ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙᾼ

Γ. Π. ΒΟΥΓΙΟΥΚΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Ετος Ι΄. ΑΘΗΝΑΙ, Οκτωβριος 1909 Αριθ. 6.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ

ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

1.— *Γραμμαὶ τοῦ Hartmann.* — Πρὸ πολλοῦ παρετηρήθη ὅτι τὰ εἰς μόνιμον παραμόρφωσιν ὑποβαλλόμενα μέταλλα καλύπτονται ὑπὸ γραμμῶν ἢ χαραγῶν μᾶλλον ἢ ἧττον ἐμφανῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας των. Αἱ γραμμαὶ αὗται δηλοῦνται ἐνίοτε διὰ τοῦ ὀνόματος *γραμμαὶ τοῦ Luders,* διότι οὗτος φαίνεται ὅτι πρῶτος ἐσημείωσε τὴν ὕπαρξιν αὐτῶν περὶ τὸ 1860.

Ἀρκεῖ ἄλλως τε νὰ ῥίψῃ τις βλέμμα ἐπὶ προμηθείας σιδηρογωνιῶν, σιδηροτροχιῶν κτλ. φερουσῶν ἔτι τὸ στρῶμα τοῦ κυανοῦ ὀξειδίου τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη κατὰ τὴν ἔλασιν, ἵνα καταπλαγῇ ἐκ τῆς κανονικῆς θέας τῶν φαιοχρόων ἐκ σκωρίας γραμμῶν, αἵτινες σχηματίζονται ἐφ' ὅλων τῶν σημείων, τῶν ὑποστάντων μόνιμον παραμόρφωσιν ἕνεκα τῆς πτύξεως.

* Ἡ μελέτη τοῦ κ. Ἀγ. Γκίνη, παραδοθεῖσα πρὸς τύπωσιν ὅτε ἤδη τὸ φύλλον εὑρίσκετο ὑπὸ τὰ πιεστήρια, κατετάχθη εἰς τὸ τέλος τοῦ φύλλου.

Αἱ ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου παρατηρήσεις εἶχον μείνει μεμονωμέναι καὶ ἄνευ δεσμοῦ μέχρι τῶν μελετῶν τοῦ ταγματάρχου τοῦ γαλλικοῦ πυροβολικοῦ Hartmann.

Πρὶν ὅμως προβῶμεν εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῶν πορισμάτων τῶν πειραμάτων τοῦ Hartmann, ὀφείλομεν νὰ μνημονεύσωμεν τὰ τοῦ γάλλου λοχαγοῦ τοῦ πυροβολικοῦ Duguet γενόμενα κατὰ τὸ 1880 καὶ ἀφορῶντα τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὁρίου τῆς ἐλαστικότητος καὶ τῆς ἀντιστάσεως εἰς τὴν θραῦσιν τῶν μετάλλων, συνεπείᾳ τῶν ὁποίων ὁ λοχαγὸς Duguet ἐκφέρει ἐκ τῶν προτέρων ἐν τῷ συγγράμματι [1], ἐν ᾧ περιγράφει ταῦτα, τινὰ τῶν σπουδαιοτέρων ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα σαφέστερον ἔμελλον νὰ ἐξαχθῶσιν ἐκ τῶν μεταγενεστέρων πειραμάτων τοῦ ταγματάρχου Hartmann.

Ὁ Hartmann συνήγαγεν ἐκ τῶν πειραμάτων του, γενομένων περὶ τὸ 1894, τοὺς ἑξῆς νόμους [2]:

Εὐθὺς ὡς τὸ μέταλλον ὑπερβῇ τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος:

Α΄.) Παράγονται ἐν γένει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δύο συστήματα εὐθειῶν ἢ καμπύλων σχηματιζουσῶν μεταξύ των γωνίαν σταθεράν, πάντοτε διάφορον τῶν 90^0, ἐξαρτωμένην δ' ἐκ τῆς φύσεως τοῦ σώματος.

Β΄.) Κυρίως πλησίον τῶν ὑποστηριγμάτων ἢ τῶν ἀποτόμων μεταβολῶν τῆς τομῆς δυνατὸν νὰ παραχθῇ τρίτον σύστημα γραμμῶν διευθυνομένων κατὰ τὴν διχοτομοῦσαν τῶν δύο πρώτων.

Γ΄.) Αἱ γραμμαὶ τῶν δύο πρώτων συστη-

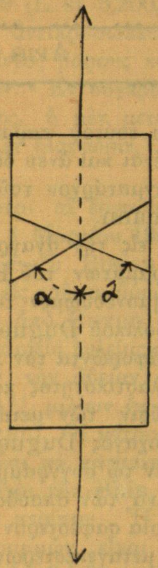
1. Ch. Duguet. Déformation des corps solides. Limite d'élasticité et résistance à la rupture. 1re et 2e partie. Paris 1882-1885.
2. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. T. 118, σελ. 528 καὶ 738. T. 123, σελ. 444 καὶ 639.

μάτων διχοτομοῦνται ἐν περιπτώσει ἁπλῆς ἐκτάσεως ὑπὸ τῆς διευθύνσεως τῆς ἐκτάσεως, μεθ' ἧς σχηματίζουσι γωνίαν $\alpha > 45^0$, ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς φύσεως τοῦ σώματος (σχ. 1).

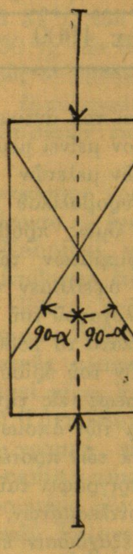
Αἱ γραμμαὶ αὗταί εἰσιν εὐθεῖαι ἐν τῇ περι πτώσει πρισμάτων καὶ ἕλικες ἐν τῇ περιπτώσει κυλίνδρων.

Αἱ γραμμαὶ τοῦ τρίτου συστήματός εἰσι κάθετοι ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐκτάσεως.

Δ'.) Ἐν τῇ περιπτώσει ὁμοιομόρφου συμπιέσεως αἱ γραμμαὶ τῶν δύο πρώτων συστημάτων σχηματίζουσι γωνίαν $\beta = 90^0 - \alpha$ μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς συμπιέσεως (σχ. 2). Εἰσὶν



Σχ. 1.
Περίπτωσις ἐκτάσεως.



Σχ. 2.
Περίπτωσις συμπιέσεως.

εὐθεῖαι ἐν τῇ περιπτώσει πρισμάτων, ἕλικες δ' ἐν τῇ περιπτώσει κυλίνδρων.

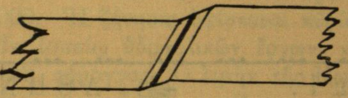
Αἱ γραμμαὶ τοῦ τρίτου συστήματός εἰσιν ἐπίσης κάθετοι ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς συμπιέσεως.

Αἱ δι' ἐκτάσεως παραγόμεναι γραμμαὶ εἶνε κοῖλαι, αἱ δὲ διὰ συμπιέσεως εἶνε ἐν ἐξοχῇ· Δυνάμεθα νὰ δείξωμεν αὐτὰς παράγοντες κεχρωσμένην στρῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μετάλλου, ἐπὶ παραδείγματι δι' ἐλαφρᾶς κυανῆς ὀξειδώσεως γινομένης περὶ τοὺς 300^0 K. ἐν τῷ σιδήρῳ ἢ τῷ χάλυβι. Προστρίβοντες ἀκολούθως διὰ χάρτου κεκαλυμμένου ὑπὸ λεπτῆς σμυριδοκόνεως ἀφαιροῦμεν τὸ ὀξείδιον ἐφ' ὅλων τῶν ἐξεχόντων μερῶν, παραμένει δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κοίλοις.

2. — *Ἡ μόνιμος παραμόρφωσις εἶνε ἀποτέλεσμα ὀλισθήσεων.* — Τὰ πειράματα τοῦ λοχαγοῦ Duguet εἶχον ἤδη δείξῃ ὅτι ἡ μόνιμος παραμόρφωσις ἀποτελεῖται ἐξ ὀλισθήσεων ἑνὸς τμήματος τοῦ στερεοῦ ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Τοῦτο ἐπιβεβαιοῦται τελείως ὑπὸ τῆς ἐξετάσεως τῶν παραμορφώσεων, αἵτινες παρακολουθοῦσι τὸν σχηματισμὸν τῶν γραμμῶν τοῦ Hartmann.

Ὅταν ἐξετάσωμεν ἀριθμόν τινα δοκιμείων ὀρθογωνίου τομῆς μικροῦ πάχους (2×20 χιλιοστῶν τομῆς ἐπὶ παραδείγματι), δὲν εἶνε δύσκολον νὰ εὕρωμέν τινα παρουσιάζοντα γραμμὴν λίαν διακεκριμένην (σχ. 3). Παρατηροῦμεν



Σχ. 3.

τότε ὅτι τὸ δοκιμεῖον δὲν ἔχει τὸν αὐτὸν ἄξονα ἑκατέρωθεν τῆς γραμμῆς ταύτης, βεβαιουμένης ὀλισθήσεως τοῦ ἑνὸς μέρους ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Τοιαύτας ὀλισθήσεις δύναταί τις ἐπιμελέστερον ἐξετάζων νὰ παρατηρήσῃ ἐπὶ τοῦ δοκιμείου μετὰ τὴν ἐμφάνισιν τῶν γραμμῶν τοῦ Hartmann καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς μονίμου παραμορφώσεως.

Δικαιούμεθα ὅθεν νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ μόνιμος παραμόρφωσις εἶνε συνέπεια ὀλισθήσεων ἐν ἐπιπέδοις, ἅτινα ὅλα σχηματίζουσιν ἐν περιπτώσει ἐκτάσεως τὴν γωνίαν α μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς ἐκτάσεως.

Ὁμοίως εὑρίσκεται ὅτι ἐν περιπτώσει συμπιέσεως ἡ μόνιμος παραμόρφωσις εἶνε συνέπεια ὀλισθήσεων ἐν ἐπιπέδοις, ἅτινα ὅλα σχηματίζουσι τὴν γωνίαν $\frac{\pi}{2} - \alpha$ μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς συμπιέσεως, ἡ δὲ θραῦσις παράγεται διὰ συνθλίψεως καὶ ἀποχωρισμοῦ κατὰ τοιαῦτα ἐπίπεδα.

3. — *Προταθεῖσαι θεωρίαι.* — Τὰ ὑπὸ τοῦ ταγματάρχου Hartmann ἐξαγγελθέντα πειραματικὰ ἀποτελέσματα ἀφ' ἑνὸς μὲν διήγειραν ζωηρότατον ἐνδιαφέρον παρά τε τοῖς μηχανικοῖς καὶ τοῖς φυσικοῖς ἅπαντος τοῦ πεπολιτισμένου κόσμου, ἀφ' ἑτέρου δ' ἐκορύφωσαν τὴν ἀβεβαιότητα, ἣν ἐν τῇ Ἀντιστάσει τῆς Ὕλης εἶχε δημιουργήσῃ ἡ ἔλλειψις φυσικῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος τῶν στερεῶν συμφώνου πρὸς τὰ ἄχρις ὥρας γνωστὰ δεδομένα, παρὰ τὰς πολυαρίθμους ἐργασίας, αἵτινες ἐπὶ τοῦ σπουδαιοτάτου τούτου ὡς ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν του ἀντικειμένου ἐγένοντο. Ἰδιαιτέρως ἡ μεγάλη ἐπιτροπή, ἥτις συνεστήθη ἐκ περιωνύμων γάλλων Μηχανικῶν καὶ ἀνωτέρων ἀξιωματικῶν τοῦ Μηχανικοῦ καὶ τοῦ Πυροβολικοῦ

ὑπὸ τοῦ γαλλικοῦ Ὑπουργείου τῶν Δημοσίων Ἔργων πρὸς μελέτην διαφόρων τεχνικῶν ζητημάτων σχετικῶν πρὸς τὴν ὑπηρεσίαν τοῦ Ὑπουργείου τούτου, ἠσχολήθη τὰ μέγιστα περὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Hartmann, ὡς ἑξῆς δὲ συγκεφαλαιοῖ ἐν τῇ γενικῇ αὐτῆς ἐκθέσει τὰ συμπεράσματα, εἰς ἃ ἤχθη ἐν ταῖς μελέταις της ταύταις [1].

«Ἅμα τὰ ὑπὸ τοῦ κ. Hartmann ἐπιτευ-»χθέντα ἀποτελέσματα ἐγνώσθησαν εἰς τὸν ἐπι-»στημονικὸν κόσμον, διάφοροι πειραματισταὶ »ἐξ ὅλων τῶν ἐθνῶν ἀνέλαβον τὸν ἔλεγχόν »των, καθ' ὃν χρόνον οἱ θεωρητικοὶ ἐζήτησαν »τὴν ἐξήγησίν των.

»Ὁ κ. Hartmann ἐν πρώτοις παρουσίασεν »ἰδίαν θεωρίαν βασιζομένην ἐπὶ τῆς πολώσεως »τῶν μορίων τῆς ὕλης, κατόπιν δὲ σοφὸς οὑγ-»γρος καθηγητής, ὁ κ. Rejtö, διετύπωσε νέαν »θεωρίαν τῆς ἐλαστικότητος βασιζομένην ἐπὶ »τῶν παρατηρήσεων τοῦ κ. Hartmann.

»Ὁ κ. Rejtö εἰσάγει τὴν ἔννοιαν ἐσωτερι-»κῆς τριβῆς τῶν μορίων ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν »τῶν ἀναπτυσσομένων τάσεων, σύμφωνος δὲ »μετὰ τοῦ κ. Kick τῆς Βιέννης, παραδέχεται »κατ' ἀρχὴν ὅτι πᾶσα δύναμις ἐνεργοῦσα ἐν »σημείῳ τινὶ στερεοῦ σώματος μεταβιβάζει τὴν »ἐνέργειάν της εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σώματος »τούτου ὑπὸ γωνίαν ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς φύ-»σεως τοῦ σώματος καὶ καλουμένην ὑπὸ τοῦ »κ. Rejtö γωνίαν δράσεως... Ἀναχωρῶν δ' »ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης βλέπει ἐν ταῖς ὑπὸ »τοῦ κ. Hartmann παρατηρηθείσαις γραμμαῖς »τὰς γραμμὰς δράσεως ἢ τὰ ἴχνη τῆς γωνίας »δράσεως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν δοκιμείων.

»Ἀφ' ἑτέρου ὁ κ. Mesnager, μέλος τῆς »Ἐπιτροπῆς καὶ καθηγητὴς παρὰ τῇ Σχολῇ »τῶν Γεφυρῶν καὶ Ὁδῶν τῶν Παρισίων, ἐπε-»λήφθη καὶ οὗτος τοῦ ζητήματος, ἐξήνεγκε δὲ »τὴν γνώμην ὅτι... τὰ ὑπὸ τοῦ κ. Hartmann »παρατηρηθέντα ἀποτελέσματα δύνανται νὰ »εὕρωσι τὴν θεωρητικήν των ἐξήγησιν μόνον »γινομένης δεκτῆς τῆς ὑπάρξεως εἴδους δυνά-»μεως τριβῆς, ἥτις ἀναπτύσσεται ἐν τῷ ἐσω-»τερικῷ τῶν σωμάτων καὶ παρέχει συνιστῶσαν »κάθετον τῇ διευθύνσει τῆς τάσεως...».

Πρὸς τὸν κ. Mesnager δὲ σύμφωνος ἐδείχθη ἐν ταῖς μελέταις του ὁ κ. Ricour, πρόεδρος τῆς Ἐπιτροπῆς καὶ Διευθυντὴς τῆς Σχολῆς τῶν Γεφυρῶν καὶ Ὁδῶν τῶν Παρισίων.

Ἀναγινώσκων τις ἐν τούτοις τὰς μελέτας ταύτας εὐκόλως ἀντιλαμβάνεται ὅτι τὰ ἐπιτευχθέντα πορίσματα δὲν ἱκανοποιοῦν οὐδ' αὐτοὺς τοὺς συντάκτας τῶν ἐκτεθεισῶν θεωριῶν, οἵτινες ἐπὶ πλέον εἰσῆγον ἐν τῇ Ἐπιστήμῃ ὑποθέσεις οὐχὶ τελείως συμφώνους πρὸς τὰς γενικῶς παραδεδεγμένας ἀρχάς.

Καὶ ἐπεχείρησαν μέν τινες, ὡς ὁ καθηγητὴς τῆς Ἀντιστάσεως τῆς Ὕλης παρὰ τῇ Σχολῇ τῶν Γεφυρῶν καὶ Ὁδῶν τῶν Παρισίων καὶ ἡμέτερος διδάσκαλος κ. J. Resal, νὰ ἐξαγάγωσι τὰς γραμμὰς τοῦ Hartmann ἐκ τῶν περιειλιγμένων καμπύλων τῶν κυρίων μοριακῶν δράσεων ἐκτάσεως καὶ συμπιέσεως (καμπύλων καθέτων πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως) καὶ τῶν περιειλιγμένων καμπύλων τῶν μεγίστων ἐφαπτομενικῶν δράσεων (καμπύλων σχηματιζουσῶν γωνίαν 45° μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως), ἃς καμπύλας ὁ Resal ἐξήγαγεν ἐκ τῶν γενικῶν θεωρητικῶν τύπων τῆς Ἀντιστάσεως τῆς Ὕλης [2].

Ἀλλ' ἀκριβῶς οἱ τελευταῖοι σοφοὶ δὲν ἔλαβον ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ γραμμαὶ τοῦ Hartmann δὲν σχηματίζουσι γωνίαν σταθερὰν ἐν ἅπασι τοῖς στερεοῖς μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ γωνίαν μεταβλητὴν ἀπὸ σώματος εἰς σῶμα, διάφορον δὲ κατὰ τὴν ἔκτασιν τῆς κατὰ τὴν συμπίεσιν, ἤτοι ἔβησαν ἀντιθέτως πρὸς τὸ κύριον πόρισμα τῶν πειραμάτων τοῦ Hartmann.

4. — *Περὶ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Poisson.* — Ἀλλὰ καὶ ἑνὸς ἄλλου ζητήματος πολλάκις ἐν τῇ Ἐπιστήμῃ ἀνακινηθέντος, ἀλλ' οὐδέποτε μέχρι τοῦδε λυθέντος ἄφινον τὴν λύσιν μετέωρον ἅπασαι αἱ προταθεῖσαι θεωρίαι. Ἐννοοῦμεν τὸ ζήτημα τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Poisson.

Εἶνε γνωστὸν ὅτι, ὅταν στέλεχός τι ὑποβάλληται εἰς ἑλκτικὴν τάσιν, τὸ στέλεχος πλὴν τῆς ἐπιμηκύνσεως ὑφίσταται καὶ πλευρικὴν συστολήν. Τὸ φαινόμενον ὑπεβλήθη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ὑπὸ τοῦ Poisson, ὅστις εὗρεν ὅτι ἡ πλευρικὴ τῆς μονάδος τοῦ μήκους συστολὴ εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὴν κατὰ μῆκος ἔκτασιν τῆς μονάδος τοῦ μήκους καὶ ὅτι ὁ λόγος μ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν εἶνε

$$\mu = \frac{1}{4}$$

Τὰ πρῶτα πειράματα γενόμενα ὑπὸ τοῦ Cagniard Latour ἐφάνησαν ἐπαληθεύοντα τὸ συμπέρασμα τοῦτο τοῦ ὑπολογισμοῦ. Ἀλλὰ σειρὰ πειραμάτων ἐκτελεσθέντων ὑπὸ τοῦ Wertheim ἔπεισαν τοῦτον ὅτι ὁ συντελεστὴς μ εἶνε μὲν σταθερὸς εἰς ὅλα τὰ σώματα, οὐχὶ ὅμως ἴσος πρὸς $1/4$ ἀλλὰ πρὸς $1/3$.

Ὁ ἀνωτέρω συντελεστὴς τοῦ Poisson μ

1. Rapports de la commission des méthodes d'essai des matériaux de construction. Paris 1900. Tome I, σελ. 46.

2. Ἴδε J. Resal. Résistance des Matériaux. 1898, σελ. 291.

κέκτηται μεγάλην σπουδαιότητα, διότι ἡ γνῶσις αὐτοῦ εἶνε ἀπαραίτητος εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος, ἧς ἁπλοποίησις εἶνε ἡ θεωρία τῆς Ἀντιστάσεως τῆς Ὕλης. Ἕνεκα τούτου τὰ πειράματα πρὸς προσδιορισμὸν αὐτοῦ ἐπανελήφθησαν ὑπὸ πολλῶν φυσικῶν, ἐδείχθη δ' ὅτι ὁ συντελεστὴς οὗτος εἶνε σταθερὸς ἐν ἑκάστῃ οὐσίᾳ, μεταβάλλεται ὅμως ἀπὸ οὐσίας εἰς οὐσίαν καὶ λαμβάνει τιμὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{2}$.

Ἰδοὺ τινες τῶν τιμῶν, αἵτινες οὕτως εὑρέθησαν [1]:

Οὐσίαι	*μ*	*Παρατηρηταὶ*
Ὕαλος	0,2451	Amagat
»	0,25	Cornu
Χάλυψ	0,294	Kirchhoff
»	0,2686	Amagat
Χαλκὸς	0,3270	»
Μόλυβδος	0,4280	»

Τῶν τοιούτων μεταβολῶν τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Poisson οὐδεμία ἐξήγησις θετικὴ καὶ σαφὴς εἶχεν ἄχρις ὥρας δοθῇ. Ἠρκοῦντο οἱ μηχανικοὶ καὶ οἱ φυσικοὶ νὰ λέγωσιν ὅτι ἕνεκα τῆς *ἑτεροτροπίας* τῶν διαφόρων στερεῶν ὁ συντελεστὴς οὗτος, ἐνῷ ἔπρεπε νὰ παραμένῃ ὁ αὐτὸς εἰς τὰ διάφορα σώματα, μεταβάλλεται ἀπὸ σώματος εἰς σῶμα. Ἀλλὰ τῆς ἑτεροτροπίας ταύτης οὐδεὶς ὁρισμὸς σαφὴς καὶ συγκεκριμένος ποτὲ ἐδόθη, ἀμφιβάλλομεν δ' ἐὰν καὶ αὐτοὶ ἐκεῖνοι, οἵτινες τὴν ἑτεροτροπίαν ἐπεκαλοῦντο πρὸς ἐξήγησιν τῶν ἐν τῇ ἐλαστικότητι μεταξὺ τῆς θεωρίας καὶ τῶν πραγμάτων παρατηρουμένων διαφορῶν, ἠννόησάν ποτε σαφῶς τί διὰ τῆς λέξεως ταύτης ἤθελον νὰ δηλώσωσιν.

Ἀλλ', ὡς εἴπομεν, οὐδ' αἱ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πειραματικῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Hartmann συνταχθεῖσαι τελευταῖαι θεωρίαι ἔδιδον ἐξήγησίν τινα τῶν μεταβολῶν τούτων τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Poisson.

5. — *Θεωρία τοῦ συγγραφέως.* — Συμπληροῦντες ἐν Παρισίοις τὰς ἡμετέρας περὶ τὴν Μηχανικὴν σπουδὰς ἀντελήφθημεν τὸ ζωηρότατον ἐνδιαφέρον, μετὰ τοῦ ὁποίου ἐμελετῶντο εἰς τὰ διάφορα ἐπιστημονικὰ καὶ τεχνικὰ ἐκπαιδευτήρια τὰ τελευταῖα ἐπὶ τῆς ἐλαστικότητος πορίσματα, ἵνα κατορθωθῇ, ὅπως ταῦτα συναρμολογηθῶσιν εἰς θεωρίαν, ἐφ' ἧς βασιζομένη ἡ Ἀντίστασις τῆς Ὕλης ν' ἀναπληρώσῃ τὰς ἐλλείψεις, αἵτινες πολλαχόθεν καὶ ὑπὸ πολλῶν κατ' αὐτῆς μαρτυροῦνται. Ἠθελήσαμεν ἑπομένως νὰ ἐπιληφθῶμεν τῆς μελέτης τοῦ ζητήματος ἐπὶ τῇ ἐλπίδι ὅτι θὰ ἠδυνάμεθα νὰ συντελέσωμέν πως καὶ ἡμεῖς εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐπιζητουμένης λύσεως. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς τοιαύτης ἐργασίας μας ὑπῆρξεν ἀνώτερον τῶν προσδοκιῶν μας, διότι ἤχθημεν εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν ποθουμένην λύσιν.

Τὴν λύσιν ταύτην ἔδωσεν ἡμῖν τὸ σύγγραμμα τοῦ διασήμου ἄγγλου φυσικοῦ σὲρ William Thomson (λόρδου Κέλβιν) τὸ ἐπιγραφόμενον Natural Philosophy, ἐν τῇ σελίδι 279 τοῦ α' τόμου τοῦ ὁποίου εὕρομεν ὅτι ὁ Νεύτων εἶχε δείξῃ ὅτι ὑπάρχει συντελεστής τις χαρακτηρίζων τὴν ἐλαστικότητα ἑκάστου στερεοῦ, τὸν ὁποῖον ὁ Thomson καλεῖ *συντελεστὴν ἐπανορθώσεως* (coefficient of restitution). Ὁ συντελεστὴς οὗτος ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὑποθέσωμεν δύο σφαίρας ἐλευθέρας, κατεσκευασμένας ἐκ τῆς αὐτῆς στερεᾶς ὕλης, κινουμένας δ' ἀντιθέτως ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ ἑαυτῶν κέντρα. Θέλει ἐπέλθῃ στιγμή, καθ' ἣν αἱ σφαῖραι αὗται θὰ συγκρουσθῶσιν. Ἔστω T ἡ σχετικὴ ταχύτης τῶν δύο σφαιρῶν καθ' ἣν στιγμὴν ἄρχεται ἡ σύγκρουσις. Μετὰ τὸ πέρας τῆς συγκρούσεως αἱ σφαῖραι δυνάμει τῆς ἐλαστικότητός των θ' ἀπομακρυνθῶσιν ἀλλήλων ἔχουσαι ἤδη ταχύτητα σχετικὴν ἀντίθετον τῆς πρώτης. Ἔστω T' ἡ σχετικὴ τῶν σφαιρῶν ταχύτης, καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ἀπομάκρυνσις αὕτη ἀρχίζει. Ὁ Νεύτων ἔδειξεν ὅτι ὁ λόγος

$$\frac{T'}{T} = e$$

εἶνε σταθερὸς συντελεστής, μικρότερος τῆς μονάδος, διάφορος ἀπὸ μιᾶς οὐσίας εἰς ἄλλην, ἐξαρτώμενος δ' ἐκ τῆς οὐσίας, ἐξ ἧς αἱ σφαῖραι εἶνε κατεσκευασμέναι. Οὗτος εἶνε ὁ συντελεστὴς ἐπανορθώσεως.

Ἐσκέφθημεν λοιπὸν ὅτι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ τούτου καὶ τῆς γωνίας α τοῦ Hartmann καί, ἐπειδὴ τὰ μέσα ἔλειπον ἡμῖν πρὸς πειραματικὸν προσδιορισμὸν τοῦ e ἐν ἄλλαις οὐσίαις πλὴν τῆς ὑάλου καὶ τοῦ σιδήρου, δι' ἃς εὕρηται ἡ τιμή του ἐν τῷ ἀνωτέρω συγγράμματι τοῦ W. Thomson, ἀνεζητήσαμεν ἐν τῇ πλουσίᾳ ἐθνικῇ Βιβλιοθήκῃ τῆς Γαλλίας, μὴ ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ e εἶχε καταστῇ ἀντικείμενον ἐρευνῶν καὶ ἄλλων σοφῶν. Κατόπιν πολλῆς ἐργασίας, ἐξ ἧς ἀντελήφθημεν ὅτι ἡ ὕπαρξις τοῦ συντελεστοῦ τούτου σχεδὸν εἶχε λησμονηθῇ ἐν τῇ Ἐπιστήμῃ, κατωρθώσαμεν νὰ εὕρωμεν μίαν μόνην διατριβὴν ἐπὶ διδακτορίᾳ τοῦ γερμανοῦ

1. Jamin et Bouty. Cours de Physique de l'École Polytechnique. T. I, 2e fasc. 1891, σελ. 178.

Tammen[1], ὅστις ἠσχολήθη περὶ τὸ ζήτημα τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐπανορθώσεως καὶ δίδει τὴν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθεῖσαν τιμὴν διὰ τὸν χαλκὸν καὶ τὸν ψευδάργυρον. Πέραν τούτου οὐδὲν ἠδυνήθημεν νὰ εὕρωμεν, πειραματικῶς δὲ μόνον προσδιωρίσαμεν ἐν τῇ ὑάλῳ τὴν γωνίαν α τοῦ Hartmann, ἥτις εὐκόλως ἠδύνατο νὰ προσδιορισθῇ, δὲν ἐδίδετο δὲ οὔτε ἐν τῷ συγγράμματι τοῦ Duguet οὔτε ἐν τῷ τοῦ Hartmann. Τὴν γωνίαν ταύτην α προσδιωρίσαμεν κατὰ προσέγγισιν ἐκ τοῦ θραύσματος διὰ συμπιέσεως τεμαχίου ὑάλου, τὸ ὁποῖον θραῦσμα ἔδωσεν ἡμῖν ἐπιφάνειαν περίπου παράλληλον τῇ διευθύνσει τῆς συμπιέσεως. Οὕτω τὰ πειραματικὰ δεδομένα, ἐφ' ὧν ἐβασίσθημεν, εἶνε τὰ ἑξῆς:

Οὐσίαι	*Τιμαὶ τοῦ e*	*Τιμαὶ τῆς γωνίας α*
Σίδηρος	$\frac{5}{9}$ (Νεύτων)[2]	50° (Duguet)[3]
Χαλκὸς	0,6837 (Tammen)[4]	62° (Hartmann)[5]
Ψευδάργυρος	0,7010 (Tammen)	65° (Hartmann)
Ὕαλος	$\frac{15}{16}$ (Νεύτων)	85° (Γράβαρης)

Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα, ὡς εὐκόλως βλέπει τις, συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς σχέσεως

$$e = \frac{2\alpha}{\pi},$$

π ὄντος τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ὁρμηθέντες ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης καὶ χρησιμοποιοῦντες τὰς θεωρίας τῆς Φυσικῆς ἐν Ἀνακοινώσεσιν ὑποβληθείσαις εἰς τὴν γαλλικὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν καὶ δημοσιευθείσαις ἐν τοῖς πρακτικοῖς αὐτῆς[6], τὰς ὁποίας καὶ εἰς ἰδιαίτερον τεῦχος ἐξεδώσαμεν[7], ἐδείξαμεν ὅτι τῆς ἐφαρμογῆς δυνάμεως ἐπὶ στερεοῦ σώματος συνεπαγομένης ἐν τῷ στερεῷ τὴν παραγωγὴν κύματος, τὸ κῦμα τοῦτο ἕνεκα τῶν παραγομένων κρούσεων μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ στερεοῦ, κρούσεων διεπομένων ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω νόμου τοῦ Νεύτωνος, ἀποσυντίθεται εἰς κῦμα κατὰ μῆκος καὶ κῦμα κατὰ πλάτος. Καὶ τοῦ μὲν συνισταμένου κύματος ἴχνη εἶνε αἱ κάθετοι πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν τάσεων γραμμαί, τοῦ δὲ κατὰ μῆκος αἱ τὴν γωνίαν α μὲ ταύτην σχηματίζουσαι καὶ τοῦ κατὰ πλάτος αἱ τὴν γωνίαν $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ὡς συμπεράσματα συνηγάγομεν τὰ ἑξῆς δύο κυριώτερα:

α'.) Αἱ ἐν τῇ ἀκουστικῇ διὰ τῶν ἐμμέσων μεθόδων προσδιοριζόμεναι ὡς τιμαὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐν τοῖς στερεοῖς εἶνε αἱ ταχύτητες τοῦ συνισταμένου κύματος. Ἐπειδὴ δὲ πράγματι ὁ ἦχος μεταδίδεται διὰ κατὰ μῆκος κυμάνσεων, ἵνα προσδιορισθῶσιν αἱ πραγματικαὶ ταχύτητες τοῦ ἤχου, δέον ἡ ταχύτης τοῦ συνισταμένου κύματος νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ *ημα*. Τὰ μόνα πειράματα ἀμέσου μετρήσεως τοῦ ἤχου ἐν τοῖς στερεοῖς γενόμενα ὑπὸ τοῦ φυσικοῦ Biot πειραματισθέντος ἐπὶ χυτοσιδηρῶν σωλήνων πρὸ ἑκατὸν καὶ ἐπέκεινα ἐτῶν ἐδείξαμεν ὅτι δὲν ἀντιτίθενται εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο τῆς θεωρίας.

β'.) Ὁ συντελεστὴς τοῦ Poisson μ θὰ εἶχε τὴν τιμὴν $\frac{1}{4}$, ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἐπανορθώσεως $e = 1$ καὶ συνεπῶς $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Τούτου μὴ συμβαίνοντος εἶνε

$$\mu \, \eta\mu^2\alpha = \frac{1}{4}.$$

Ἰδοὺ αἱ τιμαί, ἃς λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διὰ τὸ μ:

Οὐσίαι	*Τιμαὶ τῆς α*	*μ =*
Ὕαλος	84°	0,2528
Χάλυψ	63°	0,3149
Χαλκὸς	62°	0,3207
Μόλυβδος	53°	0,3920

Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ μ συγκρινόμεναι πρὸς τὰς δι' ἀμέσων μετρήσεων εὑρεθείσας (§ 4) παρουσιάζουσιν ὅλην τὴν ἐπιθυμητὴν συμφωνίαν.

Καὶ ἐπειδὴ μὲν ἡ γωνία α περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{\pi}{4}$, ἕπεται ὅτι ὁ συντελεστὴς μ περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{2}$ (ἴδε § 4). Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸ πολὺ μεγαλείτερον μέρος τῶν εἰς τὸ πείραμα ὑπὸ τοῦ Hartmann ὑποβληθέντων μετάλλων ἡ γωνία α περιλαμβάνεται μεταξὺ 65° καὶ 61°, ἕπεται ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ Poisson ἔχει ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ τιμὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ 0,3044 καὶ 0,3268.

---

1. Tammen. Inaugural Dissertation. Leipzig, 1881.
2. Thomson and Tait. Natural Philosophy. T. I, 1879, σελ. 278.
3. Capitaine Duguet. Déformation des solides. 2e partie, 1885, σελ. 28.
4. Tammen. Inaugural Dissertation. Leipzig, 1881, σελ. 51.
5. Revue d'Artillerie. T. 45, 1894, σελ. 105.
6. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences des 5 et 12 Août 1901.
7. G. B. Gravaris, officier du Génie de l'Armée Hellénique. Sur une relation qui existe entre l'angle caractéristique de la déformation des métaux et le coefficient newtonien de restitution. Paris, 1901.

Ἐκ τούτου δ' ἐξηγεῖται τὸ λάθος, εἰς ὃ ἤχθη ὁ Wertheim παραδεχθεὶς ὅτι δι' ὅλα τὰ μέταλλα $\mu = \frac{1}{3}$.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Β. ΓΡΑΒΑΡΗΣ
ὑπολοχαγὸς τοῦ Μηχανικοῦ καὶ καθηγητὴς τῆς Ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς παρὰ τῇ Σχολῇ τῶν Εὐελπίδων.

ΣΥΜΒΟΛΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εἰσαγωγή.

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι μία τῶν θεμελιωδεστάτων ἐννοιῶν τῆς Μαθηματικῆς. Δύο κυρίως γενικὰ γεγονότα ἐμφανίζονται καὶ ἐξεγείρουσιν εἰς ἔρευναν τὸ ἡμέτερον πνεῦμα: αἱ πολλαὶ καὶ ποικίλαι μεταβολαὶ τῶν αἰσθητῶν ὄντων ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἀμοιβαία τῶν μεταβολῶν τούτων ἐξάρτησις. Ἀφορῶσι δὲ αἱ μεταβολαὶ αὗται οὐ μόνον εἰς τὸν ὑλικόν, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὸν τὸν ψυχικὸν κόσμον, ὧν ἄπειρα παραδείγματα παρέχει ἡ ἡμετέρα νόησις. Ἡ δὲ Μαθηματικὴ ἀσχολεῖται ἰδίᾳ περὶ τὴν ἔννοιαν τῶν ποσῶν ὡς ἀριθμητῶν ἢ μετρητῶν, ὡς σταθερῶν ἢ μεταβλητῶν, ὡς συνεχῶν ἢ ἀσυνεχῶν, καὶ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν ἐξαρτήσεως. Τὰ κατ' ἐξοχὴν μεταβλητὰ συνεχῆ ποσὰ εἶναι ὁ χῶρος καὶ ὁ συναφὴς αὐτῷ χρόνος. Ἐννοεῖται δ' οἴκοθεν, ὅτι μεταβλητή τις ποσότης δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων οὖσα συνάρτησις αὐτῶν. Αἱ μαθηματικαὶ συναρτήσεις εἶναι πολλαὶ καὶ ποικίλαι ὑπαγόμεναι εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας: εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς καὶ ὑπερβατικὰς συναρτήσεις. Ἡ γενικὴ σπουδὴ τῶν μαθηματικῶν συναρτήσεων συνδέεται ἀναποσπάστως πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας καὶ τῆς συγκλίσεως καθόλου πρὸς πεπερασμένον ὅριον. Τῇ δὲ σπουδῇ ταύτῃ ἐπικουρεῖ καὶ ὁ λογισμὸς τῶν ἀπειροστῶν, τὸ σπουδαιότατον τοῦτο ὄργανον τῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης, οὗ ἐποιεῖτο ἤδη χρῆσιν ὁ Ἀρχιμήδης, ὡς ἐξάγεται καταφανῶς ἔκ τινος νεωστὶ εὑρεθέντος ἔργου αὐτοῦ ἀπευθυνομένου πρὸς Ἐρατοσθένη.

Αἱ μαθηματικαὶ συναρτήσεις καθόλου καθορίζονται διὰ πολλῶν καὶ ποικίλων ἰδιωμάτων ἢ ἀνωμαλιῶν ἢ διακλαδώσεων αὐτῶν προερχομένων καὶ ἐκ τῆς ἐρεύνης ἀντιστοίχων διαφορικῶν ἐξισώσεων: στενὴ ἄρα ἡ συγγένεια τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων· πρὸς πᾶσαν ἀνάπτυξιν ταύτης ἀντιστοιχεῖ ἀνάλογος ἀνάπτυξις ἐκείνης. Ὑπὸ δὲ τὴν ἔποψιν ταύτην ἡ λέξις ὁλοκλήρωσις δὲν ἔχει τὴν αὐτήν, ἣν καὶ ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ σημασίαν. Ἐκ πρώτης δὲ ὄψεως φαίνεται, ὅτι αἱ καθαραὶ αὗται μαθηματικαὶ θεωρίαι εἶναι ὅλως ἀνεφάρμοστοι ἐν τῇ πράξει. Ἐν τούτοις ἡ σπουδὴ τῶν νέων τούτων συναρτήσεων καὶ δὴ τῶν *ἐλλειπτικῶν* εἶναι σπουδαία καὶ ὠφέλιμος οὐ μόνον ἐν τῇ καθαρᾷ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ ἐφηρμοσμένῃ Μαθηματικῇ.

Κατὰ τὴν σπουδὴν οἱουδήποτε φυσικοῦ νόμου πρόκειται ἐν γένει περὶ τοῦ καθορισμοῦ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν μεταβάλλεται ποσόν τι, ὅταν ἄλλα ποσὰ μεταβάλλωνται ὡσαύτως. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν οἱ μὲν φυσικοὶ νόμοι ἐκφράζονται διὰ φυσικῶν συναρτήσεων, ἡ δὲ ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμογὴ τῶν μεθόδων τῆς Μαθηματικῆς σκοπεῖ τὴν τροπὴν τῶν φυσικῶν τούτων συναρτήσεων εἰς μαθηματικὰς τοιαύτας. Κατορθοῖ δὲ τοῦτο ἐν γένει ἡ Μαθηματικὴ διὰ τῶν διαφόρων μεθόδων παρεμβολῆς. Τὸ δὲ θέμα τοῦτο δὲν κέκτηται εἰσέτι τὴν γενικὴν αὐτοῦ μορφήν· φαίνεται, ὅτι καὶ ἐνταῦθα ἀπαιτεῖται ἡ ἐπέκτασις τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις γίνεται ἀπόπειρα ἀποδείξεως τῶν σχέσεων τῆς θεωρίας τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τῶν ἀκεραίων καθόλου συναρτήσεων, τῶν γραμμικῶν ἐν γένει διαφορικῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν σειρῶν. Ἡ σπουδαιότης τῶν σειρῶν τούτων, αἵτινες εἰσήχθησαν εἰς τὴν Ἀνάλυσιν διὰ τῆς λύσεως προβλημάτων τῆς Μηχανικῆς καὶ μαθηματικῆς Φυσικῆς ἀνεκαλύφθη διά τινος παρατηρήσεως ὑπὸ Fourier, καθ' ἣν αἱ σειραὶ αὗται εἶναι ἱκαναὶ πρὸς παράστασιν οἱασδήποτε συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς ἐν τῷ διαστήματι $(-\pi \ldots . + \pi)$. Περὶ τῶν σειρῶν τούτων πολλὰ ὑπὸ πολλῶν ἐγράφησαν ἔργα.

α) Βαρυκεντρικὸς λογισμός.

Ὡς γνωστόν, πολλάκις ἡ Μηχανικὴ ἔρχεται ἐπίκουρος τῇ Γεωμετρίᾳ πρὸς εὕρεσιν καὶ ἀπόδειξιν πολλῶν γεωμετρικῶν ἀληθειῶν καὶ ἰδίᾳ διὰ τῆς θεωρίας τῆς εὑρέσεως τοῦ κέντρου βάρους οἱουδήποτε σώματος. Ἤδη ὁ Ἀρχιμήδης ἐφήρμοσε τὴν θεωρίαν τοῦ κέντρου βάρους ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς αὐτοῦ ἐρεύναις· εἶτα δὲ οἱ Πάππος, L'Huilier, Carnot, Möbius, Steiner κλ.