



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Υπολογιστική Μηχανική»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

***ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ
ΤΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ***

Του Μεταπτυχιακού Φοιτητή

Κυριάκου Η. Κουρούση

Επιβλέπων

Ιωάννης Φ. Δαφαλιάς, Καθηγητής Μηχανικής, Τ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2002

**Μοντέλο Κυκλικής Πλαστικότητας με Πολλαπλασιαστική
Διασύνδεση των Εσωτερικών Τάσεων**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΣΤΟ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΑΠΟ ΤΟΝ

Κυριάκο Η. Κουρούση

ΠΡΟΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ
ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΜΕ ΤΙΤΛΟ
'ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ'

Ιωάννης Φ. Δαφαλιάς, Επιβλέπων

Σεπτέμβριος 2002

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Σε ανάμνηση του Καθηγητή μου

Dr. - Ing. Γεώργιου Δ. Παναγιωτόπουλου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η πρόκληση για την δημιουργία ενός γενικού τρόπου μαθηματικής περιγραφής της πλαστικής συμπεριφοράς των μετάλλων, οδήγησε τους ερευνητές στην πρόταση διαφόρων καταστατικών μοντέλων και ειδικότερα στην περιοχή της κυκλικής πλαστικότητας, όπου εμφανίζονται φαινόμενα με ιδιαίτερη σημασία για αρκετές τεχνολογικές εφαρμογές. Στην προσπάθεια αυτή, η παρούσα εργασία συμβάλλει με την παρουσίαση ενός μοντέλου βασισμένου στον κανόνα κινηματικής κράτυνσης των Armstrong και Frederick. Η ιδέα της διασύνδεσης των επιμέρους εσωτερικών τάσεων, κατά Chaboche, στην πρόταση αυτή διαφοροποιείται και εκτελείται κατά πολλαπλασιαστικό τρόπο. Έμφαση δίδεται στην επίτευξη μέγιστης δυνατής απλότητας, ως προς τον προσδιορισμό των παραμέτρων του μοντέλου. Εκτελέσθηκε εφαρμογή για τις περιπτώσεις της κυκλικής κράτυνσης και του κυκλικού ερπυσμού (ratcheting), σε μονοαξονική κατάσταση καταπόνησης, με την χρήση αριθμητικού κώδικα που αναπτύχθηκε για τον σκοπό αυτό. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν από την μελέτη, διαφάνηκε η ικανότητα της συγκεκριμένης μεθοδολογίας μοντελοποίησης, στην προσομοίωση μονοαξονικών πειραματικών αποκρίσεων, με μεγάλη ακρίβεια.

Λέξεις Κλειδιά : Κυκλική Πλαστικότητα, Κυκλικός Ερπυσμός, Καταστατική Μοντελοποίηση, Προσομοίωση Πειραματικών Δεδομένων.

ABSTRACT

of Master Thesis

Cyclic Plasticity Model with Multiplicative Backstress Decomposition

by

Kyriakos I. Kourousis

supervised by

Yannis F. Dafalias, Professor, N.T.U.A. - U.C. Davis

The challenge of developing a generalized mathematical pattern to describe the plastic behavior of metals, lead researchers to propose various constitutive models, especially in the field of cyclic plasticity, where phenomena, with particular importance to many technological applications, appear. The contribution of this thesis in this area is the proposal of a model based on the Armstrong and Frederick kinematic hardening rule. The concept of backstress additive decomposition, as suggested by Chaboche, is altered in this model and performed in a multiplicative way. Emphasis was given in achieving maximum simplicity in defining the model's parameters. Application of the model, using a numerical code written for this purpose, was executed for cyclic hardening and ratcheting response, in the case of uniaxial loading. Examination of the results derived in this thesis, indicates that the current modelling methodology can perform quite well in fitting uniaxial experimental data.

Keywords : Cyclic Plasticity, Ratcheting, Constitutive Modelling, Experimental Data Fitting.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμηση και τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ιωάννη Δαφαλιά για την καθοδήγηση που μου παρείχε στο δύσκολο έργο της συγγραφής αυτής της εργασίας, όπως επίσης θα πρέπει ακόμη να αναφέρω ότι ο ίδιος αποτέλεσε για εμένα πηγή έμπνευσης να ασχοληθώ με το αντικείμενο της πλαστικότητας.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά όλους εκείνους οι οποίοι συνέβαλαν στην επιτυχία της προσπάθειάς μου και ιδιαιτέρως την οικογένειά μου και την μνηστή μου Άννα, για την πολύτιμη υποστήριξή τους, δίχως την οποία θα ήταν αδύνατον να είχε ολοκληρωθεί η εργασία αυτή.

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

- 14 Ιουλίου, 1978** Γέννηση, Αθήνα
- 1996, Σεπτέμβριος** Εισαγωγή στην
Σχολή Μηχανικών Αεροπορίας (Σ.Μ.Α.)
- 2000, Ιούλιος** Πτυχίο Μηχανικού Αεροσκαφών
Σχολή Μηχανικών Αεροπορίας
- 2000, Οκτώβριος** Εισαγωγή στο Διατμηματικό
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
'Υπολογιστική Μηχανική'
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΒΑΣΗ	3
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
2.2 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	3
2.3 ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	9
3 ΕΚΘΕΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	22
3.1 ΕΚΘΕΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	22
3.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΛΥΣΗΣ	24
4 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ	25
4.1 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ	25
4.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΗΣ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ	30
5 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	32
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	32
5.2 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	32
5.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ	33
5.3.1 ΠΟΛΥΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	33
5.3.2 ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ	36
5.3.3 ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	39
5.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	40
6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΑΝΑΛΥΣΗ	45
6.1 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	45
6.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ	47
6.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΕΡΠΥΣΜΟΥ	52

7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	57
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	58
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ΚΩΔΙΚΑΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ	60
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ BACKSTRESS	65

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΧΗΜΑ 2.1	Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης για μονοαξονικό πείραμα εφελκυσμο	4
ΣΧΗΜΑ 2.2	Απεικόνιση του μονοαξονικού φαινομένου Bauschinger	5
ΣΧΗΜΑ 2.3	Ελαστική περιοχή, εκφρασμένη ως κάθετες και διατμητικές τάσεις. Πειράματα εφελκυσμού - διάτμησης σε σωληνωτά δοκίμια κράμματος Αλουμινίου 2024	6
ΣΧΗΜΑ 2.4	Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικής-συμμετρικής φόρτισης Χάλυβα 304 για αυξανόμενο πλάτος τροπών [9]	7
ΣΧΗΜΑ 2.5	Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικής-συμμετρικής φόρτισης Χάλυβα 1018 σε σταθερό πλάτος τροπών [9]	7
ΣΧΗΜΑ 2.6	Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικής φόρτισης Χάλυβα 1018 σε μη-συμμετρικό πλάτος τροπών [9]	8
ΣΧΗΜΑ 2.7	Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικού ερπυσμού Χάλυβα 1020 [9]	9
ΣΧΗΜΑ 2.8	Σχηματική αναγωγή του μονοαξονικού ορίου διαρροής στην επιφάνεια διαρροής στον χώρο των τάσεων - Μεταβολή της γεωμετρίας της επιφάνειας διαρροής κατά την πλαστική φόρτιση	12
ΣΧΗΜΑ 2.9	Απεικόνιση της επιφάνειας ροής στον γενικευμένο χώρο των τάσεων και των μεγεθών που σχετίζονται με τις περιπτώσεις φόρτισης	13
ΣΧΗΜΑ 2.10	Σχηματική απεικόνιση της μετατόπιση της επιφάνειας διαρροής - ορισμός του τανυστή κινηματικής κράτνσης	18
ΣΧΗΜΑ 2.11	Σχηματική απεικόνιση της διόγκωσης της επιφάνειας διαρροής (θεωρούμενης ως σφαίρα)	20
ΣΧΗΜΑ 3.1	Πειραματικά απολέσματα για μονοαξονική κυκλική φόρτιση σε αυξανόμενο επίπεδο παραμόρφωσης για δοκίμιο Χάλυβα 316 L [5],[10]	23

ΣΧΗΜΑ 3.2	Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με το μοντέλο των Armstrong & Frederick [3] για ελεγχόμενο από τάση βρόγχο υστέρησης (stress controlled hysteresis loop) [6].	23
ΣΧΗΜΑ 4.1	Απεικόνιση της εξέλιξης της backstress κατά Prager σε μονοαξονική φόρτιση	25
ΣΧΗΜΑ 4.2	Σχηματική απεικόνιση της συμπεριφοράς του κινηματικού μοντέλου κράτυνσης των Armstrong και Frederick [3]	27
ΣΧΗΜΑ 4.3	Σχηματική απεικόνιση των ενθέτων επιφανειών - μονοαξονικής φόρτισης και αποφόρτισης με το μοντέλων του Mroz [14]	28
ΣΧΗΜΑ 4.4	Σχηματική απεικόνιση του μοντέλου των δύο επιφανειών [15], στον μονοαξονικό χώρο (αριστερά) και στον πολυαξονικό χώρο (δεξιά)	29
ΣΧΗΜΑ 5.1	Επιφάνεια φόρτισης για τον τανυστή της backstress ορισμός της απόστασης δ	34
ΣΧΗΜΑ 5.2.1	Διάγραμμα ροής ελαστοπλαστικού αλγορίθμου (1/3)	42
ΣΧΗΜΑ 5.2.2	Διάγραμμα ροής ελαστοπλαστικού αλγορίθμου (2/3)	43
ΣΧΗΜΑ 5.2.3	Διάγραμμα ροής ελαστοπλαστικού αλγορίθμου (3/3)	44
ΣΧΗΜΑ 6.1	Εξέλιξη του συντελεστή ακρίβειας του αλγορίθμου ως προς την μεταβολή του βήματος του	46
ΣΧΗΜΑ 6.2	Πειραματική καμπύλη $\sigma - \epsilon$ για Χάλυβα 316 υπό κυκλική φόρτιση	48
ΣΧΗΜΑ 6.3	Αριθμητική προσομοίωση πειράματος κυκλικής παραμόρφωσης, με την χρήση μοντέλου πολλαπλασιαστικών εσωτερικών τάσεων	48
ΣΧΗΜΑ 6.4	Αριθμητική προσομοίωση (computed data) πειράματος κυκλικής παραμόρφωσης [διάγραμμα τάσης (stress)- τροπής (strain)], με την χρήση μοντέλου πολλαπλασιαστικών εσωτερικών τάσεων - απευθείας οπτικοποίηση σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα (experiment)	50

ΣΧΗΜΑ 6.5	Αποσύνδεση της εσωτερικής τάσης (a) (backstress) στις επιμέρους backstress (a_1), (a_2), (a_3) συναρτήσει της πλαστικής τροπής (plastic strain)	51
ΣΧΗΜΑ 6.6	Μεταβολή της ελαστικής περιοχής (k) συναρτήσει της ισοδύναμης πλαστικής τροπής (equivalent plastic strain)	52
ΣΧΗΜΑ 6.7	Καμπύλη τάσης (σ_x) συναρτήσει της πλαστικής παραμόρφωσης (ϵ^p) μονοαξονικού κυκλικού ερπυσμού για Χάλυβα CS 1026, σύγκριση πειραματικών δεδομένων (experiment) με αποτελέσματα από του μοντέλου του Chaboche (C-H3 model), Bari & Hassan [16]	53
ΣΧΗΜΑ 6.8	Καμπύλη τάσης (stress) συναρτήσει της πλαστικής παραμόρφωσης (plastic strain) μονοαξονικού κυκλικού ερπυσμού για Χάλυβα CS 1026, σύγκριση πειραματικών δεδομένων (experiment) με αποτελέσματα του μοντέλου του Chaboche (computed) που προέκυψαν από εφαρμογή του κώδικα της εργασίας	53
ΣΧΗΜΑ 6.9	Προσομοίωση καμπύλης τάσης (stress) - πλαστικής παραμόρφωσης (plastic strain) κυκλικού ερπυσμού με την χρήση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου (computed data) και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα (experiment) - ληφθέντων από Bari & Hassan [16]	55
ΣΧΗΜΑ 6.10	Συμπεριφορά επιμέρους εσωτερικών τάσεων πολλαπλασιαστικού μοντέλου στην προσομοίωση βρόγχου κυκλικού ερπυσμού	56

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1	Παράμετροι μοντέλου πολλαπλασιαστικών εσωτερικών τάσεων οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την προσαρμογή του πειραματικού γραφήματος του Χάλυβα 316 (βλέπε σχ. 6.2)	49
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2	Παράμετροι μοντέλου Chaboche και σταθερών του υλικού χρησιμοποιηθέντων σε προσομοίωση καμπύλης κυκλικού ερπυσμού, Bari & Hassan [16]	54
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3	Παράμετροι πολλαπλασιαστικού μοντέλου για την προσομοίωση πειραματικής καμπύλης - Bari & Hassan [16] - κυκλικού ερπυσμού	54

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υποβάλλοντας ένα υλικό σε κυκλικά επαναλαμβανόμενη φόρτιση, υπερβαίνοντας το όριο ελαστικής απόκρισής του, έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μίας σύνθετης συμπεριφοράς. Η ικανότητα να περιγραφεί πλήρως και με γενικό τρόπο το σύνολο των φαινομένων στο πεδίο της ανελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, είναι το ζητούμενο από την βασική έρευνα που διεξάγεται τα τελευταία τριάντα χρόνια στην επιστήμη της μηχανικής. Η ανάγκη αυτή επιβλήθηκε κατά κύριο λόγο από πρακτικά προβλήματα της τεχνολογίας, παρά από την διάθεση για θεωρητική ανάλυση του θέματος. Για παράδειγμα, η ακριβής γνώση των ορίων ενός μεταλλικού υλικού σε εναλλασσόμενη ελαστοπλαστική καταπόνηση, καθορίζει επακολούθως και το φαινόμενο της κόπωσης. Η κατανόηση των παρατηρήσεων επί των πειραμάτων, αποτελεί το έναυσμα για την διαμόρφωση μίας μαθηματικής περιγραφής των διαφόρων αποκρίσεων και την χρησιμοποίησή της στον τομέα της σχεδίασης. Ο χώρος της κυκλικής πλαστικότητας διανθίζεται από τις διαφορετικές προσεγγίσεις που προτείνονται είτε στην βάση της επίλυσης εξειδικευμένων προβλημάτων, είτε με σκοπό την συμβολή στην ευρύτερη περιοχή της έρευνας. Η πολυπλοκότητα στην μαθηματική διατύπωση δεν επιτρέπει, στο πλήθος των περιπτώσεων, την έκφραση αναλυτικών σχέσεων συνάρτησης μεταξύ των μεγεθών που καλούνται να περιγράψουν τα φαινόμενα. Βασικό βοηθητικό μέσο των προσπαθειών αυτών, ιδιαιτέρως τα τελευταία χρόνια, είναι η αριθμητική εφαρμογή μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Στο παραπάνω πλαίσιο, όπως αυτό συνοπτικά αναφέρθηκε, εντάσσεται και η παρούσα εργασία, διαθέτοντας παράλληλα τον χαρακτήρα μίας βάσης εκκίνησης για μελέτη του αντικειμένου της ανελαστικής συμπεριφοράς των υλικών. Ειδικότερα στο 2ο κεφάλαιο εκτελείται εισαγωγή στις βασικές φαινομενολογικές παρατηρήσεις επί κυκλικών φαινομένων ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς, όπως επίσης ορίζονται και οι έννοιες που καλούνται να τα περιγράψουν. Κατόπιν, παρουσιάζεται εν συντομία η μαθηματική θεωρία της πλαστικότητας. Στο 3ο κεφάλαιο εκτίθεται το αντικείμενο της μελέτης και προσδιορίζονται τα κριτήρια με τα οποία είναι δυνατόν να αξιολογηθεί η διαδικασία προσέγγισης στο τελικό σκοπό της εργασίας. Στην συνέχεια, στο 4ο

κεφάλαιο παρατίθενται οι κυριότερες προτάσεις που έχουν τεθεί στο θέμα της μοντελοποίησης της πλαστικής συμπεριφοράς. Σε σύνδεση με το προαναφερθέν τμήμα της εργασίας, επακολουθεί το κεφάλαιο 5, το οποίο πραγματεύεται την προτεινόμενη λύση, τόσο στο μαθηματικό σκέλος, όσο και στην υπολογιστική τεκμηρίωση και εφαρμογή της. Τα αποτελέσματα εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου κυκλικής πλαστικότητας και η ανάλυσή τους αποτελούν θέμα του 6ου κεφαλαίου. Τέλος στο κεφάλαιο 7, αναφέρονται ως σύνοψη τα κύρια συμπεράσματα που εξάγονται από την εργασία και προτείνονται περιοχές στις οποίες θα μπορούσε η ίδια να επεκταθεί για μελλοντική έρευνα.

2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΒΑΣΗ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία πλαστικότητας χρησιμοποιείται προκειμένου να προβλέψει την συμπεριφορά υλικών με μη αναστρέψιμες παραμορφώσεις, οι οποίες προκαλούνται στιγμιαία και δεν εξαρτώνται απευθείας με τον χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό πρόκειται να αναλύσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για να κατανοήσει κανείς την θεωρία αυτή όπως επίσης και την μεθοδολογία μοντελοποίησης που ακολουθείται παρακάτω.

2.2 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

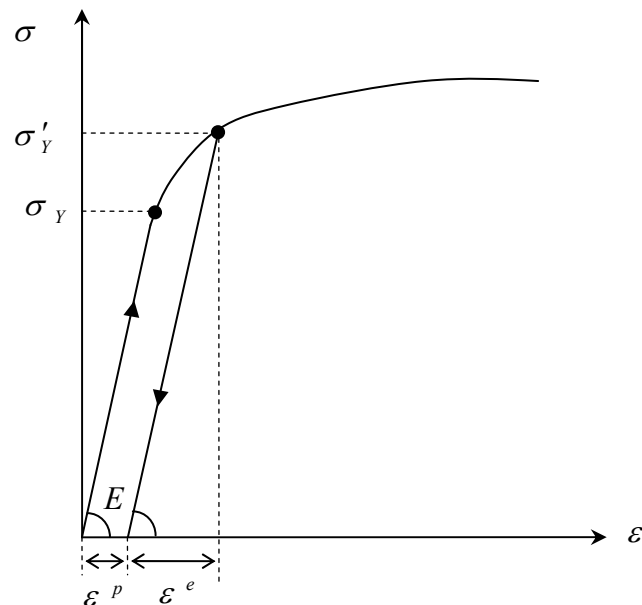
Το μεγαλύτερο πλήθος των υλικών παρουσιάζουν ελαστική (αναστρέψιμη) συμπεριφορά εντός ενός περιορισμένου εύρους παραμορφώσεων. Κατά την εκτέλεση ενός μονοαξονικού πειράματος εφελκυσμού ή θλίψης σε δοκίμια μεταλλικού υλικού, μπορεί να παρατηρεί κανείς στην προκύπτουσα καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης ($\sigma \sim \varepsilon$) (βλέπε Σχ. 2.1) την ύπαρξη ενός σημείου πέραν του οποίου τμήμα μόνον της παραμόρφωσης του δοκιμίου επανέρχεται εάν αυτό αποφορτιστεί πλήρως. Η ελάχιστη φόρτιση η οποία συνεπάγεται πλαστική παραμόρφωση, μετρούμενη από την πλαστική τροπή (ε^p), του υλικού και χαρακτηρίζει την έναρξη της (μη-γραμμικής) ελαστοπλαστικής περιοχής, ονομάζεται *όριο διαρροής* (σ_Y). Όπως παρατηρείται, η παραμόρφωση έως το δοκίμιο να διαρρεύσει (ε^Y) είναι μεγαλύτερη από την πλαστική παραμόρφωση (ε^p), οπότε συμπεραίνει κανείς ότι κατά την αποφόρτιση του δοκιμίου, ένα τμήμα ελαστικής παραμόρφωσης (ε^e) έχει ανακτηθεί και συνεπώς έχει συμπεριφερθεί ελαστικά, με αποτέλεσμα η συνολική παραμόρφωση πέρα του ορίου ελαστικότητας να είναι το άθροισμα μίας πλαστικής και μίας ελαστικής παραμόρφωσης. Δηλαδή :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.1)$$

Η πλαστική παραμόρφωση σε δεδομένη τιμή της τάσης είναι ελαφρώς διαφορετική από την μόνιμη παραμόρφωση που παρατηρείται όταν το δοκίμιο αποφορτιστεί από την τάση αυτή. Αυτό συμβαίνει διότι η σχέση τάσης - παραμόρφωσης στην αποφόρτιση δεν είναι πάντα ιδανικά ελαστική. Θεωρώντας γραμμικά ελαστική συμπεριφορά υλικού ισχύει:

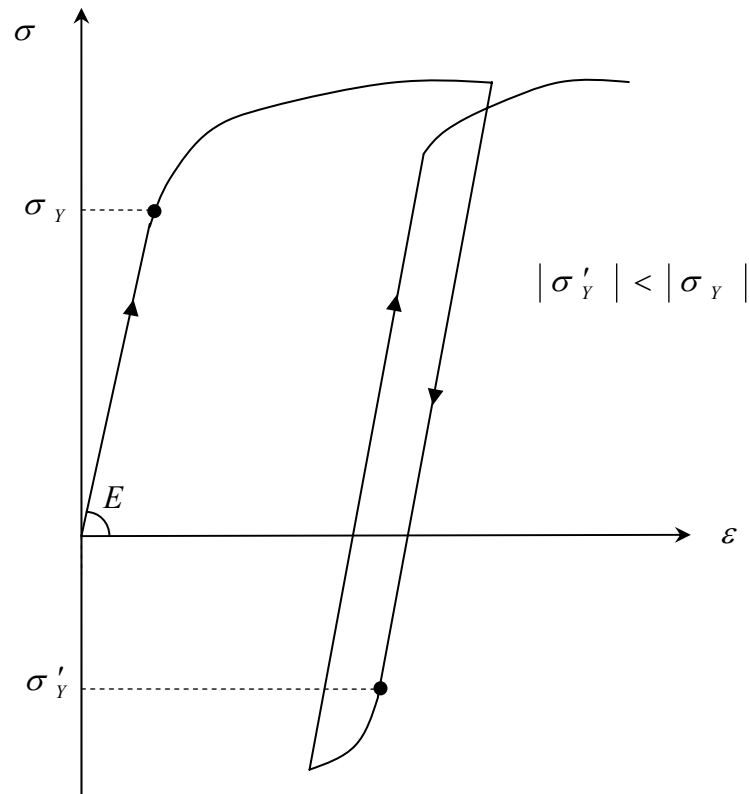
$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (2.2)$$

Αύξηση της τάσης έχει ως αποτέλεσμα επιπλέον πλαστική παραμόρφωση. Εάν το δοκίμιο αποφορτιστεί μετά από κάποια πλαστική παραμόρφωση και έπειτα επαναφορτιστεί τότε το τμήμα του διαγράμματος που αναπαριστά την επαναφόρτιση αυτή έχει την ίδια κλίση με την αρχική φόρτιση, ενώ το υλικό φτάνει στην προηγούμενη τιμή της τάσης (σ'_Y) που είχε λάβει πριν την αποφόρτιση. Η αύξηση της τάσης η οποία είναι αναγκαία να επιφέρει επιπλέον πλαστική παραμόρφωση κατά την επαναφόρτιση του ήδη ελαστοπλαστικά παραμορφωμένου υλικού ονομάζεται *κράτνωση* του υλικού. Η τάση, πέραν του ορίου διαρροής, μέχρι την οποία είχε φορτιστεί το υλικό πριν την αποφόρτισή του είναι το νέο 'όριο διαρροής' (σ'_Y) σε περίπτωση επαναφόρτισής του.



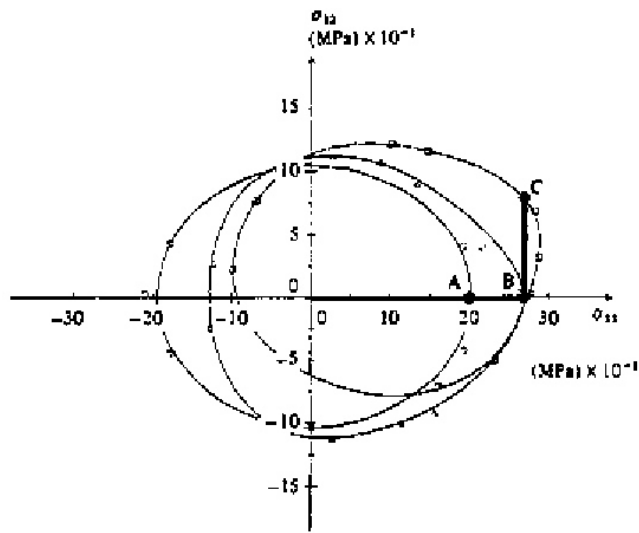
Σχήμα 2.1 Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης για μονοαξονικό πείραμα εφελκυσμο.

Τα συνήθη όλκιμα υλικά έχουν ίσα όρια διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη (απόλυτες τιμές αυτών), εφόσον δεν έχουν προηγουμένως υποστεί πλαστική παραμόρφωση. Σε πολλά όμως υλικά η υπέρβαση του ενός αρχικού ορίου διαρροής δεν υπερυψώνει μόνο το ίδιο αλλά μεταβάλλει και όριο διαρροής στην αντίθετη φόρτιση (βλέπε Σχ.2.2). Όταν η μεταβολή του αντιθέτου ορίου είναι μία μείωση (σε απόλυτη τιμή) την ονομάζουμε φαινόμενο *Bauschinger*.



Σχήμα 2.2 Απεικόνιση του μονοαξονικού φαινομένου *Bauschinger*.

Στον γενικευμένο πολυαξονικό χώρο των τάσεων τα παραπάνω φαινόμενα κράτυνσης ανταποκρίνονται στην μεταβολή του μεγέθους, σχήματος και / ή στην μετακίνηση της αρχικής ελαστικής περιοχής των υλικών (βλέπε Σχ.2.3). Προκειμένου να απλοποιηθεί το φαινόμενο αυτό, για την ευκολότερη μελέτη του, είναι απαραίτητο να γίνει η παραδοχή ότι η ελαστική περιοχή δεν μεταβάλλει την μορφή του, αλλά αυξάνεται ομοιόμορφα (ισοτροπική κράτυνση-isotropic hardening) ή μετακινείται (κινηματική κράτυνση-kinematic hardening) ή μεταβάλλεται και με τους δύο αυτούς τρόπους (μικτή κράτυνση-mixed hardening).

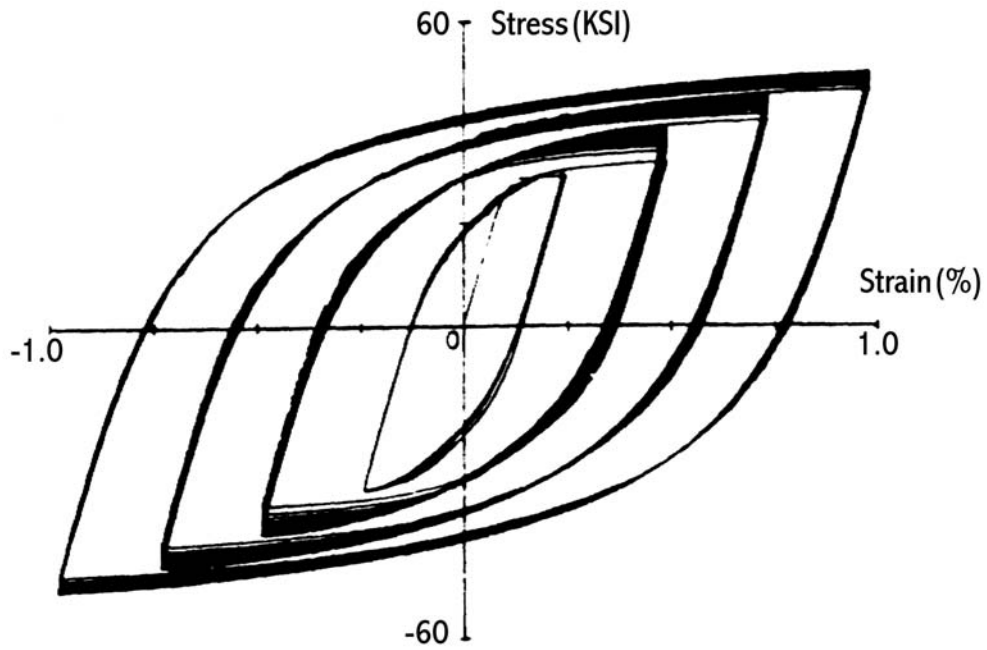


Σχήμα 2.3 Ελαστική περιοχή, εκφρασμένη ως κάθετες και διατμητικές τάσεις. Πειράματα εφελκυσμού - διάτμησης σε σωληνωτά δοκίμια κράμματος Αλουμινίου 2024

Ιδιαίτερη αναφορά θα πρέπει να γίνει στα φαινόμενα τα οποία εμφανίζονται υπό κυκλικές φορτίσεις, δηλαδή από επαναλαμβανόμενα 'προγράμματα' φόρτισης. Η ανάλυσή τους θα βασιστεί στα πειραματικά αποτελέσματα που εμφανίζονται στα πιο κάτω σχήματα.

Ι) Κυκλική κράτυνση (cyclic hardening)

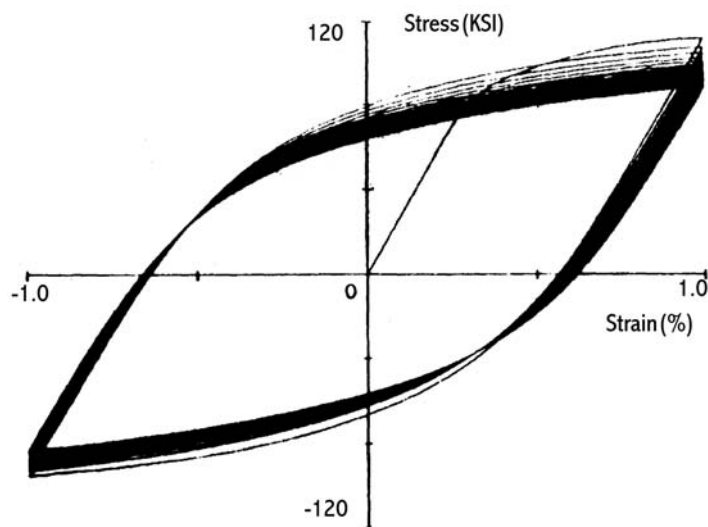
Στην καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης του σχ. 2.4 παρατηρεί κανείς ότι για κάθε πλάτος παραμόρφωσης η μέγιστη τάση αυξάνει με τον αριθμό των κύκλων και τελικώς σταθεροποιείται σε ένα επίπεδο, το οποίο αυξάνει με επόμενο πλάτος παραμόρφωσης (strain amplitude) για την επόμενη σειρά κυκλικών φορτίσεων. Πράγμα το οποίο ενδεικνύει μία αύξηση στην ελαστική περιοχή του υλικού. Το φαινόμενο αυτό καλείται κυκλική κράτυνση, κατ' αναλογία με την κράτυνση που υφίσταται ένα υλικό στον μονοαξονικό εφελκυσμό. Ένα ακόμη σημαντικό φαινόμενο που δεν είναι αντιληπτό στο διάγραμμα αυτό και παρατηρήθηκε από τον Chaboche και τους συνεργάτες του κατά την εκτέλεση τέτοιου είδους πειραμάτων [10], είναι ότι το επίπεδο στο οποίο σταθεροποιείται η μέγιστη τάση ανά πλάτος παραμόρφωσης διαφαίνεται να είναι ανεξάρτητο της προηγούμενης ιστορίας παραμορφώσεων. Πιο απλά, το κάθενα από τα πλάτη παραμορφώσεων καθορίζει, ανεξάρτητα από το πλάτος που προηγήθηκε, την μέγιστη σταθεροποιημένη τιμή της τάσης.



Σχήμα 2.4 Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικής-συμμετρικής φόρτισης Χάλυβα 304 για αυξανόμενο πλάτος τροπών [9].

II) Κυκλική μαλάκυνση (cyclic softening)

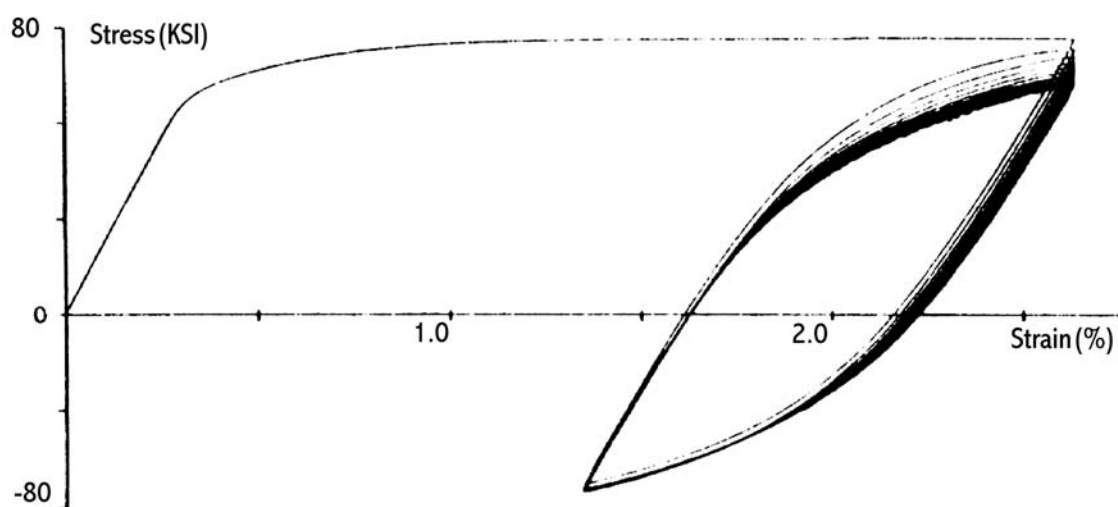
Ορίζεται ως κυκλική μαλάκυνση υλικού η αντίθετη προς την κυκλική κράτυνση συμπεριφορά. Ειδικότερα, στο διάγραμμα του σχήματος 2.6 παρατηρείται ότι το επίπεδο μέγιστης τάσης υπό κυκλική φόρτιση, για το συγκεκριμένο πλάτος παραμορφώσεων, μειώνεται με τον αριθμό των κύκλων.



Σχήμα 2.5 Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικής-συμμετρικής φόρτισης Χάλυβα 1018 σε σταθερό πλάτος τροπών [9].

III) Κυκλική χαλάρωση (cyclic relaxation)

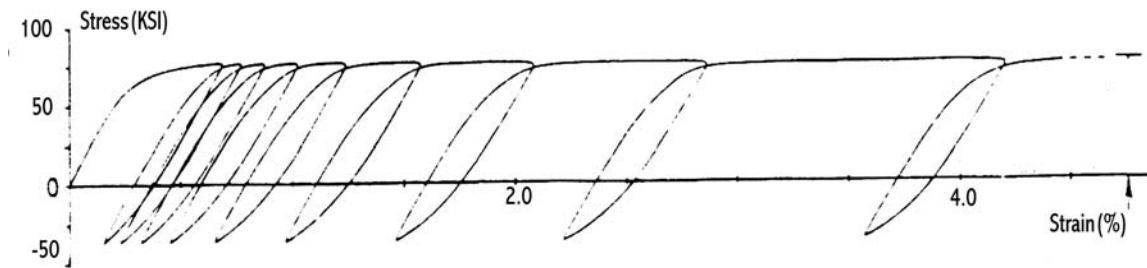
Στο παρακάτω διάγραμμα (σχ. 2.6) παρουσιάζεται το φαινόμενο της κυκλικής χαλάρωσης. Συγκεκριμένα παρατηρείται ότι υπό κυκλική φόρτιση σε καθορισμένο πλάτος παραμορφώσεων με μη μηδενική μέση παραμόρφωση, οι βρόγχοι υστέρησης τείνουν να μετατοπίζονται σε κάθε κύκλο φόρτισης, με αποτέλεσμα να ελαχιστοποιούν την απόλυτη μέση τάση του κάθε κύκλου, η οποία τελικά λαμβάνει την τιμή μηδέν.



Σχήμα 2.6 Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικής φόρτισης Χάλυβα 1018 σε μη-συμμετρικό πλάτος τροπών [9].

IV) Κυκλικός ερπυσμός (cyclic creep / ratcheting)

Για κυκλική φόρτιση υπό καθορισμένο πλάτος τάσης αλλά μη μηδενική μέση τάση, μπορεί κανείς να παρατηρήσει το φαινόμενο του κυκλικού ερπυσμού (σχ. 2.7). Η επικίνδυνη φύση του φαινομένου επιδεικνύεται στο παρακάτω διάγραμμα χαρακτηριστικά, όπου παραμόρφωση μεγαλώνει με αυξανόμενο ρυθμό για κάθε εφαρμοζόμενο κύκλο φόρτισης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το δοκίμιο αστόχησε έπειτα από δέκα κύκλους. Ο κυκλικός ερπυσμός περιγράφει ένα φαινόμενο στο οποίο υπό κυκλική φόρτιση το υλικό παρουσιάζει βαθμιαία συσσώρευση πλαστικής παραμόρφωσης η οποία είναι δυνατόν να οδηγήσει σε αστοχία. Η αιτία που προκαλεί το ratcheting είναι η διαφορετική μεταβολή της τιμής του πλαστικού μέτρου κατά την πλαστική φόρτιση σε αντίθετες κατευθύνσεις (διαφορετική κλίση της καμπύλης μεταξύ φόρτισης και αποφόρτισης).



Σχήμα 2.7 Πειραματικά αποτελέσματα κυκλικού ερπυσμού Χάλυβα 1020 [8].

2.3 ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Κατά τον ορισμό του Cauchy ελαστικό θεωρείται ένα σώμα στο οποίο η παραμόρφωση σε κάθε σημείο του καθορίζεται επακριβώς από την τάση και την θερμοκρασία του στο σημείο αυτό. Ένας ορισμός που θα ήταν δυνατόν να δοθεί το ανελαστικό σώμα είναι ότι, εκτός από την τάση και την θερμοκρασία υπάρχει και κάτι επιπλέον το οποίο καθορίζει την παραμόρφωση σε κάθε σημείο του. Αυτό το επιπλέον μέγεθος είναι δυνατόν να υποθεθεί ότι είναι η προγενέστερη ιστορία της τάσης και της θερμοκρασίας στο σημείο αυτό. Ο όρος 'προγενέστερη ιστορία' αν και εκ πρώτης όψεως χαρακτηρίζεται ασαφής, μπορεί να οριστεί ακριβώς με την χρήση μιας μαθηματικής θεωρίας καλούμενης ως 'θεωρία υλικών με μνήμη'. Ένας τρόπος με τον οποίο η 'ιστορία' του υλικού επηρεάζει την σχέση μεταξύ παραμορφώσεων και τάσεων είναι μέσω της ευσθησίας από τον ρυθμό μεταβολής (rate sensitivity). Χάριν παραδείγματος, η παραμόρφωση που προκαλείται σε ένα υλικό από αργή φόρτιση είναι διαφορετική - σχεδόν πάντα μεγαλύτερη - από αυτήν που προκαλείται από απότομη φόρτιση.

Η αναγκαιότητα να εκφραστεί η λεγόμενη 'ιστορία' του υλικού με μαθηματικό τρόπο οδήγησε στον ορισμό των καταστατικών εσωτερικών μεταβλητών ($q_n, n=1,2,\dots$), από τις οποίες εξαρτώνται η παραμόρφωση, τάση και η θερμοκρασία. Αυτές οι εσωτερικές μεταβλητές είναι βαθμωτά μεγέθη ή διανύσματα ή ακόμη τανυστές δευτέρου βαθμού. Για παράδειγμα η παραμόρφωση δίδεται από την σχέση :

$$\varepsilon = \varepsilon (\sigma, \theta, q) \quad (2.3)$$

Όπου θ η θερμοκρασία και σ η τάση. Εφόσον η σχέση (2.3) υπαγορεύει την εξάρτηση της παραμόρφωσης από τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν, τότε βάσει υπόθεσης - για

ανελαστικό σώμα εξαρτώμενο από τον ρυθμό (rate-dependent)- ο ρυθμός μεταβολής των εσωτερικών μεταβλητών καθορίζεται επίσης από τα ίδια μεγέθη, δηλαδή :

$$\dot{q}_a = g_a (\sigma, \theta, q) \quad (2.4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (2.4) καλούνται εξισώσεις εξέλιξης ή εξισώσεις ρυθμού για τις εσωτερικές μεταβλητές q_a . Θα πρέπει να επισημανθεί το γεγονός ότι η σχέση (2.3) δεν είναι πάντα αντιστρέψιμη, ακόμη και όταν δεν υπάρχουν εσωτερικοί περιορισμοί για την παραμόρφωση. Σαν συμπέρασμα εξάγεται ότι, η κατάσταση ενός υλικού καθορίζεται από τις μεταβλητές κατάστασης :

α) **Εξωτερικές μεταβλητές** : Οι μεταβλητές αυτές ελέγχονται, όπως η τάση (σ_{ij}) και η θερμοκρασία (θ).

β) **Εσωτερικές μεταβλητές** (q_n) : είναι υπεύθυνες για την αλλαγή του σχήματος και της θέσης της επιφάνειας διαρροής, δηλαδή : $f(\sigma_{ij}, q_n, \theta) = 0$.

Παρατήρηση : Σαν εσωτερική μεταβλητή είναι δυνατόν να οριστεί η πλαστική τροπή ε_{ij}^p (όπως παρουσιάζεται και πιο κάτω στην ανάλυση).

Όσον αφορά τον τανυστή των τροπών, κατά την λογική που αναλύθηκε η παραμόρφωση - σχέση (2.1) - για το μονοαξονικό πρόβλημα, αποσυντίθεται αθροιστικά ως εξής :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

, ενώ προτιμάται η μορφή (ρυθμοί) :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (2.5)$$

όπου :

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (2.6)$$

Προκειμένου να διαμορφωθεί η θεωρία πλαστικότητας στην γενική της μορφή ,για πολυαξονικές συμπεριφορές τάσης - παραμόρφωσης, θα πρέπει να εισάχθούν οι εξής έννοιες :

I - *Κριτήριο Διαρροής* (Yield criterion), το οποίο επιτρέπει την διάκριση μεταξύ ελαστικής και ελαστικής συμπεριφοράς.

II - *Νόμος Ροής* (Flow rule), ο οποίος συνδέει τις τάσεις με τις τροπές ή τις μεταβολές των τροπών.

III - *Κανόνας Κράτωσης* (Hardening rule), ο οποίος περιγράφει πως μεταβάλλεται το κριτήριο διαρροής κατά την διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης.

IV - *Νόμος Εξέλιξης των Εσωτερικών Μεταβλητών*, ο οποίος περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι εσωτερικές μεταβλητές.

Υπό γενική τρισδιάστατη εντατική κατάσταση - 'φυσική' γενίκευση του μονοαξονικού κριτηρίου όπως διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα, το όριο ελαστικής συμπεριφοράς ενός υλικού μπορεί να προσδιοριστεί ως μια συνάρτηση του τανυστή των τάσεων $f(\sigma_{ij})$ καλούμενη ως *συνάρτηση διαρροής* ή *κριτήριο διαρροής*, τέτοια ώστε για (για την περίπτωση της ιδανικά πλαστικής συμπεριφοράς) :

$$f(\sigma_{ij}) < 0, \text{ το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά}$$

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \text{ το υλικό αρχίζει να συμπεριφέρεται πλαστικά.}$$

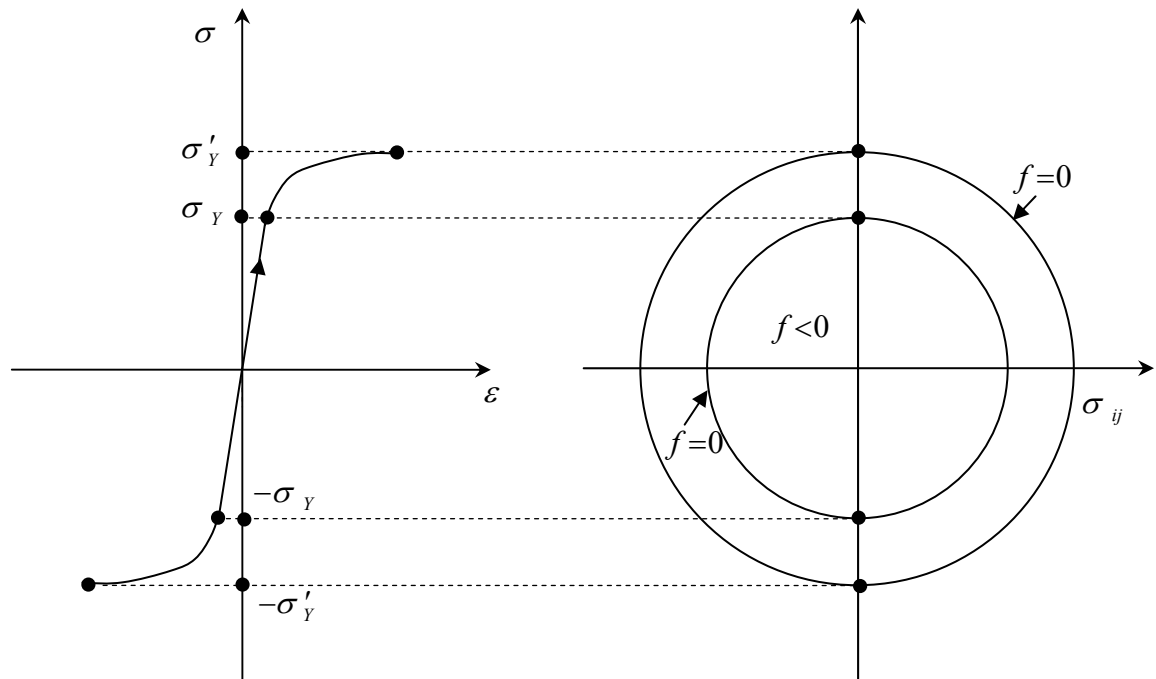
Οπότε, η συνάρτηση διαρροής ορίζει στον χώρο των τάσεων την λεγόμενη *επιφάνεια διαρροής*. Γενικεύοντας τον ορισμό αυτό θα πρέπει να οριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η έννοια της επιφάνειας διαρροής χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους.

Ορίζεται ο τανυστής :

$$(\nabla f)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.7)$$

, ο οποίος παριστά την κάθετο στην εφαπτομένη της επιφάνειας διαρροής σε κάθε σημείο της (βλέπε σχήμα 2.9).

Επιπλέον θεωρώντας ότι, εάν από το σύνορο της αρχικής επιφάνειας διαρροής επιβληθεί μια μεταβολή των τάσεων $d\sigma_{ij}$ διακρίνονται, για το είδος της φόρτισης που προκύπτει, οι εξής περιπτώσεις (όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.9) :



Σχήμα 2.8 Σχηματική αναγωγή του μονοαξονικού ορίου διαρροής στην επιφάνεια διαρροής στον χώρο των τάσεων - Μεταβολή της γεωμετρίας της επιφάνειας διαρροής κατά την πλαστική φόρτιση.

α) **Πλαστική Φόρτιση**, όταν : $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$ (καθώς η γωνία μεταξύ του $(\nabla f)_{ij}$

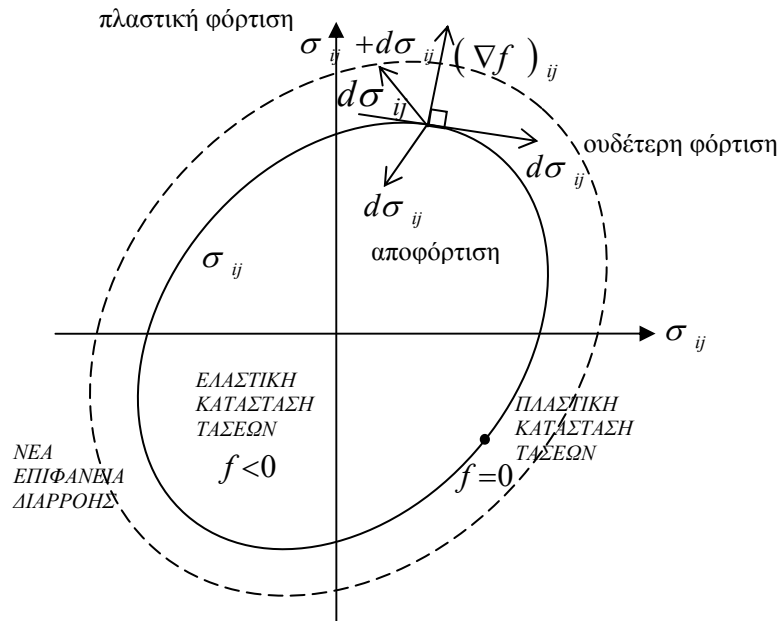
και του $d\sigma_{ij}$ είναι μικρότερη από 90°) - νέα πλαστική παραμόρφωση, η οποία συνεπάγεται την δημιουργία νέας επιφάνειας διαρροής.

β) **Ουδέτερη Φόρτιση**, όταν : $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ (τα $(\nabla f)_{ij}, d\sigma_{ij}$ είναι κάθετα μεταξύ

τους) - η εντατική κατάσταση μετατοπίζεται επάνω στο σύνορο της αρχικής επιφάνειας διαρροής χωρίς να υπάρξει μεταβολή της.

γ) **Ελαστική Αποφόρτιση**, όταν : $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ (η γωνία μεταξύ των $(\nabla f)_{ij}$ και

$d\sigma_{ij}$ είναι μεγαλύτερη από 90°) - πέρασμα σε ελαστική εντατική κατάσταση.



Σχήμα 2.9 Απεικόνιση της επιφάνειας ροής στον γενικευμένο χώρο των τάσεων και των μεγεθών που σχετίζονται με τις περιπτώσεις φόρτισης.

Προκειμένου να ικανοποιηθεί η απαίτηση η τάση κατά την φόρτιση να βρίσκεται επί της επιφάνειας διαρροής ($f=0$) εισάγεται η έννοια της *συνθήκης συνεπειάς* (Consistency Condition), ως :

$$\dot{f}(\sigma_{ij}, q_n, \theta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} = 0 \quad (2.8)$$

, όπου :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt}, \quad \dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

Η οποία αποδεικνύεται εύκολα ως εξής,

θεωρείται ότι μία επιφάνεια διαρροής $f(\sigma_{ij}, q_n, \theta) = 0$ μετατοπίζεται σε μια νέα επιφάνεια διαρροής $f(\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} dt, q_n + \dot{q}_n dt, \theta + \dot{\theta} dt) = 0$ - όπως αυτή έχει προκύψει με την μεταβολή κατά $d\sigma_{ij}, dq_n, d\theta$ των αντιστοίχων μεταβλητών.

Όμως (σειρά κατά Taylor) ισχύει ότι :

$$f(\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} dt, q_n + \dot{q}_n dt, \theta + \dot{\theta} dt) =$$

$$= f(\sigma_{ij}, q_n, \theta) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \mathcal{O}(\dot{\sigma}_{ij} dt, \dot{q}_n dt, \dot{\theta} dt)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας, όσο και ο πρώτος όρος από το δεξί μέλος της είναι μηδέν οπότε το άθροισμα των υπολοίπων όρων της είναι μηδενικό (πλην των ήδη αμελούμενων όρων). Οπότε καταλήγει κανείς στην έκφραση για την συνθήκη συνεπειάς (2.8).

Παρατηρώντας κανείς την σχέση (2.8) αντιλαμβάνεται ότι ο όρος $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$ είναι

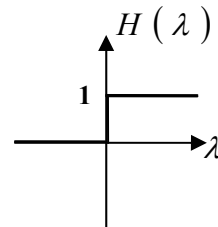
αυτός που καθορίζει το είδος της φόρτισης (για την περίπτωση που δεν υπάρχει επίδραση της θερμοκρασίας) όπως παρουσιάστηκε στις παραπάνω τρεις περιπτώσεις, οπότε γενικεύοντας είναι δυνατόν να οριστεί μια ποσότητα με αυτή την φυσική σημασία, ο λεγόμενος δείκτης φόρτισης (Loading index) ως :

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (2.10)$$

Επιπλέον ορίζεται :

$$\dot{q}_n = \hat{q}_n(\sigma_{ij}, \theta, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\theta}, q_n) H(\lambda) \quad (2.11)$$

,όπου H η βηματική συνάρτηση (βλέπε σχήμα)

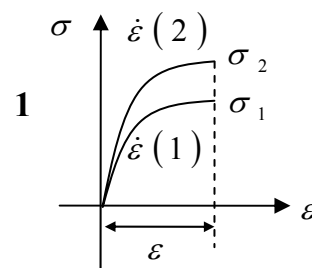


Προκειμένου να έχουμε ανεξαρτησία των μεγεθών από τον ρυθμό (rate-independent) θα πρέπει να ισχύουν επακολούθως :

\hat{q}_n : ομογενής 1ης τάξης ως προς $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\theta}$, άρα :

$$\hat{q}_n(\sigma_{ij}, \theta, c\dot{\sigma}_{ij}, c\dot{\theta}, q_n) = c\hat{q}_n(\sigma_{ij}, \theta, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\theta}, q_n) \quad (2.12)$$

για παράδειγμα : Αν $\dot{\epsilon}(2) \neq \dot{\epsilon}(1) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$



Επιπλέον θα πρέπει να ικανοποιείται η *συνθήκη συνεχειάς*, δηλαδή το \hat{q}_n θα πρέπει να είναι συνεχές στο $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\theta}$ οπότε, αφού $\dot{q}_n \neq 0$ για $\lambda > 0$ και $\dot{q}_n = 0$ για $\lambda < 0$ - η συνθήκη αυτή υπαγορεύονται από το $H(\lambda)$ -
, τότε συνεπάγεται ότι :

$$\dot{q}_n = 0 \text{ για } \lambda = 0 \quad (2.13)$$

Θεωρώντας γραμμική εξάρτηση \hat{q}_n επί των $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\theta}$, δηλαδή :

$$\hat{q}_n = A_{nij} \dot{\sigma}_{ij} + A_n \dot{\theta} \quad (2.14)$$

, με A_{nij} , A_n συναρτήσεις των μεταβλητών κατάστασης,

άρα από την συνθήκη συνεχειάς (2.13) η σχέση (2.14) γίνεται:

$$\left[A_{nij} - r_n \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] \dot{\sigma}_{ij} + \left[A_n - r_n \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] \dot{\theta} = 0 \quad (2.15)$$

, για κάθε $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\theta} \neq 0$ τα οποία ικανοποιούν την $\lambda = 0$, άρα εκ της (2.15) :

$$A_{nij} = r_n \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ και } A_n = r_n \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (2.16)$$

Επακολούθως :

$$\dot{q}_n = \left[r_n \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + r_n \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \right] H(\lambda) = r_n \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \right] H(\lambda) = r_n \lambda H(\lambda)$$

άρα προκύπτει :

$$\dot{q}_n = \langle \lambda \rangle r_n \quad (2.17)$$

με $r_n = r_n(\sigma_{ij}, \theta, q_n)$

Θέτοντας :

$$r_n = \frac{1}{K_p} r_n^*, \text{ όπου } K_p \text{ ορίζεται ως το πλαστικό μέτρο,}$$

Σημείωση : Ουσιαστικά η κλίση του διαγράμματος τάσης-παραμόρφωσης είναι συνάρτηση του πλαστικού μέτρου, όπως και γίνεται αντιληπτό πιο κάτω.

, οπότε λαμβάνεται :

$$\dot{q}_n = \langle \lambda \rangle r_n = \langle \lambda \rangle \frac{1}{K_p} r_n^* = \langle \lambda^* \rangle r_n^*, \text{ όπου } \lambda^* = \frac{1}{K_p} \lambda = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \right]$$

Επειδή :

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \dot{f} = \lambda + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n = 0 \Rightarrow \lambda + \lambda^* r_n \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow$$

$$K_p = - \frac{\partial f}{\partial q_n} r_n^* \quad (2.18)$$

Οι εξισώσεις : (2.8) - επιφάνεια διαρροής - , (2.10) - δείκτης φόρτισης, (2.17) - εξισώσεις ρυθμών εσωτερικών μεταβλητών - και (2.18), συνιστούν την μαθηματική διατύπωση της κλασσικής θεωρίας της πλαστικότητας.

Για την περίπτωση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς υλικού ακολουθείται η παρακάτω διατύπωση.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^e$$

επίσης :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} \left[\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^e \right] = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p \quad (2.19)$$

Ορίζεται ο νόμος ροής :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \langle \lambda \rangle R_{ij} \quad (\text{ως εσωτερική μεταβλητή}) \quad (2.20)$$

, αντικαθιστώντας στην (2.19) προκύπτει :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - E_{ijkl} \langle \lambda \rangle R_{kl} \quad (2.21)$$

Ορίζεται :

$$L_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.22)$$

$$L_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = K_p \lambda \quad (\text{έχοντας αγνοήσει την θερμοκρασία}) \quad (2.23)$$

, άρα λόγω της (2.22) και της (2.23) η (2.21) μετασχηματίζεται ως εξής :

$$L_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = K_p \lambda = L_{ij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \lambda L_{ij} E_{ijkl} R_{kl} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{L_{ij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{K_p + L_{ij} E_{ijkl} R_{kl}} = \frac{1}{K_p} L_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.24)$$

Αρα λόγω της (2.24) η (2.21) γίνεται :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - E_{ijpq} R_{pq} \frac{L_{mn} E_{mnkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{K_p + L_{ab} E_{abcd} R_{cd}} \Rightarrow$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[E_{ijkl} - \frac{(E_{ijpq} R_{pq})(L_{mn} E_{mnkl})}{K_p + L_{ab} E_{abcd} R_{cd}} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.25)$$

Ισοδύναμα ισχύει η σχέση - θέτωντας την παρένθεση ίση με τον τανυστή ελαστοπλαστικό τανυστή στιβαρότητας (Elastoplastic Stiffness tensor) Λ_{ijkl} :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \Lambda_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.26)$$

Σύμφωνα με το κριτήριο διαρροής Mises, η επιφάνεια διαρροής περιγράφεται από την εξής σχέση :

$$f = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - k^2 = 0 \quad (2.27)$$

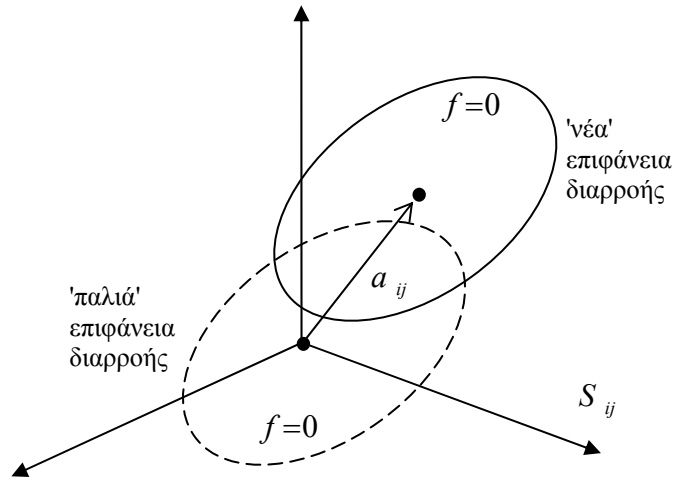
, όπου ο τανυστής εκτροπής τάσεων ορίζεται : $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{\rho\rho}$ (2.28)

και k η τιμή του ορίου διαρροής.

Προκειμένου να οριστεί ο κανόνα κινηματικής κράτυνσης εισάγεται στην έκφραση για την επιφάνεια διαρροής τον λεγόμενο αποκλίνοντα τανυστή κινηματικής κράτυνσης ή τανυστή 'backstress' a_{ij} (deviatoric backstress tensor). Ο τανυστής αυτός παριστά την 'απόσταση' του κέντρου της επιφάνειας διαρροής από την αρχή των αξόνων στον χώρο των τάσεων εκτροπής S_{ij} (βλέπε Σχ.2.10).

Οπότε η σχέση (2.27) μετατρέπεται ως εξής :

$$f = \frac{3}{2} (S_{ij} - a_{ij})(S_{ij} - a_{ij}) - k^2 = 0 \quad (2.29)$$



Σχήμα 2.10 Σχηματική απεικόνιση της μετατόπιση της επιφάνειας διαρροής - ορισμός του τανυστή κινηματικής κράτυνσης.

Εκτελείται καθετικοποίηση του όρου $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ οπότε λαμβάνεται ο εξής τανυστής :

$$n_{ij} = \frac{\partial f / \partial \sigma_{ij}}{|\partial f / \partial \sigma_{kl}|} \quad (\acute{\alpha}\rho\alpha \ n_{ij} \ n_{ij} = 0) \quad (2.30)$$

Επιπλέον τίθεται :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right| = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} = g \quad (2.31)$$

Η (2.30) λόγω της (2.31) :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = g \ n_{ij} \quad (2.32)$$

Θεωρώντας συζευγμένο νόμο ροής (associated flow rule), δηλαδή :

$$L_{ij} = R_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.33)$$

Από την (2.25) λόγω της (2.33) σε συνδυασμό με την (2.32) εξάγεται :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[E_{ijkl} - H(\lambda) \frac{\left(E_{ijpq} n_{pq} \right) \left(n_{mn} E_{mnkl} \right)}{K_p / \left(g^2 + n_{ab} E_{abcd} n_{cd} \right)} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.34)$$

Ορίζεται :

$$K_p^* = \frac{K_p}{g^2}$$

και λόγω της (2.18) είναι :

$$K_p^* = - \frac{1}{g^2} \frac{\partial f}{\partial q_n} r_n \quad (2.35)$$

Η (2.24) λόγω της (2.31) δίνει την εξής έκφραση για τον δείκτη φόρτισης :

$$\lambda = \frac{1}{K_p} n_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.36)$$

Επίσης κατά ανάλογο τρόπο λαμβάνονται οι παράκατω εκφράσεις :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \langle \lambda \rangle n_{ij} \quad (2.37)$$

$$\dot{a}_{ij} = \langle \lambda \rangle \frac{1}{v_{il} n_{kl}} K_a v_{ij} \quad (\text{ισχύει : } v_{ij} v_{ij} = 1) \quad (2.38)$$

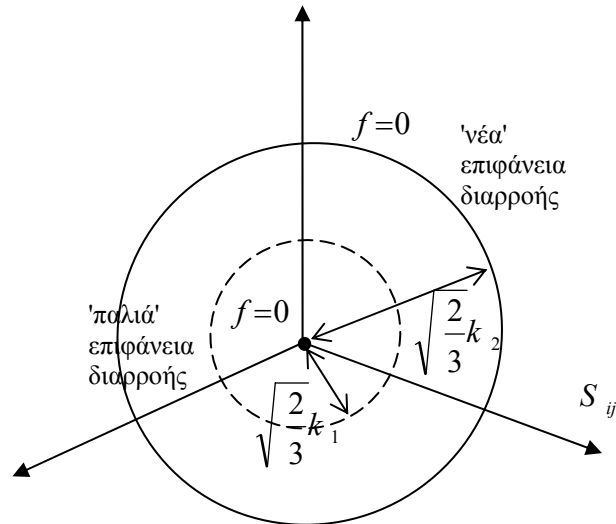
Επίσης ισχύει ότι :

$$\dot{a}_{ij} n_{ij} = \langle \lambda \rangle K_a \quad (2.39)$$

και κατ' αντιστοιχία :

$$\dot{\sigma}_{ij} n_{ij} = \langle \lambda \rangle K_p \quad (2.40)$$

Όσον αφορά τον προσδιορισμό του κανόνα ιστροπικής κράτυνσης, θα πρέπει να οριστεί ο τρόπος με τον οποίο θα εξελίσσεται η εσωτερική μεταβλητή k (βλέπε σχέση 2.29).



Σχήμα 2.11 Σχηματική απεικόνιση της διόγκωσης της επιφάνειας διαρροής (θεωρούμενης ως σφαίρα).

Συγκεκριμένα ορίζουμε τις εξής εκφράσεις, κατ' αναλογία με την έκφραση του τανυστή της backstress , ως εξής :

$$\dot{k} = \langle \lambda \rangle \bar{k} \quad (2.41)$$

Από την (2.41) προκύπτει : $K_p = -\frac{\partial f}{\partial k} \bar{k} \Rightarrow (\text{λόγω της } f=0) K_p = 2 k \bar{k} \quad (2.42)$

Ακόμη, ορίζεται η *ισοδύναμη πλαστική τροπή* $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ (equivalent plastic strain) και επακολούθως προκύπτει η παρακάτω έκφραση για το k , η χρησιμότητα των οποίων θα αναλυθεί στο κεφάλαιο που αναφέρεται στα μοντέλα πλαστικότητας :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.43)$$

Συνεπώς προκύπτει :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} (3 S_{ij} \lambda) (3 S_{ij} \lambda)} = \lambda \sqrt{6 S_{ij} S_{ij}} = \lambda \sqrt{6 \frac{2}{3} k^2} \Rightarrow$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \lambda (2 k) \quad (2.43)$$

Ορίζεται :

$$k' = \frac{dk}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (2.44)$$

και ως γνωστόν :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dt} \quad (2.45)$$

Επίσης είναι : $\dot{k} = \frac{dk}{dt} = \frac{dk}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dt}$, οπότε λόγω των (2.44) και (2.45) εξάγεται ότι :

$$\dot{k} = k' \dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (2.46)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$\dot{k} = k' \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2.47)$$

Συνδέοντας τα παραπάνω με όσα λέχθηκαν για την κινηματική κράτυνση, μπορεί κανείς να προσδιορίσει από την συνθήκη συνεπείας - παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την (2.29) - έναν μικτό τρόπο κράτυνσης (κινηματικής και ισοτροπικής), ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} (\text{Συνθήκη Συνεπείας :}) \dot{f}=0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \dot{a}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow g n_{ij} + (-g n_{ij} \dot{a}_{ij}) + \frac{\partial f}{\partial k} \sqrt{\frac{2}{3}} k' \lambda = 0 \Rightarrow g \lambda K_p - g \lambda K_a + (-2k) k' \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda = 0 \quad (2.48) \end{aligned}$$

Υπολογίζεται ο όρος g ως εξής :

$$g^2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3^2 (S_{ij} - a_{ij})(S_{ij} - a_{ij}) = 2 \frac{2}{3} k^2 \Rightarrow g = 3 \sqrt{\frac{2}{3}} k \quad (2.49)$$

Αντικαθιστώντας την (2.49) στην (2.48) προκύπτει η εξής εξίσωση :

$$K_p = K_a + \frac{2}{3} k' \quad (2.50)$$

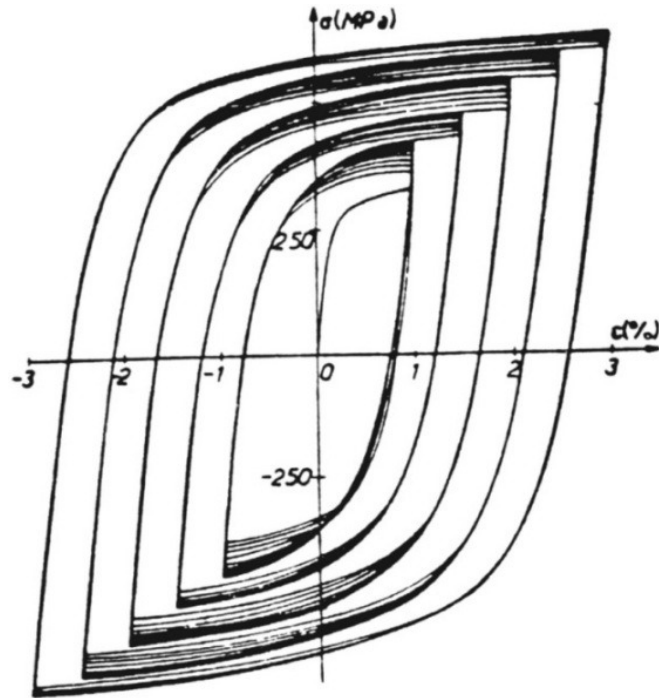
3

ΕΚΘΕΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

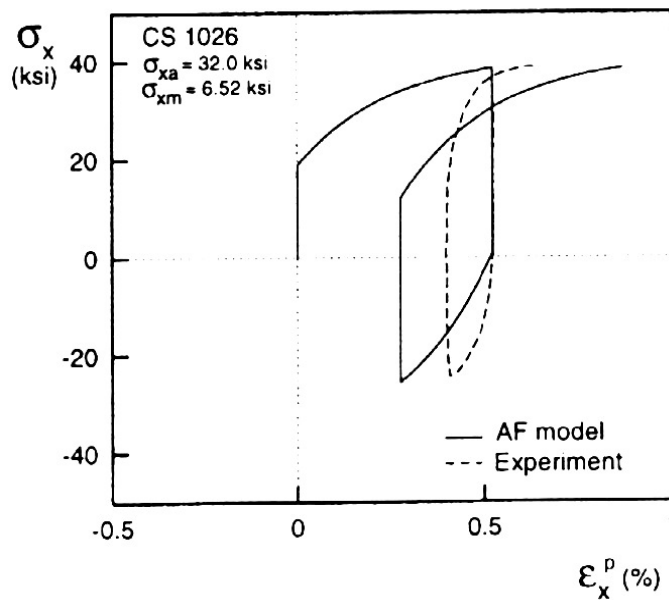
3.1 ΕΚΘΕΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Παρά το γεγονός ότι το πλήθος των κατασκευών σχεδιάζονται ώστε να μην υπερβούν ποτέ το όριο διαρροής τους, η ελαστοπλαστική συμπεριφορά είναι συνηθισμένη σε περιοχές με υψηλή συγκέντρωση τάσεων οι οποίες υπόκεινται σε κυκλική φόρτιση. Κατά συνέπεια είναι απαραίτητη η δημιουργία και εφαρμογή μη-γραμμικών μοντέλων τάσης-παραμόρφωσης (καταστατικά μοντέλα) τα οποία να είναι ικανά να περιγράψουν αυτού του είδους την συμπεριφορά ενός υλικού. Τα περισσότερα από τα καταστατικά μοντέλα, συμπεριλαμβανομένων και πολλών μοντέλων πλαστικότητας, είναι εκ φύσεως φαινομενολογικά, το οποίο σημαίνει ότι βασίζονται σε μερικές γενικές παρατηρήσεις. Θα πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ της θεωρίας πλαστικότητας, η οποία περιγράφει το κύριο πλαίσιο και τις έννοιες του θέματος, και των μοντέλων πλαστικότητας, τα οποία χρησιμοποιούν την θεωρία πλαστικότητας διαμορφωμένη κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνουν την προσέγγιση των παρατηρούμενων φαινομένων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η αξιολόγηση ενός καταστατικού μοντέλου κυκλικής πλαστικότητας, βασισμένο στην δομή του μοντέλου το οποίο προτάθηκε από τους Armstrong & Frederick [3], μέσω αριθμητικής εφαρμογής του. Η ανάλυση που πρόκειται να ακολουθήσει εστιάζεται στην περίπτωση της μονοαξονικής κυκλικής φόρτισης ισότροπων μετάλλων και διακρίνεται σε δύο σκέλη. Κατά πρώτον, εκτελέστηκε προσαρμογή πειραματικών δεδομένων (experimental data fitting) μονοαξονικής κυκλικής πλαστικότητας σε αυξανόμενο εύρος τροπών (strain level) - υπό μηδενική μέση τροπή - για χάλυβα 316 [5] (Σχ. 3.1) με τα δεδομένα που εξάγει αριθμητικός κώδικας του εν λόγω μοντέλου. Κατά δεύτερον, διερευνήθηκε η ικανότητα του προτεινόμενου μοντέλου να προσομοιάσει αποτελεσματικά τον βρόχου υστέρησης μονοαξονικού κυκλικού ερπυσμού (uniaxial ratcheting simulation) για μέταλλα (βλέπε παράδειγμα Σχ.3.2 [6]).



Σχήμα 3.1 Πειραματικά απολέσματα για μονοαξονική κυκλική φόρτιση σε αυξανόμενο επίπεδο παραμόρφωσης για δοκίμιο Χάλυβα 316 L [5],[10].



Σχήμα 3.2 Σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων με το μοντέλο των Armstrong & Frederick [3] για ελεγχόμενο από τάση βρόγχο υστέρησης (stress controlled hysteresis loop) [6].

3.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΛΥΣΗΣ

Στο τμήμα αυτό θα αναφερθούν εν συντομία τα κριτήρια εκείνα με τα οποία θα αξιολογηθεί η ικανότητα, του μοντέλου προτείνεται, να επιτύχει τον αντικειμενικό σκοπό της παρούσας εργασίας, όπως αυτός αναλύθηκε στην ενότητα 3.1. Το μοντέλο θα πρέπει να διαθέτει τα παρακάτω χαρακτηριστικά :

Κριτήριο 1ο : Δυνατότητα για ακριβή προσομοίωση κυκλικών καμπύλων τάσης-παραμόρφωσης για ισότροπα μέταλλα υπό μονοαξονική φόρτιση, όπως και για την περίπτωση καμπύλων κυκλικού ερπυσμού.

Κριτήριο 2ο : Απλότητα ως προς την αριθμητική εφαρμογή του, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η απαίτηση διατήρησης στην μνήμη του H/Y των εσωτερικών μεταβλητών του μοντέλου, οι οποίες ενημερώνονται σε κάθε βήμα του αλγορίθμου [5].

Κριτήριο 3ο : Εύκολη διακρίβωση (calibration) των σταθερών του μοντέλου από πειραματικά αποτελέσματα (κατά προτίμηση μονοαξονικά πειράματα), το οποίο συνεπάγεται ότι και ο αριθμός τους θα είναι μικρός.

Προκειμένου να διαπιστώσει κανείς κατά ποιόν βαθμό ικανοποιούνται τα παραπάνω κριτήρια, από το προτεινόμενο μοντέλο, θα πρέπει να δημιουργηθεί ένα πλαίσιο σύγκρισής του με κάποιο από τα ήδη δοκιμασμένα - αποτελεσματικά μοντέλα κυκλικής πλαστικότητας. Όπως παρουσιάζεται και στο κεφάλαιο 6, η σύγκριση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από τον κώδικα του προτεινόμενου μοντέλου επιχειρείται με τα αποτελέσματα κώδικα που χρησιμοποιεί το μοντέλο που προτάθηκε από τον Chaboche [4].

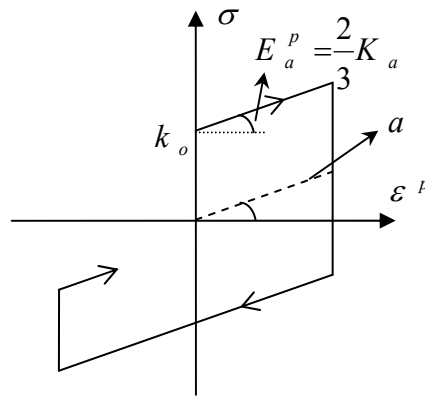
4

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ

4.1 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ

Το 1954 και 1956 αντιστοίχως, ο Ishlinskii [12] και Prager [11] εισήγαγαν τον πρώτο κινηματικό κανόνα κράτυνσης για την περίπτωση της μονοαξονική φόρτιση. Θεώρησαν ότι $\nu = n$, όπως επίσης ότι η επιφάνεια διαρροής κινείται κατά την κατεύθυνση του ρυθμού της πλαστικής παραμόρφωσης - γραμμική κράτυνση - δηλαδή :

$$\dot{a} = \langle \lambda \rangle K_a n \Rightarrow \dot{a} = K_a \dot{\epsilon}^p \quad (4.1)$$



Σχήμα 4.1 Απεικόνιση της εξέλιξης της backstress κατά Prager σε μονοαξονική φόρτιση.

Στις σημαντικές ελλείψεις του εν λόγω μοντέλου περιλαμβάνεται η αδυναμία του να προσωμοιώσει την ομαλή ελαστοπλαστική μετάβαση, τόσο κατά την φόρτιση, όσο και στην αποφόρτιση - προβλέπει ίδια κλίση και στις δύο περιπτώσεις. Επίπλέον δεν έχει την ικανότητα να προβλέψει σταθερό συμμετρικό βρόγχο υστέρησης για κυκλικές φορτίσεις.

Το 1959 ο Ziegler πρότεινε μια παραλλαγή του κανόνα του Prager, θεωρώντας ότι η επιφάνεια διαρροής κινείται στην κατεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια διαρροής,

$$\dot{a} = \mu (\sigma - a) \quad (4.2)$$

(όπου μ μια σταθερά προσδιοριζόμενη από την συνθήκη συνεπείας)

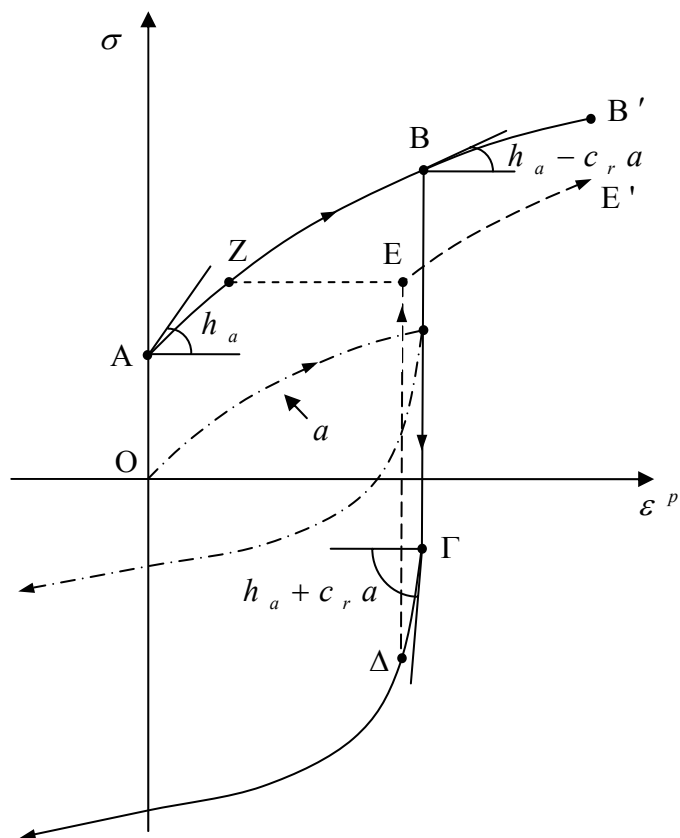
, χωρίς όμως να βελτιώνονται ουσιαστικά τα χαρακτηριστικά του μοντέλου από το οποίο προέκυψε.

Το 1966 οι Armstrong και Frederick [3] πρότειναν ένα φαινομενολογικά παρόμοιο μοντέλο προς αυτό του Prager. Το αποκαλούμενο μοντέλο - μη γραμμικής κινηματικής κράτυνσης - 'εξαφανιζόμενης μνήμης' (evanescent memory) στηρίζεται στον όρο 'δυναμικής ανάκτησης' (dynamic recovery term) που προστέθηκε στην σχέση (4.1),

$$\dot{a} = \frac{2}{3} h_a \dot{\epsilon}^p - c_r \dot{\epsilon}^p a \quad (4.3)$$

(όπου γενικά h_a, c_r συναρτήσεις του $\dot{\epsilon}^p$)

Η διεύθυνση και το 'μέγεθος' της κίνησης της επιφάνειας διαρροής μεταβάλλονται από την εξέλιξη της backstress. Ουσιαστικά η σχέση (4.2) βασίζει την λειτουργία της στο γεγονός ότι η backstress μειώνεται πιο γρήγορα κατά την αποφόρτιση, απ' ό τι αυξάνει κατά την φόρτιση - όπως διακρίνεται χαρακτηριστικά για την μονοαξονική περίπτωση στο σχήμα 4.2. Από την σχέση (4.3) λαμβάνεται για το κινηματικό μέτρο (εκ του K_p) στην μονοαξονική κατάσταση $E_a = h_a - c_r a$, με μείον για την φόρτιση και συν για την αποφόρτιση. Η κλίση της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης (χωρίς ιστροπική φόρτιση) ισούται με το κινηματικό μέτρο. Στο σχήμα 4.2 φαίνονται οι κλίσεις για τα σημεία στην αρχή της πλαστικής φόρτισης (Α), στο σημείο (Β) και στην εκκίνηση της αντίστροφης φόρτισης (Γ). Εάν από το σημείο (Β) συνεχιστεί η φόρτιση προς το σημείο (Β') θα μηδενιστεί η κλίση της καμπύλης καθώς το $E_a = 0$ διότι το a θα έχει λάβει την τιμή $h_a / c_r = a^s$, δηλαδή την τιμή κορεσμού του (saturation). Η πορεία της backstress παριστάται με την διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από το σημείο (Ο). Ωστόσο το μοντέλο αυτό δεν είναι ικανό να προσομοιώσει την ομαλή ελαστοπλαστική μετάβαση, λόγω ότι οι παράμετροι h_a και c_r είναι πεπερασμένοι αριθμοί, στους οποίους επιπλέον δεν μπορούν να προσδωθούν πολύ μεγάλες τιμές, καθώς αυτό θα έχει ως συνέπεια την αποτυχία στην προσομοίωση πειραματικών καμπύλων τάσης-παραμόρφωσης (experimental data fitting).



Σχήμα 4.2 Σχηματική απεικόνιση της συμπεριφοράς του κινηματικού μοντέλου κράτυνσης των Armstrong και Frederick [3].

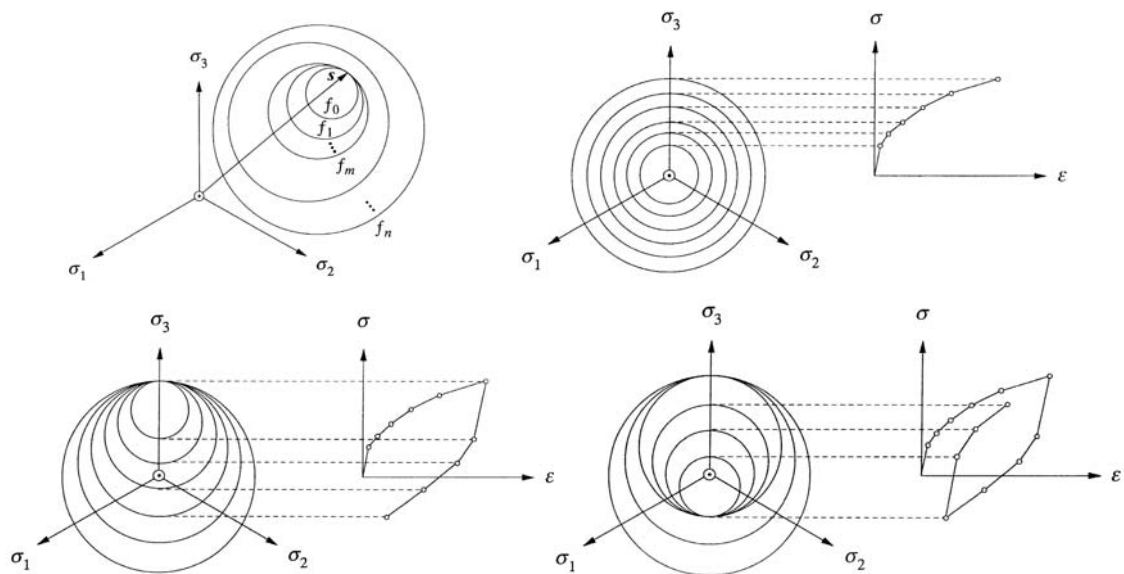
Επιπλέον, θα πρέπει να αναφερθεί ότι το εν λόγω μοντέλο διαθέτει και μία ακόμη σημαντική ατέλεια. Συγκεκριμένα, η γρήγορη μεταβολή του a κατά την αποφόρτιση - σημείο (Γ) - δεν αντισταθμίζεται από τον ρυθμό αύξησης του ίδιου κατά την πορεία (ΔΕΕ'), με αποτέλεσμα η καμπύλη σ - ε να τέμνει νοητά σε χαμηλότερο σημείο (undershooting) απ' ότι στην πραγματική κατάσταση την καμπύλη της αρχικής αποφόρτισης (ΒΓ). Όπως μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει η κλίση στο σημείο (Ε) είναι ίδια με αυτήν στο (Ζ). Η συμπεριφορά αυτή του μοντέλου είναι μείζωνος σημασίας για το φαινόμενο του κυκλικού ερπυσμού, καθώς οδηγεί σε υπερεκτίμηση του, στην περίπτωση με μη-μηδενική μέση τάση.

Προκειμένου να βελτιώσει τα αδύνατα σημεία του μοντέλου αυτού, το 1979 ο Chaboche [10] επέκτεινε την εξίσωση (4.3) θεωρώντας ότι η backstress είναι άθροισμα επιμέρους backstress με διαφορετικές σταθερές η κάθε μία, δηλαδή :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Με την τροποποίηση αυτή επιτυγχάνεται ομαλότερη ελαστοπλαστική μετάβαση, καθώς το άθροισμα διαφορετικών μορφών εξέλιξης των backstress αποδίδει καλύτερα τα επιμέρους χαρακτηριστικά που απαιτούνται τόσο για το fitting των πειραμάτων, όσο και για την προσομοίωση του φαινομένου του ratcheting. Όμως για να επιτύχει κανείς καλά αποτελέσματα σε αυτούς τους τομείς θα πρέπει να εισάγει μεγάλο πλήθος backstress, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πολυπλοκότητα του μοντέλου και ως εκ τούτου να γίνεται πιο δύσκολος ο προσδιορισμός των σταθερών του υλικού και, όπως η αριθμητική εφαρμογή του - αύξηση απαιτήσεων σε υπολογιστική μνήμη.

Το 1967 ο Mroz [14] πρότεινε ένα μοντέλο το οποίο βασίζεται στην έννοια των πολλών ένθετων επιφανειών (nested surfaces) φόρτισης εντός της επιφάνειας διαρροής, οι οποίες με την σειρά τους μετατοπίζονται η μία μέσα στην άλλη. Το πλαστικό μέτρο δίνεται σαν συνάρτηση του μεγέθους της ενεργής επιφάνειας (active surface). Η ενεργή επιφάνεια είναι η μεγαλύτερη επιφάνεια με την οποία έρχεται σε επαφή η τάση. Όταν η ενεργή επιφάνεια 'αγγίξει' την επόμενη επιφάνεια, δεν είναι πλέον ενεργή, αλλά απλά μετατοπίζεται παράλληλα με το σημείο της τάσης. Η κατεύθυνση στην οποία μετατοπίζεται η ενεργή επιφάνεια δίδεται από το διάνυσμα που συνδέει το σημείο της τάσης με το σημείο στην επόμενη μεγαλύτερη επιφάνεια, η οποία έχει το ίδιο κάθετο διάνυσμα με την ενεργή επιφάνεια (βλέπε σχήμα 4.3). Προκειμένου να επιτευχθεί καλή προσομοίωση της καμπύλης τάσεων-παραμορφώσεων για πειραματικά δεδομένα, απαιτείται μεγάλος αριθμός επιφανειών.

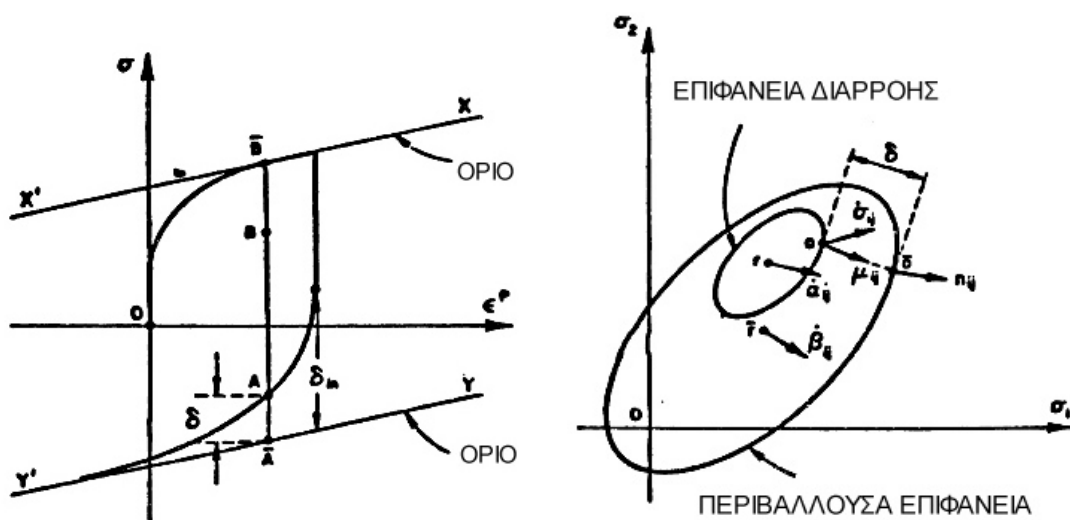


Σχήμα 4.3 Σχηματική απεικόνιση των ενθέτων επιφανειών - μονοαξονικής φόρτισης και αποφόρτισης με το μοντέλο του Mroz [14].

Μία εξειδικευμένη περίπτωση - με δυνατότητα για εύκολη αριθμητική εφαρμογή - του μοντέλου του Mroz προτάθηκε το 1974 από τον Dafalias και Porou [15]. Συγκεκριμένα, το μοντέλο περιορίστηκε σε δύο επιφάνειες (από εκεί εξάλλου και η ονομασία του 'μοντέλο δύο επιφανειών'), την επιφάνεια διαρροής και την περιβάλλουσα επιφάνεια αυτής (bounding surface). Στο μοντέλο αυτό το πλαστικό μέτρο δίδεται ως συνάρτηση της απόστασης ανάμεσα στις δύο αυτές επιφάνειες. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.4, όταν αντιστρέφεται η κατεύθυνση φόρτισης η απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών μετράται μεταξύ των σημείων των επιφανειών που έχουν το ίδιο κάθετο διάνυσμα. Το μέγεθος της απόστασης δίδεται ως δ , ενώ το δ_{in} παριστά την τιμή του ίδιου όταν επανεκινείται η πλαστική ροή. Η κατεύθυνση της κίνησης της επιφάνειας διαρροής δίδεται από τον ίδιο κανόνα όπως και στο μοντέλο του Mroz, δηλαδή από το διάνυσμα που συνδέει τα σημεία στις δύο επιφάνειες με το ίδιο κάθετο διάνυσμα. Το πλαστικό μέτρο υπαγορεύεται από την εξής σχέση :

$$E_p = \bar{E}_p + h(\delta_{in}) \frac{\delta}{\delta_{in} - \delta} \quad (4.5)$$

Εδώ το \bar{E}_p παριστά το πλαστικό μέτρο πριν την αποφόρτιση με επαφή στην περιβάλλουσα επιφάνεια. Παρατηρεί κανείς ότι αυτή η σχέση ικανοποιεί την απαίτηση για ομαλή ελαστοπλαστική μετάβαση, αφού για $\delta = \delta_{in} \Rightarrow E_p \rightarrow \infty$ και για $\delta = 0 \Rightarrow E_p = \bar{E}_p$.



Σχήμα 4.4 Σχηματική απεικόνιση του μοντέλου των δύο επιφανειών [15], στον μονοαξονικό χώρο (αριστερά) και στον πολυαξονικό χώρο (δεξιά).

Στο πλαίσιο των παραπάνω αναφερθέντων βασικών κινηματικών κανόνων κράτυνσης έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφορες τροποποιήσεις προκειμένου να επιτευχθούν καλύτερα αποτελέσματα ιδιαίτερα σε πολυαξονικές φορτίσεις. Όπως αναλύθηκε σε δημοσιευμένη εργασία των Bari και Hassan το 2000 [16], η παραλλαγή στο μοντέλο του Chaboche που πρότεινε ο ίδιος το 1991 [17], το μοντέλο των Ohno και Wang [18] καθώς και το προτεινόμενο από τους προαναφερθέντες μοντέλο παρουσιάζουν πολύ καλές αποκρίσεις στην προσομοίωση του ratcheting στην πολυαξονική πλαστικότητα.

4.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΗΣ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ

Οι κανόνες ιστροπικής κράτυνσης δεν μπορούν από μόνοι τους να περιγράψουν το φαινόμενο Bauschinger, όπως είναι φανερό από τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζεται η επιφάνεια διαρροής. Οπότε στις περισσότερες των περιπτώσεων, που μελετώνται στην κυκλική πλαστικότητα, οι κανόνες αυτοί συνδεόνται με κινηματική κράτυνση. Ο Krieg το 1976 [19], McDowell το 1985 [20], Voyiadjis και Kattan το 1990 [19], πρότειναν μοντέλα δύο επιφανειών που χρησιμοποιούν ιστροπική κράτυνση στην περιβάλλουσα επιφάνεια, ενώ ο Dafalias και Porou το 1976 [22] και Dafalias και Seyed-Ranjbari το 1981 [8] πρότειναν ιστροπική κράτυνση στην επιφάνεια διαρροής, σαν βελτίωση της πρότασης του Chaboche το 1979 [10]. Εφαρμογή για προσομοίωση μονοαξονικού και πολυαξονικού ratcheting του μοντέλου του Dafalia εκτελέσθηκε από τους Kyriakides και Hassan το 1997 [9]. Συγκεκριμένα ο Dafalias θεώρησε ότι για το k' ισχύει η ακόλουθη σχέση :

$$k' = c (k_s - k) \quad (4.6)$$

(όπου k_s : τιμή κορεσμού k και c : σταθερά του υλικού που ελέγχει τον ρυθμό κορεσμού)

Για την περίπτωση της κυκλικής κράτυνσης υλικού αυτό που καθορίζει την μέγιστη κυκλική τάση στον σταθεροποιημένο κύκλο (βλέπε κεφάλαιο 2), είναι το πλάτος των τροπών ($\Delta \epsilon$). Το k_s σχετίζεται άμεσα με την μέγιστη αυτή τάση, έχοντας αφαιρέσει την επίδραση του φαινομένου της κινηματικής κράτυνσης. Σε αυξανόμενο επίπεδο τροπών, με μέση τροπή μηδενική, η μέγιστη σταθεροποιημένη τιμή της τάσης αυξάνεται σε αντιστοιχία με την τάση που σχετίζεται για την μονοτονική φόρτιση στο

ήμισι του εύρους των τροπών ($\Delta\varepsilon/2$), όσο το υλικό κρατύνεται. Εφαρμόζοντας κανείς λοιπόν την ανάλυση που προτείνει ο Dafalias [5] - όπως εκτελέσθηκε από τον Kyriakides και Hassan [9] - , με τον ορισμό μιας 'υπερσφαίρας' στον χώρο των πλαστικών τροπών (plastic strain space hypersphere) και ακολούθως πειραματικό προσδιορισμό όλων των απαραίτητων παραμέτρων που υπησέρχονται στον κανόνα αυτό, είναι δυνατόν να περιγραφεί το φαινόμενο της ισοτροπικής κράτυνσης στην περίπτωση της κυκλικής πλαστικότητας. Για την μονοαξονική περίπτωση λαμβάνονται οι εξής σχέσεις :

$$S = (\varepsilon^p - \gamma)^2 - p^2 = 0 \quad (4.7)$$

$$\dot{p} = \eta \left| \dot{\varepsilon}^p \right| \quad (4.8)$$

$$\dot{\gamma} = (1 - \eta) \dot{\varepsilon}^p \quad (4.9)$$

(όπου γ : οι συντεταγμένες του κέντρου της αποκλίνουσας πλαστικής τροπής, p : η ακτίνα της υπερσφαίρας των πλαστικών τροπών, η : σταθερά του υλικού)

5

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο, σαν συνέχεια της θεωρίας πλαστικότητας όπως αυτή εκτέθηκε στο κεφάλαιο 2, θα γίνει συγκεντρωτική αναφορά στις παραδοχές και θεωρήσεις που ενσωματώνονται στην διαμόρφωση του συγκεκριμένου καταστατικού μοντέλου. Επιπλέον πρόκειται να αναλυθεί το εν λόγω μοντέλο κυκλικής πλαστικότητας, ξεκινώντας από την βασική διατύπωσή του σε πολυαξονική μορφή και εξειδικεύοντας λεπτομερώς στο μονοαξονικό πρόβλημα. Επιπλέον, επεξηγείται ο αλγόριθμος και ο κώδικας που δημιουργήθηκε με σκοπό την αριθμητική εφαρμογή του μοντέλου αυτού για την περίπτωση κυκλικού μονοαξονικού προβλήματος, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 3.

5.2 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ

Η δημιουργία ενός καταστατικού μοντέλου πλαστικότητας (κατ' ουσία και η ίδια η βάση της μαθηματικής θεωρίας της πλαστικότητας για μικρές παραμορφώσεις στηρίζεται σε τέτοιου είδους θεωρήσεις, όπως ήδη έχει παρουσιαστεί στο κεφάλαιο που περιέγραψε την θεωρία) υπαγόρευει κάποιες "απλουστεύσεις" σε σχέση με την πραγματική κατάσταση. Κατά βάση αυτές στο συγκεκριμένο μοντέλο απαρτίζονται από τα παρακάτω χαρακτηριστικά :

(1) Θεωρείται αθροιστική υπέρθεση των τροπών ($\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$) - απαραίτητο συνθήκη για την θεωρία της πλαστικότητας, καθώς για τις περιπτώσεις που μελετώνται $\varepsilon \leq 10\%$.

(2) Η θεωρία πλαστικότητας είναι προσαρμοσμένη στην μορφή της μη-εξαρτώμενης (rate-independent plasticity) από τον ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο των μεγεθών - παραμόρφωση, εσωτερικές μεταβλητές, κλπ. - θεωρίας.

(3) Αγνοείται, χάριν απλότητας στην μοντελοποίηση, η επίδραση της θερμοκρασίας στο υπό μελέτη μεταλλικό υλικό .

(4) Μελετώνται αρχικώς ισότροπα υλικά και ειδικότερα θεωρούμε πολυκρυσταλλικά μέταλλα). Η επιλογή αυτή γίνεται διότι η συμπεριφορά τους είναι ευκολότερο να περιγραφεί, γίνονται καλύτερα κατανοητά τα φαινόμενα και γενικώς υπάρχει πληθώρα λεπτομερών πειραματικών δεδομένων κυκλικών φορτίσεων. Η αρχική ισοτροπία μετατρέπεται σε ανισοτροπία μόνο στο μέτρο της εισαγόμενης κινηματικής κράτνσης - βλέπε (7).

(5) Για μικρές παραμορφώσεις και τάσεις η συμπεριφορά του υλικού (μέταλλο) θεωρείται γραμμικά ελαστική, όπως επίσης δεν λαμβάνεται υπόψιν και το φαινόμενο της ελαστοπλαστικής σύζευξης - βλέπε Κεφάλαιο 2.

(6) Χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο διαρροής του Von Mises, διότι περιγράφει ελαφρώς καλύτερα την συμπεριφορά των μεταλλικών υλικών σε σχέση με το κριτήριο του Tresca.

(7) Στο μοντέλο χρησιμοποιείται τόσο η έννοια της κινηματικής, όσο και της ισοτροπικής κράτνσης (από κοινού ή εναλλακτικά), προκειμένου να προσεγγισθούν αποτελεσματικά τα κυκλικά φαινόμενα πλαστικότητας που μελετώνται.

5.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

5.3.1 Πολυαξονική Κατάσταση

Το καταστατικό μοντέλο κυκλικής πλαστικότητας που προτείνεται στην εργασία χρησιμοποιεί την έννοια του μη-γραμμικού κινηματικού κανόνα κράτνσης που εισήγαγαν οι Armstrong & Frederick [3], ο οποίος παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ως γνωστόν για την backstress ισχύει η ακόλουθη έκφραση :

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{2}{3} h_a \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \mathbf{a} \quad (5.1)$$

επιπλέον η πλαστική τροπή ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$) εκφράζεται ως εξής :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \langle \lambda \rangle \mathbf{n} \quad (5.2)$$

ακολουθώντας αντικαθιστώντας την (5.2) στην (5.1) προκύπτει :

$$\dot{a} = \langle \lambda \rangle \left(\frac{2}{3} h_a \mathbf{n} - c \mathbf{a} \right) = \langle \lambda \rangle c \left(\frac{2}{3} \frac{h_a}{c} \mathbf{n} - \mathbf{a} \right)$$

και θέτοντας $\frac{2}{3} \frac{h_a}{c} = a^s$ λαμβάνεται η σχέση :

$$\dot{a} = \langle \lambda \rangle c (a^s \mathbf{n} - \mathbf{a}) \quad (5.3)$$

Έστω ότι ο συντελεστής c της ανωτέρω σχέσης δεν είναι σταθερός, αλλά εξαρτάται από την βαθμωτή απόσταση δ μεταξύ του $\hat{\mathbf{a}}$ και του \mathbf{a} , δηλαδή $\delta = [\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}] \mathbf{n}$ όπου $\hat{\mathbf{a}} = a^s \mathbf{n}$, όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.1, τότε $c = c(\delta)$, άρα :

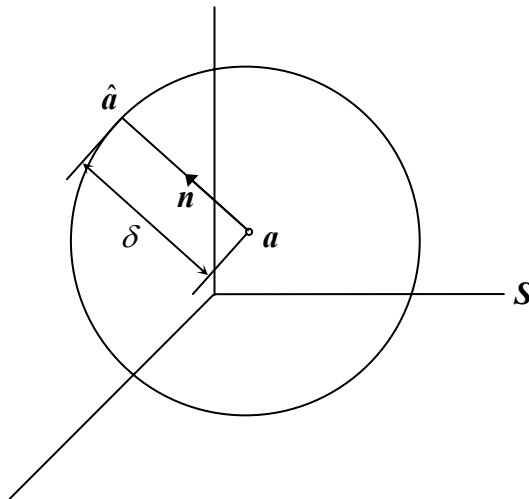
$$\dot{a} = \langle \lambda \rangle c(\delta) [a^s \mathbf{n} - \mathbf{a}] \quad (5.4)$$

ως γνωστόν :

$$\dot{a} \mathbf{n} = \langle \lambda \rangle K_a \quad (5.5)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει :

$$K_a = c(\delta) [a^s - \mathbf{a} \mathbf{n}] \quad (5.6)$$



Σχήμα 5.1 Επιφάνεια φόρτισης για τον τανυστή της backstress ορισμός της απόστασης δ

Εισάγεται ο κατευθυντικός τανυστής κράτνσης (directional hardening tensor) ως :

$$\dot{\mathbf{b}} = \langle \lambda \rangle \bar{\mathbf{b}} \quad (5.7)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = h(\mathbf{b}^s \mathbf{n} - \mathbf{b}) \quad (5.8)$$

Από τις (5.7) και (5.8) :

$$\bar{\mathbf{b}} \mathbf{n} = h(\mathbf{b}^s - \mathbf{b} \mathbf{n}) \quad (5.9)$$

Έστω ότι το c δεν εξαρτάται μόνο από το την παράμετρο δ όπως θεωρήσαμε παραπάνω, αλλά και από τον όρο $\bar{\mathbf{b}} \mathbf{n}$, δηλαδή : $c = c(\delta, \bar{\mathbf{b}} \mathbf{n})$, τότε :

$$c = c'(\delta) [h_o + h(\mathbf{b}^s - \mathbf{b} \mathbf{n})] \quad (5.10)$$

Αντικαθιστώντας την (5.10) στην (5.6) εξάγεται η εξής έκφραση για το μέτρο κινηματικής κράτυνσης (K_a):

$$K_a = c'(\delta) [h_o + h(\mathbf{b}^s - \mathbf{b} \mathbf{n})] [a^s - \mathbf{a} \mathbf{n}] \quad (5.11)$$

Παρατηρώντας κανείς την σχέση αυτή συμπεραίνει ότι αντίθετα προς την αθροιστική υπέρθεση των τανυστών κινηματικής κράτυνσης όπως προτάθηκε από τον Chaboche [4], στο εν λόγω μοντέλο η υπέρθεση των ιδίων τανυστών εκτελείται με πολλαπλασιαστικό τρόπο (multiplicative decomposition). Η βασική συμπεριφορά της ανωτέρω έκφρασης του μέτρου κινηματικής κράτυνσης εξετάζεται λαμβάνοντας τις εξής περιπτώσεις για τους επιμέρους τανυστές :

$$(i) \text{ Όταν } \varepsilon^p = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ τότε : } K_a = c'(\delta) [h_o + h \mathbf{b}^s] a^s$$

Η τιμή αυτή είναι η αρχική τιμή της κλίσης της καμπύλης $\sigma \sim \varepsilon^p$ και ουσιαστικά η μέγιστη τιμή που είναι δυνατόν να λάβει το K_a .

$$(ii) \text{ Όταν ο } \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}^s \mathbf{n}, \text{ τότε : } K_a = c'(\delta) h_o [a^s - \mathbf{a} \mathbf{n}]$$

Μετά τον κορεσμό (saturation) του τανυστή \mathbf{b} το K_a εξελίσσεται πλέον κατά τον τανυστή \mathbf{a} .

$$(iii) \text{ Όταν και ο } \mathbf{a} \rightarrow a^s \mathbf{n} \text{ δηλαδή } \delta = 0, \text{ τότε : } K_a = 0$$

Ο τανυστής \mathbf{a} έχει φτάσει στο επίπεδο κορεσμού $a^s \mathbf{n}$, οπότε η κλίση της καμπύλης $\sigma \sim \varepsilon^p$ μηδενίζεται.

Όσον αφορά τον κανόνα ιστροπικής κράτυνσης που επιλέχθηκε για το μοντέλο θεωρήθηκε ότι ισχύει η ακόλουθη έκφραση κατά την πρόταση των Dafalias & Seyed-Ranjbari [5] [8], όπως έχει ήδη αναλυθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο :

$$\dot{k} = c_k \left(k^s - k \right) \dot{\varepsilon}^p \quad (5.12)$$

, όπου k^s η τιμή κορεσμού του k και c_k μία σταθερά του υλικού που ελέγχει τον ρυθμό κορεσμού. Περαιτέρω διερεύνηση της συμπεριφοράς της εν λόγω σχέσης δίδεται πιο άμεσα στην ενότητα που πραγματεύεται την προσομοίωση του κυκλικού μονοαξονικού πειράματος.

5.3.2 Μονοαξονική Φόρτιση

Όπως έχει αναφερθεί στην έκθεση του προβλήματος με το οποίο πραγματεύεται η εργασία η εφαρμογή του μοντέλου εκτελέστηκε σε μονοαξονική κατάσταση τάσεων-παραμορφώσεων. Συνεπώς είναι απαραίτητο στο σημείο αυτό να δοθούν οι μονοαξονικές εκφράσεις των σχέσεων της ενότητας 5.2.1. Οι ταυιστές των μεγεθών όπως αυτά αναλύθηκαν προηγουμένως, μετατρέπονται στα αντίστοιχα χρονικώς αμετάβλητα βαθμωτά μεγέθη για μία κατεύθυνση. Επιπλέον οι εκφράσεις θα είναι διατυπωμένες σε διαφορική μορφή.

Από την σχέση (5.4) εξαιτίας της (5.2) προκύπτει :

$$\dot{a} = c \left[a^s \dot{\varepsilon}^p - \langle \lambda \rangle a \right] = c \left[a^s \dot{\varepsilon}^p - \left| \dot{\varepsilon}^p \right| a \right] \text{ (αγνοώντας την μεταβολή του χρόνου)} \Rightarrow$$

$$da = c \left[a^s d\varepsilon^p - \left| d\varepsilon^p \right| a \right] \Rightarrow da = c \left[a^s d\varepsilon^p - \text{sign} \left(d\varepsilon^p \right) d\varepsilon^p a \right] \Rightarrow$$

$$\frac{da}{d\varepsilon^p} = c \left[a^s - \text{sign} \left(d\varepsilon^p \right) a \right] \quad (5.13)$$

Αντιστοίχως από την σχέση (5.10) εξάγεται η έκφραση για την παράμετρο c :

$$c = h_o + h \left[b^s - \text{sign} \left(d\varepsilon^p \right) b \right] \quad (5.14)$$

$$\frac{db}{d\varepsilon^p} = h \left[b^s - \text{sign} \left(d\varepsilon^p \right) b \right] \quad (5.15)$$

Οπότε από την (5.13) λόγω της (5.14) εξάγεται :

$$\frac{da}{d\varepsilon^p} = \{ h_o + h [b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p) b] \} [a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p) a] \quad (5.16)$$

Η έκφραση (5.12) για το k λαμβάνει την εξής μορφή :

$$\frac{dk}{d\varepsilon^p} = c_k (k^s - k) \text{sign}(d\varepsilon^p) \quad (5.17)$$

Από το κριτήριο Von Mises, για την μονοαξονική φόρτιση, λαμβάνεται η επιφάνεια ροής (ουσιαστικά πρόκειται για ευθεία):

$$f = 0 \Rightarrow |\sigma - a| - k = 0 \quad (5.18)$$

Οπότε :

$$\sigma = a \pm k \Rightarrow d\sigma = da \pm dk \quad (5.19)$$

,όπου (+) εφελκυστική φόρτιση / (-) θλιπτική φόρτιση.

Επιπλέον η τροπή, με την θεώρηση μικρών παραμορφώσεων όπως έχει ήδη αναφερθεί, αποσυντίθενται ως εξής :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \Rightarrow d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (5.20)$$

Επιπλέον ισχύει για γραμμικά ελαστική συμπεριφορά υλικού :

$$\sigma = E\varepsilon^e \Rightarrow \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (5.21)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (5.21) στην (5.20) λαμβάνεται :

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^p, \text{ οπότε εξαιτίας της (5.19) εξάγεται η κατωτέρω έκφραση :}$$

$$d\varepsilon = \frac{da \pm dk}{E} + d\varepsilon^p \quad (5.22)$$

Στην (5.22) αντικαθιστώνται οι σχέσεις (5.16) και (5.17) ως προς da και dk αντιστοίχως :

$$d\varepsilon = \frac{\{h_o + h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b]\}[a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)a] \pm c_k [k^s - k] \text{sign}(d\varepsilon^p)}{E} d\varepsilon^p + d\varepsilon^p \Rightarrow$$

$$d\varepsilon^p = \frac{E}{E + \{h_o + h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b]\}[a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)a] \pm c_k [k^s - k] \text{sign}(d\varepsilon^p)} d\varepsilon \quad (5.23)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας την σχέση (5.23) στις αναλυτικές εκφράσεις για τα μεγέθη da , db και dk , σχέσεις (5.16), (5.15) (5.17) λαμβάνονται οι εξής εκφράσεις :

$$da = \frac{\{h_o + h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b]\}[a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)a] E}{E + \{h_o + h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b]\}[a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)a] \pm c_k [k^s - k] \text{sign}(d\varepsilon^p)} d\varepsilon \quad (5.24)$$

$$db = \frac{h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b] E}{E + \{h_o + h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b]\}[a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)a] \pm c_k [k^s - k] \text{sign}(d\varepsilon^p)} d\varepsilon \quad (5.25)$$

$$dk = \frac{c_k [k^s - k] \text{sign}(d\varepsilon^p) E}{E + \{h_o + h[b^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)b]\}[a^s - \text{sign}(d\varepsilon^p)a] \pm c_k [k^s - k] \text{sign}(d\varepsilon^p)} d\varepsilon \quad (5.26)$$

Ο όρος $\text{sign}(d\varepsilon^p)$, όπως αυτός εμφανίζεται στις ανωτέρω εκφράσεις, δεν είναι πρακτικό να χρησιμοποιηθεί στην δημιουργία του αριθμητικού κώδικα. Ο λόγος είναι ότι ο αλγόριθμος, όπως θα εξηγηθεί παρακάτω, έχει ως δεδομένο εισαγωγής την συνολική τροπή που υποβάλλεται το υπό μελέτη υλικό (strain controlled algorithm), οπότε και υπαγορεύεται η αντικατάσταση αυτού του όρου. Η επιλογή αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι εν σχέσει με την επιλογή ο αλγόριθμος να είναι ελεγχόμενος από την τάση (stress controlled) η προαναφερθείσα είναι περισσότερο γενική ως σχήμα [7]. Όπως έχει αναφερθεί ήδη το πρόβλημα που μελετούμε αφορά κυκλική πλαστικότητα για μονοτονικές φορτίσεις (εφελκυσμός/θλίψη), οπότε και αποδεικνύεται εύκολα ότι :

$$\text{sign}(d\varepsilon^p) = \text{sign}(d\varepsilon) \quad (5.27)$$

Καθώς, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως :

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^p \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \frac{1}{E} + 1 \quad (5.28)$$

Για να ισχύει η ισότητα (5.27) είναι προφανές ότι το αριστερό μέλος της σχέσης (5.28) θα πρέπει να είναι θετικός αριθμός, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα και επακολούθως η ισοδύναμή της :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \frac{1}{E} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} > -E$$

Όμως :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = H,$$

οπότε θα πρέπει για το πλαστικό μέτρο H να είναι : $H > -E$

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι κατά την αντιστροφή της φόρτισης, μετά την εκ νέου διαρροή του υλικού, δεν θα πρέπει η κλίση της καμπύλης $\sigma-\varepsilon$ να υπερβαίνει την ελαστική κλίση, πράγμα το οποίο ισχύει.

Συνδέοντας με όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω, βάσει της σχέσης (5.27), οι σχέσεις (5.24), (5.25), (5.26) μετατρέπονται σε 'ελεγχόμενες' από την ανηγμένη παραμόρφωση (ουσιαστικά την μεταβολή της τροπής).

5.3.3 Τροποποίηση του μοντέλου

Για το παραπάνω μοντέλο προτείνεται μια διαφοροποιημένη μορφή η οποία βασίζεται στην θεώρηση του Chaboche [10] για την 'αποσυναρμολόγηση' της backstress σε άθροισμα επιμέρους backstress, προκειμένου να επιτευχθεί καλύτερο αποτέλεσμα στο fitting της πειραματικής καμπύλης. Συγκεκριμένα, θεωρήθηκε ότι η backstress είναι άθροισμα μιας backstress εξελισσόμενη κατά τον κανόνα Armstrong-Frederick, κατά Prager και πολλαπλασιαστικού τύπου (multiplicative) - όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως.

Δηλαδή (για την μοναξονική κατάσταση) :

$$a = a_1 + a_2 + a_3$$

Όπου :

$$\dot{a}_1 = c_1 \left(a_1^s \mp a_1 \right) \dot{\varepsilon}^p \text{ (Armstrong - Frederick non-linear backstress)}$$

$$\dot{a}_2 = c_2 \dot{\varepsilon}^p \text{ (Prager linear backstress)}$$

$$\dot{a}_2 = c \left(a_2^s \mp a_2 \right) \dot{\varepsilon}^p \text{ (Multiplicative backstress)}$$

όπου : $c = h_o + h \left(b^s \mp b \right)$ και $\dot{b} = h \left(b^s \mp b \right) \dot{\varepsilon}^p$

Οι σταθερές του μοντέλου που θα πρέπει να προσδιοριστούν, όσον αφορά την κινηματική κράτυνση μόνο, είναι οι εξής : c_1 , a_1^s , c_2 , a_2^s , h , b^s , h_o .

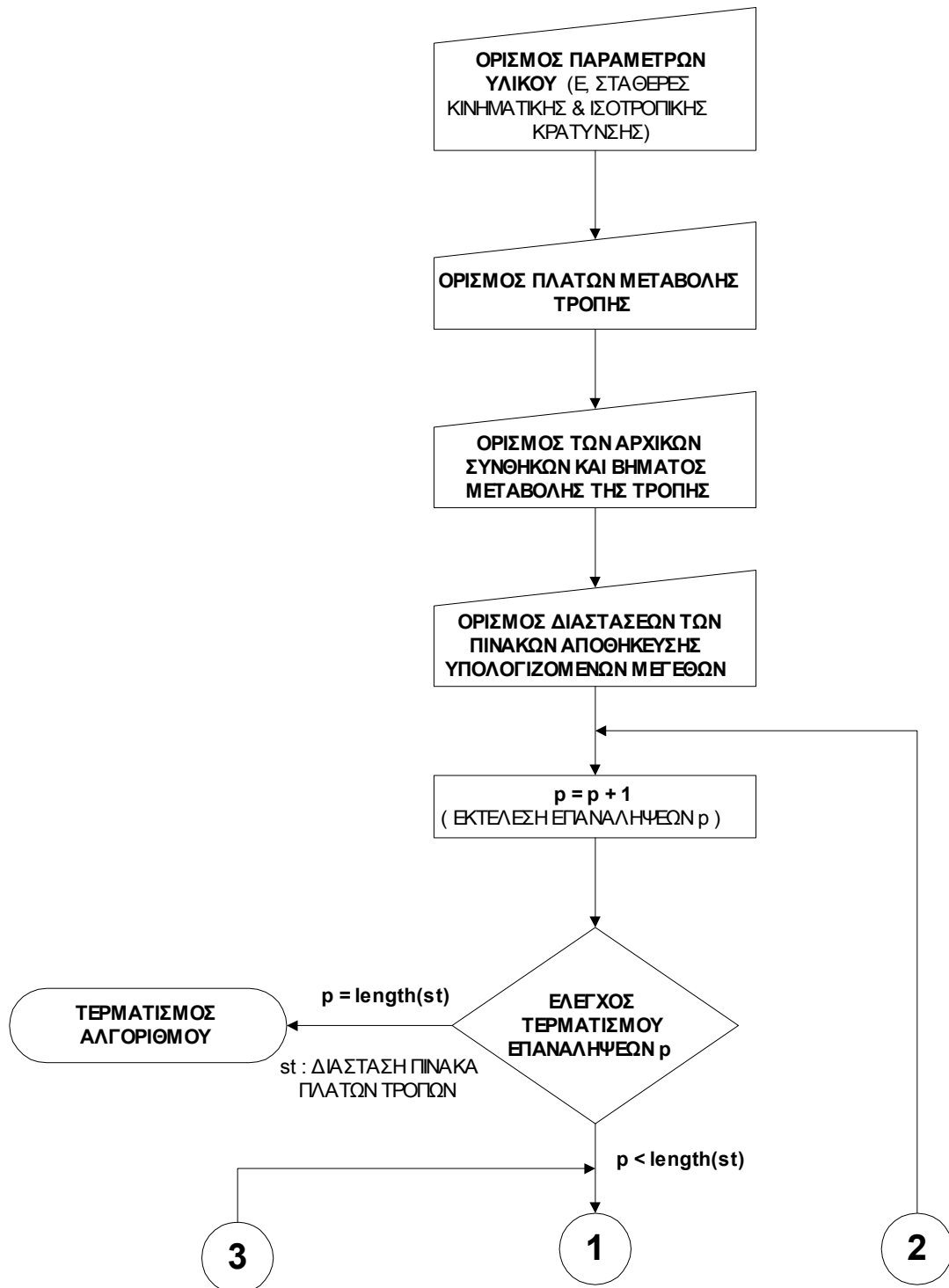
5.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να επιλυθούν οι ανωτέρω διαφορικές εξισώσεις είναι η μέθοδος Euler [7] στην απευθείας μορφή της (explicit Euler method). Ο κύριος λόγος για τον οποίο προτιμήθηκε αυτή η παραλλαγή της μεθόδου Euler ήταν η μέγιστη δυνατή απλότητα στην δημιουργία του αλγορίθμου. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η εφαρμογή μίας αντίστροφης αριθμητικής μεθόδου επίλυσης (implicit scheme method), για παράδειγμα η implicit backward Euler, δεν θα προσέφερε σημαντική αύξηση στην ακρίβεια των υπολογισμών και και μείωση του υπολογιστικού χρόνου, καθώς το πρόβλημα αφορά μονοδιάστατη ελαστοπλαστική συμπεριφορά υλικού και όπως παρουσιάζεται από τα αποτελέσματα παρακάτω η αποτελεσματικότητα της χρησιμοποιούμενης μεθόδου κρίνεται περισσότερο από επαρκής.

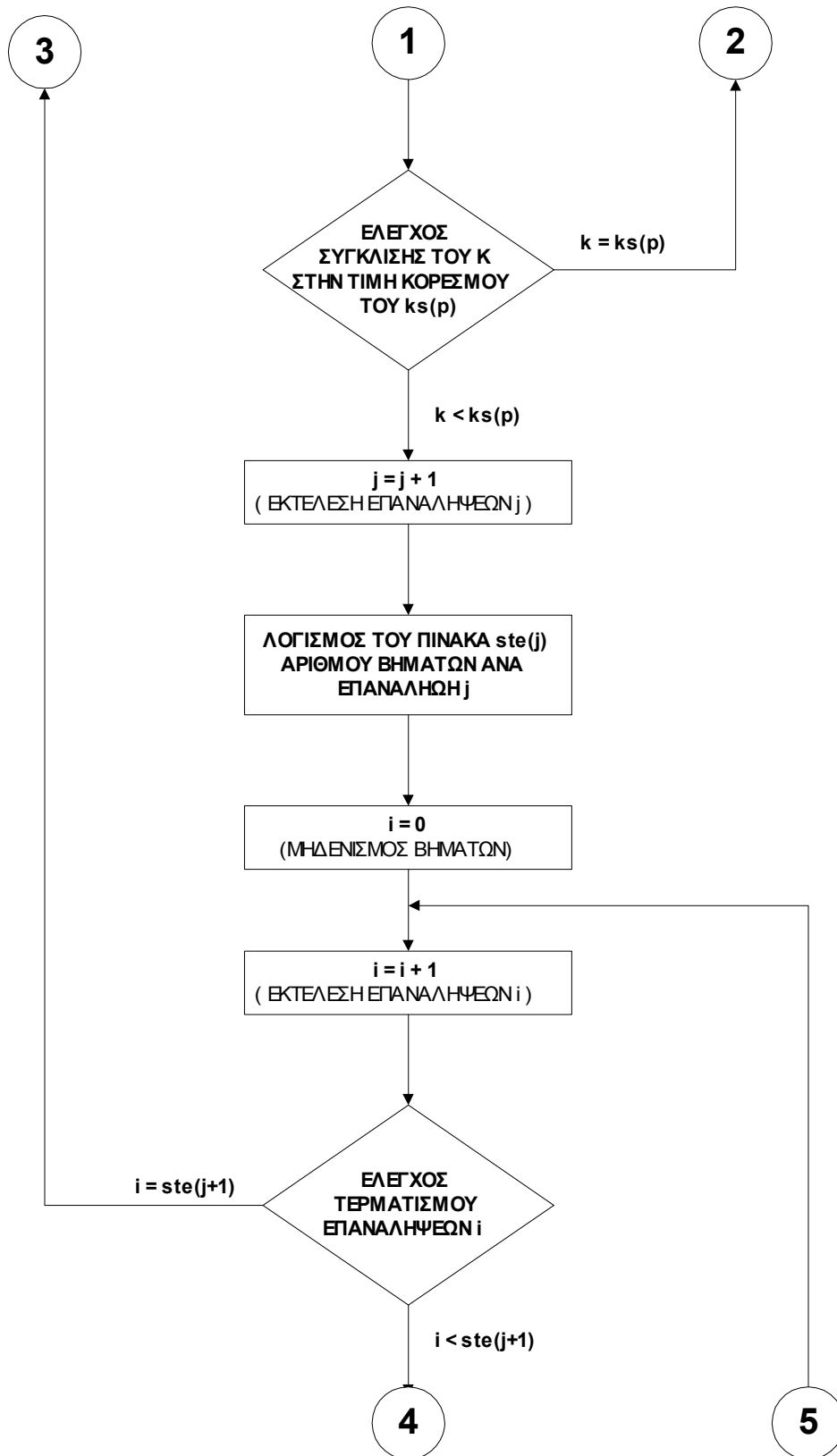
Στην επεξήγηση της λειτουργίας του αλγορίθμου που πρόκειται να ακολουθήσει η ονομασία των μεγεθών που υπησέρχονται στον κώδικα θα αναφέρεται σε συσχέτιση τόσο με την ονομασία που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα, όσο και με την συμβολική τους γραφή, εντός της παρένθεσης (βλέπε Παράρτημα Α : Κώδικας αλγορίθμου). Στην αρχή του κώδικα (ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΥΛΙΚΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΤΡΟΠΗΣ) εισάγονται οι παράμετροι του υλικού που καθορίζουν την ελαστική συμπεριφορά του υλικού και την εξέλιξη των κανόνων ισοτροπικής και κινηματικής κράτυνσης. Επιπλέον στο τμήμα αυτό ορίζονται στο αντίστοιχο πίνακα τα πλάτη στα οποία θα μεταβάλλεται η τροπή. Για παράδειγμα εάν η 'ιστορία φόρτισης' είναι διαδοχικά : $0 < \varepsilon < 1$, $-1 < \varepsilon < 1$, $-2 < \varepsilon < 2$, τότε εισάγεται : $[0 \ 1 ; -1 \ 1 ; -2 \ 2]$. Στον πίνακα (ks) εισάγονται οι τιμές κορεσμού της παραμέτρου ισοτροπικής κράτυνσης k - δηλαδή οι τελικές τιμές που λαμβάνει - για κάθενα από τα πλάτη μεταβολής της τροπής. Στο τμήμα 'ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ ΤΡΟΠΗΣ' ορίζονται οι αρχικές τιμές όλων των παραμέτρων που σχετίζονται με το μοντέλο, την λειτουργία του κώδικα, όπως επίσης και το βήμα μεταβολής της τροπής. Ο αλγόριθμος διαθέτει ως ελεγχόμενη εξωτερική μεταβλητή την τροπή ε (e) , της οποίας η μεταβολή εκτελείται με σταθερό βήμα $d\varepsilon$ (de). Το βήμα de ορίζεται από τον χρήστη και συνήθως λαμβάνονται τιμές από 0.01 έως 0.0001, με τυπική τιμή το 0.001. Μείωση του βήματος έχει ως αποτέλεσμα την βελτίωση στην ακρίβεια επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων - σχέσεις μεταβολής των μεγεθών που προαναφέρθηκαν - και αύξηση του υπολογιστικού χρόνου, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων που εκτελεί ο κώδικας. Στην συνέχεια στο τμήμα 'ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ', ορίζονται ακολούθως οι πίνακες στους οποίους κρατώνται τα αποτελέσματα - αριθμητικές τιμές μεταβαλλόμενων μεγεθών - στην μνήμη του υπολογιστή. Ο αλγόριθμος ουσιαστικά ξεκινά από το τμήμα που ορίζεται ως 'ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΣ ΒΡΟΓΧΟΣ', όπου ορίζεται ο αριθμός των επαναλήψεων (p) που πρόκειται να εκτελέσει ο βρόγχος, ώστε να καλύψει ολόκληρο το εύρος των αρχικά ορισμένων πλατών μεταβολής των τροπών. Για παράδειγμα, θεωρώντας πάλι τα πλάτη όπως προηγουμένως, ο αριθμός των επαναλήψεων θα είναι τρεις. Στον 'ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΒΡΟΓΧΟ (Α)' εξετάζεται το κριτήριο σύγκλισης της τιμής του (k) στην τιμή κορεσμού του - ks(p) - για κάθε αριθμό επανάληψης (p). Ενώ στον 'ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΒΡΟΓΧΟ (Β)' υπολογίζεται ο αριθμός των βημάτων (i) που εκτελεί ο κώδικας για κάθε επανάληψη (j) και εν συνεχεία υπολογίζονται οι τιμές των μεγεθών αφού έχει εξεταστεί το είδος της συμπεριφοράς του υλικού ('ΕΞΕΤΑΣΗ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΔΙΑΡΡΟΗΣ', 'ΕΛΑΣΤΙΚΗ/ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ'). Η παράμετρος (j) είναι ο μετρητής των κύκλων φόρτισης - ως κύκλος φόρτισης ορίζεται μία φόρτιση ή αποφόρτιση - από την εκκίνηση του προγράμματος. Αφού ο αλγόριθμος έχει επιτύχει κορεσμό της παραμέτρου (k) για ολόκληρη την σειρά των πλατών των τροπών,

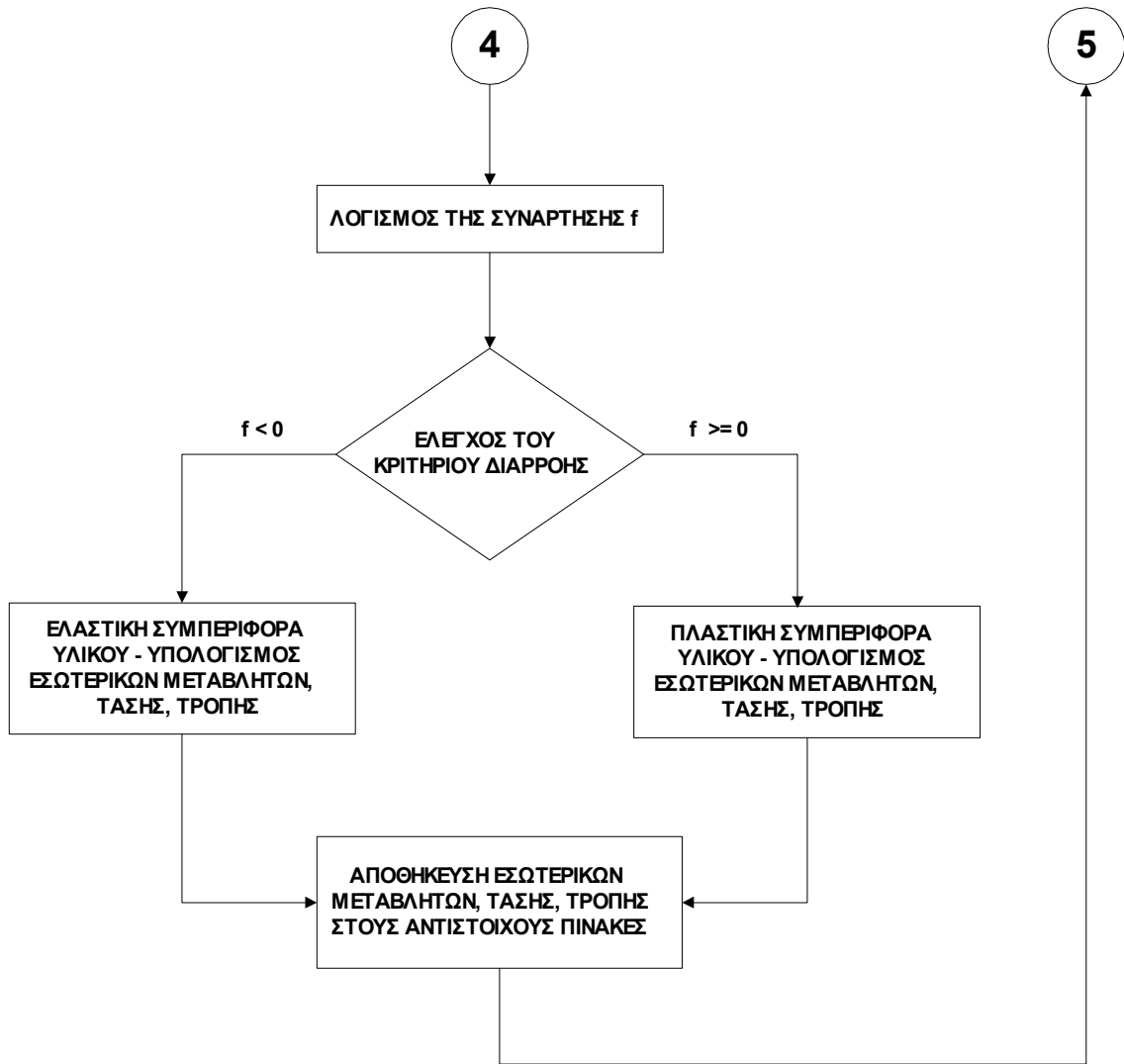
επέρχεται τερματισμός του. Τέλος, παρίσταται γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μέσω των διαγραμμάτων τάσης - τροπής, τάσης - πλαστικής τροπής και των υπολοίπων μεγεθών. Εν συνεχεία, για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του προγράμματος παρατίθεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου.



Σχήμα 5.2.1 Διάγραμμα ροής ελαστοπλαστικού αλγορίθμου (1/3)



Σχήμα 5.2.2 Διάγραμμα ροής ελαστοπλαστικού αλγορίθμου (2/3)



Σχήμα 5.2.3 Διάγραμμα ροής ελαστοπλαστικού αλγορίθμου (3/3)

6

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην συνέχεια πρόκειται να εκτεθούν τα αποτελέσματα που εξάγονται από την εφαρμογή του κώδικα, όπως αυτός αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για προβλήματα μονοαξονικής κυκλικής πλαστικότητας. Αρχικά γίνεται μνεία στην ακρίβεια της χρησιμοποιηθείσας αριθμητικής μεθόδου προκειμένου να αιτιολογηθεί η επιλογή της για την επίλυση των προκυπτουσών διαφορικών εξισώσεων περιγραφής των μεγεθών.

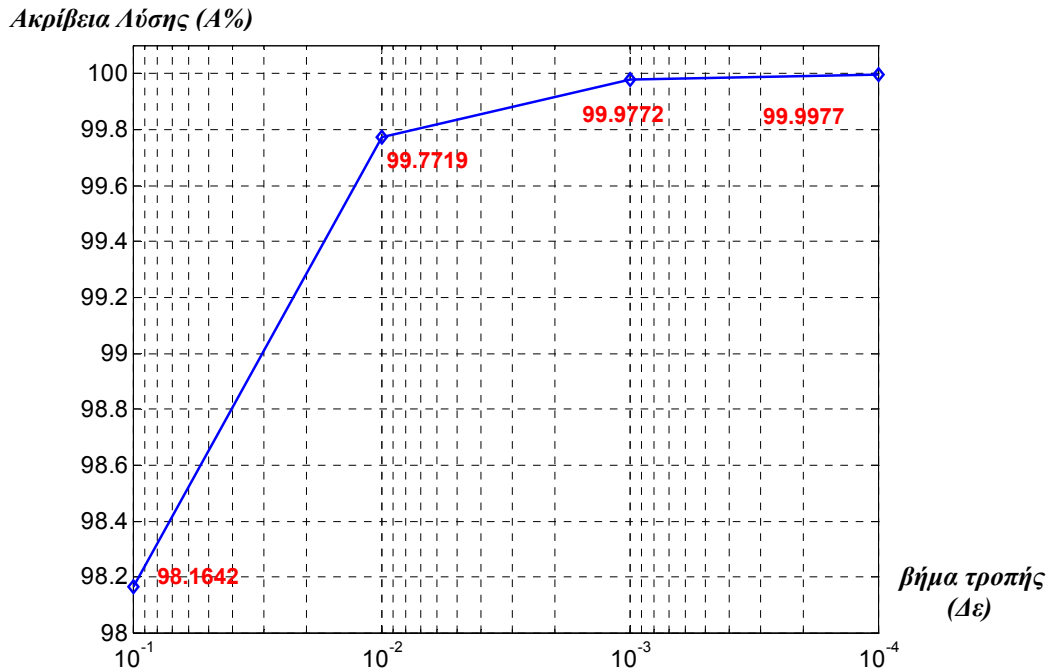
6.1 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 5.4 η αριθμητική μέθοδος που προτιμήθηκε για την επίλυση των προκυπτουσών διαφορικών εξισώσεων ήταν η Euler. Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβειά της εκτελέστηκε σύγκριση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από την εφαρμογή της στην περίπτωση μονοαξονικής φόρτισης για το εν λόγω μοντέλο στην απλή της μορφή, με την αναλυτική του λύση (για απόδειξή της εν λόγω σχέσης βλέπε Παράρτημα Β) :

$$a = a^s \left[\begin{array}{c} -h_o \varepsilon^p - b^s \left(1 - e^{-h\varepsilon^p} \right) \\ 1 - e \end{array} \right] \quad (6.1)$$

Στον κατωτέρω γράφημα παρουσιάζεται ο συντελεστής ακριβείας του υπολογισμού της backstress για τις διάφορες τιμές του βήματος της τροπής ($\Delta\varepsilon$) στον αλγόριθμο. Ως συντελεστή ακριβείας (A) ορίζεται το κλάσμα :

$$A \% = (\text{Αναλυτική Λύση}) - (\text{Υπολογιζόμενη Λύση}) / (\text{Αναλυτική Λύση}) \times 100$$



Σχήμα 6.1 Εξέλιξη του συντελεστή ακρίβειας του αλγορίθμου ως προς την μεταβολή του βήματος του.

Ουσιαστικά παρατηρεί κανείς ότι για τιμές του $\Delta \varepsilon < 10^{-3}$ η ακρίβεια είναι πολύ ικανοποιητική. Όμως στην περίπτωση όπου μελετάται η κυκλική ελαστοπλαστική συμπεριφορά ενός υλικού ανά κύκλο φόρτισης το σφάλμα συσσωρεύεται διαρκώς, κατά συνέπεια σαφώς απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια και ακόμη μικρότερο βήμα $\Delta \varepsilon$, το οποίο μας οδηγεί σε επιλογές της τάξης του 10^{-4} , όπου και προκύπτει ακρίβεια υπολογισμού άνω του 99,99%. Για την ορθολογική επιλογή του βήματος θα πρέπει προφανώς να ληφθεί υπόψιν ότι το υπολογιστικό κόστος, το οποίο λογίζεται ως ο χρόνος περάτωσης του αλγορίθμου, είναι ευθέως ανάλογο προς τα εκτελούμενα βήματα που εκτελούνται για δεδομένο βήμα. Οπότε δεν πρέπει η επιλογή του βήματος να υπαγορεύεται από τις ανάγκες της έρευνας η οποία εκτελείται ανά περίπτωση. Στην παρούσα εργασία, εκτελέστηκαν δοκιμαστικά υπολογισμοί με βήμα $\Delta \varepsilon = 10^{-3}$ και 10^{-4} , χωρίς ουσιαστικά να υπάρξει αισθητή διαφορά στα αποτελέσματα, οπότε και προτιμήθηκε το πρώτο βήμα, χάριν υπολογιστικής ταχύτητας.

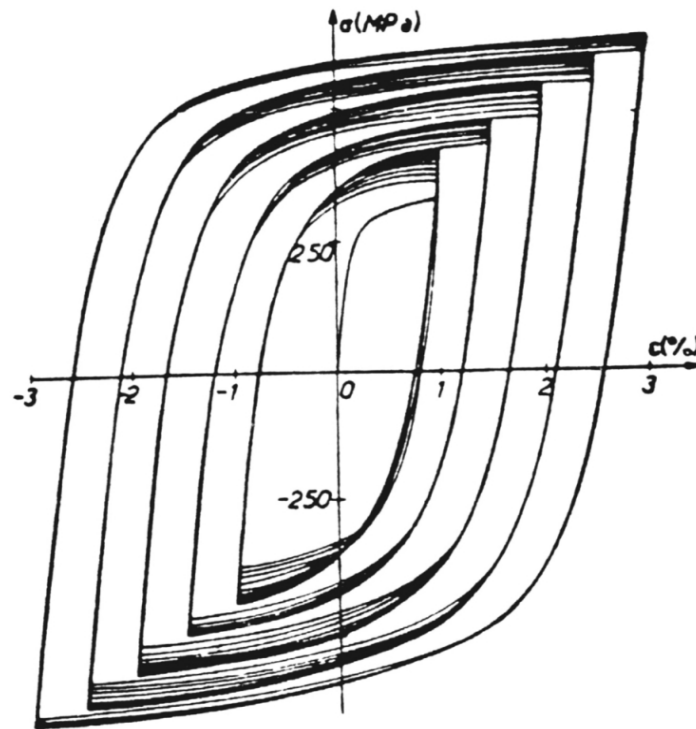
6.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα όπου εκτέθηκε το πρόβλημα με το οποίο πραγματεύεται η εργασία, το προτεινόμενο μοντέλο - στην τροποποιημένη μορφή του (βλέπε κεφάλαιο 5) - καλείται να προσομοιώσει το γράφημα τάσης - παραμόρφωσης για το εν λόγω κρατυνόμενο υλικό, σε μονοαξονική φόρτιση. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου εκτελέστηκε με την χρήση επαναληπτικής διαδικασίας μεταβολής τους, με τελικό σκοπό την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του ίχνους του πειραματικού (experimental data) γραφήματος με το προκείμενο από τον κώδικα ίχνος (computed data) γραφήματος.

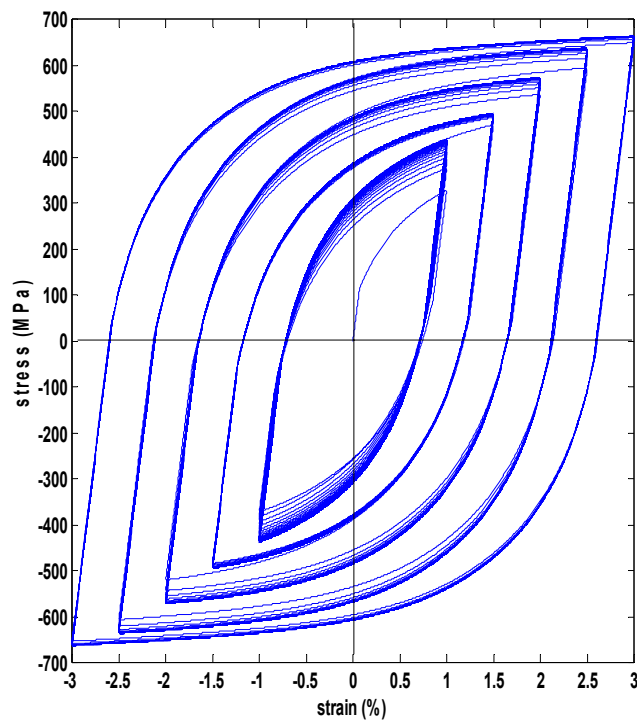
Το εν λόγω γράφημα (βλέπε σχήμα 6.3) εκ πρώτης όψεως διαθέτει γενικώς τα χαρακτηριστικά τα οποία επιτρέπουν την επιτυχή προσομοίωσή του από το προτεινόμενο μοντέλο, όμως κατόπιν περισσότερο προσεκτικής εξέτασής του διαπιστώνονται κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Είναι προφανές ότι το πείραμα αυτό διαθέτει ασυμμετρία στις τιμές των τάσεων, παρόλο που η φόρτιση εξελίσσεται σε συμμετρικούς κύκλους τροπής. Για παράδειγμα στον εξωτερικό βρόγχο - για εύρος τροπών -3% έως +3% - η μέγιστη εφελκυστική τιμή που λαμβάνει η τάση είναι +642.3752 MPa ενώ η μέγιστη θλιπτική τάση λαμβάνει την τιμή -675.6073 MPa. Η διαφοροποίηση αυτή της τάσης ανά βρόγχο, για όλα τα πλάτη μεταβολής της τροπής, προκαλεί εκτροπή της συμμετρίας - διαφορετική κλίση σε αντιδιαμετρικά σημεία - στην μορφή του γραφήματος και στους δύο άξονες. πράγμα το οποίο δεν είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί με την χρήση του μοντέλου αυτού καθώς η backstress παραμένει η ίδια για κάθε βρόγχο.

Στην προσπάθεια προσδιορισμού των σταθερών του μοντέλου διαπιστώθηκαν επιπλέον αδυναμίες για ακριβή προσομοίωση του γραφήματος, στις οποίες γίνεται αναφορά αφού προηγηθούν, για καλύτερη κατανόηση τους, τα αντίστοιχα γραφήματα αποτελεσμάτων. Για την καλύτερη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων το γράφημα μετατράπηκε σε πίνακα τιμών τάσης - παραμόρφωσης (βλέπε σχήμα 6.4) και εισήχθηκε στον κώδικα ώστε η απεικόνιση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων να γίνεται ταυτόχρονα με το πείραμα. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι χάριν ευκολότερης ανάγνωσης αυτών των γραφικών παραστάσεων επιλέχθηκε η προβολή του πρώτου και του τελευταίου κύκλου από το σύνολό που εκτελούνται σε κάθε βρόγχο. Μεταξύ των προαναφερθέντων κύκλων παρεμβάλλεται το εμφανιζόμενο στο Σχ.6.2 πλήθος κύκλων,

όπως αυτοί σταδιακά προσεγγίζουν στον εξωτερικό μέγιστο, έως την αλλαγή εύρους μεταβολής της τροπής.



Σχήμα 6.2 Πειραματική καμπύλη $\sigma - \epsilon$ για Χάλυβα 316 υπό κυκλική φόρτιση.



Σχήμα 6.3 Αριθμητική προσομοίωση πειράματος κυκλικής παραμόρφωσης, με την χρήση μοντέλου πολλαπλασιαστικών εσωτερικών τάσεων.

Οι σταθερές του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση του πειραματικού γραφήματος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα αναλυτικά.

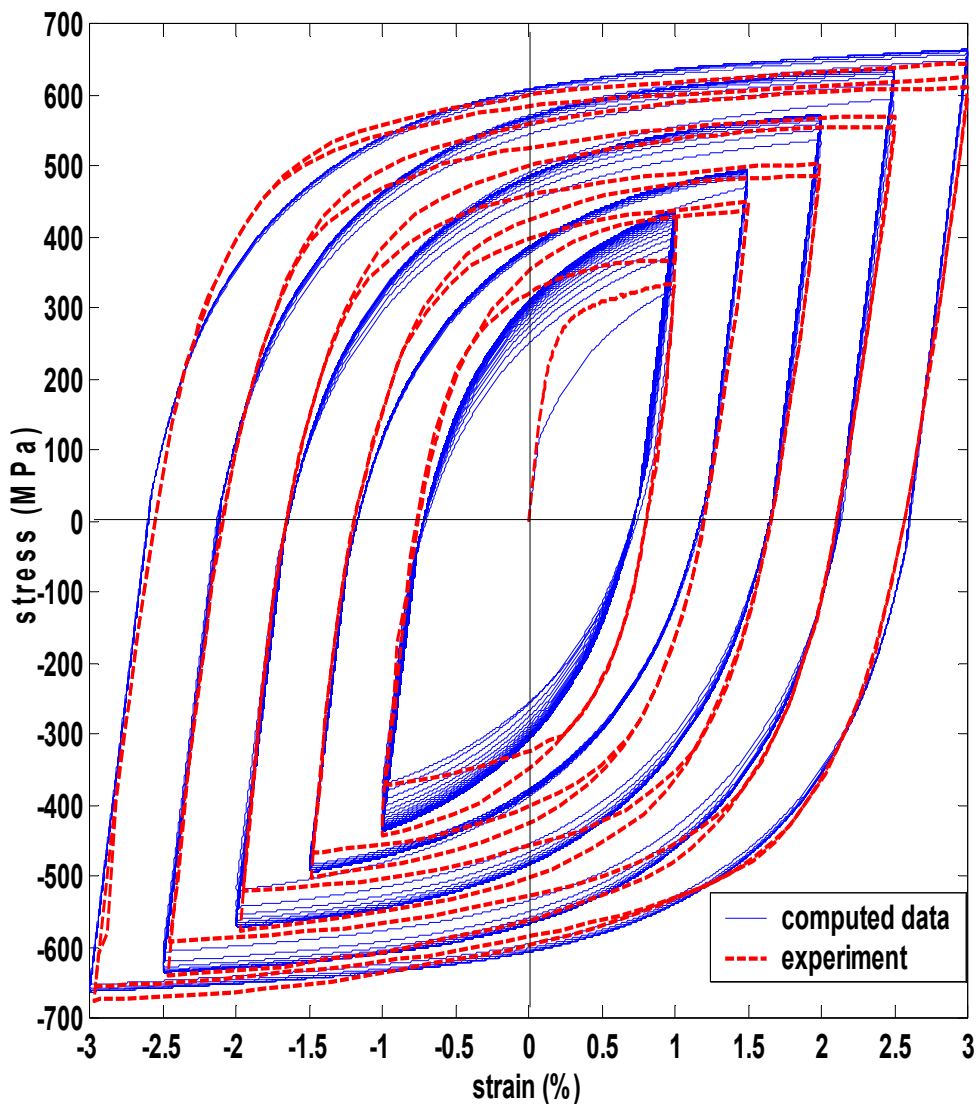
a_1^s	93 (MPa)	c_k	0,075
b^s	1,5 (MPa)	k_1^s	115 (MPa)
h	2,7	k_2^s	205 (MPa)
h_o	1,0	k_3^s	221 (MPa)
a_2^s	190 (MPa)	k_4^s	280 (MPa)
c_1	1,2	k_5^s	335 (MPa)
c_2	10	k_6^s	355 (MPa)

Πίνακας 6.1 Παράμετροι μοντέλου πολλαπλασιαστικών εσωτερικών τάσεων οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την προσαρμογή του πειραματικού γραφήματος του Χάλυβα 316 (βλέπε Σχ. 6.2).

Οι σταθερές αυτές ανταποκρίνονται στην θεώρηση να επιλεγθούν ως καμπύλες προς προσέγγιση αυτές οι οποίες ανήκουν στο δεξιό τμήμα του γραφήματος ξεκινώντας από τους εξωτερικούς βρόγχους του. Παρατηρώντας το σχήμα 6.4 διαπιστώνεται ότι η σύγκλιση είναι αρκετά επιτυχής, υπό το πρίσμα της παραπάνω απλούστευσης για το συγκεκριμένο τμήμα του διαγράμματος, με βαθμιαία αλλοίωση της σύγκλισης πλησιάζοντας προς τους εσωτερικούς βρόγχους. Αντιστοίχως όταν επιχειρήθηκε να προσομοιωθεί η καμπύλη του πειράματος με έμφαση στην ακρίβεια του τμήματος των εσωτερικών βρόγχων, εμφανίστηκε ανάλογο προς το προαναφερθέν φαινόμενο. Επιπλέον παρατηρείται ότι η καμπύλη της αρχικής φόρτισης του υλικού δεν είναι δυνατόν να προσεγγιστεί επαρκώς καθώς το μοντέλο επικεντρώνεται στην προσομοίωση των κυκλικών φαινομένων (κυκλική κράτυνση) της πλαστικής συμπεριφοράς του εν λόγω υλικού.

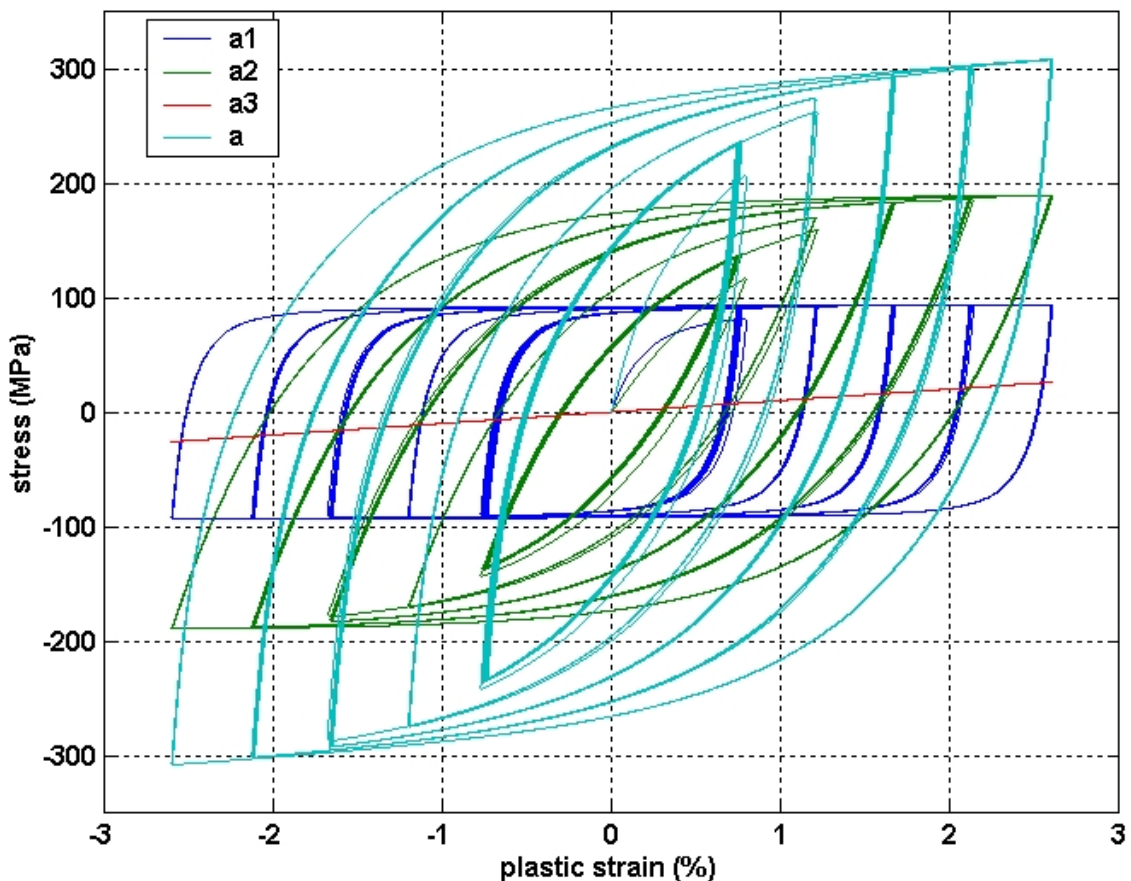
Ο συνδυασμός των σταθερών που επιλέχθηκε δεν είναι ο μοναδικός ο οποίος είναι δυνατόν να παρέξει το αποτέλεσμα αυτό, καθώς είναι προφανές ότι υπάρχει ένα πλήθος συνδυασμών οι οποίοι προβλέπουν παραπλήσιας ακρίβειας προσομοιώσεις. Όσον αφορά τις τιμές που επιλέχθηκαν για το k , αυτές δεν αντιστοιχούν κατ' ανάγκη στο

πραγματικό μέγεθος της εκάστοτε, ανά εύρος μεταβολής τροπών (strain level), ελαστικής περιοχής του κρατυνόμενου υλικού, καθώς ο αντικειμενικός σκοπός της προσομοίωσης είναι η βέλτιστη προσέγγιση της καμπύλης, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι τα τμήματα εκείνα της καμπύλης τα οποία διαθέτουν υψηλή κλίση είναι δυνατόν να προσεγγισθούν με υπέρθεση πολλών διαφορετικών εσωτερικών τάσεων (backstress), οι οποίες θα πρέπει να διαθέτουν ισχυρή δράση, δηλαδή με μεγάλες τιμές επιλεγμένων σταθερών.



Σχήμα 6.4 Αριθμητική προσομοίωση (computed data) πειράματος κυκλικής παραμόρφωσης [διάγραμμα τάσης (stress) - τροπής (strain)], με την χρήση μοντέλου πολλαπλασιαστικών εσωτερικών τάσεων - απευθείας οπτικοποίηση σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα (experiment).

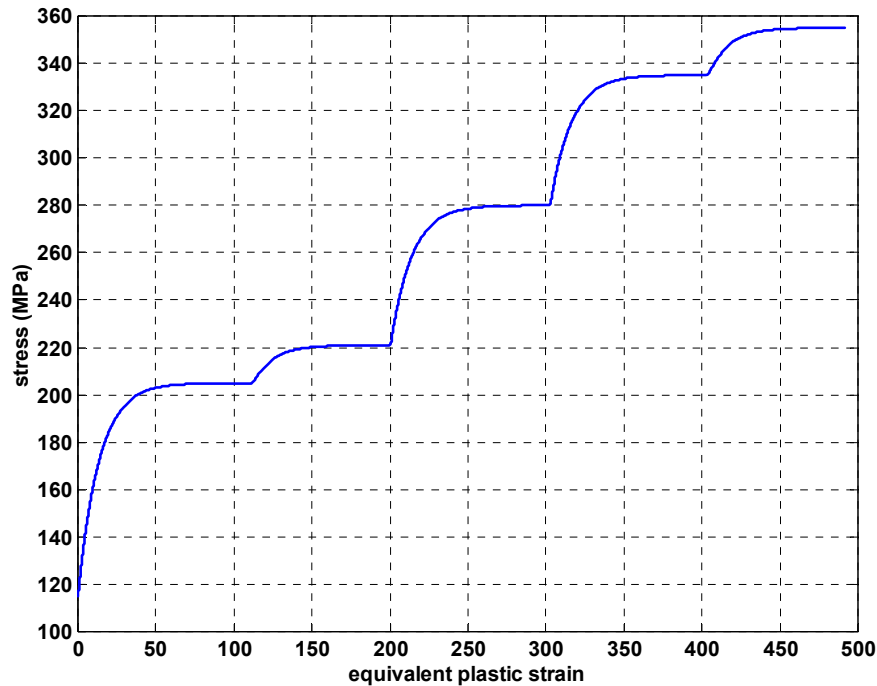
Στο σχήμα 6.5 εμφανίζονται οι επιμέρους εσωτερικές τάσεις (backstress) οι οποίες συμβάλλουν στην 'δημιουργία' της συνολικής εσωτερικής τάσης (a). Όπως γίνεται αντιληπτό παρατηρώντας κανείς το εν λόγω διάγραμμα, οι backstress διαθέτουν διαφορετικά επίπεδα κορεσμού (saturation level), στα οποία φθάνουν με διαφορετικούς ρυθμούς η κάθε μία από αυτές. Σκοπός της συγκεκριμένης μεθοδολογίας υπέρθεσης των εσωτερικών τάσεων είναι η αποδοτικότερη προσέγγιση, με κάθε μίας από αυτές, διαφορετικού τμήματος της καμπύλης τάσης - τροπής του πειραματικού γραφήματος. Χαρακτηριστική είναι η δράση της γραμμικού τύπου εσωτερικής τάσης (linear type backstress), η οποία επιλέχθηκε ώστε να προσομοιώσει το τμήμα εκείνο της πειραματικής καμπύλης το οποίο διαθέτει ελαφρά κλίση (βλέπε Σχ. 6.2).



Σχήμα 6.5 Αποσύνδεση της εσωτερικής τάσης (a) (backstress) στις επιμέρους backstress (a_1), (a_2), (a_3) συναρτήσει της πλαστικής τροπής (plastic strain).

Στο διάγραμμα του σχήματος 6.6 αναπαριστάται η μεταβολή του k συναρτήσει της ισοδύναμης πλαστικής τροπής (equivalent plastic strain) και κατ' επέκτασιν ως προς

τους κύκλους που εκτελέστηκαν έως το k να λάβει ανά πλάτος τροπής (strain level) την τιμή κορεσμού του (saturation value) . Η επιλογή των τιμών κορεσμού του k δεν εκτελέστηκε με γνώμονα να υπακούει σε κάποιον νόμο εξέλιξης, καθώς για τον σκοπό της προσομοίωσης δεν κρίθηκε απαραίτητο, αλλά με διαδοχικές επαναληπτικές δοκιμές εξετάζοντας την αποδοτικότητα των επιλεγμένων τιμών στην προσομοίωση του πειράματος (experimental data fitting) .

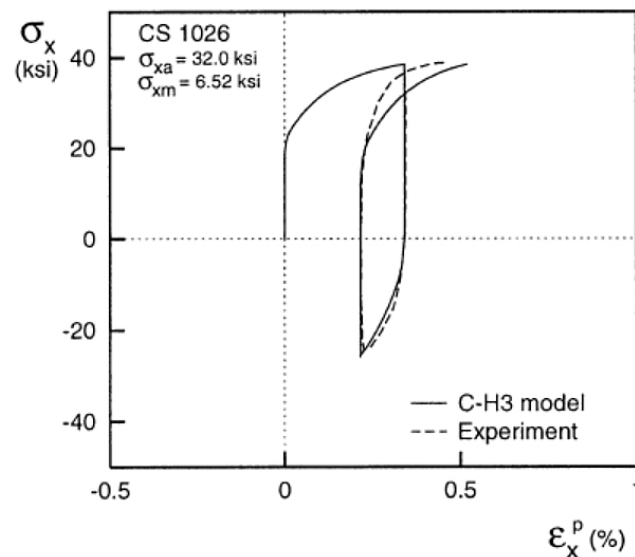


Σχήμα 6.6 Μεταβολή της ελαστικής περιοχής (k) συναρτήσει της ισοδύναμης πλαστικής τροπής (equivalent plastic strain).

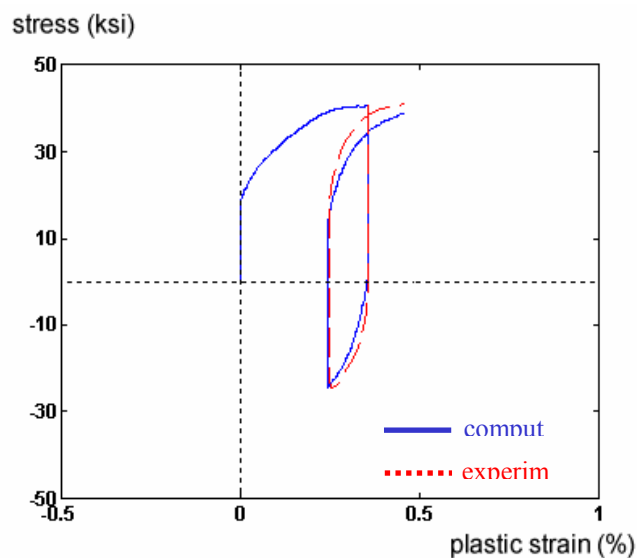
6.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΕΡΠΥΣΜΟΥ

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία του κώδικα ως προς την ικανότητά του να προσομοιώνει πειραματικές καμπύλες επιχειρήθηκε σύγκριση των αποτελεσμάτων του με τα αποτελέσματα από μελέτες που έχουν ασχοληθεί με το θέμα αυτό. Συγκεκριμένα από την δημοσίευση των Bari και Hassan [16], όπου χρησιμοποιείται το μοντέλο του Chaboche προκειμένου να προσομοιωθεί καμπύλη κυκλικού ερπυσμού, λαμβάνεται το γράφημα του σχήματος 6.7. Το γράφημα αυτό αντιπαρατίθεται με τα

αποτελέσματα του κώδικα της εργασίας -στον οποίο εισάγεται το μοντέλο του Chaboche - (βλέπε σχήμα 6.8) για τις ίδιες σταθερές του υλικού και παραμέτρους του μοντέλου του Chaboche [8]. Εξετάζοντας τα γραφήματα των δύο προσομοιώσεων παρατηρείται ότι αυτά διαθέτουν τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά, οπότε αντιλαμβάνεται κανείς ότι ο κώδικας επιτυγχάνει απόλυτα τον σκοπό του.



Σχήμα 6.7 Καμπύλη τάσης (σ_x) συναρτήσει της πλαστικής παραμόρφωσης (ϵ^p) μονοαξονικού κυκλικού ερπυσμού για Χάλυβα CS 1026, σύγκριση πειραματικών δεδομένων (experiment) με αποτελέσματα από του μοντέλου του Chaboche (C-H3 model), Bari & Hassan [16].



Σχήμα 6.8 Καμπύλη τάσης (stress) συναρτήσει της πλαστικής παραμόρφωσης (plastic strain) μονοαξονικού κυκλικού ερπυσμού για Χάλυβα CS 1026, σύγκριση πειραματικών δεδομένων (experiment) με αποτελέσματα του μοντέλου του Chaboche (computed) που προέκυψαν από εφαρμογή του κώδικα της εργασίας.

Οι παράμετροι του μοντέλου του Chaboche και οι σταθερές του υλικού που προσομοιώθηκε εμφανίζονται στον πίνακα 6.2.

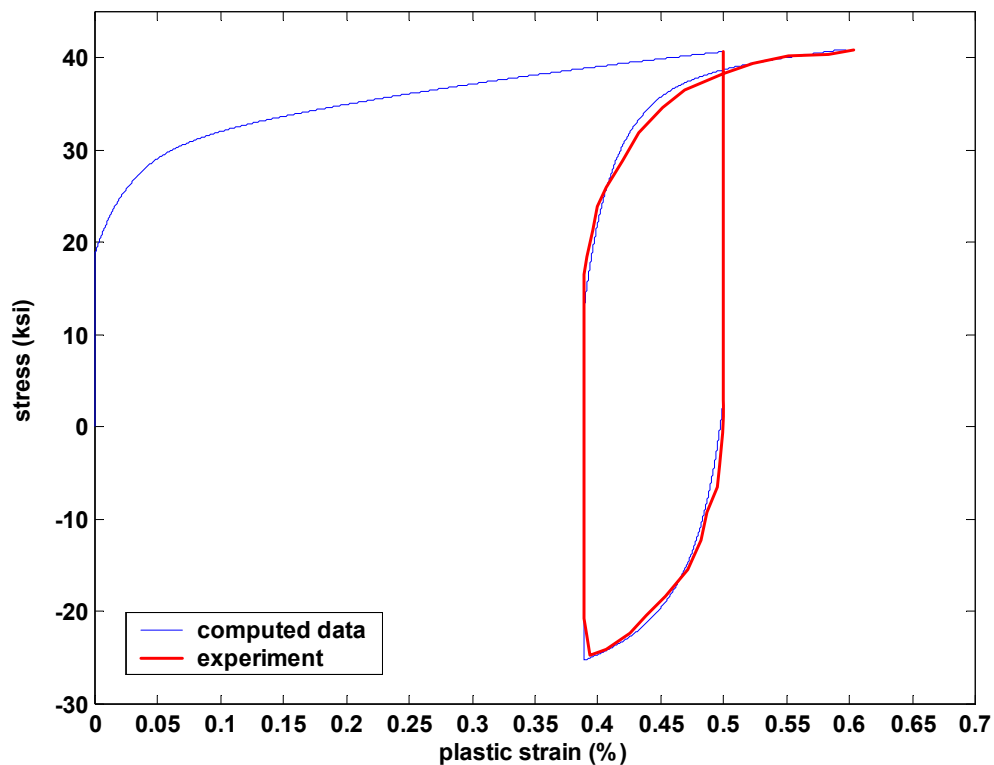
σ_Y	18,8 (ksi)
E	26300 (ksi)
c_1	60000
c_2	12856
c_3	455
a^s_1	3 (ksi)
a^s_2	16,07 (ksi)

Πίνακας 6.2 Παράμετροι μοντέλου Chaboche και σταθερών του υλικού χρησιμοποιηθέντων σε προσομοίωση καμπύλης κυκλικού ερπυσμού, Bari & Hassan [16].

Επιπλέον, εκτελέστηκε εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού μοντέλου - το οποίο και είναι ένα από υπό μελέτη ζητήματα της παρούσας εργασίας - , στην περίπτωση της ίδιας πειραματικής καμπύλης κυκλικού ερπυσμού, με την χρήση του κώδικα. Χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό από μία πολλαπλασιαστικά συνδεδεμένη backstress και μία αθροιζόμενη μη γραμμική backstress, το αποτέλεσμα της προσομοίωσης - βλέπε Σχ. 6.9 - είναι κατά πολύ καλύτερο από αυτό των σχημάτων 6.7 και 6.8. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι, σαφώς η επικάλυψη της πειραματικής καμπύλης και της καμπύλης που προβλέπει ο κώδικας είναι πολύ καλή, χωρίς όμως να επιτυγχάνεται σύγκλιση ταυτόχρονα για το επάνω τμήμα της καμπύλης και για το κάτω τμήμα αυτής. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν εμφανίζονται στον πίνακα 6.3.

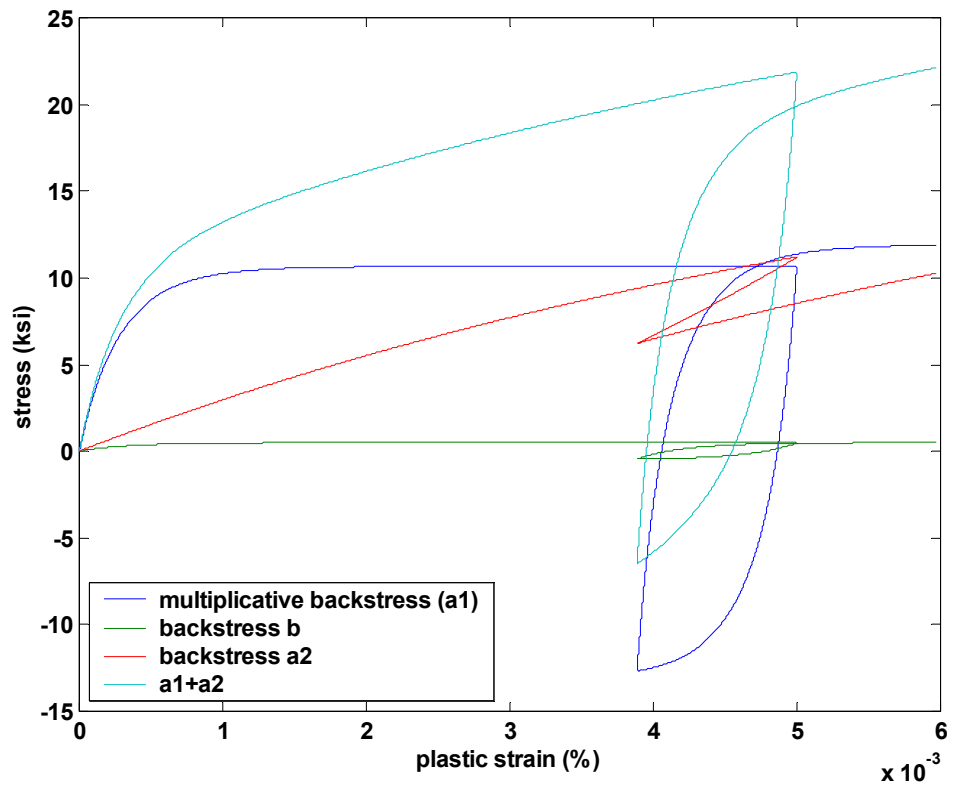
a^s_1	27,5 (ksi)
h_0	0,01
h	3000
b^s	0,49 (ksi)
a^s_2	21,24 (ksi)
c_2	150

Πίνακας 6.3 Παράμετροι πολλαπλασιαστικού μοντέλου για την προσομοίωση πειραματικής καμπύλης - Bari & Hassan [16] - κυκλικού ερπυσμού.



Σχήμα 6.9 Προσομοίωση καμπύλης τάσης (*stress*) - πλαστικής παραμόρφωσης (*plastic strain*) κυκλικού ερπυσμού με την χρήση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου (*computed data*) και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα (*experiment*) - ληφθέντων από Bari & Hassan [16].

Τέλος, στο γράφημα που ακολουθεί, το οποίο εμφανίζεται στο σχήμα 6.10, παρουσιάζεται η συμπεριφορά των επιμέρους εσωτερικών τάσεων (*backstress*) - πολλαπλασιαστικού και αθροιστικού τύπου *backstress* - και η συμβολή τους στην τελική διαμόρφωση της 'συνολικής' *backstress*, η οποία και δημιουργεί τον βρόγχο υστέρησης του κυκλικού ερπυσμού (*ratcheting*). Χαρακτηριστικά διαφαίνεται ότι η *backstress* (*b*) φθάνει στην τιμή κορεσμού της έπειτα από μικρή πλαστική παραμόρφωση, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα η καμπύλη της πολλαπλασιαστικής *backstress* (*a1*) να λαμβάνει την μορφή που φαίνεται στο σχήμα. Ακολούθως με την αθροιστική υπέρθεση της *backstress* (*a2*) ο βρόγχος προσεγγίζει την πειραματική καμπύλη.



Σχήμα 6.10 Συμπεριφορά επιμέρους εσωτερικών τάσεων πολλαπλασιαστικού μοντέλου στην προσομοίωση βρόγχου κυκλικού ερπυσμού.

7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας την μελέτη, η οποία παρατίθεται στην παρούσα εργασία, το μοντέλο που προτείνεται παρέχει πολύ καλά αποτελέσματα στην προσομοίωση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς μετάλλων σε μονοαξονική καταπόνηση. Αυτό παρατηρείται τόσο στις αποκρίσεις κυκλικά κρατυνόμενου μετάλλου, με τις αναφερθείσες αδυναμίες, όσο και στην περίπτωση του κυκλικού ερπυσμού. Θα πρέπει ακόμη να αναφερθεί ότι η απλότητα του μοντέλου σε συνδυασμό με την υπολογιστική τεκμηρίωσή του μέσω του κώδικα που αναπτύχθηκε, παρέχει την δυνατότητα για επιπλέον έρευνα σε ένα μεγαλύτερο εύρος πειραματικών δεδομένων και σε διαφορετικά από τα εξετασθέντα είδη συμπεριφορών. Η εργασία αυτή είναι δυνατόν να αποτελέσει έναυσμα για την διερεύνηση της αξιοπιστίας της συγκεκριμένης μεθοδολογίας μοντελοποίησης στην προσομοίωση πολυαξονικών συμπεριφορών, ξεκινώντας κανείς από διαξονικά πειράματα - για τα οποία υπάρχει πληθώρα δεδομένων [23]. Αυτό φυσικά προϋποθέτει την επέκταση και την τροποποίηση του κώδικα στον βαθμό που απαιτείται προκειμένου να καταστεί περισσότερο γενικός. Μία ακόμη προοπτική βρίσκεται στο γεγονός ότι η ιδέα της πολλαπλασιαστικής διασύνδεσης των εσωτερικών τάσεων είναι δυνατόν να εισαχθεί σε ένα περισσότερο γενικευμένο μοντέλο, παρά να χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά ως μοντέλο. Η εργασία αυτή, στον βαθμό που αναλύθηκε η συγκεκριμένη ιδέα, παρέχει πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρεται αυτού του είδους η μοντελοποίηση και κατά συνέπεια είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί προς τον σκοπό αυτό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Μυλωνάς Κ.Μ. (1985). 'Μηχανική παραμορφωτών σωμάτων Ι', Αθήνα.
- [2] Παναγιωτόπουλος Γ.Δ. (1997). 'Σημειώσεις Αντοχής των Υλικών - Πείραμα Εφελκυσμού', *Σχολή Ικάρων, Έδρα Εφαρμοσμένης Μηχανικής και Αντοχής Υλικών*, Αθήνα.
- [3] Armstrong P.J. and Frederick C.O. (1966). 'A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect', *CEGB Report No. RD/B/N731*.
- [4] Chaboche J.L. (1986). 'Time-Independent constitutive theories for cyclic plasticity', *International Journal of Plasticity*, vol. 2, 149-188.
- [5] Dafalias Y.F. (1984). 'Modelling Cyclic Plasticity : Simplicity versus sophistication', *Mechanics of Engineering Materials*, John Wiley & Sons, 153-178.
- [6] Bari S. and Hassan T. (2000). 'Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation', *International Journal of Plasticity*, vol. 16, 381-409.
- [7] Lubliner J. (1990). 'Plasticity Theory', *McMillan Publishing Company*, New York.
- [8] Dafalias Y.F. and Seyed-Ranjbari M.S. (1981). 'Constitutive modelling of cyclic metal plasticity', *Keynote lecture in the Proc. of 2nd Cairo University Conference on Current Advances in Mechanical Design and Production*, Cairo, 429-438.
- [9] Hassan T. and Kyriakides S. (1994). 'Ratcheting of cyclically hardening and softening materials : Uniaxial Behavior', *International Journal of Plasticity*, vol. 10, 149-184.
- [10] Chaboche J.L., Dang-Van K., Cordier G. (1979). 'Modelization of strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel', *In Transactions of the 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, no. Div L in 11/3, Berlin.
- [11] Prager W. (1956). 'A new method of analyzing stresses and strains on work-hardening plastic solids', *Journal of Applied Mechanics*, vol. 23, 493-496.
- [12] Ishlinskii A.Iu., (1954). 'General theory of plasticity with linear strain hardening', *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 6, 314.
- [13] Ziegler H. (1959). 'A modification of Prager's hardening rule', *Quarterly of Applied Mathematics* 17, 55-65.
- [14] Mroz Z. (1967). 'On the description of anisotropic work hardening', *J. Mech. Phys. Solids*, vol.15, 163-175.

- [15] Dafalias Y.F. and Popov E.P. (1974). 'A model of nonlinearly hardening materials for complex loading', *Proc. 7th U.S. National Congress of App. Mech., 149 & Acta Mechanica, vol. 21 (1975), 173-192.*
- [16] Bari S. and Hassan T. (2000). 'An advancement in cyclic plasticity modelling for multiaxial ratcheting simulation', *International Journal of Plasticity*.
- [17] Chaboche J.L. (1991). 'On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratcheting effects', *International Journal of Plasticity*, vol. 7, 661-678.
- [18] Ohno N. and Wang J.-D. (1993). 'Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I : formulations and basic features for ratcheting behavior', *International Journal of Plasticity*, vol. 9, 375-390.
- [19] Krieg R.D. (1975). (1975). 'A practical two surface model', *Journal of Applied Mechanics*, 641-646.
- [20] McDowell D. (1985). 'A two surface model for transient non-proportional cyclic plasticity', *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, 298-308.
- [21] Voyiadjis G.Z. and Kattan P.I. (1990). 'A generalized Eulerian two-surface plasticity model for finite strains', *Acta Mechanica*, vol. 81, 143-162.
- [22] Dafalias Y.F. and Popov E.P. (1976). 'Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity', *Journal of Applied*
- [23] Hassan T. and Kyriakides S. (1994). 'Ratcheting of cyclically hardening and softening materials : Multiaxial Behavior', *International Journal of Plasticity*, vol. 10, 185-212.
- [24] Ekh M., Johansson A, Thorberntsson H., Josefson B.L. (2000). 'Models for cyclic ratcheting plasticity - Integration and calibration', *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol.122, 49-55

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΚΩΔΙΚΑΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

```
% =====
% =====
% KWDIKAS ELASTOPLASTIKOU MONOAKSONIKOU KYKLIKOU MONTELOU
% POLLAPLASIASTIKOY TYPOY KANONA KINHMATIKHS KRATYNSHS
% =====
% =====
%           HMEROMHNTIA TELEYTAIAS EKDOSHS: 16 AYG 2002
%                               -- MATLAB ver. 5.3 --
%
%   PROGRAMMATISMOS:      K.H. KOUROUSIS
%
%   STO PLAISIO THS METAPTYXIAKHS ERGASIAS
%
%   EPIBLEPON KATHIGITIS :   I.F. DAFALIAS
%
%           ETHNIKO METSOBEIO POLYTEXNEIO
%           DIATMHMATIKO METAPTYXIAKO PROGRAMMA SPOUDWN
%           'YPOLOGISTIKH MHXANIKH - STEREA KAI KATASKEYES'
%           AKADHMAIKO ETOS : 2001 - 2002
%
% =====
% =====
%
% PARAMETROI YLIKOY KAI PLATH METABOLHS TROPHS
% =====
%
%
% E=0; % Metro Elastikotitas
%
% Parametroi kinimatikis kratynshs
% -----
%
% a1s=0; % timh koresmou backstress a1
% bs=0; % timh koresmou backstress b
% h=0; % stathera h
% ho=0; % stathera ho
% a2s=0; % timh koresmou backstress a2
% c2=0; % stathera c2
% c3=0; % stathera c3
%
% Parametroi isotropikis kratynshs
% -----
% ks=[0 0 0 0 0 0 0]; % k saturation value
```

```

ck=0; % ck constant
%
% Plath metabolhs trophs
% -----
st=[0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0];
%
%
% ARXIKES SYNTHKES KAI ORISMOS BHMATOS TROPHS
% =====
%
%
k=ks(1); % arxikh timh k (arxiko orio diarrohs)
ep=0; % arxikh timh plastikis trophs
aep=0; % arxikh timh isodyn.plastikis tropis
a1=0; % arxikh timh a1 backstress
a2=0; % arxikh timh a2 backstress
a3=0; % arxikh timh a3 backstress
a=0; % arxikh timh athroismatos tw n backstress
b=0; % arxikh timh a1 backstress
s=0; % arxikh timh tasis
e=0; % arxikh timh trophs
de=0; % bhma metabolhs trophs
i=0; % arxikh timh parametrou kodika i
j=0; % arxikh timh parametrou kodika j
m=0; % arxikh timh parametrou kodika m
smax=0; % arxikh timh megistis tasis ana kyklo
sts(1)=0;
stg(1)=0;
%
%
% DIASTASEIS PINAKWN APOTHIKEUSHS APOTELESMATWN
% =====
%
%
eM=zeros(1,1); % pinakas tropwn
epM=zeros(1,1); % pinakas plastikwn tropwn
aepM=zeros(1,1); % pinakas isodynamwn plastikwn tropwn
a1M=zeros(1,1); % pinakas backstress a1
a2M=zeros(1,1); % pinakas backstress a2
a3M=zeros(1,1); % pinakas backstress a3
bM=zeros(1,1); % pinakas backstress b
kM=zeros(1,1); % pinakas tw n k
sM=zeros(1,1); % pinakas tashs
smaxM=zeros(1,1); % pinakas megistis tasis ana kyklo
%
%
%
tic % enarksi metritis xronou
%
% EKSWTERIKOS BROGXOS
% =====

```

```

%
%
for p=1:length(st) % ektelesh arithmou epanalipsewn osa ta
%                 kai ta plati metabolhs tis trophs,
%                 mexri ton termatismo tou kwdika
%
    stg(p+1)=(length(abs(st(p,1)):de:abs(st(p+1,1)))-1);
    m=0;
%
%
% ESWTERIKOS BROGXOS (A)
% =====
%
%
while k<0.999999*ks(p) % krithrio syglisis tou algorithmou
%                 sto dedomeno platos tropwn, sthn
%                 ousia didei elegxei ton bathmo
%                 syglisi tou k sthn timh koresmou
%                 tou (ks)
    j=j+1; % metritis tou synolikou arithmou kyklwn
%                 fortisis
%
    m=m+1;
    n=-(-1)^j; % deiktis prosdiorismou ths foras fortisis
    sts(j+1)=length(st(p,1):de:st(p,2))+sts(j)-1*sign(j-1)-
(1-sign(m-1))*stg(p); % logismos tou pinaka bimatwn
%                 ektelesis ana kyklo fortisis
    clear i; % ekkatharish ths timhs i
%
%
% ESWTERIKOS BROGXOS (B)
% =====
%
%
    for i=sts(j):sts(j+1)-1 % arithmos bhmatwn ana kyklo
%                 fortisis (ews epiteuksi ks)
%
        f=fix((n*(s-a)-k)); % orismos synartisis diarrohs
%
% Eksetash krithriou diarrohs
% =====
%
        if f<0 % elastiki symperifora
%
% Antikatastasi timwn megethwn stous antistoixous pinakes
%
%
            epM(1,i)=ep;
            aepM(1,i)=aep;
            a1M(1,i)=a1;
            a2M(1,i)=a2;
            a3M(1,i)=a3;

```

```

        bM(1,i)=b;
        kM(1,i)=k;
        sM(1,i)=s;
        eM(1,i)=e;
%
% Ypologismos timwn eswterikwn metablhtwn-tashs-trophs
%
        ep=ep;
        aep=aep;
        a1=a1;
        a2=a2;
        a3=a3;
        b=b;
        k=k;
        s=s+n*E*de; % logismos tasis
        e=e+n*de; % logismos tropis
%
        elseif f>=0 % plastiki symperifora
%
% Antikatastasi timwn megethwn stous antistoixous pinakes
%
        epM(1,i)=ep;
        aepM(1,i)=aep;
        a1M(1,i)=a1;
        a2M(1,i)=a2;
        a3M(1,i)=a3;
        bM(1,i)=b;
        kM(1,i)=k;
        sM(1,i)=s;
        eM(1,i)=e;
        smaxM(1,j)=smax;
%
%
% Ypologismos timwn eswterikwn metablhtwn-tashs-trophs
%
        dep=E/(E+(ho+h*(bs-n*b))*(a1s-n*a1)+c2*(a2s-n*a2)+c3
+ck*(ks(p)-k));
% dep - metabolh ths plastikis trophs
        k=k+(ck*(ks(p)-k)*de)*dep;
        c=ho+h*(bs-n*b);
        a1=a1+(c*(a1s-n*a1)*n*de)*dep;
        b=b+h*(bs-n*b)*n*de*dep;
        a2=a2+(c2*(a2s-n*a2)*n*de)*dep;
        a3=a3+c3*n*de*dep;
        a=a1+a2+a3; % athroisi epimerous backstress
        s=a+n*k;
        e=e+n*de;
        ep=ep+n*(de*dep);

```

```

        aep=aep+(de*dep);
        smax=abs(max(s)); % logismos smax
%
%
        end
    end
end
end
%
%
% TERMATISMOS KWDIKA
% =====
%
toc % termatismos metrisis xronou
%
%
% DIAGRAMMATA APOTELESMATWN
% =====
%
%
plot(eM(1:i),sM(1:i)) % diagramma tropis-tasis
plot(epM(1:i),sM(1:i)) % diagramma plastikis tropis-tasis
plot(epM(1:i),aM(1:i)) % diagramma plastikis tropis
%
% backstress
plot(epM(1:i),aM(1:i),epM(1:i),a1M(1,i),ep(1:i),a2M(1:i),
ep(1:i),a3M(1:i)) % diagramma plastikis tropis - gia kathe
%
% backstress aneksartita (a,a1,a2,a3)
plot(aepM(1:i),kM(1:i))% diagrammma isodynamis plastikis
%
% tropis - k

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ BACKSTRESS

Στο μοντέλο με την πολλαπλασιαστικού τύπου backstress, όπως έχει ήδη αναφερθεί, για την περίπτωση της μονοξονικής φόρτισης ισχύουν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης :

$$\frac{da}{d\varepsilon^p} = c \left(a^s - a \right) \quad (1) \quad \text{με } c = h_o + h \left(b^s - b \right) \quad (2), \quad \text{όπου } \frac{db}{d\varepsilon^p} = h \left(b^s - b \right) \quad (3)$$

Από την (3), με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, προκύπτει :

$$\frac{db}{b^s - b} = h d\varepsilon^p \Rightarrow -\ln \left(b^s - b \right) = h\varepsilon^p + C' \Rightarrow b^s - b = e^{-h\varepsilon^p} e^{C'} \Rightarrow$$

$$\left(\text{για } \varepsilon^p = 0 \text{ είναι } b = 0 \right) \Rightarrow e^{C'} = b^s, \text{ άρα } b = b^s \left(1 - e^{-h\varepsilon^p} \right) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά την (4) στην (2) και την (2) στην (1) λαμβάνεται :

$$\frac{da}{d\varepsilon^p} = \left(h_o + hb^s e^{-h\varepsilon^p} \right) \left(a^s - a \right) \Rightarrow \left(\text{ομοίως με την λύση για την (3)} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{da}{a^s - a} = \left(h_o + hb^s e^{-h\varepsilon^p} \right) d\varepsilon^p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln \left(a^s - a \right) = h_o \varepsilon^p - b^s e^{-h\varepsilon^p} + C'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^s - a = e^{-h_o \varepsilon^p + b^s e^{-h\varepsilon^p}} e^{-C''} \Rightarrow \left(\text{για } \varepsilon^p = 0 \text{ είναι } a = 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{C''} = a^s e^{-b^s}$$

$$\text{, άρα : } \quad a = a^s \left[1 - e^{-h_o \varepsilon^p - b^s \left(1 - e^{-h\varepsilon^p} \right)} \right]$$