστη τιμή του $g(x)$ της προηγούμενης κατάστασης.

Το c_{tx} εξαρτάται μόνο από θα κρατήσει το ποδήλατο (1-3 χρόνια). Έτσι μπορούμε να επεξεργαστούμε τις πιθανές τιμές εκ των προτέρων για να γλιτώσουμε κάποιους υπολογισμούς από την μετά ανάλυση. Κάθε υπολογισμός λαμβάνει υπόψιν την αρχική τιμή αγοράς, το κόστος συντήρησης και την υπολειπόμενη αξία.

- Κρατάει το ποδήλατο 1 χρόνο

$$c_{01} = c_{12} = c_{23} = c_{34} = c_{45} = 500 + 30 - 400 = 130$$

- Κρατάει το ποδήλατο 2 χρόνια

$$c_{02} = c_{13} = c_{24} = c_{35} = 500 + (30 + 40) - 300 = 270$$

- Κρατάει το ποδήλατο 3 χρόνια

$$c_{03} = c_{14} = c_{25} = 500 + (30 + 40 + 60) - 250 = 380$$

Πριν ξεκινήσουμε την λύση του προβλήματος μας είναι ενδιαφέρον να κάνουμε μία μικρή, απλοϊκή ανάλυση για να δούμε γενικά ποιο χρονικό διάστημα (1,2 ή 3 χρόνια) είναι πιο συμφέρον, για να κρατήσει το ποδήλατο. Αυτό θα το πετύχουμε υπολογίζοντας το μέσο ετήσιο κόστος ιδιοκτησίας για κάθε περίπτωση.

- 1 έτος $130/1 = 130$
- 2 έτη $270/2 = 135$
- 3 έτος $380/3 = 126,67$

Βλέπουμε ότι το ποιο συμφέρον είναι να το κρατήσει για τρία χρόνια με αμέσως επόμενη επιλογή να το αντικαταστήσει στον ένα χρόνο. Γνωρίζοντας ότι χρειάζεται να έχει ποδήλατο τα επόμενα πέντε χρόνια περιμένουμε να δούμε κάποιο συνδυασμό μεταξύ του ενός και των τριών χρόνων για την αντικατάσταση έως ότου συμπληρωθούν τα πέντε χρόνια.

Επιστρέφοντας τώρα στον Δυναμικό Προγραμματισμό πρέπει να "στρώσουμε" το πρόβλημά μας για να βρούμε την βέλτιστη λύση. Ορίζουμε $g(5) = 0$ αφού με τον πέμπτο χρόνο δεν θα το χρειάζεται, οπότε δεν θα έχει έξοδα για το ποδήλατο. Θα εφαρμόσουμε την αναδρομική σχέση προς τα πίσω ξεκινώντας από τον πέμπτο χρόνο. Η βέλτιστη επιλογή (χαμηλότερο κόστος) θα είναι αυτή με τους ποιο μαύρους χαρακτήρες σε κάθε στάδιο.

- $g(5) = 0$ τετριμμένο αφού είμαστε στο πρώτο στάδιο.
- $g(4) = c_{34} + g(5) = 130 + 0 = 130$ επίσης τετριμμένο αφού υπάρχει μόνο μία επιλογή.
- $g(3) = \min [[c_{34} + g(4)], [c_{35} + g(5)]] = [[130 + 130], [270 + 0]] = [[260], [270]] = 260 = c_{34} + g(4)$
- $g(2) = \min [[c_{23} + g(3)], [c_{24} + g(4)], [c_{25} + g(5)]] = [[130 + 260], [270 + 136], [380 + 0]] = [[390], [400], [380]] = 380 = c_{25} + g(5)$
- $g(1) = \min [[c_{12} + g(2)], [c_{13} + g(3)], [c_{14} + g(4)]] = [[130 + 380], [270 + 260], [380 + 130]] = [[510], [530], [510]] = 510 = c_{12} + g(2) = c_{14} + g(4)$
- $g(0) = \min [[c_{01} + g(1)], [c_{02} + g(2)], [c_{03} + g(3)]] = [[130 + 510], [270 + 380], [380 + 260]] = [[640], [650], [640]] = 640 = c_{01} + g(1) = c_{03} + g(3)$

Με την παραπάνω διαδικασία επεκτάθηκαν τα μικρά προβλήματα έως ότου λυθεί το αρχικό μας πρόβλημα. Βρήκαμε ότι η φτηνότερη πολιτική που μπορεί να ακολουθήσει κοστίζει 640. Τώρα αυτό που μένει είναι να διερευνήσουμε το ως θα επιτευχθεί αυτό το αποτέλεσμα. Θα πρέπει να ανατρέξουμε πίσω μέσω της λύσης για να δούμε τις πληροφορίες που έχουν μαζευτεί για το χρονικό διάστημα από 0 (τώρα) μέχρι 5 (όταν δεν θα χρειάζεται άλλο το ποδήλατο). Ξέρουμε ότι πρέπει να αγοραστεί ένα ποδήλατο τη χρονική στιγμή 0 και πρέπει να αποφασίσουμε τη βέλτιστη διάρκεια μέχρι να αντικατασταθεί με τον περιορισμό ότι χρειάζεται αντικατάσταση το πολύ σε 3 χρόνια από τη στιγμή της αγοράς. Από την παραπάνω διαδικασία βλέπουμε ότι αυτό επιτυγχάνεται με δύο πιθανές αποφάσεις με το ίδιο ελάχιστο συνολικό κόστος, να το αντικαταστήσει μετά από ένα ή τρία χρόνια.

Έστω ότι αρχικά το κρατάει ένα χρόνο :

αυτό μας οδηγεί στη χρονική στιγμή 1 όπου θα πρέπει να αγοράσει άλλο ποδήλατο. Για το πόσο θα κρατήσει τώρα το νέο είμαστε πάλι μεταξύ του ενός ή των τριών χρόνων αφού έχουν πάλι το ίδιο ελάχιστο κόστος . Έστω ότι το κρατάει πάλι ένα χρόνο και έτσι πηγαίνουμε στη χρονική στιγμή 2 που θα πρέπει πάλι να αγοράσει ποδήλατο και να δούμε την ποιο συμφέρουσα επιλογή που έχει. Σε αυτή την περίπτωση το χαμηλότερο κόστος θα το έχει κρατώντας το τρία χρόνια και έτσι θα οδηγηθούμε στη χρονική στιγμή 5 που είναι και η τελική, αφού μετά από εδώ δεν το χρειάζεται άλλο. Έτσι μία λύση που δίνει ένα ελάχιστο συνολικό κόστος ιδιοκτησίας 640 είναι η αγορά του ποδηλάτου να γίνει τις χρονικές στιγμές 0,1 και 2.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τρεις διαφορετικές λύσεις που μας δίνουν το ίδιο ελάχιστο συνολικό κόστος ιδιοκτησίας. Αγορά κατά τις χρονικές στιγμές 0,1 και 2 ή 0,1 και 4 ή 0,3 και 4. Αυτό δεν μας εκπλήσσει αφού στην πρωταρχική ανάλυση που είχαμε κάνει είδαμε ότι με βάση το μέσο ετήσιο κόστος ιδιοκτησίας η ποιο οικονομική πολιτική που μπορούσε να ακολουθήσει ήταν να το αντικαταστήσει στα τρία χρόνια με επόμενη ποιο οικονομική να το αντικαταστήσει σε ένα χρόνο. Οι τρεις ισοδύναμες λύσεις μας δίνουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ανάμεσα στα ένα και τρία χρόνια ιδιοκτησίας για το χρονοδιάγραμμα των πέντε χρόνων.

Το παραπάνω πρόβλημα μοιάζει με το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής. Είναι πολύ εύκολο να μετατραπεί ένα πρόβλημα αντικατάστασης εξοπλισμού σε ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής. Κατασκευάζουμε ένα δίκτυο όπου οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν τις χρονικές στιγμές (0,1,2,3,4,5) και τα συνδετικά τόξα το κόστος διατήρησης του ποδηλάτου για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την ειδική περίπτωση θα μπορούσε να εφαρμοστεί για την λύση του προβλήματος και γραμμικός προγραμματισμός. Αυτό δεν μπορεί να γίνει σε όλα τα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού, αφού κατά κύριο λόγο είναι πολύ σύνθετα και δεν μπορούν να μετατραπούν σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

2.4 Ένα πρόβλημα επενδύσεων

Έστω ένας επενδυτής έχει διαθέσιμο ένα ποσό της τάξεως των 4.000 για να επενδύσει μεταξύ τεσσάρων εναλλακτικών επενδυτικών προγραμμάτων. Σε κάθε πρόγραμμα μπορεί να επενδύσει ακέραια πολλαπλάσια των 1.000, η δε απόδοση κάθε επένδυσης φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

ο επενδυτής ενδιαφέρεται να επενδύσει τα χρήματά του έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου των επενδύσεών του.

Πίνακας 2.1: Πίνακας Αποδόσεων

Ύψος Επένδυσης (σε χιλ.€)	Απόδοση Α	Απόδοση Β	Απόδοση Γ	Απόδοση Δ
0	0	0	0	0
1	1,3	1,4	1,2	1,3
2	2,9	2,6	2,5	3,9
3	4,0	4,2	4,2	3,9
4	5,5	5,3	5,1	5,1

αυτό το πρόβλημα είναι πρόβλημα συνδυασμών και επομένως μπορεί να λυθεί με απαρίθμηση διαφόρων συνδυασμών ή με Ακέραιο Προγραμματισμό. Παραδείγματος χάρη ένας πιθανός συνδυασμός είναι (1,1,1,1), δηλαδή από 1.000 € σε κάθε πρόγραμμα. Αυτός ο συνδυασμός έχει συνολική απόδοση $1,3 + 1,4 + 1,2 + 1,3 = 5,2$ χιλ.€. Ένας άλλος συνδυασμός είναι (4,0,0,0), δηλαδή επένδυση συνολικού κεφαλαίου στο πρόγραμμα Α. Αυτός ο συνδυασμός έχει συνολική απόδοση 5,5 χιλ.€ και επομένως υπερέχει του προηγούμενου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να προσπαθήσουμε με διάφορους συνδυασμούς και να συγκρίνουμε τη συνολική τους απόδοση.

Λύση με Δ.Π.

Για να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του Δυναμικού Προγραμματισμού πρέπει να ορίσουμε τα στάδια αποφάσεων και τις πιθανές καταστάσεις του επενδυτή. Θα θεωρήσουμε ότι οι αποφάσεις για κάθε πρόγραμμα θα ληφθούν σε μία χρονική σειρά. Πρώτα ο επενδυτής θα αποφασίσει για το πρόγραμμα Α, στη συνέχεια για το Β, έπειτα για το Γ και τέλος για το Δ, στην πραγματικότητα βέβαια οι αποφάσεις θα ληφθούν όλες ταυτόχρονα. Επιπλέον όταν πάρει απόφαση για μία επένδυση, δεν μπορεί να την αναρέσει. Στάδιο απόφασης είναι λοιπόν το κάθε συγκεκριμένο πρόγραμμα για το οποίο πρόκειται να πάρει μία απόφαση. Κατάσταση είναι το υπόλοιπο κεφάλαιο το οποίο είναι διαθέσιμο στον επενδυτή για επένδυση στο συγκεκριμένο στάδιο και για τα επόμενα. Επομένως, στο πρόβλημα μας υπάρχουν 4 στάδια.

Στο πρώτο στάδιο (Α) υπάρχει μόνο μία πιθανή κατάσταση, αυτή των 4.000 €.

Στο δεύτερο, στο τρίτο και στο τέταρτο στάδιο (Β, Γ και Δ) είναι πιθανές πέντε καταστάσεις, ανάλογα με το πόσα χρήματα έχει ακόμα ο επενδυτής όταν "εισέρχεται" στο κάθε στάδιο (μετά την επένδυση στην Α) :

- 4.000 € (εάν δεν έχει προηγηθεί καμία επένδυση)

- 3.000 €
- 2.000 €
- 1.000 €
- 0 €

Μετά το τέταρτο στάδιο υπάρχει μόνο μόνο πιθανή κατάσταση : 0, εφόσον θέλουμε να επενδύσουμε ολόκληρο το ποσό των 4.000 €.

Το μοντέλο του Δυναμικού προγραμματισμού διατυπώνεται ως εξής :

Έστω v το τωρινό στάδιο απόφασης και x το κεφάλαιο που του έχει μείνει. Θεωρούμε $\phi_v(x)$ η μεγαλύτερη δυνατή συνολική απόδοση από το τωρινό και τα υπόλοιπα μελλοντικά στάδια, εάν ο επενδυτής τώρα βρίσκεται στο στάδιο v και έχει υπόλοιπο κεφάλαιο x . Επίσης, έστω $a_{v,\psi}$ η άμεση απόδοση μίας επένδυσης ύψους ψ στο στάδιο v και $E_v(x)$ η καλύτερη επένδυση για το συγκεκριμένο στάδιο και κατάσταση. Έτσι η αναδρομική μας σχέση θα είναι :

$$\phi_v(x) = \max[a_{v,\psi} + \phi_{v+1}(x - \psi)]$$

Για να λύσουμε την αναδρομική σχέση θα πρέπει να δοθούν πρώτα οι ακραίες συνθήκες. Στην περίπτωση μας γνωρίζουμε ότι $\phi_5(x) = 0$ δηλαδή ότι ό,τι επενδυθεί δεν θα αποδώσει. Για να λύσουμε την εξίσωση πρέπει να αρχίσουμε από το τελευταίο στάδιο $v = 4$ και προχωράμε προς τα προηγούμενα.

Για $v=4$

$$\phi_4(4) = a_{4,4} = 5, 1$$

$$\phi_4(3) = a_{4,3} = 3, 9$$

$$\phi_4(2) = a_{4,2} = 2, 4$$

$$\phi_4(1) = a_{4,1} = 1, 3$$

Παρατηρούμε ότι $E_4(x) = x$ για κάθε x

Για $v=3$

$$\phi_3(4) = \max[5.4 + 0, 4.2 + 1.3, 2.5 + 2.4, 1.2 + 3.9, 0 + 5.1] = 5.5$$

$$\phi_3(3) = \max[4.2, 3.8, 3.6, 3.9] = 4.2$$

$$\phi_3(2) = \max[2.5, 2.5, 2.4] = 2.5$$

$$\phi_3(1) = \max[1.2, 1.3] = 1.3$$

$$\phi_3(0) = 0$$

Άρα :

$$E_3(4) = 3$$

$$E_3(3) = 3$$

$$E_3(2) = 2 \text{ ή } E_3(2) = 1$$

$$E_3(1) = 0$$

Για $v=2$

$$\phi_2(4) = \max[5.3, 4.2 + 1.3, 2.6 + 2.5, 1.4 + 4.2, 0 + 5.5] = 5.6$$

$$\phi_2(3) = \max[4.2, 2.6 + 1.3, 1.4 + 2.5, 4.2] = 4.2$$

$$\phi_2(2) = \max[2.6, 1.4 + 1.3, 2.5] = 2.7$$

$$\phi_2(1) = \max[1.4, 1.3] = 1.4$$

$$\phi_2(0) = 0$$

Άρα :

$$_2(4) = 1$$

$$_2(3) = 3 \text{ ή } E_2(3) = 0$$

$$E_2(2) = 1$$

$$E_2(1) = 1$$

Για $v=1$

$$\phi_1(4) = \max[5.5, 4.0 + 1.4, 2.9 + 2.7, 1.3 + 4.2, 5.6] = 5.6$$

Άρα :

$$E_1(4) = 2 \text{ ή } E_1(4) = 0$$

Επομένως οι καλύτερες επενδύσεις είναι οι ακόλουθες δύο :

	A	B	Γ	Δ
Στρατηγική 1	2	1	0	1
Στρατηγική 2	0	1	3	0

Και οι δύο συνδυασμοί έχουν συνολική απόδοση $\phi_1(4) = 5.600$.

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

3.1 Το βασικό πρόβλημα / A Simple Path Problem

Το πρόβλημα συντομότερου μονοπατιού είναι ουσιαστικά ένα πρόβλημα δικτύου. Ένα δίκτυο αναπαρίσταται με τη μορφή διαγράμματος, το οποίο αποτελείται από μία συλλογή κόμβων (nodes) που παριστάνονται με κύκλους και οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με γραμμές, οι οποίες ονομάζονται ακμές (arcs, branches). Βασική υπόθεση είναι ότι υπάρχει ροή μεταξύ των κόμβων διαμέσου των ακμών. Το διάγραμμα μοιάζει με ένα χάρτη στον οποίο οι κόμβοι ενδεχομένως παριστάνουν πόλεις και οι γραμμές δρόμους με τους οποίους συνδέονται. Κάθε κόμβος συμβολίζεται με έναν αριθμό ή γράμμα ή λέξη. Οι αριθμοί αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το συμβολισμό των ακμών. Κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους συνοδεύεται από ένα αριθμό, ο οποίος μπορεί να παριστάνει το μήκος της διαδρομής της ακμής αυτής, το χρόνο που απαιτείται για τη διαδρομή, το κόστος της ακμής, τον παράγοντα του κινδύνου ή κάποια άλλη ποσότητα, η οποία προκύπτει όταν πραγματοποιηθεί η διαδρομή από τον ένα κόμβο στον άλλο. Οι ακμές του παραπάνω δικτύου ονομάζονται μη προσανατολισμένες (undirected arcs), επειδή επιτρέπεται η ροή και προς τα δύο άκρα τους. Στις περιπτώσεις που απαγορεύεται η ροή προς κάποια κατεύθυνση, χρησιμοποιούνται προσανατολισμένες ακμές, στις οποίες επιτρέπεται η ροή μόνο προς μία κατεύθυνση και αυτό διακρίνεται φαίνεται με τη χρήση βελών προς κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Μία ακολουθία συνεχόμενων ακμών ορίζει ένα μονοπάτι (path). Ένα μονοπάτι μπορεί να αποτελεί ένα κύκλο (cycle), όταν μπορεί να κανείς επιστρέψει στον κόμβο από τον οποίο έγινε η εκκίνηση χωρίς να περάσει από την ίδια ακμή. Όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που μπορεί να συνδέσει κάθε δυάδα κόμβων ενός δικτύου τότε το δίκτυο ονομάζεται συνεκτικό (connected) δίκτυο. Όταν το δίκτυο δεν περιέχει κύκλους, τότε είναι ένα δέντρο (tree). Ένα δέντρο που συνδέει όλους τους κόμβους ενός δικτύου ονομάζεται ζευγνύον δέντρο (spanning tree).

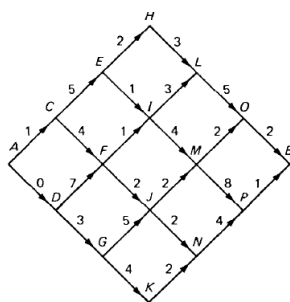
Ο στόχος είναι να εντοπιστεί η συντομότερη διαδρομή (shortest route - path), δηλαδή εκείνη με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών (ή κόστος, χρονική διάρκεια, κίνδυνο κλπ), από μία αφετηρία προς ένα κόμβο τερματισμού (προορισμό). Η τεχνική της συντομότερης διαδρομής στηρίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε βήμα μπορεί να βρεθεί ένας τουλάχιστον κόμβος, για τον οποίο η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι αυτόν δεν μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω. Στη συνέχεια, εξετάζεται αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κόμβος αυτός ως ενδιάμεσος, βελτιώνοντας προσωρινές διαδρομές που έχουν βρεθεί για τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου συμπεριλαμβανόμενου και του προορισμού.

Το πρόβλημα του συντομότερου μονοπατιού μπορεί να δοθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, ως τον εντοπισμό της συντομότερης διαδρομής από μία πηγή / προέλευση σε έναν προορισμό ή τον εντοπισμό της συντομότερης διαδρομής κάθε μίας από αρκετές προελεύσεις σε καθένα από αρκετούς προορισμούς. Αρχικά ασχολούμαστε με προβλήματα που αφορούν μία πηγή και πολλούς προορισμούς. Κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους συνοδεύεται από έναν αριθμό ο οποίος δίνει μια ποσότητα η οποία προκύπτει όταν πραγματοποιηθεί η διαδρομή από τον ένα κόμβο στον άλλο (π.χ. σ' ένα συγκοινωνιακό δίκτυο μπορεί να είναι κόστος, απόσταση, χρόνος ταξιδιού, κ.λ.π.). Ειδικότερα, παίρνουμε ως κόμβο προέλευσης, τον κόμβο 1. Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής διατυπώνεται ως εξής : Να προσδιοριστεί η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο κόμβων, της αφετηρίας και του προορισμού. Ως συντομότερη διαδρομή νοείται αυτή με το μικρότερο συνολικό κόστος, δηλαδή αθροίσματα των τιμών και των ακμών. Η συντομότερη διαδρομή δεν είναι απαραίτητο να περιέχει όλους τους κόμβους του γραφήματος.

3.2 Αριθμητική Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι ζείτε σε μια πόλη της οποίας όλοι οι δρόμοι (σχήμα 3.1) είναι μονόδρομοι και ότι οι αριθμοί που εμφανίζονται στο σχήμα αντιπροσωπεύουν την προσπάθεια (συνήθως τον χρόνο, αλλά μερικές φορές κόστος ή την απόσταση) που απαιτούνται για να διασχιστεί κάθε μπλοκ. Ζείτε στο σημείο Α και επιθυμείτε να φτάσετε στο Β με την ελάχιστη συνολική προσπάθεια.

Θα μπορούσαμε, βέβαια, να λύσει αυτό το πρόβλημα με την απαρίθμηση όλων των δυνατών μονοπατιών από το Α στο Β, προσθέτοντας τις προσπάθειες που χρειάζεται για την μετακίνηση από μπλοκ σε μπλοκ, και στη συνέχεια, επιλέγοντας το μικρότερο. Υπάρχουν 20 διαφορετικά μονοπατία από το Α έως Β και πέντε προσθήκες αποδίδουν το άθροισμα των 6 αριθμών κατά μήκος μίας συγκεκριμένης διαδρομής, έτσι με 100 προσθήκες θα απέδιδε τα 20 μονοπατία που πρέπει να



Εικόνα 3.1

συγκριθούν. Από μια σύγκριση των αποδόσεων ο μικρότερος από δύο αριθμούς, μία πρόσθετη σύγκριση (αυτού του αριθμού με ένα τρίτο) των αποδόσεων του μικρότερου από τους τρεις κλπ., 19 συγκρίσεις ολοκληρώνουν αυτή την απαριθμητική λύση του προβλήματος. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί πολύ πιο αποτελεσματικά από την μέθοδο της απαρίθμησης με την μέθοδο του Δυναμικού Προγραμματισμού.

Δεν ξέρουμε αν πρέπει να πάμε διαγώνια προς τα πάνω ή διαγώνια προς τα κάτω από το A, αλλά αν με κάποιον τρόπο ξέραμε δύο επιπλέον μεγέθη, τη συνολική προσπάθεια που απαιτείται για να πάει από το C στο B μέσω της καλύτερης διαδρομής, δηλαδή αυτής με την ελάχιστη προσπάθεια, και τη συνολική προσπάθεια που απαιτείται για να πάει από το D στο B μέσω της καλύτερης διαδρομής, θα μπορούσαμε να κάνουμε την καλύτερη επιλογή στο A. Έστω S_C η συνολική προσπάθεια που χρειάζεται για να πάμε από το C στο B ενώ S_D η συνολική προσπάθεια για να βρεθούμε από το D στο B μέσω της ελάχιστης διαδρομής αντίστοιχα. Θα πρέπει να προσθέσουμε στο S_C την προσπάθεια που απαιτείται για να μεταβούμε από το A στο C για να βρούμε τη συνολική προσπάθεια που χρειάζεται για την συντομότερη διαδρομή ξεκινώντας από το A διαγώνια προς τα πάνω. Αντίστοιχα αν προσθέσουμε στο S_D την προσπάθεια που χρειάζεται για να μεταβούμε από το A στο D θα βρούμε τη συνολική προσπάθεια που χρειάζεται για την συντομότερη διαδρομή ξεκινώντας από το A διαγώνια προς τα κάτω. Συγκρίνοντας τα δύο αυτά αθροίσματα βρίσκουμε τη συνολική ελάχιστη προσπάθεια αλλά και την καλύτερη πρώτη επιλογή. Φυσικά, όλα αυτά προϋποθέτουν τη γνώση των δύο αριθμών S_C και S_D , τα οποία, δυστυχώς, δεν είναι ακόμη γνωστά. Ωστόσο, μία από τις δύο βασικές ιδέες του Δυναμικού Προγραμματισμού έχει ήδη κάνει την εμφάνισή της. Αυτή είναι η παρατήρηση ότι μόνο οι προσπάθειες κατά μήκος των καλύτερων διαδρομών από το C και από το D στο B είναι σχετικές με τον παραπάνω υπολογισμό, και η προσπάθεια που απαιτείται κατά μήκος κάθε μίας εκ των εννέα διαδρομών που υπάρχουν από C και D στο B δεν χρειάζεται να υπολογιστεί. Αυτή η παρατήρηση συχνά αποκαλείται ως Αρχή του Βελτίστου και διατυπώνεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα ως εξής:

Ανεξάρτητα από την αρχική απόφαση που θα πάρουμε στο σημείο A η καλύτερη

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

διαδρομή από το A στο B θα πρέπει να είναι η βέλτιστη διαδρομή από το επόμενο σημείο μετά το A μέχρι το B

Αφού ορίσαμε παραπάνω τα S_C και S_D μπορούμε να αναφέρουμε την αρχή του βελτίστου ως αιτιολόγηση για τον ακόλουθο τύπο

$$S_A = \min \begin{bmatrix} 1 + S_C \\ 0 + S_D \end{bmatrix}$$

Όπου S είναι η ελάχιστη δυνατή προσπάθεια για να μεταβούμε από το A στο B και το σύμβολο $\min \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ σημαίνει “η μικρότερη από τις ποσότητες x και y”.

Η δεύτερη βασική ιδέα είναι ότι αν και οι δύο αριθμοί S_C και S_D είναι άγνωστοι αρχικά σε εμάς, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το S_C , αν γνωρίζαμε τους δύο αριθμούς S_E και S_F , (η ελάχιστη προσπάθεια από την E και F στο B, αντίστοιχα) με επίκληση την αρχής του βελτίστου μπορούμε να γράψουμε

$$S_C = \min \begin{bmatrix} 5 + S_E \\ 4 + S_F \end{bmatrix}$$

και ομοίως

$$S_D = \min \begin{bmatrix} 7 + S_F \\ 3 + S_G \end{bmatrix}$$

όπου S_E, S_F και S_G δεν είναι στην αρχή γνωστά, αλλά μπορούν να υπολογιστούν εάν S_H, S_I, S_J , και S_K είναι διαθέσιμα. Αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά τους, εξαρτώνται από τα S_L, S_M, S_N οι οποίοι εξαρτώνται από το S_O και το S_P . Ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο για τον υπολογισμό όλων των S_s , αν γνωρίζουμε το S_O και το S_P , τις ελάχιστες προσπάθειες δηλαδή από το O και P, αντίστοιχα, στο B. Αλλά αυτοί οι αριθμοί είναι γνωστό ότι είναι 2 και 1, αντίστοιχα, και από το O και το P είναι τόσο κοντά στο B που μόνο ένας δρόμος υπάρχει από κάθε σημείο. Δουλεύοντας από το τέλος προς την αρχή από το O και P στο A, μπορούμε να κάνουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς :

$$S_L = 5 + S_O = 7 \quad S_M = \min \begin{bmatrix} 2 + S_O \\ 8 + S_P \end{bmatrix} = 4 \quad S_N = 4 + S_P = 5$$

$$S_H = 3 + S_L = 10 \quad S_J = \min \left[\begin{array}{c} 3 + S_L \\ 4 + S_M \end{array} \right] = 8 \quad S_I = \min \left[\begin{array}{c} 2 + S_M \\ 2 + S_N \end{array} \right] = 6$$

$$S_K = 2 + S_N = 7$$

$$S_E = \min \left[\begin{array}{c} 2 + S_H \\ 4 + S_I \end{array} \right] = 9 \quad S_F = \min \left[\begin{array}{c} 1 + S_I \\ 2 + S_J \end{array} \right] = 8$$

$$S_G = \min \left[\begin{array}{c} 5 + S_J \\ 4 + S_K \end{array} \right] = 11$$

$$S_C = \min \left[\begin{array}{c} 5 + S_E \\ 4 + S_F \end{array} \right] = 12 \quad S_D = \min \left[\begin{array}{c} 7 + S_F \\ 3 + S_G \end{array} \right] = 14$$

$$S_A = \min \left[\begin{array}{c} 1 + S_C \\ 0 + S_D \end{array} \right] = 13$$

Η δεύτερη σημαντική ιδέα ήταν να υπολογίσουμε τα μήκη των διαδρομών που απαιτούν την ελάχιστη προσπάθεια, θεωρώντας σημεία εκκίνησης όλο και πιο μακριά από το B, καταλήγοντας τελικά πίσω στο A. Στη συνέχεια, οι αριθμοί που απαιτούνται βάση την πρώτη σημαντική ιδέα, την αρχή του βελτιστού, θα είναι γνωστοί όταν χρειαστούν, αφού θα έχουν υπολογιστεί ήδη. Προκειμένου να αποδειχθεί ότι ο καλύτερος διαδρομή έχει συνολική προσπάθεια 13 (δηλαδή, ότι $S_A = 13$), πραγματοποιήσαμε μια προσθήκη σε κάθε ένα από τα έξι σημεία H, L, O, K, N, P όπου ήταν δυνατό να παρθεί μόνο μια απόφαση και κάναμε δύο προσθήκες και σύγκριση σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα εννέα σημεία όπου ήταν δυνατό να παρθούν δύο αρχικές αποφάσεις.

Είναι εξίσου ενδιαφέρον εκτός από την εξεύρεση των καλύτερων διαδρομών, η γνώση της συνολικής προσπάθειας. Η διαδρομή θα ήταν πιο εύκολο να επιτευχθεί, αν γνωρίζαμε από την αρχή, σε κάθε σημείο του σχήματος, ποια από τις δύο πιθανές πρώτες αποφάσεις, θα απέδιδε το ελάχιστο στους υπολογισμούς μας.

Αν συμβολίσουμε με x κάποιο συγκεκριμένο σημείο εκκίνησης, και συμβολίζουμε με P_x τον κόμβο μετά τον κόμβο x της βέλτιστης διαδρομής από το x στο B, τότε ο πίνακας P θα μπορούσε να είχε υπολογισθεί όπως υπολογίσαμε τον πίνακα S προηγουμένως. Για παράδειγμα, $P_M = O$ επειδή το $2 + S_O$ ήταν μικρότερο από $8 + S_P$, $P_I = M$ επειδή το $4 + S_M$ ήταν μικρότερο από το $3 + S_L$ κλπ. Οπότε από τον πίνακα S προκύπτει ο πίνακας P χωρίς περεταιίρω υπολογισμούς. Για να χρησιμοποιήσουμε

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

αυτόν τον πίνακα για να βρεθεί η καλύτερη διαδρομή από το A στο B σημειώνουμε ότι $P_A = C$, έτσι ώστε να μετακινηθούμε από το A έως C. Τώρα, επειδή το $P_C = F$, συνεχίζουμε στο F, $P_F = J$ σημαίνει ότι κινούμαστε δίπλα στο J, το $P_J = M$ μας στέλνει στο M όπου το $P_M = O$ μας λέει το O είναι δίπλα και ότι το B είναι η τελευταίο. Ως εκ τούτου η καλύτερη διαδρομή είναι η $A - C - F - J - M - O - B$. Για να ελέγξουμε την ακρίβεια των υπολογισμών μας, προσθέτουμε την προσπάθεια που καταβάλαμε για να πάμε από το ένα σημείο στο άλλο $1 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13$, το οποίο θα πρέπει να ισούται με S_A , αν δεν έχουμε κάνει κάποιο αριθμητικό λάθος.

Το βέλτιστο επόμενο σημείο για κάθε αρχικό σημείο

$$\begin{array}{llll} P_O = B & P_P = B & & \\ P_L = O & P_M = O & P_N = P & \\ P_H = L & P_I = M & P_J = M & P_K = N \\ P_E = I & P_F = J & P_J = J \text{ or } K & \\ P_C = F & P_D = G & & \\ P_A = C & & & \end{array}$$

Τη συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού τη διέπουν μόνο αυτές οι δύο βασικές ιδέες. Φυσικά, υπάρχουν ειδικά τεχνάσματα για ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων, και διάφοροι τρόποι λύσης (τόσο αναλυτικοί όσο και υπολογιστικοί) που προσαρμόζονται οι δύο βασικές ιδέες. Αυτό που είναι κοινό για όλες τις διαδικασίες Δυναμικού Προγραμματισμού είναι ακριβώς αυτό που εφαρμόσαμε στο παράδειγμα μας: Πρώτον, η διαπίστωση ότι όλο το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί εάν οι τιμές των καλύτερων λύσεων ορισμένων υποπροβλημάτων μπορούν να καθοριστούν (αρχή του βελτίστου) και δεύτερον, η διαπίστωση ότι αν κάποιος ξεκινήσει από το τέλος ή κοντά στο τέλος του προβλήματος, τα υποπροβλήματα είναι τόσο απλά που οι λύσεις μπορούν να εξαχθούν πολύ εύκολα.

Για να επιβεβαιώσουμε τις διευκρινήσεις μας για τις διάφορες επεξεργασίες και επεκτάσεις των παραπάνω ιδεών, ας ορίσουμε μερικούς όρους και συμβολισμούς. Θα καλούμε τον τον κανόνα που δίνει τιμές στα διάφορα υποπροβλήματα **Βέλτιστη Συνάρτηση Τιμών**. Η συνάρτηση S είναι η συνάρτηση βέλτιστης τιμής (εδώ ελάχιστης προσπάθειας) για το πρόβλημα μας. Ο δείκτης της συνάρτησης S (π.χ. το A στην περίπτωση S_A) είναι το όρισμα της συνάρτησης S και κάθε όρισμα αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο υποπρόβλημα. Από τον ορισμό μας για το S , ο δείκτης A δείχνει ότι επιθυμούμε την καλύτερη διαδρομή από το A στο B ενώ ο δείκτης C θα σήμαινε

ότι η βέλτιστη διαδρομή από το C στο B είναι επιθυμητή. Ο κανόνας που συσχετίζει τις καλύτερες πρώτες αποφάσεις με κάθε υποπρόβλημα (όπως η συνάρτηση P στο πρόβλημα μας) καλείται **Συνάρτηση Βέλτιστης Πολιτικής**. Η αρχή του βελτίστου παράγει μία συνάρτηση ή ένα σετ συναρτήσεων που σχετίζονται με τις διάφορες τιμές του S. Αυτή η συνάρτηση καλείται **Σχέση Επανάληψης**. Τέλος, η τιμή της βέλτιστης συνάρτησης S για συγκεκριμένα ορίσματα θεωρείται προφανής από την εκφώνηση του προβλήματος και από τον ορισμό του S χωρίς να απαιτείται κανένας υπολογισμός. Αυτές οι προφανείς τιμές καλούνται οι **συνοριακές συνθήκες** του S.

Σε αυτή τη διάλεκτο, προκειμένου να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη χρήση του δυναμικού προγραμματισμού, θα πρέπει να επιλέξουμε τα ορίσματα της συνάρτησης βέλτιστης τιμής και να ορίσουμε αυτή τη συνάρτηση με τέτοιο τρόπο που να επιτρέπει τη χρήση της αρχής του βελτίστου για να γράψουμε μία επαναληπτική σχέση. Ξεκινώντας λοιπόν με τις συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιούμε στη συνέχεια την επαναληπτική σχέση για να υπολογίσουμε ταυτόχρονα τη βέλτιστη τιμή και τις συναρτήσεις πολιτικής. Όταν η βέλτιστη τιμή και απόφαση είναι γνωστές για την τιμή του ορίσματος που αντιπροσωπεύει στο σύνολο του το αρχικό πρόβλημα, η λύση είναι πλέον ολοκληρωμένη και η καλύτερη διαδρομή μπορεί να εντοπιστεί χρησιμοποιώντας μόνο την συνάρτηση πολιτικής.

Αναπτύσσουμε τώρα ένα συγκεκριμένο συμβολισμό για το απλό πρόβλημα διαδρομής που θα μας επιτρέψει να έχουμε μία πιο συστηματική αναπαράσταση της διαδικασίας από ότι με τον προηγούμενο φορμαλισμό μας. Στην πραγματικότητα δεν εισάγουμε καμία καινούργια διαδικασία. Ας τοποθετήσουμε τον χάρτη πόλης μας () σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τώρα το σημείο A έχει συντεταγμένες (0,0), το B (6,0), το I (3,1) κ.ο.κ. Στο σχήμα μας δεν παρουσιάζουμε τα βέλη μίας κατεύθυνσης πάνω στις γραμμές αλλά θα προϋποθέτουμε οι παραδεκτές διαδρομές θα είναι πάντα συνεχείς και με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης S είναι τώρα συνάρτηση του ζεύγους τιμών (x,y) υποδηλώνοντας ένα σημείο εκκίνησης, παρά μία συνάρτηση των ορισμάτων-σημείων A, C. Για αυτά τα ζεύγη τιμών (x,y) που αντιπροσωπεύουν διασταυρώσεις διαδρομών στον χάρτη μας, ορίζουμε την συνάρτηση βέλτιστης τιμής S(x,y) ως

S(x,y) : η τιμή της διαδρομής ελάχιστης προσπάθειας που συνδέει τον κάθε κόμβο (x,y) με τον τερματικό κόμβο (6,0)

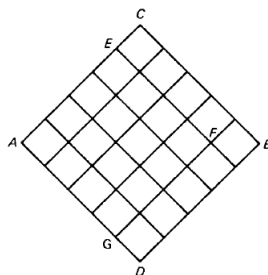
Η διαγώνια ευθεία γραμμή που συνδέει έναν κόμβο του δικτύου μας με έναν γειτονικό αντιπροσωπεύει ένα τετράγωνο της πόλης μας και θα καλείται τόξο του δικτύου μας. Το σύμβολο $a_u(x,y)$ αντιπροσωπεύει την προσπάθεια που σχετίζεται με το τόξο που συνδέει τους κόμβους (x,y)-(x+1,y+1). Ο δείκτης u δηλώνει ότι το τόξο αναπτύσσεται διαγώνια προς τα πάνω ξεκινώντας από τον κόμβο (x,y). Ομοίως

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

- Να ορίσουμε τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής, συμπεριλαμβανομένων τόσο των ορισμάτων της όσο και της ερμηνείας της τιμής της συνάρτησης μας
- Να γράψουμε την επαναληπτική σχέση
- Να εξάγουμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες

3.3 Αποδοτικότητα Υπολογιστικής Διαδικασίας

Πριν προχωρήσουμε, θα πρέπει να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας του δυναμικού προγραμματισμού προσεγγίζοντας την ελάχιστη προσπάθεια που χρειάζεται για τη λύση του προβλήματος της συντομότερης διαδρομής. Αρχικά θα πρέπει να βρούμε πόσες προσθήκες και συγκρίσεις απαιτούνται για να λυθεί ένα πρόβλημα σε ένα δίκτυο με την πρώτη υπόθεση, χωρίς να έχει προσδιοριστεί το κόστος, χωρίς βέλη και χωρίς να ξέρουμε ότι όλα τα τόξα κατευθύνονται προς τα δεξιά όπως πριν (σχήμα 3.3).



Εικόνα 3.3

Παρατηρούμε ότι στο πρόβλημα που εκπροσωπείται από το σχήμα 3.1 κάθε αποδεκτή διαδρομή περιέχει έξι τόξα, ενώ στο πρόβλημα που εκπροσωπείται από το σχήμα 3.3 κάθε διαδρομή έχει δέκα. Το πρώτο πρόβλημα σχήμα 3.1 θα το ονομάζουμε πρόβλημα έξι σταδίων, το πρόβλημα που προσδιορίζεται από το σχήμα 3.3 πρόβλημα δέκα σταδίων και τώρα θα αναλύσουμε το πρόβλημα N -σταδίων όπου N άρτιος ακέραιος. Υπάρχουν N κορυφές (αυτές που είναι στις γραμμές CB και DB , χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την κορυφή B , σχήμα 3.3) στις οποίες απαιτείται μόνο μία προσθήκη και όχι σύγκριση για τη λύση με Δυναμικό Προγραμματισμό. Υπάρχουν $(N/2)^2$ υπόλοιπες κορυφές (αυτές στο διαμάντι $AEFG$) για τις οποίες απαιτούνται δύο προσθήκες και μια σύγκριση. Άρα συνολικά είναι απαραίτητες $N^2/2 + N$ προσθήκες και $N^2/4$ συγκρίσεις για την λύση. Σημειώνουμε ότι για $N = 6$, το πρώτο πρόβλημα δηλαδή, αυτοί οι τύποι μας δίνουν ότι χρειάζονται 24 προσθήκες και εννέα συγκρίσεις, το οποίο συμπίπτει με την καταμέτρηση που έγινε νωρίτερα. Οπότε για να λύσουμε ένα πρόβλημα μετράνε τα σημεία (ή καταστάσεις) που πρέπει να εξεταστούν, μετράμε τις προσθήκες και τις συγκρίσεις που απαιτούνται

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

σε κάθε τέτοιο σημείο (λαμβάνοντας υπόψη πιθανούς διαφορετικούς υπολογισμούς στα διαφορετικά σημεία), και ολοκληρώνονται οι υπολογισμοί.

Για να δούμε για το πόσο πολύ πιο αποδοτική είναι η μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού από την απαριθμητική μέθοδο που αναφέραμε, θα εξετάσουμε την καταμέτρηση για ένα πρόβλημα N -σταδίων. Υπάρχουν $\binom{N}{N/2}$ αποδεκτές διαδρομές.

Το σύμβολο $\binom{X}{Y}$ διαβάζεται ως εξής, "Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων επιλογής

ενός συνόλου Y στοιχείων από ένα σύνολο X διακριτών στοιχεία" όπου $\binom{X}{Y} =$

$X!/[Y!(X - Y)!]$. Για να προκύψει αυτός ο τύπος για τον αριθμό των διαδρομών σημειώνουμε ότι κάθε διαδρομή μπορεί να εκπροσωπηθεί από μία ακολουθία N συμβόλων, τα μισά από τα οποία είναι U 's και τα άλλα μισά είναι D 's, όπου όταν έχουμε ένα U στην K -θέση, από την σειρά των θέσεων, εννοεί ότι το K βήμα είναι διαγώνια προς τα πάνω, ενώ το D διαγώνια προς τα κάτω. Τότε $\binom{N}{N/2}$ είναι

ο αριθμός των δυνατών διαφορετικών τρόπων επιλογής των $N/2$ βημάτων που είναι U , με υπόλοιπο D . Σημειώνουμε ότι ο τύπος δίνει το σωστό αριθμός 20, για το παράδειγμα των έξι σταδίων. Κάθε διαδρομή απαιτεί $N-1$ προσθήκες, και όλα εκτός από το πρώτο που αξιολογήθηκε απαιτούν μια σύγκριση για να βρεθεί η καλύτερη διαδρομή. Αυτές ανέρχονται σε $(N - 1) \binom{N}{N/2}$ προσθήκες και $\binom{N}{N/2} - 1$ συγκρίσεις. Για

$N = 6$ έχουμε ήδη δει ότι με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού απαιτείται περίπου το ένα τέταρτο των υπολογισμών που απαιτούνται με την μέθοδο της απαρίθμησης *bruteforce*. Ωστόσο, για $N = 20$ η λύση με δυναμικό προγραμματισμό περιλαμβάνει 220 προσθήκες και 100 συγκρίσεις, ενώ η απαριθμητική απαιτεί περισσότερα από τρία εκατομμύρια προσθήκες και 184.000 συγκρίσεις. Σε γενικές γραμμές όσο μεγαλύτερο είναι το πρόβλημα, το πιο εντυπωσιακό είναι το πλεονέκτημα του υπολογισμού της λύσης με δυναμικό προγραμματισμό.

3.4 Προς τα εμπρός Δυναμικός Προγραμματισμός

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε μία παραλλαγή της παραπάνω διαδικασίας δυναμικού προγραμματισμού, η οποία είναι εξίσου αποτελεσματική αλλά εφαρμόζεται σε ελαφρώς διαφορετικά αλλά συναφή προβλήματα. Κατά μία έννοια θα εργαστούμε αντίστροφα σε σχέση με τις αρχικές σκέψης. Πρώτα από όλα σημειώνουμε ότι θα μπορούσε εύκολα να προσδιοριστεί η προσπάθεια για την καλύτερη διαδρομή από το A στο B στο σχήμα 3.1, αν γνωρίζαμε την προσπάθεια και των δύο το καλύτερων διαδρομών από το A στο O και την καλύτερη διαδρομή από το A στο P . Επίσης, θα ξέραμε αυτούς τους δύο αριθμούς αν γνωρίζαμε τις προσπάθειες στις καλύτερες

διαδρομές για κάθε ένα από τα L, M, N και από το A, κλπ. Αυτό μας οδηγεί στο να καθορίσουμε μια νέα συνάρτηση βέλτιστης τιμής

$S(x, y)$ = η τιμή της διαδρομής με την ελάχιστη προσπάθεια που συνδέει την αρχική κορυφή (0, 0) με την κορυφή (x, y)

Η κατάλληλη αναδρομική σχέση για νέα συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι

$$S(x, y) = \min \left[\begin{array}{l} a_u(x-1, y-1) + S(x-1, y-1) \\ a_d(x-1, y+1) + S(x-1, y+1) \end{array} \right] \quad (3.3)$$

Στο παραπάνω τύπο καταλήγουμε χρησιμοποιώντας την αντίστροφη εκδοχή της αρχής της βελτιστοποίησης, η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η καλύτερη διαδρομή από το A έως κάποια συγκεκριμένη κορυφή B έχει την ιδιότητα ότι ανεξάρτητα από την κορυφή πριν από την B, έστω τη C, η διαδρομή πρέπει να είναι η καλύτερη διαδρομή από το A στο C.

Η συνοριακή συνθήκη είναι

$$S(0, 0) = 0 \quad (3.4)$$

δεδομένου ότι το κόστος της καλύτερης διαδρομής από το A στο ίδιο είναι μηδέν. Οι δύο διαδικασίες διαφέρουν ως προς τις βοηθητικές πληροφορίες που παράγουν. Η προς τα εμπρός τη διαδικασία χρησιμοποιείται σε αποδόσεις της βέλτιστης διαδρομής από το A σε κάθε κορυφή, αλλά λέει τίποτα σχετικά με τη βέλτιστη διαδρομή από τα περισσότερα κορυφών στο B, πράγμα που το κάνει η προς τα πίσω διαδικασία.

3.5 Ένα πιο σύνθετο πρόβλημα

Περιπλέκοντας λίγο την κατάσταση θα δείξουμε ότι, για ορισμένα προβλήματα το επιχείρημα της συνάρτησης βέλτιστης τιμής μπορεί να χρειαστεί να περιέχουν περισσότερες πληροφορίες εκτός από τις πληροφορίες στην τρέχουσα κορυφή. Ένα μεγάλο μέρος του δυναμικού προγραμματισμού είναι η κατάλληλη επιλογή των υποπροβλημάτων που πρέπει να επιλυθούν προκειμένου τελικά να λυθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι μετά την άφιξη σε οποιαδήποτε κορυφή από τη διαδρομή από το A στο B στο σχήμα 3.1, στρίβουμε αντί να συνεχίσουν σε μια ευθεία γραμμή, οπότε θα πρέπει να αξιολογηθεί μία ποινή, προσθήκη κόστους 3. Εάν συνεχίζουμε ευθεία δεν θα υπήρχε ποινή. Η διαδρομή με την οποία λύθηκε το αρχικό πρόβλημα πριν εισαχθεί η "χρέωση" από την "στροφή" έμοιαζε ως εκ τούτου ότι είχε τρεις στροφές. Έτσι, το κόστος της διαδρομής είναι 22 (13 συν 3 για κάθε μία από τις τρεις στροφές) και πλέον δεν μπορεί να είναι η βέλτιστη αφού υπάρχει η αρχική διαδρομή που κοστίζει λιγότερο από 19 και που περιέχει μία στροφή. Υποθέτουμε, όπως κάναμε στην αρχή του

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

κεφαλαίου, ότι βρισκόμαστε στην αρχική κορυφή A και ότι γνωρίζουμε το κόστος (συμπεριλαμβανομένων των "ποινών στροφής") της καλύτερης διαδρομής από το C στο B, αλλά και από D προς B. Είναι σαφές, ότι το κόστος της μετάβασης από το C στο B είναι το βέλτιστο, αν μεταβούμε από C στο B, πηγαίνοντας διαγώνια προς τα πάνω στο C (δηλαδή, συνεχίζοντας ευθεία στο C αντί να στρίψει). Το ερώτημα είναι όμως τι γίνεται αν η βέλτιστη απόφαση στο C, στην περίπτωση που το ελάχιστο κόστος συμπεριλαμβανομένων των "ποινών στροφής" της μετάβασης από το C στο B, είναι να κατευθυνθεί διαγώνια κάτω στο C? Τότε, αν πάμε πρώτα από το A στο C και στη συνέχεια ακολουθηθεί αυτή η διαδρομή το συνολικό κόστος θα είναι το κόστος του τόξου AC συν κόστος 3 για την στροφή συν το βέλτιστο κόστος από το C στο B. Στην συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει να εξετάσουμε άλλη μία πιθανότητα. Ίσως, αν πάμε διαγώνια και προς τα πάνω στο C, θα πρέπει να συνεχίσουμε διαγώνια προς τα πάνω από το C και να αποφευχθεί η στροφή που δίνει επιπρόσθετο κόστος 3. Εάν η διαδρομή με το ελάχιστο κόστος από το C στο B που ξεκινά διαγώνια προς τα πάνω από το C κοστίζει μόνο 1 ή 2 ποιο πολύ από τη βέλτιστη διαδρομή από το C στο B (η οποία υποθέτουμε ότι πήγε διαγώνια κάτω στο C) χρησιμοποιώντας αυτή τη διαδρομή θα ήταν προτιμότερο να στρίβαμε στο C και να πηγαίναμε διαγώνια προς τα κάτω, ακόμα και αν και η βέλτιστη διαδρομή από το C στο B πηγαίνει διαγώνια κάτω στο C. Έτσι, αυτό που πρέπει να ξέρουμε στο C είναι το ελάχιστο κόστος από το C στο B, συμπεριλαμβανομένων των "ποινών στροφής" που πραγματοποιήθηκαν μετά το C, αν αφήσουμε το C στην διαγώνια προς τα πάνω κατεύθυνση. Επίσης το ελάχιστο κόστος θα πρέπει να βρεθεί αν το C ακολουθήσει τη διαγώνια προς τα κάτω κατεύθυνση. Δηλαδή, χρειαζόμαστε δύο αριθμούς που συνδέονται με την κορυφή C.

Ας εφαρμόσουμε τώρα αυτές τις ιδέες για την επίλυση του προβλήματος. Ορίζουμε τη βέλτιστη συνάρτηση τιμής S, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών (δύο περιγράφουν την κορυφή και μία, η οποία μπορεί να πάρει μόνο δύο πιθανές τιμές, μας λέει αν θέλουμε να εγκαταλείψουμε την κορυφή με τη πηγαίνοντας διαγώνια προς τα πάνω ή διαγώνια προς τα κάτω),

$S(x, y, z)$ = το ελάχιστο δυνατό άθροισμα των αριθμών του τόξου συν την "ποινή στροφής" αν ξεκινήσουμε από την κορυφή (x, y) , πηγαίνοντας στο B, και με αρχική κίνηση προς την κατεύθυνση υποδεικνύεται από z, όπου $z=0$ υποδηλώνει διαγώνια προς τα πάνω και $z=1$ διαγώνια προς τα κάτω.

Έστω ότι είμαστε στο (x, y) και να κινούμαστε προς τα πάνω ($z = 0$), φτάνουμε στο $(x + 1, y + 1)$ κινούμενοι με ανοδική κατεύθυνση. Αν συνεχίσουμε να κινούμαστε προς τα πάνω, θα επιβαρυνθούμε με ένα επιπλέον κόστος $S(x + 1, y + 1, 0)$, αλλά αν στρίψουμε και να προχωρήσει προς τα κάτω το κόστος θα είναι 3 (η ποινή για τη στροφή) συν $S(x + 1, y + 1, 1)$, το υπόλοιπο κόστος μιας και κινηθήκαμε. Το βέλτιστο κόστος από το (x, y) , ξεκινώντας προς τα πάνω είναι το ελάχιστο μεταξύ αυτών των δύο εναλλακτικών λύσεων. Ως εκ τούτου, από την αρχή του βελτίστου, παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$S(x, y, 0) = \min \left[\begin{array}{l} a_u(x, y) + S(x+1, y+1, 0) \\ a_u(1x, y) + 3 + S(x+1, y+1, 1) \end{array} \right] \quad (3.5)$$

ή ισοδύναμα,

$$S(x, y, 0) = a_u(x, y) + \min \left[\begin{array}{l} S(x+1, y+1, 0) \\ 3 + S(x+1, y+1, 1) \end{array} \right] \quad (3.6)$$

Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω σκεπτικό με την παραδοχή ότι επιλέγουμε να ξεκινήσουν από (x, y) προς τα κάτω, παίρνουμε

$$S(x, y, 1) = a_d(x, y) + \min \left[\begin{array}{l} 3 + S(x+1, y-1, 0) \\ S(x+1, y-1, 1) \end{array} \right] \quad (3.7)$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί δεν συγκρίνουμε το $S(x, y, 0)$ και το $S(x, y, 1)$ αλλά τα υπολογίζουμε, τα καταγράφουμε, και στη συνέχεια τα χρησιμοποιούμε και τα δύο. Παρατηρούμε ότι, αν μία από τις ανωτέρω τιμές S είναι μεγαλύτερη της άλλης πάνω από 3, τότε αυτή που είναι μεγαλύτερη δεν μπορεί ποτέ να είναι μέρος μιας συνολικής ελάχιστης διαδρομής και μπορεί να μειωθεί.

Οι τύποι 3.6 και 3.7 αποτελούν μαζί την αναδρομική σχέση για αυτό το πρόβλημα. Τώρα μπορούμε να γράψουμε τους τύπους 3.6 και 3.7 μαζί ως ένα τύπο.

$$S(x, y, z) = (1-z)a_u(x, y) + za_d(x, y) + \min \left[\begin{array}{l} S(x+1, y+1-2z, z) \\ 3 + S(x+1, y+1-2z, 1-z) \end{array} \right] \quad (3.8)$$

Σε αυτό το πρόβλημα η οριακή συνθήκη θα είναι

$$\begin{array}{ll} S(5, 1, 0) = \infty & S(5, 1, 1) = a_d(5, 1) = 2 \\ S(5, -1, 0) = a_u(5, -1) = 1 & S(5, -1, 1) = \infty \end{array} \quad (3.9)$$

αλλά αν γράψουμε

$$S(6, 0, 0) = 0 \quad S(6, 0, 1) = 0 \quad (3.10)$$

Κάνοντας χρήση της σύμβαση ότι δεν υπάρχουν τόξα με κόστος ∞ , η 3.6 και η 3.7 συνεπάγονται τα αποτελέσματα 3.9. Οι προϋποθέσεις 3.10 υποδηλώνουν ότι όταν θα είμαστε στον B, στο τέλος δηλαδή, δεν θα υπάρχει υπόλοιπο κόστος χωρίς να έχει σημασία τι θα κάνουμε εκεί.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.6 και 3.7, 3.10, καθώς και τον ορισμό του $S(x, y, z)$ θα υπολογίσουμε την αριθμητική λύση του προβλήματος που φαίνεται στο Σχήμα 3.1 με την πρόσθετη διευκρίνιση ότι κάθε αλλαγή κατεύθυνσης κόστος 3. $P(x, y, z) =$

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

U σημαίνει ότι προς τα πάνω είναι η βέλτιστη δεύτερη απόφαση, αν ξεκινήσουμε από το (x, y) και να κινηθούμε αρχικά με κατεύθυνση που υποδεικνύεται από το z , αντίστοιχα ορίζεται και το $P(x, y, z) = D$. Το S θα είναι ∞ στα σημεία που δεν είναι κορυφές του δικτύου του προβλήματός μας.

$$S(5, 1, 0) = \infty + \min \begin{bmatrix} \infty \\ 3 + \infty \end{bmatrix} = \infty$$

$$S(5, 1, 1) = 2 + \min \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$S(5, -1, 0) = 1 + \min \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

$$S(5, -1, 1) = \infty + \min \begin{bmatrix} 3 + \infty \\ \infty \end{bmatrix} = \infty$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε,

$$S(4, 2, 0) = \infty + \min \begin{bmatrix} \infty \\ 3 + \infty \end{bmatrix} = \infty$$

$$S(4, 2, 1) = 5 + \min \begin{bmatrix} 3 + S(5, 1, 0) \\ S(5, 1, 1) \end{bmatrix} = 7 \quad P(4, 2, 1) = D$$

$$S(4, 0, 0) = 2 + \min \begin{bmatrix} S(5, 1, 0) \\ 3 + S(5, 1, 1) \end{bmatrix} = 7 \quad P(4, 0, 0) = D$$

$$S(4, 0, 1) = 8 + \min \begin{bmatrix} 3 + S(5, -1, 0) \\ S(5, -1, 1) \end{bmatrix} = 12 \quad P(4, 0, 1) = U$$

$$S(4, -2, 0) = 4 + \min \begin{bmatrix} S(5, -1, 0) \\ 3 + S(5, -1, 1) \end{bmatrix} = 5 \quad P(4, -2, 0) = U$$

$$S(4, -2, 1) = \infty$$

Προχωρώντας στις επόμενες καταστάσεις που είναι τρία βήματα από το τέλος (δηλαδή, $x = 3$) έχουμε

$$S(3, 3, 0) = \infty$$

$$S(3, 3, 1) = 3 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + \infty \\ 7 \end{array} \right] = 10 \quad P(3, 3, 1) = D$$

$$S(3, 1, 0) = 3 + \min \left[\begin{array}{c} \infty \\ 3 + 7 \end{array} \right] = 13 \quad P(3, 1, 0) = D$$

$$S(3, 1, 1) = 4 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 7 \\ 12 \end{array} \right] = 14 \quad P(3, 1, 1) = U$$

$$S(3, -1, 0) = 2 + \min \left[\begin{array}{c} 7 \\ 3 + 12 \end{array} \right] = 9 \quad P(3, -1, 0) = U$$

$$S(3, -1, 1) = 2 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 5 \\ \infty \end{array} \right] = 10 \quad P(3, -1, 1) = U$$

$$S(3, -3, 0) = 2 + \min \left[\begin{array}{c} 5 \\ \infty \end{array} \right] = 7 \quad P(3, -3, 0) = U$$

$$S(3, -3, 1) = \infty$$

Χρησιμοποιούμε τα οχτώ αποτελέσματα που μόλις βρήκαμε για να υπολογίσουμε τις λύσεις του τέταρτου βήματος, δηλαδή για $x = 2$

$$S(2, 2, 0) = 2 + \min \left[\begin{array}{c} \infty \\ 3 + 10 \end{array} \right] = 15 \quad P(2, 2, 0) = D$$

$$S(2, 2, 1) = 1 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 13 \\ 14 \end{array} \right] = 15 \quad P(2, 2, 1) = D$$

$$S(2, 0, 0) = 1 + \min \left[\begin{array}{c} 13 \\ 3 + 14 \end{array} \right] = 14 \quad P(2, 0, 0) = U$$

$$S(2, 0, 1) = 2 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 9 \\ 10 \end{array} \right] = 12 \quad P(2, 0, 1) = D$$

$$S(2, -2, 0) = 5 + \min \left[\begin{array}{c} 9 \\ 3 + 10 \end{array} \right] = 14 \quad P(2, -2, 0) = U$$

$$S(2, -2, 1) = 4 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 7 \\ \infty \end{array} \right] = 14 \quad P(2, -2, 1) = U$$

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

Αφού έχουμε τις λύσεις του τέταρτου βήματος, προχωράμε στο πέμπτο, $x = 1$

$$S(1, 1, 0) = 5 + \min \left[\begin{array}{c} 15 \\ 3 + 15 \end{array} \right] = 20 \quad P(1, 1, 0) = U$$

$$S(1, 1, 1) = 4 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 14 \\ 12 \end{array} \right] = 16 \quad P(1, 1, 1) = D$$

$$S(1, -1, 0) = 7 + \min \left[\begin{array}{c} 14 \\ 3 + 12 \end{array} \right] = 21 \quad P(1, -1, 0) = U$$

$$S(1, -1, 1) = 3 + \min \left[\begin{array}{c} 3 + 14 \\ 14 \end{array} \right] = 17 \quad P(1, -1, 1) = D$$

Και τέλος στο τελευταίο βήμα για $x = 0$ έχουμε,

$$S(0, 0, 0) = 1 + \min \left[\begin{array}{c} 20 \\ 3 + 16 \end{array} \right] = 20 \quad P(0, 0, 0) = D$$

$$S(0, 0, 1) = 0 + \min [3 + 21 // 17] = 17 \quad P = (0, 0, 1) = D$$

Από τους δύο τελευταίους αριθμούς που βρήκαμε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το κόστος της συντομότερης διαδρομής ξεκινώντας από το Α με ανοδική κατεύθυνση είναι 20 και ξεκινώντας προς τα κάτω είναι 17. Ως εκ τούτου, επιλέγουμε να ξεκινήσει με καθοδική κατεύθυνση. Στη συνέχεια έχουμε ότι $P(0, 0, 1) = D$, οπότε συνεχίζουμε στην κατεύθυνση προς τα κάτω προς την κορυφή (1, - 1). Δεδομένου ότι η $P(1, -1, 1)$ είναι D, συνεχίζουμε προς τα κάτω και φτάνουμε στο (2, - 2). $P(2, -2, 1)$ είναι U, άρα στρίβουμε και κινούνται διαγώνια προς τα πάνω στο (3, - 3). $P(3, -3, 0)$ ισούται με U, αυτό σημαίνει ότι θα κινηθούμε προς τα πάνω στη κορυφή (4, - 2) και $P(4, -2, 0) = U$ σημαίνει ότι πάμε προς τα πάνω στο (5, - 1). Επομένως η βέλτιστη διαδρομή είναι (0, 0), (1, - 1), (2, - 2), (3, - 3), (4, - 2), (5, - 1), (6, 0) και το κόστος της είναι 14 για τα για τη μετάβαση από το ένα σημείο στο άλλο συν 3 ως ποινή για την στροφή, άρα συνολικά 17, το οποίο είναι σύμφωνο με αξία της S (0, 0, 1) που υπολογίσαμε.

Συμπεράσματα για το σύνθετο πρόβλημα

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι εφόσον ικανοποιηθούν οι θεμελιώδεις έννοιες του δυναμικού προγραμματισμού (η χρήση μίας συνάρτησης βέλτιστης τιμής, ο χαρακτηρισμός της από μία επαναληπτική σχέση και μία αναδρομική λύση που θα οδηγεί επιτυχώς σε λύσεις προβλημάτων μεγάλης διάρκειας), ο φορμαλισμός του δυναμικού προγραμματισμού περιλαμβάνει κυρίως την ορθή επιλογή ορισμάτων για την συνάρτηση βέλτιστη τιμή που θα είναι επαρκή για την βέλτιστη λύση του προβλήματος

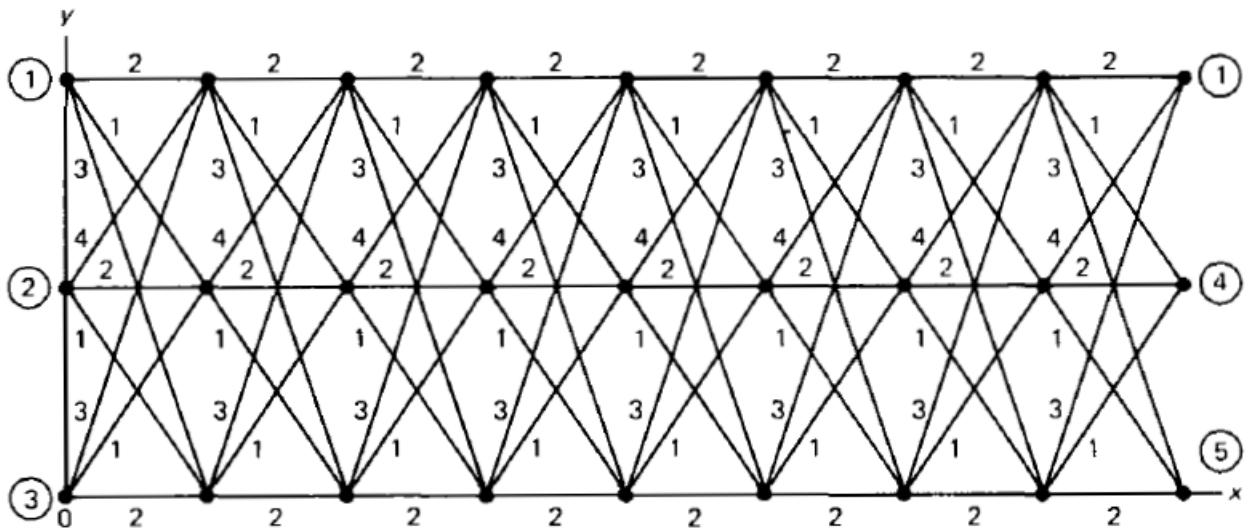
μας αλλά ταυτόχρονα δεν θα απαιτούν περιττούς μακροσκελείς υπολογισμούς. Η επιλογή του **ελάχιστου** αλλά **ικανού** αριθμού ορισμάτων θα μας οδηγήσει σε μία άκρως λειτουργική συνάρτηση βέλτιστης τιμής.

Έχοντας αναφερθεί αρκετά στα ορίσματα της συνάρτησης βέλτιστης τιμής και στο πως αυτά περιγράφουν την δεδομένη κατάσταση του προβλήματος μας. Γενικότερα μία μεταβλητή εκφράζει τον αριθμό των αποφάσεων που έχουν ληφθεί μέχρι τη δεδομένη στιγμή, και είναι πάντα μεγαλύτερη κατά ένα στο δεξί μέλος της αναδρομικής σχέσης σε σχέση με το αριστερό μέλος, ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη απόφαση. (π.χ. η μεταβλητή x στις 3.1, 3.6, 3.7. Για διαφορετικού τύπου ορίσματα της συνάρτησης βέλτιστης τιμής, αυτή η μεταβλητή θα ήταν δυνατό να μειώνεται κατά μία μονάδα μετά από κάθε απόφαση.) Αυτή η μονοτονική μεταβλητή, που έχει δηλαδή σταθερή συμπεριφορά καθ' όλη τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας, καλείται **μεταβλητή φάσης**. Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές που απαιτούνται για να περιγραφεί η τρέχουσα κατάσταση, δεδομένης της μεταβλητής φάσης, καλούνται **μεταβλητές κατάστασης**. Οι τιμές των μεταβλητών φάσης και κατάστασης απαρτίζουν την πλήρη περιγραφή της κατάστασης κάνοντας εφικτή τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

3.6 Η διαδικασία Doubling-Up

Θα εξετάσουμε τώρα μία ειδική περίπτωση του απλού προβλήματος, αναπτύσσοντας μία ιδέα σχετικά με το τι εξοικονομείται με τον σημαντικό υπολογισμό, όταν απαιτείται. Υποθέτουμε ότι όλα τα τόξα πηγαίνουν διαγώνια προς τα δεξιά, και ότι ενώ ως συνήθως το κόστος του τόξου εξαρτάται από την αρχική και τελική κορυφή, αυτό δεν εξαρτάται από το στάδιο (δηλαδή, τη x συνιστώσα). Ένα τέτοιο επαναλαμβανόμενο μοτίβο του κόστους καλείται στάδιο-αμετάβλητα και, και αργότερα, όταν το στάδιο είναι συχνού χρόνου, αυτό σημαίνει ότι το κόστος δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, αλλά μόνο με τη φύση της απόφασης. Ένα παράδειγμα οκτώ-σταδίων, ενός τέτοιου δικτύου, με κόστος τερματικού (όπως φαίνεται στους κύκλους), και κόστος τόξο όπως στο Σχήμα 3.4 θα λυθεί στη συνέχεια.

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)



Εικόνα 3.4

Στόχος μας είναι να παραχθεί μια διαδικασία με σκοπό τον διπλασιασμό σε κάθε επανάληψη της διάρκειας της λύσης του προβλήματος. Για την επίτευξη αυτού του στόχου θα καθορίσουμε μία συνάρτηση βέλτιστης τιμής, η οποία θα εξαρτάται από τρεις μεταβλητές ως εξής:

$S(y_1, y_2, k)$ = το κόστος (αγνοώντας το κόστος τερματικό) της διαδρομής με το ελάχιστο κόστους μήκους k σταδίων όπου $y = y_1$ και $y = y_2$

Η πραγματική τιμή του x στην αρχή ή στο τέλος δεν έχει σημασία, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μόνο ο αριθμός των σταδίων. Έχουμε την αναδρομική σχέση για αυτή τη συνάρτηση επιδιώκοντας τη βέλτιστη τιμή του y στο κεντρικό σημείο της διαδρομής διάρκειας $2k$ σταδίων που συνδέει το y_1 και το y_2 . Δίνοντας κάποια συγκεκριμένη τιμή του y στο τέλος των k σταδίων του προβλήματος των $2k$ -σταδίων, μπορούμε σαφώς να προχωρήσουμε από το y_1 στην τιμή του y στα k στάδια, με ελάχιστο κόστος, και από αυτή τη τιμή y στο y_2 στο επόμενα k στάδια, επίσης με ελάχιστο κόστος. Στη συνέχεια, αν ελαχιστοποιήσουμε αυτό το άθροισμα σε όλες τις πιθανές τιμές του y στο τέλος των k σταδίων, έχουμε το κόστος της καλύτερης διαδρομής μήκους $2k$ σταδίων. Ο τύπος είναι ως εκ τούτου

$$S(y_1, y_2, 2k) = \min_{y=0,1,2} [S(y_1, y, k) + S(y, y_2, k)] \quad (3.11)$$

με προφανή οριακή συνθήκη

$$S(y_1, y_2, 1) = c_{y_1, y_2} \quad (3.12)$$

όπου c_{y_1, y_2} είναι το κόστος του μονού τόξου που συνδέει το y_1 με το y_2 σε ένα βήμα, για το παράδειγμα του σχήματος 3.4, δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα

$$\begin{array}{lll} c_0 0 = 2 & c_0 1 = 1 & c_0 2 = 3 \\ c_1 0 = 1 & c_1 1 = 2 & c_1 3 = 4 \\ c_2 0 = 3 & c_2 1 = 1 & c_2 2 = 2 \end{array}$$

Υπολογίσαμε το $S(y_1, y_2, 8)$ για όλους τους συνδυασμούς των y_1 και y_2 , συνολικά εννέα. Η τιμή της απάντησης, έστω z , συμπεριλαμβανομένου του τερματικού κόστους, το οποίο θα συμβολίζουμε με $t_0(y)$ για $x = 0$ και $t_8(y)$ για $x = 8$, δίνεται από τον τύπο

$$z = \min_{\substack{y_1 = 0, 1, 2 \\ y_2 = 0, 1, 2}} [t_0(y_1) + S(y_1, y_2, 8) + t_8(y_2)] \quad (3.13)$$

Θέτουμε το $P(y_1, y_2, 2k)$ να χαρακτηρίζει την βέλτιστη απόφαση, δηλαδή, το ελάχιστο κεντρικό σημείο στην καλύτερη διαδρομή με διάρκεια $2k$ στάδια που συνδέει το y_1 και y_2 . Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.11-3.13 για να λύσουμε το πρόβλημα και από την 3.12, έχουμε

$$\begin{array}{lll} S(0, 0, 1) = 2 & S(0, 1, 1) = 1 & S(0, 2, 1) = 3 \\ S(1, 0, 1) = 1 & S(1, 1, 1) = 2 & S(1, 2, 1) = 4 \\ S(2, 0, 1) = 3 & S(2, 1, 1) = 1 & S(2, 2, 1) = 2 \end{array}$$

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε την 3.11 με $k = 1$ για να βρούμε τις βέλτιστες λύσεις στο δεύτερο στάδιο για όλα τα ζεύγη των τελικών σημείων,

$$\begin{array}{ll} S(0, 0, 2) = \min[S(0, 0, 1) + S(0, 1, 1), S(0, 1, 1) + S(1, 0, 1), \\ S(0, 2, 1) + S(2, 0, 1)] = \min[4, 2, 6] = 2 & P(0, 0, 2) = 1 \\ S(0, 1, 2) = \min[S(0, 0, 1) + S(0, 1, 1), S(0, 1, 1) + S(1, 1, 1), \\ S(0, 2, 1) + S(2, 1, 1)] = \min[3, 3, 4] = 3 & P(0, 1, 2) = 0 \text{ or } 1 \\ S(0, 2, 2) = \min[2 + 3, 1 + 4, 3 + 2] = 5 & P(0, 2, 2) = 0, 1 \text{ or } 2 \\ S(1, 0, 2) = \min[3, 3, 7] = 3 & P(1, 0, 2) = 0 \text{ or } 1 \\ S(1, 1, 2) = \min[2, 4, 5] = 2 & P(1, 1, 2) = 0 \\ S(1, 2, 2) = \min[4, 6, 6] = 4 & P(1, 2, 2) = 0 \\ S(2, 0, 2) = \min[5, 2, 5] = 2 & P(2, 0, 2) = 1 \\ S(2, 1, 2) = \min[4, 3, 3] = 3 & P(2, 1, 2) = 1 \text{ or } 2 \\ S(2, 2, 2) = \min[6, 5, 4] = 4 & P(2, 2, 2) = 2 \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας την 3.11 με $k=2$ θα λύσουμε τα προβλήματα στο τέταρτο

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

στάδιο.

$$\begin{aligned}
 S(0, 0, 4) &= \min[S(0, 0, 2) + S(0, 0, 2), S(0, 1, 2) + S(1, 0, 2), \\
 &\quad S(0, 2, 2) + S(2, 0, 2)] = \min[2 + 2, 3 + 3, 5 + 2] = 4 & P(0, 0, 4) &= 0 \\
 S(0, 1, 4) &= \min[2 + 3, 3 + 2, 5 + 3] = 4 & P(0, 1, 4) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(0, 2, 4) &= \min[7, 7, 9] = 7 & P(0, 2, 4) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(1, 0, 4) &= \min[5, 5, 6] = 5 & P(1, 0, 4) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(1, 1, 4) &= \min[6, 4, 7] = 4 & P(1, 1, 4) &= 1 \\
 S(1, 2, 4) &= \min[8, 6, 8] = 6 & P(1, 2, 4) &= 1 \\
 S(2, 0, 4) &= \min[4, 6, 6] = 4 & P(2, 0, 4) &= 0 \\
 S(2, 1, 4) &= \min[5, 5, 7] = 5 & P(2, 1, 4) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(2, 2, 4) &= \min[7, 7, 8] = 7 & P(2, 2, 4) &= 0 \text{ or } 1
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε ακόμα μία φορά τον τύπο 3.11 για τα προβλήματα του όγδοου σταδίου

$$\begin{aligned}
 S(0, 0, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(0, 0, 4), S(0, 1, 4) + S(1, 0, 4), \\
 &\quad S(0, 2, 4) + S(2, 0, 4)] = \min[8, 10, 11] = 8 & P(0, 0, 8) &= 0 \\
 S(0, 1, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(0, 1, 4), S(0, 1, 8)] = 9 & P(0, 1, 8) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(0, 2, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(0, 2, 4), S(0, 1, 8)] = 11 & P(0, 2, 8) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(1, 0, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(1, 0, 4), S(1, 0, 8)] = 9 & P(1, 0, 8) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(1, 1, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(1, 1, 4), S(1, 0, 8)] = 8 & P(1, 1, 8) &= 1 \\
 S(1, 2, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(1, 2, 4), S(1, 1, 8)] = 10 & P(1, 2, 8) &= 1 \\
 S(2, 0, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(2, 0, 4), S(1, 2, 8)] = 8 & P(2, 0, 8) &= 0 \\
 S(2, 1, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(2, 1, 4), S(2, 0, 8)] = 9 & P(2, 1, 8) &= 0 \text{ or } 1 \\
 S(2, 2, 8) &= \min[S(0, 0, 4) + S(2, 2, 4), S(2, 1, 8)] = 11 & P(2, 2, 8) &= 0 \text{ or } 1
 \end{aligned}$$

Τώρα από τον τύπο 3.13 θα υπολογίσουμε την τιμή της απάντησης, z , και τη βέλτιστη επιλογή του αρχικού και του τελικού σημείου.

$$\begin{aligned}
 z &= \min[t_0(0) + S(0, 0, 8) + t_8(0), t_0(0) + S(0, 1, 8) + t_8(1), \\
 &\quad t_0(0) + S(0, 2, 8) + t_8(0), t_0(1) + S(1, 0, 8) + t_8(0), \\
 &\quad t_0(1) + S(1, 1, 8) + t_8(1), t_0(1) + S(1, 2, 8) + t_8(2), \\
 &\quad t_0(2) + S(2, 0, 8) + t_8(0), t_0(2) + S(2, 1, 8) + t_8(1), \\
 &\quad t_0(2) + S(2, 2, 8) + t_8(2)] \\
 &= \min[3 + 8 + 5, 3 + 9 + 4, 3 + 11 + 1, 2 + 9 + 5, 2 + 8 + 4, 2 + 0 + 1, \\
 &\quad , 1 + 8 + 5, 1 + 9 + 4, 1 + 11 + 1] = 13
 \end{aligned}$$

με $y_1 = 1, y_2 = 2$ και $y_1 = 2, y_2 = 2$ όπου και τα δύο δίνουν αυτή την τιμή.

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες της πολιτικής για την ανοικοδόμηση βέλτιστη μονοπάτια είναι κάπως δύσκολο. Πηγαίνοντας από το $(0, 1)$ έως $(8, 2)$ (δηλαδή, $y_1 = 1, y_2 = 2$) αναφερόμενοι στο $P(1, 2, 8)$ και να βρίσκουμε ότι $(4, 1)$ είναι το βέλτιστο

μέσο. Τώρα από το $P(1, 1, 4) = 1$ συμπεραίνουμε ότι το $(2, 1)$ είναι το καλύτερο μέσον του τμήματος των τεσσάρων πρώτων φάσεων, δηλαδή το $(2, 1)$ βρίσκεται στη βέλτιστη διαδρομή και από το ότι $P(1, 2, 4) = 1$ συμπεραίνουμε ότι το 1 είναι καλύτερο μέσον του δεύτερου τμήματος των τεσσάρων σταδίων, δηλαδή, ότι $(6, 1)$ είναι στην βέλτιστη διαδρομή. Αφού το πρώτο τμήμα συνδέει το $(0, 1)$ με $(2, 1)$, συμβουλευόμενοι το $P(1, 1, 2)$, το οποίο είναι 0, συμπεραίνουμε ότι το $(1, 0)$ θα είναι στη διαδρομή. Το δεύτερο τμήμα συνδέει το $(2, 1)$ με το $(4, 1)$ και αφού $P(1, 1, 2) = 0$ καταλήγουμε στο ότι το $(3, 0)$ θα υπάρχει και αυτό στη διαδρομή. Το τρίτο τμήμα συνδέει το $(4, 1)$ και το $(6, 1)$, οπότε και πάλι από το $P(1, 1, 2)$ βλέπουμε ότι $(5, 0)$ είναι στη διαδρομή και τέλος, το τελευταίο τμήμα ενώνει το $(6, 1)$ και το $(8, 2)$, και αφού $P(1, 2, 2) = 0$ έχουμε ότι το $(7, 0)$ είναι στη διαδρομή. Μια βέλτιστη λύση είναι ως εκ τούτου η $(0, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 0), (6, 1), (7, 0), (8, 2)$. Μια παρόμοια αφαιρετική διαδικασίας μας λέει ότι εννέα μονοπάτια που συνδέουν το $(0, 2)$ και το $(8, 2)$ με κόστος $11 + 2$ για τον τερματικό σταθμό. Επίσης από την λίστα των διαδοχικών συντεταγμένων του y έχουμε

$2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 - 0 - 2$	$2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 2$
$2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 0 - 1 - 0 - 2$	$2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 1 - 0 - 2$
$2 - 1 - 0 - 1 - 1 - 0 - 1 - 0 - 2$	$2 - 1 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 - 2$

$2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 - 2 - 2$
 $2 - 1 - 0 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 - 2$
 $2 - 2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 - 2$

Ας συγκρίνουμε τώρα τον αριθμό των υπολογισμών που απαιτούνται από την παρούσα διαδικασία, doubling-up, με τον αριθμό των υπολογισμών που απαιτούνται από τη συνήθη διαδικασία για το πρόβλημα, υποθέτοντας ότι η διάρκεια είναι $2N$ -στάδια και υπάρχουν M καταστάσεις σε κάθε στάδιο. Στο παράδειγμά μας, $N = 3$ και $m = 3$. Για την doubling-up, κάθε διπλασιασμός της k απαιτεί M προσθήκες για κάθε ένα από τα M^2 ζεύγη (y_1, y_2) . Πρέπει να διπλασιάσουμε N φορές για να λύσουμε το πρόβλημα των $2N$ -σταδίων (αγνοώντας το τερματικό κόστος), έτσι ώστε N . Απαιτούνται NM^3 προσθήκες. Για τη κλασική διαδικασία, κάθε στάδιο απαιτεί M^2 προσθήκες (M αποφάσεις σε κάθε ένα από τα σημεία M), και έτσι χρειάζονται περίπου $2^N * M^2$ προσθήκες. Για $N = 3$ και $M = 3$ η κλασική διαδικασία είναι ελαφρώς καλύτερη, αλλά για $N = 4$ (δηλαδή, μία διάρκεια 16 σταδίων) η μέθοδος doubling-up κυριαρχεί. Δεν έχει σημασία ο αριθμός του M , όταν έχουμε αρκετά μεγάλο N η μέθοδος doubling-up κυριαρχεί. Όμως η μέθοδος doubling-up μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για χρονικά αμετάβλητες διαδικασίες, ενώ τη κλασική διαδικασία εφαρμόζεται σε όλες τις διαδικασίες και σε αυτές που το κάθε στάδιο εξαρτάται από κόστος.

Για την επίλυση ενός προβλήματος 12-σταδίων με την doubling-up μέθοδο μπορούμε να συνδυάσουμε το $S(y_1, y_2, 8)$ και $(y_1, y_2, 4)$ στον τύπο,

$$S(y_1, y_2, 12) = \min_y [S(y_1, y, 8) + S(y, y_2, 4)] \quad (3.14)$$

Ομοίως, για το πρόβλημα των 14-σταδίων, μπορεί να λυθεί με συνδυασμό του $S(y_1, y_2, 12)$ με το $S(y_1, y_2, 2)$, οπότε η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και αν η διάρκεια δεν είναι ακριβώς κάποια δύναμη του δύο. Έχουμε τον γενικό τύπο

$$S(y_1, y_2, m + n) = \min_y [S(y_1, y, m) + S(y, y_2, n)] \quad (3.15)$$

3.7 Εφαρμογή συντομότερης διαδρομής

Μία βιομηχανική εταιρεία ετοιμάζεται να προγραμματίσει την παραγωγή (σε σχετικά μικρές ποσότητες) ενός ακριβού προϊόντος για τις επόμενες N χρονικές περιόδους (μήνες). Λόγω διαφόρων περιορισμών, όπως χρόνος, εργατικό δυναμικό, κτλ, η ποσότητα που μπορεί να παραχθεί σε μία περίοδο n δεν μπορεί να υπερβαίνει μία δεδομένη δυναμικότητα για αυτήν την περίοδο. Η ζήτηση κάθε περιόδου είναι εκ των προτέρων γνωστή, μπορεί δε να ικανοποιηθεί από την παραγωγή εκείνης της περιόδου ή από αποθέματα προηγούμενων περιόδων. Το κόστος κάθε περιόδου έχει δύο συντελεστές : το κόστος παραγωγής, το οποίο είναι συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής, και το κόστος αποθήκευσης της περιόδου, το οποίο είναι συνάρτηση του συνολικού αποθέματος το οποίο υπάρχει στο τέλος της περιόδου. Η εταιρία θέλει να προγραμματίσει την παραγωγή ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος N περιόδων.

Για να λύσουμε το πρόβλημα με τις τεχνικές του Δυναμικού Προγραμματισμού, ορίζουμε για κάθε περίοδο n ($n=1,2,...,N$) :

- x_n = η ποσότητα παραγωγής
- z_n = η ζήτηση
- D_n = η δυναμικότητα παραγωγής
- a_n = το συνολικό απόθεμα στο τέλος της περιόδου
- $C_n(x_n)$ = το κόστος παραγωγής
- $H_n(a_n)$ = το κόστος αποθήκευσης

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής : Να ευρεθούν τιμές για την βέλτιστη πολιτική παραγωγής και αποθεμάτων, δηλαδή τις μεταβολές των x_n , a_n για $n = 1, 2, ..., N$, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος.

$$Z = \sum_{n=1}^N (C_n(x_n) + H_n(a_n)) \quad (3.16)$$

με τους περιορισμούς :

1. $a_n = a_{n-1} + x_n - z_n \quad n=1,2,\dots,N$
2. $x_n \leq D_n \quad n=1,2,\dots,N$
3. $a_n \leq A \quad n=1,2,\dots,N$
4. $a_0 = a_N = 0$
5. $x_n = \text{ακέραιοι μη αρνητικοί}$

Ο πρώτος περιορισμός σημαίνει ότι τα αποθέματα στο τέλος της περιόδου n ισούνται με τα αποθέματα του τέλους της περιόδου $n - 1$ συν την παραγωγή της περιόδου n μείον τη ζήτηση αυτής της περιόδου. Οι επόμενοι δύο περιορισμοί δηλώνουν τους περιορισμούς λόγω δυναμικότητας παραγωγής και χωρητικότητας αποθήκης. Ο προτελευταίος περιορισμός εκφράζει δύο ακραίες συνθήκες : ότι τα αρχικά και τελικά αποθέματα ισούνται με μηδέν. Τέλος ο τελευταίος περιορισμός υπάρχει διότι οι ποσότητες παραγωγής είναι μικρές.

Εάν οι συναρτήσεις $C_n(.)$ και $H_n(.)$ είναι γραμμικές, τότε το πρόβλημα μπορεί να και με Ακέραιο Προγραμματισμό. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρούμε ότι :

$$C_n(x_n) = \begin{cases} (12 + n) - 6x_n + x_n^2 & 0 < x_n \leq D_n \quad n = 1, 2, \dots, N \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}$$

$$H_n(a_n) = h_n a_n$$

Βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $C_n(.)$ είναι μη γραμμικές. Για παράδειγμα, τα δεδομένα του προβλήματος για ένα ορίζοντα τεσσάρων περιόδων ($N=4$) δίνονται από το πίνακα 3.7

Περίοδος (n)	Ζήτηση (z_n)	Δυναμικότητα Παραγωγής (D_n)	Κόστος Αποθήκης (h_n)
1	2	5	1
2	2	3	1
3	3	3	2
4	3	5	2

Περίοδος (n)	Κόστος $C_n(x_n)$ Για $x_n = 1$	Κόστος $C_n(x_n)$ Για $x_n = 2$	Κόστος $C_n(x_n)$ Για $x_n = 3$	Κόστος $C_n(x_n)$ Για $x_n = 4$	Κόστος $C_n(x_n)$ Για $x_n = 5$
1	8	5	4	5	8
2	9	6	5	-	-
3	10	7	6	-	-
4	11	8	7	8	11

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

Τα στάδια του προβλήματος είναι οι χρονικές περίοδοι, ως καταστάσεις ορίζουμε το αποθεματικό επίπεδο το οποίο υπάρχει προτού ληφθεί η απόφαση. Έστω $K_n(x_n, a_{n-1})$ το άμεσο κόστος της περιόδου n εάν το απόθεμα στην αρχή της περιόδου ισούται με a_{n-1} και η ποσότητα παραγωγής αυτής της περιόδου είναι x_n . Προφανώς

$$K_n(x_n, a_{n-1}) = \begin{cases} 12 + n - 6x_n + x_n^2 + h_n a_n & x_n > 0 \\ h_n a_n & x_n = 0 \end{cases}$$

όπου $a_n = a_{n-1} + x_n - z_n$.

Επίσης, έστω ότι $f_n(a_{n-1})$ το ελάχιστο συνολικό κόστος από τις υπόλοιπες περιόδους εάν η τωρινή περίοδος είναι η n -οστή και το υπόλοιπο απόθεμα από την προηγούμενη περίοδο είναι a_{n-1} . Έχουμε

$$f_n(a_{n-1}) = \min_{x_n \geq 0} [K_n(x_n, a_{n-1} + f_n + 1(a_n))]$$

όπου $a_3 = a_0 = 0$.

Η λύση αυτού του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή των προβλημάτων συντομότερης διαδρομής. Οι κόμβοι στο δίκτυο αντιστοιχούν στις πιθανές καταστάσεις (αποθεματικά επίπεδα) για το κάθε στάδιο. Οι συνδέσεις μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων αντιστοιχούν σε αποφάσεις παραγωγής. Για παράδειγμα, η σύνδεση μεταξύ $a_1 = 0$ και $a_2 = 1$ σημαίνει ότι μεταξύ του τέλους της πρώτης και του τέλους της δεύτερης περιόδου το απόθεμα μεγάλωσε κατά μία μονάδα. Εφόσον η ζήτηση της δεύτερης περιόδου ήταν δύο μονάδες, έπεται ότι η συνολική παραγωγή αυτής της περιόδου ήταν τρεις μονάδες. Επομένως το κόστος αυτής της σύνδεσης (απόφασης) είναι :

$$(\text{κόστος παραγωγής } 3 \text{ μονάδων} = 7) + (\text{κόστος αποθήκευσης μίας μονάδας} = 1) = 8$$

Αντίστοιχα, η σύνδεση μεταξύ $a_2 = 4$ και $a_3 = 3$ σημαίνει

$$x_3 = a_3 - a_2 + z_3 = 3 - 4 + 3 = 2$$

και

$$K_3(2, 4) = 7 + 6 = 13$$

Γενικότερα, μία σύνδεση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων a_n και a_{n+1} αντιστοιχεί σε απόφαση παραγωγής

$$x_{n+1} = a_{n+1} - a_n + z_{n+1}$$

και κόστος περιόδου

$$K_{n+1}(x_{n+1}, a_n) = C_{n+1}(x_{n+1}) + h_{n+1} a_{n+1}$$

Οι ποσότητες (x_n, K_n) φαίνονται δίπλα σε κάθε σύνδεση στο δίκτυο. Παραδείγματος χάρη η ένδειξη (2,5) μεταξύ $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$ σημαίνει $x_1 = 2$ και $K_1 = 5$.

Το πρόβλημα είναι λοιπόν να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή μεταξύ $a_0 = 0$ και $a_4 = 0$, όπου το μήκος διαδρομής μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων είναι το κόστος K_n .

Για $n=4$ Εφόσον $a_1 = 0$ θα παράγουμε μόνο τόσο όσο χρειάζεται για να ικανοποιήσουμε τη ζήτηση της τέταρτης περιόδου, δηλαδή

$$x_4 = z_4 - a_3 = 3 - a_3$$

όπου $a_3 \leq 3$ και επομένως

$$f_4(0) = 7$$

$$f_4(1) = 8$$

$$f_4(2) = 11$$

$$f_4(3) = 0$$

Για $n=3$ Οι πιθανές καταστάσεις είναι $a_2 = 0, 1, 2, 3, 4$. Συμβολίζοντας με x_n τη βέλτιστη ποσότητα παραγωγής την περίοδο n όταν το διαθέσιμο απόθεμα είναι a , έχουμε :

$$f_3(0) = 6 + f_4(0) = 13$$

$$f_3(1) = \min[7 + f_4(0), 8 + f_4(1)] = 14 \quad \Rightarrow x_3(1) = 2$$

$$f_3(2) = \min[10 + 7, 8 + 8, 10 + 11] = 17 \quad \Rightarrow x_3(2) = 1 \text{ or } 2$$

$$f_3(3) = \min[0 + 7, 12 + 8, 11 + 11, 12 + 0] = 7 \quad \Rightarrow x_3(3) = 0$$

$$f_3(4) = \min[2 + 8, 12 + 11, 13 + 0] = 10 \quad \Rightarrow x_3(4) = 0$$

Για $n=2$ οι πιθανές καταστάσεις είναι $a_1 = 0, 1, 2, 3$.

$$f_2(0) = \min[6 + 13, 6 + 14] = 19 \quad \Rightarrow x_2(0) = 2$$

$$f_2(1) = \min[9 + 13, 7 + 14, 7 + 17] = 21 \quad \Rightarrow x_2(1) = 0$$

$$f_2(2) = \min[0 + 13, 10 + 14, 8 + 17, 8 + 7] = 13 \quad \Rightarrow x_2(2) = 0$$

$$f_2(3) = \min[1 + 14, 11 + 17, 9 + 7, 9 + 10] = 15 \Rightarrow x_2(3) = 0$$

Για $n=1$, η μόνη πιθανή κατάσταση που έχουμε είναι $a_0 = 0$ οπότε,

$$f_1(0) = \min[5 + 19, 5 + 21, 7 + 13, 11 + 15] = 20$$

$$\Rightarrow x_1(0) = 4$$

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path)

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής είναι

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 3$$

και το ελάχιστο συνολικό κόστος θα είναι 20.

Κεφάλαιο 4

Το πρόβλημα αντικατάστασης - διατήρησης εξοπλισμού

4.1 Το βασικό πρόβλημα

Το βασικό πρόβλημα αυτού του κεφαλαίου αφορά ένα τύπο μηχανής , ο οποίος επιδεινώνεται με το πέρασμα του χρόνου, και την απόφαση αντικατάστασης του.

Υποθέτουμε ότι πρέπει να έχουμε ένα τέτοιο μηχανισμό για καθεμία από τις επόμενες N περιόδους και ότι το κόστος λειτουργίας μιας μηχανής για ένα χρόνο είναι μια γνωστό και ότι εξαρτάται από την ηλικία της μηχανής. Εμείς λέγοντας περίοδο θα εννοούμε τα χρόνια που ακολουθούν αλλά με την ίδια ιδέα λύνονται προβλήματα με μηνιαία, ημερήσια κτλ διάρκεια.

Κάθε φορά που μια μηχανή είναι πολύ παλιά, μπορούμε να την αντικαταστήσουμε πληρώνοντας ένα γνωστό ποσό για ένα το νέο μηχανήμα και παίρνουμε σε αντάλλαγμα ένα δεδομένο ποσό, το οποίο εξαρτάται από την ηλικία των παλαιών μηχανημάτων μας. Όταν η διαδικασία τελειώσει μετά από N χρόνια, λαμβάνουμε μια υπολειμματική αξία η οποία εξαρτάται από την ηλικία των παλαιών μηχανών μας.

Ως εκ τούτου, για να καθοριστεί το πρόβλημά, πρέπει να γνωρίζουμε διάρκεια N της διαδικασία, τη ηλικία y της μηχανής με την οποία ξεκινάμε τη διαδικασία, και τα ακόλουθα στοιχεία:

$c(i)$ = το κόστος λειτουργίας για ένα χρόνο της μηχανής, της οποίας είναι i κατά την έναρξη του έτους,

p = η τιμή μιας νέας μηχανής (ηλικίας 0),

$t(i)$ = η εμπορική αξία που έχει μια μηχανή i ηλικίας, η οποία κατά την έναρξη του έτους είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης αντικατάστασης ,

$s(i)$ = υπολειμματική αξία που λαμβάνουμε για ένα μηχανήμα που μόλις γύρισε i ηλικία κατά το τέλος του έτους N .

Το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε πότε (και αν) θα αντικαταστήσουμε κάποιο μηχανήμα, όταν με καινούργιο ή μεταχειρισμένο, κ.λ.π., έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί

το συνολικό κόστος κατά τα επόμενα έτη N .

Για την λύση προβλημάτων αντικατάστασης με χρήση του Δυναμικού Προγραμματισμού εφαρμόζουμε την διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε στο πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής. Θα πρέπει να ορίσουμε τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής και τα επιχειρήματα της συνάρτησης θα πρέπει να παρέχουν τις πληροφορίες που θα βοηθήσουν στη λήψη της απόφασης αντικατάστασης των μηχανημάτων από χρόνο σε χρόνο.

Τώρα θα καθορίσουμε την κατάλληλη συνάρτηση βέλτιστης τιμής, για την λύση του παραπάνω προβλήματος Δυναμικού προγραμματισμού με την προς τα πίσω διαδικασία καθώς και την αναδρομική σχέση που το διέπει και την οριακή συνθήκη που λύνει το πρόβλημα.

Λύση Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ορίζεται ως εξής :

$S(x, k)$ = το ελάχιστο κόστος ιδιοκτησίας ενός μηχανήματος από το έτος k μέχρι το έτος N , ξεκινώντας το έτος k με μια μηχανή που ήδη έχει ηλικία x .

Συμβολίζοντας με "buy" την απόφαση να αγοραστεί ένα νέο μηχάνημα και με "keep" την απόφαση να κρατήσουν το μηχάνημα που ήδη υπάρχει, η αναδρομική σχέση που προκύπτει είναι :

$$S(x, k) = \min \begin{cases} \text{Buy} : p - t(x) + c(0) + S(1, k + 1) \\ \text{Keep} : c(x) + S(x + 1, k + 1) \end{cases} \quad (4.1)$$

Με συνοριακή συνθήκη :

$$S(x, N + 1) = -s(x) \quad (4.2)$$

Η παραπάνω αναδρομική σχέση 4.1 εκτιμά, πρώτον, την απόφαση "Αγορά" με την προσθήκη του κόστους κατά τη διάρκεια k χρόνων από την αγορά ενός νέου μηχανήματος (η τιμή αγοράς συν το κόστος λειτουργίας του έτους μείον η εμπορική αξία) στο ελάχιστο δυνατό κόστος για το υπόλοιπο της διαδικασίας, η οποία ξεκινά το έτος $k + 1$ με μηχανή που είναι ήδη ενός έτους. Στη συνέχεια αξιολογείται η απόφαση "να κρατηθεί η τρέχουσα μηχανή για τουλάχιστον ακόμη έναν χρόνο", προσθέτοντας το κόστος λειτουργίας του παλαιού μηχανήματος για ένα έτος στο ελάχιστο κόστος της υπόλοιπης διαδικασίας, η οποία σε αυτή την περίπτωση ξεκινά το έτος 1 με ένα μηχάνημα ηλικίας $x + 1$ (ένα χρόνο μεγαλύτερος από ότι ήταν στην αρχή του έτος k).

Η καλύτερη από αυτές τις δύο εναλλακτικές λύσεις ορίζεται ως η τιμή του $S(x, k)$ από την αρχή του βελτίστου μας και μας βεβαιώνει ότι δεν πρέπει να εξεταστούν συνέχεια από το έτος $k + 1$ στο N .

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η βέλτιστη απόφαση σε αυτή την περίπτωση, είναι $P(x, k) = (buy)$, εάν η πρώτη σειρά του παραπάνω τύπου μας δίνει την ελάχιστη απόδοση, και $P(x, k) = K(keep)$ εάν η γραμμή 2 δίνει την ελάχιστη τιμή.

Η συνοριακή συνθήκη σε κάθε φάση είναι ότι η έκπτωση (αρνητικό κόστος) του $s(x)$ παρουσιάζεται όταν το μηχάνημα έχει μόλις γυρίσει σε ηλικία x κατά την έναρξη του έτους $N + 1$, δηλαδή, στο τέλος του έτους N . Μια ισοδύναμη και εξίσου αποδεκτή οριακή συνθήκη είναι

$$S(x, k) = \min \left[\begin{array}{l} p - t(x) + c(0) - s(1) \\ c(x) - s(x + 1) \end{array} \right] \quad (4.3)$$

Αν το y δηλώνει την χρονική στιγμή της έναρξης της λειτουργίας της κύριας μηχανής, πρέπει να καταγράφονται σε πίνακα οι τιμές για $x = 1, 2, \dots$, και για $y + N$ από τις διάφορες αποφάσεις κατά τη διάρκεια των πρώτων N ετών και έτσι αυτό θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε κάθε μία από αυτές τις ηλικίες τερματισμού. Η ηλικία $y + N$ αντιστοιχεί στις εκ των προτέρων αποφάσεις ποτέ να αντικατασταθεί η κύρια μηχανή. Στη συνέχεια, το $S(x, N)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για $x = 1, \dots, 1$ και $y + N1$. Η κύρια μηχανή, εάν δεν αντικατασταθεί, θα έχει ηλικία $y + N1$ το έτος εκκίνησης N . Τώρα πρέπει να υπολογιστεί το $S(x, N - 1)$ για $x = 1, \dots, 2$ και $y + N2$, κ.λ.π. μέχρι το $S(x, 2)$ είναι υπολογισμένο για $x = 1$ και $y + 1$. Τέλος θα πρέπει να υπολογίσουμε το $S(y, 1)$, το ελάχιστο κόστος για το δεδομένο πρόβλημα.

4.2 Αριθμητική εφαρμογή

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα αντικατάστασης μίας μηχανής για μία χρονική περίοδο 5 ετών $N = 5$. Όταν αγοράστηκε η μηχανή στην εταιρία είχε ήδη ένα χρόνο ζωής, δηλαδή $y = 2$

Με μία έρευνα αγοράς βρήκαμε ότι

$$c(0) = 10 \quad c(1) = 13 \quad c(2) = 20 \quad c(3) = 4 \quad c(4) = 70 \quad c(5) = 100 \quad c(6) = 100$$

$$p = 50$$

$$t(1) = 32 \quad t(2) = 21 \quad t(3) = 11 \quad t(4) = 5 \quad t(5) = 0 \quad t(6) = 0$$

$$s(1) = 25 \quad s(2) = 17 \quad s(3) = 8 \quad s(4) = 0 \quad s(5) = 0 \quad s(6) = 0$$

Όπου συμβολίζουμε με $c(i)$ το κόστος λειτουργίας για ένα χρόνο της μηχανής, της οποίας η ηλικία είναι i κατά την έναρξη του έτους, p την τιμή αγοράς μίας νέας μηχανής (ηλικίας 0), $t(i)$ την εμπορική αξία που έχει μια μηχανή i ηλικίας, η οποία κατά την έναρξη του έτους είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης για να

Το πρόβλημα αντικατάστασης - διατήρησης εξοπλισμού

αντικατασταθεί, $s(i)$ την υπολειμματική αξία που λαμβάνουμε για ένα μηχάνημα που μόλις γύρισε i ηλικία κατά το τέλος του έτους N .

Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $S(x, k)$ είναι το ελάχιστο κόστος ιδιοκτησίας του μηχανήματος από το έτος k μέχρι το έτος $N=5$, ξεκινώντας το έτος k με μια μηχανή που ήδη έχει ηλικία x .

Η αναδρομική σχέση της συνάρτησης βέλτιστης τιμής θα είναι:

$$S(x, k) = \min \left[\begin{array}{l} \text{Buy} : p - t(x) + c(0) + S(1, k+1) \\ \text{Keep} : c(x) + S(x+1, k+1) \end{array} \right]$$

Με συνοριακή συνθήκη : $S(x, N+1) = -s(x)$

Άρα από την συνοριακή συνθήκη για $N=5$ θα έχουμε :

$$S(1, 6) = -25$$

$$S(2, 6) = -17$$

$$S(3, 6) = -8$$

$$S(4, 6) = 0$$

$$S(5, 6) = 0$$

$$S(7, 6) = 0$$

Για να υπολογίσουμε τα $S(x, k)$ για $k = 1, 2, \dots, 5$ θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω αναδρομικό τύπο. Οπότε για το $S(x, 5)$ έχουμε

$$S(1, 5) = \min \left[\begin{array}{l} 50 - 32 + 10 + S(1, 6) \\ 13 + S(2, 6) \end{array} \right] = -4 \quad P(1, 5) = \text{keep}$$

$$S(2, 5) = \min \left[\begin{array}{l} 50 - 21 + 10 + S(1, 6) \\ 20 + S(3, 6) \end{array} \right] = -12 \quad P(2, 5) = \text{keep}$$

$$S(3, 5) = \min \left[\begin{array}{l} 24 \\ 40 \end{array} \right] = 24 \quad P(3, 5) = \text{buy}$$

$$S(4, 5) = \min \left[\begin{array}{l} 30 \\ 70 \end{array} \right] = 30 \quad P(4, 5) = \text{buy}$$

$$S(6, 5) = \min \left[\begin{array}{l} 35 \\ 100 \end{array} \right] = 35 \quad P(6, 5) = \text{buy}$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο και τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω θα υπολογίσουμε το $S(x, 4)$

$$S(1, 4) = \min \begin{bmatrix} 28 + S(1, 5) \\ 13 + S(2, 5) \end{bmatrix} = 24 \quad P(1, 4) = buy$$

$$S(2, 4) = \min \begin{bmatrix} 35 \\ 44 \end{bmatrix} = 35 \quad P(2, 4) = buy$$

$$S(3, 4) = \min \begin{bmatrix} 45 \\ 70 \end{bmatrix} = 45 \quad P(3, 4) = buy$$

$$S(5, 4) = \min \begin{bmatrix} 56 \\ 135 \end{bmatrix} = 56 \quad P(5, 4) = buy$$

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το $S(x, 3)$

$$S(1, 3) = \min \begin{bmatrix} 52 \\ 48 \end{bmatrix} = 48 \quad P(1, 3) = keep$$

$$S(2, 3) = \min \begin{bmatrix} 63 \\ 65 \end{bmatrix} = 63 \quad P(2, 3) = buy$$

$$S(4, 3) = \min \begin{bmatrix} 79 \\ 126 \end{bmatrix} = 79 \quad P(4, 3) = buy$$

Για το $S(x, 2)$ έχουμε

$$S(1, 2) = \min \begin{bmatrix} 76 \\ 76 \end{bmatrix} = 76 \quad P(1, 2) = buy \text{ or } keep$$

$$S(3, 2) = \min \begin{bmatrix} 97 \\ 119 \end{bmatrix} = 97 \quad P(3, 2) = buy$$

Και τέλος έχουμε μόνο το $S(2, 1)$ που είναι

$$S(2, 1) = \min \begin{bmatrix} 115 \\ 117 \end{bmatrix} = 115 \quad P(2, 1) = buy$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα η βέλτιστη αλληλουχία αποφάσεων είναι η ακόλουθη :

Αγορά το χρόνο 1 αφού $P(2, 1) = \text{αγορά}$, στη συνέχεια είτε να αγοράσει ή να κρατηθεί το μηχάνημα κατά την έναρξη του έτους 2 με βάση το $P(1, 2)$.

Αν επιλεχτεί αγορά, θα κρατηθεί το μηχάνημα κατά τη διάρκεια του έτους 3 βάση το $P(1, 3) = \text{κρατάω}$, τότε θα πρέπει να γίνει αγορά στην αρχή του έτους 4, δεδομένου ότι $P(2, 4) = \text{αγορά}$, και να την έχουν κατά το έτος 5 αφού $P(1, 5) = \text{κρατάω}$.

Αν επιλεχτεί να κρατηθεί το μηχάνημα κατά το έτος 2, τότε θα πρέπει να αγοράσουν άλλο στην αρχή του έτους 3 να το αντικαταστήσουν πάλι κατά την έναρξη του έτους 4, και αυτή τη φορά να το διατηρήσουν κατά τη διάρκεια του έτους 5.

Συμβολίζοντας όπως και προηγουμένως την αγορά ενός νέου μηχανήματος με buy ενώ αν αποφασιστεί να το κρατήσουμε το συμβολίζουμε με keep. Οι δύο βέλτιστες πολιτικές είναι, ως εκ τούτου, BBKVK και KBVK.

Μπορούμε να προσθέσουμε το κόστος αυτών των δύο πολιτικών, προκειμένου να εξακριβωθεί ότι το κόστος 115 είναι η αξία που πήραμε για το $S(2, 1)$.

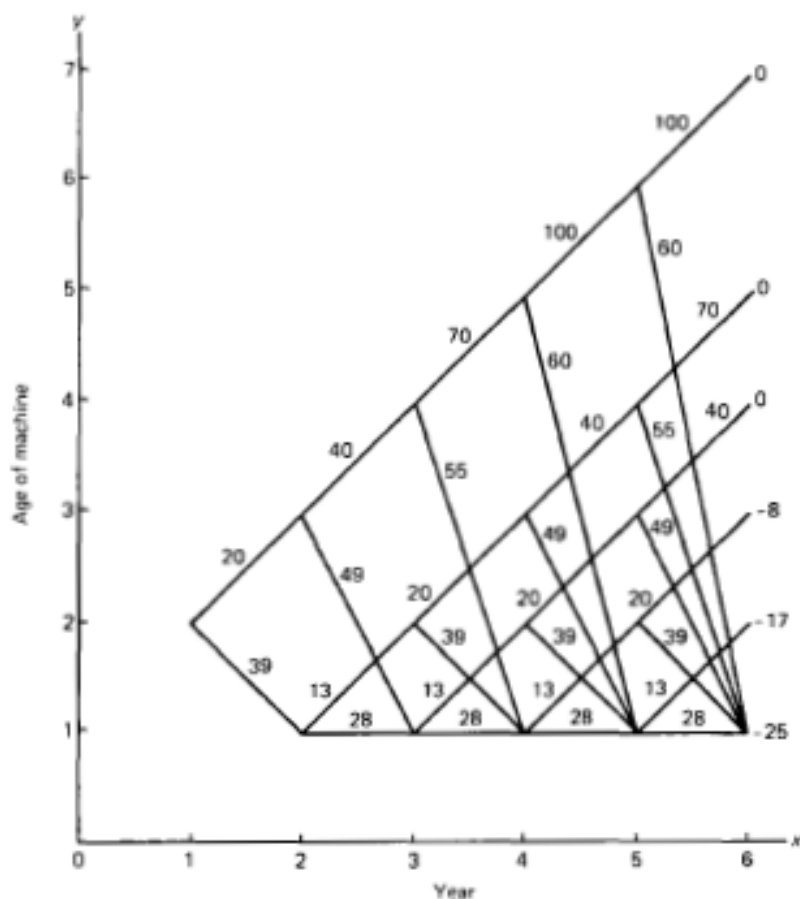
$$\begin{aligned}\text{Κόστος (BBKVK)} &= p - t(2) + c(0) + p - t(1) + c(0) + c(1) + p - t(2) + c(0) + \\ &c(1) - s(2) = 50 - 21 + 10 + 50 - 32 + 10 + 13 + 50 - 21 + 10 + 13 - 17 = 115\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Κόστος (KBVK)} &= 50 - 21 + 10 + 13 + 50 - 21 + 10 + 50 - 32 + 10 + 13 - 17 = \\ &115.\end{aligned}$$

Ο παραπάνω υπολογισμός δεν αποδεικνύει ότι δεν έχουμε κάνει λάθος, απλά αυξάνει την πιθανότητα ορθότητας της λύσης.

4.3 Λύση της εφαρμογής με βάση το πρόβλημα συντομότερης διαδρομής

Τώρα θα δούμε πως το παραπάνω μοντέλο, αντικατάστασης εξοπλισμού μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλημα συντομότερης διαδρομής. Σχεδόν όλα τα προβλήματα Δυναμικού προγραμματισμού μπορούν να θεωρηθούν ως προβλήματα που αναζητούν το ελάχιστο κόστος διαδρομής (γενικά σε περισσότερες από δύο διαστάσεις και επομένως γι' αυτό γενικά δεν είναι εύκολο να λυθεί το κάθε πρόβλημα ως πρόβλημα συντομότερης διαδρομής). Βάζοντας στον άξονα x το χρόνο δηλαδή να αντιπροσωπεύει την ηλικία του μηχανήματος, ξεκινάμε από το $(1, y)$. Η απόφαση "αγορά" μας πηγαίνει στο $(2, 1)$ σε ένα τόξο με κόστος $p - t(y) + c(0)$ και η απόφαση "κρατώ" μας οδηγεί στο $(2, y + 1)$ με κόστος τόξου $c(y)$. Με το ίδιο σκεπτικό συνεχίζουμε σε κάθε σημείο. Για τα δεδομένα της παραπάνω εφαρμογής παίρνουμε το δίκτυο φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα στο οποίο όλα τα διαγώνια τόξα κατευθύνονται προς τα δεξιά, λόγω της αδυσώπητη αύξηση του χρόνου.



Εικόνα 4.1

Από το σχήμα 4.1 εύκολα επαληθεύεται ότι τα μονοπάτια ΒΒΚΒΚ και ΒΚΒΒΚ (όπου Β στη θέση Κ μιας ακολουθίας σημαίνει "αγοράστε στην αρχή του έτος k " και, ομοίως, το Κ δηλώνει ότι πρέπει να "κρατήσει" ακόμα το μηχάνημα) έχουν πράγματι κόστος 115, όπως υπολογίσαμε προηγουμένως.

Σε αντίθεση με πολλά προβλήματα μονοπατιών, γι' αυτό το είδος προβλημάτων μπορούμε να είμαστε βέβαιοι εκ των προτέρων ότι όλα τα μονοπάτια, αλλά, τελικά επιστρέφουν τουλάχιστον μία φορά σε μία κορυφή γραμμή $y = 1$, δηλαδή αργά ή γρήγορα θα αγοραστεί ένα νέο μηχάνημα, εκτός αν το κρατάμε για όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Όταν επιστρέψουμε στο $y = 1$ της διαδικασία ονομάζεται

”αναγέννηση” και μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα, ”Δεδομένης μιας αρχικής κατάστασης, πότε θα πρέπει να κάνουμε την πρώτη μας αγορά ; ” Για να λυθεί το πρόβλημα αναδρομικά, με βάση αυτήν την ερώτηση, έχουμε καθορίσει τη βέλτιστη τιμή λειτουργία $S(i)$ ως εξής :

$S(i)$ = το ελάχιστο εφικτό κόστος για τις υπόλοιπες διαδικασίες που έχουμε ξεκινήσει το έτος i με μηχάνημα που είναι ήδη ενός έτους.

Θα χρησιμοποιήσουμε μια έκδοση της αρχής του βελτίστου, που βασίζεται σε κοινές αρχές, στο ότι κάθε φορά που επιλέγουμε την επόμενη αγορά ενός νέου μηχανήματος, οι υπόλοιπες αποφάσεις μετά από αυτή την αγορά πρέπει να δίνουν το ελάχιστο κόστος για την υπόλοιπη διαδικασία, που ξεκινάει με αυτό το νέο μηχάνημα. Από αυτό προκύπτει η αναδρομική σχέση :

$$S(i) = \min \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{N-(i-1)} c(k) + s(N-i+2) \\ \min_{j=i, \dots, N} \sum_{k=1}^{j-1} c(k) = p - t(j-i+1) + c(0) + S(j+1) \end{array} \right] \quad (4.4)$$

Η πρώτη σειρά στον παραπάνω τύπο 4.4 αξιολογεί το κόστος της διατήρησης του συγκεκριμένου μηχανήματος μέχρι το τέλος του έτους N . Η μεταβλητή i στη δεύτερη σειρά του τύπου είναι το έτος της επόμενης αγοράς και αυτή η σειρά ουσιαστικά προσθέτει το κόστος των δεδουλευμένων από το μηχάνημα, το κόστος του πρώτου έτους της επόμενης μηχανής, και το ελάχιστο κόστος του αρχικού χρόνου $j+1$ με ένα μηχάνημα που είναι ήδη ενός έτους. Η οριακή συνθήκη του παραπάνω αναδρομικού τύπου θα είναι :

$$S(N+1) = -s(1) \quad (4.5)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαδικασία για την επίλυση των δεδομένων φαίνονται στο 4.1, παίρνουμε τα ακόλουθα :

Από τον τύπο της συννοριακής συνθήκης 4.5 έχουμε ότι

$$S(5+1) = S(6) = -s(1)$$

άρα,

$$S(6) = -25$$

Τώρα από τον αναδρομικό τύπο 4.4 θα υπολογίσουμε πάλι τα $S(5)$, $S(4)$, $S(3)$, $S(2)$ και έτσι θα βρούμε σε κάθε στάδιο ποια απόφαση πρέπει να ακολουθήσουμε (αγορά νέου μηχανήματος ή να κρατήσουμε το παλιό) καθώς και το συνολικό τελικό κόστος το οποίο θα το συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα που βρήκαμε λύνοντας το πρόβλημα

με τους προηγούμενους τρόπους.

$$S(5) = \min \left[\begin{array}{c} 13 - 17 \\ 28 + S(6) \end{array} \right] = \min \left[\begin{array}{c} -4 \\ 3 \end{array} \right] = -4$$

$$P(5) = \text{keep until end}$$

$$S(4) = \min \left[\begin{array}{c} 13 + 20 - 8 \\ \min[28 + S(5), 13 + 39 + S(6)] \end{array} \right] = \min \left[\begin{array}{c} 25 \\ 24 \end{array} \right] = 24$$

$$P(4) = \text{buy at start of year 4}$$

$$S(3) = \min \left[\begin{array}{c} 13 + 20 + 40 \\ \min[28 + S(4), 13 + 39 + S(5), 13 + 20 + 49 + S(6)] \end{array} \right] = \min \left[\begin{array}{c} 73 \\ 48 \end{array} \right] = 48$$

$$P(3) = \text{buy at start of year 4}$$

$$\begin{aligned} S(2) &= \min \left[\begin{array}{c} 13 + 20 + 40 + 70 \\ \min[28 + S(3), 13 + 39 + S(4), 13 + 30 + 49 + S(5), 13 + 20 + 40 + 55 + S(6)] \end{array} \right] = \\ &= \min \left[\begin{array}{c} 143 \\ 76 \end{array} \right] = 76 \end{aligned}$$

$$P(2) = \text{buy at start of either year 2 or year 3}$$

Έτσι η απάντηση είναι :

$$\begin{aligned} \min \left[\begin{array}{c} 20 + 40 + 70 + 100 + 100 \\ \min[39 + S(2), 20 + 49 + S(3), 20 + 40 + 55 + S(4)] \\ \min[20 + 40 + 70 + 60 + S(5), 20 + 40 + 70 + 100 + 60 + S(6)] \end{array} \right] &= \\ = \min \left[\begin{array}{c} 330 \\ \min[115, 137, 139] \\ \min[186, 265] \end{array} \right] &= 115 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ορθότερη απόφαση είναι να αγοραστεί ένα μηχάνημα αμέσως. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που πήραμε από αυτή την πολιτική για να καθορίσουμε τη βέλτιστη ακολουθία αποφάσεων, καταλήγουμε όπως ήταν αναμενόμενο στο ίδιο αποτέλεσμα με τις δύο βέλτιστες πολιτικών που ακολουθήσαμε προηγουμένως. Η συγκεκριμένη μέθοδος υπολογίζει μόνο έναν αριθμό ανά στάδιο, αντί για ένα πίνακα των αριθμών. Σε κάθε υπολογισμό, ωστόσο, συμπεριλαμβάνεται μια αύξηση του αριθμού των εναλλακτικών λύσεων και κάθε εναλλακτική λύση περιέχει έναν αυξανόμενο αριθμό από προσθήκες. Με αυτή την μέθοδο ο αριθμός των προσθηκών που απαιτούνται είναι της τάξης N^3 , αλλά μπορεί

να μειωθεί με διάφορα τεχνάσματα και να γίνει περίπου ίσος με τον αριθμό των προσθηκών που απαιτούνται στις μεθόδους που εξετάσαμε προηγουμένως. Από την δεύτερη γραμμή της αναδρομικής σχέσης μπορούμε να δούμε ότι το κόστος μιας συγκεκριμένης αξίας του j μπορεί να προκύψει από το κόστος της αξίας της προηγούμενης μηχανής της j , με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου c , προσθέτοντας τον όρο t και αφαιρώντας τον όρο S της αξίας της προηγούμενης j , και στη συνέχεια αφαιρούμε τον όρο t και προσθέτουμε τον όρο S που είναι αυτό που αναζητάμε.

4.4 Ένα ποιο σύνθετο μοντέλο αντικατάστασης

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε το πρόβλημα αντικατάστασης με έναν πιο θεμελιώδη τρόπο, άρα απαιτείται να οριστεί εξ αρχής η συνάρτηση βέλτιστης λειτουργίας. Υποθέτουμε ότι οι επιλογές που έχουμε είναι όπως και πριν να "κρατήσουμε" το μηχάνημα ή να το "αντικαταστήσουμε", αλλά σε το πρόβλημα θα έχουμε και μία επιπρόσθετη επιλογή, η "γενική επισκευή". Μία επισκευασμένη μηχανή είναι καλύτερη από μία μη επισκευασμένη, αλλά βέβαια όχι τόσο καλή όσο μία καινούργια. Θεωρούμε ότι η απόδοση εξαρτάται από την πραγματική ηλικία του εξοπλισμού και για τον αριθμό των ετών που έχουν περάσει από την τελευταία επισκευή, αλλά είναι ανεξάρτητη από το πότε και πόσο συχνά το μηχάνημα επισκευάστηκε πριν από την τελευταία γενική επισκευή του. Δηλαδή θα λάβουμε υπόψη μας μόνο την τελευταία επισκευή. Τα γνωστά δεδομένα μας είναι :

$e(k, i, j)$ = το κόστος αντικατάστασης ενός μηχανήματος ηλικίας i , του οποίου η τελευταία επισκευή έγινε σε ηλικία j , με ένα νέο μηχάνημα στην αρχή του έτους k

$c(k, i, j)$ = το καθαρό κόστος λειτουργίας κατά το έτος k ενός μηχανήματος ηλικίας i , του οποίου η τελευταία επισκευή έγινε σε ηλικία j

$o(k, i)$ = το κόστος επισκευής ενός μηχανήματος ηλικίας i κατά την έναρξη του έτους k

$s(i, j)$ = η υπολειμματική αξία στο τέλος του έτους N ενός μηχανήματος το οποίο μόλις έγινε ηλικίας i , και η τελευταία του επισκευή ήταν σε ηλικία j

Εάν j η ηλικία κατά την τελευταία γενική επισκευή ισούται με 0 σημαίνει ότι η συσκευή δεν έχει επισκευαστεί ποτέ. Με βάση όλα τα παραπάνω ορίζουμε :

$f(k, i, j)$ = το κόστος κατά το υπόλοιπο της διαδικασίας που θα ξεκινήσει το έτος k με ένα μηχάνημα ηλικίας i , του οποίου η τελευταία επισκευή ήταν σε ηλικία j , και ακολουθεί τη βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης.

Η αναδρομική σχέση θα είναι :

$$f(k, i, j) = \min \begin{bmatrix} \text{Replace} : e(k, i, j) + c(k, 0, 0) + f(k + 1, 1, 0) \\ \text{Keep} : c(k, i, j) + f(k + 1, i + 1, j) \\ \text{Overhaul} : o(k, i) + c(k, i, j) + f(k + 1, i + 1, i) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

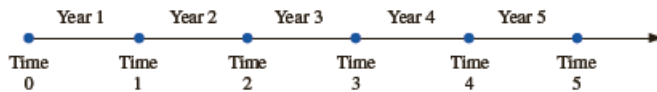
Με συνοριακή συνθήκη

$$f(N + 1, i, j) = -s(i, j) \quad (4.7)$$

Για $k = N$, με την προϋπόθεση το μηχάνημα είναι καινούργιο, πρέπει να υπολογίσουμε το f για $i = 1, 2, \dots, N-1$ και $j = 0, 1, 2, \dots, i-1$. Πρόκειται για $N - 1$ αξιολογήσεις των τριών αποφάσεων για $i = N-1$, $N - 2$ αξιολογήσεις για $i = N - 2, \dots$, και 1 αξιολόγηση για $i = 1$, δηλαδή συνολικά $(N - 1)(N)/2$. Στη συνέχεια, για $k = N-1$ έχουμε $(N - 2)(-1)/2$ αξιολογήσεις, για $k = N - 2$ έχουμε $(N - 3)(-2)/2$ αξιολογήσεις, κλπ. Ο συνολικός αριθμός είναι ακριβώς $\sum_{i=2}^N [(i-1)i/2] + 1$, ή περίπου $\sum_{i=1}^N i^2/2 = N^3/6$. Κατά συνέπεια ο συνολικός αριθμός των πράξεων είναι περίπου N^3 δεδομένου ότι κάθε αξιολόγηση της δεξιά πλευρά του τύπου 4.6 απαιτεί συνολικά επτά προσθήκες και συγκρίσεις. Αυτό το μοντέλο μπορεί να αποδειχθεί πολύ χρονοβόρο και συχνά με πολύ δύσκολη λύση, γι' αυτό το λόγο είναι πιο αποτελεσματική μια υπολογιστική λύση με βάση τον δυναμικό προγραμματισμό.

4.5 Εφαρμογή αντικατάστασης εξοπλισμού

Ένα κατάστημα επισκευής αυτοκινήτων πρέπει πάντα να έχει διαθέσιμο ένα αναλυτή κινητήρα. Ένας τέτοιος νέος κινητήρας κοστίζει 1.000. Το κόστος m_i της διατήρησης ενός αναλυτή κινητήρα κατά τη διάρκεια i -έτους της λειτουργία του είναι : $m_1 = 60, m_2 = 80, m_3 = 120$. Ένας αναλυτής μπορεί να διατηρηθεί για 1, 2, ή 3 χρόνια. Μετά από i έτη χρήσης ($i = 1, 2, 3$), αρχίζουν διαπραγματεύσεις για την αντικατάσταση του με ένα νέο.



Εικόνα 4.2

Αν ο αναλυτής ηλικίας i είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης, με υπολειμματική αξία s_i , όπου $s_1 = 800, s_2 = 600$, και $s_3 = 500$. Δεδομένου ότι πρέπει να αγοραστεί ένα νέο μηχάνημα τώρα (χρόνος 0, Σχήμα 4.2), το συνεργείο θέλει να διερευνήσει την αντικατάσταση και το εμπόριο σχετικά με την πολιτική που ελαχιστοποιεί καθαρό κόστος, δηλαδή το κόστος συντήρησης προσθέτοντας το κόστος αντικατάστασης μείον την υπολειμματική αξία που θα λάβουν κατά τα επόμενα 5 χρόνια.

Λύση

Α' Τρόπος

Σημειώνουμε ότι μετά από την αγορά ενός νέου μηχανήματος, η επιχείρηση πρέπει να αποφασίσει πότε θα αποτελέσει, το καινούργιο μηχάνημα, αντικείμενο διαπραγμάτευσης για την αγορά ενός νέου. Γνωρίζοντας αυτό ορίζουμε $g(t)$ να είναι το ελάχιστο καθαρό κόστος που προέκυψε από τη χρονική στιγμή t έως τη χρονική στιγμή 5, συμπεριλαμβανομένου του κόστους αγοράς και της υπολειμματικής αξίας για το μηχάνημα που αγοράσαμε, δεδομένου ότι μια νέα μηχανή έχει αγοραστεί στο χρόνο t . Ορίζουμε επίσης c_{tx} να είναι το καθαρό κόστος, συμπεριλαμβανομένου του κόστους αγοράς και την υπολειμματική αξία, για την αγορά ενός μηχανήματος τη χρονική στιγμή t το οποίο θα το εκμεταλλεύεται μέχρι την χρονική στιγμή x . Οπότε, η κατάλληλη αναδρομή σχέση είναι

$$g(t) = \min_x (c_{tx} + g(x)) \quad t = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (4.8)$$

όπου το x πρέπει να ικανοποιεί τις ανισότητες $t + 1 \leq x \leq t + 3$ και $x \leq 5$. Επειδή το πρόβλημα είναι πάνω σε ένα χρονικό διάστημα έως 5, δεν υπάρχει κάποιο κόστος από τη χρονική στιγμή 5 και μετά, έτσι μπορούμε να γράψουμε $g(5) = 0$. Για να δικαιολογηθεί η σχέση 4.8, σημειώνουμε ότι μετά την αγορά του νέου μηχανήματος κατά το χρόνο t , θα πρέπει να αποφασιστεί πότε θα πρέπει να αντικατασταθεί το μηχάνημα. Έστω x η χρονική στιγμή κατά την οποία λαμβάνει χώρα η αντικατάσταση. Η αντικατάσταση πρέπει να γίνει μετά από τη χρονική στιγμή t , αλλά εντός 3 ετών από την χρονική στιγμή t . Αυτό εξηγεί τον περιορισμό $t + 1 \leq x \leq t + 3$. Δεδομένου ότι το πρόβλημα τελειώνει τη χρονική στιγμή 5, πρέπει να ισχύει επίσης $x \leq 5$. Αν επιλέξουμε να αντικατασταθεί το μηχάνημα σε χρόνο x , τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε ποιο θα είναι το κόστος από την χρονική στιγμή t μέχρι τη στιγμή 5. Το κόστος αυτό είναι το άθροισμα των δαπανών που πραγματοποιούνται από την αγορά του μηχανήματος μέχρι την πώληση του σε χρόνο x (που είναι εξ ορισμού c_{tx}) και το συνολικό κόστος από τη χρονική στιγμή x για μέχρι τη στιγμή 5 (δεδομένου ότι μια νέα μηχανή έχει μόλις αγοράσει το χρόνο x). Από την αρχή του βελτίστου, το τελικό κόστος είναι, $g(x)$. Ως εκ τούτου, αν κρατήσουμε το μηχάνημα που αγοράσαμε τη χρονική στιγμή t μέχρι τη στιγμή x , έπειτα ότι από τη χρονική στιγμή t μέχρι τη στιγμή 5, θα επιβαρυνόμαστε με ένα κόστος $c_{tx} + g(x)$. Έτσι, το x πρέπει να επιλέγεται με βάση την ελαχιστοποίηση αυτού του ποσού, και αυτό ακριβώς αυτό είναι κάνει η σχέση 4.8. Έχουμε υποθέσει ότι το κόστος συντήρησης, η υπολειμματική αξία, και την τιμή αγοράς παραμένουν αμετάβλητες με την πάροδο του χρόνου, έτσι κάθε c_{tx} θα εξαρτάται μόνο από το πόσο καιρό η μηχανή θα διατηρείται στο συνεργείο, δηλαδή κάθε c_{tx} εξαρτάται μόνο από το $x - t$. Πιο συγκεκριμένα,

$$c_{tx} = 1000 + m_1 + \dots + m_{x-t} - s_{x-t}$$

Έτσι υπολογίζουμε,

$$c_{01} = c_{12} = c_{23} = c_{34} = c_{45} = 1000 + 60 - 800 = 260$$

$$c_{02} = c_{13} = c_{24} = c_{35} = 1000 + 60 + 80 - 600 = 540$$

$$c_{03} = c_{14} = c_{25} = 1000 + 60 + 80 + 120 - 500 = 760$$

Ξεκινάμε υπολογίζοντας το $g(4)$ και δουλεύουμε προς τα πίσω μέχρι να φτάσουμε στο $g(0)$ με σκοπό τον προσδιορισμό της βέλτιστης στρατηγικής αντικατάστασης. Τη χρονική στιγμή 4, υπάρχει μόνο μία λογική απόφαση, να κρατήσουμε το μηχάνημα μέχρι τη χρονική στιγμή 5 και να πωληθεί στην του υπολειμματική αξία, και έτσι βρίσκουμε

$$g(4) = c_{45} + g(5) = 260 + 0 = 260*$$

Έτσι, αν ένα νέο μηχάνημα αγοραστεί τη χρονική στιγμή 4, θα πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο συναλλαγής τη χρονική στιγμή 5.

Εάν ένα νέο μηχάνημα αγοραστεί κατά τη χρονική στιγμή 3, μπορούμε να το κρατήσουμε μέχρι τη χρονική στιγμή 4 ή 5. Συνεπώς

$$g(3) = \min \begin{bmatrix} c_{34} + g(4) = 260 + 260 = 520* \\ c_{35} + g(5) = 540 + 0 = 540 \end{bmatrix} = 520$$

Οπότε αν το νέο μηχάνημα έχει αγοραστεί κατά τη στιγμή 3, θα πρέπει να αντικατασταθεί τη στιγμή 4.

Εάν ένα το νέο μηχάνημα έχει αγοραστεί κατά τη στιγμή 2, θα πρέπει να αντικατασταθεί κατά τη χρονική στιγμή 3, 4, ή 5.

$$g(2) = \min \begin{bmatrix} c_{23} + g(3) = 260 + 520 = 780 \\ c_{24} + g(4) = 540 + 260 = 800 \\ c_{25} + g(5) = 760* \end{bmatrix}$$

Έτσι, αν το νέο μηχάνημα αγοραστεί τη χρονική στιγμή 2, θα πρέπει να κρατηθεί μέχρι το διάστημα 5 και στη συνέχεια να πωληθεί.

Εάν ένα νέο μηχάνημα έχει αγοραστεί κατά τη στιγμή 1, μπορεί να πωληθεί κατά το χρόνο 2, 3, ή 4. Έχουμε :

$$g(1) = \min \begin{bmatrix} c_{12} + g(2) = 260 + 760 = 1020* \\ c_{13} + g(3) = 540 + 520 = 1060 \\ c_{14} + g(4) = 760 + 260 = 1020* \end{bmatrix}$$

Άρα, αν ένα νέο μηχάνημα αγοραστεί κατά τη στιγμή 1, θα πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης τη στιγμή 2 ή 4.

Το νέο μηχάνημα που αγοράστηκε κατά το χρόνο 0 μπορούν να διατεθεί πάλι στο εμπόριο κατά την στιγμή 1, 2, ή 3.

$$g(0) = \min \begin{bmatrix} c_{01} + g(1) = 260 + 120 = 1280* \\ c_{02} + g(2) = 540 + 760 = 1300 \\ c_{03} + g(3) = 760 + 520 = 1280* \end{bmatrix}$$

Έτσι, η νέα μηχανή που αγοράστηκε κατά τη χρονική στιγμή 0 θα πρέπει να αντικατασταθεί το χρόνο 1 ή το χρόνο 3.

Έστω ότι επιλέγουμε αυθαίρετα να αντικαταστήσουμε το μηχάνημα από το χρόνο μηδέν το χρόνο 1. Στη συνέχεια, το χρόνο 1 το μηχάνημα μπορεί να διατεθεί στο εμπόριο κατά το χρόνο 2 ή 4. Έστω ότι θα πάει στο εμπόριο για να αντικατασταθεί το χρόνο 2. Στη συνέχεια, το χρόνο 2 το μηχάνημα θα πρέπει να κρατηθεί μέχρι τη στιγμή 5, όπου θα πωληθεί στην υπολειμματική του αξία. Με αυτή την πολιτική αντικατάστασης, θα έχουμε καθαρό κόστος $g(0) = 1.280$. Επίσης βέλτιστες πολιτικές αντικατάστασης είναι να γίνει η αντικατάσταση τις χρονικές στιγμές 1, 4, και 5, ή τις χρονικές στιγμές 3, 4, και 5.

Το παραπάνω πρόβλημα έχει βασιστεί στην παραδοχή ότι όλα τα έξοδα παραμένουν σταθερά στη πάροδο του χρόνου. Η υπόθεση αυτή έγινε αποκλειστικά για την απλούστευση του υπολογισμού του c_{tx} . Σημειώνουμε, επίσης, ότι αν χρησιμοποιηθεί ένα σχεδιασμός με βάση την συντομότερη διαδρομή, η βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης μπορεί είχε μεγάλες διαφορές όσον αφορά το μήκος του ορίζοντα σχεδιασμού. Έτσι, πιο ουσιαστικά αποτελέσματα μπορούν να επιτευχθούν με τη χρήση ενός μεγαλύτερου χρονικού προγραμματισμού.

B' Τρόπος

Θα λύσουμε τώρα το πρόβλημά του μοντέλου αντικατάστασης εξοπλισμού. με έναν εναλλακτικό τρόπο με βάση τους τύπους 4.1 και 4.2. Ορίζουμε το κάθε στάδιο να είναι η χρονική στιγμή t και οι καταστάσεις σε οποιοδήποτε στάδιο να είναι η ηλικία του αναλυτή του κινητήρα στο χρόνο t . Ως $f_t(x)$ ορίζουμε να είναι το ελάχιστο κόστος που προκύπτει από τη χρονική στιγμή t έως τη στιγμή 5, δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή t το κατάστημα έχει έναν αναλυτή ηλικίας x . Το πρόβλημα διαρκεί μέχρι τη χρονική στιγμή 5, έτσι θα πωληθεί το μηχάνημα τη στιγμή 5 και λάβουν $-s_x$. Άρα $f_5(x) = -s_x$ και για $i = 0, 1, 2, 3, 4$ από τον τύπο 4.1 έχουμε

$$f_t(3) = -500 + 1000 + 60 + f_{t+1}(1) \quad \text{buy} \quad (4.9)$$

$$f_t(2) = \min \begin{bmatrix} -600 + 1000 + 60 + f_{t+1}(1) & \text{buy} \\ 120 + f_{t+1}(3) & \text{keep} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$f_t(1) = \min \begin{bmatrix} -800 + 1000 + 60 + f_{t+1}(1) & \text{buy} \\ 80 + f_{t+1}(2) & \text{keep} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$f_0(0) = 1000 + 60 + f_1(1) \quad \text{keep} \quad (4.12)$$

Το σκεπτικό πίσω από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ότι αν έχουμε έναν αναλυτή ηλικίας ενός ή δύο ετών τότε θα πρέπει να αποφασίσουμε μεταξύ αντικατάσταση του μηχανήματος με την αγορά ενός νέου (buy) ή τη διατήρησή του άλλον ένα χρόνο (keep). Στη δεύτερη και τρίτη σχέση συγκρίνουμε το κόστος αυτών των δύο επιλογών. Για κάθε επιλογή, το συνολικό κόστος από την στιγμή $t + 1$ μέχρι το διάστημα 5 είναι το άθροισμα του κόστους κατά το τρέχον έτος, συν το κόστος από την χρονική στιγμή $t + 1$ έως τη χρονική στιγμή 5. Αν έχουμε ένα αναλυτή 3 χρόνια, τότε πρέπει να αντικατασταθεί, και έτσι δεν υπάρχει άλλη επιλογή.

Ο τρόπος που έχουμε ορίσει τα στάδια, δείχνει όταν βρισκόμαστε στο στάδιο μηδέν θα πρέπει να είμαστε και στη χρονική στιγμή μηδέν. Έτσι στην περίπτωση αυτή, πρέπει να συνεχίσουμε με τον αναλυτή για το πρώτο έτος, έτσι έχουμε ήδη μία δαπάνη 1.060 €.

Ξέρουμε ότι $f_5(1) = -800$ €, $f_5(2) = -600$ €, και $f_5(3) = -500$ €, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως όλα τα $f_4(x)$.

$$f_4(3) = -500 + 1000 + 60 + f_5(1) = -240 \quad \text{buy}$$

$$f_4(2) = \min \begin{bmatrix} -600 + 1000 + 60 + f_5(1) = -340 & \text{buy} \\ 120 + f_5(3) = -480 & \text{keep} \end{bmatrix} = -480 \quad \text{keep}$$

$$f_4(1) = \min \begin{bmatrix} -800 + 1000 + 60 + f_5(1) = -540 & \text{buy} \\ 80 + f_5(2) = -520 & \text{keep} \end{bmatrix} = -540 \quad \text{buy}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα $f_3(x)$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να υπολογιστεί το $f_0(0)$, δεδομένου ότι ξεκινάμε με καινούργιο μηχάνημα.

$$f_3(3) = -500 + 1000 + 60 + f_4(1) = 20 \quad \text{buy}$$

$$f_3(2) = \min \begin{bmatrix} -600 + 1000 + 60 + f_4(1) = -80 & \text{buy} \\ 120 + f_4(3) = -120 & \text{keep} \end{bmatrix} = -120 \quad \text{keep}$$

$$f_3(1) = \min \begin{bmatrix} -800 + 1000 + 60 + f_4(1) = -280 & \text{buy} \\ 80 + f_4(2) = -260 & \text{keep} \end{bmatrix} = -280 \quad \text{buy}$$

$$f_2(2) = \min \left[\begin{array}{l} -600 + 1000 + 60 + f_3(1) = 180 \\ 120 + f_3(3) = 140 \end{array} \quad \begin{array}{l} buy \\ keep \end{array} \right] = 140 \quad keep$$

$$f_2(1) = \min \left[\begin{array}{l} -800 + 1000 + 60 + f_3(1) = -20 \\ 80 + f_3(2) = -40 \end{array} \quad \begin{array}{l} buy \\ keep \end{array} \right] = -40 \quad keep$$

$$f_1(1) = \min \left[\begin{array}{l} -800 + 1000 + 60 + f_2(1) = 220 \\ 80 + f_2(2) = 220 \end{array} \quad \begin{array}{l} buy \\ keep \end{array} \right] = 1240 \quad buy \text{ or } keep$$

Άρα καταλήγουμε όπως περιμέναμε, ότι

$$f_0(0) = 1000 + 60 + f_1(1) = 1280$$

που είναι το ίδιο ποσό που βρήκαμε στην πρώτη λύση που εφαρμόσαμε στο πρόβλημα μας. Τώρα θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη πολιτική που θα ακολουθήσουμε. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ που το μηχανήμα είναι ηλικίας ενός έτους, άρα επιλέγουμε το πώς θα δράσουμε με βάση το $f_1(1)$ το οποίο μας λέει ότι θα έχουμε το ίδιο κόστος είτε κρατήσουμε το μηχανήμα είτε το πουλήσουμε.

Έστω ότι προτιμάμε να το κρατήσουμε, έτσι τον δεύτερο χρόνο ο αναλυτής θα είναι δύο ετών άρα η απόφασή μας θα εξαρτηθεί από την τιμή του $f_2(2)$ στο οποίο η ποιο συμφέρουσα επιλογή είναι πάλι να το κρατήσουμε. Ακολουθώντας αυτή την επιλογή οδηγούμαστε στο $f_3(3)$ όπου εδώ αγοράζουμε ένα νέο μηχανήμα, άρα τον τέταρτο χρόνο θα έχουμε έναν αναλυτή με ένα χρόνο ζωής $f_4(1)$ όπου θα πρέπει να αγοράσουμε πάλι ένα καινούργιο.

Αν στην αρχή επιλεχτεί να αγοραστεί νέο οδηγούμαστε στο $f_2(1)$ το κρατάμε μέχρι τον τέταρτο χρόνο όπου θα είναι $f_4(3)$ και τότε αγοράζουμε έναν καινούργιο αναλυτή.

Οι βέλτιστες πολιτικές που μπορούμε λοιπόν να ακολουθήσουμε είναι *bkkbb* και *bbkkb*, όπου και οι δύο έχουν το ίδιο κόστος

Κεφάλαιο 5

Το πρόβλημα κατανομής πόρων

5.1 Το βασικό πρόβλημα

Στα προβλήματα κατανομής πόρων, πρέπει οι περιορισμένοι πόροι να κατανεμηθούν μεταξύ των διαφόρων δραστηριοτήτων. Τέτοιου είδους προβλήματα, συχνά επιλύονται με τον δυναμικό προγραμματισμό αλλά και με γραμμικό προγραμματισμό. Για να χρησιμοποιήσουμε γραμμικό προγραμματισμό θα πρέπει να ισχύουν οι τρεις ακόλουθες υποθέσεις:

- Η ποσότητα του πόρου που πρέπει να κατανεμηθεί στις δραστηριότητες δεν πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός.
- Το όφελος από κάθε δραστηριότητα είναι ανάλογη της ποσότητας του πόρου που χρησιμοποιήθηκε για αυτή τη δραστηριότητα.
- Το όφελος από περισσότερες της μιας δραστηριότητες είναι το άθροισμα του όφελους που έχουμε κάθε μία από τις επιμέρους δραστηριότητες.

Ακόμη και αν οι υποθέσεις 1 και 2 δεν ισχύουν, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δυναμικό προγραμματισμό αποτελεσματικά όταν ισχύει η υπόθεση 3 και όταν το ποσό των πόρων που διατίθενται για κάθε δραστηριότητα είναι μέλος ενός πεπερασμένου συνόλου.

Το βασικό μοντέλο προβλημάτων αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, και απεικονίζει την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού σε μία κατηγορία προβλημάτων που είναι δεν είναι πραγματικά δυναμική (δηλαδή, που απαιτεί μια σειρά από αποφάσεις). Η απλούστερη μορφή του προβλήματος κατανομής πόρων έχει ως εξής.

Έστω ότι δίνονται X μονάδες ενός πόρου και υποθέτουμε ότι αυτός ο πόρος θα πρέπει να κατανέμεται σε N δραστηριότητες. Δίνονται επίσης N πίνακες δεδομένων $r_i(x)$, για $i = 1, \dots, N$ και $x = 0, 1, \dots$, που αντιπροσωπεύουν την επιστροφή πραγματοποιείται από την κατανομή των x μονάδων του πόρου για την δραστηριότητα i . Υποθέτουμε,

εκτός αν ορίζεται διαφορετικά, ότι όλες οι συναρτήσεις επιστροφής είναι μη φθίνουσες συναρτήσεις των επιχειρημάτων τους.) Το πρόβλημα είναι να διατεθούν όλες οι X μονάδες των πόρων για τις δραστηριότητες, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση, παραδείγματος χάρη να επιλεχθούν N μη αρνητικοί ακέραιοι x_i , $i = 1, \dots, N$ που μεγιστοποιεί το

$$\sum_{i=1}^N r_i(x_i) \quad (5.1)$$

υπό τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^N x_i = X \quad (5.2)$$

Παρά το γεγονός ότι η επιλογή της λύσης x_i , με $i = 1, \dots, N$, φαίνεται να είναι η μόνη απόφαση που μπορεί να ληφθεί σε μια δεδομένη στιγμή, με το να προσφύγουμε σε μία λύση μέσω δυναμικού προγραμματισμού βλέπουμε το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο. Έχοντας ορίσει τις δραστηριότητες αυθαίρετα αλλά με σταθερούς αριθμούς από το 1 έως το N , παίρνουμε τις μονάδες X των πόρων και την πρώτη κατανομή ενός ποσού x_1 με δραστηριότητα 1. Στη συνέχεια διαθέτουμε x_2 μονάδες από τις υπόλοιπες $X - x_1$ μονάδες του πόρου για την δραστηριότητα 2, στη συνέχεια, x_3 μονάδες του πόρου για την δραστηριότητα 3, κλπ. Υποθέτοντας ότι έχουν ήδη γίνει αρκετές κατανομές, θα πρέπει να ξέρουμε το αριθμό των δραστηριοτήτων καθώς και τον αριθμό των πόρων που δεν έχουν κατανεμηθεί ακόμα. Αν και θα ήταν καλύτερο να γνωρίζουμε τι έχει ληφθεί από κάθε μία από τις δραστηριότητες που κατανεμήθηκαν προηγουμένως, μας αρκεί και μόνο ο συνολικός αριθμός των κατανομών που έχουν ήδη γίνει, και έτσι μπορούμε να καθορίσουμε τη συνάρτηση βέλτιστης λειτουργίας ως εξής :

$f_k(x)$ = η μέγιστη δυνατή απόδοση που μπορεί να έχουμε από τις k δραστηριότητες μέσω του N , έχοντας x μονάδες πόρων που απομένουν να κατανεμηθούν.

Με τη μεταβλητή k συμβολίζουμε το στάδιο ως δείκτης για να ξεχωρίζει από τις άλλες μεταβλητές που απεικονίζουν τις καταστάσεις. Η μεταβλητή που απεικονίζει τις καταστάσεις θα μπορούσε να οριστεί ως η συνολική κατανομή που έχει γίνει ή το k θα μπορούσε να οριστεί ως ο αριθμός των δραστηριοτήτων που έχουν γίνει μέχρι τώρα θεωρώντας ότι η αναδρομική σχέση που χρησιμοποιούμε είναι κατάλληλη για αυτόν τον ορισμό. Από την αρχή του βελτιστού, η αναδρομική με βάση τον παραπάνω ορισμό είναι :

$$f_k(x) = \max_{x_k=0,1,\dots,x} [r_k(x_k) + f_{k+1}(x - x_k)] \quad (5.3)$$

όπου x , είναι η κατανομή με δραστηριότητα k και το $f_k(x)$ πρέπει να υπολογιστεί για $x = 0, \dots, X$. Η οριακή συνθήκη είναι

$$f_N(x) = r_N(x) \quad (5.4)$$

Έστω ότι υπάρχουν δύο τύποι πόρων που θα διατεθούν σε N δραστηριότητες, x_k μονάδες του πόρου τύπου 1 και y_k μονάδες του πόρου τύπου 2.

Ορίζουμε την αναδρομική σχέση

$$f_k(x, y) = \max_{\substack{x_k = 0, 1, \dots, x \\ y_k = 0, 1, \dots, y}} [r_k(x_k, y_k) + f_{k+1}(x - x_k, y - y_k)] \quad (5.5)$$

Για δεδομένα k , x και y χρειάζονται $(x + 1)(y + 1)$ προσθήκες. Έτσι για δεδομένο k είναι απαραίτητες $\sum_{x=0}^X \sum_{y=0}^Y (x + 1)(y + 1) \approx \frac{X^2}{2} \frac{Y^2}{2}$ προσθήκες. Έτσι για τη λύση απαιτούνται περίπου $NX^2Y^2/4$ προσθήκες.

5.2 Αριθμητική εφαρμογή

Πίνακας 5.1: Πίνακας δεδομένων υποθετικού προβλήματος

x_1	$r_1(x_1)$	x_2	$r_2(x_2)$	x_3	$r_3(x_3)$	x_4	$r_4(x_4)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	1	1	2	1	1
2	7	2	2	2	4	2	3
3	10	3	4	3	6	3	6
4	12	4	8	4	8	4	9
5	13	5	13	5	10	5	12
6	14	6	17	6	12	6	14
7	14	7	19	7	14	7	16
8	14	8	20	8	16	8	17

Θα λύσουμε τώρα ένα μικρό υποθετικό πρόβλημα με $x = 8$ και $y = 4$. Τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκονται στον παραπάνω πίνακα (5.1). Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $p_k(x)$ το οποίο χαρακτηρίζει την βέλτιστη κατανομή της δραστηριότητας k , εάν έχουμε x μονάδες πόρων για να διανεμηθούν $k, k + 1, \dots, N$ δραστηριότητες. Ως εκ τούτου, το $p_k(x)$ είναι η τιμή του x_k που μεγιστοποιεί τη δεξιά πλευρά του τύπου 5.3. Η οριακή συνθήκη 5.4 μας δίνει:

$$f_4(0) = 0 \quad f_4(1) = 1 \quad f_4(2) = 3 \quad f_4(3) = 6 \quad f_4(5) = 12$$

$$f_4(5) = 12 \quad f_4(6) = 14 \quad f_4(7) = 16 \quad f_4(8) = 17$$

Από την σχέση 5.3 υπολογίζουμε :

$$f_3(0) = 0$$

$$p_3(0) = 0$$

$$f_3(1) = \max[0 + 1, 2 + 0] = 2$$

$$p_3(1) = 1$$

$$f_3(2) = \max[0 + 3, 2 + 1, 4 + 0]$$

$$p_3(2) = 2$$

$$f_3(3) = \max[0 + 6, 2 + 3, 4 + 1, 6 + 0] = 6$$

$$p_3(3) = 0 \text{ or } 3$$

$$f_3(4) = \max[0 + 9, 2 + 6, 4 + 3, 6 + 1, 8 + 0] = 9$$

$$p_3(4) = 0$$

$$f_3(5) = \max[0 + 12, 2 + 9, 4 + 6, 6 + 3, 8 + 1, 10 + 0] = 12$$

$$p_3(5) = 0$$

$$f_3(6) = 14$$

$$p_3(6) = 0 \text{ or } 1$$

$$f_3(7) = 16$$

$$p_3(7) = 0, 1 \text{ or } 2$$

$$f_3(8) = 18$$

$$p_3(8) = 1, 2 \text{ or } 3$$

$$f_2(0) = 0$$

$$p_2(0) = 0$$

$$f_2(1) = \max[0 + 2, 1 + 0] = 2$$

$$p_2(1) = 0$$

$$f_2(2) = \max[0 + 4, 1 + 2, 2 + 0] = 4$$

$$p_2(2) = 0$$

$$f_2(3) = \max[0 + 6, 1 + 4, 2 + 2, 4 + 0] = 6$$

$$p_2(3) = 0$$

$$f_2(4) = 9$$

$$p_2(4) = 0$$

$$f_2(5) = 13$$

$$p_2(5) = 5$$

$$f_2(6) = 17$$

$$p_2(6) = 6$$

$$f_2(7) = 19$$

$$p_2(7) = 6 \text{ or } 7$$

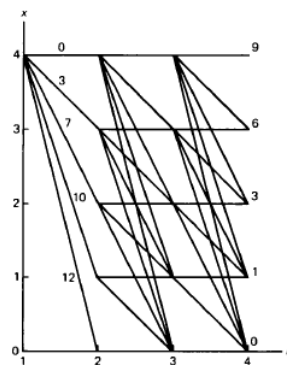
$$f_2(8) = 21$$

$$p_2(8) = 6 \text{ or } 7$$

$$f_1(8) = \max[0 + 21, 3 + 19, 7 + 17, 10 + 13, 12 + 9, 13 + 6, 14 + 4, 14 + 2, 14 + 0] = 24$$

$$p_1(8) = 2$$

Τα $f_1(7)$, $f_1(6)$, κ.τ.λ. δεν χρειάζεται να υπολογιστούν αφού γνωρίζουμε ότι ξεκινάμε με οχτώ μονάδες πόρων. Η βέλτιστη απόδοση από την κατανομή των 8 μονάδων συνολικά είναι 24. Αφού $p_1(8) = 2$, διαθέτουμε 2 μονάδες από τους πόρους στη δραστηριότητα 1, και μένουν άλλοι 6. Από το $p_2(6) = 6$, βλέπουμε ότι θα πρέπει να διαθέσουμε 6 μονάδες για τη δραστηριότητα 2, και σε αυτό το σημείο τελειώνουν οι πόροι. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι $r_1(2) + r_2(6) = 24 = f_1(8)$.



Εικόνα 5.1

Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα αυτό ως ένα πρόβλημα μεγαλύτερου μονοπατιού, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1 για $N = 4$ και $X = 4$ αφού για να το

σχεδιάσαμε με $X = 8$ θα χρειαζόντουσαν πάρα πολλές γραμμές. Ο αριθμός στο τόξο από το (k, x) στο $(k + 1, x - y)$ από το οποίο παίρνουμε πληροφορία μόνο για το στάδιο 1, είναι $r_k(y)$ και ο αριθμός που συνδέεται με το τερματικό σημείο $(4, x)$ είναι η $r_4(x)$. Τώρα το πρόβλημα μπορεί να λυθεί όπως στο κεφάλαιο 3. Η υπολογιστική διαδικασία απαιτεί $(N - 2)[(X + 1)(X + 2)/2] + (X + 1)$ προσθήκες και σχεδόν τόσες συγκρίσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί εξετάζονται k έως N δραστηριότητες και απαιτούνται $X + 1$ προσθήκες για $x = X$, και X προσθήκες για $x = X - 1, \dots$, και, τέλος, μια προσθήκη για το $x = 0$. Αυτό μας δίνει $(X + 1)(X + 2)/2$ προσθήκες και πρέπει να γίνει για $k = N - 1$, τότε $N - 2, \dots$, και, τέλος, $k = 2$. Στη συνέχεια, για $k = 1$ απαιτούνται $X + 1$ προσθήκες. Για $X = 100$ και $N = 12$, χρειαζόμαστε περίπου 50.000 προσθήκες. Υπάρχουν $\binom{X + N - 1}{N - 1}$ διαφορετικές πολιτικές κατανομής και κάθε απαίτηση χρειάζεται $N - 1$ προσθήκες για την αξιολόγηση της. Ως εκ τούτου, για $X = 100$ και $N = 12$, απαιτούνται περισσότερες από 10^{15} προσθήκες.

5.3 Απροσδιόριστοι αρχικοί πόροι

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο τύποι των πόρων που πρέπει να κατανεμηθούν σε N δραστηριότητες. Έστω ότι έχουμε X μονάδες πόρου τύπου 1 και Y μονάδες πόρου τύπου 2. Τα δεδομένα που μας επιστρέφονται απαρτίζουν ένα σει από N συναρτήσεις $r_k(x_k, y_k)$ που μας δίνουν το αποτέλεσμα από μία κατανομή x_k μονάδων πόρου τύπου 1 και y_k μονάδων πόρου τύπου 2 για μία δραστηριότητα k . Το ζητούμενο είναι να διαμορφωθεί ο τύπος του δυναμικού προγραμματισμού κάτω από τις συγκεκριμένες συνθήκες και να καθοριστεί κατά προσέγγιση ο αριθμός των προσθηκών ως συνάρτηση του X , Y , και N .

Λύση Έχουμε,

$f_k(x, y)$ = η μέγιστη απόδοση που μπορεί να ληφθεί από τις k έως N δραστηριότητες, δεδομένου ότι έχουμε x μονάδες από τον πόρο 1 και y μονάδες του πόρου 2.

$$f_k(x, y) = \max_{\substack{x_k = 0, 1, \dots, x \\ y_k = 0, 1, \dots, y}} [r_k(x_k, y_k) + f_{k+1}(x - x_k, y - y_k)] \quad (5.6)$$

$$f_N(x, y) = r_N(x, y)$$

Για δεδομένα k , x , και y , χρειάζονται $(x + 1)(y + 1)$ προσθήκες. Ως εκ τούτου, για δεδομένο k χρειάζονται,

$$\sum_{x=0}^X \sum_{y=0}^Y (x + 1)(y + 1) = \frac{X^2}{2} \frac{Y^2}{2}$$

προσθήκες. Συνεπώς, για την λύση απαιτούνται συνολικά περίπου $NX^{22}/4$ προσθήκες.

Υποθέτουμε ότι δεν γνωρίζουμε τους αρχικούς πόρους που διαθέτουμε. Έστω ότι κάθε μονάδα του πόρου 1 κοστίζει 2 € και κάθε μονάδα και του πόρου 2 κοστίζει 3 €. Ξεκινάμε με $Z = 2X + 3Y$ ευρώ και το ερώτημα είναι, ((Πόσες μονάδες του πόρου 1 και πόσες του πόρου 2 θα πρέπει να αγοράσουν έτσι ώστε αν θέλουμε να τις διαθέσει στη συνέχεια ιδανικά για N δραστηριότητές, να μεγιστοποιήσουν τη συνολική απόδοση;)) Μια απόφαση είναι να αγοραστούν X μονάδες από τον πόρο 1 και Y μονάδες από τον πόρο 2, αλλά ενδέχεται να πετύχουμε κάτι καλύτερο ξεκινώντας από κάποια άλλη αρχική κατάσταση του πόρου. Από τα δεδομένα του προβλήματος θα πρέπει να μας είναι γνωστά τα $r_k(x_k, y_k)$ για όλα τα x_k και y_k έτσι ώστε $2x_k + 3y_k \leq Z$

Χρησιμοποιώντας τη παραπάνω μέθοδο που μας έδωσε τον τύπο (5.6 μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(x, y)$ για όλα τα x και y που ικανοποιούν την σχέση $2x + 3y \leq Z$ και ομοίως για όλα αυτά τα x, y θα βρούμε τη μέγιστη τιμή που παίρνει η $f_1(x, y)$. Είναι καλύτερα όμως να υπολογίζουμε πρώτα για κάθε δραστηριότητα ένα πίνακα $R_i(z), z = 0, 1, \dots$ δίνοντας την καλύτερη δυνατή απόδοση που μπορούμε να έχουμε από την κατανομή των z ευρώ. Αυτό το πετυχαίνουμε με άμεση απαρίθμηση, μεγιστοποιώντας τον αριθμό των μονάδων των πιο ακριβών πόρων, από τον τύπο

$$R_i(z) = \max_{y_i=0,1,\dots,[z/3]} \left[r_i \left(\left\lfloor \frac{z-3y_i}{2} \right\rfloor, y_i \right) \right] \quad (5.7)$$

Από τον παραπάνω τύπο βλέπουμε ότι $[z/3]$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός των μονάδων του πόρου 2 που μπορούμε να αγοράσουμε με z ευρώ και $[(z-3y_i)/2]$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός των μονάδων του πόρου 1 που μπορούμε να αγοράσετε αν έχουμε z ευρώ και να αγοράσουμε y μονάδες του πόρου 2.

Όταν οι N πίνακες $R_i(z), i = 1, \dots$ υπολογισθούν, ορίζουμε

$f_k(z) =$ η μέγιστη απόδοση από τη κατανομή συνολικά z ευρώ στις k έως N δραστηριότητες.

Η αναδρομική σχέση θα είναι,

$$f_k(z) = \max_{z_k=0,\dots,z} [R_k(z_k) + f_{k+1}(z - z_k)] \quad (5.8)$$

Και η συνοριακή συνθήκη είναι,

$$f_N(z) = R_N(z) \quad (5.9)$$

Ο υπολογισμός του αριθμού των συγκρίσεων και των προσθηκών που απαιτούνται από αυτή τη μέθοδος δίνει περίπου $NZ^2/2$ για κάθε λύση της (5.8), χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα Που δόθηκε νωρίτερα στο κεφάλαιο με Z να αντικαθιστά το x , και περίπου $NZ^2/6$ συγκρίσεις για τον προσδιορισμό του $R_i(z)$. Το σύνολο είναι περίπου NZ^2 λειτουργίες.

Αν το πρόβλημα λυθεί με την μέθοδο που μας έδωσε τον τύπο 5.6, $(-1)X^2Y^2/2$ επιχειρήσεις θα πρέπει να υπολογίζουν τα f_i , για όλες τις τιμές του πόρου 1 έως το X και όλες οι τιμές του πόρου 2 έως το Y . Ως εκ τούτου, εάν $x = Z/2$ και $y = z/3$, τότε απαιτούνται πράξεις.

5.4 Εφαρμογή κατανομής πόρων

Μία εταιρία διαθέτει 6.000 € για να επενδυθούν, καθώς είναι διαθέσιμες τρεις επενδύσεις. Αν d_j € (σε χιλιάδες) είναι το ποσό που θα επενδυθεί στην i επένδυση, τότε λαμβάνουμε καθαρή παρούσα αξία (σε χιλιάδες) $r_j(d_j)$, όπου το $r_j(d_j)$ είναι σε κάθε περίπτωση :

$$r_1(d_1) = 7d_1 + 2 \quad (d_1 > 0)$$

$$r_2(d_2) = 3d_2 + 7 \quad (d_2 > 0)$$

$$r_3(d_3) = 4d_3 + 5 \quad (d_3 > 0)$$

$$r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = 0$$

Το ποσό για κάθε επένδυση πρέπει να είναι ακριβές πολλαπλάσιο του 1.000 €. Το ερώτημα είναι πώς θα πρέπει να διαθέσει η εταιρία 6.000 €, για τη μεγιστοποίηση της καθαρής παρούσας αξίας που λάβει από τις επενδύσεις;

Λύση

Η απόδοση της κάθε επένδυσης δεν είναι ανάλογη με το ποσό που επενδύθηκε σε αυτή [για παράδειγμα, $16 = r_1(2)$ ενώ $2r_1(1) = 18$]. Έτσι, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γραμμικό προγραμματισμό για να βρούμε τη βέλτιστη λύση σε αυτό το πρόβλημα. Από μαθηματική άποψη, το πρόβλημα της εταιρίας μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$\max[r_1(d_1) + r_2(d_2) + r_3(d_3)]$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = 6$$

όπου d_j θετικός ακέραιος ($j = 1, 2, 3$). Αν το $r_j(d_j)$ ήταν γραμμικό, τότε θα είχαμε πρόβλημα σακιδίου. Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού, ξεκινάμε με τον προσδιορισμό των σταδίων. Για ένα δεδομένο στάδιο, αυτό που θα πρέπει να γνωρίζουμε για να καθοριστεί το βέλτιστο ύψος της επένδυσης, είναι το ποσό των χρημάτων που είναι διαθέσιμο για τις επενδύσεις $t, t + 1, \dots, 3$. Έτσι, ορίζουμε την κατάσταση σε οποιοδήποτε στάδιο να είναι το ποσό των χρημάτων (σε χιλιάδες) που διατίθενται για τις επενδύσεις, $t, t + 1, \dots, 3$. Δεν μπορούμε

ποτέ να διαθέσουμε περισσότερα από 6.000 €, έτσι τις πιθανές καταστάσεις σε κάθε στάδιο είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, και 6. Ορίζουμε $f_t(d_t)$ να είναι η μέγιστη καθαρή παρούσα αξία (ΚΠΑ) που μπορεί να αποκτηθεί με την επένδυση d_t χιλιάδες € στις επενδύσεις $t, t+1, \dots, 3$. Επίσης ορίζουμε $x_t(d_t)$ να είναι το ποσό που θα πρέπει να επενδυθεί στην t επένδυση για την επίτευξη του $f_t(d_t)$. Θα ξεκινήσουμε να εργαζόμαστε υπολογίζοντας από το τέλος προς την αρχή. Θα ξεκινήσουμε με τα $f_3(0), f_3(1), \dots, f_3(6)$ και στη συνέχεια θα καθορίσουμε τα $f_2(0), f_2(1), \dots, f_2(6)$ και στο τέλος θα υπολογίσουμε το $f_1(6)$. Τότε από τα ενδιάμεσα βήματα θα μπορούμε να καθορίσουμε το ποσό που θα πρέπει να διατεθεί για την κάθε επένδυση.

Στάδιο 3

Πρώτα θα υπολογίσουμε τα $f_3(0), f_3(1), \dots, f_3(6)$. Βλέπουμε ότι το $f_3(d_3)$ μεγαλώνει με την επένδυση όλων των διαθέσιμων χρημάτων (d_3) στην επένδυση 3. Έτσι,

$f_3(0) = 0$	$x_3(0) = 0$
$f_3(1) = 9$	$x_3(1) = 1$
$f_3(2) = 13$	$x_3(2) = 2$
$f_3(3) = 17$	$x_3(3) = 3$
$f_3(4) = 21$	$x_3(4) = 4$
$f_3(5) = 25$	$x_3(5) = 5$
$f_3(6) = 29$	$x_3(6) = 6$

Στάδιο 2

Για να προσδιοριστούν τα $f_2(0), f_2(1), \dots, f_2(6)$, εξετάζουμε όλα τα πιθανά ποσά που μπορούν να τοποθετηθούν στην επένδυση 2. Για να υπολογίσουμε το $f_2(d_2)$, θεωρούμε ότι x_2 είναι το ποσό που επενδύεται στην επένδυση 2. Στη συνέχεια, η ΚΠΑ του $r_2(x_2)$ θα είναι από την επένδυση 2, και ΚΠΑ του $f_3(d_2 - x_2)$ θα λαμβάνεται από την επένδυση 3. Δεδομένου ότι το x_2 θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την καθαρή παρούσα αξία που θα κερδίσουν από τις επενδύσεις 2 και 3, γράφουμε

$$f_2(d_2) = \max_{x_2} [r_2(x_2) + f_3(d_2 - x_2)]$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων

Όπου το x_2 πρέπει να ανήκει στο $(0, 1, \dots, d_2)$. Οι υπολογισμοί για τα $f_2(0), f_2(1), \dots, f_2(6)$ και τα $x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(6)$ δίνονται στον πίνακα 5.2

Στάδιο 1

Σύμφωνα με την μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στο στάδιο 2, ο τύπος με τον οποίο θα υπολογίσουμε το $f_1(6)$ είναι :

$$f_1(6) = \max_{x_1} [r_1(x_1) + f_2(6 - x_1)]$$

όπου το x_1 πρέπει να είναι $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Τα αποτελέσματα από τους υπολογισμούς για το $f_1(6)$ βρίσκονται στον Πίνακα 5.3.

Προσδιορισμός της βέλτιστης κατανομής των πόρων

Υπολογίσαμε ότι $x_1(6) = 4$, οπότε η εταιρία θα επενδύσει 4.000 € στην επένδυση 1. Έτσι για τις επενδύσεις 2 και 3 θα έχουμε για να επενδύσουμε $6000 - 4000 = 2000$ €. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να επενδυθούν $x_2(2) = 1.000$ ευρώ στην επένδυση 2. Επομένως μένουν 1.000 € για την επένδυση 3, έτσι η εταιρία επιλέγει να επενδύσει $x_3(1) = 1.000$ ευρώ στην 3. Ως εκ τούτου, η εταιρία μπορεί να πετύχει τη μέγιστη καθαρή παρούσα αξία της $f_1(6) = 49.000$ ευρώ επενδύοντας 4.000 ευρώ στην επένδυση 1, 1.000 ευρώ στην επένδυση 2 και 1.000 ευρώ στην επένδυση 3.

Προσέγγιση του Παράδειγμα Πόρων με δίκτυο

Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια αναπαράσταση του δικτύου και ισοδυναμεί με την εύρεση της μεγαλύτερης διαδρομής από το $(1, 6)$ έως $(4, 0)$ στο σχήμα 5.2.

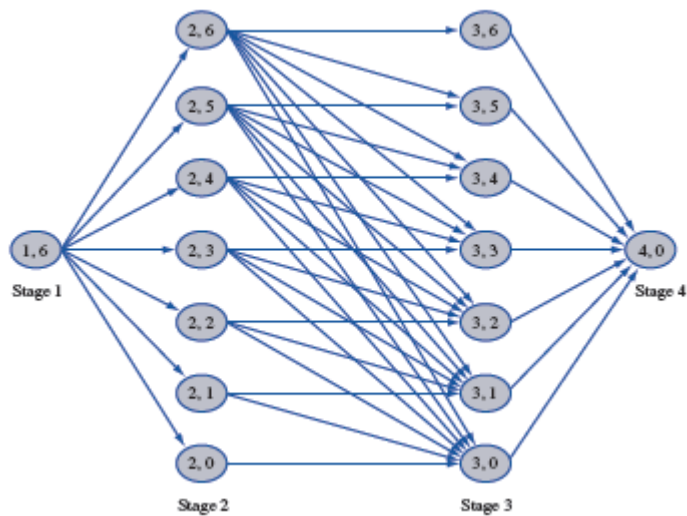
Στο σχήμα, ο κόμβος (t, d) αντιπροσωπεύει την κατάσταση στην οποία d χιλιάδες € είναι διαθέσιμα για τις επενδύσεις $t, t_1, \dots, 3$. Το τόξο που συνδέει τους κόμβους (t, d) και $(t_1, d - x)$ έχει μήκος $r_t(x)$ που αντιστοιχεί στην καθαρή παρούσα αξία προκύπτει επενδύοντας x χιλιάδες € στην επένδυση t . Για παράδειγμα, το τόξο που ενώνει κόμβους $(2, 4)$ και $(3, 1)$ έχει μήκος $r_2(3) = 16.000$ €, που αντιστοιχεί σε 16.000 € την καθαρή παρούσα αξία που μπορούν να αποκτηθούν με την επένδυση 3.000 € στην επένδυση 2. Σημειώνουμε ότι δεν εντάσσονται όλα τα ζεύγη των κόμβων στα παρακείμενα στάδια με τόξα. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει τόξο που να συνδέει τους κόμβους $(2, 4)$ και $(3, 5)$. Αυτό συμβαίνει γιατί παραδείγματος χάρη αν έχουμε μόνο 4.000 € διαθέσιμα για επενδύσεις 2 και 3, δεν γίνεται να επενδύσουμε 5.000 € στην επένδυση 3. Από σχήμα βλέπουμε ότι η καλύτερη διαδρομή από $(1, 6)$ έως $(4, 0)$ είναι $(1, 6) - (2, 2) - (3, 1) - (4, 0)$.

Πίνακας 5.2: Υπολογισμός $f_2(1), \dots, f_2(6)$

d_2	x_2	$r_2(x_2)$	$f_3(d_2 - x_2)$	NPF 2,3	$f_2(d_2), x_2(d_2)$
0	0	0	0	0	$f_2(0) = 0, x_2(0) = 0$
1	0	0	0	0	$f_2(1) = 10, x_2(1) = 1$
1	1	10	0	10*	
2	0	0	13	13	$f_2(2) = 19, x_2(2) = 1$
2	1	10	9	19*	
2	2	13	0	13	
3	0	0	17	17	$f_2(3) = 26, x_2(3) = 1$
3	1	10	13	23*	
3	2	13	9	22	
3	3	16	0	16	
4	0	0	21	21	$f_2(4) = 27, x_2(4) = 1$
4	1	10	17	27*	
4	2	13	3	26	
4	3	16	9	25	
4	4	19	0	19	
5	0	0	25	25	$f_2(5) = 31, x_2(5) = 1$
5	1	10	21	31*	
5	2	13	17	30	
5	3	16	13	29	
5	4	19	9	28	
5	5	22	0	22	
6	0	0	29	29	$f_2(6) = 35, x_2(6) = 1$
6	1	10	25	35*	
6	2	13	21	34	
6	3	16	17	33	
6	4	19	13	32	
6	5	22	9	31	
6	6	25	0	25	

Πίνακας 5.3: Υπολογισμός $f_1(6)$

d_1	x_1	$r_1(x_1)$	$f_2(6 - x_1)$	NPF 1-3	$f_1(6), x_1(6)$
6	0	0	35	40	
6	1	9	31	40	
6	2	16	27	43	
6	3	23	23	46	
6	4	30	19	49*	$f_1(6) = 49, x_1(6) = 4$
6	5	37	10	47	
6	6	44	0	47	



Εικόνα 5.2: Δίκτυο Κατανομής Πόρων

5.5 Γενικευμένο πρόβλημα Κατανομής Πόρων

Θεωρούμε τώρα μια γενικευμένη εκδοχή του παραπάνω παραδείγματος. Υποθέσουμε ότι έχουμε διαθέσιμες w μονάδες ενός πόρου και T δραστηριότητες για τις οποίες μπορεί να διατεθεί ο πόρος. Αν η δραστηριότητα t εκτελείται στο επίπεδο x_t , όπου υποθέτουμε ότι x_t , πρέπει να είναι θετικός ακέραιος αριθμός, τότε $g_t(x_t)$ μονάδες του πόρου χρησιμοποιούνται για τη δραστηριότητα t , και παίρνουμε $r_t(x_t)$. Το πρόβλημα καθορισμού της κατανομής των πόρων που μεγιστοποιεί το συνολικό όφελος γράφεται ως εξής :

$$\max \sum_{t=1}^{t=T} r_t(x_t) \quad (5.10)$$

$$\sum_{t=1}^{t=T} g_t(x_t) \leq w$$

όπου x_t θετικός ακέραιος. Μερικές πιθανές ερμηνείες του $r_t(x_t)$, $g_t(x_t)$ και w δίδονται στον πίνακα 5.5 Για την επίλυση της παραπάνω σχέση με δυναμικό προγραμματισμό, πρέπει να καθορίσει το $f_t(d)$ να είναι το μέγιστο όφελος που μπορούμε να έχουμε από τις δραστηριότητες $t, t + 1, \dots, T$ αν οι d μονάδες του πόρου διατεθούν για δραστηριότητες $t, t + 1, \dots, T$. Γενικεύοντας τον παραπάνω τύπο 5.10 έχουμε

$$f_{T+1}(d) = 0 \quad \text{for all } d \quad (5.11)$$

$$f_t(d) = \max_{x_t} [r_t(x_t) + f_{t+1}[d - g_t(x_t)]]$$

όπου x_t θετικός ακέραιος αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση $g_t(x_t) \leq d$. Το $x_t(d)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή του x_t που πετυχαίνει το $f_t(d)$. Για να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 5.11 για να καθοριστεί η βέλτιστη κατανομή των πόρων στις δραστηριότητες $1, 2, \dots, T$, ξεκινάμε με τον προσδιορισμό όλων των $f_T(\cdot)$ και $x_T(\cdot)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη σχέση 5.11 για τον προσδιορισμό όλων των $f_{T-1}(\cdot)$ και $x_{T-1}(\cdot)$ και συνεχίζουμε να εργαζόμαστε προς τα πίσω με αυτόν τον τρόπο έως ότου όλα τα $f_2(\cdot)$ και $x_2(\cdot)$ να προσδιοριστούν. Έτσι υπολογίζουμε τώρα το $f_1(w)$ και $x_1(w)$. Στη συνέχεια Εφαρμόζουμε τη δραστηριότητα 1 σε ένα επίπεδο $x_1(w)$. Άρα έχουμε $wg_1[x_1(w)]$ μονάδες του πόρου που μπορούν να διατεθούν για τις δραστηριότητες $2, 3, \dots, T$. Στη συνέχεια για τη δραστηριότητα 2 εφαρμόζεται για το επίπεδο $x_2[wg_1[x_1(w)]]$. Με αυτό τον τρόπο συνεχίζουμε μέχρι να καθοριστεί το επίπεδο που πρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε δραστηριότητα.

Ερμηνεία του $r_t(x_t)$	Ερμηνεία του $g_t(x_t)$	Ερμηνεία του w
Το κέρδος μας από την τοποθέτηση x_t αντικειμένων τύπου t σε ένα σακίδιο	Βάρος των x_t αντικειμένων τύπου t	Μέγιστο βάρος που μπορεί να αντέξει το σακίδιο μας
Ο βαθμός που πήραμε σε ένα μάθημα t υποθέτοντας ότι διαβάσαμε το μάθημα αυτό x_t ώρες την εβδομάδα	Αριθμός ωρών ανά βδομάδα, x_t που ξοδέψαμε διαβάζοντας το μάθημα t	Συνολικός αριθμός ωρών διαθέσιμων για μελέτη κάθε εβδομάδα
Οι πωλήσεις ενός προϊόντος στην περιοχή t αν x_t πωλητές απασχολούνται στη συγκεκριμένη περιοχή	Κόστος ανάθεσης της περιοχής t σε x_t πωλητές	Συνολικό κεφάλαιο διαθέσιμο για δυναμικό των πωλητών
Ο αριθμός συναγερμών λόγω φωτιάς ανά βδομάδα που απαντήθηκε σε λιγότερο από ένα λεπτό αν σε μία περίμετρο t αντιστοιχούν x_t μηχανές πυρόσβεσης	Κόστος ανά εβδομάδα συντήρησης x_t μηχανών σε περίμετρο t	Συνολικό κεφάλαιο διαθέσιμο για συντήρηση των μηχανών

5.6 Το πρόβλημα του Σακιδίου

Η πιο σημαντική εφαρμογή των προβλημάτων κατανομής πόρων είναι το πρόβλημα του σακιδίου. Το πρόβλημα του σακιδίου ασχολείται κατά κύριο λόγο με την κατάσταση στην οποία ένας στρατιώτης, ένας οδοιπόρος κτλ πρέπει να αποφασίσει για τα πιο σημαντικά στοιχεία που θα βάλει σε ένα σακίδιο για να έχει μαζί του. Το πρόβλημα εκφράζει με διαφορετικό τρόπο ένα γενικό μοντέλο κατανομής πόρων στο οποίο μία περιορισμένη πηγή εσόδων εκχωρείται σε έναν αριθμό εναλλακτικών επιλογών με στόχο την μεγιστοποίηση των απολαβών (π.χ. οι περιορισμένοι πόροι που εκχωρούνται σε ένα projects). Το πρόβλημα του σακιδίου είναι, επίσης, γνωστό στη βιβλιογραφία ως το πρόβλημα fly-away- kit, στο οποίο ένας πιλότος πρέπει να καθορίσει τα πιο πολύτιμα (έκτακτης ανάγκης) στοιχεία που θα έχει σε ένα αεροπλάνο Είναι γνωστό και ως πρόβλημα cargo-loading (πρόβλημα φόρτωσης φορτίου), στο οποίο ένα σκάφος με περιορισμένο όγκο ή περιορισμένο ωφέλιμο

φορτίο πρέπει να φορτωθεί με τα πιο πολύτιμα αντικείμενα του φορτίου. Και οι τρεις ονομασίες έχουν επινοηθεί για να διασφαλιστεί η ίση εκπροσώπηση των τριών κλάδων των ενόπλων δυνάμεων: Στρατού, Πολεμικής Αεροπορίας και Ναυτικού. Η αναδρομική σχέση έχει αναπτυχθεί για το γενικό πρόβλημα ενός σακιδίου n -στοιχείων και w -λίτρων. Έστω m_i είναι ο αριθμός των μονάδων του στοιχείου i στο σακίδιο και ορίζουμε r_i και w_i να είναι τα έσοδα και το βάρος ανά μονάδα του στοιχείου i . Το γενικό πρόβλημα αντιπροσωπεύεται από την ακόλουθη σχέση ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού :

$$\max z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n$$

Όπου

$$w_1 m_1 + w_2 m_2 + \dots + w_n m_n \leq W$$

$$m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0$$

Τα στάδια του μοντέλου είναι τα ακόλουθα :

1. Στάδιο i αντιπροσωπεύεται από το στοιχείο i , όπου $i = 1, 2, \dots, N$.
2. Οι εναλλακτικές λύσεις στο στάδιο i εκπροσωπούνται από m_i , όπου m_i είναι οι μονάδες του αντικειμένου i που υπάρχουν στο σακίδιο. Η σχετική απόδοση είναι $r_i m_i$. Ορίζοντας το $\frac{W}{w_i}$ να είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος προκύπτει ότι $m_i = 0, 1, \dots, [\frac{W}{w_i}]$
3. Η κατάσταση στο στάδιο i αντιπροσωπεύεται από το x_i , δηλαδή το συνολικό βάρος που έχουν τα στάδια από τα στοιχεία $i, i + 1, \dots, n$. Ο ορισμός αυτός αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι ο περιορισμός του βάρους είναι ο μόνος περιορισμός που συνδέει όλα τα n στάδια.

Ορισμός $f_i(x_i)$ = η μέγιστη απόδοση για τα στάδια $i, i + 1$, και n , δοθέντος της κατάστασης x_i .

Ο απλούστερος τρόπος για να καθοριστεί η αναδρομική εξίσωση είναι μια διαδικασία δύο σταδίων:

Βήμα 1. Εκφράζουμε το $f_i(x_i)$ ως συνάρτηση του $f_{i+1}(x_{i+1})$ ως

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0, 1, \dots, \frac{W}{w_i} \\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

Βήμα 2. Εκφράζουμε το x_{i+1} ως συνάρτηση του x_i έτσι ώστε η αριστερή πλευρά του $f_i(x_i)$ να είναι συναρτήσει μόνο του x_i . Εξ ορισμού, $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ και αντιπροσωπεύει το βάρος του σακιδίου στο στάδιο i . Έτσι, $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$, άρα η αναδρομική εξίσωση είναι

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0, 1, \dots, \frac{W}{w_i} \\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

5.7 Εφαρμογή Σακιδίου

Έστω ότι ένα σακίδιο χωρητικότητας 10 λίτρων το οποίο μπορεί να γεμίσει σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 5.4. Το ερώτημα για το πρόβλημα του σακιδίου είναι το πώς θα πρέπει να γεμίσει για να έχουμε το μέγιστο όφελος.

Πίνακας 5.4: Πίνακας δεδομένων τοπικής επιχείρησης

Προϊόν	βάρος (l)	όφελος
1	4	11
2	3	7
3	5	12

Λύση

Έχουμε $r_1(x_1) = 11x_1$, $r_2(x_2) = 7x_2$, $r_3(x_3) = 12x_3$, $g_1(x_1) = 4x_1$, $g_2(x_2) = 3x_2$, και $g_3(x_3) = 5x_3$. Ορίζουμε το $f_i(d)$ να είναι το μέγιστο όφελος που μπορούμε να έχουμε από ένα d -κιλών σακίδιο που είναι γεμάτο με στοιχεία του τύπου $t, t+1, \dots, 3$

Στάδιο 3

Από την σχέση 5.11 έχουμε :

$$f_3(d) = \max_{x_3} (12x_3)$$

Όπου $5x_3 \leq d$ και x_3 ένας θετικός ακέραιος. Έτσι υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned}
 f_3(10) &= 24 \\
 f_3(5) &= f_3(6) = f_3(7) = f_3(8) = f_3(9) = 12 \\
 f_3(0) &= f_3(1) = f_3(2) = f_3(3) = f_3(4) = 0 \\
 x_3(10) &= 2 \\
 x_3(9) &= x_3(8) = x_3(7) = x_3(6) = x_3(5) = 1 \\
 x_3(0) &= x_3(1) = x_3(2) = x_3(3) = x_3(4) = 0
 \end{aligned}$$

Στάδιο 2

Τώρα η σχέση 5.11 για το στάδιο 2 γίνεται

$$f_2(d) = \max_{x_2} [7x_2 + f_3(d - 3x_2)]$$

Όπου το x_2 πρέπει να είναι θετικός ακέραιος και να ικανοποιεί τη σχέση $3x_2 \leq d$. Άρα υπολογίζουμε σε αυτή τη φάση όλα τα $f_2(d)$

$$f_2(10) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(10 - 3 * 0) = 24* & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(10 - 3 * 1) = 19 & x_2 = 1 \\ 7 * 2 + f_3(10 - 3 * 2) = 14 & x_2 = 2 \\ 7 * 3 + f_3(10 - 3 * 3) = 21 & x_2 = 3 \end{bmatrix}$$

$$f_2(9) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(9) = 12 & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(6) = 19 & x_2 = 1 \\ 7 * 2 + f_3(3) = 14 & x_2 = 2 \\ 7 * 3 + f_3(0) = 21* & x_2 = 3 \end{bmatrix}$$

$$f_2(8) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(8) = 12 & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(5) = 19* & x_2 = 1 \\ 7 * 2 + f_3(2) = 14 & x_2 = 2 \end{bmatrix}$$

$$f_2(7) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(7) = 12 & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(4) = 7 & x_2 = 1 \\ 7 * 2 + f_3(1) = 14* & x_2 = 2 \end{bmatrix}$$

$$f_2(6) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(6) = 12 & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(3) = 7 & x_2 = 1 \\ 7 * 2 + f_3(0) = 14* & x_2 = 2 \end{bmatrix}$$

$$f_2(5) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(5) = 12* & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(2) = 7 & x_2 = 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(4) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(4) = 0 & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(1) = 7* & x_2 = 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(3) = \max \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(3) = 0 & x_2 = 0 \\ 7 * 1 + f_3(0) = 7* & x_2 = 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(2) = \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(2) = 0 & x_2(0) = 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(1) = \begin{bmatrix} 7 * 0 + f_3(1) = 0 & x_2(0) = 0 \end{bmatrix}$$

Άρα συγκεντρωτικά υπολογίσαμε ότι,

$f_2(10) = 24$	$x_2(10) = 0$
$f_2(9) = 21$	$x_2(9) = 3$
$f_2(8) = 19$	$x_2(8) = 1$
$f_2(7) = 14$	$x_2(7) = 2$
$f_2(6) = 14$	$x_2(6) = 2$
$f_2(5) = 12$	$x_2(5) = 0$
$f_2(4) = 7$	$x_2(4) = 1$
$f_2(3) = 7$	$x_2(3) = 1$
$f_2(2) = 0$	$x_2(2) = 0$
$f_2(1) = 0$	$x_2(1) = 0$
$f_2(0) = 0$	$x_2(0) = 0$

Στάδιο 1

Τέλος θα υπολογίσουμε το $f_1(10)$ ως εξής:

$$f_1(10) = \max \begin{bmatrix} 11 * 0 + f_2(10) = 24 & x_1 = 0 \\ 11 * 1 + f_2(6) = 25* & x_1 = 1 \\ 11 * 2 + f_2(2) = 22 & x_1 = 2 \end{bmatrix}$$

Καθορισμός της βέλτιστης λύσης του προβλήματος

Έχουμε υπολογίσει ότι $f_1(10) = 25$ και $x_1(10) = 1$. Ως εκ τούτου, το σακίδιο θα πρέπει να περιλαμβάνει ένα στοιχείο τύπου 1. Από τον πίνακα 5.4 βλέπουμε ότι το κάθε αντικείμενο Τύπου 1 ζυγίζει 4 λίτρα, οπότε μπορούμε να βάλουμε ακόμα αντικείμενα Τύπου 2 και Τύπου 3 συνολικού βάρους $10 - 4 = 6$, γι' αυτό θα βάλουμε στο σακίδιο $x_2(6) = 2$ αντικείμενα Τύπου 2, κάθε ένα από τα οποία ζυγίζει 3 λίτρα. Τέλος, για τα αντικείμενα Τύπου 3 μας μένουν $6 - 2 * 3 = 0$ λίτρα, οπότε θα το σακίδιο θα περιλαμβάνει $x_3(0) = 0$ αντικείμενα Τύπου 3. Άρα το μέγιστο όφελος που μπορούμε να έχουμε από ένα σακίδιο χωρητικότητας 10 λίτρων είναι $f_3(10) = 25$. Για να έχουμε αυτό το όφελος θα πρέπει να συμπεριληφθούν στο σακίδιο ένα αντικείμενο Τύπου 1 και δύο αντικείμενα Τύπου 2 αντικείμενα.

5.8 Εφαρμογή σακιδίου / εναλλακτική λύση

Το πρόβλημα του σακιδίου μπορεί να λυθεί και με άλλες προσεγγίσεις του δυναμικού προγραμματισμού. Η προσέγγιση που θα δούμε τώρα αναπτύσσει τη βέλτιστη λύση για σακίδιο καθορίζοντας πρώτα τον τρόπο που πρέπει να γεμίσει βέλτιστα ένα μικρό σακίδιο και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτές τις πληροφορίες, πώς να γεμίσει με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο ένα μεγαλύτερο σακίδιο. Ορίζουμε $g(w)$ να είναι το μέγιστο όφελος που μπορούν να αποκτηθούν από μια w -λίτρο σακίδιο. b_j ορίζεται να είναι το όφελος που κερδίζουμε από ένα μόνο στοιχείο Τύπου j , και w_j να είναι το βάρος ενός στοιχείου Τύπου j . Προφανώς θα ισχύει $g(0) = 0$, και για $w > 0$ έχουμε,

$$g(w) = \max_j \{b_j + g(w - w_j)\} \quad (5.12)$$

όπου j πρέπει να είναι $(1, 2, 3)$, και i πρέπει να πληροί την ανισότητα $w_j \leq w$. Το σκεπτικό πίσω από την σχέση 5.12 έχει ως εξής: Για να γεμίσει ένα σακίδιο w -λίτρων βέλτιστα, πρέπει να ξεκινήσουμε με την τοποθέτηση κάποιου τύπου αντικείμενα στο σακίδιο. Αν αρχίσουμε με την τοποθέτηση ενός στοιχείου Τύπου j σε ένα w -λίτρων στο σακίδιο, το μεγαλύτερο όφελος μπορούμε να το έχουμε είναι βάση του $b_j +$ [καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε από ένα $(w - w_j)$ -λίτρα σακιδίου]. Ξέρουμε ότι ένα στοιχείο i Τύπου j μπορεί να τοποθετηθεί σε ένα w -λίτρων σακίδιο μόνο αν $w_j \leq w$, οπότε προκύπτει ο τύπος 5.12. Έχουμε καθορίσει το $x(w)$ να είναι οποιουδήποτε Τύπου στοιχείο που επιτυγχάνει το μέγιστο στον τύπο 5.12 και το $x(w) = 0$ σημαίνει ότι κανένα στοιχείο μπορεί να χωρέσει σε ένα w -λίτρων σακίδιο.

Θα λύσουμε την προηγούμενη εφαρμογή εκ νέου με βάση την παραπάνω μεθοδολογία. Από τον πίνακα 5.4 παρατηρούμε ότι κανένα στοιχείο δεν χωράει σε σακίδιο 0, 1, ή 2-λίτρων, άρα έχουμε $g(0) = g(1) = g(2) = 0$ και $x(0) = x(1) = x(2) = 0$. Μόνο ένα αντικείμενο Τύπου 2 μπορεί να χωρέσει σε ένα σακίδιο 3-λίτρων, έτσι έχουμε ότι $g(3) = 7$ και $x(3) = 2$. Συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι

$$g(4) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(0) = 11* & \text{Type} - 1 \\ 7 + g(1) = 7 & \text{Type} - 2 \end{bmatrix}$$

$$g(5) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(1) = 11 & \text{Type} - 1 \\ 7 + g(2) = 7 & \text{Type} - 2 \\ 12 + g(0) = 12* & \text{Type} - 3 \end{bmatrix}$$

$$g(6) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(2) = 11 & Type - 1 \\ 7 + g(3) = 14* & Type - 2 \\ 12 + g(1) = 12 & Type - 3 \end{bmatrix}$$

$$g(7) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(3) = 18* & Type - 1 \\ 7 + g(4) = 18* & Type - 2 \\ 12 + g(2) = 12 & Type - 3 \end{bmatrix}$$

$$g(8) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(4) = 22* & Type - 1 \\ 7 + g(5) = 19 & Type - 2 \\ 12 + g(3) = 19 & Type - 3 \end{bmatrix}$$

$$g(9) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(5) = 23* & Type - 1 \\ 7 + g(6) = 21 & Type - 2 \\ 12 + g(4) = 23* & Type - 3 \end{bmatrix}$$

$$g(10) = \max \begin{bmatrix} 11 + g(6) = 25* & Type - 1 \\ 7 + g(7) = 25 & Type - 2 \\ 12 + g(5) = 24 & Type - 3 \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στα ακόλουθα αποτελέσματα,

$g(4) = 11$	$x(4) = 1$
$g(5) = 12$	$x(5) = 3$
$g(6) = 14$	$x(6) = 2$
$g(7) = 18$	$x(7) = 1 \text{ or } 2$
$g(8) = 22$	$x(8) = 1$
$g(9) = 23$	$x(9) = 1 \text{ or } 3$
$g(10) = 25$	$x(10) = 1 \text{ or } 2$

Για να γεμίσει βέλτιστα το σακίδιο αρχίζουμε τοποθετώντας κάποιο στοιχείο $x(10)$. Έστω επιλέγουμε αυθαίρετα ένα αντικείμενο Τύπου 1. Αυτό συνεπάγεται ότι έχουμε ακόμα $10 - 4 = 6$ λίτρα για να γεμίσει, έτσι τώρα μπορούμε να βάλουμε ένα $x(10 - 4) = 2$ (Τύπου 2) αντικείμενο στο σακίδιο. Αυτό μας αφήνει με ελεύθερα $6 - 3 = 3$ λίτρα ακόμα, στα οποία τοποθετούμε ένα $x(6 - 3) = 2$ (Τύπου 2) αντικείμενο. Ως εκ τούτου, μπορεί το μέγιστο όφελος που μπορούμε να έχουμε να έχουμε με $g(10) = 25$ είναι γεμίζοντας το σακίδιο με δύο αντικείμενα Τύπου 2 και ένα Τύπου 1.

Κεφάλαιο 6

Επίλυση Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού με χρήση Excel

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λυθεί είτε με χρήση του προγράμματος LINDO είτε του LINGO. Δυστυχώς, κανένα από αυτά τα εύχρηστα προγράμματα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού. Η φύση των υπολογισμών των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού καθιστά αδύνατη την ανάπτυξη ενός γενικού κώδικα υπολογιστή που μπορεί να χειριστεί όλα τα προβλήματα. Αυτό εξηγεί την απουσία ενός εμπορικού λογισμικού δυναμικού προγραμματισμού. Αυτό που μπορεί να μας βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού είναι το excel. Θα δείξουμε παρακάτω την επίλυση ενός προβλήματος σακιδίου και ενός προβλήματος κατανομής πόρων.

6.1 Πρόβλημα Σακιδίου

Ας επανέλθουμε στο πρόβλημα σακιδίου που είδαμε κεφάλαιο κατανομής πόρων (πρόβλημα 2) Το ερώτημα είναι πώς να γεμίσουμε ένα σακίδιο 10-λίτρων πετυχαίνοντας το μέγιστο δυνατό κέρδος. Θυμόμαστε ότι το μέγιστο κέρδος, $g(w)$, που μπορεί να αποκτηθεί από ένα w -λίτρων σακίδιο είναι από τον τύπο

$$g(w) = \max_j \{b_j + g(w - w_j)\}$$

όπου b_j, w_j είναι κέρδος και βάρος ενός αντικειμένου τύπου j .

Σε κάθε γραμμή του παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε το $g(w)$ για τις διάφορες τιμές του w . Ξεκινάμε εισάγοντας τις τιμές

$$g(0) = g(1) = g(2) = 0, \quad g(3) = 7$$

Οί στήλες με τίτλους ITEM1,2,3 αντιστοιχούν στους όρους με $j = 1, 2, 3$ αντίστοιχα στην σχέση (Κατά συνέπεια υπολογίζουμε την ποσότητα $b_i + g(w - w_i)$ για τα διάφορα

Επίλυση Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού με χρήση Excel

ITEMS για όλες τις επιτρεπτές τιμές ενώ στις μη επιτρεπτές περιπτώσεις, όπως $j = 4$, $ITEM = ITEM3$ εισάγουμε μία πολύ αρνητική τιμή (-10000) για να σιγουρευτούμε ότι δεν θα ληφθεί υπόψιν.

A	A	B	C	D	E	F	G
1	KNAPSACK	ITEM1	ITEM2	ITEM3	q(SIZE)		FIGURE11
2	SIZE						KNAPSACK
3	0				0		PROBLEM
4	1				0		
5	2				0		
6	3				7		
7	4	11	7	-10000	11		
8	5	11	7	12	12		
9	6	11	14	12	14		
10	7	18	18	12	18		
11	8	22	19	19	22		
12	9	23	21	23	23		
13	10	25	25	24	25		
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							

Εικόνα 6.1: Πρόβλημα Σακιδίου

Πιο ειδικά τώρα, στη σειρά 7, θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $g(4)$. Κατά συνέπεια εισάγουμε τους παρακάτω τύπους στα αντίστοιχα κελιά:

$$B7 : 11 + E3 [b_1 + g(4 - w_1)]$$

$$C7 : 7 + E4 [b_1 + g(4 - w_1)]$$

$$D7 : -1000 [forbidden]$$

Στη συνέχεια, στο E7, υπολογίζουμε την ποσότητα $g(4)$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση εύρεσης μεγίστου του excel (= MAX(B7 : D7)). Ομοίως ενεργούμε και στην γραμμή 8 όπου υπολογίζουμε το $g(5)$ εισάγοντας τους τύπους:

$$B8 : 11 + E3$$

$$C8 : 7 + E4$$

$$D8 : 12 + E3$$

Για να υπολογίσουμε το $g(5)$ εισάγουμε στο κελί E8 ομοίως με πριν τη συνάρτηση του μεγίστου ($= \text{MAX}(B7 : D7)$). Ομοίως υπολογίζουμε και τις επόμενες γραμμές.

Βλέπουμε ότι για $J = 5$ λαμβάνουμε $g(10) = 25$. Επειδή τόσο το ITEM1 όσο και το ITEM2 μπορούν να φτιάσουν τα 25 σε πλήθος μπορούμε να ξεκινήσουμε να γεμίζουμε ένα σακίδιο με αντικείμενα οποιουδήποτε από του δύο τύπους. Επιλέγουμε να ξεκινήσουμε με αντικείμενα τύπου 1. Κατά συνέπεια μας απομένει $10 - 4 = 6$ lb ελεύθερου χώρου να γεμίσουμε. Από την γραμμή 9 βρίσκουμε ότι το $g(6) = 14$ επιτυγχάνεται με ένα αντικείμενο τύπου 2. Αυτό μας αφήνει πλέον με $6 - 3 = 3$ lb ελεύθερα στο σακίδιο μας. Χρησιμοποιούμε ακόμα ένα αντικείμενο τύπου 2 για να πετύχουμε $g(3) = 7$ και ο διαθέσιμος χώρος μας μηδενίζεται. Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να έχουμε όφελος 25 μονάδες γεμίζοντας ένα σακίδιο 10-λίτρων με δύο αντικείμενα τύπου 2 και ένα αντικείμενο τύπου 1.

6.2 Πρόβλημα Κατανομής Πόρων

Η λύση ενός προβλήματος που δεν ανάγεται σε πρόβλημα τύπου σακιδίου χρησιμοποιώντας το excel είναι πιο περίπλοκη. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα 5 στο οποίο έχουμε 6000 να κατανεύσουμε μεταξύ τριών επενδύσεων. Ορίζουμε $f_t(d) = \text{maximumNPV}$ που επιτυγχάνεται από τις επενδύσεις $t, \dots, 3$ δεδομένου ότι έχουμε διαθέσιμα d χιλιάδες € για τις επενδύσεις μας. Μπορούμε κατά συνέπεια να γράψουμε

$$f_t(d) = \max_{0 \leq x \leq d} \{r_t(x) + f_{t+1}(d - x)\} \quad (6.1)$$

όπου $f_4(d) = 0$ ($d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), με $r_t(x) = \text{NPV}$ τα ευρώ σε χιλιάδες που επενδύονται στην επιλογή t και η μεγιστοποίηση στην σχέση 0 λαμβάνεται μόνο για ακέραιες τιμές του d . η επακόλουθη συζήτηση μας θα απλοποιηθεί σημαντικά αν ορίσουμε την μεταβλητή $J_t(d, x) = r_t(x) + f_{t+1}(d - x)$ και ξαναγράψουμε την 0 σαν

$$f_t(d) = \max_{0 \leq x \leq d} \{J_t(d, x)\} \quad (6.2)$$

Ξεκινάμε την κατασκευή του φύλλου μας στο excel 0 εισάγοντας την μεταβλητή $r_t(x)$ στα κελιά A1 : H4. Για παράδειγμα, η τιμή $r_2(3) = 16$ εισάγεται στο κελί E3. Στις γραμμές 18-20, έχουμε προετοιμάσει τους υπολογισμούς για το $J_t(d, x)$. Αυτοί οι υπολογισμοί απαιτούν τη χρήση της συνάρτησης του excel, $= \text{HLOOKUP}$ για να ελέγξει τις τιμές του $r_t(x)$ (στις σειρές 2-4) και του $f_{t+1}(d - x)$ (στις σειρές 11-14).

Επίλυση Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού με χρήση Excel

Για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσουμε το $J_3(3, 1)$ εισάγουμε τον παρακάτω τύπο στο I18:

HLOOKUP(I\$17,\$B\$1:\$H\$4,\$A18+1)+HLOOKUP(I\$16-I\$17,\$B\$10:\$H\$14,\$A18+1)

A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	REWARD	0	1	2	3	4	5	6					
2	PERIOD3	0	9	13	17	21	25	29					
3	PERIOD2	0	10	13	16	19	22	25					
4	PERIOD1	0	9	16	23	30	37	44					
5													
6													
7	FIGURE 12												
8	RESOURCE	ALLOCATION											
9													
10	VALUE	0	1	2	3	4	5	6					
11	PERIOD4	0	0	0	0	0	0	0					
12	PERIOD3	0	9	13	17	21	25	29					
13	PERIOD2	0	10	19	23	27	31	35					
14	PERIOD1	0	10	19	28	35	42	49					
15													
16	d	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
17	x	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1
18		1	0	0	9	0	9	13	0	9	13	17	0
19		2	0	9	10	13	19	13	17	23	22	16	21
20		3	0	10	9	19	19	16	23	28	26	23	27

Εικόνα 6.2: Κατανομή Πόρων

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος στον τύπο του κελιού I18 βρίσκεται σε τη στήλη στο χώρο B1:H4 της οποίας το πρώτο στοιχείο είναι ίσο με το I17. Στη συνέχεια απομακρύνουμε το στοιχείο της σειράς A18 + 1 της ίδιας στήλης και λαμβάνουμε πλέον $r_3(1) = 9$. Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος βρίσκεται τη στήλη το πρώτο στοιχείο της οποίας είναι ίσο με I16-I17, στο χώρο B10:H14 και ομοίως απομακρύνοντας το στοιχείο 18 + 1 λαμβάνουμε $f_4(3 - 1) = 0$.

Αντιγράφουμε τώρα κάθε μία από τις σχέσεις $J_t(d, x)$ (όπως η σχέση στο I18) στο χώρο B18:AC20.

Η ποσότητες $f_t(d)$ υπολογίζονται στο διάστημα AD18:AJ20. Ξεκινάμε εισάγοντας στα AD18:AJ18 τους τύπους που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των $f_3(0), f_3(1), \dots, f_3(6)$. Αυτο οι τύποι είναι αντίστοιχα:

AD18 : 0	$(f_3(0))$
AE18 : = MAX(C18 : D18))	$(f_3(1))$
AF18 : = MAX(E18 : G18))	$(f_3(2))$
AG18 : = MAX(H18 : K18))	$(f_3(3))$
AH18 : = MAX(L18 : P18))	$(f_3(4))$
AI18 : = MAX(Q18 : V18))	$(f_3(5))$
AJ18 : = MAX(W18 : AC18))	$(f_3(6))$

Αντιγράφουμε τώρα τις σχέσεις απο το διάστημα AD18:AJ18 στο AD18:AJ20.

A	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
17	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
18	13	17	21	0	9	13	17	21	25	0	9	13	17
19	26	25	19	25	31	30	29	28	22	29	35	34	33
20	35	33	30	31	36	39	42	40	37	35	40	43	46

A	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16	6	6	6	0	1	2	3	4	5	6	
17	4	5	6	ft(0)	ft(1)	ft(2)	ft(3)	ft(4)	ft(5)	ft(6)	t
18	21	25	29	0	9	13	17	21	25	29	3
19	32	31	25	0	10	19	23	27	31	35	2
20	49	47	44	0	10	19	28	35	42	49	1

Για να είναι λειτουργικό το φύλλο εργασίας μας πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε το $J_t(d, x)$ ψάχνοντας την κατάλληλη τιμή του $f_t(d)$ στις σειρές 11-14. Κατά συνέπεια, στα κελιά B11:H11, εισάγουμε μηδενικά καθώς $f_4(d)$ για όλα τα d. Στο B12, εισάγουμε την τιμή = AD18 και αντιγράφουμε αυτό τον τύπο στο διάστημα B12:H14. Μπορούμε τώρα χρησιμοποιώντας την επαναληπτική ανάλυση του excel να επιλύσουμε το πρόβλημα μας.

Προκειμένου να υπολογίσουμε πως θα κατανείμουμε το 6000\$ στις τρεις επενδυτικές μας επιλογές, θα πρέπει να προσέξουμε ότι $f_1(6) = 49$. Επειδή $f_1(6) = J_1(6, 4)$, εκχωρούμε 4000\$ στην επένδυση 1. Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε $f_2(6 - 4) = 19 = J_2(2, 1)$. Εκχωρούμε λοιπόν 1000\$ στην επένδυση 2. Και τέλος επειδή $f_3(2 - 1) = J_3(1, 1)$ και κατανείμουμε 1000\$ στην επένδυση 3.

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογές

7.1 Εφαρμογή 1 - Πρόβλημα απασχόλησης εργαζομένων

Ο φόρτος εργασίας για το τοπικό κατάστημα έχει διάφορες διακυμάνσεις ανάλογα με την εποχή. Ωστόσο, οι χειριστές μηχανών είναι δύσκολο να προσλαμβάνουν νέο προσωπικό και ιδιαιτέρως δαπανηρό να εκπαιδευτεί, έτσι ο διαχειριστής δεν μπορεί να απολύσει εργαζομένους κατά τη διάρκεια των αδρανών εποχών. Είναι επίσης απρόθυμος να διατηρήσει το μισθολόγιο της "υψηλής περιόδου" όταν δεν απαιτείται. Επιπλέον, η πολιτική της επιχείρησης είναι αντίθετη με τις υπερωρίες σε τακτική βάση. Δεδομένου ότι όλες οι εργασίες γίνονται ύστερα από ειδικές παραγγελίες, δεν είναι δυνατή η δημιουργία αποθεμάτων κατά τη διάρκεια των εποχών που δεν υπάρχει μεγάλος φόρτος εργασίας. Ως εκ τούτου, ο διαχειριστής είναι σε δίλημμα ως προς το ποια πολιτική θα πρέπει να ακολουθήσει όσον αφορά Τον αριθμό των εργαζομένων που θα απασχολούν. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τις εκτιμήσεις για τις ελάχιστες απαιτήσεις προσωπικού, που θα έχει η επιχείρηση κατά τη διάρκεια της των τεσσάρων εποχών του χρόνου στο εγγύς μέλλον:

Season	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring
Requirements	255	220	240	200	255

Ο αριθμός του προσωπικού δεν επιτρέπεται να πέσει κάτω από αυτά τα επίπεδα. Επίσης κάθε επιπλέον εργαζόμενος πάνω από αυτά τα επίπεδα κοστίζει κατά προσέγγιση 2.000 € ανά άτομο και ανά σεζόν. Εκτιμάται ότι το κόστος πρόσληψης και απόλυσης είναι τέτοιο ώστε το συνολικό κόστος αλλαγής επιπέδου απασχόλησης από τη μία εποχή στην άλλη είναι 200 € φορές το τετράγωνο της διαφοράς του αριθμού εργαζομένων στο κάθε επίπεδο. Είναι δυνατό ο αριθμός των εργαζομένων να μην είναι ακέραιος.

Ανάπτυξη της Λύσης

Με βάση τα διαθέσιμα στοιχεία, δεν αξίζει να έχει παραπάνω υπαλλήλους από όσους χρειάζεται τη σεζόν με το μεγάλο φόρτο εργασίας. Ως εκ τούτου, την άνοιξη θα πρέπει να απασχολεί 255, και έτσι το πρόβλημα περιορίζεται στην εύρεση του αριθμού υπαλλήλων που πρέπει να έχει τις άλλες τρεις εποχές. Για διαμόρφωση της λύσης με βάση τον δυναμικό προγραμματισμό, οι εποχές θα πρέπει να είναι τα στάδια του προβλήματος. Αντικειμενικά υπάρχει ένας άπειρος αριθμός σταδίων, αφού το πρόβλημα εκτείνεται στο μέλλον. Ωστόσο, κάθε έτος έχει ένα επαναλαμβανόμενο και ίδιο κύκλο απαιτήσεων κάθε εποχή, και επειδή ο αριθμός εργαζομένων που χρειάζονται την άνοιξη είναι γνωστός, είναι δυνατό να εξετάσουμε μόνο ένα κύκλο τεσσάρων εποχών ολοκληρώνοντας με την άνοιξη, όπως φαίνεται παρακάτω.

Στάδιο 1 = καλοκαίρι

Στάδιο 2 = φθινόπωρο

Στάδιο 3 = χειμώνας

Στάδιο 4 = άνοιξη

x_n = ο αριθμός των εργαζομένων στο στάδιο n ($n = 1, 2, 3, 4$)

$x_4 = 255$

Είναι απαραίτητο να είναι τελευταίο στάδιο, το στάδιο της άνοιξης γιατί η βέλτιστη τιμή της απόφασης κάθε κατάστασης στο τελευταίο στάδιο πρέπει να είναι είτε γνωστή είτε να υπολογίζεται χωρίς να χρειάζεται να λάβουμε υπόψη άλλα στάδια. Για κάθε άλλη εποχή, η λύση για το βέλτιστο αριθμό εργαζομένων πρέπει να λαμβάνει υπόψη την επίπτωση που θα έχει στο κόστος της επόμενης περιόδου. Έχουμε ότι :

r_n = ο ελάχιστος αριθμός υπαλλήλων που απασχολούνται στο στάδιο n ,
με τις απαιτήσεις ότι $r_1 = 220$, $r_2 = 240$, $r_3 = 200$ και $r_4 = 255$

Έτσι οι μόνες εφικτές τιμές για το x_n είναι :

$$f_n \leq x_n \leq 255$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος σχετικά με το κόστος απασχόλησης έχουμε :

$$\text{κόστος } n\text{-σταδίου} = 200(x_n - x_{n-1})^2 + 2000(x_n - r_n)$$

Σημειώνουμε ότι το κόστος στην κάθε κατάσταση εξαρτάται μόνο την τρέχουσα απόφαση x_n και τον αριθμό των εργαζομένων κατά την προηγούμενη σεζόν x_{n-1} . Έτσι, τα προηγούμενα επίπεδα της απασχόλησης εργαζομένων είναι

Πίνακας 7.1: Πίνακας δεδομένων τοπικής επιχείρησης

n	f_n	Εφικτό x_n	Πιθανό $s_n = x_{n-1}$	Κόστος
1	220	$220 \leq x_1 \leq 255$	$s_1 = 255$	$200(x_1 - 255)^2 + 2000(x_1 - 220)$
2	240	$240 \leq x_2 \leq 255$	$220 \leq s_2 \leq 255$	$200(x_2 - x_1)^2 + 2000(x_2 - 240)$
3	200	$200 \leq x_3 \leq 255$	$240 \leq s_3 \leq 255$	$200(x_3 - x_2)^2 + 2000(x_3 - 200)$
4	255	$x_4 = 255$	$200 \leq s_4 \leq 255$	$200(255 - x_3)^2$

Με όλες αυτές οι πληροφορίες σχετικά με την κάθε τρέχουσα κατάσταση των πραγμάτων θα πρέπει να προσδιοριστεί η βέλτιστη πολιτική που θα ακολουθηθεί. Ως εκ τούτου, η κατάσταση s_n για το στάδιο n είναι

$$s_n = x_n - 1$$

Όταν $n = 1$, $s_1 = x_0 = x_4 = 255$.

Ο στόχος του προβλήματος είναι να επιλεγθούν τα κατάλληλα x_1, x_2, x_3 με $x_0 = x_4 = 255$, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η σχέση

$$\sum_{i=1}^4 [200(x_i - x_{i-1})^2 + 2000(x_i - r_i)]$$

λαμβάνοντας υπόψη μας ότι για $i = 1, 2, 3, 4$

$$r_i \leq x_i \leq 255$$

Έτσι, για το στάδιο n , με βάση τον προς τα εμπρός δυναμικό προγραμματισμό, για $n = 1, 2, 3, 4$, αφού $s_n = x_{n-1}$ έχουμε

$$f_n(s_n, x_n) = 200(x_n - s_n)^2 + 2000(x_n - r_n) + \min_{r_i \leq x_i \leq 255} \sum_{i=n+1}^4 [200(x_i - x_{i-1})^2 + 2000(x_i - r_i)]$$

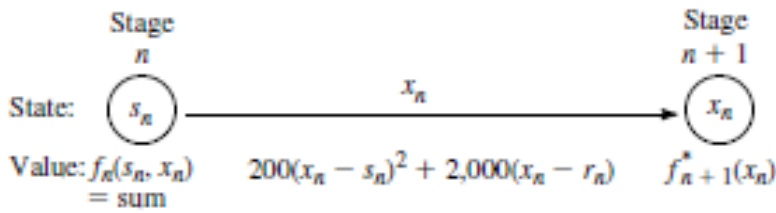
όπου αυτό το άθροισμα ισούται με μηδέν όταν $n = 4$. Επίσης,

$$f_n^*(s_n) = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} f_n(s_n, x_n).$$

Άρα έχουμε,

$$f_n(s_n, x_n) = 200(x_n - s_n)^2 + 2000(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

Όπου το f_5^* ορίζεται να είναι μηδέν δεδομένου ότι το κόστος μετά το στάδιο 4 είναι άσχετο με την ανάλυση που κάνουμε. Οι παραπάνω σχέσεις συνοψίζονται στο ακόλουθο σχήμα.



Εικόνα 7.1: Βασική Δομή Προβλήματος

Κατά συνέπεια, η αναδρομική σχέση για το f_n^* είναι

$$f_n^*(s_n) = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} [200(x_n - s_n)^2 + 2000(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)]$$

Η προσέγγιση με το δυναμικό προγραμματισμό χρησιμοποιεί αυτή τη σχέση για τον διαδοχικό υπολογισμό των συναρτήσεων $f_4^*(s_4)$, $f_3^*(s_3)$, $f_2^*(s_2)$, $f_1^*(255)$ και την ελαχιστοποίηση του x_n .

Διαδικασία λύσης

Στάδιο 4:

Ξεκινώντας από το τελευταίο στάδιο, $n = 4$, που ήδη γνωρίζουμε ότι $x_4^* = 255$, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

Πίνακας 7.2: $n=4$

s_4	$f_4^*(s_4)$	x_4^*
$220 \leq s_4 \leq 255$	$200(255 - s_4)^2$	255

Στάδιο 3:

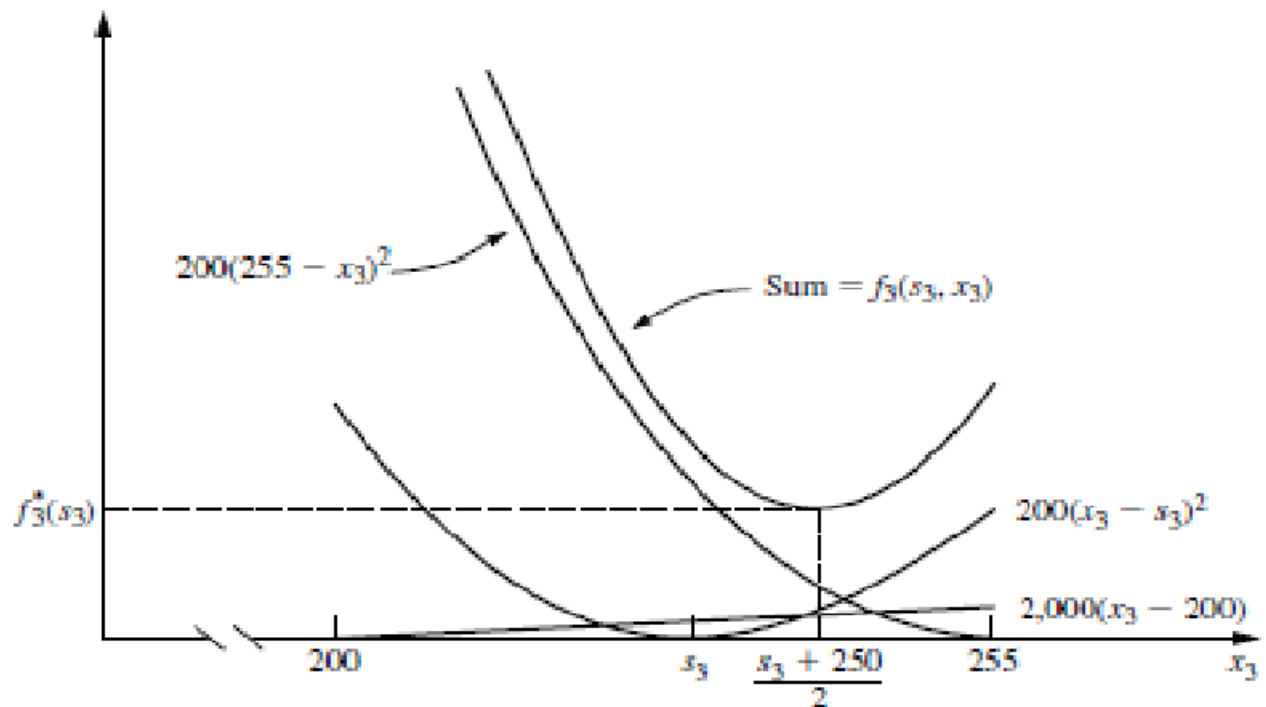
Το πρόβλημα μας τώρα αποτελείται μόνο από τα δύο τελευταία στάδια, $n = 3$, οπότε η αναδρομική σχέση μπορεί να γραφτεί

$$f_3^* = \min_{200 \leq x_3 \leq 255} [200(x_3 - s_3)^2 + 2000(x_3 - 200) + f_4^*(x_3)] =$$

$$\min_{200 \leq x_3 \leq 255} [200(x_3 - s_3)^2 + 2000(x_3 - 200) + 200(255 - x_3)^2]$$

όπου οι πιθανές τιμές του s_3 είναι $240 \leq s_3 \leq 255$

Ένας τρόπος για να βρούμε την τιμή του x_3 που ελαχιστοποιεί το $f_3(s_3, x_3)$, για κάποια συγκεκριμένη τιμή του s_3 , είναι από τη γραφική προσέγγιση στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 7.2: Γραφική λύση για το f_3^*

Ωστόσο, γρηγορότερος τρόπος για να υπολογιστεί είναι χρησιμοποιώντας λογισμό. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το x_3 σε σχέση με το s_3 λαμβάνοντας υπόψη μας ότι το s_3 έχει κάποια σταθερή, αλλά άγνωστη τιμή. Ως εκ τούτου, ορίζεται η πρώτη μερική παράγωγος της $f_3(s_3, x_3)$ ως προς το x_3 και τη θέτουμε ίση με το μηδέν:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f_3(s_3, x_3) = 400(x_3 - s_3) + 2000 - 400(255 - x_3) = 400(2x_3 - s_3 - 250)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f_3(s_3, x_3) = 0$$

$$\Rightarrow x_3^* = \frac{s_3 + 250}{2}$$

Επειδή η δεύτερη παράγωγος είναι θετική και επειδή η λύση βρίσκεται στην περιοχή των εφικτών λύσεων $200 \leq x_3 \leq 255$ για όλα τα πιθανά s_3 , $240 \leq s_3 \leq 255$, η λύση είναι πράγματι το επιθυμητό ελάχιστο

Έχουμε έναν άπειρο αριθμό πιθανών καταστάσεων $240 \leq s_3 \leq 255$, έτσι δεν είναι εφικτό να επιλυθούν τα x_3^* για κάθε πιθανή τιμή του s_3 . Έτσι δεν μπορούμε να βρούμε το x_3^* σε συνάρτηση με το άγνωστο s_3 . Χρησιμοποιώντας

$$f_3^*(s_3) = f_3(s_3, x_3^*) = 200 \left(\frac{s_3 + 250}{2} - s_3 \right)^2 + 200 \left(255 - \frac{s_3 + 250}{2} \right)^2 + 2000 \left(\frac{s_3 + 250}{2} - 200 \right)$$

Μετά από μία αλγεβρική απλοποίηση της παραπάνω σχέσης τα αποτελέσματα για το τρίτο στάδιο του προβλήματος συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 7.3: $n=3$

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
$240 \leq s_3 \leq 255$	$50(250 - s_3)^2 + 50(260 - s_3)^2 + 1000(s_3 - 150) \mid \frac{s_3 + 250}{2} \mid$	

Στάδιο 2

Το δεύτερο στάδιο, $n = 2$ και το πρώτο στάδιο του προβλήματος, $n = 1$ Επιλύονται με παρόμοιο τρόπο. Έτσι, για $n = 2$ έχουμε,

$$\begin{aligned} f_2(s_2, x_2) &= 200(x_2 - s_2)^2 + 2000(x_2 - r_2) + f_3^*(x_2) \\ &= 200(x_2 - s_2)^2 + 2000(x_2 - 240) + \\ &\quad + 50(250 - x_2)^2 + 50(260 - x_2)^2 + 1000(x_2 - 150) \end{aligned}$$

Οι πιθανές τιμές του s_2 είναι $220 \leq s_2 \leq 255$, και περιοχή για τα εφικτά x_2 είναι $240 \leq x_2 \leq 255$. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η ελαχιστοποίηση της αξίας του x_2 σε αυτή την περιοχή, έτσι ώστε

$$f_2^*(s_2) = \min_{240 \leq x_2 \leq 255} f_2(s_2, x_2)$$

Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο του $f_2(s_2, x_2)$ και θέτοντας την μηδέν έχουμε το x_2 .

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s_2, x_2) = 400(x_2 - s_2) + 2000 - 100(250 - x_2) + 1000$$

$$= 200(3x_2 - 2s_2 - 240)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2s_2 + 240}{3}$$

Επειδή $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_2(s_2, x_2) = 600 > 0$

αυτή η τιμή του x_2 είναι η επιθυμητή τιμή ελαχιστοποίησης, αν η εφικτή περιοχή είναι $240 \leq x_2 \leq 255$. Ανάμεσα στις δυνατές τιμές του s_2 , $220 \leq s_2 \leq 255$, αυτή η λύση είναι ουσιαστικά εφικτή μόνο αν $240 \leq s_2 \leq 255$. Έτσι πρέπει να λυθεί για την εφικτή τιμή του x_2 που ελαχιστοποιεί το $f_2(s_2, x_2)$ όταν $220 \leq s_2 \leq 240$. Το κλειδί για την ανάλυση της συμπεριφοράς του $f_2(s_2, x_2)$ σε σχέση με την εφικτή περιοχή για το x_2 είναι και πάλι η μερική παράγωγος της $f_2(s_2, x_2)$. Όταν $s_2 < 240$, με $240 \leq x_2 \leq 255$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s_2, x_2) > 0$$

Άρα $x_2 = 240$ είναι η επιθυμητή ελάχιστη τιμή. Το επόμενο βήμα είναι να συνδέσουμε αυτές τις τιμές του x_2 με το $f_2(s_2, x_2)$ για να βρούμε το $f_2^*(s_2)$ για $s_2 \leq 240$ και $s_2 > 240$. Τα παραπάνω φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 7.4: n=2

s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$220 \leq s_2 \leq 240$	$200(240 - s_2)^2 + 115000$	240
$240 \leq s_2 \leq 255$	$\frac{200}{9}((240 - s_2)^2 + (255 - s_2)^2) + 270 - s_2^2 + 2000(s_2 - 195)$	$\frac{2s_2 + 240}{3}$

Στάδιο 1

Για $n = 1$ έχουμε :

$$f_1(s_1, x_1) = 200(x_1 - s_1)^2 + 2000(x_1 - r_1) + f_2^*(x_1)$$

Επειδή $r_1 = 220$ η περιοχή των εφικτών τιμών του x_1 είναι $220 \leq x_1 \leq 255$. Το $f_1^*(x_1)$ θα έχει δύο εκφράσεις ανάλογα με την περιοχή που θα βρίσκεται το x_1 , $220 \leq x_1 \leq 240$ ή $240 \leq x_1 \leq 255$. Έτσι έχουμε

$$f_1(s_1, x_1) = \begin{cases} 200(x_1 - s_1)^2 + 2000(x_1 - 220) + 200(240 - x_1)^2 + 115000 & 220 \leq x_1 \leq 240 \\ 200(x_1 - s_1)^2 + 2000(x_1 - 220) + \frac{200}{9}[(240 - x_1)^2 + (255 - x_1)^2 + (270 - x_1)^2] & 240 \leq x_1 \leq 255 \end{cases}$$

Ξεκινώντας από την πρώτη περίπτωση για $220 \leq x_1 \leq 240$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) = 400(x_1 - s_1) + 2000 - 400(240 - x_1) = 400(2x_1 - s_1 - 235)$$

Ξέρουμε ότι $s_1 = 255$ άρα για κάθε $x_1 \leq 240$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) = 800(x_1 - 245) < 0$$

Έτσι το $x_1 = 240$ είναι η τιμή που ελαχιστοποιεί το $f_1(s_1, x_1)$ στην περιοχή x_1 , $220 \leq x_1 \leq 240$

Όταν $240 \leq x_1 \leq 255$ έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) = 400(x_1 - s_1) + 2000 - \frac{400}{9}[(240 - x_1) + (255 - x_1) + (270 - x_1)] + 2000 = \frac{400}{3}(4x_1 - 3s_1 - 255)$$

Όμως για όλα τα x_1 ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_1(s_1, x_1) > 0$$

έτσι θέτοντας

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) = 0$$

παίρνουμε

$$x_1 = \frac{3s_1 + 255}{4}$$

Ξέρουμε ότι $s_1 = 255$ άρα το x_1 που ελαχιστοποιεί τη $f_1(s_1, x_1)$ στη περιοχή $240 \leq x_1 \leq 255$ είναι $x_1 = 247.5$. Στην περιοχή $240 \leq x_1 \leq 255$ περιλαμβάνεται και η τιμή $x_1 = 240$, έτσι $f_1(s_1, 240) > f_1(s_1, 247.5)$. Άρα συμπεραίνουμε ότι το $x_1 = 247.5$ ελαχιστοποιεί επίσης το $f_1(s_1, x_1)$ για όλη την εφικτή περιοχή $220 \leq x_1 \leq 255$.

Τέλος πρέπει να υπολογίσουμε το $f_1^*(s_1)$ για $s_1 = 255$, από το $x_1 = 247.5$ σε συνδυασμό με τη σχέση $f_1(255, x_1)$ για την περιοχή $240 \leq x_1 \leq 255$. Έτσι παίρνουμε,

$$\begin{aligned} f_1^*(255) &= 200(247.5 - 255)^2 + 2000(247.5 - 220) + \\ &+ \frac{200}{9}[2(250 - 247.5)^2 + (265 - 247.5)^2 + 30(742.5 - 575)] \\ &= 185000 \end{aligned}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στο ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 7.5: $n=1$

s_1	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
255	185000	247,5

Ως εκ τούτου από τους πίνακες για τα $n = 2, n = 3$ και $n = 4$, αντίστοιχα, και από τη σχέση $s_n = x_{n-1}^*$ προκύπτει σε κάθε περίπτωση η βέλτιστη λύση. Άρα έχουμε $x_1^* = 247.5, x_2^* = 245, x_3^* = 247.5$ και $x_4^* = 255$, με συνολικό εκτιμώμενο κόστος ανά κύκλο 185.000 €.

7.2 Εφαρμογή 2 - Πρόβλημα Απογραφής

Μία εταιρία γνωρίζει ότι η ζήτηση ενός προϊόντος κατά τη διάρκεια καθενός από τους επόμενους μήνες θα είναι ως εξής: μήνας 1, 1 μονάδα, μήνας 2, 3 μονάδες, μήνας 3, 2 μονάδες, μήνας 4, 4 μονάδες. Στην αρχή κάθε μήνα, η εταιρία πρέπει να προσδιορίσει τον αριθμό των μονάδων που θα πρέπει να παραχθούν κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου μήνα. Κατά τη διάρκεια ενός μήνα, ανεξάρτητα από τον αριθμό των μονάδων που παράγονται, συνυπολογίζεται πάντα και ένα αρχικό κόστος 3 €. Ακόμη για κάθε μονάδα που παράγεται υπάρχει ακόμα ένα μεταβλητό κόστος 1 € ανά μονάδα που παράγεται. Στο τέλος του μήνα ένα πρόσθετο κόστος 0,5 € ανά μονάδα που παραδίδεται πρέπει να συνυπολογιστεί. Οι περιορισμοί που τίθενται λόγω χωρητικότητας, μας επιτρέπουν μέγιστη παραγωγή 5 μονάδων κάθε μήνα. Το μέγεθος της εταιρικής αποθήκης επιτρέπει μέγιστο αριθμό 4 μονάδων κατά

την απογραφή στο τέλος του μήνα. Στόχος της εταιρίας είναι να προσδιορίσει ένα πρόγραμμα παραγωγής που θα ικανοποιεί το σύνολο των απαιτήσεων κάθε στιγμή ελαχιστοποιώντας ταυτόχρονα το συνολικό κόστος κατά τη διάρκεια των 4 μηνών. Θεωρούμε ότι στην αρχή κάθε μήνα έχουμε διαθέσιμες 0 μονάδες.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι προκειμένου να ικανοποιείται το σύνολο των απαιτήσεων εγκαίρως θα πρέπει το αποτέλεσμα της τελικής απογραφής κάθε μήνα θα πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό για την επίλυση του προβλήματος μας θα πρέπει να διευκρινίσουμε την κατάσταση, το στάδιο και την απόφαση. Το στάδιο θα πρέπει να οριστεί έτσι ώστε όταν παραμένει σταθερό το πρόβλημα μας να επιλύεται εύκολα. Αν βρισκόμαστε στο ξεκίνημα του μήνα 4, τότε η εταιρία θα ικανοποιήσει τις απαιτήσεις στο ελάχιστο κόστος παράγοντας απλώς αρκετές μονάδες προϊόντος ώστε να σιγουρέψει ότι (παραγωγή μήνα 4)+(τελική απογραφή μήνα 4)=(απαιτήσεις μήνα 4). Έτσι, όταν βρισκόμαστε εντός του ίδιου μήνα το πρόβλημα της εταιρίας είναι πολύ εύκολο να λυθεί. Κατά συνέπεια αφήνουμε το χρόνο να αναπαριστά το στάδιο του προβλήματος.

Σε κάθε στάδιο (ή μήνα), η εταιρία πρέπει να αποφασίσει τον αριθμό των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παράγει μέσα στο μήνα. Για να λάβει αυτή την απόφαση η εταιρία χρειάζεται να γνωρίζει μόνο την απογραφή των προϊόντων στην αρχή κάθε μήνα (η το τέλος του προηγούμενου). Κατά συνέπεια, αφήνουμε την κατάσταση του προβλήματος σε κάθε στάδιο του προβλήματος να είναι η αρχή του προβλήματος απογραφής.

Προτού όμως γράψουμε την αναδρομική σχέση που θα χρησιμοποιηθεί για το χτίσιμο του βέλτιστου προγράμματος παραγωγής, πρέπει να ορίσουμε $f_i(t)$ να είναι το ελάχιστο κόστος για την ικανοποίηση της ζήτησης για τους μήνες $t, t+1, \dots, 4$ αν i μονάδες είναι διαθέσιμες στην αρχή κάθε μήνα t . Ορίζουμε ακόμη $c(x)$ να είναι το κόστος παραγωγής μονάδων x κατά τη διάρκεια μίας περιόδου. Τότε $c(0) = 0$, και για $x > 0$, $c(x) = 3 + x$. Επειδή όμως η αποθήκη της εταιρίας έχει περιορισμένη χωρητικότητα σε συνδυασμό και με το γεγονός ότι η ζήτηση πρέπει να καλυφθεί έγκαιρα, οι πιθανές καταστάσεις κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου είναι 0, 1, 2, 3 και 4. Έτσι, ξεκινάμε προσδιορίζοντας τα $f_4(0), f_4(1), f_4(2), f_4(3)$ και $f_4(4)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτή την πληροφορία για να υπολογίσουμε τα $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$ και $f_3(4)$, κατόπιν τα $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$ και $f_2(4)$ και τέλος το $f_1(0)$. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε ένα βέλτιστο επίπεδο παραγωγής για κάθε μήνα. Ορίζουμε $x_t(i)$ να είναι το επίπεδο παραγωγής κατά τη διάρκεια του μήνα t που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος κατά τη διάρκεια των μηνών $t, t+1, \dots, 4$ αν i μονάδες είναι διαθέσιμες στην αρχή κάθε μήνα t . Ξεκινάμε τώρα να πηγαίνουμε προς τα πίσω

Μήνας 4, Υπολογισμοί

Κατά τη διάρκεια του μήνα 4, η εταιρία θα παράγει αρκετές μονάδες έτσι ώστε να σιγουρέψει ότι τον μήνα 4 η ζήτηση των 4 μονάδων να ικανοποιηθεί. Αυτό μας δίνει:

$$\begin{aligned} f_4(0) &= c(4) = 3 + 4 = 7 \text{ \& } x_4(0) = 4 - 0 = 4 \\ f_4(1) &= c(3) = 3 + 4 = 6 \text{ \& } x_4(0) = 4 - 1 = 4 \\ f_4(2) &= c(2) = 3 + 4 = 5 \text{ \& } x_4(0) = 4 - 2 = 4 \\ f_4(3) &= c(1) = 3 + 4 = 4 \text{ \& } x_4(0) = 4 - 3 = 4 \\ f_4(4) &= c(0) = 0 \text{ \& } x_4(0) = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Μήνας 3, Υπολογισμοί

Πώς μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε το $f_3(i)$ για $i = 0, 1, 2, 3, 4$; Το κόστος $f_3(i)$ είναι το ελάχιστο κόστος που απαιτείται κατά τη διάρκεια των μηνών 3 και 4 αν η απογραφή στην αρχή του μήνα 3 είναι i . Για κάθε δυνατό επίπεδο παραγωγής x κατά τη διάρκεια του μήνα 3, το συνολικό κόστος κατά τη διάρκεια των μηνών 3 και 4 είναι λοιπόν

$$\frac{1}{2}(i + x - 2) + c(x) + f_4(i + x - 2) \quad (7.1)$$

Αυτό προκύπτει καθώς, αν x μονάδες παράγονται κατά τη διάρκεια του μήνα 3, η τελική απογραφή του μήνα 3 θα είναι $i + x - 2$. Τότε το ελάχιστο κόστος για τον μήνα 3 θα είναι $\frac{1}{2}(i + x - 2)$ και το κόστος παραγωγής του μήνα 3 θα είναι $c(x)$. Τότε μπαίνουμε στον μήνα 4 με $i + x - 2$ διαθέσιμες. Καθώς από το σημείο αυτό και πέρα προχωράμε με βέλτιστο τρόπο (αρχή βελτιστοποίησης), το κόστος για τον μήνα 4 θα είναι $f_4(i + x - 2)$. Θέλουμε τώρα να επιλέξουμε το επίπεδο παραγωγής του μήνα 3 έτσι να ελαχιστοποιήσουμε την (7.1), και έτσι γράφουμε

$$f_3(i) = \min_x \left\{ \frac{1}{2}(i + x - 2) + c(x) + f_4(i + x - 2) \right\} \quad (7.2)$$

Στην (7.2), το x πρέπει να ανήκει στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και πρέπει επίσης να ικανοποιεί την συνθήκη $4 \geq i + x - 2 \geq 0$. Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι οι τρέχουσες απαιτήσεις του μήνα πρέπει να ικανοποιηθούν, $i + x - 2 \geq 0$, και η τελική απογραφή δεν πρέπει να ξεπερνά την χωρητικότητα $4, i + x - 2 \leq 4$. Θυμόμαστε ότι $x_3(i)$ είναι κάθε τιμή του x που μας οδηγεί στο $f_3(i)$. Οι υπολογισμοί για τα $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$ και $f_3(4)$ δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Computations for $f_3(i)$

i	x	$(\frac{1}{2})(i + x - 2) + c(x)$	$f_4(i + x - 2)$	Total Cost Months 3, 4	$f_3(i)$ $x_3(i)$
0	2	$0 + 5 = 5$	7	$5 + 7 = 12^*$	$f_3(0) = 12$
0	3	$\frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$	6	$\frac{13}{2} + 6 = \frac{25}{2}$	$x_3(0) = 2$
0	4	$1 + 7 = 8$	5	$8 + 5 = 13$	
0	5	$\frac{3}{2} + 8 = \frac{19}{2}$	4	$\frac{19}{2} + 4 = \frac{27}{2}$	
1	1	$0 + 4 = 4$	7	$4 + 7 = 11$	$f_3(1) = 10$
1	2	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$	6	$\frac{11}{2} + 6 = \frac{23}{2}$	$x_3(1) = 5$
1	3	$1 + 6 = 7$	5	$7 + 5 = 12$	
1	4	$\frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2}$	4	$\frac{17}{2} + 4 = \frac{25}{2}$	
1	5	$2 + 8 = 10$	0	$10 + 0 = 10^*$	
2	0	$0 + 0 = 0$	7	$0 + 7 = 7^*$	$f_3(2) = 7$
2	1	$\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$	6	$\frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}$	$x_3(2) = 0$
2	2	$1 + 5 = 6$	5	$6 + 5 = 11$	
2	3	$\frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$	4	$\frac{15}{2} + 4 = \frac{23}{2}$	
2	4	$2 + 7 = 9$	0	$9 + 0 = 9$	
3	0	$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}^*$	$f_3(3) = \frac{13}{2}$
3	1	$1 + 4 = 5$	5	$5 + 5 = 10$	$x_3(3) = 0$
3	2	$\frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2}$	4	$\frac{13}{2} + 4 = \frac{21}{2}$	
3	3	$2 + 6 = 8$	0	$8 + 0 = 8$	
4	0	$1 + 0 = 1$	5	$1 + 5 = 6^*$	$f_3(4) = 6$
4	1	$\frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$	4	$\frac{11}{2} + 4 = \frac{19}{2}$	$x_3(4) = 0$
4	2	$2 + 5 = 7$	0	$7 + 0 = 7$	

Μήνας 2, Υπολογισμοί

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το $f_2(i)$, το ελάχιστο κόστος που απαιτείται κατά τους μήνες 2,3 και 4 δεδομένου ότι στην αρχή του μήνα 2, η απογραφή έχει αποτέλεσμα i μονάδες. Υποθέτουμε ότι η παραγωγή κατά τον μήνα 2 είναι x . Επειδή τον μήνα 2 η ζήτηση είναι 3 μονάδες, το βασικό κόστος που απαιτείται στο τέλος του μήνα 2 είναι $\frac{1}{2}(i + x - 3)$. Έτσι, το συνολικό κόστος κατά τη διάρκεια του μήνα 2 είναι $\frac{1}{2}(i + x - 3) + c(x)$. Κατά τη διάρκεια των μηνών 3, 4, ακολουθούμε τη βέλτιστη πολιτική. Καθώς ο μήνας 3 ξεκινάει με μία απογραφή $i + x - 3$, το κόστος κατά τη διάρκεια των μηνών 3 και 4 γίνεται $f_3(i + x - 3)$. Σε αναλογία με την (7.2) γράφουμε τώρα

$$f_2(i) = \min_x \left\{ \frac{1}{2}(i + x - 3) + c(x) + f_3(i + x - 3) \right\} \quad (7.3)$$

όπου x πρέπει ανήκει στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και το x πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq i + x - 3 \leq 4$. Οι υπολογισμοί για τα $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$ και $f_2(4)$ δίνονται

στον παρακάτω πίνακα.

Computations for $f_2(i)$

i	x	$(\frac{1}{2})(i + x - 3) + c(x)$	$f_3(i + x - 3)$	Total Cost Months 2-4	$f_2(i)$ $x_2(i)$
0	3	$0 + 6 = 6$	12	$6 + 12 = 18$	$f_2(0) = 16$
0	4	$\frac{1}{2} + 7 = \frac{15}{2}$	10	$\frac{15}{2} + 10 = \frac{35}{2}$	$x_2(0) = 5$
0	5	$1 + 8 = 9$	7	$9 + 7 = 16^*$	
1	2	$0 + 5 = 5$	12	$5 + 12 = 17$	$f_2(1) = 15$
1	3	$\frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$	10	$\frac{13}{2} + 10 = \frac{33}{2}$	$x_2(1) = 4$
1	4	$1 + 7 = 8$	7	$8 + 7 = 15^*$	
1	5	$\frac{3}{2} + 8 = \frac{19}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{19}{2} + \frac{13}{2} = 16$	
2	1	$0 + 4 = 4$	12	$4 + 12 = 16$	$f_2(2) = 14$
2	2	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$	10	$\frac{11}{2} + 10 = \frac{31}{2}^*$	$x_2(2) = 3$
2	3	$1 + 6 = 7$	7	$7 + 7 = 14^*$	
2	4	$\frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{17}{2} + \frac{13}{2} = 15$	
2	5	$2 + 8 = 10$	6	$10 + 6 = 16$	
3	0	$0 + 0 = 0$	12	$0 + 12 = 12^*$	$f_2(3) = 12$
3	1	$\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$	10	$\frac{9}{2} + 10 = \frac{29}{2}$	$x_2(3) = 0$
3	2	$1 + 5 = 6$	7	$6 + 7 = 13$	
3	3	$\frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2} + \frac{13}{2} = 14$	
3	4	$2 + 7 = 9$	6	$9 + 6 = 15$	
4	0	$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$	10	$\frac{1}{2} + 10 = \frac{21}{2}^*$	$f_2(4) = \frac{21}{2}$
4	1	$1 + 4 = 5$	7	$5 + 7 = 12$	$x_2(4) = 0$
4	2	$\frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2} + \frac{13}{2} = 13$	
4	3	$2 + 6 = 8$	6	$8 + 6 = 14$	

Μήνας 1, Υπολογισμοί

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι το $f_1(i)$ δίνεται από την αναδρομική σχέση

$$f_1(i) = \min_x \left\{ \frac{1}{2}(i + x - 1) + c(x) + f_2(i + x - 1) \right\} \quad (7.4)$$

όπου το x πρέπει να ανήκει και τώρα στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και να ικανοποιεί και την συνθήκη $0 \leq i + x - 1 \leq 4$. Καθώς η απογραφή στην αρχή του μήνα είναι είτε 1 είτε 0 μονάδες, θέλουμε ουσιαστικά να υπολογίσουμε τα $f_1(0), x_1(0)$. Οι υπολογισμοί για τα $f_1(0), f_1(1), f_1(2), f_1(3)$ και $f_1(4)$ δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

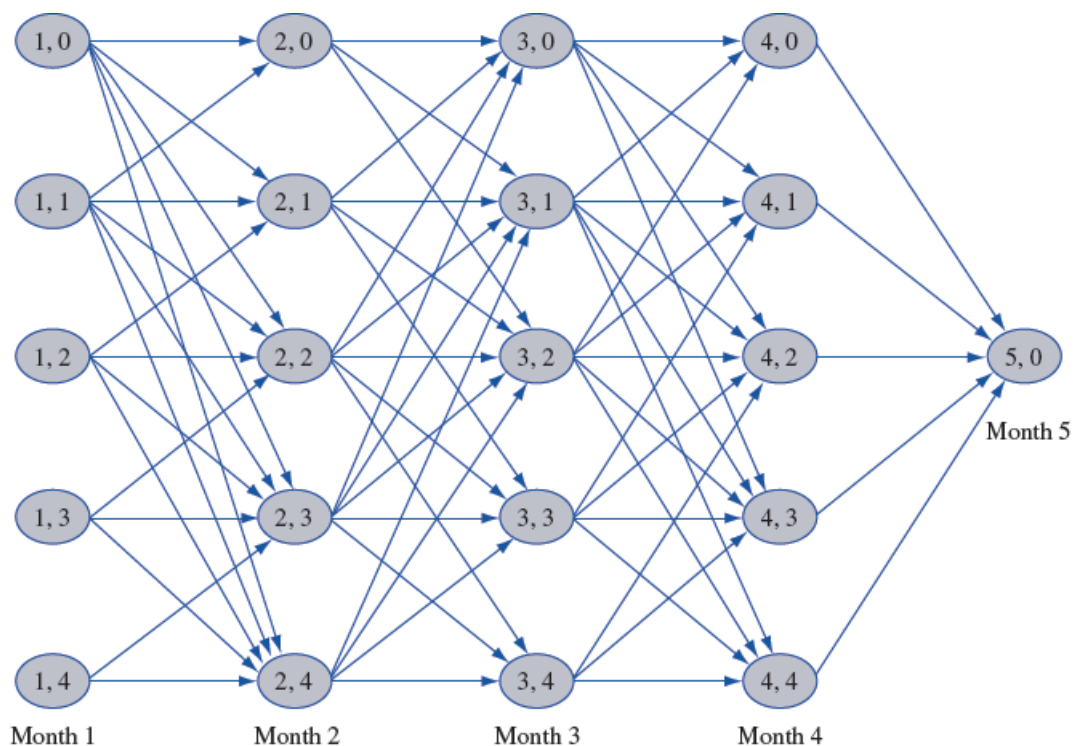
Computations for $f_1(i)$

i	x	$(\frac{1}{2})(i + x - 1) + c(x)$	$f_2(i + x - 1)$	Total Cost	$f_1(i)$ $x_1(i)$
0	1	$0 + 4 = 4$	16	$4 + 16 = 20^*$	$f_1(0) = 20$
0	2	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$	15	$\frac{11}{2} + 15 = \frac{41}{2}$	$x_1(0) = 1$
0	3	$1 + 6 = 7$	14	$7 + 14 = 21$	
0	4	$\frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2}$	12	$\frac{17}{2} + 12 = \frac{41}{2}$	
0	5	$2 + 8 = 10$	$\frac{21}{2}$	$10 + \frac{21}{2} = \frac{41}{2}$	
1	0	$0 + 0 = 0$	16	$0 + 16 = 16^*$	$f_1(1) = 16$
1	1	$\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$	15	$\frac{9}{2} + 15 = \frac{39}{2}$	$x_1(1) = 0$
1	2	$1 + 5 = 6$	14	20	
1	3	$\frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$	12	$\frac{15}{2} + 12 = \frac{39}{2}$	
1	4	$2 + 7 = 9$	$\frac{21}{2}$	$9 + \frac{21}{2} = \frac{39}{2}$	
2	0	$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$	15	$\frac{1}{2} + 15 = \frac{31}{2}^*$	$f_1(2) = \frac{31}{2}$
2	1	$1 + 4 = 5$	14	$5 + 14 = 19$	$x_1(2) = 0$
2	2	$\frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2}$	12	$\frac{13}{2} + 12 = \frac{37}{2}$	
2	3	$2 + 6 = 8$	$\frac{21}{2}$	$8 + \frac{21}{2} = \frac{37}{2}$	
3	0	$1 + 0 = 1$	14	$1 + 14 = 15^*$	$f_1(3) = 15$
3	1	$\frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$	12	$\frac{11}{2} + 12 = \frac{35}{2}$	$x_1(3) = 0$
3	2	$2 + 5 = 7$	$\frac{21}{2}$	$7 + \frac{21}{2} = \frac{35}{2}$	
4	0	$\frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$	12	$\frac{3}{2} + 12 = \frac{27}{2}^*$	$f_1(4) = \frac{27}{2}$
4	1	$2 + 4 = 6$	$\frac{21}{2}$	$6 + \frac{21}{2} = \frac{33}{2}$	$x_1(4) = 0$

Προσδιορισμός του Βέλτιστου Προγράμματος Παραγωγής

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε το πρόγραμμα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος προκειμένου να ικανοποιηθούν εγκαίρως οι απαιτήσεις και για του 4 μήνες. Καθώς η αρχική μας απογραφή έχει αποτέλεσμα 0 μονάδες, το ελάχιστο κόστος για τους 4 μήνες θα είναι $f_1(0) = 20$. Για να φτάσουμε στο $f_1(0)$, πρέπει να παράγουμε $x_1(0) = 1$ μονάδα κατά τη διάρκεια του μήνα 1. Τότε η απογραφή στην αρχή του μήνα 2 θα είναι $0 + 1 - 1 = 0$. Κατά συνέπεια, τον μήνα 2, θα πρέπει να παράγουμε $x_2(0) = 5$ μονάδες. Η απογραφή στην αρχή του μήνα 3 θα είναι $0 + 5 - 3 = 2$ μονάδες και κατά τη διάρκεια του μήνα 3 πρέπει να παράγουμε $x_3(2) = 0$ μονάδες. Ομοίως για τον μήνα 4 η αρχική απογραφή θα δίνει $2 - 2 + 0 = 0$ μονάδες και $x_4 = 0$. Συνολικά, το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής απαιτεί συνολικό κόστος 20 € και παράγει 1 μονάδα κατά τη διάρκεια του μήνα 1, 5 μονάδες κατά τη διάρκεια του μήνα 2, 0 μονάδες κατά τη διάρκεια του μήνα 3, και 4 μονάδες κατά τον μήνα 4.

Λύση δάση του προβλήματος συντομότερης διαδρομής



Η λύση του προβλήματος 4 είναι ισοδύναμη με τον προσδιορισμό της συντομότερης διαδρομής που ενώνει τους κόμβους (1,0) και (5,0) στο παραπάνω σχήμα. Κάθε κόμβος του σχήματος αντιστοιχεί σε μία κατάσταση και κάθε στήλη κόμβων αντιπροσωπεύει όλες τις δυνατές καταστάσεις ενός σταδίου. Για παράδειγμα, αν βρισκόμαστε στον κόμβο (2,3), τότε είμαστε στην αρχή του μήνα 2 και η αρχική του απογραφή για τον συγκεκριμένο μήνα είναι 3 μονάδες. Κάθε τόξο του δικτύου αντιπροσωπεύει τον τρόπο με τον οποίο η απόφαση (πόσες μονάδες πρέπει να είναι η παραγωγή τον συγκεκριμένο μήνα) μετασχηματίζει την τωρινή κατάσταση στην κατάσταση του επόμενου μήνα. Για παράδειγμα το τόξο που ενώνει τους κόμβους (1,0) και (2,2) (ας το πούμε τόξο 1) αντιστοιχεί σε παραγωγή 3 μονάδων κατά τη διάρκεια του μήνα 1. Αυτό γίνεται πιο εμφανές αν σκεφτούμε ότι, εφόσον 3 μονάδες παράγονται κατά τη διάρκεια του μήνα 1, τότε ξεκινάμε τον μήνα 2 με $0 + 3 - 1 = 2$ μονάδες. Το μήκος κάθε τόξου είναι το άθροισμα του κόστους παραγωγής και απογραφής κατά την συγκεκριμένη περίοδο, δεδομένης της κατάστασης του συστήματος και της απόφασης που σχετίζεται με το επιλεγμένο τόξο. Το κόστος για παράδειγμα που σχετίζεται με το τόξο 1 θα ήταν $6 + \left(\frac{1}{2}\right)2 = 7$. Παρατηρούμε επίσης ότι κάποιοι κόμβοι σε διαδοχικά στάδια δεν ενώνονται με κάποιο τόξο (π.χ. (2,4) με (3,0)). Αυτό συμβαίνει διότι αν ξεκινήσουμε το μήνα 2 με 4 μονάδες, τότε στην αρχή του μήνα 3 θα έχουμε το λιγότερο $4 - 3 = 1$ μονάδα διαθέσιμη. Παρατηρούμε επίσης ότι έχουμε

σχεδιάσει τόξα που συνδέονται με όλες τις καταστάσεις του μήνα 4 με τον κόμβο (5,0), καθώς θα ήταν μη βέλτιστο να έχουμε θετική απογραφή στο τέλος του μήνα 4.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 4, το πρόγραμμα ελάχιστου κόστους παραγωγής αντιστοιχεί στη συντομότερη διαδρομή που ενώνει τους κόμβους (1,0) και (5,0). Όπως έχουμε δει, αυτό θα ήταν το μονοπάτι που αντιστοιχεί στα επίπεδα παραγωγής 1,5,0 και 4. Στο δίκτυο του σχήματος, αυτό θα αντιστοιχούσε στο μονοπάτι που ξεκινά από τον κόμβο (1,0), συνεχίζει στον $(2, 0+1-1) = (2, 0)$, στον $(3, 0+5-3) = (3, 2)$, στη συνέχεια στον $(4, 2+0-2) = (4, 0)$ και τέλος στον $(5, 0+4-4) = (5, 0)$. Έτσι το πρόγραμμα βέλτιστης παραγωγής αντιστοιχεί στο μονοπάτι $(1, 0)-(2, 0)-(3, 2)-(4, 0)-(5, 0)$ στο δίκτυο του σχήματος.

Λύση με τη βοήθεια excel

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να βρούμε μία πολιτική βέλτιστης παραγωγής για το πρόβλημα του παραδείγματος 4. Μία σημαντική πτυχή του προβλήματος παραγωγής είναι ότι στο τέλος κάθε μήνα η απογραφή πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 4 μονάδων. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι αυτό συμβαίνει προσδιορίζοντας χειροκίνητα τις επιτρεπτές δράσεις σε κάθε κατάσταση. Θα σχεδιάσουμε το φύλο εργασίας μας για να εξασφαλίσουμε ότι η τελική απογραφή κάθε μήνα θα είναι μεταξύ 0 και 4 συνολικά.

Το πρώτο βήμα μας στην ανάπτυξη του φύλλου εργασίας μας είναι να εισάγουμε το κόστος παραγωγής για κάθε πιθανό επίπεδο παραγωγής (0,1,2,3,4,5) στο κελιά B1:G2. Στη συνέχεια ορίζουμε $f_t(i)$ σαν το ελάχιστο κόστος που απαιτείται προκειμένου να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις για τους μήνες $t, t+1, \dots, 4$ όπου i μονάδες είναι διαθέσιμες στην αρχή κάθε μήνα. Αν d_t είναι η απαίτηση τον μήνα t , τότε για τα διάφορα $t=1,2,3,4$ μπορούμε να γράψουμε

$$f_t(i) = \min_{x: 0 \leq i+x-d_t \leq 4} \{.5(i+x-d_t) + c(x) + f_{t+1}(i+x-d_t)\} \quad (7.5)$$

όπου $c(x)$ είναι το κόστος παραγωγής x μονάδων κατά τη διάρκεια ενός μήνα, και $f_5(i) = 0$ για $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Αν ορίσουμε $J_t(i, x) = .5(i_x - d_t) + c(x) + f_{t+1}(i+x-d_t)$ μπορούμε να γράψουμε

$$f_t(i) = \min_{x: 0 \leq i+x-d_t \leq 4} \{J_t(i, x)\}$$

Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε το $J_4(0, 2)$, εισάγουμε την ακόλουθη σχέση στο κελί E13:

Εφαρμογές

A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	PROD COST	0	1	2	3	4	5						
2		0	4	5	6	7	8						
3													
4	VALUE	-5	0	1	2	3	4	5					
5	M5	10000	0	0	0	0	0	10000					
6	M4	10000	7	6	5	4	0	10000					
7	M3	10000	12	10	7	6.5	6	10000					
8	M2	10000	16	15	14	12	10.5	10000					
9													
10	STATE	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
11	ACTION	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	
12	DEMAND												
13	4		10000	10004	10005	10006	7	8.5	10000	10004	10005	6	7.5
14	2		10000	10004	12	12.5	13	13.5	10000	11	11.5	12	12.5
15	3		10000	10004	10005	18	17.5	16	10000	10004	17	16.5	15
16	1		10000	20	20.5	21	20.5	20.5	16	19.5	20	19.5	19.5
17													

A	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
11	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
12													
13	9	10000	10004	5	6.5	8	9.5	10000	4	5.5	7	8.5	10
14	10	7	10.5	11	11.5	9	10010.5	6.5	10	10.5	8	10009.5	10011
15	16	10000	16	15.5	14	15	16	12	14.5	13	14	15	10010.5
16	10010.5	15.5	19	18.5	18.5	10009.5	10011	15	17.5	17.5	10008.5	10010	10011.5
17													

A	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10	4	4	4	4	4	4						
11	0	1	2	3	4	5	F(0)	F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	
12												
13	0	4.5	6	7.5	9	10010.5	7	6	5	4	0	1
14	6	9.5	7	10008.5	10010	10011.5	12	10	7	6.5	6	2
15	10.5	12	13	14	10009.5	10011	16	15	14	12	10.5	3
16	13.5	16.5	10007.5	10009	10010.5	10012	20	16	15.5	15	13.5	4
17												

$$\begin{aligned}
 &= HLOOKUP(E\$11, \$B\$1 : \$G\$2, 2) \\
 &+ .5^* + 1MAX(E\$10 + E\$11 - \$A13, 0) \\
 &+ HLOOKUP(E\$10 + E\$11 - \$A13, \$B\$4 : \$H\$8, 1 + \$AL13)
 \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος μας δίνει το $c(x)$ (επειδή το $E\$11$ είναι το επίπεδο παραγωγής). Ο δεύτερος όρος μας δίνει το δεδομένο κόστος για το μήνα

(καθώς $E\$10+E\$11-\$A13$ είναι η απογραφή στο τέλος του μήνα). Ο τελευταίος όρος μας δίνει το $f_t(i+x-d_t)$ καθώς $E\$10+E\$11-\$A13$ είναι η απογραφή στην αρχή του μήνα $t+1$. Η εμφάνιση του αθροίσματος $1+\$A13$ στον τελευταίο όρο εξασφαλίζει ότι κοιτάζουμε για την τιμή του $f_t(i+x-d_t)$ στην σωστή γραμμή του φύλλου μας (οι τιμές του $f_t()$ θα υπολογιστούν στο χώρο C5:G8). Αντιγράφοντας την σχέση του E13 στο χώρο C13:A16 υπολογίζουμε το σύνολο των $J_t(1,x)$.

Στο διάστημα AG13:AK16, υπολογίζουμε το $f_t(d)$. Ξεκινώντας, εισάγουμε τις ακόλουθες σχέσεις στα κελιά AG13:AK13:

$$AG13 := MIN(C13 : H13), f_4(0)$$

$$AH13 := MIN(I13 : N13), f_4(1)$$

$$AI13 := MIN(O13 : T13), f_4(2)$$

$$AJ13 := MIN(U13 : Z13), f_4(3)$$

$$AK13 := MIN(AA13 : AF13), f_4(4)$$

Για να υπολογίσουμε όλα τα $f_t(i)$, αντιγράφουμε τώρα όλες τις σχέσεις από το χώρο AG13:AK13 στο διάστημα AG13:AK16. Για να είναι αυτό επιτυχές θα πρέπει να έχουμε τις σωστές τιμές για τα $f_t(i)$ στα κελιά B5:H8. Στις στήλες B και H των γραμμών 5-8, εισάγουμε 10,000 (ή οποιοδήποτε μεγάλο θετικό αριθμό). Αυτό εξασφαλίζει ότι είναι πολύ ασύμφορο να τελειώσει ένας μήνας με αρνητική απογραφή ή με τιμή μεγαλύτερη του 4. Με αυτό τον τρόπο η τιμή της απογραφής μας στο τέλος κάθε μήνα είναι μεταξύ 0 και 4 συνολικά. Στο διάστημα C5:G5, εισάγουμε 0 σε κάθε κελί. Αυτό συμβαίνει διότι $f_5(i) = 0$ για $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Στο κελί C6, εισάγουμε +AG13; αυτό εισάγει την τιμή του $f_1(0)$. Αντιγράφοντας τώρα αυτή την σχέση στο διάστημα C6:G8, έχουμε δημιουργήσει έναν πίνακα των διαφορών $f_t(d)$, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν (στις γραμμές 13-16) για να αναζητήσουμε το κατάλληλο $f_t(d)$.

Όπως και με το φύλλο εργασίας που χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε το παράδειγμα 5, το παρόν φύλλο εργασίας εμφανίζει κυκλικές αναφορές. Αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι οι σειρές 6-8 αναφέρονται στις σειρές 13-16 και οι 13-16 πίσω στις 6-8. Πατώντας το πλήκτρο F9 αρκετές φορές, επιλύουμε αυτές τις κυκλικές αναφορές.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το παραπάνω φύλλο εργασίας για κάθε αρχικό επίπεδο απογραφής, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το πρόγραμμα βέλτιστης παραγωγής. Έτσι, για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η απογραφή στην αρχή του μήνα 1 είναι 0. Τότε $f_1(0) = 20 = J_1(0, 1)$. Κατά συνέπεια είναι βέλτιστο να παράγουμε 1 μονάδα κατά τη διάρκεια του μήνα 1. Τώρα, ομοίως $f_2(0+1-1) = 16 = J_2(0, 5)$, που μας οδηγεί σε παραγωγή 5 μονάδων κατά τη διάρκεια του μήνα 2. Συνεχίζοντας $f_3(0+5-3) = 7 = J_3(2, 0)$ παράγουμε 0 μονάδες κατά τη διάρκεια του μήνα 3 ενώ η σχέση $f_4(2+0-2) = J_4(0, 4)$ μας δίνει παραγωγή 4 μονάδων κατά τη διάρκεια του μήνα 4.

Βιβλιογραφία

- [1] Δημήτριος Ξηρόκωστας. *ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ-ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ*.
- [2] Α. Οικονόμου Δ. Φακίνου. *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Dubury Pr, 1997.
- [3] *Operations research Lecture Series*.
- [4] Dimitri P. Bertsekas. *Lecture slides on dynamic programming based on lectures given at the MIT*. 2009.
- [5] Dreyfus. *The Art and Theory of Dynamic Programming Mathematics in Dcience amp Engineering*. Academic Press, 1977.
- [6] Gerald J. Lieberman Frederick S. Hiller. *Introduction to Operations Research, 7th Edition*. McGraw-Hill, 2009.
- [7] Govindasami Naadimuthu Richard Bronson. *Επιχειρησιακή έρευνα*. Κλειδάριθμος.
- [8] G. Richard Eisler John E. Hurtado Rush D. Robinett III, David G. Wilson. *Applied Dynamic Programming for Optimization of Dynamical Systems Advances in Design and Control*. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2005.
- [9] Hamdy A. Taha. *Operations Research. An Introduction*. Prentice Hall, 2002.
- [10] Wayne L. Winston. *Operations Research Applications and Algorithms*. Dubury Pr, 1997.