ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Α. Σ. ΣΚΙΝΤΖΟΠΟΥΛΟΥ

Ετος Κ΄. ΑΘΗΝΑΙ, Μαΐος 1919 Αριθ. 5

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΕΩΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΗΜΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ [1]

ΥΠΟ

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Κύριε Ὑπουργέ! Κυρίαι καὶ Κύριοι!

Ἀνερχόμενος εἰς τὸ βῆμα τοῦτο, εἰς τὸ ὁποῖον μὲ ἤγαγεν ἡ εὐμενὴς ψῆφος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς καὶ ἡ τῆς Σ. Κυβερνήσεως καὶ τῆς Α. Μ. τοῦ Βασιλέως ἔγκρισις, ἀνθ' ὧν μυρίας ὁμολογῶ χάριτας καὶ βαθεῖαν ἐκφράζω εὐγνωμοσύνην, ἔχω σκοπόν, ἀκολουθῶν ἐπικρατήσασαν συνήθειαν, νὰ ἀναπτύξω πρὸ ὑμῶν ἐν συντόμῳ τὰ τῆς ἐξελίξεως καὶ τῆς σημασίας τῆς Γεωμετρίας.

* * *

Ἀλλὰ πρὶν ἀρχίσω τὸ πρῶτόν μου μάθημα, θεωρῶ καθῆκον τιμῆς νὰ ἐκφράσω τὴν βαθεῖάν μου εὐγνωμοσύνην πρὸς τοὺς πρώτους μου διδασκάλους τοῦ ἡμετέρου Πανεπιστημίου, πρὸς τὸν σεβαστὸν κ. *Ἰωάν. Χατζιδάκιν*, τὸν κ. *Δημ. Αἰγινήτην* καὶ τὸν ἀείμνηστον *Κυπ. Στέφανον*, ὁ ὁποῖος ὡς καθηγητὴς τῆς ἕδρας τῆς ἀνωτέρας καὶ ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἐξόχως ἐτίμησε τὸ Ἑλληνικὸν Πανεπιστήμιον καὶ τὴν Ἐπιστήμην καθόλου.

* * *

Ἡ Μαθηματική, ἡ κατ' ἐξοχὴν ἐπιστήμη, ἀσχολεῖται μὲ τὴν λύσιν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς ἓν σύνολον σχέσεων μεταξὺ ποσῶν· εἶναι ἡ διανοητικὴ ἐπεξεργασία τῶν σχέσεων τοῦ χρόνου καὶ τοῦ διαστήματος, ἡ ἐπιστήμη τῆς καθαρᾶς ἐποπτείας κατὰ τὸν Κάντιον, κατὰ δὲ τὸν Α. Comte σκοπεῖ τὴν ἔμμεσον μέτρησιν τῶν μεγεθῶν, προσδιορίζουσα ταῦτα δι' ἑτέρων τοιούτων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀκριβῶν σχέσεων, αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ αὐτῶν. Ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη εἶναι ὁ ἡγεμὼν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν καὶ διακρίνεται ἀπὸ τὰς ἄλλας, διὰ τούτου, ὅτι λαμβάνουσα τὰς πρώτας της ἐννοίας καὶ ἀρχὰς ἐκ τῆς πείρας ἢ καὶ πολλάκις ἄνευ τῆς βοηθείας τῆς ἐμπειρίας καθορίζουσα θεμελιώδεις λογικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν πρώτων ἐννοιῶν, αἵτινες εἶναι ἀνεπίδεκτοι ὁρισμοῦ, θεμελιοῦται καὶ ἐξελίσσεται ἐντεῦθεν μετ' ἄκρας καὶ αὐστηρᾶς λογικῆς τελειότητος. Διακρίνομεν τὴν ἀφῃρημένην Μαθηματικήν, δηλαδὴ τὸν Λογισμόν, καὶ τὴν συγκεκριμένην. Ἡ τελευταία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Μηχανικήν, τοὺς δύο δὲ τούτους κλάδους καταλέγει ὁ Comte εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας, ἐπειδὴ ἐν ἀμφοτέραις τίθεται ὡς βάσις ἡ παρατήρησις. Ἐὰν τὰ ποσά, εἰς ἃ ἀναφέρονται τὰ μαθηματικὰ προβλήματα, εἶναι ἀριθμητικὰ ἢ ἀφῃρημένα, τότε καλοῦμεν τὸν κλάδον τοῦτον τῆς Μαθηματικῆς Ἀνάλυσιν, ἐὰν δὲ εἶνε γεωμετρικά, ἔχομεν τὴν Γεωμετρίαν. Ἡ Ἀνάλυσις θὰ ἠδύνατο νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς καθαρὰ θεωρία ἄνευ ἐμπειρικῆς τινος προϋποθέσεως, ἥτις ἀντλεῖται ἐκ τοῦ περιβάλλοντος ἡμᾶς κόσμου, ἐκ τοῦ χώρου, ἐν ᾧ ὑπάρχομεν. Ἀλλ' ἡ χρησιμότης τῶν προβλημάτων τῆς Ἀναλύσεως διὰ τὸν ἄνθρωπον, διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τοῦ φυσικοῦ κόσμου, δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ἄνευ ἐπικοινωνίας τινός τῆς Ἀναλύσεως μὲ τὸν χῶρον καὶ

[1] Ἐναρκτήριος λόγος απαγγελθεὶς τὴν 10ην Ἰανουαρίου 1919 ἐν τῇ αἰθούσῃ τῆς Νομικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου.

τὴν ὕλην, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἀκριβῶς θὰ ἐφαρμοσθῇ. Ἡ ἐφαρμογὴ αὐτή, ἡ ἐπαφὴ τῆς Ἀναλύσεως μὲ τὴν ὕλην, γίνεται διὰ τῆς προσλήψεως προτάσεών τινων, τὰς ὁποίας ἡ ἐπιστήμη ἀδυνατεῖ ν' ἀποδείξῃ, ἀλλὰ λαμβάνει ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν· τὰς προτάσεις αὐτὰς καλοῦμεν *ἀξιώματα*. Τὰ ἀξιώματα συνειθίζομεν νὰ θεωρῶμεν ὡς προτάσεις φανερὰς καὶ ἀλανθάστους, μόνον διότι οὕτω ἀντιλαμβανόμεθα αὐτὰς διὰ τῶν αἰσθήσεών μας.

«Ἓν σχῆμα δύναται νὰ ἀλλάξῃ θέσιν ἐν τῷ χώρῳ». Εἶναι μία πρότασις, ἥτις φαίνεται φανερά, ἰδίως εἰς τὸν μὴ μαθηματικόν. Ἐν τούτοις δὲν ἔχει οὕτω καὶ διὰ τὸν μαθηματικόν. Δι' αὐτόν ἡ πρότασις αὐτὴ δὲν εἶναι φανερά, καθὼς καὶ τόσαι ἄλλαι, ἀλλ' ἀποτελεῖ μίαν ὑπόθεσιν.

Τὰς προτάσεις διακρίνομεν κατὰ τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸν Εὐκλείδην εἰς τρεῖς κατηγορίας:

Α'.) Τοὺς ὁρισμοὺς (ὅρους), οἵτινες φαίνονται ὡς ἁπλαῖ περιγραφαί, ἀλλ' οἵτινες περιέχουν συνήθως ἐν ἑαυτοῖς θεμελιώδεις προτάσεις· ὡς τοιοῦτον ἀναφέρομεν τὸν τέταρτον ὁρισμὸν τοῦ 5ου βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, περιέχοντα τὸ αἴτημα τοῦ Ἀρχιμήδους, ἔχον οὕτω:

«Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν».

Β'.) Τὰ ἀξιώματα (κοινὰς ἐννοίας) καὶ τὰ αἰτήματα.

Γ'.) Τὰς προτάσεις, αἵτινες ἐπετεύχθησαν ἀμέσως διὰ τῆς ἐποπτείας καὶ μόνης, καθὼς π. χ. αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν τάξιν τῆς συνεχείας τῶν σημείων ἐπί τινος γραμμῆς, καὶ τὸ ἀπεριόριστον τῆς εὐθείας κ. ἄ.

Μεταξὺ τῶν ἀξιωμάτων καὶ αἰτημάτων ὑπάρχουν διαφοραί τινες εἰς τὰ ἑξῆς σημεῖα:

α'.) Τὰ αἰτήματα σχετίζονται πρὸς τὰ ἀξιώματα, καθὼς τὰ προβλήματα κατασκευῆς πρὸς τὰ θεωρήματα.

Διὰ τῶν αἰτημάτων ἀποφαινόμεθα ὑπὲρ τοῦ δυνατοῦ ἁπλῶν τινων κατασκευῶν· αἱ ἄλλαι κατασκευαὶ ἀνάγονται ἀκολούθως εἰς ταύτας. Διὰ τῶν ἀξιωμάτων δεχόμεθα ὅτι σχήματά τινα, τῶν ὁποίων ἐπετύχομεν τὴν κατασκευὴν διὰ τῶν αἰτημάτων ἢ τῶν ἀποδείξεων, ἔχουν ἰδιότητας μὴ ἀποδεκνυομένας.

β'.) Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν ἰδιότητας ἀναφερομένας εἰς οἱαδήποτε μαθηματικὰ μεγέθη, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐφαρμογή των ἐκτείνεται εἰς περιοχὴν μᾶλλον ἐκτεταμένην τῆς περιοχῆς τῆς Γεωμετρίας, ἐνῷ τὰ αἰτήματα ἑρμηνεύουν γεωμετρικὰς ἰδιότητας.

γ'.) Τὸ ἀξίωμα ἔχει ἀξίαν αὐτὸ καθ' ἑαυτό, καθὼς λέγει ὁ Πρόκλος.[1] Ἡ ἀλήθεια, τὴν ὁποίαν ἐκφράζει, ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀντιλήψεων μόνον, αἵτινες εἰκονίζονται εἰς τὴν διατύπωσίν του. Κατὰ τὸν Κάντιον τὸ ἀξίωμα εἶνε μία κρίσις ἀναλυτική. Τοὐναντίον ἡ πρότασις, ἥτις διατυποῦται δι' ἑνὸς αἰτήματος, δὲν εἶναι ἁπλῶς μία λογικὴ συνέπεια τῶν ὁρισμῶν, κατὰ τὸν Κάντιον συγκροτεῖ αὐτὴ μίαν κρίσιν συνθετικήν. Εἰς τὰς νεωτέρας ἐρεύνας ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς Γεωμετρίας δὲν δεχόμεθα πλέον καμμίαν σπουδαίαν διαφορὰν μεταξὺ ἀξιωμάτων καὶ αἰτημάτων. Εὑρίσκομεν εἰς τὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου καθὼς καὶ εἰς τὰ αἰτήματα αὐτοῦ κρίσεις συνθετικάς. Καὶ διὰ τοῦτο μεταχειριζόμεθα συνήθως τὴν λέξιν *αἴτημα* καὶ *ἀξίωμα* [1]) πρὸς ἔκφρασιν τῶν ἐν λόγῳ προτάσεων.

Ἐκ τῶν αἰτημάτων τῶν εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀναφερομένων, μνημονεύομεν ἐνταῦθα τὸ περίφημον 5ον αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου ἢ τῶν παραλλήλων, ἔχον οὕτω:

«Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα, ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσόνες».

Τὸ αἴτημα αὐτὸ εἶναι ἡ βάσις τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων καὶ ἐκ τῆς ἀληθείας αὐτοῦ ἐπάγεται καὶ ἡ ἀλήθεια ὅτι

«ἐκ σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας α κειμένου, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αΑ μίαν καὶ μόνην παράλληλον αὐτῇ».

Αἱ κριτικαὶ ἐπὶ τοῦ αἰτήματος τούτου καὶ αἱ ἀπόπειραι, αἱ γενόμεναι πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ, εἶνε πλεῖσται. Εἴκοσιν ὁλοκλήρων αἰώνων καταπόνησις τῆς μαθηματικῆς διανοίας καὶ ἰδίᾳ αἱ ἄκαρποι ἔρευναι ἐπὶ τοῦ αἰτήματος, αἱ γενόμεναι μέχρι τοῦ 1700, ἠνάγκασαν πολλοὺς γεωμέτρας, οἵτινες ἔδρασαν κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα, νὰ δεχθοῦν ὅτι ἡ ὁριστικὴ διάταξις τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων εἶνε πρόβλημα ἄλυτον. Καὶ ὑπῆρξε μὲν ἀκόμη ζωηρὸν τὸ διαφέρον τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ αἰτήματος, ἀλλ' αἱ ἐρευνητικαὶ προσπάθειαι ὡδήγησαν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν ἄλλου νεωτέρου γεωμετρικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἀρχῆς, ἥτις περιέχεται ἐν τῷ εὐκλειδείῳ αἰτήματι.

Αἱ πρῶται βάσεις τοῦ νέου τούτου γεωμετρικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἐκλήθη φανταστικὴ Γεωμετρία, Παγγεωμετρία, Γεωμετρία τῶν ἀνωτέρων ἐρευνῶν, Ὑπεργεωμετρία καὶ τέλος μὴ εὐκλείδειος Γεωμετρία, ἐτέθησαν κυρίως ὑπὸ τοῦ Ρώσσου Nicolaj Iwanowitsch Lobatschevskij (1793-1856). Μεταξὺ τοῦ 1823 καὶ 1825 διηυθύνθησαν αἱ σκέψεις τοῦ Lobatschevskij πρὸς μίαν Γεωμετρίαν, ἥτις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς εὐκλειδείου ὑποθέσεως, καὶ τὸν πρῶτον καρπὸν τῶν ἐρευνῶν του ἀνεκοίνωσε τὴν 12)24 Φεβρουαρίου 1826 διὰ τοῦ ἔργου του: *«Exposition succinte des principes de la géometrie avec démonstration rigoureuse du théorème des paralleles»* εἰς τὴν Φυσικομαθηματικὴν Σχολὴν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Καζάν.

Ἐν τῷ ἔργῳ του τούτῳ ὁ Lobatschevskij θέτει

[1]) Πρβ. Procli Diadochi in primum Euclidis elemantorum librum commentarii, éd G. Friedlein. Leipzig 1873, σ. 178.

[1]) Πρβ. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie 3. Aufl. σ. 3-22.

τὰ θεμελιώδη στοιχεῖα μιᾶς Γεωμετρίας, ἥτις εἶναι γενικωτέρα τῆς συνήθους καὶ κατὰ τὴν ὁποίαν, δι' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου διέρχονται δύο παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Τὸ 1829-1830 ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸ μνημονευθὲν Πανεπιστήμιον καὶ ἐδημοσίευσε ῥωσσιστὶ ὁ Lobatschevskij νέον ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον:

«***Περὶ τῶν θεμελιωδῶν βάσεων τῆς Γεωμετρίας***,[1]) ἐν ᾧ, ἐκτὸς τῶν περιεχομένων ἐν τῷ μνημονευθέντι πρώτῳ του ἔργῳ περιέχονται ἐφαρμογαί τινες τῆς νέας θεωρίας ἐπὶ τῆς Ἀναλύσεως. Ἀκολούθως ἐδημοσίευσε σειρὰν ἐργασιῶν του.

«*Imaginäre Geometrie*» *(1835)*.

«*Die neuen Anfangsgründe der Geometrie mit vollständiger Theorie der Parallellinien*» *(1835-1838)*.

«*Anwendungen der imaginären Geometrie auf einige Integrale*» *(1836)*.

«*Géométrie imaginaire (1837)* [2]).

«*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*» [3]), δι' ἧς προκαλεῖ τὴν προσοχὴν τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ τῶν ἐρευνῶν του:

«*Pangéométrie ou précis de géometrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*».

Ὁ Lobatschevskij θεωρεῖ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μίαν δέσμην ἀκτίνων μὲ κέντρον σημεῖόν τι Α καὶ μίαν εὐθεῖαν ΒΓ, μὴ ἀνήκουσαν εἰς τὴν δέσμην. Ἔστω ΑΔ ἡ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἀκτὶς τῆς δέσμης καὶ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶνε, ὡς γνωστόν, ἡ μόνη ἐν τῷ εὐκλειδείῳ συστήματι, ἥτις δὲν τέμνει τὴν ΒΓ. Ἐν τῷ συστήματι τοῦ Lobatschevskij ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῆς δέσμης Α, αἵτινες δὲν τέμνουν τὴν ΒΓ. Αἱ μὴ τέμνουσαι αὗται εὐθεῖαι χωρίζονται ἀπὸ τῶν τεμνουσῶν διὰ δύο εὐθειῶν λ, καὶ k αἵτινες ἐπίσης δὲν τέμνονται μετὰ τῆς ΒΓ. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν, τὰς ὁποίας ὁ ῥῶσσος μαθηματικὸς καλεῖ παραλλήλους, ἔχει ὡρισμένην φορὰν παραλληλίας. Οὕτω ἡ λ ἐν τῷ σχήματι (1) εἶνε παράλληλος κατὰ τὴν δεξιὰν φορὰν ἡ δὲ k πρὸς τὴν ἀριστεράν. Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κάθετος ΑΔ μὲ μίαν τῶν παραλλήλων καλεῖται γωνία τῶν παραλλήλων, ἢ γωνία τοῦ παραλληλισμοῦ, ἀντιστοιχεῖ δὲ εἰς τὴν ἀπόστασιν ΑΔ=p. Ὁ ἐν λόγῳ μαθηματικὸς μεταχειρίζεται τὸ σύμβολον Π (p), ἵνα παραστήσῃ τὴν εἰς τὴν ἀπόστασιν p ἀντιστοιχοῦσαν γωνίαν τῶν παραλλήλων [4]). Ἐν τῇ συνήθει Γεωμετρίᾳ ἔχομεν Π (p)=90°, ἐν ᾧ εἰς τὸ σύστημα τοῦ Lobatschevskij εἶνε συνάρτησις τοῦ p, αὐξάνουσα μέχρι 90°, ἐὰν τὸ p ἐλαττοῦται μέχρι 0, ἐλαττουμένη

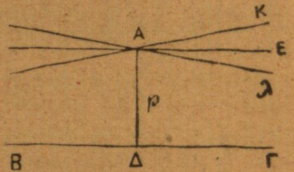
[1]) Πρβ. F Klein, Nicht-Euklidische Geometrie Bd. I. Göttingen 1892, σ. 174.

[2]) Journal de Crelle Bd 19.

[3] Berlin, 1840.

[4]) Πρβ. F. Klein, ὡς ἀν. σ. 179.

δὲ μέχρι τοῦ 0, ἐὰν τὸ p αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον. Ἀλλὰ τὸ σπουδαιότερον μέρος τῆς «*φανταστικῆς Γεωμετρίας*» εἶναι ὁ σχηματισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν τύπων. Πρὸς ἐξαγωγὴν αὐτῶν εἰσήγαγεν ὁ Lobatschevskij δύο νέα σχήματα, τὸν *ὁριακὸν κύκλον* (κύκλον μὲ ἄπειρον ἀκτῖνα) καὶ τὴν ὁριακὴν σφαῖραν (σφαῖραν μὲ ἄπειρον ἀκτῖνα), ἅτινα ἐν τῇ συνήθει Γεωμετρίᾳ εἶνε ἡ εὐθεῖα γραμμὴ καὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς ὁριακῆς σφαίρας ἀνήκουν ∞^2 ὁριακοὶ κύκλοι, συνάγει ὅτι δύναται νὰ οἰκοδομηθῇ μία Γεωμετρία ἀκριβῶς ἀντίστοιχος τῆς συνήθους, ἐν ᾗ οἱ ὁριακοὶ κύκλοι ἐμφανίζονται εἰς τὴν θέσιν τῶν εὐ-



Σχ. 1.

θειῶν. Ἐν γένει συνάγει, ὅτι ἐπὶ τῆς ὁριακῆς σφαίρας ἰσχύει ἡ εὐκλείδειος Γεωμετρία καὶ ἰδιαιτέρως ἡ συνήθης ἐπίπεδος Τριγωνομετρία.

Τὰς ἰδιότητας αὐτὰς καὶ μίαν ἰδιότητα τῶν ὁμοκέντρων κύκλων μὲ ἄπειρον ἀκτῖνα μεταχειρίζεται ὁ Lobatschevskij, διὰ νὰ ἐξαγάγῃ τοὺς τύπους τῆς νέας ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας. Οἱ τελευταῖοι συμπίπτουν μὲ τοὺς συνήθεις τύπους διὰ τὴν σφαῖραν, ὅπου τὰ στοιχεῖα τῶν τριγώνων μετροῦνται διὰ γωνιῶν.

Ἀξιομνημόνευτα πορίσματα τοῦ Lobatschevskij ἐξαχθέντα ἐκ τῶν τύπων του εἶνε τὰ ἑξῆς:

1) Διὰ τρίγωνα μὲ πλευρὰς πολὺ μικρὰς (ἀπείρως μικράς), δύναταί τις ἐν τῇ θέσει τῶν τύπων τῆς φανταστικῆς Τριγωνομετρίας, τοὐλάχιστον μέχρις ἀπειροστῶν ἀνωτέρας τάξεως, νὰ θέσῃ τοὺς κοινοὺς τριγωνομετρικοὺς τύπους.

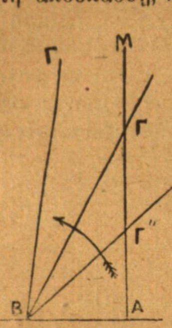
2) Ἡ ἀλλαγὴ τῶν πλευρῶν α, β, γ διὰ τῶν φανταστικῶν πλευρῶν αi, βi, γi μετατρέπει τοὺς τύπους τῆς φανταστικῆς Τριγωνομετρίας εἰς τοὺς τύπους τῆς σφαιρικῆς.

3) Ἐὰν εἰσαγάγωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἢ ἐν τῷ χώρῳ ἓν σύστημα συντεταγμένων, ὅμοιον πρὸς τὸ σύνηθες καρτεσιανόν, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας τὰ μήκη τῶν καμπύλων, τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τοὺς ὄγκους τῶν σωμάτων.

Τῆς δόξης διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μὴ εὐκλειδείου Γεωμετρίας [1]) μετέχει καὶ ὁ Οὗγγρος I. Bolyai

[1]) Ὁ ὅρος οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸν Gauss, ὅστις μετεχειρίζετο αὐτὸν ἐν τῇ στενῇ του σημασίᾳ. Καταλληλοτέρα φαίνεται ἡ λέξις «*Παγγεωμετρία*» καθ' ἣν δέχεταί τις καὶ τὰς τρεῖς ὑποθέσεις περὶ τῆς Γεωμετρίας, τὰς ὁποίας κατωτέρω ἀναφέρομεν, καὶ συνάγει λογικῶς τὰ εἰς ἑκάστην ἀντιστοιχοῦντα πορίσματα. Ἐν τῇ μὴ εὐκλειδείῳ Γεωμετρίᾳ δὲν δεχόμεθα ὅτι ἡ ὑπόθεσις τοῦ Εὐκλείδου εἶνε ψευδής, ἀλλ' ἁπλῶς λέγομεν ὅτι αὕτη δὲν εἶνε ἀπαραιτήτως ἀναγκαία.

ἀξιωματικὸς τοῦ αὐστριακοῦ στρατοῦ (1802-1860). Οὗτος ὁρίζει ὡς ἑξῆς τὰς παραλλήλους. Θεωρεῖ τὴν ὡς πρὸς τὴν ΑΜ διὰ τοῦ Β διερχομένην παράλληλον σχ. (2) ὡς ὁριακὴν θέσιν μιᾶς τεμνούσης ΒΓ, ἥτις στρέφεται καθ' ὡρισμένην φορὰν περὶ τὸ Β, δηλαδὴ θεωρεῖ τὴν ΒΓ ὡς παράλληλον τῆς ΑΜ, τὴν θέσιν τῆς ΒΓ μόλις αὕτη ἀποσπασθῇ, κατὰ τὴν ἔκφρασιν



Σχ. 2.

τοῦ Szász [1]) τῆς ΑΜ. Ὁ Bolyai ὠνόμασε τὴν παράλληλον ταύτην *ἀσυμπτωτικὴν παράλληλον*.

Τὰ οὐσιώδη συμπεράσματα εἰς τὰ ὁποῖα κατέληξεν ὁ Bolyai εἶνε:

1) Ὁρισμὸς τῶν παραλλήλων καὶ ἰδιότητες αὐτῶν ἀνεξάρτητοι τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου.

2) Κύκλος καὶ σφαῖρα μὲ ἀντιστοίχους ἀπείρους ἀκτῖνας. Ἡ Γεωμετρία ἐπὶ τῆς σφαίρας μὲ ἄπειρον ἀκτῖνα συμπίπτει μὲ τὴν συνήθη ἐπίπεδον Γεωμετρίαν.

3) Ἡ σφαιρικὴ Τριγωνομετρία εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ 5ου ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.

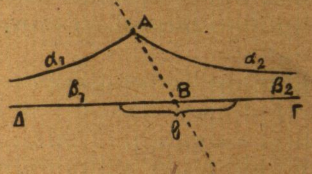
4) Ἐπίπεδος Τριγωνομετρία ἐν τῇ μὴ εὐκλειδείῳ περιπτώσει. Ἐφαρμογὴ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων.

Ἐνῷ ὁ Lobatschevskij ἀφιερώθη εἰς τὴν φανταστικὴν Γεωμετρίαν καὶ ἰδίᾳ εἰς τὸ ἀναλυτικὸν περιεχόμενον αὐτῆς, ὁ Bolyai ἐπεξειργάσθη θεμελιωδέστερον τὸ πρόβλημα τῆς ἐξαρτήσεως ἢ μὴ τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων ἀπὸ τοῦ εὐκλειδείου αἰτήματος. Ἐν ᾧ ὁ πρῶτος ἐπεδίωξε κυρίως νὰ οἰκοδομήσῃ σύστημα Γεωμετρίας, ἀπορρίπτων τὸ προβληματικὸν ἀξίωμα, ὁ δεύτερος ἔφερεν εἰς φῶς τὰς προτάσεις καὶ τὰς κατασκευάς, αἵτινες ἐν τῇ συνήθει Γεωμετρίᾳ δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τοῦ αἰτήματος. Τὰς τοιαύτας προτάσεις εὑρίσκει τις, ἀντιπαραλληλίζων τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου πρὸς τὴν τοῦ Lobatschevskij. Πᾶν ὅ,τι ἔχουν κοινὸν καὶ αἱ δύο Γεωμετρίαι ἀνήκει εἰς τὴν καλουμένην ἀπόλυτον Γεωμετρίαν.

Τὸ ἀξίωμα τῆς Γεωμετρίας Lobatschevskij-Bolyai τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων τῆς εὐκλειδείου Γεωμετρίας διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

«Ἐὰν β εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα καὶ Α σημεῖόν τι, μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς, διέρχονται πάντοτε διὰ τοῦ Α δύο ἡμιακτῖνες α_1, α_2, αἵτινες δὲν ἀποτελοῦν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ αἵτινες δὲν τέμνουν τὴν εὐθεῖαν β, ἐν ᾧ ἑκάστη ἡμιευθεῖα, κειμένη ἐν τῷ γωνιακῷ χώρῳ τῷ σχηματιζομένῳ ὑπὸ τῶν α_1, α_2, καὶ ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ Α, τέμνει τὴν εὐθεῖαν β.» [1])

Τὴν εὐθεῖαν β χωρίζομεν ἀπό τινος σημείου της Β εἰς δύο ἡμιευθείας β_1, β_2, καὶ ἂς κεῖνται ἡ α_1, β_1 πρὸς τὸ ἓν μέρος ἡ δὲ α_2, β_2 πρὸς ἄλλο τῆς εὐθείας Α Β. Οὕτω θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα α_1 εἶναι παράλληλος τῇ β_1 καὶ ἡ α_2 τῇ β_2. Ὁμοίως λέγομεν, ὅτι αἱ δύο ἡμιευθεῖαι α_1, α_2, εἶνε παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ β καὶ ἀκόμη ὅτι καθεμία ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοίχως ἀνήκει ἡ α_1 καὶ α_2 εἶναι παράλληλος τῆς β.



Σχ. 3.

Ἀλλὰ τὸ σύστημα τοῦ Lobatschevskij-Bolyai δὲν ἐξαντλεῖ τελείως τὸ πεδίον τῆς ἀναπτύξεως τῆς μὴ εὐκλειδείου Γεωμετρίας. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει ἄπειρον μῆκος. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τοὐναντίον, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἔχει μῆκος πεπερασμένον, καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ φθάνομεν εἰς ἓν νέον σύστημα μὴ εὐκλειδείου Γεωμετρίας, διαφόρου τῶν προηγουμένων, καθὼς ἀπέδειξεν ὁ Β. Riemann. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τοῦ Riemann δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καμμίαν παράλληλον ἀπό τινος σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας τινὸς α πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Τὰ τρία συστήματα τῆς Γεωμετρίας, τὸ πρῶτον στηριζόμενον ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τοῦ Εὐκλείδου, τὸ δεύτερον ἐπὶ τῆς τοῦ Bolyai-Lobatschevskij καὶ τὸ τρίτον ἐπὶ τῆς τοῦ Riemann χαρακτηρίζονται ὑπὸ τοῦ Klein [2]) μὲ τὰ ὀνόματα «*Γεωμετρία παραβολική*» «*Γεωμετρία ὑπερβολική*» καὶ «*Γεωμετρία ἐλλειπτική*». Δυνάμεθα νὰ τὰς χαρακτηρίσωμεν καὶ ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ἑνὸς οἱουδήποτε εὐθυγράμμου τριγώνου· ἐν τῇ παραβολικῇ Γεωμετρίᾳ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, ἐν τῇ ὑπερβολικῇ εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, ἐν δὲ τῇ ἐλλειπτικῇ μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν. [3]) Αἱ τρεῖς αὗται περιπτώσεις ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ τρία εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν ὁποίων τὸ εἶδος ὁρίζεται ἐκ τοῦ εἴδους τῆς σταθερᾶς καμπυλότητός των. Πράγματι δύναταί τις νὰ κατασκευάσῃ ἐπιφανείας μὲ σταθερὰν καμπυλότητα, ἐν ᾧ διακρίνει τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις:

$$\text{I) } k=o, \qquad \text{II) } k>o, \qquad \text{III) } k<o$$

[1]) Πρβ. R. Bonola-H. Liebmann, Die Nichteuclidische Geometrie, 1908 σ. 101.

[1]) Πρβ. Hilbert ὡς ἀν. σ. 160.
[2]) F. Klein, Math. Ann. 4 (1871) σ. 577, 606, 607, 611.
[3]) Πρβ. Encyclopédie des sc. math. T. III. v. t. fasc. 1 σ. 43-7.

ὅπου k παριστάνει τὴν καμπυλότητα. Ἐὰν $k=o$, ἔχομεν ὡς ὑπόδειγμα τὸ ἐπίπεδον. Ἐὰν $k>o$, ἔχομεν ἐπιφανείας ἀναπτυκτὰς ἐπὶ μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐχούσης ἀκτῖνα $\sqrt{1:k}$, καὶ ὡς ὑπόδειγμα τοιαύτης ἐπιφανείας ἔχομεν τὴν σφαῖραν. Ἐὰν εἶνε $k<o$, ἔχομεν τὰς ἐπὶ τῆς ψευδοσφαίρας ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας, ταύτην δὲ ἔχομεν καὶ ὡς ὑπόδειγμα τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν.[1] Ἀφ' ἑτέρου ὁ Gauss ἔδειξεν, ὅτι ἐπὶ ἐπιφανείας ἐχούσης σταθερὰν καμπυλότητα k ἢ μεταβαλλομένην ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖόν της, τὸ *διπλοῦν ὁλοκλήρωμα*:

$$\int k d\sigma,$$

ἐκτεινόμενον ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς γεωδαιτικοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶνε ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ὀρθῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.[2]

Ἤτοι:

$$\int_{AB\Gamma} k d\sigma = A+B+\Gamma-\pi.$$

Ἐὰν τὸν τύπον τοῦτον ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ ἐπιφανειῶν σταθερᾶς καμπυλότητος εὑρίσκομεν:

I). Ἐὰν $k=o$,

$$\int_{AB\Gamma} k d\sigma = o, \text{ ἐπομένως } A+B+\Gamma=\pi$$

ὅπου Α,Β,Γ φανερώνουν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου. Ἤτοι:

«Ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν αἵτινες ἔχουν καμπυλότητα μηδὲν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς γεωδαιτικοῦ τριγώνου εἶνε ἴσον μὲ δύο ὀρθάς».

II) Ἐὰν $k=\frac{1}{\lambda^2}>o$,

θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{AB\Gamma} k d\sigma = \frac{1}{\lambda^2}\int_{AB\Gamma} d\sigma.$$

Ἀλλὰ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{AB\Gamma} d\sigma$$

δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἔστω δὲ τοῦτο E, ὅτε θὰ εἶνε

$$\frac{E}{\lambda^2} = A+B+\Gamma-\pi,$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι:

$$A+B+\Gamma>\pi, \quad E=\lambda^2(A+B+\Gamma-\pi),$$

ἤτοι: *«Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς γεωδαιτικοῦ τριγώνου ἐπὶ ἐπιφανείας σταθερᾶς θετικῆς καμπυλότητος εἶνε μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἀνάλογον τῆς διαφορᾶς $A+B+\Gamma-\pi$»*.

III). Ἐὰν εἶνε:

$$k=-\frac{1}{\lambda^2},$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{AB\Gamma} k d\sigma = -\frac{1}{\lambda^2}\int_{AB\Gamma} d\sigma = -\frac{E}{\lambda^2},$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι:

$$\frac{E}{\lambda^2} = \pi-(B+B+\Gamma),$$

ἤτοι ὅτι: *«Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς γεωδαιτικοῦ τριγώνου κειμένου ἐπὶ ἐπιφανείας ἐχούσης σταθερὰν ἀρνητικὴν καμπυλότητα, εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶνε ἀνάλογον τῆς διαφορᾶς $\pi-(A+B+\Gamma)$»*.

Ἡ Γεωμετρία τῶν ἐπιφανειῶν μὲ καμπυλότητα μηδὲν ἢ σταθερὰν καὶ θετικὴν ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἐπίπεδον εὐκλείδειον καὶ τὴν σφαιρικήν. Ἐὰν εἰς τοὺς διὰ τὴν σφαῖραν τριγωνομετρικοὺς τύπους διατηρήσωμεν τὰς γωνίας, τὰς δὲ πλευρὰς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ i, λαμβάνομεν τὰς σχέσεις τὰς ὁποίας πληροῦν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς γεωδαιτικοῦ τριγώνου ἐπὶ ἐπιφανείας ἐχούσης σταθερὰν ἀρνητικὴν καμπυλότητα. Οἱ τύποι οὗτοι τῆς ψευδοσφαιρικῆς Τριγωνομετρίας συμπίπτουν μὲ τοὺς τῆς Γεωμετρίας τοῦ Lobatschevskij - Bolyai.[1] Ἐν συμπεράσματι: *ὁ εὐκλείδειος χῶρος ἔχει καμπυλότητα μηδέν, ὁ τοῦ Lobatschevskij - Bolyai ἀρνητικήν, ὁ δὲ τοῦ Riemann θετικήν.*

Τὸ εὐκλείδειον γεωμετρικὸν οἰκοδόμημα μετὰ τῶν συμπληρώσεών του, τοῦ ὁποίου ἱκανὰ στοιχεῖα εἶνε γνωστὰ ἐκ τῶν σχολικῶν σπουδῶν, ἀπετέλεσε κατ' ἀρχὰς μίαν συλλογὴν διδακτικῶν προτάσεων. Ἀλλὰ βραδύτερον μὲ τὰς σπουδαίας προόδους τοῦ κλάδου τούτου τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, τὰς ὀφειλομένας εἰς τὸν Monge, Garnot, Poncelet, Steiner καὶ ἄλλων, ἐχωρίσθη βαθμηδὸν εἰς δύο περιοχάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη διακρίνεται διὰ τοῦ ὅτι ἐξετάζεται ἐν αὐτῇ μόνον ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν, ἐν δὲ τῇ ἄλλῃ ἐξετάζονται κυρίως αἱ μετρικαὶ ἰδιότητες τῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν. Ὁ χωρισμὸς οὗτος ἐγένετο πράγματι μόλις κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα, τὸ δὲ πρῶτον βιβλίον τῆς

[1] Ἡ ψευδοσφαῖρα εἶνε ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ μεσημβρινοῦ της ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς z καὶ τὸν ἐπ' αὐτῆς κάθετον x εἶνε:

$$Z=\lambda\log\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-x^2}}{x}-\sqrt{\lambda^2-x^2},$$

ὅπου

$$k=-\frac{1}{\lambda^2}, \quad k=\text{καμπυλότης}$$

[2] Πρβ. L. Bianchi, Lezioni sulla geometria differenziale, κεφ. V.

[1] Ἡ σπουδὴ τῶν ἐπιφανειῶν μὲ σταθερὰν ἀρνητικὴν καμπυλότητα ἐγένετο τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ F. Minding (1806-85). Βλ. J. Crelle Bd. XIX. σ. 370, καὶ Minding, Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen: J. Crelle Bd. XX. σ. 323-7.

Γεωμετρίας τῆς θέσεως (Geometrie der Lage) ἐξεδόθη τὸ 1847 (Nürnberg ὑπὸ τοῦ von Standt).

Ἡ Γεωμετρία τῆς θέσεως ἢ νεωτέρα συνθετικὴ Γεωμετρία εἶνε λοιπὸν δημιούργημα τοῦ λήξαντος αἰῶνος, πρὸ ὀλίγων δὲ μόλις δεκαετηρίδων ἔλαβεν ἴσην θέσιν μὲ τὴν παλαιοτέραν, ἡ δὲ ἀνάπτυξις αὐτῆς ὀφείλεται κυρίως εἰς τοὺς μαθηματικοὺς Poncelet, Cayley, Möbius, I. Steiner, Chasles, von Staudt, ἐὰν περιορισθῶμεν εἴς τινας διασήμους μόνον τῶν εἰς τὸ πεδίον τοῦτο τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐργασθέντων. Ἀπὸ τῆς συνθετικῆς Γεωμετρίας τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, περὶ τῆς ὁποίας ἀμέσως κατωτέρω θὰ κάμω λόγον, διακρίνεται κυρίως ἡ καθαρὰ Γεωμετρία τῆς θέσεως, κατὰ τὸ ὅτι αὕτη δὲν κάμνει ἀπολύτως καμμίαν χρῆσιν τῆς ἐννοίας τοῦ μέτρου, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν παλαιοτέραν Γεωμετρίαν, ἥτις δύναται νὰ κληθῇ Γεωμετρία τοῦ μέτρου. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τῆς θέσεως δὲν γίνεται λόγος περὶ τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος, περὶ ὀρθῆς γωνίας, περὶ καθέτου, περὶ λόγων ἢ ἀναλογιῶν, περὶ μετρήσεως μήκους, ἐπιφανείας, ὄγκου κλπ. καθὼς ἐπίσης περὶ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἐξισώσεων γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν. Διότι ὅλα αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα τῆς ἐρεύνης τῆς παλαιᾶς Γεωμετρίας προϋποθέτουν μέτρησιν. Ἓν τῶν κυριωτέρων προβλημάτων τῆς διδασκαλίας τῆς Γεωμετρίας εἶνε νὰ ἐξασκήσῃ καὶ ἀναπτύξῃ τὰς παραστατικὰς δυνάμεις τοῦ σπουδαστοῦ, καὶ τοῦτο ἐπιτυγχάνεται περισσότερον διὰ τῆς πορείας, τὴν ὁποίαν ἐχάραξεν ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἐρεύναις του καὶ ἰδίᾳ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τῆς θέσεως ὁ von Staudt. Οὗτος ἀποκλείει τοὺς ὑπολογισμούς, τοὺς κατὰ μᾶλλον ἢ ἧττον πολυπλόκους, τῶν ὁποίων δὲν ἔχει ἀνάγκην ἡ παραστατικὴ δύναμις, ἐπιτυγχάνει δὲ τὴν γνῶσιν τῶν Γεωμετρικῶν ἀληθειῶν διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας ἐποπτείας, ἐφ' ἧς στηρίζει τὴν Γεωμετρίαν τῆς θέσεως. Εἶνε φανερόν, ὅτι ἡ Γεωμετρία τῆς θέσεως βοηθεῖται ὡς πρὸς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὑπὸ τῆς «*παραστατικῆς Γεωμετρίας*» τῆς ὁποίας κύριον ἔργον εἶνε νὰ παραστήσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὰ σχήματα τοῦ χώρου εἰς τρόπον, ὥστε τῇ βοηθείᾳ τῆς Γεωμετρίας τοῦ ἐπιπέδου νὰ δυνηθῇ νὰ λύσῃ προβλήματα τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων. Ἀλλὰ καὶ ἡ Γεωμετρία τῆς θέσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προπαίδεια διὰ τὴν σπουδὴν τῆς παραστατικῆς Γεωμετρίας.

Πρὸς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν εὑρίσκεται ἡ καθαρὰ Γεωμετρία εἰς ὡρισμένην τινὰ ἀντίθεσιν, ὅσον ἀφορᾷ τὴν μέθοδόν της, ἥτις εἶνε γνωστὴ ἐκ τῆς εὐκλειδείου Γεωμετρίας ὡς συνθετικὴ μέθοδος. Ἡ νέα συνθετικὴ Γεωμετρία ἀναχωρεῖ ἀπό τινος μικροῦ ἀριθμοῦ γεωμετρικῶν στοιχείων καὶ τῶν ἀπὸ τούτων συντιθεμένων γεωμετρικῶν σχηματισμῶν, καλουμένων θεμελιωδῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν πρώτης βαθμίδος. Εἶνε ταῦτα τὸ σημεῖον, ἡ εὐθεῖα, καὶ τὸ *ἐπίπεδον*, ἡ σημειοσειρά, ἡ ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων καὶ ἡ ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων. Σχέσεις τινὲς μεταξὺ αὐτῶν ὁδηγοῦν εἰς γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς δευτέρας βαθμῖδος εἰς τοὺς ὁποίους ὑπάγονται καὶ αἱ κωνικαὶ τομαί, σπουδάζονται δ' εὐκόλως αἱ κυριώταται ἰδιότητες τῶν στοιχείων τούτων. Ἀπὸ τῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν τῆς δευτέρας βαθμῖδος δυνάμεθα νὰ χωρήσωμεν ἀκολούθως πρὸς νέους σχηματισμοὺς κ. ὅ. κ.

Περιοριζόμενοι ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς καθαρᾶς Γεωμετρίας, δὲν δυνάμεθα εἰ μὴ νὰ παραιτηθῶμεν ἐν τῇ ἐρεύνῃ τῆς Γεωμετρίας τῆς χρήσεως τῶν ἀγαθῶν τῆς Ἀνωτέρας Ἀναλύσεως, τοῦ ἰσχυροῦ καὶ σπουδαιοτάτου κλάδου τῆς νεωτέρας *Μαθηματικῆς*, ἐπειδὴ δὲν κάμνομεν χρῆσιν τῆς μετρήσεως.

Ἂς εἴδωμεν τέλος τὴν σημασίαν τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Ἡ σύνδεσις τῆς Ἀλγέβρας μετὰ τῆς Γεωμετρίας ἦτο παρεσκευασμένη ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει σειρὰν προτάσεων, αἵτινες δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς γεωμετρικὴ ἑρμηνεία ἀλγεβρικῶν προτάσεων. Ἡ πορεία τοῦ Ἀρχιμήδους ἐν τῇ ἐξαγωγῇ τῆς ῥίζης φαίνεται, ὅτι ἔχει τὴν πηγήν της εἰς παλαιοτέρας γεωμετρικὰς μεθόδους. Ἐν γένει, πολὺ πρὸ τοῦ Διοφάντου (300 μ. Χ.) εἶχεν ἀρχίσει νὰ ἀναπτύσσεται μία ἀριθμητικοποίησις τῆς Γεωμετρίας. Οἱ Ἄραβες συνέδεσαν βραδύτερον τὴν γεωμετρικὴν μέθοδον τῶν Ἑλλήνων μὲ τὴν καθαρὰν Ἄλγεβραν, τὴν ὁποίαν παρέλαβον παρὰ τῶν Ἰνδῶν, καὶ κατώρθωσαν οὕτω νὰ εὕρουν μίαν λύσιν διὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, τῶν ὁποίων τὴν καθαρὰν ἀλγεβρικὴν λύσιν ἐθεώρουν ὡς ἀδύνατον.

Ἰδιαιτέρως διακρίνει τις τὴν δεξιότητα, τὴν ὁποίαν εἶχον οἱ μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ὥστε νὰ ἀνάγουν εἰς τὴν λύσιν ἁπλῶν ἐξισώσεων τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων, κατασκευῶν, κλπ. Οὕτω ἐγένετο ἰδίᾳ χρῆσις τῆς Ἀλγέβρας, ἵνα ἐπιτευχθῇ ἡ λύσις γεωμετρικῶν προβλημάτων, ἐν ᾧ ἀφ' ἑτέρου ὁ Cardano καὶ Tartaglia κατέφευγον εἰς γεωμετρικὰς παραστάσεις, διὰ νὰ ἐξηγήσουν τὴν ὀρθότητα ἀλγεβρικῶν τύπων ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν ἐξισώσεων τρίτου βαθμοῦ. Τοιουτοτρόπως ἡ ἀμοιβαία ὑποστήριξις τῆς Ἀλγέβρας καὶ Γεωμετρίας διεμόρφωσε τὴν ἀλγεβρικὴν Γεωμετρίαν. Ὁ Καρτέσιος (1596-1650) συνέδεσε τὰ δύο εἴδη τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης. Ἐν τῷ ἔργῳ του «Application de l'Algébre à la théorie des courbes» καὶ Géometrie (1637) δεικνύει τὴν στενὴν καὶ ἐναλλάσσουσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν πράξεων τῆς Ἀλγέβρας καὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ πραγματεύεται ἀλγεβρικῶς προβλήματα γεωμετρικά. Θεωρεῖται οὗτος ὁ δημιουργὸς τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Τὸ ἰδιάζον τῆς μεθόδου τῶν συντεταγμένων, ἐν ᾗ ἡ μὲν θέσις σημείου ἐπὶ γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας ἢ ἐν τῷ χώρῳ ὁρίζεται δι' ἀριθμῶν, ἐδημιουργήθη ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου, συνίσταται δὲ ἡ σημασία του καὶ εἰς τοῦτο. Ὅτι αὕτη παρέχει εἰς τὰς λύσεις τῶν διαφόρων γεωμετρικῶν ζητημάτων τὸν χαρακτῆρα τῆς γενικότητος, τῆς ὁποίας ἐν πολλοῖς ἐστεροῦντο μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Καρτεσίου. Παρ' ἅπασι τοῖς παλαιοτέροις τοῦ Καρτεσίου γεωμέτραις ὑπῆρχεν ἡ τάσις νὰ ἐξετάζουν μόνον τὰς ἰδιαιτέρας ἰδιότητας καμπύλων τινῶν. Ἀλλ' ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφήρμοσεν ὁ Καρτέσιος εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἔδωκεν εἰς αὐτὴν χαρακτῆρα τοῦ ὁποίου ἐστερεῖτο μέχρι τῆς ἐποχῆς του. Διότι μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς τύπου ἐνίοτε εἶνε δυνατὸν νὰ ἐκφρασθοῦν ἰδιότητες ὁλοκλήρου τάξεως καμπύλων. Διὰ τῆς νέας ταύτης τάσεως ἡ Γεωμετρία ἀνεπτύχθη ταχέως, ἡ δὲ ἀνάπτυξίς της παρέσχεν ἀναμφισβήτητον ὠφέλειαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν λοιπῶν κλάδων τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἐξαιρετικῶς περισσότερον ἀνεπτύχθη ἡ Ἄλγεβρα, τῆς ὁποίας αἱ συμβολικαὶ παραστάσεις ἤρχισαν νὰ λαμβάνουν μορφὴν ἁπλουστέραν καὶ εὐληπτοτέραν. Μία τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Γεωμετρίας εἰς τὴν Ἄλγεβραν εἶνε ἡ ἑρμηνεία τῆς σημασίας καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀρνητικῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων, περὶ τῶν ὁποίων οἱ ἀρχαῖοι μαθηματικοὶ εἶχον ἀσαφῆ ἰδέαν, καὶ διὰ τοῦτο ἀπέφευγον αὐτὰς μετὰ προσοχῆς. Ἀρξαμένη οὕτω ἡ ἐκ παραλλήλου ἀνάπτυξις τῆς Γεωμετρίας καὶ Ἀλγέβρας ἀπὸ τοῦ Καρτεσίου, ἐξακολουθεῖ μέχρι σήμερον, καὶ ἡ ἀνάπτυξις τῆς μιᾶς εἶνε στενῶς συνδεδεμένη μετὰ τῆς ἀναπτύξεως τῆς ἑτέρας. Ἡ μέθοδος τοῦ Καρτεσίου ὑπῆρξεν ἡ προπαρασκευαστικὴ ὁδὸς διὰ τὴν λαμπρὰν ἀνακάλυψιν τοῦ Leibnitz καὶ τοῦ Νεύτωνος, δηλαδὴ διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ.

Ὁλόκληρος ἡ ἐπιστήμη τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας θεμελιοῦται ἐπὶ τῆς συνδέσεως, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ ἐξισώσεώς τινος καὶ ἑνὸς τόπου. Ἐὰν π. χ. καμπύλη τις ὁρίζεται διά τινος γεωμετρικῆς ἰδιότητος, ἡ ἀναλυτικὴ Γεωμετρία ἐπιζητεῖ νὰ ἐξαγάγῃ ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις, αἵτινες θὰ ἐπαληθεύωνται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τῆς καμπύλης. Ἐὰν τοὐναντίον δοθῇ ἐξίσωσίς τις, ἐπιζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τόπον, τὸν ὁποῖον παριστάνει καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς γεωμετρικὰς ἰδιότητας αὐτοῦ. Κατὰ ταῦτα ἐξίσωσίς τις παριστάνει ἐν γένει τόπον τινά, καὶ τόπος τις παριστάνεται ὑπὸ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων. Ἡ ἐλευθέρα χρῆσις τῆς Ἀλγέβρας ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἔσχεν ὡς συνέπειαν τὴν εἰσαγωγὴν τῶν φανταστικῶν γεωμετρικῶν στοιχείων, τοῦ φανταστικοῦ σημείου, τῆς φανταστικῆς εὐθείας, τοῦ φανταστικοῦ ἐπιπέδου καθὼς καὶ τῶν κατ' ἐκδοχὴν γεωμετρικῶν στοιχείων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ καθ' ὑπόστασιν τοιαῦτα, οἷα εἶνε τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον, κοινὸν σημεῖον δύο παραλλήλων εὐθειῶν, ἡ ἐπ' ἄπειρον κοινὴ εὐθεῖα δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὸ ἐπ' ἄπειρον κοινὸν ἐπίπεδον παραλλήλων ἐπιφανειῶν. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν νέων τούτων στοιχείων εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἐγενικεύθησαν πλεῖσται προτάσεις, διὰ τὰς ὁποίας ἄλλως θὰ εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ ἔχωμεν μερικὰς περιπτώσεις. Οὕτω π. χ. ἔχομεν τὴν πρότασιν ὅτι:

«*Τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνει ἐπιφάνειαν βαθμοῦ μ εἰς μ σημεῖα πράγματικὰ ἢ φανταστικά, διακεκριμένα ἢ συμπίπτοντα*». Ἐν ἢ περισσότερα τῶν σημείων τούτων δύνανται νὰ κεῖνται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.

Ἡ σπουδὴ τῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων των, ἡ σπουδὴ τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν εἶνε ἤδη ζητήματα τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, τῆς ὁποίας τόση μεγάλη εἶνε ἡ ἀνάπτυξις, ὥστε ὡρισμέναι περιοχαὶ αὐτῆς ἀπετέλεσαν ἰδίους κλάδους ἐπιστημονικούς· οὕτως ἐπὶ παραδείγματι ἡ διαφορικὴ ἢ ἀπειροστικὴ Γεωμετρία, ἡ θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν, ἡ θεωρία τῶν ἐπιπέδων καμπύλων ἢ ἡ σπουδὴ ἐπιφανειῶν ὡρισμένου τινὸς βαθμοῦ, ἡ σπουδὴ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ Riemann, ἡ προβολικὴ Γεωμετρία ἐν τῷ χώρῳ τῶν ν διαστάσεων, θεωροῦνται ἐνίοτε ὡς ἰδιαίτεροι κλάδοι.

Ἡ ἀναλυτικὴ Γεωμετρία δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ στήριγμα, ὁ ἄξων ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται πᾶς κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.[1])

Ἄνευ αὐτῆς θὰ ἦτο ἴσως διάφορος σήμερον ἡ κατάστασις τῆς ἐπιστήμης. Ἴσως θὰ εἶχεν ἐξευρεθῇ ἄλλη ὁδός, ὁδηγοῦσα πρὸς τὰς ἀνακαλύψεις καὶ πρὸς τὴν πρόοδον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἡ ἐν τῷ σταδίῳ τῆς ἀναπτύξεώς της εὑρισκομένη ἀκόμη νεαρὰ θεωρία τῶν συνόλων (Ensembles, Mengenlehre) δύναται νὰ μᾶς βεβαιώσῃ περὶ αὐτοῦ. Ὁ νεαρὸς αὐτὸς βλαστὸς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, τοῦ ὁποίου τὰ πρῶτα σπέρματα, ἐπιστημονικῶς διατεταγμένα πρὸς τὴν σημερινὴν κατάστασιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, εὑρίσκομεν ἐν ἀρχῇ τοῦ πρώτου τόμου τοῦ κλασικοῦ ἔργου τοῦ Jordan: «*Cours d'Analyse*» ἀνεπτύχθη κυρίως ὑπὸ τῶν G. Cantor, *Bolzano, König, Zermelo, Lebesque, Peano, Borel, Schönflies, Hausdorf*, Καραθεοδωρῆ, ἐὰν περιορισθῶμεν εἴς τινας τῶν διασημοτέρων, καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει περισσοτέραν συγγένειαν μὲ τὴν Γεωμετρίαν, χωρὶς νὰ παύῃ τοῦ νὰ συνδέεται στενώτατα καὶ μὲ τὴν Ἀνάλυσιν[2]). Ὁ κλάδος οὗτος ἐν τῇ ἀναπτύξει του παρέσχεν ἀπὸ τοῦδε οὐσιώδη ἀποτελέσματα, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι ἐπ' αὐτοῦ θὰ στηριχθῇ, ἢ μᾶλλον ἤρξατο στηριζομένη, ἡ νεωτέρα Ἀνάλυσις. Αἱ ἀνακαλύψεις τοῦ Lebesque, Borel, τοῦ Danjoy, κ. ἄ. αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων, καθὼς καὶ ἡ μέτρησις τῶν γραμμῶν, ἥτις τείνει ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ συνόλου τῶν σημείων, μᾶς πείθουν περὶ τῆς σπουδαιότητος τῆς ἐν λόγῳ θεωρίας. Ἰδοὺ ὁ ὁρισμὸς τῆς γραμμῆς, τὸν ὁποῖον δίδει ὁ Cantor ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τοῦ συνόλου τῶν σημείων. Καλεῖ οὗτος *γραμμὴν* «*ἐν σύνολον σημείων συνεχές, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ἐσωτερικόν τι σημεῖον*».

Λέγομεν ὅτι σημεῖόν τι εἶνε ἐσωτερικὸν εἰς ἓν σύνολον σημείων, ἐὰν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν ρ τοιοῦτον, ὥστε πᾶν σημεῖον, κείμενον εἰς ἀπόστασιν μικροτέραν τοῦ ρ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, εἶναι σημεῖον τοῦ πλήθους.

[1]) Ἐξαιρουμένου μέχρι τινὸς τοῦ τῆς θεωρίας τῶν Ἀριθμῶν.

[2]) Πρβ Π. Ζερβοῦ, σχέσεις τῶν Μαθηματικῶν μὲ τὰς λοιπὰς ἐπιστήμας καὶ τὴν Φιλοσοφίαν, Bulletin de la Société mathématique de Grèce I, 1 σ. 93.

Λέγομεν δὲ ὅτι ἓν σύνολον εἶνε συνεχές, ὅταν δοθέντων δύο σημείων τοῦ συνόλου, δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν μεταξὺ τῶν σημείων τούτων μίαν σειρὰν σημείων τοῦ συνόλου τοιούτων, ὥστε αἱ διαδοχικαὶ ἀποστάσεις τῶν μὲν ἀπὸ τῶν δὲ νὰ εἶνε μικρότεραι παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὰ ἀξιώματα τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς γραμμῆς εἶνε: ὁ ὁρισμὸς τοῦ σημείου, τοῦ συνόλου τῶν σημείων, ὁ ὁρισμὸς τῶν ὁρικῶν σημείων, τῆς ἀποστάσεως καὶ τῆς συγκρίσεως τῶν ἀποστάσεων σημείων. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὁ ὁρισμὸς τοῦ Cantor δὲν εἶνε ἄλλο τι ἢ ὁ ὁρισμὸς τοῦ Εὐκλείδου: «*γραμμὴ ἐστι μῆκος ἀπλατές,*» ἀλλὰ παρουσιάζεται μετά τινος ἀκριβείας, ἥτις ἐλλείπει ἐκεῖ, καὶ ἥτις ἔλλειψις ὄντως δὲν ἱκανοποιεῖ τὸν νοῦν.

Τοιαύτη ἐν συντόμῳ ὑπῆρξεν ἡ ἀνάπτυξις τῆς Γεωμετρίας διὰ μέσου τῶν αἰώνων. Ὁ μακροχρόνιος πόλεμος ἀνέκοψε βεβαίως τὴν πρόοδον αὐτῆς, ὡς καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν, ὅσαι δὲν σχετίζονται ἀμέσως πρὸς τὸν ἀπηνῆ Ἄρην. Χιλιάδες ἐπιστημόνων, οἵτινες ἐν τῇ ἠρεμίᾳ τοῦ σπουδαστηρίου νέους καθ' ἑκάστην προσέθετον λίθους εἰς τὸ ὁλονὲν ὑψούμενον οἰκοδόμημα τῆς Ἀληθείας, εὗρον σκληρὸν θάνατον εἰς τὰ πεδία τῶν μαχῶν. Ἀλλ' ἤδη ἡ Εἰρήνη ἐσάλπισε τὴν ἄφιξίν της, καὶ τὰ πάντα προοιωνίζονται αὐτὴν σταθερὰν καὶ μακράν. Πρέπει νὰ ἐλπίσωμεν ὅτι, ἀποκαθισταμένης τῆς γαλήνης, ὁ ἀνθρώπινος νοῦς θὰ ὁρμήσῃ μετὰ νέας ζέσεως πρὸς τὴν θεωρίαν καὶ τὴν ἔρευναν τῶν ὑψίστων προβλημάτων τῆς ἐπιστήμης, πρὸς τοὺς πνευματικοὺς αὐτοὺς ἀγῶνας, οἵτινες διὰ τοὺς φιλοσοφοῦντας εἶνε θαυμαστότεροι καὶ ἀνώτεροι ἀπὸ τοὺς πολεμικούς, διότι ἀπεργάζονται οὐχὶ τὴν ἐκμηδένισιν, ἀλλὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἀνθρώπου πρὸς τὸ καλὸν καὶ τὸ ἀληθές.

Ο ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΩΣ ΠΟΛΙΤΗΣ

Τὴν 25 Μαρτίου (ν) συνῆλθον ἐν Νέᾳ Ὑόρκῃ διάφορα μηχανικὰ σωματεῖα ὅπως συζητήσωσι περὶ τῶν σχέσεων τῶν μηχανικῶν πρὸς τὴν κοινωνίαν. Ἐκακίσθη ἡ σημερινὴ αὐτῶν ἀπομόνωσις καὶ ἀποχὴ ἀπὸ τῶν τῆς πολιτείας· πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι εἶναι καθῆκόν των ἡ συμμετοχὴ εἰς τὰ τῆς διοικήσεως καὶ προνομιοῦχος ἡ θέσις των. Ἡ φωνὴ τῶν μηχανικῶν θὰ εἶναι ἐκ τῶν ἰσχυροτέρων παραγόντων πρὸς κατανόησιν στοιχειωδῶν τινων ἀληθειῶν π. χ. ὅτι ἡ χεὶρ δὲν εἶναι ἀξία τῆς αὐτῆς ἀμοιβῆς ὡς ὁ ἐγκέφαλος· ὅτι οὐδὲν ὑπάρχει δίκαιον ἐν τῇ ἀξιώσει τοῦ ἐργάτου ὅπως μετέχῃ τῶν κερδῶν ἐφ' ὅσον δὲν εἶναι διατεθειμένος νὰ μετέχῃ τῶν ζημιῶν, καὶ ὅτι οὐδεὶς ὑφίσταται συνεταιρισμὸς καθ' ὃν μοιράζονται μόνον κέρδη οὐχὶ δὲ καὶ ζημίαι· ὅτι δὲν ἀπολαμβάνονται μισθοὶ οἵτινες δὲν ἐπανευρίσκονται τελείως ἐν τῷ προϊόντι· ὅτι ἡ ἐργασία δύναται νὰ πληρωθῇ μόνον ἐκ τοῦ προϊόντος αὐτῆς ὅταν τοῦτο πωληθῇ μετὰ κέρδους· ὅτι πάντα τὰ προϊόντα εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἡνωμένων προσπαθειῶν ἐργασίας, κεφαλαίου καὶ διοικήσεως καὶ ὅτι καὶ αἱ τρεῖς ὀφείλουσι νὰ μετέχωσι τοῦ προϊόντος.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν νομοθεσίαν, ἡ μέχρι τοῦδε προσπάθεια τῶν μηχανικῶν σωματείων ἦτο ἡ πιστοποίησις τῶν γεγονότων ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔπρεπε νὰ στηριχθῇ ὁ νόμος χωρὶς προσπαθείας εἰδικῆς διατυπώσεως αὐτοῦ. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν διατύπωσιν αὐτὴν τῶν νόμων καλὸν θὰ ἦτο ὅπως ἐπεμβαίνωσιν ἐπὶ ζητημάτων ἀφορώντων αὐτούς. Ἐπίσης ἐτονίσθη ἡ ἀνάγκη τῆς συμμετοχῆς μηχανικῶν ἐπὶ τῆς διοικήσεως, τονισθέντος ὅτι ἡ διεύθυνσις ἐπιχειρήσεων περιλαμβανουσῶν τὴν μελέτην καὶ ἐκτέλεσιν ἔργων κατὰ λογικὴν σειρὰν ἀνήκει εἰς τὸν μηχανικόν, προϋποτιθεμένου ὅτι οὗτος ἀπέκτησε κατὰ τὴν ἐκπαίδευσίν του καὶ γνώσεις τῆς ἐργασίας καὶ τῶν διοικητικῶν μεθόδων.

Ἐπίσης ἐν σχέσει πρὸς τὴν κοινὴν γνώμην «ἥτις δὲν εἶναι πάντοτε ἐν τῷ δικαίῳ, ἀλλ' εἶναι πάντοτε αὐταρχική» ἐτονίσθη ὅτι ἡ δρᾶσις τοῦ μηχανικοῦ ἐν τῇ κοινωνίᾳ εἶναι σπουδαία πρὸς διαπαιδαγώγησιν αὐτῆς καὶ ἀντιρρόπησιν τῶν ἐνεργειῶν προσηλυτισμοῦ πρὸς ἐπαύξησιν τῆς ἔχθρας μεταξὺ τῶν κοινωνικῶν τάξεων, τῆς ἰδιαιτέρας αὐτοῦ θέσεως ἐν τῇ παραγωγῇ παρεχούσης αὐτῷ τὸ κῦρος καὶ τὴν εὐκαιρίαν ὅπως μορφώσῃ τὴν κοινὴν γνώμην κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς τιμιότητος, ἀκεραιότητος, ἐλλείψεως ἐγωϊσμοῦ, ἐγκρατείας, καὶ συνεργασίας. Αἱ ἰδιότητες αὗται καθιστῶσι τὸν μηχανικὸν εὐδόκιμον ἐν τῇ δημοσίᾳ ὑπηρεσίᾳ. Ὁ μηχανικὸς εἶναι ἐξ ἴσου χρήσιμος ὡς καὶ ὁ νομικὸς ἐν τῇ διαχειρίσει τῶν κοινῶν.

Ἐπίσης ἐτονίσθη ἡ συμβολὴ τοῦ μηχανικοῦ εἰς τὴν συμφιλίωσιν τῶν ἀντιμαχομένων δυνάμεων κεφαλαίου καὶ ἐργασίας διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος τοῦ ἐργάτου καὶ ἐπιτυχίας ἱκανοποιητικῶν ἡμερομισθίων καὶ ἀρκούσης προσόδου τοῦ κεφαλαίου.

Ἀπεφασίσθη ὅπως τὰ διάφορα σωματεῖα δι' ἀντιπροσώπων αὐτῶν συνέλθωσιν εἰς κοινὴν συνέλευσιν καὶ ὀργανώσουν τὴν ἐν τῷ μέλλοντι συνεργασίαν. Ἐπίσης ἀπεφασίσθη ὅπως κληθῶσι καὶ τὰ ἐπίλοιπα σωματεῖα τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν εἰς συμμετοχήν. Τέλος ἀπεφασίσθη ὅπως εἰδικὴ ἐπιτροπὴ ἐξ ἀντιπροσώπων τῶν συνελθόντων σωματείων συζητήσῃ καὶ διατυπώσῃ κώδικα διὰ τὴν ἐπαγγελματικὴν συμπεριφορὰν τῶν μηχανικῶν.

Π. Ζ.