Λύσις τοῦ γενικοῦ συστήματος Αυϑ.,

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τούτου δίδει

$$K = \frac{28M - \lambda}{11} = \frac{(28\frac{M}{\lambda} - 1)\lambda}{11}$$

Ἂν τεθῇ $M = 2\lambda$, προκύπτει $K = 5\lambda$.

Ὥστε αἱ γενικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης περιέχονται εἰς τοὺς ἑξῆς δύο τύπους

$$K = 5\lambda + 28 . N \qquad (8)$$
$$M = 2\lambda + 11 \; N \qquad (9)$$

ὅπου N παριστᾷ τὸν τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἡ δὲ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δι' ἀντικαταστάσεως δίδει τὸν τύπον

$$T = 15 + 19(5\lambda + 28 . N)$$

ἢ ἁπλούστερον

$$T = (15 + 95\,\lambda) + 532 . N \qquad (10)$$

Οἱ εὑρεθέντες τρεῖς τύποι (8), (9) καὶ (10) παρέχουσι πάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τοῦ συστήματος.

Διερεύνησις. Αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ N παρέχουσιν ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμὰς διὰ τὰς ἀγνώστους K, M καὶ T καὶ ἑπομένως παραδεκτάς. Ἐκ τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων τιμῶν τῆς N παρέχουσι λύσεις παραδεκτὰς μόνον ἐκεῖναι, ὧν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ δὲν ὑπερβαίνει τὸν μέγιστον ἀκέραιον τὸν ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ κλάσματι

$$\frac{15 + 95\lambda}{532}$$

Ὁ τύπος (10), ὅστις παρέχει πάντα τὰ ἔτη, τὰ ἑορτάζοντα τὸ Πάσχα τὴν 22 Μαρτίου, ἀναλύεται εἰς τοὺς ἑπομένους τέσσαρας, ἐὰν τὸ λ λάβῃ τὰς δυνατὰς τιμάς του (7):

(11) $T_{3,1} = (15 + 95.23) + 532.N = 2200 + 532.N$
(12) $T_{2,0} = 1915 + 532.N$
(13) $T_{1,0} = 2010 + 532.N$
(14) $T_{0,0} = 2105 + 532.N$

Οἱ τύποι οὗτοι, οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τὰ συστήματα $A_{3,1}$, $A_{2,0}$, $A_{1,0}$, $A_{0,0}$, εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνοι, οὓς ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν.

Αἱ ἁρμόζουσαι τιμαὶ τοῦ N εἶνε διὰ μὲν τὸν (11) αἱ ἑξῆς:

$N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots + \infty$

διὰ δὲ τοὺς λοιποὺς αἱ αὐταὶ πλὴν τῆς πρώτης.

Κατὰ ταῦτα, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ἔτη ἀποτελοῦσι τοὺς ὅρους τῶν παρὰ πόδας ἀριθμητικῶν προόδων, ὧν ὁ λόγος εἶνε 532 (ἢ 19×28 ἔτη):

$T_{3,1} = 72, 604, 1136, 1668, 2200, 2732, \ldots$
$T_{2,0} = 319, 851, 1383, 1915, 2447, 2979, \ldots$
$T_{1,0} = 414, 946, 1478, 2010, 2542, 3074, \ldots$
$T_{0,0} = 509, 1041, 1573, 2105, 2637, 3169, \ldots$

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἰουλίου 1915

Κ. Ι. ΠΑΠΑΖΑΧΑΡΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πᾶσα ἀλγεβρικὴ μονότιμος συνάρτησις f λαμβάνει τὴν τιμὴν 0 ἢ οἱανδήποτε ἄλλην σταθερὰν τιμὴν c τοσάκις, ὁσάκις καὶ τὴν τιμὴν ∞. Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται, ὡς γνωστόν, εὐκόλως, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος ἐπιφάνεια τοῦ Riemann μετασχηματισθῇ διὰ καταλλήλων τομῶν εἰς ἁπλῶς συνεχομένην καὶ λογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{df}{f} \quad \text{ἢ} \quad \int \frac{df}{f - c}$$

κατὰ μῆκος τῆς περιοχῆς καὶ τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας ταύτης. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι προδήλως γενίκευσις τῆς θεμελιώδους προτάσεως τῆς Ἀλγέβρας περὶ τῆς ὑπάρξεως τῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικοῦ πολυωνύμου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀποδεικνύω, ὅτι αἱ τιμαί, δι' ἃς συνάρτησίς τις $\Phi(z) = \prod_1^{\nu-2} (z - e_i)^{\lambda i} f(z)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0 εὑρίσκονται καὶ δι' ἐφαρμογῆς γνωστοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy καὶ τοῦ λογαριθμικοῦ δυναμικοῦ· εἶναι δὲ τὰ e σημεῖα διακλαδώσεως τῆς συναρτήσεως Φ(z), τὰ λ ἀριθμοὶ πραγματικοὶ θετικοὶ μὴ ἀκέραιοι καὶ f(z) συνάρτησις μὴ διακλαδουμένη καὶ μὴ μηδενιζομένη εἰς τὰ σημεῖα e.

1. Ἔστω $\Phi(z) = \prod_1^{\nu-2} (z - e_i)^{\lambda i} f(z)$, ὅπου f(z) οἱαδήποτε συνάρτησις διακλαδουμένη ἐν γένει εἰς τὰ σημεῖα $e_{\nu-1}$ καὶ e_ν. Ποσάκις ἡ f μηδενίζεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν;

Ἔστω ἡ $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ ἀλγεβρική τις ἐξίσωσις, ἧς οἱ συντελεσταὶ οἱοιδήποτε μιγάδες ἀρθμοί. Ἐν τῷ z — ἐπιπέδῳ ληφθήτω κεκλεισμένη τις περιοχὴ (πεπερασμένη ἢ ἄπειρος) $\chi(x,y) = 0$. Αἱ γραμμαὶ $\varphi = 0$, $\psi = 0$ διαιροῦσι τὸ z — ἐπίπεδον εἰς διαφόρους τόπους διακρινομένους διὰ τῶν σημείων τοῦ φ καὶ τοῦ ψ. Παρασταθήτωσαν αἱ τομαὶ τῶν γραμμῶν $\psi=0$ καὶ $\chi=0$ διὰ τοῦ α, διὰ $\psi'(\alpha)$ ἡ παράγωγος τοῦ ψ ἐν τῷ σημείῳ α κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς $\chi=0$ καὶ διὰ $\varphi(\alpha)$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ φ. Τὰ μὲν σημεῖα, δι' ἃ $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi'(\alpha)}>0$, κεῖνται ἐν τῷ θετικῷ τόπῳ· τὰ δὲ σημεῖα, δι' ἃ $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi'(\alpha)}<0$, κεῖνται ἐν τῷ ἀρνητικῷ τόπῳ. Εὐνόητον δέ, ὅτι διὰ τὰ σημεῖα α τῆς θετικῆς κατηγορίας τὸ πηλίκον $\frac{\varphi}{\psi}$ ἀμέσως μὲν πρὸ τῆς θέσεως α εἶναι ἀρνητικόν, ἀμέσως δὲ μετὰ τὴν θέσιν α θετικόν· τανάπαλιν δὲ διὰ τὰ σημεῖα τῆς ἀρνητικῆς κατηγορίας. Κατ' ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις ταύτας τὸ ἐν λόγῳ πηλίκον ἐν αὐτῇ τῇ θέσει α καθίσταται ∞· ἤτοι διὰ μὲν τὰ σημεῖα α τῆς θετικῆς κατηγορίας τὸ πηλίκον $\frac{\varphi}{\psi}$ διερχόμενον διὰ τοῦ ∞ μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ — εἰς τὸ +, δι' ἃ δὲ τὰ σημεῖα α τῆς ἀρνητικῆς κατηγορίας, τὸ αὐτὸ πηλίκον διερχόμενον διὰ τοῦ ∞ μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ + εἰς τὸ —. Ἔστω δὲ p ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων τῆς θετικῆς κατηγορίας καὶ n ὁ τῆς ἀρνητικῆς κατηγορίας: ὁ ἀριθμὸς N τῶν ριζῶν ἐν τῷ θεωρουμένῳ τόπῳ εἶναι

$$N=\frac{1}{2}(p-n)$$

διότι κατὰ τὴν γνωστὴν πρότασιν τοῦ Cauchy εἶναι:

$$N=\frac{1}{2i\pi}\int d\,lf(z)=$$

$$\frac{1}{2i\pi}\left(l\sqrt{\varphi^2+\psi^2}+i\,\text{τοξ εφ}\frac{\varphi}{\psi}\right)$$

τοῦ ὁλοκληρώματος λαμβανομένου κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς $\chi=0$ ἐν τῇ θετικῇ φορᾷ. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιφορῶν, ἃς τὸ σημεῖον φ,ψ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τὴν $\chi=0$ περιοχῆς τελεῖ περὶ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων $\varphi=0$, $\psi=0$· εἶναι δὲ προφανῶς τὸ πλῆθος τῶν ἐν λόγῳ περιφορῶν διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ N.

2. Ἐὰν ἰδίᾳ τεθῇ $y-\varphi=0$, $y-\psi=0$, $y=0$, ἔνθα $y=0$ ἀντιστοιχεῖ $\chi=0$, προκύπτει τὸ θεώρημα τοῦ Sturm.

3. Ἔστω $\Phi(z)=\prod_{1}^{\nu-2}(z-e_i)^{\lambda i}\,f(z)$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν μιγάδων ἀριθμῶν κ μὲν σημεῖα κινητὰ $z_1z_2z_3\ldots z_\varkappa$ ἕκαστον μετὰ τῆς μάζης 1, μόνιμα δὲ σημεῖα τὰ $e_1e_2\ldots e_{\nu-1}$ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν μαζῶν $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{\nu-1}$ ἀπωθούμενα ἀναλόγως τῶν μαζῶν κατὰ τὸν νόμον τοῦ λογαριθμικοῦ δυναμικοῦ. Εὑρεῖν τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας τοῦ συστήματος τῶν σημείων τούτων. Τὸ λογαριθμικὸν δυναμικὸν V τοῦ συστήματος τούτου, ὅπερ δέον νὰ καταστῇ διὰ τὴν ἰσορροπίαν μέγιστον (ἢ ἐλάχιστον) εἶναι:

$$V=-c[\Sigma\Sigma l(z_\beta-e_\alpha)\lambda_\alpha+\Sigma\Sigma l(z_\beta-z_\alpha)].$$

Φανερὸν δέ, ὅτι τὸ V καθίσταται ∞, ἐὰν δύω z ἢ ἓν z καὶ ἓν e συμπέσωσιν. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία τοὐλάχιστον κατάταξις τῶν z τοιαύτη, ὥστε μήτε δύο z μήτε ἓν z καὶ ἓν e νὰ συμπίπτωσι καὶ ἑπομένως νὰ προκύπτῃ ἰσορροπία. Ἡ δὲ τοιαύτη κατάταξις τῶν z παρέχει τὰ σημεῖα, δι' ἃ ἡ συνάρτησις f(z) καθίσταται 0. Καὶ ὄντως διὰ τὴν ἰσορροπίαν εἶναι:

$$\frac{\partial V}{\partial z_\beta}=\sum_{\alpha}^{\lambda}\alpha\frac{1}{z_\beta-e_\alpha}+\Sigma_\alpha\frac{1}{z_\beta-z_\alpha}=0$$

διὰ πᾶν z_β.

4. Ἐὰν τεθῇ $\sigma(z)$ ἀντὶ $\Pi(z-z_\varkappa)$ καὶ $\frac{1}{4}\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}$ ἀντὶ $\Sigma_\alpha\lambda_\alpha\frac{1}{z_\beta-e_\alpha}$, ἔνθα $\chi'(z)$ πολυώνυμον βαθμοῦ ν—2, ὅπερ δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ διάφορον τῆς παραγώγου τοῦ $\chi(z)$, προκύπτει:

$$\left(\frac{1}{4}\frac{\chi'}{\chi}+\frac{\sigma''}{2\sigma'}\right)_{z=z_\beta}=0 \quad \text{ἢ}$$

$$\left(\chi\sigma''+\frac{1}{2}\chi'\sigma'\right)_{z_\beta=z}=0$$

5. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ ν+κ—3, ὅπερ, ἐὰν μηδενίζηται διὰ πᾶν z_β, ἤτοι διὰ πᾶσαν ρίζαν τοῦ σ, δέον νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ σ μετὰ πηλίκου βαθμοῦ ν—3 καὶ ἑπομένως τὸ σ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν:

$$\chi\sigma''+\frac{1}{2}\chi'\varphi'=\left(Az^{\nu-3}+Bz^{\nu-4}+\ldots+K\right)\sigma.$$

Αἱ διαφορικαὶ αὗται ἐξισώσεις καὶ τὰ πολυώνυμα σ εἶναι τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν πολυωνύμων τοῦ Lamé (*Heine*, Handbuch der Kugelfunctionen 1878· *Stieltjes*, Acta mathematica VI, 1884).

6. Ἐὰν τὰ σημεῖα $z_1\,z_2\ldots z_\varkappa$ καὶ $e_1e_2\ldots e_{\nu-1}$ ἦναι πραγματικά, τὰ πρῶτα δύνανται προφανῶς νὰ καταταχθῶσιν ἐν τοῖς

$\nu-2$ διαστήμασιν $e_1-e_2, e_2-e_3 \ldots e_{\nu-2}\, e^{\nu-1}$ κατὰ

$$(\alpha) \qquad \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+\nu-3)}{1.2.3\ldots(\nu-3)}$$

διαφόρους τρόπους. Πᾶσα δὲ τοιαύτη κατάταξις παρέχει μίαν τοὐλάχιστον θέσιν ἰσορροπίας· πᾶσα δὲ θέσις ἰσορροπίας παρέχει ἓν πολυώνυμον σ· τοιαῦτα δὲ πολυώνυμα ὑπάρχουσιν ἐν συνόλῳ (α). Ἐπειδὴ δὲ διὰ $V=+\infty$ τὸ V καθίσταται ἐλάχιστον ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθής.

Ἐν Ἀθήναις κατὰ Σεπτέμβριον 1915.

Α. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

Η ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΤΩΝ ΟΡΓΑΝΙΚΩΝ ΧΡΩΜΑΤΩΝ

Ἡ βιομηχανία τῶν ὀργανικῶν χρωμάτων ἦτο πρὸ τοῦ πολέμου τόσον πολὺ γερμανική, ὥστε ἡ ἔλλειψις γερμανικῶν χρωμάτων ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῶν ἐχθροπραξιῶν ἐστενοχώρησε πολὺ τὰς βιομηχανίας τῆς βαφῆς καὶ τυπώσεως τῶν ὑφασμάτων, τόσον εἰς τὴν Εὐρώπην ὅσον καὶ εἰς τὴν Ἀμερικήν. Παραγγελίαι εἰς ὑφαντουργεῖα ἔμειναν ἀνεκτέλεστοι ἢ ἐξετελέσθησαν ἄνευ εὐθύνης διὰ τὴν σταθερότητα τοῦ χρωματισμοῦ.

Καὶ ὅμως εἰς τὸν κλάδον τοῦτον τῆς βιοχανικῆς χημείας, ὅπως εἰς πολλοὺς ἄλλους, ἡ πρώτη ὤθησις δὲν ἦτο Γερμανική. Τὸ πρῶτον ὀργανικὸν χρῶμα, ἡ μωβεΐνη, ὀφείλεται εἰς τὸν Ἄγγλον Πέρκιν, ἡ δὲ ἀνακάλυψις τῆς φουξίνης καὶ τῶν κυανῶν τῆς Λυών, ὅπως ἡ βιομηχανικὴ παραγωγὴ τῆς ἀνιλίνης, εἶναι ἔργον Γάλλων χημικῶν.

Διὰ ποίων μεθόδων καὶ διὰ ποίων προσπαθειῶν οἱ Γερμανοὶ κατώρθωσαν ν' ἀποκτήσωσι τὸ μονοπώλιον τῆς βιομηχανίας ταύτης; Τὸ θέμα τοῦτο ἐπραγματεύθη ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Nancy M. Wahl εἰς διάλεξίν του ἐνώπιον τῆς Societé d'Encouragement pour l'Industrie Nationale. Κατὰ τὸν Wahl ἡ ἐπικράτησις τῆς Γερμανίας εἰς τὴν βιομηχανίαν τῶν ὀργανικῶν χρωμάτων ὀφείλεται εἰς λόγους ἐπιστημονικοὺς ὅσον καὶ ἐμπορικούς.

Πράγματι οἱ Γερμανοὶ ἐνωρίτατα ἐξετίμησαν τὰ κέρδη τὰ ὁποῖα ἠδύναντο νὰ πηγάσωσιν ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τῶν χημικῶν ἐργαστηρίων. Ὑπὸ τὴν φωτεινὴν ὤθησιν τοῦ Hofmann, αἱ χρωστικαὶ οὐσίαι ἐμελετήθησαν συστηματικῶς. Ἀφετηρία τῆς μελέτης ταύτης ὑπῆρξεν ἡ ἀνακάλυψις τῆς ταὐτίσεως τοῦ κυανοῦ τῆς Λυῶνος μὲ τὸ τριφαινυλοπαράγωγον τῆς φουξίνης. Αἱ νέαι θεωρίαι τοῦ Gerhardt καὶ τοῦ Würtz, αἱ ὁποῖαι τόσον ἐπολεμήθησαν εἰς τὴν Γαλλίαν, υἱοθετήθησαν τοὐναντίον εἰς τὴν Γερμανίαν καὶ ἐφώτισαν ζωηρῶς πολλὰ σκοτεινὰ σημεῖα τῆς βιομηχανίας τῶν ὀργανικῶν χρωμάτων, ἡ δὲ θεωρία τοῦ Kékulé περὶ τοῦ ἑξαγώνου μορίου τοῦ βενζολίου ὡδήγησεν εἰς τὴν σύλληψιν ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων ἰσομερείας. Ἔκτοτε λεγεὼν ὁλόκληρος Γερμανῶν χημικῶν ἠσχολήθη εἰς τὴν παρασκευὴν ὅλων τῶν παραγώγων τοῦ βενζολίου τὰ ὁποῖα ἡ θεωρία προέβλεπεν. Ἡ τεραστία αὕτη ἐργασία, ἥτις ἦτο τὸ πρῶτον βῆμα πρὸς ἐπικράτησιν τῆς Γερμανίας εἰς τὴν προκειμένην βιομηχανίαν, ἐξετελέσθη μεθοδικῶς ἐντὸς τῶν χημικῶν ἐργαστηρίων τὰ ὁποῖα οἱ πρῶτοι μαθηταὶ τοῦ Hofmann ἵδρυσαν εἰς τὰ χρωματουργεῖα τῶν ὁποίων ἀνέλαβον τὴν διεύθυνσιν, ὅπως ὁ Caro εἰς τὴν B.A.S.F. καὶ ὁ Martius εἰς τὴν Aktiengesellschaft τοῦ Βερολίνου.

Κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα αἱ χημικαὶ σπουδαὶ τῶν ὀργανικῶν χρωμάτων παρημελήθησαν εἰς τὴν Γαλλίαν ὅπου εἰργάζοντο μᾶλλον ἐμπειρικῶς. Ἐν τούτοις τὰ πρῶτα ἀζωϊκὰ χρώματα, τὰ ὁποῖα ὁ Roussin, φαρμακοποιὸς τῆς Val-de-Grace ἀνεκάλυψε, παρήχθησαν βιομηχανικῶς κατὰ πρῶτον εἰς τὰ ἐργοστάσια Poirrier. Τὰ χρώματα ταῦτα παραδόξως δὲν ἠσφαλίσθησαν διὰ προνομίου, οὕτως ὥστε ὁ Hofmann κατώρθωσε μετ' ὀλίγον νὰ διαδόσῃ καὶ τὴν σύστασιν καὶ τὴν μέθοδον τῆς παραγωγῆς αὐτῶν. Ἡ Γερμανικὴ μέθοδος ἐθριάμβευεν ἤδη καὶ ἔκτοτε ἡ ὑπεροχή της δὲν ἔπαυσεν ἐνισχυομένη. Τὰ κεφάλαια τῶν γερμανικῶν χρωματουργείων ἀνήρχοντο τὸ 1914 εἰς 300 ἑκατομμύρια, ἐπίσης δὲ σπουδαῖα ἦσαν καὶ τὰ ἀποθεματικὰ τῶν ἑταιρειῶν αὐτῶν.

Ὁ ἑπόμενος πίναξ δεικνύει τὴν πρόοδον τῆς ἐξαγωγῆς χρωμάτων εἰς τὰς διαφόρους χώρας, σημειωτέον δὲ ὅτι ὁ πίναξ οὗτος δὲν περιλαμβάνει τὰ χρώματα τῆς ἀλιζαρίνης καὶ τοῦ ἰνδικοῦ. Ἡ ἐξαγωγὴ ἀλιζαρίνης τοῦ 1913 ἀνῆλθεν εἰς 64288 Τ. ἀξίας 117 ἑκατομμυρίων τοῦ δὲ ἰνδικοῦ εἰς 33352 Τ. ἀξίας 67 ἑκατομμυρίων. Κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος ἡ ὁλικὴ ἐξαγωγὴ