ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΟΙ κ. κ.

Η. ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ, Π. ΖΑΧΑΡΙΑΣ, Κ. ΚΤΕΝΑΣ, Δ. ΦΟΥΝΤΟΥΛΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΣ **Α. Σ. ΣΚΙΝΤΖΟΠΟΥΛΟΣ**

ΕΤΟΣ ΙΖ΄. ΑΘΗΝΑΙ, ΙΟΥΛΙΟΣ 1916 ΑΡΙΘ. 7.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Η ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΗ ΕΝ ΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΠΛΗΡΩΝ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ

Ἐφαρμόζομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὴν ἐνεργητικὴν θεωρίαν πρὸς ἐπίλυσιν διαφόρων στατικῶν ζητημάτων πρὸςδιοριστῶν ἢ ἀπροσδιορίστων στατικῶς· οἱ παρακολουθοῦντες τὴν φιλολογίαν θὰ διακρίνωσι τίνα τὰ καινὰ ὑπάρχουσιν ἐν τῇ δημοσιεύσει.

Δὲν θεωροῦμεν ἄπο σκοποῦ νὰ προτάξωμεν χρησίμους τινὰς γενικότητας.

Ὡς εἶνε γνωστόν, τὰ φυσικὰ σώματα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων ἐξωτερικῶν ἰσορροπουσῶν δὲν μεταβάλλουσι μὲν τὰς κινητικὰς συνθήκας αὐτῶν, ὑφίστανται ὅμως παραμορφώσεις, τουτέστι μεταβολὰς τῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεων τῶν διαφόρων αὐτῶν τμημάτων.

Αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἀναγκαίως διανύουσι τὰς μεταβολὰς ταύτας μήκους, ἑπομένως ἐκτελοῦσιν ἔργον, ὅπερ καλοῦμεν ἔργον παραμορφώσεως.

Ἰσορροπία ἐπέρχεται, ὅταν αἱ παραμορφώσεις δὲν μεταβάλλωνται πλέον· τὴν ἰσορροπίαν ἐπιτυγχάνουσιν αἱ δυνάμεις τῆς συνοχῆς, ἤτοι αἱ ἐσωτερικαὶ ἐλατήριοι δυνάμεις, αἵτινες ἀναγκαίως δέον νὰ ἔχωσι συνισταμένην ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

Αἱ ἐσωτερικαὶ ὅμως δυνάμεις διανύουσι καὶ αὗται ἴσους δρόμους, ἤτοι τὰς παραμορφώσεις· ἑπομένως ἡ ἐνέργεια τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων εἶνε ἴση πρός την τῶν ἐξωτερικῶν.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη εἶνε προφανής· εἶνε ἀναγκαία συνέπεια τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας τοῦ Ροβέρτου Μάγερ.—Ἡ παραγαγοῦσα τὰς παραμορφώσεις ἐξωτερικὴ κινητικὴ ἐνέργεια ἠναλώθη πρὸς ἐπαύξησιν (ἀλγεβρικὴν) τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος. Ἐὰν ἀπομακρυνθῶσιν αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, τότε ἡ ἐπαύξησις τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας ἐξέρχεται τῆς δυνητικῆς καταστάσεως, μεταβάλλεται εἰς κινητικὴν καὶ ἐπαναφέρει τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ μορφήν, ἐξαλειφομένων τῶν παραμορφώσεων, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ἐννοεῖται, ὅτι τὸ σῶμα εἶνε τελείως ἐλαστικόν.

Οὕτω λ. χ. ἔστω ῥάβδος τις (Σχ. 1) ἐξ ὑλικοῦ ὑποκειμένου τῷ νόμῳ τοῦ Hooke, μήκους l καὶ διατομῆς F, ὑφισταμένη δὲ τὴν ἐπίδρασιν δύο δυνάμεων P ἴσων καὶ ἀντιθέτων, ἐνεργουσῶν δὲ καὶ ἄξονα.—Ἡ ῥάβδος ἐφελκύεται καὶ μεταβαίνει εἰς τὴν ἐστιγμένην θέσιν· ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτῆς Δl ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου:

(I) $\Delta l = \dfrac{P \, . \, l}{F \, . \, \varepsilon}$, ἔνθα ε=συντελεστῇ ἐλαστικότητος.

Ὁ τύπος (I) προϋποθέτει τὴν στατικὴν λεγομένην ἀντοχήν, ἤτοι τὴν δύναμιν P ἠρέμα αὐξανομένην ἀπὸ O μέχρι τῆς τιμῆς P καὶ δὴ ἄνευ ῥύμης ἐνεργοῦσαν. — ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην ἡ ἐνέργεια παραμορφώσεως Α, ὡς εὐκόλως συνάγεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ διαγράμματος τοῦ Hooke εἶνε: $A = \frac{1}{2} P. \Delta l.$ διά τε τὰς ἐξωτερικάς, ὡς καὶ διὰ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις.

Ἐνέργεια ῥάβδου καμπτομένης.

Ἔστω ῥάβδος ὑφισταμένη καθαρὰν κάμψιν (Σχ. 2). ἔχουσα δηλ. οὐδετέραν ἶνα συμπίπτουσαν πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κεντροβαροῦς.— Ἐὰν λάβωμεν τμῆμα μήκους ἀπειροστοῦ dx, τηρήσωμεν δὲ τὴν ἐκδοχὴν τοῦ Navier καὶ Bernoulli, ὅτι δηλ. ἡ ἐπίπεδος διατομὴ AB παραμένει καὶ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν ἐπίπεδος μεταβαίνουσα εἰς τὴν θέσιν A′B′, τότε ἔχομεν, ὡς γνωστόν, ὅτι ἡ γωνία δ ἰσοῦται πρός: $\delta = \frac{Mdx}{\varepsilon I}$, ἔνθα M ἡ ῥοπὴ κάμψεως τῆς διατομῆς, ε ὁ συντελεστὴς ἐλαστικότητος καὶ I ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας.

Ἐὰν r εἶνε ὁ μοχλοβραχίων ἑκατέρας τῶν δυνάμεων R, ὡς πρὸς τὸ κεντροβαρές, τότε ἑκάστη δύναμις διανύει προφανῶς δρόμον r. δ, ἄρα παράγει στατικὸν ἔργον $^1/_2$ R. r. δ, ἤτοι ἀμφότεραι αἱ δυνάμεις παράγουσιν ἔργον $dA = R \cdot r. \delta.$ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ δ καὶ θεωροῦντες, ὅτι $R. r = M$, ἔχομεν:

$$dA = \frac{1}{2\varepsilon I} M^2 dx$$

καὶ ἐπομένως

$$A = \frac{1}{2\varepsilon} \int \frac{M^2 dx}{I}$$

Ἐὰν I = σταθ. τότε:

$$A = \frac{1}{2\varepsilon I} \int M^2 dx.$$

Αἱ ἀρχαὶ τοῦ Castigliano.

Ἐὰν ἐπὶ δοκοῦ ἀμφιερείστου AB (Σχ. 3) ἐνεργῶσι δυνάμεις $P_1, P_2, P_3, \ldots P_i \ldots P_n$, παράγωνται δ' ὑφ' ἑκάστην ἀντίστοιχα βέλη κάμψεως $y_1, y_2, y_3 \ldots y_i \ldots y_n$, τότε εἶνε φανερὸν ὅτι ἑκάστη δύναμις, φέρ' εἰπεῖν ἡ P_i, παράγει ἔργον ἴσον πρὸς $^1/_2$ P_i y_i καὶ συνεπῶς ἡ ὅλη ἐνέργεια A ἰσοῦται πρός:

$$A = \frac{1}{2}\Big[P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots$$
$$P_i y_i + \ldots + P_n y_n\Big] = \frac{1}{2}\sum P \cdot y$$

Ἐὰν νῦν τὸ P_i αὐξηθῇ κατὰ dP_i, τότε καὶ τὸ ἔργον A γίνεται $A + dA$. ζητεῖται νῦν ἡ σχέσις dA πρὸς dP_i.

Συμφώνως τῷ νόμῳ τῆς ἐπιπροσθέσεως, τὰ ἀποτελέσματα παραμένουσι τὰ αὐτά, ἐάν, ἀντὶ νὰ ἐνεργήσωσι πρῶτον τὰ φορτία $P_1, P_2 \ldots$, καὶ κατόπιν τὸ dP_i, ἀφήσωμεν νὰ ἐνεργήσῃ πρῶτον τὸ dP_i καὶ κατόπιν τὰ ἄλλα φορτία.

Τὸ φορτίον dP_i παράγει προφανῶς παραμόρφωσιν ἀπειροστήν, ἡ δ' ἐνέργειά του συνεπῶς εἶνε ἀπειροστὸν δευτέρου βαθμοῦ, ἄρα δυνάμενον νὰ παραλειφθῇ πρὸς τὰ ἀπειροστὰ πρώτου.

Ὅταν τοποθετηθῶσι τὰ φορτία $P_1, P_2, P_3, \ldots P_i \ldots P_n$, τότε τὸ μὲν dP_i, ἅτε ὑπάρχον δι' ὅλης αὐτοῦ τῆς τιμῆς, παράγει ἔργον dP_i, y_i τὰ δὲ λοιπὰ φορτία προφανῶς παράγουσι καὶ πάλιν ἔργον ἴσον πρὸς

$$^1/_2\Big(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots +$$
$$+ P_I y_I + \ldots + P_n y_n\Big) = \frac{1}{2}\sum P_y$$

Ἔχομεν ἑπομένως ὅτι τὸ ὅλον ἔργον, ὅπερ εἶνε νῦν, ὡς εἴρηται, $A + dA$ ἰσοῦται πρὸς

$$A + dA = \tfrac{1}{2}\Sigma Py + dP_i y_i$$

Ἐπειδὴ δὲ $A = \frac{1}{2}\Sigma Py.$, διὰ τοῦτο ἔχομεν:

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i \quad \text{(II)}.$$

ὁ τύπος οὗτος (II) ἐκφράζει τὴν πρώτην ἀρχὴν τοῦ Castigliano, ὅτι δηλ. «Ἡ μετατόπισις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς δυνάμεως τινος κατὰ τὴν διεύθυνσίν της εἶνε ἴση τῇ πρώτῃ παραγώγῳ τοῦ ἔργου παραμορφώσεως ὡς πρὸς τὴν δύναμιν».

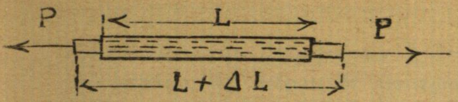
Ἐὰν ἡ δύναμις εἶνε στατικῶς ἀπροσδιόριστος, X, ἡ δὲ μετατόπισις αὐτῆς εἶνε μηδενικὴ ἕνεκα λόγων κατασκευῆς (ὡς λ. χ. ἀντίδρασις δοκοῦ συνεχοῦς, ἡ ὤθησις τόξου κτλ), τότε ἡ ἐξίσωσις (II) γίνεται:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad \text{(III)}$$

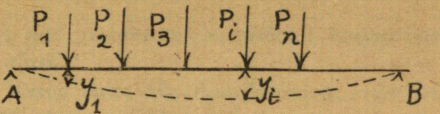
Ἡ ἐξίσωσις (III) ἐκφράζει τὴν $\beta^{\alpha\nu}$ ἀρχὴν τοῦ Castigliano, ἤτοι «Στατικῶς ἀπροσδιόριστοι δυνάμεις ἢ ἄλλα μεγέθη καθιστῶσι τὸ ἔργον παραμορφώσεως ἐλάχιστον».

Ἀρχὴ τοῦ Clapeyron—Mohr, ἡ ἀρχὴ τῶν δυνατῶν ἔργων.—Ἔστω τὸ ἐν (Σχ. 4) παριστώμενον δικτύωμα AB, φέρον εἰς τοὺς κόμβους αὐτοῦ δυνάμεις οἱασδήποτε, αἵτινες παραμορφοῦσι τὸ δικτύωμα καὶ φέρουσιν αὐτὸ εἰς τὴν ἐστιγμένην θέσιν.

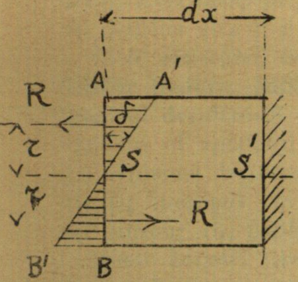
Εἶνε προφανές, ὅτι τὸ δικτύωμα ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ ἐνέργεια τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐξισωθῇ πρὸς τὴν ἐνέργειαν τῶν δυνάμεων τῶν ῥάβδων.— Ἡ ἐνέργεια ἑκάστης ῥάβδου, φέρ' εἰπεῖν τῆς ΓΔ, εἶνε ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐσωτερικὴ



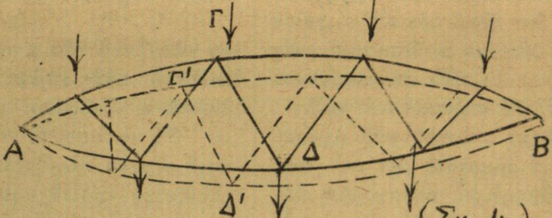
Σχ. 1



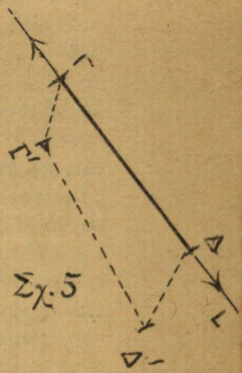
Σχ: 3



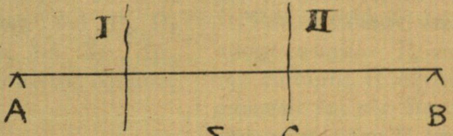
Σχ: 2



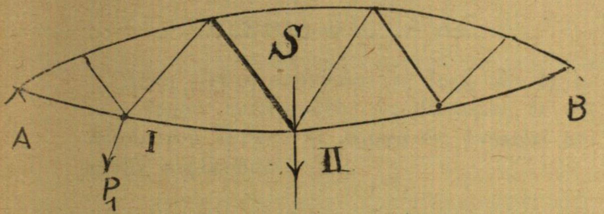
(Σχ: 4)



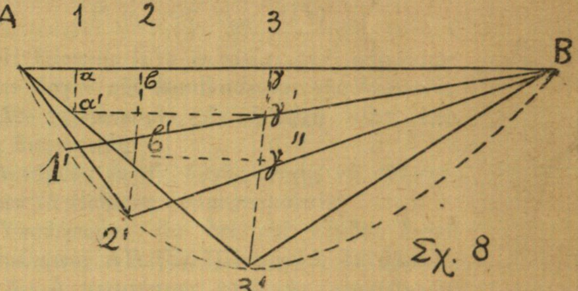
Σχ: 5



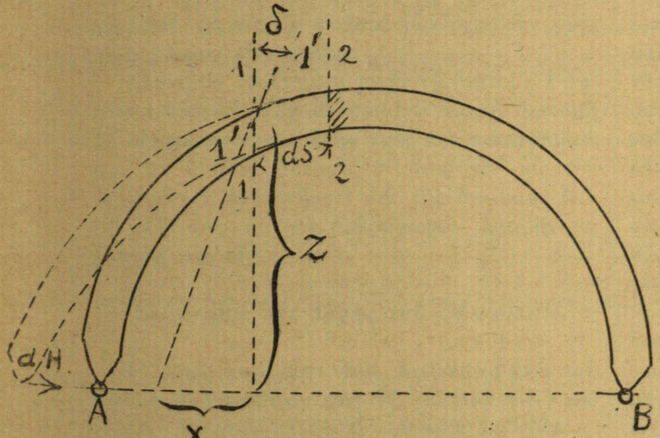
Σχ. 6



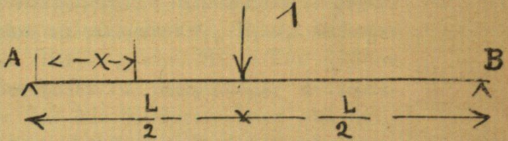
Σχ: 7



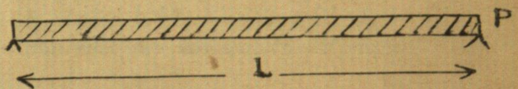
Σχ: 8



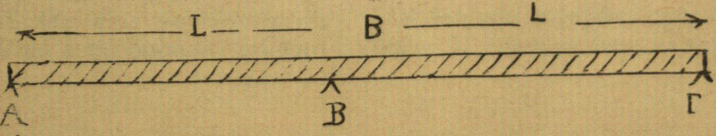
(Σχ. 9)



Σχ. 10



(Σχ: 11)



Σχ. 12

προκαλοῦσα τὴν ἐπιμήκυνσιν ἢ ἐπιβράχυνσιν τῆς ῥάβδου, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξωτερική, ἅτε τῆς ῥάβδου μετατεθείσης (Σχ. 5) εἰς τὴν θέσιν Γ΄Δ΄.

Ἔστω S΄ ἡ ἐν τῇ ῥάβδῳ προκαλουμένη δύναμις s τὸ μῆκος αὐτῆς καὶ Δs ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτῆς. Εἶνε προφανές, ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν ἔργον τῆς ῥάβδου εἶνε $\frac{1}{2}$ S΄.Δs.

Ἡ δ' ἐξωτερικὴ ἐνέργεια τῶν δυνάμεων τῆς ῥάβδου (ἑκάστη ῥάβδος φέρει δύο δυνάμεις ἴσας καὶ ἀντιθέτους) εἶνε προφανῶς μηδενική, καθόσον αἱ προβολαὶ τῶν ἀνυσμάτων ΓΓ΄ καὶ ΔΔ΄ ἐχόντων ἀντίθετα ἀλγεβρικὰ σημεῖα ἔχουσιν ὡς διαφορὰν τὴν παραχθεῖσαν μεταβολὴν τοῦ μήκους τῆς ῥάβδου.

Οὕτω λοιπόν, ἐὰν σημειώσωμεν δι' Α τὸ ὁλικὸν ἔργον παραμορφώσεως, διὰ P_1, P_2, P_3 . . . τὰ ἐξωτερικὰ φορτία, διὰ Δp_1, Δp_2, Δp_3 . . . τὰς ὑπ' αὐτῶν διανυσθέντας δρόμους, συνάγομεν ὅτι:

$$A = \tfrac{1}{2}(P_1\Delta p_1 + P_2\Delta p_2 + P_3\Delta p_3) = {}^1/_2\Sigma P\Delta p = {}^1/_2\Sigma S'.\Delta s.$$

Αὕτη εἶνε ἡ σπουδαιοτάτη ἀρχὴ τῶν δυνατῶν ἔργων συναγομένη, ὡς βλέπομεν, ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ Μάγερ, ἧς προφανῶς ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν.

Ἀρχὴ τοῦ Maxwell ἢ ἀρχὴ τῆς ἀμοιβαιότητος τῶν μετατοπίσεων.

Ἡ ἀρχὴ τοῦ Maxwell, ἧς τὴν ἀπόδειξιν εὑρίσκει τις εἰς τὰ πλεῖστα τῶν σχετικῶν συγγραμμάτων, εἶνε ἡ ἑξῆς:

«Δύναμίς τις ἐνεργοῦσα ἐν τῇ διατομῇ Ι δοκοῦ τινος ΑΒ (Σχ. 6) παράγει ἐν τῇ διατομῇ ΙΙ μετατόπισιν $\alpha_{2,1}$ ἴσην πρὸς τὴν μετατόπισιν, $\alpha_{1,2}$ ἣν ἡ αὐτὴ δύναμις θὰ παρῆγεν εἰς τὴν διατομὴν Ι ἐὰν ἐνήργει ἐπὶ τῆς διατομῆς ΙΙ.» Ἡ δύναμις ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον λαμβάνεται ἴση τῇ μονάδι.

Ἐπέκτασις τῆς ἀρχῆς τοῦ Maxwell.

Ἡ ἀρχὴ τοῦ Maxwell ἐπεξετάθη ὑπὸ τοῦ Müller—Breslau, τοῦ W. Ritter (+) καὶ ἄλλων, δύναται δὲ νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

«Ἡ μετατόπισις τοῦ κόμβου ΙΙ δικτυώματος τινος Α,Β (ἴδε Σχ. 7) καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν, ἡ παραγομένη ὑπὸ δυνάμεως ἐνεργούσης κατ' ἄλλην οἱανδήποτε διεύθυνσιν ἐν τῷ κόμβῳ Ι, εἶνε ἴση πρὸς τὴν μετατόπισιν τοῦ κόμβου Ι ὑπὸ τῆς αὐτῆς δυνάμεως ἐνεργούσης ἐν τῷ κόμβῳ ΙΙ, ἐὰν ἥ τε κατεύθυνσις τῆς μετατοπίσεως, ὡς καὶ ἡ τῆς δυνάμεως (αἱ ἀρχικῶς κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαι) παραμείνωσιν αἱ αὐταί.»

Ἐκτὸς ὅμως τῆς ἀμοιβαιότητος τῶν μετατοπίσεων κατ' εὐθεῖαν ὑπάρχει καὶ ἀμοιβαιότης στροφῶν εἴτε κάμψεως, εἴτε στρέψεως.

Ἀρχὴ τῆς ἀμοιβαιότητος τῆς ἐνεργείας.—Ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ Maxwell, ἥτις βραχέως διατυποῦται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2}$ συνάγομεν τὰ ἑξῆς:

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ τῆς διατομῆς ΙΙ ὑπάρχῃ ἤδη δύναμίς τις P, κατόπιν δ' ἐνεργήσῃ ἐπὶ τῆς διατομῆς Ι δύναμις ἴση τῇ μονάδι παράγουσα ὡς ἐρρήθη, ἐπὶ τῆς διατομῆς ΙΙ μετατόπισιν ἴσην πρὸς $\alpha_{2,1}$, τότε ἡ δύναμις P ἐκτελεῖ ἔργον ἴσον πρὸς $P.\alpha_{2,1}$.

Ἐὰν ἀντιθέτως ἐπὶ τῆς διατομῆς Ι προϋπάρχῃ φορτίον P, κατόπιν δ' ἐνεργήσῃ ἐπὶ τῆς διατομῆς ΙΙ δύναμις ἴση τῇ μονάδι παράγουσα ἐπὶ τῆς διατομῆς Ι μετατόπισιν $\alpha_{1,2}$, τότε τὸ φορτίον P ἐκτελεῖ ἔργον ἴσον προφανῶς προς $P.\alpha_{1,2}$.

Ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχει $\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2}$ ὑπάρχει ἀναγκαίως καὶ

$$P.\alpha_{2,1} = P.\alpha_{1,2} \quad \text{(IV)}$$

Ἡ ἐξίσωσις (IV) ἐκφράζει τὴν σπουδαιοτάτην ἀρχὴν τῆς ἀμοιβαιότητος τῆς ἐνεργείας. — Δὲν γιγνώσκομεν, ἂν ἡ ἀρχὴ αὕτη ἔχει ἤδη διερευνηθῇ.

Δυνάμεθα ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης νὰ συναγάγωμεν τὰ ἑπόμενα συμπεράσματα:

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐπὶ τοῦ κόμβου Ι τοῦ δικτυώματος ΑΒ (Σχ. 7) ἐνεργεῖ ἡ δύναμις P_1 καὶ ὅτι ἡ μετατόπισις κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τῆς δυνάμεως εἶνε α_1 μετὰ τὴν παραμόρφωσιν τοῦ δικτυώματος.— Καλέσωμεν ἐνέργειαν τοῦ φορτίου τὸ γινόμενον ${}^1/_2$ P_1 α_1, λάβωμεν δὲ ῥάβδον τινα λ. χ. τὴν S΄. — Τὴν ῥάβδον ταύτην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀντικατασταθεῖσαν διὰ δύο δυνάμεων ἴσων καὶ ἀντιθέτων.— Λόγῳ δὲ τῆς ἀμοιβαιότητος τῶν ἐνεργειῶν συνάγομεν:

Α) Φορτίον τι P_1 ἐνεργοῦν εἰς τὸν κόμβον Ι παράγει ἐπὶ ῥάβδου οἱασδήποτε S ἐνέργειαν ἴσην πρὸς τὴν ἐνέργειαν, ἥτις θὰ παρήγετο ἐν τῷ κόμβῳ Ι, ἐὰν ἡ ῥάβδος S΄ εἶχεν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς τὴν τοῦ φορτίου P_1 ἤτοι ἴσην πρὸς ${}^1/_2$ P_1 α_1».

Β) Ἐπειδὴ καὶ δύο ἢ πλείονας ῥάβδους δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀντικατασταθείσας διὰ δύο ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἴσων καὶ ἀντιθέτων, διὰ τοῦτο συνάγομεν τὸ λῆμμα ὅτι:

Ἡ ἐνέργεια Α ῥάβδου τινος Ι προκαλεῖ ἐπὶ ῥάβδου ΙΙ ἐνέργειαν ἴσην πρὸς τὴν ἐνέργειαν, ἣν θὰ παρῆγεν ἐπὶ τῆς ῥάβδου I ἡ ἐνέργεια A περιεχομένη ἐν τῷ ῥάβδῳ II.

Ἐν προσεχεῖ φύλλῳ τοῦ «Ἀρχιμήδους» θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς λίαν σπουδαίας ταύτας ἀρχὰς εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς ἀπροσδιορίστων κατασκευῶν.

Γ) Ὡς συνέπεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἀμοιβαιότητος τῆς ἐνεργείας, εἶνε εἴς τινα στατικῶς προσδιοριστὰ συστήματα ἡ ἀμοιβαιότης τῶν ῥοπῶν κάμψεως.—Οὕτω λ. χ. ἐν δοκῷ ἀμφιερείστῳ AB (Σχ. 8) φορτίον ἴσον τῇ μονάδι ἐνεργοῦν ἐν τῇ διατομῇ 1 παράγει εἰς τὴν διατομὴν 3 λ. χ. ῥοπὴν μετρουμένην ὑπὸ τῆς εὐθείας γγ′ καὶ ἴσην πρὸς τὴν ῥοπὴν αα′ τὴν παραγομένην ἐν τῇ διατομῇ 1 ὅταν φορτίον ἴσον τῇ μονάδι ἐνεργήσῃ ἐπὶ τῆς διατομῆς 3.—Τὰ αὐτὰ ῥητέον διὰ τὰς διατομὰς 2 καὶ 3, ἔνθα βλέπομεν, ὅτι ἡ ῥοπὴ ββ′ ἡ παραγομένη ἐν τῇ διατομῇ 2 ὑπὸ φορτίου ἐνεργοῦντος εἰς 3 εἶνε ἴση πρὸς γγ′ ἤτοι τὴν ῥοπὴν τὴν παραγομένην ἐν 3, ὅταν τὸ φορτίον ἐνεργῇ ἐν 2.

Ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἰδιότητος εὐκόλως συνάγεται τρόπος, δι᾽ οὗ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον τὸ ἐμφαῖνον τὰς ῥοπὰς διὰ μεμονωμένην δύναμιν ὁπουδήποτε ἐνεργοῦσαν, ὅταν δοθῇ ἐν μόνον τρίγωνον.—Προφανὲς δ᾽ εἶνε ἐπὶ πλέον ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων τούτων 1′, 2′, 3′ κτλ. κεῖνται ἐπὶ παραβολῆς.

Ἵνα λ. χ. κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον A 3′ B, ἐὰν εἶνε δεδομένον λ. χ. τὸ A 1′ B ἀρκεῖ ἐκ τοῦ γ′ (σημείου ἐπὶ τῆς κατακορύφου διὰ τοῦ 3) νὰ φέρωμεν ὁριζόντιον τὴν γ′ α′ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν A α′ 3′ ὅτε ὁρίζεται ἡ κορυφὴ 3′.

Εὐκόλως ἐπίσης συνάγεται ἐκ τῆς ἀμοιβαιότητος τῶν ῥοπῶν, ὅτι τὸ τρίγωνον A 1′ B λ. χ. τὸ παριστῶν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν ῥοπῶν δυνάμεως ἐνεργούσης εἰς 1 εἶνε συγχρόνως ὑπὸ κλίμακα ὡρισμένην καὶ ἡ γραμμὴ ἐπιρροῆς τῶν ῥοπῶν τῆς διατομῆς 1.

Διάφοροι ἐφαρμογαὶ τῶν ῥηθέντων περὶ τῆς ἐνεργητικῆς θεωρίας.

I) ***Προσδιορισμὸς τῆς ὁριζοντίου ὠθήσεως τόξου ὁλοσώμου μετὰ δύο ἀρθρώσεων.***— Ἔστω τὸ ἐν (Σχ. 9) παριστάμενος ὁλόσωμον τόξον, ὡς γνωστὸν ἅπαξ στατικῶς ἀπροσδιόριστον· ὁ προσδιορισμὸς τῆς ὁριζοντίου ὠθήσεως H λύει τὸ πρόβλημα.

Ἔστωσαν δύο κατακόρυφοι διατομαὶ ἐπὶ τοῦ τόξου 1, 1 καὶ 2, 2 περιλαμβάνουσαι μῆκος τόξου ds. — Ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἡ διατομὴ 1, 1 ἕνεκεν οἱανδήποτε παραμορφώσεως ἔλαβε τὴν θέσιν 1′, 1′ σχηματίζουσαν τὴν γωνίαν δ μετὰ τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς θέσεως καὶ ὅτι ἕνεκα τῆς παραμορφώσεως ταύτης τὸ ἀριστερὸν τμῆμα τοῦ τόξου ἔλαβε τὴν ἐστιγμένην θέσιν (δυνατήν, ἐὰν ἔλειπεν ἡ ὁριζόντιος ὤθησις H) τῆς διατομῆς 2,2 παραμενούσης ἀμετακινήτου.

Ἡ διατομὴ 1′ 1′ προεκβαλλομένη ἀποκόπτει ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς γενέσεις τὸ τμῆμα $x = z' \,\text{ἐφ.}\, \delta = z . \delta$ ἐπειδὴ δ εἶνε γωνία ἀπειροστή.— ἐπειδὴ δὲ $\delta = \frac{Mds}{\varepsilon J}$ ἔχομεν, ὅτι:

$$x = \frac{Mzds}{\varepsilon J} \quad (1)$$

Ἡ τάσις ὅμως πρὸς περιστροφὴν τῆς διατομῆς 1, 1 προκαλεῖ ἀπειροστὴν ὤθησιν dH ἀντιδρῶσαν καὶ κωλύουσαν τὴν μετακίνησιν.

Δηλαδὴ ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἐὰν ἡ μετακίνησις ἐγίνετο, ἡ δύναμις dH θὰ ἔπρεπε νὰ διανύσῃ τὸν δρόμον x ἵνα ἐπαναφέρῃ τὸ στήριγμα A εἰς τὴν θέσιν του.

Ἡ δύναμις dH παράγει ὡς πρὸς τὸ κεντροβαρὲς τῆς διατομῆς 1,1 ῥοπὴν z . dH, παράγουσαν γωνίαν παραμορφώσεως $\frac{z \; dH \; ds}{\varepsilon J} = \delta'$.

ὁ δρόμος $x = z . \delta'$ δέον νὰ εἶνε ὁ αὐτός, ὡς ὁ ὁρισθεὶς ἐν ἐξισώσει (1) ἑπομένως ἔχομεν:

$$x = z . \delta' = \frac{z^2 . ds . dH}{\varepsilon J} = \frac{Mzds}{\varepsilon J} \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$H = \frac{\int \frac{Mzds}{\varepsilon J}}{\int \frac{z^2 ds}{\varepsilon J}} .$$ —Ἐὰν ε καὶ J σταθερά, τότε ὁ τύπος γίνεται

$$H = \frac{\int Mzds}{\int z^2 ds} .$$

Ὁ τύπος οὗτος δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ τῶν ἀρχῶν τοῦ Castigliano, ἢ ἄλλης τινὸς μεθόδου, ἀλλὰ δυσχερέστερον τοῦ ὡς ἄνω ὑποδεικνυομένου τρόπου.

II) ***Προσδιορισμὸς βέλους κάμψεως δοκοῦ ἀμφιερείστου διὰ τῆς ἐνεργητικῆς θεωρίας.***

Ἔστω δοκὸς ἀμφιέρειστος AB (Σχ. 10) φέρουσα εἰς τὸ μέσον δύναμιν ἴσην πρὸς ἕνα τόννον· εἶνε προφανές, ὅτι ἑκατέρα τῶν ἀντιδράσεων ἰσοῦται πρὸς 0.5τ καὶ ἑπομένως διὰ διατομὴν ἀφισταμένην ἀπὸ A κατὰ χ ἡ ῥοπὴ M θὰ εἶνε 0.5χ.

Ἐὰν καλέσωμεν E τὴν ἐνέργειαν τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ γνωστά:

$$E = 2 . \frac{1}{2\varepsilon J}\int_{0}^{\frac{l}{2}} M^2 dx = \frac{1}{4\varepsilon J}\int_{0}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{l^3}{96\varepsilon J} \quad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν f τὸ μέγιστον βέλος κάμψεως, θὰ ὑπάρχῃ προφανῶς

$$E = \tfrac{1}{2}\, l^{\tau}\, f \quad (2)$$

ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) συνάγομεν:

$$f = \frac{l^3}{48\varepsilon J} \quad (3)$$

Ἐὰν ἀντὶ ἑνὸς τόννου εἴχομεν φορτίον P τότε τὸ βέλος f_p θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$f_p = \frac{Pl^3}{48\varepsilon J} \quad (4)$$

Ὁ τύπος (4) δύναται, ὡς γνωστόν, νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ διπλῆς ὁλοκληρώσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς.

III) Τὸ μέγιστον βέλος δοκοῦ ἀμφιερείστου ὁμοιομόρφως πεφορτισμένης (Σχ. 11) εἶνε ὡς γνωστόν:

$$f = \frac{5}{384}\,\frac{pl^4}{\varepsilon J}.$$

Ἐὰν τώρα θέλωμεν νὰ προςδιορίσωμεν τὴν ἀντίδρασιν Β δοκοῦ τινος συνεχοῦς ΑΒΓ (Σχ.12) ὁμοιομόρφως πεφορτισμένης καὶ συνισταμένης ἐκ δύο ἴσων ἀνοιγμάτων, τότε ἀρκεῖ νὰ ἐξισώσωμεν τὸ βέλος τὸ παραγόμενον ὑπὸ ὁμοιομόρφου φορτίσεως καθ' ὅλον τὸ μῆκος $l' = 2l$ πρὸς τὸ βέλος τὸ παραγόμενον ὑπὸ μεμονωμένης δυνάμεως Β ἐνεργούσης πρὸς τὰ ἄνω.— Ἡ ἐξίσωσις τῶν βελῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀμετακίνητον τοῦ στηρίγματος Β. οὕτω λοιπὸν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{5}{384}\,\frac{pl'^4}{\varepsilon J} = \frac{Bl'^3}{48\varepsilon J} \quad \text{ἑπομένως:}$$

$$B = \frac{240}{384}\,pl$$

ἐὰν δὲ θέσωμεν $l' = 2l$, ἔχωμεν

$$B = \frac{480}{384}\,pl = \frac{5}{4}\,pl$$

τιμὴ δυναμένη νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Clapeyron ἢ τοῦ Castigliano κτλ.

Θὰ συνεχίσωμεν εἰς τὸ προσεχὲς φύλλον τοῦ «Ἀρχιμήδους.»

Α. ΚΟΥΣΙΔΗΣ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΕΚΡΗΚΤΙΚΩΝ ΥΛΩΝ

Καθ' ἣν στιγμὴν αἱ σκέψεις ὅλων φέρονται πρὸς τὸν πόλεμον, αἱ ἐφαρμογαὶ τῆς χημείας προσλαμβάνουσι νέον ἐνδιαφέρον. Ἡ χημεία πράγματι μᾶς παρέχει τὰς ἐκρηκτικὰς ὕλας καὶ αὐτὴ μᾶς ἀποκαλύπτει τὴν δύναμιν τοῦ πυρός.

Ἀλλὰ τί εἶναι τὸ πῦρ; Διὰ νὰ τὸ παραγάγωμεν ἀρκεῖ νὰ προκαλέσωμεν ἀντίδρασιν ἀρκετὰ ζωηρὰν ὥστε νὰ ὑψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν καὶ νὰ φέρῃ εἰς ἀνάφλεξιν τὰ ἀντιδρῶντα στοιχεῖα ἢ τὰς ἑνώσεις των. Ὁ ἁπλούστερος τύπος τοιαύτης ἀντιδράσεως εἶναι ἡ καῦσις τοῦ ἄνθρακος εἰς τὸν ἀέρα. Ἐὰν ἐπιταχύνωμεν τὴν ἀντίδρασιν ταύτην, καίοντες τὸν ἄνθρακα ἐντὸς καθαροῦ ὀξυγόνου, ἡ θερμοκρασία αὐξάνει, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει ἐὰν ἀναμίξωμεν τὸν ἄνθρακα μὲ οὐσίαν παραγωγὸν ὀξυγόνου ἐν λεπτοτάτῃ κονιώδει καταστάσει λ. χ. μὲ χλωρικὸν κάλιον πρὸς μῖγμα μηχανικόν. Ὑπάρχουσιν ὅμως πλὴν τῶν μηχανικῶν αὐτῶν μιγμάτων καὶ προϊόντα δραστηριώτερα, οὐσίαι δηλαδὴ ἑνιαῖαι περιέχουσαι χημικῶς καὶ οὐχὶ μηχανικῶς ἡνωμένα ἐν τῷ μορίῳ των τὰ καύσιμα καὶ τὰ καυστικὰ στοιχεῖα, ὡς αἱ νιτροενώσεις, ἡ νιτροκυτταρίνη λ. χ. ὅπου ὁ ἄνθραξ καὶ τὸ ὑδρογόνον συμπλέκονται πρὸς τὸ ὀξειδωτικὸν ριζικὸν NO_2. Οὕτως ἡ καῦσις τῆς βαμβακοπυρίτιδος εἶναι ἀκαριαία.

Σχεδὸν πάντοτε τὸ πῦρ συνοδεύεται ὑπὸ φλογὸς ὀφειλομένης εἰς τὴν ἀνάφλεξιν τῶν ἐκ τῆς ἀντιδράσεως παραχθέντων ἀερίων. Τὰ ἀέρια ταῦτα δύνανται νὰ μεταδώσωσι περαιτέρω τὸ πῦρ ἀλλὰ καὶ νὰ χρησιμεύσωσι πρὸς μηχανικὸν ἔργον. Ἐὰν ἡ καῦσις γείνῃ ἐντὸς χώρου κλειστοῦ, ἡ πίεσις τῶν ἀερίων τούτων ὑψοῦται μέχρι διαρρήξεως τοῦ περιβάλλοντος. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἐκλογὴ τῶν καυσίμων ὑλῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τὸ ὁποῖον ἐπιδιώκομεν. Ἐὰν θέλωμεν θερμαντικὸν ἀποτέλεσμα πρέπει ν' ἀποφύγωμεν τὴν παραγωγὴν ἀερίων τὰ ὁποῖα διασκεδάζουσι τὴν θερμότητα μακρὰν τῆς ἑστίας της, ἐπιδιώκομεν δὲ τὴν παραγωγὴν μὴ πτητικῶν προϊόντων ὅπως λ. χ. μὲ τὸν θερμίτην, μῖγμα κόνεων ἀργιλλίου καὶ ὀξειδίου σιδήρου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖται, ὡς εἴδομεν εἰς προηγούμενον φύλλον τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ γόμωσις τῶν πυροβολικῶν βομβῶν τῶν Γερμανῶν.

Τοὐναντίον, ἂν θέλωμεν ἀποτέλεσμα καθαρῶς μηχανικόν, ἐκλέγομεν ἀντίδρασιν ἥτις μὲ τὸν ἐλάχιστον ἀρχικὸν ὄγκον οὐσίας νὰ δώσῃ τὸν μέγιστον τελικὸν ὄγκον ἀερίων προϊόντων. Ἀφίνοντες τὰ ἀέρια ταῦτα νὰ διασταλῶσιν ἀπο-