Τοὐναντίον ὁ Μαρτῖνος ἀνεγνώριζε μετ' εὐθύτητος ἀπὸ τοῦ 1866 τὴν πρὸς τὸν Siemens ὀφειλήν του, παρέχων εἰς αὐτὸν ποσοστὰ ἐκ τῶν κερδῶν τῶν προνομίων του. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν Γαλλίαν ἡ μέθοδος ἐξ ἀρχῆς ὠνομάσθη procedé Siemens-Martin. Ἐὰν ὁ Μαρτῖνος ἔφθασεν εἰς τὴν ἐπιτυχίαν ὁρμηθεὶς ἐξ ἀρχῶν γνωστῶν καὶ εἰς ἄλλους, τοῦτο ἔγεινε διότι αὐτὸς ἀντελήφθη κατὰ βάθος τὰς ἀρχὰς ταύτας καὶ διότι εἶχε μεγίστην πεῖραν τῆς μεταλλουργίας. Εἰς τὴν κάμινον τῆς Sireuil ὁ Μαρτῖνος ἐκαμίνευσεν 70 φορὰς ἄνευ διακοπῆς καὶ ἄνευ ἀνωμαλίας, διότι εἶχεν ὁρίσει τὴν συμφερωτέραν ἀναλογίαν καυσαερίου καὶ ἀέρος, διότι κατεσκεύασε τὴν κάμινόν του ἐκ τῶν ἀρίστων πυριτικῶν πυροπλίνθων τοῦ Dinas (Οὐαλλία) καὶ διότι ἐπέβλεπε μετὰ προσοχῆς εἰς τὸ ποιὸν τῶν πρώτων ὑλῶν του.

Ἐν ἀνακεφαλαιώσει ἡ μέθοδος τοῦ Μαρτίνου ἔχει δύο παραλλαγάς, καθ' ὅσον ὁ χυτοσίδηρος καθαίρεται δι ἀπορριμάτων μαλακοῦ σιδήρου—scrap process—ἢ διὰ μεταλλεύματος σιδήρου—ore process. Καὶ εἰς τὴν μίαν ὅμως καὶ εἰς τὴν ἄλλην περίπτωσιν ὁ πολὺς ἄνθραξ τοῦ χυτοσιδήρου ὀξειδοῦται, διὰ τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ὀξυγόνου εἰς τὴν πρώτην, διὰ τοῦ ὀξυγόνου τοῦ μεταλλεύματος εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Ἐὰν ἡ μέθοδος Βέσσεμερ δίδῃ ταχύτατα μεγάλα ποσὰ χυτοχάλυβος, ἐξ ἄλλου ἀπαιτεῖ πολυδαπάνους ἐγκαταστάσεις, προσιτὰς μόνον εἰς μεγάλα μεταλλουργεῖα. Τοὐναντίον ἡ μέθοδος Μαρτίνου, ὀλιγώτερον δαπανηρὰ εἰς ἐγκατάστασιν, ἐπιτρέπει συγχρόνως τὴν χρησιμοποίησιν τῶν μεγίστων ποσοτήτων ἀπορριμμάτων σιδήρου τῶν μηχανουργείων ὡς ἀντισήκωμα τῆς μικροτέρας παραγωγικῆς της δυνάμεως.

Σπουδαία βελτίωσις ἐπῆλθεν εἰς τὴν μέθοδον τοῦ Μαρτίνου περὶ τὸ 1880 διὰ τῆς ἐπενδύσεως τοῦ πυθμένος τῶν καμίνων διὰ βασικῶν πυριμάχων πλίνθων, ἀντὶ τῶν καθαρῶς πυριτικῶν πλίνθων τοῦ Dinas καὶ διὰ τῆς προσθήκης ἀσβέστου ὡς συλλιπάσματος. Ἔγεινεν οὕτω δυνατὴ ἡ χώνευσις χυτοσιδήρου φωσφορούχου, μὲ τὸ πλεονέκτημα τοῦτο ἀπέναντι τῆς μεθόδου Βέσσεμερ, ὅτι δὲν ἀπαιτεῖται ὅπως εἰς ἐκείνην ὡρισμένον μέγιστον φωσφόρου. Οὕτω, καθ' ὅσον τὰ μὴ φωσφοροῦχα μεταλλεύματα ἐξαντλοῦνται, τὰ δὲ σιδηρᾶ ἀπορρίμματα τῶν μηχανουργείων πληθύνονται, αἱ ἐγκαταστάσεις τῶν βασικῶν καμίνων Μαρτίνου πολλαπλασιάζονται. Ἐκ τῆς παγκοσμίου παραγωγῆς τοῦ 1913 τῶν 52 ἑκατομμυρίων τόννων χυτοχάλυβος τὰ 30 ἀνήκουσιν εἰς τὴν μέθοδον τοῦ Μαρτίνου, ἐντὸς δὲ τῆς δεκαετίας 1900-1910 ἡ ἀναλογία μεταξὺ τῶν μεθόδων Βέσσεμερ καὶ Μαρτίνου ἀπὸ 59,5: 40,5 ἔφθασεν εἰς 42,8: 57,2. Ἡ βαθμιαία ἀντικατάστασις τοῦ χάλυβος Βέσσεμερ διὰ τοῦ χάλυβος Μαρτίνου παρουσιάζεται οὕτως ἐν σαφεῖ ἐξελίξει, τὸ γεγονὸς δὲ τοῦτο εἶναι τὸ σημαντικώτατον εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς μεταλλουργίας τοῦ χάλυβος.

Α. Σ. ΣΚΙΝΤΖΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΥΠΟΙ

ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΕΤΩΝ ΕΟΡΤΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΑΣΧΑ

ΤΗΝ 22 ΜΑΡΤΙΟΥ

ΠΡΟΓΕΝΕΣΤΕΡΑΝ ΔΥΝΑΤΗΝ ΕΠΟΧΗΝ

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τούτων θὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῶν ἰσχυουσῶν διατάξεων πρὸς καθορισμὸν τῆς ἑορτῆς τοῦ Πάσχα οἱουδήποτε ἔτους.

Α΄.

Εὕρεσις τῆς ἑορτῆς τοῦ Πάσχα

Ἡ ἐν Νικαίᾳ συνελθοῦσα τῷ 325 μ. Χ. Α΄. Οἰκουμενικὴ Σύνοδος καθιέρωσε τὰς ἐπικρατούσας ὡς πρὸς τὸν ἑορτασμὸν τοῦ Πάσχα ἀρχὰς διὰ τῆς ἀκολούθου διατάξεως.

«Τὸ Πάσχα ἑορτάζεται τὴν πρώτην Κυριακὴν μετὰ τὴν Πανσέληνον τὴν μετὰ τὴν ἐαρινὴν ἰσημερίαν· ἐὰν ἡ πανσέληνος συμβῇ κατὰ Κυριακήν, τότε τὸ Πάσχα ἑορτάζεται τὴν ἀμέσως ἑπομένην Κυριακήν. Ὡς ἡμέρα δὲ τῆς ἐαρινῆς ἰσημερίας ὁρίζεται ἡ 21 Μαρτίου ἑκάστου ἔτους».

Πρὸς προσδιορισμὸν ὅθεν τῆς ἑορτῆς τοῦ Πάσχα κατὰ τὸ τυχὸν ἔτος ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν δύο τινά:

α) Τὴν ἡμερομηνίαν, καθ' ἣν συμβαίνει ἡ τοῦ Πάσχα πανσέληνος, καὶ

β) Ποία τῆς ἑβδομάδος ἡμέρα εἶνε ἡ ἡμερομηνία αὐτή.

Πρὸς λύσιν τοῦ πρώτου ζητήματος χρησιμοποιεῖται ὁ ὑπὸ τοῦ Πατριαρχείου Ἀλεξανδρείας κατ' ἐντολὴν τῆς μνησθείσης συνόδου καταρτισθεὶς πίναξ τῶν τοῦ Πάσχα Πανσελήνων τῶν 19 ἐτῶν, τῶν ἀπαρτιζόντων ἕνα «κύκλον σελήνης».

Ἰδοὺ οὗτος:

Χρυσοῦς ἀριθμὸς ἔτους	Πανσέληνος τοῦ Πάσχα	
1	Ἀπριλίου	5
2	Μαρτίου	25
3	Ἀπριλίου	13
4	»	2
5	Μαρτίου	22
6	Ἀπριλίου	10
7	Μαρτίου	30
8	Ἀπριλίου	18
9	»	7
10	Μαρτίου	27
11	Ἀπριλίου	15
12	»	4
13	Μαρτίου	24
14	Ἀπριλίου	12
15	»	1
16	Μαρτίου	21
17	Ἀπριλίου	9
18	Μαρτίου	29
19	Ἀπριλίου	17

Κατὰ τὸ πρῶτον τῆς 19ετηρίδος ἔτος, δι' ὃ λέγομεν, ὅτι ἔχει χρυσοῦν ἀριθμὸν 1, ἡ τοῦ Πάσχα πανσέληνος συμβαίνει τὴν 5 Ἀπριλίου. Κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος, τὸ ἔχον χρυσοῦν ἀριθμὸν 2, συμβαίνει αὕτη τὴν 25 Μαρτίου καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοιουτοτρόπως ἡ εὕρεσις τῆς ἡμερομηνίας τῆς πανσελήνου ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ χρυσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ θεωρουμένου ἔτους.

Κανὼν εὑρέσεως τοῦ χρυσοῦ ἀριθμοῦ.—Οἱ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ συντάξαντες τὸν ἀνωτέρω πίνακα ὥρισαν ὡς «πρῶτον κύκλον σελήνης» τῆς χριστιανικῆς ἐποχῆς τὴν ἀπὸ τοῦ «1. π. Χ. ἔτους ἀρχομένην 19ετηρίδα. «Ἐὰν ἑπομένως δεδομένου τινὸς ἔτους τὸν ἀριθμὸν αὐξήσωμεν κατὰ 1 καὶ εἶτα διαιρέσωμεν διὰ 19, θὰ εὕρωμεν ὡς ὑπόλοιπον τὸν «χρυσοῦν ἀριθμὸν» τοῦ ἔτους τούτου· ἐὰν δὲ τὸ «ὑπόλοιπον εἶνε 0, τότε συμπεραίνομεν, ὅτι ὁ «χρυσοῦς ἀριθμὸς» τοῦ ἔτους εἶνε 19».

Ἔστω τὸ ἔτος 1915.

$$\begin{array}{r|l} 1915+1=191'6' & 19 \\ \hline =16 & 100 \end{array}$$

Ἄρα ὁ χρυσοῦς ἀριθ. τοῦ 1915 εἶνε 16 καὶ ἡ τοῦ Πάσχα Πανσέληνος τοῦ ἔτους τούτου συνέβη τὴν 21 Μαρτίου.

Πρὸς λύσιν τοῦ δευτέρου ζητήματος ἰσχύει ὁ κατωτέρω κανών. Παράδειγμα.

«Εὑρεῖν ποία τῆς ἑβδομάδος ἡμέρα εἶνε ἡ 21 Μαρτίου τοῦ 1915».

Κανών.

α΄) Λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἔτους ἠλαττωμένον κατὰ 1, ἤτοι 19 15—1= 1914

β΄) Διαιροῦμεν τὸν ληφθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ 4 καὶ λαμβάνομεν τὸ εὑρεθὲν ἀκέραιον πηλίκον, ἤτοι . . . 478

γ΄) Λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τοῦ Ἰανουαρίου 1915 ἠλαττωμένον κατὰ 28, ἤτοι 31—28= . . 3

δ΄) Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸν Φεβρουάριον 1915, ἤτοι 28—28= 0

[Σημ. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ δι' ἕκαστον τῶν λοιπῶν μηνῶν, οἵτινες προηγοῦνται τοῦ δοθέντος μηνὸς (τοῦ Μαρτίου)].

ε΄) Λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τοῦ Μαρτίου, τῶν προηγουμένων τῆς δοθείσης (21 Μαρτίου), ἤτοι 20

2415

στ΄) Προσθέτομεν τοὺς ληφθέντας ἀριθμοὺς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 7.

$$\begin{array}{r|l} 24'1'5 & 7 \\ \cline{2-2} 31 & 345 \\ 35 & \\ 0 & \end{array}$$

Ἂν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἦτο 1, τότε θὰ ἦτο Κυριακὴ ἡ 21 Μαρτίου 1915, ἐὰν δὲ 2 Δευτέρα, ἐὰν 3 Τρίτη κ. ο. κ. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε 0 συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ 21 Μαρτίου 1915 ἦτο Σάββατον.

Τούτου ἕνεκα τὸ Πάσχα ἑωρτάσθη κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο τὴν ἀκόλουθον Κυριακήν, ἤτοι τὴν 22 Μαρτίου.

Β΄

Εὕρεσις τῶν ζητουμένων τύπων.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ τυχὸν ἔτος Τ μ. Χ. καὶ ἂς ἴδωμεν ποίας συνθήκας πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῖ τοῦτο, ἵνα ἔχῃ ὡς ἑορτὴν τοῦ Πάσχα τὴν 22 Μαρτίου.

Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ ἔχῃ χρυσοῦν ἀριθμὸν 16, εἰς ὃν καὶ μόνον ἀντιστοιχεῖ ἡ προγενεστέρα δυνατὴ Πανσέληνος τοῦ Πάσχα, ἡ 21 Μαρτίου.

Δεύτερον πρέπει ἡ 21 Μαρτίου τοῦ ἔτους Τ νὰ εἶνε Σάββατον.

Αὗται εἶνε αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἀρκεταὶ συνθῆκαι. Μέλλομεν τώρα νὰ διατυπώσωμεν ταύτας δι' ἐξισώσεων.

Ἀφοῦ τὸ ἔτος Τ ἔχει χρυσοῦν ἀριθμὸν 16, ἕπεται ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ $T+1$ διὰ 19 εἶνε ἴσον πρὸς 16. Ὅθεν ἕπεται

$$T+1=19.K+16 \text{ ἢ}$$

$$(1) \quad T=15+19.K$$

ὅπου Κ παριστᾷ ἀκέραιόν τινα θετικὸν ἢ 0.

Ἂς ἐκτελέσωμεν νῦν τοὺς ἀπαιτουμένους ὑπολογισμούς, δι' ὧν καθορίζεται, ποία τῆς ἑβδομάδος ἡμέρα εἶνε ἡ 21 Μαρτίου τοῦ ἔτους Τ μ.Χ.

α) Λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $T-1$,
ὅστις $=15+19.K-1=14+19K$

β) Λαμβάνομεν τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $24+19K$ διὰ τοῦ 4 ὅπερ= $3+\omega$

γ) 31ἡμ. Ἰανουαρ.—28ἡμ.= 3.

δ) 27 (ἢ 29ἡμ.) Φεβρ.—28ἡμ.= $0+\vartheta$

ε) Ἡμέραι τοῦ Μαρτίου προηγούμεναι τῆς 21 — 20

ς) Ἄθροισμα τούτων $40+19K+\vartheta+\omega$

ὅπου ω παραστᾷ ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν (ἢ 0), ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$(2) \quad \frac{2+19K}{4}=\omega+\frac{\upsilon}{4},$$

υ δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου $2+19K$ διὰ 4 (ἄρα $\upsilon=$ ἢ 0 ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3), καὶ θ παριστᾷ 1 ἢ 0, καθόσον τὸ ἔτος Τ εἶνε δίσεκτον ἢ κοινόν.

ζ) Διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα διὰ τοῦ 7. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης δεικνύει τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος, καθ' ἣν πίπτει ἡ 21 Μαρτίου τοῦ ἔτους Τ.

Ἐπειδὴ ἡ ἡμέρα αὕτη κατὰ τὴν δευτέραν συνθήκην ὀφείλει νὰ ᾖ Σάββατον, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ εἰρημένον ὑπόλοιπον ἰσοῦται πρὸς τὸ 0, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος $40+19K+\vartheta+\omega$ διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ 7.

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$40+19K+\vartheta+\omega=7.\Pi \qquad (3)$$

ὅπου Π παριστᾷ ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ τὸν ω διὰ τῆς ἐκ τῆς (2) παρεχομένης τιμῆς του, θὰ λάβωμεν

$$16+95K-\upsilon+4\vartheta=28.\Pi$$

$$\text{ἢ } 28(5+3K)+11K+22+4\vartheta-\upsilon=28.\Pi. \quad (4)$$

Κατὰ τὴν ἰσότητα ταύτην ὁ 28 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου μέλους παριστώμενον ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τελευταῖος οὗτος ἀκέραιος σύγκειται ἐκ δύο ἄλλων, τοῦ 28 (5+3Κ), ὅστις εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 28, καὶ τοῦ $11K+22+4\vartheta-\upsilon$, ἕπεται, ὅτι ὁ 28 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν τελευταῖον τοῦτον.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν·

$$11K+22+4\vartheta-\upsilon=28.M$$

ἢ ἁπλούστερον

$$11K+\lambda=28M \qquad (5)$$

ὅπου $\lambda=22+4\vartheta-\upsilon \qquad (6)$

καὶ Μ ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἢ 0.

Ἡ ἐξίσωσις (5) εἶνε συνέπεια τῆς (4)· ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται, ὅτι τὸ ἔτος Τ, ἵνα ἔχῃ τὴν 22 Μαρτίου ὡς Πάσχα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπόκειται εἰς τὰς συνθήκας (1) καὶ (6), ἤτοι νὰ ἐπαληθεύῃ τὸ σύστημα

$$(A\upsilon,\vartheta) \quad \begin{cases} T=15+19.K \\ 11K+\lambda=28M \end{cases}$$

Ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ἔχομεν τρεῖς ἀγνώστους Τ, Κ, Μ, αἱ ὁποῖαι ἐπιδέχονται τιμὰς μόνον ἀκεραίας καὶ θετικὰς (ἢ καὶ 0 αἱ Κ καὶ Μ).

Ὁ δὲ συντελεστὴς λ ὁ ὁριζόμενος ὑπὸ τῆς (6) ἐπιδέχεται 4 διαφόρους τιμάς, ἃς εἶνε καλὸν νὰ ὑπολογίσωμεν.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α) Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon=3$ καὶ

β) » » » $\upsilon=0$ ἢ 1 ἢ 2

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ θεωρούμενον ἔτος Τ διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ 4 καὶ συνεπῶς εἶνε δίσεκτον· ἄρα ὁ Φεβρουάριος αὐτοῦ ἔχει 29 ἡμέρας καὶ ὁ ἀριθμὸς $\vartheta=1$.

Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τὸ Τ ἔτος εἶνε κοινόν· συνεπῶς ὁ $\vartheta=0$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ υ καὶ θ ἐπιδέχονται μόνον τὰς ἀκολούθους τιμάς:

$$\text{ἢ } \begin{matrix}\upsilon=3\\ \vartheta=1\end{matrix} \text{ ἢ } \begin{matrix}\upsilon=2\\ \vartheta=0\end{matrix} \text{ ἢ } \begin{matrix}\upsilon=1\\ \vartheta=0\end{matrix} \text{ ἢ } \begin{matrix}\upsilon=0\\ \vartheta=0\end{matrix}$$

καὶ ἡ συνάρτησις αὐτῶν λ τὰς ἑξῆς

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{3,1}&=22+4.1-3=23 \\ \lambda_{2,0}&=22+4.0-2=20 \\ \lambda_{1,0}&=22+4.0-1=21 \\ \lambda_{0,0}&=22+2.0-0=22 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Τούτου οὕτως ἔχοντος, τὸ γενικὸν σύστημα $(A\upsilon,\vartheta)$ ἀναλύεται πρὸς τὰ κάτωθι (4), πρὸς τὸ σύνολον τῶν ὁποίων εἶνε ἰσοδύναμον.

$$(A_{3,1}) \begin{cases} T=15+19.K \\ 11K+23=28.M \end{cases}$$

$$(A_{2,0}) \begin{cases} T=15+19K \\ 11K+20=28M \end{cases}$$

$$(A_{1,0}) \begin{cases} T=15+19K \\ 11K+21=28M \end{cases}$$

$$(A_{0,0}) \begin{cases} T=15+19.K \\ 11K+22=28M. \end{cases}$$

Λύσις τοῦ γενικοῦ συστήματος Αυϑ.,

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τούτου δίδει

$$K=\frac{28M-\lambda}{11}=\frac{(28\frac{M}{\lambda}-1)\lambda}{11}$$

Ἂν τεθῇ $M=2\lambda$, προκύπτει $K=5\lambda$.

Ὥστε αἱ γενικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης περιέχονται εἰς τοὺς ἑξῆς δύο τύπους

$$K=5\lambda+28.N \qquad (8)$$
$$M=2\lambda+11\ N \qquad (9)$$

ὅπου N παριστᾷ τὸν τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἡ δὲ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δι' ἀντικαταστάσεως δίδει τὸν τύπον

$$T=15+19(5\lambda+28.N)$$

ἢ ἁπλούστερον

$$T=(15+95\lambda)+532.N \qquad (10)$$

Οἱ εὑρεθέντες τρεῖς τύποι (8), (9) καὶ (10) παρέχουσι πάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τοῦ συστήματος.

Διερεύνησις. Αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ N παρέχουσιν ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμὰς διὰ τὰς ἀγνώστους K, M καὶ T καὶ ἐπομένως παραδεκτάς. Ἐκ τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων τιμῶν τῆς N παρέχουσι λύσεις παραδεκτὰς μόνον ἐκεῖναι, ὧν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ δὲν ὑπερβαίνει τὸν μέγιστον ἀκέραιον τὸν ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ κλάσματι

$$\frac{15+95\lambda}{532}$$

Ὁ τύπος (10), ὅστις παρέχει πάντα τὰ ἔτη, τὰ ἑορτάζοντα τὸ Πάσχα τὴν 22 Μαρτίου, αναλύεται εἰς τοὺς ἑπομένους τέσσαρας, ἐὰν τὸ λ λάβῃ τὰς δυνατὰς τιμάς του (7):

(11) $T_{3,1}=(15+95.23)+532.N=2200+532.N$
(12) $T_{2,0}=\qquad\qquad\qquad\qquad =1915+532.N$
(13) $T_{1,0}=\qquad\qquad\qquad\qquad =2010+532.N$
(14) $T_{0,0}=\qquad\qquad\qquad\qquad =2105+532.N$

Οἱ τύποι οὗτοι, οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τὰ συστήματα $A_{3,1}$, $A_{2,0}$, $A_{1,0}$, $A_{0,0}$, εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνοι, οὓς ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν.

Αἱ ἁρμόζουσαι τιμαὶ τοῦ N εἶνε διὰ μὲν τὸν (11) αἱ ἑξῆς:

$N=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4.....+\infty$

διὰ δὲ τοὺς λοιποὺς αἱ αὐταὶ πλὴν τῆς πρώτης.

Κατὰ ταῦτα, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ἔτη ἀποτελοῦσι τοὺς ὅρους τῶν παρὰ πόδας ἀριθμητικῶν προόδων, ὧν ὁ λόγος εἶνε 532 (ἢ 19×28 ἔτη):

$T_{3,1}=$ 72, 604, 1136, 1668, 2200, 2732,....
$T_{2,0}=$319, 851, 1383, 1915, 2447, 2979,....
$T_{1,0}=$414, 946, 1478, 2010, 2542, 3074,....
$T_{0,0}=$509, 1041, 1573, 2105, 2637, 3169,....

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἰουλίου 1915

Κ. Ι. ΠΑΠΑΖΑΧΑΡΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πᾶσα ἀλγεβρικὴ μονότιμος συνάρτησις f λαμβάνει τὴν τιμὴν 0 ἢ οἱανδήποτε ἄλλην σταθερὰν τιμὴν c τοσάκις, ὁσάκις καὶ τὴν τιμὴν ∞. Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται, ὡς γνωστόν, εὐκόλως, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος ἐπιφάνεια τοῦ Riemann μετασχηματισθῇ διὰ καταλλήλων τομῶν εἰς ἁπλῶς συνεχομένην καὶ λογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{df}{f} \quad ἢ \quad \int\frac{df}{f-c}$$

κατὰ μῆκος τῆς περιοχῆς καὶ τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας ταύτης. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι προδήλως γενίκευσις τῆς θεμελιώδους προτάσεως τῆς Ἀλγέβρας περὶ τῆς ὑπάρξεως τῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀποδεικνύω, ὅτι αἱ τιμαί, δι' ἃς συνάρτησίς τις $\Phi(z)=\prod_{1}^{\nu-2}(z-e_i)^{\lambda i}\ f(z)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0 εὑρίσκονται καὶ δι' ἐφαρμογῆς γνωστοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy καὶ τοῦ λογαριθμικοῦ δυναμικοῦ· εἶναι δὲ τὰ e σημεῖα διακλαδώσεως τῆς συναρτήσεως Φ(z), τὰ λ ἀριθμοὶ πραγματικοὶ θετικοὶ μὴ ἀκέραιοι καὶ f(z) συνάρτησις μὴ διακλαδουμένη καὶ μὴ μηδενιζομένη εἰς τὰ σημεῖα e.

1. Ἔστω $\Phi(z)=\prod_{1}^{\nu-2}(z-e_i)^{\lambda i}\ f(z)$, ὅπου f(z) οἱαδήποτε συνάρτησις διακλαδουμένη ἐν γένει εἰς τὰ σημεῖα $e_{\nu-1}$ καὶ e_ν. Ποσάκις ἡ f μηδενίζεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν;

Ἔστω ἡ $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ ἀλγεβρική τις ἐξίσωσις, ἧς οἱ συντελεσταὶ οἱοιδήποτε μιγάδες ἀρθμοί. Ἐν τῷ z — ἐπιπέδῳ ληφθήτω κεκλεισμένη τις περιοχὴ (πεπερασμένη ἢ ἄπειρος) χ(x,y)=0. Αἱ γραμμαὶ φ=0, ψ=0 διαιροῦσι τὸ z — ἐπίπεδον εἰς διαφόρους τόπους διακρινομένους διὰ τῶν σημείων τοῦ φ καὶ τοῦ ψ. Παρασταθήτωσαν αἱ τομαὶ τῶν γραμ-