ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙᾼ

Γ. Π. ΒΟΥΓΙΟΥΚΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Ετος Ι΄. ΑΘΗΝΑΙ, Αυγουστος 1909 Αριθ. 4.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙ ΤΙΝΟΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΚΟΛΟΥΘΩΝ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ [1]

1. Ἐν πολλοῖς ζητήμασι τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως ἀγόμεθα εἰς ἐξέτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν κοινῶν εἴς τινα δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(x)$ καὶ εἰς τὰς συναρτήσεις τὰς παριστωμένας ὑπὸ τοῦ γενικοῦ τύπου :

$$(1) \qquad y=(\gamma x+\delta)^{\mu} f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right),$$

τοῦ μ ὄντος ἀριθμοῦ τινος *οἱουδήποτε* δεδομένου.

1. Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῷ Διεθνεῖ Συνεδρίῳ τῶν Μαθηματικῶν ἐν Ρώμῃ κατ' Ἀπρίλιον τοῦ 1908.

Τοιοῦτό τι συμβαίνει ἐν παραδείγματι ὅταν ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶνε πολυώνυμον ἀκέραιον βαθμοῦ μ. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἔρευνα τῶν ἰδιοτήτων τῶν κοινῶν εἰς τὰς συναρτήσεις $(\gamma x+\delta)^{\mu} f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)$, συμπίπτει πρὸς τὴν ἐξέτασιν τῶν ὡς πρὸς πρωτοβαθμίους μετασχηματισμοὺς *ἀναλλοιώτων* ἰδιοτήτων τῆς δυαδικῆς μορφῆς βαθμοῦ μ

$$x_2^{\mu} f\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

2. Ἐν τῇ ἐρεύνῃ τῶν ἰδιοτήτων τῶν κοινῶν εἰς τὰς συναρτήσεις τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς δοθεῖσαν συνάρτησιν $y=f(x)$, θεωρουμένην ὡς βαθμοῦ μ, ἀνάγκη παρίσταται νὰ θεωρῶμεν τὰς συναρτήσεις

$$\sigma(x, y, y', y'', \ldots)$$

τῶν x, y καὶ τῶν διαδοχικῶν παραγώγων $y', y'', \ldots$ τῆς y ὡς πρὸς x, τὰς ἐχούσας τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα ὅτι ἂν θέσωμεν

$$x=\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\ \eta=(\gamma\xi+\delta)^{\mu} f\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right),\ \Delta=\alpha\delta-\beta\gamma,$$

καὶ παραστήσωμεν διὰ τῶν $\eta', \eta'', \ldots$ τὰς παραγώγους τῆς η ὡς πρὸς ξ, ἔχομεν ἰσχύουσαν ταυτότητα τῆς μορφῆς

$$(2) \quad \sigma(\xi,\eta,\eta',\eta'',\ldots)=\Delta^{p}(\gamma\xi+\delta)^{\nu}\,\sigma(x,y,y',y'',\ldots)$$

(ὅπου p καὶ ν δεδομένοι ἀριθμοί), οἱωνδήποτε ὄντων τῶν $x, y, y', y'', \ldots$, ὅταν τὰ $\xi, \eta, \eta', \eta'', \ldots$ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν συναρτήσει τῶν $x, y, y', y'', \ldots$

Τὰς συναρτήσεις $\sigma(x, y, y', y'', \ldots)$ τὰς ἐχούσας τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ καλῶμεν συνακολούθους (covariants) τῆς συναρτήσεως y τοῦ x, θεωρουμένης ὡς βαθμοῦ μ.

Ὁ ἀριθμὸς ν, δύναται νὰ καλῆται *βαθμὸς* τῆς θεωρουμένης *συνακολούθου*.

Οὕτω π. χ. ἡ συνάρτησις $\mu y y''-(\mu-1)y'^2$ δι' ἣν ἔχομεν

$$[\mu\eta\eta''-(\mu-1)\eta'^2]=$$
$$=\Delta^2(\gamma\xi+\delta)^{2\mu-4}[\mu y y''-(\mu-1)y'^2],$$

εἶνε συνακόλουθος βαθμοῦ $2\mu-4$ τῆς βαθμοῦ μ συναρτήσεως y.

Τὰς συναρτήσεις τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τοῦ τύπου (1) δυνάμεθα νὰ καλῶμεν *ἰσοδυνάμους* πρὸς τὴν συνάρτησιν $f(x)$ θεωρουμένην ὡς βαθμοῦ μ.

Εἶνε πρόδηλον ὅτι ἂν ἡ συνάρτησις

$$\sigma(x, y, y', y'', \ldots)$$

εἶνε συνακόλουθος τῆς συναρτήσεως y βαθμοῦ μ, ἡ δὲ συνάρτησις $y=f(x)$ ἀποτελεῖ μίαν λύσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\sigma(x, y, y', y'', \ldots)=0,$$

πᾶσαι αἱ συναρτήσεις αἱ ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν $f(x)$, θεωρουμένην ὡς βαθμοῦ μ, θὰ ἐπαληθεύωσι τὴν αὐτὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν.

Τοῦτο συμβαίνει ἐν παραδείγματι διὰ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν $\mu y y''-(\mu-1)y'^2=0$, ἣν ἐπαληθεύουσιν αἱ συναρτήσεις $y=A(x-x_1)^\mu$ οἱωνδήποτε ὄντων τῶν A καὶ x_1.

Ἵνα συνάρτησίς τις $\sigma(x, y, y', y'', \ldots)$ ᾖ συνακόλουθος τῆς συναρτήσεως y βαθμοῦ μ, οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα (2), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπόκηται εἰς τὰς ἑξῆς συνθήκας

1) Νὰ εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ x,

2) Νὰ εἶνε *ἰσοβαρὴς* καὶ *βάρους* p ὡς πρὸς τὰ $y, y', y'', \ldots$ ὑποτιθέμενα ὡς ἔχοντα ἀντιστοίχως βάρη $0, 1, 2, \ldots$

3) Νὰ εἶνε *ὁμογενὴς* βαθμοῦ $g=\dfrac{2p+\nu}{\mu}$ ὡς πρὸς τὰ $y, y', y'', \ldots$

4) Νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$\mu y\frac{d\sigma}{dy'}+2(\mu-1)y'\frac{d\sigma}{dy''}+\ldots$$
$$+k(\mu-k+1)y^{(k-1)}\frac{d\sigma}{dy^{(k)}}+\ldots=0$$

3. Καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς $\mu+1$ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός, ἡ παράγωγος $y^{(\mu+1)}$ εἶνε συνακόλουθος βαθμοῦ $-\mu-2$ τῆς y. Μόνον κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην παράγωγός τις $y^{(k)}$ εἶνε συνακόλουθος τῆς y.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}=F(x), \tag{3}$$

μετασχηματίζεται εἰς ἐξίσωσιν τῆς αὐτῆς μορφῆς

$$\frac{d^{\mu+1}\eta}{d\xi^{\mu+1}}=\Phi(\xi),$$

διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$x=\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\quad y=(\gamma\xi+\delta)^{-\mu}\eta.$$

Ἡ νέα συνάρτησις $\Phi(\xi)$ ἔχει τιμὴν

$$\Phi(\xi)=\Delta^{\mu+1}(\gamma\xi+\delta)^{-\mu-2}F\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right).$$

Ἀποδεικνύεται ἄλλως τε, διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\mu>0$, ὅτι ἀντιστρόφως : Ἵνα μετασχηματισμὸς τῆς μορφῆς :

$$x=u(\xi),\quad y=v(\xi)\eta$$

μετατρέπῃ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (3) εἰς ἄλλην τῆς αὐτῆς μορφῆς, δέον νὰ ἔχωμεν :

$$u(\xi)=\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\quad v(\xi)=(\gamma\xi+\delta)^{-\mu}.$$

4. Ὡς παράδειγμα παραστάσεως συνακολούθου συναρτήσεως y βαθμοῦ μ ἀναφέρομεν τὸ πρῶτον μέρος τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τάξεως $k+1$ τῆς λαμβανομένης ἐκ τῆς σχέσεως

$$y=A(x-x_1)^{\mu_1}(x-x_2)^{\mu_2}\ldots(x-x_k)^{\mu_k}$$

δι' ἀπαλοιφῆς τῶν $A, x_1, x_2, \ldots x_k$. (Ἔχομεν ἐνταῦθα $\mu=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k$).

Ὅταν $k=1$ ἔχομεν τὴν καὶ ἀνωτέρω θεωρηθεῖσαν παράστασιν

$$\mu y y''-(\mu-1)y'^2.$$

Ὅταν $k=2$ ἢ 3 λαμβάνομεν συνακολούθους παραστάσεις ὧν ὁ ὑπολογισμὸς δὲν παρουσιάζει μεγάλας δυσχερείας. Ὅταν ὅμως $k>3$ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ῥηθείσης συνακολούθου καθίσταται ἀρκετὰ δύσκολος, ἀναγόμενος εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν k μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots x_k$ μεταξὺ $k+1$ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned}
&\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \ldots + \mu_kx_k = C_1,\\
&\mu_1x_1^2 + \mu_2x_2^2 + \ldots + \mu_kx_k^2 = C_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mu_1x_1^{k+1}+\mu_2x_2^{k+1}+\ldots+\mu_kx_k^{k+1}=C_{k+1}.
\end{aligned}$$

Καθ' ἣν περίπτωσιν τινὲς τῶν ἀριθμῶν μ_i εἶνε ἴσοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἐξαγόμενον ἁπλοποιεῖται. Οὕτω π. χ. ὅταν $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu^k$, ἡ ἐν λόγῳ συνακόλουθος ἰσοῦται πρὸς τὴν παράστασιν

$$\left(y^{\frac{1}{\mu_1}}\right)^{(k+1)}$$

παραλείψει παράγοντός τινος τῆς μορφῆς y_1^{τ}.

5. Ἡ θεωρία τῶν συνακολούθων συναρτήσεώς τινος βαθμοῦ μ εἶνε ἐν πλείστοις ἀνάλογος πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν *συνακολούθων* τῶν δυαδικῶν μορφῶν, ἧς πλεῖσται μέθοδοι δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσιν ἐνταῦθα λίαν λυσιτελῶς.

Πρὸς κατανόησιν δὲ τοῦ πῶς ἡ θεωρία τῶν *συνακολούθων παραστάσεων* τῶν δυαδικῶν μορφῶν ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν τῆς ἐνταῦθα ἐξεταζομένης θεωρίας, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, κατὰ τὰς ἐρεύνας τοῦ κ. Hilbert, πᾶσα συνακόλουθος $x_2^{\nu}\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ δυαδικῆς μορφῆς $x_2^{\mu} f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ βαθμοῦ μ, ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς συνάρτησις ἀκεραία

$$\sigma(y, y', y'', \ldots)$$

τῆς y καὶ τῶν διαδοχικῶν αὐτῆς παραγώγων, ἥτις συνάρτησις εἶνε οὐ μόνον ἰσοβαρὴς καὶ ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὸ $y, y', y'', \ldots$ ἀλλὰ καὶ ὑπόκειται εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$\mu y \frac{d\sigma}{dy'} + 2(\mu-1) y' \frac{d\sigma}{dy''} + \ldots = 0.$$

6. Ὡς ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν δυαδικῶν μορφῶν, δυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα νὰ θεωρήσωμεν *κοινὰς συνακολούθους* (covariants simultanés) πλειόνων συναρτήσεων $y_1, y_2, \ldots$ βαθμῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ἀντιστοίχως. Αἱ ἁπλούστεραι τῶν κοινῶν συνακολούθων δύο συναρτήσεων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς *ἐπιζεύξεις* (Ueberschiebungen) τῶν δυαδικῶν μορφῶν.

Ὡς *παράδειγμα κοινῆς συνακολούθου πλειόνων* συναρτήσεων $y_1, y_2, \ldots y_k$, βαθμῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ ἀντιστοίχως, ἀναφέρομεν τὴν παράγωγον τάξεώς $\mu+1$ τῆς συναρτήσεως

$$y = y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_k^{\nu_k}$$

ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ ἄθροισμα $\mu = \Sigma \mu_i \nu_i$ εἶνε ἀριθμὸς ἀκέραιος $\geqq 0$.

Οὕτω π. χ. ἔχομεν ἁπλουστάτην συνακόλουθον τῶν y_1, y_2 τὴν $(y_1^{\mu_2} y_2^{-\mu_1})'$.

7. Ὡς ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν δυαδικῶν μορφῶν, οὕτω καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν συνάρτησίν τινα y βαθμοῦ μ καὶ τὰς διαδοχικὰς αὐτῆς παραγώγους διὰ παραστάσεων συμβολικῶν τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} y\ &= a_x^{\mu}, \\ y'\ &= \mu a_1 a_x^{\mu-1}, \\ y'' &= \mu(\mu-1) a_1^2 a_x^{\mu-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

τεθέντος

$$a_x = a_1 x + a_2.$$

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὰς διαδοχικὰς πολικὰς $a_x^{\mu-1} a_z$, $a_x^{\mu-2} a_z^2, \ldots$ τῆς συναρτήσεως $y = a_x^{\mu}$.

Ὡς ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν δυαδικῶν μορφῶν, ἡ $k^{\text{οστὴ}}$ *ἐπίζευξις* τῶν δύο συναρτήσεων

$$y_1 = a_x^{\mu_1}, \quad y_2 = b_x^{\mu_2}$$

δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(y_1, y_2)_k = (ab)^k a_x^{\mu_1 - k} b_x^{\mu_2 - k}$$

ὅπου

$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 b_x - b_1 a_x.$$

8. Αἱ παραστάσεις

$$\sigma(y, y', y'', \ldots)$$

αἱ οὐ μόνον ὁμογενεῖς καὶ ἰσοβαρεῖς ὡς πρὸς τὰ $y, y', y'', \ldots$ ἀλλὰ καὶ ὑποκείμεναι εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$\mu y \frac{d\sigma}{dy'} + 2(\mu-1) y' \frac{d\sigma}{dy''} + \ldots = 0,$$

ἄγουσιν, ὑποτεθέντος ὅτι τὸ μ αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, εἰς παραστάσεις ὑποκειμένας εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$y \frac{d\sigma}{dy'} + 2y' \frac{d\sigma}{dy''} + \ldots + k^{(k-1)} \frac{d\sigma}{dy^{(k)}} + \ldots = 0.$$

Αἱ οὕτω λαμβανόμεναι νέαι παραστάσεις $\sigma(y, y', \ldots)$ εἰσὶ τοιαῦται ὥστε ἂν θέσωμεν

$$\eta = e^{\gamma\xi+\delta} f(a\xi + \beta)$$

καὶ παραστήσωμεν δι' $\eta', \eta'', \ldots$ τὰς διαδοχικὰς τῆς η παραγώγους ὡς πρὸς ξ, ἔχομεν τὴν ταυτότητα

$$\sigma(\eta, \eta', \eta'', \ldots) = a^{\varrho}[e^{\gamma\xi+\delta}]^{g} \sigma(y, y', y'', \ldots).$$

Ἡ *συνάρτησις* y δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὡς βαθμοῦ ἀπείρου καὶ νὰ παρασταθῇ συμβολικῶς ὡς ἐκθετικὴ συνάρτησις e^{ax}.

ΚΥΠ. ΣΤΕΦΑΝΟΣ