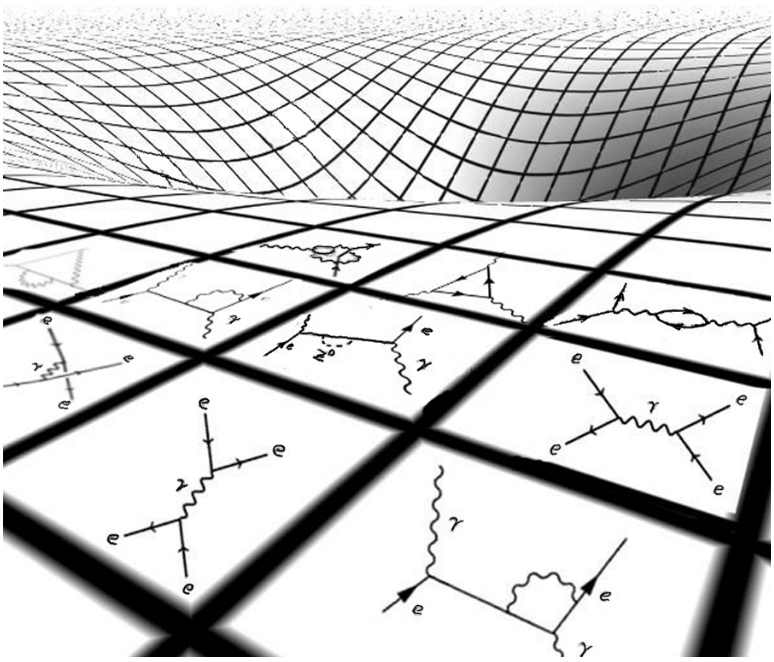
Φαινόμενο
Unruh



Δημήτρης Π. Μάγγος

Διπλωματική Εργασία

Υπεύθυνος: Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

Abstract

This thesis is dealing with quantum effects in curved spacetime. Although the General Relativity is a classical theory for gravitation a semi-classical approximation can applied to describe some quantum effects in curved spacetime. One of these effects is the Unruh effect (another one is Hawking radiation of black holes) which indicates that spacetime is full of particles governed thermal distribution. The Unruh effect is a result of observer's accelerating motion along with the ability of quantum systems to hold different states for different observers. In this dissertation a brief introduction has been made to differential geometry, special relativity as well as general. A short study in quantum field theory in curved spacetime has been made, while the document concludes by the Unruh effect .

Περίληψη

Σε αυτήν την διπλωματική έγινε μελέτη κβαντικών φαινομένων σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Παρόλο που η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μια κλασική θεωρία για την βαρύτητα μπορεί να γίνει μία ημικλασική προσέγγιση ούτως ώστε να περιγράφουν κάποια κβαντικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στον καμπυλωμένο χωρόχρονο. Ένα τέτοιο φαινόμενο αποτελεί και το φαινόμενο Unruh (ένα άλλο είναι το φαινόμενο της ακτινοβολίας Hawking των μελανών οπών) το φαινόμενο αυτό μας αποκαλύπτει ότι ο χωρόχρονος είναι γεμάτος από σωματίδια με μία θερμική κατανομή.Το φαινόμενο Unruh είναι αποτέλεσμα της επιταχυνόμενης κίνησης ενός παρατηρητή και της δυνατότητας του κβαντικου συστήματος να έχει διαφορετικές καταστάσεις για διαφορετικούς παρατηρητές. Σε αυτήν την διπλωματική έχει γίνει μία σύντομη εισαγωγή στην διαφορική γεωμετρία, ειδική και γενική θεωρία της σχετικότητας και στην κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπυλομένο χωρόχρονο όπου τελικώς το φαινόμενο Unruh ήταν αποτέλεσμα της μελέτης της κβαντικής θεωρίας πεδίου στον καμπυλωμένο χωρόχρονο.

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλους πρέπει να ευχαριστίσω τους γονείς μου που με στήριζαν όλα αυτά τα χρόνια αλλά κυρίως κατά την εκπόνηση της εν λόγω εργασίας. Δεύτερον τον καθηγητή και υπεύθυνο μου, Κωνσταντίνο Αναγνωστόπουλο, όπως επίσης και τους καθηγητές Κωνσταντίνο Φαράκο και Γεώργιο Κουτσούμπα για τις πολύτιμες συμβουλές τους. Επίσης ευχαριστώ τον συμφοιτητή μου Γεώργιο Καρανάνα για την αμέριστη βοήθεια που μου παρείχε τόσα χρόνια σε θέματα φυσικής και XƎLaTeX καθώς και τους συμφοιτητές μου Λυδία Μακρυγιάννη και Αθανάσιο Σταματόπουλο για την βοήθεια τους στο XƎLaTeX. Τέλος ευχαριστώ τους φίλους μου για την υποστήριξή τους.

Στους φίλους μου!!!

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά εργαλεία

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο ορίζοντας κάποιες έννοιες οι οποίες θα βοηθήσουν να γίνουν κατανοητά τα παρακάτω (π.χ. η έννοια της πολλαπλότητας, των μορφών κ.α.).

1.1 Απεικονίσεις

Ορισμός 1.1.1. Έστω δύο σύνολα X & Y. Μια απεικόνιση είναι ένας κανόνας που εκχωρεί τιμές στο $y \in Y$ για κάθε $x \in X$ και γράφουμε:

$$f : X \mapsto Y \tag{1.1}$$

Αν η f είναι ορισμένη με έναν ρητό τύπο, γράφουμε:

$$f : x \mapsto f(x) \tag{1.2}$$

Τα σύνολο X ονομάζεται πεδίο ορισμού και το σύνολο Y σύνολο τιμών της απεικόνισης. Αν μια απεικόνιση ικανοποιεί:

α) $f : X \mapsto Y$ καλείται **αμφιμονότιμη** αν $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

β) $f : X \mapsto Y$ καλείται **επί** αν $\forall\ y \in Y\ \exists\ x : f(x) = y$

γ) $f : X \mapsto Y$ καλείται **bijective** αν ισχύουν τα δύο προηγούμενα

ένα σημαντικό στοιχείο για μια απεικόνιση είναι ότι αν υπάρχει η αντίστροφη της θα υπάρχει και το ουδέτερο στοιχείο ($f^{-1} \circ f = id_X$). Η f καλείται **ομοιομορφισμός**, αν υποθέσουμε πως, για δύο σύνολα X, Y που αποτελούν μια αλγεβρική δομή (με μια πράξη την πρόσθεση ή τον πολλαπλασιασμό) η απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ διατηρεί αυτήν την αλγεβρική δομή. Αν τώρα επιπλέον η απεικόνιση είναι και bijective τότε καλείται **ισομορφισμός** και το σύνολο X **ισομορφικό** στο Y και συμβολίζεται $x \cong y$.

1.2 Διανυσματικοί Χώροι

1.2.1 Διανύσματα και Διανυσματικοί Χώροι

Διανυσματικός χώρος ή (**Γραμμικός χώρος**) V σε ένα πεδίο K είναι ένα σύνολο στο οποίο ισχύουν δύο πράξεις, η πρόσθεση και ο βαθμωτό πολλαπλασιασμός των στοιχείων του K. Τα στοιχεία του V ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
3. $\exists 0: \ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$
4. $\forall\boldsymbol{u}\ \exists(-\boldsymbol{u}): \ \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$
5. $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$
6. $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$
7. $(cd)\boldsymbol{u}=c(d\boldsymbol{u})$
8. $\exists 1: \ 1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V \&\ c,d,1\in K$
Τα διανύσματα για τα οποία ισχύει: $x^1u_1+x^2u_2+\cdots+x^nu_n=0$, και όχι όλα τα $x^i=0$ λέγονται **γραμμικός ανεξάρτητα**.
Ονομάζουμε βάση $\{e_i\}$ του V τα γραμμικός ανεξάρτητα διανύσματα για τα οποία κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών: $\boldsymbol{u}=u^1\boldsymbol{e_1}+u^2\boldsymbol{e_2}+\cdots+u^n\boldsymbol{e_n}=u^i\boldsymbol{e_i}$

1.2.2 Γραμμικές απεικονίσεις, Εικόνα, Πυρήνας

Γραμμική απεικόνιση όπως ορίστηκε προηγουμένως είναι:
$f: V\mapsto W \rightarrow f(a_1\boldsymbol{u_1}+a_2\boldsymbol{u_2})=a_1f(\boldsymbol{u_1})+a_2f(\boldsymbol{u_2}), \forall a_i\in K, \forall\boldsymbol{u_i}\in V$
Ως εικόνα ορίζεται της $f(V)\subset W$ και ως πυρήνας της f το $\{\boldsymbol{u}\in V|f(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}\}$.

1.2.3 Δυϊκός Διανυσματικός Χώρος

Έστω f μια γραμμική συνάρτηση σε έναν διανυσματικό χώρο $V(n,K)$ σε ένα πεδίο K. Έστω βάση $\{e_i\}$ και ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e_i}$. Λόγω της γραμμικότητας της f έχουμε $f(\boldsymbol{u})=u^if(\boldsymbol{e_i})$. Οπότε αν γνωρίζουμε την δράση της f σε όλα τα e_i τότε έχουμε έναν νέο διανυσματικό χώρο τον οποίο τον ονομάζουμε **δυικό** και συμβολίζεται με $V^*(n,K)$. Έχουμε τη βάση του χώρου (καθότι γραμμικός) e^{*j} για την οποία ισχύει $e^{*j}e_i=\delta_i^j$. Η δράση της f στο u ερμηνεύεται ως εσωτερικό γινόμενο $f(\boldsymbol{u})=f_je^{*j}(u^ie_i)=f_ju^i\delta_i^j=f_iu^i$. Το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται και ως $\langle\ ,\ \rangle: V^*\times V\mapsto K$. Ένας τανυστής $T(p,q)$ είναι μια απεικόνιση που απεικονίζει p δυικά διανύσματα και q διανύσματα στο $\mathbb{R}$.

1.2.4 Τανυστές

Ένα δυικό διάνυσμα είναι ένα γραμμικό αντικείμενο το οποίο απεικονίζει διανύσματα σε αριθμούς (μέσω του εσωτερικού γινομένου). Η γενίκευση αυτού του αντικειμένου το οποίο απεικονίζει διανύσματα και δυικά διανύσματα σε αριθμούς, ονομάζεται τανυστής. $T: \overset{p}{\otimes}V^*\overset{q}{\otimes}V\mapsto\mathbb{R}$.

1.2.5 Τοπολογικός Χώρος

Ορισμός 1.2.1. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{T} = \{U_i | i \in I\}$ το οποίο δηλώνει ένα συγκεκριμένο σύνολο από υποσύνολα του X. Ο συνδυασμός $(X, \mathcal{T})$ ορίζουν έναν τοπολογικό χώρο αν το $\mathcal{T}$ ικανοποιεί:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii) Αν $\mathcal{T}$ ένα υποσύνολο του I (πιθανόν και άπειρο), η οικογένεια $\{U_j | j \in J\}$ ικανοποιεί $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$.

iii) Αν K ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του I, η οικογένεια $\{U_k | k \in K\}$ ικανοποιεί $\bigcap_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}$.

Το X καμία φορά ονομάζεται τοπολογικός χώρος από μόνο του. Τα U_i είναι όλα τα ανοιχτά υποσύνολα και το λέγεται ότι δίνει τοπολογία στο X. Η έννοια της τοπολογίας είναι γενικότερη της έννοιας της μετρικής, ένας μετρικός χώρος είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των τοπολογικών χώρων.

1.2.6 Περιοχές και Χώροι Hausdorff

Ορισμός 1.2.2. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{T}$ δίνει μια τοπολογία στο X. Το N είναι μια **περιοχή** του σημείου $x \in X$ αν το N είναι υποσύνολο του X και το N περιέχει τουλάχιστον ένα σύνολο U_i που ανήκει το x. Αν το N είναι ανοιχτό υποσύνολο στο $\mathcal{T}$ τότε καλείται **ανοιχτή περιοχή**.

Ορισμός 1.2.3. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται **Hausdorff** αν για ένα τυχαίο ζεύγος τυχαίων διακριτών σημείων $x, x' \in X$ ισχύει ότι υπάρχουν περιοχές U_x & $U_{x'} : U_x \cap U_{x'} = \emptyset$.

1.2.7 Τοπολογικά Αναλλοίωτα

Δεν υπάρχει κάποιος τρόπος για να χαρακτηρίσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας ενός ομοιομορφισμού όμως μπορούμε να πούμε ότι δύο χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί αν δεν έχουν ίδια τοπολογικά αναλλοίωτα. Τοπολογικά αναλλοίωτα ορίζονται να είναι οι ποσότητες οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από ομοιομορφισμούς (π.χ. ιδιότητα **Hausdorff**, αριθμοί όπως η χαρακτηριστική **Euler** κ.α.).

Χαρακτηριστική Euler

Η **χαρακτηριστική Euler** είναι σημαντικό τοπολογικό αναλλοίωτο μέγεθος και ειδικά για την γεωμετρία που μας ενδιαφέρει. Θα ορίσουμε την Η χαρακτηριστική **Euler** για πολύεδρα στον $\mathbb{R}^3$ αλλά ισχύει και για περισσότερες διαστάσεις, θα το κάνουμε αυτό ώστε να μην ξεφεύγει από την διαίσθηση μας. Κάθε πολύεδρο έχει πλευρές, κορυφές και ακμές.

Ορισμός 1.2.4. Έστω X ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ το οποίο είναι ομοιομορφικό με ένα πολύεδρο K. Τότε η χαρακτηριστική **A** $\chi(X)$ ορίζεται:
$\chi(X) =$ (# κορυφών στο K)−(# ακμών στο K)+ (# πλευρών στο K).

Παράδειγμα 1.2.1. i) Ένα σημείο έχει $\chi(\cdot) = 1$, Ευθεία $\chi(\_\_) = 2 - 1 = 1$.

ii) Για τον κύκλο έχουμε πως το τετράγωνο είναι ένας ομοιομορφισμός, Το τετράγωνο έχει 4 κορυφές, 4 ακμές και 0 πλευρές, οπότε $\chi(\circ) = \chi(\square) = 4 - 4 + 0 = 0$.

1.3 Πολλαπλότητες

Οι πολλαπλότητες είναι γενίκευση των εννοιών καμπύλη και επιφάνεια σε αυθαίρετων διαστάσεων αντικείμενα. Γενικά μια πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι τοπικά ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Όπως στον τρισδιάστατο χώρο μια καμπύλη παραμετρικοποιείται από μια παράμετρο $t : \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ τοπικά όμως είναι ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}$. Αυτή η ιδιότητα των πολλαπλοτήτων μας επιτρέπει να τους δίνουμε σε κάθε σημείο n αριθμούς οι οποίοι καλούνται τοπικές συντεταγμένες.

1.3.1 Κατανόηση της έννοιας

Για την κατανόηση της έννοιας της πολλαπλότητας θα μελετήσουμε την μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$. Θα παραμετρικοποιήσουμε την επιφάνεια της σφαίρας S^2 στις πολικές και στις στερεογραφικές συντεταγμένες. Οι στερεογραφικές συντεταγμένες ενός σημείου $P(x, y, z)$ είναι οι προβαλλόμενες συντεταγμένες ενός τρισδιάστατου αντικειμένου στο επίπεδο.

$$\text{Πολικές } x(\theta,\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi),\ y(\theta,\phi) = \sin(\theta)\sin(\phi),\ z = \cos(\theta),\ \theta \in (0,\pi), \phi \in (0,2\pi) \tag{1.3}$$

$$\text{Στερεογραφικές } \left.\begin{array}{l} \frac{x-x_1}{X-X_1} = \frac{y-y_1}{Y-Y_1} = \frac{z-z_1}{Z-Z_1} \\ Q(X,Y,0), N(0,0,1), P(x,y,z) = (X,Y) \end{array}\right\} \Rightarrow X = \frac{x}{1-z},\ Y = \frac{y}{1-z} \tag{1.4}$$

$$X = \frac{\sin(\theta)\cos(\phi)}{1-\cos(\theta)} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\phi)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\phi),\ Y = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\phi)$$

Βεβαίως μπορούμε να επιλέξουμε διαφορετικό σημείο για τον ορισμό των πολικών συντεταγμένων χωρίς όμως να αλλάξει αυτό που περιγράφουμε. Αυτό μας αποκαλύπτει η έννοια της πολλαπλότητας πως κάθε σύστημα είναι το ίδιο καλό με κάποιο άλλο. Αυτήν την ιδιότητα των πολλαπλοτήτων εκμεταλλευόμαστε και τις χρησιμοποιούμε στην φυσική.

Ορισμός 1.3.1. Διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Έστω M είναι μια m-φορές διαφορίσιμη πολλαπλότητα αν ισχύουν:

i) Το M είναι τοπολογικός χώρος

ii) Το M είναι εφοδιασμένο με μια οικογένεια από ζευγάρια $\{(U_i, \phi_i)\}$

iii) $\{U_i\}$ είναι οικογένεια από ανοιχτά υποσύνολα που καλύπτουν το M, δηλαδή, $\underset{i}{\cup} U_i = M$ και ϕ_i είναι ομοιομορφισμός από το U_i σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U_i' του $\mathbb{R}^n$].

iv) Με δοσμένα $U_i, U_j : U_i \cap U_j \neq \emptyset$ η απεικόνιση $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \mapsto \phi_j(U_i \cap U_j)$

Τα (U_i, ϕ_i) ονομάζονται χάρτες και το $\{(U_i, \phi_i)\}$ καλείται άτλαντας τα υποσύνολα U_i ονομάζονται συντεταγμενικές περιοχές και τα ϕ_i συντεταγμένες.

1.3.2 Διαφορίσιμες Απεικονίσεις

Έστω $f : M \mapsto N$ μια απεικόνιση από την m διάστατη πολλαπλότητα M σε μια n διάστατη πολλαπλότητα N. Ένα σημείο p της M απεικονίζεται μέσω της f πάνω στην N ($f : p \mapsto f(p)$). Παίρνουμε τον χάρτη (U, ϕ) στην M και (V, ψ) στην N. Αν γράψουμε $\phi(p) = \{x^\mu\}$, και $\psi(f(p)) = \{y^\mu\}$. $y = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x)$ συμβολίζουμε με $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ αν η f είναι C^∞ τότε η απεικόνιση ονομάζεται **διαφορίσιμη** ή **ομαλή**.

Ορισμός 1.3.2. Αν συν τα προηγούμενα ισχύει και ότι $x = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ και x είναι C^∞ τότε η f καλείται **διαφορομορφισμός** και η M **διαφορομορφική** στην N και αντίστροφα, και συμβολίζεται $M \equiv N$.

1.3.3 Διανύσματα

Στις πολλαπλότητες, ως διάνυσμα ορίζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα σε μια καμπύλη στην πολλαπλότητα M. Έχουμε καμπύλη $c(t)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα σε αυτή είναι:

$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\left.\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right|_{t=0} \tag{1.5}$$

οπότε ορίζουμε τον τελεστή $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ο οποίος δρα στην f. Έχουμε δηλαδή ότι $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ είναι τα διανύσματα βάσης του διανυσματικού χώρου πάνω στην πολλαπλότητα M. Έχουμε κλάσεις ισοδυναμίας στην πολλαπλότητα στην οποία ισχύει ότι για $c_1(t), c_2(t)$.

i) $c_1(0) = c_2(0) = p$

ii) $\frac{df(c_1(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{df(c_2(t))}{dt}\Big|_{t=0}$

Άρα ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $c_1(t) \sim c_2(t)$. Όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας στο $p \in M$ ορίζουν τον εφαπτόμενο χώρο που συμβολίζεται με T_pM.

1.3.4 1-μορφές

Εφόσον υπάρχει ένας διανυσματικός χώρος θα υπάρχει και ο δυικός του. Στον εφαπτόμενο διανυσματικό χώρο (T_pM) αντιστοιχεί ο συνεφαπτόμενος διανυσματικός χώρος (T_p^*M) ο οποίος αποτελεί τον δυικό του. Τα δυαδικά διανύσματα του χώρου αυτού στο πλαίσιο των διαφορικών μορφών ονομάζονται 1-μορφές, το απλούστερο παράδειγμα 1-μορφής είναι το διαφορικό $df \in T_p^*M$ μιας συνάρτησης. Την δράση ενός διανύσματος την είδαμε προηγουμένως τώρα η δράση μιας 1-μορφής στα διανύσματα του T_pM ορίζεται:

$$\langle df, V\rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{1.6}$$

Αν εκφράσουμε το διαφορικό σε όρους συντεταγμένων x τότε: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right) dx^\mu$

Ορίζουμε τα dx^μ ως δυική βάση του T_p^*M και παίρνουμε

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\rangle = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu_\nu \tag{1.7}$$

Άρα το εσωτερικό γινόμενο μιας 1-μορφής ($\omega = \omega_\mu dx^\mu$) με ένα διάνυσμα V

$$\langle \omega, V\rangle = \left\langle \omega_\mu dx^\mu, V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\rangle = \omega_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu = \omega_\mu V^\mu \tag{1.8}$$

1.3.5 Ροή Διανυσματικού Πεδίου και παράγωγοι Lie

Για ένα διανυσματικό πεδίο $V(x,y,z) = (P(x,y,z)), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ έχουμε μια ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου. Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η καμπύλη αυτή είναι:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)) \text{ , Με αρχική συνθήκη } x^\mu(t=0) = x_0^\mu \tag{1.9}$$

Έστω $\sigma(t, x_0)$ μια ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου X η οποία περνάει από το σημείο x_0 την $t = 0$ την απεικόνιση αυτή την ονομάζουμε **ροή** η οποία ικανοποιεί τον κανόνα $\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0)$. Αναπτύσσοντάς κατά **Maclaurin** την ροή παίρνουμε:

$$\sigma^\mu(t,x) = \sigma^\mu(s,x)|_{s=0} + \frac{t}{1!}\left.\frac{d\sigma^\mu(s,x)}{ds}\right|_{s=o} + \frac{t^2}{2!}\left.\frac{d^2\sigma^\mu(s,x)}{ds^2}\right|_{s=o} + \frac{t^3}{3!}\left.\frac{d^3\sigma^\mu(s,x)}{ds^3}\right|_{s=o} + \cdots \tag{1.10}$$

$$\sigma^\mu(t,x) = \left[1 + \frac{t}{1!}\frac{d}{ds} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2}{ds^2} + \frac{t^3}{3!}\frac{d^3}{ds^3} + \cdots\right]\sigma^\mu(s,x)\Big|_{s=o} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n d^n}{n! ds^n}\sigma^\mu(s,x)\Big|_{s=0} = e^{t\frac{d}{ds}}\sigma^\mu(s,x)\Big|_{s=0} \tag{1.11}$$

Η ροή σε αυτήν την μορφή εξακολουθεί να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες και τον κανόνα:

i) $\sigma^\mu(0,x) = e^{tX}x^\mu\big|_{t=0} = e^{0X}x^\mu = x^\mu$

ii) $\frac{d\sigma(t,x_0)}{dt} = Xe^{tX}x^\mu = \frac{d}{dt}\left[e^{tX}x\right]$

iii) $\sigma(t,\sigma(s,x)) = e^{tX}\left(e^{sX}x\right) = e^{(t+s)X}x = \sigma(t+s,x)$

Την παράγωγο $\mathfrak{Lie}$ θα την ορίσουμε πρώτα για μια βαθμωτή συνάρτηση και ύστερα για διανυσματικά πεδία.

έστω $V = \dfrac{d}{d\lambda}$ ένα διανυσματικό πεδίο και f μια βαθμωτή συνάρτηση η παράγωγός $\mathfrak{Lie}$ είναι

$$\mathfrak{L}_V f = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f(\lambda_0+\Delta\lambda)-f(\lambda)}{\Delta\lambda} = \left[\frac{df}{d\lambda}\right]_{\lambda_0} \tag{1.12}$$

έστω $V = \dfrac{d}{d\lambda}$ και $U = \dfrac{d}{d\mu}$ διανυσματικά πεδία η παράγωγός $\mathfrak{Lie}$ είναι.

$U(\lambda_0+\Delta\lambda) = U^*(\lambda_0) = \left[\dfrac{d}{d\mu^*}\right]_{\lambda_0+\Delta\lambda}$ Όπου ισχύει. $[U^*,V]=0$

Το αναπτύσσω κατά **Taylor** γύρω από το λ_0.

$$\left[\frac{d}{d\mu^*}\right]_{\lambda_0+\Delta\lambda} = \left[\frac{d}{d\mu^*}\right]_{\lambda_0} + \Delta\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu^*}\right)\right]_{\lambda_0} + O((\Delta\lambda)^2) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{d}{d\mu}\right]_{\lambda_0} + \Delta\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right)\right]_{\lambda_0} = \left[\frac{d}{d\mu^*}\right]_{\lambda_0} + \Delta\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu^*}\right)\right]_{\lambda_0}$$

$$\left[\frac{d}{d\mu^*}\right]_{\lambda_0} - \left[\frac{d}{d\mu}\right]_{\lambda_0} = \Delta\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right) - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu^*}\right)\right]_{\lambda_0} = \Delta\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right) - \frac{d}{d\mu^*}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\right]_{\lambda_0}$$

$$\mathfrak{L}_V U = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\left[\frac{d}{d\mu^*}\right]_{\lambda_0} - \left[\frac{d}{d\mu}\right]_{\lambda_0}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right) - \frac{d}{d\mu^*}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\right]_{\lambda_0}}{\Delta\lambda} =$$

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right) - \frac{d}{d\mu^*}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\right]_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right) - \left(\frac{d}{d\mu} + \Delta\lambda\frac{d}{d\mu} + O((\Delta\lambda)^2)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\right]_{\lambda_0} =$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right) - \frac{d}{d\mu}\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \left[\frac{d}{d\lambda},\frac{d}{d\mu}\right] = [V,U] = \mathfrak{L}_V U \tag{1.13}$$

Έστω ότι υποθέτουμε $\sigma^\mu(s,x), \tau^\mu(t,x)$ δύο ροές οι οποίες προέρχονται από τα διανυσματικά πεδία X, Y αντίστοιχα. Για μικρές μετατοπίσεις ε και δ θα δείξουμε ότι η παράγωγος $\mathfrak{Lie}$ συνδέεται άμεσα με της ροές των πεδίων.

$$\tau^\mu(\delta,\sigma(\epsilon,x)) \approx \tau^\mu(\delta,x^\nu+\epsilon X^\nu(x)) \approx \tau^\mu(\delta,x^\nu+\epsilon X^\nu)|_{\delta=0} + \left.\frac{d\tau^\mu(\delta,x^\nu+\epsilon X^\nu)}{d\delta}\right|_{\delta=0}\delta + \cdots \Rightarrow$$

$$\tau^\mu(\delta,\sigma(\epsilon,x)) = x^\mu + \epsilon X^\mu + \delta\left(Y^\mu(\delta,x^\nu+\epsilon X^\nu)\right|_{\delta=0} \approx x^\mu + \epsilon X^\mu + \delta(Y^\mu + \epsilon X^\rho\partial_\rho Y^\mu) \tag{1.14}$$

$$\sigma^\mu(\epsilon,\tau(\delta,x)) \approx \sigma^\mu(\epsilon,x^\nu+\delta Y^\nu(x)) \approx \sigma^\mu(\epsilon,x^\nu+\delta Y^\nu)|_{\epsilon=0} + \left.\frac{d\sigma^\mu(\epsilon,x^\nu+\delta Y^\nu)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\epsilon + \cdots \Rightarrow$$

$$\sigma^\mu(\epsilon,\tau(\delta,x)) = x^\mu + \delta Y^\mu + \epsilon\left(X^\mu(\epsilon,x^\nu+\delta Y^\nu)\right|_{\epsilon=0} \approx x^\mu + \delta Y^\mu + \epsilon(X^\mu + \delta Y^\rho\partial_\rho X^\mu) \tag{1.15}$$

Αφαιρούμε την 1.15 από την 1.14 και παίρνουμε:

$$\tau^\mu(\delta,\sigma(\epsilon,x)) - \sigma^\mu(\epsilon,\tau(\delta,x)) = \epsilon\delta(X^\rho\partial_\rho Y^\mu - Y^\rho\partial_\rho X^\mu) = \epsilon\delta[X,Y]^\mu$$

Άρα αν οι δύο ροές δεν μετατίθενται έχουν μη μηδενική παράγωγό $\mathfrak{Lie}$ επίσης μια διαφορετική απόδειξη αυτής της υπόθεσης γίνεται μέσω της εκθετικής αναπαράστασης της ροής:

$$e^X e^Y \approx (I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots)(I + Y + \frac{Y^2}{2!} + \cdots) = I + Y + \frac{Y^2}{2!} + \cdots + X + XY + \frac{XY^2}{2!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^2Y}{2!} +$$

$$\frac{X^2}{2!}\frac{Y^2}{2!} + \cdots = I + (X+Y) + \frac{(X+Y)^2}{2!} + \cdots + \frac{XY}{2} - \frac{YX}{2} - \frac{XYX}{3!} - \frac{XYX}{3!} + \frac{YXX}{3!} + \frac{XXY}{3!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X+Y)^n}{n!} + \frac{XY-YX}{2} + \frac{XXY - XYX - XYX + YXX}{3!} + \cdots = e^{X+Y} + \frac{[X,Y]}{2!} + \frac{[X,[X,Y]]}{3!} + \cdots$$

Άρα για να μετατίθενται οι ροές πρέπει ο μεταθέτης των πεδίων να είναι μηδενικός, δηλαδή η παράγωγός $\mathfrak{Lie}$ να μηδενίζεται. Για την παράγωγο $\mathfrak{Lie}$ έχουμε ότι:

i) $\mathfrak{L}_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \mathfrak{L}_X Y + \beta \mathfrak{L}_X Z$

ii) $\mathfrak{L}_{[X,Y]} = [\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y]$

iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ Ταυτότητα Jacobi

iv) $[[\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y], \mathfrak{L}_Z] + [[\mathfrak{L}_Y, \mathfrak{L}_Z], \mathfrak{L}_X] + [[\mathfrak{L}_Z, \mathfrak{L}_X], \mathfrak{L}_Y]$=0 Ταυτότητα Jacobi

$$ii) \Rightarrow \mathfrak{L}_{[X,Y]}Z = [[X,Y],Z] = [XY - YX, Z] = [XY, Z] - [YX, Z] = XYZ - ZXY - YXZ + ZYX =$$
$$XYZ + \underbrace{-XZY + XZY}_{0} - ZXY - YXZ + \underbrace{YZX - YZX}_{0} + ZYX = X[Y,Z] + XZY$$
$$- ZXY - Y[X,Z] - YZX + ZYX = X[Y,Z] + [X,Z]Y - Y[X,Z] - [Y,Z]X =$$
$$[X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = [X, \mathfrak{L}_Y Z] - [Y, \mathfrak{L}_X Z] \Rightarrow \mathfrak{L}_{[X,Y]}Z = \mathfrak{L}_X(\mathfrak{L}_Y Z) - \mathfrak{L}_Y(\mathfrak{L}_X Z) = [\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y]Z$$
$$iii) \Rightarrow XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ$$
$$iv) \Rightarrow [\mathfrak{L}_{[X,Y]}, \mathfrak{L}_Z] + [\mathfrak{L}_{[Y,Z]}, \mathfrak{L}_X] + [\mathfrak{L}_{[Z,X]}, \mathfrak{L}_Y] = \mathfrak{L}_{[[X,Y],Z]} + \mathfrak{L}_{[[Y,Z],X]} + \mathfrak{L}_{[[Z,X],Y]} =$$
$$[\mathfrak{L}_{[X,Y]}, \mathfrak{L}_Z] + [\mathfrak{L}_{[Y,Z]}, \mathfrak{L}_X] + [\mathfrak{L}_{[Z,X]}, \mathfrak{L}_Y] = \mathfrak{L}_{[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]} = 0$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι $i), ii), iii)$

1.4 Riemannian Γεωμετρία

Ορίσαμε την πολλαπλότητα τώρα ήρθε η ώρα να κάνουμε γεωμετρία επάνω σε αυτήν. Γενικά μια πολλαπλότητα (ως τοπολογικός χώρος) δεν είναι απαραίτητα εφοδιασμένη με κάποια μετρική όμως επειδή στην φυσική μας ενδιαφέρει να κάνουμε μετρήσεις θα την εφοδιάσουμε. Η μετρική θα είναι μια γενίκευση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Επίσης επειδή μας ενδιαφέρει ο χώρος μας να είναι καμπύλος θα εισάγουμε την έννοια της σύνδεσης ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε τα διανύσματα (π.χ. αν είναι παράλληλα).

1.4.1 Μετρική

Ο μετρικός τανυστής είναι σημαντικός διότι μας δίνει πν γεωμετρία του χώρου. Ο μόνος περιορισμός που επιβάλλεται είναι ότι πρόκειται για έναν συμμετρικό $(0,2)$ τανυστή. Έχουμε ορίσει για διαφορίσιμες πολλαπλότητες το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ εφαπτόμενου και συνεφαπτόμενου διανυσματικού χώρου $\langle\ ,\ \rangle : T_p^*M \times T_pM \mapsto \mathbb{R}$ θα επεκτείνουμε την έννοια της μετρικής ώστε να συμπεριλαμβάνει και αυτό το εσωτερικό γινόμενο η μετρική αυτή δίνει έναν ισομορφισμό μεταξύ των χώρων αυτών. Συμβολίζουμε με $g_{\mu\nu}$ την μετρική, σε περίπτωση που έχει μη τετριμμένη ορίζουσα $|g_{\mu\nu}|$, ορίζεται αντίστροφος μετρικός τανυστής και συμβολίζεται $g^{\mu\nu}$. Έχουμε $g_{\mu\nu}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$ παίρνουμε. $ds^2 = g\left(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ παράδειγμα μετρικής.

Παράδειγμα 1.4.1. Σφαίρα ακτίνας r.

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

οπότε: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$

1.4.2 Συνδέσεις, Συναλλοίωτη παράγωγος και Παράλληλη μεταφορά

Στον ευκλείδειο χώρο είναι εύκολο να μιλάμε για διαφορικά διότι τα σημεία τα οποία διαφορίζουμε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο σε έναν καμπύλο χώρο όμως δεν είναι εν γένει δυνατόν αυτό διότι τα σημεία δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Οπότε για να γίνει η διαφόριση θα πρέπει να συνδέσουμε τα δύο σημεία με κάποιον τρόπο. Αυτήν η σύνδεση γίνεται μέσω των συντελεστών σύνδεσης οι οποίοι ορίζουν την συναλλοίωτη παράγωγο για την οποία ισχύουν.

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

iii) $\nabla_{fX}Z = f\nabla_X Z$

iv) $\nabla_X fZ = f\nabla_X Z + X[f]Z$

Έχουμε τον εφαπτόμενο χώρο με τα διανύσματα βάσης $\{e_\mu\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ στα οποία όταν δράσει ο τελεστής $\nabla_\nu \equiv \nabla_{e_\nu}$ δίνει:

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu = \Gamma^\rho_{\nu\mu} e_\rho \tag{1.16}$$

$$\nabla_{e_\nu} V = \nabla_{e_\nu}(V^\mu e_\mu) = (\nabla_{e_\nu} V^\mu)e_\mu + V^\mu \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\mu \partial_\nu V^\mu + V^\mu \Gamma^\rho_{\nu\mu} e_\rho = \left(\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\mu} V^\mu\right) e_\rho \tag{1.17}$$

$$\nabla_{e_\nu} V^\rho = \left(\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\mu} V^\mu\right)$$

Αφού ορίσαμε τους συντελεστές σύνδεσης μπορούμε να ονομάσουμε τον τελεστή ∇_ν συναλλοίωτη παράγωγο και αφού την ορίσαμε για διανύσματα θα την ορίσουμε και για 1-μορφές που αποτελούν τα δυϊκά διανύσματα. Η συναλλοίωτη παράγωγος έχει νόημα για πεδία, σε βαθμωτές ποσότητες δρα η απλή παράγωγος.

$$\nabla_\nu(\omega_\mu V^\mu) = \partial_\nu(\omega_\mu V^\mu) = (\partial_\nu \omega_\mu)V^\mu + \omega_\mu(\partial_\nu V^\mu) = (\nabla_\nu \omega_\mu)V^\mu + (\nabla_\nu V^\mu)\omega_\mu =$$

$$(\partial_\nu \omega_\rho + \tilde{\Gamma}^\tau_{\nu\rho}\omega_\tau)V^\rho + \omega_\mu(\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho)$$

$\tilde{\Gamma}^\tau_{\nu\rho}\omega_\tau V^\rho = -\Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho\omega_\mu$ Επειδή πρόκειται για αυθαίρετα ω_μ, V^μ έχουμε

$$\tilde{\Gamma}^\tau_{\nu\rho} = -\Gamma^\tau_{\nu\rho}$$

$$\nabla_{e_\nu}\omega_\mu = \partial_\nu \omega_\mu - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\omega_\rho \tag{1.18}$$

Θέλουμε η συναλλοίωτη παράγωγος να ικανοποιεί την συνθήκη μετασχηματισμού τανυστών (1,1)-τάξης.

$$\nabla_{e_{\nu'}} V^{\mu'} = \partial_{\nu'} V^{\mu'} + V^{\rho'}\Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'} = \partial_{\nu'}\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}V^\mu\right) + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho}V^\rho\Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'}$$

$$\nabla_{e_{\nu'}} V^{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\left(\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\mu x^\nu}V^\mu + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\partial_\nu V^\mu\right) + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho}V^\rho\Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'}$$

$$\nabla_{e_{\nu'}} V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\nabla_\nu V^\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\partial_\nu V^\mu + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\mu x^\nu}V^\mu + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho}V^\rho\Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho \Rightarrow$$

$$\Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'} = -\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho x^\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^\mu_{\nu\rho} \tag{1.19}$$

Η Συναλλοίωτη παράγωγος τανυστών ορίζεται με χρήση των ιδιοτήτων της δράσης της σε διανύσματα και 1-μορφές. Διότι ο τανυστής είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών ποσοτήτων. $T^{m_1 m_2 \ldots m_k}_{n_1 n_2 \ldots n_l} = A^{m_1}B^{m_2}\cdots W^{m_k}K_{n_1}L_{n_2}\cdots X_{n_l}$.

$$\nabla_\nu T^p_{\ r} = \nabla_\nu(A^p B_r) = (\nabla_\nu A^p)B_r + A^p(\nabla_\nu B_r) = (\partial_\nu A^p + \Gamma^p_{\nu\rho}A^\rho)B_r + A^p(\partial_\nu B_r - \Gamma^\rho_{\nu r}B_\rho) =$$

$$\partial_\nu(A^p B_r) + \Gamma^p_{\nu\rho}A^\rho B_r - \Gamma^\rho_{\nu r}A^p B_\rho = \partial_\nu T^p_{\ r} + \Gamma^p_{\nu\rho}T^\rho_{\ r} - \Gamma^\rho_{\nu r}T^p_{\ \rho}$$

Έστω πως έχουμε μια καμπύλη $c(t)$ πάνω σε μια πολλαπλότητα θα ορίσουμε την παράλληλη μετατόπιση ενός διανυσματικού πεδίου πάνω σε αυτήν την καμπύλη.

$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))e_\mu$ το διανυσματικό πεδίο πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη.

$\nabla_V X = 0$ όπου $V \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}e_\mu$

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial t}X^\rho = 0 \tag{1.20}$$

Αν το ίδιο το διανυσματικό πεδίο μετατοπίζεται παράλληλα τότε αυτό ονομάζεται **Γεωδαισιακή**.

$$\nabla_V V = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} = 0 \tag{1.21}$$

ως γεωδαισιακή ορίζεται η ευθύτατη ευθεία σε έναν καμπύλο χώρο.

Αν αναπαραμετρικοποιήσουμε $(t \to t')$

$\frac{dx^\mu}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dx^\mu}{dt}$Συνεπώς. $\Rightarrow$

$$\nabla_{V'}V' = \frac{d^2x^\mu}{dt'^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dt'}\frac{dx^\rho}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{dt}{dt'}\frac{dx^\mu}{dt}\right) + \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} =$$

$$\frac{d^2t}{dt'^2}\frac{dx^\mu}{dt} + \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2\left(\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt}\right) = 0 \tag{1.22}$$

$$\nabla_V V = fV \Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} = -\left(\frac{dt}{dt'}\right)^{-2}\frac{d^2t}{dt'^2},\ f = -\left(\frac{dt}{dt'}\right)^{-2}\frac{d^2t}{dt'^2} \tag{1.23}$$

Θα δούμε λεπτομερέστερα την έννοια της γεωδαισιακής. Η εξίσωση της γεωδαισιακής είναι ουσιαστικά μια γενίκευση του δεύτερου νόμου του Newton δηλαδή σώματα που δεν δέχονται κάποια δύναμη, δηλαδή δεν επιταχύνονται, ικανοποιούν την κίνηση της ελεύθερης πτώσης. Όμως αν δεχτούμε ότι η βαρύτητα είναι μια δύναμη η οποία επιταχύνει θα έχουμε.

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} = \frac{q}{m}F^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{dt} \tag{1.24}$$

Αναπαραμετρικοποιούμε την εξίσωση 1.23 χρησιμοποιώντας ως παράμετρο τον ιδιόχρονο τ άρα το διανυσματικό πεδίο γίνεται η 4-ταχύτητα $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Άρα η εξίσωση των γεωδαισιακών γίνεται $u^\tau\nabla_\tau u^\mu = 0$. Οπότε σωματίδια τα οποία κινούνται πάνω στην γεωδαισιακή κινούνται προς την κατεύθυνση της ορμής (διότι $p^\mu = mu^\mu$). Τα σώματα που βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση κατευθύνονται κατά μήκος του διανύσματος της ορμής τους η εξίσωση της γεωδαισιακής ικανοποιεί αυτήν υπόθεση. Τώρα θα κάνουμε σύνδεση της μετρικής με τους συντελεστές σύνδεσης. Δεχόμαστε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής είναι μηδέν.

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_\tau g_{\mu\nu} = \partial_\tau g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\tau\mu}g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\tau\nu}g_{\mu\rho} \\ \nabla_\mu g_{\nu\tau} = \partial_\mu g_{\nu\tau} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}g_{\rho\tau} - \Gamma^\rho_{\mu\tau}g_{\nu\rho} \\ \nabla_\nu g_{\tau\mu} = \partial_\nu g_{\tau\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\tau}g_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\mu}g_{\tau\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) = \Gamma^\rho_{\nu\mu} \tag{1.25}$$

Σύμβολο **Christoffel** δευτέρου είδους το οποίο είναι συμμετρικό στους κάτω δείκτες.

1.4.3 Καμπυλότητα και Στρέψη

Για την μελέτη της καμπυλότητας εισάγαμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία (συναλλοίωτη παράγωγος, συντελεστές σύνδεσης). Η μελέτη της καμπυλότητας γίνεται μέσω του τανυστή **Riemann** ο οποίος μας δίνει την απόκλιση ενός διανύσματος από τον να πέσει στον εαυτό του καθώς κάνει έναν κλειστό βρόχο. Μελετώντας τους δύο τανυστές από πλευράς απεικονίσεων σε δύο διανυσματικούς χώρους παίρνουμε.

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
$$\mathcal{R}(fX,gY)hZ = \nabla_{fX}\nabla_{gY}hZ - \nabla_{gY}\nabla_{fX}hZ - \nabla_{[fX,gY]}hZ = f\nabla_X(g(\nabla_Y hZ)) - g\nabla_Y(f(\nabla_X hZ)) -$$
$$\nabla_{(fX(g)Y+fgXY-gY(f)X-fgYX)}hZ = fX(g)(Y(h)Z + gh\nabla_Y Z) + fg\nabla_X(Y(h)Z + h\nabla_Y Z) -$$
$$- gY(f)(X(h)Z + fh\nabla_X Z) - gf\nabla_Y(X(h)Z + h\nabla_X Z) - fX(g)Y(h)Z + fX(g)h\nabla_Y Z + fg(\nabla_{XY}hZ) -$$
$$- gY(f)X(h)Z - gY(f)h\nabla_X Z - gf(\nabla_{YX}hZ) = fX(g)X(h)Z + fX(g)h\nabla_Y Z + fgY(h)\nabla_X Z +$$
$$fgX(h)\nabla_Y Z + fgh\nabla_X\nabla_Y Z - gY(f)X(h)Z - gY(f)h\nabla_X Z - gfX(h)\nabla_Y Z - gfY(h)\nabla_X Z -$$
$$gfh\nabla_X\nabla_Y - fX(g)Y(h)Z - fX(g)hY\nabla_Y Z - fgY(h)\nabla_X Z - fgX(h)\nabla_Y Z - fgh\nabla_{XY}Z$$
$$+ gY(f)X(h)Z + gY(f)h\nabla_X Z + gfX(h)\nabla_Y Z + gfY(h)\nabla_X Z + gfh\nabla_{YX}Z$$
$$\mathcal{R}(fX,gY)hZ = fgh(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \tag{1.26}$$
$$\mathcal{T}(fX,gY) = \nabla_{fX}gY - \nabla_{gY}\nabla_{fX} - [fX,gY] = f(X(g)Y + g\nabla_X Y) - g(Y(f)X + \nabla_Y X) - f(X(g)Y$$
$$+ gfXY) + g(Y(f)X + fgYX) = fg(\nabla_X Y - \nabla_Y X - XY + YX)$$
$$\mathcal{T}(fX,gY) = fg(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) \tag{1.27}$$

εφόσον αποδείξαμε ότι οι απεικονίσεις $\mathcal{R}(fX,gY)hZ = fgh\mathcal{R}(X,Y)Z$ και $\mathcal{T}fX,gY = fg\mathcal{T}(X,Y)$ μπορούμε να γράψουμε.

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \mathcal{R}(X^\mu e_\mu, Y^\nu e_\nu)Z^\rho e_\rho = X^\mu Y^\nu Z^\rho \mathcal{R}(e_\mu,e_\nu)e_\rho$$
$$\mathcal{T}(X,Y) = \mathcal{T}(X^\mu e_\mu, Y^\nu e_\nu) = X^\mu Y^\nu \mathcal{T}(e_\mu,e_\nu)$$

Για τους τανυστές όμως έχουμε ότι ισχύει ότι είναι η προβολή του εφαπτόμενου στον συνεφαπτόμενο χώρο. Άρα κάνοντας το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των χώρων αυτών (εφαπτόμενου ($\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\} = \{e_\mu\}$) συνεφαπτόμενου ($\{dx^\mu\} = \{e^{*\mu}\}$) παίρνουμε:

$$\mathcal{R}^\tau{}_{\mu\nu\rho} = \left\langle dx^\tau, \mathcal{R}\left(\nabla_{e_\mu}\nabla_{e_\nu} - \nabla_{e_\nu}\nabla_{e_\mu} - \nabla_{[e_\mu,e_\nu]}\right)e_\rho\right\rangle = \left\langle dx^\tau, \mathcal{R}\left(\nabla_{e_\mu}(\Gamma^\lambda_{\nu\rho}e_\lambda) - \nabla_{e_\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\rho}e_\lambda)\right)\right\rangle =$$
$$\left\langle dx^\tau, \left(\partial_{e_\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}e_\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}e_\kappa - \partial_{e_\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}e_\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}e_\kappa\right)\right\rangle = \partial_{e_\mu}\Gamma^\tau_{\nu\rho}e_\tau + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}e_\tau - \partial_{e_\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}e_\tau - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\tau_{\nu\lambda}e_\tau$$
$$\mathcal{T}^\tau_{\mu\nu} = \langle dx^\tau, \mathcal{T}(e_\mu,e_\nu)\rangle = \left\langle dx^\tau, \nabla_{e_\mu}e_\nu - \nabla_{e_\nu}e_\mu - [e_\mu,e_\nu]\right\rangle = \left\langle dx^\tau, \Gamma^\rho_{\mu\nu}e_\rho - \Gamma^\rho_{\nu\mu}e_\rho\right\rangle = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

Αν πάρουμε τον μεταθέτη δύο αναλλοίωτων παραγώγων ενός διανυσματικού πεδίου συμπεραίνουμε πως ισχύει αυτό που ισχυριζόμαστε δηλαδή ο τανυστής **Riemann** μας δίνει ένα μέτρο του κατά πόσο αποκλίνει το πεδίο να πέσει στον εαυτό του.

$$[\nabla_\mu,\nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu V^\rho) = \partial_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^\tau_{\mu\nu}\nabla_\tau V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\nabla_\nu V^\sigma - \partial_\nu(\nabla_\mu V^\rho) +$$
$$+ \Gamma^\tau_{\nu\mu}\nabla_\tau V^\rho - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\nabla_\mu V^\sigma = \partial_\mu(\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\tau}V^\tau) - \Gamma^\tau_{\mu\nu}(\partial_\tau V^\rho + \Gamma^\rho_{\tau\sigma}V^\sigma) + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}(\partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\zeta}V^\zeta) -$$
$$- \partial_\nu(\partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\tau}V^\tau) + \Gamma^\tau_{\nu\mu}(\partial_\tau V^\rho + \Gamma^\rho_{\tau\sigma}V^\sigma) - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}(\partial_\mu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\zeta}V^\zeta) = (\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\tau})V^\tau + \Gamma^\rho_{\nu\tau}\partial_\mu V^\tau +$$
$$+ \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\zeta}V^\zeta - (\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\tau})V^\tau - \Gamma^\rho_{\mu\tau}\partial_\nu V^\tau - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\zeta}V^\zeta - (\Gamma^\tau_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\mu})\nabla_\tau V^\rho =$$
$$(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\tau})V^\tau + (\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\zeta} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\zeta})V^\zeta - (\Gamma^\tau_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\mu})\nabla_\tau V^\rho =$$
$$(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\tau} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\tau} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\tau})V^\tau - \mathcal{T}^\tau_{\mu\nu}\nabla_\tau V^\rho = [\nabla_\mu,\nabla_\nu]V^\rho = \mathcal{R}^\rho{}_{\tau\mu\nu}V^\tau - \mathcal{T}^\tau_{\mu\nu}\nabla_\tau V^\rho \tag{1.28}$$

Όπου $\mathcal{R}$ ο τανυστής **Riemann** ο οποίος αναπαριστά την καμπυλότητα και $\mathcal{T}$ ο τανυστής της στρέψης (Torsion) αναπαριστά κατά πόσο μεταβάλλεται η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανυσματικού πεδίου. Ο τανυστής **Riemann** από κατασκευής του είναι αντισυμμετρκός στους δείκτες ($\mu \leftrightarrow \nu$). Η δράση του μεταθέτη δύο αναλλοίωτων παραγώγων πάνω σε έναν τανυστή (2,2) τάξης είναι.

$$[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]K_{\mu\nu}=[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]A_\mu B_\nu=(\nabla_\rho\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\nabla_\rho)A_\mu B_\nu=\nabla_\rho\left((\nabla_\sigma A_\mu)B_\nu+A_\mu\nabla_\sigma B_\nu\right)-$$
$$\nabla_\sigma\left((\nabla_\rho A_\mu)B_\nu+A_\mu\nabla_\rho B_\nu\right)=(\nabla_\rho\nabla_\sigma A_\mu)B_\nu+\nabla_\sigma A_\mu\nabla_\rho B_\nu+\nabla_\rho A_\mu\nabla_\sigma B_\nu+A_\mu\nabla_\rho\nabla_\sigma B_\nu-(\nabla_\sigma\nabla_\rho A_\mu)B_\nu$$
$$-\nabla_\rho A_\mu\nabla_\sigma B_\nu-\nabla_\sigma A_\mu\nabla_\rho B_\nu-A_\mu\nabla_\sigma\nabla_\rho B_\nu=([\nabla_\rho,\nabla_\sigma]A_\mu)B_\nu+([\nabla_\rho,\nabla_\sigma]B_\nu)A_\mu=$$
$$(\mathcal{R}^\kappa{}_{\mu\rho\sigma}A_\kappa-\mathcal{T}^\kappa_{\rho\sigma}\nabla_\kappa A_\mu)B_\nu+(\mathcal{R}^\kappa{}_{\nu\rho\sigma}B_\kappa-\mathcal{T}^\kappa_{\rho\sigma}\nabla_\kappa B_\nu)A_\mu=(\mathcal{R}^\kappa{}_{\mu\rho\sigma}A_\kappa B_\nu+\mathcal{R}^\kappa{}_{\nu\rho\sigma}A_\mu B_\kappa)-$$
$$-\mathcal{T}^\kappa_{\rho\sigma}((\nabla_\kappa A_\mu)B_\nu+(\nabla_\kappa B_\nu)A_\mu)=(\mathcal{R}^\kappa{}_{\mu\rho\sigma}K_{\kappa\nu}+\mathcal{R}^\kappa{}_{\nu\rho\sigma}K_{\mu\kappa})-\mathcal{T}^\kappa_{\rho\sigma}\nabla_\kappa K_{\mu\nu} \tag{1.29}$$

Για τις υπόλοιπες συμμετρίες θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του **Riemann** καθώς και τις ιδιότητες του μετρικού τανυστή. Όπου για τον μετρικό τανυστή έχουμε.

$$0\equiv[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]g_{\mu\nu}=(\mathcal{R}^\kappa{}_{\mu\rho\sigma}g_{\kappa\nu}+\mathcal{R}^\kappa{}_{\mu\rho\sigma}g_{\mu\kappa})-\mathcal{T}^\kappa_{\rho\sigma}\nabla_\kappa g_{\mu\nu}$$
$$\text{διότι }\nabla_\mu g_{\nu\rho}=0\;\; R^\kappa{}_{\mu\rho\sigma}g_{\kappa\nu}=\mathcal{R}_{\nu\mu\rho\sigma}$$
$$\mathcal{R}_{\nu\mu\rho\sigma}+\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}=0\Rightarrow\mathcal{R}_{\nu\mu\rho\sigma}=-\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου μιας βαθμωτής συνάρτησης και συντελεστές σύνδεσης τα σύμβολα **Christoffel** (δηλαδή $\mathcal{T}^\mu_{\nu\tau}=0$) έχουμε.

$$[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]\phi=(\nabla_\rho\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\nabla_\rho)\phi=\nabla_\rho\partial_\sigma\phi-\nabla_\sigma\partial_\rho\phi=\partial_\rho\partial_\sigma\phi-\Gamma^\tau_{\rho\sigma}\partial_\tau\phi-\partial_\sigma\partial_\rho\phi-\Gamma^\tau_{\sigma\rho}\partial_\tau\phi=0$$
$$[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]\partial_\tau\phi=[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]A_\tau=A_\eta\mathcal{R}^\eta{}_{\tau\rho\sigma}=\partial_\eta\phi\mathcal{R}^\eta{}_{\tau\rho\sigma}$$
$$[\nabla_\rho,\nabla_\sigma]\partial_\tau\phi=\nabla_\rho\nabla_\sigma\partial_\tau\phi-\nabla_\sigma\nabla_\rho\partial_\tau\phi=\partial_\eta\phi\mathcal{R}^\eta{}_{\tau\rho\sigma}$$
$$[\nabla_\tau,\nabla_\rho]\partial_\sigma\phi=\nabla_\tau\nabla_\rho\partial_\sigma\phi-\nabla_\rho\nabla_\tau\partial_\sigma\phi=\partial_\eta\phi\mathcal{R}^\eta{}_{\sigma\tau\rho}$$
$$[\nabla_\sigma,\nabla_\tau]\partial_\rho\phi=\nabla_\sigma\nabla_\tau\partial_\rho\phi-\nabla_\tau\nabla_\sigma\partial_\rho\phi=\partial_\eta\phi\mathcal{R}^\eta{}_{\rho\sigma\tau}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη παίρνουμε

$$\nabla_\rho\nabla_\sigma\partial_\tau\phi-\nabla_\sigma\nabla_\rho\partial_\tau\phi+\nabla_\tau\nabla_\rho\partial_\sigma\phi-\nabla_\rho\nabla_\tau\partial_\sigma\phi+\nabla_\sigma\nabla_\tau\partial_\rho\phi-\nabla_\tau\nabla_\sigma\partial_\rho\phi=\partial_\eta\phi(\mathcal{R}^\eta{}_{\tau\rho\sigma}+\mathcal{R}^\eta{}_{\sigma\tau\rho}+\mathcal{R}^\eta{}_{\rho\sigma\tau})=$$
$$\nabla_\rho(\nabla_\sigma\partial_\tau\phi-\nabla_\tau\partial_\sigma\phi)+\nabla_\tau(\nabla_\rho\partial_\sigma\phi-\nabla_\sigma\partial_\rho\phi)+\nabla_\sigma(\nabla_\tau\partial_\rho\phi-\nabla_\rho\partial_\tau\phi)=\partial_\eta\phi(\mathcal{R}^\eta{}_{\tau\rho\sigma}+\mathcal{R}^\eta{}_{\sigma\tau\rho}+\mathcal{R}^\eta{}_{\rho\sigma\tau})=0$$

Όμως αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $\partial_\mu\phi$ οπότε

$\mathcal{R}^\eta{}_{\tau\rho\sigma}+\mathcal{R}^\eta{}_{\sigma\tau\rho}+\mathcal{R}^\eta{}_{\rho\sigma\tau}=0$ πρώτη Ταυτότητα **Bianchi**. (1.30)

Από την ταυτότητα του **Jacobi** και τον ορισμό του τανυστή **Riemann** ως τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων παίρνουμε ότι.

$\nabla_\epsilon\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}+\nabla_\gamma\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\epsilon}+\nabla_\delta\mathcal{R}_{\alpha\beta\epsilon\gamma}=0$ δεύτερη ταυτότητα **Bianchi**

1.4.4 Τανυστής και Βαθμωτό Ricci

Από τον Τανυστή **Riemann** Μπορούμε πολλαπλασιάζοντας με την μετρική μας να κατασκευάσουμε δύο ποσότητες που θα μας φανούν χρήσιμες. Η μία είναι ο τανυστής **Ricci** ο οποίος ορίζεται.

$\mathbf{R}_{\mu\nu}=g^{\tau\beta}\mathcal{R}_{\beta\alpha\tau\gamma}=\mathcal{R}^\beta{}_{\alpha\beta\gamma}$ Τανυστής **Ricci** (1.31)

$\mathbf{R}=g^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu}=\mathbf{R}^\mu{}_\mu$ Βαθμωτό **Ricci** (1.32)

Από την 1.31 πολλαπλασιάζοντας δύο φορές με την μετρική και γνωρίζοντας ότι $\nabla_\mu g_{\rho\tau}=0$.

$$g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}(\nabla_\epsilon\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}+\nabla_\gamma\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\epsilon}+\nabla_\delta\mathcal{R}_{\alpha\beta\epsilon\gamma})=\nabla_\epsilon(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta})+\nabla_\gamma(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}(-\mathcal{R}_{\beta\alpha\delta\epsilon})) \tag{1.33}$$
$$+\nabla_\delta(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}(-\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\epsilon}))=\nabla_\epsilon(g^{\beta\delta}\mathbf{R}_{\beta\delta})-g^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma\mathcal{R}^\beta{}_{\alpha\beta\epsilon}-g^{\beta\delta}\nabla_\delta\mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\alpha\epsilon}=\nabla_\epsilon\mathbf{R}-\nabla^\alpha\mathbf{R}_{\alpha\epsilon}-\nabla^\beta\mathbf{R}_{\beta\epsilon}=$$
$$\nabla_\epsilon\mathbf{R}-2\nabla^\beta\mathbf{R}_{\beta\epsilon}=0\Rightarrow\nabla^\beta\mathbf{R}_{\beta\epsilon}=\frac{1}{2}\nabla_\epsilon\mathbf{R}\Rightarrow\nabla^\beta\mathbf{R}_{\beta\epsilon}-\frac{1}{2}\nabla^\beta g_{\beta\epsilon}\mathbf{R}=\nabla^\beta\mathbf{R}_{\beta\epsilon}-\frac{1}{2}\nabla^\beta(\mathbf{R}g_{\epsilon\beta})\Rightarrow$$
$$\nabla^\beta\mathfrak{G}_{\beta\epsilon}=\nabla^\beta(\mathbf{R}_{\beta\epsilon}-\frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\epsilon\beta}) \tag{1.34}$$

Από όπου προκύπτει ο τανυστής του **EinStein** $\mathfrak{G}_{\mu\nu}=\mathbf{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu}$

1.4.5 Διανυσματικά Πεδία killing

Στην Φυσική μας ενδιαφέρουν μετασχηματισμοί οι οποίοι διατηρούν κάποια μεγέθη αναλλοίωτα στα μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως ισομετρία. Θέλουμε να έχουμε ισομετρία στην μετρική αυτό το πετυχαίνουμε κάνοντας απειροστούς μετασχηματισμούς όπου προκύπτει.

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\kappa\lambda}(x+\epsilon X)\frac{\partial(x^\kappa+\epsilon X^\kappa)}{\partial x^\mu}\frac{\partial(x^\lambda+\epsilon X^\lambda)}{\partial x^\nu} = (g_{\kappa\lambda}+\epsilon\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\tau}X^\tau)(\delta^\kappa_\mu+\epsilon\partial_\mu X^\kappa)(\delta^\lambda_\nu+\epsilon\partial_\nu X^\lambda) =$$

$$(g_{\kappa\lambda}+\epsilon\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\tau}X^\tau)(\delta^\kappa_\mu\delta^\lambda_\nu+\epsilon(\partial_\nu X^\lambda\delta^\kappa_\mu+\partial_\mu X^\kappa\delta^\lambda_\nu)+\epsilon^2\partial_\mu X^\kappa\partial_\nu X^\lambda) \approx$$

$$(g_{\kappa\lambda}\delta^\kappa_\mu\delta^\lambda_\nu+\epsilon\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\tau})+\epsilon(\partial_\nu X^\lambda\delta^\kappa_\mu+\partial_\mu X^\kappa\delta^\lambda_\nu)g_{\kappa\lambda}+\epsilon^2(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\tau}X^\tau(\partial_\nu X^\lambda\delta^\kappa_\mu+\partial_\mu X^\kappa\delta^\lambda_\nu)) \approx$$

$$g_{\mu\nu}(x)+\epsilon\left(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\tau}+g_{\mu\lambda}\partial_\nu X^\lambda+g_{\nu\kappa}\partial_\mu X^\kappa\right) \approx \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\tau}X^\tau+g_{\mu\lambda}\partial_\nu X^\lambda+g_{\nu\kappa}\partial_\mu X^\kappa = 0$$

Για την παράγωγο $\mathfrak{Lie}$ σε τανυστές έχουμε

$\mathfrak{L}_X T_{\mu\nu} = X^\tau\partial_\tau T_{\mu\nu}+(\partial_\mu X^\tau)T_{\tau\nu}+(\partial_\nu X^\tau)T_{\mu\tau}$

Αντικαθιστούμε την συνήθη παράγωγο με την συναλλοίωτη

Άρα η εξίσωση των πεδίων γίνεται $\mathfrak{L}_X g_{\mu\nu} = X^\tau\nabla_\tau g_{\mu\nu}+\nabla_\nu X^\rho g_{\mu\rho}+\nabla_\mu X^\rho g_{\nu\rho} = \nabla_\nu X_\mu+\nabla_\mu X_\nu = 0$

1.4.6 Εξωγενής καμπυλότητα

Πέραν της ενδογενούς καμπυλότητας την οποία μπορεί να έχει μια πολλαπλότητα μπορούμε να ορίσουμε και την εξωγενή. Η εξωγενής καμπυλότητα προέρχεται από την εμβάπτιση της πολλαπλότητας στον χώρο. Το κλασικό παράδειγμα περιγραφής της εξωγενούς καμπυλότητας είναι ο κύλινδρος ενώ δεν έχει ενδογενή καμπυλότητα έχει εξωγενή η οποία προέρχεται από το γεγονός ότι λόγω της εισαγωγής του δισδιάστατου επιπέδου στον χώρο και της παραμόρφωσης του προέκυψε μια επιπλέον καμπυλότητα.

1.5 Επιπλέον Φορμαλισμοί

Ο φορμαλισμός της σχετικότητας γίνεται πιο γενικός με την χρήση της έννοιας της τετράδας (tetrad ή veirbein) διότι επιτρέπει την επιλογή τοπικών συντεταγμένων αντί της επιλογής τοπικής βάσης στον εφαπτόμενο χώρο. Ο φορμαλισμός των τετράδων δεν αλλάζει την φυσική απλά μας επιτρέπει τον χειρισμό των εξισώσεων με διαφορετικό τρόπο, όπως ο φορμαλισμός Hamilton-Lagrange που θα συζητήσουμε αργότερα γενικεύει την Newtonian μηχανική.

1.5.1 Τετράδες

Θα ορίσουμε την έννοια της μετρικής μέσω των τετράδων και θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω αυτόν τον φορμαλισμό ώστε να ορίσουμε την Lagrangian density του πεδίου Dirac.

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^a(x)e_\nu{}^b(x)\eta_{ab} \;\&\; g^{\mu\nu}(x) = e_a{}^\mu(x)e_b{}^\nu(x)\eta^{ab} \;\&\; e_\mu{}^a e^\mu{}_b = \delta^a_b \tag{1.35}$$

Τα διανύσματα

$$\left\{\begin{array}{c} V^\mu(x) = e_a{}^\mu(x)V^a(x) \;\&\; V^a = e^a{}_\mu(x)V^\mu(x) \\ V_\mu(x) = e_\mu{}^a(x)V_a(x) \;\&\; V_a(x) = e_a{}^\mu(x)V_\mu(x) \end{array}\right\} \tag{1.36}$$

Η Συναλλοίωτη παράγωγος

$$\nabla_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu+\Omega_\mu)\Psi(x), \quad \Omega_\mu \equiv \frac{1}{2}\omega_{ab\mu}(x)\Sigma^{ab} \tag{1.37}$$

$$\omega^a{}_{b\mu} = e_\nu{}^a\nabla_\mu e_b{}^\nu = e^a_\nu(\partial_\mu e_b{}^\nu+\Gamma^\nu_{\tau\mu}e_b{}^\tau) \tag{1.38}$$

$$\omega_{ab\mu} = e^\nu{}_a\nabla_\nu e_{b\mu}, \quad (e^\nu{}_a = g^{\mu\nu}\eta_{ab}e_\mu{}^b) \tag{1.39}$$

$$\nabla_\mu e_b{}^\nu = \partial_\mu e_b{}^\nu+\Gamma^\nu_{\tau\mu}e_b{}^\tau-\omega^a{}_{b\mu}e_a{}^\nu \tag{1.40}$$

Κεφάλαιο 2

Φορμαλισμός Lagrange & Hamilton

Τα Προβλήματα τα οποία συναντάμε στην φυσική είναι προβλήματα δυναμικής. Για την περιγραφή αυτών χρειαζόμαστε εξισώσεις οι οποίες πρέπει να αποδίδουν όλα τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Τέτοιες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις του Newton οι οποίες είναι διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού ως προς τον χρόνο. Στις εξισώσεις αυτές περιέχεται η πληροφορία που μας ενδιαφέρει. Μια διαφορετική προσέγγιση της φυσικής κατάστασης αποτελούν οι εξισώσεις Euler-Lagrange και Hamilton οι οποίες είναι γενίκευση των εξισώσεων του Newton και μας αποδίδουν μια πιο γεωμετρική εικόνα των εξισώσεων κίνησης διότι μετέχουν οι εξισώσεις των περιορισμών της κίνησης.

2.1 Εξισώσεις Newton

Για αρχή θα δούμε τις εξισώσεις Newton για την κίνηση σωματιδίων και στην συνέχεια θα εξαγάγουμε της εξισώσεις Euler-Lagrange και Hamilton. Ξεκινώντας θα δούμε τις ποσότητες ορμή, δύναμη, στροφορμή, ροπή και ενέργειά.

$\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{x}}$	Ορμή
$\mathbf{F}=\dot{\boldsymbol{p}}$	Δύναμη
$\mathbf{L}=\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p}$	Στροφορμή
$\mathbf{N}=\dot{\boldsymbol{L}}$	Ροπή
$\mathrm{E}=T(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)+V(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)$	Ενέργεια

Για την δύναμη έχουμε $\boldsymbol{F}=\dot{\boldsymbol{p}}=m\ddot{\boldsymbol{x}}$ οπότε το έργο που ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα της δύναμης κατά μήκος μιας καμπύλης $C(\alpha,\beta)$ γίνεται.

$$W=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}=\int_C m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot d\boldsymbol{x}=\int_C m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}dt=\int_C m\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)dt=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_\alpha^2-\dot{x}_\beta^2\right)$$

Αν το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν για κάθε καμπύλη $C(\alpha,\beta)$ τότε η δύναμη καλείται συντηρητική και από το θεώρημα των **Stokes-Kelvin** προκύπτει ότι.

$$W=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}=\int_S(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}=0\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{F}=0\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{\nabla}V \tag{2.1}$$

Αυτή η διανυσματική ταυτότητα ισχύει για κάθε επιφάνεια S την οποία περικλείει η καμπύλη C.

2.2 Lagrange

2.2.1 Εξισώσεις συνδέσμων & Γενικευμένες συντεταγμένες

Όπως είπαμε προηγουμένως για την γενίκευση των εξισώσεων του Newton θα εισαγάγουμε τους περιορισμούς που επιβάλλονται στην κίνηση του συστήματος. Αυτοί οι περιορισμοί ονομάζονται σύνδεσμοι. Συνήθως μας τους επιβάλλει η γεωμετρία του προβλήματος (π.χ. κίνηση βόλου σε περιφέρεια κύκλου). Για τους συνδέσμους έχουμε τις εξής εξισώσεις

$$f_l(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N, \dot{\boldsymbol{x}}_1, ..., \dot{\boldsymbol{x}}_N; t) = 0 \;\; l = 1, 2, ..., K$$

Στην περίπτωση που οι εξισώσεις των συνδέσμων μπορούν ολοκληρώνοντας τις να απαλλαγούν από την εξάρτηση από τις ταχύτητες και ισχύει η σχέση.

$$f_l(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N; t) = 0 \;\; l = 1, 2, ..., K < nN, \;\; \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ονομάζονται ολόνομοι, αυτού του είδους του συνδέσμους θα μελετήσουμε και παρακάτω. Από τις εξισώσεις των συνδέσμων θα προσδιορίσουμε τις ανεξάρτητες μεταξύ τους συντεταγμένες τις οποίες θα ονομάσουμε γενικευμένες συντεταγμένες (ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας κίνησης του συστήματος). Οι γενικευμένες συντεταγμένες μας βοηθούν να προσδιορίσουμε την κίνηση ενός σώματος έχοντας λάβει υπ' όψιν όλους τους δυνατούς περιορισμούς που επιβάλλονται. Ένα παράδειγμα συστήματος ενός σωματιδίου με έναν σύνδεσμο μας βοηθάει να κατανοήσουμε την έννοια των συνδέσμων και τον γενικευμένων συντεταγμένων.

$$f(\boldsymbol{x}; t) = 0 \text{ Εξίσωση συνδέσμου.} \tag{2.2}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{C} \quad \text{όπου } \boldsymbol{F} \text{ γνωστή δύναμη και } \boldsymbol{C} \text{ άγνωστη δύναμη των συνδέσμων.} \tag{2.3}$$

Η δύναμη $\boldsymbol{C}$ θα προέρχεται από την εξίσωση των συνδέσμων επίσης επιλέγουμε οι δυνάμεις των συνδέσμων να είναι άεργες οπότε προκύπτει.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C} = \lambda(t)\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}; t) \text{ επίσης υποθέτουμε ότι } \boldsymbol{F(x)} = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}, t) \;\; \text{ οπότε η 2.3 γίνεται.}\\
&m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}, t) + \lambda(t)\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}; t) \overset{\dot{\boldsymbol{x}}\cdot}{\Rightarrow} m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}} = -\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}; t) + \lambda(t)\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}; t)\\
&\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\frac{d\dot{\boldsymbol{x}}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla} A + \ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{x}}} A + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \forall A(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}; t)\\
&\frac{dV(\boldsymbol{x}; t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}; t) + \frac{\partial V(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} \quad \& \quad \frac{df(\boldsymbol{x}; t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}; t) + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} = 0\\
&m\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{dV(\boldsymbol{x}; t)}{dt} + \frac{\partial V(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} \Rightarrow\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(\boldsymbol{x}; t)\right) = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

Για M σωματίδια οι εξισώσεις γενικεύονται

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} - \sum_{t=1}^{M}\lambda_t(t)\frac{\partial f_t(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} \quad \text{Αν ισχύει ότι } \frac{\partial V(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\sum_{t=1}^{M}\lambda_t(t)\frac{\partial f_t(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t}$$

$$(m_t\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{F_t}) = -\lambda_t(t)\boldsymbol{\nabla} f_t(\boldsymbol{x}; t) \overset{\boldsymbol{\tau_k}\cdot}{\Rightarrow} \boldsymbol{\tau_k}\cdot\left(m_t\ddot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}}\right) = -\lambda_t\boldsymbol{\tau_k}\cdot\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{k}} f_t = 0, \;\; \text{Αρχή } \textbf{d'Alembert} \tag{2.4}$$

Όπου $\boldsymbol{\tau_k}$ κάθετα στις δυνάμεις $\boldsymbol{C}$. Από την αρχή του **d'Alembert** προκύπτουν $nN - K$ ανεξάρτητες εξισώσεις. Αυτές οι ανεξάρτητες εξισώσεις ορίζουν το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων.

$$q^a = q^a(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_N}; t) \qquad \text{Αν επιπλέον ισχύει ότι } \mathfrak{J} = \det\left(\frac{\partial q^a}{\partial x^b}\right) \neq 0 \text{ τότε}$$

$$\boldsymbol{x_m} = \boldsymbol{x_m}(q^1, q^2, ..., q^{nN}; t)$$

τα $\boldsymbol{\tau_k}$ εφόσον είναι κάθετα στους συνδέσμους θα είναι παράλληλα με το επίπεδο άρα μπορούμε να θέσουμε τα $\boldsymbol{\tau_k}$ να είναι εφαπτόμενα στο επίπεδο μας δηλαδή:

$$\boldsymbol{\tau_k} = \epsilon^a \frac{\partial \boldsymbol{x_k}}{\partial q^a} \qquad \text{Όπου έχουμε.}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau_k} \cdot \boldsymbol{\nabla^k} f_t(\boldsymbol{x};t) = 0 &= \epsilon^a \frac{\partial \boldsymbol{x_k}}{\partial q^a} \cdot \boldsymbol{\nabla^k} f_t(\boldsymbol{x};t) = \epsilon^a \frac{\partial f_t(\boldsymbol{x};t)}{\partial q^a} \\
\boldsymbol{F_t} \cdot \epsilon^a \frac{\partial \boldsymbol{x_k}}{\partial q^a} &= -\epsilon^a \boldsymbol{\nabla^k} V(\boldsymbol{x};t) \frac{\partial \boldsymbol{x_k}}{\partial q^a} = \epsilon^a \frac{\partial V_t(\boldsymbol{x};t)}{\partial q^a}
\end{aligned}$$

2.2.2 Lagrangian και εξισώσεις κίνησης

Εφόσον έχουμε ορίσει τις γενικευμένες συντεταγμένες q^a θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης.

$$\left.\begin{array}{r}
\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a}\right) - \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a} \\
\boldsymbol{v_t} = \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} = \dot{q}^a \frac{\partial \boldsymbol{x}_t}{\partial q^a} + \frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial \boldsymbol{x}_t}{\partial q^a} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a} = \dot{q}_b \frac{\partial^2 \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a \partial q^b} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\dot{q}^b \frac{\partial \boldsymbol{x}_t}{\partial q^b} + \frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}}{\partial q^a}
\end{array}\right\}$$

$$m_t \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x_t}}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\left(m_t \boldsymbol{v_t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v_t}}{\partial \dot{q}^a}\right) - m_t \boldsymbol{v_t} \frac{\partial \boldsymbol{v_t}}{\partial q^a} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_t \frac{1}{2}\frac{\partial v_t^2}{\partial \dot{q}^a}\right) - m_t \frac{1}{2}\frac{\partial v_t^2}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a}$$

Εισάγοντας την εξίσωση αυτή στην αρχή **d'Alembert**:

$$\left.\begin{array}{r}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} + \frac{\partial V}{\partial q^a} = 0 \\
\text{Υποθέτουμε } V = V(q;t)\text{: } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^a} = 0
\end{array}\right\} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^a} + \frac{\partial V}{\partial q^a} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^a} = 0$$

Όπου θέσαμε $\mathscr{L}(q,\dot{q};t) = T(q,\dot{q};t) - V(q;t)$ η οποία είναι η Lagrangian του συστήματος.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\ddot{q}^b + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial t \partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^a} = 0 \qquad \text{Εξισώσεις Euler-Lagrange.} \tag{2.5}$$

Σωματίδιο σε Η/Μ πεδίο

$$\left.\begin{array}{c}
\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \\
\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \ \& \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A} \\
\epsilon_{\alpha\beta\mu}\epsilon_{\mu\nu\xi} = \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\xi} - \delta_{\alpha\xi}\delta_{\nu\beta}
\end{array}\right\} \boldsymbol{F} = q\left(-\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + v^\beta \epsilon_{\alpha\beta\mu}\partial_\nu \epsilon_{\mu\nu\xi} A^\xi\right) \overset{\partial_\alpha v_b = 0}{\Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{F} = q\left(-\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \partial_\alpha v_\beta A^\beta - v^\nu \partial_\nu A_\alpha\right) = q\left(-\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{A}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q\left(-\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}((\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - V)\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla} q(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - V) = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A} \quad \& \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{x}} = q(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - V) \Rightarrow \mathscr{L} = \frac{1}{2}mu^2 + q(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - V) \tag{2.6}$$

Μετασχηματισμοί

Για κάθε φυσικό πρόβλημα μπορούμε να βρούμε παραπάνω από μια Lagrangian η οποία να το περιγράφει. Απ'τις εξισώσεις κίνησης θα αποδείξουμε τι μορφή θα έχει μια τέτοια Lagrangian.

$$\Lambda_{ja} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}_j}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathscr{L}_j}{\partial q^a} = 0$$

$$\Lambda_{2a} - \Lambda_{1a} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1)}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial(\mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1)}{\partial q^a} \quad \text{θέτω } \mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1 = \Psi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \Psi}{\partial q^a} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\ddot{q}^b + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \Psi}{\partial q^a} = 0 \Rightarrow$$

διότι οι συναρτήσεις $\Lambda_{ja} = \Lambda_{ja}(q, \dot{q}; t)$ Θα πρέπει η Ψ να είναι γραμμική στους όρους $\dot{q}$ ούτως ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του $\ddot{q}$. Συνεπώς έχουμε:

$$\Psi = \dot{q}F(q;t) + G(q;t)$$

Αντικαθιστώντας το στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε.

$$0 + \frac{\partial F(q;t)}{\partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial F(q;t)}{\partial t} - \dot{q}^a\frac{\partial F(q;t)}{\partial q^a} - \frac{\partial G(q;t)}{\partial q^a} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F(q;t)}{\partial t} = \frac{\partial G(q;t)}{\partial q^a} \Rightarrow F(q;t) = \frac{\partial \Phi(q;t)}{\partial q^a} \;\&\; G(q;t) = \frac{\partial \Phi(q;t)}{\partial t}$$

$$\Psi = \mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1 = \dot{q}F(q;t) + G(q;t) = \dot{q}^a\frac{\partial \Phi(q;t)}{\partial q^a} + \frac{\partial \Phi(q;t)}{\partial t} = \frac{d\Phi(q;t)}{dt} \tag{2.7}$$

Αρχή του Hamilton & Θεώρημα Noether

Στην μηχανική ορίζεται μια ποσότητα η οποία ονομάζεται δράση και αποτελεί το ολοκλήρωμα της Lagrangian.

$$\mathcal{S}(q, \dot{q}; t) = \int \mathscr{L}(q, \dot{q}; t)dt \tag{2.8}$$

Η αρχή του Hamilton ή αλλιώς αρχή ελαχίστου δράσης λέει πως κάθε φυσικό σύστημα προτιμάει να επιλέξει την διαδρομή με την ελάχιστη δράση.

$$\delta\mathcal{S}(q, \dot{q}; t) = \delta\int \mathscr{L}(q, \dot{q}; t)dt = 0 \Rightarrow \int \delta\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)dt = 0 \Rightarrow \int \left\{\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{dq^a}\delta q^a + \frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\delta\dot{q}^a\right\}dt = 0$$

$$\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\frac{d}{dt}\delta q^a = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\delta q^a\right) - \delta q^a\frac{d}{dt}\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}$$

$$\int\left\{\left[\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{dq^a} - \frac{d}{dt}\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\right]\delta q^a + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\delta q^a\right)\right\}dt = 0$$

$$\delta\mathscr{L} = \left\{\left[\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{dq^a} - \frac{d}{dt}\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\right]\delta q^a + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^a}\delta q^a\right)\right\}$$

Στις εξισώσεις κίνησης αν η παράγωγος της Lagrangian ως προς μια συντεταγμένη q είναι μηδέν τότε προκύπτει.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = p \tag{2.9}$$

Η οποία είναι μια σταθερά της κίνησης και ονομάζεται γενικευμένη ορμή. και η q ονομάζεται αγνοήσιμη ή κυκλική. Στην Lagrangian μηχανική οι ποσότητες $(q, \dot{q})$ ορίζουν την πολλαπλότητα των εφαπτόμενων διανυσμάτων. Στην Hamiltonian μηχανική οι (q, p) ορίζουν μια αντίστοιχη πολλαπλότητα των συνεφαπτόμενων διανυσμάτων.

Για το θεώρημα της **Noether** θα θεωρήσουμε συνεχείς μετασχηματισμούς καθώς και την γενική Lagrangian η οποία περιέχει και ένα τέλειο διαφορικό μια οποιασδήποτε συνάρτησης. Κάνοντας μια μεταβολή στην Lagrangian παίρνουμε:

$$\mathscr{L}_\epsilon(q,\dot{q};t) = \mathscr{L}(\psi(q), \partial_t\psi(q), t) + \dot{\Phi}$$
$$\frac{d\mathscr{L}_\epsilon}{d\epsilon} = \left\{ \left[\frac{d\mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{dq^a} - \frac{d}{dt}\frac{d\mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^a} \right] \frac{\partial\psi(q)}{\partial\epsilon} + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^a}\delta q^a \right) + \delta\dot{\Phi}(q,\dot{q};t) \right\}$$

έστω ότι ισχύουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

$$\frac{d\mathscr{L}_\epsilon}{d\epsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^a}\delta q^a \right) + \delta\dot{\Phi}(q,\dot{q};t) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{c} \delta\mathscr{L}_\epsilon = \frac{d}{dt}\Phi \\ \delta\mathscr{L}_\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^a}\dot{q}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^a}\dot{q}^a - \frac{d}{dt}\delta\Phi = 0 \Rightarrow$$
$$\Gamma = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^a}\dot{q}^a - \delta\Phi \qquad \text{Σταθερά κίνησης.} \tag{2.10}$$

Το θεώρημα αυτό μας λέει πως κάθε τοπικός απειροστός μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτη την Lagrangian κρύβει κάποια διατηρήσιμη ποσότητα. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την κατανόηση της κβαντομηχανικής διότι πολλές ποσότητες δεν γίνονται διαισθητικά κατανοητές (π.χ. το *Spin*).

2.3 Hamiltonian

Για τις εξισώσεις του Hamilton θα πάρουμε την Lagrangian και θα την γράψουμε.

$$\hat{\mathscr{L}}(q,p;t) = \mathscr{L}(q,\dot{q}(q;p;t);t)$$
$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}(q,p;t)}{\partial q^a} = \frac{\partial\mathscr{L}(q,\dot{q}(q,p;t))}{\partial q^a} + \frac{\partial\mathscr{L}(q,\dot{q}(q;p;t);t)}{\partial\dot{q}^b}\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial q^a} = \frac{\mathscr{L}(q,\dot{q}(q,p;t))}{\partial q^a} + p_b\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial q^a} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\mathscr{L}(q,p;t)}{\partial q^a} = \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}(q,p;t)}{\partial q^a} - p_b\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\hat{\mathscr{L}}(q,p;t) - p_b\dot{q}^b \right)$$
$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}(q,p;t)}{\partial p_a} = \frac{\partial\mathscr{L}(q,\dot{q}(q;p;t);t)}{\partial\dot{q}^b}\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial p_a} = p_b\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial p_a} = \frac{\partial}{\partial p_a}\left(p_b\dot{q}^b\right) - \delta^a_b\dot{q}^b \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p_a}\left(\hat{\mathscr{L}}(q,p;t) - p_b\dot{q}^b \right) = -\dot{q}^a$$
$$\text{Θέτουμε} \qquad \mathscr{H}(q,p;t) = p_b\dot{q}^b(q,p;t) - \hat{\mathscr{L}}(q,p;t) \tag{2.11}$$

Η οποία είναι η Hamiltonian του συστήματος.

Από όπου προκύπτουν οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton.

$$\frac{\partial\mathscr{H}(q,p;t)}{\partial q^a} = -\frac{\partial\mathscr{L}(q;\dot{q};t)}{\partial q^a} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}(q;\dot{q};t)}{\partial\dot{q}^a} = -\frac{d}{dt}p_a = -\dot{p}_a \tag{2.12}$$
$$\frac{\partial\mathscr{H}(q,p;t)}{\partial p_a} = \frac{\partial}{\partial p_a}\left(p_b\dot{q}^b - \hat{\mathscr{L}}(q,p;t) \right) = \dot{q}^a \tag{2.13}$$
$$\frac{\partial\mathscr{H}(q,p;t)}{\partial t} = -\frac{\partial\mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial t} \tag{2.14}$$

Αγκύλες Poisson

Στην Hamiltonian μηχανική ένας διαφορετικός ορισμός της ολικής χρονικής παραγώγου είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
&\frac{df(q;p;t)}{dt} = \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial p_a}\dot{p}^a + \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial t} = \\
&\frac{df(q;p;t)}{dt} = \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial q^a}\frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial p_a} - \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial p_a}\frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial q^a} + \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial t} = \\
&\frac{df(q;p;t)}{dt} = \{f,\mathscr{H}\} + \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial t}, \quad \{f,\mathscr{H}\} = \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial q^a}\frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial p_a} - \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial p_a}\frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial q^a}
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Οι αγκύλες **Poisson** θα μας φανούν χρήσιμες στον φορμαλισμό της κβαντομηχανικής. Θα δούμε μερικές από τις ιδιότητες τους.

$$
\begin{aligned}
&\{f,g\} = \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial q^a}\frac{\partial g(q,p;t)}{\partial p_a} - \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial p_a}\frac{\partial g(q,p;t)}{\partial q^a} = -\{g,f\} \qquad \text{Αντισυμμετικές} \\
&\{f,gh\} = \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial q^a}\frac{\partial (g(q,p;t)h(q,p;t))}{\partial p_a} - \frac{\partial f(q;p;t)}{\partial p_a}\frac{\partial (g(q,p;t)h(q,p;t))}{\partial q^a} = \\
&\frac{\partial f}{\partial q^a}\left(\frac{\partial g}{\partial p_a}h + \frac{\partial h}{\partial p_a}g\right) - \frac{\partial f}{\partial p_a}\left(\frac{\partial g}{\partial q_a}h + \frac{\partial h}{\partial q_a}g\right) = \\
&\{f,gh\} = \{f,g\}\,h(q,p;t) + g(q,p;t)\,\{f,h\} \qquad \text{Κανόνας Leibniz} \\
&\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} = 0 \qquad \text{Ταυτότητα Jacobi} \\
&\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\{f,g\},\mathscr{H}\} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial t} = -\{\{\mathscr{H},f\},g\} - \{\{g,\mathscr{H}\},f\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\
&\left\{\{f,\mathscr{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t},g\right\} - \left\{f,\{g,\mathscr{H}\} + \frac{\partial g}{\partial t}\right\} = \left\{\{f,\mathscr{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{\{g,\mathscr{H}\} + \frac{\partial g}{\partial t},f\right\} = \{\dot{f},g\} + \{\dot{g},f\}
\end{aligned}
$$

Τώρα θα δούμε ένα σημαντικό θεώρημα που ισχύει στην Hamiltonian μηχανική.

Θεώρημα Liouville

Έστω ότι έχουμε ένα αέριο με σταθερή πυκνότητα για το οποίο ισχύουν οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton. Επίσης ισχύει η διατήρηση των σωματιδίων άρα και η εξίσωση συνέχειας από την οποία θα εξαγάγουμε την συνάρτηση Liouville. Η Οποία θα δούμε παρακάτω τι περιγράφει.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x};t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\dot{\boldsymbol{x}}) = 0 \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\dot{\boldsymbol{x}}) + \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x};t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_a}\rho\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\partial}{\partial q^a}\rho\dot{q}^a + \frac{\partial}{\partial p_a}\rho\dot{p}_a = \rho\left(\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial q^a} + \frac{\partial \dot{p}_a}{\partial p_a}\right) + \dot{q}^a\frac{\partial\rho}{\partial q^a} + \dot{p}_a\frac{\partial\rho}{\partial p_a} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \\
&\rho\left(\frac{\partial}{\partial q^a}\frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial p_a} + \frac{\partial}{\partial p_a}\left(-\frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial q^a}\right)\right) + \frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial p_a}\frac{\partial\rho}{\partial q^a} - \frac{\partial \mathscr{H}(q,p;t)}{\partial q^a}\frac{\partial\rho}{\partial p_a} + \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x};t)}{\partial t} = 0 \\
&\{\rho,\mathscr{H}\} + \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x};t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \{\rho,\mathscr{H}\} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x};t)}{\partial t} = \{\mathscr{H},\rho\} = -i\mathbb{L}\rho \Rightarrow \\
&\rho(q;t) = \mathsf{e}^{-i\mathbb{L}}\rho(q;0)
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Το θεώρημα αυτό μας παρέχει μια πλήρη περιγραφή του συστήματος σε ισορροπία και μη. Η συνάρτηση Liouville περιγράφει την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής στον χώρο των φάσεων για κάθε συντηρητικό Hamiltonian σύστημα.

2.3.1 Lagrangian & Hamiltonian των πεδίων

Η Lagrangian & Hamiltonian μπορεί να γενικευθεί από την περιγραφή σωματιδίων στην περιγραφή συνεχών μέσων όπως είναι μια χορδή, ένα ρευστό κ.τλ. Σε αυτήν την περίπτωση κάθε σημείο επηρεάζεται από τις εξωτερικές αλλά και από τις εσωτερικές δυνάμεις. Τώρα οι συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση κάθε σημείου θα συμβολίζονται με $\Psi(\boldsymbol{x};t)$ και ονομάζονται πεδία. Αυτού του είδους η περιγραφή θα μας φανεί χρήσιμη στην κβαντομηχανική όπου κάθε σωματίδιο περιγράφεται από ένα πεδίο.

Χορδή στο συνεχές όριο

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα N σωματιδίων τα οποία είναι δεσμευμένα με τα γειτονικά τους με δύναμη τύπου **Hooke** θα δεχτούμε πως αλληλεπιδρούν μόνο με τους κοντινότερους γείτονες. Τα σωματίδια αυτά ισαπέχουν κατά απόσταση a και βρίσκονται στις θέσεις 1a,2a,...,Na . Οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση αυτού του συστήματος είναι:

$$F_i = \begin{cases} +k(\psi_2 - \psi_1) & i = 1 \\ -k(\psi_i - \psi_{i-1}) + k(\psi_{i-1} - \psi_{i+1}) & 0 < i < N \\ -k(\psi_N - \psi_{N-1}) & i = N \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\mathscr{L} = T(\dot{\psi};t) - V(\psi;t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m\dot{\psi}^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k(\psi_i - \psi_{i-1})^2 \tag{2.18}$$

Με εξισώσεις κίνησης τις:

$$m\ddot{\psi} = -k(\psi_i - \psi_{i-1}) + k(\psi_{i-1} - \psi_{i+1}), 0 < i < N \tag{2.19}$$

Στο όριο του $a \to 0$το σύστημα τείνει να γίνει συνεχές $\psi(\boldsymbol{x};t) = \psi(ai;t)$.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{m}{a}\ddot{\psi} = -ka\left\{\frac{1}{a^2}(\psi_i - \psi_{i-1}) + \frac{1}{a^2}(\psi_{i-1} - \psi_{i+1})\right\} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = \lim\limits_{a\to 0} \frac{\psi((i+1)a) - \psi(ai)}{a} \end{array}\right\} \overset{\kappa = \lim\limits_{a\to 0} ka}{\Rightarrow} \left.\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{(i+1)a} - \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{a}}{a}\right\}$$

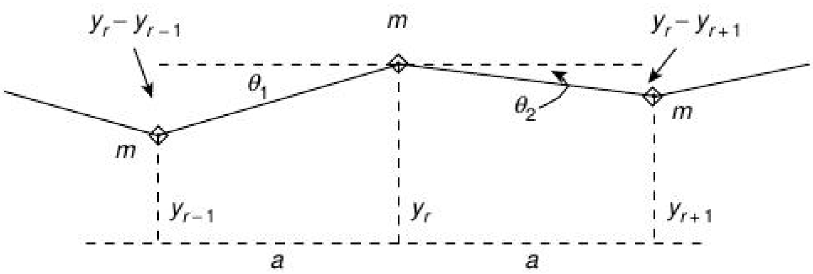
$$\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \kappa\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Όπου ορίζουμε την Lagrangian density:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \tag{2.20}$$

Για την οποία ισχύει

$$\mathscr{L} = \int \mathcal{L} dx \tag{2.21}$$



Σχήμα 2.1: Μέθοδος Lagrange προσομοίωσης συνεχούς χορδής.

Εξισώσεις Euler-Lagrange γενικών πεδίων

Υποθέτουμε μια γενική Lagrangian density η οποία εξαρτάται και από τα πεδία αλλά και από τις παραγώγους αυτών δηλαδή $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi(\boldsymbol{x};t), \partial_t\psi(\boldsymbol{x};t), \partial_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x};t))$. Θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τα πεδία μέσω της αρχής ελαχίστου δράσης. Θα θεωρήσουμε πως τα πεδία μηδενίζονται στα όρια των ολοκληρωμάτων, τα όρια είναι και χωρικά αλλά και χρονικά, επίσης τα πεδία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

$$
\begin{aligned}
&\delta\mathcal{S} = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{S} = \delta\int \mathscr{L} dt = \delta\int \mathcal{L} d\boldsymbol{x}dt \Rightarrow\\
&\delta\mathcal{S} = \int \delta\mathcal{L} d\boldsymbol{x}dt = \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\partial_t\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\delta\partial_{\boldsymbol{x}}\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi\right) d\boldsymbol{x}dt = 0\\
&\delta\mathcal{S} = \int\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\right)\delta\psi + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\delta\psi\right) -\right.\\
&\left.\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\right)\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi\right\} d\boldsymbol{x}dt = 0\\
&\delta\mathcal{S} = \int\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi\right) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\right\} d\boldsymbol{x}dt\delta\psi +\\
&\int\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi\right) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\delta\psi\right)\right\} d\boldsymbol{x}dt = 0\\
&\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi\right) dt = \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi\right|_{t_0}^{t_1} = 0\\
&\int\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\delta\psi\right) d\boldsymbol{x} = \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\delta\psi\right|_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}_1} = 0\\
&\int\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\right) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\right\}\delta\psi d\boldsymbol{x}dt = 0\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\right) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0 \Rightarrow\\
&\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Οι εξισώσεις που προέκυψαν αποτελούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange για κάποιο αυθαίρετο πεδίο. Στην περίπτωση που το πεδίο ψ είναι διανυσματικό αντικαθιστούμε το $\psi \to \boldsymbol{A}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\boldsymbol{A})}\right) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{A}} = 0\\
&\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\boldsymbol{A})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{A}} = 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Ορίζουμε την συναρτησιακή ή μεταβολική παράγωγο της Lagrangian.

$$
\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\psi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\right) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\boldsymbol{x}}\psi)}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0 \tag{2.24}
$$

Θεώρημα Noether

Υποθέτουμε μια Lagrangian density $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi; \epsilon)$ η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς.

$$\psi'(\epsilon) = \psi + \Delta\psi \quad \& \quad x'_\mu(\epsilon) = x_\mu + \delta x_\mu \quad \text{Όπου.} \quad \psi'(0) = \psi \quad \& \quad x'_\mu(0) = x_\mu$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_{Q'}^{\prime} \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x'^\mu; \epsilon)dx'^4 - \int_Q \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu; \epsilon)dx^4$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x'^\mu; \epsilon) \approx \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon) + \partial_\nu\mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)\delta x^\nu \\ \delta\mathcal{S} = \int_{Q'} \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x'^\mu; \epsilon)dx'^4 - \int_Q \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu; \epsilon)dx^4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)dx^4 + \partial_\nu\mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)\delta x^\nu dx'^\mu - \int_Q \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu; \epsilon)dx^4$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)dx^4 - \int_Q \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu; \epsilon)dx^4 + \underbrace{\int_Q \partial_\nu\mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)\delta x^\nu dx^\mu}_{\Theta\epsilon\omega\rho.Gauss}$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \left\{\mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon) - \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu; \epsilon)\right\} dx^4 + \int_V \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)\delta x^\nu ds_\nu$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\Delta\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\Delta\psi\right\} dx^4 + \int_V \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)\delta x^\nu ds_\nu$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\Delta\psi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Delta\psi\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\Delta\psi\right\} d^4x + \int_V \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', x^\mu; \epsilon)\delta x^\nu ds_\nu$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right)\Delta\psi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Delta\psi\right)\right\} d^4x + \int_Q \partial_\mu\left(\mathcal{L}\delta x^\mu\right) d^4x$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \partial_\mu\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\Delta\psi + \mathcal{L}\delta x^\mu\right\} d^4x = \int_Q \partial_\mu\mathcal{J}^\mu d^4x = 0$$

$$\left.\begin{array}{c} \Delta\psi = \psi'(x^\tau) - \psi(x^\tau) = \psi'(x'^\tau) - \psi(x^\tau) - [\psi'(x'^\tau) - \psi'(x^\tau)] \\ \psi'(x'^\tau) \approx \psi'(x^\tau) + \partial_\nu\psi'(x^\tau)\delta x^\nu \Rightarrow \psi'(x'^\tau) - \psi'(x^\tau) \approx \partial_\nu\psi'(x^\tau)\delta x^\nu \\ \psi'(x'^\tau) = \psi(x^\tau) + \Delta\psi(x^\tau) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta\psi = \partial_\nu\psi\delta x^\nu + \partial_\nu\Delta\psi\delta x^\nu - [\psi'(x'^\tau) - \psi'(x^\tau)] \approx \partial_\nu\psi\delta x^\nu - \delta\psi$$

Αναπτύσσουμε κατά **McLaurin** τα πεδία ως προς την παράμετρο ϵ.

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu \approx x'^\mu|_{\epsilon=0} + \epsilon\left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - x^\mu \overset{x'(0)=x}{=} \epsilon\left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

$$\delta\psi = \psi'^\mu - \psi^\mu \approx \psi'^\mu|_{\epsilon=0} + \epsilon\left.\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \psi^\mu \overset{\psi'(0)=\psi}{=} \epsilon\left.\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

$$\Delta\psi = \partial_\nu\psi'\delta x^\nu + \partial_\nu\Delta\psi\delta x^\nu - [\psi'(x'^\tau) - \psi'(x^\tau)] \approx \partial_\nu\psi'\epsilon\left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \epsilon\left.\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \partial_\mu\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\left(\partial_\nu\psi'\epsilon\left.\frac{\partial x'^\nu}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \epsilon\left.\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right) - \mathcal{L}\epsilon\left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right\} d^4x = 0$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_Q \epsilon\partial_\mu\left\{-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\left.\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi' - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\left.\frac{\partial x'_\nu}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right\} d^4x = 0$$

$$\mathcal{J}^\mu = \left.\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi' - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\frac{\partial x'_\nu}{\partial\epsilon}\right\}\right|_{\epsilon=0}$$

Για διανύσματα $\boldsymbol{A}$ έχουμε:

$$\mathcal{J}^\mu = \left.\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\boldsymbol{A})}\frac{\partial\boldsymbol{A'}}{\partial\epsilon} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\boldsymbol{A})}\partial^\nu\boldsymbol{A'} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\frac{\partial x'_\nu}{\partial\epsilon}\right\}\right|_{\epsilon=0} \tag{2.25}$$

Όπου το $\mathcal{J}^\mu$ είναι το διατηρήσιμο ρεύμα.

Hamiltonian

Όπως και για τα σωματίδια έτσι και για τα πεδία θα εξαγάγουμε την Hamiltonian μέσω της Lagrangian. Θα πάρουμε την συζυγή ορμή από την Lagrangian density και θα βρούμε την Hamiltonian density.

Για την συζυγή ορμή επιλέγουμε κατ' αναλογία με τα $\dot{q} \leftrightarrow p$ έχουμε $\dot{\psi} \leftrightarrow \pi$.

$$\pi^l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_l)} \tag{2.26}$$

$$\mathscr{H} = \int \partial_0 \psi_l \pi^l d^3\boldsymbol{x} - \mathscr{L} = \int (\partial_0 \psi_l \pi^l - \mathcal{L}) d^3\boldsymbol{x} = \int \mathcal{H}(\psi, \pi, \partial_i \psi; t) d^3\boldsymbol{x} \tag{2.27}$$

$$\mathcal{H}(\psi, \pi, \partial_i \psi; t) = \pi^l \partial_0 \psi_l - \mathcal{L}(\psi, \pi, \partial_i \psi; t) \tag{2.28}$$

Όπου $\mathcal{H}$ αναπαριστά την πυκνότητα ενέργειας.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^0} + \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k}\pi^l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_l)}\frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^0} + \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k}\pi^l - \pi^l \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^0} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j \psi_k)} = \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial(\partial_j \psi_k)}\pi^l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_k)}\frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial(\partial_j \psi_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)} = \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial(\partial_j \psi_k)}\pi^l - \pi^l \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial(\partial_j \psi_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j \psi_k)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k}\pi^l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_l)}\frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k}\pi^l - \pi^l \frac{\partial(\partial_0 \psi_l)}{\partial \pi^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_k)} = \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_k)} + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)} = \frac{\partial \pi_k}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial \pi_k}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_k)} \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial \pi_k}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j \psi_k)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial x^0} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_k} + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j \psi_k)} \tag{2.33}$$

Από την συναρτησιακή παράγωγο παίρνουμε.

$$\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \psi_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j \psi_k)} = -\left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_k} + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j \psi_k)}\right) = -\frac{\partial \pi_k}{\partial x^0} \tag{2.34}$$

Επειδή η $\mathscr{H}$ είναι ανεξάρτητη των $(\partial_j \psi_k)$ έχουμε.

$$\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \pi^k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^0} \tag{2.35}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τις κανονικές εξισώσεις του Hamilton για τα πεδία.

Κεφάλαιο 3

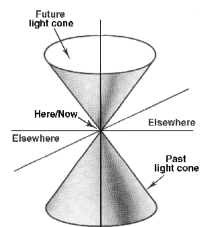
Ειδική Σχετικότητα

Για την περιγραφή των διεργασιών της φύσης θεωρούμε συστήματα αναφοράς. Ως σύστημά αναφοράς μπορεί να θεωρηθεί το σύστημα συντεταγμένων που μας εξυπηρετεί υποδεικνύοντας μας την θέση ενός σωματιδίου στον χώρο ή ένα ρολόι το οποίο μας δείχνει την ώρα κ.τ.λ. Τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ασκείται καμία δύναμη συνεπώς (σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton) δεν επιταχύνονται τα ονομάζουμε αδρανειακά. Αυτή η υπόθεση επιβάλει πως δυο συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα είναι και αυτά αδρανειακά. Για αυτά τα συστήματα ισχύει η *Αρχή της σχετικότητας* σύμφωνα με την οποία όλοι οι νόμοι της φύσης είναι ισοδύναμοι σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Συνεπώς οι αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο ένα σύστημα αναφοράς στιγμιαία διαδίδονται και στα υπόλοιπα κάτι το οποίο αντιβαίνει στις πειραματικές παρατηρήσεις μας. Στην Newtonian μηχανική θεωρείται πως ο χρόνος είναι απόλυτος και ο χώρος είναι απόλυτος και ισοτροπικός. Επίσης είδαμε πως στην Newtonian μηχανική θεωρείται πως η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η πληροφορία είναι άπειρη και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο αντιβαίνουν τα πειράματα με την θεωρία, στην πραγματικότητα αυτή η ταχύτητα είναι πεπερασμένη και δεν ξεπερνάει ένα άνω όριο. Γι' αυτό η Newtonian θεώρηση του απόλυτου χώρου και χρόνου πρέπει να εγκαταλειφθεί Η θεώρηση του EinStein πως αυτή η ταχύτητα είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και είναι ανεξάρτητη από τα συστήματα αναφοράς μας οδηγεί στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Επίσης στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι ανεξάρτητες έννοιες όπως στην Newtonian θεώρηση αλλά αλληλένδετες έννοιες.

3.1 Χωρόχρονος Minkowski

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας και κατ' επέκταση στην γενική ο χώρος και ο χρόνος ορίζουν μια ενιαία οντότητα τον χωρόχρονο ο οποίος θεωρείται ομοιογενής. Σε αντίθεση με την Newtonian μηχανική που ο χώρος είναι επίπεδος Ευκλείδειος στην ειδική σχετικότητα ο χώρος είναι **Minkowski** (και απουσία βαρύτητας) επίπεδος. Τα σημεία του τετραδιάστατου χωρόχρονου ονομάζονται γεγονότα και περιγράφονται από τα σημεία στα οποία έλαβαν χώρα και την χρονική στιγμή την οποία συνέβησαν. Στον τετραδιάστατο χωρόχρονο υποθέτουμε 4 άξονες οι οποίοι αναπαριστούν τις 3 χωρικές και την 1 χρονική συντεταγμένη ένα σημείο σε αυτούς τους άξονες ονομάζεται κοσμικό σημείο και μια γραμμή, η οποία προκύπτει όταν ένα γεγονός εξελιχθεί στον χρόνο, κοσμική γραμμή. Στον χώρο **Minkowski** η απόσταση δυο γεγονότων δίνεται από τον τύπο.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{3.1}$$



Σχήμα 3.1: Κώνος Φωτός

Ο οποίος ορίζει έναν κώνο στον τετραδιάστατο χωρόχρονο, τον κώνο αυτό τον ονομάζουμε κώνο φωτός. Από κώνο αυτόν ορίζονται τρεις περιοχές του χωρόχρονου.

$ds^2 < 0$	Χρονοειδής
$ds^2 = 0$	Φωτοειδής
$ds^2 > 0$	Χωροειδής

Στον χωρόχρονο ορίζουμε τα τετρανύσματα τα οποία ανάλογα σε ποια περιοχή βρίσκονται ονομάζονται χρονοειδή,φωτοειδή ή χωροειδή αντίστοιχα.

3.1.1 Μετασχηματισμοί Lorentz

Στην Newtonian θεώρηση ότι ο χρόνος είναι ίδιος για όλους τους παρατηρητές έχουμε πως οι εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα άλλο οπότε προκύπτουν οι μετασχηματισμοί του Galilaio.

$$x' = x - vt \ \& \ y' = y \ \& \ z' = z \ \& \ t' = t$$

Όμως στις υποθέσεις της σχετικότητας ο χρόνος δεν είναι ίδιος σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οπότε για να βρούμε ποιος μετασχηματισμός ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις θα πάρουμε το σύστημα αναφοράς να κινείται στην κατεύθυνση x με σταθερή ταχύτητα v αλλά και πως ο χρόνος δεν είναι ίδιος στο νέο σύστημα οπότε έχουμε.

$$\begin{aligned} &x' = ax + bt \quad \& \quad y' = y \quad \& \quad z' = z \quad \& \quad t' = hx + et \\ &dx' = adx + bdt \quad \& \quad dy' = dy \quad \& \quad dz' = dz \quad \& \quad dt' = hdx + edt \end{aligned}$$

Από την θεώρηση ότι οι απόσταση δυο γεγονότων μένει αναλλοίωτη σε δυο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα καθώς και από τις σχετικές κινήσεις των δυο συστημάτων παίρνουμε.

Αλλά $y' = y \ \& \ z' = z$ επίσης $x' = 0 \Rightarrow dx' = 0 \ \& \ v = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{b}{a}$ και $x = 0 \Rightarrow dx = 0 \ \& - v = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{b}{e}$

$$a = e \quad dx' = bdt \quad dt' = adt \Rightarrow -c^2dt^2 + dx^2 = -c^2(hdx + edt)^2 + (adx + bdt)^2 = dx^2(a^2 - c^2h^2)$$
$$+ dt^2(b^2 - c^2e^2) - 2(c^2he - ab)dxdt \Rightarrow a^2 - c^2h^2 = 1 \ \& \ b^2 - c^2e^2 = -c^2 \ \& \ 2(c^2he - ab) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} a = e \\ c^2he - ab = 0 \\ a^2 - c^2h^2 = 1 \\ b^2 - c^2e^2 = -c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c^2h = b \\ a^2 - \frac{b^2}{c^2} = 1 \\ \frac{b^2}{c^2} - e^2 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \\ \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)e^2 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{matrix}\right\}$$

Ονομάζουμε την ποσότητα. $\beta = \dfrac{u}{c} \quad \& \quad \gamma = \gamma(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Ορίζουμε την ποσότητα. $\beta = \tanh\psi \Rightarrow \left.\begin{matrix} \gamma = \cosh\psi \\ \gamma\beta = \sinh\psi \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} t' = \cosh\psi t - \sinh\psi\frac{x}{c} \\ x' = \cosh\psi x - c\sinh\psi t \\ y' = y \\ z' = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\frac{\sinh\psi}{c} & 0 & 0 \\ -c\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Η ποσότητα $\psi = \text{Arctanh}\beta$ ονομάζεται ωκύτητα η ποσότητα αυτή μοιάζει να περιγράφει την ταχύτητα όπως στην Newtonian μηχανική διότι κυμαίνεται από $-\infty$ έως ∞ ενώ η u από $-c$ έως c.

Μετασχηματισμός Ταχυτήτων

Υποθέτουμε δυο συστήματα τα για τα οποία έχουμε ότι το ένα κινείται με σχετική ταχύτητα v κατά τον άξονα x συνεπώς έχουμε από τους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων.

$$\left.\begin{array}{c} dt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dx' + vdt'\right) \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{array}\right\} \underset{\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\overset{\boldsymbol{u}'=\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{\left(dx'+vdt'\right)}{\left(dt'+\frac{v}{c^2}dx'\right)} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} u_x = \frac{\left(u'_x+v\right)}{\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)} \\ u_y = \frac{u'_y}{\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ u_z = \frac{u'_z}{\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{array}\right\}$$

Όπου για ταχύτητα v στον άξονα x: $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ έχουμε $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u'} = vu'_x$. $\Rightarrow a(v, u'_x) = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u'}}{c^2}\right)}$

$$\left.\begin{array}{c} u_x = (u'_x + v)\, a(v, u_x) \\ u_y = u'_y \frac{a(v,u'_x)}{\gamma(v)} \\ u_z = u'_z \frac{a(v,u'_x)}{\gamma(v)} \end{array}\right\} \underset{\gamma(\beta)\approx 1}{\overset{\beta\ll 1}{\Rightarrow}} \quad \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u'} + \boldsymbol{v})a(v, u'_x) \tag{3.3}$$

3.1.2 Τετρανύσματα

Θα ορίσουμε διανύσματα στον τετραδιάστατο **Minkowski** χώρο ξεκινώντας από τα διανύσματα θέσης. Έχουμε $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ όπου $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ για συντομία θα γράφουμε $x^\mu,\ \mu = 0, 1, 2, 3$ τα τετρανύσματα πρέπει να ικανοποιούν την σχέση $-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = x^2$ Ένα γενικό τετράνυσμα a^μ για το οποίο ισχύει η σχέση $-(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = a^2$ τότε ικανοποιεί και τους μετασχηματισμούς Lorentz δηλαδή ισχύει.

$$\begin{array}{c} a^0 = \gamma\left(a'^0 + \beta x'^1\right) \\ a^1 = \gamma\left(a'^1 + \beta a'^0\right) \\ a^2 = a'^2 \\ a^3 = a'^3 \end{array} \tag{3.4}$$

Στα τετρανύσματα ορίζονται οι συναλλοίωτες και οι ανταλλοίωτες συνιστώσες η διαφορά τους έγκειται μόνο στον νόμο μετασχηματισμού που ακολουθούν έτσι έχουμε. a^μ οι ανταλλοίωτες συνιστώσες και a_μ οι συναλλοίωτες συνιστώσες όπου ισχύει $a^0 = -a_0,\ a^1 = a_1,\ a^2 = a_2,\ a^3 = a_3$, μέσω αυτών ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο ως. $a^\mu a_\mu = a^0a_0 + a^1a_1 + a^2a_2 + a^3a_3 = -(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = a^2$. Γενικά ένα τετράνυσμα γράφεται ως $a_\mu = (a_0, \boldsymbol{a})$.

Τετραταχύτητα

Από την σχέση $ds^2 = -c^2dt^2 + d\boldsymbol{r}^2$ ορίζουμε τον ιδιόχρονο $d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2}$ Οπότε.

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 \Rightarrow c^2 = c^2\frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{d\boldsymbol{r}^2}{d\tau^2} \Rightarrow 1 = \frac{dt}{d\tau}\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma$$

Η τέτραταχύτητα ορίζεται. $u = \dfrac{dx}{d\tau} = \left(\dfrac{d(ct)}{d\tau}, \dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right) = \left(c\dfrac{dt}{d\tau}, \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = (c\gamma, \gamma\boldsymbol{v}) = (u_0, \boldsymbol{u})$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \text{ Και ισχύει } u^\mu u_\mu = -u_0^2 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -c^2\gamma^2 + v^2\gamma^2 = -c^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -c^2 \tag{3.5}$$

Η τετραταχύτητα ικανοποιεί τους μετασχηματισμούς Lorentz. Εν αντιθέσει με την συνήθη ταχύτητα η οποία έχει μια πιο πολύπλοκη μορφή όταν μετασχηματίζεται από ένα σύστημα σε κάποιο άλλο.

Παράδειγμα 3.1.1. Απόκλιση Φωτός Ένα παράδειγμα έστω πως οι ταχύτητες βρίσκονται στο επίπεδο $x - y$ οπότε. $v_x = v\cos\theta$ & $v_y = v\sin\theta$ & $v'_x = v'\cos\theta'$ & $v'_y = v'\sin\theta'$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos\theta = \tfrac{v'\cos\theta' + V}{1 + v'\cos\theta'\frac{V}{c^2}} \\ v_y &= v\sin\theta = \tfrac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+v'\cos\theta'\frac{V}{c^2}} \end{aligned}\right\} \tan\theta = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{v'\cos\theta' + V}$$

Για φωτόνια έχουμε $v = v' = c$ & $V \ll c$:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \tfrac{\sin\theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\cos\theta'\frac{V}{c}} \\ \cos\theta &= \tfrac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\cos\theta'\frac{V}{c}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sin\theta &= \sin\theta' - \sin\theta'\cos\theta'\tfrac{V}{c} \\ \cos\theta &= \cos\theta' + \tfrac{V}{c} - \cos^2\theta'\tfrac{V}{c} \end{aligned}\right\} = \left.\begin{aligned} \sin\theta' - \sin\theta &= \sin\theta'\cos\theta'\tfrac{V}{c} \\ \cos\theta' - \cos\theta &= -\sin^2\theta'\tfrac{V}{c} \end{aligned}\right\}$$

Τετραορμή

Για να ορίσουμε την τετραορμή θα πρέπει να δούμε ποια ταχύτητα να πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνήθη ή την τετραταχύτητα. Ξεκινάμε με ένα πρόβλημα σύγκρουσης δυο σωματιδίων για το οποίο στην Newtonian μηχανική ισχύει η διατήρηση της ορμής οπότε με χρήση των τετραταχυτήτων έχουμε.

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_3u_3 + m_4u_4 \Rightarrow m_1\left(\frac{u'_1}{\gamma} + \beta u_1^0\right) + m_2\left(\frac{u'_2}{\gamma} + \beta u_2^0\right) = m_3\left(\frac{u'_3}{\gamma} + \beta u_3^0\right) + m_4\left(\frac{u'_4}{\gamma} + \beta u_4^0\right)$$
$$m_1u'_1 + m_2u'_2 = m_3u'_3 + m_4u'_4 \text{ \& } m_1u_1^0 + m_2u_2^0 = m_3u_3^0 + m_4u_4^0$$

Η πρώτη από τις δυο σχέσεις είναι η διατήρηση της ορμής στο κινούμενο σύστημα όμως η δεύτερη σχέση η οποία πρέπει να ισχύει δεν είναι κάποια γνωστή σχέση. Γι' αυτό θα την επεξεργαστούμε λίγο παραπάνω ούτως ώστε να δούμε τι είναι.

$m_1c\gamma(v_1) + m_2c\gamma(v_2) = m_3c\gamma(v_3) + m_4c\gamma(v_4)$

όπου για $v_i \ll c \Rightarrow \gamma(u_i) \approx 1$ οπότε αποτελεί την εξίσωση διατήρησης της μάζας. Όμως έχουμε

$$m_ic^2\gamma(v_i) \approx m_ic\left(1 - \frac{v_i^2}{2c^2}\right) = m_ic^2 - \frac{1}{2}m_iv_i^2 = m_ic^2 - T_i$$

Οπότε πρόκειται για διατήρηση της ενέργειας.

Ορίζουμε ως σχετικιστική μάζα την ποσότητα: $m(v) = m\gamma(v)$

Και ως σχετικιστική ενέργεια την ποσότητα: $E = m(v)c^2 = m\gamma(v)c^2$

Ορίζουμε ως τετραορμή την ποσότητα.

$$p = mu = (mu_0, m\boldsymbol{u}) = \left(m\frac{c^2}{c}\gamma, m\boldsymbol{u}\right) = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) = (p_0, \boldsymbol{p}) \tag{3.6}$$

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$p^\mu p_\mu = mu^\mu mu_\mu = m^2(-c^2) = -m^2c^2$$

$$p^\mu p_\mu = -m^2c^2 \Rightarrow -\frac{E^2}{c^2} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = -m^2c^2 \Rightarrow E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \tag{3.7}$$

Η οποία αποτελεί την σχέση ενέργειας της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

3.2 Σχετικιστική Δυναμική

3.2.1 Τετρατανυστης στροφορμής

Όπως είναι γνωστό από την Newtonian μηχανική, για ένα κλειστό σύστημα, ισχύει η διατήρηση της στροφορμής. Αυτό αποτελεί συνέπεια της ισοτροπίας του χώρου που κάτω από στροφές του συστήματος αφήνει αναλλοίωτη την Lagrangian (Θ. **Noether**). Θεωρούμε πως κάτω από μια στροφή το τετράνυσμα ενός σωματιδίου x^μ γίνεται x'^μ και η διαφορά τους είναι γραμμική συνάρτηση.

$$\left.\begin{array}{c} x'^\mu - x^\mu = x_\nu \delta\Omega^{\mu\nu} \\ x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \end{array}\right\} \underset{x'_\mu}{\overset{x'_\mu = x_\mu + x^\rho\delta\Omega_{\mu\rho}}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{c} x'_\mu x'^\mu - x'_\mu x^\mu = x'_\mu x_\nu \delta\Omega^{\mu\nu} \Rightarrow \\ x^\mu x_\mu - (x_\mu + x^\rho\delta\Omega_{\mu\rho})x^\mu = (x_\mu + x^\rho\delta\Omega_{\mu\rho})x_\nu\delta\Omega^{\mu\nu} \end{array}\right\}$$

$$x^\mu x_\mu - x_\mu(x^\mu - x^\rho\delta\Omega_{\mu\rho}) = x_\mu x_\nu \delta\Omega^{\mu\nu} + x^\rho\delta\Omega_{\mu\rho}x_\nu\delta\Omega^{\mu\nu} \overset{\delta\Omega\delta\Omega\approx 0}{\Rightarrow} -x_\nu x_\mu\delta\Omega^{\mu\nu} = x_\mu x_\nu\delta\Omega^{\mu\nu} + x^\rho\delta\Omega_{\mu\rho}x_\nu\delta\Omega^{\mu\nu}$$

$2x_\nu x_\mu \delta\Omega^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow x_\nu x_\mu\delta\Omega^{\mu\nu} = 0$ αφού τα $x_\nu x_\mu$ συμμετρικά προκύπτει ότι: $\delta\Omega^{\mu\nu} = -\delta\Omega^{\nu\mu}$

Για ένα σωματίδιο στο οποίο δεν ασκείται καμία δύναμη η μόνη Lorentz αναλλοίωτη βαθμωτή δυναμική ποσότητα που έχουμε είναι η $ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$ Οπότε αυτήν θα εισάγουμε στην δράση.

$$\mathcal{S}(x,\dot{x}) = \int_{t_2}^{t_1} -m ds = -mc\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{dx^\mu dx_\mu} \Rightarrow \delta\mathcal{S}(x,\dot{x}) = -mc\delta\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{dx^\mu dx_\mu} \Rightarrow \tag{3.8}$$

$$\delta\mathcal{S} = -mc\int_{t_2}^{t_1}\frac{dx^\mu\delta dx_\mu + dx_\mu\delta dx^\mu}{2\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} = -mc\int_{t_2}^{t_1}\frac{2dx^\mu\delta dx_\mu}{2\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} = -mc\int_{t_2}^{t_1}\frac{dx^\mu\delta dx_\mu}{ds} = -mc\int_{t_2}^{t_1}u^\mu\delta dx_\mu$$

$$\delta\mathcal{S} = -mc\int_{t_2}^{t_1}d(u^\mu\delta x_\mu) - mc\int_{t_2}^{t_1}\frac{du^\mu}{ds}\delta x_\mu ds$$

Εξ'υποθέσεως το σωματίδιο δεν επιταχύνει συνεπώς. $\dfrac{du^\mu}{ds} = 0$ Άρα $\delta\mathcal{S}(x,\dot{x}) = -\ mcu^\mu\delta x_\mu\big|_{t_1}^{t_2}$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x}) = -mcu^\mu\delta x_\mu = -p^\mu c x^\nu\delta\Omega_{\mu\nu} = -p^\mu c x^\nu\frac{1}{2}(\delta\Omega_{\mu\nu} - \delta\Omega_{\nu\mu}) = -\frac{1}{2}c\delta\Omega_{\mu\nu}(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu) \tag{3.9}$$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x}) = -\frac{1}{2}c\delta\Omega_{\mu\nu}\ (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu)\big|_{t_1}^{t_2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}c\delta\Omega_{\mu\nu}\ (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu)\big|_{t_1} = -\frac{1}{2}c\delta\Omega_{\mu\nu}\ (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu)\big|_{t_2} \Rightarrow$$

Η δράση μένει αναλλοίωτη κάτω από στροφές οπότε είναι ανεξάρτητη απ'τον τανυστή: $\delta\Omega_{\mu\nu}$

$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = \sum p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu$ όπου για κλειστό σύστημα προκύπτει ο τανυστής της στροφορμής.

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}^{00} & \mathfrak{M}^{01} & \mathfrak{M}^{02} & \mathfrak{M}^{03} \\ \mathfrak{M}^{10} & \mathfrak{M}^{11} & \mathfrak{M}^{12} & \mathfrak{M}^{13} \\ \mathfrak{M}^{20} & \mathfrak{M}^{21} & \mathfrak{M}^{22} & \mathfrak{M}^{23} \\ \mathfrak{M}^{30} & \mathfrak{M}^{31} & \mathfrak{M}^{32} & \mathfrak{M}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Ex}{c} - ctp_x & \frac{Ey}{c} - ctp_y & \frac{Ez}{c} - ctp_z \\ ctp_x - \frac{Ex}{c} & 0 & p_x y - x p_y & p_x z - x p_z \\ ctp_y - \frac{Ey}{c} & p_y x - y p_x & 0 & p_y z - y p_z \\ ctp_z - \frac{Ez}{c} & p_z x - z p_x & p_z y - z p_y & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & c\left(\frac{Ex}{c^2} - tp_x\right) & c\left(\frac{Ey}{c^2} - tp_y\right) & c\left(\frac{Ez}{c^2} - tp_z\right) \\ c\left(tp_x - \frac{Ex}{c^2}\right) & 0 & -L_z & L_y \\ c\left(tp_y - \frac{Ey}{c^2}\right) & L_z & 0 & -L_x \\ c\left(tp_z - \frac{Ez}{c^2}\right) & -L_y & L_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = (\mathfrak{M}^{00} + \mathfrak{M}^{01} + \mathfrak{M}^{02} + \mathfrak{M}^{03}, -\mathfrak{M}^{23}, \mathfrak{M}^{13}, -\mathfrak{M}^{12})$$

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = \left(-c\sum\left(t\boldsymbol{p} - \frac{E\boldsymbol{r}}{c^2}\right), L_x, L_y, L_z\right) = \left(-c\sum\left(t\boldsymbol{p} - \frac{E\boldsymbol{r}}{c^2}\right), \boldsymbol{L}\right) \tag{3.12}$$

Λόγω διατήρησης του $\mathfrak{M}^{\mu\nu}$ για κλειστό σύστημα έχουμε.

$$-c\sum\left(t\boldsymbol{p} - \frac{E\boldsymbol{r}}{c^2}\right) = \sigma\tau\theta. \Rightarrow \left(tc^2\sum\boldsymbol{p} - \sum E\boldsymbol{r}\right) = \sigma\tau\theta.$$

λόγω διατήρησης της ενέργειας έχουμε $\sum E = \sigma\tau\theta \Rightarrow \left(tc^2 \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\sum E} - \frac{\sum E\boldsymbol{r}}{\sum E}\right) = \sigma\tau\theta.$

Εξ' υποθέσεως τα σωματίδια είναι ελεύθερα δηλαδή δεν τους ασκείται καμία δύναμη άρα: $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$

Θέτουμε $\boldsymbol{R} = \frac{\sum E\boldsymbol{r}}{\sum E} \Rightarrow \boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\sum E\dot{\boldsymbol{r}}}{\sum E}$ & $\frac{d}{dt}\left(tc^2 \sum \boldsymbol{p}\right) = c^2 \sum \boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}} = c^2 \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\sum E} \tag{3.13}$$

Όπου για χαμηλές ταχύτητες ($v \ll c$) έχουμε: $E \approx mc^2 \Rightarrow \boldsymbol{R} \approx \frac{\sum mc^2\boldsymbol{r}}{\sum mc^2} = \frac{\sum m\boldsymbol{r}}{\sum m}$

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας αποτελεί μεν την γενίκευση της Newtonian μηχανικής αλλά οι νόμοι Newton παραμένουν σε πλήρη ισχύ απλά εφοδιασμένοι με τις νέες υποθέσεις (την νέα αρχή της σχετικότητας,το άνω φράγμα της ταχύτητας διάδοσης καθώς και την διαφορετική γεωμετρία του χώρου και του χρόνου). Για των δεύτερο νόμο του Newton έχουμε:

$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ Όπου η $\boldsymbol{p}$ έχει αντικατασταθεί από την $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{u}$

Η έννοια του έργου θα παραμείνει ως έχει εφόσον εξ'ορισμού δηλώνει την προσφερόμενη ενέργεια.

$$W = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} dt =$$

$$W = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \cdot \boldsymbol{v} dt = W = \int \left(\frac{m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - m\frac{-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{1}{c^2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \cdot \boldsymbol{v} = \int \left(\frac{m\boldsymbol{v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dt =$$

$$W = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) dt = \int \frac{dE}{dt} dt = E_f - E_i$$

3.2.2 Τανυστής Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Έχουμε αποδείξει σε προηγούμενη ενότητα την μορφή που παίρνει η Lagrangian όταν ένα σωματίδιο υπόκειται σε Η-Μ πεδίο επίσης είδαμε την Lagrangian για ελεύθερο σωματίδιο στα πλαίσια της ειδικής σχετικότητας οπότε από την δράση παίρνουμε:

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x};t) = \delta \int -mcds - eA^{\mu}dx_{\mu} = 0 \tag{3.14}$$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x};t) = -\int mc\frac{dx^{\mu}d\delta x_{\mu}}{ds} + e\delta A^{\mu}dx_{\mu} + eA^{\mu}d\delta x_{\mu} - \int mcu^{\mu}d\delta x_{\mu} + e\delta A^{\mu}dx_{\mu} + eA^{\mu}d\delta x_{\mu}$$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x};t) = -\, mcu^{\mu}\delta x_{\mu} - eA^{\mu}\delta x_{\mu}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int mcdu^{\mu}\delta x_{\mu} - e\delta A^{\mu}dx_{\mu} + edA^{\mu}\delta x_{\mu}$$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x};t) = -\, mcu^{\mu}\delta x_{\mu} - eA^{\mu}\delta x_{\mu}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int mcdu^{\mu}\delta x_{\mu} - e\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\delta x_{\rho}dx_{\mu} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}}dx_{\rho}\delta x_{\mu}\right)$$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x};t) = \int mcdu^{\mu}\delta x_{\mu} - e\left(\frac{\partial A^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\delta x_{\mu}dx_{\rho} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}}dx_{\rho}\delta x_{\mu}\right)$$

$$\delta\mathcal{S}(x,\dot{x};t) = \int mc\frac{du^{\mu}}{ds}ds\delta x_{\mu} - e\left(\frac{\partial A^{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\right)u_{\rho}\delta x_{\mu}ds = 0 \Rightarrow$$

$$\left(mc\frac{du^{\mu}}{ds} - e\left(\frac{\partial A^{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\right)u_{\rho}\right)\delta x_{\mu}ds = 0 \Rightarrow mc\frac{du^{\mu}}{ds} = eF^{\rho\mu}u_{\rho} \tag{3.15}$$

3.2.3 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Στην ειδική αλλά κυρίως στην γενική σχετικότητα η αναπαράσταση της ύλης γίνεται με κάποιον τανυστή. Αυτός ο τανυστής στην γενική του περίπτωση είναι περίπλοκος διότι υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων της ύλης. Επίσης πέραν τον αλληλεπιδράσεων υπάρχουν και κάποιοι περιορισμοί οι οποίοι δεν επιτρέπουν στα σωματίδια να βρίσκονται στην ίδια κατάσταση όλα μαζί (όπως η απαγορευτική αρχή του **Pauli**). Θα εξαγάγουμε αυτόν τον τανυστή για ένα σωματίδιο και κατ' επέκταση θα τον γενικεύσουμε για συνεχές μέσο.

Τανυστής Ενέργειας-Ορμής για Σωματίδια

Έχουμε την δράση για ένα σωματίδιο το οποίο δεν υπόκειται σε καμία αλληλεπίδραση.

$$S(q,\partial_\mu q) = \int \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)dvdt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)dvcdt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)dQ = 0$$

$$\delta S(q,\partial_\mu q) = \frac{1}{c}\int \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial(\partial_\nu q)}\delta\partial_\nu q\right\} dQ = 0$$

$$\delta S(q,\partial_\mu q) = \frac{1}{c}\int \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial q}\delta q + \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial(\partial_\nu q)}\delta q\right) - \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial(\partial_\nu q)}\right)\delta q\right\} dQ = 0$$

Όπου από τον θεώρημα της απόκλισης του **Gauss** έχουμε πως ο μεσαίος όρος είναι μηδέν.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial q} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_p(q,\partial_\mu q)}{\partial(\partial_\nu q)} = 0 \\ \partial_\rho \mathcal{L}_p = \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial q}\partial_\rho q + \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial(\partial_\tau q)}\partial_\rho\partial_\tau q\end{array}\right\} \Rightarrow \partial_\rho \mathcal{L}_p = \partial_\tau \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial(\partial_\tau q)}\partial_\rho q + \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial(\partial_\tau q)}\partial_\tau\partial_\rho q \Rightarrow \partial_\rho \mathcal{L}_p = \partial_\tau\left(\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial(\partial_\tau q)}\partial_\rho q\right)$$

$$\partial_\tau\left(\delta^\tau_\rho \mathcal{L}_p - \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial(\partial_\tau q)}\partial_\rho q\right) = 0 \Rightarrow \mathfrak{T}^\tau_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial(\partial_\tau q)}\partial_\rho q - \delta^\tau_\rho \mathcal{L}_p \qquad (3.16)$$

Εφόσον έχουμε από το θεώρημα του **Gauss**. $\int \partial_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu} d\Omega = 0 \Rightarrow \int \mathfrak{T}^{\mu\nu} ds_\nu = ct \Rightarrow P^\mu = a\int \mathfrak{T}^{\mu\nu} ds_\nu$

όπου το ολοκλήρωμα για σταθερό χρόνο μας δίνει την ενέργεια.

$$P^0 = \frac{1}{c}\int \mathfrak{T}^{00}dV \quad \text{διότι ο } \mathfrak{T}^{00} = \dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}_p \text{ Αναπαριστά την ενέργεια}$$

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int \mathfrak{T}^{\mu\nu}ds_\nu \quad \text{Αποτελεί τον τανυστή ενέργειας ορμής.} \qquad (3.17)$$

Ο τανυστής αυτός δεν είναι μοναδικά ορισμένος επειδή ισχύει ότι $\partial_\rho \mathfrak{T}^{\tau\rho} = 0$ μπορούμε να βρούμε έναν τανυστή ο οποίος να ικανοποιεί αυτήν την υπόθεση δηλαδή.

$$\partial_\rho\left(\mathfrak{T}^{\tau\rho} + F^{\tau\rho}\right) = 0 \overset{\partial_\rho \mathfrak{T}^{\tau\rho}=0}{\Rightarrow} \partial_\rho F^{\tau\rho} = 0 \qquad (3.18)$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε. $F^{\tau\rho} = \partial_\nu \Psi^{\tau\rho\nu}$

$$\partial_\rho F^{\tau\rho} = \partial_\rho\partial_\nu \Psi^{\tau\rho\nu} = \partial_\nu\partial_\rho \Psi^{\tau\rho\nu} = \partial_\rho\partial_\nu \Psi^{\tau\nu\rho} = 0$$

Εφόσον οι παράγωγοι είναι συμμετρικοί πρέπει ο Ψ να είναι αντισυμμετρικός συνεπώς.

$$\Psi^{\tau\nu\rho} = -\Psi^{\tau\rho\nu} \qquad (3.19)$$

Ο Τανυστής παραμένει αναλλοίωτος αν του προσθέσουμε αυτήν την ποσότητα.

$$\mathfrak{T}'^{\tau\rho} = \mathfrak{T}^{\tau\rho} + \partial_\nu \Psi^{\nu\tau\rho} \qquad (3.20)$$

Εφόσον υποθέτουμε πως η $\mathfrak{T}'^{\tau\rho}$ μένει αναλλοίωτη πρέπει και οι P^μ να μένουν αναλλοίωτες.

$$\int \partial_\nu \Psi^{\tau\rho\nu} ds_\rho = \int \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\Psi^{\tau\rho\nu} - \Psi^{\tau\nu\rho}\right)ds_\rho \overset{\rho\leftrightarrow\nu}{=} \frac{1}{2}\int\left\{\partial_\nu \Psi^{\tau\rho\nu}ds_\rho - \partial_\rho \Psi^{\tau\rho\nu}ds_\nu\right\} = \frac{1}{2}\int df_{\rho\nu}\Psi^{\tau\rho\nu}$$

όμως το τελευταίο ολοκλήρωμα αποτελεί την γενίκευση του θεωρήματος **Stokes-Kelvin** όπου το $df_{\rho\nu}$ ορίζει το σύνορο της υπερεπιφάνειας που περικλείει ds_ρ οπότε λόγω απουσίας πεδίων και σωματιδίων στο άπειρο όπου μπορούμε να πάμε το σύνορο το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν. Για να ορίσουμε μοναδικά τον τανυστή παίρνουμε την σχέση του τανυστή της στροφορμής και τον γράφουμε συναρτήσει της ορμής.

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu) = \int x^\mu \frac{\mathfrak{T}^{\nu\rho}}{c} ds_\rho - x^\nu \frac{\mathfrak{T}^{\mu\rho}}{c} ds_\rho = \frac{1}{c}\int (x^\mu \mathfrak{T}^{\nu\rho} - x^\nu \mathfrak{T}^{\mu\rho}) ds_\rho$$

Έχουμε από διατήρηση της στροφορμής.

$$\partial_\rho (x^\mu \mathfrak{T}^{\nu\rho} - x^\nu \mathfrak{T}^{\mu\rho}) = 0 \Rightarrow \delta^\mu_\rho \mathfrak{T}^{\nu\rho} + \partial_\rho \mathfrak{T}^{\nu\rho} - \delta^\nu_\rho \mathfrak{T}^{\mu\rho} - \partial_\rho \mathfrak{T}^{\mu\rho} = 0 \Rightarrow \mathfrak{T}^{\nu\mu} + 0 - \mathfrak{T}^{\mu\nu} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathfrak{T}^{\nu\mu} = \mathfrak{T}^{\mu\nu} \tag{3.21}$$

Τώρα θα δείξουμε τον λόγο για τον οποίο ονομάζεται τανυστής εκτός από ενέργειας το οποίο το δείξαμε και ορμής. από την εξίσωση συνέχειας $\partial_\rho \mathfrak{T}^{\tau\rho}$ χωρίζουμε τις χωρικές από τις χρονικές συνιστώσες και παίρνουμε.

$$\frac{1}{c}\partial_t \mathfrak{T}^{00} + \partial_i \mathfrak{T}^{0i} = 0 \qquad \& \qquad \frac{1}{c}\partial_t \mathfrak{T}^{j0} + \partial_i \mathfrak{T}^{ij} = 0$$

ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του **Gauss** παίρνουμε.

$$\partial_t \int \mathfrak{T}^{00} dV = -c \int \partial_i \mathfrak{T}^{0i} dV = -c \oint \mathfrak{T}^{0i} ds_i \tag{3.22}$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι η μεταβολή της ενέργειας και το δεύτερο η μεταφορά ενέργειας από τις επιφάνειες που περικλείουν τον όγκο. Ονομάζουμε τις συνιστώσες του $\mathfrak{T}^{0i} = S^i$ όπου S^i τα διανύσματα της ροής της ενέργειας. Ανάλογα για την δεύτερη εξίσωση έχουμε.

$$\partial_t \frac{1}{c}\int \mathfrak{T}^{j0} dV = -\int \partial_i \mathfrak{T}^{ji} dV = -\oint \mathfrak{T}^{ji} ds_i \Rightarrow \partial_t p^j = -\oint \mathfrak{T}^{ji} ds_i \tag{3.23}$$

Όπου το πρώτο ολοκλήρωμα υποδηλώνει την μεταβολή της ορμής και το δεύτερο στην μεταφορά της ορμής από τις επιφάνειες που περικλείουν τον όγκο. Ονομάζουμε τις συνιστώσες του $\mathfrak{T}^{ji} = \sigma^{ji}$ όπου σ^{ji} οι τανυστές επιφανειακής τάσης. τελικά έχουμε.

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{00} & \mathfrak{T}^{01} & \mathfrak{T}^{02} & \mathfrak{T}^{03} \\ \mathfrak{T}^{10} & \mathfrak{T}^{11} & \mathfrak{T}^{12} & \mathfrak{T}^{13} \\ \mathfrak{T}^{20} & \mathfrak{T}^{21} & \mathfrak{T}^{22} & \mathfrak{T}^{23} \\ \mathfrak{T}^{30} & \mathfrak{T}^{31} & \mathfrak{T}^{32} & \mathfrak{T}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ -\frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -\frac{S_x}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ -\frac{S_x}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Για συνεχή κατανομή σωματιδίων θα κάνουμε προσεγγίσεις έτσι τα σωματίδια που απαρτίζουν την ύλη θα τα θεωρήσουμε ως ένα ρευστό. Τα ρευστά αποτελούν την καλύτερη προσέγγιση της συνεχούς κατανομής της ύλης οπότε μπορούμε ακόμα και τα στερεά να τα θεωρήσουμε ρευστά. Τα ρευστά έχουν κάποιες μακροσκοπικές ιδιότητες τις οποίες δεν έχουν μεμονωμένα τα σωματίδια, μερικές από αυτές είναι η πίεση,το ιξώδες, η εντροπία,η θερμοκρασία κ.τλ., όλες αυτές οι ιδιότητες οφείλονται είτε σε αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων είτε στην συλλογικές τους κινήσεις. Σε πρώτη προσέγγιση θα θεωρήσουμε απουσία αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωματιδίων.

Τανυστής Ενέργειας-Ορμής για Ιδανικά Ρευστά

Ιδανικά χαρακτηρίζονται τα ρευστά τα οποία είναι απαλλαγμένα από κάθε είδους αλληλεπίδραση οπότε ιδιότητες όπως το ιξώδες δεν υφίστανται. Οπότε θα θεωρήσουμε σωματίδια τα οποία βρίσκονται στο σύστημα ηρεμίας τους (δηλαδή $u_\mu = (c, \mathbf{0})$) και δεν αλληλεπιδρούν με τα υπόλοιπα. Έχουμε πως ισχύει η αρχή του **Pascal** για αυτό το σύστημα αναφοράς επίσης γνωρίζουμε πως η πίεση $\mathcal{P}$ κατανέμεται ομοιόμορφα οπότε.

$$\sigma_{ij} ds_j = \mathcal{P} ds_i \Rightarrow \sigma_{ij} = \mathcal{P}\delta_{ij} \tag{3.25}$$

Επίσης στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς έχουμε ότι.

$$\mathfrak{T}^{j0} = 0 \tag{3.26}$$

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = (\mathcal{P}+e)\beta^\mu\beta^\nu + \mathcal{P}g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{P}+e)\beta^\mu\beta_\nu + \mathcal{P}\delta^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Για κινούμενα σωματίδια έχουμε $\beta^\mu = (1, \boldsymbol{\beta})$και οι εκφράσεις τις πυκνότητας ενέργειας, του διανύσματος ροής της ενέργειας και του τανυστή τάσης δίνονται:

$$W = \frac{e + p\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{(p+e)\boldsymbol{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \sigma_{ij} = -\frac{(p+e)v_i v_j}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \mathcal{P}\delta_{ij}$$

Όπου για μικρές ταχύτητες $v \ll c$ έχουμε:

$$W \approx e, \qquad \boldsymbol{S} \approx (p+e)\boldsymbol{v}, \qquad \sigma_{ij} \approx -\mathcal{P}\delta_{ij} \tag{3.29}$$

Εφόσον έχουμε χαμηλές ταχύτητες η ενέργεια e θα είναι συγκρίσιμη με την $\mu_0 c^2$. Επίσης η πίεση εξαρτάται από την ενέργεια των μορίων θα είναι μικρή συγκριτικά με την $\mu_0 c^2$. άρα καταλήγουμε στην.

$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \mu_0 c^2 \beta^\mu \beta^\nu$ έχουμε ότι.

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\mu} = 3\mathcal{P} - e = \mu_0 c^2 \beta^\mu \beta_\mu = -\mu_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow -3\mathcal{P} + e = \mu_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

όπου για σωματίδια τα οποία κινούνται με ταχύτητα $|\boldsymbol{v}| \approx c$ έχουμε.

$$-3\mathcal{P} + e \approx 0 \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{e}{3} \tag{3.30}$$

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = nmc\overline{\frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dx^\nu}{ds}} \tag{3.31}$$

$$e = nm\overline{\left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)} \quad \mathcal{P} = \frac{nm}{3}\overline{\left(\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)} \tag{3.32}$$

όπου η μπάρα υποδηλώνει μέση τιμή.

Κεφάλαιο 4

Γενική Σχετικότητα

Όπως η ειδική σχετικότητα γενικεύει τις εξισώσεις κίνησης της Newtonian μηχανικής έτσι και η γενική θεωρία της σχετικότητας γενικεύει τις εξισώσεις του Newton για την βαρύτητα. Σε αυτήν την θεωρία για την βαρύτητα ισχύουν οι ίδιες αρχές με την Newtonian όπως *Η αρχή της ισοδυναμίας* η οποία λέει πως οι ιδιότητες κίνησης των σωμάτων σε ένα μη αδρανειακό σύστημα απουσία βαρυτητικού πεδίου είναι ίδιες με ενός αδρανειακού συστήματος παρουσία κατάλληλου βαρυτικού πεδίου. Η αρχή απορρέει από μια χαρακτηριστική ιδιότητα του βαρυτικού πεδίου, ότι δηλαδή όλα τα σώματα κινούνται μέσα σ' αυτό κατά τον ίδιο τρόπο, ανεξαρτήτως της μάζας τους, εφόσον βέβαια ξεκίνησαν από τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πως η καμπύλωση του χώροχρονου δημιουργεί βαρυτικό πεδίο καθώς και η επιρροή της γεωμετρίας λόγω ύπαρξης μάζας. Επίσης θα εξαγάγουμε την εξίσωση του EinStein για την βαρύτητα που αποτελεί την γενίκευση της εξίσωσης Newton για το βαρυτικό πεδίο. Για αρχή θα ξεκινήσουμε από την εξίσωση του του Newton.

4.1 Newtonian βαρύτητα

4.1.1 Νόμος Παγκόσμιας έλξης

Ο νόμος του Newton για τη βαρύτητα διατυπώνεται ως εξής. Κάθε σώμα στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο σώμα με δύναμη ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης του κέντρου μάζας τους, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη η μαθηματική σχέση,

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{4.1}$$

Η βαρυτική δύναμη, έχει αποδειχθεί ότι, είναι μια συντηρητική δύναμη και όπως είδαμε στην Newtonian μηχανική κάθε τέτοια δύναμη μπορεί να γραφτεί ως βαθμίδα κάποιας βαθμωτής ποσότητας την οποία ονομάζουμε δυναμικό. Ισχύει η σχέση η οποία αποτελεί μια πιο γενική μορφή της εξίσωσης του Newton.

$$\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{4.2}$$

Από τον νόμο του Newton για την βαρύτητα και τις εξισώσεις κίνησης έχουμε ότι.

$$m_{\alpha\delta\rho}\boldsymbol{a} = -m_{\beta\alpha\rho}\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{4.3}$$

Όπου θεωρούμε πως η αδρανειακή $m_{\alpha\delta\rho}$ και η βαρυτική μάζα $m_{\beta\alpha\rho}$ είναι ίσες.

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{4.4}$$

Αυτή η σχέση αποτελεί την μαθηματική σχέση της αρχής της ισοδυναμίας.

4.1.2 Εξίσωση Newton Βαρυτικού πεδίου

Στην γενική περίπτωση που δεν πρόκειται για ένα σωματίδιο με μάζα m αλλά για μία κατανομή μάζας ρ_m (π.χ. ένας πλανήτης) έχουμε.

$$\Phi = -G \int \frac{\rho_m(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}' \tag{4.5}$$

Άρα το βαρυτικό πεδίο ορίζεται από ένα βαθμωτό δυναμικό. Δηλαδή ισχύει η διαφορική σχέση.

$$\nabla^2 \Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \rho_m(\boldsymbol{r}) \tag{4.6}$$

Η οποία είναι η εξίσωση Newton για το βαρυτικό πεδίο και είναι ανάλογη του νόμου του **Gauss** ($\nabla^2 \Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi \rho_q(\boldsymbol{r})$) για το ηλεκτρικό πεδίο (το οποίο επίσης είναι συντηρητικό). Στην γενική σχετικότητα, η ανάλογη εξίσωση μας περιγράφει πως η καμπύλωση της γεωμετρίας του χωρόχρονου δρα στην κατανομή μάζας και εκδηλώνεται ως βαρύτητα, και το πως η ενέργεια και η ορμή επηρεάζουν την καμπύλωση του χωρόχρονου. Η εξίσωση που περιγράφει την βαρύτητα στην γενική σχετικότητα αποτελεί την γενίκευση της εξίσωσης Newton, αυτή η εξίσωση είναι η εξίσωση του EinStein για το βαρυτικό πεδίο.

Αρχές τις γενικής σχετικότητας

Στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας ισχύουν τρεις *αρχές ισοδυναμίας* οι οποίες είναι οι εξής:
Ασθενής Αρχή Ισοδυναμίας.
Είναι η αρχή του Galilaio κατά την οποία η βαρυτική και η αδρανειακή μάζα είναι ίσες
Αρχή Ισοδυναμίας του EinStein.
Είναι η αρχή του EinStein κατά την οποία σε αρκούντως μικρές περιοχές του χωρόχρονου οι νόμοι της φυσικής περιορίζονται από αυτούς της ειδικής σχετικότητας. Απουσία βαρύτητας
Ισχυρή Αρχή Ισοδυναμίας
Είναι η αρχή στην οποία περιέχονται όλοι οι νόμοι της φυσικής, βαρυτικών υπολοίπων.

Από την *Αρχή Ισοδυναμίας του EinStein* προκύπτει μια συνταγή γενίκευσης των νόμων της φυσικής από επίπεδο χωρόχρονο σε καμπυλωμένο. Την ονομάζουμε *Αρχή της ελάχιστης ζεύξης (AEZ)* και λέει τα εξής:

i) Παίρνουμε έναν νόμο της φυσικής σε ένα αδρανειακό σύστημα, σε επίπεδο χωρόχρονο.

ii) Τον γράφουμε σε τανυστική (αναλλοίωτη από συντεταγμένες) μορφή.

iii) Ισχυριζόμαστε ότι ο προκύπτον νόμος ισχύει και σε καμπυλωμένο χωρόχρονο.

Μέσω αυτής της αρχής οι συνήθης παράγωγος αντικαθίσταται από την συναλλοίωτη. Αν θεωρήσουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με χαμηλές ταχύτητες $v \ll c$ ελεύθερο στον χωρόχρονο και χρησιμοποιήσουμε αυτήν την αρχή έχουμε.

$$\frac{d^2x^\mu}{d^2\tau} = 0 \qquad \text{Ελεύθερο σωματίδιο} \tag{4.7}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d^2\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = 0 \overset{\partial_\nu \to \nabla_\nu}{\underset{\text{AEZ}}{\Rightarrow}} \frac{dx^\nu}{d\tau}\nabla_\nu\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Στην γενική σχετικότητα τα ελεύθερα σωματίδια κινούνται σε γεωδαισιακές αυτή είναι η γενίκευση της εξισώσεως του Newton για τα ελεύθερα σωματίδια.

Παράδειγμα 4.1.1. Έλεγχος της *Αρχής της ελάχιστης ζεύξης*
Αφού γενικεύσαμε την εξίσωση του ελεύθερου σώματος σε καμπύλο χωρόχρονο τώρα θα δούμε πως η εξίσωση αυτή όντως ικανοποιείται στο όριο των ασθενών πεδίων (Newtonian Βαρύτητα).

$$\frac{dx^i}{d\tau} = v^i\gamma \ll \frac{dt}{d\tau} = c\gamma \Rightarrow v^i \ll c$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{01}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{02}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{03}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} = 0 \overset{v^i \ll c}{\approx} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} = 0$$

Για στατικό πεδίο έχουμε ότι το σύμβολο **Christoffel** είναι.

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) = -\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\partial_\rho g_{00}$$

Η θεώρηση του ασθενούς πεδίου μας επιτρέπει το να θεωρήσουμε την μετρική να είναι σχεδόν επίπεδη δηλαδή να είναι **Minkowski** συν μια μικρή διαταραχή.

$$\left.\begin{array}{l} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1 \\ g^{\mu\tau} = \eta^{\mu\tau} + \phi^{\mu\tau}, |\phi^{\mu\tau}| \ll 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g_{\mu\nu}g^{\mu\tau} = \delta^\nu_\tau \Rightarrow \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)\left(\eta^{\mu\tau} + \phi^{\mu\tau}\right) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\tau}}_{\delta^\tau_\nu} + \eta_{\mu\nu}\phi^{\mu\tau} + h_{\mu\nu}\eta^{\mu\tau} + \underbrace{h_{\mu\nu}\phi^{\mu\tau}}_{\approx 0} = \delta^\nu_\tau \Rightarrow \underbrace{\eta^{\nu\rho}\eta_{\mu\nu}}_{\delta^\rho_\mu}\phi^{\mu\tau} + \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\tau}h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \phi^{\rho\tau} + h^{\rho\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\phi^{\rho\tau} = -h^{\rho\tau}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Εφόσον κρατάμε μόνο γραμμικούς όρους της μετρικής το σύμβολο **Christoffell** γίνεται:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\partial_\rho h_{00}$$

Οπότε η εξίσωση της γεωδαισιακής γίνεται.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\partial_\rho h_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \overset{\text{Στατ. πεδίο}}{\Rightarrow} \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$$

Όμως εφόσον το πεδίο είναι στατικό έχουμε.

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{0\rho}\partial_\rho h_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx^0}{d\tau} = k \Rightarrow x^0 = k\tau + d \\ \frac{d^2x^i}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dx^0}\right)^2 = \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00}$$

Συγκρίνοντας την με την σχέση 4.4 βρίσκουμε ότι.

$$h_{00} \equiv -\frac{2\Phi}{c^2}$$

οπότε η μετρική γίνεται.

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2} = -\left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)$$

Όπου καταλήξαμε στο δυναμικό του Newton για το βαρυτικό πεδίο. Άρα συμπεραίνουμε ότι η *Αρχή της ελάχιστης ζεύξης* στην περίπτωση μας είναι σωστή διότι για ασθενή πεδία καταλήγουμε στην γνωστή σχέση του Newton για την βαρύτητα.

4.2 Εξίσωση του Einstein

4.2.1 Εξαγωγή της εξίσωσης Einstein

Μέσω της *Αρχής της ελάχιστης ζεύξης* και την εξίσωση **Newton** θα εξαγάγουμε την εξίσωση βαρυτικού πεδίου του **Einstein**. Η αρχή αυτή μας υποδηλώνει πως αντικαθιστούμε, στις υπάρχουσες εξισώσεις, όλες τις ποσότητες με αντίστοιχες τανυστικές. Η υπάρχουσα εξίσωση είναι η εξίσωση **Poisson** η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και περιέχει την επιρροή της κατανομής της μάζας στο βαρυτικό δυναμικό. Οπότε η αντικατάσταση που έχουμε να κάνουμε είναι το διαφορικό με κάποιον τανυστή ο οποίος να περιέχει διαφορικά δευτέρας τάξεως και έναν τανυστή ο οποίος να περιγράφει την κατανομή της μάζας. Ο τανυστής ενέργειας ορμής είναι μια πολύ καλή επιλογή, διότι όπως έχουμε δει στην ειδική σχετικότητα είναι προτιμότερο για υψηλές ταχύτητες να χρησιμοποιούμε την ενέργεια παρά την μάζα των σωματιδίων (διότι $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ και εν γένει $mc \ll p$). Η επιλογή του αντίστοιχου τανυστή, ο οποίος αντικαθιστά τον τελεστή του **Laplace**, θα γίνει σεβόμενη τον τανυστή ενέργειας ορμής.

$$\nabla^2\Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\rho_m(\boldsymbol{r}) \underset{\nabla^2\to\mathfrak{D}_{\mu\nu}}{\overset{\rho\to\mathfrak{T}^{\mu\nu}}{\longrightarrow}} \mathfrak{D}_{\mu\nu} = k\mathfrak{T}^{\mu\nu}$$

Έστω ότι επιλέγουμε τον τανυστή **Ricci** οποίος προέρχεται απ'τον τανυστή **Riemann** ο οποίος έχει διαφορικά δεύτερης τάξης.

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = k\mathfrak{T}^{\mu\nu} \underset{\nabla_\mu\mathfrak{T}^{\mu\nu}=0}{\overset{\text{Διατ. μάζας}}{\Longrightarrow}} \nabla_\mu\mathbf{R}^{\mu\nu} = k\nabla_\mu\mathfrak{T}^{\mu\nu} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\nabla_\mu\mathbf{R}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^\nu\mathbf{R}\\ \nabla_\mu\mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu} = k\mathfrak{T}^{\mu\nu}$$

Ο τανυστής **Ricci** είναι εν γένει διάφορος του μηδενός οπότε προκύπτει.

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu} = k\mathfrak{T}^{\mu\nu} \tag{4.8}$$

Η οποία είναι η εξίσωση πεδίων του **Einstein** και $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ ο τανυστής του **Einstein**.

$$g^{\mu\nu}\mathfrak{G}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{R}4 = -\mathbf{R} = kg^{\mu\nu}\mathfrak{T}_{\mu\nu} \Rightarrow \mathbf{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}kg^{\tau\rho}\mathfrak{T}_{\tau\rho}g_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu}$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = k\left(\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}g_{\mu\nu}\right), \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{\mu}{}_{\mu} \tag{4.9}$$

Έλεγχος της εξίσωσης αυτής στο όριο ασθενών πεδίων. Υποθέτουμε πως ο τανυστής ενέργειας-ορμής αναφέρεται σε ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό. Τα σωματίδια του ρευστού βρίσκονται στο σύστημα ηρεμίας τους οπότε.

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = (\rho + \mathcal{P})u^\mu u^\nu + \mathcal{P}g^{\mu\nu} \approx \rho u^\mu u^\nu$$

$$\mathfrak{T}^{00} = \rho c^2 \quad \& \quad \mathfrak{T} = -\rho c^2$$

$$\mathbf{R}_{00} = k\left(\mathfrak{T}_{00} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}g_{00}\right) \approx k\left(\rho c^2 - \frac{1}{2}(-\rho c^2)(\eta_{00} + h_{00})\right) \approx \frac{1}{2}k\rho c^2 \tag{4.10}$$

$$\mathbf{R}_{00} = \mathcal{R}^\mu{}_{0\mu 00} = \partial_\mu\Gamma^\mu_{00} - \partial_0\Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\rho_{\tau\rho}\Gamma^\mu_{00} - \Gamma^\rho_{\tau 0}\Gamma^\tau_{\rho 0} \approx \partial_j\Gamma^j_{00} = \frac{1}{2}\partial_j\left(g^{i\mu}(\partial_0 g_{0\mu} + \partial_0 g_{\mu 0} - \partial_\mu g_{00})\right) \approx$$

$$\mathbf{R}_{00} \approx -\frac{1}{2}\partial_j\delta^{ij}\partial_i g_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{2}k\rho c^2 \Rightarrow \nabla^2 h_{00} = -k\rho c^2 \Rightarrow \nabla^2 2\Phi = -k\rho c^2 \Rightarrow k = \frac{8\pi G}{c^2}$$

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\mathfrak{T}_{\mu\nu} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\left(\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}g_{\mu\nu}\right) \tag{4.12}$$

4.2.2 Δράση Hilbert

Μια διαφορετική εκδοχή για το πως εξάγεται η εξίσωση του **Einstein** είναι μέσω της αρχής ελαχίστου δράσης. Η δράση αυτή πρωτομελετήθηκε από τον **Hilbert** οπότε και φέρει το όνομα του. Η υπόθεση του **Hilbert** ήταν να εισάγει ως **Lagrangian** την μόνη βαθμωτή ποσότητα η οποία προκύπτει από τον τανυστή **Riemann** και αυτή είναι το βαθμωτό του **Ricci**.
Έχουμε ότι σε μια πολλαπλότητα (M, g) το ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης f ορίζεται.

$$\int_M f du_g \equiv \int_U f\sqrt{-g}d^4x$$

όπου du_g είναι το μέτρο που ορίζεται από τα σύνολα Borel (τα οποία είναι αυτά που προκύπτουν από την τοπολογία του μετρικού χώρου $\mathcal{T}$).
Οπότε για την δράση **Hilbert** έχουμε.

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \int_M \mathbf{R} du_g \equiv \int_U \mathbf{R}\sqrt{-g}d^4x \int_U \mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \tag{4.13}$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \int_U \delta\mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_U \mathbf{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_U \mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}d^4x$$

Υποθέτουμε μεταβολές στα σύμβολα **Christoffel**.

$$\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} \overset{\delta}{\Rightarrow}$$

$$\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}$$

$$\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\tau\mu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho} - (\partial_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho})$$

$$\nabla_\rho\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} = \partial_\rho\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\tau}{}_{\rho\xi}\delta\Gamma^{\xi}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\xi}{}_{\rho\mu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\nu\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\xi} \tag{4.14}$$

$$\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} = \nabla_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$$

$$\int_U \delta\mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int_U (\nabla_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int_U (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x$$

$$\int_U (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \nabla^{\mu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x = \int_U (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}\nabla_\tau\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x =$$

$$\int_U \nabla_\tau(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x = \int_{\partial U} n_\tau(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^3x = 0$$

Από το θεώρημα του **Gauss** θεωρήσαμε ότι τα πεδία εξαφανίζονται στα όρια.

$$\left.\begin{array}{c} \ln(\det A) = Tr(\ln A) \overset{\delta}{\Rightarrow} \frac{1}{\det A}\delta(\det A) = Tr(A^{-1}\delta A) \\ g = \det(g_{\mu\nu}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{1}{g}\delta g = Tr(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\ g^{\mu\nu}g_{\mu\tau} = \delta^{\nu}_{\tau} \Rightarrow \delta g_{\rho\nu} = -g_{\mu\nu}g_{\rho\tau}\delta g^{\mu\tau} \end{array}\right\}$$

$$\delta g = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.15}$$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta(-g) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.16}$$

$$\int_U \mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}d^4x = \int_U \mathbf{R}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)d^4x = -\frac{1}{2}\int_U \mathbf{R}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \int_U \left(\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{4.17}$$

Ορίσαμε την συναρτησιακή παράγωγο οπότε κάνοντας χρήση αυτής έχουμε.

$$\frac{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left(\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu} = 0 \tag{4.18}$$

Από όπου προέκυψε η εξίσωση πεδίου του **Einstein** για το κενό. Αυτή η μέθοδος έχει αρκετά πλεονεκτήματα διότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις ιδιότητες αυτού του φορμαλισμού. Μια σημαντική ιδιότητα την οποία θα χρησιμοποιήσουμε είναι το θεώρημα της **Noether** από το οποίο μπορούμε να εξαγάγουμε έναν γενικό τανυστή ενέργειας-ορμής. Οπότε τώρα θα εξαγάγουμε (εν μέρει) την πλήρη εξίσωση του **Einstein** εισάγοντας τον τανυστή ενέργειας ορμής.

Τανυστής ενέργειας-ορμής

Για να εξαγάγουμε την πλήρη εξίσωση 𝔈𝔦𝔫𝔖𝔱𝔢𝔦𝔫 για το βαρυτικό πεδίο θα πρέπει να λάβουμε υπ'όψιν και τα (υλικά) πεδία τα οποία βρίσκονται στο υπόβαθρο. Για αυτόν τον λόγο θα πάρουμε την δράση των υλικών πεδίων του χωρόχρονου και μέσω της αρχής ελαχίστου δράσης θα εξαγάγουμε τον τανυστή ενέργειας ορμής για αυτά τα πεδία. Για την εξαγωγή αυτών των πεδίων θεωρούμε πώς η ύλη είναι κλασική και όχι κβαντική. Διότι αν υποθέταμε κβαντική θα έπρεπε να συμπεριελάβουμε και τις αρχές τις κβαντομηχανικής π.χ. την απαγορευτική αρχή του **Pauli**.

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}d^4x \tag{4.19}$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{c}\int \left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}\delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)\right\}d^4x = 0$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{c}\int \left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}\delta g_{\mu\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}\right)\delta g_{\mu\nu}\right\}d^4x = 0$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int 2\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}\right)\right\}\delta g_{\mu\nu}d^4x + \underbrace{\int \frac{\partial\mathcal{L}_{field}\sqrt{-g}}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}\delta g_{\mu\nu}d^3x = 0}_{\theta\epsilon\omega\rho.Gauss}$$

Ονομάζουμε την ποσότητα.

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{4.20}$$

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\tau}(\partial_\nu g_{\mu\tau} + \partial_\mu g_{\nu\tau} - \partial_\tau g_{\nu\mu}) \overset{\mu=\rho}{\Rightarrow} \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\tau}(\partial_\nu g_{\mu\tau} + \overbrace{\underbrace{\partial_\mu g_{\nu\tau} - \partial_\tau g_{\nu\mu}}_{g^{\mu\tau}\partial_\tau g_{\mu\nu} = g^{\tau\mu}\partial_\mu g_{\tau\nu}}}^{0}) = \frac{1}{2}g^{\mu\tau}\partial_\nu g_{\mu\tau} \tag{4.21}$$

$$\left.\begin{array}{r}\partial_\tau g = -gg^{\mu\nu}\partial_\tau g_{\mu\nu}\\ \partial_\tau\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_\tau g\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\Gamma^\mu{}_{\mu\tau} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\tau g_{\mu\nu}\\ \partial_\tau\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}}(-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\tau g_{\mu\nu})\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\Gamma^\mu{}_{\mu\tau} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\tau g_{\mu\nu}\\ \partial_\tau\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\tau g_{\mu\nu}\end{array}\right\}$$

$$\partial_\tau\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma^\mu{}_{\mu\tau} \tag{4.22}$$

Κάνοντας έναν ισομετρικό μετασχηματισμό προκύπτει.

$$\delta g^{\mu\nu}(x^\tau) = g^{\mu\nu}(x^\tau) - g'^{\mu\nu}(x'^\tau) = \mathfrak{L}_\xi g^{\mu\nu}(x^\tau) = \xi^\tau\underbrace{\nabla_\tau g^{\mu\nu}}_{=0} + \nabla^\nu\xi_\rho g^{\mu\rho} + \nabla^\mu\xi_\rho g^{\nu\rho} = \nabla^\nu\xi^\mu + \nabla^\mu\xi^\nu \tag{4.23}$$

$$\left.\begin{array}{r}\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int\mathfrak{T}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x\\ g^{\mu\tau}g_{\mu\nu} = \delta^\tau_\nu \Rightarrow \delta g^{\mu\tau}g_{\mu\nu} = -\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\tau}\\ \delta g_{\mu\nu} = \nabla_\nu\xi_\mu + \nabla_\mu\xi_\nu\end{array}\right\} \Rightarrow \delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int\mathfrak{T}^{\mu\nu}(\nabla_\nu\xi_\mu + \nabla_\mu\xi_\nu)\sqrt{-g}d^4x \Rightarrow$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int(\mathfrak{T}^{\mu\nu}\nabla_\nu\xi_\mu + \mathfrak{T}^{\mu\nu}\nabla_\mu\xi_\nu)\sqrt{-g}d^4x = -\frac{1}{2c}\int(\mathfrak{T}^{\mu\nu}\nabla_\nu\xi_\mu + \mathfrak{T}^{\nu\mu}\nabla_\nu\xi_\mu)\sqrt{-g}d^4x \;\; \mathfrak{T}^{\mu\nu} \equiv \mathfrak{T}^{\nu\mu}$$

$$\frac{1}{c}\int\mathfrak{T}^{\mu\nu}\nabla_\nu\xi_\mu\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{c}\int\nabla_\nu(\mathfrak{T}^{\mu\nu}\xi_\mu)\sqrt{-g}d^4x - \frac{1}{c}\int\xi_\mu\nabla_\nu\mathfrak{T}^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$

$$\left.\begin{array}{r}\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\mu}A^\rho\\ \Gamma^\mu_{\rho\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\sqrt{-g}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\sqrt{-g}A^\rho\\ \Gamma^\mu_{\rho\mu} = \partial_\rho\ln\sqrt{-g}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\partial_\mu A^\mu + \partial_\rho\ln\sqrt{-g}A^\rho\\ \Gamma^\mu_{\rho\mu} = \partial_\rho\ln\sqrt{-g}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left(A^\rho\sqrt{-g}\right) \tag{4.24}$$

$$\nabla_\mu A^{\nu\mu} = \partial_\mu A^{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\tau}A^{\mu\tau} + \Gamma^\mu_{\tau\mu}A^{\nu\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\tau\left(A^{\nu\tau}\sqrt{-g}\right) + \Gamma^\nu_{\mu\tau}A^{\mu\tau} \tag{4.25}$$

$$\left.\begin{array}{r}\nabla_\mu A^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\tau\left(A^{\nu\tau}\sqrt{-g}\right) + \Gamma^\nu_{\mu\tau}A^{\mu\tau} \\ A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \Rightarrow \Gamma^\rho_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}A^{\nu\mu} = -\Gamma^\rho_{\nu\mu}A^{\mu\nu}\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla_\mu A^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\tau\left(A^{\nu\tau}\sqrt{-g}\right)$$

$$\delta\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \int \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\mathfrak{T}^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})\sqrt{-g}d^4x - \frac{1}{c}\int \nabla_\nu(\mathfrak{T}^\mu_\tau g^{\nu\tau})\xi_\mu\sqrt{-g}d^4x =$$

$$\int \underbrace{\partial_\nu(\mathfrak{T}^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})}_{\theta\epsilon\omega\rho.Gauss} d^4x - \frac{1}{c}\int \nabla_\nu(\mathfrak{T}^\mu_\tau g^{\nu\tau})\xi_\mu\sqrt{-g}d^4x = \int (\mathfrak{T}^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})d^3x - \frac{1}{c}\int \nabla_\nu(\mathfrak{T}^\mu_\tau g^{\nu\tau})\xi_\mu\sqrt{-g}d^4x =$$

$$\frac{1}{c}\int \nabla_\nu\mathfrak{T}^\nu_\tau g^{\mu\tau}\xi_\mu\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{c}\int \nabla_\nu\mathfrak{T}^\nu_\tau\xi^\tau\sqrt{-g}d^4x = 0$$

$$\xi^\tau \quad \text{Αυθαίρετο οπότε} \Rightarrow \nabla_\nu\mathfrak{T}^\nu_\tau = 0 \Rightarrow \nabla_\nu\mathfrak{T}^{\nu\tau} = 0 \tag{4.26}$$

Τανυστής ενέργειας-ορμής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Για τον υπολογισμό του τανυστή ενέργειας ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου πρέπει να βρούμε κάποια αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα την οποία θα χρησιμοποιήσουμε ως την Lagrangian. Οι αναλλοίωτες βαθμωτές ποσότητες οι οποίες προκύπτουν από τις εντάσεις των πεδίων είναι οι εξής.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \qquad * F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -E_z & E_y \\ -H_y & E_z & 0 & -E_x \\ -H_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{00}F_{00} + F^{10}F_{10} + F^{20}F_{20} + F^{30}F_{30} + F^{01}F_{01} + F^{11}F_{11} + F^{21}F_{21} + F^{31}F_{31} + F^{02}F_{02}$$
$$+ F^{12}F_{12} + F^{22}F_{22} + F^{32}F_{32} + F^{03}F_{03} + F^{13}F_{13} + F^{23}F_{23} + F^{33}F_{33} = 0 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 - E_x^2 + 0$$
$$+ H_z^2 + H_y^2 - E_y^2 + H_z^2 + 0 + H_x^2 - E_z^2 + H_y^2 + H_x^2 + 0 = 2\left(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2\right)$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2\right) \tag{4.28}$$

$$F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu} = F^{00} * F_{00} + F^{10} * F_{10} + F^{20} * F_{20} + F^{30} * F_{30} + F^{01} * F_{01} + F^{11} * F_{11} + F^{21} * F_{21}$$
$$+ F^{31} * F_{31} + F^{02} * F_{02} + F^{12} * F_{12} + F^{22} * F_{22} + F^{32} * F_{32} + F^{03} * F_{03} + F^{13} * F_{13} + F^{23} * F_{23}$$
$$+ F^{33} * F_{33} = 0 - E_xH_x - E_yH_y - E_zH_z - E_xH_x + 0 - H_zE_z - H_yE_y - E_yH_y - H_zE_z$$
$$+ 0 - H_xE_x - E_zH_z - H_yE_y - H_xE_x + 0$$

$$F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu} = -4\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.29}$$

Οπότε επιλέγουμε την πρώτη ποσότητα για Lagrangian και την εισάγουμε στο ολοκλήρωμα της δράσης.

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{em}} = \int \mathcal{L}_{\mathfrak{em}}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)d^4x \tag{4.30}$$

Όπου επιλέγουμε

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{em}}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.31}$$

Οπότε από το θεώρημα της **Noether** προκύπτει ο τανυστής ενέργειας-ορμής για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\mathfrak{T}^\mu_\nu = \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu}\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathfrak{em}}}{\partial\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu}\right)} - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}_{\mathfrak{em}} \tag{4.32}$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων της $\mathfrak{Lagrangian}$ παίρνουμε.

$$\delta\mathcal{L}_{\mathfrak{em}} = \frac{-1}{16\pi}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \frac{-1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} = \frac{-1}{8\pi}F_{\mu\nu}\left(\delta\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \delta\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\right) = \frac{-1}{8\pi}\left(F_{\mu\nu}\delta\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - F_{\mu\nu}\delta\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\right) =$$
$$\frac{-1}{4\pi}F_{\mu\nu}\delta\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathfrak{em}}}{\partial\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\right)} = -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}$$
$$\mathfrak{T}^\mu_\nu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^\tau}{\partial x_\mu}F_{\tau\nu} + \frac{1}{16\pi}\delta^\mu_\nu F_{\rho\tau}F^{\rho\tau} \Longrightarrow \mathfrak{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^\tau}{\partial x_\mu}F^\nu_\tau + \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\rho\tau}F^{\rho\tau}$$

Όμως ο τανυστής αυτός δεν είναι συμμετρικός οπότε για να τον συμμετρικοποιήσουμε προσθέτουμε την ποσότητα. $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\tau}F^\nu_\tau$. Και για το κενό (απουσία φορτίων και ρευμάτων) έχουμε $\frac{\partial F^{\nu\tau}}{\partial x_\tau} = J^\nu = 0$.

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A^\tau}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\tau}\right)F^\nu_\tau + \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\rho\tau}F^{\rho\tau}$$
$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\tau}F^\nu_\tau + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) \tag{4.33}$$
$$\mathfrak{T}^\mu_\nu = -\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\tau}F_{\nu\tau} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right)$$

Όπου πλέον ο τανυστής εκτός από συμμετρικός έχει και την ιδιότητα.

$$\mathfrak{T}^\mu_\mu = -\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\tau}F_{\mu\tau} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\mu F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\tau}F_{\mu\tau} + \frac{1}{4}4F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) = 0 \tag{4.34}$$
$$\mathfrak{T}^0_0 = -\frac{1}{4\pi}(-F^{00}F_{00} - F^{01}F_{01} - F^{02}F_{02} - F^{03}F_{03} + \frac{1}{4}\delta^0_0 2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2)) = -\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)$$
$$\mathfrak{T}^i_i = -\frac{1}{4\pi}(-F^{i0}F_{i0} - F^{i1}F_{i1} - F^{i2}F_{i2} - F^{i3}F_{i3} + \frac{1}{4}\delta^i_i 2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2)) =$$
$$-\frac{1}{4\pi}(-F^{10}F_{10} - F^{20}F_{20} - F^{30}F_{30} - F^{11}F_{11} - F^{21}F_{21} - F^{31}F_{31} - F^{12}F_{12} - F^{22}F_{22} - F^{32}F_{32}$$
$$-F^{13}F_{13} - F^{23}F_{23} - F^{33}F_{33} + \frac{1}{2}3(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2)) = -\frac{1}{4\pi}(0 + E^2_x + E^2_y + E^2_z - 0 - H^2_z - H^2_y - 0 - H^2_x -$$
$$H^2_y - H^2_x - 0 - H^2_z + \frac{3}{2}(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2)) = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2)$$
$$\mathfrak{T}^i_j = -\frac{1}{4\pi}(-F^{i0}F_{i0} - F^{j1}F_{i1} - F^{i2}F_{j2} - F^{i3}F_{j3} + \frac{1}{4}\delta^i_j 2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2)) = \tag{4.35}$$
$$\mathfrak{T}^i_j = \frac{1}{4\pi}(F^{i0}F_{j0} + F^{i1}F_{j1} + F^{i2}F_{j2} + F^{i3}F_{j3})$$
$$\mathfrak{T}^0_1 = -\frac{1}{4\pi}(-F^{00}F_{10} - F^{01}F_{11} - F^{02}F_{12} - F^{03}F_{13} + \frac{1}{4}\delta^0_1 2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2)) = -\frac{1}{4\pi}(-E_yH_z + B_xE_z) = \frac{S_x}{c}$$
$$\mathfrak{T}^0_j = \frac{1}{4\pi}(F^{i1}F_{01} + F^{02}F_{j2} + F^{03}F_{j3}) = \frac{1}{4\pi}(E\wedge H)_j \equiv \frac{S_j}{c}$$
$$\mathfrak{T}^1_2 = F^{10}F_{20} + F^{11}F_{21} + F^{12}F_{22} + F^{13}F_{23} = -E^xE_y + 0 + 0 - H^xH_y = -\left(E^xE_y + H^xH_y\right)$$
$$\mathfrak{T}^2_3 = F^{20}F_{30} + F^{21}F_{31} + F^{22}F_{32} + F^{23}F_{33} = -E^yE_z - H^yH_z + 0 + 0 = -\left(E^yE_z + H^yH_z\right)$$
$$\mathfrak{T}^i_j = -\frac{1}{4\pi}(-(E_iE_j + H_iH_j) + \frac{1}{2}\delta^i_j(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2)) = \frac{1}{4\pi}(E^iE_j + H^iH_j - \frac{1}{2}\delta^i_j(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2))$$
$$\mathfrak{T}_{ij} = \frac{1}{4\pi}(E_iE_j + H_iH_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2)) \equiv -\sigma_{ij}$$
$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{00} & \mathfrak{T}^{01} & \mathfrak{T}^{02} & \mathfrak{T}^{03} \\ \mathfrak{T}^{10} & \mathfrak{T}^{11} & \mathfrak{T}^{12} & \mathfrak{T}^{13} \\ \mathfrak{T}^{20} & \mathfrak{T}^{21} & \mathfrak{T}^{22} & \mathfrak{T}^{23} \\ \mathfrak{T}^{30} & \mathfrak{T}^{31} & \mathfrak{T}^{32} & \mathfrak{T}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2) & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ -\frac{S_x}{c} & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ -\frac{S_x}{c} & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ -\frac{S_z}{c} & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

4.3 Λύση εξίσωσης Einstein

Η λύση της εξίσωσης του Einstein, που περιγράφει το βαρυτικό πεδίο έξω από σφαιρική κατανομή μάζας, είναι η λύση που προτάθηκε από τον **Schwarzschild**. Η λύση που πρότεινε ο **Schwarzschild** περιγράφει στατικά, σφαιρικά συμμετρικά πεδία. Η λύση αυτή εξήγησε κάποια παρατηρούμενα φαινόμενα όπως η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή και η καμπύλωση των ακτίνων φωτός από τον ήλιο.

4.3.1 Λύση Schwarzschild

Εφόσον τα άστρα έχουν (σχεδόν) σφαιρικό σχήμα είναι λογική η υπόθεση της σφαιρικής συμμετρίας στις λύσεις της εξίσωσης του Einstein Ξεκινάμε παίρνοντας την μετρική για σφαιρικά συμμετρικό χώρο η οποία δίνεται από την σχέση.

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + 2C(r)drdt + D(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.37)$$

ορίζουμε νέες συντεταγμένες για τον χρόνο και θέτουμε: $D(r)r^2 \equiv R(r)$ (4.38)

$$T(t,r) = t + \psi(r) \Rightarrow dT(t,r) = dt + \psi'(r)dr \Rightarrow dT^2(t,r) = dt^2 + 2\psi'(r)drdt + \psi'^2(r)dr^2 \quad (4.39)$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στην 4.37

$$ds^2 = -(1+A)dt^2 + (B+\psi'^2)dr^2 + (2\psi' A + 2C)drdt + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Όπου λόγω συμμετρίας στον χρόνο θέτουμε τον συντελεστή των μη διαγώνιων όρων ίσο με μηδέν.

$$\psi' = -\frac{C}{A} \Rightarrow C \equiv 0$$

Επιστρέφουμε στην μετρική και την γράφουμε στην μορφή.

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.40)$$

Όπου θέσαμε $D \equiv 1$ διότι θέλουμε ισοτροπικό χώρο.

Αφού επιλέξαμε μετρική τώρα θα την εισάγουμε στην εξίσωση του Einstein. Όμως για να την εισάγουμε πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τα σύμβολα **Christoffel** για αυτήν την μετρική. Ο υπολογισμός των συμβόλων θα γίνει μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange. Η Lagrangian μας είναι.

$$\mathscr{L} = -A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin\theta^2\dot{\phi}^2)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

$$2\frac{d(B\dot{r})}{d\tau} - A'\dot{t}\dot{t} - B'\dot{r}\dot{r} - 2r\dot{\theta}\dot{\theta} - 2r\sin^2\theta\dot{\phi}\dot{\phi} = 0$$

$$2B'\dot{r}\dot{r} + 2B\ddot{r} + A'\dot{t}\dot{t} - B'\dot{r}\dot{r} - 2r\dot{\theta}\dot{\theta} - 2r\sin^2\theta\dot{\phi}\dot{\phi} = \ddot{r} + \frac{B'}{2B}\dot{r}\dot{r} + \frac{A'}{2B}\dot{t}\dot{t} - \frac{r}{B}\dot{\theta}\dot{\theta} - \frac{r\sin^2\theta}{B}\dot{\phi}\dot{\phi} = 0$$

$$-2\frac{d(A\dot{t})}{d\tau} - 0 = -2(A\dot{t} + A'\dot{r}\ddot{t}) = 0 \Rightarrow \ddot{t} + \frac{A'}{A}\dot{r}\dot{t} = 0$$

$$2\frac{d(r^2\dot{\theta})}{d\tau} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\phi} = 2(\ddot{\theta}r^2 + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\phi} = 0$$

$$2\frac{d(r^2\sin^2\theta\dot{\phi})}{d\tau} - 0 = 4\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}r^2\dot{\phi} + 2r^2\sin^2\theta\ddot{\phi} + 4r\sin^2\theta\dot{\phi}\dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} = 0$$

Από όπου προκύπτουν τα σύμβολα **Christoffel**. $\Gamma^r{}_{tt} = \frac{A'}{2B}, \Gamma^r{}_{rr} = \frac{B'}{2B},$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{B} \;\; \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{B}, \Gamma^t{}_{tr} = \frac{A'}{2A}, \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = \cos\theta\sin\theta, \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}, \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \cot\theta$$

Εφόσον υπολογίσαμε τα σύμβολα **Christoffel** θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του Einstein για το κενό διότι θέλουμε να βρούμε το πεδίο έξω από μια σφαιρική κατανομή μάζας (π.χ. ένα άστρο).

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\mathfrak{T}_{\mu\nu} \tag{4.41}$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{R}_{tt} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{tt} - \underbrace{\partial_t \Gamma^{\alpha}{}_{t\alpha}}_{=0} + \Gamma^{\rho}{}_{tt}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{t\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho t} = \partial_r\left(\frac{A'}{2B}\right) + \Gamma^{\rho}{}_{r\rho}\Gamma^{r}{}_{tt} - \Gamma^{t}{}_{tr}\Gamma^{r}{}_{tt} - \Gamma^{t}{}_{tr}\Gamma^{r}{}_{tt} =$$

$$\frac{A''B - A'B'}{2B^2} + \left(\Gamma^{t}{}_{rt} + \Gamma^{r}{}_{rr} + \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} + \Gamma^{\phi}{}_{r\phi}\right)\frac{A'}{2B} - 2\left(\frac{A'}{2B}\frac{A'}{2A}\right) = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{2B^2} + \frac{A'}{2B}\left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)$$

$$\mathbf{R}_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) + \frac{A'}{rB^2}$$

$$\mathbf{R}_{rt} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{rt} - \underbrace{\partial_t \Gamma^{\alpha}{}_{r\alpha}}_{=0} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{tr} - \Gamma^{\rho}{}_{r\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{t\rho} = \underbrace{\partial_t \Gamma^{t}{}_{rt}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{\rho}{}_{t\rho}\Gamma^{t}{}_{tr}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{r}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{tr}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{t}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{tt}}_{=0} = 0$$

$$\mathbf{R}_{\theta t} = \underbrace{\partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{t\theta}}_{=0} - \underbrace{\partial_t \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\alpha}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{t\theta}}_{=0} - \Gamma^{\rho}{}_{\theta\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{t\rho} = -\underbrace{\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{t\theta}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{t\phi}}_{=0} = 0$$

$$\mathbf{R}_{\phi t} = \underbrace{\partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{t\phi}}_{=0} - \underbrace{\partial_t \Gamma^{\alpha}{}_{\phi\alpha}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{t\phi}}_{=0} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\phi}\Gamma^{\alpha}{}_{t\rho} = -\underbrace{\Gamma^{\rho}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{t\rho}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\rho}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{t\rho}}_{=0} = 0$$

$$\mathbf{R}_{rr} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{rr} - \partial_r \Gamma^{\alpha}{}_{r\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{rr}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{r\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho r} = \partial_r\left(\frac{B'}{2B}\right) + \partial_r\left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right) + \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right)\frac{B'}{2B}$$

$$-\Gamma^{t}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{rt} - \Gamma^{r}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{rr} - \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} - \Gamma^{\phi}{}_{r\phi}\Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'B'}{2B^2} - \left(\frac{A''}{2A} - \frac{A'A'}{2A^2} + \frac{B''}{2B} - \frac{B'B'}{2B^2} - \frac{2}{r^2}\right) +$$

$$\left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right)\frac{B'}{2B} - \frac{A'A'}{4A^2} - \frac{B'B'}{4B^2} - 2\frac{1}{r^2}$$

$$\mathbf{R}_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) + \frac{B'}{rB}$$

$$\mathbf{R}_{r\theta} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{r\theta} - \underbrace{\partial_\theta \Gamma^{\alpha}{}_{r\alpha}}_{=0} + \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{r\theta} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\theta}\Gamma^{\alpha}{}_{r\rho} = \underbrace{\partial_\theta \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}}_{=0} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\theta}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} - \underbrace{\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{r\theta}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{rr}}_{=0} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}$$

$$\mathbf{R}_{r\theta} = \cot\theta\frac{1}{r} - \cot\theta\frac{1}{r} = 0$$

$$\mathbf{R}_{r\phi} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{r\phi} - \underbrace{\partial_\phi \Gamma^{\alpha}{}_{r\alpha}}_{=0} + \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{r\phi} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\phi}\Gamma^{\alpha}{}_{r\rho} = \underbrace{\partial_\phi \Gamma^{\phi}{}_{r\phi}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{\rho}{}_{\rho\phi}\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}\Gamma^{r}{}_{r\phi}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{r}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{rr}}_{=0} = 0$$

$$\mathbf{R}_{\theta\phi} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\phi} - \underbrace{\partial_\phi \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\alpha}}_{=0} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\theta\phi} - \Gamma^{\alpha}{}_{\phi\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\theta} = \underbrace{\partial_\phi \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}}_{=0} - \Gamma^{\rho}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\rho} = \underbrace{\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}_{=0} = 0$$

$$\mathbf{R}_{\theta\theta} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\theta\theta} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\phi}\Gamma^{\alpha}{}_{\theta\rho} = \partial_r \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} - \partial_\theta \cot\theta + \Gamma^{\rho}{}_{r\rho}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} - \Gamma^{\alpha}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\alpha} =$$

$$-\frac{1}{B} + \frac{B'r}{B^2} - \frac{-1}{\sin^2\theta} + \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right)\frac{-r}{B} + \frac{2}{B} - \cot^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right)$$

$$\mathbf{R}_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right)$$

$$\mathbf{R}_{\phi\phi} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\phi\phi} - \underbrace{\partial_\phi \Gamma^{\alpha}{}_{\phi\alpha}}_{=0} + \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\phi}\Gamma^{\alpha}{}_{\phi\rho} = \partial_r \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} + \partial_\theta \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} + \Gamma^{\rho}{}_{r\rho}\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} + \Gamma^{\rho}{}_{\theta\rho}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\rho}{}_{r\phi}\Gamma^{r}{}_{\phi\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\rho} -$$

$$\Gamma^{\rho}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\rho} = -\sin^2\theta\left(\frac{1}{B} - \frac{B'r}{B^2}\right) - \cos^2\theta + \sin^2\theta - \frac{r\sin^2\theta}{B}\left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right) - \cot\theta\sin\theta\cos\theta -$$

$$\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{r\phi}\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = \sin^2\theta - 3\frac{\sin^2\theta}{B} + \frac{r\sin^2\theta}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + 2\frac{\sin^2\theta}{B}$$

$$\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sin^2\theta\left(1 - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{B}\right) = \sin^2\theta\,\mathbf{R}_{\theta\theta} \tag{4.43}$$

Το δεξί μέρος της εξίσωσης 4.41 είναι μηδέν εφόσον μιλάμε για έξω από την κατανομή μάζας. Οπότε ο τανυστής **Ricci** πρέπει να είναι μηδέν ($\mathbf{R}_{\mu\nu} = 0$). Άρα καλούμαστε να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις. Για τον προσδιορισμό τον συνοριακών συνθηκών θα υποθέσουμε πως στο άπειρο τα πεδία εξαφανίζονται και ο χώρος γίνεται **Minkowski**. Συνεπώς πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνοριακές συνθήκες.

$$r \to \infty : \quad A(r) \to c^2 \qquad B(r) \to 1$$

$$\mathbf{R}_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} &= \tfrac{A''}{2B} - \tfrac{A'}{4B}\left(\tfrac{B'}{B} + \tfrac{A'}{A}\right) + \tfrac{A'}{rB^2} = 0 \\ \mathbf{R}_{rr} &= -\tfrac{A''}{2A} + \tfrac{A'}{4A}\left(\tfrac{B'}{B} + \tfrac{A'}{A}\right) + \tfrac{B'}{rB} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{A\mathbf{R}_{rr}+B\mathbf{R}_{tt}}{\Longrightarrow} \frac{B'A + A'B}{rB^2} = 0 \Rightarrow B'A + A'B = 0 \Rightarrow (AB)' = 0 \Rightarrow$$

$$A(r)B(r) = k \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} k = c^2$$

$$\mathbf{R}_{\theta\theta} = 1 - \frac{A}{c^2} - \frac{Ar}{2c^2}\left(\frac{A'}{A} - \frac{-AA'}{A^2}\right) = 0 \Rightarrow c^2 - A - rA' = 0 \Rightarrow c^2 = A + rA' \Rightarrow$$

$$(rA)' = c^2 \Rightarrow Ar = c^2 r + k \Rightarrow A(r) = c^2\left(1 + \frac{k}{r}\right)$$

Τώρα για τον προσδιορισμό της σταθεράς k θα δεχτούμε πως στο όριο των ασθενών πεδίων οι λύσεις τείνουν στην Newtonian σχέση για το δυναμικό που δίνει.

$$g_{00} = -(1 + \frac{2\Phi}{c^2}) = -\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)$$

Άρα εξισώνοντας τις δύο σχέσεις έχουμε.

$$\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right) = \left(1 + \frac{k}{r}\right) \Rightarrow -k = \frac{2GM}{c^2} \equiv r_S$$

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Μετρώντας μήκη και χρόνους σε Schwarzschild γεωμετρία

Λόγω του ότι δεν πρόκειται για μια επίπεδη γεωμετρία περιμένουμε οι μετρήσεις να είναι κάπως διαφορετικές. Για τον υπολογισμό του ιδιόχρονου υποθέτουμε ακίνητους παρατηρητές, δηλαδή σταθερά (r, θ, ϕ), και παίρνουμε την μετρική **Schwarzschild**.

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}dt < dt$$

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}dr > dr$$

Παρατηρούμε πως ο χρόνος διαστέλλεται και ο χώρος συστέλλεται όπως στην ειδική σχετικότητα αλλά εδώ αυτό συμβαίνει για ακίνητους παρατηρητές Θα κάνουμε έναν προσεγγιστικό υπολογισμό στον υπολογισμό του ολοκληρώματος της θέσης.

$$\int ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}dr \approx \int_{r_1}^{r_2}\left(1 + \frac{r_S}{2r}\right)dr = r_2 - r_1 + r_s \ln\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} > r_2 - r_1$$

Όπου παρατηρούμε την απόκλιση από την ευκλείδεια απόσταση σε δυνάμεις της r_S.

Γεωδαισιακές στην γεωμετρία Schwarzschild

Αφού βρήκαμε την μετρική της γεωμετρίας αυτής τώρα θα δούμε πως κινούνται σε μια τέτοια γεωμετρία σωματίδια (με ή χωρίς μάζα). Αρχικά θα προσδιορίσουμε την Lagrangian η οποία περιγράφει το σύστημα μας. Αν θεωρήσουμε ότι η μετρική **Schwarzschild** περιγράφει την γεωμετρία γύρω από τον ήλιο θα μελετήσουμε τις τροχιές των πλανητών και της φωτεινές ακτίνες. Θα υπολογίσουμε μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange τις γεωδαισιακές.

$$\mathscr{L} = -c^2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{t}} - \underbrace{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)2\dot{t} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{t} + \frac{\frac{r_S}{r^2}}{\left(1-\frac{r_S}{r}\right)}\dot{t}\dot{r} = 0 \tag{4.44}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left\{\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}2\dot{r}\right\} + c^2\frac{r_S}{r^2}\dot{t}^2 - \frac{r_S}{r^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-2}\dot{r}^2 + 2r(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-2}\frac{r_S}{r^2}\dot{r}^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}2\ddot{r} + c^2\frac{r_S}{r^2}\dot{t}^2 - \frac{r_S}{r^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-2}\dot{r}^2 + 2r(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{r} + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{r_S}{2r}\dot{r}^2 + c^2\left(1-\frac{r_S}{2r}\right)\frac{r_S}{r^2}\dot{t}^2 - \left(1-\frac{r_S}{r}\right)r(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 0 \tag{4.45}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(2\dot{\theta}r^2\right) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{\theta}\dot{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{4.46}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} - \underbrace{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}2r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{\phi}r^2\sin^2\theta + 2r\dot{\phi}\dot{r} + 2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} + \cot\theta\dot{\phi}\dot{\theta} = 0 \tag{4.47}$$

Παρατηρούμε πως οι εξισώσεις των γεωδαισιακών είναι περίπλοκες και είναι σχεδόν αδύνατη η επίλυσή τους. Αυτή η δυσκολία μας οδηγεί στο να σκεφτούμε κάποια τεχνάσματα όπως η χρήση των συμμετριών.

Ενεργό δυναμικό

Στην ενότητα αυτή θα εξαγάγουμε μέσω διατηρήσιμων ποσοτήτων (συμμετριών) το ενεργό δυναμικό το οποίο "νιώθουν" τα σωματίδια τα οποία υπόκεινται στο πεδίο του ήλιου. Από την εξίσωση γεωδαισιακών θα αποδείξουμε ότι τα διανύσματα **killing** περιγράφουν συμμετρίες οπότε σε Lagrangian μηχανική (θεωρ. **Noether**) διατηρήσιμες ποσότητες.

$$\left.\begin{array}{c} u^\mu\nabla_\mu u^\rho = 0 \underset{p_\mu = m u_\mu}{\overset{m^2}{\Longrightarrow}} p^\mu\nabla_\mu p^\rho = 0 \\ \nabla_\mu p^\rho = \partial_\mu p^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\tau}p^\tau \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{c} p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \\ p^\mu\partial_\mu p^\rho \end{array}\right\} \Rightarrow \left. m\frac{dp_\mu}{d\tau} + \Gamma^\rho_{\mu\tau}p^\tau p_\rho = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$m\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\mu g_{\tau\nu} + \partial_\tau g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\tau}\right)p^\tau p_\rho = \frac{1}{2}\left(p^\tau p^\nu\partial_\mu g_{\tau\nu} + p^\tau\partial_\tau g_{\mu\nu}p^\nu - p^\nu\partial_\nu g_{\mu\tau}p^\tau\right) = \frac{1}{2}p^\tau p^\nu\partial_\mu g_{\tau\nu}$$

Κάνοντας έναν μετασχηματισμό θα εξαγάγουμε τις διατηρήσιμες ποσότητες.

$$m\frac{dp_{\mu*}}{d\tau} = \frac{1}{2}p^\tau p^\nu\partial_{\mu*}g_{\tau\nu} = 0 \Rightarrow p_{\mu*} = ct$$

Οπότε ορίζουμε διανύσματα τα οποία να μας δίνουν αυτήν την διατήρηση.
$X^\mu \equiv (\partial_{\tau*})^\mu = \delta^\mu_{\tau*}$
Λέμε πως τα διανύσματα αυτά γεννούν μια ισομετρία δηλαδή αφήνουν αναλλοίωτη την γεωμετρία.
$p_{\mu*} = X^\mu p_\mu \Rightarrow \dfrac{dp_{\mu*}}{d\tau} = 0 \rightarrow$
$p^\mu \nabla_\mu p^{\rho*} = p^\mu \nabla_\mu (X_\rho p^\rho) = 0 \Rightarrow \underbrace{p^\mu X_\rho \nabla_\mu p^\rho}_{=0} + p^\mu p^\rho \nabla_\mu X_\rho = p^\mu p^\rho \nabla_\mu X_\rho + p^\rho p^\mu \nabla_\rho X_\mu = 0 \Rightarrow$
$p^\mu p^\rho (\nabla_\mu X_\rho + \nabla_\rho X_\mu) = 0 \Rightarrow \mathfrak{L}_X g_{\mu\rho} = \nabla_\mu X_\rho + \nabla_\rho X_\mu = 0$

Η μετρική μας είναι ανεξάρτητη από τα t & ϕ οπότε δύο διανύσματα **killing** είναι.

$X^\mu_t = (\partial_t)^\mu = (1,0,0,0)$ & $X^\mu_\phi = (\partial_\phi)^\mu = (0,0,0,1)$
$\mathfrak{L}_X g_{\phi\phi} = 2\partial_\phi X_\phi + 2\Gamma^\rho_{\phi\phi} X_\rho = 0 \Rightarrow \partial_\phi X_\phi - \sin\theta\cos\theta X_\rho = 0$
$\mathfrak{L}_X g_{\theta\theta} = 2\partial_\theta X_\theta + 0 = 0 \Rightarrow X_\theta = f(\phi)$
$\mathfrak{L}_X g_{\phi\theta} = \partial_\phi X_\theta + \partial_\theta X_\phi + 2\Gamma^\rho_{\phi\theta} X_\rho = 0 \Rightarrow \partial_\phi X_\theta + \partial_\theta X_\phi + 2\cot\theta X_\phi = 0 \overset{\partial_\phi}{\Rightarrow} \partial^2_\phi f + \partial_\theta \partial_\phi X_\phi + 2\cot\theta \partial_\phi X_\phi = 0$
$\partial^2_\phi f(\phi) + \partial_\theta \sin\theta\cos\theta f(\phi) + 2sin^2\theta f(\phi) = 0 \Rightarrow \partial^2_\phi f(\phi) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) f(\phi) + 2\sin^2\theta f(\phi) = 0$
$f(\phi) = \sin\phi$ ή $\cos\phi \Rightarrow X_{1\theta} = \sin\phi$ & $X_{2\theta} = -\cos\phi$
$X_\phi = \sin\theta\cos\theta \int \sin\phi d\phi$ ή $-\sin\theta\cos\theta \int \cos\phi d\phi \ = -\sin\theta\cos\theta\cos\phi$ ή $-\sin\theta\cos\theta\sin\phi$
$X^\phi = g^{\phi\mu} X_\mu = g^{\phi\phi} X_\phi = \sin^{-2}(-\sin\theta\cos\theta\cos\phi$ ή $-\sin\theta\cos\theta\sin\phi) \Rightarrow$
$X_{1\phi} = -\cot\theta\cos\phi$ & $X_{2\phi} = -\cot\theta\sin\phi$
$X^\rho_1 \partial_\rho = \sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi = (0,0,\sin\phi,-\cot\theta\cos\phi)$
$X^\rho_2 \partial_\rho = -\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi = (0,0,-\cos\phi,-\cot\theta\sin\phi)$

Από τα διανύσματα **killing** έχουμε.

$X_{\mu t} = X^\mu g_{t\mu} = \left(-c^2\left(1-\dfrac{r_S}{r}\right),0,0,0\right) \Rightarrow E = -K_\mu u^\mu = c^2\left(1-\dfrac{r_S}{r}\right)\dot{t}$
$X_{\mu\phi} = X^\mu g_{\phi\mu} = \left(0,0,0,r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) \Rightarrow L = X_{\mu\phi}u^\mu = r^2\sin^2\theta\dot{\phi}$
μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ οπότε $\dot{\theta} = 0$
$L = r^2\dot{\phi}$
Θα ταυτοποιήσουμε την ποσότητα E με την ενέργεια ανά μονάδα μάζας.
$E(r\rightarrow\infty) = c^2\dot{t} \qquad \dot{t} = \dfrac{dt}{d\tau}$
έχουμε πει πως για $r\rightarrow\infty$ η γεωμετρία **Schwarzschild** καταλήγει σε **Minkowski** συνεπώς ισχύει.
$\dfrac{dt}{d\tau} = \gamma$ Οπότε $E(r\rightarrow\infty) = c^2\gamma \equiv \dfrac{E_{sr}}{m}$

Από την εξίσωση των γεωδαισιακών και την εξίσωση **killing** παίρνουμε.

$$\frac{d\mathscr{L}}{d\tau} = 2g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\nabla_{\tau}\dot{x}^{\nu} = 0 \Rightarrow \mathscr{L} = \frac{\epsilon}{c^2} \Rightarrow -c^2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \epsilon \Rightarrow$$
$$-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{E^2}{c^2} + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = \frac{\epsilon}{c^2} \Rightarrow \frac{E^2+\epsilon}{2c^2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{r_S L^2}{2r^3} + \frac{r_S\epsilon}{2c^2 r}$$
$$E_{eff} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \mathcal{V}_{eff},\ \text{όπου.}\quad E_{eff} = \frac{E^2+\epsilon}{2c^2} \quad \& \quad \mathcal{V}_{eff} = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{r_S L^2}{2r^3} + \frac{r_S\epsilon}{2c^2 r}$$
$$\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{Για χρονοειδής γεωδαισιακές.} \\ 0 & \text{Για φωτοειδής γεωδαισιακές.} \end{cases}$$

Το ενεργό δυναμικό που προέκυψε έχει τις εξής ιδιότητες

i) $r \to \infty \quad \mathcal{V}_{eff} \to -\frac{GM}{2c^2 r}$ **Newtonian** δυναμικό

ii) για $r = r_S \Rightarrow \mathcal{V}_{eff}(r_S) = -\frac{1}{2c^2}$

iii) $\frac{d\mathcal{V}_{eff}(r)}{dr} = 0 \Rightarrow r^2 - 2L^2c^2\frac{r}{r_S} + 3L^2c^2 = 0 \Rightarrow r_{\pm} = \frac{L^2c^2}{r_S}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{3r_S^2}{L^2c^2}}\right) \overset{L\to\infty}{\Rightarrow} (r_{min}, r_{max}) = (\frac{2L^2c^2}{r_S}, 3r_S)$

Από τις ιδιότητες θα εξαγάγουμε κάποιες σημαντικές πληροφορίες για το δυναμικό. Για ακτίνα ίση με την ακτίνα **Schwarzschild** δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα όπως στην μετρική (στην οποία εμφανίζεται λόγω κακής επιλογής συντεταγμένων). Το δυναμικό αυτό πέρα του όρου $\frac{L^2}{2r^2}$, που για μικρές αποστάσεις στην **Newtonian** βαρύτητα έπαιξε τον κυριότερο ρόλο, έχει και τον όρο $\frac{r_S L^2}{2r^3}$ ο οποίος υπερισχύει για μικρές αποστάσεις. Θα δούμε και μια σημαντική ιδιότητά για άμαζα σωματίδια (όπως το φωτόνιο) όπου το ενεργό δυναμικό είναι.

$$\mathcal{V}_{eff} = \frac{L^2}{2r^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right) \Rightarrow \frac{d\mathcal{V}_{eff}(r)}{dr} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{3r_S}{2} \Rightarrow \mathcal{V}_{eff}(r_c) = \frac{2L^2}{27r_S^2}$$

Όπου για τα άμαζα σωματίδια έχουμε μια ακτίνα μεγίστου ανεξάρτητη της στροφορμής εν αντιθέσει με τα μαζικά των οποίων οι ακτίνες εξαρτώνται άμεσα από την στροφορμή. Όπου για μεγάλες τιμές της στροφορμής έχουμε δύο κυκλικές τροχιές, μια με ευστάθεια και μια χωρίς. Όπου η ευσταθής κυκλική τροχιά εξαφανίζεται, όταν η ασταθής πλησιάζει την $r_{max} = \frac{3r_S}{2}$. Όταν η στροφορμή παίρνει μικρές τιμές οι δύο τροχιές τείνουν να συμπέσουν και αυτό συμβαίνει όταν $3r_S^2 = L^2c^2$ όπου η $r_c = 3r_S$ και τελικά εξαφανίζονται για πολύ μικρές τιμές της στροφορμής. Όπου $r_c = 3r_S$ είναι η μικρότερη δυνατή ακτίνα ευσταθούς κυκλικής τροχιάς στην μετρική **Schwarzschild**. Επίσης υπάρχουν μη δέσμιες τροχιές, οι οποίες ξεκινούν και καταλήγουν στο άπειρο, και δέσμιες μη κυκλικές τροχιές, οι οποίες ταλαντεύονται γύρω από την κυκλική ακτίνα. Σημειώνουμε ότι οι τροχιές στην γενική σχετικότητα δεν περιγράφουν τις κωνικές τομές της **Newtonian** βαρύτητας αυτό γίνεται εμφανές όταν λύσουμε την εξίσωση των γεωδαισιακών για $\dot{\phi}$. Συνοψίζοντας στην μετρική **Schwarzschild** έχουμε ευσταθείς κυκλικές τροχιές για $r > 3r_S$ και ασταθείς για $\frac{3r_S}{2} < r < 3r_S$ αυτά όμως ισχύουν για σωματίδια που κινούνται πάνω σε γεωδαισιακές όμως είναι δυνατόν ένα σωματίδιο να επιταχύνει οπότε να μην κινείται πάνω σε γεωδαισιακή.

Ελλειπτικές τροχιές

$$E_{eff} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \mathcal{V}_{eff} \overset{\dot{\phi}^{-2}=\frac{r^4}{L^2}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{r^4}{L^2}\mathcal{V}_{eff} = \frac{r^4}{L^2}E_{eff} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 - rr_S - \frac{r_S r^3}{c^2L^2} + \frac{r^4}{c^2L^2} = \frac{2Er^4}{c^2L^2}$$

Για την λύση της διαφορικής θέτουμε $x = \frac{2L^2c^2}{r_S r} \Rightarrow xr = \frac{2L^2c^2}{r_S} \Rightarrow \frac{dx}{dr} = -\frac{2L^2c^2}{r_S r r} = -\frac{x}{r}$

$$\left(\frac{dr}{dx}\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + r^2 - rr_S - \frac{r_S r^3}{c^2L^2} + \frac{r^4}{c^2L^2} = \frac{2Er^4}{c^2L^2} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + x^2 - \frac{x^3 r_S^2}{2L^2c^2} - 2x + \frac{4}{r_S^2} = \frac{8r_S^2 E}{L^2c^2} \overset{\frac{d}{d\phi}}{\Rightarrow}$$

$$2\frac{dx}{d\phi}\frac{d^2x}{d\phi^2} + 2x\frac{dx}{d\phi} - 3\frac{x^2r_S^2}{2L^2c^2}\frac{dx}{d\phi} - 2\frac{dx}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{d\phi^2} + x - 1 = 3\frac{x^2r_S^2}{4L^2c^2} \tag{4.48}$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης αποτελεί την σχέση του Newton για της κωνικές τομές. Εμείς θα χωρίσουμε σε δύο κομμάτια τις λύσεις μια Newtonian συν μια διαταραχή δηλαδή θέτουμε.

$$x = x_N + x_p \qquad \text{όπου για την διαταραχή ισχύει. } x_p \ll 1$$

$$\frac{d^2(x_N + x_p)}{d\phi^2} + x_N + x_p - 1 = 3\frac{(x_N + x_p)^2 r_S^2}{4L^2c^2} \approx 3\frac{x_N^2 r_S^2}{4L^2c^2}$$

$$\frac{d^2 x_N}{d\phi^2} + x_N = 1 \Rightarrow x_N = 1 + e\cos\phi$$

Το αποτέλεσμα αυτό δίνει της τροχιές του **Kepler** οι οποίες είναι τέλειες ελλείψεις με εκκεντρότητα e. Μια έλλειψη καθορίζεται από τον μεγάλο ημιάξονα a, ο οποίος είναι η απόσταση από το κέντρο ως το απώτατο σημείο της έλλειψης, και τον μικρό άξονα b, ο οποίος είναι η απόσταση από το κέντρο ως το κοντινότερο σημείο της έλλειψης, η εκκεντρότητα ικανοποιεί την σχέση $e^2 = 1 - \frac{b}{a}$.

$$\left.\begin{matrix} \frac{d^2x_p}{d\phi^2} + x_p = 3\frac{(1+e\cos\phi)^2 r_S^2}{4L^2c^2} \\ \left.\begin{matrix} (1+e\cos\phi)^2 = 1 + e^2\cos^2\phi + 2e\cos\phi \\ \cos^2\phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1+\frac{1}{2}e^2) + 2e\cos\phi + \frac{1}{2}e^2\cos 2\phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x_p}{d\phi^2} + x_N + x_p = 3\frac{r_S^2}{4L^2c^2}(1 + \frac{1}{2}e^2) + 2e\cos\phi + \frac{1}{2}e^2\cos 2\phi)$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{d^2\phi\sin\phi}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi}(\sin\phi + \phi\cos\phi) = \cos\phi + \cos\phi - \phi\sin\phi \\ \frac{d^2\cos 2\phi}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi}(-2\sin 2\phi) = -4\cos 2\phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{d^2\phi\sin\phi}{d\phi^2} + \phi\sin\phi = 2\cos\phi i \\ \frac{d^2\cos 2\phi}{d\phi^2} + \cos 2\phi = -3\cos 2\phi \end{matrix}\right\}$$

$$x_p = 3\frac{r_S^2}{4L^2c^2}\left((1 + \frac{1}{2}e^2) + e\phi\sin\phi - \frac{1}{6}e^2\cos 2\phi\right)$$

Ο πρώτος όρος της λύσης είναι μια σταθερά την οποία μπορούμε να αγνοήσουμε ο τρίτος όρος είναι αμελητέος διότι πρόκειται για μια διακύμανση γύρω από το μηδέν. Ο δεύτερος όρος είναι αυτός ο οποίος μας ενδιαφέρει οπότε η λύση γίνεται.

$$\left.\begin{matrix} x = x_N + x_p = 1 + e\cos\phi + \tau e\phi\sin\phi, \ \ \tau = \frac{3r_S^2}{4L^2c^2} \\ \cos\{(1-\tau)\phi\} \approx \cos\{(1-\tau)\phi\}|_{\tau=0} - \tau\,\frac{d}{d\tau}\cos\{(1-\tau)\phi\}\Big|_{\tau=0} + \ldots \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1 + e\cos\{(1-\tau)\phi\}$$

$$r(\phi) = \frac{(1-e^2)a}{1+e\cos\phi} \qquad \text{Εξίσωση έλλειψης στις πολικές συντεταγμένες} \tag{4.49}$$

$$L^2 = xr\frac{r_S}{2c^2} = 1 + e\cos\{(1-\tau)\phi\}\frac{(1-e^2)a}{1+e\cos\phi}\frac{r_S}{2c^2} \approx (1-e^2)a\frac{r_S}{2c^2}$$

$$\Delta\phi = 2\pi\tau = \frac{6\pi r_S^2}{4L^2c^2} = \frac{6\pi r_S^2}{4c^2(1-e^2)a\frac{r_S}{2c^2}} = \frac{3\pi r_S}{(1-e^2)a}$$

Διατήρηση στροφορμής & Το Διάνυσμα Runge-Lenz

Ένα αποτέλεσμα της διατήρησης της στροφορμής αποτελούν οι ελλειπτικές τροχιές που παρατήρησε ο **Kepler** και εξήγησε ο Newton. Ο πιο αριστοτεχνικός τρόπος να εξαγάγουμε τα αποτελέσματα αυτά είναι το αποκαλούμενο διάνυσμα **Runge-Lenz**. Γνωρίζουμε ότι, λόγω της διατήρησης της στροφορμής, οι τροχιές σε ένα οποιοδήποτε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό είναι επίπεδες. Οι δέσμιες τροχιές στο πρόβλημα του **Kepler** είναι επιπλέον και κλειστές. Υποθέτουμε ένα σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό Φ οπότε το έχουμε το διάνυσμα.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{m}\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{L} + \Phi(r)\boldsymbol{x} \Rightarrow A_i = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\dot{x}_j L_k + \Phi(r)x_i$$

έχουμε υποθέσει ότι διατήρηση στροφορμής $\quad \dot{\boldsymbol{L}} = 0$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\ddot{x}_j L_k + \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}x_i + \Phi(r)\dot{x}_i$$

$$L_k = m\epsilon_{klm}x_l\dot{x}_m \quad \ddot{x}_j = -\nabla_j\Phi$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}x_l\dot{x}_m(-\nabla_j\Phi) + \dot{r}\nabla_r\Phi(r)x_i + \Phi(r)\dot{x}_i = -(\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)x_l\dot{x}_m\nabla_j\Phi + \dot{r}\nabla_r\Phi x_i + \Phi\dot{x}_i =$$

$$\frac{dA_i}{dt} = -\dot{x}_m\nabla_m\Phi x_i + \dot{x}_i x_m\nabla_m\Phi + \dot{r}\nabla_r\Phi x_i + \Phi\dot{x}_i = (r\nabla_r\Phi + \Phi)\,\dot{x}_i = 0 \Rightarrow r\nabla_r\Phi + \Phi = 0$$

Άρα πρέπει το δυναμικό να είναι ομογενής συνάρτηση τάξης -1. Άρα στην περίπτωση την οποία μελετάμε θα γράψουμε το δυναμικό στην μορφή.

$$\Phi = \frac{\epsilon}{r} \quad \text{Άρα το διάνυσμα } \boldsymbol{A} \text{ γράφεται.}$$

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{L} + \frac{m\epsilon}{r}\boldsymbol{x} \Rightarrow \tag{4.50}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2 = |\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{L}|^2 + \frac{m^2\epsilon^2}{r^2}|\boldsymbol{x}|^2 = |\dot{\boldsymbol{r}}|^2L^2 + m^2\epsilon^2 = \frac{E^2+\epsilon}{c^2}L^2 + m^2\epsilon^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{E^2L^2}{c^2} + \epsilon\left(\frac{L^2}{c^2} + m^2\epsilon\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r} = Ar\cos\phi = \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{L} + m\epsilon r \\ \frac{1}{m}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{L} = \frac{1}{m}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p} = \frac{1}{m}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L} = \frac{1}{m}L^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m^2}{L^2}\left(\frac{A}{m}\cos\phi - \epsilon\right)$$

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{m^2}{L^2}\left(\frac{A}{m}\cos\phi + 1\right) & \epsilon = -1 \\ \frac{mA}{L^2}\cos\phi & \epsilon = 0 \end{cases} \tag{4.51}$$

Όπου μπορούμε να αναγνωρίσουμε από την εξίσωση της έλλειψης σε πολικές.

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1+\epsilon\cos\phi}{(1-\epsilon^2)a} = \frac{m^2}{L^2}\left(\frac{A}{m}\cos\phi + 1\right) \Rightarrow \frac{m^2}{L^2} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)a} \quad \text{η εκκεντρότητα } \epsilon = \frac{A}{m} \tag{4.52}$$

Στην γενική σχετικότητα στο δυναμικό υπεισέρχεται ένας επιπλέον όρος, που επίσης είναι σφαιρικά συμμετρικός, οπότε η γενίκευση του διανύσματος **Runge-Lenz** είναι.

$$V(r) = \frac{m\epsilon}{r} - \frac{2r_SL^2}{r^3}$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{2r_SL^2\hat{\boldsymbol{r}}}{r^3}\right) = \frac{6r_SL^2}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\right) \\ \boldsymbol{x}(r,\theta=\frac{\pi}{2},\phi) = (r\sin\frac{\pi}{2}\cos\phi, r\sin\frac{\pi}{2}\sin\phi, r\cos\frac{\pi}{2}) = r(\cos\phi,\sin\phi,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{6r_SL^2}{r^4}(-y,x,0)\dot{\phi}$$

Προσεγγίζοντας την ακτίνα Schwarzschild

Μέχρι στιγμής έχουμε μιλήσει για σωμάτια τα οποία η ακτίνα τους είναι πολύ μεγαλύτερη της ακτίνας **Schwarzschild** (π.χ. ο ήλιος). Τώρα θα μελετήσουμε σωμάτια των οποίων η ακτίνα είναι μικρότερη της r_S και την κίνηση σωμάτων γύρω από ένα τέτοιο σωμάτιο, όπου και θα δούμε τι συμβαίνει όταν ένα σωμάτιο προσεγγίζει αυτήν την ακτίνα. Θα ξεκινήσουμε υποθέτοντας ακίνητους παρατηρητές. Για τους οποίους έχουμε

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = -\left(1-\frac{r_S}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\\
&ds^2 = -\left(1-\frac{r_S}{r}\right)c^2dt^2 \Rightarrow d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)dt^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \dot{t} = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&a^\mu = \nabla_\tau \dot{x}^\mu = \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\tau}\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau\\
&a^\mu = \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{tt}\dot{t}\dot{t} \Rightarrow a^r\frac{d\dot{x}^r}{d\tau} + \Gamma^r_{tt}\dot{t}\dot{t} = \ddot{x}^r + \frac{c^2 r_S}{2r^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\\
&a^r = (0, \frac{Gm}{r^2}, 0, 0) \Rightarrow \boldsymbol{a}(r) = \sqrt{g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu} = \frac{Gm}{r^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε πως για $r \to \infty$ παίρνουμε την σχέση της Newtonian βαρύτητας. Επίσης στην ακτίνα r_S η επιτάχυνση αποκλίνει υποδεικνύοντας μας ότι ακίνητοι παρατηρητές θα βρίσκουν όλο και πιο δύσκολο το να μείνουν ακίνητοι, και πρέπει να κινούνται κοντά στην ταχύτητα του φωτός, καθώς πλησιάζουν την ακτίνα r_S. Τώρα θα δούμε ένα σώμα να κάνει κατακόρυφη ελεύθερη πτώση. Με τον όρο κατακόρυφη εννοούμε $\dot{\phi} = 0$ δηλαδή $L^2 = 0$ οπότε το ενεργό δυναμικό παίρνει την μορφή.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_{eff} = -\frac{r_S}{2c^2 r}\\
&\frac{E^2}{c^2} = \dot{r}^2 + \frac{1}{c^2} - \frac{r_S}{c^2 r} \Rightarrow \dot{r}^2 + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right) = \frac{E^2}{c^2}
\end{aligned}
$$

Επιλέγουμε τα σημεία στα οποία ο παρατηρητής είναι ακίνητος.

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{dr}{d\tau}\right|_{r=r_i} = 0 \Rightarrow\\
&E^2 = 1 - \frac{r_S}{r_i}\\
&E = c^2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\dot{t}
\end{aligned}
$$

Όπου για $r \to \infty$ $E \to c^2$

$$
\begin{aligned}
&\dot{r}^2 + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right) = \frac{E^2}{c^2} \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{r_S}{r}} \Rightarrow \sqrt{r}dr = \sqrt{r_S}d\tau\\
&\int_0^\tau \sqrt{r}dr = \int_\tau^{\tau_0}\sqrt{r_S}d\tau \Rightarrow \left.\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\right|_0^\tau = \sqrt{r_S}\,(\tau_0-\tau) \Rightarrow\\
&r(\tau) = \left(\frac{9r_S}{4}\right)^{\frac{1}{3}}(\tau-\tau_0)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

Παραγωγίζοντας την σχέση $\dot{r}^2 + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right) = \frac{E^2}{c^2}$ Παίρνουμε

$$
2\ddot{r}\dot{r} + \frac{r_S}{c^2 r^2}\dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{r_S}{c^2 r^2}
$$

Όπου καταλήξαμε στην γνωστή μας σχέση για το πεδίο. Αυτό ήταν αναμενόμενο διότι το ενεργό δυναμικό για μηδενική στροφορμή καταλήγει στο δυναμικό του Newton.

Η Γεωμετρία κοντά στην ακτίνα Schwarzschild και Χώρος Minkowski σε συντεταγμένες Rindler

Είδαμε πως οι συντεταγμένες **Schwarzschild** δεν είναι οι κατάλληλες να περιγράψουν την φυσική για ακτίνες ίσες και μικρότερες από την r_S. Αυτό συμβαίνει διότι η μετρική απειρίζεται για αυτήν την ακτίνα όμως διάφορες αναλλοίωτες ποσότητες δεν επηρεάζονται από αυτήν την ακτίνα άρα αυτό μας προϊδεάζει ότι δεν πρόκειται για κάποια φυσική απαίτηση αλλά είναι πρόβλημα κακής επιλογής των συντεταγμένων
Κατ' αρχάς από την αρχή ισοδυναμίας θα εξαγάγουμε της συντεταγμένες **Rindler**. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας μπορούμε μια σταθερή επιτάχυνση να την αντικαταστήσουμε από ένα κατάλληλο βαρυτικό πεδίο. Αν ένας παρατηρητής επιταχύνεται, προς μια κατεύθυνση έστω την r, όπου στο στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας, με το σύστημα ηρεμίας εννοούμε ένας παρατηρητής να έχει σταθερή την μία του συντεταγμένη, έχει $u^\mu = (c,0,0,0)$ & $a^\mu = (0,\alpha,0,0)$, Θα λέμε ότι ο παρατηρητής υπόκειται σε σταθερή βαρύτητα αν η α είναι χρονοανεξάρτητη. Για τον προσδιορισμό της κοσμικής γραμμής του παρατηρητή έχουμε.

$$u^\mu u_\mu = -c^2 \Rightarrow -(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2 \Rightarrow u^0 = c\cosh F(\tau),\ u^1 = c\sinh F(\tau)$$

$$a^\mu = c\dot{F}(\tau)(\sinh F(\tau), \cosh F(\tau), 0, 0)$$

Εξ' υποθέσεως η επιτάχυνση είναι σταθερή οπότε

$$a^\mu a_\mu = \alpha^2 \Rightarrow c^2\dot{F}^2(-\sinh^2 F(\tau) + \cosh^2 F(\tau)) = c^2\dot{F}^2 \Rightarrow c^2\dot{F}^2 = \alpha^2 \Rightarrow F(\tau) = \frac{\alpha}{c}\tau$$

$$u^\mu = \left(c\cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), c\sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), 0, 0\right) \Rightarrow$$

$$x^\mu = \left(\frac{c^2}{\alpha}\sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), \frac{c^2}{\alpha}\cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), 0, 0\right)$$

η κοσμική γραμμή του παρατηρητή (για σταθερή επιτάχυνση & $x^\mu(\tau = 0) = \left(0, \frac{c^2}{\alpha}, 0, 0)\right)$

ορίζει την υπερβολή.

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

Πρέπει να βρούμε έναν μετασχηματισμό $((x^0, x^1) \to (\rho, \eta))$ στον οποίο οι κοσμικές γραμμές των επιταχυνόμενων παρατηρητών να χαρακτηρίζονται από σταθερή την ρ και η η να είναι ανάλογη του ιδιοχρόνου. Οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις αυτές η οποίες μας δίνουν την μετρική **Rindler**.

$$\left.\begin{array}{l} x^0 = \rho\sinh\eta \\ x^1 = \rho\cosh\eta \end{array}\right\} \overset{d}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} dx^0 = d\rho\sinh\eta + \rho\cosh\eta d\eta \\ dx^1 = d\rho\cosh\eta + \rho\sinh\eta d\eta \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 + \left(dx^1\right)^2$$

$$ds^2 = -d\rho^2\sinh^2\eta - \rho^2\cosh^2\eta d\eta^2 - 2\rho\cosh\eta\sinh\eta d\eta d\rho + d\rho^2\cosh^2\eta + \rho^2\cosh^2\eta d\eta^2 + 2\rho\cosh\eta\sinh\eta d\eta d\rho$$

$$ds^2 = d\rho^2(\cosh^2\eta - \sinh^2\eta) - \rho^2 d\eta^2(\cosh^2\eta - \sinh^2\eta) = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2$$

$$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 \tag{4.53}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Μετρική } \textbf{Rindler} \tag{4.54}$$

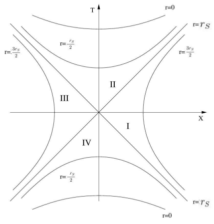
Την μετρική **Rindler** μπορούμε να την θεωρήσουμε ως την μετρική των αντίστοιχων πολικών σε **Minkowski** χώρο.

$$ds^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2 \tag{4.55}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Μετρική Πολικών} \tag{4.56}$$

Παρατηρούμε επιπλέον η μετρική δεν είναι ανεξάρτητη από των χωρόχρονο και περιγράφει μια σταθερή επιτάχυνση και δεδομένου ότι η σταθερή επιτάχυνση περιγράφει ένα "ψεύτικο" βαρυτικό πεδίο έχουμε, ωστόσο, από την αρχή της ισοδυναμίας, ότι ένας αδρανειακός παρατηρητής δεν μπορεί να ξεχωρίσει το "ψεύτικο" βαρυτικό πεδίο και το γεγονός αυτό μας λέει ότι ένα "πραγματικό" βαρυτικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί από συντεταγμένες που εξαρτώνται από τον χωρόχρονο.

Σχετικά με την συμπεριφορά των κώνων φωτός όταν εκφράζονται στις συντεταγμένες (ρ, η) έχουμε ότι για αυτούς ισχύει $ds^2 = 0$ οπότε προκύπτει το σχήμα 4.1 Την μετρική **Rindler** μπορούμε να την θεωρήσουμε ως την μετρική των αντίστοιχων πολικών σε **Minkowski** χώρο.



Σχήμα 4.1: Κώνος Φωτός σε συντεταγμένες Rindler

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 d\eta^2 = d\rho^2 \Rightarrow d\eta = \pm\rho^{-1} d\rho$$

Αυτή η σχέση περιγράφει τα εξερχόμενα (το ρ αυξάνει με το η) αντίστοιχα για τα εισερχόμενα (το ρ μειώνεται αυξανόμενου του η). Οι κώνοι φωτός έχουν το ίδιο σχήμα με τους κώνους του **Minkowski** χώρου όταν το $\rho = c$ αλλά οι κώνοι ανοίγουν για $\rho > c$ και γίνονται όλο και πιο στενοί όταν το $\rho \to 0$.

Θα εισαγάγουμε την μεταβλητή $\hat{r} = r - r_S$ η οποία μετράει την απόσταση μας από τον ορίζοντα. Σε όρους της $\hat{r}$ η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = -c^2\left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}+r_S}\right)dt^2 + \left(\frac{\hat{r}+r_S}{\hat{r}}\right)dt^2 + (\hat{r}+r_S)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Η επιλογή της $\hat{r}$ έγινε διότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την r_S οπότε έχουμε.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\hat{r}}{\hat{r}+r_S} \approx \frac{\hat{r}}{r_S} \ \& \ \frac{\hat{r}+r_S}{\hat{r}} \approx \frac{r_S}{\hat{r}} \quad \& \ \hat{r}^2 \approx 0 \Rightarrow r^2 \approx r_S^2 \\ ds^2 = -c^2\left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}+r_S}\right)dt^2 + \left(\frac{\hat{r}+r_S}{\hat{r}}\right)d\hat{r}^2 + (\hat{r}+r_S)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \approx d\theta^2 + \theta^2 d\phi^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$ds^2 = -c^2\frac{\hat{r}}{r_S}dt^2 + \frac{r_S}{\hat{r}}d\hat{r}^2 + r_S^2(d\theta^2 + \theta^2 d\phi^2)$$

Εισαγάγουμε νέες συντεταγμένες για (t, r) $d\rho^2 = \frac{r_S}{\hat{r}}d\hat{r}^2 \Rightarrow \rho = 2\sqrt{2r_S\hat{r}}$

$$ds^2 = -c^2\frac{\rho^2}{4r_S^2}dt^2 + d\rho^2 + r_S^2(d\theta^2 + \theta^2 d\phi^2) = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 + d\zeta^2 + \zeta^2 d\phi^2 \text{ Όπου.}, \eta = \frac{ct}{2r_S}, \zeta = r_S\theta,$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$$ Μετρική **Rindler** Για γεωμετρία **Schwarzschild** κοντά στην r_S

Με αυτόν τον μετασχηματισμό η ιδιομορφία της μετρικής **Schwarzschild** χάνετε διότι για $r = r_S \Rightarrow \rho = 0$ και πλέον κατανοούμε ότι αυτή η ιδιομορφία εμφανιζόταν λόγω του ότι κοντά στην r_S οι παρατηρητές δεν ήταν ακίνητοι αλλά ίσα ίσα που είχαν επιτάχυνση. Οπότε αυτή η επιτάχυνση δημιουργεί μια φαινόμενη βαρύτητα η οποία διαστρεβλώνει την γεωμετρία για τους ίδιους τους παρατηρητές. Οι παρατηρητές επίσης τείνοντας να μείνουν σε σταθερό r κινούνται ολοένα και πιο κοντά στην ταχύτητα του φωτός κάτι που τους κάνει να χάνουν την πραγματικότητα.

4.3.2 Μελανές Οπές Schwarzschild

Η έννοια της Μελανής οπής θα γίνει παρακάτω κατανοητή. Ένα σώμα για να αποτελέσει μελανή οπή πρέπει η ακτίνα **Schwarzschild** του να είναι συγκρίσιμη με την ακτίνα του σώματος ειδάλλως δεν έχουμε ως αποτέλεσμα μια μελανή οπή. Τώρα εφόσον έχουμε πει ποια φυσική κρύβεται πίσω από την ιδιομορφία r_S θα κάνουνε κάποιους μετασχηματισμούς ώστε να την απαλείψουμε ώστε να γίνει κατανοητή η φυσική που κρύβει η μετρική **Schwarzschild**. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας της συντεταγμένες της χελώνας ή **Regge-Wheeler**, θα γίνει παρακάτω κατανοητός ο λόγος που ονομάστηκαν έτσι.

Συντεταγμένες της χελώνας

Θα ξεκινήσουμε από την μετρική **Schwarzschild** θα δούμε μια διαφορετική προσέγγιση της ιδιομορφίας της μετρικής και τέλος θα εξαγάγουμε τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων. Θεωρώντας τις θ & ϕ σταθερές θα κάνουμε το διάγραμμα $r - t$ για φωτοειδής γεωδαισιακές.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt^2}{dr^2} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$$

Η οποία αποτελεί την κλίση του κώνου φωτός και για $r = r_S$ τείνει στο άπειρο οπότε οι κώνοι φωτός σε αυτήν την ακτίνα εξαφανίζονται. Η σχέση αυτή μας υποδεικνύει πως η ταχύτητα $\frac{dr}{dt}$ τείνει στο μηδέν για φωτοειδείς γεωδαισιακές. Ήρθε η ώρα να ορίσουμε της συντεταγμένες της χελώνας.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(-c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} dr^2\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ορίζουμε την.

$$dr^* = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr = \frac{r}{r - r_S} dr = \frac{r - r_S + r_S}{r - r_S} dr =$$

$$\left(1 + \frac{r_S}{r - r_S}\right) dr = dr + r_S \frac{d(\frac{r}{r_S} - 1)}{\frac{r}{r_S} - 1} = d\left(r + r_S ln\left(\frac{r}{r_S} + 1\right)\right) \Rightarrow$$

$$r^* = r + r_S ln\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) \tag{4.57}$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε.

$ct = \pm r^* + C,\ \ C$ μια αυθαίρετη σταθερά.

$$ds^2 = \left(r - \frac{r_S}{r}\right) \left(-c^2 dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.58}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \text{Μετρική } \textbf{Schwarzschild} \text{ Σε Συντεταγμένες της χελώνας}$$

Την ονομασία την πήραν διότι καθώς πλησιάζουμε την ακτίνα **Schwarzschild** συνεχώς επιβραδύνουμε και τελικά η ταχύτητα καταλήγει στο μείον άπειρο άρα συνεχώς πηγαίνει και πιο αργά όπως η πηγαίνει μια χελώνα.
Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται για $r > r_S$ και για $r = r_S$ εκτινάσσεται στο άπειρο. Επίσης παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός μας απαλλάσσει από την ιδιομορφία και μας αποκαλύπτει την φυσική πίσω από αυτήν Όμως και αυτός ο μετασχηματισμός έχει πρόβλημα διότι η ορίζουσα της μετρικής μηδενίζεται για $r = r_S$ οπότε δεν μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφο.

Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein & Ορίζοντας γεγονότων

Είναι φυσικό να εισάγουμε συντεταγμένες οι οποίες να είναι προσαρμοσμένες σε φωτοειδείς γεωδαισιακές. Από της συντεταγμένες της χελώνας είπαμε πως μπορούμε να τις γράψουμε προσθέτοντας μια σταθερά στον συγκεκριμένο μετασχηματισμό θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την σταθερά ώστε να ορίσουμε τις καθυστερημένες και τις προχωρημένες χρονικές συντεταγμένες.

$$cu = ct - r^* \equiv cu_- \quad \& \quad cv = ct + r^* \equiv cu_+ \tag{4.59}$$

Η προσπίπτουσα ακτινική φωτοειδής γεωδαισιακή ($\frac{dr^*}{dt} = -c$) χαρακτηρίζεται από $v = \sigma\tau\alpha\theta$ και η εξερχόμενη ακτινική φωτοειδής γεωδαισιακή ($\frac{dr^*}{dt} = c$) χαρακτηρίζεται από $u = \sigma\tau\alpha\theta$. Τώρα θα περάσουμε στις συντεταγμένες **Eddington-Finkelstein** για εισερχόμενο ($cv = ct + r^*$) και εξερχόμενο σωματίδιο ($cu = ct - r^*$).

$$\left.\begin{array}{l} cdu + dr^* = cdt \\ cdv - dr^* = cdt \end{array}\right\} \overset{(cdt)^2}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} c^2dt^2 = c^2du^2 + dr^{*2} + 2cdudr^* \\ c^2dt^2 = c^2dv^2 + dr^{*2} - 2cdvdr^* \\ ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\left(-c^2dt^2 + dr^{*2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\left(-c^2du_{\pm}^2 \mp 2cdu_{\pm}dr^*\right)$$

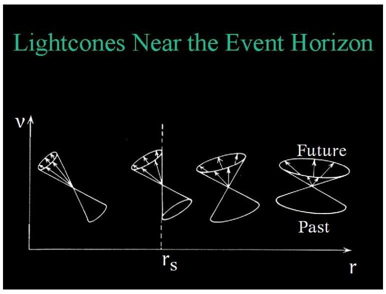
$$\left.\begin{array}{r} ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\left(-c^2du_{\pm}^2 \mp 2cdu_{\pm}dr^*\right) + r^2d\Omega \\ dr = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dr^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)c^2du_{\pm}^2 \mp 2cdu_{\pm}dr + r^2d\Omega \tag{4.60}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) & \mp c & 0 & 0 \\ \mp c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$ Μετρική **Schwarzschild** Σε Συντεταγμένες **Eddington-Finkelstein**.

Αυτή η μετρική εκτός της απαλλαγής της από την ιδιομορφία για $r = r_S$ έχει και μη μηδενική ορίζουσα οπότε μπορεί να οριστεί ο αντίστροφός. Από την κλίση των κώνων φωτός γίνεται φανερή πλέον η κακή επιλογή των συντεταγμένων **Schwarzschild** οι οποίες έδιναν μια επιπλέον ιδιομορφία.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)c^2du_{\pm}^2 \mp 2cdu_{\pm}dr = 0 \Rightarrow -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)c^2du_{\pm}^2 = \pm 2cdu_{\pm}dr \Rightarrow$$
$$\frac{d(cu_{\pm})}{dr} = \mp 2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$$



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα $v - r$. Δείχνει την συμπεριφορά των κώνων φωτός για εισερχόμενο παρατηρητή.

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει

$$\frac{d(cu_{\pm})}{dr} = \mp 2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \Rightarrow cv = 2r^* + C \Rightarrow cv = ct - r^* = C$$

Άρα οι κώνοι δεν αναδιπλώνουν οπότε ορίζουν μια επιφάνεια. Διότι η μια πλευρά του κώνου μένει οριζόντια για ($v = \sigma\tau\alpha\theta$) και η άλλη γίνεται κάθετη ($\frac{dv}{dr}\Big|_{r=r_S} = \infty$) με τα κοίλα προς την άλλη πλευρά. Ειδικότερα, πέρα από την ακτίνα **Schwarzschild** όλες οι μελλοντικός κατευθυνόμενες διαδρομές, εκείνες που κατευθύνονται προς τα εμπρός του κώνου φωτός, πρέπει να κινηθούν προς την κατεύθυνση μειούμενης της r : Σαφώς οι εισερχόμενες φωτοειδείς γεωδαισιακές κινούνται προς την κατεύθυνση προς μικρότερες τιμές της r, αλλά αυτές για $r > r_S$ πηγαίνουν προς τα έξω ($\frac{dr}{dv}\Big|_{r<r_S} < 0$ και δεν υπάρχει τρόπος να γυρίσουν πίσω σε μεγαλύτερες τιμές της r, όχι μόνο σε γεωδαισιακή άλλα ακόμα και με μεγάλη επιτάχυνση!.

Ωστόσο, ακόμα και αν τοπικά κοντά στην r_S η φυσική δεν παρουσιάζει κάποια περίεργη συμπεριφορά, συνολικά η επιφάνεια $r = r_S$ είναι πολύ σημαντική γιατί είναι ένα σημείο χωρίς επιστροφή. Αν κάποιος περάσει την ακτίνα **Schwarzschild** γι' αυτόν δεν υπάρχει επιστροφή. Αυτή η επιφάνεια ονομάζεται *ορίζοντας γεγονότων*. Σημειώνεται ότι είναι μια φωτοειδής επιφάνεια, ειδικότερα, αν κάποιος περάσει τον ορίζοντα γεγονότων πρέπει να ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός για να παραμείνει εκεί και να μην αναγκαστεί να κινηθεί προς το $r = 0$. Σημειώνεται ότι επειδή ισχύει $cv = ct + r^*$ και το $r^* \overset{r \to r_S}{\longrightarrow} -\infty$ για σταθερή cv πρέπει ο χρόνος $t \to \infty$. Άρα η νέα περιοχή για $r < r_S$ είναι κατά κάποιον τρόπο μια μελλοντική επέκταση του αρχικού χωρόχρονου **Schwarzschild**. Επίσης πλέον είναι φανερό ότι οτιδήποτε ξεπεράσει, ακόμα και το φως πόσο μάλλον οτιδήποτε άλλο, αυτήν την ακτίνα δεν υπάρχει τρόπος να ξεφύγει από την περιοχή που ορίζεται για $r < r_S$. Το γεγονός ότι είναι αδύνατη η επιστροφή, ακόμα και του φωτός, από αυτήν την περιοχή έδωσε το όνομα Μελανές οπές διότι "φαίνονται" μαύρες.

Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

Με την αλλαγή σε συντεταγμένες **Eddington-Finkelstein** μελετήσαμε μια περιοχή του χωρόχρονου αλλά αυτό έγινε μόνο για φωτοειδής γεωδαισιακές. Τώρα θα εξερευνήσουμε τον χωρόχρονο από χωροειδείς γεωδαισιακές. Μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε, ταυτόχρονα τις συντεταγμένες **Eddington-Finkelstein**, (u, v) αντί των (t, r), με αυτήν την επιλογή έχουμε.

$$\left.\begin{array}{l} cdu + dr^* = cdt \\ cdv - dr^* = cdt \end{array}\right\} \overset{+}{\underset{-}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{c} 4dt^2 = du^2 + dv^2 + 2dudv \\ \frac{4}{c^2}dr^{*2} = dv^2 + dv^2 - 2dvdu \\ ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\left(-c^2dt^2 + dr^{*2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dudv \tag{4.61}$$

Όμως σε αυτές τις συντεταγμένες ο ορίζοντας είναι μακριά, για $u = \infty$ & $v = -\infty$, οπότε ορίζουμε νέες συντεταγμένες

$$U = -e^{-\frac{u}{2r_S}} \quad \& \quad V = e^{\frac{v}{2r_S}}$$

$$c\frac{v-u}{r_S} = \frac{r}{r_S} + \ln\left(\frac{r}{r_S} - 1\right)$$

$$1 - \frac{r}{r_S} = \frac{r_S}{r}\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) = \frac{r_S}{r}e^{-\frac{r}{r_S}}e^{c\frac{v-u}{r_S}}$$

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = \frac{4r_S^3}{r}e^{-\frac{r}{r_S}}\frac{1}{2r_S}ce^{c\frac{v}{r_S}}dv(-\frac{1}{2r_S}ce^{c\frac{v}{r_S}}du) + r^2d\Omega \\ dU = -(-\frac{1}{2r_S}ce^{c\frac{v}{r_S}}du) \quad \& \quad V = \frac{1}{2r_S}ce^{c\frac{v}{r_S}}dv \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = -\frac{4r_S^3}{r}dUdV + r^2d\Omega$$

$$UV = -e^{\frac{c(v-u)}{2r_S}} = -e^{-\frac{r^*}{r_S}} = -e^{\frac{r}{r_S}}\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) \quad \& \quad \frac{U}{V} = -e^{-\frac{c(v+u)}{2r_S}} = -e^{-\frac{ct}{r_S}}$$

Τελικά θα κάνουμε έναν ακόμα μετασχηματισμό από τις φωτοειδής συντεταγμένες (U, V) σε χρονοειδείς και χωροειδείς συντεταγμένες

$$U = cT - X \quad \& \quad V = cT + X \Rightarrow cT = \frac{1}{2}(V + U) \quad \& \quad X = \frac{1}{2}(V - U) \tag{4.62}$$

$$\left.\begin{array}{l} dU = cdT - dX \\ dV = cdT + dX \end{array}\right\} \overset{dUdV}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{c} dUdV = c^2T^2 - X^2 \\ ds^2 = -\frac{4r_S^3}{r}dUdV + r^2d\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = -\frac{4r_S^3}{r}\left(c^2T^2 - X^2\right) + r^2d\Omega \tag{4.63}$$

$$c^2T^2 - X^2 = \frac{1}{4}(U^2 + V^2 + 2UV - U^2 - V^2 + 2UV) = UV = -e^{\frac{c(v-u)}{2r_S}} = -e^{\frac{r}{r_S}}\left(\frac{r}{r_S} - 1\right)$$

$$X(t, r) = e^{\frac{r}{2r_S}}\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}\cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \tag{4.64}$$

$$cT(t, r) = e^{\frac{r}{2r_S}}\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}\sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \tag{4.65}$$

Διάγραμμα Kruskal

Με τις νέες συντεταγμένες η μετρική δεν έχει καμία, μη πραγματική, ιδιομορφία για κανένα σημείο του χωρόχρονου. Οπότε μπορούμε να γενικεύσουμε τον χωρόχρονο **Schwarzschild**. Εφόσον η μόνη ιδιομορφία εμφανίζεται για $r = 0$ θα μελετήσουμε την γεωμετρία γύρω από αυτήν όπου.

$$r = 0: \quad c^2T^2 - X^2 = 1 \Rightarrow cT = \pm\sqrt{1 + X^2}$$

Η γεωμετρία είναι όντως προβληματική για $r = 0$. Παρόλα αυτά έχουμε ότι η μετρική είναι ομαλή για οποιαδήποτε τιμή του r θα υποθέσουμε τον περιορισμό $r > 0$ για τις συντεταγμένες (cT, X) οπότε $c^2T^2 - X^2 < 1$. Συμπεριλαμβανομένου αυτού του περιορισμού θα ορίσουμε το διάγραμμα **Kruskal**, το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες.

i) Οι φωτοειδείς γεωδαισιακές είναι διαγώνιες ($X = \pm cT + \sigma\tau\alpha\theta.$) όπως στον χώρο **Minkowski**.

ii) Ο ορίζοντας σε δύο ευθείες γραμμές $X = \pm cT$.

iii) Οι καμπύλες με σταθερό r είναι υπερβολές.

iv) Οι υπερβολές για $r < r_S$ γεμίζουν τις περιοχές I, II και για $r > r_S$ γεμίζουν τις περιοχές III, IV.

v) Η ιδιομορφία δίνεται από τα δύο φύλλα της υπερβολής $cT = \pm\sqrt{1 + X^2}$.

vi) Στις περιοχές II, IV οι κοσμικές γραμμές είναι χωροειδείς.

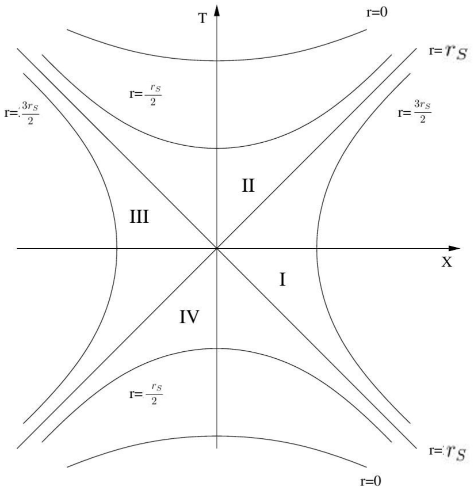
vii) Οι γραμμές με σταθερό χρόνο t είναι ευθείες γραμμές και όπου $cT(t, r) = \coth\left(\frac{ct}{2r_S}\right)X(t, r)$.

viii) Οι συντεταγμένες E -F καλύπτουν τις περιοχές I, II οι (v, r) και III, IV οι (u, r) αντίστοιχα.

ix) Η περιοχή III πρωτοεμφανίζεται και και διαχωρίζεται από την I κατά μια χωροειδή απόσταση.

Παρατηρητές στην περιοχή I μπορούν να λαμβάνουν σήματα από την περιοχή IV και να στέλνουν στην περιοχή II. Ένας παρατηρητής που θα βρεθεί στην περιοχή II είναι καταδικασμένος να πέσει στην $r = 0$ καθώς επίσης γεγονότα τα οποία λαμβάνουν χώρα σε αυτήν την περιοχή δεν παρατηρούνται δηλαδή σε αυτήν την περιοχή βρίσκεται η μελανή οπή.

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συντεταγμένων **Kruskal** είναι ότι παρόλο που ξεκινήσαμε με μια στατική γεωμετρία εμφανίζουν δυναμικές ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές εμφανίζονται μόνο στις περιοχές I, III η εξερεύνηση των χωροειδών γεωδαισιακών μας αποκαλύπτει συνεχόμενη βαρυτική κατάρρευση προς την περιοχή II η οποία είναι μια δυναμική ιδιότητά Η απώλεια της στατικότητας εξηγείται διότι το χρονικό διανυσματικό πεδίο **killing** στην περιοχή I εκφρασμένο στις συντεταγμένες Kruskal γίνεται φωτοειδές στον ορίζοντα και χωροειδές στην περιοχή II. Όντως παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός $(t, r) \rightarrow (t + t_0, r)$ οδηγεί.



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα Kruskal

$$U \rightarrow e^{-\frac{ct_0}{2r_S}}U \quad \& \quad V \rightarrow e^{\frac{ct_0}{2r_S}}V$$

Όπου αυτός ο μετασχηματισμός αφήνει συνολικά την μετρική αναλλοίωτη διότι έχουμε όρους $dUdV$ και η ακτίνα $r \sim UV$. Τα διανύσματα **killing** προκύπτουν από τον μετασχηματισμό $t \rightarrow t + t_0$.

$$\left.\begin{aligned} U \rightarrow U' = e^{-\frac{c(t+t_0)}{2r_S}} = e^{-\frac{ct_0}{2r_S}}U \approx (1 - \tfrac{ct_0}{2r_S})U \Rightarrow \delta U = -\tfrac{ct_0}{2r_S}U \\ V \rightarrow V' = e^{\frac{c(t+t_0)}{2r_S}} = e^{\frac{ct_0}{2r_S}}V \approx (1 - \tfrac{ct_0}{2r_S})V \Rightarrow \delta V = \tfrac{ct_0}{2r_S}V \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k^\mu = c\frac{V\partial_V - U\partial_U}{2r_S} = c\frac{X\partial_T + T\partial_X}{2r_S} \\ k^\mu k_\mu = \tfrac{r_S}{r}e^{-\frac{r}{r_S}}\left(c^2T^2 - X^2\right) \end{aligned} \tag{4.66}$$

Από όπου προκύπτουν για την περιοχή I.

$$\left.\begin{aligned} k^\mu k_\mu = \tfrac{r_S}{r}e^{-\frac{r}{r_S}}\left(c^2T^2 - X^2\right) \\ c^2T^2 - X^2 = -\left(\tfrac{r}{r_S} - 1\right)e^{\frac{r}{r_S}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k^\mu k_\mu = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$$

Όπου αποτελεί το χρονικό διάνυσμα **killing** για την γεωμετρία **Schwarzschild**.
Για την περιοχή II έχουμε ήδη παρατηρήσει πως είναι χωροειδής.
Για τον ορίζοντα $r = r_S$.

$$\left.\begin{aligned} k^\mu k_\mu = \tfrac{r_S}{r}e^{-\frac{r}{r_S}}\left(c^2T^2 - X^2\right) \\ c^2T^2 - X^2 = -\left(\tfrac{r}{r_S} - 1\right)e^{\frac{r}{r_S}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k^\mu k_\mu = 0$$

Ορίζοντας killing και Επιφανειακή Βαρύτητα

Γενικά αν ένα διανυσματικό πεδίο **killing** είναι φωτοειδές κατά μήκος μιας φωτοειδούς υπερεπιφάνειας Σ λέμε ότι η Σ είναι Ορίζοντας **killing** του διανυσματικού πεδίου **killing**. Πρέπει να επισημάνουμε ότι το διανυσματικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην Σ διότι μια φωτοειδής επιφάνεια δεν μπορεί να έχει δύο γραμμικός ανεξάρτητα εφαπτόμενα διανύσματα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να διαχωρίσουμε τις έννοιες ορίζοντας γεγονότων και ορίζοντας **killing** οι οποίες είναι ανεξάρτητες αλλά, για στατικές γεωμετρίες, όπως η **Schwarzschild**, στις οποίες υπάρχει η συμμετρία της χρονικής μετατόπισης, συνδέονται στενά. Θα προσθέσουμε μερικές συνθήκες για τις οποίες αυτές οι δύο έννοιες συνδέονται. Κάθε ορίζοντας γεγονότων ο οποίος είναι σταθερός και βρίσκεται σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο είναι και ορίζοντας **killing** για ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο είναι φωτοειδές. Ειδικότερα αν ο χωρόχρονος είναι στατικός τότε το διανυσματικό πεδίο είναι ∂_t. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως αν έχουμε έναν ορίζοντα **killing** τότε αυτό δεν συνεπάγεται ότι θα έχουμε είτε σταθερό είτε στατικό ορίζοντα γεγονότων ένα παράδειγμα θα μας πείσει για αυτό.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{L}_k g_{tt} = \partial_x k_x = 0\\ \mathfrak{L}_k g_{tt} = \partial_t k_t = 0\\ \mathfrak{L}_k g_{tx} = \partial_t k_x + \partial_x k_t = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}k_x = f(t)\\ k_t = g(x)\\ \partial_t f(t) + \partial_x g(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}k_x = t\\ k_t = -x\\ k^\mu = k^\tau\partial_\tau = g^{\mu\nu}k_\nu\partial_\mu\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$k^\mu = g^{t\nu}k_\nu\partial_\mu + g^{x\nu}k_\nu\partial_\mu = -ck_t\partial_t + 1k_x\partial_x = -\frac{1}{c}(-x)\partial_t + t\partial_x = c(x\partial_t + ct\partial_x)$$

$$k^\mu k_\mu = c^2(-x^2 + c^2t^2) = 0 \Rightarrow x = \pm ct$$

Όπου έχουμε ορίζοντα **killing** αλλά ούτε λόγος για ορίζοντα γεγονότων.

Σε κάθε ορίζοντα **killing** μπορούμε να συσχετίσουμε μια ποσότητα η οποία ονομάζεται επιφανειακή βαρύτητα. Υποθέτουμε ένα διάνυσμα **killing** k^μ σε έναν ορίζοντα **killing** Σ. Έχουμε ένα διάνυσμα l^μ κάθετο στον Σ, δηλαδή ισχύει $l^\mu\nabla_\mu l^\rho = 0$, λόγω του ότι το k^μ είναι συγγραμμικό του l^μ έχουμε $k^\mu = fl^\mu$.

$$k^\tau\nabla_\tau k^\mu = k^\tau\nabla_\tau\left(fl^\mu\right) = k^\tau(\partial_\tau f)l^\mu + f^2\underbrace{l^\tau\nabla_\tau l^\mu}_{=0} = k^\tau\frac{1}{f}(\partial_\tau f)k^\mu = k^\tau(\partial_\tau \ln|f|)k^\mu = \kappa k^\mu \tag{4.67}$$

Η ποσότητα κ ονομάζεται *επιφανειακή βαρύτητα*

Για να δούμε όμως τι είναι η επιφανειακή βαρύτητα. Για στατικό, ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο αν υποθέσουμε ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο βρίσκεται επάνω στην τροχιά ενός διανύσματος **killing** σε ηρεμία όπου για να γίνει διαισθητικά κατανοητό υποθέτουμε ότι βρίσκεται επάνω σε μια άμαζη, ανελαστική, κλωστή την οποία την κρατάει ένας παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται πολύ μακριά, πρακτικά στο άπειρο. Έστω ότι η F δύναμη ανά μονάδα μάζας, η τάση της κλωστής εδώ, την οποία μετράμε στο άπειρο. Η $F \to \kappa$ όσο οι τροχιές πλησιάζουν όλο και πιο κοντά στον ορίζοντα **killing**. Άρα η επιφανειακή βαρύτητα είναι η δύναμη η οποία απαιτείται στο άπειρο ώστε να κρατήσει ένα σωματίδιο με μάζα m σε ηρεμία επάνω στην τροχιά του διανύσματος **killing** κοντά στον ορίζοντα **killing**.

Στο σημείο αυτό καλό είναι να δούμε που δεν ορίζεται η επιφανειακή βαρύτητα. Από τον ορισμό της επιφανειακής βαρύτητας για την γεωμετρία **Schwarzschild** στις συντεταγμένες **Kruskal-Szekeres** υπάρχει πρόβλημα όταν $UV = 0$ όταν $U = 0$ & $V = 0$ διότι το διάνυσμα **killing** μηδενίζεται, $k \sim V\partial_V - U\partial_U$. Ας δούμε όμως τι συμβαίνει και υπάρχει αυτό το πρόβλημα. Έχουμε

$$U = -e^{-c\frac{u}{2r_S}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{-c}{2r_S}\left(t - r - r_S\ln\left(\frac{r}{r_S}-1\right)\right)} = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) \to -\infty \Rightarrow r \to r_S$$

$$V = e^{c\frac{v}{2r_S}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{c}{2r_S}\left(r + r_S\ln\left(\frac{r}{r_S}-1\right) - t\right)} = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) \to -\infty \Rightarrow r \to r_S$$

Όπου ορίζεται μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r_S αυτήν την σφαίρα την ονομάζουμε σφαίρα διακλάδωσης, του ορίζοντα **killing** για την γεωμετρία **Schwarzschild**, διότι διακλαδώνονται οι συντεταγμένες U, V. Εφόσον το διάνυσμα **killing** εξαφανίζεται αυτή η σφαίρα παραμένει αναλλοίωτη κάτω από χρονικές μετατοπίσεις.

Τώρα από την ερμηνεία της $\kappa = F(r \to \infty) = \alpha$ έχουμε ότι είναι η επιτάχυνση ενός στατικού σωματιδίου, μάζας m, κοντά στον ορίζοντα όπως μετράται από έναν παρατηρητή στο άπειρο. Στατικός όμως σημαίνει πως η τετραταχύτητα είναι ανάλογη του διανύσματος **killing** της χρονικής μετατόπισης άρα.

$$k^\mu = vu^\mu \Rightarrow k^\mu k_\mu = vu^\mu vu_\mu = v^2(-c^2) \Rightarrow v = \frac{1}{c}\sqrt{-k^\mu k_\mu} \Rightarrow u^\tau = \frac{ck^\tau}{\sqrt{-k^\mu k_\mu}}$$

$$\left.\begin{array}{l} u^\tau = \frac{ck^\tau}{\sqrt{-k^\mu k_\mu}} \\ a^\mu = u^\tau \nabla_\tau u^\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{ck^\tau}{(-k^\nu k_\nu)}\nabla_\tau k^\mu + \frac{ck^\mu k^\tau}{(-k^\nu k_\nu)^{\frac{1}{2}}}\nabla_\tau \left(-k^\mu k_\mu\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \nabla_\tau g^{\mu\rho} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{ck^\tau}{(-k^\mu k_\mu)} g^{\mu\rho}\nabla_\tau k_\rho - \frac{2ck^\mu k^\tau}{2(-k^\nu k_\nu)^{-2}}\nabla_\tau k_\mu \\ \mathfrak{L}_k g_{\tau\mu} = \nabla_\tau k_\mu + \nabla_\mu k_\tau = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{-ck^\tau}{-k^\nu k_\nu}\nabla^\mu k_\tau - \frac{2k^\mu k^\tau}{2(-k^\nu k_\nu)^{-2}}\nabla_\tau k_\mu \\ 2k^\mu k^\tau \nabla_\tau k_\mu = k^\mu k^\tau \left(\nabla_\tau k_\mu + \nabla_\mu k_\tau\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{c\partial^\mu (k_\tau k^\tau)}{2k^\tau k_\tau} \\ v^2 = -\frac{k_\tau k^\tau}{c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{c}{2v^2}\partial^\mu (v^2) \\ \frac{\partial^\mu g}{g} = \partial^\mu \ln|g| \end{array} \Rightarrow$$

$$a^\mu = c\partial^\mu \ln\left(-\frac{k^\tau k_\tau}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = c\partial^\mu \ln v \tag{4.68}$$

$$\alpha = \sqrt{a^\mu a_\mu} = c\sqrt{\partial^\mu \ln v \partial_\mu \ln v} = cv^{-1}\sqrt{\partial^\mu v \partial_\mu v} \tag{4.69}$$

Από το θεώρημα του **Frobenius** έχουμε ότι, διότι k κάθετο στην επιφάνεια Σ, ισχύει.

$$k_{[\mu}\nabla_\nu k_{\rho]} = \frac{1}{3!}\left(k_\mu \nabla_\nu k_\rho - k_\mu \nabla_\rho k_\nu + k_\rho \nabla_\mu k_\nu - k_\nu \nabla_\mu k_\rho + k_\nu \nabla_\rho k_\mu + k_\rho \nabla_\nu k_\mu\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(k_\mu \nabla_\nu k_\rho + k_\rho \nabla_\mu k_\nu + k_\nu \nabla_\rho k_\mu\right) = 0 \Rightarrow k_\mu \nabla_\nu k_\rho - k_\rho \nabla_\nu k_\mu + k_\nu \nabla_\rho k_\mu = 0 \overset{\nabla^\nu k^\rho}{\Rightarrow}$$

$$k_\mu \nabla^\nu k^\rho \nabla_\nu k_\rho - \nabla^\nu k^\rho k_\rho \nabla_\nu k_\mu + \nabla^\nu k^\rho k_\nu \nabla_\rho k_\mu = 0 \overset{\nabla^\nu k^\rho = -\nabla^\rho k^\nu}{\Longrightarrow}$$

$$k_\mu \nabla^\nu k^\rho \nabla_\nu k_\rho = -2k_\nu \nabla^\nu k^\rho \nabla_\rho k_\mu = -2\kappa k^\rho \nabla_\rho k_\mu = -2\kappa\kappa k_\mu = -2\kappa^2 k_\mu \Rightarrow k_\mu\left(\nabla^\nu k^\rho \nabla_\nu k_\rho + 2\kappa^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\nabla^\nu k^\rho \nabla_\nu k_\rho \tag{4.70}$$

Ας κάνουμε μερικούς υπολογισμούς για την επιφανειακή βαρύτητα σε γεωμετρία **Schwarzschild** που γνωρίζουμε πως είναι μια στατική γεωμετρία.

$$k^\mu = (1,0,0,0) \quad u^\mu = \left(\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0\right)$$

$$v = \sqrt{-k^\mu k_\mu} = \sqrt{-k^\mu k^\nu g_{\mu\nu}} = c\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_\mu = c\partial_\mu \ln v = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(-\frac{r_S}{r^2}\right)\partial_\mu r \Rightarrow \alpha^2 = a_\mu a^\mu = a_\mu a_\nu g^{\mu\nu} = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(\frac{r_S}{r^2}\right)$$

$$\frac{c}{2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(\frac{r_S}{r^2}\right) g^{rr} \Rightarrow \alpha = (a_\mu a^\mu)^{\frac{1}{2}} = \frac{cr_S}{2r^2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha v = \frac{cr_S}{2r^2}$$

Όπου έχουμε πως ασυμπτωτικά η επιφανειακή βαρύτητα για $r = r_S$ είναι $\kappa = v\alpha$.

$$\kappa = \alpha v = \left.\frac{cr_S}{2r^2}\right|_{r=r_S} = \frac{c}{2r_S} = \frac{c^3}{4GM}$$

Αφού υπολογίσαμε πόση είναι η επιφανειακή βαρύτητα για την μελανή οπή **Schwarzschild**. Θα δούμε πως η γεωμετρία κοντά στον ορίζοντα γεγονότων, σε αυτήν την περίπτωση ταυτίζεται με τον **killing**, περιγράφεται από τις συντεταγμένες **Rindler** και το πως συνδέεται η σταθερή επιτάχυνση με την επιφανειακή βαρύτητα και αργότερα με την θερμοκρασία. Παρατηρούμε πως η μετρική **Rindler** έχει μια ιδιομορφία για $\rho = 0$ αλλά τώρα θα αποδείξουμε πως αυτή είναι λόγω κακής επιλογής συντεταγμένων και όχι πραγματική ιδιομορφία, η απόδειξη θα γίνει χρησιμοποιώντας συντεταγμένες τύπου **Kruskal**.

$$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 + r_S^2 d\Omega = -k^2 dt^2 + d\rho^2 + \frac{c^2}{4k^2} d\Omega$$

$$\left.\begin{array}{r} U' = -\rho e^{-\eta} \\ V' = \rho e^{\eta} \end{array}\right\} \overset{d}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} dU' = -d\rho e^{-\eta} + \rho e^{-\eta} d\eta \\ dV' = d\rho e^{\eta} + \rho e^{\eta} d\eta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} e^{\eta} dU' = -d\rho + \rho d\eta \\ e^{-\eta} dV' = d\rho + \rho d\eta \end{array}\right\} \Rightarrow dV'dU' = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2$$

$$\left.\begin{array}{r} U' = cT - X \\ V' = cT + X \end{array}\right\} \overset{d}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} dU' = cdT - dX \\ dV' = cdT + dX \end{array}\right\} \Rightarrow dU'dV' = -c^2 dT^2 + dX^2$$

Θεωρούμε μια μετατόπιση στον χρόνο $t \to t + t_0$ οπότε παίρνουμε $\eta \to \eta + \eta_0$.

$$U' \to \hat{U}' = \rho e^{-(\eta+\eta_0)} = \rho e^{-\eta} e^{-\eta_0} = U' e^{-\eta_0} \approx (1 - \eta_0 + \ldots) U' \Rightarrow \delta U' = -\eta_0 U'$$

$$V' \to \hat{V}' = \rho e^{(\eta+\eta_0)} = \rho e^{\eta} e^{\eta_0} = V' e^{\eta_0} \approx (1 + \eta_0 + \ldots) V' \Rightarrow \delta V' = \eta_0 V'$$

$$k^\mu = \kappa \left(V' \partial_{V'} - U' \partial_{U'}\right) \Rightarrow k^\mu k_\mu = \kappa^2 (V'^2 \underbrace{g_{V'V'}}_{=0} - V'U' \underbrace{g_{V'U'}}_{=-\frac{1}{2}} - U'V' \underbrace{g_{U'V'}}_{=-\frac{1}{2}} + U'^2 \underbrace{g_{U'U'}}_{=0}) = -\eta_0^2 \rho^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} k^\mu k_\mu = -\kappa^2 \rho^2 = -(\kappa\rho)^2 \\ a^\mu = c\partial^\mu \ln\left(-\frac{k^\tau k_\tau}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow a^\mu = c\partial^\mu \ln\left(\frac{\kappa\rho}{c}\right) = c\frac{c}{\kappa\rho}\frac{\kappa}{c}\partial^\mu \rho = c\frac{1}{\rho}\delta^\mu_\rho$$

$$a^\mu a_\mu = \frac{c^2}{\rho^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{a^\mu a_\mu} = \frac{c}{\rho}$$

Για να δούμε πως συνδέονται όλες αυτές οι ποσότητες πρέπει να διερευνήσουμε τι διεργασίες συμβαίνουν κοντά σε μια μελανή οπή. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να δούμε τα κβαντικά φαινόμενα τα οποία λαμβάνουν χώρα στην περιοχή αυτή.

Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί και Διάγραμμα Penrose

Πριν προχωρήσουμε στην κβαντική θεωρία πεδίου ας δούμε τις περιοχές του χωρόχρονου στις οποίες θα μελετήσουμε τα κβαντικά φαινόμενα. Σύμμορφος χαρακτηρίζεται ένας μετασχηματισμός ο οποίος διατηρεί τις γωνίες αλλά μεταβάλλει το μέγεθος, είτε μειώνει είτε αυξάνει, της ποσότητας στην οποία κάνουμε τον μετασχηματισμό, στην περίπτωσή μας η μετρική. Θα υποθέσουμε ομαλή, C^∞, και υπερβολική ψευδο-**Riemannian**, $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$, πολλαπλότητα του χωρόχρονου οι δύο αυτές απαιτήσεις μας εξασφαλίζουν την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων και την ύπαρξη υπερεπιφανειών **Cauchy** οι οποίες ορίζουν των χώρο γύρω από την μελανή οπή.

Ορισμός 4.3.1. Υπερεπιφάνεια **Cauchy**
Μια υπερεπιφάνεια **Cauchy** είναι ένα στιγμιαίο επίπεδο στον χωρόχρονο. Χαρακτηριστικό της οποίας είναι ότι μας δίνει τις αρχικές συνθήκες του επίπεδου και καθορίζει μοναδικά το μέλλον και το παρελθόν. Μαθηματικώς περιγράφεται από ένα υποσύνολο του χωρόχρονου τα σημεία του οποίου δεν επικαλύπτονται από καμία χρονοειδή ή φωτοειδή καμπύλη.

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$$

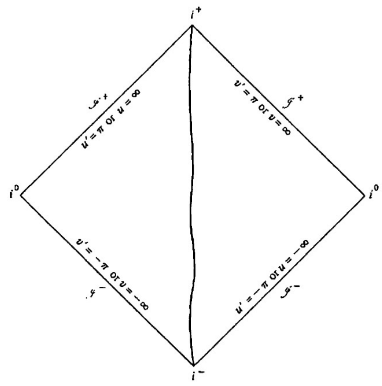
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \qquad \text{2-D } \textbf{Minkowski} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u = ct - x \\ v = ct + x \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = dudv$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u' = \frac{2}{\tan u} & u' \le -\pi \\ v = \frac{2}{\tan u} & v \le \pi \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = \frac{1}{4\cos^2\frac{u'}{2}\cos^2\frac{v'}{2}} du'dv' \Rightarrow \Omega^2 = \frac{1}{4\cos^2\frac{u'}{2}\cos^2\frac{v'}{2}}$$

$$ds'^2 = du'dv'$$

Ο Σύμμορφος αυτός μετασχηματισμός άφησε αναλλοίωτη την γεωμετρία η μόνη αλλαγή που επήλθε είναι η συρρίκνωση του άπειρου στις συνοριακές γραμμές, (u, v), οι οποίες εμφανίζονται στο διάγραμμα. Στο διάγραμμα αυτό εμφανίζονται κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά πρώτα από όλα οι φωτοειδείς καμπύλες σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{4}$, οι φωτοειδείς καμπύλες τερματίζουν στις συνοριακές γραμμές $\mathscr{I}^{\pm}$ οι οποίες ορίζουν το μελλοντικό, +, και παρελθοντικό, -, φωτοειδές άπειρο. Επίσης ασυμπτωτικά οι χρονοειδής καμπύλες τερματίζουν στο i^{+} (χρονοειδές άπειρο) ενώ οι χωροειδείς στο i^{0} (χωροειδές άπειρο).

Στην περίπτωση της $4-D$ μετρικής **Minkowski** έχουμε ότι τα φωτοειδή άπειρα είναι $3-D$ φωτοειδείς επιφάνειες και κάθε σημείο του χωρόχρονου περιγράφεται από μια $2-D$ σφαίρα εκτός από το i^{0}.

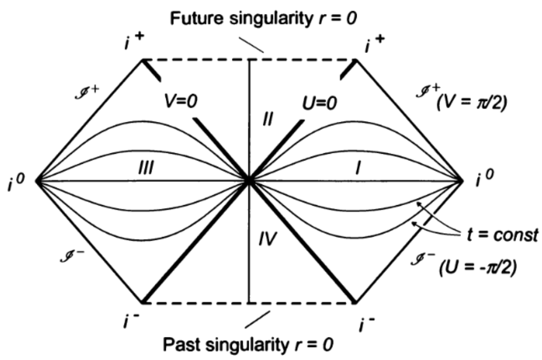


Σχήμα 4.4: Διάγραμμα Penrose για Minkowski

Μια χρονοειδής καμπύλη μπορεί ασυμπτωτικά να είναι φωτοειδής, π.χ. ένα σωματίδιο το οποίο υπόκειται σε συνεχόμενη σταθερή επιτάχυνση, πλησιάζοντας την ταχύτητα του φωτός καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Ανάλογα έχουμε το διάγραμμα **Penrose** για την μετρική **Schwarzschild** σε συντεταγμένες **Kruskal**.

$$ds'^2 = -\frac{r_S}{r}e^{-\frac{r_S^3}{r}}du'dv' + r^2 d\Omega$$

Το παρελθόν και το μέλλον περιγράφονται από τις ευθείες που ισχύει $r = 0$.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα Penrose για Kruskal

Κεφάλαιο 5

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε κάποιες διεργασίες οι οποίες λαμβάνουν χώρα στον καμπυλωμένο χωρόχρονο. Θα δούμε πως συμπεριφέρονται κβαντισμένα πεδία (σωματίδια) στον καμπυλωμένο χωρόχρονο, δηλαδή παρουσία βαρυτικού πεδίου, όπως κοντά στον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής. Είναι γνωστό πως δεν υπάρχει κάποια ενιαία θεωρία για την κβάντωση του βαρυτικού πεδίου αλλά η κβάντωση των άλλων πεδίων παρουσία του βαρυτικού πεδίου δίνει κομψά αποτελέσματα. Πριν ξεκινήσουμε με την κβάντωση των πεδίων θα χειριστούμε κλασικά πεδία τα οποία θα κβαντώσουμε. Ως συνέπεια αυτών θα δούμε την κβάντωση των πεδίων σε επίπεδο χωρόχρονο και ύστερα θα γενικεύσουμε σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

5.1 Αξιώματα της Κβαντομηχανικής

Για αρχή θα δούμε τα αξιώματα της κβαντομηχανικής και στην συνέχεια μέσω αυτών θα προκύψει η κβαντική θεωρία για τα πεδία.

i) Περιγραφή Της κατάστασης:
Όλες οι φυσικές καταστάσεις ενός κβαντικού συστήματος περιγράφονται μαθηματικά από ένα σύνολο από αριθμήσιμες ποσότητες p_k: $\sum\limits_k p_k = 1$, και από μοναδιαία διανύσματα $|\Psi(\boldsymbol{x};t)\rangle$ στο χώρο **Hilbert** $\mathscr{H}$

ii) Μετρήσιμες Ποσότητες:
Οι μετρήσιμες ποσότητες στην Κβαντομηχανική περιγράφονται από αυτοσυζυγείς (**Hermitian**) τελεστές που δρουν στον χώρο των καταστάσεων, δηλαδή στον χώρο **Hilbert** $\mathscr{H}$

iii) Μετρήσεις Παρατηρούμενων Ποσοτήτων:
Οι πιθανές τιμές των παρατηρήσιμων μεγεθών που μετρώνται δίνονται από την μέση τιμή του αυτοσυζυγούς (**Hermitian**) τελεστή που τις περιγράφει.

$$\langle A \rangle = \sum_i a_i p_i$$

iv) Η Δυναμική του συστήματος
Η Καταστάσεις του συστήματος που εξελίσσονται στον χρόνο υπακούουν στην εξίσωση.

$$\frac{d}{dt}|\Psi(\boldsymbol{x};t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathscr{H}|\Psi(\boldsymbol{x};t)\rangle$$

v) Αδυναμία Διάκρισης Των σωματιδίων:
Τα σωματίδια των οποίων οι κυματοσυναρτήσεις είναι άρτιες στην εναλλαγή ονομάζονται $\mathfrak{BoSonS}$ και τα σωματίδια των οποίων οι κυματοσυναρτήσεις είναι περιττές στην εναλλαγή ονομάζονται $\mathfrak{FermionS}$ και υπακούν τις εξής μεταθετικές και αντιμεταθετικές σχέσεις αντίστοιχα.

$$[\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2] = \hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2 - \hat{\Psi}_2\hat{\Psi}_1 = 0 \qquad \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\} = \hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2 + \hat{\Psi}_2\hat{\Psi}_1 = 0$$

5.1.1 Χώρος Hilbert

Τώρα θα ορίσουμε των χώρο **Hilbert** $\mathcal{H}$ των κβαντικών καταστάσεων. Όπως είπαμε κάθε κβαντική κατάσταση περιγράφεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτών τον μιγαδικό διανυσματικό χώρο. Έχουμε συζητήσει σχετικά με τους διανυσματικούς χώρους έναν τέτοιο θα αποτελέσει και ο **Hilbert**.

$$\mathcal{H} = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, ..., |\psi_n\rangle\}$$

όπου $|\psi_1\rangle$ αποτελούν τα διανύσματα (ket) και τα $\langle\psi_1|$ τα δυικά διανύσματα (bra). Τα οποία ορίζουν

$$\mathcal{H}^* = \{\langle\psi_1|, \langle\psi_2|, ..., \langle\psi_n|\}$$

Μεταξύ των διανυσμάτων (ή των δυικών διανυσμάτων) ορίζεται το τανυστικό γινόμενο .

$$|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes ... \otimes |\psi_n\rangle$$

και μεταξύ των διανυσμάτων και των δυικών τους ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle \geq 0 \text{ ίσο με } 0 \Leftrightarrow |\psi_1\rangle = 0 \text{ ή } \langle\psi_2| = 0 \text{ ή } |\psi_1\rangle \perp \langle\psi_2|$$

5.1.2 Κβαντικός Αρμονικός Ταλαντωτής - BoSonS

Ένα χαρακτηριστικό και πολύ σημαντικό δυναμικό της κβαντομηχανικής είναι αυτό του αρμονικού ταλαντωτή. Όπου από το θεώρημα του **Taylor** μπορούμε να υποθέσουμε πως κάθε δυναμικό το οποίο έχει ακρότατο μπορεί να προσεγγιστεί από το δυναμικό αυτό

Απόδειξη. Έστω F μια αναλυτική συνάρτηση με ακρότατο στο x_0. Από το θεώρημα **Taylor** έχουμε.

$$F(x) \approx \overbrace{F(x_0)}^{a} + \frac{1}{1!}\overbrace{\partial_x\ F(x)|_{x=x_0}}^{=0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\overbrace{\partial_x^2\ F(x)|_{x=x_0}}^{k}(x-x_0)^2 = a + \frac{1}{2!}k(x-x_0)^2 \qquad \square$$

Η εξίσωση **Schrödinger** στην μια διάσταση έχει την μορφή.

$$\mathscr{H}|\psi\rangle = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right]|\psi\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

ορίζουμε τις αδιάστατες ποσότητες. $z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \ e = \frac{E}{\hbar\omega}$

$$\mathscr{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}z^2\right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\hbar\omega}{2}z^2\right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\hbar\omega}{2}z^2\right]$$

$$\mathscr{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2\right] = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial z} + z\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + z\right) - [z, \partial_z]\right] = \frac{\hbar\omega}{2}(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}^\dagger = (-\partial_z + z) \\ \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_z + z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{a}^\dagger = \left(\frac{i^2\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\partial_x + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \\ \hat{a} = \left(-\frac{i^2\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\partial_x + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{a}^\dagger = \left(\frac{i\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}\right) \\ \hat{a} = \left(-\frac{i\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}\right) \end{array}\right\}$$

Θα ορίσουμε τις μεταθετικές σχέσεις των τελεστών αυτών και θα τους δώσουμε φυσική σημασία.

$$\begin{aligned} &\hat{a}, \hat{a}] = 0, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \\ &[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, [\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} + \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}, \\ &[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]\hat{a} + \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \end{aligned}$$

Υποθέτουμε $|n\rangle$ ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα του τελεστή $\hat{N}$ οπότε έχουμε.

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \tag{5.1}$$

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $\hat{N}$ δρα στην $\hat{a}|n\rangle$ και στην $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ έχουμε

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = \hat{a}(n-1)|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle = \hat{N}|n-1\rangle \tag{5.2}$$

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = \hat{a}^\dagger(n+1)|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{N}|n+1\rangle \tag{5.3}$$

Οπότε ο τελεστής $\hat{a}$ μειώνει κατά ένα κβάντο ενώ ο τελεστής $\hat{a}^\dagger$ αυξάνει κατά ένα κβάντο. Συνεπώς τους τελεστές αυτούς τους ονομάζουμε τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα, διότι ο $\hat{a}$ καταστρέφει ενώ ο $\hat{a}^\dagger$ δημιουργεί κβάντα ενέργειας. Ο τελεστής $\hat{N}$ είναι ο τελεστής αρίθμησης των κβάντων ενέργειας. Η ιδέα του ταλαντωτή θα μας φανεί χρήσιμη παρακάτω διότι τα κβάντα στην θεωρία πεδίου θα είναι τα σωματίδια και θα τα καταστρέφουμε σε ένα σημείο του χώρου και θα τα δημιουργούμε σε ένα άλλο. Άλλη μια χρήσιμη έννοια είναι η κατάσταση κενού όπου έχουμε.

$$\hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle \tag{5.4}$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = b_n|n-1\rangle \tag{5.5}$$

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \Rightarrow n\langle n|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \Rightarrow b_n^* b_n\langle n-1|n-1\rangle = n \Rightarrow$$

$$b_n = \sqrt{n} \tag{5.6}$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = a_n|n+1\rangle$$

$$\hat{N}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)|n\rangle \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle \Rightarrow \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle \Rightarrow \langle n+1|a_n^* a_n|n+1\rangle = n+1$$

$$a_n = \sqrt{n+1} \tag{5.7}$$

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = \sqrt{0+1}|1\rangle = |1\rangle \Rightarrow \hat{a}^\dagger|1\rangle = \sqrt{1+1}\sqrt{0+1}|2\rangle \Rightarrow \ldots(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{(n-1)+1}\cdots\sqrt{1}|n\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \tag{5.8}$$

5.1.3 Κβαντικός Αρμονικός Ταλαντωτής - FermionS

Κατ' αναλογία με τα BoSonS θα θεωρήσουμε μια hamiltonian και για τα FermionS. Θα υποθέσουμε.

$$\mathscr{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \hat{c}\hat{c}^\dagger\right) \tag{5.9}$$

όπου ισχύουν οι αντιμεταθετικές σχέσεις

$$\{\hat{c},\hat{c}\} = 0, \{\hat{c}^\dagger,\hat{c}^\dagger\} = 0, \{\hat{c},\hat{c}^\dagger\} = \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c} = 1$$

Η hamiltonian με αυτές τις σχέσεις αντιμετάθεσης γίνεται.

$$\mathscr{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c} - (-\hat{c}^\dagger\hat{c}+1)\right) = \hbar\omega\left(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \frac{1}{2}\right)$$

Επίσης από τις σχέσεις αντιμετάθεσης έχουμε.

$$\hat{c}\hat{c}|n\rangle = 0|n\rangle \quad \& \quad \hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger|n\rangle = 0|n\rangle$$

$$\hat{N}^2 = \hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{c}^\dagger\hat{c} = \hat{c}^\dagger(1-\hat{c}^\dagger\hat{c})\hat{c} = \hat{c}^\dagger\hat{c} - \hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{c} = \hat{N} - 0 = \hat{N} \Rightarrow \hat{N}(\hat{N}-1) = 0$$

$$\mathscr{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(0-\frac{1}{2}\right)|0\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle, \quad \mathscr{H}|1\rangle = \hbar\omega\left(1-\frac{1}{2}\right)|1\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle$$

$$\hat{c}^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{c}|0\rangle = \hat{c}\hat{c}|1\rangle = 0, \quad \hat{c}^\dagger|1\rangle = \hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger|0\rangle = 0, \quad \hat{c}|1\rangle = \hat{c}\hat{c}^\dagger|0\rangle = (-\hat{c}^\dagger c+1)|0\rangle = 1|0\rangle$$

Αν θεωρήσουμε δυο Spinors. $|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\hat{c}|0\rangle = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow b = d = 0 \ \&\ \hat{c}\hat{c} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a^2\\ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$$

$$\hat{c} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$$

$$\hat{c} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \hat{c}^\dagger = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \hat{c}^\dagger\hat{c} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \mathscr{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στον ορισμό των πεδίων σε κλασικό επίπεδο για αρχή και εν συνεχεία θα εισαγάγουμε την έννοια της κβάντωσης.

5.2 Πεδία Σε Ευκλείδειο Χώρο

Ένα πεδίο σε κλασικό πλαίσιο είναι μια αλληλουχία από N σωματίδια μάζας m τα οποία ισαπέχουν (κατά a) και είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με δύναμη ***Hooke*** των οποίων η σταθερά ελατηρίου είναι K . Οπότε από τις εξισώσεις κίνησής του Newton έχουμε.

$$m\ddot{q}_{l(t)} = -K(q_l(t) - q_{l-1}(t)) + K(q_{l+1}(t) - q_l(t)) \Rightarrow \ddot{q}_l(t) = \frac{K}{m}(q_{l-1}(t) - 2q_l(t) + q_{l+1}(t)) \tag{5.11}$$

όπου οι λύσεις της εξισώσεις είναι τα επίπεδα κύματα με περιοδικές συνθήκες για $K : q_{l+N} = q_l$

$$\left.\begin{array}{c} q_{l(t)} = Ce^{\pm i(kla-\omega t)} \\ m\ddot{q}_l = \frac{K}{m}(q_{l-1} - 2q_l + q_{l+1}) \end{array}\right\} \omega^2 e^{\pm i(kla-i\omega t)} = \frac{-K}{m}(e^{\pm i(k(l-1)a-\omega t)} - 2e^{\pm i(kla-\omega t)} + e^{\pm i(k(l+1)a-\omega t)})$$

$$\omega_k^2 = -\frac{K}{m}(e^{\mp ika} - 2 + e^{\pm ika}) = -\frac{K}{m}(2\cos ka - 2) = \frac{2K}{m}2\sin^2\frac{ka}{2} \Rightarrow \omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| = \omega_{-k} \tag{5.12}$$

Τελικά η λύση είναι υπέρθεση για όλα τα k.

$$\left.\begin{array}{c} q_l(t) = \sum\limits_k C_k e^{i(kla-\omega_k t)} + C_k^* e^{-i(kla-\omega_k t)} \\ p_l(t) = im\sum\limits_k -\omega_k C_k e^{i(kla-\omega_k t)} + \omega_k C_k^* e^{-i(kla-\omega_k t)} \\ A_k = C_k e^{-i\omega_k t} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} q_l(t) = \sum\limits_k A_k e^{ikla} + A_k^* e^{-ikla} \\ p_l(t) = i\sum\limits_k -m\omega_k A_k e^{ikla} + m\omega_k A_k^* e^{-ikla} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} q_l(t) = \sum\limits_k A_k e^{ikla} + \sum\limits_k A_k^* e^{-ikla} \\ p_l(t) = i\sum\limits_k -m\omega_k A_k e^{ikla} + \sum\limits_k m\omega_k A_k^* e^{-ikla} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} q_l(t) = \sum\limits_k A_k e^{ikla} + \sum\limits_{-k} A_{-k}^* e^{ikla} \\ p_l(t) = i\sum\limits_k -m\omega_k A_k e^{ikla} + \sum\limits_{-k} m\omega_{-k} A_{-k}^* e^{-ikla} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} q_l(t) = \sum\limits_k \left(A_k + A_{-k}^*\right) e^{ikla} \\ p_l(t) = \sum\limits_k im\omega_k \left(A_{-k}^* - A_k\right) e^{ikla} \\ \frac{1}{N}\sum\limits_{l=0}^{N} e^{il(k-k')a} = \delta_k^{k'} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A_k + A_{-k}^* = \frac{1}{N}\sum\limits_{l=0}^{N} q_l(t)e^{-ikla} \\ A_k - A_{-k}^* = \frac{i}{Nm\omega_k}\sum\limits_{l=0}^{N} p_l(t)e^{-ikla} \end{array}\right\}$$

$$A_k = \frac{1}{2N}\sum_{l=0}^{N}\left(q_l + \frac{i}{m\omega_k}p_l\right)e^{-ikla}$$

$$A_k^* = \frac{1}{2N}\sum_{l=0}^{N}\left(q_l - \frac{i}{m\omega_k}p_l\right)e^{ikla}$$

Από τις σχέσεις αυτές θα προκύψει η hamiltonian του συστήματος η οποία είναι.

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\sum_{l=0}^{N} p_l^2 + \frac{1}{2}K\sum_{l=0}^{N}(q_l - q_{l+1})^2$$

$$\mathscr{H} = \sum_{k,k',l=0}^{N} \frac{i^2 m^2 \omega_k \omega_{k'}}{2m}(A_{-k}^* - A_k)(A_{-k'}^* - A_{k'})^2 e^{i(k+k')la}$$

$$+ \frac{K}{2}(A_{-k}^* + A_k)(A_{-k'}^* + A_{k'})(1 - e^{ika})(1 - e^{ik'a})e^{i(k+k')la}$$

$$\mathscr{H} = \sum_{k,k'} \frac{N\delta_{-k'}^{k}}{2}\left(m\omega_k^2(A_{-k}^* A_{k'} + A_k A_{-k'}^* - A_{-k}^* A_{-k'}^* - A_k A_{k'})\right.$$

$$\left. + K(A_{-k}^* A_{-k'}^* + A_k A_{k'} + A_{-k}^* A_{k'} + A_k A_{-k'}^*)(1 - e^{ika} - e^{ik'a} + e^{i(k+k')a})\right)$$

$$\mathscr{H} = N\sum_k \frac{m\omega_k^2}{2}(A_{-k}^* A_{-k} + A_k A_k^* - A_{-k}^* A_k^* - A_k A_{-k})$$

$$+ \frac{K}{2}(A_{-k}^* A_k^* + A_k A_{-k} + A_{-k}^* A_{-k} + A_k A_k^*)(\overbrace{1 - e^{ika} - e^{-ika} + e^{i(k-k)a}}^{2(1-\cos ka) = \frac{m}{K}\omega_k^2})$$

$$\mathscr{H} = N\sum_k \frac{m\omega_k^2}{2}\left(A^*_{-k}A_{-k} + A_kA^*_k - A^*_{-k}A^*_k - A_kA_{-k} + A^*_{-k}A^*_k + A_kA_{-k} + A^*_{-k}A_{-k} + A_kA^*_k\right)$$

$$\mathscr{H} = \sum_k Nm\omega_k^2\left(A^*_{-k}A_{-k} + A_kA^*_k\right)$$

$$\mathscr{H} = \sum_k Nm\omega_k^2 A^*_{-k}A_{-k} + \sum_k Nm\omega_k^2 A_kA^*_k \overset{\omega_k=\omega_{-k}}{=} \sum_k Nm\omega_k^2(A^*_kA_k + A_kA^*_k)$$

Εφόσον τα πεδία είναι κλασικά ισχύει.

$$\mathscr{H} = 2Nm\sum_k \omega_k^2 A^*_kA_k$$

5.2.1 Κβάντωση Κλασικού Πεδίου

Εφόσον εξαγάγαμε την κλασική hamiltonian θα την κβαντώσουμε μέσω των μεταθετικών σχέσεων.

$$[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 \ [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0 \ [\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\hbar\delta_{ab} \tag{5.13}$$

$$[\hat{A}_k, \hat{A}^\dagger_{k'}] = \left[\frac{1}{2N}\sum_{l=0}^{N}\left(\hat{q}_l + \frac{i}{m\omega_k}\hat{p}_l\right)e^{-ikla}, \frac{1}{2N}\sum_{l'=0}^{N}\left(\hat{q}_{l'} - \frac{i}{m\omega_{k'}}\hat{p}_{l'}\right)e^{ik'l'a}\right]$$

$$[\hat{A}_k, \hat{A}^\dagger_{k'}] = \sum_{l,l'=0}^{N}\frac{e^{-ik'l'a+ikla}}{2^2N^2}\left[\hat{q}_l + \frac{i}{m\omega_k}\hat{p}_l, \hat{q}_{l'} - \frac{i}{m\omega_{k'}}\hat{p}_{l'}\right]$$

$$[\hat{A}_k, \hat{A}^\dagger_{k'}] = \sum_{l,l'=0}^{N}\frac{e^{-ik'l'a+ikla}}{2^2N^2}\left\{[\hat{q}_l, \hat{q}_{l'}] - \left(\frac{i}{m\omega_k}\right)^2[\hat{p}_l, \hat{p}_{l'}] - \frac{i}{m\omega_{k'}}[\hat{q}_l, \hat{p}_{l'}] + \frac{i}{m\omega_k}[\hat{p}_l, \hat{q}_{l'}]\right\}$$

$$[\hat{A}_k, \hat{A}^\dagger_{k'}] = \sum_{l,l'=0}^{N}\frac{e^{-ik'l'a+ikla}}{2^2N^2}\left(-\frac{i^2\hbar}{m\omega_{k'}}\delta^l_{l'} - \frac{i^2\hbar}{m\omega_k}\delta^l_{l'}\right) = \sum_{l=0}^{N}\frac{e^{-i(k'+k)la}}{2^2N^2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_{k'}} + \frac{\hbar}{m\omega_k}\right)$$

$$[\hat{A}_k, \hat{A}^\dagger_{k'}] = \frac{N\delta_{kk'}}{2^2N^2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_{k'}} + \frac{\hbar}{m\omega_k}\right) = \frac{1}{2^2N}\frac{2\hbar}{m\omega_k}\delta_{kk'} = \frac{1}{2N}\frac{\hbar}{m\omega_k}\delta_{kk'} \tag{5.14}$$

Κανονικοποιούμε τους τελεστές $\hat{A}_k, \hat{A}^\dagger_k$ έτσι ώστε $[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{k'}] = \delta_{kk'}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_k &= \sqrt{\tfrac{2Nm\omega_k}{\hbar}}\hat{A}_k \\ \hat{a}^\dagger_k &= \sqrt{\tfrac{2Nm\omega_k}{\hbar}}\hat{A}^\dagger_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{q}_l &= \sum_k\sqrt{\tfrac{\hbar}{2mN\omega_k}}\left(\hat{a}^\dagger_{-k} + a_k\right)e^{ikla} \\ \hat{p}_l &= \sum_k i\sqrt{\tfrac{\hbar m\omega_k}{2N}}\left(\hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_k\right)e^{ikla} \end{aligned}$$

$$\mathscr{H} = \sum_k Nm\omega_k^2(\hat{A}^\dagger_k\hat{A}_k + \hat{A}_k\hat{A}^\dagger_k) = \sum_k Nm\omega_k^2\frac{\hbar}{2Nm\omega_k}(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k) = \sum_k\frac{\hbar\omega_k}{2}(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k)$$

$$\mathscr{H} = \sum_k\hbar\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right)$$

Η οποία αποτελεί την hamiltonian του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. Αν υποθέσουμε ότι περνάμε στο όριο του συνεχούς ($a \to 0$) δηλαδή τα σωματίδια έρχονται πολύ κοντά και τείνουν να δημιουργήσουν μια συνεχή χορδή. Η χορδή αυτή πλέον θα αποτελέσει το πεδίο το οποίο θα μελετήσουμε στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου (Όπως το φωτόνιο που είναι ηλεκτρομαγνητικό πεδίο). Καθώς

$a \to 0 \Rightarrow la = x$ όπου είναι η μεταβλητή προσδιορισμού της θέσης.

$\left.\begin{matrix} a \to 0 \\ m \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{m}{a} = \mu$ όπου είναι η γραμμική πυκνότητα μάζας.

$\left.\begin{matrix} a \to 0 \\ N \to \infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow Na = L$ όπου είναι το μήκος της χορδής.

Με αυτές τις αντικαταστάσεις θα επαναορίσουμε τις σχέσεις για τα $(\hat{q}_l, \hat{p}_l)$.

$$q(x) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2mN\omega_k}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} + \hat{a}_k\right) e^{ikla} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\frac{m}{a}aN\omega_k}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} + \hat{a}_k\right) e^{ikla}$$

$$q(x) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu L\omega_k}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} + \hat{a}_k\right) e^{ikx}$$

$$p(x) = \sum_k i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_k}{2N}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_k\right) e^{ikla} = \sum_k ia\sqrt{\frac{\hbar\frac{m}{a}\omega_k}{2Na}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_k\right) e^{ikla} = a\sum_k i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega_k}{2L}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_k\right) e^{ikx}$$

$$\pi(x) \equiv \sum_k i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega_k}{2L}} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_k\right) e^{ikx}$$

Σε αυτήν την περίπτωση τα αθροίσματα θα μετατραπούν σε ολοκληρώματα ως προς $la \equiv x$.

$$a_k = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar L}} q(x) + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\mu L}}\pi(x)\right) e^{-ikx}dx \quad \hat{a}^\dagger_k = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar L}} q(x) - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\mu L}}\pi(x)\right) e^{ikx}dx$$

$$\left[\hat{a}^\dagger_{-k} \pm \hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'} \pm \hat{a}_{k'}\right] = \underbrace{[\hat{a}^\dagger_{-k}, \hat{a}^\dagger_{-k'}]}_{=0} \pm [\hat{a}^\dagger_{-k}, \hat{a}_{k'}] \pm [\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'}] + \underbrace{[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}]}_{=0} = \pm(\underbrace{[\hat{a}^\dagger_{-k}, \hat{a}_{k'}]}_{=-\delta_{-k,k'}} + \underbrace{[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'}]}_{=\delta_{-k,k'}} = 0$$

$$\left[\hat{a}^\dagger_{-k} \pm \hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'} \mp \hat{a}_{k'}\right] = \underbrace{[\hat{a}^\dagger_{-k}, \hat{a}^\dagger_{-k'}]}_{=0} \mp [\hat{a}^\dagger_{-k}, \hat{a}_{k'}] \pm [\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'}] - \underbrace{[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}]}_{=0} = \mp \underbrace{[\hat{a}^\dagger_{-k}, \hat{a}_{k'}]}_{=-\delta-k,k'} + \underbrace{[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'}]}_{=\delta-k,k'} = \pm 2\delta_{-k,k'}$$

Οπότε οι σχέσεις μετάθεσης των πεδίων γίνονται

$$[\hat{q}(x), \hat{q}(x')] \sim [\hat{a}^\dagger_{-k} + \hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'} + \hat{a}_{k'}] = 0 \quad [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(x')] \sim [\hat{a}^\dagger_{-k} - \hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{-k'} - \hat{a}_{k'}] = 0$$

$$[\hat{q}(x), \pi(x')] = \sum_{kk'} i\frac{\hbar}{2L} \left(\hat{a}^\dagger_{-k} + \hat{a}_k\right)\left(\hat{a}^\dagger_{-k'} - \hat{a}_{k'}\right) e^{ik'x'}e^{ikx} = \sum_{kk'} i\frac{\hbar}{2L} 2\delta_{-kk'} e^{ik'x'}e^{ikx}$$

$$[\hat{q}(x), \hat{\pi}(x')] = \sum_k i\frac{\hbar}{L} e^{ik(x'-x)} = i\frac{\hbar}{L} L\delta(x'-x) = i\hbar\delta(x-x')$$

5.2.2 Εικόνες Schrödinger & Heisenberg

Εφόσον έχουμε ορίσει πλέον τις μεταθετικές σχέσεις των πεδίων και έχουμε περάσει από την κλασική στην κβαντική θεωρία θα κάνουμε την πλήρη σύνδεση της κβαντικής θεωρίας με την κλασική.
Η αναπαράσταση των καταστάσεων με τον συμβολισμό του Dirac μας δίνει.

$$\hat{q}_k|q'\rangle = q'_k|q'\rangle$$
$$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$$
$$\langle q|\hat{p}_k|q'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k}\langle q|q'\rangle = -i\hbar\frac{\partial\delta(q-q')}{\partial q_k}$$
$$\langle q|p'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-ip'_k q^k}$$

Οπότε για κάθε (αναλυτική) συνάρτηση των (q, p) έχουμε.

$$\langle q|\hat{A}\left(q, -i\hbar\partial_q\right)|q'\rangle = \hat{A}\left(q, -i\hbar\partial_q\right)\langle q|q'\rangle = \hat{A}\left(q, -i\hbar\partial_q\right)\delta(q-q')$$

Στην εικόνα **Schrödinger** η κατάσταση ενός σωματιδίου στην αναπαράσταση της θέσης δίνεται από την σχέση $\Psi(q) = \langle q|\Psi\rangle$. Η δυναμική ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση.

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathscr{H}(q, p; t)|\Psi(t)\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(q;t)\rangle = \langle q|\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle q|\mathscr{H}(q,p;t)|\Psi(t)\rangle = \int\langle q|\mathscr{H}(q,p;t)|q''\rangle dq''\langle q''| = \frac{1}{i\hbar}\mathscr{H}(q, -i\hbar\partial_q; t)|\Psi(q;t)\rangle$$

$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t;t_0)|\Psi(t_0)\rangle \Rightarrow |\Psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t_0;t_0)|\Psi(t_0)\rangle \Rightarrow \hat{U}(t_0;t_0) = 1$

$\frac{d}{dt}\hat{U}(t;t_0)|\Psi(t_0)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathscr{H}(t)\hat{U}(t;t_0)|\Psi(t_0)\rangle \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{U}(t;t_0) = \frac{1}{i\hbar}\mathscr{H}(t)\hat{U}(t;t_0)$

Η δυναμική του τελεστή $\hat{U}(t;t_0)$ επιβάλει

$\hat{U}(t;t_0)\hat{U}(t_0;t) = \hat{U}(t_0;t_0) = 1 \Rightarrow \hat{U}(t;t_0) = \hat{U}(t_0;t)^{-1} = \hat{U}^\dagger(t_0;t) \Rightarrow \hat{U}(t;t_0)\hat{U}^\dagger(t_0;t) = \hat{U}^\dagger(t;t_0)\hat{U}(t_0;t)$

Άρα στην εικόνα **Schrödinger** η δυναμική του συστήματος, το οποίο εξελίσσεται αιτιωδώς, περιγράφεται από την δράση ενός μοναδιαίου τελεστή ο οποίος δρα σε κάθε σταθερή κατάσταση του συστήματος. Για την εικόνα **Heisenberg** έχουμε πως οι καταστάσεις περιγράφονται από την δράση του συζυγούς μοναδιαίου τελεστή πάνω στις καταστάσεις **Schrödinger**. Η εικόνα **Heisenberg** περιγράφει σταθερές καταστάσεις και εξελισσόμενους τελεστές ενώ η **Schrödinger** εξελισσόμενες καταστάσεις και στατικούς τελεστές. Εδώ οι δείκτες S και H θα αναφέρουν ποια εικόνα χρησιμοποιείται κάθε φορά.

$$|\Psi_H\rangle = \hat{U}^\dagger(t_0;t)|\Psi_S(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t_0;t)\hat{U}(t;t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle$$

$$\hat{A}_H|\Psi_H\rangle = \hat{U}^\dagger(t_0;t)\hat{A}_S|\Psi_S(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t_0;t)\hat{A}_S\hat{U}(t;t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle \Rightarrow \hat{A}_H = \hat{U}^\dagger(t_0;t)\hat{A}_S\hat{U}(t;t_0) \tag{5.15}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_H = \hat{U}^\dagger\hat{A}_S\hat{U} \\ \frac{d\hat{A}_H}{dt} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt}\hat{A}_S\hat{U} + \hat{U}^\dagger\frac{d\hat{U}}{dt}\hat{A}_S\hat{U} + \frac{\partial\hat{A}_H}{\partial t} \\ \frac{dU}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\mathscr{H}\hat{U} \ \& \ \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\hat{U}^\dagger\mathscr{H} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\hat{U}^\dagger\mathscr{H}\hat{A}_S\hat{U} + \frac{1}{i\hbar}\hat{U}^\dagger\hat{A}_S\mathscr{H}\hat{U} + \hat{U}^\dagger\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\hat{U}$$

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{A}_S\hat{U}\hat{U}^\dagger\mathscr{H}\hat{U} - \hat{U}^\dagger\mathscr{H}\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{A}_S\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{U}] + \hat{U}^\dagger\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\hat{U} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_H\mathscr{H}_H - \mathscr{H}_H\hat{A}_H] + \hat{U}^\dagger\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\hat{U}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{B}_S = \frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t} \Rightarrow \hat{B}_H = \hat{U}^\dagger\hat{B}_S\hat{U} = \hat{U}^\dagger\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\hat{U} \\ i\hbar\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \hat{A}_H\mathscr{H}_H - \mathscr{H}_H\hat{A}_H + i\hbar\hat{U}^\dagger\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\hat{U} \end{matrix}\right\} \Rightarrow i\hbar\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \left[\hat{A}_H, \mathscr{H}_H\right] + i\hbar\frac{\partial\hat{A}_H}{\partial t}, \ \ \hat{A}_H = \hat{A}_H(q,p;t) \tag{5.16}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την σύνδεση της κλασικής δυναμικής με την κβαντομηχανική στην οποία ταυτίζουμε των μεταθέτη των τελεστών με τις αγκύλες **Poisson**. Επίσης έχουμε το θεώρημα **Ehrenfest**.

$$i\hbar\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \left[\hat{A}, \mathscr{H}\right] + i\hbar\left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle \tag{5.17}$$

Το οποίο δείχνει πως εξελίσσονται στον χρόνο οι μέσες τιμές των δυναμικών ποσοτήτων

5.2.3 Χώρος Fock, Τελεστές Πεδίου και Συναρτησιακή Παράγωγος

Στην κβαντική, σε αντίθεση με την κλασική, θεωρία πεδίου έχουμε να χειριστούμε πλήθος μη διακρίσιμων σωματιδίων. Τα σωματίδια αυτά χαρακτηρίζονται από δυο στατιστικές τις στατιστικές BoSe-EinStein και Fermi-Dirac. Όπου σωματίδια που υπακούουν την στατιστική BoSe-EinStein, αντίστοιχα Fermi-Dirac, έχουν συμμετρικές, αντίστοιχα αντισυμμετρικές, κυματοσυναρτήσεις. Όπως είδαμε στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή οι κυματοσυναρτήσεις $|n\rangle$ μετρούν τον αριθμό των κβάντων στο συγκεκριμένο σύστημα. Στην κβαντική θεωρία πεδίου θα γενικεύσουμε αυτήν την ιδέα και θα ορίσουμε τα κβάντα να αποτελούν τα πεδία μας και οι κυματοσυναρτήσεις να μετρούν σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου των αριθμό των κβάντων. Για την περιγραφή όλων των σωματιδίων θα ορίσουμε έναν ενιαίο χώρο (χώρος **Fock**) στον οποίο θα έχουμε μια κυματοσυνάρτηση για όλες τις καταστάσεις.

$$|\Psi\rangle = |n_1(\psi_1)\rangle|n_2(\psi_2)\rangle\dots|n_n(\psi_n)\rangle = |n_1(\psi_1), n_2(\psi_2), \dots, n_n(\psi_n)\rangle \tag{5.18}$$

Όπου n_i αριθμός των σωματιδίων που ορίζουν τα πεδία ψ_i μέσα στον χώρο **Fock**

Στον χώρο **Fock** μπορούμε να ορίσουμε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αντίστοιχους με του ταλαντωτή. Οι τελεστές αυτοί όταν δρούν σε μία κατάσταση του χώρου αυτού αυξάνουν η μειώνουν αντίστοιχα ένα κβάντο δηλαδή έχουμε ότι.

$$\hat{a}(\psi_i)|\Psi\rangle = |n_1(\psi_1), n_2(\psi_2), \ldots, n_{i-1}(\psi_{i-1}), n_i(\psi_i) - 1, \ldots, n_n(\psi_n)\rangle \tag{5.19}$$

$$\hat{a}^\dagger(\psi_i)|\Psi\rangle = |n_1(\psi_1), n_2(\psi_2), \ldots, n_{i-1}(\psi_{i-1}), n_i(\psi_i) + 1, \ldots, n_n(\psi_n)\rangle \tag{5.20}$$

Ορίζουμε την κατάσταση κενού όπου ισχύει $\hat{a}(\psi_i)|0\rangle = 0, \forall\ i = 1, 2 \ldots n$

Μέσω του τελεστή δημιουργίας θα ορίσουμε την ολική κυματοσυνάρτηση.

$$|\Psi\rangle = |n_1(\psi_1), n_2(\psi_2), \ldots, n_n(\psi_n)\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger(\psi_1))^{n_1}(\hat{a}^\dagger(\psi_2))^{n_2} \cdots (\hat{a}^\dagger(\psi_n))^{n_n}}{\sqrt{n_1!}\ \sqrt{n_2!}\ \ldots\ \sqrt{n_n!}}|0\rangle \tag{5.21}$$

Μέσω αυτών των τελεστών θα ορίσουμε τους τελεστές πεδίου. Οι τελεστές πεδίου πήραν το όνομα τους επειδή δημιουργούν, ή καταστρέφουν, ένα σωματίδιο σε κάποιο σημείο του χώρου. Οπότε ορίζουμε.

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \sum_n \psi_n(\boldsymbol{x})\hat{a}_n \tag{5.22}$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}) = \sum_n \psi_n^*(\boldsymbol{x})\hat{a}_n^\dagger \tag{5.23}$$

Από τις μεταθετικές σχέσεις για τους $(\hat{a}_n, \hat{a}_n^\dagger)$ προκύπτουν οι μεταθετικές σχέσεις των τελεστών πεδίου.

$$\left[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x'})\right] = \sum_{n,m} \psi_n^*(\boldsymbol{x'})\psi_m(\boldsymbol{x}) \underbrace{[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger]}_{\delta_{nm}} = \sum_n \psi_n^*(\boldsymbol{x'})\psi_n(\boldsymbol{x}) = \sum_n \psi_n^*(\boldsymbol{x'})\psi_n(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{5.24}$$

Όπου ταυτοποιούμε τον τελεστή της συζυγούς ορμής.

$$\hat{\Pi}(\boldsymbol{x}) \equiv i\hbar\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x}) : \left[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \hat{\Pi}(\boldsymbol{x'})\right] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{5.25}$$

$$\tag{5.26}$$

Για ένα συναρτησιοειδές $F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]$ ορίζουμε την μεταβολή $\delta F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]$ ως.

$$\delta F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})] = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \frac{\delta}{\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.27}$$

Αν επιπλέον για το συναρτησιοειδές ισχύει.

$$F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})] = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.28}$$

$$\delta F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})] = \iint_{V_x \cup V_{x'}} \left(\frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})}\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}\delta\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) \right) dV_{\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x'}} \overset{\delta\partial_i = \partial_i\delta}{\equiv}$$

$$\iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x}}} \left(\frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})}\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) + \partial_i \left(\frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) \right) \right.$$

$$\left. -\partial_i \left(\frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))} \right) \delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) \right) dV_{\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x'}} =$$

$$\iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} \left(\frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} - \partial_i \frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))} \right) \delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})dV_{\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$+ \underbrace{\int_{V_{\boldsymbol{x'}} \cup \partial V_{\boldsymbol{x}}} \frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})dS^i_{\boldsymbol{x}}\,dV_{\boldsymbol{x'}}}_{\delta\hat{\Psi}=0\ \ \boldsymbol{x}\in\partial V_{\boldsymbol{x}}}$$

Όπου τελικά προκύπτει η συναρτησιακή παράγωγος.

$$\frac{\delta F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]}{\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} = \frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}),\partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} - \partial_i\left(\frac{\partial f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}),\partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}\right) \tag{5.29}$$

$$\text{Αν } f(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})) = \hat{\Psi}(\boldsymbol{x'}) \Rightarrow \frac{\partial F[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} = \frac{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x'})}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} - \partial_i\left(\frac{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x'})}{\partial(\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}\right) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{5.30}$$

Από τις σχέσεις αυτές και από το γεγονός ότι η δράση αποτελεί ένα συναρτησιοειδές του τύπου 5.28.

$$\mathcal{S}[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t)] = \int_{V_t}\mathscr{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t))dt = \int_{V_t\cup V_{\boldsymbol{x}}}\mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t),\partial_i\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t),\partial_t\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t))dV_{\boldsymbol{x}}dt = \int_{\Omega_x}\mathcal{L}(\hat{\Psi}(x),\partial_\mu\hat{\Psi}(x))d\Omega_x$$

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]}{\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} = \frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}),\partial_j\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}),\partial_\nu\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_\mu\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}\right) = 0 \text{ Εξισώσεις Euler-Lagrange πεδίων} \tag{5.31}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει η συζυγής ορμή να είναι.

$$\hat{\Pi}(\boldsymbol{x};t) = \frac{\delta\mathscr{L}[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})]}{\delta(\partial_t\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))} = \frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x'}),\partial_\mu\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_t\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x'}),\partial_\mu\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_\nu(\partial_t\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})))}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x'}),\partial_\mu\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))}{\partial(\partial_t\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}))} \tag{5.32}$$

Επίσης η hamiltonian αποτελεί συναρτησιοειδές τέτοιου είδους οπότε.

$$\mathscr{H}[\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t),\hat{\Pi}(\boldsymbol{x};t)] = \int_{V_{\boldsymbol{x}}}\left\{\hat{\Pi}_\mu(\boldsymbol{x};t)\partial_t\hat{\Psi}^\mu(\boldsymbol{x};t) - \mathcal{L}(\hat{\Psi}(\boldsymbol{x};t),\hat{\Pi}(\boldsymbol{x};t))\right\}dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.33}$$

Για την κβάντωση των πεδίων έχουμε τις μεταθετικές σχέσεις.

$$\left[\hat{\Psi}_a(\boldsymbol{x}),\hat{\Psi}_b(\boldsymbol{x'})\right] = 0, \quad \left[\hat{\Pi}_a(\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_b(\boldsymbol{x'})\right] = 0, \quad \left[\hat{\Psi}_a(\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_b(\boldsymbol{x'})\right] = i\hbar\delta_{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{5.34}$$

$$\Psi[\psi'] = \langle\psi'|\Psi\rangle \tag{5.35}$$

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})|\psi'\rangle = \psi'(\boldsymbol{x})|\psi'\rangle \tag{5.36}$$

$$\langle\psi'|\hat{\Pi}(\boldsymbol{x};t)|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\delta}{\delta\psi'}\langle\psi'|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\delta}{\delta\psi'}\Psi[\psi'] \tag{5.37}$$

Η εξίσωση **Schrödinger** για τα πεδία παίρνει την μορφή.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \mathscr{H}(\hat{\Psi},\hat{\Pi})|\Psi(t)\rangle \tag{5.38}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\psi';t] = \mathscr{H}\left(\psi',-i\hbar\frac{\delta}{\delta\psi'}\right)\Psi[\psi';t] \tag{5.39}$$

Οι εξισώσεις κίνησης στην εικόνα **Heisenberg** γίνονται.

$$i\hbar\frac{d}{dt}A(\hat{\Psi},\hat{\Pi}) = \left[A(\hat{\Psi},\hat{\Pi}),\mathscr{H}(\hat{\Psi},\hat{\Pi})\right] + i\hbar\frac{\partial A(\hat{\Psi},\hat{\Pi})}{\partial t} \tag{5.40}$$

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad \hat{\Psi} \to \hat{\Psi}' = \hat{\Psi} + \delta_0\hat{\Psi} \tag{5.41}$$

Από την αρχή δράσης του **Schwinger** παίρνουμε.

$$\delta\mathcal{S} = G(t_2) - G(t_1) \tag{5.42}$$

$$i\hbar\delta_0 F[\hat{\Psi},\hat{\Pi}] = [F,G] \qquad \text{Αρχή Δράσης του Schwinger για Τελεστές} \tag{5.43}$$

$$G(t) = \int_{v_{\boldsymbol{x}}}\{\hat{\Pi}_a\delta\hat{\Psi}_a - \mathfrak{T}^0{}_\nu\delta x^\nu\} \tag{5.44}$$

5.2.4 Κβαντική Στατιστική Μηχανική

Όταν έχουμε να διαχειριστούμε πολλά σωματίδια είναι αδύνατον να μελετήσουμε το κάθε ένα ξεχωριστά γι' αυτό χρησιμοποιούμε την στατιστική μηχανική η οποία μελετά τις συλλογικές διεργασίες των πολλών σωματιδίων.

Τελεστής Πυκνότητας, Εντροπία και Κανονικά Σύνολα

Οπότε θα ορίσουμε τον τελεστή πυκνότητας καταστάσεων και θα ορίσουμε μέσω αυτού τις θερμοδυναμικές ιδιότητες ενός συστήματος.

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| Tr\{\hat{\rho}\} = \sum_{i,j} p_i \langle\psi_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \sum_{i,j} p_i \delta_{i,j} = \sum_i p_i \equiv 1 \tag{5.45}$$

$$\langle\hat{A}\rangle \equiv Tr\{\hat{\rho}\hat{A}\} = \sum_{i,j} p_i \langle\psi_j|\hat{A}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle \overset{\hat{A}|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle}{=} \sum_{i,j} a_i p_i \langle\psi_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \sum_{i,j} a_i p_i \delta_{i,j} = \sum_i a_i p_i \tag{5.46}$$

$$\mathrm{S} = -k_B Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} = -k_B \sum_i \langle\psi_i \hat{\rho}\ln\hat{\rho}|\psi_i\rangle = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \;\; \text{Εντροπία Von Neumann} \tag{5.47}$$

Ορίζουμε την ποσότητα $\overline{\mathrm{S}}$ και μέσω του αξιώματος **Boltzman-Gibbs** και των περιορισμών,$Tr\{\hat{\rho}\} = 1$ και $\langle\hat{A}_i\rangle \equiv Tr\{\hat{\rho}\hat{A}_i\}$, θα εξαγάγουμε τον τελεστή πυκνότητας ο οποίος μεγιστοποιεί την εντροπία.

$$\overline{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{S}}{k_B} + \lambda_0 - \lambda_i\langle\hat{A}_i\rangle = -Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} + \lambda_0 Tr\{\hat{\rho}\} - \lambda_i Tr\{\hat{\rho}\hat{A}_i\} \tag{5.48}$$

$$\frac{dT}{d\hat{\rho}} = -Tr\{\ln\hat{\rho} + \hat{\rho}^{-1}\hat{\rho}\} + \lambda_0 Tr\{\mathbb{I}\} - \lambda_i Tr\{\mathbb{I}\hat{A}_i\} = Tr\{-\ln\hat{\rho} - \mathbb{I} + \lambda_0\mathbb{I} - \lambda_i\mathbb{I}\hat{A}_i\} = 0 \Rightarrow$$

$$\ln\hat{\rho} + \mathbb{I} - \lambda_0\mathbb{I} + \lambda_i\mathbb{I}\hat{A}_i = 0 \Rightarrow e^{\ln\hat{\rho} + (1-\lambda_0)\mathbb{I}} = e^{-\lambda_i\hat{A}_i} \underset{e^{A+B} = e^A e^B : [A,B]=0}{\overset{[\ln\hat{\rho},\mathbb{I}]=0}{\Longrightarrow}} e^{\ln\hat{\rho}} e^{(1-\lambda_0)\mathbb{I}} = e^{-\lambda_i\hat{A}_i}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{\rho}e^{(1-\lambda_0)\mathbb{I}} = e^{-\lambda_i\hat{A}_i} \\ Tr\{e^{\hat{A}}\} = \sum\limits_i e^{a_i} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} Tr\{e^{(1-\lambda_0)\delta_{ll}}\hat{\rho}\} = Tr\{e^{-\lambda_i\hat{A}_i}\} \\ Tr\{\hat{\rho}\} = 1 \quad Tr\{c\hat{\rho}\} = cTr\{\hat{\rho}\} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} e^{-(1-\lambda_0)n} = Tr\{e^{-\lambda_i\hat{A}_i}\} \\ \mathcal{Z} = Tr\{e^{-\lambda_i\hat{A}_i}\} \end{matrix}\right\} \hat{\rho} = \frac{e^{-\lambda_i\hat{A}_i}}{\mathcal{Z}} \tag{5.49}$$

$$\langle\hat{A}_j\rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{A}_j\} = \frac{1}{\mathcal{Z}} Tr\{e^{-\lambda_i\hat{A}_i} A_j\} = -\frac{1}{\lambda_j\mathcal{Z}} Tr\{e^{-\lambda_i\hat{A}_i}(-\lambda_j\hat{A}_j)\} = -\frac{1}{\lambda_j\mathcal{Z}} Tr\{\partial_{\lambda_j} e^{-\lambda_i\hat{A}_i}\}$$

$$\langle\hat{A}_j\rangle = -\frac{1}{\lambda_j}\frac{1}{\mathcal{Z}}\partial_{\lambda_j} Tr\{e^{-\lambda_i\hat{A}_i}\} - \frac{1}{\lambda_j}\frac{1}{\mathcal{Z}}\partial_{\lambda_j}\mathcal{Z} = -\frac{1}{\lambda_j}\partial_{\lambda_j}\ln\mathcal{Z} \tag{5.50}$$

$$\mathrm{S} = -k_B Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} = -k_B Tr\{\hat{\rho}(-\sum_i \lambda_i\hat{A}_i - \ln\mathcal{Z})\} = k_B\ln\mathcal{Z} + k_B\sum_i \lambda_i\langle\hat{A}_i\rangle = k_B\ln\mathcal{Z} - k_B\sum_i \partial_{\lambda_i}\ln\mathcal{Z}$$

Εφόσον έχουμε ορίσει τον τελεστή πυκνότητας καταστάσεων θα δούμε τις θερμοδυναμικές ποσότητες που ορίζονται μέσω αυτού. Καθώς και τα κανονικά σύνολα.

1. Μικροκανονικό Σύνολο (microcanonical ensemble): Σε αυτό το σύνολο είναι καθορισμένες όλες οι θερμοδυναμικές ποσότητες. Η εντροπία ορίζεται να είναι.

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{S} = -k_B Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} \\ \hat{\rho} = \frac{1}{\Omega},\ \Omega : \#\ \text{καταστάσεων} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{S} = -k_B Tr\left\{\frac{1}{\Omega}\ln\frac{1}{\Omega}\right\} = k_B\frac{1}{\Omega}\ln\Omega Tr\{\mathbb{I}\} = k_B\ln\Omega \tag{5.51}$$

2. Κανονικό Σύνολο (Canonical ensemble): Σε αυτό το σύνολο είναι καθορισμένες οι $\hat{N}$ αριθμός σωματιδίων $\hat{V}$ όγκος και η ενέργεια $\mathscr{H}$ είναι καθορισμένη κατά μέσο όρο. Οι θερμοδυναμικές ποσότητες είναι.

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{S} = -k_B Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} \\ \hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\mathscr{H}}}{\sum\limits_n e^{-\beta E_n}},\ \beta \equiv \frac{1}{k_B T} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathrm{S} = -k_B Tr\{\hat{\rho}(-\beta\mathscr{H} - \ln\mathcal{Z})\} \\ U = \langle\mathscr{H}\rangle = Tr\{\hat{\rho}\mathscr{H}\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{S} = k_B\beta U + k_B\ln\mathcal{Z} \tag{5.52}$$

3. Μεγαλοκανονικό Σύνολο (Grandcanonical ensemble): Σε αυτό το σύνολο είναι καθορισμένος μόνο ο όγκος.

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{S} = -k_B Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} \\ \hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\mathscr{H}+\mu\hat{N})}}{\sum\limits_n e^{-\beta E_n+\mu n}} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \mathrm{S} = k_B Tr\{\hat{\rho}(\beta\mathscr{H} - \mu\hat{N} + \ln\mathcal{Z})\} \\ n = \langle\hat{N}\rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{N}\} \end{array}\right\} \mathrm{S} = k_B\beta U + k_B\mu n + k_B\ln\mathcal{Z} \quad (5.53)$$

Θερμοδυναμικοί Νόμοι

Για αρχή θα ορίσουμε την εξωτερική ενέργεια. Η εσωτερική ενέργεια ενός μακροσκοπικού συστήματος είναι η μέση τιμή της ενέργειας των σωματιδίων που το απαρτίζουν συνεπώς έχουμε.

$$U = \langle\mathscr{H}\rangle = Tr\{\hat{\rho}\mathscr{H}\} \quad (5.54)$$

$$dU = d\langle\mathscr{H}\rangle = Tr\{d(\hat{\rho}\mathscr{H})\} = Tr\{d\hat{\rho}\mathscr{H} + \hat{\rho}d\mathscr{H}\} \equiv \delta T + \delta W \ \textit{1ος Θερμοδυναμικός Νόμος} \quad (5.55)$$

Όπου ταυτοποιήσαμε την θερμότητα ως την μεταβολή της πιθανότητας να μετρηθεί κάποια ενέργεια, $Tr\{d\hat{\rho}\mathscr{H}\}$, και το έργο ως την μεταβολή της ενέργειας, $Tr\{\hat{\rho}d\mathscr{H}\}$. Όπου προέκυψε ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος.

$$\mathrm{S} = k_B\beta U + k_B\ln\mathcal{Z}$$

$$d\mathrm{S} = k_B\beta dU + k_B d\ln\mathcal{Z} = k_B\beta dU + k_B\frac{1}{\mathcal{Z}}dTr\{e^{-\beta\mathscr{H}}\} = k_B\beta dU + k_B - \beta\frac{1}{\mathcal{Z}}Tr\{\hat{\rho}d\mathscr{H}\}$$

$$d\mathrm{S} = k_B\beta dU - k_B\beta\delta W = k_B\beta\delta T \ \textit{2ος Θερμοδυναμικός Νόμος} \quad (5.56)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial\beta} = -k_B\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{\mathcal{Z}}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\beta}\right) = k_B\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\ln\mathcal{Z}}{\partial\beta}\right) = k_B\beta^2\frac{\partial^2\ln\mathcal{Z}}{\partial\beta^2} \quad (5.57)$$

Κβαντικά Αέρια

Υποθέτουμε πως έχουμε αέρια τα οποία απαρτίζονται από κβαντικά σωματίδια. Τα σωματίδια αυτά καταλαμβάνουν συγκεκριμένες κβαντικές καταστάσεις οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον **Fock** οπότε.

$$\mathscr{H} = \sum_j E_j n_j \qquad \hat{N} = \sum_j n_j \ \ \hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\mathscr{H}-\mu\hat{N})}}{\sum\limits_n e^{-\beta(E_n-\mu n)}} = \frac{e^{-\beta\sum_j(E_j-\mu)n_j}}{\sum\limits_n e^{-\beta(E_n-\mu n)}} \quad (5.58)$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_j\}} e^{-\beta\sum_j(E_j-\mu)n_j} = \sum_{\{n_j\}}\prod_j e^{-\beta(E_j-\mu)n_j} = \sum_{\{n_j\}}\prod_j\left(e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)^{n_j} = \prod_j\sum_{n_j=0,1}^{n_j=0,1,2\dots}\left(e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)^{n_j}$$

$$\mathcal{Z}_\pm = \left\{\begin{array}{ll} \prod\limits_j\frac{1}{1-e^{-\beta(E_j-\mu)}} & n_j = 0,1,2\dots \\ \prod\limits_j\left(1+e^{-\beta(E_j-\mu)}\right) & n_j = 0,1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \prod\limits_j\left(1-e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)^{-1} & n_j = 0,1,2\dots \\ \prod\limits_j\left(1+e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)^{+1} & n_j = 0,1 \end{array}\right\} \quad (5.59)$$

Ορίζουμε τον συντελεστής κατάληψης $\mathcal{N}_j$ να είναι η μέση τιμή του αριθμού κατάληψης $\langle\hat{n}_j\rangle$

$$\mathcal{N}_j = \langle\hat{n}_j\rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{n}_j\} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{Z}_\pm}{\partial E_j} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E_j}\ln\prod_j\left(1\pm e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)^\pm = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E_j}\sum_j\ln\left(1\pm e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)^\pm$$

$$\mathcal{N}_j = \mp\frac{1}{\beta}\sum_j\frac{1}{\left(1\pm e^{-\beta(E_j-\mu)}\right)}\frac{\partial(1\pm e^{-\beta(E_j-\mu)})}{\partial E_j} = \sum_j\frac{e^{-\beta(E_j-\mu)}}{1\pm e^{-\beta(E_j-\mu)}}$$

$$\mathcal{N}_j = \begin{cases} \sum\limits_j\frac{1}{e^{\beta(E_j-\mu)}+1} & \text{Στατιστική Fermi-Dirac} \\ \sum\limits_j\frac{1}{e^{\beta(E_j-\mu)}-1} & \text{Στατιστική Bose-Einstein} \end{cases} \quad (5.60)$$

Τα σωματίδια που ακολουθούν την στατιστική Fermi-Dirac τα ονομάζουμε Fermions και τα σωματίδια που ακολουθούν την στατιστική Bose-Einstein Bosons. Αυτές οι στατιστικές προκύπτουν από το γεγονός ότι τα κβαντικά σωματίδια είναι μη διακρίσιμα. Η στατιστική Fermi-Dirac περιέχει την απαγορευτική αρχή του **Pauli**.

5.2.5 Μετασχηματισμοί Bogolyubov

Στην κβαντική θεωρία οι καταστάσεις του συστήματος, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί σε κάποια βάση και περιέχουν τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, δεν είναι μοναδικά ορισμένες γι' αυτό έχουμε την δυνατότητα να κάνουμε κάποιον μετασχηματισμό αυτών των καταστάσεων ώστε να τις αναπτύξουμε συναρτήσει κάποιων άλλων τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Οι μετασχηματισμοί **Bogolyubov** αποτελούν τέτοιου είδους μετασχηματισμούς. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται κανονικοί μετασχηματισμοί.

$$\hat{\Psi} = \sum_i \hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^* = \sum_j \hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^*$$

$$(f_i, f_j) = -(f_i^*, f_j^*) = \delta_{ij}, \ (f_i, f_j^*) = 0, \ (g_i, g_j) = -(g_i^*, g_j^*) = \delta_{ij}, \ (g_i, g_j^*) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} g_i = \sum_j c_{ij} f_j + d_{ij} f_j^* & c_{ij} = (g_i, f_j) \\ f_i = \sum_j c_{ij}^* g_j - d_{ij} g_j^* & d_{ij} = -(g_i, f_j^*) \end{Bmatrix} \tag{5.61}$$

$$\hat{\Psi} = \sum_i \hat{a}_i \left(\sum_k c_{ik}^* g_k - d_{ik} g_k^* \right) + \hat{a}_i^\dagger \left(\sum_k c_{ik}^* g_k - d_{ik} g_k^* \right)^* = \sum_j \hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^*$$

$$\hat{\Psi} = \sum_{i,k} (\hat{a}_i c_{ik}^* - \hat{a}_i^\dagger d_{ik}^*) g_k + (-\hat{a}_i d_{ik} + \hat{a}_i^\dagger c_{ik}) g_k^* = \sum_j \hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^* \underset{(g_k^*, g_j^*)}{\overset{(g_k, g_j)}{\Rightarrow}} \begin{cases} \hat{b}_j = \sum_i \hat{a}_i c_{ij}^* - \hat{a}_i^\dagger d_{ij}^* \\ \hat{b}_j^\dagger = \sum_i - \hat{a}_i d_{ij} + \hat{a}_i^\dagger c_{ij} \end{cases}$$

$$\hat{\Psi} = \sum_i \hat{b}_i \left(\sum_k c_{ik}^* f_k + d_{ik} f_k^* \right) + \hat{b}_i^\dagger \left(\sum_k c_{ik}^* f_k + d_{ik} f_k^* \right)^* = \sum_j \hat{a}_j f_j + \hat{a}_j^\dagger f_j^*$$

$$\hat{\Psi} = \sum_{i,k} (\hat{b}_i c_{ik}^* + \hat{b}_i^\dagger d_{ik}^*) f_k + (\hat{b}_i d_{ik} + \hat{b}_i^\dagger c_{ik}) f_k^* = \sum_j \hat{a}_j f_j + \hat{a}_j^\dagger f_j^* \underset{(f_k^*, f_j^*)}{\overset{(f_k, f_j)}{\Rightarrow}} \begin{cases} \hat{a}_j = \sum_i \hat{b}_i c_{ij}^* + \hat{b}_i^\dagger d_{ij}^* \\ \hat{a}_j^\dagger = \sum_i \hat{b}_i d_{ij} + \hat{b}_i^\dagger c_{ij} \end{cases}$$

$$(g_i, g_j) = -i \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \sum_{i,j} (c_{ik} f_k + d_{ik} f_k^*) g^{0\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\nu (c_{jl} f_l + d_{jl} f_l^*)^* \sqrt{-g} d^3\boldsymbol{x}$$

$$(g_i, g_j) = \sum_{i,j} c_{ik} c_{jl}^* \overbrace{(f_k, f_l)}^{\delta_{ij}} + c_{ik} d_{jl}^* \overbrace{(f_k, f_l^*)}^{0} + d_{ik} c_{jl}^* \overbrace{(f_k^*, f_l)}^{0} + d_{ik} d_{jl}^* \overbrace{(f_k^*, f_l^*)}^{\delta_{kl}} = \sum_{i,j} c_{ik} c_{jk}^* - d_{ik} d_{jk}^* = \delta_{kl}$$

$$(g_i, g_j^*) = -i \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \sum_{i,j} (c_{ik} f_k + d_{ik} f_k^*) g^{0\nu} \overleftrightarrow{\partial}_\nu (c_{jl} f_l + d_{jl} f_l^*) \sqrt{-g} d^3\boldsymbol{x}$$

$$(g_i, g_j^*) = \sum_{i,j} c_{ik} c_{jl} \overbrace{(f_k, f_l^*)}^{0} + c_{ik} d_{jl} d_{ik} \overbrace{(f_k, f_l)}^{\delta_{kl}} + d_{ik} c_{jl} (- \overbrace{(f_k, f_l)^*}^{\delta_{kl}}) + d_{ik} d_{jl} \overbrace{(f_k, f_l^*)}^{0} = \sum_{i,j} c_{ik} d_{jk} - d_{ik} c_{jk} = 0$$

Τώρα όμως οι καταστάσεις στον χώρο **Fock** έχουν μεταβληθεί μετά από τους εν λόγω μετασχηματισμούς οπότε πρέπει να τις επαναορίσουμε. Γνωρίζουμε ότι όταν ο τελεστής καταστροφής δράσει στο κενό τότε θα δώσει μηδέν οπότε θα ορίσουμε το κενό, θα οριστούν δυο διαφορετικά κενά ένα για καταστάσεις αναπτυγμένες ως προς f και ένα ως προς g και εν συνεχεία θα μελετήσουμε τι συμβαίνει όταν δρουν οι τελεστές του ενός κενού στο άλλο. Έχουμε

$$\hat{a}|0_f\rangle = 0 \ \& \ \hat{b}|0_g\rangle = 0 \ \& \ \hat{n}_f \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} \ \& \ \hat{n}_g \equiv \hat{b}^\dagger \hat{b} \tag{5.62}$$

$$\langle 0_f|\hat{n}_{g,i}|0_f\rangle = \langle 0_f| \sum_{m,l} (c_{mi}^* \hat{a}_m - d_{mi}^* \hat{a}_m^\dagger)^\dagger (c_{lj}^* \hat{a}_l - d_{lj}^* \hat{a}_l^\dagger)|0_f\rangle = \langle 0_f| \sum_{m,l} (c_{im} \hat{a}_m^\dagger - d_{im} \hat{a}_m)(c_{li}^* \hat{a}_l - d_{li}^* \hat{a}_l^\dagger)|0_f\rangle$$

$$\langle 0_f|\hat{n}_g|0_f\rangle = \langle 0_f| \sum_{m,l} (c_{im} c_{li}^* \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_l - c_{im} d_{li}^* \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_l^\dagger - d_{im} c_{li}^* \hat{a}_m \hat{a}_l + d_{im} d_{li}^* \hat{a}_m \hat{a}_l^\dagger)|0_f\rangle \underset{\hat{a}|0_f\rangle = 0}{\overset{\langle 0_f|\hat{a}^\dagger = 0}{\Rightarrow}}$$

$$\langle 0_f|\hat{n}_g|0_f\rangle = \sum_{i,j} d_{im} d_{li}^* \langle 0_f|\hat{a}_m \hat{a}_l^\dagger|0_f\rangle = \sum_{m,l} d_{im} d_{li}^* \langle 0_f|\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_l + \delta_{lm}|0_f\rangle = \sum_i d_{im} d_{im}^* = \sum_i |d_{im}|^2 \tag{5.63}$$

5.3 Πεδία Σε Minkowski Χωρόχρονο

Πλέον είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε την κβάντωση των πεδίων σε επίπεδο χωρόχρονο και στην συνέχεια θα τα γενικεύσουμε σε καμπύλο χωρόχρονο. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας ένα (ψεύδο)βαθμωτό πεδίο σε χωρόχρονο **Minkowski**, με μετρική την $\eta^{\mu\nu} = (-,+,+,+)$.

5.3.1 Πεδίο Klein-Gordon

.

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-\hbar^2c^2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{\Psi}\partial_\nu\hat{\Psi} - (mc^2)^2\hat{\Psi}^2) \\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi},\partial_\nu\hat{\Psi})}{\partial(\partial_\mu\hat{\Psi})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi},\partial_j\hat{\Psi})}{\partial\hat{\Psi}} = 0\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\frac{\eta^{\mu\nu}}{2}\partial_\mu\left(\frac{\partial(\partial_\mu\hat{\Psi}\partial_\nu\hat{\Psi})}{\partial(\partial_\mu\hat{\Psi})}\right) \\ \frac{(mc^2)^2}{2}\frac{\partial\hat{\Psi}^2}{\partial\hat{\Psi}}\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\frac{\eta^{\mu\nu}}{2}\hbar^2c^2\partial_\mu\left(\partial_\nu\hat{\Psi} + \partial_\mu\hat{\Psi}\delta_{\mu\nu}\right) \\ \frac{(mc^2)^2}{2}2\hat{\Psi} \\ \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu = \Box^2\end{matrix}\right\}$$

$$(\hbar^2c^2\Box^2 - (mc^2)^2)\hat{\Psi} = 0 \quad \text{Εξίσωση Klein-Gordon} \tag{5.64}$$

$$\hat{\Pi} = \hbar\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial t} = \hbar\dot{\hat{\Psi}} \qquad \text{Συζυγής Ορμή} \tag{5.65}$$

Οι λύσεις την εξίσωσης Klein-Gordon είναι τα επίπεδα κύματα $\psi(x) \sim e^{-ik^\mu x_\mu}, k^\mu = (\omega_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k})$. Από το θεώρημα της **Noether** έχουμε, λόγω του ότι η Lagrangian density παραμένει βαθμωτή κάτω από χωροχρονικές μετατοπίσεις, την διατήρηση της τετραορμής (k^μ). Επίσης ορίζεται μια επιπλέον αναλλοίωτη ποσότητα, η οποία γενικεύεται σε καμπύλο χωρόχρονο, μέσω της οποίας θα προκύψουν οι μεταθετικές σχέσεις για τα πεδία. Η ποσότητα αυτή ορίζεται μέσω των λύσεων της εξίσωσης Klein-Gordon.

$$(\psi_k, \psi_{k'}) = -i\int_{V_{\boldsymbol{x}}} \psi_k^*\partial_t\psi_{k'} - \partial_t(\psi_k^*)\psi_{k'}dV_{\boldsymbol{x}} \equiv -i\int_{V_{\boldsymbol{x}}} \psi_k^*\overleftrightarrow{\partial}_t\psi_{k'} \tag{5.66}$$

$$\left.\begin{matrix}\partial_t\psi_{k'} \\ \partial_t\psi_k^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\partial_t\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{k'}})}}e^{-ik'^\mu x_\mu} \\ \partial_t\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{k}})}}e^{ik^\mu x_\mu}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{i\omega_{\boldsymbol{k'}}}{\sqrt{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{k'}})}}e^{-ik'^\mu x_\mu} \\ \frac{-i\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{k}})}}e^{ik^\mu x_\mu}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}i\omega_{\boldsymbol{k'}}\psi_{k'} \\ -i\omega_{\boldsymbol{k}}\psi_k^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$(\psi_k, \psi_{k'}) = -i\int_{V_x}\{i\omega_{\boldsymbol{k'}}\psi_k^*\psi_{k'} - (-i\omega_{\boldsymbol{k}})\psi_k^*\psi_{k'}\}dV_{\boldsymbol{x}} = -i^2\frac{(\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}})e^{i(\omega_{\boldsymbol{k'}} - \omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(4\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}})}}\int_{V_x} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$(\psi_k, \psi_{k'}) = \frac{(\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}})e^{i(\omega_{\boldsymbol{k'}} - \omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(4\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}})}}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) = \frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{k}})}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'})$$

$$(\psi_k^*, \psi_{k'})^* = i\int_{V_x}\{-i\omega_{\boldsymbol{k'}}\psi_k^*\psi_{k'}^* - (-i\omega_{\boldsymbol{k}})\psi_k^*\psi_{k'}^*\}dV_{\boldsymbol{x}} = \frac{(\omega_{\boldsymbol{k'}} - \omega_{\boldsymbol{k}})e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(4\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}})}}\int_{V_x} e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x}} \Rightarrow$$

$$(\psi_k^*, \psi_{k'})^* = -(\psi_k, \psi_{k'}^*) = \frac{(\omega_{\boldsymbol{k'}} - \omega_{\boldsymbol{k}})e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(4\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}})}}\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k'}) \overset{\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_{-\boldsymbol{k}}}{=} \frac{(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{k}})e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(4\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}})}}\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k'}) = 0 \tag{5.67}$$

Από τις σχέσεις αυτές και από την αρχή της υπέρθεσης (λόγω γραμμικότητας της Klein-Gordon) έχουμε.

$$\hat{\Psi}(x) = \int\{\hat{a}(\boldsymbol{k})\psi_{\boldsymbol{k}}(x) + \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k})\psi_{\boldsymbol{k}}^*(x)\}d\boldsymbol{k} \tag{5.68}$$

$$\hat{a}(\boldsymbol{k}) = (\psi_k, \hat{\Psi}) = -i\int_{V_x}\{\psi_k^*\partial_t\hat{\Psi} - (-i\omega_{\boldsymbol{k}})\psi_{\boldsymbol{k}}^*\hat{\Psi}\}dV_{\boldsymbol{x}} = -i\int_{V_x}\psi_k^*\{\hat{\Pi} + i\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\Psi}\}dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.69}$$

$$\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}) = (\psi_k^*, \hat{\Psi}) = -i\int_{V_x}\{\psi_k\partial_t\hat{\Psi} - i\omega_{\boldsymbol{k}}\psi_k\hat{\Psi}\}dV_{\boldsymbol{x}} = -i\int_{V_x}\psi_k\{\hat{\Pi} - i\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\Psi}\}dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.70}$$

$$[\hat{\Psi}, \hat{\Pi}] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \quad [\hat{\Pi}, \hat{\Pi}] = 0 \quad [\hat{\Psi}, \hat{\Psi}] = 0 \tag{5.71}$$

$$[\hat{\Pi} \pm i\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\Psi}, \hat{\Pi} \pm i\omega_{\boldsymbol{k'}}\hat{\Psi}] = [\hat{\Pi}, \hat{\Pi}] + i^2\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}}[\hat{\Psi}, \hat{\Psi}] \pm i([\hat{\Pi}, \hat{\Psi}]\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}}[\hat{\Psi}, \hat{\Pi}]) = \mp\hbar(-\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'})$$

$$[\hat{\Pi} \pm i\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\Psi}, \hat{\Pi} \mp i\omega_{\boldsymbol{k'}}\hat{\Psi}] = [\hat{\Pi}, \hat{\Pi}] - i^2\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}}[\hat{\Psi}, \hat{\Psi}] \mp i([\hat{\Pi}, \hat{\Psi}]\omega_{\boldsymbol{k'}} - \omega_{\boldsymbol{k}}[\hat{\Psi}, \hat{\Pi}]) = \mp\hbar(\omega_{\boldsymbol{k'}} + \omega_{\boldsymbol{k}})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'})$$

$$[\hat{a}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}),\hat{a}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k'})]=(-i)^2\iint_{V_{\boldsymbol{x}}\cup V_{\boldsymbol{x'}}}\psi_k^*\psi_{k'}^*[\hat{\Pi}\pm i\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\Psi},\hat{\Pi}\pm i\omega_{\boldsymbol{k'}}\hat{\Psi}]dV_{\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x'}}=\pm\frac{\hbar(-\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})}{(2\pi)^3\sqrt{(2\omega_{\boldsymbol{k'}}2\omega_{\boldsymbol{k}})}}$$

$$\iint_{V_{\boldsymbol{x}}\cup V_{\boldsymbol{x'}}}e^{ik^\mu x_\mu}e^{ik'^\nu x'_\nu}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})dV_{\boldsymbol{x'}}dV_{\boldsymbol{x}}=\pm\frac{\hbar(-\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(2\omega_{\boldsymbol{k'}}2\omega_{\boldsymbol{k}})}}\int_{V_{\boldsymbol{x}}}e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$[\hat{a}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}),\hat{a}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k'})]=\pm\frac{\hbar(-\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(2\omega_{\boldsymbol{k'}}2\omega_{\boldsymbol{k}})}}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})\overset{\omega_{-\boldsymbol{k}}=\omega_{\boldsymbol{k}}}{=}0 \tag{5.72}$$

$$[\hat{a}(\boldsymbol{k}),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k'})]=(-i)^2\iint_{V_{\boldsymbol{x}}\cup V_{\boldsymbol{x'}}}\psi_k^*\psi_{k'}[\hat{\Pi}+i\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\Psi},\hat{\Pi}-i\omega_{\boldsymbol{k'}}\hat{\Psi}]dV_{\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x'}}=\frac{\hbar(\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})}{(2\pi)^3\sqrt{(2\omega_{\boldsymbol{k'}}2\omega_{\boldsymbol{k}})}}$$

$$\iint_{V_{\boldsymbol{x}}\cup V_{\boldsymbol{x'}}}e^{ik^\mu x_\mu}e^{-ik'^\nu x'_\nu}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})dV_{\boldsymbol{x'}}dV_{\boldsymbol{x}}=\frac{\hbar(\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})e^{i(\omega_{\boldsymbol{k'}}-\omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(2\omega_{\boldsymbol{k'}}2\omega_{\boldsymbol{k}})}}\int_{V_{\boldsymbol{x}}}e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}}dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$[\hat{a}(\boldsymbol{k}),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k'})]=\frac{\hbar(\omega_{\boldsymbol{k'}}+\omega_{\boldsymbol{k}})e^{i(\omega_{\boldsymbol{k'}}-\omega_{\boldsymbol{k}})t}}{(2\pi)^3\sqrt{(2\omega_{\boldsymbol{k'}}2\omega_{\boldsymbol{k}})}}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})=\hbar\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \tag{5.73}$$

Από όπου προέκυψαν οι μεταθετικές σχέσεις για τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή. Τώρα θα αναπτύξουμε την λύση σε ιδιοσυναρτήσεις οι οποίες είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

$$(f_i,f_j)=\delta_{ij}\quad(f_i,f_j^*)=0 \tag{5.74}$$

$$\hat{\Psi}(x)=\sum_i\hat{a}_if_i(x)+\hat{a}_i^{\dagger}f_i^*(x) \tag{5.75}$$

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j]=0\quad[\hat{a}_i^{\dagger},\hat{a}_j^{\dagger}]=0\quad[\hat{a}_i,\hat{a}_j^{\dagger}]=\hbar\delta_{ij} \tag{5.76}$$

Όπου προκύπτει η ίδια άλγεβρα με του αρμονικού ταλαντωτή.

$$\hat{N}_j\equiv\hat{a}_j^{\dagger}\hat{a}_j \tag{5.77}$$

$$\hat{a}_j|0\rangle=0\quad\langle|0\rangle=\forall j \tag{5.78}$$

$$\hat{a}_i|\Psi\rangle=\hat{a}_i|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle=\sqrt{n_i}|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle \tag{5.79}$$

$$\hat{a}_i^{\dagger}|\Psi\rangle=\hat{a}_i^{\dagger}|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle=\sqrt{n_i+1}|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle \tag{5.80}$$

$$|\Psi\rangle=|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle=\frac{(\hat{a}^{\dagger}(j_1))^{n_1}(\hat{a}^{\dagger}(j_2))^{n_2}\cdots(\hat{a}^{\dagger}(j_n))^{n_n}}{\sqrt{n_1!}\,\sqrt{n_2!}\,\ldots\,\sqrt{n_n!}}|0\rangle \tag{5.81}$$

$$\hat{N}_i|\Psi\rangle=\hat{N}_j|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle=n_i(i_i)|n_1(j_1),n_2(j_2),\ldots,n_n(j_n)\rangle \tag{5.82}$$

$$[\hat{N}_j,\hat{\Psi}]=\sum_i[\hat{a}_j^{\dagger}\hat{a}_j,\hat{a}_i]f_i+[\hat{a}_j^{\dagger}\hat{a}_j,\hat{a}_i^{\dagger}]f_i^*=\sum_i-\delta_{ij}\hat{a}_if_i+\hat{a}_j^{\dagger}\delta_{ij}f_i^*=-\hat{a}_jf_j+\hat{a}_j^{\dagger}f_j^*\neq0 \tag{5.83}$$

Όπου η κατάσταση $|0\rangle$ είναι η κατάσταση κενού στον χώρο **Fock** και οι τελεστές $(a_i,a_i^{\dagger})$ είναι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Παρατηρούμε από την τελευταία σχέση ότι ο τελεστής αρίθμησης δεν μετατίθεται με τον τελεστή πεδίου το γεγονός αυτό μας υποδηλώνει ότι κατάσταση με καθορισμένο αριθμό κβάντων δεν έχει καθορισμένα πεδία που είναι μια έκφανση της δυικότητας σωματίδιο/κύμα. Ας δούμε πώς συμπεριφέρονται οι λύσεις της **Klein-Gordon** κάτω από τους μετασχηματισμούς **Lorentz**.

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\quad\gamma(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.84}$$

$$t=\gamma(t'-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x'}}{c^2})\quad\boldsymbol{x}=\gamma(\boldsymbol{x'}+\boldsymbol{v}t') \tag{5.85}$$

$$\partial_{t'}f_k=\frac{\partial x^\mu}{\partial t'}\partial_\mu f_k=\frac{\partial t}{\partial t'}\partial_tf_k+\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t'}\partial_{\boldsymbol{x}}f_k=\gamma\left(-i\omega_{\boldsymbol{k}})f_k+\frac{\gamma}{c^2}\,\boldsymbol{v}\cdot(i\boldsymbol{k}\right)f_k=-i\left(\gamma\omega_{\boldsymbol{k}}-\gamma\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c^2}\right)f_k$$

$$\partial_{t'}f_k=-i\omega'_{\boldsymbol{k}}f_k \tag{5.86}$$

Όπου προέκυψε μια νέα συχνότητα μετατοπισμένη κατά **Lorentz**. Αυτό μας υποδεικνύει ότι η ίδια κατάσταση περιγράφει τα ίδια σωματίδια απλώς με διαφορετική ορμή.

Τανυστής ενέργειας-ορμής του Πεδίου Klein-Gordon

Για το πεδίο Klein-Gordon μπορούμε να γενικεύσουμε τον τανυστή ενέργειας ορμής για πεδία 3.16 απλώς αντικαθιστώντας τα q με τα αντίστοιχα πεδία $\hat{\Psi}$ και διατηρώντας τις μεταθετικές σχέσεις. Από το θεώρημα της **Noether** προκύπτει ο τανυστής ενέργειας-ορμής από όπου ταυτοποιούμε κάποιες ποσότητες όπως η ενέργεια, hamiltonian, η ορμή και ο τανυστής των τάσεων.

$$\mathcal{H} = \mathfrak{T}^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \hat{\Psi})}\partial_0 \hat{\Psi} - \mathcal{L} = -\frac{\hbar c}{2}\left\{\left(\eta^{0\rho}\partial_\rho \hat{\Psi} + \eta^{\tau 0}\partial_\tau \hat{\Psi})\partial_0 \hat{\Psi} + ((\partial^\mu \hat{\Psi})^2 + \frac{(mc^2)^2}{(\hbar c)^2}\hat{\Psi}^2\right)\right\} \tag{5.87}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar c}{2}\left(\dot{\hat{\Psi}}^2 + (\partial_i \hat{\Psi})^2 + \frac{(mc^2)^2}{(\hbar c)^2}\hat{\Psi}^2\right) \tag{5.88}$$

$$\mathscr{P}_i = \mathfrak{T}^0{}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \hat{\Psi})}\partial_i \hat{\Psi} = -\frac{\hbar c}{2}(\eta^{0\rho}\partial_\rho \hat{\Psi}\partial_i \hat{\Psi} + \partial_i \hat{\Psi}\eta^{\tau 0}\partial_\tau \hat{\Psi}) = \frac{\hbar c}{2}(\dot{\hat{\Psi}}\partial_i \hat{\Psi} + \partial_i \hat{\Psi}\dot{\hat{\Psi}}) = \frac{1}{2}(\hat{\Pi}\partial_i \hat{\Psi} + \partial_i \hat{\Psi}\hat{\Pi}) \tag{5.89}$$

$$S^i{}_j = \mathfrak{T}^i{}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \hat{\Psi})}\partial_j \hat{\Psi} = -\frac{\hbar c}{2}(\eta^{i\rho}\partial_\rho \hat{\Psi}\partial_j \hat{\Psi} + \partial_j \hat{\Psi}\eta^{\tau i}\partial_\tau \hat{\Psi}) = -\frac{\hbar c}{2}\{\partial_i \hat{\Psi}\partial_j \hat{\Psi} + \partial_j \hat{\Psi}\partial_i \hat{\Psi}\} \tag{5.90}$$

$$\int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Psi}^2 dV_{\boldsymbol{x}} = \iiint_{V_{\boldsymbol{x}}} (\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k}})(\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}\psi_{\boldsymbol{k'}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\psi^*_{\boldsymbol{k'}})dV_{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'} = \iiint_{V_{\boldsymbol{x}}} (\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}\psi_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k'}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\psi^*_{\boldsymbol{k'}}\psi_{\boldsymbol{k}}$$

$$+ \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}\psi_{\boldsymbol{k'}}\psi^*_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\psi^*_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k'}})dV_{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'} = \int \{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}\frac{e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'}) + \frac{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) + \frac{\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$$

$$+ \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\frac{e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})\}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'} \Rightarrow$$

$$\int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Psi}^2 dV_{\boldsymbol{x}} = \int \frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\}d\boldsymbol{k} \tag{5.91}$$

$$\int_{V_{\boldsymbol{x}}} (\partial_l \hat{\Psi})^2 dV_{\boldsymbol{x}} = \iiint_{V_{\boldsymbol{x}}} (\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(-i\boldsymbol{k})\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}i\boldsymbol{k}\psi^*_{\boldsymbol{k}})(\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}(-i\boldsymbol{k'})\psi_{\boldsymbol{k'}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}i\boldsymbol{k'}\psi^*_{\boldsymbol{k'}})dV_{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'} =$$

$$\frac{i^2}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\int (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k'})\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'}) - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})\}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'}$$

$$\int_{V_{\boldsymbol{x}}} (\partial_l \hat{\Psi})^2 dV_{\boldsymbol{x}} = \int \frac{\boldsymbol{k}^2}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\}d\boldsymbol{k}$$

$$\int_{V_{\boldsymbol{x}}} \dot{\hat{\Psi}}^2 dV_{\boldsymbol{x}} = \iiint_{V_{\boldsymbol{x}}} (\hat{a}_{\boldsymbol{k}}i\omega_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}(-i\omega_{\boldsymbol{k}})\psi^*_{\boldsymbol{k}})(\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}i\omega_{\boldsymbol{k'}}\psi_{\boldsymbol{k'}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}(-i\omega_{\boldsymbol{k'}})\psi^*_{\boldsymbol{k'}})dV_{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'} =$$

$$i^2\int \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'}) - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k'}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})\}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'}$$

$$\int_{V_{\boldsymbol{x}}} \dot{\hat{\Psi}}^2 dV_{\boldsymbol{x}} = -\int \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\}d\boldsymbol{k}$$

$$\left.\begin{array}{c} \int_{V_{\boldsymbol{x}}} m^2c^4\hat{\Psi}^2 dV_{\boldsymbol{x}} \\ \\ \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hbar c(\partial_l \hat{\Psi})^2 dV_{\boldsymbol{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \int \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2+(mc^2)^2}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\}d\boldsymbol{k} \\ \\ \hbar^2\omega^2_{\boldsymbol{k}} = (\hbar c)^2\boldsymbol{k}^2 + (mc^2)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \frac{m^2c^4}{\hbar c}\hat{\Psi}^2 + \hbar c(\partial_l \hat{\Psi})^2 dV_{\boldsymbol{x}} = \int \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\}d\boldsymbol{k} \\ \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hbar\dot{\hat{\Psi}}^2 dV_{\boldsymbol{x}} = -\int \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}}}\}d\boldsymbol{k} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{H} = \int \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{4}2\left\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\right\}d\boldsymbol{k} = \int \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\left\{\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{k})\right\}d\boldsymbol{k} = \int \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\{\hat{N}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{k})\}d\boldsymbol{k} \tag{5.92}$$

$$p_i = \frac{\hbar}{2}\iiint_{V_x} \{(\hat{a}_{\boldsymbol{k}} i\omega_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} i\omega_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k}})(-\hat{a}_{\boldsymbol{k}'} ik'_i\psi_{\boldsymbol{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'} ik'_i\psi^*_{\boldsymbol{k}'})$$
$$+ (-\hat{a}_{\boldsymbol{k}} ik_i\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} ik_i\psi^*_{\boldsymbol{k}})(\hat{a}_{\boldsymbol{k}'} i\omega_{\boldsymbol{k}'}\psi_{\boldsymbol{k}'} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'} i\omega_{\boldsymbol{k}'}\psi^*_{\boldsymbol{k}'})\} dV_{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{k'} =$$
$$-\frac{i^4\hbar}{2}\iiint_{V_x} \omega_{\boldsymbol{k}}\{k'_i(\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\psi_{\boldsymbol{k}'}\psi_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\psi_{\boldsymbol{k}'}\psi_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k}'}\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k}'}\psi^*_{\boldsymbol{k}})$$
$$+ k_i(\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}'} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}'} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\psi^*_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\psi^*_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k}'})\} dV_{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{k'} =$$
$$-\frac{\hbar}{4}\int \{k'_i(\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}e^{2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'))$$
$$+ k_i(\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') - \hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}e^{-2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')) d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{k'} =$$
$$\frac{\hbar}{4}\int k_i\{-\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_k} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_k} + \hat{a}_{-\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_k} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_k}\} d\boldsymbol{k}$$
$$p_i = \int \{\hbar k_i\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}k_i\delta(\boldsymbol{k})\} d\boldsymbol{k} \overset{x\delta(x)=0\delta(x)}{=} \int \{\hbar k_i\hat{N}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}0\delta(\boldsymbol{k})\} d\boldsymbol{k} = \int \hbar k_i\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} d\boldsymbol{k} \tag{5.93}$$
$$\sigma^i{}_j = -\frac{\hbar}{2}\iiint_{V_x} \{(-\hat{a}_{\boldsymbol{k}} ik_i\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} ik_i\psi^*_{\boldsymbol{k}})(-\hat{a}_{\boldsymbol{k}} ik_j\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} ik_j\psi^*_{\boldsymbol{k}})$$
$$+ (-\hat{a}_{\boldsymbol{k}} ik_j\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} ik_j\psi^*_{\boldsymbol{k}})(-\hat{a}_{\boldsymbol{k}} ik_i\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} ik_i\psi^*_{\boldsymbol{k}})\} dV_{\boldsymbol{x}}$$
$$\sigma^i{}_j = -\frac{\hbar}{2}\int \frac{\hbar}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\{k'^i k_j(\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}e^{2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}e^{2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'))$$
$$+ k^i k'_j(\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}e^{2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'}e^{2i\omega_k}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'))$$
$$\sigma^i{}_j = \int \frac{\hbar k^i\hbar k_j}{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}\{\frac{1}{2}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}e^{2i\omega_k} + \hat{N}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}e^{-2i\omega_k}\} d\boldsymbol{k} \tag{5.94}$$

5.3.2 Πεδίο Dirac

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε την εξίσωση Dirac για πεδία η οποία αποδεικνύεται ότι περιγράφει πεδία που ακολουθούν την στατιστική Fermi-Dirac. Κι εδώ χρησιμοποιούμε την μετρική $\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,+)$.

$$\mathcal{L} = \hat{\bar{\Psi}}(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\hat{\Psi}, \qquad \hat{\bar{\Psi}} \equiv \hat{\Psi}^\dagger\gamma^0 \tag{5.95}$$
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{5.96}$$
$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}, \partial_\nu\hat{\Psi})}{\partial(\partial_\mu\hat{\bar{\Psi}})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}, \partial_j\hat{\Psi})}{\partial\hat{\bar{\Psi}}} = 0 \Rightarrow 0 - (i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow$$
$$(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\hat{\Psi} = 0 \quad \text{Εξίσωση Dirac} \tag{5.97}$$
$$\hat{\Pi} = \frac{\partial\mathcal{L}(\hat{\Psi}, \partial_\nu\hat{\Psi})}{\partial(\partial_t\hat{\Psi})} = \hat{\bar{\Psi}}i\hbar\gamma^0 = i\hbar\hat{\Psi}^\dagger\gamma^0\gamma^0 = i\hbar\hat{\Psi}^\dagger \quad \text{Συζυγής ορμή} \tag{5.98}$$

Για την Lagrangian density της εξίσωσης Dirac έχουμε τις ακόλουθες αντιμεταθετικές σχέσεις. Επίσης ορίζουμε την αναλλοίωτη ποσότητα 5.100 που προκύπτει από δυο λύσεις της εξίσωσης Dirac. Καθώς και τις λύσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας, που όπως θα δούμε αναπαριστούν σωματίδια και αντισωματίδια αντίστοιχα.

$$\{\hat{\Pi}_a(x), \hat{\Pi}_b(x')\} = 0, \ \{\hat{\Psi}_a(x), \hat{\Psi}_b(x')\} = 0, \ \{\hat{\Psi}_a(x), \hat{\Pi}_b(x')\} = i\hbar\delta_{ab}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{5.99}$$

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\bar{\Psi}}_1 \gamma^0 \hat{\Psi}_2 dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Psi}_1^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \hat{\Psi}_2 dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Psi}_2^\dagger \hat{\Psi}_1 dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.100}$$

$$\psi_{\boldsymbol{k},s}(x) = \begin{cases} u_{\boldsymbol{k},s}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\boldsymbol{k}} L^3}} u(\boldsymbol{k}, s) e^{-ik^\mu x_\mu} & m \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}} L^3}} u(\boldsymbol{k}, s) e^{-ik^\mu x_\mu} & m = 0 \end{cases} \\ v_{\boldsymbol{k},s}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\boldsymbol{k}} L^3}} v(\boldsymbol{k}, s) e^{ik^\mu x_\mu} & m \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}} L^3}} v(\boldsymbol{k}, s) e^{ik^\mu x_\mu} & m = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \{\not{p} \mp mc\} u_i = 0, \quad \begin{cases} u_- \equiv u \\ u_+ \equiv v \end{cases} \tag{5.101}$$

θα αναπτύξουμε στην βάση των επίπεδων κυμάτων το πεδίο Dirac.

$$\hat{\Psi} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{c}_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k},s}(x) + \hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k},s} v_{\boldsymbol{k},s}(x) \tag{5.102}$$

$$(u_{\boldsymbol{k},s}, u_{\boldsymbol{k'},s'}) = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{\frac{m^2}{V^2 \omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k'}}}} e^{i(k-k')^\mu x_\mu} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$(u_{\boldsymbol{k},s}, u_{\boldsymbol{k'},s'}) = \frac{mV\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}}}{V\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{k'}})t} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} = \frac{m\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{m} \delta_{s,s'} = \delta_{s,s'} \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}} \tag{5.103}$$

$$(u_{\boldsymbol{k},s}, v_{\boldsymbol{k'},s'}) = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{\frac{m^2}{V^2 \omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k'}}}} e^{i(k+k')^\mu x_\mu} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} v_{\boldsymbol{k'},s'} dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$(u_{\boldsymbol{k},s}, v_{\boldsymbol{k'},s'}) = \frac{mV\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k'}}}{V\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{2i\omega_{\boldsymbol{k}} t} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} v_{-\boldsymbol{k},s'} = 0 \tag{5.104}$$

$$(u_{\boldsymbol{k},s}, u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}) = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'} dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{\frac{m^2}{V^2 \omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k'}}}} e^{i(k+k')^\mu x_\mu} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$(u_{\boldsymbol{k},s}, u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}) = \frac{mV\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k'}}}{V\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{k'}})t} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} = \frac{m\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k'}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{-i2.\omega_{\boldsymbol{k}} t} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{-\boldsymbol{k},s'} = 0 \tag{5.105}$$

Από την σχέση 5.100 έχουμε για τους τελεστές $(\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s})$.

$$\hat{c}_{\boldsymbol{k},s} = (u_{\boldsymbol{k},s}, \hat{\Psi}) \quad \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s} = (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}, \hat{\Psi}^\dagger) \tag{5.106}$$

Όπου θα αποδείξουμε τις αντιμεταθετικές τους σχέσεις.

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x) u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') \hat{\Psi}(x') + u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') \hat{\Psi}(x') u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x)) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x') + u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x')) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') (\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x') + \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x')) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}} = 0$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'}\} = 0 \tag{5.107}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x) (u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') \hat{\Psi}^\dagger(x')) + (u^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(x') \hat{\Psi}^\dagger(x')) u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x)) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') u_{\boldsymbol{k'},s'}(x') + \hat{\Psi}^\dagger(x') u_{\boldsymbol{k'},s'}(x') u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x)) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') u_{\boldsymbol{k'},s'}(x') + u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') \hat{\Psi}(x) u_{\boldsymbol{k'},s'}(x')) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) (\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') + \hat{\Psi}^\dagger(x') \hat{\Psi}(x)) u_{\boldsymbol{k'},s'}(x')) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \iint_{V_{\boldsymbol{x}} \cup V_{\boldsymbol{x'}}} (u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) u_{\boldsymbol{k'},s'}(x')) dV_{\boldsymbol{x}} dV_{\boldsymbol{x'}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(x) u_{\boldsymbol{k'},s'}(x)) dV_{\boldsymbol{x}} = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}} \delta_{s,s'}$$

$$\{\hat{c}_{\boldsymbol{k},s}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}\} = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}} \delta_{s,s'} \tag{5.108}$$

Spin και Στροφορμή για το πεδίο Dirac

Μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες του Dirac ήταν η πρόβλεψη του Spin του e^-. Θα ξεκινήσουμε από την hamiltonian Dirac και από την απόδειξη ότι η στροφορμή δεν διατηρείται, από μόνη της, ενώ αν εισαγάγουμε την έννοια του Spin τότε η ολική στροφορμή θα διατηρείται.

$$(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\hat\Psi = 0 \overset{\gamma^0\cdot}{\Rightarrow} (i\hbar c\gamma^0\gamma^j\partial_j + mc^2\gamma^0)\hat\Psi = i\hbar\partial_0\hat\Psi \Rightarrow \mathscr{H}\hat\Psi = E\hat\Psi \Rightarrow \begin{cases}\mathscr{H}\equiv i\hbar c\gamma^0\gamma^j\partial_j + mc^2\gamma^0\\ E\equiv i\hbar\partial_0\end{cases} \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}}\wedge\hat{\boldsymbol{p}} = \epsilon_{ijk}\hat r_j\hat p_k = -i\hbar\epsilon_{ijk}\hat r_j\partial_k\\
&[\hat p_i,\gamma^\mu] = 0\ [\hat r_i,\gamma^\mu] = 0,\ [\hat p_i,\hat p_j] = 0,\ [\hat r_i,\hat p_j] = i\hbar\delta_{ij}\\
&[\mathscr{H},\hat L_i] = [\gamma^0\gamma^l\hat p_l c + mc^2\gamma^0, i\epsilon_{ijk}\hat r_j\hat p_k] = \gamma^0\gamma^l\epsilon_{ijk}[\hat p_l c,\hat r_j\hat p_k] = \gamma^0\gamma^l\epsilon_{ijk}([\hat p_l c,\hat r_j]\hat p_k + \hat r_j[\hat p_l,\hat p_k])\\
&[\mathscr{H},\hat L_i] = \gamma^0\gamma^l\epsilon_{jik}i\hbar c\delta_{lj}\hat p_k\\
&[\mathscr{H},\hat{\boldsymbol{L}}] = -i\hbar c\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\wedge\hat{\boldsymbol{p}}
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Όπως παρατηρούμε δεν μετατίθενται οπότε πρέπει να υπάρχει κάποια επιπλέον συμμετρία την οποία δεν έχουμε παρατηρήσει. Θα εισαγάγουμε τον τανυστή $\hat\Sigma^{\mu\nu}$ μέσω του οποίου θα αποδείξουμε ότι η συμμετρία που μας λείπει είναι το Spin.

$$\hat\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu],\ \hat\Sigma^i = i\hbar\epsilon_{ijk}\Sigma^{jk} = i\hbar\epsilon_{ijk}(\gamma^j\gamma^k - \eta^{jk}) = i\epsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k \tag{5.111}$$

$$\gamma^0\hat\Sigma^i = i\hbar\epsilon_{ijk}\gamma^0\gamma^j\gamma^k = -i\hbar\epsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^0\gamma^k = i\hbar\epsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k\gamma^0 = \hat\Sigma^i\gamma^0 \tag{5.112}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat\Sigma^i = i\hbar\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}0&\sigma^j\\-\sigma^j&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^k\\-\sigma^k&0\end{pmatrix} = i\hbar\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}-\sigma^j\sigma^k&0\\0&-\sigma^j\sigma^k\end{pmatrix}\\ \sigma^j\sigma^k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma^l\end{aligned}\right\} \underset{\epsilon_{ijl}\epsilon_{ijk}=\delta_{lk}}{\overset{\delta_{ij}\epsilon_{ijk}=0}{\Longrightarrow}} \hat\Sigma^i = \hbar\begin{pmatrix}\sigma^i&0\\0&\sigma^i\end{pmatrix} \tag{5.113}$$

$$[\mathscr{H},\hat\Sigma^i] = [\gamma^0\gamma^j cp_j + mc^2\gamma^0,\hat\Sigma^i] = [\gamma^0\gamma^l,\hat\Sigma^i]cp_l \tag{5.114}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^j\\-\sigma^j&0\end{pmatrix},\hat\Sigma^i\right] = \left[\begin{pmatrix}0&\sigma^j\\\sigma^j&0\end{pmatrix},\hbar\begin{pmatrix}\sigma^i&0\\0&\sigma^i\end{pmatrix}\right]\hbar\begin{pmatrix}\sigma^j\sigma^i&0\\0&\sigma^j\sigma^i\end{pmatrix} - \hbar\begin{pmatrix}0&\sigma^i\sigma^j\\\sigma^i\sigma^j&0\end{pmatrix} =$$

$$\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma^j\sigma^i-\sigma^i\sigma^j\\\sigma^j\sigma^i-\sigma^i\sigma^j&\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2i\hbar\epsilon_{jik}\sigma^k\\2i\hbar c\epsilon_{jik}\sigma^k&0\end{pmatrix}$$

$$[\mathscr{H},\hat\Sigma^i] = i\hbar c\epsilon_{jik}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^k\\-\sigma^k&0\end{pmatrix}p_j = 2i\hbar c\epsilon_{ijk}\gamma^0\gamma^j p_k \Rightarrow [\mathscr{H},\hat{\boldsymbol{\Sigma}}] = 2i\hbar c\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{p} \tag{5.115}$$

Όπου καταλήξαμε στην σχέση

$$[\mathscr{H},\hat{\boldsymbol{L}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}] = [\mathscr{H},\hat{\boldsymbol{J}}] = 0 \tag{5.116}$$

Τώρα θα διερευνήσουμε την υπόθεση μας ότι ο επιπλέον όρος αποτελεί όντως το Spin. Ορίζουμε

$$s^\mu = (0,\boldsymbol{s})\quad s^\mu s_\mu = -0 + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s} = -1 \tag{5.117}$$

Θα θεωρήσουμε ένα σωματίδιο σε ηρεμία $\boldsymbol{k} = 0$ επίσης έχουμε.

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^2 = i^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}\hat\Sigma^{jk}\hat\Sigma^{jk} = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \tag{5.118}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{s}u(0,\pm\frac{1}{2}) = \pm\frac{1}{2}u(0,\pm\frac{1}{2})\\ \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{s}v(0,\pm\frac{1}{2}) = \mp\frac{1}{2}v(0,\pm\frac{1}{2})\end{cases} \tag{5.119}$$

Όπου η πρώτη εξίσωση περιγράφει ένα σωματίδιο το οποίο έχει θετική ενέργεια και θετική προβολή Spin ενώ η δεύτερη περιγραφή ένα σωματίδιο το οποίο έχει αρνητική ενέργεια και αρνητική προβολή Spin. Μια ακόμα συνεισφορά του Dirac είναι η περιγραφή των σωματιδίων σε αρνητική ενεργειακή κατάσταση ως οπές των οποίων οι διεγέρσεις αποτελούν τα αντισωματίδια.

$$[\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\rho] = \begin{Bmatrix} 0 & \mu=\nu \\ \frac{1}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu,\gamma^\rho] & \mu\neq\nu \end{Bmatrix} \Rightarrow [\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\rho] = \begin{Bmatrix} 0 & \mu=\nu \\ \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu & \mu\neq\nu \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\rho] = \begin{Bmatrix} 0 & \mu=\nu \\ \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu & \mu\neq\nu \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\rho] = \begin{Bmatrix} 0 & \mu=\nu \\ \frac{1}{2}(\gamma^\mu\{\gamma^\nu,\gamma^\rho\} - \{\gamma^\rho,\gamma^\mu\}\gamma^\nu & \mu\neq\nu \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 & \mu=\nu \\ (\gamma^\mu\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\mu}\gamma^\nu & \mu\neq\nu \end{Bmatrix} \tag{5.120}$$

$$[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\rho\tau}] = \frac{1}{2}[\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\rho\gamma^\tau] = \frac{1}{2}([\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\rho]\gamma^\tau + \gamma^\rho[\Sigma^{\mu\nu},\gamma^\tau]) = \frac{1}{2}((\gamma^\mu\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\mu}\gamma^\nu)\gamma^\tau + \gamma^\rho(\gamma^\mu\eta^{\tau\nu} - \eta^{\tau\mu}\gamma^\nu)$$

$$[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\rho\tau}] \overset{\gamma^\mu\gamma^\tau=\Sigma^{\mu\tau}+\eta^{\mu\tau}}{=} \frac{1}{2}((2\Sigma^{\mu\tau}+\eta^{\mu\tau})\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\mu}(2\Sigma^{\nu\tau}+\eta^{\nu\tau}) + \eta^{\tau\nu}(2\Sigma^{\rho\mu}+\eta^{\rho\mu}) - \eta^{\mu\tau}(2\Sigma^{\rho\nu}+\eta^{\rho\nu}))$$

$$[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\rho\tau}] = (\Sigma^{\mu\tau}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\mu}\Sigma^{\nu\tau} + \eta^{\tau\nu}\Sigma^{\rho\mu} - \eta^{\mu\tau}\Sigma^{\rho\nu}) \tag{5.121}$$

Έχουμε αποδείξει πως για μικρές μετατοπίσεις του χωρόχρονου έχουμε διατήρηση της στροφορμής.

$$\left.\begin{aligned} x'^\tau &= x^\tau + x_\rho\delta\Omega^{\tau\rho} = x^\tau + \epsilon^\tau{}_\rho x^\rho \equiv x^\tau + \epsilon_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})^\tau{}_\rho x^\rho \\ \psi_\tau(x') &= \psi(x)_\tau + \tfrac{1}{2}(\delta\Omega^{\nu\mu})_{\tau\rho}\psi_\rho = \psi_\tau(x) + \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})_{\tau\rho}\psi_\rho(x) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \delta x^\tau &= x^\tau + \epsilon_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})^\tau{}_\rho x^\rho \\ \delta\psi_\tau &= \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})_{\tau\rho}\psi_\rho \end{aligned} \tag{5.122}$$

Τανυστής ενέργειας-ορμής του Πεδίου Dirac

Από το θεώρημα της **Noether** έχουμε πως υπάρχει ένα διατηρήσιμο ρεύμα για κάθε Lagrangian density η οποία παραμένει κάτω από κάποιον μετασχηματισμό. Όμως όπως και στο πεδίο Klein-Gordon πρέπει να τηρήσουμε, εδώ, τις αντιμεταθετικές σχέσεις για τα πεδία .Για την Lagrangian density του πεδίου Dirac παρατηρούμε ότι παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό.

$$\hat\Psi \to \hat\Psi' = e^{ia}\hat\Psi \approx (1 + ia + \dots)\hat\Psi \Rightarrow \delta\hat\Psi = ia\hat\Psi \tag{5.123}$$

$$\delta x^\mu = 0 \tag{5.124}$$

Εφόσον τα πεδία τηρούν αντιμεταθετικές σχέσεις είναι αντισυμμετρικά οπότε μπορούμε να γράψουμε για κάθε πίνακα ο οποίος δρα στα πεδία χωρίς όμως να είναι κάποιος τελεστής που η δράση του δίνει ιδιοτιμές των πεδίων (π.χ. τελεστής ορμής). Στην περίπτωση μας ο πίνακας είναι ένας γάμμα πίνακας.

$$\hat\Psi^\dagger_a A_{ab}\hat\Psi_b \equiv \frac{1}{2}(\hat\Psi^\dagger_a A_{ab}\hat\Psi_b - A_{ab}\hat\Psi_b\hat\Psi^\dagger_a) = \frac{1}{2}[\hat\Psi^\dagger, \boldsymbol{A}\hat\Psi] = \frac{1}{2}[\hat\Psi^\dagger\boldsymbol{A}, \hat\Psi] \tag{5.125}$$

$$\mathcal{J}^\mu = \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\hat\Psi)}\frac{\partial\hat\Psi'}{\partial a}\right|_{a=0} = i^2\frac{\hbar}{2}ae^0[\hat{\bar\Psi}, \boldsymbol{\gamma}\hat\Psi] = -a\frac{\hbar}{2}[\hat{\bar\Psi}, \boldsymbol{\gamma}\hat\Psi] \tag{5.126}$$

Αντικαθιστώντας το a με το φορτίο του ηλεκτρονίου παίρνουμε: $\mathcal{J}^\mu = -\frac{e}{2}[\hat{\bar\Psi}, \boldsymbol{\gamma}\hat\Psi]$ (5.127)

$$Q = -\frac{e}{2}\int_{V_{\boldsymbol{x}}}\mathcal{J}^0 dV_{\boldsymbol{x}} = -\frac{e}{2}\int_{V_{\boldsymbol{x}}}[\hat\Psi^\dagger, \hat\Psi]dV_{\boldsymbol{x}} = -\frac{e}{2}\int_{V_{\boldsymbol{x}}}(2\hat\Psi^\dagger\hat\Psi + \delta(\boldsymbol{x}))dV_{\boldsymbol{x}} = -e\int_{V_{\boldsymbol{x}}}\hat\Psi^\dagger\hat\Psi dV_{\boldsymbol{x}} + \frac{e}{2} \tag{5.128}$$

$$Q = -e\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',s,s'}\int_{V_{\boldsymbol{x}}}(\hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k}',s'}u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}u_{\boldsymbol{k}',s'} + \hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat d_{\boldsymbol{k}',s}u^\dagger_{\boldsymbol{k},s}v_{\boldsymbol{k}',s'} + \hat d_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k}',s'}v^\dagger_{\boldsymbol{k},s}u_{\boldsymbol{k}',s'} + \hat d_{\boldsymbol{k},s}\hat d^\dagger_{\boldsymbol{k}',s'}v^\dagger_{\boldsymbol{k},s}v_{\boldsymbol{k}',s})dV_{\boldsymbol{x}} + \frac{e}{2}$$

$$Q = -e\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',s,s'}(\hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k}',s'}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{s,s'} + \hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat d_{\boldsymbol{k}',s}0 + \hat d_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k}',s'}0 + \hat d_{\boldsymbol{k},s}\hat d^\dagger_{\boldsymbol{k}',s'}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{s,s'}) - \frac{e}{2}$$

$$Q = -e\sum_{\boldsymbol{k},s}(\hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k},s} + \hat d_{\boldsymbol{k},s}\hat d^\dagger_{\boldsymbol{k},s}) + \frac{e}{2} = -e\sum_{\boldsymbol{k},s}(\hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k},s} - \hat d^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat d_{\boldsymbol{k},s} + \delta(\boldsymbol{k})) + \frac{e}{2}$$

$$Q = -e\sum_{\boldsymbol{k},s}(\hat c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat c_{\boldsymbol{k},s} - \hat d^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat d_{\boldsymbol{k},s}) - \frac{e}{2} \tag{5.129}$$

$$p_\mu = i\hbar \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Psi}^\dagger \partial_\mu \hat{\Psi} dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$p_\mu = i\hbar \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},s,s'} \int_{V_{\boldsymbol{x}}} (\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} + \hat{d}_{\boldsymbol{k},s} v^\dagger_{\boldsymbol{k},s})(\hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'}(-ik'_\mu) u_{\boldsymbol{k'},s'} + \hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s} ik'_\mu v_{\boldsymbol{k'},s'}) dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$p_\mu = i^2\hbar \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},s,s'} k'_\mu \int_{V_{\boldsymbol{x}}} (-\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s} u^\dagger_{\boldsymbol{k},s} v_{\boldsymbol{k'},s'}$$

$$- \hat{d}_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'} v^\dagger_{\boldsymbol{k},s} u_{\boldsymbol{k'},s'} u_{\boldsymbol{k'},s'} + \hat{d}_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s} v^\dagger_{\boldsymbol{k},s} v_{\boldsymbol{k'},s'}) dV_{\boldsymbol{x}}$$

$$p_\mu = \hbar \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},s,s'} k'_\mu (\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k'},s'} \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}}\delta_{s,s'} - \hat{d}_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'} \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}}\delta_{s,s'})$$

$$p_\mu = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar k_\mu (\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k},s} - \hat{d}_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}) = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar k_\mu (\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k},s} - \hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}_{\boldsymbol{k},s} + \delta(\boldsymbol{k})) \overset{\boldsymbol{k}\delta(\boldsymbol{k})=0\delta(\boldsymbol{k})}{\Rightarrow}$$

$$p_\mu \begin{cases} \boldsymbol{p} = \sum\limits_{\boldsymbol{k},s} \hbar \boldsymbol{k} (\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k},s} - \hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}_{\boldsymbol{k},s}) \\ p_0 = \sum\limits_{\boldsymbol{k},s} \hbar \omega_{\boldsymbol{k}} (\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{c}_{\boldsymbol{k},s} - \hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\hat{d}_{\boldsymbol{k},s} + \delta(\boldsymbol{k})) \end{cases} \tag{5.130}$$

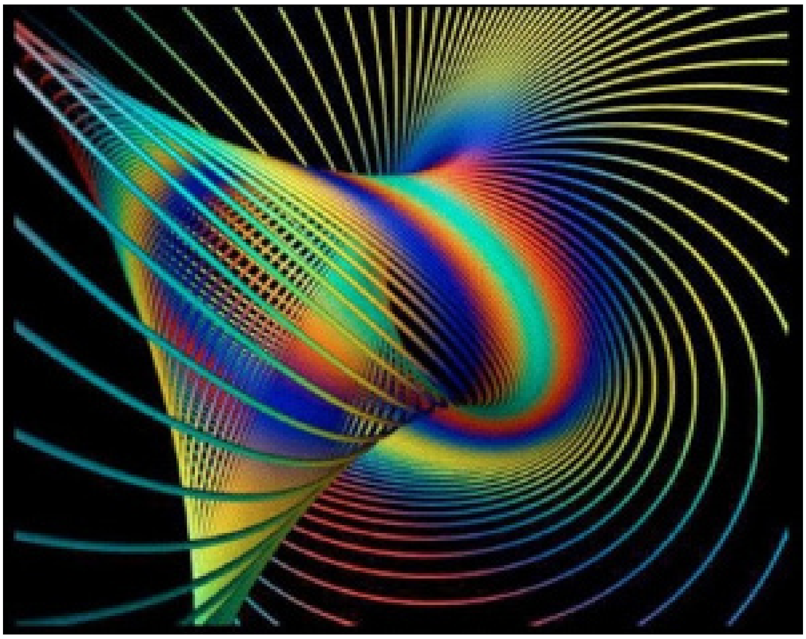
Από την αρχή δράσης του **Schwinger** παίρνουμε για το πεδίο Dirac.

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Pi}_a \Sigma^{\mu\nu}_{ab} \hat{\Psi}_b + x^\mu \mathscr{P}^\nu - x^\nu \mathscr{P}^\mu dV_{\boldsymbol{x}} \qquad \mathcal{S}^{\mu\nu} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Pi}_a \Sigma^{\mu\nu}_{ab} \hat{\Psi}_b dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.131}$$

Όπου καταλήγουμε ο $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ να ικανοποιεί τις μεταθετικές σχέσεις που έχουμε αποδείξει για το Spin.

$$[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\tau}] = i \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Pi} [\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\tau}] \hat{\Psi} dV_{\boldsymbol{x}} = i(\Sigma^{\mu\tau}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\mu}\Sigma^{\nu\tau} + \eta^{\tau\nu}\Sigma^{\rho\mu} - \eta^{\mu\tau}\Sigma^{\rho\nu}) \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \hat{\Pi}\hat{\Psi} dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.132}$$

Παρατηρούμε πως και για το πεδίο Dirac συναντάμε την έννοια του Spin.



Σχήμα 5.1: Spinor πεδίο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο.

5.4 Πεδία Σε Καμπυλωμένο Χωρόχρονο

Πριν προχωρήσουμε στην γενίκευση της κβαντικής θεωρίας πεδίου από επίπεδο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο θα πούμε τους λόγους τους οποίους μας οδηγησαν σε αυτού του είδους την γενίκευση. Όπως είναι γνωστό δεν υπάρχει μια ενιαία θεωρία για την κβάντωση του βαρυτικού πεδίου οπότε η μελέτη φαινομένων τα οποία οφείλονται στην κβάντωση του πεδίου αυτού δεν μπορούν να προβλεφθούν ακριβώς. Όμως όπως πολλά μοντέλα της φυσικής μας επιτρέπουν προσεγγίσεις έτσι υποθέτουμε την γενίκευση της θεωρία πεδίου από επίπεδο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο δίνει μια καλή προσέγγιση, αυτού του είδους η προσέγγιση είναι ανάλογη με την ημικλασική θεωρία αλληλεπίδρασης ύλης ΗΜ ακτινοβολίας, των φαινομένων τα οποία λαμβάνουν χώρα παρουσία του βαρυτικού πεδίου. Επίσης από τα νέα φαινόμενα τα οποία προκύπτουν μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα την, κβαντική, φύση του βαρυτικού πεδίου έτσι ώστε κάποια μέρα να επιτευχθεί μια ενιαία θεωρία και για το κβαντισμένο βαρυτικό πεδίο. Εφόσον εξηγήσαμε μερικούς λόγους τους οποίους μας οδήγησαν στην γενίκευση τώρα θα δώσουμε και τις υποθέσεις οι οποίες μας επιτρέπουν αυτού του είδους την γενίκευση. Από την αρχή ελάχιστης ζεύξης την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο μέσω αυτής. Θα υποθέσουμε ότι τα πεδία μας, $\hat{\Psi}$, θα κινούνται πάνω στον χωρόχρονο του οποίου η μετρική είναι $g_{\mu\nu}(x)$, η οποία δεν είναι σταθερή πλέον όπως η **Minkowski**. Αυτήν την μετρική θα την θεωρήσουμε ως την παρουσία ενός εξωτερικού, μη κβαντισμένου, πεδίου, του βαρυτικού. Η αρχή της ελάχιστης ζεύξης είναι ισοδύναμη με την αρχή ισοδυναμίας του EinStein οπότε σε μικρές περιοχές του χωρόχρονου, σύμφωνα με αυτήν την αρχή, δεν εμφανίζονται βαρυτικά φαινόμενα σε τοπικά αδρανιακά συστήματα αναφοράς. Με αυτές τις υποθέσεις θα πάρουμε την δράση η οποία προκύπτει από τα πεδία, $\hat{\Psi}$, και τις παραγώγους αυτών, $\nabla_\mu\hat{\Psi}$, την οποία θα την θεωρήσουμε αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς έτσι έχουμε.

$$\mathcal{S}[\hat{\Psi},\nabla\hat{\Psi},g_{\mu\nu}(x)] = \int \mathscr{L}(\hat{\Psi},\nabla\hat{\Psi},g_{\mu\nu}(x))dt = \iint_\Omega \mathcal{L}(\hat{\Psi},\nabla\hat{\Psi},g_{\mu\nu}(x))dV_{\boldsymbol{x}}dt \tag{5.133}$$

5.4.1 Πεδίο Klein-Gordon

Για το βαθμωτό πεδίο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο έχουμε την Lagrangian density στην οποία έχουμε την αλληλεπίδραση του βαθμωτού πεδίου με το βαρυτικό πεδίο το οποίο δίνεται από το βαθμωτό **Ricci** (την ίδια υπόθεση είχαμε κάνει για να εξαγάγουμε τις εξισώσεις πεδίου του EinStein μέσω της αρχής ελαχίστου δράσης). Η υπόθεση μας ότι η μελέτη των φαινομένων γίνεται επάνω σε υπερεπιφάνειες **Cauchy** εξασφαλίζεται ότι οι λύσεις του πεδίου σε καμπυλωμένο χώρο υπάρχουν και όπως βλέπουμε μπορούμε ξανά να υποθέσουμε ως λύση τα επίπεδα κύματα οπότε θα έχουμε για τις μεταθετικές σχέσεις των πεδίων αντίστοιχες με αυτές του επίπεδου χωρόχρονου.

$$\mathcal{L}(\hat{\Psi},\nabla\hat{\Psi},g_{\mu\nu}(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(-\hbar^2c^2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\hat{\Psi}\nabla_\nu\hat{\Psi} - m^2c^4\hat{\Psi}^2 - \xi g^{\mu\nu}\boldsymbol{R}_{\mu\nu}\hat{\Psi}^2) \tag{5.134}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{H}(\hat{\Psi},\nabla_i\hat{\Psi},\hat{\Pi},g_{\mu\nu}(x)) = \hbar\sqrt{-g}\hat{\Pi}\nabla_0\hat{\Psi} - \mathcal{L} \\ \hat{\Pi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_0\hat{\Psi})} = -\frac{\hbar}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta^0_\mu\nabla_\nu\hat{\Psi} + \delta^0_\nu\nabla_\mu\hat{\Psi}) = \hbar\sqrt{-g}\nabla_0\hat{\Psi} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(\hat{\Pi}^2c^2 + m^2c^4\hat{\Psi}^2 + \xi\boldsymbol{R}\hat{\Psi}^2)$$

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε τις εξισώσεις κίνησης.

$$(-\hbar^2c^2\Box^2 + m^2c^4 + \xi\boldsymbol{R})\hat{\Psi} = 0 \tag{5.135}$$

$$\hat{\Psi} = \sum_i \hat{a}_i f_i + \hat{a}^\dagger f_i^*, [\hat{\Psi},\hat{\Psi}] = 0, \quad [\hat{\Pi},\hat{\Pi}] = 0, \quad [\hat{\Psi},\hat{\Pi}] = \frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{5.136}$$

Εφόσον οι λύσεις της εξίσωσης Klein-Gordon είναι τα επίπεδα κύματα μπορούμε να αναπτύξουμε τα πεδία σε αυτήν την βάση οπότε από την γενίκευση της αναλλοίωτης ποσότητας 5.66, που υποθέσαμε ως το εσωτερικό γινόμενο, και με χρήση αυτού θα εξαγάγουμε τις μεταθετικές σχέσεις για τους τελεστές δημιουργίας/καταστροφής.

$$(f_1,f_2) = -i\int_{V_{\boldsymbol{x}}} g^{0\nu}f_1\overleftrightarrow{\partial}_\nu f_2^*\sqrt{-g}d^3\boldsymbol{x} \tag{5.137}$$

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger,\hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_i,\hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{5.138}$$

Τανυστής ενέργειας-ορμής του Πεδίου Klein-Gordon

Για τον τανυστή ενέργειας ορμής έχουμε αποδείξει σε προηγούμενο κεφάλαιο την γενική σχέση για καμπυλωμένο χωρόχρονο, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την σχέση για να βρούμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής για την Lagrangian density του βαθμωτού κβαντικού πεδίου. Αυτή η Lagrangian density μας δίνει τον τανυστή ενέργειας ορμής για πεδία τα οποία περιγράφονται από την εξίσωση Klein-Gordon η οποία περιγράφει BoSonS. Αργότερα θα δούμε πως αυτή η ιδιότητα της Klein-Gordon είναι σημαντική διότι και η κατανομή μέλανος σώματος είναι μια υποπερίπτωση της στατιστικής BoSe-EinStein. Επίσης θα αποδείξουμε πως μια παρόμοια κατανομή ακολουθεί το υπόβαθρο του χωρόχρονου για έναν επιταχυνόμενο παρατηρητή.

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{5.139}$$

Για την εξαγωγή του τανυστή θα χωρίσουμε την Lagrangian σε δυο μέρη διότι το κομμάτι της αλληλεπίδρασης, $\xi\boldsymbol{R}$, με το βαρυτικό πεδίο το έχουμε ξανασυναντήσει στην εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου του EinStein μέσω της αρχής ελαχίστου δράσης, η οποία αποτελούσε την δράση **Hilbert**.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S} = \mathcal{S}_{field} + \mathcal{S}_{intr} \ \& \ \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta\mathcal{S}_{field}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta\mathcal{S}_{intr}}{\delta g_{\mu\nu}}\\
&\mathcal{S}_{field} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \frac{1}{2}\sqrt{-g}(-\hbar^2c^2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\hat{\Psi}\nabla_\nu\hat{\Psi} - m^2c^4\hat{\Psi}^2)dV_{\boldsymbol{x}}\\
&\mathcal{S}_{intr} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}} \frac{1}{2}\sqrt{-g}(-\xi g^{\mu\nu}\boldsymbol{R}_{\mu\nu}\hat{\Psi}^2)dV_{\boldsymbol{x}}\\
&\frac{\delta\mathcal{S}_{field}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{field})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\tau\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{field})}{\partial(\partial_\tau g_{\mu\nu})}\right)\\
&\left.\begin{aligned}\tfrac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{field})}{\partial g_{\mu\nu}} &= \tfrac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_{field} + \sqrt{-g}\tfrac{\partial\mathcal{L}_{field}}{\partial g_{\mu\nu}}\\ \tfrac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{field} + \sqrt{-g}\tfrac{\hbar^2}{2}g^{\tau\mu}g^{\rho\nu}\nabla_\tau\hat{\Psi}\nabla_\rho\hat{\Psi})\\ &\qquad\tfrac{\partial g^{\tau\rho}}{\partial g_{\mu\nu}} = -g^{\tau\mu}g^{\rho\nu}\end{aligned}\right\}\\
&\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{field})}{\partial(\partial_\tau g_{\mu\nu})} = \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_{field}}{\partial(\partial_\tau g_{\mu\nu})} = 0\\
&\delta\mathcal{S}_{intr} = -\frac{\xi}{2}\int_U(\delta\sqrt{-g}\boldsymbol{R}^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta\boldsymbol{R}^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\boldsymbol{R}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})\hat{\Psi}^2d^4x\\
&\delta\mathcal{S}_{intr} = -\int_U\left(\frac{\xi}{2}(\boldsymbol{R}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\boldsymbol{R})\hat{\Psi}^2\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\nabla_\tau\delta\Gamma^\tau{}_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}\nabla_\tau\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}\right)\sqrt{-g}\hat{\Psi}^2d^4x\\
&\delta\mathcal{S}_{intr} = -\int_U\left(\frac{\xi}{2}\mathfrak{G}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\hat{\Psi}^2\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\rho\tau}\nabla_\tau\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}g^{\rho\nu}\nabla_\tau\nabla_\nu\delta g_{\mu\rho}\right)\sqrt{-g}\hat{\Psi}^2d^4x
\end{aligned} \tag{5.140}$$

Όπου έχουμε κάνει δυο παραγοντικές ολοκληρώσεις.

$$\begin{aligned}
&\delta\mathcal{S}_{intr} = -\int_U\left(\frac{\xi}{2}\mathfrak{G}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\hat{\Psi}^2\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\rho\tau}\delta g_{\mu\nu}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2 - g^{\tau\mu}g^{\rho\nu}\delta g_{\mu\rho}\nabla_\tau\nabla_\nu\hat{\Psi}^2\right)\sqrt{-g}d^4x\\
&\delta\mathcal{S}_{intr} = -\int_U\left(\frac{\xi}{2}\mathfrak{G}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\hat{\Psi}^2 + g^{\mu\nu}g^{\rho\tau}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2 - g^{\tau\mu}g^{\nu\rho}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}d^4x\\
&\frac{\delta\mathcal{S}_{intr}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{\xi}{2}\mathfrak{G}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\hat{\Psi}^2 - \frac{\xi}{2}(g^{\mu\nu}g^{\rho\tau}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2 - g^{\tau\mu}g^{\nu\rho}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2)\sqrt{-g}\\
&\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{field} + \hbar^2c^2g^{\tau\mu}g^{\rho\nu}\nabla_\tau\hat{\Psi}\nabla_\rho\hat{\Psi} - \xi\mathfrak{G}^{\mu\nu}\hat{\Psi}^2 - \xi(g^{\mu\nu}g^{\rho\tau}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2 - g^{\tau\mu}g^{\nu\rho}\nabla_\tau\nabla_\rho\hat{\Psi}^2)\\
&\mathfrak{T}^{\mu\nu} = -\hbar^2c^2(\nabla^\mu\hat{\Psi}\nabla_\mu\hat{\Psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}g^{\mu\nu}\hat{\Psi}^2 - g^{\tau\mu}g^{\rho\nu}\nabla_\tau\hat{\Psi}\nabla_\rho\hat{\Psi}) - \xi(\mathfrak{G}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\rho\tau}\nabla_\tau\nabla_\rho - g^{\tau\mu}g^{\nu\rho}\nabla_\tau\nabla_\rho)\hat{\Psi}^2
\end{aligned} \tag{5.141}$$

Όπου προέκυψε ο τανυστής ενέργειας-ορμής για καμπυλωμένο χωρόχρονο για το βαθμωτό πεδίο, το οποίο αλληλεπιδρά με το βαρυτικό πεδίο. Ο συντελεστής ξ είναι ένας αδιάστατος παράγοντας ο οποίος στην περίπτωση σύμμορφου μετασχηματισμού έχει τον εξής τύπο $\xi(n) = \frac{n-2}{4(n-1)}$ και στην περίπτωση της ελάχιστης σύζευξης έχουμε $\xi \equiv 0 = \xi(n = 2)$.

5.4.2 Πεδίο Dirac

Το πεδίο Dirac για **Minkowski** χωρόχρονο αποτελεί το ένα μέλος της διαφοράς τετραγώνων της εξίσωσης Klein-Gordon. Αυτή η υπόθεση για την εξίσωση Dirac είναι σωστή για Spinors και πεδία τα οποία βρίσκονται σε επίπεδο χωρόχρονο όμως δυστυχώς δεν ισχύει το ίδιο και σε καμπυλωμένο. Στην πραγματικότητα οι λύσεις της εξίσωσης Dirac δεν είναι καλώς ορισμένες για όλες τις γεωμετρίες, αυτό οφείλεται σε τοπολογικούς περιορισμούς, οπότε και δεν μπορούμε να γενικεύσουμε την εξίσωση για όλες τις γεωμετρίες.
Οι Spinors που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Dirac δεν ορίζονται στον εφαπτόμενο χώρο της πολλαπλότητας του χωρόχρονου οπότε θα πρέπει να ορίσουμε έναν νέο χώρο στον οποίο θα βρίσκονται. Εφόσον οι Spinors ικανοποιούν την άλγεβρα **Clifford** θα ορίσουμε έναν δικό τους διανυσματικό χώρο. Αν επιπλέον επιτρέπεται η εισαγωγή αυτού του διανυσματικού χώρου στην πολλαπλότητα του χωρόχρονου τότε έχουμε την δυνατότητα να ορίσουμε τις λύσεις της Dirac.
Όπως στην περίπτωση της επίπεδης γεωμετρίας έχουμε τον τανυστή του Spin να ικανοποιεί την ίδια άλγεβρα. Όπως είπαμε οι άλγεβρα της εξίσωσης Dirac είναι η άλγεβρα **Clifford** θα γενικεύσουμε τους γάμμα πίνακες γράφοντας τους με χρήση των τετράδων.

$$\gamma^\mu(x) = \gamma^a e_a{}^\mu \tag{5.142}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(i\hbar c\hat{\bar{\Psi}}\gamma^\mu(x)\nabla_\mu\hat{\Psi} - i\hbar c(\nabla_\mu\hat{\bar{\Psi}})\gamma^\mu(x)\hat{\Psi} - mc^2\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Psi}\right) \tag{5.143}$$

$$\nabla_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla_\nu\hat{\bar{\Psi}}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\hat{\bar{\Psi}}} = 0 \Rightarrow \nabla_\nu\left(-i\hbar c\frac{1}{2}\sqrt{-g}\gamma^\mu(x)\hat{\Psi}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}mc^2\hat{\Psi} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla_0\hat{\Psi}\right)} = i\hat{\bar{\Psi}}\hbar\gamma^0(x)\sqrt{-g} = i\hbar\hat{\Psi}^\dagger\sqrt{-g}\gamma^0(x)\gamma^0(x) = i\hbar\sqrt{-g}\hat{\Psi}^\dagger \quad \text{Συζυγής ορμή} \tag{5.144}$$

$$\{\hat{\Pi}_a(x),\hat{\Pi}_b(x')\} = 0,\ \ \{\hat{\Psi}_a(x),\hat{\Psi}_b(x')\} = 0,\ \ \{\hat{\Psi}_a(x),\hat{\Pi}_b(x')\} = i\hbar\delta_{ab}\frac{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}{\sqrt{-g}} \tag{5.145}$$

$$(\psi_1,\psi_2) = \int_{V_{\boldsymbol{x}}}\hat{\bar{\Psi}}_1\gamma^0\hat{\Psi}_2\sqrt{-g_\Sigma}dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}}\hat{\Psi}_1^\dagger\gamma^0\gamma^0\hat{\Psi}_2\sqrt{-g_\Sigma}dV_{\boldsymbol{x}} = \int_{V_{\boldsymbol{x}}}\hat{\Psi}_2^\dagger\hat{\Psi}_1\sqrt{-g_\Sigma}dV_{\boldsymbol{x}} \tag{5.146}$$

$$\left(i\hbar c\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - mc^2\right)\hat{\Psi} = 0 \tag{5.147}$$

$$\{\gamma^\mu(x),\gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu} \tag{5.148}$$

$$\hat{\Sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \tag{5.149}$$

$$[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\rho\tau}] = (\Sigma^{\mu\tau}g^{\rho\nu} - g^{\rho\mu}\Sigma^{\nu\tau} + g^{\tau\nu}\Sigma^{\rho\mu} - g^{\mu\tau}\Sigma^{\rho\nu}) \tag{5.150}$$

Στον επίπεδο **Minkowski** χωρόχρονο έχουμε ότι η εξίσωση Dirac ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon έτσι θα υποθέσουμε ότι κι εδώ την ικανοποιεί. Και θα αποδείξουμε την εγκυρότητα αυτής της υπόθεσης.

$$\begin{aligned}
&\left(i\hbar c\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - mc^2\right)\left(-i\hbar c\gamma^\nu(x)\nabla_\nu - mc^2\right)\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow \\
&\left(-(i\hbar c)^2\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x)\nabla_\nu\nabla_\mu + i\hbar c(\gamma^\nu(x)\nabla_\nu - \gamma^\mu(x)\nabla_\mu)mc^2 + (mc^2)^2\right) \Rightarrow \\
&-\left(\hbar^2c^2\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x)\nabla_\nu\nabla_\mu - (mc^2)^2\right) = 0 \Rightarrow \\
&\left.\begin{array}{c} 4\hat{\Sigma}^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu} = 2\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) \Rightarrow 2\hat{\Sigma}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} = \gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) \\ A^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = A^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu) = \frac{1}{2}A^{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mu\nu},\ A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} (2\hat{\Sigma}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu})\nabla_\nu\nabla_\mu \\ \hat{\Sigma}^{\mu\nu} = -\hat{\Sigma}^{\nu\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow \\
&\left(\hbar^2c^2(2\hat{\Sigma}^{\mu\nu}\frac{1}{2}\mathcal{T}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu) - (mc^2)^2\right) = 0 \Rightarrow \\
&\left(-\hbar^2c^2\Box^2 + \hbar^2\hat{\Sigma}^{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mu\nu} + m^2c^4\right) = 0
\end{aligned} \tag{5.151}$$

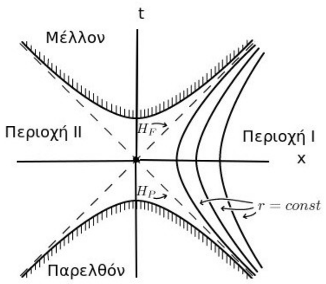
Όπου τελικώς αν ο χωρόχρονος είναι επίπεδος η μετρική γίνεται **Minkowski** και οι συντελεστές σύνδεσης όπως και η στρέψη μηδενίζονται. Όποτε καταλήγουμε στην κλασική εξίσωση Klein-Gordon για επίπεδο χωρόχρονο κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο.

5.5 Φαινόμενο Unruh

Προηγουμένως είδαμε ότι από τους μετασχηματισμούς **Bogolyubov** έχουμε ότι το κενό των καταστάσεων f δεν είναι κατ' ανάγκη κενό για τις καταστάσεις g κάτι που αποδεικνύει πως δυο διαφορετικοί παρατηρητές βλέπουν διαφορετικό κενό, το φαινόμενο Unruh αποτελεί συνέπεια του γεγονότος αυτού. Έτσι για παρατηρητές οι οποίοι κινούνται με σταθερή επιτάχυνση έχουμε δείξει στην σελίδα 50 πως οι συντεταγμένες **Rindler** είναι οι κατάλληλες συν του ότι περιγράφουν την γεωμετρία του χωρόχρονου κοντά στον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής (**Schwarzschild**). Θα ξεκινήσουμε με άμαζο πεδίο **Klein-Gordon**, και στην συνέχεια θα το γενικεύσουμε, με μετρική την μετρική **Rindler** για διδιάστατη γεωμετρία, όπου έχουμε σταθερές γωνίες (θ, ϕ), δηλαδή θα εξαρτάται μόνο από την χρονική και χωρική συνιστώσα. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι περιοχές στις οποίες χωρίζεται ο χωρόχρονος.

5.5.1 Πεδίο Klein-Gordon

Άμαζο Πεδίο Klein-Gordon



Σχήμα 5.2: Rindler

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g = det(g_{\mu\nu}) = -\rho^2 \Rightarrow \sqrt{-g} = \rho \tag{5.152}$$

$$\Gamma^{\rho}_{\eta\eta} = \rho \ \Gamma^{\eta}_{\rho\eta} = \frac{1}{\rho} \tag{5.153}$$

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} = \partial_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\tau_{\tau\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\kappa_{\tau\kappa} - \Gamma^\kappa_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\kappa\mu}$$

$$\boldsymbol{R}_{\eta\eta} = \partial_\tau \Gamma^\tau_{\eta\eta} - \partial_\eta \Gamma^\tau_{\tau\eta} + \Gamma^\tau_{\eta\eta}\Gamma^\kappa_{\tau\kappa} - \Gamma^\kappa_{\tau\eta}\Gamma^\tau_{\kappa\eta} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\eta\eta} - 0 + \Gamma^\rho_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\rho\eta} - 2\Gamma^\eta_{\rho\eta}\Gamma^\rho_{\eta\eta} = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{R}_{\eta\rho} = \partial_\tau \Gamma^\tau_{\eta\rho} - \partial_\eta \Gamma^\tau_{\tau\rho} + \Gamma^\tau_{\eta\rho}\Gamma^\kappa_{\tau\kappa} - \Gamma^\kappa_{\tau\eta}\Gamma^\tau_{\kappa\rho} = \partial_\eta \Gamma^\eta_{\eta\rho} - 0 + \Gamma^\eta_{\eta\rho}\Gamma^\kappa_{\eta\kappa} - \Gamma^\eta_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\eta\rho} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\boldsymbol{R}_{\rho\rho} = \partial_\tau \Gamma^\tau_{\rho\rho} - \partial_\rho \Gamma^\tau_{\rho\tau} + \Gamma^\tau_{\rho\rho}\Gamma^\kappa_{\tau\kappa} - \Gamma^\kappa_{\tau\rho}\Gamma^\tau_{\kappa\rho} = 0 - \partial_\rho \Gamma^\eta_{\rho\eta} + 0 - \Gamma^\eta_{\eta\rho}\Gamma^\eta_{\eta\rho} = \rho^{-2} - \rho^{-1}\rho^{-1} = 0$$

$$(\hbar^2 c^2 \Box^2 - m^2 c^4)\hat{\Psi} = 0 \tag{5.154}$$

$$\Box^2\hat{\Psi} = \nabla_\mu \nabla^\mu \hat{\Psi} = \nabla_\mu \partial^\mu \hat{\Psi} = \partial_\mu \partial^\mu \hat{\Psi} + \Gamma^\tau_{\nu\tau}\partial^\nu \hat{\Psi} = \partial_\mu \partial^\mu \hat{\Psi} + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\nu \sqrt{-g})\partial^\nu \hat{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu \hat{\Psi})$$

$$\Box^2\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu \hat{\Psi}) = 0 \Rightarrow \partial_\mu(\rho\partial^\mu \hat{\Psi}) = 0 \Rightarrow \partial_\eta(\rho g^{\eta\nu}\partial_\nu \hat{\Psi}) + \partial_\rho(\rho g^{\rho\nu}\partial_\nu \hat{\Psi}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Box^2\hat{\Psi} = \partial_\eta(\rho g^{\eta\eta}\partial_\eta \hat{\Psi}) + \partial_\rho(\rho g^{\rho\rho}\partial_\rho \hat{\Psi}) = \partial_\eta(\rho\frac{1}{-\rho^2}\partial_\eta \hat{\Psi}) + \partial_\rho(\rho 1 \partial_\rho \hat{\Psi}) = 0 \Rightarrow -\partial^2_\eta \hat{\Psi} + \rho\partial_\rho(\rho\partial_\rho \hat{\Psi}) = 0 \tag{5.155}$$

$$\left.\begin{matrix} f = H(\eta)P(\rho) \\ -\partial^2_\eta \hat{\Psi} + \rho\partial_\rho\rho\partial_\rho \hat{\Psi} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{-1}{H}\partial^2_\eta H + \frac{\rho}{P}\partial_\rho\rho\partial_\rho P = 0 \\ -\frac{1}{H}\partial^2_\eta H = \frac{c^2\omega^2}{\alpha^2} \equiv \Omega^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} H(\eta) \sim e^{-i\Omega\eta} \\ (\rho\partial_\rho + \rho^2\partial^2_\rho + \Omega^2)P = 0 \end{matrix}\right\} \overset{P \sim \rho^n}{\Rightarrow}$$

$$(n + n(n-1) + \Omega^2)\rho^n = 0 \Rightarrow n^2 = -\Omega^2 \Rightarrow n = \pm i\Omega \Rightarrow \rho^{\pm i\Omega} = e^{\pm i\Omega \ln\rho}$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = -i\int g^{0\nu} h_\Omega \overleftrightarrow{\partial}_\nu h^*_{\Omega'}\sqrt{-g}d\rho = \delta(\Omega - \Omega')$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = i\int \rho^{-2}(A_\Omega e^{\mp i\Omega\eta}e^{\pm i\Omega\ln\rho}A^*_{\Omega'}\partial_\eta e^{\pm i\Omega'\eta}e^{\pm i\Omega'\ln\rho} - A_\Omega\partial_\eta e^{\mp i\Omega\eta}e^{\pm i\Omega\ln\rho}A^*_{\Omega'}e^{\pm i\Omega'\eta}e^{\pm i\Omega'\ln\rho})\rho d\rho$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = \pm i^2 A^*_\Omega A_{\Omega'}(\Omega + \Omega')e^{\mp i(\Omega-\Omega)\eta}\int e^{\pm i(\Omega'-\Omega)\ln\rho}\rho^{-1}d\rho = \mp A^*_\Omega A_{\Omega'}(\Omega + \Omega')e^{\mp i(\Omega-\Omega')\eta}\delta(\Omega - \Omega')$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = \mp A^*_\Omega A_\Omega 2\Omega 2\pi\delta(\Omega - \Omega') = \mp\delta(\Omega - \Omega') \Rightarrow A_\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \tag{5.156}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_\omega = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{-i\frac{c\omega}{\alpha}(\eta+\ln\rho)} & \text{Περιοχή I} \\ 0 & \text{Περιοχή II} \end{cases} \\ g_\omega = \begin{cases} 0 & \text{Περιοχή I} \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{i\frac{c\omega}{\alpha}(\eta-\ln\rho)} & \text{Περιοχή II} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\Psi} = \int (\hat{a}_\omega f_\omega + \hat{a}^\dagger_\omega f^*_\omega) d\omega = \int (\hat{b}_\omega g_\omega + \hat{b}^\dagger_\omega g^*_\omega) d\omega$$

Στην περιοχή II έχουμε παρατηρητές οι οποίοι κατευθύνονται αντίθετα από ότι θα κατευθυνόντουσαν αν βρίσκονταν στην περιοχή I, δηλαδή κάτι σαν να καθρεφτίζεται η κατεύθυνση τους. Επιπλέον οι δυο περιοχές του χωρόχρονου δεν μπορούν να επικοινωνήσουν με κανέναν αιτιατό τρόπο μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι η μετρική μας είναι ανεξάρτητη του χρόνου η οπότε θα υπάρχει συμμετρία στον χρόνο το οποίο συνεπάγεται την ύπαρξη του χρονικού διανύσματος **killing**. για τις συντεταγμένες **Rindler** έχουμε ότι προέρχονται από τον επίπεδο χωρόχρονο **Minkowski** ύστερα κάτω από έναν μετασχηματισμό. Για τους μετασχηματισμούς **Bogolyubov** εφόσον μπορούμε να περάσουμε από τις λύσεις του χωρόχρονου **Minkowski** στις λύσεις του **Rindler** θα τους εξαγάγουμε κατόπιν συνδυασμού των λύσεων αυτών.

$$\left.\begin{array}{l} x^0 = \rho\sinh\eta \\ x^1 = \rho\cosh\eta \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \text{Το διάνυσμα } \textbf{killing} \text{ είναι.} \\ \partial_\eta = \frac{\partial x^0}{\partial\eta}\partial_{x^0} + \frac{\partial x^1}{\partial\eta}\partial_{x^1} = \rho\cosh\eta\partial_{x^0} + \rho\sinh\eta\partial_{x^1} \end{array}\right\} = x^0\partial_{x^1} + x^1\partial_{x^0} \tag{5.157}$$

$$x^0 \pm x^1 = \rho(\cosh\eta \pm \sinh\eta) = \rho e^{\pm\eta} \Rightarrow \ln\rho \pm \eta = \ln(x^0 \pm x^1) \tag{5.158}$$

Από την σχέση 5.158 και την αντιστροφή της κατεύθυνσης στις δυο περιοχές οι λύσεις παίρνουν την μορφή.

$$f_\omega = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{-i\frac{c\omega}{\alpha}(\ln(x^0+x^1))} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(x^0+x^1)^{-i\frac{c\omega}{\alpha}} & \text{Περιοχή I} \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{-i\frac{c\omega}{\alpha}(\ln(-x^0-x^1))} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(-x^0-x^1)^{-i\frac{c\omega}{\alpha}} & \text{Περιοχή II} \end{cases} \tag{5.159}$$

$$g_\omega = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{i\frac{c\omega}{\alpha}(\ln(x^1-x^0))} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(-x^0+x^1)^{i\frac{c\omega}{\alpha}} & \text{Περιοχή I} \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{i\frac{c\omega}{\alpha}(\ln(x^0-x^1))} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(x^0-x^1)^{i\frac{c\omega}{\alpha}} & \text{Περιοχή II} \end{cases} \tag{5.160}$$

Εφόσον έχουμε άμαζο πεδίο ισχύει. $\omega^2 = |\boldsymbol{k}|^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} f^I_{\boldsymbol{k}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{-i\frac{c\omega}{\alpha}\eta - \frac{\boldsymbol{k}c}{\alpha}\ln\rho)} \\ f^{II}_{\boldsymbol{k}} = 0 \end{cases} \\ g_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} g^I_{\boldsymbol{k}} = 0 \\ g^{II}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{i\frac{c\omega}{\alpha}\eta - i\frac{\boldsymbol{k}c}{\alpha}\ln\rho} \end{cases} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f^{I*}_{-\boldsymbol{k}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{-i\frac{c\omega}{\alpha}(\eta-\ln\rho)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(x^0-x^1)^{i\frac{c\omega}{\alpha}} \\ f^{I}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{i\frac{c\omega}{\alpha}(\eta+\ln\rho)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(-x^0-x^1)^{i\frac{c\omega}{\alpha}} \\ g^{II*}_{-\boldsymbol{k}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{-i\frac{c\omega}{\alpha}(\eta+\ln\rho)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(x^0+x^1)^{-i\frac{c\omega}{\alpha}} \\ g^{II}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}} e^{i\frac{c\omega}{\alpha}(\eta-\ln\rho)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\pi c\omega}}(x^0-x^1)^{-i\frac{c\omega}{\alpha}} \end{array}\right\} \overset{e^{i\pi}=-1}{\Rightarrow}$$

Ύστερα από συνδυασμό των λύσεων θα προκύψουν οι τροποποιημένες λύσεις για τον χωρόχρονο **Minkowski**.

$$\phi_{\boldsymbol{k}} = c_{\boldsymbol{k}}(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k}}) \qquad \psi_{\boldsymbol{k}} = c_{\boldsymbol{k}}(e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I}_{\boldsymbol{k}} + e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II*}_{-\boldsymbol{k}})$$

$$(\phi_{\boldsymbol{k_1}}, \phi_{\boldsymbol{k_2}}) = (c_{\boldsymbol{k_1}}(e^{-\frac{c\pi\omega_1}{2\alpha}} \underbrace{f^{I*}_{-\boldsymbol{k_1}} + e^{\frac{c\pi\omega_1}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k_1}}), c_{\boldsymbol{k_2}}(e^{-\frac{c\pi\omega_2}{2\alpha}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k_2}} + e^{\frac{c\pi\omega_2}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k_2}}}_{(f^{I*}_{-\boldsymbol{k_1}}, g^{II}_{\boldsymbol{k_2}}) = (g^{II}_{\boldsymbol{k_1}}, f^{I*}_{-\boldsymbol{k_2}}) = 0}))$$

$$(\phi_{\boldsymbol{k_1}}, \phi_{\boldsymbol{k_2}}) = c_{\boldsymbol{k_1}} c_{\boldsymbol{k_2}} (e^{-\frac{c\pi}{2\alpha}(\omega_1+\omega_2)}(f^{I*}_{-\boldsymbol{k_1}}, f^{I*}_{-\boldsymbol{k_2}}) + e^{\frac{c\pi}{2\alpha}(\omega_1+\omega_2)}(g^{I}_{\boldsymbol{k_1}}, g^{I}_{\boldsymbol{k_2}}))$$

$$(\phi_{\boldsymbol{k_1}}, \phi_{\boldsymbol{k_2}}) = c_{\boldsymbol{k_1}} c_{\boldsymbol{k_2}} (e^{-\frac{c\pi}{2\alpha}(\omega_1+\omega_2)}(-\delta(-(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2}))) + e^{\frac{c\pi}{2\alpha}(\omega_1+\omega_2)}\delta(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})$$

$$(\phi_{\boldsymbol{k_1}}, \phi_{\boldsymbol{k_2}}) = c^2_{\boldsymbol{k_1}}(-e^{-\frac{c\pi\omega_1}{\alpha}} + e^{\frac{c\pi\omega_1}{\alpha}})\delta(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2}) = c^2_{\boldsymbol{k_1}} 2\sinh\left(\frac{c\pi\omega_1}{\alpha}\right)\delta(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2}) = \delta(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})$$

$$\phi_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}}(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k}}) \qquad \psi_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}}(e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I}_{\boldsymbol{k}} + e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II*}_{-\boldsymbol{k}})$$

$$\hat{\Psi} = \int (\hat{c}_{\boldsymbol{k}}\phi_{\boldsymbol{k}} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\phi^*_{\boldsymbol{k}} + \hat{d}_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}} + \hat{d}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\psi^*_{\boldsymbol{k}}) d\boldsymbol{k} \qquad \text{όπου } \hat{c}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle = \hat{d}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle = 0 \tag{5.161}$$

Η λύση που βρέθηκε για το πεδίο έχει αναπτυχθεί με την βοήθεια των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής του χωρόχρονου **Minkowski**. Οι λύσεις αυτές προέκυψαν ως γραμμικός συνδυασμός των λύσεων για τον χωρόχρονο **Rindler** άρα ο μετασχηματισμός **Bogolyubov** θα προκύψει εφόσον βρήκαμε τις λύσεις για το πεδίο σε συντεταγμένες **Minkowski** από τις σχέσεις του μετασχηματισμού **Bogolyubov**. Έχουμε ότι οι συντελεστές **Bogolyubov** για τις λύσεις του χωρόχρονου **Rindler** είναι οι συντελεστές των λύσεων του χωρόχρονου **Minkowski**. Κατόπιν θα γράψουμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής των λύσεων του χωρόχρονου **Rindler** συναρτήσει των τελεστών του χωρόχρονου **Minkowski**. Έτσι η η δράση των τελεστών **Rindler** στην κατάσταση κενού **Minkowski** θα μας αποκαλύψει πως από διαφορετική σκοπιά οι παρατηρητές αντιλαμβάνονται διαφορετικά τον χωρόχρονο και τις κβαντικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε αυτόν.

$$\phi_{\boldsymbol{k}} = \int (c_{\boldsymbol{kk'}} g^{II}_{\boldsymbol{k'}} + d_{\boldsymbol{kk'}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k'}}) d\boldsymbol{k'} = \frac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} (e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k}}) \tag{5.162}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{\boldsymbol{kk'}} &= (g^{II}_{\boldsymbol{k'}}, \phi_{\boldsymbol{k}}) \\ d_{\boldsymbol{kk'}} &= -(f^{I*}_{-\boldsymbol{k'}}, \phi_{\boldsymbol{k}}) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} c_{\boldsymbol{kk'}} &= (g^{II}_{\boldsymbol{k'}}, \tfrac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}}(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k}})) \\ d_{\boldsymbol{kk'}} &= -(f^{I*}_{-\boldsymbol{k'}}, \tfrac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}}(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} f^{I*}_{-\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} g^{II}_{\boldsymbol{k}})) \end{aligned}\right\} \overset{\substack{(g^{II}_{\boldsymbol{k}}, g^{II}_{\boldsymbol{k'}}) = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})}}{\underset{(f^{I*}_{\boldsymbol{k}}, f^{I*}_{-\boldsymbol{k'}}) = -\delta(\boldsymbol{k}-(-\boldsymbol{k'}))}{\Rightarrow}} \tag{5.163}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{\boldsymbol{kk'}} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \\ d_{\boldsymbol{kk'}} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'}) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} &= \textstyle\int (c^*_{\boldsymbol{kk'}} \hat{c}_{\boldsymbol{k'}} + d^*_{\boldsymbol{kk'}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'}}) d\boldsymbol{k'} \\ \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} &= \textstyle\int (c_{\boldsymbol{kk'}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k'}} + d_{\boldsymbol{kk'}} \hat{c}_{\boldsymbol{k'}}) d\boldsymbol{k'} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} &= \tfrac{(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}})}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} \\ \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} &= \tfrac{(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}})}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} \end{aligned} \tag{5.164}$$

Εφόσον έχουμε εκφράσει τους τελεστές δημιουργίας κια καταστροφής του χώρου **Rindler** συναρτήσει των τελεστών του χώρου **Minkowski** θα δούμε ποια είναι η δράση του τελεστή αρίθμησης, **Rindler**, στον χώρο **Fock** του χωρόχρονου **Minkowski**.

$$\begin{aligned} \hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}} &\equiv \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} = \frac{(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}})}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} \frac{(e^{-\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{2\alpha}} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}})}{\sqrt{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)}} = \frac{e^{-\frac{c\pi\omega}{\alpha}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + \hat{c}_{-\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{\alpha}} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}}}{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)} \\ \langle 0_{Mink} | \hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}} | 0_{Mink} \rangle &= \frac{1}{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)} \langle 0_{Mink} | e^{-\frac{c\pi\omega}{\alpha}} \hat{n}^{Mink}_{\boldsymbol{k}} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + \hat{c}_{-\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}} + e^{\frac{c\pi\omega}{\alpha}} (\hat{n}^{Mink}_{-\boldsymbol{k}} + \delta(\boldsymbol{0})) | 0_{Mink} \rangle \\ \langle 0_{Mink} | \hat{n}^{Mink}_{\boldsymbol{k}} | 0_{Mink} \rangle &= 0 \\ \langle 0_{Mink} | \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}} &= \hat{c}_{\boldsymbol{k}} | 0_{Mink} \rangle = 0 \\ \langle 0_{Mink} | 0_{Mink} \rangle &= 1 \\ \langle 0_{Mink} | \hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}} | 0_{Mink} \rangle &= \frac{e^{\frac{c\pi\omega}{\alpha}}}{2\sinh\left(\frac{c\pi\omega}{\alpha}\right)} \langle 0_{Mink} | \delta(\boldsymbol{0}) | 0_{Mink} \rangle = \frac{e^{\frac{c\pi\omega}{\alpha}} \delta(\boldsymbol{0})}{e^{\frac{c\pi\omega}{\alpha}} - e^{-\frac{c\pi\omega}{\alpha}}} \langle 0_{Mink} | 0_{Mink} \rangle = \frac{\delta(\boldsymbol{0})}{e^{\frac{c2\pi\omega}{\alpha}} - 1} \end{aligned} \tag{5.165}$$

Όπου παρατηρούμε ότι η μέση τιμή του τελεστή αρίθμησης έχει την μορφή της στατιστικής BoSe-EinStein, δηλαδή ο χωρόχρονος είναι γεμάτος με σωματίδια. Εφόσον ικανοποιεί μια τέτοιου είδους στατιστική θα υπάρχει θερμοκρασία. Η ταυτοποίηση της θερμοκρασίας αυτής γίνεται

$$\begin{aligned} \langle 0_{Mink} | \hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}} | 0_{Mink} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{c2\pi\omega}{\alpha}} - 1} \delta(\boldsymbol{0}) \sim \langle \hat{n}_{B-E} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1} \Rightarrow \frac{2c\pi E}{\hbar\alpha} = \frac{E}{k_B T} \\ T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi c k_B} \qquad \text{θερμοκρασία Unruh} \end{aligned} \tag{5.166}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι σταθερά επιταχυνόμενοι παρατηρητές βλέπουν τον χωρόχρονο γεμάτο με σωματίδια ενώ ο χώρος είναι φαινομενικά κενός, από την σκοπιά ενός παρατηρητή **Minkowski**. Η κατανομή του φάσματος των σωματιδίων είναι παρόμοια με αυτή του μέλανος σώματος δηλαδή το υπόβαθρο του χωρόχρονου έχει θερμική εκπομπή παρόμοια με του μέλανος σώματος.

Μαζικό Πεδίο Klein-Gordon

Προηγουμένως για απλοποίηση του προβλήματος θεωρήσαμε άμαζο πεδίο τώρα θα επαναφέρουμε την μάζα και θα λύσουμε την εξίσωση Klein-Gordon. Καθώς επίσης και $4-D$ μετρική.

$$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 + dr_x^2 + dr_y^2 = -\rho^2 d\rho^2 + d\rho^2 + d\boldsymbol{r}_\perp \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.167}$$

$$\left(\Box^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\rho^2}\partial_\eta^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \partial_{r_x}^2 + \partial_{r_y}^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\hat{\Psi} = 0 \tag{5.168}$$

Η λύση της εξίσωσης θα γίνει ξανά με την μέθοδο χωρισμού

$$\left.\begin{aligned} f = H(\eta)P(\rho)R(\boldsymbol{r}_\perp) \\ -\partial_\eta^2\hat{\Psi} + \rho\partial_\rho(\rho\partial_\rho)\hat{\Psi} + \partial_{\boldsymbol{r}_\perp}^2\hat{\Psi} - \tfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\hat{\Psi} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \tfrac{-1}{H}\partial_\eta^2 H + \tfrac{\rho}{P}\partial_\rho(\rho\partial_\rho P) - \tfrac{m^2c^2}{\hbar^2}P = 0 \\ -\tfrac{1}{H}\partial_\eta^2 H = \tfrac{c^2\omega^2}{\alpha^2} \equiv \Omega^2 \\ \tfrac{1}{R(\boldsymbol{r}_\perp)}\partial_{\boldsymbol{r}_\perp}^2 R(\boldsymbol{r}_\perp) = \boldsymbol{k}_\perp^2 c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} (\rho^2\partial_\rho^2 + \rho\partial_\rho - \rho^2\underbrace{(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} + \boldsymbol{k}_\perp^2)c^2}_{=\frac{M^2c^2}{\hbar^2}} + \Omega^2)P(\rho) = 0 \\ \rho\tfrac{Mc^2}{\hbar} \equiv x \Rightarrow \partial_\rho = \tfrac{\partial x}{\partial\rho}\partial_x = \tfrac{Mc}{\hbar}\partial_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x^2\partial_x^2 + x\partial_x - (x^2 + i^2\Omega^2)\right)P(x) = 0 \overset{P(x)\sim\mathcal{K}_{i\Omega}(x)}{\Rightarrow}$$

Η διαφορική εξίσωση που προέκυψε είναι τροποποιημένη **Bessel** $i\Omega$ τάξης.

$$f = c_\Omega e^{-i\Omega\eta + c\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(x) \tag{5.169}$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = -i\int g^{0\nu}h_\Omega\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu h_{\Omega'}\sqrt{-g}d^3\boldsymbol{x} = i\int\rho^{-2}h_\Omega\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu h_{\Omega'}\rho d^3\boldsymbol{x} = \delta(\Omega-\Omega')\delta(c\boldsymbol{k}_\perp - c\boldsymbol{k}'_\perp)$$

$$(h_\Omega, h_\Omega) = i\int(c_\Omega e^{i\Omega\eta + c\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(x)c^*_{\Omega'}(x)\partial_\eta e^{-i\Omega'\eta - \boldsymbol{k}'_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}^*_{i\Omega'}(x) -$$

$$\partial_\eta(c_{\Omega'}e^{i\Omega\eta - \boldsymbol{k}'_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp})\mathcal{K}_{i\Omega}(x)c^*_{\Omega'}e^{-i\Omega\eta + c\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}^*_{i\Omega'})\rho^{-1}d\boldsymbol{k}_\perp d\eta d\rho$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = -i^2|c_\Omega|^2(\Omega+\Omega')\int e^{i(\Omega-\Omega')\eta + i(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}_\perp)\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(x)\mathcal{K}^*_{i\Omega'}(x)\rho^{-1}d\eta d\rho$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = |c_\Omega|^2(2\pi)^2 2\Omega\delta(\Omega-\Omega')\delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}'_\perp)\int\mathcal{K}_{i\Omega}(x)\mathcal{K}^*_{i\Omega'}(x)\frac{dx}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{K}_{i\Omega}(x) = \pi\tfrac{e^{i(i\Omega)\frac{\pi}{2}}J_{-i\Omega}(ix) - e^{-i(i\Omega)\frac{\pi}{2}}J_{i\Omega}(ix)}{2\sin(i\Omega\pi)} = \pi\tfrac{e^{-\Omega\frac{\pi}{2}}J_{-i\Omega}(ix) - e^{\Omega\frac{\pi}{2}}J_{i\Omega}(ix)}{2i\sinh(\Omega\pi)} \\ \mathcal{K}^*_{i\Omega} = \pi\tfrac{e^{\Omega\frac{\pi}{2}}J^*_{-i\Omega}(ix) - e^{-\Omega\frac{\pi}{2}}J^*_{i\Omega}(ix)}{2i\sinh(\Omega\pi)} \\ J_n(x) \approx \tfrac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\tfrac{x}{2}\right)^n \quad J^*_n(x) \approx \tfrac{1}{\overline{\Gamma(n+1)}}\left(\tfrac{x^*}{2}\right)^{n^*} \end{aligned}\right\}$$

Για το ολοκλήρωμα θα κάνουμε προσέγγιση για τις συναρτήσεις **Bessel** J_n.

$$\int|\mathcal{K}_{i\Omega}|^2\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{-4i^2\sinh^2(\Omega\pi)}\int\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega} - \left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega}}{\Gamma(i\Omega+1)}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega} - \left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega}}{\overline{\Gamma(i\Omega+1)}}\frac{dx}{x}$$

$$\frac{\pi^2}{-4i^2\sinh^2(\Omega\pi)}\int\frac{e^{i\Omega\ln\frac{x}{2}} - e^{-i\Omega\ln\frac{x}{2}}}{\Gamma(i\Omega+1)}\frac{e^{-i\Omega\ln\frac{x}{2}} - e^{i\Omega\ln\frac{x}{2}}}{\overline{\Gamma(i\Omega+1)}}d\ln\frac{x}{2} = \frac{\pi^2}{-4i^2\sinh^2(\Omega\pi)\Gamma(i\Omega+1)\overline{\Gamma(i\Omega+1)}}$$

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)} \quad \overline{\Gamma(n)} = \Gamma(n^*) \quad n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \tag{5.170}$$

$$\Gamma(i\Omega+1)\overline{\Gamma(i\Omega+1)} = \Gamma(i\Omega+1)\Gamma(1-i\Omega) = i\Omega\Gamma(i\Omega)\Gamma(1-i\Omega) = \frac{\pi\Omega}{\sinh\Omega\pi} \tag{5.171}$$

$$(h_\Omega, h_{\Omega'}) = |c_\Omega|^2 2\pi 2\Omega\delta(\Omega-\Omega')\delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}'_\perp)\frac{\pi^2}{4\sinh(\Omega\pi)\pi\Omega} = \delta(\Omega-\Omega')\delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{k}'_\perp)$$

$$c_\Omega = \frac{\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}}{\pi}, f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}e^{-i\Omega\eta + i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(x), g = \frac{1}{\pi}\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}e^{i\Omega\eta - i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(-x) \tag{5.172}$$

$$\left.\begin{aligned} f_\omega &= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}e^{-i\Omega\eta+i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(x) & \text{Περιοχή I} \\ 0 & \text{Περιοχή II} \end{cases} \\ g_\omega &= \begin{cases} 0 & \text{Περιοχή I} \\ \frac{1}{\pi}\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}e^{i\Omega\eta-i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{K}_{i\Omega}(-x) & \text{Περιοχή II} \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{5.173}$$

Θα αναπτύξουμε το πεδίο μας στην βάση των λύσεων (f, g) με την βοήθεια των συντελεστών δημιουργίας και καταστροφής του χωρόχρονου **Rindler**. Και στην συνέχεια θα κάνουμε τον μετασχηματισμό **Bogolyubov** ώστε να δούμε την δράση αυτών στον χωρόχρονο **Minkowski**. Όπου οι λύσεις για τον χωρόχρονο **Minkowski** είναι τα επίπεδα κύματα. Όπου και θα έχουμε για τους συντελεστές **Bogolyubov**. Παρατίθενται οι λύσεις του χωρόχρονου **Minkowski** χωρίς να παρατίθενται οι υπολογισμοί.

$$h_{\Omega k_z k_\perp} \sim e^{\mp i(k_0 x_0 \pm c k_z r_z \mp c\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp)}, \quad k_0^2 = \sqrt{c^2k_z^2 + c^2\boldsymbol{k}_\perp^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} \tag{5.174}$$

$$\hat{\Psi} = \int (\hat{a}_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} f_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp}(\eta, x, \boldsymbol{r}_\perp) + \hat{a}^\dagger_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} f^*_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp}(\eta, x, \boldsymbol{r}_\perp) + \hat{b}_\omega g_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp}(\eta, x, \boldsymbol{r}_\perp) + \hat{b}^\dagger_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} g^*_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp}(\eta, x, \boldsymbol{r}_\perp))d\omega d\boldsymbol{k}_\perp$$

$$f_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp}(x_0, r_z, \boldsymbol{r}_\perp) = \int (a_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} e^{-ik_0x_0 + ick_zr_z} + b_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} e^{ick_0x_0 - ick_zr_z})\frac{e^{ic\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}}{2\pi}\frac{dk_z}{\sqrt{4\pi k_0}} \tag{5.175}$$

$$g_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp}(x_0, r_z, \boldsymbol{r}_\perp) = \int (c_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} e^{-ik_0x_0 + ick_zr_z} + d_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} e^{ick_0x_0 - ick_zr_z})\frac{e^{ic\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}}{2\pi}\frac{dk_z}{\sqrt{4\pi k_0}} \tag{5.176}$$

Όπου έχουμε για τους συντελεστές **Bogolyubov** να ισχύουν οι σχέσεις για τις δυο περιοχές.

$$a_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} = c_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp - k_z} \;\&\; b_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} = d_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp - k_z} \tag{5.177}$$

Και για τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής έχουμε κατ' αναλογία με την διδιάστατη περίπτωση.

$$\hat{a}_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} = e^{-\pi\Omega}\hat{b}^\dagger_{\omega,-\boldsymbol{k}_\perp} \;\&\; \hat{b}_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} = e^{-\pi\Omega}\hat{a}^\dagger_{\omega,-\boldsymbol{k}_\perp} \tag{5.178}$$

Ορίζουμε τις νέες καταστάσεις αφού κάναμε τον μετασχηματισμό.

$$w_{-\Omega\boldsymbol{k}_\perp} \equiv \frac{f_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} - g*_{\omega,-\boldsymbol{k}_\perp}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\Omega}}} \qquad w_{+\Omega\boldsymbol{k}_\perp} \equiv \frac{g_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} + f*_{\omega,-\boldsymbol{k}_\perp}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\Omega}}} \tag{5.179}$$

$$b_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} = -e^{-\pi\Omega}c^*_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} \qquad c_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} = -e^{-\pi\Omega}d^*_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} \tag{5.180}$$

Για απλοποίηση θα μελετήσουμε την συμπεριφορά τους στον ορίζοντα γεγονότων όπου $x_0 = r_z$
Ορίζουμε νέες συντεταγμένες τύπου **Kruskal** ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί.

$$\left.\begin{aligned} u = \tau - \xi \;\&\; v = \tau + \xi \;\&\; \rho = \tfrac{e^{a\xi}}{a} \;\&\; \eta = a\tau \\ x_0 = -\tfrac{e^{a\xi}}{a}\sinh a\tau \;\&\; r_z = \tfrac{e^{a\xi}}{a}\cosh a\tau \\ U = -x_0 + r_z = \tfrac{e^{a(\xi+\tau)}}{a} \;\&\; V = x_0 + r_z = \tfrac{e^{a(\xi-\tau)}}{a} \end{aligned}\right\} \tag{5.181}$$

$$f_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} \to \int (a_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} e^{-i(k_0+k_z)c\frac{V}{2}} + b_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} e^{i(k_0-k_z)c\frac{V}{2}})\frac{e^{ic\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}}{2\pi}\frac{dk_z}{\sqrt{4\pi k_0}}$$

$$f_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} \to \frac{i}{\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}}\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega}}{\Gamma(1+i\Omega)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega}}{\Gamma(1-i\Omega)}\right)\frac{e^{ic\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}}{2\pi} \overset{x\to 0}{\Rightarrow} \tag{5.182}$$

$$f_{\omega,\boldsymbol{k}_\perp} \approx \frac{-i}{\sqrt{\sinh(\Omega\pi)}}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega}}{\Gamma(1-i\Omega)}\frac{e^{ic\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}}{2\pi}$$

Συνεπώς οι συντελεστές **Bogolyubov** θα προκύψουν από τον μετασχηματισμό Fourier.

$$a_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z} = \frac{i}{\sqrt{16\pi^2\sinh(\Omega\pi)}}\frac{1}{\Gamma(1-i\Omega)}\int\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega} e^{-i(k_0-k_z)c\frac{V}{2}}dV$$

$$\left.\begin{aligned} \int\left(\tfrac{x}{2}\right)^{-i\Omega} e^{-i(k_0-k_z)\frac{V}{2}}dV \\ x = \tfrac{\rho Mc}{\hbar} \overset{\tau=0}{=} \tfrac{aVMc}{\hbar} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\left(\frac{aVMc}{2\hbar}\right)^{-i\Omega} e^{-i(k_0-k_z)\frac{V}{2}}dV \Rightarrow \int\left(\frac{avMc}{\hbar}\right)^{-i\Omega} e^{-i(k_0-k_z)v}2dv \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{aMc}{\hbar}\right)^{-i\Omega}\int v^{-i\Omega}e^{-ik_{oz}v}dv = a^{-i\Omega}\left(\frac{Mc}{\hbar}\right)^{-i\Omega} 2\pi 2ie^{\pi\Omega}\Gamma(1-i\Omega)(k_0-k_z)^{i\Omega}a^{i\Omega}$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{aMc}{\hbar}=\sqrt{k_0^2-k_z^2}\\ \sqrt{k_0^2-k_z^2}=((k_0-k_z)(k_0+k_z))^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\left(\frac{aMc}{\hbar}\right)^{-i\Omega}\\ (k_0-k_z)^{i\Omega}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\left(\frac{k_0+k_z}{k_0-k_z}\right)^{-i\frac{\Omega}{2}}\\ \frac{k_0+k_z}{k_0-k_z}\equiv e^{2\theta(k_z)}\end{array}\right\}\Rightarrow e^{-i\Omega\theta(k_z)}$$

$$a_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z}=\frac{e^{-i\Omega\theta(k_z)}e^{\pi\frac{\Omega}{2}}}{\sqrt{4\pi\sinh(\Omega\pi)}}\ \ b_{\Omega\boldsymbol{k}_\perp k_z}=-\frac{e^{-i\Omega\theta(k_z)}e^{-\pi\frac{\Omega}{2}}}{\sqrt{4\pi\sinh(\Omega\pi)}} \tag{5.183}$$

Εφόσον έχουμε υπολογίσει τους συντελεστές του μετασχηματισμού **Bogolyubov** θα εκφράσουμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής μέσω του μετασχηματισμού.

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}_\perp\Omega}=\frac{\hat{b}_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}^\dagger_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\Omega}}} \tag{5.184}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp\Omega}=\frac{\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\Omega}}} \tag{5.185}$$

Εφόσον έχουμε ορίσει και τους τελεστές δημιουργίας για τον χωρόχρονο **Rindler** θα ορίσουμε τον τελεστή αρίθμησης. Του οποίου η δράση θα μας αποκαλύψει το φαινόμενο Unruh και για το μαζικό πεδίο **Klein-Gordon**.

$$\begin{aligned}
&\hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\equiv\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\hat{a}_{\boldsymbol{k}_\perp\Omega}=\frac{\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\Omega}}}\frac{\hat{b}_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}^\dagger_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\Omega}}}\\
&\hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\equiv\frac{\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}\hat{b}_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}\hat{b}^\dagger_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-2\pi\Omega}\hat{b}_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\hat{b}^\dagger_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}}{1-e^{-2\pi\Omega}}
\end{aligned} \tag{5.186}$$

$$\begin{aligned}
&\langle 0_{Mink}|\hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle=\frac{1}{1-e^{-2\pi\Omega}}\langle 0_{Mink}|\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}\hat{b}_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}\hat{b}^\dagger_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}+e^{-\pi\Omega}\hat{b}_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}_\perp-\Omega}+\\
&e^{-2\pi\Omega}\hat{b}_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}\hat{b}^\dagger_{-\boldsymbol{k}_\perp\Omega}|0_{Mink}\rangle\\
&\langle 0_{Mink}|\hat{n}^{Mink}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle=0\\
&\langle 0_{Mink}|\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}}=\hat{b}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle=0\\
&\langle 0_{Mink}|0_{Mink}\rangle=1\\
&\langle 0_{Mink}|\hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle=\frac{e^{-2\pi\Omega}}{1-e^{-2\pi\Omega}}\langle 0_{Mink}|\delta(\mathbf{0})\delta^{(2)}(\mathbf{0})|0_{Mink}\rangle=\frac{1}{e^{2\pi\Omega}-1}\delta(\mathbf{0})\delta^{(2)}(\mathbf{0})\\
&\langle 0_{Mink}|\hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle=\frac{1}{e^{\frac{2pi\omega c}{a}}-1}\delta(\mathbf{0})\delta^{(2)}(\mathbf{0})=\frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega\hbar c}{a}}-1}\delta(\mathbf{0})\delta^{(2)}(\mathbf{0})\\
&\langle 0_{Mink}|\hat{n}^{Rind}_{\boldsymbol{k}}|0_{Mink}\rangle=\frac{1}{e^{\frac{c2\pi\omega}{\alpha}}-1}\delta(\mathbf{0})\sim\langle\hat{n}_{B-E}\rangle=\frac{1}{e^{\frac{E}{k_BT}}-1}\Rightarrow\frac{2c\pi E}{\hbar\alpha}=\frac{E}{k_BT}
\end{aligned} \tag{5.187}$$

$$T=\frac{\hbar\alpha}{2\pi ck_B}\qquad\text{θερμοκρασία Unruh} \tag{5.188}$$

Παρατηρούμε, αφού πρώτα συσχετίσουμε την στατιστική BoSe-EinStein με το αποτέλεσμα μας, ότι και στην περίπτωση που το πεδίο έχει μάζα φαίνεται να κινείται σε ένα λουτρό θερμότητας με χαρακτηριστική θερμοκρασία την θερμοκρασία Unruh. Δηλαδή ο χωρόχρονος είναι γεμάτος από σωματίδια τύπου BoSe τα οποία δημιουργούνται και καταστρέφονται, χωρίς να παραβιάζεται καμία διατήρηση, σε έναν επιτρεπτό χρόνο σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας του **Heisenberg** που μια μορφή της είναι η εξής.

$$\Delta E\Delta\tau\geq\frac{\hbar}{2} \tag{5.189}$$

Από τις αρχές τις κβαντικής στατιστικής είναι ότι σωματίδια τύπου BoSe έχουν την δυνατότητα να καταλαμβάνουν οποιαδήποτε κβαντική κατάσταση, κάτι το οποίο δεν ισχύει για τα σωματίδια τύπου Fermi το οποίο θα εξετάσουμε παρακάτω, οπότε είναι δυνατόν ο χωρόχρονος να κατακλύζεται από τέτοιου είδους σωματίδια. Όπως έχουμε παρατηρήσει και προηγουμένως η στατιστική κατανομή είναι παρόμοια με αυτή του μέλανος σώματος άρα ο χωρόχρονος ακτινοβολεί με ένα φάσμα παρόμοιο με του μέλανος σώματος.

5.5.2 Πεδίο Dirac

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο Unruh για FermionS τα οποία περιγράφονται από την εξίσωση Dirac. Για τα πεδία της εξίσωσης αυτής ισχύουν αντιμεταθετικές σχέσεις, εν αντιθέσει με τα πεδία Klein-Gordon που ισχύουν μεταθετικές, οπότε οι μετασχηματισμοί **Bogolyubov** θα πρέπει να μεταβληθούν κατάλληλα ώστε να σέβονται τις αντιμεταθετικές αυτές σχέσεις των πεδίων. Για αυτό το πεδίο θα χρησιμοποιήσουμε τις $2-D$ συντεταγμένες **Rindler** με χρήση των τετράδων. Όπου έχουμε

$$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 \tag{5.190}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \eta_{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu{}^m e_\nu{}^n \tag{5.191}$$

$$e_\mu{}^m = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e^m{}_\mu = \begin{pmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.192}$$

Παρατηρούμε ότι $e_\mu{}^m = e_\mu{}^m(\rho)$

$$(i\hbar c\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - mc^2)\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow (i\hbar c\gamma^\mu(x)\partial_\mu + i\hbar c\gamma^\mu(x)\Omega_\mu - mc^2)\hat{\Psi} = 0$$

$$i\hbar c\gamma^\mu(x)\Omega_\mu = i\hbar c\gamma^c e^\mu{}_c(-\frac{i}{4}\sigma^{ab}e^\nu{}_a\nabla_\mu e_{b\nu}) \overset{e^\mu{}_c e^\nu{}_a = \eta_{ac}g^{\mu\nu}}{\Rightarrow} i\hbar c\gamma^c(-\frac{i}{4}\sigma^{ab}\eta_{ac}g^{\mu\nu}\nabla_\mu e_{b\nu})$$

$$(-\frac{i}{4}\gamma^c\frac{i}{2}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)\delta^i_b\eta_{ac}) = \frac{1}{8}\gamma^c(\gamma_c\gamma^b - \gamma^b\gamma_c)\delta^i_b \underset{\{\gamma^a,\gamma^b\}=2g^{ab}}{\overset{\gamma^c\gamma_c=4}{=}} \frac{1}{8}(4\gamma^b - (2g^{cb} - \gamma^b\gamma^c)\gamma_c)\delta^i_b$$

$$\frac{1}{8}(4\gamma^b - 2g^{cb}\gamma_c + 4\gamma^b)\delta^i_b = \frac{3}{4}\gamma^i \tag{5.193}$$

$$\left(i\hbar c\gamma^\mu(x)\partial_\mu + i\hbar c\frac{3}{4}\gamma^b g^{\mu\nu}\nabla_\mu e_{b\nu} - mc^2\right)\hat{\Psi} = 0$$

$$\left(i\hbar c\gamma^0 e^\mu{}_0\partial_\mu + i\hbar c\gamma^i e^\mu{}_i\partial_\mu + i\hbar c\frac{3}{4}\gamma^i\frac{2\delta^3_i}{3\rho} - mc^2\right)\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow \left(i\hbar c(\gamma^0\frac{1}{\rho}\partial_0 + \gamma^i 1\partial_i + \frac{1}{2\rho}\gamma^3) - mc^2\right)\hat{\Psi} = 0$$

$$\left(i\hbar c\partial_\eta + i\hbar\rho\gamma^0\gamma^3\partial_\rho + \frac{i\hbar c}{2}\gamma^0\gamma^3 - \gamma^0\rho mc^2\right)\hat{\Psi} = 0 \Rightarrow i\hbar c\partial_\eta\hat{\Psi} = \left(-i\hbar c\rho\gamma^0\gamma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\gamma^0\gamma^3 + \gamma^0\rho mc^2\right)\hat{\Psi} \tag{5.194}$$

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma^i \\ \sigma^i & \mathbb{O} \end{pmatrix} \equiv a^i \Rightarrow \gamma^0\boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{a} \tag{5.195}$$

$$E\hat{\Psi} = \mathscr{H}\hat{\Psi} \Rightarrow i\hbar c\partial_\eta\hat{\Psi} = \left(-i\hbar c\rho a^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}a^3 + \gamma^0\rho mc^2\right)\hat{\Psi} \tag{5.196}$$

$$\begin{pmatrix} i\hbar c\partial_\eta & 0 \\ 0 & i\hbar c\partial_\eta \end{pmatrix}\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \rho mc^2 & -i\hbar c\rho\sigma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\sigma^3 \\ -i\hbar c\rho\sigma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\sigma^3 & -\rho mc^2 \end{pmatrix}\hat{\Psi} \tag{5.197}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Dirac αφού την έχουμε φέρει στην μορφή αυτή, η οποία είναι παρόμοια με την **Schrödinger**, θα βρεθούν χρησιμοποιώντας ένα “τέχνασμα”. Το “τέχνασμα” είναι να δράσουμε δύο φορές την $\mathscr{H}$ στην $\hat{\Psi}$ ούτως ώστε να καταλήξιυμε σε μια εξίσωση παρόμοια με την Klein-Gordon. Της οποίας οι λύσεις είναι ευκολότερες από αυτές της Dirac. Πρώτα όμως θα δράσουμε την χρονική, ∂_η, παράγωγο η οποία μας δίνει έναν σταθερό όρο, ο όρος αυτός προκύπτει από την λύση των επιπέδων κυμάτων και είναι για θετικές και αρνητικές συχνότητές, η λύση αυτού οφείλεται στο ότι η, ∂_η, είναι ένα διάνυσμα **killing**. Για τις θετικές συχνότητες παραθέτουμε τις πράξεις ενώ για τις αρνητικές επειδή είναι παρόμοιες τις παραλείπω. Το πεδίο αυτό έχει δυο καταστάσεις πόλωσης τις οποίες θα επισημάνουμε Επίσης πρέπει να τονίσουμε ότι η λύσεις τις Dirac για το πρόβλημα μας είναι τετραδιάστατοι Spinors, δηλαδή το πεδίο παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$\hat{\Psi} \sim \mathcal{S}(\eta,\rho) = \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} e^{-i\Omega\eta} \tag{5.198}$$

$$\begin{pmatrix} \rho mc^2 & -i\hbar c\rho\sigma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\sigma^3 \\ -i\hbar c\rho\sigma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\sigma^3 & -\rho mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho mc^2 & -i\hbar c\rho\sigma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\sigma^3 \\ -i\hbar c\rho\sigma^3\partial_\rho - \frac{i\hbar c}{2}\sigma^3 & -\rho mc^2 \end{pmatrix}\hat{\Psi} =$$
$$\begin{pmatrix} -\hbar^2c^2\partial^2_\eta & 0 \\ 0 & -\hbar^2c^2\partial_\eta \end{pmatrix}\hat{\Psi}$$

$$\begin{pmatrix} (\rho mc^2)^2+(-i\hbar c\sigma^3)^2(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}) & -i\hbar c\rho mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})+i\hbar mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})\rho \\ i\hbar c\rho mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})-i\hbar mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})\rho & (\rho mc^2)^2+(-i\hbar c\sigma^3)^2(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$((\rho mc^2)^2-\hbar^2c^2(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho-\rho\partial_\rho+\frac{1}{4}))\chi_1-(i\hbar c\rho mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})-i\hbar mc^2\sigma^3\rho-i\hbar c\rho mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}))\chi_2$$

$$(i\hbar c\rho mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2})-i\hbar mc^2\sigma^3\rho-i\hbar c\rho mc^2\sigma^3(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}))\chi_1+((\rho mc^2)^2-\hbar^2c^2(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho-\rho\partial_\rho+\frac{1}{4}))\chi_2$$

$$\begin{pmatrix} (\rho mc^2)^2-\hbar^2c^2(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho+\rho\partial_\rho+\frac{1}{4}) & i\hbar mc^2\sigma^3\rho \\ -i\hbar mc^2\sigma^3\rho & (\rho mc^2)^2-\hbar^2c^2(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho+\rho\partial_\rho+\frac{1}{4}) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{Bmatrix}$$

$$i\hbar\partial_\eta\chi_2=\hbar\Omega\chi_2=-mc^2\rho\chi_2-i\hbar c\sigma^3\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_1=-m(c\sigma^3)^2\rho\chi_2-i\hbar c\sigma^3\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_1\Rightarrow$$

$$-\hbar\Omega\chi_2=\sigma^3\left(mc^2\sigma^3\rho\chi_2+i\hbar c\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_1\right)\Rightarrow i\hbar mc^2\sigma^3\rho\chi_2=-\hbar^2ci\Omega\sigma^3\chi_2+(\hbar c)^2\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_1$$

$$i\hbar\partial_\eta\chi_1=\hbar\Omega\chi_1=mc^2\rho\chi_1-i\hbar c\sigma^3\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_2=m(c\sigma^3)^2\rho\chi_1-i\hbar c\sigma^3\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_1\Rightarrow$$

$$\hbar\Omega\chi_1=\sigma^3\left(mc^2\sigma^3\rho\chi_1-i\hbar c\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_1\right)\Rightarrow -i\hbar mc^2\sigma^3\rho\chi_1=\hbar^2ci\Omega\sigma^3\chi_1+(\hbar c)^2\left(\rho\partial_\rho+\frac{1}{2}\right)\chi_2$$

$$\begin{pmatrix} (\rho mc^2)^2-\hbar^2c^2\left(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho-\frac{1}{4}\right) & \hbar^2ci\Omega\sigma^3 \\ \hbar^2ci\Omega\sigma^3 & (\rho mc^2)^2-\hbar^2c^2\left(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho-\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{Bmatrix}=\Omega^2\begin{Bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\rho^2m^2c^2}{\hbar^2}-\left(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho-\frac{1}{4}\right)\chi_1-\frac{i\Omega}{c}\sigma^3\chi_2=\Omega^2\chi_1\Rightarrow\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho\chi_1=\left(\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\rho^2+\frac{1}{4}-\Omega^2\right)\chi_1-i\Omega\sigma^3\chi_2 \\ \frac{\rho^2m^2c^2}{\hbar^2}-\left(\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho-\frac{1}{4}\right)\chi_2-\frac{i\Omega}{c}\sigma^3\chi_1=\Omega^2\chi_2\Rightarrow\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho\chi_2=\left(\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\rho^2+\frac{1}{4}-\Omega^2\right)\chi_2-i\Omega\sigma^3\chi_1 \end{Bmatrix}$$

$$\rho\partial_\rho\rho\partial_\rho(\chi_1\mp\chi_2)=\left(\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\rho^2+\frac{1}{4}-\Omega^2\right)(\chi_1\mp\chi_2)-i\Omega\sigma^3(\chi_1\mp\chi_2)\Rightarrow$$

$$\left\{\rho^2\partial_\rho^2+\rho\partial_\rho-\left(\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\rho^2+\frac{1}{4}+i^2\Omega^2\pm i\Omega\sigma^3\right)\right\}\zeta^\pm=0\Rightarrow$$

$$\left\{x^2\partial_x^2+x\partial_x-\left(x^2+\left(\frac{1}{2}\pm i\Omega\right)^2\right)\right\}\zeta^\pm=0 \tag{5.199}$$

$$\left\{x^2\partial_x^2+x\partial_x-\left(x^2+\left(\frac{1}{2}\mp i\Omega\right)^2\right)\right\}\xi^\pm=0 \tag{5.200}$$

Για της αρνητικές συχνότητες το μόνο που αλλάζει είναι το πρόσημο του όρου $\frac{i\Omega}{c}$. Οι διαφορικές εξισώσεις που προέκυψαν είναι τροποποιημένες **Bessel** $\frac{1}{2}\pm i\Omega$ τάξης των οποίων η λύση είναι γνωστή. Οπότε οι Spinors ορίζονται μέσω των λύσεων αυτών των διαφορικών. Δηλαδή έχουμε για τους δυο Spinors τις εξής σχέσεις.

$$\mathcal{S}_{\Omega_+}=C_{\Omega_+}\begin{Bmatrix}\mathcal{K}_{i\Omega+\frac{1}{2}}(x)+i\mathcal{K}_{i\Omega-\frac{1}{2}}(x)\\ 0\\ \mathcal{K}_{i\Omega-\frac{1}{2}}(x)-i\mathcal{K}_{i\Omega+\frac{1}{2}}(x)\\ 0\end{Bmatrix}\qquad \mathcal{S}_{\Omega_-}=C_{\Omega_-}\begin{Bmatrix}0\\ \mathcal{K}_{i\Omega+\frac{1}{2}}(x)+i\mathcal{K}_{i\Omega-\frac{1}{2}}(x)\\ 0\\ \mathcal{K}_{i\Omega+\frac{1}{2}}(x)-i\mathcal{K}_{i\Omega-\frac{1}{2}}(x)\end{Bmatrix} \tag{5.201}$$

Εφόσον έχουμε βρει τις λύσεις θα τις κανονικοποιήσουμε σύμφωνα με την σχέση 5.146 όπου θεωρούμε την επιφάνεια η οποία είναι κάθετη στην η στην περίπτωση μας είναι η ρ.

$$\int\mathcal{S}^\dagger_{\Omega_+}\mathcal{S}_{\Omega'_+}d\rho=\delta(\Omega_+-\Omega'_+)\Rightarrow \tag{5.202}$$

$$\int C^*_{\Omega_+}C_{\Omega'_+}\left\{\mathcal{K}^*_{i\Omega+\frac{1}{2}}(x)-i\mathcal{K}^*_{i\Omega-\frac{1}{2}}(x)\quad 0\quad \mathcal{K}^*_{i\Omega-\frac{1}{2}}(x)+i\mathcal{K}^*_{i\Omega+\frac{1}{2}}(x)\quad 0\right\}\begin{Bmatrix}\mathcal{K}_{i\Omega'+\frac{1}{2}}(x)+i\mathcal{K}_{i\Omega'-\frac{1}{2}}(x)\\ 0\\ \mathcal{K}_{i\Omega'-\frac{1}{2}}(x)-i\mathcal{K}_{i\Omega'+\frac{1}{2}}(x)\\ 0\end{Bmatrix}d\rho$$

$$C^*_{\Omega_+}C_{\Omega'_+}\int 2\left(\mathcal{K}^*_{i\Omega+\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{i\Omega'+\frac{1}{2}}+i\mathcal{K}^*_{i\Omega+\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{i\Omega'-\frac{1}{2}}-i\mathcal{K}^*_{i\Omega-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{i\Omega'+\frac{1}{2}}+\mathcal{K}^*_{i\Omega-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{i\Omega'-\frac{1}{2}}\right)d\rho=\delta(\Omega-\Omega')$$

Όπως και στο πεδίο **Klein-Gordon** έτσι κι εδώ θα προσεγγίσουμε τις **Bessel** J_n.

$$\sin\left(\left(i\Omega+\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right)=(-1)^n\cos(i\Omega\pi)=(-1)^n\cosh(\Omega\pi)\;\; k_{\frac{2n+1}{2}}\equiv\frac{\pi}{2(-1)^n\cosh(\Omega\pi)\Gamma(i\Omega+\frac{2n+1}{2})}$$

$$\int\Bigg[k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega-\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega+\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega'-\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega'+\frac{1}{2}}\right)$$

$$+ik^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega-\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega+\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega'+\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega'-\frac{1}{2}}\right)$$

$$-i\left(k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega+\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega-\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega'-\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega'+\frac{1}{2}}\right)+$$

$$k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega+\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega-\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\Omega'+\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{i\Omega'-\frac{1}{2}}\right)\Bigg]\frac{\hbar}{mc}dx$$

$$\frac{\hbar}{mc}\int\Bigg\{k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega-\Omega')-1}+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega'-\Omega)+1}-\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega+\Omega')}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega+\Omega')}\right]+$$

$$+k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega-\Omega')+1}+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega-\Omega')-1}-\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega+\Omega')}-\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega+\Omega')}\right]$$

$$+i\left(k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{1}{2}}-k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\right)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega-\Omega')}+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega-\Omega')}\right)$$

$$-ik^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega+\Omega')-1}+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega+\Omega')+1}\right]-ik^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-i(\Omega+\Omega')-1}+\left(\frac{x}{2}\right)^{i(\Omega+\Omega')+1}\right]\Bigg\}dx$$

$$\frac{-i\hbar\pi}{mc}\Big\{k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\left[\delta(\Omega-\Omega'-1)+\delta(\Omega'-\Omega+1)\right]-\left(k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{3}{2}}+k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\right)\left[\delta(\Omega+\Omega')+\delta(-\Omega-\Omega')\right]$$

$$+k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\left[\delta(\Omega+\Omega'-1)+\delta(\Omega'+\Omega-1)\right]+i\left(k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{1}{2}}-k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\right)\left[\delta(\Omega-\Omega')+\delta(\Omega'-\Omega)\right]$$

$$-ik^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{1}{2}}\left[\delta(\Omega+\Omega'-1)+\delta(-\Omega-\Omega'+1)\right]-ik^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\left[\delta(\Omega+\Omega'+1)+\delta(\Omega+\Omega'+1)\right]\Big\}$$

$$C^2_{\Omega_+}\frac{4\hbar\pi}{mc}\left(k^*_{\frac{3}{2}}k'_{\frac{1}{2}}-k^*_{\frac{1}{2}}k'_{\frac{3}{2}}\right)\delta(\Omega-\Omega')=\delta(\Omega-\Omega')$$

$$C^2_{\Omega_+}=\frac{mc4\cosh^2(\Omega\pi)}{4\hbar\pi}\left(\frac{-\pi^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\overline{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\Omega\right)}}-\frac{-\pi^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\Omega\right)\overline{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)}}\right)^{-1}$$

$$C^2_{\Omega_+}=\frac{-mc\cosh^2(\Omega\pi)}{\hbar\pi^3}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-i\Omega\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\Omega\right)}\right)^{-1}$$

$$C^2_{\Omega_+}=\frac{-mc\cosh^2(\Omega\pi)}{\hbar\pi^3}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(2-\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(1+\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\Omega\right)}\right)^{-1}$$

$$C^2_{\Omega_+}=\frac{-mc\cosh^2(\Omega\pi)}{\hbar\pi^3}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\right)}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\Omega\right)}\right)^{-1}$$

$$C^2_{\Omega_+}=\frac{-mc\cosh^2(\Omega\pi)\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)}{\hbar\pi^3}\left(\frac{-1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\Omega\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\Omega\right)}\right)^{-1}$$

$$C^2_{\Omega_+}=\frac{mc\cosh^2(\Omega\pi)\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)}{\hbar\pi^3}\frac{\pi}{2\cosh(\Omega\pi)}\Rightarrow C_{\Omega_+}=\sqrt{\frac{mc}{2\hbar\pi^2}\cosh(\Omega\pi)\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)} \tag{5.203}$$

$$\overline{\Gamma(n)}=\Gamma(n^*)\quad n\Gamma(n)=\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\Omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\Omega\right)=\frac{\pi}{\cosh(\Omega\pi)} \tag{5.204}$$

Εφόσον έχουμε υπολογίσει και την σταθερά κανονικοποίησης θα αναπτύξουμε το πεδίο συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Για να είναι πλήρης η ανάπτυξη του πεδίου θα γίνει και στις δυο καταστάσεις πόλωσης $|\uparrow\rangle\equiv|+\rangle, |\downarrow\rangle\equiv|-\rangle$ του σωματιδίου. Στην συνέχεια θα κάνουμε έναν μετασχηματισμό **Bogolyubov** από τον χωρόχρονο **Rindler** στον χωρόχρονο **Minkowski**, ο μετασχηματισμός αυτός είναι ελαφρώς διαφορετικός από ότι ήταν για το πεδίο

Klein-Gordon διότι οι τελεστές ικανοποιούν αντιμεταθετικές έναντι των μεταθετικών σχέσεων του βαθμωτού πεδίου. Οπότε έχουμε ότι το πεδίο μας είναι το εξής καθώς και τις αντιμεταθετικές σχέσεις αυτού.

$$\hat{\Psi}_{Rind} = \sum_{\sigma=\pm} \int \left(\hat{a}_{\omega\sigma} S_{\Omega\sigma} + \hat{b}^{\dagger}_{\omega\sigma} S_{-\Omega-\sigma} \right) d\omega \tag{5.205}$$

$$\hat{\Psi}_{Mink} = \sum_{\sigma=\pm} \int \left(\hat{c}_{\omega\sigma} S_{\Omega\sigma} + \hat{d}^{\dagger}_{\omega\sigma} S_{-\Omega-\sigma} \right) d\omega \tag{5.206}$$

Όπου οι λύσεις του χωρόχρονου **Minkowski** είναι επίπεδα κύματα. Για τον μετασχηματισμό **Bogolyubov** έχουμε τα αποτελέσματα του βαθμωτού πεδίου τα οποία θα τα προσαρμόσουμε στις αντιμεταθετικές σχέσεις.

$$\hat{a}_{\Omega\sigma} = \frac{e^{\frac{\pi\Omega}{2}} \hat{c}_{\Omega\sigma} - e^{-\frac{\pi\Omega}{2}} \hat{d}_{\Omega\sigma}}{\sqrt{2\cosh(\pi\Omega)}} \tag{5.207}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{\Omega\sigma} = \frac{e^{\frac{\pi\Omega}{2}} \hat{c}^{\dagger}_{\Omega\sigma} - e^{-\frac{\pi\Omega}{2}} \hat{d}^{\dagger}_{\Omega\sigma}}{\sqrt{2\cosh(\pi\Omega)}} \tag{5.208}$$

$$\hat{n}^{Rind}_{\Omega\sigma} \equiv \frac{e^{\pi\Omega} \hat{c}^{\dagger}_{\Omega\sigma}\hat{c}_{\Omega\sigma} - \hat{c}^{\dagger}_{\Omega\sigma}\hat{d}^{\dagger}_{\Omega\sigma} - \hat{d}^{\dagger}_{\Omega\sigma}\hat{c}_{\Omega\sigma} + e^{-2\pi\Omega}\hat{d}_{\Omega\sigma}\hat{d}^{\dagger}_{\Omega\sigma}}{e^{2\pi\Omega} + e^{-2\pi\Omega}} \tag{5.209}$$

$$\langle 0_{Mink} | \hat{n}^{Rind}_{\Omega\sigma} | 0_{Mink} \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\Omega} + 1} \delta(\mathbf{0}) \tag{5.210}$$

Όπου παρατηρούμε ότι κατόπιν συσχέτισης της σχέσης που προέκυψε με την στατιστική **Fermi-Dirac** προκύπτει ξανά η θερμοκρασία Unruh. Οπότε το φαινόμενο Unruh παρατηρείται για κάθε είδους σωματίδιο είτε **BoSe** είτε **Fermi**. Άρα ο χωρόχρονος είναι γεμάτος από σωματίδια τα οποία προκύπτουν ύστερα από επιταχυνόμενη κίνηση του παρατηρητή.

Ερμηνεία του Φαινομένου Unruh

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πως ερμηνεύτεται τελικά το φαινόμενο Unruh. Για αρχή θα ορίσουμε με λίγο διαφορετικό τρόπο τις συντεταγμένες **Rindler**, μέσω των οποίων ορίζεται το φαινόμενο, όπου τελικώς ερμηνεύτεται και η φυσική σημασία του φαινομένου. Ο νέος ορισμός των συντεταγμένων είναι τύπου **Kruskal**. Στο διάγραμμα 5.152 εμφανίζονται δύο περιοχές I, II στις οποίες μπορούμε να κάνουμε αυτόν τον μετασχηματισμό $(t, x) \to (\xi, \eta)$ των συντεταγμένων ο μετασχηματισμός ορίζεται παρακάτω.

$$x = \frac{e^{\xi\alpha}}{\alpha} \cosh(\alpha\eta) \quad t = \frac{e^{\xi\alpha}}{\alpha} \sinh(\alpha\eta), \ -\infty < \eta, \xi < \infty \text{ Περιοχή } I \tag{5.211}$$

$$x = -\frac{e^{\xi\alpha}}{\alpha} \cosh(\alpha\eta) \quad t = -\frac{e^{\xi\alpha}}{\alpha} \sinh(\alpha\eta), \ -\infty < \eta, \xi < \infty \text{ Περιοχή } II \tag{5.212}$$

Συσχετίζοντας τις συντεταγμένες αυτές με τις **Rindler** μπορούμε να εξαγάγουμε τις εξής σχέσεις.

$$\eta = \frac{a}{\alpha}\tau \quad \xi = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{\alpha}\right) \tag{5.213}$$

Για τις νέες συντεταγμένες προκύπτουν διανύσματα **killing** μέσω των οποίων προκύπτει ένας παράγοντας ερυθράς μετατόπισης μέσω του οποίου ορίζεται και η επιφανειακή βαρύτητα την οποία έχουμε συναντήσει προηγουμένως. Δηλαδή έχουμε για τα διανύσματα **killing** ότι ισχύει.

$$\partial_\eta = \frac{\partial t}{\partial_\eta}\partial_t + \frac{\partial x}{\partial_\eta}\partial_x = e^{\alpha\xi}(\cosh(\alpha\eta)\partial_t + \sinh(\alpha\xi)\partial_x) = \alpha(x\partial_t + t\partial_x) \tag{5.214}$$

$$V = e^{\alpha\xi} \tag{5.215}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με μία σταθερή επιτάχυνση, $\xi = 0$, παρατηρεί θερμικό φάσμα σωματιδίων αν τώρα η επιτάχυνση που έχει δεν είναι σταθερή, $\xi \neq 0$, προκύπτει η σχέση $a = \alpha e^{-\alpha\xi}$. Συνεπώς έχουμε έναν παράγοντα ερυθράς μετατόπισης για τον κινούμενο παρατηρητή ο οποίος σε σχέση με τον ακίνητο παρατηρητή ανιχνεύει την συχνότητα του φάσματος μετατοπισμένη κάτα έναν παράγωντα ερυθράς μετατόπισης δηλαδή ισχύει.

$$\omega_2 = \frac{V_1}{V_2}\omega_1 = e^{\alpha(\xi_1-\xi_2)}\omega_1 \tag{5.216}$$

Όπου μπορούμε να υποθέσουμε τον έναν ως αδρανειακό παρατηρητή $\xi_1 = 0$ και να εξαγάγουμε τα συμπεράσματα μας για τον άλλο.

$$\omega_2 = e^{-\alpha\xi_2}\omega_1$$
$$\lim_{\xi_2\to\infty}\omega_2 = \lim_{\xi_2\to\infty} e^{-\alpha\xi_2}\omega_1 \to 0$$

Όπου καταλήξαμε ότι ένας παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται μακρία δεν βλέπει κάποια θερμική εκπομπή το οποίο είναι λογικό διότι ένας απομακρυσμένος παρατηρητής είναι ασυμπτωτικά **Minkowski** και όπως έχουμε δει ένας τέτοιος παρατηρητής δεν ανιχνεύει θερμικό φάσμα εκπομπής. Το φαινόμενο αυτό μας αποδεικνύει ότι ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής ανιχνεύει σωματίδια ενώ ένας αδρανειακός όχι. Γνωρίζουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του τανυστή ενέργειας και ορμής εκτός μίας μελανής οπής είναι μηδενική οπότε πρέπει να εξηγηθεί από που προκύπτουν αυτά τα σωματίδια. Στην πραγματικότητα ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής για να ανιχνεύσει αυτά τα σωματίδια πρέπει να έχει μαζί του κάποια συσκευή ανίχνευσης και λόγω επιτάχυνσης της δημιουργείται κάποιο έργο το οποίο τελικώς το σύστημα το απελευθερώνει ως σωματίδια στο υπόβαθρο.

5.5.3 Ακτινοβολία

Η ακτινοβολία είναι ένα φαινόμενο που στην κλασική φυσική, με τον όρο αυτό εννοούμε όχι κβαντική, εμφανίζεται όταν ένα σωμάτιο επιταχύνεται. Εφόσον το φαινόμενο Unruh είναι φαινόμενο που προκύπτει λόγω κάποιας σταθερής επιτάχυνσης μπορούμε να υποθέσουμε μια πιθανή μορφή ακτινοβολίας. Οπότε το μόνο που μένει είναι να εξαγάγουμε την σχέση για αυτήν την ακτινοβολία. Εφόσον η κατανομή του φάσματος είναι κατανομή μέλανος σώματος θα υποθέσουμε πως και η πυκνότητα ενέργειας της θερμικής ακτινοβολίας ικανοποιεί τον τύπο του Planks. Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Αρχικά ορίζουμε το τετραδιάνυσμα των δυναμικών, τα οποία ονομάζονται **Liénard -Wieckert**, και την ταχύτητα σε μορφή τετρανύσματος, αλλά χωρίς να είναι τετράνυσμα.

$$\mathcal{J}^\mu(\boldsymbol{x};t) = ec\beta^\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t)) \tag{5.217}$$

$$\mathcal{A}^\mu(\boldsymbol{x};t) = \int \mathcal{G}(\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{x'};t')\mathcal{J}^\mu d^4x' = ec\int\beta^\mu\frac{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t))\delta(t-t'-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{c})}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|}d^4x' = e\int\beta^\mu\frac{\delta(t-t'-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{c})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}(t')|}dt'$$
$$\mathcal{A}^\mu(\boldsymbol{x};t) = \frac{e\beta^\mu}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}(t)|(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})} = \frac{e\beta^\mu}{rk}\quad r\equiv|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}(t)|, \boldsymbol{n}\equiv\frac{\boldsymbol{r}}{r}, k\equiv 1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} \tag{5.218}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};t) = \nabla\wedge\boldsymbol{A} = e\int\nabla\left(\frac{\delta(t-t'-\frac{r}{c})}{r}\right)\wedge\boldsymbol{\beta}dt' = e\int(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{\beta})\left(-\frac{\delta(t-t'-\frac{r}{c})}{r^2}+\frac{\delta'(t-t'-\frac{r}{c})}{cr}\right)dt'$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};t) = e\left(\frac{(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{n})}{r^2}+\int\frac{k}{cr}\frac{\delta'(t-t'-\frac{r}{c})}{ckr}(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{\beta})dt'\right) = e\frac{(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{e}{ck}\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{\beta})}{kr}\right)\right] \tag{5.219}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x};t) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{x};t)-\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x};t)}{\partial t} = -e\int\left(-\boldsymbol{n}\frac{\delta(t-t'-\frac{r}{c})}{r^2}+\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{cr}\delta'(t-t'-\frac{r}{c})\right)dt'$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x};t) = \frac{e\boldsymbol{n}}{r^2k}-\frac{e}{ck}\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})}{kr}\right)\right] \tag{5.220}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};t) = \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x};t) \tag{5.221}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E} = \frac{c}{4\pi}\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E})\right) \overset{r\to\infty}{\Rightarrow} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};t)$$

$$\boldsymbol{S} \approx \frac{ce^2}{4\pi r^2 c^2}|\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}|\boldsymbol{n} \tag{5.222}$$

$$\mathcal{W} = \int \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};t)\cdot\boldsymbol{n}\,dt = \int \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};t(t'))\cdot\boldsymbol{n}\,\frac{dt}{dt'}dt' = \int k\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};t(t'))\cdot\boldsymbol{n}\,dt' \tag{5.223}$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{4\pi c}\int \frac{(\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\wedge\dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^5}d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c}\int\left((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\right)^2\frac{d\Omega}{k^5}$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{4\pi c}\int\left(1-2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}+\beta^2\right)(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2\frac{d\Omega}{k^5} - 2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})k + \beta^2\left(1-2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2\right)$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\int_{-1}^{1}\frac{du}{k^5}\left((\beta^2-1)u^2u_0^2 + \frac{1}{2}(1-u^2)(1-u_0^2) + 2u_0^2u\beta(1-\beta u) + (1-2\beta+\beta^2u^2)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c} u \equiv \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}} = \cos\theta \\ u_0 \equiv \dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}} = \cos\theta_0 \end{array}\right\}$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\int_{-1}^{1}\frac{du}{k^5}\left(-(1-\beta^2)u^2 + 2u\beta(1-\beta u) + 1 - 2u\beta + \beta^2u^2\right.$$
$$\left.+(1-u_0^2)\left[(1-\beta^2) - \frac{1}{2}(1-u^2)(1-\beta^2) - 2u\beta + \beta^2u^2\right]\right)$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^5}\left((1-u^2)\right.$$
$$\left.+(1-u_0^2)\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{\beta^2}{2}\right)u^2 - 2u\beta - \frac{1}{2}(1-\beta^2)\right]\right)$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c\beta^3}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^5}\left((\beta^2+2\beta-x^2)\right.$$
$$\left.+(1-u_0^2)\left[\frac{1}{2}\left(3+x^2\right)\left(1-2x+x^2\right) - 2\beta^2(1-x) - \frac{1}{2}\beta^2(1-\beta^2) - \frac{1}{2}(1-\beta^2)\right]\right)$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c\beta^3}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^5}\left((\beta^2-1+2x-x^2)\right.$$
$$\left.+(1-u_0^2)\left[\frac{1}{2}\left(3-4\beta^2+\beta^4\right) + (\beta^2-2)x - 2\beta^2(1-x) + (3+\beta^2)\frac{x^2}{2}\right]\right)$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c\beta^3}\left(\frac{(\beta^2-1)}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}) + (1-u_0^2)\left[\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{\beta^2}{2}\right)(1-\beta^4)}{4x^4} + \frac{\beta^3-3}{3x^3} + \frac{\beta^2+3}{4x^2}\right]\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\dot{\beta}^2\gamma^6}{4\pi c\beta^3}\left(\frac{2}{3}\beta^3 - \frac{2}{3}\beta^5(1-u_0^2)\right) = \frac{e^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\dot{\beta}^2 - \boldsymbol{\beta}\wedge\dot{\boldsymbol{\beta}}\right),\ \text{Σχετικιστικός τύπος του Larmor} \tag{5.224}$$

Ο τύπος του Larmor μας αποκαλύπτει πως μεταφέρεται η ενέργεια μέσω ακτινοβολίας η οποία οφείλεται στην επιτάχυνση ενός φορτισμένου σωματιδίου, π.χ. ηλεκτρόνιο, το φαινόμενο Unruh μας αποκαλύπτει μια θερμική εκπομπή και αφού έχουμε συσχετίσει το φαινόμενο με το μέλαν σώμα τότε ο χωρόχρονος θα εκπέμπει ακτινοβολία μέλανος σώματος. Άρα η ακτινοβολία εικονικών φορτισμένων σωματιδίων τα οποία δημιουργούνται στο υπόβαθρο να είναι υπεύθυνα για την θερμική. κατανομή από την οποία προκύπτει η θερμοκρασία Unruh.

Επίλογος

Στην εργασία αυτή έχω κάνει μια βασική εισαγωγή στην διαφορική γεωμετρία, στην Ειδική θεωρία και Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και τέλος στην κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Επίσης έχω αναπτύξει μια λύση της εξίσωσης του EinStein, την περίφημη λύση **Schwarzschild**, και μελετήσα την γεωμετρία της λύσης αυτής επίσης εισήχθει η έννοια της μελανής οπής ώστε να εξηγηθεί η ανωμαλία της γεωμετρίας. Τέλος έκανα μια βασική εισαγωγή την θεωρία πεδίου κλασική και κβαντική και μελέτησα το φαινόμενο Unruh το οποίο αποδυκνύει ότι ο χωρόχρονος δεν είναι κενός, όπως υποθέτουμε κλασικά, αλλά έιναι γεμάτος από σωματίδια. Το φαινόμενο αυτό είναι αποτέλεσμα της σταθερά επιταχυνομενης κίνησης του παρατηρητή.
Στην εργασία αυτή είδαμε πως τα κβαντικά φαινόμενα τα οποία λαμβάνουν χώρα στο υπόβαθρο μιας κλασικής θεωρίας, όπως είναι η Γενική Σχετικότητα, είναι σημαντικά και δεν μπορούν παραλειφθούν. Αυτό ανοίγει νέους δρόμους στην κβάντωση του βαρυτικού πεδίου. Μιας και παρατηρούμε ότι η κβαντική συμπεριφορά των πεδίων παρουσία του βαρυτικού πεδίου μας αποκαλύπτει νέα φαινόμενα, όπως είναι το φαινόμενο Unruh, έτσι μπορούμε να υποψιαστούμε ότι είναι δυνατή η κβάντωση και του βαρυτικού πεδίου.
Τέλος το φαινόμενο Unruh είναι τις ίδιας φύσης με την ακτινοβολία **Hawking** η οποία είναι ακτινοβολία των μελανών οπών. Μέσω του φαινομένου της ακτινοβολίας **Hawking** οι μελανές οπές εξαχνώνονται κάτι το οποίο από κλασικής σκοπίας των μελανών οπών είναι αδύνατον.

Βιβλιογραφία

[1] Mikio Nakahara - *Geometry, Topology and Physics, First Edition (Graduate Student Series in Physics)*, Institute of Physics Publishing (1990)

[2] E.C. Zachmanoglou,Dale W.Thoe - *Introduction to PDE with Applications*, Dover (1976)

[3] Sean Carroll - *Spacetime and Geometry:An Introduction to General Relativity*,B.Cummings

[4] Norbert Straumann - *General relativity and applications to astrophysics*, Springer (1985)

[5] Lev. Landau, Evgeny Lifshitz - *The classical theory of fields (fourth reivised english edition, courses of theoretical physics vol.2* , Butterworth,Heinemann (2010)

[6] Lev. Landau, Evgeny Lifshitz - *Mechanics (third edition, courses of theoretical physics vol.1* , Butterworth,Heinemann (2010)

[7] Matthias Blau - *Lecture Notes General Relativity, Albert Einstein Center Fundamental Phys*

[8] J.L Martin - *Γενική Σχετικότητα, Μια βασική εισαγωγή για φυσικούς*, Π.Ε.Κρήτης (2005)

[9] P.K. Townsend - *General Relativity And Quantum Cosmology - Black Holes. arXiv:1205.3184*

[10] N. D. Birrell, P. C. W.Davies - *Quantum fields in Curved Specetime (1986)*

[11] A. Messiah - *Quantum Mechanics Vol.I (1961) North Holland*

[12] Alex B Nielsen and Jong Hyuk Yoon - *Dynamical surface gravity. arxiv:0711.1445*

[13] Γεώργιος Κουτσούμπας - *Σημειώσεις Θεωρητικής Φυσικής Αθήνα 2003*

[14] Luís C. B. Crispino, Atsushi Higuchi, George E. A. Matsas - *The Unruh effect and its applications - Published 1 July 2008*

[15] *Sir Joseph Larmor - Chapter Fourteen Radiation by Moving Charges (1857 - 1942) 17-9-01*

[16] *P.C.W. Davies - Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics*

[17] *W.G. Unruh - Notes on black-hole evaporation*

[18] *Stephen A. Fulling - Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-Time**