αὐτὴ γείνῃ κοινῶς δεκτή, τότε νὰ συμπαραστῇ ὁ Σύλλογος κατὰ τὴν σύμπηξιν τῆς ἑνώσεως, πρὸς ἐξομάλυνσιν τυχὸν ἀναφαινομένων κωλυμάτων.

Οἱ λιγνῖται τῆς Ἑλλάδος δὲν εἶναι βιομηχανία βιώσιμος ὅλως ἐξ ἑαυτῆς. Δὲν εἶναι ὅμως καὶ βιομηχανία ἐπιτρέπουσα ἀπαισιοδοξίαν εἰς βαθμὸν παραλύοντα πᾶσαν ἐνέργειαν ὑπὲρ αὐτῆς. Ἡ σύστασις τῆς ἑνώσεως δὲν εἶναι ἐγγύησις τῆς εὐημερίας τῶν λιγνιτοπαραγωγῶν, ἀλλ' εἶναι ὅμως σπουδαῖος παράγων διὰ τὴν εὐημερίαν ταύτην καὶ δὲν πρέπει νὰ ματαιωθῇ ἐξ ἁπλῆς ἀπαισιοδοξίας.

Διὰ τοῦτο καὶ θὰ ἦτο σκόπιμον νὰ μὴ γεννηθῇ πρόωρος συζήτησις ἐπὶ ἀντικειμένων, τῶν ὁποίων ἡ ἐπεξεργασία θὰ εἶναι θέμα τῶν ὀργάνων τῆς ἑνώσεως καὶ ὄχι τῶν ἱδρυτῶν αὐτῆς, διότι ἄλλως αἱ ἐργασίαι τῆς ἑνώσεως θὰ παρεξέκλινον καὶ θὰ ἐματαιοῦντο.

Ἐπαναλαμβάνω ἐδῶ ἀξιότιμε Κύριε Πρόεδρε, συμφώνως πρὸς τὴν ἐπιθυμίαν Ὑμῶν, ὅσα ἐκ τοῦ προχείρου εἶχον τὴν τιμὴν ν' ἀναφέρω κατὰ τὴν συνεδρίασιν τῆς 30ῆς Μαρτίου, καὶ θὰ χαρῶ ἐὰν αἱ προσπάθειαι Ὑμῶν ἐπιτύχωσιν πρὸς τὸ καλὸν τῆς Ἑλληνικῆς αὐτῆς βιομηχανίας.

Τῇ 9 Ἀπριλίου 1921

Ὅλως Ὑμέτερος
Χ. ΛΙΤΣΟΣ
Μηχανικὸς

ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ ΡΩΤΑ
Ἐπιθεωρητοῦ τῶν Δημοσίων Ἔργων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ἐπὶ μελέτης Μηχαν. κ. Π. Παρασκευοπούλου
ἐπιγραφομένης Συμβολὴ
εἰς μελέτην ὑπολογισμοῦ τῶν Πλαισίων.

Ἐν τῇ ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐπιγραφὴν μελέτῃ δημοσιευθείσῃ ἐν ἐπιστημονικῷ τεύχει ἀρ. 2, ἔτους 1915, Δελτίου Ὑπουργείου Συγκοινωνίας, παρεισέφρυσαν σφάλματα ὧν θεωροῦμεν ἀναγκαίαν τὴν διόρθωσιν, ἵνα μὴ παραπλανῶνται οἱ Μηχανικοὶ οἵτινες τυχὸν θὰ ἐχρησιμοποίουν τοὺς ἐν τῇ εἰρημένῃ μελέτῃ ἐξαγομένους ἐσφαλμένους τύπους.

α' Ἐν σελίδι 243 προμνησθέντος τεύχους ἀναγράφεται, ἐκ παραδρομῆς προφανῶς, ὁ τύπος τῆς ῥοπῆς κάμψεως τοῦ στύλου ΑΒ, ὡς ἕπεται·

$$M = Hx - M_A,$$

ἀντὶ τοῦ γραπτέου

$$M = H(h - x) - M_A.$$

Παρατηρητέον ὅτι τὸ σφάλμα τοῦτο δὲν ἀσκεῖ ἐπίδρασιν κατὰ τὴν εἶτα γενομένην ὁλοκλήρωσιν διότι, μεταξὺ τῶν ὁρίων μηδὲν καὶ α, τυγχάνουσιν, ὡς γνωστόν, ἴσαι αἱ παραστάσεις

$$\int_0^\alpha x^m\,dx = \int_0^\alpha (\alpha - x)^m\,dx$$

Ἐν τῇ συνεχείᾳ ὑποτίθεται σταθερὰ ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τῶν στοιχείων τοῦ πλαισίου, παραμελητέον δὲ τὸ κατὰ μῆκος ἔργον παραμορφώσεως κατ' ἐφελκυσμὸν ἢ θλῖψιν.

β' Ἐσφαλμένα προφανῶς εἰσὶ τὰ ἐξαγόμενα τῆς περιπτώσεως 2 τῆς ἐλεγχομένης μελέτης, ἤτοι στύλου ΓΔ ἔχοντος γιγγλυμωτὴν τὴν βάσιν (σελ. 249 προμνησθέντος τεύχους), διότι ἡ ἐπίλυσις ἐπεδιώχθη διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς ἐκ τῆς στατιστικῆς, ἀφ' ἑνός, προκυπτούσης σχέσεως.

$$M_A = Vl - P\alpha$$

καὶ τῶν δύο γενικῶν ἀνηγμένων ἐξισώσεων (4) καὶ (6) ἀφ' ἑτέρου, αὐθαιρέτως ἐκλεγομένων μεταξὺ τῶν ἐξαχθεισῶν τριῶν γενικῶν τοιούτων. Ἂν ἀντὶ τῆς μιᾶς τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων ἐχρησιμοποιεῖτο ἡ (5), θὰ προέκυπτον ἀλλοῖα ἀποτελέσματα, πλὴν ἐσφαλμένα καὶ ταῦτα. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ὡς ἄνω γενικῶν ἐξισώσεων, τὸ πρόβλημα φαίνεται ἐπιδεκτικὸν διαφόρων λύσεων, ἐνῷ πράγματι οὐδόλως συμβαίνει τοῦτο.

Ἐμφανίζεται δὲ ἡ ἀοριστία αὕτη διότι, κατὰ τὴν ἐπιχειρηθεῖσαν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος, ἐλησμονήθη ὅτι ἐν τῇ ἐφαρμογῇ τοῦ θεωρήματος τοῦ Castigliano, ὁ προσδιορισμὸς τῆς παραγώγου τοῦ ἔργου παραμορφώσεως ὡς πρὸς τὴν ἑκάστοτε ἄγνωστον ἀντίδρασιν ἀπαιτεῖ τὸν ἐκ τῶν προτέρων καθορισμὸν *ῥητῶν* ἐξισώσεων ἐνεργείας, καταρτιζομένων συναρτήσει τῶν ἀγνώστων τούτων ἀντιδράσεων, ῥοπῶν ἢ δυνάμεων. Ὡς τοῦτο νοεῖται εὐχερῶς, ἐν ταῖς ἀρχικαῖς ἐξισώσεσι ταύταις πρέπει, κατὰ κανόνα, νὰ εἰσάγηται πρότερον ἡ ἀμοιβαία τῶν ἀγνώστων τούτων σχέσις, ἡ τυχὸν ἐκ τῆς στατιστικῆς πηγάζουσα. Οὕτως ἐπιλαμβανόμενοι τοῦ ζητήματος, αἴρομεν πᾶσαν ἀοριστίαν, διότι δὲν δυνάμεθα τότε νὰ ἔχωμεν ἀριθμὸν ἐξισώσεων μείζω τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων.

Τὴν ἀρχὴν ταύτην ἐφαρμόζομεν, ἀνασκευάζοντες ὡς ἕπεται τὴν λύσιν.

Ἔστωσαν Α, Γ, Δ (Σχ. 4 προμνησθέντος τεύχους) αἱ ἀφετηρίαι τῶν τετμημένων τῶν τριῶν τοῦ πλαισίου στοιχείων, ἐφ' ὧν αἱ ῥοπαὶ κάμψεως ἔσονται

ἐπὶ ΑΒ. . . $M=Hx-\mu=Hx-Vl+P\alpha$

διότι $\mu=Vl-P\alpha$

ἐπὶ ΒΓ. . . $M=Hh-Vx$

» ΓΔ. . . $M=Hx$

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Castigliano χορηγεῖ

$$EI\frac{d\tau}{dH}=\int_o^h (Hx-Vl+P\alpha)\,l\,dx+\int_o^l (Hh-Vx)\,h\,dx+\int_o^h Hx^2\,dx=o$$

$$EI\frac{d\tau}{dV}=\int_o^h (Hx-Vl+P\alpha)\,l\,dx+\int_o^l (Hh-Vx)\,x\,dx=o$$

ὅθεν διὰ $k=\frac{h}{l}$

$$Hk\left(2+\frac{4}{3}k\right)-V(1+k)\frac{P\alpha k}{l}=o$$

$$Hk\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\right)-V\left(\frac{1}{3}+k\right)+\frac{P\alpha k}{l}=o$$

ὑφίσταται δὲ καὶ ἡ, ἐκ τῆς στατιστικῆς, ἐξίσωσις τῆς ῥοπῆς πακτώσεως ἐν Α, ἤτοι

$$M_A=\mu=Vl-P\alpha.$$

Τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων ἡ ἐπίλυσις χορηγεῖ

$$H=\frac{P\alpha}{l}\,\frac{12}{3+26\,k+15\,k^2}$$

$$V=\frac{P\alpha k}{l}\,\frac{3\,(9+5\,k)}{3+26\,k+15\,k^2}$$

$$\mu=-P\alpha\,\frac{3-k}{3+26\,k+15\,k^2}$$

Τοιαῦται αἱ πραγματικαὶ τῶν ἀγνώστων τιμαὶ ἀντὶ τῶν ἐν τῇ ἐλεγχομένῃ μελέτῃ καθοριζομένων τοιούτων, ἤτοι

$$H=\frac{P\alpha}{h}\,\frac{3}{2\,(k+2)}$$

$$\mu=P\alpha\,\frac{1}{k+2}$$

γ΄ Ἐσφαλμένα ὡσαύτως ἐν τῇ ἐλεγχομένῃ μελέτῃ ταύτῃ, διὰ τοὺς αὐτοὺς οὓς ἐξεθήκαμεν ἀνωτέρω λόγους, εἰσὶ τὰ ἐξαγόμενα τῆς περιπτώσεως 7, ἤτοι ἀρθρώσεως ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ στηρίγματος Γ (σελ. 252—Σχ. 9).

Ἔστωσαν Β καὶ Γ αἱ ἀφετηρίαι τῶν τετμημένων στύλου καὶ δοκοῦ, ἐφ' ὧν αἱ ῥοπαὶ κάμψεως ἔσονται διαδοχικῶς

$$M_1=-Hx-Vl+P\alpha$$

καὶ $M_2=-Vx$

ὅθεν

$$EI\frac{d\tau}{dH}=\int_o^h (Hx+Vl-P\alpha)\,x\,dx=o$$

$$EI\frac{d\tau}{dV}=\int_o^h (Hx+Vl-P\alpha)\,l\,dx+\int_o^l Vx^2\,dx=o$$

Διὰ $k=\frac{h}{l}$, αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀνάγονται εἰς

$$H\frac{k}{3}+\frac{V}{2}-\frac{P\alpha}{2l}=o$$

$$H\frac{k^2}{2}+V\left(\frac{1}{3}+k\right)-\frac{P\alpha k}{l}=o$$

προκύπτουσι δὲ αἱ τιμαὶ

$$V=\frac{3\,P\alpha k}{l\,(4+3k)}$$

$$H=\frac{6\,P\alpha}{h\,(4+3k)}$$

ἡ δὲ ῥοπὴ πακτώσεως μ ἐν Α ἔσται

$$\mu=-Hh-Vl+P\alpha=-\frac{2\,P\alpha}{4+3\,k}$$

Τοιαῦται αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ ἀντὶ τῶν ἑπομένων, ἐν τῇ ὑπὸ κρίσιν μελέτῃ, ἀναγραφομένων ἐσφαλμένων τοιούτων

$$V=\frac{P\alpha}{l}-\frac{P\alpha}{l}\,\frac{2}{k+2}$$

$$H=\frac{3\,P\alpha}{h\,(k+2)}$$

$$\mu=\frac{P\alpha}{k+2}$$

Ἐπὶ ἐντελῶς ὁμοίας περιπτώσεως ἐξάγει ὁ Bergeron, ἐν σελίδι 241 «Calcul des charpentes d'après les méthodes nouvelles», τοὺς ἀκολούθους τύπους, ἐν οἷς ἀντικατεστήσαμεν τὰ στοιχεῖα T, R, L διὰ τῶν ἀντιστοίχων αὐτοῖς H, P, α

$$H=+\frac{P\alpha l}{2\,h\left(\frac{1}{3}l+\frac{1}{4}h\frac{I_1}{I_2}\right)}$$

$$V=+\frac{P\alpha h}{4\,l\left(\frac{1}{3}l\frac{I_2}{I_1}+\frac{1}{4}h\right)}$$

$$\mu=-\frac{P\alpha l}{6\left(\frac{1}{3}l+\frac{1}{4}h\frac{I_1}{I_2}\right)}$$

Ποιοῦντες $k=\frac{h}{l}$ καὶ $I_1=I_2$, ἀνευρίσκομεν καὶ αὖθις ἀπαραλλάκτους τοὺς ἀνωτέρω παρ' ἡμῶν καθορισθέντας τύπους.

δ΄ Ἐσφαλμένη ὡσαύτως ἐλέγχεται ἀμέσως ἡ λύσις τῆς περιπτώσεως 8, ἤτοι ἀρθρώσεως ἐν Α, πακτώσεως δὲ ἐν Γ (σελ. 254 προμνησθέντος τεύχους). Τὸ σφάλμα καταδηλοῦται εὐχερῶς ἐκ τῆς ἑπομένης παρατηρήσεως.

Εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀμοιβαίας πακτώσεως ὀρθοστάτου καὶ δοκοῦ, ἡ ἐπὶ τοῦ ὀρθοστάτου ἀναπτυσσομένη ῥοπὴ πακτώσεως ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν ῥοπῶν πακτώσεως, τῶν ἀναπτυσσομένων ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ ἀφ' ἑνὸς καὶ ἐπὶ ἀριστεροῦ ἀφ' ἑτέρου τῷ ὀρθοστάτῃ τμήματος τῆς ἐπ' αὐτοῦ πεπακτωμένης δοκοῦ. [Ἡ σύμπτωσις ὅμως αὕτη τῶν ῥοπῶν πακτώσεως δὲν ἀποτελεῖ ἀναγκαίως ἀπόδειξιν τῆς ἀκριβείας τῶν γενομένων ὑπολογισμῶν, διότι ἐνδέχεται νὰ εὑρισκώμεθα καὶ πρὸ ταυτότητος (identité)].

Ἐφαρμόζοντες τ' ἀνωτέρω διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ὑπ' ἀρ. 34,35 καὶ 36 τῆς ὑπὸ ἔλεγχον μελέτης χορηγουμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων

$$H = \frac{P\alpha}{h} \cdot \frac{3}{3+4k}$$

$$V = \frac{P\alpha}{l} \frac{6k}{3+4k}$$

$$M_\Gamma = P\alpha \frac{2k-3}{3+4k},$$

εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας ἐπὶ τοῦ σημείου Β ροπὰς πακτώσεως

α'— Τοῦ μὲν τμήματος $B\Gamma = M_\Gamma - Vl = \quad -P\alpha$

β'— Τοῦ δὲ » BP τῆς αὐτῆς δοκοῦ $= -P\alpha$

Διαφορὰ μηδὲν

γ'— Τοῦ δὲ στύλου $AB = Hh = \frac{3P\alpha}{3+4k}$

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν

$$\frac{3P\alpha}{3+4k} = o$$

τοῦθ' ὅπερ οὐδόλως συμβαίνει.

Τηροῦντες τὰς αὐτὰς ὡς καὶ πρότερον ἀφετηρίας τετμημένων καὶ ὀνομάζοντες $\mu' = M_\Gamma$ τὴν ἐν Γ ροπὴν πακτώσεως, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας ροπὰς κάμψεως

Δοκοῦ ΒΓ . . . $M_1 = -\mu' - Vx$

Στύλου ΑΒ . . . $M_2 = -Hx - \mu' - Vl + P\alpha$

$$-\mu' = Hh + Vl - P\alpha$$

Αἱ ὡς ἄνω ροπαὶ γενήσονται συνεπῶς

$$M_1 = Hh + V(l-x) - P\alpha$$

$$M_2 = H(h-x),$$

αἱ δ' ἐξισώσεις τοῦ ἐλαχίστου ἔργου ἔσονται

$$EI\frac{d\tau}{dH} = \int_o^l [Hh + V(l-x) - P\alpha]\, h dx +$$

$$+ \int_o^h H(h-x)^2 dx = o$$

$$\frac{d\tau}{dV} = \int_o^l [Hh + V(l-x) - P\alpha](l-x)\, dx = o$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων προκύπτουσιν αἱ αὐταὶ ὡς ἄνω τῆς ἐλεγχομένης μελέτης τιμαὶ τῶν ἀγνώστων Η καὶ V. Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ἰσορροπίας πρὸς τὸ σημεῖον Γ, ἤτοι

$$-\mu' = Hh + Vl - P\alpha,$$

ἀντὶ τῆς ἐσφαλμένης ὡς ἄνω τιμῆς τῆς ροπῆς πακτώσεως M_Γ, εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην ἀκριβῆ τοιαύτην, ἤτοι

$$\mu = -\frac{2P\alpha k}{3+4k}$$

ε' Ἐσφαλμένη ἐξ ὁλοκλήρου ἐλέγχεται ἡ περίπτωσις 10 τῆς ὑπὸ κρίσιν μελέτης, ἤτοι ἀρθρώσεων εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, ὡς διατυποῦται ἐν σελ. 254 προμνησθέντος τεύχους.

Πράγματι, διὰ τὴν πρὸς τὸ σημεῖον Α ἰσορροπίαν, πρέπει νὰ πληρῶται ἡ σχέσις

$$Hh + Vl - P\alpha = o$$

Εἰσάγοντες τὰς ἐν τῇ ἐλεγχομένῃ μελέτῃ ἐσφαλμένως ὁριζομένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἤτοι

$$V = \frac{P\alpha}{l}$$

$$H = \frac{3P\alpha}{2h(3+k)},$$

εὑρίσκομεν

$\frac{3P\alpha}{2(3+k)} + P\alpha - P\alpha =$ ποσὸν αἰσθητῶς διάφορον τοῦ μηδενός, πρὸς ὃ ἔδει νὰ ἰσῶται.

Λαμβάνομεν ὡς ἀφετηρίας τετμημένων τὰς ἀρθρώσεις Α καὶ Γ, ὁρίζοντες ὡς ἕπεται τὰς ροπὰς κάμψεως

Δοκοῦ ΒΓ. . . $M_1 = -Vx$

Στύλου ΑΒ . . $M_2 = -Hx = (Vl - P\alpha)\frac{x}{h}$

διότι $Hh = Vl - P\alpha$

Ὅθεν, ἐκ τοῦ θεωρήματος Castigliano, ἔχομεν

$$EI\frac{d\tau}{dV} = \int_o^l Vx^2 dx + \int_o^h (Vl - P\alpha) \times$$

$$\times\, l\frac{x^2}{h^2} dx = o$$

$$\text{ἤτοι } \frac{Vl^3}{3} + (Vl - P\alpha)\, l\frac{h}{3} = o$$

ὅθεν

$$V = \frac{P\alpha k}{l(1+k)}$$

$$H = \frac{P\alpha}{h(1+k)}$$

ς' Ἐν τέλει, δι' ἁπλῆν ὑπόμνησιν, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐν σελίδι 247 προμνησθέντος τεύχους ἀναγραφόμενοι, ἀκριβεῖς ἄλλωστε, γενικοὶ τύποι (7) καὶ (8) τῆς ἐλεγχομένης μελέτης, ἤτοι

$$H = \frac{P\alpha}{2h} \frac{18k + 3}{6k^2 + 13k + 2}$$

$$V = \frac{P\alpha}{l} \frac{6k^2 + 12k}{6k^2 + 13k + 2},$$

ἁπλοποιοῦνται ὡς ἕπεται, εὐχερεστέρας καθιστωμένης τῆς χρήσεως αὐτῶν

$$H = \frac{3P\alpha}{2h(2+k)}$$

$$V = \frac{6P\alpha k}{l(1+6k)}.$$

Ἐν Ἀθήναις 2 Μαΐου 1921