ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΩΛΗΝΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Συνεχίζοντες τὴν ἐν τῷ προηγουμένῳ φύλλῳ τοῦ «Ἀρχιμήδους» ἡμετέραν μελέτην δίδομεν νῦν ἴδιον τρόπον ὑπολογισμοῦ σωλήνων ὑφισταμένων πίεσιν ἐξωτερικήν.

Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ζητήματος ἐνδείκνυται ἵνα προτάξωμεν γενικότητάς τινας περὶ τοῦ καθόλου ὑπολογισμοῦ τῶν σωλήνων.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις ὑπολογισμοῦ, καθόσον δηλ. οἱ σωλῆνες ἔχουσι μικρὸν ἢ μέγα πάχος.

Ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων ὑποδιαιροῦμεν εἰς δύο καθόσον δηλ. ἡ πίεσις ἐνεργεῖ ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω, ἢ εἶνε ἐξωτερική.

Οἱ ὑπολογισμοὶ οὗτοι ἰσχύουσι προφανῶς οὐ μόνον διὰ τοὺς σωλῆνας, ἀλλὰ καὶ διὰ τοὺς κυλινδρικοὺς λέβητας, τοὺς αὐλούς, τοὺς φλογοσωλῆνας καὶ ἐν γένει πάντα τὰ κυλινδρικὰ ἀγγεῖα τὰ ὑφιστάμενα ἐσωτερικὴν ἢ ἐξωτερικὴν ὁμοιόμορφον πίεσιν, ὡς λ. χ. κυλινδρικὴ σιδηρᾶ σήραγξ ἐν ἐδάφει τελματώδει, κυλινδρικαὶ ὑδαταποθῆκαι, σωλῆνες πυροβόλων κτλ.

I) ***Σωλῆνες κυλινδρικοὶ μικροῦ πάχους ὑφιστάμενοι ἐσωτερικὴν πίεσιν.***— Ἔστω ὁ ἐν (Σχ. 1). εἰκονιζόμενος κυλινδρικὸς λέβης ἔχων μῆκος ἴσον τῇ 1, ὑφιστάμενος δὲ πίεσιν ἐσωτερικήν· ὡς ἐκ τῶν κατωτέρω εὐθὺς θὰ ἐννοήσωμεν, ὁ μέγιστος κίνδυνος ῥήξεως τοῦ λέβητος εἶνε ἡ κατὰ διαμετρικὴν τομὴν ἀποκοπὴ αὐτοῦ.

Ἐὰν p εἶνε ἡ ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας πίεσις, μετρουμένη εἰς νέας ἀτμοσφαίρας (δηλ. 1 χιλιόγραμμον ἀνὰ τετρ. ἑκατοστόν), τότε ἡ ἐπὶ τῆς στοιχειώδους ἐπιφανείας $ds \times 1$, πίεσις θὰ εἶνε pds, αἱ δὲ προβολαὶ αὐτῆς ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων x καὶ y θὰ εἶνε pdx καὶ pdy.

Ἑκάστη ὅμως στοιχειώδης πίεσις pds τοῦ πρώτου τεταρτοκυκλίου ἔχει συμμετρικὴν πίεσιν ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτοκυκλίῳ ἔχουσαν προφανῶς ἴσην καὶ ἀντίθετον ὁριζόντιον προβολήν.

Ἡ ὁριζόντιος προβολὴ ἄρα τῆς συνισταμένης τῶν πιέσεων εἶνε ἴση τῷ O.

Ἡ δὲ κατακόρυφος προβολὴ εἶνε προφανῶς ἴση τῷ γενομένῳ τοῦ p ἐπὶ τὴν ὁριζόντιον προβολὴν τοῦ ἡμικυκλίου ἐπὶ τὴν διάμετρον τουτέστιν ἐπ' αὐτὴν ταύτην τὴν διάμετρον D.

Ἐὰν ἐξητάζομεν τὸν κίνδυνον ῥήξεως τοῦ λέβητος κατὰ χορδήν, θὰ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πίεσις θὰ ἦτο ἴση πρὸς p ἐπὶ τὴν ἐξεταζομένην χορδήν· αὐτονόητον ἑπομένως ἀποβαίνει ὅτι pD εἶνε ἡ μεγίστη πίεσις καὶ ὅτι ὁ κίνδυνος ῥήξεως τοῦ λέβητος κατὰ διάμετρον εἶνε ὁ μέγιστος.

Εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα θὰ κατελήγομεν καὶ διὰ τῆς ὁλοκληρώσεως.

Αἱ ἐπιφάνειαι καθ' ἃς θὰ ἀποκοπῇ ὁ λέβης εἶνε δύο μὲ ἐμβαδὸν ἑκατέρα $e \times 1$, ἔνθα e ἴσον τῷ πάχει τοῦ λέβητος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πάχος τοῦτο εἶνε μικρόν, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν κατὰ προσέγγισιν ὅτι αἱ ἀντιδρῶσαι τάσεις τῆς συνοχῆς εἶνε ὁμοιομόρφως διανενεμημέναι.

Ἐὰν θέλωμεν, νὰ μὴ διαρραγῇ ὁ σωλὴν δέον ἡ τάσις αὕτη νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ἀνεκτὸν ὅριον σ_ε καὶ ἐφελκυσμόν.

Ἡ ἀντοχὴ ἄρα τοῦ σωλῆνος εἶνε $2e\sigma_\varepsilon$ αὕτη δὲ πρέπει νὰ ἰσῶται πρὸς pD καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$e = \frac{pD}{2\sigma_\varepsilon} \cdot \quad (I)$$

ὁ τύπος (I) δίδει τὸ θεωρητικὸν πάχος σωλῆνός τινος· ἕνεκεν ὅμως τεχνικῶν λόγων δέον νὰ συμπληρωθῇ ὁ τύπος οὗτος, ὡς ἑξῆς:

Α΄) διὰ σωλῆνας ἄνευ ἡλώσεων δέον ἕνεκα τῶν ἀτελειῶν τοῦ ἐλάστρου (διὰ τοὺς σιδηροὺς) ἢ τοῦ χυτηρίου (διὰ τοὺς χυτοσιδηροῦς) ἢ ἕνεκα τῆς σκωρίας, ἢ τῶν κρούσεων κατὰ τὴν μεταφορὰν νὰ προσθέσωμεν σταθεράν τινα $e_o = 0,\overset{\text{ἑκ.}}{7} - \frac{p}{100}$ · — ἑπομένως ὁ τύπος (I) γίνεται:

$$e = \frac{pD}{2\sigma_\varepsilon} + e_o$$

Ἡ κατ' ἐφελκυσμὸν ἀνεκτὴ τάσις σ_ε λαμβάνεται διὰ μὲν τὸν χυτοσίδηρον 250 χγρ/ἑκ. διὰ δὲ τὸν ῥευστοπαγῆ σίδηρον 1000 χγρ/ἑκ.

Β΄) ἐὰν πρόκειται περὶ σωλήνων φερόντων ἡλώσεις (ὡς λ. χ. οἱ κυλινδρικοὶ λέβητες), τότε ὁ τύπος (I) δέον νὰ τροποποιηθῇ ὡς ἑξῆς: $e = \frac{pD}{2\sigma_\varepsilon \mu}$, ἔνθα μ συντελεστὴς μείζων τῶν 0.50 χ.μ. καὶ ἐλάσσων τῆς μονάδος, ἐξαρτώμενος δὲ ἐκ τοῦ εἴδους καὶ τῆς ποιότητος τῆς ἡλώσεως (ἐὰν δηλ. αὕτη εἶνε μονόστοιχος ἢ πολύστοιχος, ἐὰν εἶνε μετὰ ἢ ἄνευ ἁρμοκαλύπτρας, ἐὰν χειροποίητος ἢ μηχανοποίητος).

Τὰ περὶ τοῦ συντελεστοῦ τούτου καὶ ἐν γένει τὰ περὶ τῆς ἀσφαλείας τῶν λεβήτων εἰς μὲν τὰς γερμανοφώνους χώρας ὁρίζουσιν αἱ ὁμοσπονδιακαὶ διατάξεις, ἢ οἱ κανονισμοὶ τοῦ Ἀμβούργου καὶ Βυρτσβούργου, εἰς δὲ τὰ ἄλλα κύρια ἔθνη ὑπάρχουσι παραπλήσιοι κανονισμοί.

II) ***Σωλῆνες ἔχοντες σχετικῶς μέγα πά-***

χος μὲ πίεσιν ἐσωτερικήν. Διὰ σωλῆνας ἔχοντας μέγα σχετικῶς πάχος δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ τηρήσωμεν τὴν ἐκδοχὴν τῆς καθ' ὅλον τὸ πάχος ὁμοιομόρφου διανομῆς τῶν ἐσωτερικῶν τάσεων· τὸ πρόβλημα δ ἀποβαίνει σχετικῶς πολύπλοκον, λύεται δὲ διὰ τῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Winkler. Ἀναφέρομεν τὴν μέθοδον ταύτην ἐν γενικαῖς γραμμαῖς· οἱ δ' ἐπιθυμοῦντες λεπτομερείας δύνανται νὰ ἀναδράμωσιν εἰς τὰ σχετικὰ συγγράμματα Tetmayer, Föppl, Bach κτλ.

Ἔστω σωλὴν ἔχων τὴν ἐν Σχ. 2 παριστωμένην ἐγκάρσιον διατομήν· ἔστω r_i ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς καὶ r_a ἡ ἐξωτερική.

Λάβωμεν νῦν δακτύλιον ἀπειροστοῦ πάχους ἔχοντα διάμετρον r καὶ ἐπὶ τοῦ δακτυλίου τούτου ἂς ἀποκόψωμεν στοιχειῶδες τμῆμα διὰ δύο ἀκτίνων (ἐφ' ὧν προβάλλονται ἐπίπεδα) σχηματιζουσῶν ἀπειροστὴν γωνίαν $d\varphi$. — Τὸ στοιχειῶδες τμῆμα τοῦτο παριστῶμεν προοπτικῶς ἐν Σχ. 3. ἐφ' ἑκάστης τῶν 6 αὐτοῦ ἑδρῶν ἐνεργοῦσιν ἐσωτερικαὶ τάσεις, δυνάμεις δηλ. ἐλατήριοι προερχόμεναι ἐκ τῆς συνοχῆς τῶν ὑλικῶν μορίων, ἀνηγμέναι δὲ εἰς τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας.

Τὰς κατ' ἐφαπτομένην τῆς μέσης περιφερείας τοῦ θεωρουμένου δακτυλίου τάσεις ἂς σημειώσωμεν διὰ σ_t. τὰς παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου σημειώσωμεν διὰ σ_α. — τὰς δὲ κατ' ἀκτῖνα διὰ σ_r καὶ $\sigma + d\sigma_r$ τὴν ἀντικειμένην.

Ἡ κατ' ἐφαπτομένην τάσις σ_t μένει ἐν τῷ αὐτῷ μὲν δακτυλίῳ σταθερά, μεταβάλλεται ὅμως ἀπὸ δακτυλίου εἰς δακτύλιον.

Ἡ δὲ κατ' ἄξονα τάσις σ_α εἶνε σταθερὰ καθ' ὅλον τὸ πάχος τοῦ σωλῆνος· ἡ τάσις σ_α προέρχεται προφανῶς ἐκ τῶν ἐπὶ τῶν πυθμένων ἀσκουμένων πιέσεων $p.\pi r_i^2$ (ἴδε Σχ. 4). — Ἡ κατ' ἄξονα ἀντοχὴ τοῦ σωλῆνος εἶνε ἴση πρὸς σ_α ἐπὶ τὸ ἐμβαλὸν τῶν τοιχωμάτων τοῦ σωλῆνος ἴσον πρὸς $\pi(r_\alpha^2 - r_i^2)$, δέον ἑπομένως νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης: $p.\pi r_i^2 = \pi(r_\alpha^2 - r_i^2)$. σ_α καὶ ἑπομένως

$$\sigma_\alpha = \frac{r_i^2}{r_\alpha^2 - r_i^2} \cdot p \quad .\ .\ .\ . \quad (A)$$

Ἐκ τῶν ἐπὶ τοῦ θεωρηθέντος στοιχείου ἐνεργουσῶν ἓξ δυνάμεων ἰσορροποῦσι αἱ σ_α καὶ σ_α. ἵνα δὲ ἰσορροπῶσι καὶ αἱ λοιπαὶ τέσσαρες, δέον ἡ προβολή των ἐπὶ τὴν μέσην ἀκτῖνα λ. χ. νὰ ἰσῶται τῷ Ο, ἤτοι:

$$\sigma_r . r\, d\varphi - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi + 2\sigma_t . \eta\mu . \frac{d\varphi}{2} = 0$$

θέτοντες δὲ $\quad \eta\mu . \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$

καὶ παραλείποντες τὰ ἀπειροστὰ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἔχομεν:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_r dr + r . d\sigma_r}{dr} = \frac{d(r . \sigma_r)}{dr}.$$

Ὁ θεωρηθεὶς δακτύλιος συστέλλεται ἕνεκα τῆς ἐσωτερικῆς πιέσεως τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ r μεταβαλλομένης εἰς $r + \Delta r$. — Εὐκόλως δὲ προσδιορίζεται ἡ εἰδικὴ παραμόρφωσις λ_t κατ' ἐφαπτομένην, ὡς καὶ ἡ κατ' ἀκτῖνα λ_r, ἤτοι:

$$\lambda_t = \frac{\Delta r}{r} \quad \text{καὶ} \quad \lambda_r = \frac{d(\Delta r)}{dr}.$$

Τὰς εἰδικὰς ὅμως ταύτας παραμορφώσεις λ_t καὶ λ_r, ὡς καὶ τὴν κατ' ἄξονα εἰδικὴν παραμόρφωσιν λ_α δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ συναρτήσει τῶν τάσεων σ_t, σ_r καὶ σ_α, ἤτοι: $\lambda_t = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_\alpha + \sigma_r}{\psi}\right)$, ἔνθα $\psi = \frac{10}{3} =$ συντελεστῇ Poisson καὶ δύο ἄλλαι ἀνάλογοι ἀξιώσεις διὰ λ_r καὶ λ_α.

Αἱ οὕτω ληφθεῖσαι ἀξιώσεις εἶναι ἀρκεταὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος· μετὰ τοὺς ἀναγκαίους μετασχηματισμούς, ἀντεισαγωγὰς καὶ ὁλοκληρώσεις εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας τάσεις, καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς μεγίστας ἀνηγμένας τάσεις ὡς ἑξῆς:

$$\text{μεγ. ἀν. } \sigma_\alpha = \frac{\psi - 2}{\psi}, \quad \frac{r_i^2}{r_\alpha^2 - r_i^2} \cdot p \quad (I)$$

$$\text{μεγ. ἀν. } \sigma_t = \frac{(\psi - 2)r_i^2 + (\psi + 1)r_\alpha^2}{\psi(r_\alpha^2 - r_i^2)} \cdot p \quad (II)$$

$$\text{μεγ. ἀν. } \sigma_r = \frac{(\psi - 2)r_i^2 - (\psi + 1)r_\alpha^2}{\psi(r_\alpha^2 - r_i^2)} \cdot p \quad (III)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (II) καὶ (III) συνάγομεν, ὅτι ἡ μὲν κατ' ἀκτῖνα τάσις σ_r εἶνε θλιπτική, διότι ὁ ἀρνητικὸς ὅρος τῆς ἐξισώσεως (III) εἶνε μείζων τοῦ θετικοῦ· ἐπίσης συνάγομεν, ὅτι ἡ κατ' ἐφαπτομένην μεγ. ἀν. τάσις σ_t εἶνε ἐφελκυστικὴ καὶ δὴ ἡ μεγίστη πασῶν ἅτε οὖσα ἄθροισμα θετικῶν ὅρων, οἵτινες ἐν μέρει εἰσέρχονται εἰς τὰς ἄλλας τάσεις.

Ἡ τάσις ὅμως αὕτη δέον νὰ εἶνε ἐλάσσων ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν ἀνεκτὴν τάσιν κατ' ἐφελκυσμὸν σ_ε καὶ ἑπομένως ἐκ τῆς ἐξισώσεως (II) ἔχομεν:

$$r_\alpha = r_i \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon + (1 - \frac{2}{\psi})p}{\sigma_\varepsilon - (1 + \frac{1}{\psi})p}} \quad (IV)$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν τὸ πάχος τοῦ σωλῆνος $e = r_a - r_i$ ἀντικαταστήσωμεν δὲ καὶ τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ $\psi = 3.33$ ἔχομεν ἐκ τοῦ τύπου (IV), τὸν τύπον τοῦ Winkler:

$$e = r_i \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon + 0.4p}{\sigma_\varepsilon - 1.3p}} - 1.$$

Σημείωσις. Εἰς τὸ λυόμενον πυροβόλον Δαγκλῆ ἐλύθη ἐπιτυχέστατα τὸ πρόβλημα τῆς ἐνισχύσεως τοῦ βληματοδόχου σωλῆνος.

Ὁ ἐνισχύων ἐξωτερικὸς σωλὴν οὐ μόνον παρεμποδίζει τὰς παραμορφώσεις καὶ ἑπομένως ἐλαττώνει τὰς κατ' ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένην τάσεις, ἀλλὰ δέχεται καὶ τὰς κατ' ἄξονα τάσεις ἅτε φέρων τὸν πυθμένα· οὕτω δὲ κατορθοῦται καὶ ἡ ἐλάττωσις τῶν ἀνηγμένων τάσεων ἐκδιττῆς αἰτίας δηλ. καὶ ἐκ τῆς ἐλαττώσεως αὐτῶν τῶν τάσεων καὶ ἐκ τῆς ἀπομακρύνσεως τῆς κατ' ἄξονα τάσεως

Μετ' ἴσης πρὸς τὸ θεωρητικὸν μέρος ἐπιτυχίας ἐλύθη καὶ τὸ πρακτικὸν ζήτημα, τῆς ταχείας συν — καὶ ἐξαρμολογήσεως τοῦ ὅπλου ἔσω καὶ κατόπιν τῆς διὰ συνεχῶν πυρῶν ὑπερθερμάνσεως αὐτοῦ.— Ἡ ταχεῖα δ' ἐξαρμολόγησις εἶνε κυριώτατος παράγων διὰ τὰς κατὰ τὸν πόλεμον μετακινήσεις.

III) ***Σωλῆνες μὲ παχέα τοιχώματα φέροντες ἐξωτερικὴν πίεσιν.*** — Ἡ σειρὰ τῶν συλλογισμῶν τῶν ἀναγκαίων πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου παραμένει ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν περίπτωσιν ἐσωτερικῆς πιέσεως. Μεταβάλλονται μόνον τὰ σημεῖα τῶν τάσεων, συνεπῶς δὲ καὶ τὰ σημεῖα καὶ μεγέθη τῶν ἀνηγμένων ἄκρων τάσεων· οὕτω ἡ μὲν σ_a γίνεται θλιπτική, ἡ σ_t ἐπίσης, ἡ δὲ σ_r ἐφελκυστική. Δι' ὑλικὰ ἔχοντα ἄλλην ἀντοχὴν κατὰ θλῖψιν καὶ διάφορον κατ' ἐφελκυσμὸν εἶνε ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν δύο τύπους· εἶνε δ' οὗτοι οἱ ἑξῆς:

$$\text{(I)}\quad e = r_a\left[1 - \sqrt{1 - 1.7\frac{p}{\sigma_\vartheta}}\right].$$

$$\text{καὶ (II)}\quad e = r_a\left[1 - \sqrt{1 - 0.9\frac{p}{\sigma_\varepsilon}}\right]$$

ἔνθα σ_t = ἀνεκτῇ τάσει κατὰ θλῖψιν p = ἐξωτερικῇ πιέσει εἰς ἀτμοσφαίρας.— e = πάχει σωλῆνος σ_ε = ἀνεκτῇ τάσει κατ' ἐφελκυσμὸν καὶ r_a = ἐξωτερικῇ ἀκτῖνι σωλῆνος.

Αὐτονόητον εἶνε, ὅτι θὰ δεχθῶμεν τὴν μείζονα τῆς διὰ τῶν τύπων (I) καὶ (II) ὁριζομένων τιμῶν τοῦ πάχους τοῦ σωλῆνος.

IV) ***Σωλῆνες μικροῦ πάχους ὑπὸ πίεσιν ἐξωτερικήν.*** — Ἐὰν ἡ διατομὴ τῶν σωλήνων τούτων εἶνε τελείως κυκλική, τότε ἡ παροῦσα περίπτωσις δὲν διαφέρει τῆς Ιης περιπτώσεως εἰ μὴ καθ' ὅ,τι ἀντ' ἐφελκυσμοῦ νῦν παράγεται θλῖψις· ἰσχύει δ' ὁ αὐτὸς τύπος (I)

ἤτοι $$e = \frac{pD}{2\sigma_\vartheta},$$

ἔνθα σ_ϑ = ἀνεκτῇ τάσει κατὰ θλῖψιν.

Τελείως ὅμως κυκλικὴ διατομὴ εἶνε δυσχερέστατον νὰ κατασκευασθῇ· συχνάκις λοιπὸν εἴτε ἐκ κατασκευῆς εἴτε καὶ ἐξ ἄλλης τινος αἰτίας συμβαίνει ὥστε ἡ διατομὴ νὰ εἶνε ἔλλειψις ἐλάχιστα μὲν διαφέρουσα τοῦ κύκλου, ἔχουσα ὅμως μεγάλην ἐπιρροήν, ὡς παρακατιόντες θὰ ἴδωμεν, ἐπὶ τῶν συνθηκῶν ἀντοχῆς ἅτε παράγουσα ῥοπὰς καλήψεως, αἵτινες ὑποβάλλουσι τὸν σωλῆνα εἰς σύνθετον κάθετον ἀντοχὴν πολὺ δυσμενεστέραν τῆς ἁπλῆς καθέτου ἀντοχῆς (θλίψεως ἢ ἐφελκυσμοῦ).

Καὶ ὅταν μὲν ὑπάρχῃ πίεσις ἐσωτερική, αἱ συνθῆκαι ἀντοχῆς ἐκ τῆς προκυπτούσης παραμορφώσεως βελτιοῦνται, ἅτε ἐλαττουμένης τῆς ἐκκεντρικότητος τῆς ἐλλείψεως, ἥτις τείνει νὰ γίνῃ κύκλος· διὰ τοῦτο λοιπὸν ἐν περιπτώσει ἐσωτερικῆς πιέσεως δὲν εἶνε ἀναγκαῖον νὰ θεωρήσωμεν τὰς ῥοπὰς κάμψεως, ἐὰν ἐννοεῖται πρόκειται περὶ μικρῶν καὶ τυχαίων παρεκκλίσεων ἀπὸ τῆς κυκλικῆς διατομῆς.

Ἐὰν ὅμως ἡ πίεσις εἶνε ἐξωτερική, τότε αἱ συνθῆκαι ἀντοχῆς καθίστανται ταχέως χείρονες ἅτε αὐξανομένης τῆς ἐκκεντρικότητος ἕνεκα τῆς παραγομένης παραμορφώσεως.

Δι' ἁπλοῦ παραδείγματος ἐννοοῦμεν τὴν ἀλήθειαν τῶν λεχθέντων· σωλὴν ἐκ καουτσούκ, φέρ' εἰπεῖν, ὅταν μὲν εἶνε κενὸς συμπτύσσεται καὶ ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἰδίου βάρους τὴν ἐνέργειαν· ὅταν ὅμως διαρρέηται ὑπὸ ὕδατος ἢ πεπιεσμένου ἀέρος, λαμβάνει τὴν κυκλικὴν αὐτοῦ μορφήν.

Τὸ ζήτημα εἶνε ἀρκετὰ πολύπλοκον, διερευνᾶται δε εἰς ὀλίγα συγγράμματα καὶ δὴ κατὰ τρόπον μακρὸν καί πως δυσχερῆ· διὰ τῆς ἐνεργητικῆς ὅμως μεθόδου, ἣν κατωτέρω ἐφαρμόζομεν, φθάνομεν εἰς ταχυτέραν καὶ εὐκρινεστέραν λύσιν.

Ἔστω ὁ ἐν (Σχ. 5) κατὰ τὸ ἥμισυ παριστώμενος σωλὴν ἔχων διατομὴν ἐλλειπτικήν, ὀλίγον μὲν διαφέρουσαν κύκλου, παρασταθεῖσαν ὅμως ἐν τῷ σχεδίῳ χάριν εὐκρινείας μὲ μεγάλην σχετικῶς διαφοράν.

Καλέσωμεν R τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου α τὸν μέγαν καὶ β τὸν μικρὸν ἡμιάξονα τῆς ἐλλείψεως.

Ἐπειδή, ὡς ἐρρήθη, πρόκειται περὶ ἐλλείψεως ἐλάχιστα διαφερούσης τοῦ κύκλου ἐχούσης δὲ τὴν αὐτὴν περίμετρον, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν.

$$\alpha = R + z_0 \quad \text{καὶ} \quad \beta = R - z_0.$$

Λάβωμεν σημεῖόν τι Γ ἔχον τετμημένην ΟΔ=x τεταγμένην ΓΔ=y καὶ ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΟΓ=r καὶ θέσωμεν r=R+z, ἔνθα z δύναται νὰ εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Ἐὰν p εἶνε ἡ εἰς ἀτμοσφαίρας (χγρ. ἀνὰ ἑκ²) ἐξωτερικὴ πίεσις, s δὲ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΓ, τότε ἡ ὁλικὴ πίεσις ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ ἔσται p.s.

Ἡ διὰ τοῦ μικροῦ ἄξονος ΑΟΑ΄ ἀχθεῖσα ἰδεατὴ τομὴ τοῦ σωλῆνος χωρίζει τοῦτον εἰς δύο τόξα τρὶς στατικῶς ἀπροςδιόριστα· αἱ συνθῆκαι τοῦ θεωρουμένου τόξου ΑΒΑ΄ εἶνε ἐντελῶς αἱ αὐταὶ πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου συμμετρικοῦ τόξου.—Εἰς τὸ σημεῖον Α ἐνεργεῖ: 1) Ἀντίδρασις ἴση πρὸς p.b ἴση δηλ. καὶ ἀντίθετος πρὸς ὁριζόντιον προβολὴν τῆς ὁλικῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως ἐπὶ τοῦ ἡμιτόξου ΑΒ 2) Ροπὴ πακτώσεως M_0 προερχομένη ἐκ τῆς συνεχείας τοῦ τόξου μετὰ τοῦ πρὸς αὐτὸ συμμετρικοῦ—τὴν ῥοπὴν ταύτην M_0 πρόκειται νῦν νὰ προσδιορίσωμεν.

Ἔστω Μ ἡ ῥοπὴ κάμψεως ἐν τῷ θεωρηθέντι σημείῳ Γ ἴση ὡς γνωστὸν τῇ ῥοπῇ ὅλων τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ δυνάμεων· εἶνε προφανές, ὅτι:

$$M = M_0 + pbx' - p\frac{s^2}{2}, \text{ ἔνθα } x' = ΑΔ = b - x.$$

Ἐκ τοῦ σχήματος ὅμως εὐκόλως συνάγομεν, ὅτι:

$$r^2 = s^2 + b^2 - 2\alpha x' \text{ καὶ ἑπομένως:}$$

$$\frac{s^2}{2} - \alpha x = \frac{r^2 - b^2}{2} \quad \text{καὶ συνεπῶς:}$$

$$M = M_0 - p\frac{r^2 - b^2}{2}. \text{ ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχει}$$

$$r = R + z \text{ καὶ } b = R - z_0$$

διὰ τοῦτο γίνεται

$$M = M_0 - pR(z_0 - z) \quad (I)$$

ἐὰν παραλίπωμεν τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις τῶν z καὶ z_0 ὑποτεθέντων λίαν μικρῶν, ὡς ἐρρήθη.

Ἐὰν καλέσωμεν Α τὸ ἔργον παραμορφώσεως τοῦ ἡμισωλῆνος, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν, ὅτι:

$$A = \frac{1}{2\varepsilon J}\int M^2 ds,$$

ἔνθα ds = μήκει ἀπειροστοῦ τόξου.

Συμφώνως ὅμως τῇ 2ᾳ ἀρχῇ τοῦ Cartigliano, τὸ ἔργον παραμορφώσεως διὰ στατικῶς ἀπροςδιόριστα μεγέθη καθίσταται ἐλάχιστον· ἐπειδὴ δ' ἐνταῦθα τὸ στατικῶς ἀπροςδιόριστον μέγεθος εἶνε τὸ M_0, ἤτοι ἡ ῥοπὴ πακτώσεως, θὰ ἔχωνεν:

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0, \quad \text{ἤτοι:}$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \frac{1}{\varepsilon J}\int M.\frac{\partial M}{\partial M_0} ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon J}\int \Big[M_0 - pR(z_0 - z)\Big].ds = 0$$

ἄρα:

$$\int M_0 ds - pR\int z_0 ds + pR\int z ds = 0 \quad (II)$$

Ἐπειὴ ὅμως z=R−r, διὰ τοῦτο

$$\int_0^\pi z ds = \int_0^\pi R ds - \int_0^\pi r ds = 0$$

ἀφοῦ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐλλείψεως ἐλήφθη ἴσον τῷ ἀναπτύγματι τοῦ κύκλου.

Ἑπομένως λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (II)

$$M_0 = pRz_0 \quad (III)$$

Διὰ τοῦ ἁπλουστάτου τούτου τύπου (III) προσδιωρίσαμεν τὴν ῥοπὴν πακτώσεως, τὸ δὲ πρόβλημα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λελυμένον, ἐὰν συντρέχωσι περιστάσεις τοιαῦται (ποιότης τοῦ ὑλικοῦ λ. χ. ἢ ἀντηρίδες ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαὶ κτλ), ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς παραμορφώσεις παραμελητέας.— Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ πάχους e τοῦ σωλῆνος θὰ γίνῃ διὰ τοῦ τύπου τῆς συνθέτου καθέτου ἀντοχῆς· εἶνε εὔκολον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεγίστη ῥοπὴ κάμψεως εἶνε ἡ ῥοπὴ πακτώσεως M_0, ἄρα τὸ σημεῖον Α (ὡς καὶ τὸ Β) εὑρίσκεται ὑπὸ τὰς δυσμενεστέρας συνθήκας.— Ἐὰν καλέσωμεν σ τὴν ἐκ τῆς συνθέτου καθέτου ἀντοχῆς προερχομένην τάσιν, θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστόν:

$$\text{(IV)} \qquad \sigma = \sigma_\theta + \sigma_\kappa,$$

ἔνθα σ_θ ἡ τάσις θλίψεως (ἴση τῇ τάσει σ_ε τοῦ ἐφελκυσμοῦ διὰ τὸν σίδηρον καὶ σ_κ ἡ τάσις κάμψεως.

Ἐὰν κατὰ προσέγγισιν θέτωμεν τὴν ἀντίδρασιν pb = pR, θὰ ἔχωμεν προφανῶς:

$$\sigma_\vartheta = \frac{pR}{e.1} \ (V) \ \text{καὶ} \ (VI)\ \sigma_\kappa = \frac{M_o}{W},$$

ἔνθα W = ῥοπῇ ἀντιστάσεως $= \frac{1.e^2}{6}$.

ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τοῦ M_0 καὶ W εἰς τὴν ἐξίσωσιν (VI) ἔχομεν: $\sigma_\kappa = \frac{6pRz_0}{e^2}$.

Ἡ ἐκ τῆς συνθέτου καθέτου ἀντοχῆς ὁλικὴ τάσις σ δέον νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀνεκτὴν τάσιν ἣν σημειῶ διὰ σ_z· οὕτω λοιπὸν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (IV), (V) καὶ (VI) ἔχομεν:

$$\sigma_z = pR\left(\frac{1}{e} + \frac{6z_o}{e^2}\right) \qquad (VII)$$

Σημ. I. Ἐὰν ἡ διατομὴ τοῦ σωλῆνος εἶνε ἐντελῶς κυκλική, τότε $z_o = O$, ὁ δὲ τύπος (VII) γίνεται:

$$\sigma_z = \frac{pR}{e} = \frac{pD}{2e},$$

ἤτοι ὁ ἤδη προσδιορισθεὶς διὰ τοὺς σωλῆνας τοὺς ἔχοντας ἐσωτερικὴν πίεσιν.

Σημ. (II). Ἵνα ἴδωμεν ὅτι καὶ μικρὰ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς κυκλικῆς μορφῆς ἀρκεῖ ἵνα παραγάγῃ σημαντικὴν αὔξησιν τῆς καταπονήσεως τοῦ μετάλλου, ὑπολογίζομεν τὸ ἑπόμενον παράδειγμα: Ἔστω λέβης ἔχων διάμετρον D = 1 μέτρον καὶ φέρων πίεσιν ἐξωτερικὴν p = 10 ἀτμοσφαιρῶν.— Διὰ ῥευστοπαγῆ σίδηρον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀνεκτὴν τάσιν σ_z = 1000 χγρ. κατὰ τετρ. ἑκατοστόν. (Ἐπειδὴ δὲ πρόκειται περὶ παραδείγματος παραλείπομεν χάριν συντομίας τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἡλώσεων). Ἐκ τοῦ τύπου (V) ἔχομεν:

$$e = \frac{pR}{1000} = \frac{10.50}{1000} = 0.5 \ \text{ἑκ.}$$

Ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι, ἕνεκα κατασκευῆς ἢ ἄλλου τινὸς αἰτίου, ἡ διατομὴ δὲν εἶνε ἐντελῶς κυκλική, ἀλλ' ἐλαφρῶς ἐλλειπτικὴ μὲ ἡμιάξονας 50.5 ἑκ. καὶ 49.5 ἑκ. ἄρα z_o=0.5 ἑκ. ὅτι δηλ. ἔγινε κακοτεχνία 1 %.— Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τηροῦμεν τὸ προσδιορισθὲν πάχος e ἴσον πρὸς 5 χιλιοστά, θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ τύπου (VII) ἐκφράζοντες χάριν τῆς ὁμογενείας πάσας τὰς μονάδας εἰς ἑκατοστὰ καὶ χιλιόγραμμα ἀνὰ τετραγ. ἑκατοστόν.

$$\sigma = 10.50\left(\frac{1}{0,5} + \frac{6.0,5}{0,5^2}\right) = 10.50(2+12) = 7000$$

Οὕτω λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ἡ τάσις ἐγένετο *ἑπταπλασία* διὰ τὴν μικρὰν αὐτὴν ἀπόκλισιν (σχεδὸν διπλασία καὶ τῆς ἀντοχῆς τοῦ σιδήρου κατὰ θραῦσιν). Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ αὐξήσωμεν τὸ πάχος οὕτως ὥστε ἡ τάσις νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ἀνεκτὸν ὅριον τῶν 1000 χγρ./ἑκ².— Ἔστω e_1 τὸ νέον πάχος τοῦτο.

Ἐκ τοῦ τύπου (VII) ἔχομεν

$$1000 = 10.50\left(\frac{1}{e_1} + \frac{6.0.5}{e_1^2}\right)$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν: $e_1^2 - 0.5\, e_1 - 1.5 = 0$ ἄρα $e_1 = 1.5$ ἑκατοστὸν δηλ. τριπλάσιον τοῦ πάχους τοῦ ἀναγκαίου διὰ τελείως κυκλικὴν διατομήν.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου κατανοοῦμεν, τίνα σημασίαν ἔχει, ἐν περιπτώσει ἐξωτερικῆς πιέσεως, ἔστω καὶ μικρὰ ἀπόκλισις τῆς διατομῆς ἀπὸ τῆς κυκλικῆς μορφῆς.— Τὰ ἀποτελέσματα γίνονται προφανῶς ἔτι δυσμενέστερα, ἐὰν αἱ παραμορφώσεις δὲν εἶνε παραμελητέαι· τοῦτο δὲ θὰ ἐξετάσωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Ἡ ἐλαστικὴ γραμμὴ τόξου οἱουδήποτε (Σχ. 6) προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως τοῦ Εὐλήρου:

$$(VIII) \ldots \varepsilon J\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right) = M,$$

ἔνθα ρ = ἀκτῖνι καμπυλότητος τοῦ τόξου ΑΒΓ πρὸ τῆς παραμορφώσεως καὶ ρ′ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς Α′Β′Γ.′

Καλέσωμεν θ τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y ἡ ἀκτὶς ΚΔ καὶ θ′ τὴν γωνίαν τῆς ΚΔ,′ ὑποτιθεμένου, ὅτι τὸ σημεῖον Δ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν μετέβη εἰς Δ′ καὶ ὅτι τὸ κέντρον καμπυλότητος ἔμεινεν ἀμετάβλητον.

Ὑπάρχει ὡς γνωστὸν $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta}$ καὶ $\varrho' = \frac{ds'}{d\vartheta'}$, τεθεῖσα ὑπὸ τοῦ Navier κατὰ προσέγγισιν $\varrho' = \frac{ds}{d\vartheta'}$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν (VIII) ἔχομεν:

$$\varepsilon J \frac{d\vartheta' - d\vartheta}{ds} = M \ \text{καὶ}$$

$$(IX) \qquad \vartheta' - \vartheta = \int_{s_o}^{s} \frac{M}{\varepsilon J} ds + (\vartheta'_o - \vartheta_o)$$

Ἐὰν νῦν καλέσωμεν χ, y τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Δ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας χ', y' ποῦ σημείου Δ′ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἐξίσωσιν (IX), ὡς καὶ τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις:

$$\eta\mu\,\vartheta = \frac{dy}{ds}. - \sigma\upsilon\nu\,\vartheta = \frac{dx}{ds}. - \eta\mu\,\vartheta' = \frac{dy}{ds}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta' = \frac{dx'}{ds'},\ \text{καὶ}\ ds' = ds - \frac{Nds}{\varepsilon F},$$

ἔνθα N ἐπὶ τῆς διατομῆς Δ κάθετος πίεσις, ε ὁ συντελεστὴς ἐλαστικότητος καὶ F τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς.

Ἐὰν δὲ αὐξηθῇ καὶ ἡ θερμοκρασία κατὰ t^o, τότε

$$ds' = ds\left(1 - \frac{N.}{\varepsilon F}\right)(1 + \alpha t),$$

ἔνθα α=συντελ. διαστολῆς.

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὰς συντεταγμένας χ' καὶ y' τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς διὰ τῶν ἑξῆς ἐξισώσεων:

$$x' - x = -\int_{s_0}^{s} (\vartheta' - \vartheta)dy -$$

$$\int_{s_0}^{s} \frac{N}{\varepsilon J}dx + \int_{s_0}^{s} \alpha t dx \ldots (X)$$

$$y' - y = +\int_{s_0}^{s} (\vartheta' - \vartheta)dx -$$

$$-\int_{s_0}^{s} \frac{N}{\varepsilon J}dy + \int_{s_0}^{s} \alpha t dy \ldots (XI)$$

Ἐφαρμόσωμεν νῦν τὰς ἐξισώσεις ταύτας ἐπὶ τῆς ἡμετέρας περιπτώσεως· καλέσωμεν α' καὶ b' τὰ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν μεγέθη τῶν ἡμιαξόνων α καὶ b'.

Ἐὰν ὑποτεθῇ σταθερὰ ἡ θερμοκρασία, ληφθῇ δ' ὑπ' ὄψει ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου Α (Σχ. 5) κάθετος πίεσις εἶνε pb, ἡ δ' ἐπὶ τοῦ Β εἶνε ἴση πρὸς p. α, πρὸς δὲ σημειωθῇ τὸ πάχος δι' e, λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (X) καὶ (XI) τὰς ἑξῆς:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{1}{2}(\alpha' + b')\frac{p\alpha'}{\varepsilon e}\left(\frac{\alpha'^2 - b'^2}{e^2}\right) - 1)\ (XII)$$

$$b' - b' = +\frac{1}{2}(\alpha' + b')\frac{pb'}{\varepsilon e}\left(\frac{\alpha'^2 - b'^2}{e^2} - 1\right)(XIII)$$

Ἡ διερεύνησις τῶν τύπων τούτων ἀποδεικνύει, ὅτι:

1) ὑπὸ πίεσιν ἐσωτερικὴν ἡ ἐκκεντρικότης ἐλαττοῦται, ὑπὸ δὲ πίεσιν ἐξωτερικὴν αὐξάνει· εἴπομεν ἤδη ὅτι καὶ ἐκ τῆς συνήθους πείρας συνάγομεν τὸ συμπέρασμα τοῦτο.

2) ὅτι ἐν τῇ κορυφῇ τῶν ἀξόνων ἡ τάσις τοῦ μετάλλου αὐξάνεται λίαν ἀποτόμως αὐξανομένης τῆς ἐκκεντρικότητος· καὶ περὶ τούτου δ' ἐγένετο ἐμμέσως λόγος ἐν τῷ ἐρευνηθέντι παραδείγματι.

Ἐὰν σημειώσωμεν δι' Ε τὴν ἐκκεντρικότητα πρὸ τῆς παραμορφώσεως καὶ δι' Ε′ τὴν μετὰ τὴν παραμόρφωσιν, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστὸν

$$E = \sqrt{\frac{\alpha - b}{\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad E' = \sqrt{\frac{\alpha' - b'}{\alpha'}}$$

Τὸν λόγον τῶν δύο ἐκκεντρικοτήτων $\frac{E'}{E}$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν, ὡς δεικνύουσιν αἱ ἐξισώσεις (XII) καὶ (XIII), ἴσον κατὰ μεγάλην προσέγγισιν πρός:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{p(\alpha' + b')^3}{2\varepsilon e^3}}} \quad (XIV)$$

ὁ λόγος οὗτος (XIV) θὰ εἶνε πραγματικὸς ἢ φανταστικός, καθόσον ὁ παρανομαστὴς εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικός.— Ἐὰν τὸ p εἶνε θετικόν, ἐὰν δηλ. ἡ πίεσις εἶνε ἐσωτερική, τότε $E' < E$ δηλ. ἡ ἐκκεντρικότης μετὰ τὴν παραμόρφωσιν ἐλαττοῦται.

Ἐὰν δὲ p εἶνε ἀρνητικόν, ἐὰν δηλ. ἡ πίεσις εἶνε ἐξωτερική, τότε ὑπάρχει λύσις πραγματικὴ τοῦ τύπου (XIV) ἐφ' ὅσον ὑπάρχει

$$(XV)\ldots 2\varepsilon e^3 + p(\alpha' + b')^3 > 0$$

Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, τότε ἡ διατομὴ δὲν λαμβάνει μετὰ τὴν παραμόρφωσιν σχῆμα προσεγγίζον πρὸς τὸ ἀρχικόν, ἀλλὰ προκύπτει ὁλοσχερὴς συντριβὴ τοῦ σωλῆνος ὑπὸ τὴν ἐξωτερικὴν πίεσιν.

Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως p, ἡ συναγομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως p, εἶνε τὸ ὅριον δι' οὗ δύναται νὰ φορτισθῇ σωλὴν ἔχων πάχος e καὶ διατομὴν ἀκτῖνος R κυκλικήν, ὑποκειμένη ὅμως ἐκ λόγων κατασκευῆς ἢ ἄλλων αἰτίων εἰς παρεκκλίσεις μικρὰς ἀπὸ τῆς κυκλικῆς μορφῆς.

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (XV) θέσωμεν κατὰ μεγίστην προσέγγισιν $R = \frac{\alpha' + b'}{2}$, λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$p_k = \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{e}{R}\right)^3 \quad (XVI).$$

Ἐν τῷ τύπῳ (XVI) ἐσημειώσαμεν διὰ p_k τὴν ὁρικὴν ἐξωτερικὴν πίεσιν, δηλ. τὸ ὅριον τῆς πιέσεως, δι' οὗ φορτιζόμενος σωλήν τις δὲν κινδυνεύει νὰ συνθλασθῇ· τὴν ὁρικὴν ταύτην πίεσιν ὀνομάζει ὁ Föppe *κρίσιμον πίεσιν*.

Διὰ τοῦ τύπου (XVI) δέον νὰ ὑπολογίζωνται οἱ σωλῆνες οἱ φέροντες ἐξωτερικὴν πίεσιν.

Παράδειγμα: τίνα πίεσιν ἐξωτερικὴν δύναται νὰ φέρῃ σωλὴν σιδηροῦς ἀκτῖνος R=50 ἑκ. καὶ πάχους e=1.5 ἑκ;

Ἐ τοῦ τύπου (XVI) ἔχομεν $p_k = 13.5$ ἀτμοσφαίρας.

Αὐτονόητον εἶνε ὅτι δεδομένης τῆς διαμέτρου τοῦ σωλῆνος καὶ τῆς ἐξωτερικῆς αὐτοῦ πιέσεως δυνάμεθα ἐκ τοῦ τύπου (XVI) νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πάχος τοῦ σωλῆνος.

Εἰς τὸ προσεχὲς φύλλον τοῦ «Ἀρχιμήδους» θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀρχὴν τῆς ἀμοιβαιότητος τῆς ἐνεργείας παραμορφώσεως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τόξων δικτυωτῶν καὶ ἄλλων δικτυωμάτων στατικῆς ἀπροσδιορίστων.

Α. ΚΟΥΣΙΔΗΣ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΙΘΕΡΟΣ ΩΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

Κατὰ τὴν νέαν ἐκδοχὴν τῆς Μηχανικῆς τῶν μεγάλων ταχυτήτων ὁ αἰθὴρ θεωρεῖται ὥς τι ἐλαστικὸν μέσον καὶ ἡ ἀδράνεια αὐτοῦ αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος ἔχουσα ὅριον τὸ ἄπειρον, τῆς ταχύτητος ἐχούσης ὅριον τὴν τοῦ φωτός. Ἡ φαινομένη ἄρα μᾶζα τοῦ ἠλεκτρίου (μορίου ἠλεκτρισμένου) αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος καὶ κατὰ τὰ πειράματα ἡ σταθερὰ πραγματικὴ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρίου παραλειπτέα πρὸς τὴν φαινομένην μᾶζαν· ἡ σταθερὰ μᾶζα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ συγκροτοῦσα τὴν ὕλην μᾶζα δὲν ὑφίσταται· μόνος ὁ αἰθὴρ καὶ οὐχὶ ἡ ὕλη εἶναι ἤδη ἀδρανής· μόνος ὁ αἰθὴρ ἀναπτύσσει ἀντίστασιν εἰς τὴν κίνησιν οὕτως, ὥστε ἐκλιπούσης τῆς ὕλης μόνον ὁπαί, οὕτως εἰπεῖν, ὑφίστανται ἐν τῷ αἰθέρι, τῆς μάζης ἐξαρτωμένης ἐκ τῆς ταχύτητος καὶ τῆς γωνίας, ἣν αὕτη σχηματίζει μετὰ τῆς κινητηρίου δυνάμεως. Οὕτω δὲ ἡ αὔξησις ἔργου τῆς ἐπὶ στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου ἐφηρμοσμένης δυνάμεως ἡ τελουμένη κατὰ μικράν τινα αὔξησιν περιστροφῆς εἶναι ἀνάλογος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν 1) πρὸς τὴν αὔξησιν περιστροφῆς, 2) πρὸς αὐτὴν ταύτην τὴν περιστροφὴν ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ 3) πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων τῆς περιστροφῆς καὶ τῆς αὐξήσεως αὐτῆς. Κατὰ ταῦτα ἡ μεταβολὴ δT τοῦ ὁλικοῦ ἔργου T τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τοῦ αἰθέρος εἶναι $\delta T =$

$$-\int 4A(\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta)\,d\tau =$$

$$-\int 2A\,\delta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,\delta\tau$$

ὅπου A=σταθ., $d\tau$ στοιχεῖον ὄγκου καὶ

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}\ \frac{dv}{dz}\right),\ \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}\ \frac{dw}{dx}\right),\ \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\ \frac{du}{dy}\right),$$

ὡς διὰ τὸ ἔργον φυσικοῦ ἐλαστικοῦ στερεοῦ σώματος. Ἀλλὰ διὰ πᾶν φυσικὸν ἐλαστικὸν στερεὸν σῶμα ἰσχύουσιν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως:

$$\begin{cases} \varrho(X - j_x) = \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} \\[2ex] \varrho(Y - j_y) = \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} \\[2ex] \varrho(Z - j_z) = \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} \end{cases}$$

Ἔστωσαν $d\sigma$ στοιχεῖον ἐπιφανείας διερχόμενον διὰ σημείου M(x,y,z), MN ἡ κάθετος (α,β,γ) πρὸς τὸ στοιχεῖον τοῦτο, T ἡ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἕλξις ἀναφερομένη εἰς τὴν μονάδα ἐπιφανείας καὶ T_ν ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τῆς MN. Ἐὰν $T_\nu > o$, ἡ T λέγεται *πίεσις*· ἐὰν $T_\nu < o$, ἡ T λέγεται *ἕλκυσις*. Ἐπειδὴ δὲ ἡ T ἔχει πρὸς ὀρθογ. ἄξονας συνιστώσας.

$$\begin{aligned} Tx &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma \\ Ty &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma \\ Tz &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma \end{aligned}$$

εἶναι $T_\nu = \alpha T_x + \beta T_y + \gamma T_z =$
$= \alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma$ ἢ $T_\nu = 2\varphi(\alpha,\beta,\gamma) =$
$= N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2T_1\beta\gamma + 2T_2\gamma\alpha + 2T_3\alpha\beta.$

Ἐὰν ἐπὶ τῆς καθέτου MN ληφθῇ μῆκος $MQ = \dfrac{1}{\sqrt{\pm T_\nu}}$ αἱ συντεταγμέναι $x_1 y_1 z_1$ τοῦ Q πρὸς τοὺς ὀρθογ. ἄξονας $Mx_1y_1z_1$ τοὺς ἀγομένους ἐκ τοῦ M παραλλήλους τοῖς Oxyz εἶναι

$$x_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pm T_\nu}},\ y_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\pm T_\nu}},\ z_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\pm \Gamma_\nu}}$$

καὶ ἑπομένως ὁ τόπος τῶν σημείων Q, ὅταν