ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΤΟΣ ΚΑ' — ΑΘΗΝΑΙ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1920 — ΑΡΙΘ. 1

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΛΑΓΙΑΙ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΟΛΙΣΘΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

§ 1. Ἀντικείμενον τῆς παρούσης μελέτης.

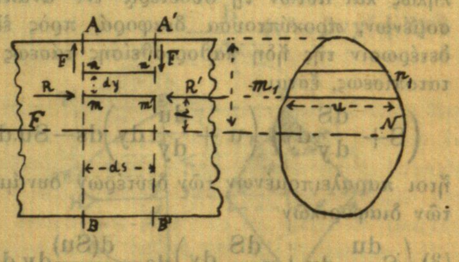
Ἐν δοκῷ καμπτομένῃ, σχήματος I, ἣ πλαγίαις ὁπωσδήποτε ἐφωδιασμένῃ ἐξοχαῖς, καὶ ἣν πελματικὴν γενικῶς ὀνομάζομεν, κατὰ τὸ ἐπίπεδον τῆς συμβολῆς τῶν πτερῶν ἢ ἐξεχόντων πελμάτων μετὰ τῆς ὀρθίας ψυχῆς, ἀναπτύσσεται ὁριζοντίως πλαγία ὀλισθητικὴ ἢ διατμητικὴ τάσις (effort de glissement latéral) ἣν οὕτως ὀνομάζομεν κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν κατὰ μῆκος ὀλισθητικὴν τάσιν τῶν ἰνῶν (effort) de glissement longitudinal des fibres) καὶ ἧς θέλομεν ἐπιχειρήσει τὴν θεωρητικὴν ἐξακρίβωσιν, τῆς τοιαύτης ἀποδείξεως, ἐκ τῶν γνωστῶν ἡμῶν τοὐλάχιστον, μὴ γενομένης μέχρι τοῦδε.

Ἡ θεωρία ἣν ἐκτίθεμεν ἀποτελεῖ, οὕτως εἰπεῖν, συμπλήρωμα ἀναγκαῖον τῆς περὶ τῶν κατὰ μῆκος ὀλισθητικῶν τάσεων τοιαύτης· διὸ καὶ προτάσσομεν αὐτὴν πρὸς πληρεστέραν διασάφησιν καὶ διευκρίνησιν τοῦ ὅλου θέματος. Μετὰ τὴν ἐν § 2 γενικὴν διατύπωσιν τῶν περὶ ὀλισθητικῶν κατὰ μῆκος τάσεων δεδομένων, παρατίθεμεν τὸν καθ' ἡμᾶς κανονα τῆς γενικῆς αὐτῶν ἐκφράσεως, ἐφαρμόζοντες αὐτὸν εἰς διατομὴν ἁπλῆν καὶ εἰς πελματικὴν τοιαύτην, καθορίζοντες τὸ σχῆμα τῆς ἑκάστοτε παραστατικῆς τῆς ἐντάσεως τῶν ὀλισθητικῶν τάσεων καμπύλης καὶ καταλήγοντες εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς, καθ' ἡμᾶς, πλαγίας κατὰ μῆκος ὀλισθητικῆς ἢ διατμητικῆς τάσεως ἐν τῇ ἀφετηρίᾳ προεξοχῆς τῆς διατομῆς ἀναπτυσσομένης καὶ τῆς κατανομῆς αὐτῆς ἐν τῷ κορμῷ τῆς ἐξοχῆς· προστίθεμεν εἶτα ἐφαρμογὰς τῆς προκειμένης θεωρίας διερευνῶντες ἐν τέλει τὸ οὐσιωδέστατον θέμα τοῦ ἀλληλεγγύου πλακὸς καὶ νευρώσεως συνθέτου δαπέδου ἐκ σιδηροπαγοῦς σκυροκονιάματος.

Οὕτως, ἐν τῇ παρούσῃ μελέτῃ, ξένα τυγχάνουσι μόνα τὰ ἐν § 2 ἐκτιθέμενα, τῶν λοιπῶν ἀποτελούντων ἀντικείμενον ἰδίας ἡμῶν ἐρεύνης.

§ 2. Ὀλισθητικὴ κατὰ μῆκος τάσις τῶν ἰνῶν. Διατέμνουσαι δυνάμεις.

Ἔστω ἐν Σχ. 1 τμῆμα δοκοῦ ἧς διατομὴ προβάλλεται ἐν Σχ. 2, τῆς οὐδετέρας ἰνός, καθέτου ἐπὶ τῶν εἰς τὸ σῶμα ἐνεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, προβαλλομένης εἰς FN.



Σχ. 1. Σχ. 2

Ἀγομένων δύο ἐπιπέδων mm′, nn′ παραλλήλων τῇ οὐδετέρᾳ ἰνί, ἀποχωρίζεται μεταξὺ τῶν ἐγκαρσίων ἐπιπέδων AB, A′B′ ἀπεχόντων ds, λεπτόν τι τμῆμα. mnn′m′ οὗτινος ἡ διατομὴ προβάλλεται εἰς $m_1 n_1$ (Σχ. 2). Ἔστωσαν R καὶ R′ αἱ ἐντάσεις τῶν ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς ῥοπῆς κάμψεως παραγομένων ὁριζοντίων ἐλαστικῶν δυνάμεων ἢ τάσεων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου mm, καὶ εἰς τὰς διατομὰς AB, A′ B′ ἔνθα αἱ ῥοπαὶ κάμψεως εἰσὶ M καὶ M′· ἔστω δὲ y ἡ ἀπὸ τῆς οὐδετέρας ἰνὸς ἀπόστασις τοῦ προκειμένου ἐπιπέδου mm′ καὶ I ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τῆς ὅλης διατομῆς, σταθερὰ κατὰ τὸ μῆκος ds. Ἔχομεν ὡς γνωστὸν

$$(1)\left\{\begin{aligned} R &= \frac{M}{I}y \\ R' &= R+\frac{dR}{ds}\cdot ds = \frac{M'}{I}y \end{aligned}\right.$$

Αἱ ἐνεργοῦσαι ὁριζόντιοι δυνάμεις ἐπὶ τῶν κατακορύφων ἐπιφανειῶν mn—m′n′ εἰσὶ

Rudy & R′udy

τῆς ἐντάσεως τῶν τάσεων R, R′ ὑποτιθεμένης σταθερᾶς κατὰ τὸ ἀπειροελάχιστον ὕψος dy, τοῦ δὲ πλάτους τῆς διατομῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου mm′ ὄντος u (Σχ. 2).

Τὸ τμῆμα mn n′m′ ὑπόκειται εἰς μετατόπισιν ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων

$$(2)\quad R'udy-Rudy=udy\frac{dR}{ds}ds$$

Ἀλλ' ἡ εἰς μετατόπισιν προκαλοῦσα ὡς ἄνω δύναμις ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων mm′, nn′ ἀναπτυσσομένων συνεκτικῶν δυνάμεων ὧν αἱ ἐντάσεις ἔστωσαν

S & $S+\frac{dS}{dy}dy$ καὶ αἵτινες ἀναπτύσσονται ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν uds καὶ $\left(u+\frac{du}{dy}dy\right)\times$ ds· ἡ τῶν ὡς ἄνω συνεκτικῶν ἔργων, παραλλήλως καὶ αὐτῶν τῇ οὐδετέρᾳ ἰνὶ ἀναπτυσσομένων, προκύπτουσα διαφορά, πρὸς ἐξουδετέρωσιν τῆς ἤδη καθορισθείσης τάσεως μετατοπίσεως, ἔσται

$$\left(S+\frac{dS}{dy}dy\right)\left(u+\frac{du}{dy}dy\right)ds-Su.ds$$

ἤτοι παραλειπομένων τῶν δευτέρων δυνάμεων τῶν διαφορικῶν

$$(3)\quad \left(S\frac{du}{dy}.dy+u\frac{dS}{dy}dy\right)ds=\frac{d(Su)}{dy}dy.ds.$$

Διὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ὑπ' ὄψιν τμήματος, ἐκ (2) & (3) θέλομεν ἔχει

$$udy\frac{dR}{ds}ds=ds\frac{d(Su)}{dy}dy\ ds$$

ἤτοι

$$(4)\quad u\frac{dR}{ds}=\frac{d(Su)}{dy}$$

Τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας I ὑποτιθεμένης σταθερᾶς μεταξὺ τῶν σημείων m & m′, ἡ πρὸς s διαφόρισις τῆς ἐξισώσεως (1) χορηγῶ διὰ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον mm′, ἤτοι διὰ y σταθερὸν

$$\frac{dR}{ds}ds=\frac{dM}{ds}\cdot\frac{y}{I}ds$$

καὶ διότι $T\ \frac{dM}{ds}=$ διατέμνουσαν, ἔχομεν ἐν τέλει

$$(5)\quad \frac{dR}{ds}=\frac{T}{I}y$$

καὶ ἐξ ἐξισώσεων (4) & (5)

$$(6)\quad d\,(Su)=\frac{T}{I}u\,y\,d\,y$$

Γενικῶς δέ, ὀνομάζονται S_y τὴν ὀλισθητικὴν ἢ συνεκτικὴν τάσιν ἐπὶ ἐπιπέδου τεταγμένης ἢ ἀποστάσεως y ἀπ' οὐδετέρας ἰνός, ἕξομεν

$$(7)\quad S_y u=\frac{T}{I}\int uydy+C$$

Ἡ στοιχειώδης ἀντολισθητικὴ ἢ συνεκτικὴ δύναμις S_y, ἡ ἐπί τινος ἰνὸς ἀναπτυσσομένη, τυγχάνει σημείου μὲν ἀντιθέτου, ἴση δὲ τῇ κατὰ τὸ ὕψος τῆς αὐτῆς ἰνός, παραγομένῃ στοιχειώδει τάσει τῆς διατεμνούσης δυνάμεως· ὄντως ὀνομάσωμεν F τὴν ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας δρῶσαν κατακόρυφον ὡς ἄνω διατέμνουσαν κατὰ τὸ ὕψος mn τῆς ἰνός,· ἡ ἴς αὕτη εὑρίσκεται ἐν ἰσοῤῥοπίᾳ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν ὁριζοντίων ἐλαστικῶν δυνάμεων ἐντάσεως R & R′ ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων mn, m′n′ καὶ παραγομένων ὑπὸ τῆς ῥοπῆς κάμψεως, τῶν ὁριζοντίων συνεκτικῶν δυνάμεων ἐντάσεως S & S′ ἐνεργουσῶν κατὰ τὰ ἐπίπεδα mm′nn′ τοῦ ἰδίου βάρους τῆς ἰνός καὶ τῶν κατακορύφων διατμητικῶν δυνάμεων ἐντάσεως F & F′ ἐνεργουσῶν κατὰ τὰ ἐπίπεδα mn, m′n′· παραλειπομένων τῶν ἀπειροελαχίστων διαφορῶν R′—R, S′— S, F′ — F καὶ λαμβανομένης τῆς ῥοπῆς ἁπασῶν τῶν ὡς ἄνω δυνάμεων πρὸς τὸ κέντρον βάρους τῆς ἰνός, δι' οὗ διέρχονται αἱ ἐπεκτάσεις τῶν ἔργων R & R′, παρασταθήσεται ἡ συνθήκη ἰσοῤῥοπίας διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$(7')\quad (Fudy)\ ds+(Suds)\ dy=o$$

ἤτοι

$$F=-S$$

§ 3. *Γενικὴ ἔκφρασις ὀλισθητικῶν κατὰ μῆκος τάσεων.*

Ἐφαρμογαί.

Τῆς ὀλισθητικῆς τάσεως S_y μηδενιζομένης κατ' ἀνάγκην εἰς τὰ ἄκρα τῆς διατομῆς, ἤτοι διὰ $y = v$ (Σ. 1), προκειμένου περὶ τοῦ ὑπερκειμένου τῇ οὐδετέρᾳ ἰνὶ τμήματος τῆς διατομῆς, ἕπεται ὅτι ἐπὶ ἐπιπέδου mm', οὗτινος ἡ τεταγμένη ἐστὶν ἡ ὀλισθητικὴ δύναμις ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ πλάτους μὲν u καὶ ἐπὶ μήκους δοκοῦ ἴσου τῇ μονάδι ἔσται κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (7)

(8) $$S_y u = -\frac{T}{I}\int_y^v uydy$$

Ὄντως διὰ $y=v$ ἔχομεν $S=o$ καὶ $C= -\frac{T}{I}\int^v uydy$ ἐξ (7)

ἤτοι

$$S_y u = \frac{T}{I}\int_v^y uydy = -\int_y^v uydy$$

Ἀλλὰ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_y^v uydy$ παρίστησι τὴν πρὸς τὴν οὐδετέραν ἶνα ῥοπὴν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον $m_1 n_1$ τμήματος τῆς διατομῆς.

Συνάγομεν ὅθεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα·

» Ἐπὶ ἐπιπέδου $m_1 n$ (Σχ. 2) καθέτου τῇ διευθύνσει τῶν δρωσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἡ ἀπόλυτος ἀξία τῆς ἀνὰ μονάδα μήκους δοκοῦ ἀναπτυσσομένης ὀλισθητικῆς δυνάμεως S_y ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ κλάσματος $\frac{T}{I}$ ἐπὶ τὴν πρὸς τὴν οὐδετέραν ἶνα ῥοπὴν τῆς ἐπιφανείας τοῦ, πέραν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τμήματος m_1 C n_1 τῆς διατομῆς.» (*)

Τὸν κανόνα τοῦτον, ὃν προτείνομεν, σημαντικῶς ἁπλοποιοῦντα τὸν καθορισμὸ τῶν ὀλισθητικῶν τάσεων ἐν πάσῃ διατομῇ, θέλομεν ἐφαρμόσει ἀμέσως κατωτέρω ἐφ' ἁπλῶν σχημάτων πρῶτον, ἐπὶ συνθέτων καὶ πελματικῶν διατομῶν εἶτα, καταλήγοντες ἐν τέλει εἰς τὰς περὶ πλαγίας κατὰ μῆκος ὀλισθήσεως καὶ διατμήσεως ἡμετέρας ἀπόψεις.

Σημ. Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς παραγωγῆς τῆς ἐξισώσεως (6) συνάγεται ὅτι ἐν διατομῇ ὑφισταμένῃ ἀπότομον μεταβολὴν πλάτους, ἡ ὅλη ὀλισθητικὴ δύναμις $S_y u$ παραμένει σταθερά, διατηροῦσα τὴν αὐτὴν ἀξίαν καὶ ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον ἐφ' οὗ ἐμφανίζεται ἡ ἀπότομος μεταβολὴ τῆς διατομῆς καὶ ὑπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, τῆς ἐντάσεως τῆς ὀλισθητικῆς ταύτης δυνάμεως ὑφισταμένης κατὰ συνέπειαν ἀντιθέτως ἀνάλογον τοῦ πλάτους μεταβολήν.

Α΄. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ·

Ἔστω διατομὴ ὀρθογώνιος ABCΔ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου LM ἀναπτυσσομένη ὀλισθητικὴ δύναμις, κατὰ τὸν ὡς ἄνω θεσπισθέντα κανόνα ἔσται

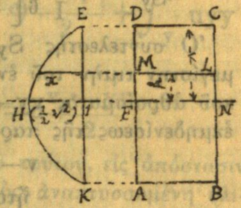
$$S_y u = -\frac{T}{I}\frac{1}{2}(v^2-y^2)u$$

ἡ στοιχειώδης ἔντασις αὐτῆς ἔσται

$$S_y = -\frac{T}{I}\frac{1}{2}(v^2-y^2)$$

(9) Τιθέμενοι

(9΄) $$x = \frac{1}{2}(v^2-y^2)$$



Σχ. 4. Σχ 3

κατασκευάζομεν τὴν καμπύλην ΕΗ τῆς ἐξισώσεως ταύτης (9΄), παραστατικὴν τοῦ νόμου τῆς μεταβολῆς τῶν στοιχειωδῶν ὀλισθητικῶν τάσεων· ἡ καμπύλη αὐτὴ ἐστὶ παραβολὴ ἧς ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς οὐδετέρας ἰνὸς ὄντως ἂν ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων λάβομεν τὴν ἐκ τῆς κορυφῆς Η κατακόρυφον τιθέμενοι $x = \frac{1}{2}v^2 - x'$, ἡ ἐξίσωσις (9΄) γενήσεται $y^2=2x'$, ἐξίσωσις παραβολῆς ἧς ἡ παράμετρος ἐστὶ $p=1$ $HI=\frac{1}{2}v^2$.

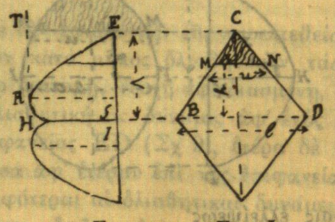
Προκειμένου περὶ ὁμογενοῦς διατομῆς ἧς ἡ οὐδετέρα ἶς εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, ἡ καμπύλη ΗΚ ἀποτελεῖ τὸ ἕτερον σκέλος τῆς αὐτῆς παραβολῆς.

Β΄. ΡΟΜΒΟΣ

Ἐν τῷ ρόμβῳ ABCD (Σχ 5) ἔχομεν

(10) $$u = b\left(1 - \frac{y}{v}\right)$$

$$\int_y^v uydy = \frac{b}{v}\int_y^v (v-y)\, ydy = \frac{b}{6v}(v^3 - 3vy^2 + 2y^3)$$



Σχ. 6. Σχ. 5.

(*) Ἀνάλογον διατύπωσιν εὑρίσκομεν ἐν Ἀντιστάσει ὕλης τοῦ Föppl σελὶς 116.

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN ἀναπτυσσομένη ὀλισθητικὴ δύναμις ἔσται

$$(10')\ S_y u = -\frac{T}{I}\cdot\frac{b}{\partial v}\Big[v^3 - vy^2 - 2y^2(v-y)\Big]$$

καὶ συνεπῶς ἐκ (10)

$$S_y = -\frac{T}{I}\,\frac{\frac{1}{6}\frac{b}{v}\Big[v(v^2-y^2)-2y^2(v-y)\Big]}{\frac{b}{v}(v-y)}$$

$$(10'')\quad S_y = -\frac{T}{I}\,\frac{1}{6}\Big[v(v+y) - 2y^2\Big]$$

Ὁ συντελεστὴς S_y ἐστὶ μέγιστος διὰ τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $vy - 2y^2$, ἐπερχομένην ἐκ τῆς ἐκμηδενίσεως τῆς παραγώγου

$$v - 4y = o$$

ἤτοι διὰ

$$y = \frac{1}{4}v \qquad IS = \frac{1}{4}IE.$$

Τιθέμενοι καὶ αὖθις

$$(10''')\quad x = \frac{1}{6}\Big[v(v+y) - 2y^2\Big]$$

καὶ κατασκευάζοντες τὴν καμπύλην ERH τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἔχομεν

$$HI = \frac{1}{6}v^2 \qquad \text{διὰ } y = o$$

$$RS = \frac{1}{6}\times\frac{9}{8}v^2 = \frac{3}{16}v^2 \text{ διὰ } y = \frac{1}{4}v$$

Ἡ καμπύλη ERH ἐστὶ παραβολὴ ἧν ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐν R ὄντως ἐν τῇ (10'''), τιθέμενοι

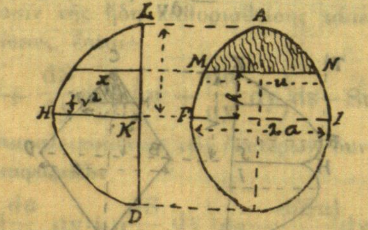
$$x = \frac{3}{16}v^2 - x'$$

$$y = \frac{v}{4} + y'$$

εὑρίσκομεν ὡς πρὸς τοὺς νέους αὔξοντας RS, RT

$$y'^2 = 3x'$$

Γ'. ΕΛΛΕΙΨΙΣ



Ἐξίσωσις ἐλλείψεως

$$(11)\quad \frac{u^2}{4a^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 \qquad u = \frac{2a}{v}\sqrt{v^2 - y^2}$$

Ροπὴ ἐπιφανείας MAN πρὸς ἄξονα FI

$$\frac{2a}{v}\int_y^v \sqrt{v^2-y^2}\ ydy$$

Ἔστω $t^2 = v^2 - y^2 \qquad ydy = -tdt$

Τὸ ὁλοκλήρωμα γενήσεται

$$\int\sqrt{v^2-y^2}\ ydy = -\int t^2dt = -\frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3}(v^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

καὶ μεταξὺ τῶν ὁρίων v & y

$$\int_y^v \sqrt{v^2-y^2}\,ydy = +\frac{1}{3}(v^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

ἤτοι

$$\int_y^v uydy = \frac{2}{3}\frac{a}{v}(v^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Συνεπῶς κατὰ τὸν κανόνα ὡς ἀνωτέρω ἔχομεν

$$(11')\quad S_y u = -\frac{T}{I}\cdot\frac{2}{3}\frac{a}{v}(v^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

καὶ ἐκ (11)

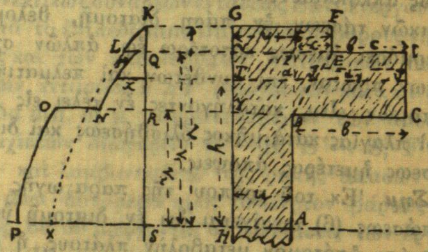
$$(11'')\quad S_y = -\frac{T}{I}\frac{1}{3}\,v^2 - y^2)$$

Ἡ καμπύλη LHD ἧς ἡ ἐξίσωσις ἐστὶ

$$(12''')\quad x = \frac{1}{3}(v^2 - y^2)$$

τυγχάνει καὶ αὖθις παραβολὴ ἧς ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται εἰς H, ἀπέχον ἀπὸ τὸν ἄξονα LD ἀπόστασιν $HK = \frac{1}{3}v^2$, καὶ ἧς ἡ παράμετρος ἐστὶ $p = \frac{3}{2}$, ὡς ἐν τῷ ρόμβῳ.

Δ'. ΔΙΑΤΟΜΗ ΠΕΛΜΑΤΙΚΗ



Σχ. 10. Σχ. 11.

Ἔστω δοκὸς πελματικὴ ἧς θεωροῦμεν τὸ ὑπὲρ τὴν οὐδετέραν ἵνα τμῆμα τῆς διατομῆς ABCDEFGH,

Καθορισθήτω ἡ ὀλίσθησις κατὰ τὰ τμήματα

ὕψους FE, DC & BA, ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τέμνοντος ἑκάστοτε μίαν τῶν ὡς ἄνω τριῶν πλευρῶν.

1′— Ἡ ροπὴ τῆς μεταξὺ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν πλευρὰν FE καὶ τῆς FG ἐπιφανείας τῆς διατομῆς ἔσται

(12) $$\int_y^v (u \cdot c)\, ydy = (u+c)\,\frac{v^2-y^2}{2}.$$

ἡ ἔντασις τῆς ὀλισθητικῆς τάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔσται

(12′) $$S_y = -\frac{T}{I}\frac{1}{2}(\Lambda^2 - y^2)$$

Ἡ παραβολὴ

(12′′) $$x = \frac{1}{2}(\Lambda^2 \cdot y^2)$$

ἧς ἡ παράμετρος ἐστὶν ἡ μονὰς (p=1) ἀποτελεῖ τὴν παραστατικὴν καμπύλην KL τῶν εἰς τὸ ὀρθογώνιον EF ἐντάσεων τῆς ὀλισθητικῆς τάσεως· οὕτως ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου διὰ E διερχομένου ἐπιπέδου ἡ στοιχειώδης αὕτη ἔντεσις ἔσται $S_1=LQ$

(12)′′′ $$S_1 = -\frac{T}{I}\cdot\frac{1}{2}(v^2 - v_1^2)$$

2′— Ἡ πρὸς τὸν ἄξονα AH ροπὴ τῆς ὑπὲρ τὴν ὁριζόντιον TU ἐπιφανείας τῆς διατομῆς ἔσται

(13) $$(u+b)\,\frac{v^2-y^2}{2} - (b-c)\,\frac{v^2-v_1^2}{2}.$$

συνεπῶς ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου TU ἔντασις τῆς ὀλισθητικῆς τάσεώς ἐστὶ

(13′) $$S_y = -\frac{T}{I}\left[\frac{v^2-y^2}{2} - \frac{b-c}{b+u}\cdot\frac{v^2-v_1^2}{2}\right]$$

οὕτως ἡ παραστατικὴ τῶν στοιχειωδῶν ὀλισθητικῶν τάσεων κατὰ τὸ τμῆμα CD καμπύλη MN ἔχουσα ἐξίσωσιν

(13′′) $$x = \frac{v^2-y^2}{2} - \frac{b-c}{b+u}\cdot\frac{v^2-v^2}{2}$$

ἔσται ἐπίσης τόξον παραβολῆς ἐχούσης τὴν αὐτὴν ὡς ἡ LK παράμετρον p=1.

Συνεπῶς τὸ τόξον MN ἀποτελεῖ μετατοπισθεῖσαν πρὸς τὰ δεξιὰ συνέχειαν τῆς παραβολῆς εἰς ἣν ἀνήκει τὸ τόξον KL.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου VED ἡ στοιχειώδης ἔντασις τῆς ὀλισθητικῆς τάσεως διὰ $y=v_1$ ἔσται

(13′′′) $$S'_1 = -\frac{T}{I}\cdot\frac{1}{2}(v^2-v_1^2)\frac{u+c}{u \cdot b}$$ ἐκ (13′′)

Ἐκ 12′′′ & 13′′′ ἔχομεν

$$S_1\,(u+c) = S'_1\,(u+b),$$

ὡς τοῦτο προκύπτει ἄλλωστε καὶ ἐκ τῆς ἐν τέλει τῆς § 3 καὶ ἀμέσως πρὸ τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν τεθείσης σημειώσεως.

Ἐπὶ δὲ τοῦ ἐπιπέδου YBC ἔχομεν

(13′′′′) $$S_2 = -\frac{T}{I}\left[\frac{v^2-v_2^2}{2} - \frac{b+c}{u+b}\cdot\frac{v^2-v_1^2}{2}\right]$$

3′— Ἀγομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν ὀρθίαν πλευρὰν AB, ἡ πρὸς τὸν ἄξονα ροπὴ τοῦ ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τμήματος τῆς διατομῆς ἔσται

(14) $$(u+b)\frac{v^2-v_2^2}{2} - (b-c)\frac{v^2-v_1^2}{2} + \int_y^{v^2} uyy$$

ἀλλ' ἐν προκειμένῳ

$$\int_y^{v_2} uydy = u\frac{v_2^2-y^2}{2}$$

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, εἰς ἀπόστασιν y ἀπὸ τῆς οὐδετέρας ἰνός, ἀναπτυσσομένη ὀλισθητικὴ τάσις ἕξει ἔντασιν

(15′′) $$S_y = -\frac{T}{I}\left[\frac{u+b}{u}\cdot\frac{v^2-v_2^2}{2} - \frac{b-c}{u}\cdot\frac{v^2-v_1^2}{2} + \frac{v_2^2-y^2}{2}\right]$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει

(14′′) $$x = \frac{u+b}{u}\cdot\frac{v^2-v_2^2}{2} - \frac{b-c}{u}\cdot\frac{v-v_1^2}{2} + \frac{v_2^2-y^2}{2}$$

τῆς καμπύλης OP ἔχομεν ὡσαύτως ἔχουσαν τὴν αὐτὴν ὡς καὶ ἄνω παράμετρον p=1.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου BY ἔχομεν διὰ $y=v_2$

14′′′) $$S_2 = -\frac{T}{I}\left[\frac{u+b}{u}\cdot\frac{v^2-v_2^2}{2} - \frac{b-c}{u}\cdot\frac{v^2-v_1^2}{2}\right]$$

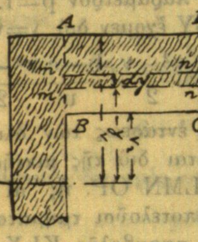
Οὕτως ὁ νόμος τῆς ἐντάσεως τῶν ὀλισθητικῶν τάσεων παρίσταται διὰ τῆς μικτῆς τεθλασμένης γραμμῆς RLMN OP. ἧς αἱ καμπύλαι KL, MN, OP ἀποτελοῦσι τμήματα μετετοπισμένα τῆς αὐτῆς παραβολῆς KLX. τῆς παραμέτρου τυγχανούσης κοινῆς διὰ τὰ τρία παραβολικὰ τόξα.

§ 4. *Πλαγία κατὰ μῆκος ὀλίσθησις.*

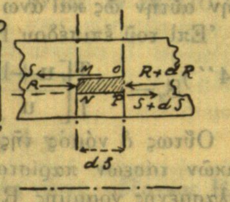
Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς προεκτεθείσης θεωρίας τῶν κατὰ μῆκος ὀλισθητικῶν τάσεων ἐν συνθέτῳ διατομῇ, ἐξοχῇ ἐφωδιασμένῃ, ἐμφανίζεται ὀλισθητική τις δύναμις ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ED (Σχ 9), ἑτέρα δὲ τοιαύτη ἐνεργοῦσα ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας BC· ἀλλ' ἀμφότεραι αἱ ὀλισθητικαὶ δυνάμεις αὗται ἐμφανίζονται δρῶσαι ἐπὶ τερματικῶν ὁριζοντίων ἐπιφανειῶν, ἐφ' ὧν κατ' ἀνάγκην δὲν δύνανται νὰ ὑπάρξωσιν ὀλισθητικαὶ δυνάμεις, μὴ ὑφισταμένης τῆς ἀντιῤῥόπου ἐπιφανείας ἐφ' ἧς δύνανται νὰ λειτουργήσωσιν αὗται ἀταπτυσσόμεναι· Ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται λογικὸν νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται ὑφίστανται μετατόπισιν καὶ μετασχηματισμόν τινα, ἐξουδετερούμεναι ὑπὸ τῆς συνοχῆς τῆς ὕλης, ἀναπτυσσομένης ἐντονώτερον εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς συμβολῆς τοῦ ἐξέχοντος πέλματος, τῆς ὁπωσδήποτε ἐξοχῆς, μετὰ τῆς λοιπῆς διατομῆς· ἡ συνεκτικὴ δὲ αὕτη δύναμις ἔσται ἡ ἀνταγωνιζομένη κατα τῆς ὀλισθητικῆς τάσεως, ἐκ τῆς ὡς ἄνω μετατοπίσεως ἀναπτυσσομένης εἰς τὴν συναρμογὴν πέλματος ἢ ἐξοχῆς ὁριζοντίου καὶ λοιπῆς διατομῆς καὶ ἣν ὠνομάσαμεν πλαγίαν κατὰ μῆκος ὀλισθητικὴν ἢ διατμητικὴν τάσιν.

Οὐ μόνον τοῦτο, ἀλλ' ἐκεῖ ἔνθα ἐμφανίζεται διατομὴ ὡς ἐν Σχ. 9, αἱ ὑποθετικῶς ἀναπτυσσόμεναι ὀλισθητικαὶ κατὰ μῆκος τάσεις ἐπὶ τῶν τερματικῶν ἐπιφανειῶν DE & BC εἰσὶ κατ' ἀνάγκην σημείων ἀντιθέτων, τῆς μὲν προσερχομένης ἐπὶ τῆς DE_1 τῆς δὲ ἀπερχομένης ἐκ τῆς BC. παραμένει οὕτω πρὸς ἐξουδετέρωσιν ἡ διαφορὰ αὐτῶν. θέλομεν ἴδει κατὰ πόσον ἡ θεωρία ἣν προτείνομεν κατωτέρω συμπίπτει πρὸς τὰς γενικὰς ὡς ἄνω ἐκ τῶν προτέρων ἀντιλήψεις.

Ἔστω διατομὴ μετὰ προεξοχῆς BCDA, ἧς ἀποχωρίζω τὸ τμῆμα ἤ ἵνα $m m' n' n$ διὰ



Σχ. 11.



Σχ. 12.

δύο ὁριζοντίων ἐπιπέδων ἀπεχόντων ἀλλήλων dy· τὸ ἀποχωριζόμενον ὡς ἄνω τμῆμα, μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων MN & OP, ὑπόκειται εἰς τὴν ἐνέργειαν τῶν κάτωθι δυνάμεων·

1ον Δύο ὁριζοντίων ὀλισθητικῶν, ἐντάσεως S & $S + \frac{dS}{dy}\, dy$, ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων $m'n'$ & $m\,n'$

2ον Δύο ὁριζοντίων ἔργων ἐντάσεως R & $R + \frac{dR}{ds}\, ds$, παραγομένων ὑπὸ τῆς ῥοπῆς κάμψεως ἐπὶ 2 ἀλλεπαλλήλων διατομῶν ἀπεχουσῶν ds. ἐνεργουσῶν δὲ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων MN & OP.

3ον Μιᾶς ὁριζοντίου συνεκτικῆς δυνάμεως N ἀναπτυσσομένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AB εἰς mm', ἴσης τῇ συνισταμένῃ τῶν κατὰ τὸ πλάτος mn ἐνεργουσῶν στοιχειωδῶν συνεκτικῶν δυνάμεων, τῶν συγκρατουσῶν ἀμοιβαίως τὰς ἵνας εἰς ἃς διὰ κατακορύφων ἐπιπέδων, ἀπειροελαχίστως ἀπεχόντων, ὑποδιαιρεῖται τὸ τμῆμα $m\,n\,n'm'$.

4ον Τῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων MN & OP ἀναπτυσσομένων κατακορύφων διατεμνουσῶν δυνάμεων F & F' καὶ

5ον Τοῦ ἰδίου τῆς ἰνὸς βάρους.

Ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν ποικίλων τούτων δυνάμεων τὸ τμῆμα ἢ ἴς $mnn'm'$ παραμένει ἐν ἰσοῤῥοπίᾳ· λαμβανομένου τοῦ μήκους ds ἀρκούντως μικροῦ ὅπως θεωρηθῇ μηδενιζομένη ἡ αὔξησις dR τῶν ὑπὸ τῆς ῥοπῆς κάμψεως παραγομένων ἔργων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος μήκους ds (*), προβαλλομένων δὲ ἐπὶ ὁριζον-

(*) Ἡ ὑπόθεσις $\frac{dR}{ds} = O$, ἣν παραδέχομαι ἐνταῦθα, τυγχάνει ἀπολύτως ἀκριβὴς ὅταν ὑποτεθῇ $dR = O$ (Föppl. Résistance des matériaux σελ. 13 Τετράεδρον μοριακῶν ἔργων) τοῦ ds ὄντος «ἀπειροελαχίστου »μέν, πεπερασμένου ὅμως, μὴ θιγομένης οὕτω τῆς »ἀκριβείας τοῦ ὑπολογισμοῦ», ὁπότε ἔχομεν.

$$\frac{dR}{ds} = \frac{O}{ds} = O$$

Εἰδικώτερον δέ, ἡ ὑπόθεσις $\frac{dR}{ds} = O$ τυγχάνει θεωρητικῶς ἀπολύτως ἀκριβὴς εἰς ἃ τμήματα τυγχάνει σταθερὰ ἡ ῥοπὴ κάμψεως, μεταξὺ 2 ἴσων συμμετρικῶν λ. χ. πρὸς τὸν ἄξονα φορτίων, μόνων ἐνεργούντων, ὁπότε

$$\frac{dR}{ds} = \frac{U.dM}{I\ dS} = \frac{U}{I}\, T = O$$

Τοῦτο αὐτὸ ἀκριβῶς, ἤτοι $\frac{dR}{ds} = O$. παραδέχεται καὶ ὁ πολὺς Résal διὰ τὸν γενικὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τε ἔργου καὶ τῆς στοιχειώδους παραμορφώσεως τῶν θλιβομένων ἢ ἑλκυομένων καὶ καμπτομένων ἅμα δοκῶν, διὰ τὸν τοιοῦτον ὑπολογισμὸν ῥητῶς παραδεχόμενος ὡς μηδενιζομένην τὴν διατέμνουσαν T καὶ ἐπιλέγων ἐν σελίδι 240 Résistance des Matériaux. «Ἐξερχόμεθα ἀπὸ τῆς μαθηματικῆς ἀληθείας, εἰσερ»χόμενοι οὕτως εἰς τὴν πρακτικὴν ἀλήθειαν. Τὸ ἐκ »τῆς παραμελήσεως τῆς ἐπιδράσεως τῆς διατεμνούσης »διπραττόμενον σφάλμα δὲν εἶνε μὲν παραμελητέον »κατὰ τὴν αὐστηρὰν ἔννοιαν τῆς θεωρίας τῆς Ἐλα»στικότητος, ἀλλὰ τυγχάνει τοῦτο ἄνευ σημασίας ὅσον »ἀφορᾷ εἰς τὴν Ἀντίστασιν τῆς Ὕλης, ὡς θέλομεν »ἐξακριβώσῃ ὑπολογίζοντες τὴν παραμόρφωσιν πρί»σματος ἐφ οὗ μεταβάλλεται ἡ ῥοπὴ κάμψεως ἀπὸ »διατομῆς εἰς διατομήν.»

Ὡς γνωστὸν ἄλλωστε, ἡ ἐκμηδένισις τῆς διατεμνούσης, ἤτοι ἡ σταθερότης τοῦ R μεταξὺ 2 διατομῶν, συμπίπτει ἀπολύτως μετὰ τῆς θεμελιώδους ὑποθέσεως τῆς Ἀντιστάσεως τῆς Ὕλης, τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς, κατὰ τὴν κάμψιν, παραμενούσης τουτέστιν ἐπιπέδου καὶ καθέτου ἐπὶ τῆς οὐδετέρας ἰνός.

τίου ἐπιπέδου ἁπασῶν τῶν ὡς ἄνω δυνάμεων, ἡ συνθήκη ἰσοῤῥοπίας παρασταθήσεται διὰ τῆς ἐξισώσεως.

$$\left(S + \frac{ds}{dy}\, dy - S\right) b.\, ds + N dy.\, ds = O,$$

τῆς προβολῆς τῶν κατακορύφων δυνάμεων ἐξαφανιζομένης· ὅθεν

$$N = -b.\frac{dS}{dy} \tag{18}$$

(Ἕπεται συνέχεια)

Η ΑΣΦΑΛΤΟΣΤΡΩΣΙΣ ΤΩΝ ΟΔΩΝ

Ἄρθρον τοῦ κ. Δ. Κ. ΚΑΛΛΙΑ

Ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 329 φύλλῳ τῆς $8^{ης}$ Σεπτεμβρίου τῆς ἐφημερίδος «Ἀθῆναι» ἐδημοσίευσεν ὁ κ. Δ. Κ. Καλλίας διατριβὴν περὶ τῆς ἀσφαλτοστρώσεως τῶν ὁδῶν, λαμβάνων ἀφορμὴν ἐκ τηλεγραφήματος ἀγγέλλοντος ὅτι μεταξὺ τῆς παρὰ τῇ Διασκέψει Ἑλληνικῆς Ἀντιπροσωπείας καὶ ἑνὸς Ἀγγλικοῦ Οἴκου ὑπεγράφη σύμβασις ἀσφαλτοστρώσεως τῶν ὁδῶν.

Γνωμοδοτήσεις τῶν ἁρμοδιωτέρων μηχανικῶν καὶ ἀποφάσεις τοῦ Συμβουλίου τῶν Δημοσίων ἔργων ἔκριναν ἐνδεδειγμένον τὸ σκωριασφαλτικὸν ὁδόστρωμα τοῦ κ. Καλλία, ὅστις πρῶτος ἐχρησιμοποίησε τὴν μεταλλικὴν σκωρίαν καὶ δι' ὃ ἔλαβε προνόμιον εὑρεσιτεχνίας, ἀπονεμηθὲν τὸ 1912 δυνάμει τοῦ Νόμου ΔΞΔ τῆς τότε Διπλῆς Βουλῆς τοῦ 1912.

Κατὰ τὸ 1915 τὸ Συμβούλιον τῶν Δημοσίων Ἔργων κατόπιν προτάσεως τῆς Ἑλληνικῆς Ἑταιρείας Τεχνικῶν Κατασκευῶν ἀπεφάνθη διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 149 τῆς 12 Μαΐου πράξεως αὐτοῦ ὑπὲρ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ σκωριασφαλτικοῦ ὁδοστρώματος Καλλία εἰς τὰς ὁδοὺς Πατησίων, Κηφισσίας, Ἀμαλίας, Γεωργίου, Ὄλγας καὶ Πειραιῶς.

Τὴν ἀπόφασιν ταύτην ἐστήριξεν εἰς τὰς ἀποφάσεις τῶν ἐν Παρισίοις καὶ Βρυξέλλαις καὶ Λονδίνῳ Διεθνῶν Συνεδρίων καὶ εἰς τὴν ἔκθεσιν τοῦ Βέλγου Γενικοῦ εἰσηγητοῦ κ. Lemanier, τὰς γνωμοδοτήσεις τῶν ἐν Ἑλλάδι ἁρμοδίων καὶ τὴν ἔκθεσιν τοῦ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἐφαρμόσαντος τὸ σύστημα τοῦ κ. Καλλία Ἄγγλου Ἀρχιμηχανικοῦ D. E. Loyd Davies πρὸς τὸ Διεθνὲς Συνέδριον τῶν ὁδῶν. Τὸ Συμβούλιον ἐξέδωκε τὴν ὁριστικὴν αὐτοῦ γνώμην στηριζόμενον ἐπὶ τῶν γενομένων δοκιμῶν εἰς τὰς ὁδοὺς Ἀκαδημίας, Κάνιγγος, Σταδίου καὶ εἰς τὰ Χαυτεῖα, ὅπου μάλιστα τὸ σκωριασφαλτικὸν μεῖγμα ἐτοποθετήθη ἐπὶ ἁπλῆς σκυροστρώσεως ἄνευ τσιμέντου, ἐνῷ εἰς τὰς ἄλλας ὁδοὺς ἐπὶ τσιμεντοσκυροκονιάματος. Ἔχουσι μάλιστα συνταχθῆ καὶ προϋπολογισμοὶ διὰ τὰς ὁδοὺς Πατησίων, Κηφισσίας, Ἀμαλίας καὶ Γεωργίου ἀνελθόντες ἐν συνόλῳ εἰς 375,000 δραχ. ἐκ τῶν ὁποίων 150,000 βαρύνουσι τὴν Ἑταιρείαν τῶν Τροχιοδρόμων. Ἡ δαπάνη θὰ ἀνήρχετο εἰ 225,000 δραχ. καὶ θὰ ἦτο ἀλλοία ἡ ὄψις τῶν Ἀθηνῶν.

Ὁ κ. Καλλίας ὢν Διευθ. τῶν Δημοσ. Ἔργων, τότε φοβούμενος παρεξηγήσεις δὲν ἔθεσεν τὸ ἔργον εἰς ἐφαρμογὴν ἄνευ μειοδοσίας· διότι ὁ νόμος ΣΙΒ'. τοῦ 1852 εἰς τὸ ἄρθρον 34, διαλαμβάνει κατὰ λέξιν ὅτι δι' ἀντικείμενα τῶν ὁποίων ἡ κατασκευὴ ἀνήκει ἀποκλειστικῶς εἰς τοὺς ἔχοντας προνόμιον ἐφευρέσεως ἐπιτρέπονται συμφωνίαι ἄνευ δημοσίου συναγωνισμοῦ.

Ἐὰν ἐπισκεφθῇ τις τὰ Χαυτεῖα ὅπου τὸ σκωριασφαλτικὸν ἐτέθη ἐπὶ ἁπλῆς σκυροστρώσεως πρὸ πενταετίας καὶ ὅπερ δὲν παρουσιάζει οὔτε ἴχνος φθορᾶς μεθ' ὅλην τὴν ἀδιάκοπον κυκλοφορίαν καὶ τὴν στάθμευσιν ἁμαξῶν, πείθεται ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἐνδεδειγμένον δι' ἐπίστρωσιν ἰδίᾳ τῆς κονισαλέας ὁδοῦ Πειραιῶς Ἀθηνῶν, ἥτις εἶναι τὸ μαρτύριον τῶν ἁμαξοκαρραγωγέων, καὶ ἡ πηγὴ μεγάλου μέρους κονιορτοῦ τῶν δύο πόλεων.

Ἔχομεν δύο εἴδη ἀσφαλτικῶν ὁδοστρωμάτων α'. Τὸ τῆς πεπιεσμένης ἀσφάλτου (asphalte comprimée) καὶ β'. Τὸ τῆς χυτῆς ἀσφάλτου (asphalte coulé) ἐκ τούτων πλεονεκτεῖ τὸ τῆς χυτῆς ἀσφάλτου διότι εἶναι ὀλιγώτερον ὀλισθηρόν.

Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὁδοστρώματος τῶν Χαυτείων παρατηροῦνται μικραί τινες ἀνωμαλίαι αἵτινες εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς διὰ τῆς ψύξεως στερεοποιήσεως τοῦ μείγματος, ἐνῷ εἰς τὰς πεπιεσμένας ἀσφάλτους ἡ ἐπιφάνεια διὰ τοῦ σιδηρώματος γίνεται λίαν ὀλισθηρά. Αἱ μικραὶ ἀνωμαλίαι εἶναι πολύτιμαι ἰδίως διὰ τὰς ὁδοὺς βαρείας κυκλοφορίας ὡς ἡ ὁδὸς Πειραιῶς. Ἕνεκα τῶν πλεονεκτημάτων αὐτῶν ὁ σύλλογος τῶν Ἁμαξηλατῶν δι' ἀναφορᾶς του ἀπὸ 11 Μαρτίου 1914 πρὸς τὸ Ὑπουργεῖον αἰτεῖται ὅπως αἱ ὁδοὶ τῶν Ἀθηνῶν στρωθῶσι διὰ τοῦ συστήματος τοῦ κ. Καλλία.

Διὰ νὰ εἶναι ἓν ὁδόστρωμα τέλειον ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι μεγίστης ἀντοχῆς. καὶ ἐλαστικόν. Ἡ σκωρία Λαυρείου ἥτις ἔχει ἀπορριφθῇ εἰς τὰς ἀκτὰς τοῦ Λαυρείου ὡς ἄχρηστος εἰς ἑκατομμύρια τόννων, παρουσιάζει ἀντίστασιν κατὰ τὰς δοκιμὰς τὰς γενομένας εἰς τὸ δοκιμαστήριον τῆς σχολῆς τῶν Γεφυροδοποιῶν τῶν Παρισίων, 2625 χιλιογράμμων κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν, δηλαδὴ πενταπλασίαν τοῦ γρανίτου