



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

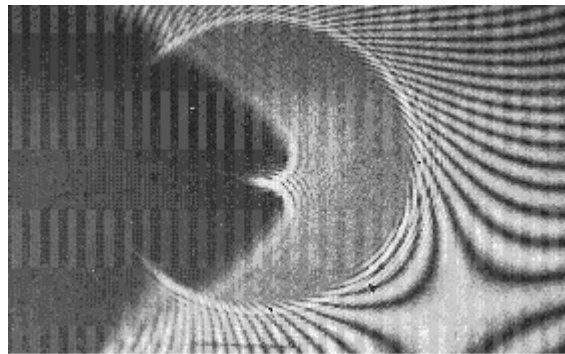
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΡΩΓΜΩΝ ΚΑΙ
ΕΓΚΟΠΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ**

ΣΤΕΦΑΝΟΣ Π. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Γ. Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ: Δ. ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ
Δ. ΠΑΖΗΣ
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στη μητέρα μου για τα χρόνια που αφιέρωσε για μένα και την μόρφωση μου. Χωρίς την πολύτιμη αρωγή της σίγουρα οι επόμενες σελίδες δεν θα ακολουθούσαν.

Στην οικογένεια μου , τη σύζυγο μου και τους δυο μου γιους , για την πολύτιμη βοήθεια αλλά και την κατανόηση που έδειξαν όχι μόνο κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας αλλά κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τον υπολογισμό των συντελεστών των τάσεων με την οπτική μέθοδο των καυστικών. Η οπτική μέθοδος των καυστικών, μια πειραματική μέθοδος, που βασίζεται στην κλασική καυστική. Το μέγεθος και η μορφή της καυστικής εξαρτάται από τη συγκέντρωση των τάσεων και τις οπτικές ιδιότητες του υλικού.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται η θεωρία των ρωγμών καθώς και οι τύποι ρωγμών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο η οπτική μέθοδος των καυστικών, εφαρμογή της μεθόδου σε ισότροπα υλικά, καθώς και η ανάλυση του ελαστικού προβλήματος της εγκάρσιας ρωγμής.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξισώσεις των καυστικών για εγκοπή τύπου V, γίνεται η περιγραφή του πειράματος και η σύγκριση των θεωρητικών και πειραματικών δεδομένων.

Λέξεις Κλειδιά:

- ΚΑΥΣΤΙΚΗ
- ΡΩΓΜΗ
- ΕΓΚΟΠΗ
- ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο (ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ)	
1.1 ΓΕΝΙΚΑ	3
1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ WESTERGAARD	4
1.3 ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΡΩΓΜΗΣ	6
1.4 ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ-I	7
1.5 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΥΠΟΣ-II	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο (ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ)	
2.1 ΓΕΝΙΚΑ	13
2.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΠΤΙΚΟΥ ΔΡΟΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ	14
2.3 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	18
2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ	22
2.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ	26
2.6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΡΩΓΜΗΣ	32
2.7 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ	40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ V)	
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ – ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΕΓΚΟΠΩΝ ΤΥΠΟΥ V	42
3.2 ΧΑΡΑΞΗ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΕ ΕΓΚΟΠΕΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ V	47
3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ	59
3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΧΕΣΗΣ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΔΙΑΜΕΤΡΙΟΥ	62
3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ	66

3.6	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	
3.6.1	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ	68
3.6.2	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ	69
3.6.3	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	69
3.7	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	72

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ακόλουθη εργασία συντάχθηκε στα πλαίσια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Η ανάθεση της έγινε σε εμένα από τον Αναπληρωτή Καθηγητή του ΕΜΠ κ. Παπαδόπουλο Γεώργιο, τον οποίο ευχαριστώ πολύ για την εμπιστοσύνη που έδειξε σε ότι έχει να κάνει σχετικά με την ανάθεση του εν λόγω θέματος. Εδώ θα πρέπει να αναφέρω το εξαιρετικό κλίμα το οποίο υπήρχε σε όλη τη διάρκεια της διπλωματικής και την πολύτιμη συνδρομή του όταν αυτό του ζητήθηκε από εμένα, παρά τις πολλές επαγγελματικές του υποχρεώσεις.

Επιπρόσθετα θα ήθελα να ευχαριστήσω και την Επίκουρο Καθηγήτρια του ΕΜΠ κ. Βαρδαλούκα η οποία παρά τις υποχρεώσεις τις οποίες έχει δεν με καθυστέρησε κατά την εκτέλεση του πειράματος.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συμπαράσταση και την κατανόηση που μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2008

Στέφανος Π. Παπαδόπουλος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό από τη Μηχανική του Παραμορφωσιμου σώματος ότι στο άκρο της ρωγμής συγκεντρώνονται τάσεις που θεωρητικά έχουν άπειρη τιμή. Τα σημεία αυτά λέγονται ιδιόμορφα σημεία (singular points). Σ' αυτά τα σημεία επικεντρώνεται το ενδιαφέρον του μηχανικού, διότι είναι γνωστό ότι η αστοχία στοιχείου της κατασκευής προέρχονται από την ύπαρξη τέτοιου είδους ιδιόμορφων σημείων. Ο υπολογισμός των τάσεων σε ιδιόμορφα σημεία γίνεται με θεωρητικές μεθόδους όπως οι υπολογιστικές μέθοδοι, πεπερασμένα στοιχεία, ολοκληρωτικές εξισώσεις και αναλυτικές συναρτήσεις. Πειραματικά ο υπολογισμός των τάσεων γίνεται με τις γνωστές οπτικές μεθόδους.

Οι θεωρητικές μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται στη μαθηματική ανάλυση, έχουν αρκετές παραδοχές και έτσι πολλές φορές τα αποτελέσματα απέχουν πολύ των πραγματικών καταστάσεων μιας κατασκευής. Αντιθέτως οι πειραματικές μέθοδοι εφαρμόζονται είτε απ' ευθείας στην κατασκευή είτε σε προσομοιώματα (μοντέλα) της κατασκευής από τα υλικά που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή. Οι πειραματικές μέθοδοι προσφέρουν στον ερευνητή μεγαλύτερη ευελιξία σε σύγκριση με τις θεωρητικές στον υπολογισμό των εντατικών καταστάσεων που επικρατούν σε τμήματα μιας κατασκευής ή στον υπολογισμό της συμπεριφοράς ενός υλικού υπό ορισμένες εξωτερικές φορτίσεις. Οι πειραματικές μέθοδοι σκοπό έχουν να υπολογίσουν τις τάσεις σε κάθε ιδιόμορφο σημείο του σώματος υπολογίζοντας πειραματικά είτε τους συντελεστές εντάσεις των τάσεων είτε τις μετατοπίσεις και εξ αυτών τις παραμορφώσεις και τάσεις. Η πειραματική μέθοδος με την οποία υπολογίζονται οι συντελεστές έντασης των τάσεων είναι αυτή των Καυστικών.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών βασίζεται στην κλασική καυστική η οποία είναι μια ιδιόμορφη καμπύλη που σχηματίζεται από τη συγκέντρωση των αποκλινόντων ανακλώμενων ακτινών που προέρχονται από την πρόσπτωση φωτεινής δέσμης πάνω σε ένα κοίλο η κυρτό κάτοπτρο. Έτσι η μηχανική ιδιομορφία γύρω από το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάση των νομών της οπτικής σε οπτική ιδιομορφία δηλαδή σε μια φωτεινή καμπύλη στο χώρο, την καυστική. Το μέγεθος και η μορφή της καυστικής, η οποία προβάλλεται πάνω σε πέραςμα αναφοράς εξαρτάται από τη συγκέντρωση των τάσεων και τις οπτικές ιδιότητες του υλικού. Κατόπιν απλής μαθηματικής ανάλυσης υπολογίζεται ο συντελεστής

συγκέντρωσης των τάσεων γύρω από τα άκρα της ρωγμής. Με τη μέθοδο των καυστικών μελετάται μόνο η εγγύς του άκρου της ρωγμής περιοχή η οποία δε δύναται να μελετηθεί με άλλη πειραματική μέθοδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

1. ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η Μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος ασχολείται με τη μελέτη της συμπεριφοράς των σωμάτων που υπόκεινται σε εξωτερικές φορτίσεις. Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και οι τάσεις σε κάθε σημείο του σώματος. Όπως έχει πειραματικά αποδειχθεί όταν τα εξωτερικά φορτία είναι μικρά τότε οι παραμορφώσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των εξωτερικών φορτίων. Η ιδιότητα αυτή των σωμάτων χαρακτηρίζεται γραμμική ελαστικότητα. Στα πλαίσια της ελαστικότητας θα αντιμετωπισθεί η Μηχανική των Θραύσεων των υλικών και κυρίως των επιπέδων προβλημάτων ρωγμών.

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στη κλασική θεωρία ελαστικότητας, για καταστάσεις που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης ή της ρηγματώσης των υλικών, πραγματοποιείται δια ανάγωσης του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή κατάσταση του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα εφόσον τα εφαρμοσμένα φορτία προκαλούν μικρές παραμορφώσεις των συνόρων.

Μετά από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου εμφανίζονται ρωγμές οι οποίες αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος των μετατοπίσεων. Έχουμε επομένως αλλαγή των συνόρων και έτσι ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος διότι ανάλογα με το πρόβλημα απαιτούνται προσθετές συνθήκες που οδηγούν στο καθορισμό των συνόρων.

Προς αποφυγή των ανυπέρβλητων δυσχερειών που παρουσιάζονται στη θεωρία της ελαστικότητας το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: <<Ζητείται η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ελαστικότητας εντός περιοχής περικλειομένης υπό συνόρου, στην οποία υπάρχουν ρωγμές, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες>>.

Η ρωγμή μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί σαν μια κοιλότητα εντός του σώματος της οποίας η απόσταση των απέναντι παρειών των χειλών της είναι μικρή σχετικά με το μήκος της. Η πρώτη

πληρέστερη θεώρηση της δομής της ρωγμής παρά τα άκρα της οφείλεται στον A.A Griffith ο οποίος, με τη κλασική θεωρία της ελαστικότητας και τη λύση του Inglis, οδηγήθηκε σε απειρισμο των τάσεων παρά τα άκρα της ρωγμής και ότι τα άκρα της ρωγμής είναι στρογγυλά με ακτίνα καμπυλότητας της τάξεως της μοριακής αποστάσεως. Παρατηρείται ότι οι τάσεις στα άκρα των ρωγμών δύναται να είναι πεπερασμένες, εφόσον οι απέναντι παρειές της ρωγμής παρουσιάζουν στο υπόψη σημείο κοινή εφαπτόμενη και δεν είναι ελεύθερες τάσεων. Όμως, σε τέτοια μορφή συνόρων της ρωγμής αποδεικνύεται ότι η απελευθερουμένη ενέργεια δι'απειροστη μεταβολή των συνόρων της ρωγμής ισούται με μηδέν. Επομένως μόνο τέτοιου είδους καμπύλες δύναται να αποτελούν το σύνορο των εν ισορροπία ρωγμών. Εάν οι επιφάνειες της ρωγμής θεωρηθούν ελεύθερες τάσεων τότε για οποιαδήποτε μορφή συνόρων της ρωγμής οι τάσεις γίνονται άπειρες οπότε δε δύναται να υπάρχουν ρωγμές σε ισορροπία. Προς τούτο για να προκύψουν παραδεδεκτες λύσεις πρέπει να θεωρηθούν μοριακές δυνάμεις συνάφειας παρά τα άκρα της ρωγμής.

1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ WESTERGAARD

Τα δισδιάστατα προβλήματα των ρωγμών μπορεί να επιλυθούν κατά τον Westergaard, εφόσον η τασική συνάρτηση Airy ορισθεί δια της σχέσης:

$$F = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (1.1)$$

όπου Z αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$, και:

$$Z = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (1.2)$$

Εκ των σχέσεων Cauchy-Riemann συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = \operatorname{Re} Z \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im} \bar{Z}) = -\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} \bar{Z}) = \operatorname{Im} Z \quad (1.4)$$

$$\nabla^2(\operatorname{Re} \bar{Z}) = \nabla^2(\operatorname{Im} \bar{Z}) = 0 \quad (1.5)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτουν:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} Z, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = y \operatorname{Re} Z \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = y \operatorname{Re} Z' \quad (1.8)$$

όποτε δια αντικατάστασης προκύπτουν οι τάσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (1.9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad (1.10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (1.11)$$

Επομένως, η μέθοδος Westergaard ανάγεται στην εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης Z , με εξαίρεση το υπό της ρωγμής οριζόμενο διάστημα, με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι:

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1.12)$$

η οποία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι συνάρτηση Westergaard για τη ρωγμή :

$$-\alpha < x < \alpha, \quad y=0 \quad (1.13)$$

εντός απείρου σώματος υπο διαξονική φόρτιση σ στο άπειρο με μήκος ρωγμής 2α .

Άλλες μορφές της τασικής συνάρτησης Airy είναι:

$$F = -y \operatorname{Re} \bar{Z} \quad (1.14)$$

που περιγράφει το δεύτερο τύπο παραμόρφωσης και ομοίως αποδεικνύεται ότι οι τάσεις παρέχονται από τις σχέσεις:

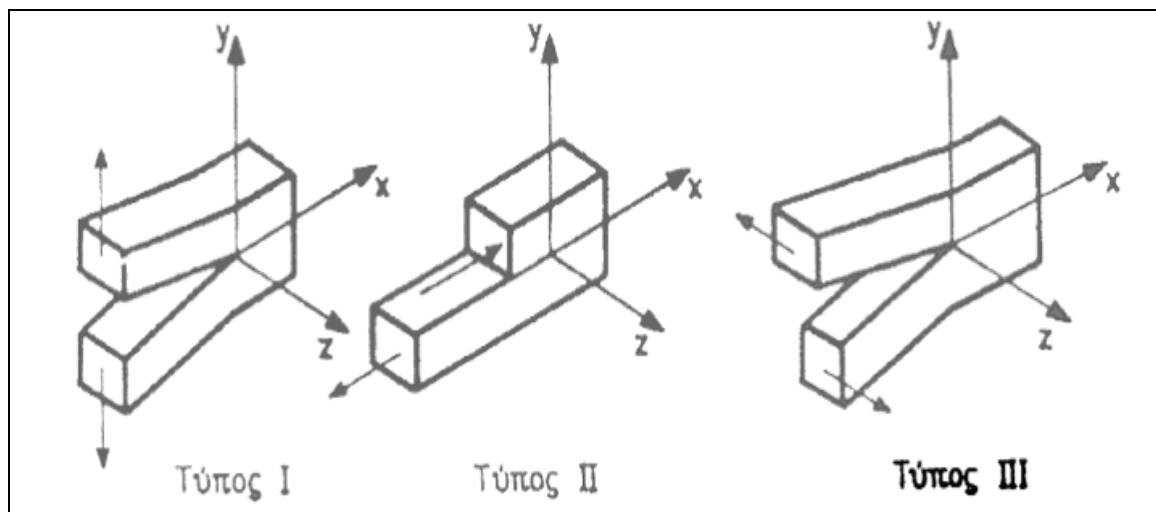
$$\sigma_{xx} = 2 \operatorname{Im} Z + y \operatorname{Re} Z' \quad (1.15)$$

$$\sigma_{yy} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (1.16)$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (1.17)$$

1.3 ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Ο G.R. Irwin, με την προϋπόθεση ότι οι ρωγμές εντός των στερεών δύναται να θεωρηθούν ως επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος της μετατόπισης, παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακίνησης των χειλέων της ρωγμής. Οι τρεις αυτοί τύποι παραμορφώσεις παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 1.1. Οι τρεις βασικοί τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής.

1.4 ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -I

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης. Η φασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο -I δίνεται απλή σχέση (1.12). Μεταφέροντας τη συνάρτηση αυτή σε σύστημα αξόνων δια του άκρου της ρωγμής, αντί τοποθετημένου στο μέσο της ρωγμής και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό:

$$\zeta = z - a \quad (1.18)$$

προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{\sigma(\zeta + a)}{\sqrt{\zeta} \cdot \sqrt{\zeta + 2a}} \quad (1.19)$$

Η ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{\zeta + 2a}}$ αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων του ζ κατά

Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta + 2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2a} \right) + \frac{1*3}{2*4} \left(\frac{\zeta}{2a} \right)^2 - \dots \right] \quad (1.20)$$

όποτε η σχέση (1.19) γίνεται:

$$Z_I = \frac{\sigma(\zeta + a)}{\sqrt{\zeta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2a} \right) + \frac{1*3}{2*4} \left(\frac{\zeta}{2a} \right)^2 - \dots \right] \quad (1.21)$$

Για προσεγγιστική λύση παραλείπονται οι δυνάμεις του $\left(\frac{\zeta}{a} \right)$, εφόσον το ζ είναι πολύ μικρό σε σχέση προς το a , οπότε προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad (1.22)$$

Θέτοντας:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.23)$$

στη σχέση (1.22) προκύπτει:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad (1.24)$$

Η σταθερά K_I είναι χαρακτηριστική του τύπου –I και ονομάζεται εφελκυστικός συντελεστής έντασης των τάσεων (stress intensity factor). Επίσης ο K_I δύναται να προκύψει από τη σχέση:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi} \sqrt{z - a} \sigma_{yy} \quad (1.25)$$

Θέτοντας :

$$\zeta = re^{i\theta} \quad (1.26)$$

Και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (1.9)-(1.11), προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.27)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.28)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.29)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.30)$$

Η προσεγγιστική αυτή λύση ισχύει για $0 < r/a \ll 1$.

Από το νόμο του Hooke προκύπτουν οι μετατοπίσεις u και v :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (1.32)$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις σ_{xx} και σ_{yy} από τις σχέσεις (1.27) –(1.29) στις σχέσεις (1.31)-(1.32) αντίστοιχα προκύπτουν οι μετατοπίσεις κατόπιν ολοκλήρωσης.

Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση ισχύει:

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.33)$$

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.34)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.35)$$

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση ισχύει:

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.36)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.37)$$

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I προκύπτει από τη σχέση:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \sqrt{2\pi} \sqrt{z - \alpha} \sigma_{yy} = \lim \sqrt{2\pi} \sqrt{\zeta} \lim \sigma_{yy} = \lim \sqrt{2\pi} \sqrt{re^{i\theta}} \sigma_{yy} \Big|_{\theta=0} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} \end{aligned} \quad (1.38)$$

1.5 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -II

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν η μια σχετικά προς την άλλη προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ίδιου επιπέδου. Η φασική συνάρτηση Wastergaard για τον τύπο -II δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad \text{με} \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi\alpha} \quad (1.39)$$

όπου η σταθερά K_{II} είναι η χαρακτηριστική του τύπου-II και ονομάζεται συνεπιπέδος συντελεστής έντασης των τάσεων. Από τις σχέσεις (1.15)-(1.17) προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες:

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.40)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.41)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.42)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \mu\epsilon \quad 0 < \frac{r}{\alpha} \ll 1 \quad (1.43)$$

Οι μετατοπίσεις υπολογίζονται όπως και στο τύπο-I από το νόμο του Hooke. Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι:

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.44)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.45)$$

και για την επίπεδη εντατική κατάσταση είναι:

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.46)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\nu-1}{\nu+1} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.47)$$

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_{II} προκύπτει από τη σχέση:

$$K_{II} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \quad (1.48)$$

Στο τρίτο τύπο παραμόρφωσης της ρωγμής δεν θα αναφερθούμε αφού τέτοιος τύπος ρωγμής δεν θα συναντηθεί στο πείραμα μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

2. ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στα προβλήματα ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και πλησίον της μικρής αυτής περιοχής οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες, το γεγονός αυτό καθιστά δυσχερή την επίλυση του προβλήματος δια των κλασικών μεθόδων πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων.

Κατά την δεκαετία του 70 αναπτύχθηκε πειραματική μέθοδος από τους Manogg και Π.Θεοχαρη, η οποία κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής παρά το άκρο της ρωγμής ιδιόμορφης περιοχής. Η πειραματική αυτή μέθοδος καλείται Οπτική Μέθοδος των Καυστικών και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής.

Με την πειραματική αυτή μέθοδο η επικρατούσα ιδιομορφία (singularity) των τάσεων παρά το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία η οποία μετρούμενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία για τη μελέτη της παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται από τη συγκέντρωση επί της ιδιόμορφης στο χώρο καμπύλης, η οποία καλείται Καυστική, των ακτινών Φώτος που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η Καυστική αυτή λαμβάνεται πάνω σε πέτασμα και αφού βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή επιτρέπει τη μελέτη αυτή.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών δύναται να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά, διαφανή και μη διαφανή αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο μοναδική για τη μελέτη των ρωγμών.

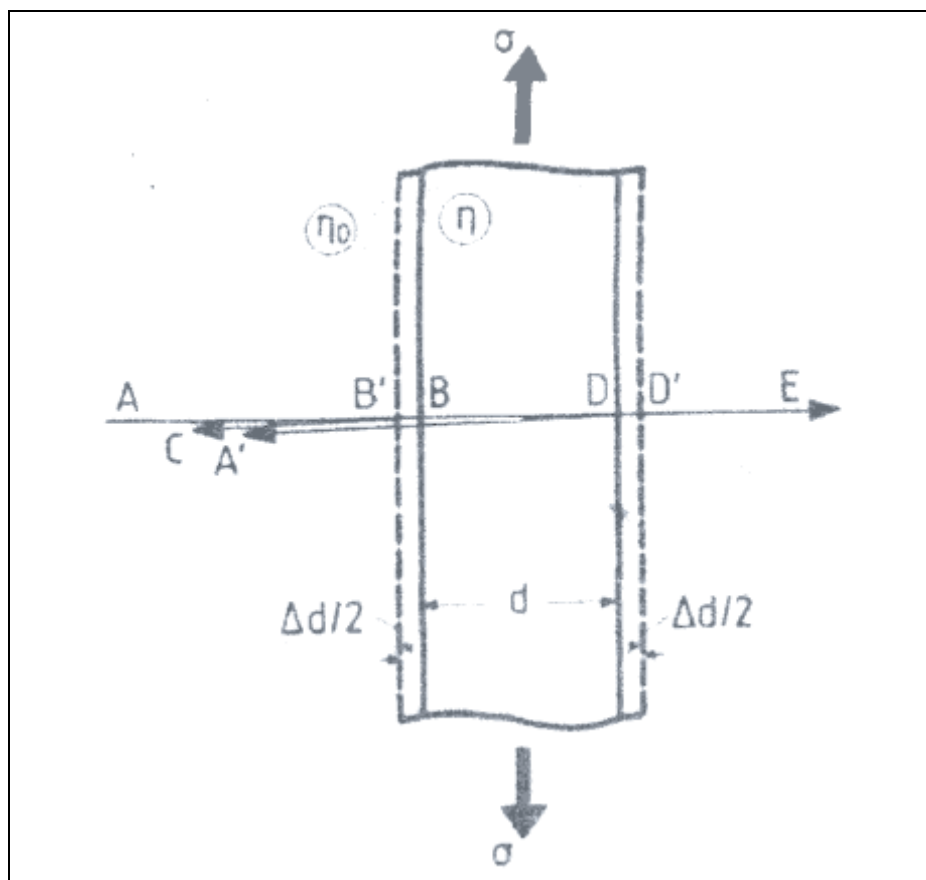
2.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΠΤΙΚΟΥ ΔΡΟΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ

Θεωρούμε φωτεινή ακτίνα ABDE Σχ 2.1 πολωμένη κατά τη διεύθυνση είτε της κύριας τάσης σ_1 είτε της κύριας τάσης σ_2 και προσπίπτουσα καθέτως επί της πλευρικής επιφάνειας της πλάκας ευρισκόμενης υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Για την περίπτωση της ανάκλασης της φωτεινής ακτίνας από την πίσω ενιφανεια της πλάκας, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των σημείων αναφοράς A και A' της φωτεινής ακτίνας ABDA' (AB=A'B) όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη είναι:

$$s_A = 2(AB)\eta_o + 2d\eta \quad (2.1)$$

όπου d είναι το πάχος της πλάκας, η_o είναι ο δείκτης διάθλασης του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο βρίσκεται η πλάκα μέσου και η είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού της αφόρτιστης πλάκας. Όταν η πλάκα φορτιστεί, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των σημείων, A και A', είναι:

$$S_{L1,2} = 2\left(AB - \frac{\Delta d}{2}\right)\eta_o + 2(d + \Delta d)\eta_{1,2} \quad (2.2)$$



Σχημα2.1:Κάθετη πρόσπτωση ακτίνας επί της πλάκας.

όπου Δd είναι η μεταβολή του πάχους της πλάκας που οφείλεται στη φόρτιση και $\eta_{1,2}$ είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού, της φορτισμένης πλάκας κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$, αντιστοίχως. Θέτοντας:

$$\eta_{1,2} = \eta + \Delta\eta_{1,2} \tag{2.3}$$

όπου $\Delta\eta_{1,2}$ είναι η μεταβολή του δείκτη διάθλασης, η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας $ABDA'$, που οφείλεται στη φόρτιση, δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta S_{r1,2} = S_{L1,2} - S_A = 2 \left[(\eta_{1,2} - \eta)d + \left(\eta - \frac{\eta_0}{2} \right) \Delta d \right] \tag{2.4}$$

Ομοίως, για την οπτική ακτίνα ABDE τη διερχόμενη δια της πλάκας η μεταβολή του οπτικού δρόμου που οφείλεται στη φόρτιση είναι:

$$\Delta S_r = (\eta_{1,2} - \eta)d + (\eta - \eta_o)\Delta d \quad (2.5)$$

Για τη φωτεινή ακτίνα ABC την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου είναι:

$$\Delta S_f = -\eta_o \Delta d \quad (2.6)$$

Ο αριθμός των κροσσών $N_{1,2}$ του λαμβανομένου συμβολογραμματος από τη συμβολή των ακτινών DA' και BC ανακλώμενων από την πίσω και την εμπρός επιφάνεια της πλάκας αντιστοίχως, σχετίζεται με τη διάφορα των οπτικών δρόμων $\delta_{1,2}$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_{1,2} = (\Delta S_{r1,2} - \Delta S_f) = 2[(\eta_{1,2} - \eta)d + \eta\Delta d] \quad (2.7)$$

δια μέσου της σχέσης:

$$N_{1,2} = \delta_{1,2} / \lambda \quad (2.8)$$

όπου λ είναι το μήκος του χρησιμοποιούμενου μονοχρωματικού φωτός.

Οι μεταβολές του δείκτη διάθλασης η κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 , στο επίπεδο τασικό πρόβλημα, δίνονται από το φωτοτασεοπτικό νόμο των Neumann-Maxwell:

$$\Delta \eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1 \varepsilon_{1,2} + b_2 (\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_3) \quad (2.9)$$

όπου b_1, b_2 σταθερές και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες παραμορφώσεις. Από την παραπάνω σχέση καθώς και τις (2.7) και (2.8) και λαμβάνοντας

υπόψη το νόμο του Hooke προκύπτει για τον αριθμό των κροσσών:

$$N_{1,2} = 2d(\alpha^* \sigma_{1,2} + b^* \sigma_{2,1}) \quad (2.10)$$

όπου οι σταθερές α^*, b^* δίνονται από τις σχέσεις:

$$\alpha^* = \frac{1}{E\lambda}(b_1 - 2\nu b_2 - \nu\eta) \quad (2.11)$$

$$b^* = \frac{1}{E\lambda}(b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu\eta) \quad (2.12)$$

Ομοίως η μεταβολή των οπτικών δρόμων των φωτεινών ακτινών ABDA' και ABDE που οφείλονται στη φόρτιση δίνονται από τις συνθήκες Favre(για τα οπτικώς ισότροπα υλικά):

$$b_1 = b_2 = b \quad (2.13)$$

$$\Delta s_{r1} = \Delta s_{r2} = 2c_r(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (2.14)$$

$$\Delta s_{t1} = \Delta s_{t2} = c_t(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (2.15)$$

$$a_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[(1 - 2\nu)b - \nu \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (2.16)$$

$$a_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu)b - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (2.17)$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$c_r = c_t - \frac{\nu\eta_o}{2E} \quad (2.18)$$

όπου οι ταυροπτικές ςταθερές c_r, c_t υπολογίζονται πειραματικά με τη Συμβολομετρική μέθοδο και θεωρητικά από την παρακάτω ςχέση:

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2} \quad (2.19)$$

2.3 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

Οι φωτεινές ακτίνες $r_{1,2}$ οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας ςχηματίζουν κυματικά μέτωπα:

$$S(x, y, z) = \text{σταθ} \quad (2.20)$$

Εάν $s(x, y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντίστοιχης φωτεινής ακτίνας μεταξύ επιπέδων παράλληλων προς το μέσο επίπεδο της φορτισμένης πλάκας και κειμένων επί των παράπλευρων επιφανειών της πλάκας τότε ισχύει η ςχέση:

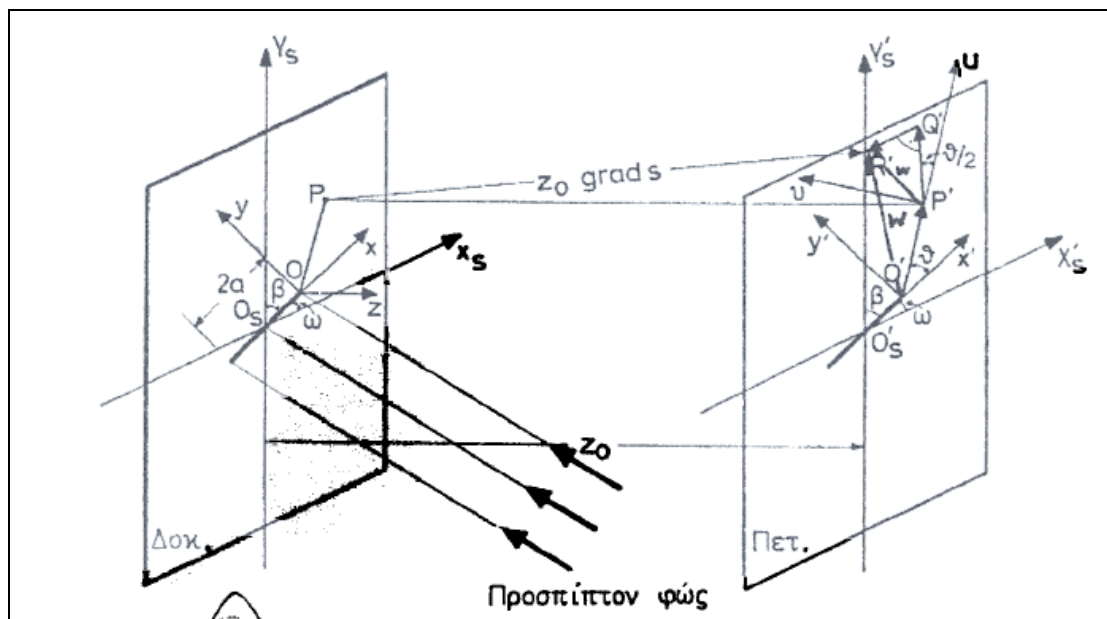
$$S(x, y, z) = z - s(x, y) \quad (2.21)$$

και από αυτή προκύπτει:

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j \quad (2.23)$$

όπου i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισυρθογωνίου συστήματος ςυντεταγμένων του οποίου η αρχή O ςυμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας Ox ςυμπίπτει με τον άξονα της

ρωγμής, ο άξονας Oz είναι κάθετος είναι στη πλάκα και ο οπτικός δρόμος από την πλάκα σε τυχαίο σημείο P είναι $s(x, y)$. (Σχ. 2.2)



Σχήμα 2.2: Γεωμετρία της ρηγματωμένης πλάκας και σχετική θέση της πλάκας και του πετάματος αναφοράς.

Η απόκλιση των ανακλώμενων φωτεινών ακτινών σε απόσταση z_0 από το μέσο του επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα w επί του επιπέδου $z = z_0$ και δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία της Εικονικής από τη σχέση :

$$w = -z_0 \text{grad}S(x, y, z) \quad (2.24)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις (2.21) και (2.22) προκύπτει:

$$w = -z_0 \text{grad}S(x, y) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (2.25)$$

Δεδομένου ότι τα κυματικά μέτωπα των προσπιπτουσών φωτεινών ακτινών επί του μέσου επιπέδου της πλάκας είναι παράλληλα προς το επίπεδο αυτό, ισχύει η σχέση:

$$s(x, y) = s_0 + \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (2.26)$$

όπου s_o παριστάνει σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο από την πλάκα και η οποία απαλείφεται κατά τον υπολογισμό των κλίσεων και $\Delta s_{r,t}$ παριστάνει τη μεταβολή του οπτικού δρόμου δια της πλάκας που δίνεται από τις σχέσεις (2.14)–(2.15). Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.23) στη σχέση (2.25) προκύπτει:

$$W = -z_o \text{grad} \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (2.27)$$

Οι αιχμές του διανύσματος W καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z = z_o$ περιβάλλουσα (καυστική), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες. Αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση (2.27) στις (2.14)–(2.15) προκύπτει το διάνυσμα απόκλισης για τη περίπτωση των οπτικώς ισότροπων υλικών με τα οποία θα ασχοληθούμε στη παρούσα εργασία.

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας έχουμε:

$$W = -2z_o dc_r \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.28)$$

Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη από τη πλάκα:

$$W = -z_o dc_t \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.29)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν γενικά να γράφουν:

$$W = -\varepsilon z_o dc_{r,t} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.30)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση φ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με το νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\alpha \quad (2.31)$$

και η γωνία α δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \text{grad} \frac{\Delta d}{2} = -\text{grad} \left[\frac{vd}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (2.32)$$

οπότε η γωνία ϕ είναι:

$$\phi = -\frac{vd}{E} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.33)$$

όπου:

$$c_f = \frac{v}{E} \quad (2.34)$$

είναι η τασεοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης w , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέταμα σε απόσταση z_o από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση:

$$w = -z_o dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.35)$$

Οι σχέσεις (2.30) και (2.35) γενικά μπορούν να γράφουν:

$$w = -\varepsilon z_o dc_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.36)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα στη πλάκα φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα (+), η συγκλίνουσα (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_m = \frac{z_o \pm z_i}{z_i} \quad (2.37)$$

όπου z_o είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα (δοκίμιο). Θέτοντας:

$$C^*_{r,t,f} = -\frac{\varepsilon z_o dc_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (2.38)$$

η σχέση (2.36) για τα οπτικώς ισότροπα υλικά, δύναται να γράφει:

$$w = C^*_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.39)$$

2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ

Κατά την επίλυση του επιπέδου εντατικού προβλήματος με τη μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2 = 4 \operatorname{Re} \phi(z) \quad (2.40)$$

όπου $\phi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Έστω ότι η $\phi(z)$ είναι της μορφής:

$$\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.41)$$

όπου $u(x, y)$ και $v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x, y που ικανοποιούν τις σχέσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.42)$$

Από τις σχέσεις (2.42) συμπεραίνεται ότι οι συναρτήσεις u, v ικανοποιούν την αρμονική συνάρτηση Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.43)$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα οπτικώς ισότροπα υλικά δίνεται από τη σχέση:

$$w = C^*_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C^*_{r,t,f} \text{grad} \operatorname{Re} \phi(z) = 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (2.44)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$w = 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.45)$$

Το διάνυσμα w εκφράζει η σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ τυχόντος σημείου P , στη γειτονία του άκρου της ρωγμής, της πλάκας και της εικόνας του πάνω στο πέρασμα αναφοράς τοποθετημένου σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Εάν η απόκλιση αυτή αναφερθεί στην αρχή O' του συστήματος συντεταγμένων $O'x'\psi'z'$ επί του πετάματος αναφοράς (Σχ.2.3), τότε το διάνυσμα απόκλισης εκφράζεται ως $W = w + z$. Στο μιγαδικό επίπεδο γράφεται:

$$W = w + z = x + iy + 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.46)$$

Το διάνυσμα W στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέρασμα αναφοράς, γράφεται:

$$W = x' + iy' \quad (2.47)$$

οπότε η σχέση (2.45) γράφεται:

$$x' + iy' = \left(x + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left(y + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.48)$$

και από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$x' = x + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$y' = y + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.50)$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάματος των αποκλίσεων των ακτινών. Η απόκλιση των ακτινών στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω από το άκρο της ρωγμής εξαρτάται από τη μεταβολή του πάχους και του δείκτη διάθλασης του υλικού. Οι αποκλίνουσες ακτίνες συγκεντρώνονται πάνω σε μια οριακή καμπύλη η οποία φωτίζεται έντονα. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **ΚΑΥΣΤΙΚΗ**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει ιδιόμορφη καμπύλη για το μέγεθος W . Οι συνθήκες για την ύπαρξη

ιδιομορφίας πληρούνται με το μηδενισμό της Ιακωβιανής διακρινουσας:

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0 \quad (2.51)$$

η οποία γράφεται λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.49) και (2.50) και αναπτύσσοντας την:

$$1 + 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C^{*2}_{r,t,f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.52)$$

Αντικαθιστώντας στη παραπάνω σχέση την εξίσωση Laplace προκύπτει η σχέση:

$$1 + 16C^{*2}_{r,t,f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.53)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ δυο φορές ως προς x , προκύπτει:

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.54)$$

Όμως $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ άρα η παραπάνω σχέση (2.54) γίνεται:

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (2.55)$$

Το μέτρο της (2.55) είναι :

$$|\phi''(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (2.56)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψη την εξίσωση $\nabla^2 u = 0$ προκύπτει:

$$|\phi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (2.57)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.57) στη σχέση (2.53) προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f} * \phi''(z)|^2 = 1 \quad (2.58)$$

και από αυτή προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f} * \phi''(z)| = 1 \quad (2.59)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής.

Αφού ισχύει:

$$\overline{\phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.60)$$

η σχέση (2.46) γίνεται:

$$W = z + 4C_{r,t,f} * \overline{\phi'(z)} \quad (2.61)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση της καυστικής.

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard Z , η οποία συνδέεται με την $\phi(z)$ με τη σχέση $2\phi(z) = Z$ η σχέση (2.59) εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται:

$$|2C_{r,t,f} * Z''(z)| = 1 \quad (2.62)$$

η δε εξίσωση της καυστικής (2.61), άμα λάβουμε υπόψη και το συντελεστή μεγενθυσης λ_m , γίνεται:

$$W = \lambda_m \left[z + 2C_{r,t,f} * \overline{Z'(z)} \right] \quad (2.63)$$

2.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ

Η συνάρτηση Westergaard για ρωγή μήκους $2a$ εντός απείρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}, K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.64)$$

όπου σ είναι η ομοιόμορφη τάση κάθετη προς τον άξονα της ρωγμής και ζ είναι η μιγαδική μεταβλητή η οποία δίνεται από τη σχέση $\zeta = re^{i\theta}$. Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.64) προκύπτει:

$$Z_I'(\zeta) = \frac{dZ_I}{d\zeta} = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}}\zeta^{-3/2} \quad (2.65)$$

$$\overline{Z_I'(\zeta)} = \overline{Z_I'(\bar{\zeta})} = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}}\bar{\zeta}^{-3/2} \quad (2.66)$$

$$Z_I''(\zeta) = \frac{d^2Z_I}{d\zeta^2} = \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}}\zeta^{-5/2} \quad (2.67)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.67) στη σχέση (2.62) της αρχικής καμπύλης προκύπτει:

$$\left| 2C_{r,t,f}^* \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \right| = 1 \quad (2.68)$$

από την οποία προκύπτει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης:

$$|\zeta| = r_o = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f}^* \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5} \quad (2.69)$$

και θέτοντας:

$$|C_{r,t,f}| = \frac{|C_{r,t,f}^*| K_I}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\varepsilon_{z,o} dc_{r,t,f} K_I}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} \quad (2.70)$$

η σχέση που εκφράζει την ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής γράφεται:

$$|\zeta| = r_o = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f} \right)^{2/5} \quad (2.71)$$

δηλαδή η αρχική καμπύλη είναι κύκλος ακτίνας r_o , η οποία ορίζεται από την παραπάνω σχέση.

Για την εξίσωση της καυστικής, από τη σχέση (2.63) προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = \zeta + C_{r,t,f} \bar{\zeta}^{-3/2} \quad (2.72)$$

και χρησιμοποιώντας την πολική μορφή της ζ από τη σχέση:

$$\zeta = r e^{iu}, \bar{\zeta} = r e^{-iu} \quad (2.73)$$

η σχέση (2.72) γράφεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r e^{i\theta} + C_{r,t,f}^* r^{-3/2} e^{3i\theta/2} \quad (2.74)$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.71), η σχέση (2.74) γίνεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{3i\theta/2} \right) \quad (2.75)$$

Ισχύει όμως ότι:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, e^{3i\theta/2} = \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \quad (2.76)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (2.75) προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + i r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.77)$$

και θέτοντας το $W = x'_{r,t,f} + iy'_{r,t,f}$ συγκρίνοντας με τη τελευταία σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών:

$$x'_{r,t,f} = \lambda_m r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.78)$$

$$y'_{r,t,f} = \lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.79)$$

Οι παραπάνω δυο σχέσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της λαμβανομένης παρά τα άκρα της ρωγμής καυστικής, η οποία είναι μια συμμετρική καμπύλη με άξονα συμμετρίας τον άξονα της ρωγμής. Από τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής συμπεραίνεται ότι αυτή είναι καμπύλη κλειστή, περατωμένη, και περιοδική με περίοδο 4π .

Η καυστική είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K με συντεταγμένες $((x', y'))$. Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής φαίνεται στο Σχ.2.4(α). Οι συντεταγμένες του σημείου K της καυστικής είναι:

$$x' = (OA) + (AB) = r_o \cos \theta + \frac{2}{3} r_o \cos \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.80)$$

$$y' = (B\Gamma) + (\Gamma K) = r_o \sin \theta + \frac{2}{3} r_o \sin \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.81)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ίδιες με τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής. Εκτός της καυστικής αυτής (εξωτερική καυστική) σχηματίζεται καυστική εσωτερικά της αρχικής καμπύλης (εσωτερική καυστική) όπως φαίνεται στο Σχ 2.4(α). Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής αυτής προκύπτει από τις συντεταγμένες των σημείων K :

$$x' = (O\Delta) = (OA) - (\Delta A) = r_o \cos \theta - \frac{2}{3} r_o \cos \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.82)$$

$$y' = (\Delta K) = (A\Gamma) - (A'\Gamma') = r_o \sin \theta - \frac{2}{3} r_o \sin \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.83)$$

Επομένως προκύπτει ότι για τη γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής, αρκεί από το άκρο O' της ρωγμής, Σχ.2.4(β), να αχθεί ως προς τον άξονα συμμετρίας της καυστικής ακτίνας $O'P$ μήκους r_o που καθορίζονται από τη σχέση (2.71), υπό γωνία θ και ακολούθως από το σημείο P διάνυσμα (το διάνυσμα απόκλισης) PK (για την εξωτερική καυστική) ή PK (για την εσωτερική καυστική) μήκους $\frac{2r_o}{3}$ υπό γωνία $\frac{\theta}{2}$ ως προς $O'P'$.

Η ακτίνα ρ της καυστικής δίνεται από τις σχέσεις:

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} = r_o \sqrt{\frac{13}{9} + \frac{4}{3} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (2.84)$$

Τα ακρότατα της ακτίνας αυτής υπολογίζονται από τη συνθήκη: $\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$, η οποία Ισχύει για τιμές της γωνίες θ :

$$\theta_l^{\max} = 0, 2\pi, \dots \quad (2.85)$$

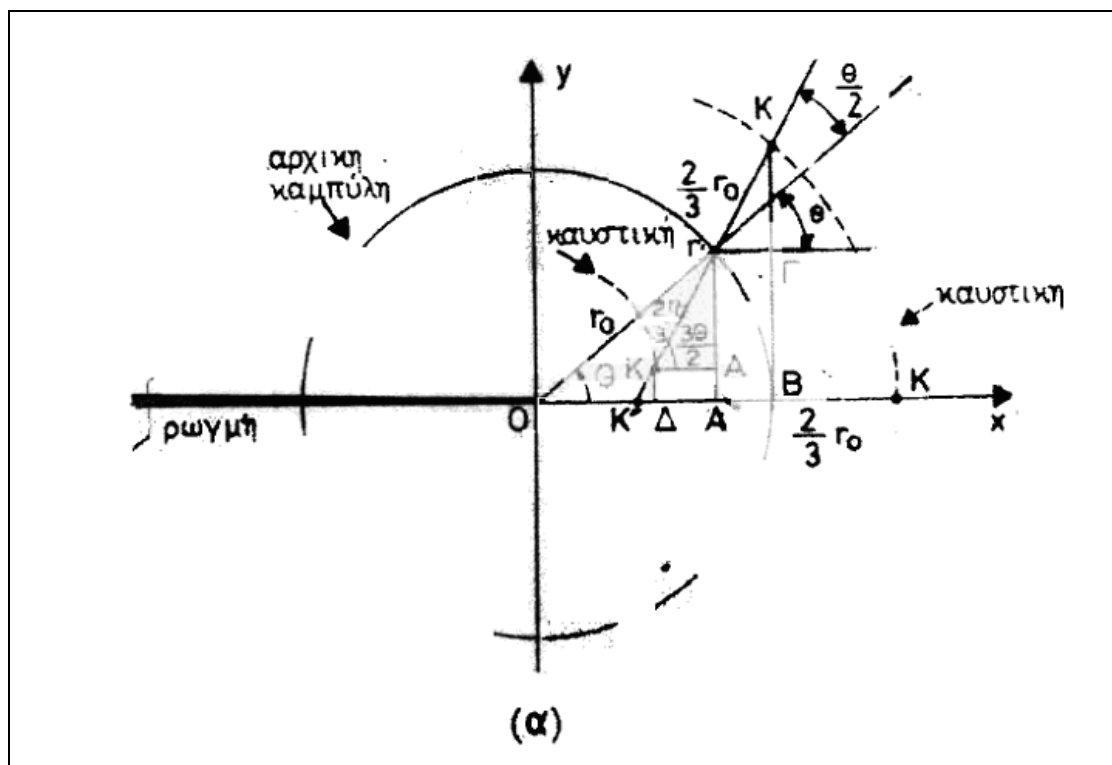
Από τις τιμές αυτές προκύπτει ότι η καυστική παρουσιάζει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στον άξονα συμμετρίας της. Οι τιμές είναι (Σχ.2.3(β)):

$$\text{Για } \theta_{l(1)}^{\max} = 0 \rightarrow \rho_{\max} = \frac{5}{3} r_o \lambda_m \quad (2.86)$$

$$\text{Για } \theta_{l(2)}^{\max} = 0 \rightarrow \rho_{\max} = \frac{1}{3} r_o \lambda_m \quad (2.87)$$

Ο άξονας συμμετρίας $O'x'$ τέμνει τη καυστική σε δυο σημεία που απέχουν απόσταση:

$$D_l^{\max} = 3r_o \lambda_m \quad (2.88)$$

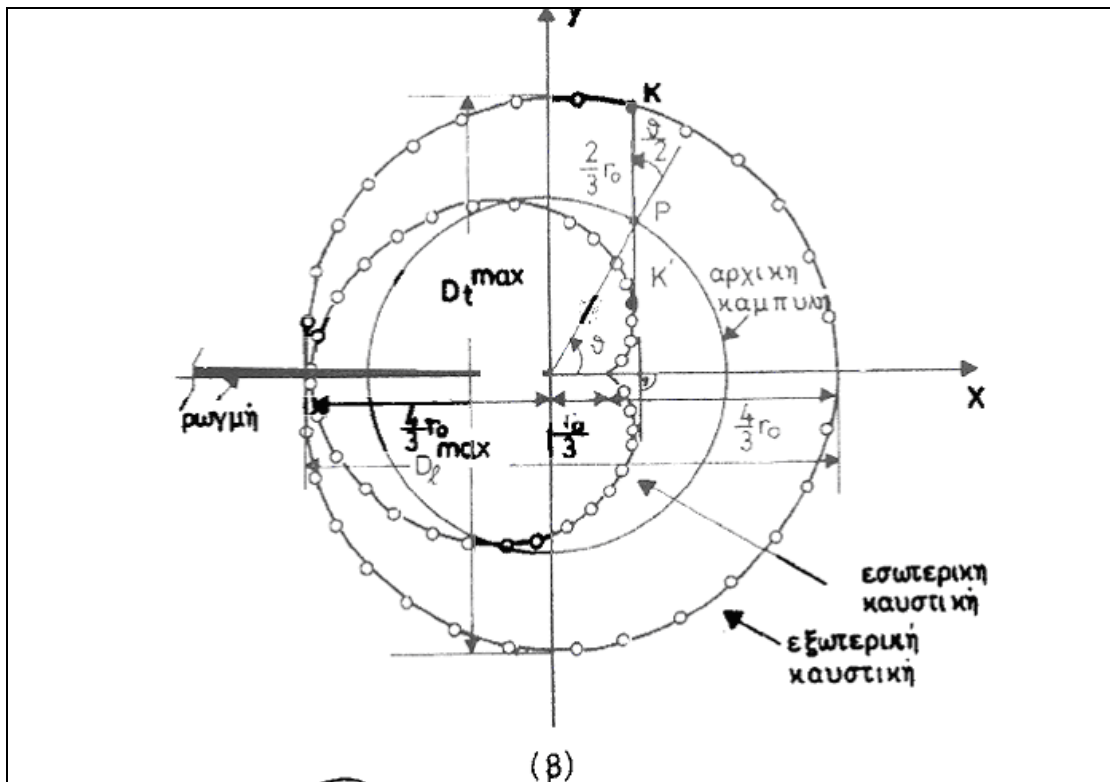


Σχήμα 2.3: (α) Η γεωμετρική σχεδίαση των καυστικών

Η οποία παριστάνει τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της, $O'x'$.

Ο υπολογισμός της μέγιστης εγκάρσιας διαμέτρου, D_t^{\max} , της καυστικής προκύπτει από τη συνθήκη: $\frac{\partial y'}{\partial \theta} = 0$, η οποία Ισχύει για τις γωνίες θ :

$$\theta_i^{\max} = 72^\circ \tag{2.89}$$



Σχήμα 2.3 (β): Τα γεωμετρικά στοιχεία των καυστικών

Και από τη τιμή αυτή της γωνίας προκύπτει:

$$D_t^{\max} = 2y' = 3.1702r_o\lambda_m \tag{2.90}$$

Οι ανωτέρω σχέσεις αποτελούν χαρακτηριστικές αναλλοίωτες της καυστικής.

Θέτοντας:

$$\delta_i^{\max} = 3.00, \delta_t^{\max} = 3.1702 \tag{2.91}$$

οι σχέσεις (2.88) και (2.90) μπορούν να γράφουν:

$$D_l^{\max} = \lambda_m r_o \delta_l^{\max} \quad (2.92) \qquad D_t^{\max} = \lambda_m r_o \delta_t^{\max} \quad (2.93)$$

όπου $\delta_{l,t}^{\max}$ καλούνται συντελεστές διόρθωσης (correction factors) των διαμέτρων $D_{l,t}^{\max}$ της καυστικής.

Από τις σχέσεις (2.70), (2.71), (2.92), (2.93) υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon_o d \lambda_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{\max}}{\delta_{l,t}^{\max}} \right)^{5/2} \quad (2.94)$$

Από τη σχέση (2.94) υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I , για τον τύπο-I (εφελκυστικο τύπο) της παραμόρφωσης της ρωγμής, από τις διαμέτρους της καυστικής που σχηματίζεται παρά τα άκρα της ρωγμής.

2.6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Η συνάρτηση Westergaard για κεκλιμένη ρωγμή μήκους $2a$ εντός άπειρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{K^*}{\sqrt{2\pi\zeta}}, K^* = K_I - iK_{II} \quad (2.95)$$

Η κατάσταση αυτή ισοδυναμεί με την περίπτωση της εγκάρσιας ρωγμής που υπόκειται σε εφελκυστική τάση σ στο άπειρο, όπου η τασική συνάρτηση Z_I δίνεται από τη σχέση (2.64), και συγχρόνως υπόκειται σε διάτμηση στο άπειρο, όπου η τασική συνάρτηση Z_{II} δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}}, K_{II} = \tau\sqrt{\pi\alpha} \quad (2.96)$$

Από τη σχέση (2.95) με παραγωγισή προκύπτει:

$$Z'(\zeta) = \frac{dZ}{d\zeta} = -\frac{K^*}{2\sqrt{2\pi}} \zeta^{-3/2} \quad (2.97)$$

$$\overline{Z'(\zeta)} = \overline{Z'(\bar{\zeta})} = \frac{K^*}{2\sqrt{2\pi}} \bar{\zeta}^{-3/2} \quad (2.98)$$

$$Z''(\zeta) = \frac{d^2 Z_I}{d\zeta^2} = \frac{3K^*}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \quad (2.99)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.99) στη σχέση (2.62), εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής, προκύπτει:

$$\left| \frac{3}{2} C_{r,t,f} \frac{K^*}{K_I} \zeta^{-5/2} \right| = 1 \quad (2.100)$$

από την οποία προκύπτει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής:

$$|\zeta| = r_o = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f} \right)^{2/5} \left(\frac{|K^*|}{|K_I|} \right)^{2/5} \quad (2.101)$$

όπου η σταθερά $C_{r,t,f}$ δίνεται από τη σχέση (2.70).θέτοντας:

$$\left(\frac{|K^*|}{|K_I|}\right)^{2/5} = \left(\frac{K_I^2 + K_{II}^2}{K_I^2}\right)^{2/5} = (1 + \kappa^2)^{2/5} \quad (2.102)$$

με:

$$\kappa = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (2.103)$$

οπότε η σχέση (2.101) γράφεται:

$$|\zeta| = r_o = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f}\right)^{2/5} (1 + \kappa^2)^{2/5} \quad (2.104)$$

Η εξίσωση της καυστικής προκύπτει με αντικατάσταση της σχέσης (2.98) στη σχέση (2.63):

$$\frac{W}{\lambda_m} = \zeta + C_{r,t,f} \frac{\overline{K^*}}{K_I} \zeta^{-3/2} \quad (2.105)$$

και αντικαθιστώντας τα $\zeta, \bar{\zeta}$ με την πολική τους μορφή, προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r e^{i\theta} + C_{r,t,f} \frac{\overline{K^*}}{K_I} r^{-3/2} e^{i3\theta/2} \quad (2.106)$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.104) η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(e^{i\theta} + \frac{2}{3} \frac{\overline{K^*}}{|K^*|} e^{i3\theta/2} \right) \quad (2.107)$$

θέτοντας :

$$\frac{\overline{K^*}}{|K^*|} = \frac{K_I}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}} + i \frac{K_{II}}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}} \quad (2.108)$$

και:

$$\frac{\overline{K^*}}{|K^*|} = e^{i\omega} \quad (2.109)$$

προκύπτει:

$$\tan \omega = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (2.110)$$

οπότε η σχέση (2.107) γράφεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{i(\omega + 3\theta/2)} \right) \quad (2.111)$$

η:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \left(\frac{3\theta}{2} + \omega \right) \right) + i r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \left(\frac{3\theta}{2} + \omega \right) \right) \quad (2.112)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής ως προς τον άξονα της ρωγμής $O'x'$ και τον κάθετο $O'y'$, δηλαδή:

$$x'_{r,t,f} = r_o \left[\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \left(\frac{3\theta}{2} + \omega \right) \right] \quad (2.113)$$

$$y'_{r,t,f} = r_o \left[\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \left(\frac{3\theta}{2} + \omega \right) \right] \quad (2.114)$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής (2.112) και (2.113) μετά από πράξεις γράφονται:

$$x'_{r,t,f} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \cos \omega - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \sin \omega \right) \quad (2.115)$$

$$y'_{r,t,f} = r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \cos \omega + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \omega \right) \quad (2.116)$$

και από τη σχέση (2.110) προκύπτει:

$$\sin \omega = \frac{\tan \omega}{\sqrt{1 + \tan^2 \omega}} = \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \quad \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \quad (2.117)$$

οπότε οι σχέσεις (2.116) και (2.115) γράφονται:

$$x'_{r,t,f} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) \quad (2.118)$$

$$y'_{r,t,f} = r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) \quad (2.119)$$

η:

$$x'_{r,t,f} = r_o \left[\cos \theta + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - \kappa \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (2.120)$$

$$y'_{r,t,f} = r_o \left[\sin \theta + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \kappa \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (2.121)$$

Αναφέροντας τις εξισώσεις (2.120) και (2.121) της καυστικής ως προς τους νέους άξονες $O'\chi_1 y_1$ δια του άκρου της ρωγμής που σχηματίζουν γωνία $2(\pi - \omega)$ ως προς τους άξονες $O'\chi' y'$ όπου ω η γωνία κλίσης της ρωγμής, δια του μετασχηματισμού:

$$\begin{pmatrix} x_{1,r,t,f} \\ y_{1,r,t,f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\omega & -\sin 2\omega \\ \sin 2\omega & \cos 2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{r,t,f} \\ y'_{r,t,f} \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής ως προς το νέο σύστημα $O'x_1y_1$, δηλαδή:

$$x_{1,r,t,f} = r_o \left[\cos(\theta + 2\omega) + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + 3\omega\right) \right] \quad (2.123)$$

$$y_{1,r,t,f} = r_o \left[\sin(\theta + 2\omega) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + 3\omega\right) \right] \quad (2.124)$$

και θέτοντας:

$$\theta + 2\omega = \tau \quad (2.125)$$

προκύπτει:

$$x_{1,r,t,f} = r_o \left(\cos \tau + \frac{2}{3} \cos \frac{3\tau}{2} \right) \quad (2.126)$$

$$y_{1,r,t,f} = r_o \left(\sin \tau + \frac{2}{3} \sin \frac{3\tau}{2} \right) \quad (2.127)$$

Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνεται ότι η καυστική είναι συμμετρική καμπύλη ως προς άξονα σχηματίζοντα γωνία -2ω ως προς τον άξονα της ρωγμής (Σχ.2.5). Αναφέροντας τη καυστική στο σύστημα $O'x_1y_1$ ισχύουν οι αναλλοίωτες:

$$D_l^{\max} = \lambda_m r_o \delta_l^{\max}$$

$$D_t^{\max} = \lambda_m r_o \delta_t^{\max}$$

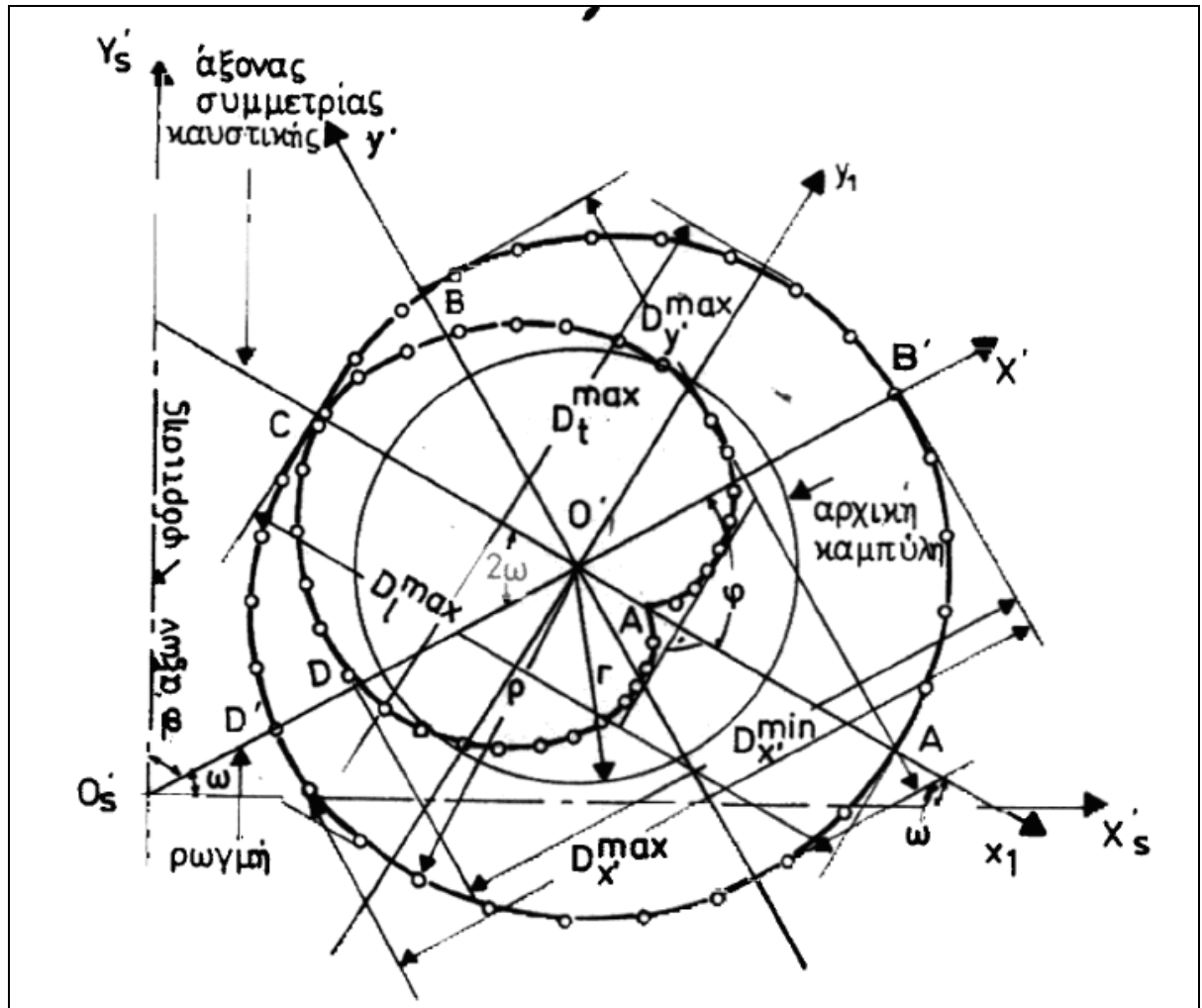
ενώ ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I δίνεται από τη σχέση:

$$K_I = K_I^{\varepsilon\gamma\kappa} \cos \omega = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_o d \lambda^{\frac{3}{2}} m c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{\max}}{\delta_{l,t}^{\max}} \right) \cos \frac{\phi}{2} \quad (2.128)$$

όπου ω είναι η γωνία κλίσης της ρωγμής, ϕ είναι η γωνία στροφής της καυστικής (γωνία μετατόπισης) και οι διορθωτικοί συντελεστές $\delta_{l,t}^{\max}$ παίρνουν τις τιμές 3.1702 και 3 αντιστοίχως. Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_{II} υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan \omega = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (2.129)$$

Αναφέροντας όμως τη καυστική στο σύστημα Ο'χ'γ' , οι συντελεστές έντασης K_I, K_{II} δίνονται από τις σχέσεις (2.94) και (2.128) αντιστοίχως, ενώ οι διορθωτικοί συντελεστές $\delta_{l,t}^{\max}$ εξαρτώνται από το λόγο κ , δηλαδή από τη γωνία κλίσης ω της ρωγμής, οπότε είναι απαραίτητο να υπολογιστούν.



Σχήμα 2.4: καυστική στο άκρο κεκλιμένης ρογμής υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

2.7 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

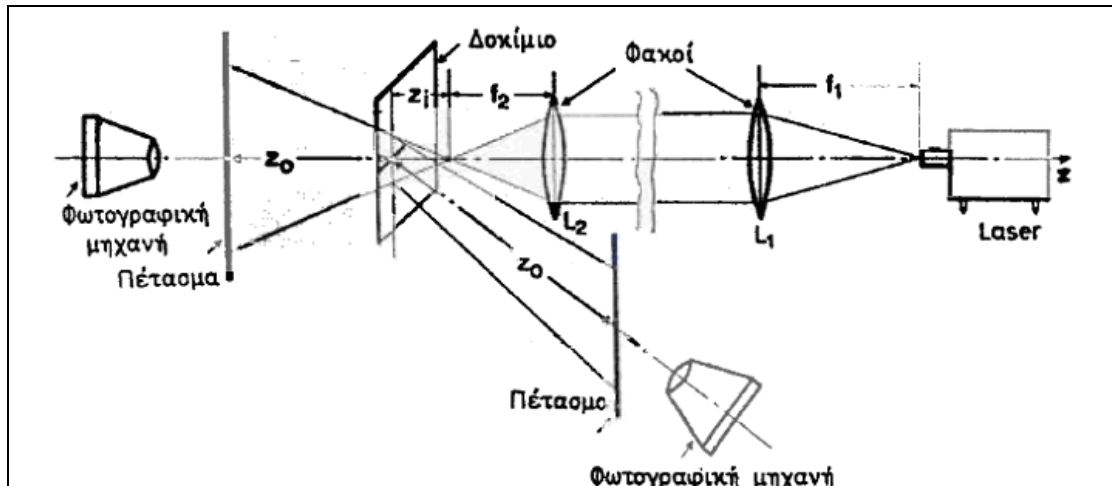
Η πειραματική διάταξη για το σχηματισμό των καυστικών είναι απλή όπως φαίνεται στο Σχ.2.5. Για την πειραματική αυτή διάταξη απαιτούνται:

- Πηγή Φωτός (Laser He-Ne)
- Ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του Laser
- Δυο συγκλίνοντες οπτικοί φακοί εστίασης $f=1\text{m}$ για να δημιουργηθεί συγκλίνουσα η αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη.
- Ένα πέταμα αναφοράς (θαμπόγυαλο) πάνω στο οποίο προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές.
- Μια φωτογραφική μηχανή για τη λήψη των καυστικών.

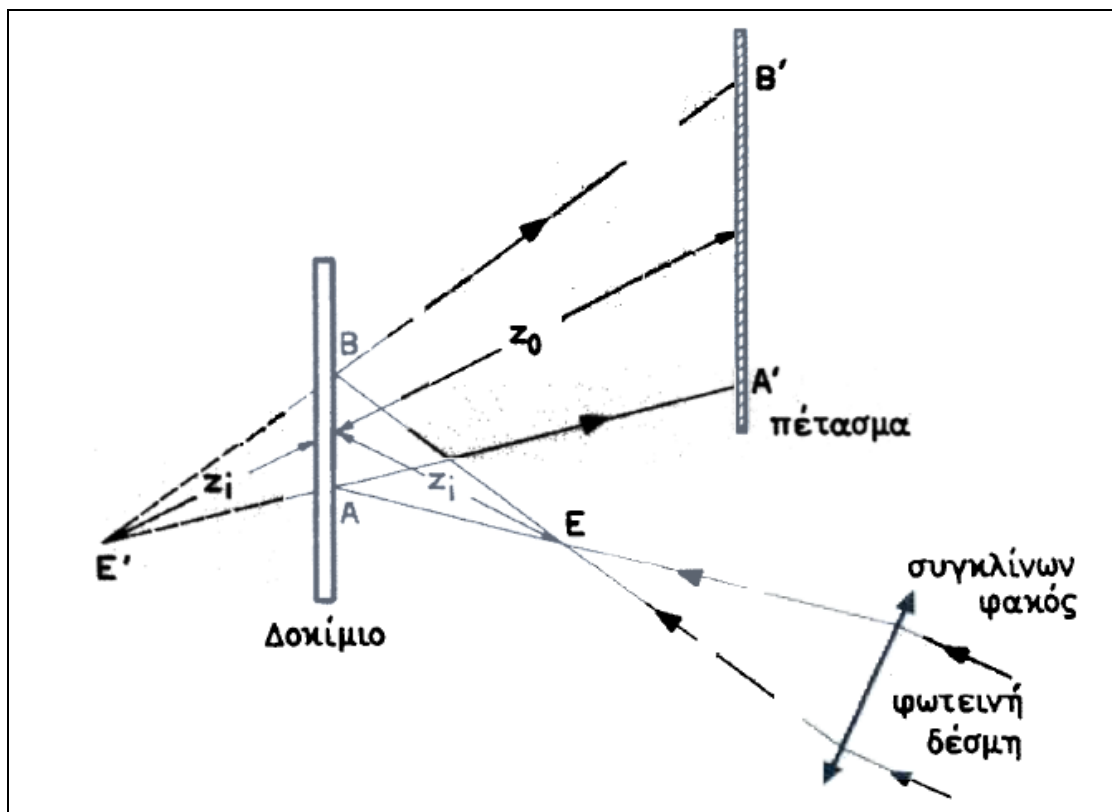
Το πέταμα αναφοράς τοποθετείται πίσω από το δοκίμιο στο οποίο λαμβάνεται η καυστική διέλευσης. Η εστία της φωτεινής δέσμης τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο σε απόσταση z_i .

Η οπτική διάταξη για αποκλίνουσα δέσμη η οποία τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο για διαφανή υλικά, έχει συντελεστή μεγέθυνσης λ_m . Ο συντελεστής μεγέθυνσης υπολογίζεται σύμφωνα με τη γεωμετρική οπτική. Για αποκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Σχ.2.6, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

$$\lambda_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_o + z_i}{z_i} \quad (2.129)$$



Σχήμα 2.5: Σχηματική παράσταση της οπτικής διάταξης των καυστικών



Σχήμα 2.6 : Γεωμετρία αποκλίνουσα φωτεινής δέσμης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ V

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΕΓΚΟΠΗ ΤΥΠΟΥ V

3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ- ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΕΓΚΟΠΩΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ V

Ο υπολογισμός των σύνθετων συντελεστών έντασης των τάσεων K στις κορυφές εγκοπών τύπου V σε ομογενή ισότροπα και ελαστικά δοκίμια τα οποία είναι συμμετρικά φορτισμένα στα επίπεδα τους αντιμετωπίζεται εφαρμόζοντας την πειραματική μέθοδο των Καυστικών. Η συμμετρία της φόρτισης και θέση της εγκοπής επιτρέπει την έκφραση της τασικής συνάρτησης Muskhelishvili $\Phi(z)$.

Η αναλυτική λύση του προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων ενώ άλλες αναλυτικές λύσεις έχουν βασιστεί σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Η συνάρτηση $\Phi(z)$ για προβλήματα ρωγμών και εγκοπών εκφράζεται, εφόσον υπάρχουν δυο ιδιομορφίες λ_1, λ_2 ως εξής:

$$\Phi(z) = (K_I - iK_{II})z^{-\lambda_1} + (K'_I - iK'_{II})z^{-\lambda_2} \quad (3.1)$$

$$\text{με} \quad K_I = K_1, K_{II} = -K_2, K'_I = K_3, K'_{II} = -K_4$$

όπου K_1, K_2, K_3, K_4 είναι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των δυο μιγαδικών συντελεστών έντασης των τάσεων.

Παίρνουμε ακόμη την εξίσωση της αρχικής καμπύλης και της καυστικής αντίστοιχα για $\lambda_m = 1$:

$$|4C\Phi''(z)| = 1, \quad (3.2)$$

$$W = z + 4C\overline{\Phi'(z)}. \quad (3.3)$$

Από την (3.1) προσδιορίζουμε τη συζυγή της πρώτης παραγώγου καθώς και τη δεύτερη παράγωγο της $\Phi(z)$:

$$\Phi'(z) = -(\mathbf{K}_1 + i\mathbf{K}_2)\lambda_1 z^{-\lambda_1-1} - (\mathbf{K}_3 + i\mathbf{K}_4)\lambda_2 z^{-\lambda_2-1} \quad (3.4)$$

$$\overline{\Phi'(z)} = -(\mathbf{K}_1 - i\mathbf{K}_2)\lambda_1 \bar{z}^{-\lambda_1-1} - (\mathbf{K}_3 - i\mathbf{K}_4)\lambda_2 \bar{z}^{-\lambda_2-1} \quad (3.5)$$

$$\Phi''(z) = (\mathbf{K}_1 + i\mathbf{K}_2)\lambda_1(\lambda_1 + 1)z^{-\lambda_1-2} + (\mathbf{K}_3 + i\mathbf{K}_4)\lambda_2(\lambda_2 + 1)z^{-\lambda_2-2} \quad (3.6)$$

με

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (3.7)$$

Ακολουθώντας εισάγουμε στην εξίσωση (3.3) τις (3.5) και (3.6) και υιοθετώντας τους παρακάτω μετασχηματισμούς :

$$a = 4C\lambda_1$$

$$b = -\lambda_1 - 1$$

$$c = 4C\lambda_2$$

$$d = -\lambda_2 - 1$$

μετά από σειρά πράξεων τελικώς προκύπτουν οι σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες (X, Y) της καυστικής:

$$X = r \cos \theta - ar^b \mathbf{K}_1 \cos \theta b + ar^b \mathbf{K}_2 \sin \theta b - cr^d \mathbf{K}_3 \cos \theta d + cr^d \mathbf{K}_4 \sin \theta d \quad (3.9)$$

$$Y = r \sin \theta + ar^b \mathbf{K}_2 \cos \theta b + ar^b \mathbf{K}_1 \sin \theta b + cr^d \mathbf{K}_4 \cos \theta d + cr^d \mathbf{K}_3 \sin \theta d \quad (3.10)$$

γνωρίζοντας παράλληλα ότι:

$$W=X+iY.$$

Οι εξισώσεις (3.9) και (3.10) ισχύουν για οποιοδήποτε σημείο των καυστικών αρκεί να ληφθούν τα κατάλληλα μεγέθη για την ακτίνα της αρχικής καμπύλης r , η οποία μεταβάλλεται συναρτήσει της γωνίας θ . Η σχέση που συνδέει τα δυο αυτά είναι η:

$$E^2 r^{2H} (K_1^2 + K_2^2) + G^2 r^{2P} (K_3^2 + K_4^2) + 2EGr^{P+H} \cdot [(K_1 K_3 + K_2 K_4) \cos \theta (P-H) + (K_2 K_3 - K_1 K_4) \sin \theta (P-H)] = 1 \quad (3.11)$$

όπου

$$E = 4C\lambda_1(\lambda_1 + 1)$$

$$G = 4C\lambda_2(\lambda_2 + 1)$$

$$H = -\lambda_1 - 2$$

$$P = -\lambda_2 - 2 \quad (3.12)$$

Η εξίσωση (3.11) είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης εκ της οποίας προκύπτει ότι για οποιοδήποτε γωνία θ_i θα έχουμε και την αντίστοιχη ακτίνα r_i .

Παρατηρούμε ότι για τον προσδιορισμό των X και Y είναι απαραίτητος προηγουμένως ο προσδιορισμός των συντελεστών έντασης των τάσεων καθώς και οι ιδιομορφίες και τέλος οι οπτικές και μηχανικές σταθερές. Η εύρεση των συντελεστών των τάσεων είναι μια διαδικασία που απαιτεί την κατάστροψη κώδικα για αυτό το λόγο αποφασίστηκε η αυθαίρετη επιλογή τιμών για αυτούς τους συντελεστές ακολουθώντας πάντα κάποιους βασικούς κανόνες που προκύπτουν από τη γεωμετρία της φόρτισης και λαμβάνοντας υπόψη αντίστοιχες πειραματικές τιμές από τη βιβλιογραφία. [4,5]

Ακόμη και με γνωστούς τους παραπάνω συντελεστές έντασης των τάσεων η διαδικασία χάραξης των καυστικών παραμένει επίπονη. Η όλη διαδικασία μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά στις περιπτώσεις εκείνες για τις οποίες η δεύτερη ανωμαλία μηδενίζεται ($\lambda_2 = 0$) η βρίσκεται κοντά στο μηδέν, όπως συμβαίνει για τις γωνίες φ της

εγκοπής όταν $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να εφαρμοστεί η παρακάτω διαδικασία:

Η σχέση (3.1) στη κοντινή περιοχή της κορυφής της εγκοπής απλοποιείται ως εξής:

$$\Phi(z) = K_1 z^{\lambda_1} + K_2 z^{\lambda_2} \quad (3.13)$$

Όπου:

$$z = x + iy = r e^{i\theta} \quad (3.14)$$

$K_{1,2}$ γενικοί συντελεστές έντασης τάσεων

$\lambda_{1,2}$ βαθμοί ιδιομορφίας στην κορυφή της εγκοπής με:

$$\lambda_{1,2} = \eta_{1,2} - 1 \quad (3.15)$$

Ο συντελεστής $\eta_{1,2}$ εξαρτώνται από τη γωνία εγκοπής φ και δίνεται από το τύπο:

$$\sin n_{1,2} \varphi = \pm n_{1,2} \sin \varphi \quad (3.16)$$

Τελικά οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών για καυστικές συμμετρικές ως προς τον άξονα συμμετρίας της εγκοπής δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$X = \lambda_m r_o \left(\cos \theta \mp \frac{1}{|\lambda - 1|} \cos(1 - \lambda)\theta \right) \quad (3.17)$$

$$Y = \lambda_m r_o \left(\sin \theta \mp \frac{1}{|1 - \lambda|} \sin(1 - \lambda)\theta \right) \quad (3.18)$$

Η ακτίνα r_o της αρχικής καμπύλης της καυστικής δίνεται από τη σχέση:

$$r_o = |C' K \lambda (\lambda - 1)|^{\frac{1}{(2-\lambda)}} \quad (3.19)$$

όπου

$$C' = C'_{r,t,f} = \frac{-\varepsilon z_o dc_{r,t,f}}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} \quad (3.20)$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν τη μέθοδο των καυστικών ο σύνθετος συντελεστής έντασης των τάσεων K για την περίπτωση εγκοπών τύπου V δίνεται από τη σχέση:

$$|K| = \delta_\lambda (\varphi) \left(\frac{D_{t,l}^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} \frac{1}{|C'|} \quad (3.21)$$

Όπου:

δ_λ : διορθωτικός συντελεστής

λ : τάξη ιδιομορφίας εξαρτάται από τη γωνία φ ακολουθεί σχετικός πίνακας.

D^{\max} : μέγιστη εγκάρσια διάμετρος της καυστικής

λ_m : συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης

Ο διορθωτικός συντελεστής δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_\lambda(\omega) = \frac{2^{\lambda-2}}{\lambda(\lambda-1)} \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right)^{\lambda-2} \quad (3.22)$$

Οι συντελεστές έντασης των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$K_I = \frac{|K|}{\sqrt{1+\kappa^2}}, \quad K_{II} = \kappa K_I = \frac{\kappa|K|}{\sqrt{1+\kappa^2}} \quad (3.23)$$

όπου $\kappa = \tan(\lambda\phi)$ και ϕ είναι η γωνία στροφής του άξονα συμμετρίας της εγκοπής ως τον άξονα συμμετρίας της καυστικής.

Ακολουθεί πίνακας που δίνει τυπικές τιμές της τάξης ιδιομορφίας και του διορθωτικού συντελεστή σε σχέση με τη γωνία της εγκοπής: [4]

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

$\varphi(\text{deg})$	λ	$\delta_\lambda(\varphi)$
0	-0,50000	0,0745
30	-0,49855	0,0748
60	-0,48778	0,0771
90	-0,45552	0,0846
120	-0,38427	0,1064
150	-0,24802	0,1874
180	-0.00000	∞

3.2 ΧΑΡΑΞΗ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΕ ΕΓΚΟΠΕΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ V

Για να καταστεί δυνατή η χάραξη των καυστικών βάσει των εξισώσεων (3.9) και (3.10), όπως είδαμε παραπάνω, απαραίτητη είναι η υιοθέτηση συγκεκριμένων τιμών για τις διάφορες οπτικές και μηχανικές σταθερές καθώς και τη γεωμετρία του εξεταζόμενου δοκιμίου. Για τη εκτέλεση της άσκησης όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί οι διάφορες τιμές που επιλέχθηκαν, βάσει και ήδη υπάρχοντων τιμών από πραγματικές δόκιμες που έχουν τελεστεί, σε δοκίμια από Plexiglas είναι οι ακόλουθες:

$$\lambda_m = 5,66$$

$$z_o = 205\text{cm}$$

$$c_r = -1,70 \times 10^{-10} \text{m}^2 / \text{N}$$

$$d = 0.2\text{cm}$$

Οι τιμές των ιδιομορφιών λ_1, λ_2 προκύπτουν από τη βιβλιογραφία για τις διάφορες γωνίες της εγκοπής ενώ οι ακτίνες των καμπυλών θα είναι σε mm.

Όσον αφορά τους συντελεστές έντασης των τάσεων K_1, K_2, K_3, K_4 η επιλογή των τιμών τους έγινε αυθαίρετα αφού κάτι τέτοιο αρκούσε για τη χάραξη των καυστικών. Χρησιμοποιήθηκαν κάποιες απαραίτητες παραδοχές που έχουν να κάνουν κατά πρώτον με τον τρόπο φόρτισης του δοκιμίου και κατά δεύτερον με προτάσεις αντίστοιχων πειραματικών εργασιών. Λόγω λοιπόν της συμμετρικής φόρτισης της εγκοπής θα είναι $K_2 = K_4 = 0$ για όλες τις τιμές της γωνίας ϕ . Όσον αφορά τους συντελεστές που μένουν, στον K_1 δόθηκε η αυθαίρετη τιμή των $14.79 \text{ kp/cm}^{3/2}$ για όλες τις εξεταζόμενες τιμές της εγκοπής ενώ για τον K_3 έχουμε: για τις γωνίες ϕ με τιμές στο διάστημα $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ όπου $\lambda_2 = 0$ πήραμε την προφανή τιμή $K_3 = 0$. Για τις δυο περιπτώσεις γωνιών στο διάστημα $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ στη περίπτωση όπου $\phi = 120^\circ$ η λ_1 πολύ μεγαλύτερη της λ_2 όποτε μπορούμε χωρίς μεγάλο σφάλμα να θεωρήσουμε $K_3 = 0.05 \text{ kp/cm}^{3/2}$ στη δε περίπτωση όπου $\phi = 150^\circ$ η λ_2 είναι συγκρίσιμη με τη λ_1 όποτε μπορούμε να εξετάσουμε διάφορες τιμές στον K_3 ωστόσο για λόγους συνέχειας αλλά και δυνατότητας σύγκρισης με τις υπόλοιπες περιπτώσεις επιλέξαμε και εδώ $K_3 = 0.05 \text{ kp/cm}^{3/2}$.

Τις κατάλληλες από τις παραπάνω τιμές εισάγουμε στις (3.17) και (3.18) για την εύρεση των (X, Y) για γωνίες που κυμαίνονται στο δύσθυμα $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ και στις (3.9) και (3.10) για τον προσδιορισμό των (X, Y) για γωνίες της εγκοπής που κυμαίνονται στο διάστημα $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$.

Σημειώνουμε εδώ πως στις (3.9) και (3.10) επειδή προσδιορίστηκαν για $\lambda_m = 0$ ενώ εμείς θα χρησιμοποιήσουμε $\lambda_m = 5.66$ θα χρησιμοποιηθεί αντί του C το C' όπου η μεταξύ τους σχέση είναι:

$$C^* = \frac{C\sqrt{2\pi}}{K_1} \quad (3.24)$$

και όπου :

$$C = \frac{\varepsilon_{z_o} dc_{r,t,f} K_I}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} = C_{f,r,t} \quad (3.25)$$

όπου $c_{r,t,f}$ είναι οι οπτικές σταθερές. Πάντως δε θα χρειαστεί καμία ανάλογη τροποποίηση στις σχέσεις (3.17) και (3.18) για τις γωνίες εγκοπής που ανήκουν στο αντίστοιχο διάστημα αφού το C^* έχει ήδη ληφθεί υπόψη κατά την κατάστρωση τους.

Μετά από αυτές τις απαραίτητες διευκρινήσεις μπορούμε να προχωρήσουμε ξεχωριστά στη χάραξη των καυστικών με τη βοήθεια του EXCEL για κάθε μια από τις εξής γωνίες της εγκοπής: $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$.

Γωνία $\varphi=0$

Στην περίπτωση αυτή η εγκοπή εκφυλίζεται σε ευθύγραμμου τύπου ρωγμή όποτε για τον προσδιορισμό των (X,Y) της καυστικής μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις :

$$X = \lambda_m r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.26)$$

$$Y = \lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.27)$$

για $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Όπου η ακτίνα της αρχικής καυστικής r_o θα δίνεται από τη σχέση :

$$r_o = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f} \right)^{2/5} \quad (3.28)$$

όπου

$$C_{r,t,f} = \frac{-\varepsilon z_o d c_{r,t,f} K_I}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} \quad (3.29)$$

επειδή οι καυστικές που θα πάρουμε στο πείραμα είναι καυστικές ανάκλασης από εμπρός από τους τρεις δείκτες μας ενδιαφέρει ο r. Για τον υπολογισμό της (3.29) έχουμε:

$$c_r = -1,7 * 10^{-10} \frac{m^2}{N} = 1,7 * 10^{-4} \frac{mm^2}{N} \quad \lambda_m = \frac{z_o + z_i}{z_i} = \frac{205 + 44}{44} = 5,66$$

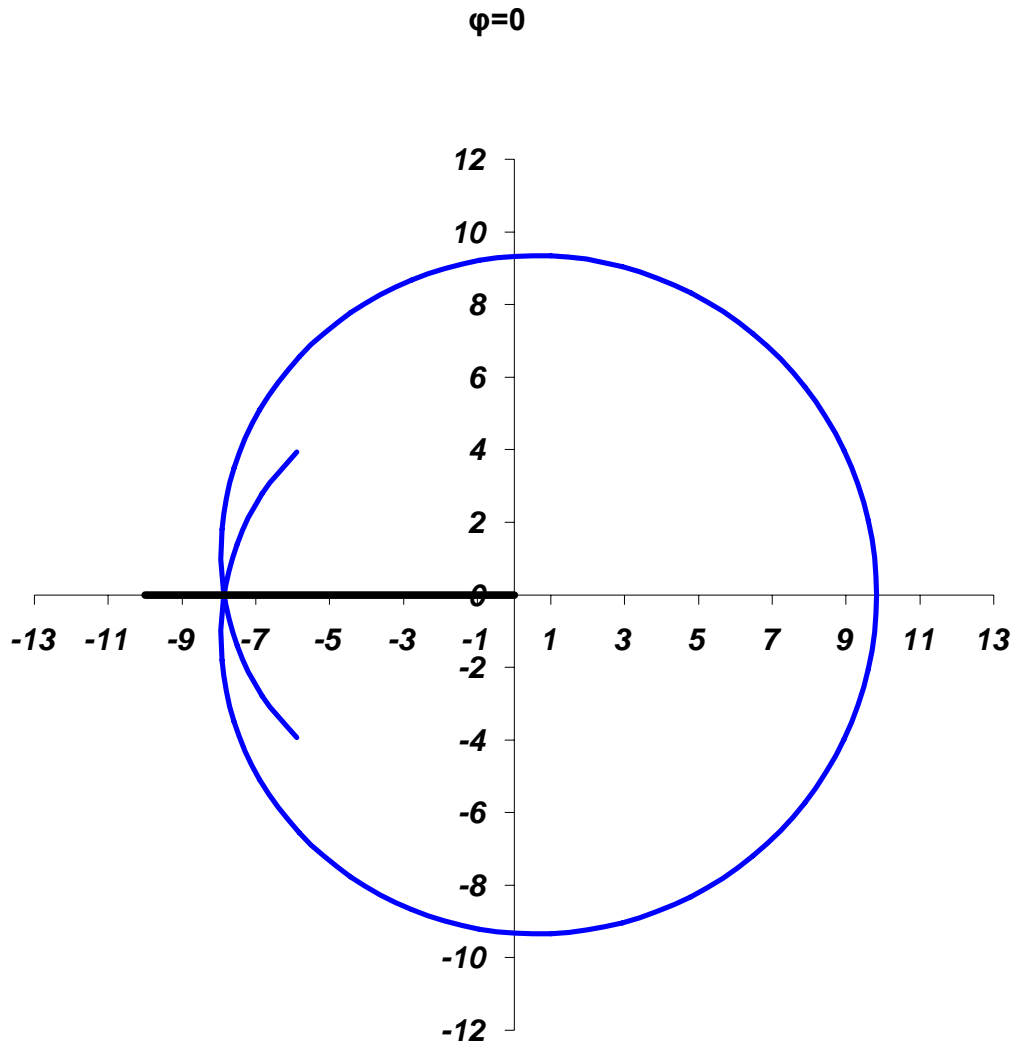
$$\varepsilon = 1, d = 2mm \quad K_I = 14,79 \frac{kp}{cm^{3/2}}$$

άρα

$$C_r = \frac{1 * 2050 * 2 * 1,7 * 10^{-4}}{5,66 \sqrt{6,28}} * 14,97 = \frac{0,697}{14,18} * 14,97 = 0,736 \frac{mm^3}{N}$$

$$r_o = (1,5 * 0,736)^{0,4} = 1,04mm$$

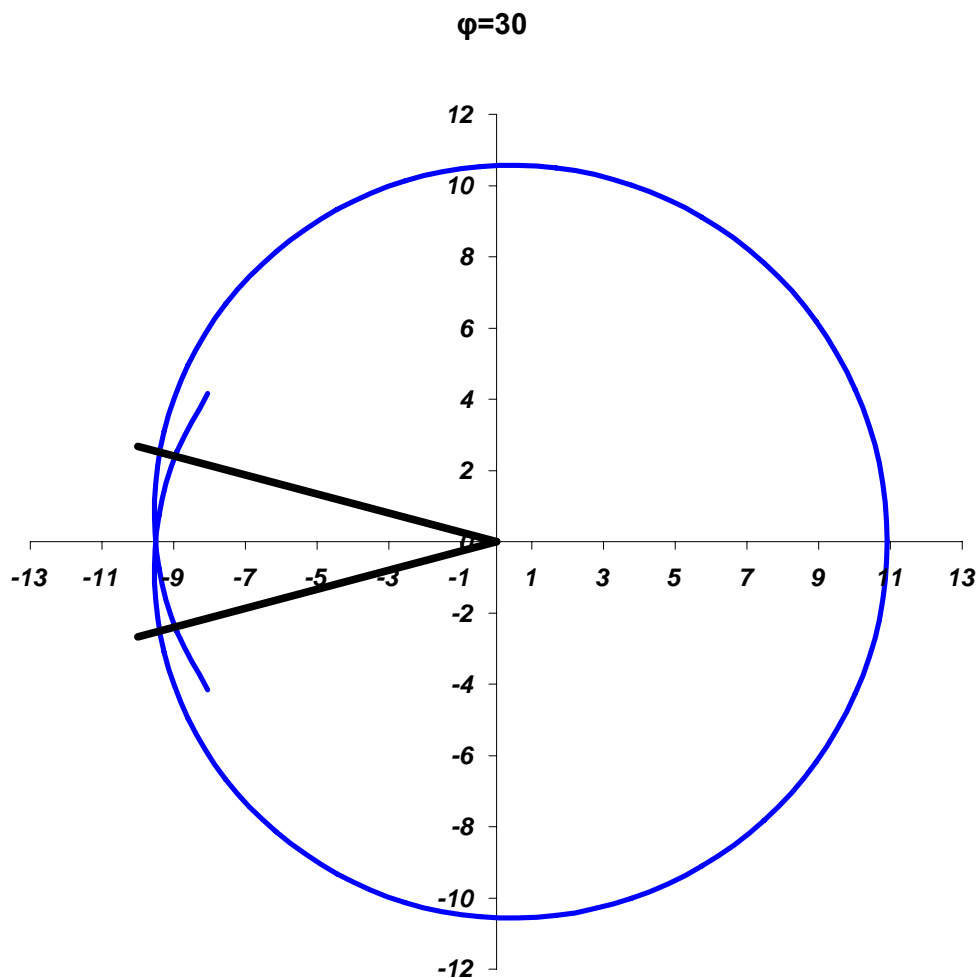
επομένως αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις (3.26) (3.27) και με τη βοήθεια του EXCEL παίρνουμε τη καυστική για $\varphi=0$



Σχήμα 3.1: Καυστική στο άκρο ρωγμής υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Γωνία $\varphi=30$

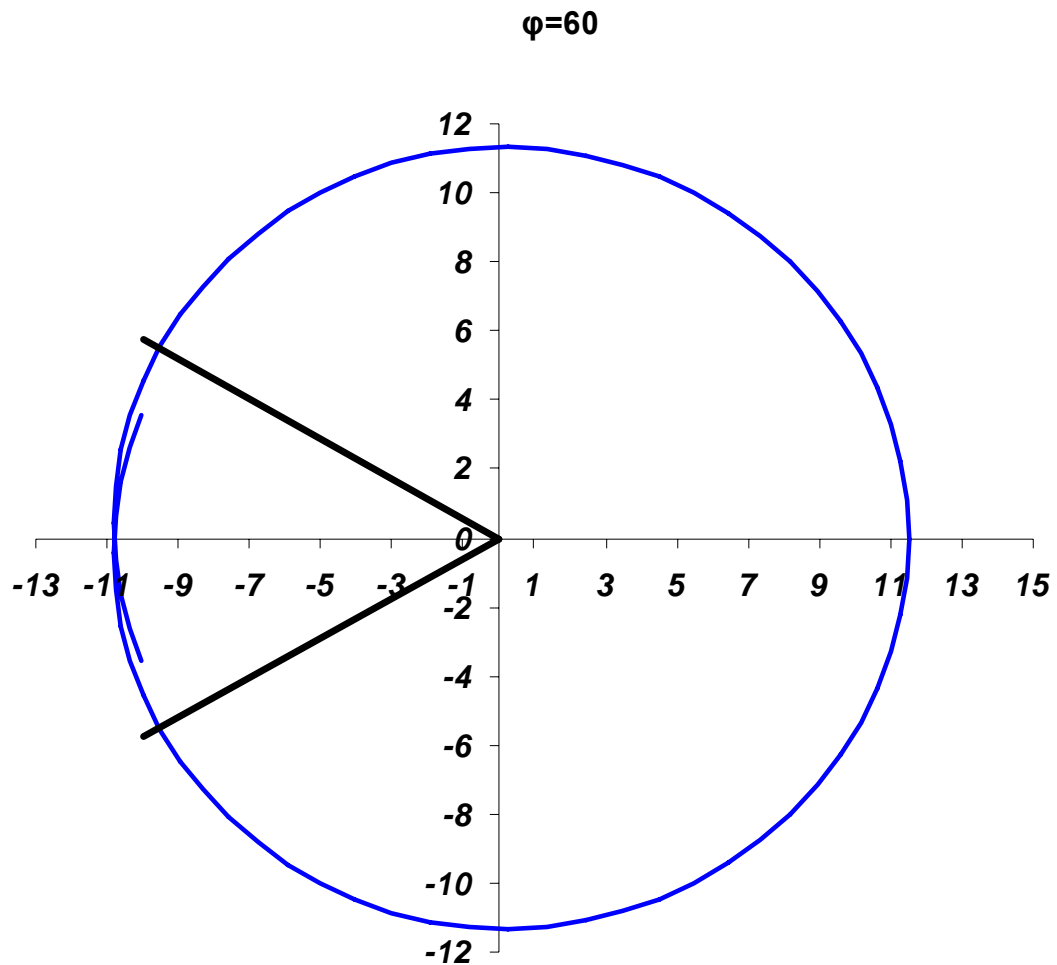
Από τις σχέσεις (3.17) και (3.18) συνεχίζουμε και για αυτή την εγκοπή. Έχοντας λάβει υπόψη ότι $\lambda=-0,49855$ και αφού υπολογίσαμε r_0 από τη σχέση (3.19) παίρνουμε με τη βοήθεια του EXCEL.



Σχήμα 3.2: Καυστική στο άκρο εγκοπής ($\varphi=30$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Γωνία $\varphi=60$

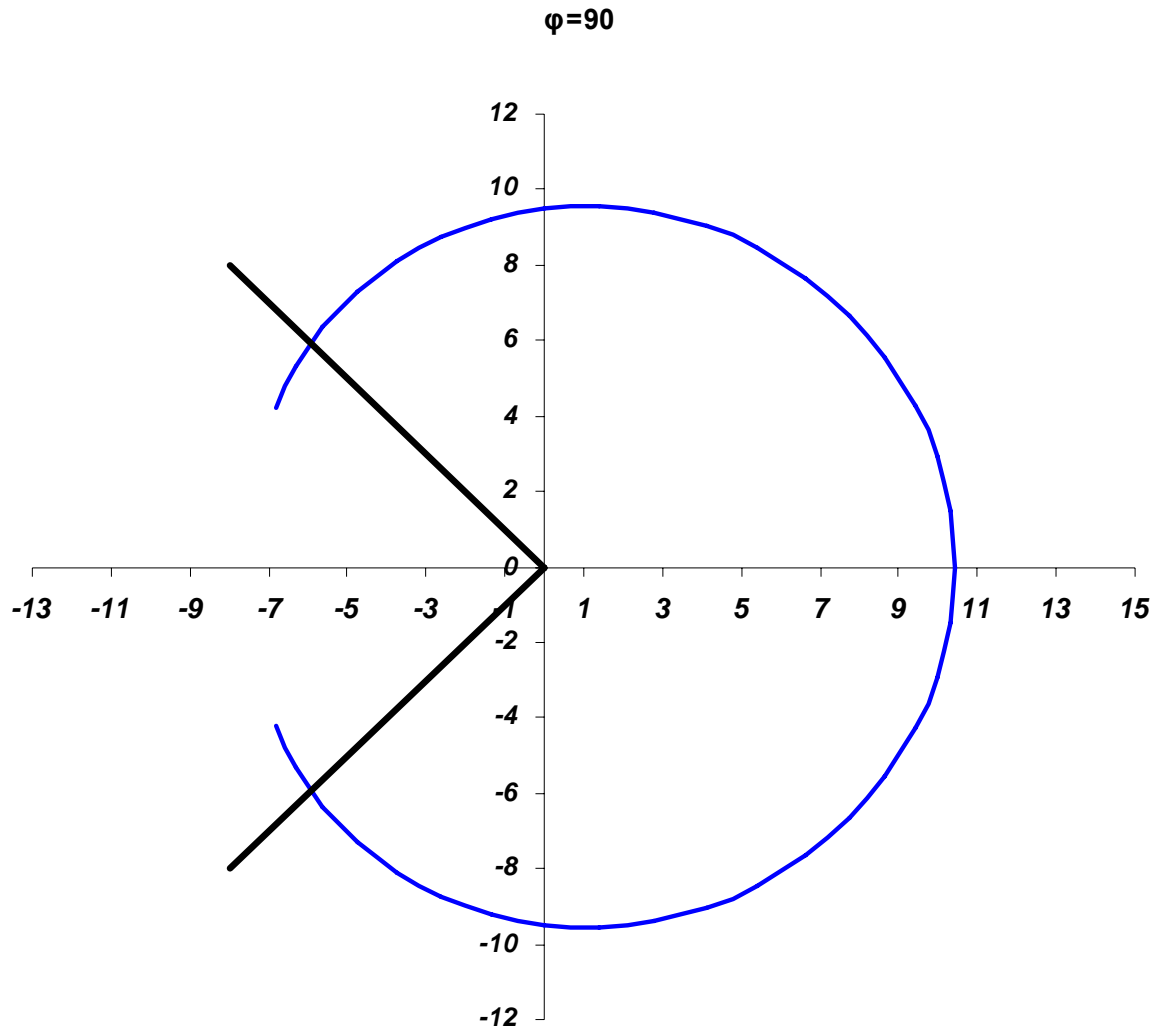
Από τις σχέσεις (3.17) και (3.18) συνεχίζουμε και για αυτή την εγκοπή. Έχοντας λάβει υπόψη ότι $\lambda=-0,48778$ και αφού υπολογίσαμε r_0 από τη σχέση (3.19) παίρνουμε με τη βοήθεια του EXCEL.



Σχήμα 3.3: Καυστική στο άκρο εγκοπής ($\varphi=60$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Γωνία $\varphi=90$

Από τις σχέσεις (3.17) και (3.18) συνεχίζουμε και για αυτή την εγκοπή. Έχοντας λάβει υπόψη ότι $\lambda=-0,45552$ και αφού υπολογίσαμε r_0 , από τη σχέση (3.19) παίρνουμε με τη βοήθεια του EXCEL.



Σχήμα 3.4: Καυστική στο άκρο εγκοπής ($\varphi=90$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Γωνία $\varphi=120$

Για τον υπολογισμό των καυστικών στα δοκίμια με τις εγκοπές των 120 και 150 μοιρών θα χρησιμοποιήσω τις εξισώσεις (3.9) και (3.10) αφού πρώτα υπολογίσω τις εξισώσεις (3.8) και (3.12) και στη συνέχεια τη σχέση (3.11):

$$\lambda_1 = -0,48778 \qquad \lambda_2 = -0,2691$$

$$a = 4C\lambda_1 = -1,436$$

$$b = -\lambda_1 - 1 = -0,5122$$

$$c = 4C\lambda_2 = -0,792$$

$$d = -\lambda_2 - 1 = -0,7309$$

$$E = 4C\lambda_1(\lambda_1 + 1) = -0,7335$$

$$G = 4C\lambda_2(\lambda_2 + 1) = -0,579$$

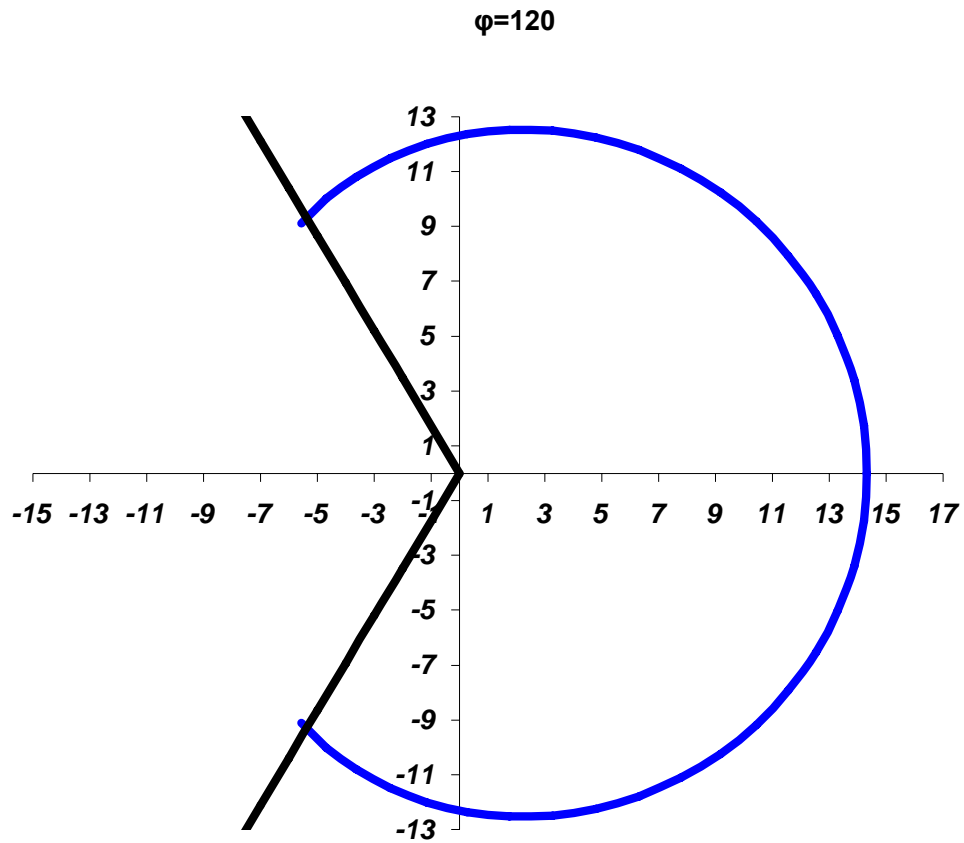
$$H = -\lambda_1 - 2 = -1,5122$$

$$P = -\lambda_2 - 2 = -1,7309$$

Μετά από πράξεις η σχέση (3.11) γίνεται:

$$r^3 = (116,5 + 0,627 * \cos(-0,22\theta))$$

άρα ακολουθεί η καυστική για τις 120 μοίρες.



Σχήμα 3.5: Καυστική στο άκρο εγκοπής ($\varphi=120$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Γωνία $\varphi=150$

Όμοια για τη τελευταία περίπτωση έχουμε για τις σχέσεις (3.8) και (3.12) ενώ η σχέση (3.11) θεωρούμε ότι παραμένει η ίδια αφού οι διαφορές στις τιμές των σχέσεων (3.8), (3.12) είναι πάρα πολύ μικρές.

$$\lambda_1 = -0,49855 \quad \lambda_2 = -0,44$$

$$a = 4C\lambda_1 = -1,467$$

$$b = -\lambda_1 - 1 = -0,50145$$

$$c = 4C\lambda_2 = -1,295$$

$$d = -\lambda_2 - 1 = -0,56$$

$$E = 4C\lambda_1(\lambda_1 + 1) = -0,736$$

$$G = 4C\lambda_2(\lambda_2 + 1) = -0,725$$

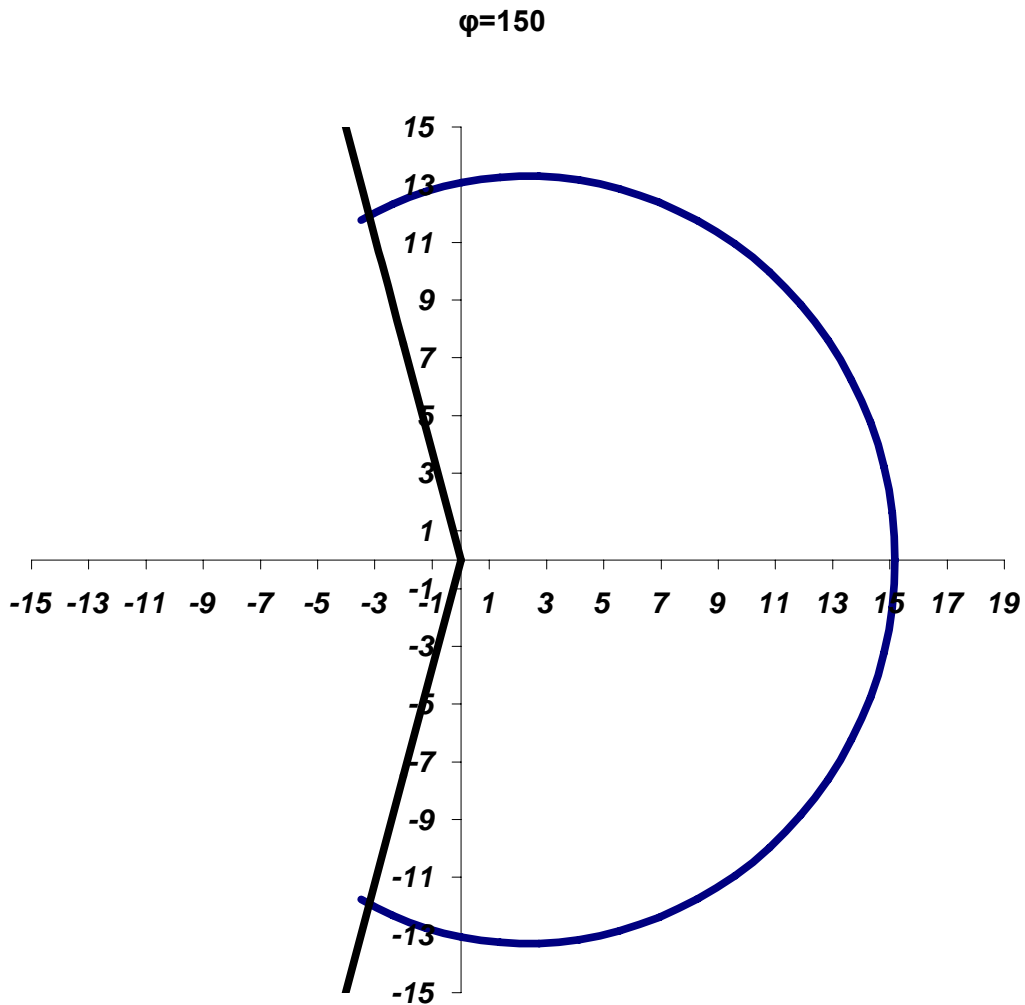
$$H = -\lambda_1 - 2 = -1,50145$$

$$P = -\lambda_2 - 2 = -1,56$$

Μετά από πράξεις η σχέση (3.11) γίνεται:

$$r^3 = (116,5 + 1,06 * \cos(-0,06\theta))$$

άρα ακολουθεί η καυστική για τις 150 μοίρες.



Σχήμα 3.6: Καυστική στο άκρο εγκοπής ($\varphi=150$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ D^{\max}

Από το βιβλίο Fracture Mechanics [4] της βιβλιογραφίας παίρνουμε τη σχέση:

$$|K| = \delta_{\lambda}(\phi) \left(\frac{D^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} \frac{1}{|C'|} \quad (3.28)$$

Επειδή η γωνία ω η οποία είναι η γωνία στροφής του άξονα συμμετρίας της εγκοπής ως προς τον άξονα συμμετρίας της καυστικής είναι μηδέν τότε ισχύει η σχέση:

$$\kappa = \tan(\lambda\omega) = \tan(\lambda * 0) = 0 \quad (3.29)$$

Άρα :

$$K_I = \frac{|K|}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \frac{|K|}{\sqrt{1+0}} = |K| \quad (3.30)$$

Ακόμα από τη βιβλιογραφία [4] μέσω της σχέσης που ακολουθεί θα υπολογίσουμε τη γωνία στην οποία έχουμε μέγιστη εγκάρσια διάμετρο φυσικά για εγκοπές στις οποίες μπορεί να γίνει αυτό διότι για τις εγκοπές των 120 και 150 μοιρών θα ακολουθήσουμε άλλη διαδικασία.

$$r_o = |C' K \lambda (\lambda - 1)|^{1/2-\lambda} \Rightarrow \quad (3.31)$$

$$r_o^{2-\lambda} = |C' K \lambda (\lambda - 1)| \Rightarrow \quad (3.32)$$

$$|K| = r_o^{2-\lambda} \frac{1}{|C'| |\lambda(\lambda - 1)|} \quad (3.33)$$

Άρα εξισώνοντας τις δυο σχέσεις έκφρασης του K έχουμε:

$$\delta_\lambda(\varphi) \left(\frac{D^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} \frac{1}{|C'|} = r_o^{2-\lambda} \frac{1}{|C'|} \frac{1}{|\lambda(\lambda-1)|} \Rightarrow \quad (3.34)$$

$$\delta_\lambda(\varphi) \left(\frac{D^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} = r_o^{2-\lambda} \frac{1}{|\lambda(\lambda-1)|} \Rightarrow \quad (3.35)$$

$$\frac{2^{\lambda-2}}{\lambda(\lambda-1)} \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left(\frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right) \right)^{\lambda-2} \left(\frac{D^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} = r_o^{2-\lambda} \frac{1}{|\lambda(\lambda-1)|} \Rightarrow \quad (3.36)$$

$$2^{\lambda-2} \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left(\frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right) \right)^{\lambda-2} \left(\frac{\lambda_m}{D^{\max}} \right)^{\lambda-2} = \left(\frac{1}{r_o} \right)^{\lambda-2} \Rightarrow \quad (3.37)$$

$$2 \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left(\frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right) \right) \left(\frac{1}{D^{\max}} \right) = \frac{1}{\lambda_m r_o} \Rightarrow \quad (3.38)$$

Όμως :

$$Y = \lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin(1-\lambda)\theta \right) \quad \text{και} \quad D^{\max} = 2Y^{\max} \quad (3.39)$$

Άρα :

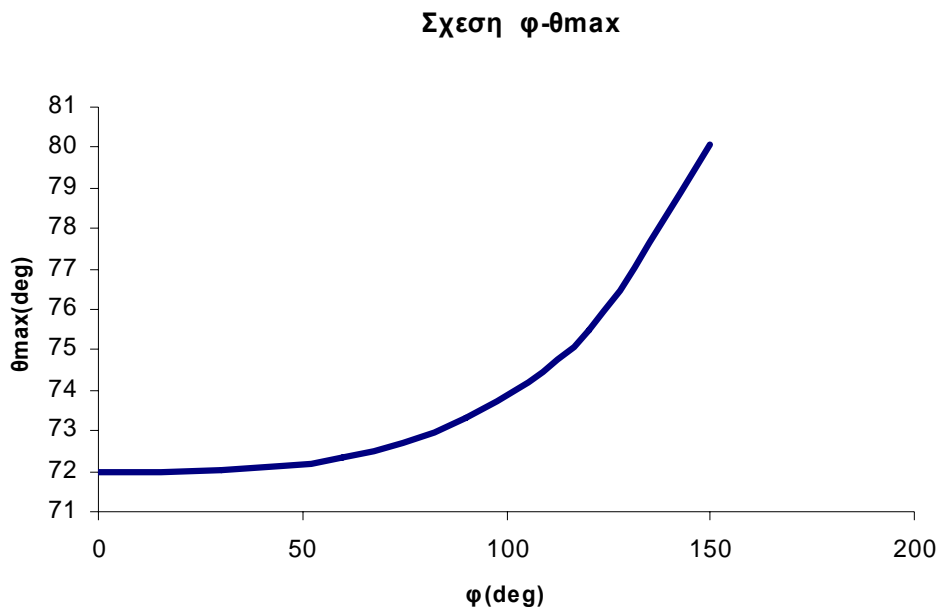
$$2 \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left(\frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right) \right) \left(\frac{1}{2Y^{\max}} \right) = \frac{\sin \theta + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin[(1-\lambda)\theta]}{Y} \Rightarrow \quad (3.40)$$

Από τη παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι όταν $Y = Y^{\max}$ τότε

$$\theta = \theta_{\max} = \frac{\pi}{2-\lambda} \quad (3.41)$$

Προφανώς θέτοντας όπου λ το αντίστοιχο από τον πίνακα 1 βρίσκουμε εύκολα που έχουμε τη μέγιστη εγκάρσια διάμετρο η οποία όμως δεν μπορεί να υπολογιστεί για τις δυο μεγάλες εγκοπές αφού η καυστική είναι κομμένη. Σε αυτή την περίπτωση θα βρούμε μια σχέση μεταξύ ανοίγματος καυστικής και μέγιστης διαμέτρου με την οποία μετρώντας το άνοιγμα της καυστικής θα βρίσκουμε τη μέγιστη διάμετρο.

φ	λ	θ^{\max}
0	-0,5	72
30	-0,49855	72,04
60	-0,48778	72,35
90	-0,45552	73,30
120	-0,38427	75,49
150	-0,24802	80,07



Σχήμα 3.7: Απεικόνιση γραφικής παράστασης φ - θ_{\max}

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στην παράγραφο 2.6 που αφορά τη σχεδίαση της εξωτερικής καυστικής αρκεί από την κορυφή της ρωγμής η την κορυφή της εγκοπής αντίστοιχα να αχθεί ως προς τον άξονα συμμετρίας της καυστικής ακτίνα r_o υπό γωνία θ και ακολούθως από το σημείο P διάνυσμα PK υπό γωνία $\theta/2$ ως προς την ακτίνα r_o . (Βλέπε Σχ. 2.4(β)). Άρα ανάλογα για τη μέγιστη διάμετρο θα πρέπει για να την βρούμε στη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω όπου θ να βάζουμε την θ_{max} . Και επειδή όπως είπαμε για μεγάλες εγκοπές με βάση αυτή την διαδικασία επειδή η καυστική είναι κομμένη μπορεί να μην βρίσκουμε τη μέγιστη εγκάρσια διάμετρο τότε μετρώντας το άνοιγμα της καυστικής θα βρίσκουμε τη μέγιστη διάμετρο.

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΧΕΣΗΣ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

$$L = 2y|_{\theta=\pi-\frac{\varphi}{2}} = 2\lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin[(1-\lambda)\theta] \right) \Rightarrow \quad (3.42)$$

$$L = 2\lambda_m r_o \left(\sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left[(1-\lambda) \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right) \Rightarrow \quad (3.43)$$

$$r_o = \frac{L}{2\lambda_m \left(\sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left[(1-\lambda) \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right)} \Rightarrow \quad (3.44)$$

Όμως: $r_o = |C' K \lambda (\lambda - 1)|^{1/2-\lambda}$ Άρα έχουμε:

$$|C' K \lambda (\lambda - 1)|^{1/2-\lambda} = \frac{L}{2\lambda_m \left(\sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \left[(1-\lambda) \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right)} \Rightarrow \quad (3.45)$$

$$\left| \delta_\lambda(\varphi) \left(\frac{D^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} \lambda(\lambda-1) \right|^{\frac{1}{2-\lambda}} = \frac{L}{2\lambda_m \left(\sin\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin\left[(1-\lambda)\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \right)} \Rightarrow$$

$$|\delta_\lambda(\varphi)|^{\frac{1}{2-\lambda}} \frac{D^{\max}}{\lambda_m} |\lambda(\lambda-1)|^{\frac{1}{2-\lambda}} = \frac{L}{2\lambda_m \left(\sin\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin\left[(1-\lambda)\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \right)} \Rightarrow$$

$$\frac{D^{\max}}{L} = \frac{1}{2|\lambda(\lambda-1)\delta_\lambda(\varphi)|^{\frac{1}{2-\lambda}} \left[\sin\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin\left[(1-\lambda)\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \right]} \quad (3.45)$$

Με:

$$\delta_\lambda(\varphi) = \frac{2^{\lambda-2}}{\lambda(\lambda-1)} \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right)^{\lambda-2} \quad (3.46)$$

επομένως για τις εγκοπές 90,120,150 με το λ γνωστό μπορεί η παραπάνω σχέση να απλοποιηθεί σημαντικά και έχουμε:

- $\varphi=90$ ($\lambda=-0,45552$)

$$\delta_\lambda(\varphi) = \frac{2^{\lambda-2}}{\lambda(\lambda-1)} \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda} \right)^{\lambda-2} = \frac{2^{-2,45552}}{0,663} (\sin 73,30 + 0,687 \sin 106,7)^{-2,45552} =$$

$$= 0,0846$$

- $\varphi=120$ ($\lambda=-0,38427$)

Όμοια βρίσκουμε ότι

$$\delta_\lambda(\varphi) = 0,1064$$

- $\varphi=150$ ($\lambda=-0,24802$)

Όμοια $\delta_\lambda(\varphi)=0,1874$

Όπως φυσικά φαίνεται και στον πίνακα 1 για τις τιμές του $\delta_\lambda(\omega)$.

Άρα έχουμε για $\varphi=90$:

$$\frac{D^{\max}}{L} = \frac{1}{0,62[0,707 + 0,687 * (-0,284)]} = \frac{1}{0,3173} = 3,15159 \quad (3.47)$$

Για $\varphi=120$ έχουμε:

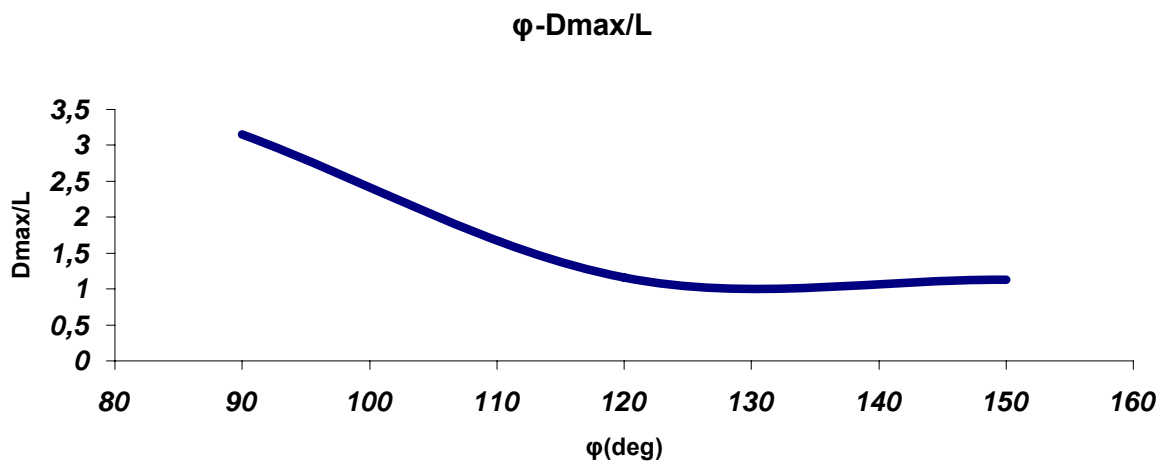
$$\frac{D^{\max}}{L} = \frac{1}{0,598[0,866 + 0,722 * 0,24]} = \frac{1}{0,621} = 1,61 \quad (3.48)$$

Για $\varphi=150$ έχουμε:

$$\frac{D^{\max}}{L} = \frac{1}{0,563[0,966 + 0,802 * 0,755]} = \frac{1}{0,884} = 1,13 \quad (3.49)$$

Στη συνέχεια ακολουθεί πίνακας καθώς και γραφική παράσταση της γωνίας εγκοπής και του παραπάνω λόγου:

φ	$\frac{D^{\max}}{L}$
90	3,15
120	1,16
150	1,13



Σχήμα 3.8: Απεικόνιση γραφικής παράστασης φ - D_{\max}/L

3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ Κ (ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΟΠΩΣ ΕΧΟΥΜΕ ΑΝΑΦΕΡΕΙ)

Από τη σχέση $|K| = \delta_\lambda(\varphi) \left(\frac{D^{\max}}{\lambda_m} \right)^{2-\lambda} \frac{1}{|C'|} = |K_I|$ η οποία είναι φυσικά

γνωστή πλέον αφού υπολογίσουμε τους επιμέρους όρους στο τέλος θα δούμε τον εφελκυστικο συντελεστή έντασης των τάσεων (stress intensity factor):

$$C' = \frac{-\varepsilon_z dc_r}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} = 0,049$$

Οπου σύμφωνα με (3.39):

$$D^{\max} = 2Y^{\max} = 2\lambda_m r_o \left(\sin \frac{\pi}{2-\lambda} + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin \frac{\pi(\lambda-1)}{2-\lambda} \right)$$

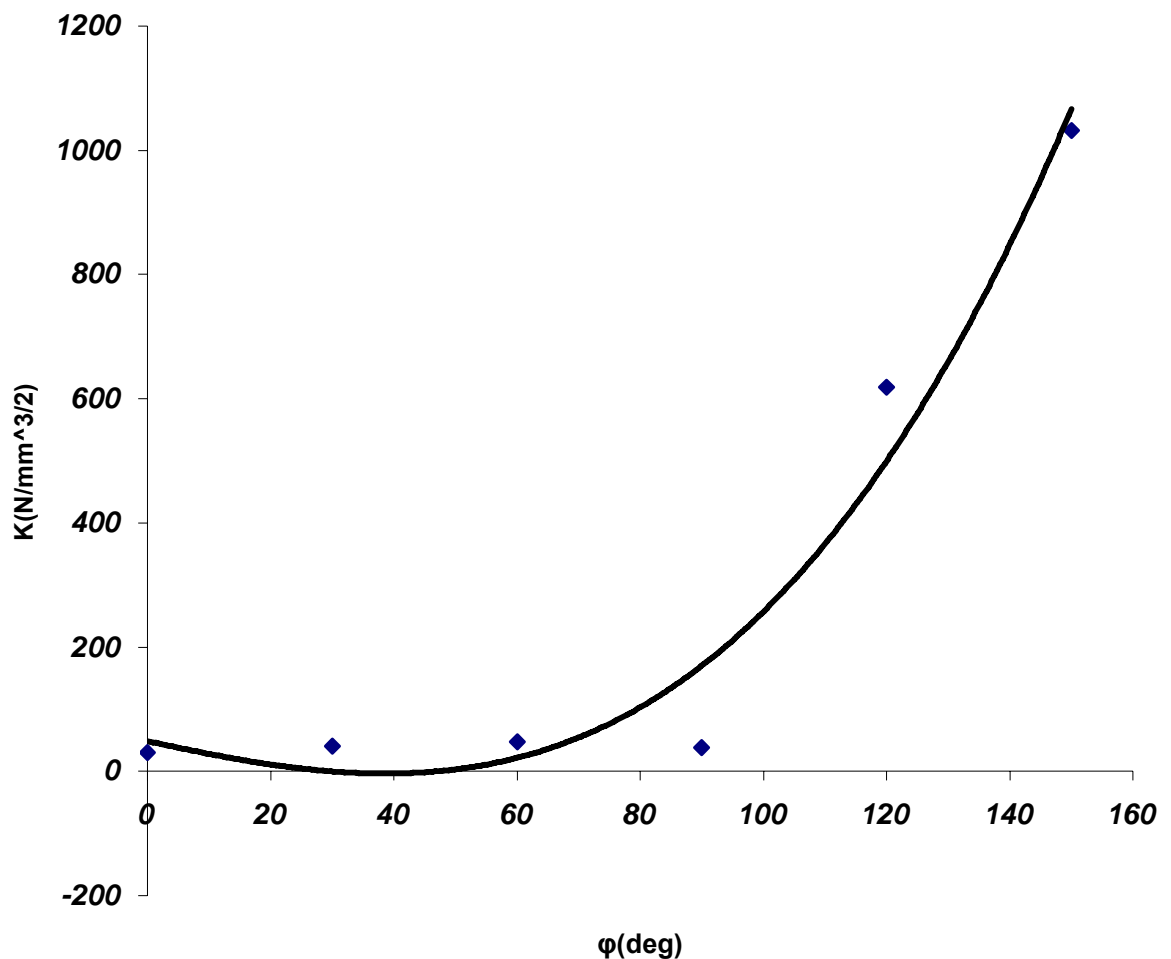
Άρα αφού κάνουμε τις πράξεις για τη μέγιστη διάμετρο για τις κλειστές εγκοπές από τον παραπάνω τύπο ενώ για τις ανοιχτές θα κάνουμε τον υπολογισμό της μέγιστης διαμέτρου μέσω του ανοίγματος της καυστικής, ο τύπος υπολογισμού του οποίου φαίνεται παρακάτω, στο EXCEL συμπληρώνουμε το παρακάτω πίνακα.

$$L = 2y|_{\theta=\pi-\phi/2} = 2\lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{1}{|\lambda-1|} \sin[(1-\lambda)\theta] \right) \quad (3.50)$$

$\varphi(\text{deg})$	λ	$\delta_z(\varphi)$	C'	D^{max}	K
0	-0,50000	0,0745	0,049	18,68	30,06
30	-0,49855	0,0748	0,049	21,04	40,59
60	-0,48778	0,0771	0,049	22,20	47,14
90	-0,45552	0,0846	0,049	19,91	37,88
120	-0,38427	0,1064	0,049	60,6	619,04
150	-0,24802	0,1874	0,049	68,27	1031,84

Ακολουθεί η γραφική παράσταση φ - K :

φ - K



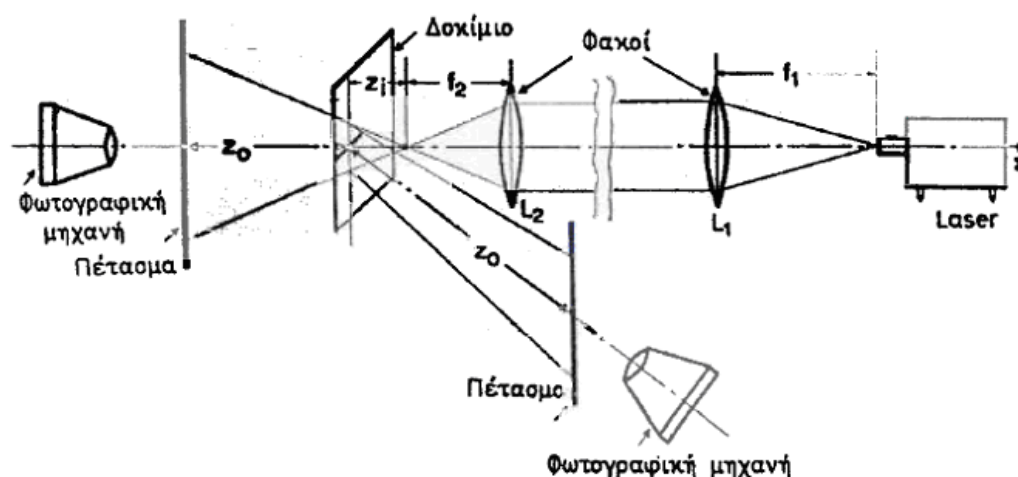
Σχήμα 3.9: Απεικόνιση γραφικής παράστασης φ - K

3.6 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

3.6.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Η πειραματική διάταξη για το σχηματισμό των καυστικών είναι απλή όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Για την πειραματική αυτή διάταξη απαιτούνται:

- Πηγή Φωτός (Laser He-Ne)
- Ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του Laser
- Δυο συγκλίνοντες οπτικοί φακοί εστίασης $f=1\text{m}$ για να δημιουργηθεί συγκλίνουσα η αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη.
- Ένα πέταμα αναφοράς (θαμπόγυαλο) πάνω στο οποίο προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές.
- Μια φωτογραφική μηχανή για τη λήψη των καυστικών.



στο δικό μας πείραμα η θέση της φωτογραφικής μας μηχανής είναι η κάτω.

3.6.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Το πέταμα αναφοράς τοποθετήθηκε εμπρός από το δοκίμιο στο οποίο λαμβάνεται η καυστική ανάκλασης. Σε κάθε δοκίμιο ένα για κάθε εγκοπή ασκήθηκε εφελκυστική τάση από 0 kρ μέχρι την θραύση τους ενώ ανά 10 kρ λαμβάνεται μια φωτογραφία, με τη βοήθεια των οποίων μετρήσαμε τη μέγιστη διάμετρο η το άνοιγμα των καυστικών όταν όπως αναφέραμε η μέτρηση της διαμέτρου δεν είναι εφικτή. Για την υλοποίηση των μετρήσεων πάνω στο πέταμα έχουμε σχεδιάσει έναν χάρακα μήκους 15 mm οπότε από τις φωτογραφίες που έχουμε λάβει και στις οποίες ο χάρακας είναι βέβαια εμφανής μπορούμε με μια μέτρηση της διαμέτρου στη φωτογραφία να βρούμε την πραγματική διάμετρο. Στη συνέχεια ακολουθεί μια σύγκριση των πειραματικών και θεωρητικών ευρημάτων.

3.6.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Από την βιβλιογραφία [5] υπάρχει ένας τύπος ο οποίος συνδέει το φορτίο το οποίο ασκείται κατά τον εφελκυσμό στο εκάστοτε δοκίμιο με τον συντελεστή έντασης της τάσης:

$$K = \frac{6P}{wt} w^{1-\lambda} f_2 \left(\varphi, \frac{\alpha}{w} \right) \quad (3.51)$$

όπου P είναι το φορτίο α είναι το βάθος της εγκοπής w το πλάτος του δοκιμίου t το πάχος του δοκιμίου και τέλος $f_2 \left(\varphi, \frac{\alpha}{w} \right)$ είναι ένας συντελεστής ο οποίος παίρνει μια τιμή συγκεκριμένη για κάθε εγκοπή. Για την περίπτωση της εγκοπής των 90 μοιρών παίρνει παραδείγματος χάρη την τιμή 2,106.

Θα υλοποιήσουμε κατά αυτό το τρόπο τη σύγκριση εφόσον κάτι διαφορετικό θα ήταν ανέφικτο λόγω του ότι έχουμε λάβει μια τυχαία τιμή του K κατά τη σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών. Ακόμα τους διάφορους τύπους συμμετέχει ο συντελεστής μεγέθυνσης (λ_m) ο οποίος διαφέρει από πείραμα σε πείραμα.

Ξεκινώντας τυχαία από την περίπτωση των 60 μοιρών σχηματίζουμε έναν πίνακα στον οποίο στη μια στήλη φαίνεται το φορτίο και στην άλλη η πραγματική διάμετρο έτσι έχουμε:

$P(Kp)$	$D^{\max}(mm)$
40	20,25
60	23,85
80	28,35
100	31,5
120	32,4
140	37,35
180	41,4

έχουμε ότι:

$$D^{\max} = \lambda_m \left(\frac{|C'|K}{\delta} \right)^{\frac{1}{2-\lambda}} \quad (3.52)$$

Συγκρίνοντας παραδείγματος χάρη την μέγιστη διάμετρο για 80 Kp και 100 kp παίρνουμε εύκολα από τον παραπάνω τύπο :

$$\frac{D^{\max}(100)}{D^{\max}(80)} = \left(\frac{K(100)}{K(80)} \right)^{\frac{1}{2-\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{D^{\max}(100)}{D^{\max}(80)} = \left(\frac{P(100)}{P(80)} \right)^{\frac{1}{2-\lambda}} = \left(\frac{100}{80} \right)^{0,402} = 1,1 \Rightarrow$$

$$D^{\max}(100) = 1,1 D^{\max}(80) = 1,1 * 28,35 = 31,185$$

Παρατηρούμε ότι σχεδόν οι δυο τιμές ταυτίζονται.

Για την περίπτωση των 90 μοιρών έχουμε αντίστοιχα τον παρακάτω πίνακα:

$P(Kp)$	$D^{\max}(mm)$
40	34
60	39
80	44
100	49

Όμοια έχουμε:

$$\frac{K(60)}{K(40)} = \frac{P(60)}{P(40)} = \frac{60}{40} = 1,5$$

Ακόμα:

$$\frac{D(60)}{D(40)} = \left(\frac{K(60)}{K(40)} \right)^{\frac{1}{2} + 0,45552} = 1,5^{0,41} = 1,18 \Rightarrow$$

$$D(60) = 1,18 * D(40) = 1,18 * 34 = 40$$

Η τιμή αυτή πάλι σχεδόν συμπίπτει με την αντίστοιχη πειραματική.

Για την περίπτωση των 120 μοιρών έχουμε:

$P(Kp)$	$D^{\max}(mm)$
80	35
100	36
120	37,8
140	40,5
160	42,3
180	44,1
200	46,8

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε :

$$\frac{K(200)}{K(1800)} = \frac{P(200)}{P(180)} = \frac{200}{180} = 1,12$$

$$\frac{D(200)}{D(180)} = \left(\frac{K(200)}{K(180)} \right)^{\frac{1}{2+0,38427}} = 1,12^{0,42} = 1,05 \Rightarrow$$

$$D(200) = 1,05 * D(180) = 1,05 * 44,1 = 46,3$$

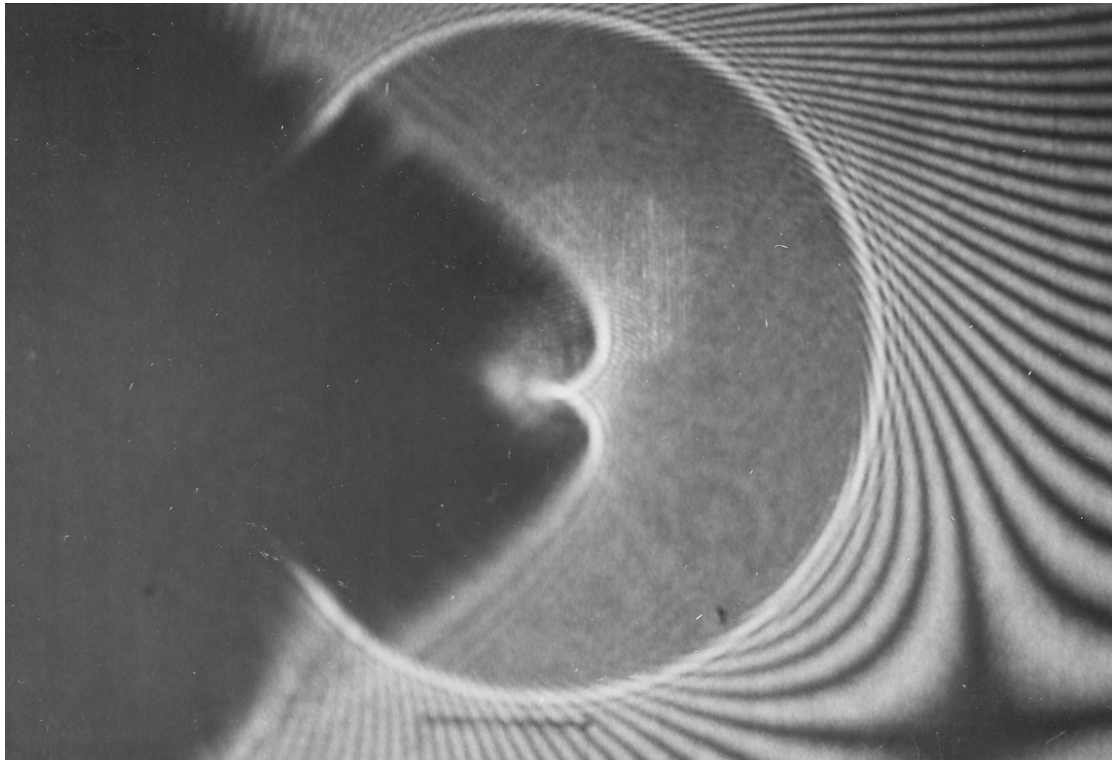
Παρατηρούμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις οι οποίες εξετάστηκαν τυχαία υπάρχει μια σχεδόν ταύτιση των αποτελεσμάτων, θεωρητικών και πειραματικών. Δεν θα προχωρήσω στην αναφορά των συγκρίσεων για τα άλλα δυο δοκίμια εφόσον τα αποτελέσματα ταυτίζονται και εκεί όπως διαπιστώθηκε.

3.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η οπτική μέθοδος των καυστικών χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη της θραύσης του Plexiglas (PMMA) υλικού με εγκοπές τύπου V υπό εφελκυστική τάση. Μερικά σημαντικά συμπεράσματα είναι τα ακόλουθα:

- Η εξέλιξη της περιοχής της εγκοπής κάτω από την εφελκυστική της φόρτιση είναι κοινή με αυτή που ελήφθη από το πείραμα
- Κάτω από διάφορα εφελκυστικά φορτία, η μέγιστη διάμετρος καθώς και ο συντελεστής έντασης της τάσης στη περιοχή της εγκοπής μπορούν να μετρηθούν και στη συνέχεια να υπολογιστούν χωρίς μεγάλες αποκλίσεις όπως φάνηκε και από τη σύγκριση που προηγήθηκε μέσω των αντιστοιχών θεωρητικών τιμών.
- Τα παραπάνω μπορούν να είναι χρήσιμα για την σχεδίαση καθώς και δομική μελέτη κατασκευών που περιέχουν εγκοπές. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο οδοντωτός τροχός ο οποίος μπορεί να προσομοιωθεί σαν το δοκίμιο του πειράματός μας εάν θεωρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στα δόντια του γραναζιού κατά τη συμπλέξη τους μπορεί να μεταφερθεί σαν εφελκυστική στα άκρα του.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια καυστική ανάκλασης, η εξωτερική και η εσωτερική, όπως λαμβάνεται από το πείραμα μας με τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω:



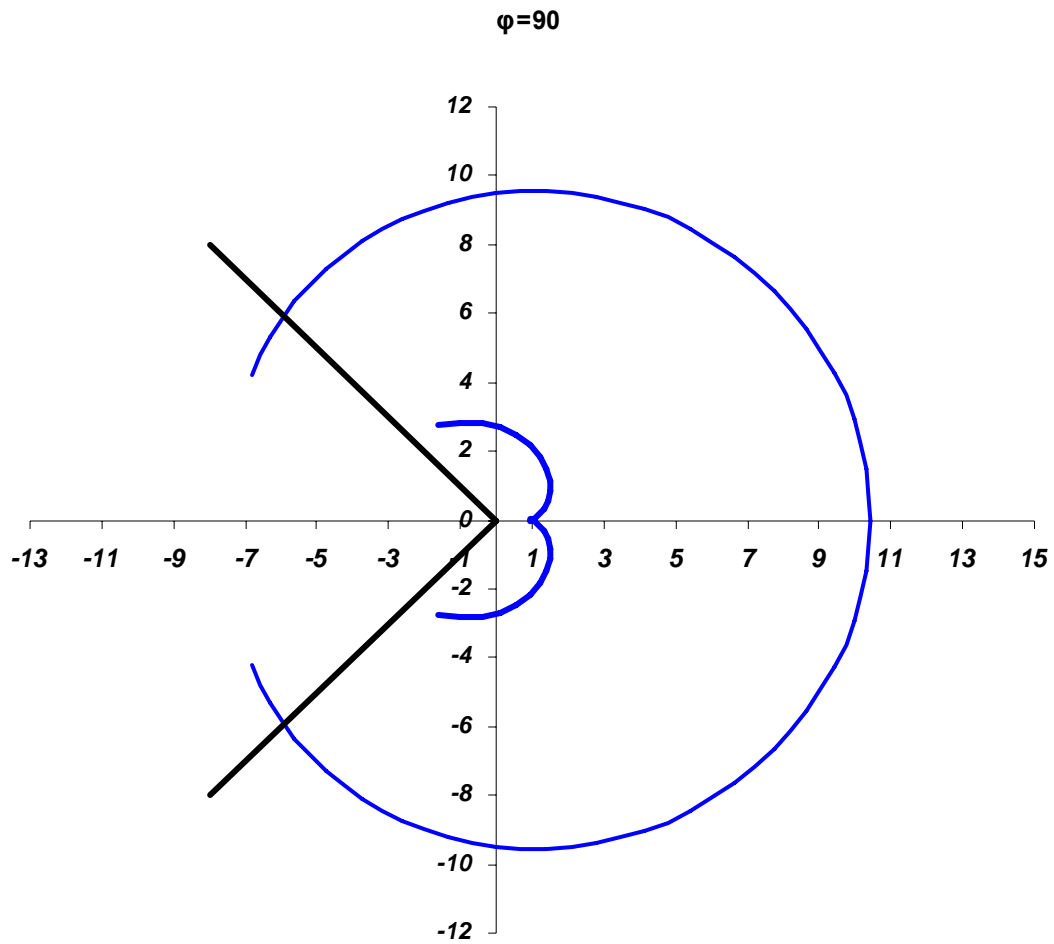
Σχήμα 3.10: Πειραματική καυστική στο άκρο εγκοπήs ($\varphi=90$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Ενώ ακολουθεί η θεωρητική απεικόνιση των παραπάνω καυστικών όπως αυτές σχεδιάστηκαν στο EXCEL σύμφωνα με τους τύπους :

$$X = \lambda_m r_o \left(\cos \theta \mp \frac{1}{|\lambda - 1|} \cos(1 - \lambda)\theta \right)$$

$$Y = \lambda_m r_o \left(\sin \theta \mp \frac{1}{|1 - \lambda|} \sin(1 - \lambda)\theta \right)$$

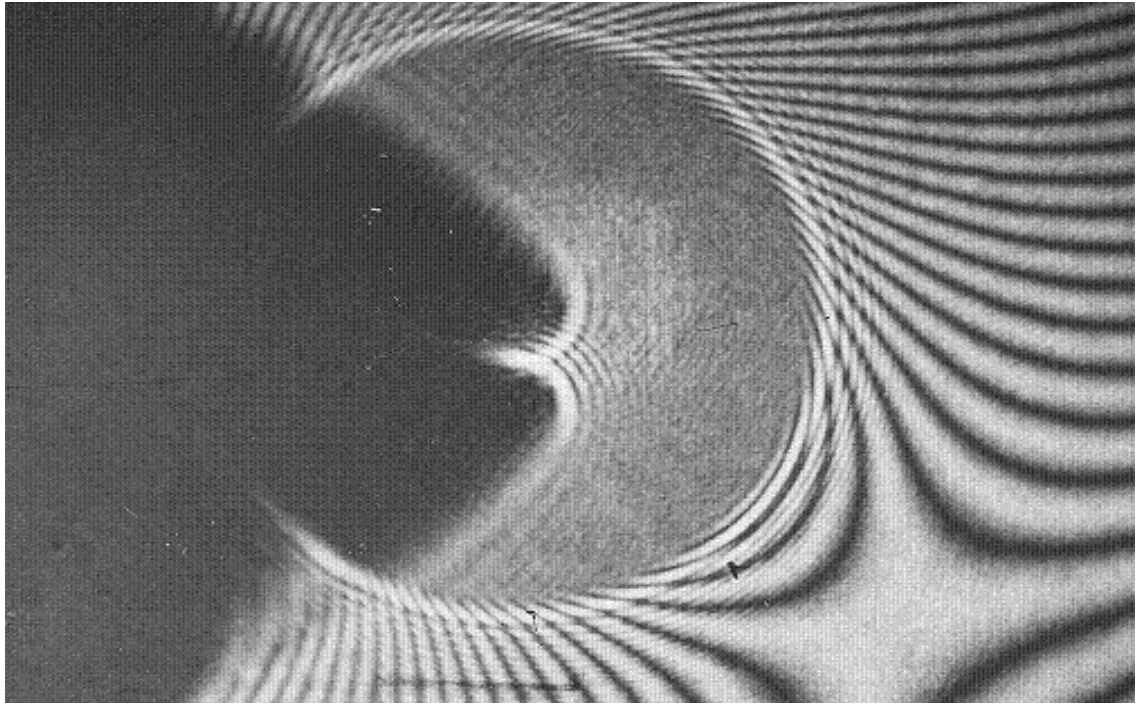
όπου με το + παίρνουμε την εξωτερική καυστική και με το - την εσωτερική.



Σχήμα 3.11: Θεωρητική καυστική στο άκρο εγκοπής ($\varphi=90$) υπό μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1.** Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος : Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων (Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων) Εκδόσεις Κλειδάριθμος
- 2.** Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος : Ειδικά Κεφάλαια Μηχανικής (Πειραματικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων)
- 3.** Τσαμασφυρος Γ.Τ : Μηχανική Παραμορφωσιμου Σώματος Ι . Εκδόσεις Συμμετρία
- 4.** Papadopoulos GA , FRACTURE MECHANICS . The Experimental Method of Caustics and the Det.-criterion of Fracture Springer-Verlag ,London , England 1993.
- 5.** W . Xu , X.F Yao , M.Q .Xu , G.C . Jin , H.Y Yeh Fracture characterizations of V- notch tip in PMMA polymer material
- 6.** Σπανδαγος Βαγγέλης : Μιγαδικές Συναρτήσεις . Εκδόσεις Αίθρα
- 7.** Σπανδαγος Βαγγέλης : Ολοκληρωτικός Λογισμός . Εκδόσεις Αίθρα



ΑΘΗΝΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008