ἀπαραιτήτου ἑκάστοτε καταναλώσεως μεγάλης ποσότητος διαλύματος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δυσχεραίνει πολλάκις τὰς τοιαύτας ἀναλύσεις. Καθίσταται μάλιστα ἡ χρωμομετρικὴ μέθοδος τελείως ἀνεφάρμοστος, ὅταν τὸ ὑπὸ ἀνάλυσιν διάλυμα δὲν εὑρίσκεται ἐν ἀρκετῇ ποσότητι.

Τὸ ἡμέτερον χρωμόμετρον εἶναι ἁπλούστερον καὶ εὐθυνότερον, δίδει δὲ ταχύτερον τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀναλύσεως, χρησιμοποιουμένης ἅμα μικροτέρας ποσότητος τοῦ πρὸς ἀνάλυσιν ὑγροῦ. Ἀποτελεῖται τοῦτο [1]) ἐξ ἑνὸς ὑαλίνου σωλῆνος ΑΑ ἀνοικτοῦ εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα. Εἰς τὸ κάτω ἄκρον καὶ 3 ὑφεκατοστόμετρα ἄνωθεν τούτου (σημεῖον Β), εὑρίσκεται διάφραγμα λεπτὸν ὑάλινον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸν σωλῆνα εἰς δύο ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένα μέρη. Εἰς τὸ ἄνωθεν τοῦ διαφράγματος μέρος εἶναι κεχαραγμένη κλῖμαξ Γ. εἰς $^1/_{10}$ κ. ἐ. μέχρις ὑποδιαιρέσεως 30 κ. ἐ. Τὸ κάτωθεν τοῦ σωλῆνος ἄνοιγμα κλείεται ἀεροστεγῶς δι' ἑνὸς ὑαλίνου πώματος Δ., τὸ ὁποῖον χρησιμεύει καὶ ὡς βάσις τοῦ ὀργάνου. Τὸ ἄνω στόμιον τοῦ χρωμομέτρου κλείεται ἢ διὰ κοινοῦ ὑαλίνου πώματος ἢ δι' ἑτέρου τὸ ὁποῖον διὰ στροφῆς ἐπιτρέπει αὐτομάτως τὴν στάγδην ἐκροὴν τοῦ πρὸς ἀραίωσιν ὑγροῦ. Τὸ σχῆμα τοῦ σωλῆνος, δι' ἀναλύσεις μεγάλης ἀκριβείας, εἶναι ὀρθογωνίου τομῆς καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς παρατηρήσεως πλευρὰ ἀποτελεῖται ἐξ ὑάλου ἀδιαφανοῦς λευκῆς. Διὰ τὰς ἁπλᾶς δὲ βιομηχανικὰς καὶ φυσιολογικὰς ἀναλύσεις κυκλικῆς τομῆς. Ἐννοεῖται ὅτι καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξακρίβωσις τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο συγκρινομένων χρωμάτων γίνεται εὐχερεστέρα τοποθετουμένου λευκοῦ χάρτου ὄπισθεν τοῦ ἐργαλείου.

Ἤδη δι' ἑνὸς παραδείγματος ἐξετάσωμεν πῶς τὸ χρωμόμετρον τοῦτο χρησιμοποιεῖται.

Προσδιορισμὸς σιδήρου ἐν διαλύματι ποσότητος 30 κυβικῶν ὑφεκατοστομέτρων.

Ἀφοῦ καλῶς καθαρισθῇ καὶ ξηρανθῇ ὁ σωλὴν τοῦ χρωμομέτρου πληροῦται διὰ τῆς ὀπῆς τὸ κάτωθεν μέρος τοῦ σωλῆνος διὰ διαλύματος χλωριούχου σιδήρου $FeCl_3$ μετὰ θειοκυανιούχου καλίου, τελείως γνωστῆς εἰς σίδηρον περιεκτικότητος· ἔστω αὕτη 0,0008 Fe (σιδήρου), ἀνὰ κυβικὸν ὑφεκατοστόμετρον διαλύματος. Εἶτα κλείεται ἡ ὀπὴ διὰ τοῦ ὑαλίνου πώματος Δ, Λαμβάνομεν κατόπιν διὰ σιφωνίου ἀκριβείας [2]) ἐκ τοῦ διαλύματος, οὗτινος ἀγνοοῦμεν τὴν εἰς σίδηρον περιεκτικότητα, 2 κυβικὰ ὑφεκατοστόμετρα καὶ διὰ τῆς ἄνωθεν ὀπῆς εἰσάγομεν εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ ὀργάνου, προσθέτοντες $\frac{1}{2}$ κ. ὑφεκατοστόμετρον διαλύματος θειοκυανιούχου σιδήρου. Κατόπιν ἀραιοῦμεν δι' ἀπεσταγμένου ὕδατος τὸ εἰς τὸ ἄνω μέρος εὑρισκόμενον διάλυμα μέχρις οὗ καὶ τοῦτο λάβῃ τὴν αὐτὴν ἔντασιν χρώματος, ἣν ἔχει τὸ εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ σωλῆνος ὑπάρχον ὑγρόν. Μετὰ ταῦτα ἀναγινώσκομεν ἐπὶ τῆς κλίμακος μὲ ἀκρίβειαν $^1/_{10}$ τοῦ κυβ. ὑφεκατοστομέτρου τὸ ποσὸν τοῦ εἰς τὸ ἄνω μέρος ὑπάρχοντος ὑγροῦ ἔστω δὲ τοῦτο 8,2 κ. ὑφεκατ. Ἑπομένως ὁ εἰς τὸ διάλυμα τῶν 30 κ. ὑφεκατοστομ. ὑπάρχων σίδηρος εἶναι Fe=8,2 X 0,0008 X 15 γραμμάρια.

Τὸ χρωμόμετρον τοῦτο εἶναι ἀκριβὲς καὶ δυνάμεθα εὐχερῶς καὶ ταχέως δι' αὐτοῦ νὰ ἐκτελέσωμεν προσδιορισμοὺς μὲ ποσότητα διαλύματος 1 ἢ 2 κυβικῶν ὑφεκατοστομέτρων.

Διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου ἐγένοντο ἤδη, λίαν ἐπιτυχῶς, προσδιορισμοὶ σιδήρου, χαλκοῦ, πυκνότητος αἵματος, διαφόρων ὀργανικῶν χρωμάτων κ.τ.λ., ἐν τῷ ἀνοργάνῳ Χημείῳ τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Βερολίνου, ἔνθα καὶ χρησιμοποιεῖται ἀπὸ μηνῶν τοῦτο.

Ἕνεκα δὲ τῆς ἁπλότητος αὐτοῦ, τοῦ μικροῦ μεγέθους καὶ τῆς εὐκόλου χρήσεως τὸ χρωμόμετρον τοῦτο δύναται καὶ ἐν τῷ στρατῷ νὰ προσφέρῃ ὑπηρεσίας, εἴτε ἐν τοῖς νοσοκομείοις, πρὸς καθορισμὸν τῆς πυκνότητος τοῦ αἵματος, εἴτε ἐν ἐκστρατείᾳ, πρὸς ἐξέτασιν ποσίμων ὑδάτων.

Τὸ χρωμόμετρον τοῦτο εἶναι διὰ τοῦ ὑπ' ἀρ. 626.129 Γερμανικοῦ προνομίου ἐξησφαλισμένον. (D. R. G. M. 626.129 Kl. 42 h.).

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Θ. ΠΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

Διπλωματοῦχος Χημικὸς Μηχανικὸς τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Βερολίνου καὶ Διδάκτωρ τῶν Φυσ. Ἐπιστημῶν.

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Περὶ τοῦ χώρου καὶ τῆς Γεωμετρίας ἐν γέγει ἐγράφησαν ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων μέχρι σήμερον ὑπὸ φιλοσόφων καὶ φιλοσοφούντων ἢ καθαρῶν Μαθηματικῶν τοιαῦτα καὶ τοσαῦτα, ὥστε αἱ ἑπόμεναι γραμμαὶ περὶ τοιούτου τινὸς θέματος ἀποτελοῦσι μέγα τόλμημα. Ἀλλ' ὅμως γράφων τὰς γραμμὰς ταύτας οὐδαμῶς προτίθεμαι νὰ παραστήσω τοὺς περὶ ζητήματα τοῦ χώρου ἀσχολουμένους ὡς μηδὲν ἀπολύτως ὀρθῶς λέγοντας· τοὐναντίον

---

[1]) Ὅρα σχῆμα.

[2]) Ἴδε τοῦ αὐτοῦ «Einige Notizen über das genaue Arbeiten mit Pipetten» Chem. Zeitung Nr 39 § 248 — 1915.

ἐκ τῆς μελέτης τῶν τοιούτων θεμάτων πλεῖστα ὅσα δύναταί τις ὠφέλιμα καὶ χρήσιμα νὰ μάθῃ. Ἡ δὲ πρόοδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης οὐδαμῶς παρακωλύεται ὑπὸ τῆς τοιαύτης ἢ τοιαύτης ὑποθέσεως περὶ τῶν προβλημάτων τοῦ χώρου ἐν γένει.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις προγυμνασθήσομαι τὸ ζήτημα τοῦ χώρου ἀπὸ καθαρᾶς κινηματικῆς ἀπόψεως τιθέμενος ὡς βάσιν τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως ἢ τῆς μεταβολῆς ἐν γένει. Εἶναι δὲ ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως μία τῶν ἁπλῶν ἐμφύτων ἐννοιῶν.

1. Τὴν ἔννοιαν τοῦ χώρου (τοῦ χάους παρὰ τοῖς ἀρχαίοις) λαμβάνομεν διὰ τῆς κινήσεως· τὸ κινητὸν νοεῖται, ὅτι ὑφίσταται, ὅτι ὑπάρχει, ὡς καὶ τὰ παράγοντα ἢ ἀλλοιοῦντα τὴν κίνησιν αἴτια· τὸ κινητὸν κατέχει ἐν τῇ τροχιᾷ αὐτοῦ διαφόρους θέσεις ἢ τόπους, ἐκ τῆς τάξεως τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ χρόνου (τοῦ προτέρου, τοῦ νῦν, τοῦ ὑστέρου)· τὰ κινητὰ ἐν γένει καλοῦμεν σώματα, τὰς δὲ τροχιὰς αὐτῶν γραμμάς· τὸ ἁπλούστατον τῶν σωμάτων, τὸ ἄτομον, λέγομεν σημεῖον· τὴν δὲ ἁπλουστάτην τῶν γραμμῶν εὐθεῖαν, ἧς εἰκόνα λαμβάνομεν π. χ. διὰ τεταμένου λεπτοῦ νήματος. Αἱ μὲν γραμμαὶ κινούμεναι καταλλήλως παράγουσιν ἐπιφανείας, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι στερεά· τὴν ἁπλουστάτην τῶν ἐπιφανειῶν λέγομεν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον· πᾶσα εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπ' αὐτοῦ. Πᾶν σῶμα ἔχει ὡρισμένην τινὰ μορφὴν ἢ σχῆμα καὶ ἔκτασιν ἢ μέγεθος. Τὸ ἁπλούστατον παραστατὸν στερεὸν τὸ ἔχον μῆκος, πλάτος καὶ βάθος καὶ ἐπιφάνειαν σταθερᾶς καμπυλότητος εἶναι ἡ σφαῖρα. Τὸ σημεῖον, ἡ εὐθεῖα, τὸ ἐπίπεδον ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ σφαῖρα δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὡς πρωτεύοντα στοιχεῖα τοῦ χώρου. Ἐν τῇ κινήσει πρωτεύουσαι τροχιαὶ δύνανται νὰ ληφθῶσιν ἡ εὐθύγραμμος, αἱ ἑλικοειδεῖς καὶ ἰδίᾳ αἱ λογαριθμικαὶ ἑλικοειδεῖς καὶ αἱ κυκλικαί.

2. Γεωμετρία λέγεται ἡ ἐπιστήμη ἡ ἐρευνῶσα τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν σωμάτων, ὡς καὶ τὰς γεωμετρικὰς αὐτῶν ἰδιότητας. Ἡ Γεωμετρία, ὡς πᾶσα ἐπιστήμη, στηρίζεται ἐπὶ θεμελιωδῶν τινων κρίσεων ἐξαγομένων ἀμέσως ἐξ αὐτῆς τῆς διανοητικῆς δυνάμεως τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἡ ἀλήθεια αὐτῶν εἶναι ἀμέσως καταφανής. Εἶναι δὲ αἱ θεμελιώδεις αὗται κρίσεις, αἱ ἀρχαὶ πάσης νοήσεως, ἐξ ὧν ἀναπτύσσονται εἶτα οἱ κανόνες ἢ οἱ νόμοι τῶν ἰδιαιτέρων διανοητικῶν ἐνεργειῶν, αἱ ἑπόμεναι· ἡ τῆς ἀντιφάσεως, ἡ τῆς ταὐτότητος, ἡ τῆς ἀποκλείσεως τρίτου καὶ ἡ τοῦ ἀποχρῶντος λόγου. Οἱ ὁρισμοὶ εἶναι ὀνοματικοὶ ἢ πραγματικοί· οὗτοι δὲ εἶναι ἀναλυτικοὶ ἢ γενετικοί. Αἱ ἀποδεικτικαὶ προτάσεις εἶναι συνθετικαὶ ἢ ἀναλυτικαί, ἄμεσοι ἢ δεικτικαὶ καὶ ἔμμεσοι ἢ ἀπαγωγικαί, ἐξαντλητικαὶ καὶ ἐπαγωγικαὶ ὑπὸ περιορισμούς· προσέτι δὲ αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἢ ἐμπειρικαὶ (ἐκ τῶν ὑστέρων) ἢ θεωρητικαὶ (ἐκ τῶν προτέρων). Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἰδίᾳ ἔχομεν καὶ θεμελιώδεις τινὰς προτάσεις ἢ ἀξιώματα καθ' ἑαυτὰ ἰσχύοντα καὶ τοιαῦτα, ὥστε μήτε ἀντιφάσκουσι πρὸς ἄλληλα μήτε ἐξαρτῶνται ὁπωσδήποτε ἀπ' ἀλλήλων· ὡς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ οὕτω καὶ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἰσχύουσιν οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος (κατὰ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν πληθῶν) καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων (κατὰ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς ἀριθμολογίας)· προσέτι δὲ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἰσχύουσιν οἱ ἑπόμενοι τρεῖς νόμοι στοιχειωδῶν θεμελιωδῶν κινήσεων:

$$z' = az,\ z' = \frac{1}{z},\ z' = z + \beta$$

ἤτοι τῆς στροφῆς μετὰ προσεκβολῆς, τῆς ἀντιστροφῆς καὶ τῆς παραλλήλου μεταφορᾶς ἢ μετατοπίσεως.

3. Ἔστω ἡ κίνησις ἡ παρεχομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$x' + iy' = ae^{i\omega}(x + iy) + X + iY$$

μετὰ τῶν τριῶν παραμέτρων ω, X,Y.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$x' + iy' = e^{(a+i\beta)\varphi}(x + iy)$$
$$x' - iz' = e^{(a-i\beta)\varphi}(x - iy)$$

προκύπτει διὰ λογαριθμήσεως καὶ ἀπαλοιφῆς τοῦ φ

$$(a - i\beta)l(x' + iy') - (a + i\beta)l(x' - iy') =$$
$$(a - i\beta)l(x + iy) - (a + i\beta)l(x - iy)$$

οὗτος δὲ ὁ τύπος εἶναι προδήλως ἀναλλοίωτος.

4. Ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$z' - \zeta = e^{i\omega}(z - \zeta)$$
$$z' = e^{i\omega}z + Z$$

παριστῶσι τὴν αὐτὴν στροφὴν περὶ μόνιμον σημεῖον O, πρέπει νὰ ἦναι

$$\zeta = \frac{Z}{1 - e^{i\omega}},\quad \omega = -il\left(1 - \frac{Z}{\zeta}\right)$$

διὰ $\omega = 0$ γίνεται $e^{i\omega} = 1$ καὶ $\zeta = \infty$· ὅθεν κατὰ τὴν παράλληλον μεταφορὰν ἢ μεταβατι-

κὴν κίνησιν τὸ μὲν κέντρον στροφῆς ἀπομακρύνεται ἐπ' ἄπειρον, ἡ δὲ γωνία στροφῆς σμικρύνεται ἐπ' ἄπειρον. Ἐν δὲ τῇ ἀπείρως μικρᾷ γωνίᾳ dω ὁ τύπος τῆς κινήσεως

$$z' - \zeta = e^{i\omega}(z-\zeta), \omega = -i\log\frac{z'-\zeta}{z-\zeta}$$

παραλειπομένων τῶν ὅρων ἀνωτέρου βαθμοῦ καθίσταται

$$z' = z + i d\omega(z-\zeta)$$

5. Ἔστωσαν αἱ δύο κινήσεις

$$z' = e^{i\omega}z + Z$$
$$z'' = e^{i\omega'}z + Z'$$

Πρὸς σύνθεσιν αὐτῶν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀντὶ z τίθεται τὸ z' καὶ προκύπτει

$$z'' = e^{i(\omega+\omega')}z + (e^{i\omega'}Z + Z')$$

καὶ δι' ἀπείρως μικρὰς κινήσεις

$$z'' = e^{i(d\omega+d\omega')}z + (e^{id\omega'}dZ + dZ')$$

ἤ, παραλειπομένων τῶν ὅρων ἀνωτέρας τάξεως

$$z'' = e^{i(d\omega+d\omega')}z + (dZ + dZ')$$

ἤτοι δι' ἀπείρως μικρὰς κινήσεις τὰ μεγέθη dω καὶ dω', dZ καὶ dZ' δύνανται νὰ ἀνταλλαχθῶσιν. Καὶ γενικῶς ἡ σύνθεσις ὁσωνδήποτε ἀπείρως μικρῶν κινήσεων προκύπτει διὰ προσθέσεως τῶν ἀπείρως μικρῶν παραμέτρων.

6. Ἔστωσαν αἱ δύο κινήσεις

$$z' = z + i d\omega(z-\zeta)$$
$$z'' = z' + i d\omega'(z'-\zeta)$$

ἐκ τούτων προκύπτει διὰ παραλείψεως τοῦ ὅρου dωdω'(z—ζ)

$$z'' = z + i d\omega(z-\zeta) + i d\omega'(z-\zeta')$$

ἤ $z'' = z + i(d\omega + d\omega')\left(z - \frac{d\omega\cdot\zeta + d\omega'\cdot\zeta'}{d\omega + d\omega'}\right)$

διὰ παραβολῆς δὲ τοῦ τύπου τούτου πρὸς τὸν τύπον

$$z'' = z + i d\omega''(z-\zeta'')$$

προκύπτει

$$d\omega'' = d\omega + d\omega', \ \zeta'' = \frac{d\omega\cdot\zeta + d\omega'\cdot\zeta'}{d\omega + d\omega'}$$

καὶ διὰ χωρισμοῦ τῶν πραγματικῶν καὶ φανταστικῶν μεγεθῶν

$$\xi'' = \frac{d\omega.\xi + d\omega'.\xi'}{d\omega + d\omega'}$$
$$\eta = \frac{d\omega.\eta + d\omega'.\eta'}{d\omega + d\omega'}$$

ἤτοι τὸ σημεῖον στροφῆς τῶν δύο συντιθεμένων ἀπείρως μικρῶν κινήσεων λογίζεται ὡς τὸ κέντρον βάρους δύο μαζῶν διὰ δὲ dω=—dω' ἡ στροφὴ καθίσταται παράλληλος μεταφορά.

7. Ἡ ἐξίσωσις $z' = e^{i\omega}z$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\varrho' e^{i\varphi'} = \varrho e^{i(\omega+\varphi)} \text{ ἤ } \varrho' = \varrho e^{i(\omega+\varphi-\varphi')}$$

ἥτις διὰ ω=φ'—φ καθίσταται

$$\varrho' = \varrho.$$

8. Πᾶσα συνεχὴς κίνησις ἐπιπέδου συστήματος περὶ μόνιμον σημεῖον εἶναι κύλισις γραμμῆς ἐπὶ ἑτέραν γραμμήν· πᾶσα συνεχὴς κίνησις στερεοῦ συστήματος περὶ μόνιμον σημεῖον εἶναι κύλισις κώνου ἐπὶ ἕτερον κῶνον.

9. Πᾶσα κίνησις

$$x' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}$$
$$y' = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}$$
$$z' = \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}$$

χαρακτηρίζεται ὡς γραμμικὴ συγγένεια (ὁμογραφία ἢ συζυγία)· γενικωτέρα κίνησις εἶναι ἡ διὰ τῆς ρητῆς συναρτήσεως

$$x'_i = R_i(x_1 x_2 x_3 \ldots), \ i = 1,2,3\ldots$$

χαρακτηριζομένη· καὶ ἔτι γενικωτέρα ἡ

$$x'_i = Q_i(x_1 x_2 \ldots), \ i = 1,2,3\ldots$$

ὅπου Q_i οἱαδήποτε ἀναλυτικὴ συνάρτησις. Ἀξία προσοχῆς εἶναι ἡ μερικὴ περίπτωσις

$$z' = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta} \text{ ἤ } z = \frac{\beta - \delta z'}{\gamma z' - \alpha}$$

10. Πρὸς πᾶν σημεῖον καμπύλης ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦσιν ἐπ' αὐτῆς δύο διευθύνσεις, καθ' ἃς ἡ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας καθίσταται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη. Αἱ οὕτως ὁριζόμεναι ἀκτῖ-

νες καμπυλότητος $\rho_1\rho_2$ καλοῦνται πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος καὶ τὸ μέτρον καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$ κατὰ τὸ θεωρούμενον σημεῖον αὐτῆς. Ἐὰν ἐπιφάνειά τις μετασχηματίζηται ἄνευ τάσεως τοῦ στοιχειώδους αὐτῆς τόξου ds, τὸ μέτρον καμπυλότητος αὐτῆς μένει ἀμετάβλητον. Ἵνα δὲ δύο ἐπιφάνειαι ἀναπτύσσωνται ($ds' = ds$) ἢ ἀπεικονίζωνται καθ' ὁμοιότητα ($ds' = mds$) ἐπ' ἀλλήλας, πρέπει νὰ ἔχωσιν ἀντιστοίχως πανταχοῦ αὐτῶν τὸ αὐτὸ μέτρον καμπυλότητος. Ἐὰν δὲ ἐπιφάνειά τις ἔχῃ πανταχοῦ αὐτῆς τὸ μέτρον καμπυλότητος σταθερὸν $\frac{1}{\rho^2}$, δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος ρ. Ἰδίᾳ δὲ ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τοῦ μεσημβρινοῦ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας ᾖναι τῆς μορφῆς

$$z = \int d\alpha \sqrt{\frac{\rho^2(1-\beta^2)+\alpha^2}{\rho^2\beta^2-\alpha^2}} \cdot \rho = r, \text{ ir}$$

ὅπου z ὁ ἄξων περιστροφῆς, α ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ β σταθερὰ ποσότης, προκύπτουσι κατὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ β ἀνὰ τρία διάφορα εἴδη ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν σταθεροῦ μέτρου καμπυλότητος, θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς· πρὸς τὰς περιφερείας μεγίστων κύκλων ἀντιστοιχοῦσι γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῶν θεωρουμένων ἐπιφανειῶν. Κατὰ ταῦτα δύνανται ἁπλῶς συνεχόμεναι ἐπιφάνειαι νὰ ἀναπτύσσωνται ἢ ἀπεικονίζωνται καθ' ὁμοιότητα ἐπ' ἀλλήλας ἢ ἐπὶ σφαιρικὰς ἐπιφανείας ἢ ἐπὶ ἐπίπεδα.

11. Τὸ γινόμενον α β.γ...τ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι παριστᾷ τὸν ὄγκον ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχοντος διαστάσεις α, β, ...τ. Ἐπειδὴ δ' ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὁσοιδήποτε παράγοντες ὑπὸ τοῦ τετελεσμένου γινομένου αὐτῶν, τρέπεται ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ὁσωνδήποτε διαστάσεων εἰς τὸν ὄγκον ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ὀλιγωτέρων διαστάσεων· καὶ τἀνάπαλιν. Ὁμοίως τρέπονται ἐν γένει ὁσαιδήποτε σειραὶ ἀριθμῶν εἰς μίαν, ὡς π. χ. τὸ στοιχεῖον $x_1 + ix_2$ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύω πραγματικῶν στοιχείων x_1, x_2. Ὁ δὲ ἀριθμὸς $\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu}$ παριστᾷ τὸ μέτρον καμπυλότητος ἐπιφανείας ν διαστάσεων, ἐὰν $\rho_1\rho_2\ldots\rho^\nu$ ᾖναι αἱ πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος αἱ δυνάμεναι νὰ συνδέωνται πρὸς ἀλλήλας ἐν γένει διὰ τῆς ἐξισώσεως $\sigma(\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu) = 0$.

12. Ἐν γένει πᾶν σῶμα δύναται νὰ νοηθῇ, ὅτι ἔχει ὁσάσδήποτε διαστάσεις ἐξαρτωμένας ἐκ τῆς ἐκλογῆς τοῦ γεωμετρικοῦ στοιχείου, ὅπερ λαμβάνεται ὡς ἀρχικόν. Οὕτω τὸ σῶμα δύναται νὰ ἔχῃ τρεῖς μὲν διαστάσεις, ἐὰν τὸ ἀρχικὸν γεωμετρικὸν στοιχεῖον ᾖναι τὸ σημεῖον ἢ τὸ ἐπίπεδον· τέσσαρας δέ, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἢ ἡ σφαῖρα· ἐννέα δέ, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια δευτέρου βαθμοῦ καὶ καθεξῆς. Ὁμοίως πᾶν σῶμα ν διαστάσεων δύναται διὰ τῆς ἐννοίας τῆς προβολῆς νὰ ἀναχθῇ εἰς σῶμα ν—1 διαστάσεων, καὶ καθ' ἑξῆς. Αἱ δὲ πολλαπλῶς συνεχόμεναι ἐπιφάνειαι ἀνάγονται διὰ καταλλήλων τομῶν εἰς ἁπλῶς συνεχομένας· ἄξιαι δὲ προσοχῆς εἶναι αἱ διπλοεπιφάνειαι, κλεισταὶ ἢ μὴ κλεισταί, περιοριζόμεναι ὑπὸ γραμμῶν ἢ ἀπεριόριστοι.

Ἐν Ἀθήναις κατὰ Ὀκτώβριον 1915.

Α. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

D. E. Tsakalotos, Le chloral camphré, Journal de Pharmacie et de Chimie, Paris 1915.