ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Γ. Π. ΒΟΥΓΙΟΥΚΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΕΤΟΣ Ι'. ΑΘΗΝΑΙ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 1909 ΑΡΙΘ. 7.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

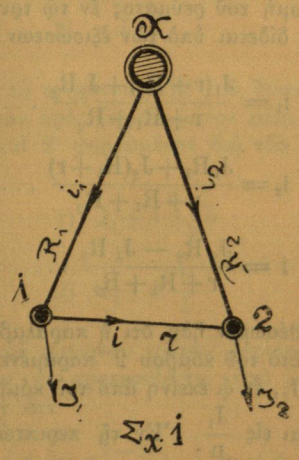
Ροηφόροι ἐξισώσεως.

Οἱ συνήθεις ὑπολογισμοὶ τῆς διατομῆς τῶν ἀγωγῶν τῶν ἠλεκτρικῶν δικτύων διανομῆς, διεξάγονται κατὰ τὸ πλεῖστον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς παραδοχῆς ὅτι, εἰς ὡρισμένα σημεῖα τούτων ἡ ἔντασις εἶναι καὶ διατηρεῖται πάντως σταθερά. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἀναγκαιοῦσαι διασκευαὶ ρυθμίσεως τῆς ἐντάσεως, οὐ μόνον περίπλοκοι ἀλλὰ καὶ δαπανηραὶ εἶναι, ἀποφεύγουσι τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῶν διὰ τῆς τοποθετήσεως ἰδιαιτέρων ἀγωγῶν, τῶν καλουμένων ροηφόρων ἐξισώσεως, ὧν σκοπὸς δύναται νὰ εἶναι ἢ ἀποκλειστικῶς ἐξίσωσις τῆς ἐντάσεως μεταξὺ διαφόρων σημείων τοῦ δικτύου π. χ. τῶν κόμβων αὐτοῦ, ἢ ταὐτοχρόνως ὁ ἄνω καὶ ἡ διανομὴ ρεύματος εἰς σημεῖα καταναλώσεως πλησίον αὐτοῦ κείμενα.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἔντασις τῆς κεντρικῆς ἐγκαταστάσεως παραγωγῆς τοῦ ρεύματος, ρυθμίζεται ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ πλησιεστέρου κόμβου, ἢ ὅπερ τὸ προτιμώτερον πρὸς τὴν μέσην ἔντασιν πλειόνων κόμβων τοῦ δικτύου.

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς διατομῆς τῶν ἀγωγῶν τούτων δύναται νὰ γίνῃ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀκολούθων ἀρχῶν.

Λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἁπλουστάτην περίπτωσιν καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι, ἀφ' ἑνὸς σημείου Κ τοῦ κέντρου τῆς παραγωγῆς τοῦ ρεύματος, τροφοδοτοῦνται δι' ἀγωγῶν ἀντιστάσεως R_1 καὶ R_2 οἱ κόμβοι 1 καὶ 2 τοῦ δικτύου (Σχ. 1).



Σχ. 1

Τὰ σημεῖα ταῦτα τοῦ δικτύου πρόκειται νὰ συνδεθῶσι δι' ἑνὸς ἀγωγοῦ 1, 2, οὕτως ὥστε ἡ μεταξὺ των διαφορὰ ἐντάσεως νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ ὅριόν τι ε.

Ζητεῖται τὸ μέγεθος τῆς ἀντιστάσεως τοῦ

ἀγωγοῦ τούτου r, οὕτως ὥστε ἐν τῇ δυσμενεστάτῃ περιπτώσει τῆς ἀπὸ τῶν κόμβων 1 καὶ 2 παραλαβῆς ρεύματος νὰ πληροῦται ἡ ἄνω συνθήκη.

Ἐκ τοῦ σχήματος 1 ἕπονται ἀμέσως αἱ ἐξισώσεις

$$i_1 = J_1 + i \qquad i_2 = J_2 - i.$$

Αἱ πτώσεις τῆς ἐντάσεως ε_1 καὶ ε_2 ἐν τοῖς ἀγωγοῖς K_1, K_2, 12 ἐκφράζονται διὰ τῶν σχέσεων

$$\varepsilon_1 = i_1 R_1 \qquad \varepsilon_2 = i_2 R_2 \qquad \varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

ἐξ οὗ καὶ

$$\varepsilon_1 = (J_1 + i)R_1 \qquad \varepsilon_2 = (J_2 - i)R_2$$
$$\varepsilon = (J_2 - i)R_2 - (J_1 + i)R_1$$

καὶ ἐπειδὴ $\varepsilon = ir$

ἕπεται

$$i = \frac{J_2R_2 - \varepsilon - J_1R_1}{R_1 + R_2} = \frac{J_2R_2 - J_1R_1}{r + R_1 + R_2} \ldots (1)$$

ἤτοι καὶ

$$r = \varepsilon \frac{R_1 + R_2}{J_2R_2 - \varepsilon - J_1R_1} \ldots \quad (2)$$

καὶ τέλος ἡ διατομή, ἂν l τὸ μῆκος καὶ ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ

$$q = \frac{l.\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{J_2R_2 - \varepsilon - J_1R_1}{R_1 + R_2} \ldots \quad (3)$$

Ἡ διανομὴ τοῦ ρεύματος ἐν τῷ τριγώνῳ τῶν ἀγωγῶν δίδεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$i_1 = \frac{J_1(r + R_2) + J_2R_2}{r + R_1 + R_2} \ldots \quad (4)$$

$$i_2 = \frac{J_1R_1 + J_2(R_1 + r)}{r + R_1 + R_2} \ldots \quad (5)$$

$$i = \frac{J_2R_2 - J_1R_1}{r + R_1 + R_2} \ldots \quad (6)$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ παραλαβὴ τοῦ ρεύματος ἀπὸ τοῦ κόμβου 2 παραμένει σταθερὰ ἰσχύος J_2, ἐν ᾧ ἐκείνη ἀπὸ τοῦ κόμβου 1 ὑποβιβάζεται εἰς $\frac{J_1}{n}$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ πρὶν ἢ ἐπέλθῃ ἀκόμη ἡ σύνδεσις διὰ τοῦ ροηφόρου ἐξισώσεως, ἡ κατὰ τὸ 2 ἔντασις θὰ παραμείνῃ σταθερὰ οἵα καὶ πρότερον, ἐν ᾧ ἐκείνη κατὰ τὸ 1 θ' αὐξήσῃ κατὰ $(J_1 - \frac{J_1}{n})R_1$· ἐπερχομένης ὅμως τῆς συνδέσεως τῶν κόμβων, ὁ ροηφόρος ἐξισώσεως λαμβάνει μέρος εἰς τὴν μεταφορὰν τοῦ ρεύματος μεταξὺ τῶν κόμβων καὶ μεταβάλλει τὰ σχετικὰ μεγέθη τῶν ἐντάσεων. Ἴδωμεν ὁποία ἡ μεταξὺ τούτων μεταβολή.

Διὰ τῶν αὐτῶν ὡς καὶ προηγουμένως σκέψεων καταλήγωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν δίδουσαν τὴν διατομὴν τοῦ ροηφόρου ἐξισώσεως τῆς ἐντάσεως

$$r = \varepsilon \cdot \frac{R_1 + R_2}{J_2R_2 - \varepsilon - \frac{J_1}{n}R_1} \ldots \quad (7)$$

$$q = \frac{l\rho}{\varepsilon} \frac{J_2 . R_2 - \varepsilon \frac{J_1}{n} . R_1}{R_1 + R_2} \ldots \quad (8)$$

ἐν ᾧ ἡ διανομὴ τοῦ ρεύματος ἐν τῷ τριγώνῳ τῶν ἀγωγῶν δίδεται ὑπὸ τῶν ἀναλόγων ἐξισώσεων

$$i_1 = \frac{\frac{J_1}{n}(r + R_2) + J_2R_2}{R_1 + R_2} \ldots \quad (9)$$

$$i_2 = \frac{\frac{J_1}{n}R_1 + J_2(R_1 + r)}{r + R_1 + R_2} \ldots \quad (10)$$

$$i = \frac{\frac{J_1}{n} . R_1 + J_2R_2}{r + R_1 + R_2} \ldots \quad (11)$$

ἡ δὲ πτῶσις τῆς ἐντάσεως ἐν τῷ ροηφόρῳ ἐξισώσεως, ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν ἐντάσεων ἐν τοῖς κόμβοις 1 καὶ 2 συναρτήσει τοῦ r δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\varepsilon = (J_2R_2 - \frac{J_1}{n}R_1)\frac{r}{R_1 + R_2 + r} \ldots (12)$$

Ἂν ἤδη ὑποτεθῇ ὅτι αἱ ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν K1, K2 αἱ R_1, R_2 ἔχουσιν ὑπολογισθῇ τοιουτοτρόπως, ὥστε ἐν πλήρει φορτίῳ τῶν κόμβων J_1, J_2 νὰ παρουσιάζωσιν ὑπὸ σταθερὰν ἔντασιν τοῦ κέντρου E τὴν αὐτὴν πτῶσιν ε_0, εἶναι τουτέστιν

$$J_1R_1 = J_2R_2 = \varepsilon_0$$

ἡ ἐξίσωσις (12) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$E = \varepsilon_0 \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{r}{R_1 + R_2 + r} \ldots (13)$$

Πρὸς περισσοτέραν σαφήνειαν τῶν ἄνω ἐκ-

τιθεμένων ἐφαρμόσωμεν ταῦτα ἐπὶ τῆς ἀκολούθου εἰδικῆς περιπτώσεως. Τεθείσθω

$J_1 = 80$ Ἀμπέρ
$J_2 = 120$ »
$E = 125$ Βόλτ
$\varepsilon_0 = 12$ »
$R_1 = 0{,}15$ Ὦμ.
$R_2 = 0{,}10$ »

Ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἡ φόρτωσις τοῦ κόμβου 1 κατέρχεται ἐν τῇ δυσμενεστάτῃ περιπτώσει εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς κανονικῆς, τουτέστιν εἰς τὰ 16 Ἀμπέρ.

Ἂν δὲν ὑπάρχῃ ροηφόρος ἐξισώσεως, τότε ἡ μὲν ἔντασις τοῦ κόμβου 1 θ' ἀνέλθῃ ἀπὸ 113 Β εἰς 122,60 Β ἐν ᾧ ἐκείνη τοῦ κόμβου 2 θὰ παραμείνῃ σταθερὰ εἰς τὰ 112 Βόλτ. Ἄνευ δηλαδὴ τοῦ ροηφόρου ἐξισώσεως ἔχομεν διαφορὰν ἐντάσεως ἐν τοῖς κόμβοις 9,60 Βόλτ.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ζητοῦμεν τὴν τοποθέτησιν ροηφόρου ἐξισώσεως, οὕτως ὥστε ἐν τῇ δυσμενεστάτῃ ταύτῃ περιπτώσει τῆς φορτώσεως τῶν κόμβων, ἡ κατὰ τούτους διαφορὰ ἐντάσεως νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰ 2,5 Βόλτ.

Ἡ ἀντίστασις τοῦ ροηφόρου τούτου ὀφείλει κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (7) νὰ εἶναι

$$r = 2{,}5\,\frac{0{,}10+0{,}15}{12-2{,}5-2{,}4} = 0{,}088\ \Omega.$$

Αἱ δὲ κατὰ τοὺς κόμβους 1 καὶ 2 ἐντάσεις θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα

$$1)\quad 125-\left[\frac{16(0{,}1+0{,}088)+120\,.\,0{,}1}{0{,}15+0{,}10+0{,}088}\right].0{,}15 = 118{,}34\ \text{B}.$$

$$2)\quad 125-\left[\frac{16\,.\,0{,}15+120(0{,}15+0{,}088)}{0{,}15+0{,}10+0{,}088}\right].0{,}1 = 115{,}84\ \text{B}.$$

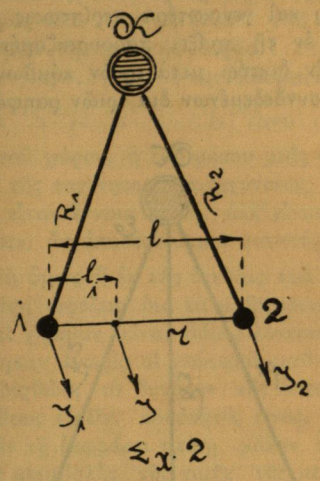
καὶ ἡ διαφορὰ τούτων

$$118{,}34-115{,}84 = 2{,}5\ \text{Βόλτ}$$

ἡ διαφορὰ αὕτη ἠδύνατο νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (13).

Ἐκ τῆς σχέσεως (12) παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ τὰ μεγέθη r καὶ ε συνδέουσα σχέσις παριστᾷ, εἰς ἄξονας συντεταγμένων ὀρθογωνίων ἀναγομένη ὑπερβολήν, (ἀφ' οὗ ἐν ἑκάστῃ εἰδικῇ περιπτώσει οἱ ὅροι $\frac{J_1}{n}R_1$, J_2R_2, R_1, R_2 εἶναι σταθεροὶ καὶ δεδομένοι) διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, καὶ ἧς αἱ ἀσύμπτωτοι παράλληλοι οὖσαι πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν r καὶ ε, ἀτέχουσι τοῦ μὲν πρώτου κατὰ $J_2R_2-\frac{J_1}{n}R_1$ τοῦ δὲ δευτέρου κατὰ $-(R_1+R_2)$.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν συχνότατα ἐν τῇ πράξει παρουσιαζομένην περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ροηφόρος ἐξισώσεως τῆς ἐντάσεως μεταξὺ δύο κόμβων, εἶναι ταυτοχρόνως καὶ καλώδιον διανομῆς τοῦ ρεύματος (Σχ. 2).



Σχ. 2

Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην, ἀφ' οὗ εἶναι δυνατὸν κατὰ γενικὸν θεώρημα τῶν ροπῶν τῶν ρευμάτων, τὸ ρεῦμα ἰσχύος J ν' ἀναλυθῇ εἰς τὰς κατὰ τοὺς κόμβους 1, 2 συνιστώσας του

$$1)\quad J\,\frac{l-l_1}{l}$$

$$2)\quad J\,\frac{l_1}{l}$$

Οὕτω τὸ τρίγωνον K12 τοῦ δικτύου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕτερον, μόνον κατὰ τοὺς κόμβους 1 καὶ 2 φορτωμένον διὰ τῶν ρευμάτων ἰσχύος

$$1)\quad J_1+J\,\frac{l-l_1}{l}$$

$$2)\quad J_2+J\,\frac{l_1}{l}$$

Ἐπὶ τοῦ τριγώνου τούτου ἰσχύουσι καθ' ὁλοκληρίαν τὰ προεκτεθέντα, ὑπὸ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι

$$\varepsilon_0 = R_1\left(J_1 + J\,\frac{l-l_1}{l}\right) = R_2\left(J_2 + J\,\frac{l_1}{l}\right)$$

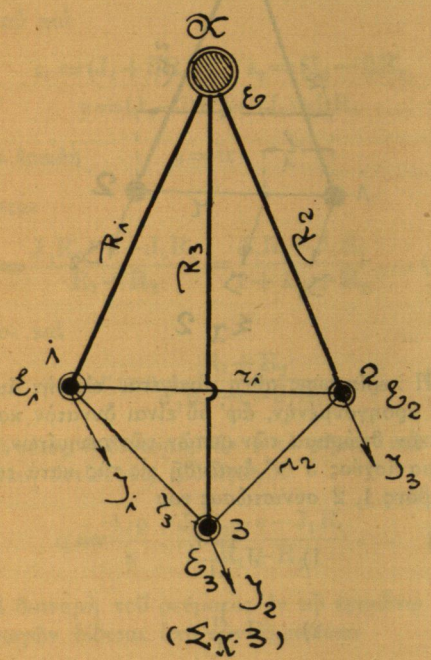
καὶ ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ροηφόρου ἐξισώσεως r διὰ τὴν $\frac{1}{n}$ πτῶσιν τῆς

φορτώσεως τοῦ κόμβου 1 θὰ γίνῃ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ρευμάτων

$$1)\quad \frac{J_1}{n} + J\frac{l-l_1}{l}$$

$$2)\quad J_2 + J\frac{l_1}{l}$$

Τρίτη καὶ γενικωτέρα περίπτωσις συχνάκις ἐπίσης ἐν τῇ πράξει παρουσιαζομένη, εἶναι ἐκείνη ἐν δικτύῳ μετὰ τριῶν κόμβων 1, 2, 3 (Σχ. 3) συνδεδεμένων διὰ τριῶν ροηφόρων ἐξι-



(Σχ. 3)

σώσεως, ἀντιστάσεων r_1, r_2, r_3. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου K πρὸς τοὺς κόμβους 1, 2, 3, ἔστωσαν R_1, R_2, R_3, ἐν ᾧ αἱ ἐντάσεις τοῦ κέντρου καὶ τῶν κόμβων E, E_1, E_2, E_3, αἱ ἀντίστοιχοι δὲ τῶν τελευταίων φορτώσεις J_1, J_2, J_3.

Ἐφαρμόζοντες ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δι' ἕκαστον τῶν κόμβων 1, 2, 3, τὸ θεώρημα τῆς Συνεχείας ἢ ἄλλως λεγόμενον θεώρημα τοῦ Kirchoff ποριζόμεθα τὰς ἀκολούθους τρεῖς ἐξισώσεις

$$\alpha\begin{cases} 1)\ \dfrac{E_1-E}{R_1}+\dfrac{E_1-E_2}{r_1}+\dfrac{E_1-E_3}{r_3}+J_1=0 \\ 2)\ \dfrac{E_2-E}{R_2}+\dfrac{E_2-E_1}{r_1}+\dfrac{E_2-E_3}{r_2}+J_2=0 \\ 3)\ \dfrac{E_3-E}{R_3}+\dfrac{E_3-E_1}{r_3}+\dfrac{E_3-E_2}{r_2}+J_3=0 \end{cases}$$

Ἂν δὲ τεθῇ χάριν ἁπλοποιήσεως τῶν πράξεων $E=0$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ φόρτωσις τοῦ ἑνὸς τῶν κόμβων 1 κατέρχεται εἰς $\frac{J_1}{n_1}$ αἱ ἄνω ἐξισώσεις λαμβάνουσι τὴν μορφὴν

$$\beta\begin{cases} 1)\ \dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_1-E_2}{r_1}+\dfrac{E_1-E_3}{r_3}=-\dfrac{J_1}{n^1} \\ 2)\ \dfrac{E_2}{R_2}+\dfrac{E_2-E_1}{r^1}+\dfrac{E_2-E_3}{r_2}=-J_2 \\ 3)\ \dfrac{E_3}{R_3}+\dfrac{E_3-E_1}{r_3}+\dfrac{E_3-E_2}{r_2}=-J_3 \end{cases}$$

ἀνάλογον δὲ τοιαύτην ἂν ἡ φόρτωσις οἱουδήποτε ἄλλου κόμβου ὑποβιβασθῇ εἰς $\frac{J_2}{n_2}$ ἢ $\frac{J_3}{n_3}$. Τὰ ἐν αὐταῖς ἄγνωστα μεγέθη εἶναι ἐν πάσῃ περιπτώσει E_1, E_2, E_3 ἀφ' ἑνός, καὶ r_1, r_2, r_3 ἀφ' ἑτέρου.

Ὁ κατ' εὐθεῖαν προσδιορισμὸς τῶν ἀντιστάσεων τῶν ροηφόρων, φανερὸν εἶναι ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸς ἐκ τοῦ ἄνω συστήματος τῶν ἐξισώσεων, καθ' ὅσον ἐν τῇ πράξει οὐ μόνον τὰ μεγέθη τῆς ἐντάσεως τῶν κόμβων E_1, E_2, E_3 εἶναι ἄγνωστα, ἀλλ' οὔτε καὶ πιθανή τις ὑπόθεσις ἐπὶ τοῦ σχετικοῦ αὐτῶν μεγέθους χωρεῖ.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δύο ὁδοὶ προτείνονται πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος: ἢ κατ' ἐκτίμησιν παραδοχὴ τῶν μεγεθῶν r_1, r_2, r_3 καὶ μετὰ ταῦτα ἐκ τῶν ἄνω ἐξισώσεων προσδιορισμὸς τῶν διαφορῶν τῶν ἐντάσεων E_1-E_2, E_1-E_3, E_2-E_3, ὑπὸ τοὺς τρεῖς ὑποβιβασμοὺς τῆς φορτώσεως τῶν κόμβων $\frac{J_1}{n_1}$, $\frac{J_2}{n_2}$, $\frac{J_3}{n_3}$, ἢ ἡ ἐκ τῆς πείρας ὡς ὀρθὴ ἐνδεικνυμένη ἀκόλουθος παραδοχή, ἡ ἄγουσα εἰς ὑποβιβασμὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων καὶ τὴν προσθήκην μιᾶς ἔτι πρὸς ταῖς ἄνω ἐξισώσεως.

Αἱ ἐντάσεις τῶν κόμβων πρέπει ὑπὸ τὴν κανονικὴν αὐτῶν φόρτωσιν νὰ τηροῦσι τὴν συνθήκην

$$(E_1-E_2)_{\text{μεγ.}} = (E_1-E_3)_{\text{μεγ.}} = (E_2-E_3)_{\text{μεγ.}} = \varepsilon$$

Ἂν ἤδη ἡ φόρτωσις τοῦ κόμβου 1 ὑποβιβασθῇ εἰς $\frac{J_1}{n_1}$, τότε αἱ μὲν διαφοραὶ (E_1-E_2) καὶ (E_1-E_3) λαμβάνουσι τὴν μεγίστην των ἐπιτρεπομένην τιμὴν ε, ἐν ᾧ ἡ (E_2-E_3) ἐλαχίστην τινα, συχνότατα δὲ τοιαύτην μηδέν. Διὰ

τῆς παραδοχῆς ταύτης τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων β λαμβάνει τὴν μορφὴν γ

$$\gamma \begin{cases} \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{\varepsilon}{r_1} + \dfrac{\varepsilon}{r_3} = -\dfrac{J_1}{n_1} \\ \dfrac{E_2}{R_2} - \dfrac{\varepsilon}{r_1} = -J_2 \\ \dfrac{E_3}{R_3} - \dfrac{\varepsilon}{r_3} = -J_3 \end{cases}$$

$$E_1 - E_2 = \varepsilon$$

Ἐξ αὐτοῦ εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀντιστάσεων r_1, r_3, καθὼς καὶ τῶν ἐντάσεων E_1, E_2. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν ὑπολογισμὸν ὑποβιβάζοντες τὴν φόρτωσιν τοῦ κόμβου 2 εἰς $\frac{J_2}{n_2}$ καὶ διατηροῦντες τὴν φόρτωσιν τῶν ἄλλων εἰς J_1, J_3 ποριζόμεθα δευτέραν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως r_1 καὶ τὴν ἀντίστασιν r_2. Ἐφαρμόζοντες τὰ αὐτὰ ἐπὶ τοῦ κόμβου 3 οὗ ἡ φόρτωσις ὑποβιβάζεται εἰς $\frac{J_3}{n_3}$ ποριζόμεθα τὰς ἀντιστάσεις r_2, r_3.

Ἐκ τῶν δύο ἤδη τιμῶν ἑκάστης τῶν ἀντιστάσεων r_1, r_2, r_3 διατηροῦμεν ὡς ὁριστικὴν τὴν μικροτέραν.

Γ. ΣΑΡΡΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΟ ΑΠΕΙΡΟΝ

ΥΠΟ

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΕΠΟΨΙΝ

Ἐξετάζοντες ἀντικείμενόν τι ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἔκτασίν του ἢ τοπικῶς, πρὸς τὴν διάρκειάν του ἢ χρονικῶς καὶ πρὸς τὴν ἐνέργειάν του ἢ δυναμικῶς, ἐὰν μὲν αἱ ἐκ τῆς ἐξετάσεως ταύτης ἐν ἡμῖν διαμορφούμεναι ἀναπαραστάσεις τοῦ ἀντικειμένου τούτου παρουσιάζωνται εἰς τὴν ἡμετέραν ἀντίληψιν ὡς ὑποκείμεναι εἰς περιορισμὸν καὶ ἑπομένως ἄμεσοι, ἐναργεῖς καὶ τελείως ὀξεῖαι, τότε τὸ ἀντικείμενον καλοῦμεν πεπερασμένον· ἄλλως, ἐὰν αἱ ἀναπαραστάσεις αὗται δὲν δύνανται νὰ συνενωθῶσιν εἰς ἕν τι ὅλον καὶ νὰ συλληφθῶσι τελείως ἐν τῇ ἡμετέρᾳ διανοίᾳ, τότε τὸ ἀντικείμενον καλοῦμεν ἄπειρον. Οὕτω λοιπὸν κατὰ τὸν ἀρχαῖον τοῦτον φιλοσοφικὸν ὁρισμὸν τοῦ πεπερασμένου καὶ τοῦ ἀπείρου, τὸ μὲν πρῶτον παρίσταται ὡς ἀρχικὴ ἔννοια, τὸ δὲ δεύτερον ὡς παράγωγος ταύτης. Τὸ νοητὸν ὅμως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου καὶ ἔτι μᾶλλον ἡ πραγματικὴ ὕπαρξις οἱασδήποτε ἀπείρου ποσότητος ἠμφισβητήθη πάντοτε ὑπό τε τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν νεωτέρων φιλοσόφων καὶ τοῦτο εὐλόγως διότι ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου ὡς καὶ ἅπασαι αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς γεωμετρίας, μηχανικῆς, φυσικῆς, χημείας κλπ. οἷον ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς $1:2:3:4:5:\ldots:\nu:(\nu+1):\ldots:\infty$ ἡ τῆς κλασματικῆς τοιαύτης $1/2:1/3:1/4:1/5:\ldots:1/\nu:1/(\nu+1):\ldots:\frac{1}{\infty}$ ἡ τοῦ κενοῦ χώρου, ἡ τοῦ μέσου μιᾶς ἀποστάσεως, ἡ τῆς ταχύτητος, ἐπιταχύνσεως, ἀτόμου κλπ. δὲν εἶναι ἔννοια ἁπλῆ, ἀλλ' εἶναι ἔννοια «μεθόριος», ὡς ἀποδεικνύομεν κατωτέρω.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐκ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου συναγομένη ὠφέλεια διὰ τὰ μαθηματικά, φυσικὴν καὶ χημείαν εἶναι ἀδιαφιλονείκητος, ἠναγκάσθησαν ἑνωρὶς οἱ νεώτεροι μαθηματικοὶ νὰ παραδεχθῶσι τὸ δυνατὸν τῆς ἀπειροποιήσεως, οὕτως εἰπεῖν, ποσότητός τινος, διαβλέποντες ἐν τῇ ἐκφράσει ταύτῃ μόνον τὸν τρόπον τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τῆς ποσότητος ταύτης, καθ' ὃν δηλαδὴ ἡ μεταβλητὴ ποσότης δύναται νὰ προσλάβῃ τιμὴν μείζονα πάσης ἄλλης δεδομένης (ὅσον δήποτε μεγάλη καὶ ἐὰν ὑποτεθῇ αὕτη) ὁπότε καὶ λέγομεν ὅτι τείνει νὰ γίνῃ ἀπείρως μεγάλη ἢ νὰ προσλάβῃ τιμὴν πλησιάζουσαν τῷ μηδενὶ περισσότερον πάσης ἄλλης δεδομένης (ὅσον δήποτε μικρὰ καὶ ἐὰν τυγχάνῃ αὕτη) ὁπότε καὶ λέγομεν ὅτι τείνει νὰ γίνῃ ἀπείρως μικρά. Οὕτω εἰς τὰ μαθηματικὰ μέχρι πρὸ ὀλίγων εἰσέτι ἐτῶν δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ λόγος περὶ ποσοτήτων πράγματι ἀπείρων, μεγάλων ἢ μικρῶν, ἀλλὰ μόνον περὶ ποσοτήτων τεινουσῶν πρὸς τὸ ∞, εἴτε μέγα εἴτε μικρόν. Κατόπιν ὅμως τῶν ἐργασιῶν τοῦ μαθηματικοῦ G. Cantor, πρώτου εἰσαγαγόντος τὸ καλούμενον «πλάτος» τῶν ποσοτήτων (ὅρα Journal τοῦ Crelle-Borchardt τόμος 84, acta mathematica τοῦ G. Cantor 1883, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre Λειψία 1883, τὰ «παράδοξα τοῦ ἀπείρου» τοῦ Bolzano § 10, 13, 14 καὶ τοῦ Dedekind «Was sind und was sollen die Zahlen? 1888) εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ παραδεχθῶμεν τὴν ὕπαρξιν καὶ ποσοτήτων πραγματικῶς ἀπείρων· τούτου δ' ἕνεκα γίγνεται σήμερον διάκρισις δύο εἰδῶν ἀπείρου 1ον τοῦ ∞ ἐν τῷ γίγνεσθαι ἤτοι τοῦ «δυναμικοῦ» ἢ βραδυτελοῦς καλουμένου (infinitum potentia) καὶ 2ον τοῦ ∞ ἐν τῷ εἶναι ἤτοι τοῦ «ἀμέσου» ἢ ταχυτελοῦς καλουμένου (infinitum