τῆς παραδοχῆς ταύτης τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων β λαμβάνει τὴν μορφὴν γ

$$\gamma \begin{cases} \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{\varepsilon}{r_1} + \dfrac{\varepsilon}{r_3} = -\dfrac{J_1}{n_1} \\ \dfrac{E_2}{R_2} - \dfrac{\varepsilon}{r_1} = -J_2 \\ \dfrac{E_3}{R_3} - \dfrac{\varepsilon}{r_3} = -J_3 \end{cases}$$

$$E_1 - E_2 = \varepsilon$$

Ἐξ αὐτοῦ εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀντιστάσεων r_1, r_3, καθὼς καὶ τῶν ἐντάσεων E_1, E_2. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν ὑπολογισμὸν ὑποβιβάζοντες τὴν φόρτωσιν τοῦ κόμβου 2 εἰς $\frac{J_2}{n_2}$ καὶ διατηροῦντες τὴν φόρτωσιν τῶν ἄλλων εἰς J_1, J_3 ποριζόμεθα δευτέραν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως r_1 καὶ τὴν ἀντίστασιν r_2. Ἐφαρμόζοντες τὰ αὐτὰ ἐπὶ τοῦ κόμβου 3 οὗ ἡ φόρτωσις ὑποβιβάζεται εἰς $\frac{J_3}{n_3}$ ποριζόμεθα τὰς ἀντιστάσεις r_2, r_3.

Ἐκ τῶν δύο ἤδη τιμῶν ἑκάστης τῶν ἀντιστάσεων r_1, r_2, r_3 διατηροῦμεν ὡς ὁριστικὴν τὴν μικροτέραν.

Γ. ΣΑΡΡΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΟ ΑΠΕΙΡΟΝ

ΥΠΟ

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΕΠΟΨΙΝ

Ἐξετάζοντες ἀντικείμενόν τι ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἔκτασίν του ἢ τοπικῶς, πρὸς τὴν διάρκειάν του ἢ χρονικῶς καὶ πρὸς τὴν ἐνέργειάν του ἢ δυναμικῶς, ἐὰν μὲν αἱ ἐκ τῆς ἐξετάσεως ταύτης ἐν ἡμῖν διαμορφούμεναι ἀναπαραστάσεις τοῦ ἀντικειμένου τούτου παρουσιάζωνται εἰς τὴν ἡμετέραν ἀντίληψιν ὡς ὑποκείμεναι εἰς περιορισμὸν καὶ ἑπομένως ἄμεσοι, ἐναργεῖς καὶ τελείως ὀξεῖαι, τότε τὸ ἀντικείμενον καλοῦμεν πεπερασμένον· ἄλλως, ἐὰν αἱ ἀναπαραστάσεις αὗται δὲν δύνανται νὰ συνενωθῶσιν εἰς ἕν τι ὅλον καὶ νὰ συλληφθῶσι τελείως ἐν τῇ ἡμετέρᾳ διανοίᾳ, τότε τὸ ἀντικείμενον καλοῦμεν ἄπειρον. Οὕτω λοιπὸν κατὰ τὸν ἀρχαῖον τοῦτον φιλοσοφικὸν ὁρισμὸν τοῦ πεπερασμένου καὶ τοῦ ἀπείρου, τὸ μὲν πρῶτον παρίσταται ὡς ἀρχικὴ ἔννοια, τὸ δὲ δεύτερον ὡς παράγωγος ταύτης. Τὸ νοητὸν ὅμως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου καὶ ἔτι μᾶλλον ἡ πραγματικὴ ὕπαρξις οἱασδήποτε ἀπείρου ποσότητος ἠμφισβητήθη πάντοτε ὑπό τε τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν νεωτέρων φιλοσόφων καὶ τοῦτο εὐλόγως διότι ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου ὡς καὶ ἅπασαι αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς γεωμετρίας, μηχανικῆς, φυσικῆς, χημείας κλπ. οἷον ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς $1:2:3:4:5:\ldots:\nu:(\nu+1):\ldots:\infty$ ἡ τῆς κλασματικῆς τοιαύτης $1/2:1/3:1/4:1/5:\ldots:1/\nu:1/(\nu+1):\ldots:\frac{1}{\infty}$ ἡ τοῦ κενοῦ χώρου, ἡ τοῦ μέσου μιᾶς ἀποστάσεως, ἡ τῆς ταχύτητος, ἐπιταχύνσεως, ἀτόμου κλπ. δὲν εἶναι ἔννοια ἁπλῆ, ἀλλ' εἶναι ἔννοια «μεθόριος», ὡς ἀποδεικνύομεν κατωτέρω.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐκ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου συναγομένη ὠφέλεια διὰ τὰ μαθηματικά, φυσικὴν καὶ χημείαν εἶναι ἀδιαφιλονείκητος, ἠναγκάσθησαν ἑνωρὶς οἱ νεώτεροι μαθηματικοὶ νὰ παραδεχθῶσι τὸ δυνατὸν τῆς ἀπειροποιήσεως, οὕτως εἰπεῖν, ποσότητός τινος, διαβλέποντες ἐν τῇ ἐκφράσει ταύτῃ μόνον τὸν τρόπον τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τῆς ποσότητος ταύτης, καθ' ὃν δηλαδὴ ἡ μεταβλητὴ ποσότης δύναται νὰ προσλάβῃ τιμὴν μείζονα πάσης ἄλλης δεδομένης (ὅσον δήποτε μεγάλη καὶ ἐὰν ὑποτεθῇ αὕτη) ὁπότε καὶ λέγομεν ὅτι τείνει νὰ γίνῃ ἀπείρως μεγάλη ἢ νὰ προσλάβῃ τιμὴν πλησιάζουσαν τῷ μηδενὶ περισσότερον πάσης ἄλλης δεδομένης (ὅσον δήποτε μικρὰ καὶ ἐὰν τυγχάνῃ αὕτη) ὁπότε καὶ λέγομεν ὅτι τείνει νὰ γίνῃ ἀπείρως μικρά. Οὕτω εἰς τὰ μαθηματικὰ μέχρι πρὸ ὀλίγων εἰσέτι ἐτῶν δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ λόγος περὶ ποσοτήτων πράγματι ἀπείρων, μεγάλων ἢ μικρῶν, ἀλλὰ μόνον περὶ ποσοτήτων τεινουσῶν πρὸς τὸ ∞, εἴτε μέγα εἴτε μικρόν. Κατόπιν ὅμως τῶν ἐργασιῶν τοῦ μαθηματικοῦ G. Cantor, πρώτου εἰσαγαγόντος τὸ καλούμενον «πλάτος» τῶν ποσοτήτων (ὅρα Journal τοῦ Crelle-Borchardt τόμος 84, acta mathematica τοῦ G. Cantor 1883, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre Λειψία 1883, τὰ «παράδοξα τοῦ ἀπείρου» τοῦ Bolzano § 10, 13, 14 καὶ τοῦ Dedekind «Was sind und was sollen die Zahlen? 1888) εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ παραδεχθῶμεν τὴν ὕπαρξιν καὶ ποσοτήτων πραγματικῶς ἀπείρων· τούτου δ' ἕνεκα γίγνεται σήμερον διάκρισις δύο εἰδῶν ἀπείρου 1ον τοῦ ∞ ἐν τῷ γίγνεσθαι ἤτοι τοῦ «δυναμικοῦ» ἢ βραδυτελοῦς καλουμένου (infinitum potentia) καὶ 2ον τοῦ ∞ ἐν τῷ εἶναι ἤτοι τοῦ «ἀμέσου» ἢ ταχυτελοῦς καλουμένου (infinitum

actu). Διὰ τῆς παραδοχῆς δὲ τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ ∞, τοῦ ἀμέσου δηλαδή, ἀνεσκευάσθη τελείως πλέον καὶ ὁ ἀρχαῖος ἰσχυρισμὸς ὅτι «ἡ ἄπειρος ποσότης δὲν δύναται ποτὲ νὰ συνενωθῇ εἰς ἕν τι ὅλον καὶ νὰ συλληφθῇ ἐν τῇ διανοίᾳ», καθόσον διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ «πλάτους» τῶν ποσοτήτων ἡ μαθηματικὴ ἀντίληψις τοῦ ∞ κατέστη ἔννοια ἐντελῶς πλέον καθωρισμένη, καίτοι εἶναι πάντοτε ἔμμεσος· ἄλλως τε τὸ ∞ ἐν τῷ γίγνεσθαι, ἵνα γίνῃ πραγματικῶς ∞ πάντοτε προϋποθέτει ἓν ∞ ἐν τῷ εἶναι καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίληψις ἀπείρου τινὸς ποσότητος, συνηνωμένης εἰς ἕν τι ὅλον, δὲν εἶναι δύσκολος, καθόσον πολὺ ὀλίγη ἀνάγκη ὑπάρχει ἵνα ἡ ἀναπαράστασις τοῦ ὅλου μιᾶς ἐννοίας (ποσότητος) διέλθῃ διὰ τῆς τῶν μερῶν του, ὅπως λ. χ. ὅταν σκέπτεταί τις τὸν πληθυσμὸν μιᾶς πόλεως δὲν ἔχει ποσῶς ἀνάγκην νὰ ἀναπαραστήσῃ καθ' ἑαυτὸν καὶ ἕνα ἕκαστον τῶν κατοίκων αὐτῆς.

Ἀλλὰ τί ἐστὶ «πλάτος» καὶ τί «μεθόριος ἔννοια» μιᾶς ποσότητος; Ἐφ' ὅσον μὲν ἐπρόκειτο περὶ ποσοτήτων πεπερασμένων, ἐκφραζομένων δηλαδὴ διὰ συγκεκριμένων καὶ ἀμεταβλήτων ἀριθμῶν, οὐδεμία ὑπῆρχεν ἀνάγκη νὰ προβῇ τις εἰς χωρισμὸν τῶν δύο ἐννοιῶν, τῆς ποσότητος δηλαδὴ καὶ τῆς τοῦ ἐκφράζοντος αὐτὴν ἀριθμοῦ, καθόσον αἱ δύο αὗται ἔννοιαι εἰσὶν συμφυεῖς, ἀχώριστοι τρόπον τινά, καὶ μεταβάλλονται ἀμφότεραι συγχρόνως καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον οὕτως ὥστε λ. χ. δύο ποσότητες ἴσαι νὰ ἐκφράζωνται *πάντοτε* διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, μία ποσότης μείζων ἑτέρας, νὰ ἐκφράζηται *πάντοτε* δι' ἀριθμοῦ μείζονος· προκειμένου ὅμως περὶ τοιούτων ποσοτήτων αἵτινες δύνανται νὰ προσλάβωσιν ἄπειρον τιμήν, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ τὰς ἐκφράσωμεν καὶ διὰ ἀριθμοῦ ἀπείρου, ἔδει συνεπῶς νὰ ἐξευρεθῇ ἕτερόν τι ἀριθμοειδὲς γνώρισμα, ὅπερ νὰ ἰδιάζῃ ἀποκλειστικῶς αὐταῖς, ἀνεξαρτήτως δηλονότι τοῦ ἀριθμῶντος ὑποκειμένου καὶ ὅπερ νὰ μείνῃ ἀναλλοίωτον καὶ μετὰ τὴν ἀπειροποίησιν τῆς ποσότητος. Τὸ γνώρισμα δὲ τοῦτο ἀκριβῶς καλοῦμεν «πλάτος» τῆς ποσότητος. Ἐπὶ παραδείγματι: ἂς λάβωμεν δύο ποσότητας ἤτοι ἀφ' ἑνὸς ἓν τάγμα ἐκ χιλίων στρατιωτῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ ὅπλα αὐτῶν, χίλια τὸν ἀριθμόν· αἱ δύο αὗται ποσότητες ἔχουσι τὸ αὐτὸ «πλάτος» — διὸ καὶ καλοῦμεν αὐτὰς «ἰσοδυνάμους» — οὐχὶ διότι δύνανται ἀμφότεραι νὰ ἐκφρασθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ χίλια, ἀλλὰ διότι, ἐπειδὴ προϋποτίθεται ὅτι εἰς ἕνα ἕκαστον στρατιώτην ἀποκλειστικῶς ἀνήκει καὶ ἓν ὡρισμένον ὅπλον, αἱ δύο αὗται ποσότητες δύνανται νὰ ἀντιπαραταχθῶσιν ἐξ ὁλοκλήρου πρὸς ἀλλήλας μέλος πρὸς μέλος καὶ κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Ἐκ τῆς θέσεως ταύτης ἕπεται ὅτι μεταξὺ δύο ποσοτήτων διαφόρου πλάτους, ἐκείνη ἡ ποσότης ἔχει τὸ μικρότερον ἥτις ἔχει τὸ αὐτὸ πλάτος μὲ ἓν μέρος μόνον τῆς ἄλλης.

Ἂς λάβωμεν ἤδη τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν:

$$1:2:3:4:5:\ldots:\nu:(\nu+1):\ldots:\infty$$

καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος W τὸν ἄπειρον ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης ἤτοι ἐν ἄλλαις λέξεσι τὸ «πλάτος» τῆς ποσότητος ταύτης. Ἐπειδὴ εἰς ἕνα ἕκαστον τῆς σειρᾶς ταύτης, δυνάμεθα νὰ ἀντιπαρατάξωμεν καὶ ἕνα ἄρτιον ἀριθμὸν τῆς σειρᾶς:

$$2:4:6:8:10:\ldots:2\nu:2(\nu+1):\ldots:\infty$$

εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ τὸ σύνολον τῶν ὅρων τῆς δευτέρας ταύτης σειρᾶς, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, οἵτινες ἀπαρτίζουσι μέρος μόνον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλάτος W ὅπερ καὶ ἡ πρώτη σειρά. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ πράξωμεν καὶ μὲ ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς τῶν περιττῶν ἀριθμῶν:

$$1:3:5:7:9:\ldots:(2\nu+1):(2\nu+3):\ldots:\infty$$

καὶ θὰ ἴδωμεν ὅτι καὶ τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, ὅπερ ἀπαρτίζει τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἔχει τὸ αὐτὸ πλάτος W μὲ τὴν πρώτην σειράν. Συνεπῶς ἐὰν φαντασθῶμεν ἤδη ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς $1, 2, 3, 4, 5\ldots\nu, (\nu+1)\ldots\infty$ οὕτω πως διατεταγμένους ὥστε κατὰ πρῶτον νὰ ἔρχωνται ὅλοι οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ $1, 3, 5, 7, 9\ldots(2\nu+1), (2\nu+3)\ldots\infty$ καὶ μετ' αὐτοὺς νὰ ἔρχωνται ὅλοι οἱ ἄρτιοι $2, 4, 6, 8, 10\ldots 2\nu, 2(\nu+1)\ldots\infty$ εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην δὲν θὰ εἶναι πλέον W, ὡς ἀρχικῶς ὑπεθέσαμεν, ἀλλὰ $W+W$ ἤτοι $2W$. Τὸ πλάτος W καθ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις μένει ἀναλλοίωτον καθόσον, ὡς εἴδομεν, ἡ ποσότης τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ ἀντιπαραταχθῇ μέλος πρὸς μέλος πρὸς μίαν καὶ μόνην σειρὰν ἑκάστοτε, εἰς ἣν ὑπάρχει ὡρισμένος ἀρχικὸς ὅρος, τούτῳ ἕπεται ὡρισμένος δεύτερος ὅρος καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐν ᾧ τελικὸς ὅρος δὲν ὑφίσταται. Ἀλλ' ἡ τοιαύτη μέλος πρὸς μέλος καὶ κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἀντιπαράθεσις δύο ποσοτήτων, ὧν ἡ μὲν ἀποτελεῖ μέρος μόνον τῆς δέ, δὲν εἶναι δυνατὴ προκειμένου περὶ ποσοτήτων πεπερασμένων, ἀλλὰ μόνον περὶ ποσοτήτων ἀπείρων, δι' ἃς αἱ σχέσεις μέρος — ὅλον, καὶ μικρότερον — μεγαλείτερον

δὲν ὑφίστανται. Οὕτω δὲ μόνον ἐκείνη ἡ ποσότης καλεῖται ἄπειρος, ἥτις δύναται νὰ ἀντιπαραταχθῇ ἀμοιβαίως μέλος πρὸς μέλος καὶ κατὰ μίαν καὶ μόνην ἔννοιαν πρὸς ἓν ἐκ τῶν μερῶν της. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ὅθεν τοῦ «πλάτους» τῶν ποσοτήτων, καταλήγομεν εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν τὸ ∞ ὡς ἀρχικὴν ἔννοιαν καὶ τὸ πεπερασμένον ὡς τὴν παράγωγον ταύτης, ἀντιθέτως δηλαδὴ τοῦ συλλογισμοῦ ὃν διετυπώσαμεν ἀνωτέρω καὶ ἑπομένως εἰσερχόμεθα πλησίστιοι πλέον εἰς τὸ ἔδαφος τῆς «μὴ εὐκλειδίου» γεωμετρίας, τῆς ἱδρυθείσης ὑπὸ τοῦ Gauss (1792) καὶ συμπληρωθείσης διὰ τῶν ἐργασιῶν τῶν Labatschewcki (1826) καὶ Beltrami (1868). Ὡς γνωστὸν ἡ γεωμετρία αὕτη ἐπιτρέπει ὑποθέσεις ἐπὶ τοῦ διαστήματος (κενοῦ χώρου) ὅλως διαφόρους τῆς ἀντιλήψεως ἡμῶν, οἷον ὅτι τὸ διάστημα εἶναι πεπερασμένον (καὶ ἵνα ὡς συνήθως ἐκλαμβάνηται ἄπειρον), ὅτι εἶναι πλέον ἢ τρισδιάστατον, ὅτι τὸ μέτρον τῆς καμπυλότητος αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικόν, ὅτι τὸ παράλληλον δύο γραμμῶν εἶναι μὲν πραγματικότης τῆς ἀντιλήψεως ἡμῶν, ἀλλ' οὐδεμία διανοητικὴ ἀνάγκη, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεῖζον τῶν δύο ὀρθῶν, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις μιᾶς εὐθείας, δὲν εἶναι καὶ αὐτὸς εὐθεῖα γραμμή, ἀλλ' ἀποτελεῖ μίαν γραμμὴν μετακινητὴν ἐν ἑαυτῇ, τὴν καλουμένην γραμμὴν ἀποστάσεως, καὶ τέλος ὅτι τὰ μέρη μιᾶς λωρίδος δηλαδὴ τμήματος τοῦ ἐπιπέδου, περιεχομένου μεταξὺ δύο παραλλήλων γραμμῶν, εἶναι ἴσα (χωριστὰ ἓν ἕκαστον) πρὸς τὴν ὅλην λωρίδα.

Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὸ αὐτὸ πλάτος μὲ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν $1/2 : 1/3 : 1/4 : 1/5 : \ldots : 1/\nu : 1/(\nu+1) : \ldots : 1/\infty$ ὡς καὶ μὲ τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν (ἀρνητικῶν) ἀριθμῶν, διότι ἀμφότεραι αἱ κατηγορίαι αὗται δύνανται νὰ ἀντιπαραταχθῶσι πρὸς τὰ μέρη των εἰς δύο σειράς, μέλος πρὸς μέλος, ὡς ἐγένετο ἀνωτέρω διὰ τοὺς ἀκεραίους φυσικοὺς ἀριθμούς. Ἑπομένως τὸ πλάτος τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται διὰ τῆς προσθήκης τῶν κλασματικῶν ἢ ἀρνητικῶν τοιούτων· διὸ καὶ αἱ τοιαῦται ποσότητες θεωροῦνται ποσότητες «πρώτου» πλάτους. Διὰ τῆς προσθήκης ὅμως τῶν ἀσυμμέτρων (ἀλόγων κατὰ Πυθαγόραν) ἀριθμῶν μεταβάλλεται τὸ πλάτος, καθόσον αἱ ποσότητες δὲν δύνανται πλέον νὰ ἀντιπαραταχθῶσι, καθ' ὡρισμένας, ὡς ἄνω, σειράς. Ἤδη τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τοῦ μηδενὸς καὶ τῆς θετικῆς μονάδος εἶναι ποσότης «δευτέρου» πλάτους, ἐν ᾧ ὡρισμέναι ποσότητες «τρίτου» πλάτους δὲν ἀνεκαλύφθησαν εἰσέτι.

Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τοῦ πλάτους τῶν ποσοτήτων· ἤδη δὲ ἃς διαλάβωμεν τινὰ καὶ περὶ τοῦ ἀνωτέρω μνημονευθέντος ὅρου τῆς «μεθορίου» ἐννοίας. Ὁ ἄνθρωπος ἔχει τὴν ἕξιν ἀναπαραστάσεως ἐννοίας ἢ ἀντικειμένου τινός, αἵτινες κέκτηνται τὸ αὐτὸ γνώρισμα, ἀλλ' εἰς διαφόρους διαβαθμίσεις, νὰ διατάττῃ ταύτας κατὰ μίαν σειρὰν καὶ χάρις εἰς ἔμμονόν τινα ψυχικὴν δύναμιν, ἀποτελοῦσαν τὴν βάσιν πάσης πείρας αὐτοῦ, νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν σειρὰν ταύτην μέχρις ὁρίου τινός, τερματίζων, οὕτως εἰπεῖν, αὐτὴν κατὰ τὴν βαθμιαίαν πρόοδον τῆς σκέψεώς του. Συχνάκις ὅμως αἱ ἐκ τοῦ χρόνου, τόπου καὶ ἀριθμοῦ προκύπτουσαι ἀναπαραστάσεις σχηματίζουσιν ἐν ἡμῖν σειρὰν ἀτέρμονα ὡς λ. χ. ἡ ἀπειρία τῶν ἀπειροελαχίστων χρονικῶν στιγμῶν, αἵτινες μεσολαβοῦσι μεταξὺ τῆς ἐκκινήσεως σώματός τινος, κινουμένου ἐπὶ εὐθείας τινος γραμμῆς καὶ ὄπισθεν ἑτέρου σώματος, προπορευομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς καὶ μετὰ μικροτέρας ταχύτητος, καὶ τῆς συναντήσεως ἀμφοτέρων τῶν σωμάτων, ἡ ἀπειρία τῶν μειώσεων, ἃς ὑφίσταται ἡ ὁλονὲν μειουμένη ἀπόστασις τῶν δύο τούτων σωμάτων, ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 . . . ∞, ἡ τῶν κλασματικῶν τοιούτων $1/2, 1/3, 1/4 \ldots 1/\infty$· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ τέρμα σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ἡμετέρας ἀντιλήψεως διὰ τῆς προσθήκης μιᾶς ὅλης νέας παραστάσεως ἤτοι τοῦ «ὁρίου» τῆς σχετικῆς σειρᾶς, ὅπερ δέον νὰ διακρίνωμεν ἀπὸ τοὺς διαφόρους ὅρους τῆς σειρᾶς, καθόσον τοῦτο προστίθεται ὑπὸ τῆς διανοητικῆς ἡμῶν δυνάμεως εἰς τὸ σύνολον τῆς σειρᾶς, ὥς τι νέον. Τὴν τοιαύτην δ' ἔννοιαν ἀκριβῶς, ἥτις σχηματίζεται ἐν ἡμῖν διὰ τῆς διαβάσεως, οὕτως εἰπεῖν, διὰ τοῦ ὁρίου τῆς σειρᾶς καλοῦμεν «μεθόριον ἔννοιαν». Ἡ νέα αὕτη ἀναπαράστασις ἤτοι τὸ «ὅριον» δὲν εἶναι ποσῶς ἀνεξάρτητος τῆς σειρᾶς, ἣν τερματίζει, ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας δίδεται καὶ καθορίζεται ἐν ἡμῖν τελείως ὑπὸ ταύτης, οὐχὶ ὅμως ἀπ' εὐθείας ἀλλ' ἐμμέσως ὡς λ. χ. δίδεται ἡμῖν ἡ ἄγνωστος χ εἰς μίαν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν ἢ τὸ τέταρτον πρὸς τρία δεδομένα ἁρμονικὰ σημεῖα κλπ. Οὕτως ἡ βαθμηδὸν ἐπιβραδυνομένη κίνησις τοῦ εἰς τὸν σταθμὸν εἰσερχομένου συρμοῦ διεγείρει ἀναγκαίως ἡμῖν τὴν ἡσυχίαν (στάσιν) ὡς τελικὴν παράστασιν· οὕτως ὡς τελικὴ ἰδέα τῆς σειρᾶς τῶν εἰς κύκλον τινὰ ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διπλασιάζεται συνεχῶς, σχηματίζεται ἐν ἡμῖν ὁ κύκλος· οὕτως ἡ σειρὰ τῶν

(Ἡ συνέχεια ἐν σελίδι 98.)

ἀριθμῶν 0,3 : 0,33 : 0,333 : . . . ὧν τὸ τριπλάσιον πλησιάζει ἐπὶ πλέον καὶ πλέον πρὸς τὴν μονάδα δίδει ἡμῖν ὡς ὅριον ἐκεῖνον τὸν ἀριθμόν, ὅστις τριπλασιαζόμενος δίδει ἀκριβῶς τὴν μονάδα ἤτοι $^1/_3$. Ἐννοεῖται ὅμως ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν διαφόρων περιστάσεων λ. χ. τῆς ἀφθονίας, σαφηνείας καὶ σπουδαιότητος τῶν γνωρισμάτων, ἵνα αἱ οὕτωσεὶ ὡς ἔμμεσοι ἀναπαραστάσεις ἐν ἡμῖν σχηματιζόμεναι μεθόριαι ἔννοιαι χορηγήσωσιν ἡμῖν τελικῶς ἄμεσον ἐναργῆ καὶ τελείως ὀξεῖαν ἰδέαν. Ἐπὶ παραδείγματι: Σπουδαιοτέρα ἐξ ὅλων τῶν μεθορίων ἐννοιῶν εἶναι ὡς εἴδομεν ἡ τοῦ ἀπείρως μεγάλου καὶ ἀπείρως μικροῦ, ἄνευ τῶν ὁποίων δὲν θὰ ὑπῆρχεν ἀνωτέρα ἀνάλυσις· ἀμφότεραι δὲ αἱ ἔννοιαι αὗται ὀφείλουσι τὸ ἀτερμάτιστον αὐτῶν εἰς τὴν αὐτὴν περίπτωσιν εἰς ἣν καὶ ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν ἤτοι εἰς τὸ δυνατὸν τῆς αὐξήσεως πάντοτε τῆς σειρᾶς κατὰ ἕνα νέον ὅρον, τοῦ κλεισίματος τοῦτέστι τοῦ ν ὅρου διὰ τοῦ (ν+1) τοιούτου. Τοῦτο δὲ εἶναι συνέπεια τοῦ ὅτι ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν διαφόρων ὅρων τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, διὰ τῆς κατὰ μίαν πάντοτε μονάδα ἐπαυξήσεως, εἶναι τοσοῦτον ἐκτάκτως ἁπλοῦς, ὥστε χορηγεῖ ἡμῖν τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἄρτι σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, εὐκρινεστάτην παράστασιν τοῦ ἑκάστοτε νέου προστιθεμένου ὅρου. Τοῦτο ὅσον ἀφορᾷ τὴν σειρὰν 1, 2, 3, 4, . . . ν, (ν+1), . . . ∞ ἤτοι τὸ ἀπείρως μέγα, ἐν ᾧ, ἀντιστρόφως, ἐὰν παρατηρήσωμεν τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, . . . $^1/_\nu$, $^1/_{(\nu+1)}$ . . . $^1/_\infty$ ἤτοι τὸ ἀπείρως μικρόν, βλέπομεν ὅτι ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς δὲν εἶναι τόσον ἐκτάκτως ἁπλοῦς ὅσον ὁ τῆς προηγουμένης, διότι ἵνα ἐκ τοῦ ὅρου $^1/_\nu$ σχηματισθῇ ὁ ἑπόμενος $^1/_{(\nu+1)}$ δέον νὰ μειωθῇ ὁ προηγούμενος κατὰ $^1/_{\nu(\nu+1)}$, τοῦθ' ὅπερ δὲν εἶναι τόσον εὐκόλως ἀντιληπτὸν ὅσον ἡ προσθήκη τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα αὕτη σειρὰ δὲν χορηγεῖ ἡμῖν ἀναλόγως εὐκρινεστάτην παράστασιν τοῦ ὁρίου ἤτοι τοῦ ἀπείρως μικροῦ.

Ἐν Τριπόλει τῇ 29 Ἀπριλίου 1909.

Δ. Ι. ΚΑΛΥΒΑΣ
Νομομηχανικός.

ΠΟΙΚΙΛΑ

Περὶ τῆς προόδου τινῶν Ἑλληνικῶν Βιομηχανιῶν. — Ἡ ἀτομικὴ πρωτοβουλία ἀθορύβως εἰσάγει καὶ παρ' ἡμῖν νέους κλάδους βιομηχανιῶν ἢ βελτιοῖ τοὺς ὑπάρχοντας. Ἀφ' ἑτέρου εἶνε πολὺ εὐχάριστος καὶ ἐνθαρρυντική, ἡ παρατηρουμένη κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη, ἐπίδοσις τῶν σπουδῶν τῶν Ἑλληνοπαίδων εἰς τὰς θεωρητικὰς καὶ ἐφηρμοσμένας φυσικομαθηματικὰς ἐπιστήμας, ἃς ἀποκτῶσιν εἴτε ἐν τῇ Ἀλλοδαπῇ εἴτε ἐν τῷ παρ' ἡμῖν σπουδαίῳ Πολυτεχνείῳ. Οἱ οὕτω μεμορφωμένοι ἐπιστήμονες συντρέχουσι τοὺς ῥέκτας Ἕλληνας βιομηχάνους, ἐν ταῖς ἐγκαταστάσεσιν αὐτῶν.

Ἐκ τῶν πολλῶν πλουτοπαραγωγικῶν κλάδων οἵτινες εἰσήχθησαν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη θὰ ἀναφέρω ἐπὶ τοῦ παρόντος τινὰς μόνον.

Σιμεντοποιία. Πρὸ δεκαετίας οὐδὲ κἂν λόγος ἐγένετο παρ' ἡμῖν περὶ Ἑλληνικῆς Σιμεντοποιίας, καθόσον ἅπαν τὸ ἀναπόφευκτον διὰ τὰς οἰκοδομὰς σιμέντον εἰσήγετο ἐκ τοῦ Ἐξωτερικοῦ, μὲ ἀφαίρεσιν μεγάλου μέρους χρυσοῦ ἐκ τῆς ἐπιτοπίου ἀγορᾶς. Ἤδη δύο Σιμεντοποιεῖα, ἐν εὐγενεῖ ἁμίλλῃ λειτουργοῦσι παρ' ἡμῖν, ἱδρυθέντα τὸ μὲν ἓν ἀπὸ τοῦ 1902 ἐν Ἐλευσῖνι ὑπὸ τῶν κ. κ. Χατζηκυριάκου, Ζαχαρίου καὶ Σας καὶ τὸ ἄλλο ἐν ἔτει 1907 ἐν Δραπετζώνᾳ πλησίον τοῦ λιμένος Πειραιῶς ὑπὸ τῶν κ. κ. Ζαβογιάννη καὶ Ζαμάνου.

Ἀμφότερα τὰ Σιμεντοποιεῖα ταῦτα ἐγκατεστάθησαν ἐπὶ ἐδάφους τῆς τριτογενοῦς διαπλάσεως, ἐγκλειούσης τὸ πλεῖστον μέρος τῶν ἀναγκαιουσῶν πρώτων ὑλῶν, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σιμέντου, ἤτοι ἀσβεστολιθικὰ ἀργιλλομιγῆ πετρώματα, ἅτινα ἀναμιγνυόμενα μετὰ τῆς θηραϊκῆς γῆς ἀποτελοῦσι τὴν σύστασιν τοῦ φυσικοῦ σιμέντου.

Τὸ Ἑλληνικὸν σιμέντον ἔλαβε θαυμασίαν εὐεργετικὴν ἐπιρροὴν εἰς τὴν ἐπίδοσιν, τῆς ὡσαύτως πρὸ ὀλίγων ἐτῶν εἰσαχθείσης καὶ παρ' ἡμῖν, ἀρχιτεκτονικῆς μεθόδου διὰ τοῦ σιδηροπαγοῦς σκιρροκονιάματος (béton armée) καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν τεχνητῶν πλακῶν, ἃς εἰς μεγάλα ποσὰ κατασκευάζουσιν ἐν Πειραιεῖ μὲν ὁ κ. Δηλαβέρης, ἐν Δραπετζώνᾳ δὲ οἱ κ. κ. Ζαβογιάννης καὶ Ζαμάνος.

Βιόσιμος δύναται νὰ θεωρηθῇ πᾶσα βιομηχανία διαθέτουσα ἐν ἀφθονίᾳ τὰς ἀναγκαιούσας πρώτας ὕλας. Σὺν τοῖς πλεονεκτήμασι τούτοις, ἅτινα, ὡς προανέφερον, ἔχει ἡ Σιμεντοποιία παρ' ἡμῖν, θὰ ἦτο ἀξιοσύστατον εἰς τοὺς κ. κ. βιομηχάνους νὰ ἐλαττώσωσι τὰς παραγωγικὰς αὐτῶν δαπάνας, διὰ βελτιουμένων μέσων τῆς ἐπεξεργασίας τῶν πρώτων ὑλῶν, ὅπως συναγωνισθῶσι νικηφόρως κατὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ σιμέντου οὐ μόνον ἐν Ἑλλάδι ἄνευ ἐπιβολῆς προστατευτικοῦ δασμοῦ κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ Ἐξωτερικῷ.

Α. Κ.

Τύποις Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ἐν Ἀθήναις.