

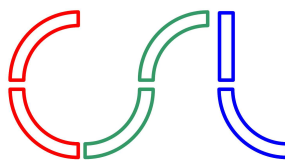


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΚΥΤΤΑΡΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

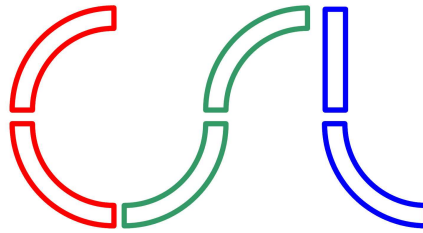
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Μ. ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ

Διπλωματική Εργασία υπό την επίβλεψη του Καθηγητή
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ι. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ



Control Systems Lab

Αθήνα, Μάρτιος 2008



Control Systems Lab

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Διπλωματική Εργασία του
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Μ. ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ¹
υπό την επίβλεψη του Καθηγητή
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ι. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ²

Αθήνα, Μάρτιος 2008

¹Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου Αθήνα, 15780, Τηλέφωνο: +30-210-772-3656,
e-mail: dchatzis@csl.mech.ntua.gr

²Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου Αθήνα, 15780, Τηλέφωνο: +30-210-772-3595,
e-mail: kkyria@mail.ntua.gr

Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται ένα νέο ρομποτικό κύτταρο με όνομα *R-Cell (Robotic Cell)*. Όπως σε όλα τα ρομποτικά κυτταρικά συστήματα, έτσι και στην περίπτωση αυτή, το ρομποτικό μας κύτταρο έχει τη δυνατότητα να συνδέεται με άλλα ρομποτικά κύτταρα με συγκεκριμένο τρόπο και τελικά να δημιουργεί μία *ρομποτική κατασκευή κυτταρικής μορφής*. Η τελική ρομποτική κατασκευή μπορεί να αλλάξει μορφή και λειτουργικότητα με επανατοποθέτηση των ρομποτικών κυττάρων στην εσωτερική της δομή. Το κυτταρικό ρομποτικό σύστημα που παρουσιάζεται αποτελείται από ένα μόνο τύπο ρομποτικών κυττάρων, γι' αυτό το λόγο θεωρείται "ομοιογενές".

Κάθε ρομποτικό κύτταρο έχει *τετραγωνικό εξωτερικό σχήμα* και χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες: (α) έχει δυνατότητα *μεταφορικής κίνησης*, γεγονός που το κάνει αυτόνομο και ανεξάρτητο από άλλα κύτταρα και (β) έχει *δυνατότητες παραμόρφωσης*, δηλαδή αλλαγής του εξωτερικού του σχήματος. Οι τελευταίες αυτές δυνατότητες επιτρέπουν στο κύτταρο να "παραμορφώνεται" και να ασκεί δυνάμεις/ροπές σε διαφορετικές διευθύνσεις. Στην πραγματικότητα το ρομποτικό κύτταρο δραστηριοποιείται στο επίπεδο, άρα τελικά όλες οι κινήσεις και οι δυνάμεις βρίσκονται πάνω σε αυτό. Η δυνατότητα των ρομποτικών κυττάρων να μετακινούνται αυτόνομα επιτρέπουν στην τελική ρομποτική κατασκευή να συναρμολογείται αυτόματα. Η λειτουργία αυτή ονομάζεται *αυτόματη συναρμολόγηση (self-assembly)*. Εξίσου σημαντική είναι η ικανότητα της τελικής ρομποτικής κατασκευής να επιδιορθώνει τυχόν "κατεστραμένα" τμήματα της δομής με τοποθέτηση νέων κυττάρων σε αυτά. Η λειτουργία αυτή ονομάζεται *αυτόματη επιδιόρθωση (self-repair)*. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η τελική κυτταρική κατασκευή μπορεί να αλλάξει τη μορφή και το σχήμα της με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι με αλλαγή της θέσης των ρομποτικών κυττάρων στην εσωτερική της δομή (*reconfiguration*), όπως δηλαδή συμβαίνει σχεδόν σε όλα τα είδη ρομποτικών κυτταρικών κατασκευών. Ο δεύτερος τρόπος είναι με *παραμόρφωση των κυττάρων*, άρα και της συνολικής ρομποτικής κατασκευής (*deformation*). Ο δεύτερος αυτός τρόπος, δηλαδή η δυνατότητα παραμόρφωσης, είναι και το πιο πρωτότυπο χαρακτηριστικό του ρομποτικού μας κυττάρου (*R-Cell*) σε σχέση με τα άλλα αντίστοιχα ρομποτικά κύτταρα, που έχουν κατά καιρούς σχεδιασθεί και αναπτυχθεί από διάφορους ερευνητές. Οι δυνατότητες παραμόρφωσης του κυττάρου επιτρέπουν και στην τελική κατασκευή να παραμορφώνεται σε αρκετά μεγάλο βαθμό, να τροποποιεί το σχήμα της ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος και να ασκεί αλλά και να δέχεται δυνάμεις σε όλες τις

δυνατές διευθύνσεις στο επίπεδο.

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας έγινε μία σχεδίαση του ρομποτικού κυττάρου με χρήση του σχεδιαστικού προγράμματος "Solidworks 2007". Ακολούθησε μία εκτεταμένη ανάλυση της κινηματικής του κυττάρου και της κυτταρικής ρομποτικής κατασκευής. Η ανάπτυξη όλων των αλγορίθμων έγινε σε λειτουργικό σύστημα "WindowsXP-Pro" με χρήση του πακέτου "Matlab7.2-R2006a". Οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν επιλύουν τα προβλήματα της ευθείας, αντίστροφης και διαφορικής κινηματικής ανάλυσης του ρομποτικού μας κυττάρου και φυσικά μίας ολόκληρης ρομποτικής κυτταρικής κατασκευής. Η συγγραφή του παρόντος πονήματος έγινε με το \LaTeX . Η γραμματοσειρά που χρησιμοποιήθηκε είναι η "Kerkis© Department of Mathematics, University of the Aegean".

Η διπλωματική εργασία έλαβε χώρα στο *Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών* του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου με επιβλέποντα τον καθηγητή *Κωνσταντίνο Ι. Κυριακόπουλο*. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον κ. Κωνσταντίνο Ι. Κυριακόπουλο για την βοήθειά του όλο αυτό το διάστημα, τόσο στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές του σε αποφάσεις που κλήθηκα να πάρω για το μέλλον μου τα τελευταία δύο χρόνια. Θα ήθελα ακόμη να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά την ανάθεση αυτής της διπλωματικής εργασίας και για το γεγονός ότι μου έδωσε τη δυνατότητα να κάνω τα πρώτα μου βήματα στα "μονοπάτια" της ρομποτικής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Σάββα Λοΐζου για την πολύτιμη βοήθειά του και την όμορφη συνεργασία τους τελευταίους μήνες, καθώς επίσης και τα υπόλοιπα μέλη του Εργαστηρίου Αυτομάτου Ελέγχου για την όμορφη παρέα, το ευχάριστο κλίμα και κυρίως τη διάθεση για βοήθεια σε ολόκληρη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Ξεχωριστά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα, τη μητέρα και την αδερφή μου για την ηθική και πνευματική στήριξη και φυσικά τις πολύτιμες συμβουλές τους, όπως και όλους τους φίλους μου για τις όμορφες στιγμές που μοιραζόμαστε και για την κατανόηση και τη στήριξή τους. Η διπλωματική εργασία αυτή αφιερώνεται στη γιαγιά μου, που δεν βρίσκεται πλέον μαζί μου, αλλά πίστευε σε μένα πάντα και με στήριζε όσο κανένας άλλος όλα τα χρόνια της ζωής μου.

Δημήτρης Χατζηγεωργίου
18/3/2008

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1	Γενικά	1
1.2	Γενική διατύπωση του προβλήματος	2
1.3	Σημασία επίλυσης του προβλήματος	4
1.4	Παραπλήσιες εργασίες	4
1.4.1	Συστήματα τύπου πλέγματος	5
1.4.2	Συστήματα τύπου αλυσίδας	6
1.5	Δομή της εργασίας	9
2	ΤΕΧΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	13
2.1	Γενικά	13
2.2	Απαιτήσεις προβλήματος	13
2.3	Περιορισμοί προβλήματος	15
3	ΤΕΧΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	21
3.1	Σχεδίαση του ρομποτικού κυττάρου	21
3.2	Οι αρθρώσεις του ρομποτικού κύτταρου	25
3.2.1	Οι αρθρώσεις κατά τη φάση της συναρμολόγησης	25
3.2.2	Οι αρθρώσεις κατά τη φάση της παραμόρφωσης	26
3.3	Κατανομή βαθμών ελευθερίας κυτταρικής δομής	26
3.4	Κινηματική ανάλυση ρομποτικού κυττάρου	28
3.4.1	Ευθεία Κινηματική Ανάλυση (ΕΚΑ)	29
3.4.2	Αντίστροφη Κινηματική Ανάλυση (ΑΚΑ)	40
3.4.3	Διαφορική Κινηματική Ανάλυση (ΔΚΑ)	43
3.5	Ανάλυση ρομποτικής κυτταρικής δομής	46
3.5.1	Ο δομικός πίνακας S	46
3.5.2	Θεωρία γράφων	47
4	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΥΤΤΑΡΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ	53
4.1	Παράδειγμα κινηματικής ανάλυσης κυτταρικής δομής	53
4.1.1	Πίνακας δομής και θεωρία γράφων	53

4.1.2	Κινηματική ανάλυση	64
4.2	Παραδείγματα παραμόρφωσης κυτταρικών δομών	72
4.2.1	Πρώτο παράδειγμα παραμόρφωσης ρομποτικής κυτταρικής δομής	72
4.2.2	Δεύτερο παράδειγμα παραμόρφωσης ρομποτικής κυτταρικής δομής	75
4.3	Δυνάμεις σε ρομποτικές κυτταρικές δομές	77
4.3.1	Παράδειγμα υπολογισμού δυνάμεων	77
4.3.2	Αντίδραση ρομποτικής κυτταρικής δομής σε εξωτερικές συνθήκες	78
5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ & ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	85
5.1	Περίληψη	85
5.2	Συμπεράσματα	86
5.3	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	87

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Σχηματική αναπαράσταση της αυτόματης συναρμολόγησης (a) και της αυτόματης επιδιόρθωσης (b), όπως αυτές συναντώνται σε κυτταρικό ρομποτικό σύστημα.	3
1.2 Εφαρμογές ρομποτικών κυτταρικών συστημάτων στο διάστημα και ειδικά εργαλεία που αυτά μπορεί να φέρουν [3].	5
1.3 Συστήματα τύπου πλέγματος (a) και συστήματα τύπου αλυσίδας (b).	6
1.4 [Αριστερά] Το "Metamorphic Robot". [Δεξιά] Ο μηχανισμός επίτευξης σχετικής κίνησης για δύο τέτοιου είδους μηχανικά κύτταρα.	7
1.5 Το κυτταρικό σύστημα "Fracta" και κάποιες διαδοχικές φάσεις κατά την αλλαγή της δομής.	7
1.6 Τρισδιάστατη κυτταρική δομή με βάση το "ATRON".	7
1.7 Το "αρσενικό" [Αριστερά] και το "θυληκό" [Δεξιά] "Molecule".	8
1.8 [Αριστερά] Το κύτταρο "Crystalline Robot". [Δεξιά] Το κύτταρο "Telecube".	8
1.9 Το μηχανικό κύτταρο Polybot.	9
1.10 Δύο ρομποτικά κυτταρικά συστήματα αποτελούμενα από το μηχανικό κύτταρο "CONRO".	10
1.11 [Αριστερά] Το μηχανικό κύτταρο "Molecule". [Δεξιά] Ρομποτικές δομές αποτελούμενες από τέτοιου είδους μηχανικά κύτταρα.	10
1.12 [Αριστερά] Το μηχανικό κύτταρο "M-TRAN". [Δεξιά] Μεταμόρφωση από μία γραμμική κατασκευή σε ένα τετράποδο ρομπότ.	10
2.1 Η κίνηση των ρομποτικών κυττάρων.	14
2.2 Η κίνηση ενός ρομποτικού κυττάρου από την αρχική στην τελική θέση.	14
2.3 Μία απλή δομή ενός κυτταρικού ρομποτικού συστήματος. Είναι προφανές ότι τα κύτταρα θα πρέπει να συνδέονται μηχανικά μεταξύ τους.	15

2.4	Άσκηση δύναμης F στο άκρο μίας τυχαίας ρομποτικής κατασκευής αποτελούμενης από μηχανικά κύτταρα.	16
2.5	Ενδεικτική παραμόρφωση ενός τετραγωνικού κυττάρου. Παρατηρούμε ότι το τελικό σχήμα δεν είναι πλέον τετράγωνο. Με τον τρόπο αυτό μπορεί το μηχανικό κύτταρο να ασκεί δυνάμεις στο περιβάλλον.	16
2.6	Όλες οι φάσεις κατά την δημιουργία και λειτουργία μίας ρομποτικής κυτταρικής δομής. Ξεκινά με τη φάση της αυτόματης συναρμολόγησης και ολοκληρώνεται με την άσκηση της επιθυμητής δύναμης σε συγκεκριμένο σημείο στο περιβάλλον. . .	17
2.7	Ένα παράδειγμα υλοποίησης μιας συγκεκριμένης κυτταρικής δομής με “τετραγωνικά” [αριστερά] και με “εξαγωνικά” κύτταρα [δεξιά].	18
2.8	Σχηματική αναπαράσταση m ρομποτικών κυττάρων (n -γωνα) συνδεδεμένων στο σημείο D	19
3.1	Ένα ενδεικτικό σχήμα του ρομποτικού κυττάρου “R-Cell”. Στο σχήμα απεικονίζονται όλες οι αρθρώσεις (περιστροφικές και πρισματικές).	22
3.2	Η τρισδιάστατη σχεδίαση του ρομποτικού κυττάρου.	22
3.3	Στο πίσω μέρος φαίνεται το ρομποτικό κύτταρο στην αρχική του θέση και στο εμπρός το ίδιο κύτταρο σε μία τυχαία “παραμορφωμένη” θέση-κατάσταση.	23
3.4	Μία τυχαία ρομποτική κυτταρική δομή αποτελούμενη από 6 ρομποτικά κύτταρα R-Cells.	23
3.5	Ο τρόπος σύνδεσης (α) δύο, (β) τριών και (γ) τεσσάρων ρομποτικών κυττάρων. Στο (δ) ένα πέμπτο κύτταρο μόλις συνδέθηκε και περιστρέφεται για να κινηθεί προς την επιθυμητή θέση μέσα στη δομή.	24
3.6	Παράδειγμα κατανομής β.ε. μέσα στην κυτταρική δομή.	28
3.7	Κύτταρο με δύο σταθερούς (A, B) και δύο ελεύθερους κόμβους (C, D) σε τυχαία κατάσταση.	29
3.8	Οι δύο λύσεις και τα αντίστοιχα διανύσματα που αναφέρθηκαν για την επιλογή της “σωστής” λύσης για την ΕΚΑ του συστήματος με δύο ελεύθερους κόμβους. Εδώ προφανώς η σωστή λύση είναι η πρώτη (σημείο E_1) διότι το εσωτερικό γινόμενο $pr_1 > 0$, ενώ το αντίστοιχο $pr_2 < 0$	35
3.9	Κύτταρο με τρεις σταθερούς (A, B και D) και έναν ελεύθερο κόμβο (C) σε τυχαία θέση-κατάσταση.	36
3.10	Μία ρομποτική κυτταρική δομή αποτελούμενη από $n = 19$ ρομποτικά κύτταρα. Η δομή έχει 5 “επίπεδα” και 6 “στήλες”. . .	47

3.11 Το δομικό διάγραμμα του αλγόριθμου που παράγει τον πίνακα $A(Y)$, δεδομένου του πίνακα $A(X)$	51
4.1 Η απλή κυτταρική δομή του πρώτου παραδείγματος. Παρατηρούμε ότι κόμβοι εδάφους είναι οι κόμβοι 1 και 2.	54
4.2 Ο απλός γράφος X για την δομή του Σχ. 4.1.	55
4.3 Ο κατευθυνόμενος γράφος Y για τη δομή του Σχ. 4.1.	62
4.4 Η κυτταρική δομή για το πρώτο παράδειγμα παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι κόμβοι εδάφους είναι οι κόμβοι 1 και 2.	73
4.5 Ο απλός και ο κατευθυνόμενος γράφος για την δομή του Σχ. 4.4.	74
4.6 Η παραμόρφωση της δομής για το πρώτο παράδειγμα.	75
4.7 Η κυτταρική δομή για το δεύτερο παράδειγμα παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι κόμβοι εδάφους είναι οι κόμβοι 1 και 2.	76
4.8 Ο απλός και ο κατευθυνόμενος γράφος για την δομή του Σχ. 4.7.	76
4.9 Η παραμόρφωση της δομής για το πρώτο παράδειγμα.	77
4.10 Η παραμόρφωση της δομής για το δεύτερο παράδειγμα και διάφορα ενδιάμεσα στάδια.	78
4.11 Η δομή για το παράδειγμα υπολογισμού δύναμης [επάνω] και ο αντίστοιχος κατευθυνόμενος γράφος [κάτω].	79
4.12 Η κατανομή των δυνάμεων στο εσωτερικό τη δομής. Με χρώμα παρουσιάζεται η μέση τιμή των δυνάμεων σε κάθε κύτταρο.	80
4.13 Η δομή για το παράδειγμα αντίδρασης σε εξωτερικές συνθήκες [επάνω] και ο αντίστοιχος κατευθυνόμενος γράφος [κάτω].	81
4.14 Κατανομή των δυνάμεων στο εσωτερικό της δομής του Σχ. 4.13. Η μέγιστη τιμή για την δύναμη κάθε κυττάρου παρουσιάζεται με χρώμα.	82
4.15 Οι διάφορες ενδιάμεσες φάσεις κατά τη φάση της αντίδρασης της ρομποτικής δομής στις εξωτερικές φορτίσεις.	83

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Ένα κυτταρικό ρομποτικό σύστημα (*cellular/modular robotic system*) είναι ένα ρομποτικό σύστημα που έχει την ικανότητα να αλλάζει το σχήμα και τη λειτουργικότητά του ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται και τα καθήκοντα που του έχουν ανατεθεί. Το βασικό δομικό στοιχείο ενός κυτταρικού ρομποτικού συστήματος είναι το *μηχανικό κύτταρο* (*cell/module*). Τα κύτταρα έχουν τη δυνατότητα να αλλάζουν θέση μέσα στο κυτταρικό ρομποτικό σύστημα, έτσι ώστε να αλλάζουν και τα εξωτερικά και εσωτερικά χαρακτηριστικά του ρομπότ το οποίο αποτελούν.

Ένας ζωντανός κυτταρικός οργανισμός και ένα ρομποτικό κυτταρικό σύστημα έχουν πάρα πολλά κοινά χαρακτηριστικά. Και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα αποτελείται από μικρές δομικές μονάδες, τα γνωστά σε όλους βιολογικά κύτταρα για το ζωντανό οργανισμό και τα μηχανικά κύτταρα για το ρομποτικό σύστημα. Η επικοινωνία μεταξύ των κυττάρων για το μεν ζωντανό οργανισμό γίνεται με διάχυση χημικών ουσιών από κύτταρο σε κύτταρο, ενώ για το δε κυτταρικό ρομποτικό σύστημα η επικοινωνία πραγματοποιείται με την ανταλλαγή ψηφιακής πληροφορίας μεταξύ γειτονικών κυττάρων. Επίσης και στις δύο περιπτώσεις τα δομικά στοιχεία συνεργάζονται για να αντεπεξέλθουν και να προσαρμοστούν στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκονται. Ο μηχανισμός συνεργασίας είναι ενσωματωμένος μέσα στο γονιδίωμα για τα βιολογικά κύτταρα, ενώ για τα μηχανικά κύτταρα έχει τη μορφή ενός κατανεμημένου προγράμματος-αλγορίθμου που “τρέχει” στους μικροεπεξεργαστές των μηχανικών κυττάρων.

Ο τομέας της *κυτταρικής ρομποτικής* (*cellular/modular robotics*) ασχολείται με το σχεδιασμό, την υλοποίηση και τον έλεγχο αυτόνομων κινηματικών μηχανισμών με μεταβλητή μορφολογία, δηλαδή των μηχανικών κυττάρων.

Οι μηχανισμοί αυτοί αποτελούν τις *θεμελιώδεις μονάδες (modules)* για τη δημιουργία ενός ρομποτικού συστήματος γενικού σκοπού. Πέραν των συμβατικών επενεργητών, αισθητήρων και συστημάτων αυτομάτου ελέγχου που βρίσκονται ακόμα και στα “τυπικά” ρομπότ, τα κυτταρικά ρομποτικά συστήματα έχουν επίσης τη μοναδική δυνατότητα να αλλάζουν το σχήμα τους κατά βούληση με αλλαγή της θέσης και της σύνδεσης των κυττάρων τους (*reconfiguration*) [2]. Η τελευταία αυτή σπουδαία δυνατότητα δίνει την ικανότητα στα συγκεκριμένα συστήματα να προσαρμόζονται σε νέες συνθήκες περιβάλλοντος (συνθήκες, φορτίσεις) με σχετική ευκολία και φυσικά να επανασχεδιάζουν τη δομή τους για να εκτελέσουν νέες εργασίες ή ακόμα και να επιδιορθώνουν κάποια κατεστραμμένη εσωτερική δομή τους (*self-repair*) [1]. Η τελευταία αυτή ικανότητα είναι πολύ σημαντική και μελετάται σε πολύ μεγάλη κλίμακα τα τελευταία χρόνια (Σχ. 1.1).

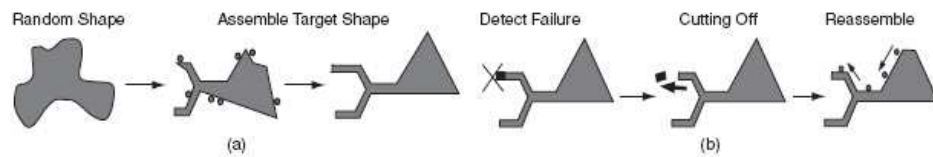
Η βασική ιδέα πίσω από την δημιουργία ενός νέου κυτταρικού ρομποτικού συστήματος είναι να σχεδιασθεί κάθε φορά ένα ρομποτικό σύστημα, που να μπορεί να μετασχηματίσει τη δομή του ώστε να μπορέσει να καλύψει όσο το δυνατόν περισσότερες ανάγκες και να εκτελέσει περισσότερες εργασίες. Τα προηγούμενα επιτυγχάνονται με την αλλαγή της δομής του ρομπότ, δηλαδή τη *μεταμόρφωσή* του (*metamorphosis*) σε μία δομή νέα, που να μπορεί να εκτελέσει την επιθυμητή εργασία. Η σχεδίαση ενός κυτταρικού ρομποτικού συστήματος ξεκινάει με την σχεδίαση του δομικού του στοιχείου, του μηχανικού κυττάρου.

Στη συγκεκριμένη εργασία μελετάται ένα νέο μηχανικό κύτταρο, που εκτός από τις προηγούμενες ιδιότητες που πληρούν σχεδόν όλα τα μηχανικά κύτταρα, έχει και την ικανότητα της *παραμόρφωσης*. Τις ιδιότητές του θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

1.2 Γενική διατύπωση του προβλήματος

Στη συγκεκριμένη εργασία γίνεται ανάλυση ενός νέου ρομποτικού συστήματος κυτταρικής μορφής. Το κυτταρικό σύστημα αυτό παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι *ομογενές (homogeneous)*, δηλαδή αποτελείται σε όλη τη δομή του από το ίδιο θεμελιώδες στοιχείο. Το στοιχείο αυτό είναι το μηχανικό κύτταρο που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια. Άμεση συνέπεια της ομοιογένειας της δομής είναι ότι ένα κυτταρικό ρομποτικό σύστημα θα μπορεί να αποσυντεθεί στα δομικά του στοιχεία, τα μηχανικά κύτταρα, και ότι ένας αριθμός ίδιων μηχανικών κυττάρων θα μπορούν να συνθέσουν μία ρομποτική δομή κυτταρικής μορφής.



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση της αυτόματης συναρμολόγησης (a) και της αυτόματης επιδιόρθωσης (b), όπως αυτές συναντώνται σε κυτταρικό ρομποτικό σύστημα.

- Μπορεί να *συναρμολογηθεί* μόνο του (*self-assembly*). Αυτό δίνει τη δυνατότητα στο σύστημα να συναρμολογείται μόνο του από το επίπεδο του ενός μηχανικού κυττάρου μέχρι την τελική δημιουργία της επιθυμητής ρομποτικής κατασκευής.
- Μπορεί να αλλάξει μόνο του την εσωτερική και την εξωτερική του δομή (*self-reconfiguration*) και με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνει την προσαρμογή του σε νέες συνθήκες περιβάλλοντος αλλά και σε νέα καθήκοντα (*tasks*). Η τελευταία αυτή δυνατότητα του δίνει και ένα ακόμα πλεονέκτημα, αυτό της *αυτόματης επιδιόρθωσης*.
- Μπορεί να υποστεί *παραμόρφωση* (*deformation*) σε κάποιο βαθμό. Η παραμόρφωση αυτή δίνει στο κυτταρικό σύστημα την ικανότητα να ασκεί γενικευμένες δυνάμεις σε διάφορες διευθύνσεις στο εξωτερικό του περιβάλλον ή ακόμα και να δέχεται αντίστοιχες δυνάμεις από το περιβάλλον του με πολύ μεγαλύτερη ευκολία, σε σχέση με ένα απλό στερεό ρομποτικό σύστημα είτε απλής είτε και κυτταρικής μορφής. Αυτό προφανώς συμβαίνει λόγω της ικανότητας του ρομποτικού μας συστήματος να προσαρμόζεται σε αυτούς τους εξωγενείς παράγοντες με σχετική ευκολία.

Για την δημιουργία ενός τέτοιου τύπου ρομποτικού συστήματος προτείνεται στη συγκεκριμένη εργασία ένας τύπος μηχανικού κυττάρου τα χαρακτηριστικά του οποίου θα αναλυθούν στη συνέχεια. Για την επίλυση του προβλήματος έγινε μία αρχική σχεδίαση του προτεινόμενου κυττάρου, κινηματική (ευθεία, αντίστροφη και διαφορική) ανάλυση αυτού και φυσικά όλης της κυτταρικής ρομποτικής κατασκευής. Είναι προφανές ότι με το μηχανικό κύτταρο που προτείνεται στη συγκεκριμένη εργασία θα πρέπει να ικανοποιηθούν όλες τις απαιτήσεις που τέθηκαν προηγουμένως για το συνολικό κυτταρικό ρομποτικό σύστημα.

1.3 Σημασία επίλυσης του προβλήματος

Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος και ανάπτυξη του συγκεκριμένου μηχανικού κυττάρου θα ανοίξει νέους δρόμους στην κυτταρική ρομποτική. Τα έως τώρα κυτταρικά ρομποτικά συστήματα προσπαθούν να εφαρμόσουν την αυτόματη συναρμολόγηση, την αυτόματη επιδιόρθωση καθώς και τη δυνατότητα αλλαγής της εσωτερικής και της εξωτερικής δομής της ρομποτικής κατασκευής με μετατόπιση των μηχανικών τους κυττάρων. Το κυτταρικό σύστημα που προτείνουμε σε αυτήν την εργασία έχει τη *δυνατότητα της παραμόρφωσης*, τόσο σε *επίπεδο κυττάρου*, όσο και σε *επίπεδο ολόκληρης της ρομποτικής κυτταρικής κατασκευής*. Η προηγούμενη δυνατότητα επιτρέπει στο σύστημα να δέχεται και να ασκεί εύκολα γενικευμένες δυνάμεις σε πολλές κατευθύνσεις και να διευρύνει σε πολύ μεγάλο βαθμό την ποικιλία έργων που μπορεί να εκτελέσει η ρομποτική κατασκευή. Έως σήμερα δεν έχει μελετηθεί κάτι αντίστοιχο και όλες οι εφαρμογές και υλοποιήσεις σε επίπεδο κυτταρικής ρομποτικής περιορίζονται στις προηγούμενες κλασσικές ιδιότητες και καθόλου στην παραμόρφωση των κυττάρων.

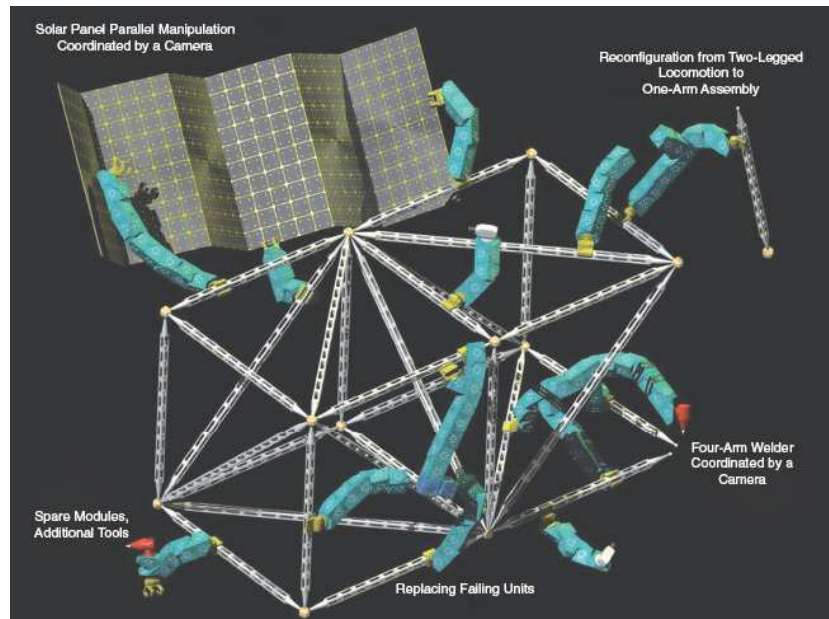
1.4 Παραπλήσιες εργασίες

Τα κυτταρικά ρομποτικά συστήματα αποτελούνται όπως είπαμε από τα μηχανικά κύτταρα. Τα μηχανικά αυτά κύτταρα είναι όμοια μεταξύ τους στις *ομογενείς κατασκευές*, ενώ δύο ή περισσότερα είδη κυττάρων εμφανίζονται στις *ετερογενείς κατασκευές*. Από τις επιφάνειες διεπαφής των κυττάρων γίνεται η ροή της πληροφορίας από το ένα στο άλλο, η μεταβίβαση των δυνάμεων και η απαραίτητη διαβίβαση της ηλεκτρικής ισχύος.

Πολλές φορές τα κυτταρικά ρομποτικά συστήματα διαθέτουν μερικές ειδικές μονάδες (κάμερες, συσσωρευτές ενέργειας κ.α.) για την εκτέλεση ασυνήθιστων εργασιών. Στο Σχ. 1.2 εμφανίζονται τέτοιου είδους ειδικές μονάδες σε ένα κυτταρικό ρομποτικό σύστημα.

Η ιστορία των κυτταρικών ρομποτικών συστημάτων ξεκινάει στα τέλη της δεκαετίας του '80, όταν ο *Toshio Fukuda* παρουσίασε το "CEBOT" (συντόμευση για το *CEllular roBOT*) [4, 5]. Το "CEBOT" ήταν το πρώτο κύτταρο για τέτοιου είδους συστήματα που σχεδιάστηκε. Το ρομποτικό σύστημα ήταν ετερογενές, μιας και αποτελείτο από περισσότερα του ενός θεμελιώδη στοιχεία. Στη συνέχεια πολλά κυτταρικά ρομποτικά συστήματα αναπτύχθηκαν και βάση της μορφής και της συνδεσμολογίας τους μπορούν να χωριστούν στις επόμενες δύο μεγάλες κατηγορίες (Σχ. 1.3):

- Συστήματα τύπου *πλέγματος* (*lattice type modular robots*)



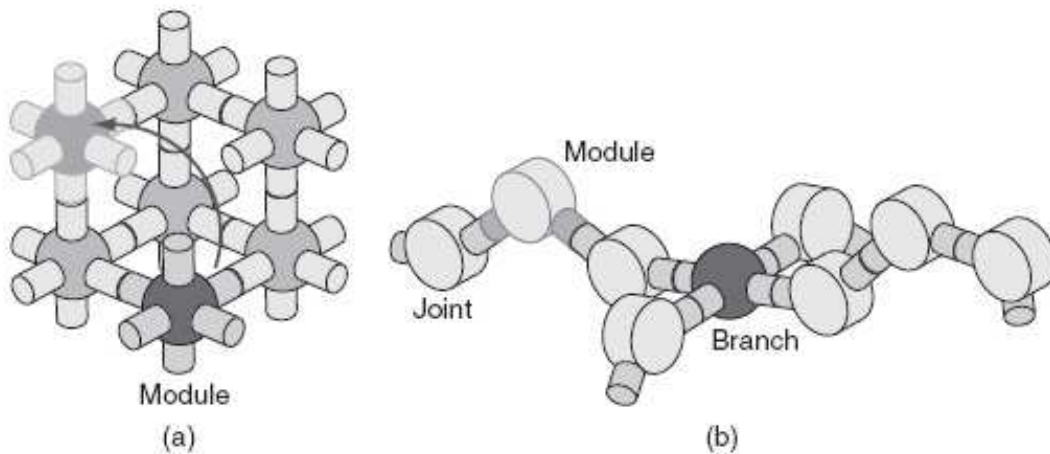
Σχήμα 1.2: Εφαρμογές ρομποτικών κυτταρικών συστημάτων στο διάστημα και ειδικά εργαλεία που αυτά μπορεί να φέρουν [3].

- Συστήματα τύπου *αλυσίδας* (*chain type modular robots*)

1.4.1 Συστήματα τύπου πλέγματος

Τα περισσότερα κυτταρικά ρομποτικά συστήματα που έχουν αναπτυχθεί έως σήμερα ανήκουν στην κατηγορία των συστημάτων τύπου πλέγματος. Στη συγκεκριμένη κατηγορία τα μηχανικά κύτταρα έχουν τέτοια μορφή ώστε να δημιουργούν συγκεκριμένη εσωτερική δομή με γεωμετρική συμμετρία. Οι επενεργητές και οι μηχανισμοί σύνδεσης είναι με τέτοιο τρόπο σχεδιασμένοι έτσι ώστε κάθε κύτταρο να μπορεί να κινηθεί μέσα στους κόμβους της πλεγματικής δομής και να ενωθεί με ένα άλλο κύτταρο. Αυτό συμβαίνει είτε με δική του κίνηση μόνο, είτε με βοήθεια από άλλα κύτταρα. Λόγω της συγκεκριμένης δομής τα μηχανικά κύτταρα αυτής της κατηγορίας εμφανίζουν πάντα *πολλούς μηχανισμούς σύνδεσης και πολλούς επενεργητές*.

Βασισμένα σε αυτή την ιδέα πολλά κυτταρικά ρομποτικά συστήματα έχουν αναπτυχθεί. Το 1994 εμφανίστηκε στο πανεπιστήμιο *John Hopkins* των ΗΠΑ το "*Metamorphic Robot*" [6], ένα σύστημα αποτελούμενο από 6 συνδέσμους σε σχήμα εξαγώνου οδηγούμενους από σερβοκινητήρες (Σχ. 1.4). Ένα ακόμα κύτταρο αυτής της κατηγορίας δημιουργήθηκε από το *National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST)* της Ιαπωνίας και



Σχήμα 1.3: Συστήματα τύπου πλέγματος (a) και συστήματα τύπου αλυσίδας (b).

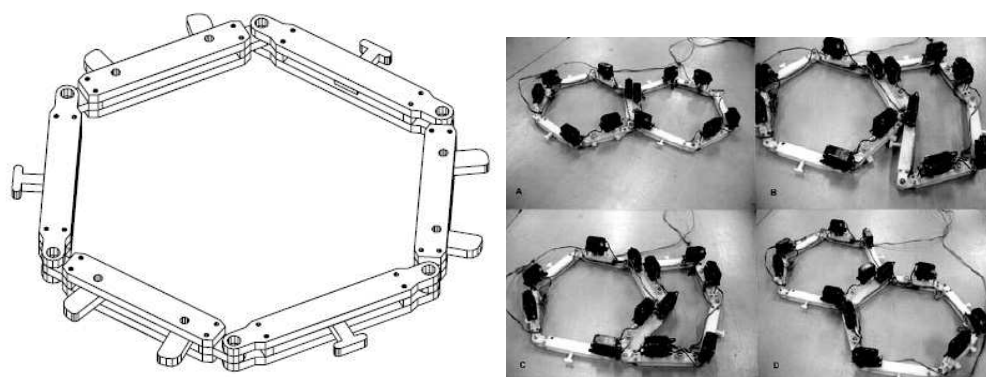
ονομάστηκε “*Fracta*” [7] (Σχ. 1.5). Και οι δύο αυτές προσπάθειες αφορούσαν κατασκευές σε δύο διαστάσεις και η μετάβαση στην τρίτη διάσταση φαινόταν πολύ δύσκολη εκείνη την εποχή.

Στον χώρο των τριών διαστάσεων τα κύτταρα προφανώς απαιτούν πολύ περισσότερους μηχανισμούς σύνδεσης και επενεργητές από ότι στις δύο διαστάσεις. Στις τρεις διαστάσεις κινείται το μηχανικό κύτταρο “*ATRON*” [9, 10] που δημιουργήθηκε στο Πανεπιστήμιο της νότιας Δανίας (*University of Southern Denmark*) με μόνο έναν βαθμό ελευθερίας και το οποίο εμφανίζει πολύ καλή αναλογία ισχύς/βάρος (Σχ. 1.6). Λόγω αυτού του χαρακτηριστικού κατάφεραν τελικά οι ερευνητές να επιτύχουν μηχανική σύνδεση και αυτοσυναρμολόγηση δέκα μηχανικών κυττάρων αυτής της μορφής. Αργότερα το κύτταρο “*Molecule*” [8] κατασκευάστηκε στο *MIT* (Σχ. 1.7). Τέλος, σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν επίσης τα “*Crystalline Robots*” της *Daniella Rus* [17] καθώς και τα “*Telecubes*” του *Mark Yim* [18] που παρουσιάζουν μεταξύ τους πολλές ομοιότητες (Σχ. 1.8).

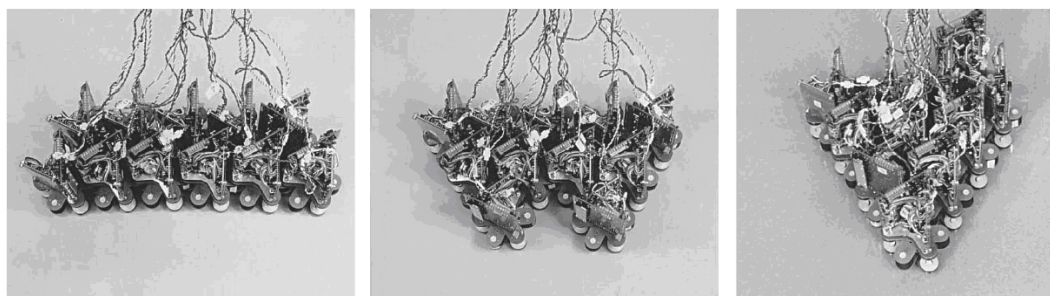
1.4.2 Συστήματα τύπου αλυσίδας

Τα κυτταρικά συστήματα αυτής της κατηγορίας ενώνονται σε μία ή περισσότερες γραμμικές κατασκευές και μοιάζουν με φίδια ή με κλαδιά δέντρων (*branches*). Η μορφολογία είναι λιγότερο συμμετρική σε σύγκριση με τα συστήματα που ανήκουν στην προηγούμενη κατηγορία. Το πιο σημαντικό πλεονέκτημα εδώ είναι το γεγονός ότι απαιτούνται, εν γένει λιγότεροι μηχανισμοί σύνδεσης και λιγότεροι επενεργητές.

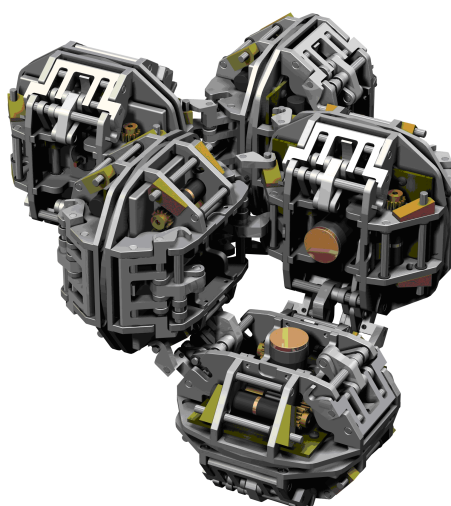
Το πρώτο κύτταρο σε αυτή τη κατεύθυνση ήταν το “*Polybot*” [11], που



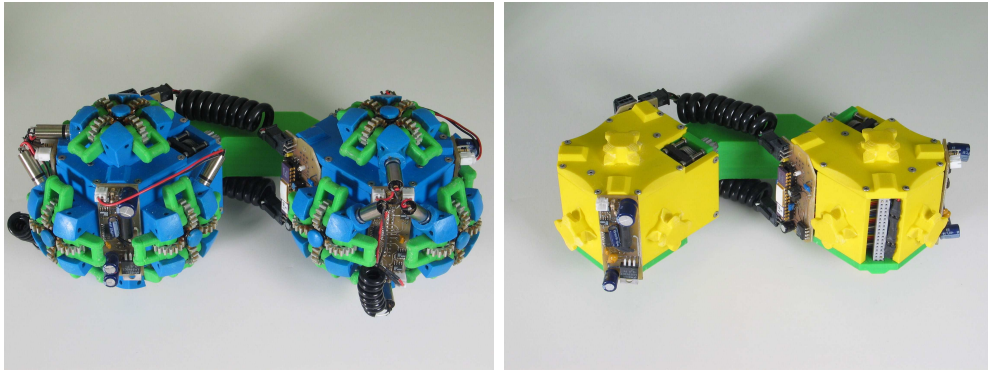
Σχήμα 1.4: [Αριστερά] Το "Metamorphic Robot". [Δεξιά] Ο μηχανισμός επί-
τευξης σχετικής κίνησης για δύο τέτοιου είδους μηχανικά κύτταρα.



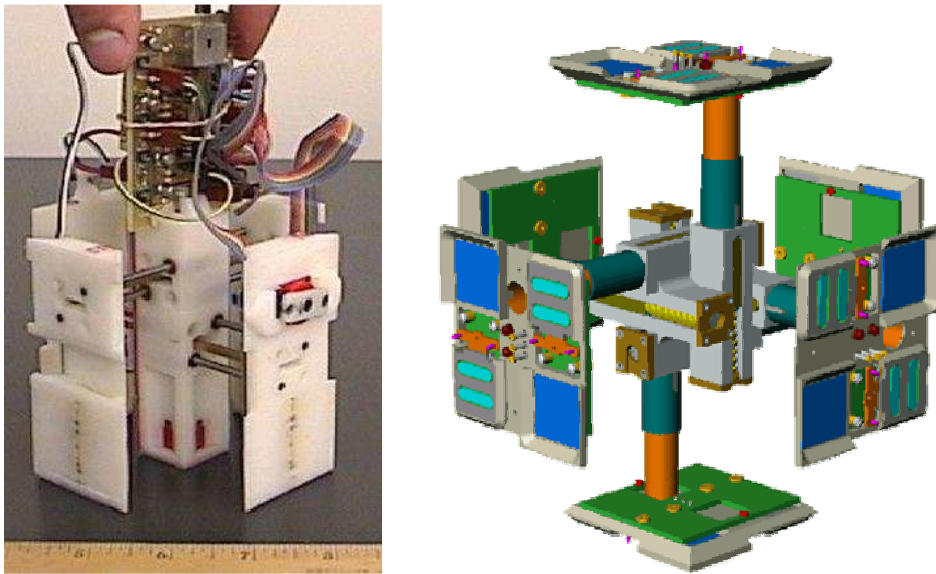
Σχήμα 1.5: Το κυτταρικό σύστημα "Fracta" και κάποιες διαδοχικές φάσεις
κατά την αλλαγή της δομής.



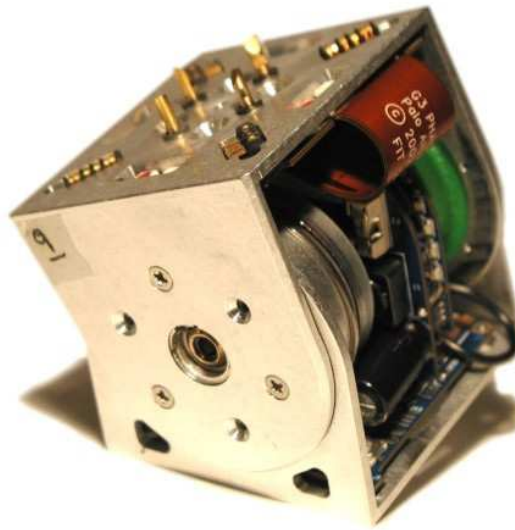
Σχήμα 1.6: Τρισδιάστατη κυτταρική δομή με βάση το "ATRON".



Σχήμα 1.7: Το “αρσενικό” [Αριστερά] και το “θυληκό” [Δεξιά] “Molecule”.



Σχήμα 1.8: [Αριστερά] Το κύτταρο “Crystalline Robot”. [Δεξιά] Το κύτταρο “Telecube”.



Σχήμα 1.9: Το μηχανικό κύτταρο Polybot.

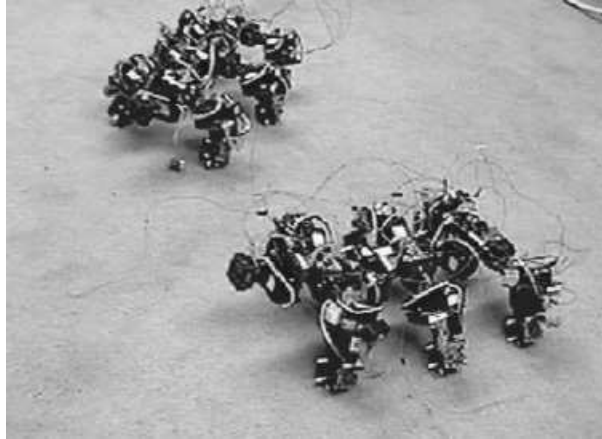
αναπτύχθηκε στα εργαστήρια του *Stanford* (Σχ. 1.9). Επίσης πολύ σημαντικές προσπάθειες σε αυτήν την κατηγορία αποτελούν τα “*CONRO*” [12, 13] (Σχ. 1.10) και φυσικά το σύγχρονο “*Molecube*” [16]. Το τελευταίο αναπτύχθηκε από τον *Zykov* στο *Cornell University* των ΗΠΑ (Σχ. 1.11).

Όπως φαίνεται από τον διαχωρισμό στις δύο προηγούμενες μεγάλες κατηγορίες, κάθε μία έχει τα δικά της χαρακτηριστικά, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Προσπαθώντας να συνδυάσει τα πλεονεκτήματα των δύο κατηγοριών ο *Satoshi Murata* δημιούργησε το “*M-TRAN*” (*Modular Transformer*) [14, 15], το οποίο θεωρείται ότι ανήκει σε μία νέα κατηγορία, την **υβριδική**, και συνδυάζει στοιχεία τόσο της πλεγματικής όσο και της κατηγορίας τύπου αλυσίδας. Στην τρίτη του γενιά πλέον (*M-TRAN III*) το κύτταρο διαθέτει πάρα πολλές δυνατότητες (Σχ. 1.12).

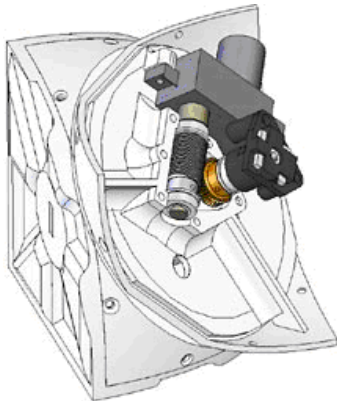
1.5 Δομή της εργασίας

Στο σημείο αυτό, κρίνεται ιδιαίτερα σημαντικό να δώσουμε μία εικόνα για το ποια θα είναι η δομή που θα ακολουθηθεί στην παρούσα εργασία. Θα προσπαθήσουμε να καταγράψουμε περιληπτικά, ποιες πληροφορίες θα εμπεριέχονται σε κάθε κεφάλαιο.

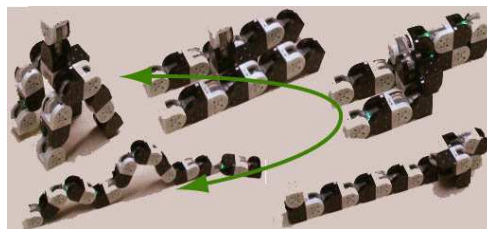
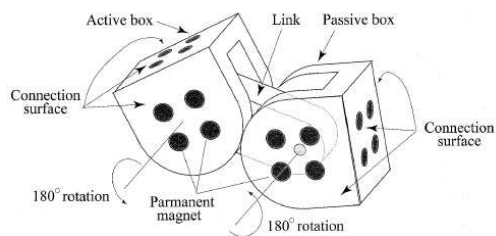
Στο 2^ο κεφάλαιο θα γίνει η μαθηματική-τεχνική διατύπωση του προβλήματος. Θα αναλυθεί το πρόβλημα της σχεδίασης του μηχανικού κυττάρου που θα πρέπει να ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις που θα θέσουμε. Θα αναφερθούν επίσης οι απαιτήσεις και οι περιορισμοί που διέπουν το πρόβλη-



Σχήμα 1.10: Δύο ρομποτικά κυτταρικά συστήματα αποτελούμενα από το μηχανικό κύτταρο “CONRO”.



Σχήμα 1.11: [Αριστερά] Το μηχανικό κύτταρο “Molecube”. [Δεξιά] Ρομποτικές δομές αποτελούμενες από τέτοιου είδους μηχανικά κύτταρα.



Σχήμα 1.12: [Αριστερά] Το μηχανικό κύτταρο “M-TRAN”. [Δεξιά] Μεταμόρφωση από μία γραμμική κατασκευή σε ένα τετράποδο ρομπότ.

μα.

Στο 3^ο κεφάλαιο περιλαμβάνεται η τεχνική προσέγγιση/επίλυση του προβλήματος. Περιγράφονται αναλυτικά όλες οι μεθοδολογίες που ακολουθήθηκαν για την επίλυση της κινηματικής (ευθείας, αντίστροφης και διαφορικής) για το ρομποτικό κύτταρο. Παρουσιάζεται επίσης λεπτομερώς η ανάλυση που ακολουθείται σε επίπεδο ολοκληρωμένης ρομποτικής κυτταρικής κατασκευής με θεωρία γράφων.

Το 4^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει την παρουσίαση και ανάλυση διαφόρων παραδειγμάτων κυτταρικών δομών μέσα από το περιβάλλον Matlab.

Τέλος, στο 5^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα εργασία και σχετίζονται με το ρομποτικό κύτταρο που αναφέρθηκε. Παρουσιάζεται επίσης μία αξιολόγηση της συγκεκριμένης εργασίας σχετικά με τον βαθμό εκπληρώσεως του αρχικού στόχου και αναφέρονται διάφορες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

ΤΕΧΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Γενικά

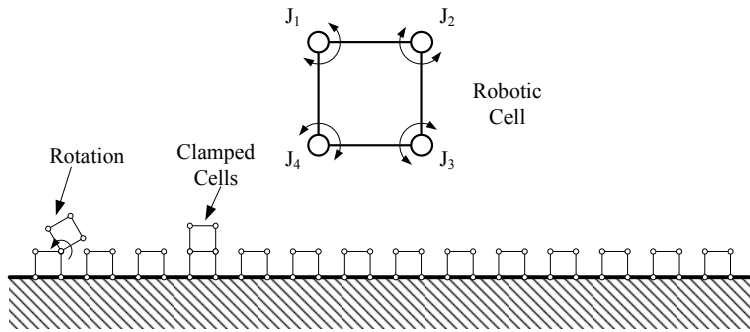
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η σχεδίαση και ανάλυση ενός ρομποτικού κυττάρου. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε καθώς και τις απαιτήσεις και τους περιορισμούς που το διέπουν.

2.2 Απαιτήσεις προβλήματος

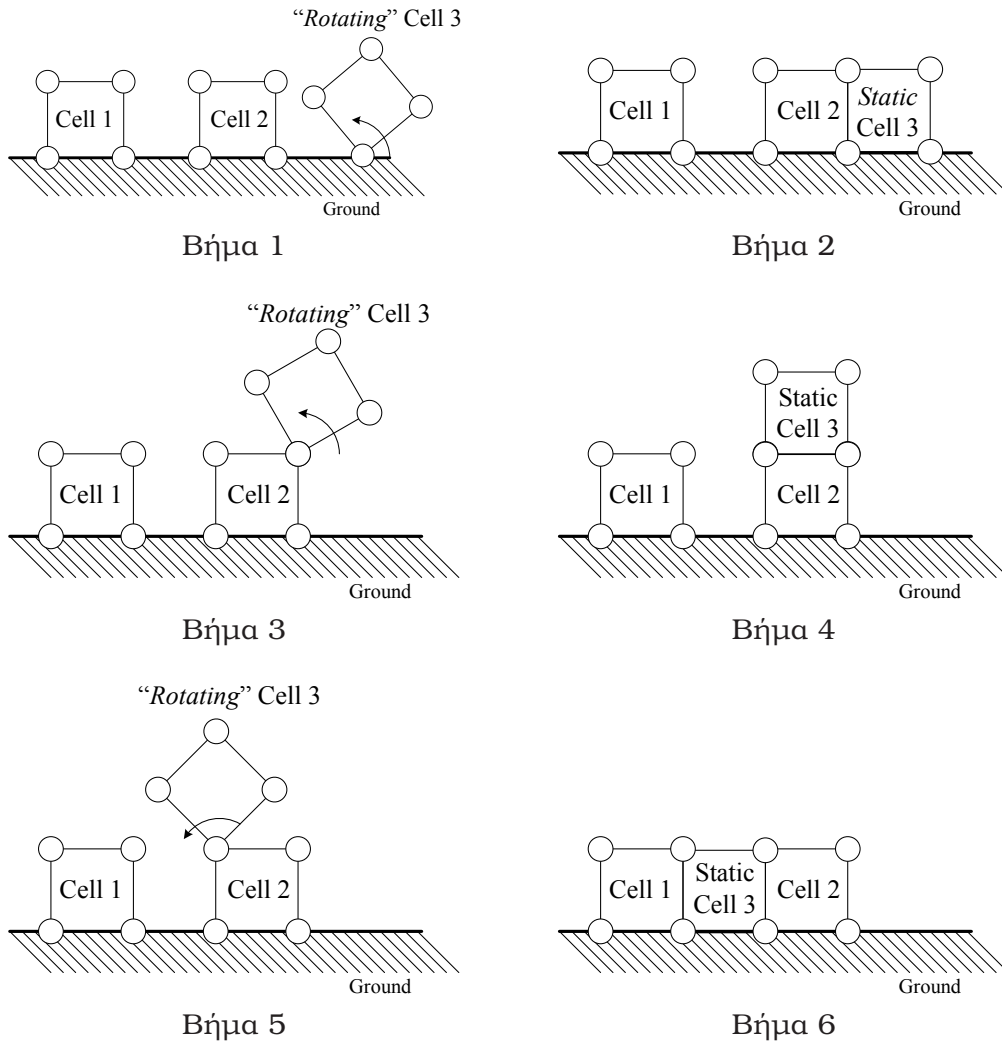
Όπως αναφέραμε στο κεφ. 1 τα μηχανικά κύτταρα πρέπει να έχουν την ικανότητα της αυτόματης συναρμολόγησης (*self-assembly*). Έτσι, είναι δυνατή η κατασκευή τυχαίων κυτταρικών δομών με αυτόματο τρόπο. Για να γίνει αυτό, τα μηχανικά κύτταρα πρέπει να έχουν δυνατότητα κίνησης ώστε να μπορούν να μεταφερθούν αυτόματα στην τελική τους θέση μέσα στην κατασκευή ή να αλλάξουν θέση μέσα σε αυτή με σκοπό να της αλλάξουν τα χαρακτηριστικά, τις δυνατότητες και τη λειτουργικότητα. Η απαίτηση για κίνηση των μηχανικών κυττάρων γίνεται εμφανής στο Σχ. 2.1 ενώ ο τρόπος της κίνησής τους φαίνεται στο Σχ. 2.2.

Εκτός της δυνατότητας κίνησης, τα μηχανικά ρομποτικά κύτταρα θα πρέπει να έχουν δυνατότητες “μηχανικής σύνδεσης” (*clamping*) μεταξύ τους. Θα μπορούν με αυτόν τον τρόπο να συνθέσουν μία *σιβαρή* κατασκευή (Σχ. 2.3).

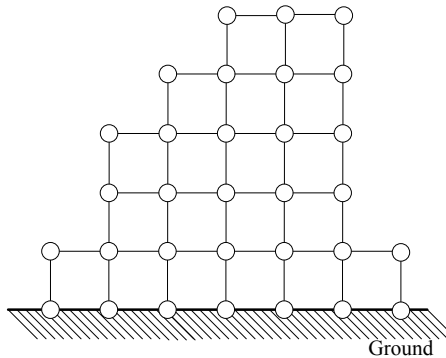
Τελευταία, αλλά πολύ σημαντική απαίτηση είναι η ικανότητα των κυττάρων να “*παραμορφώνονται*” σε κάποιο βαθμό. Η παραμόρφωση αυτή θα πρέπει να συμβαίνει με τέτοιο τρόπο ώστε η τελική κυτταρική ρομποτική



Σχήμα 2.1: Η κίνηση των ρομποτικών κυττάρων.



Σχήμα 2.2: Η κίνηση ενός ρομποτικού κυττάρου από την αρχική στην τελική θέση.



Σχήμα 2.3: Μία απλή δομή ενός κυτταρικού ρομποτικού συστήματος. Είναι προφανές ότι τα κύτταρα θα πρέπει να συνδέονται μηχανικά μεταξύ τους.

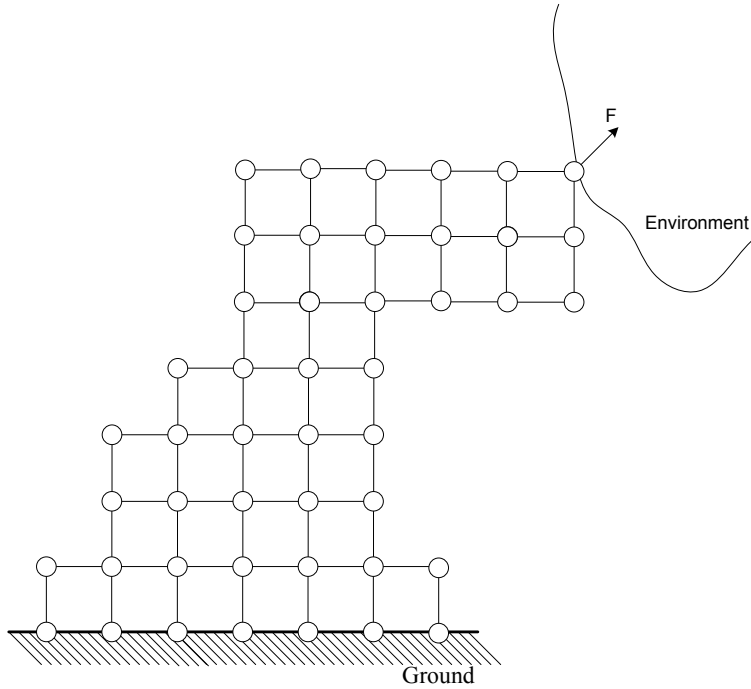
κατασκευή να μπορεί να *παραμορφώνεται* και αυτή με τη σειρά της. Μέσω αυτής της δυνατότητας το τελικό ρομποτικό σύστημα μπορεί να ασκεί δυνάμεις και ροπές στο περιβάλλον (Σχ. 2.4). Συνοψίζοντας, οι απαιτήσεις για τα ρομποτικά κύτταρα είναι οι εξής:

1. Πρέπει να μπορούν να *κινηθούν αυτόνομα και ανεξάρτητα από άλλα κύτταρα*.
2. Πρέπει να μπορούν να *συνδεθούν με μηχανικό τρόπο με άλλα κύτταρα*, έτσι ώστε να συνθέτουν μία στιβαρή κατασκευή.
3. Πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να *παραμορφώνονται* (Σχ. 2.5), έτσι ώστε να είναι ικανά να ασκούν και να παραλαμβάνουν δυνάμεις.

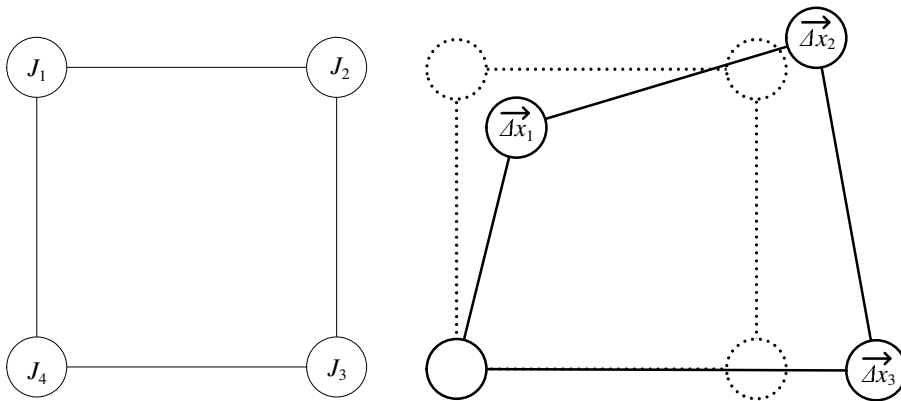
Όλες οι λειτουργίες που επιθυμούμε να έχουν τα κύτταρα μας παρουσιάζονται στο Σχ. 2.6.

2.3 Περιορισμοί προβλήματος

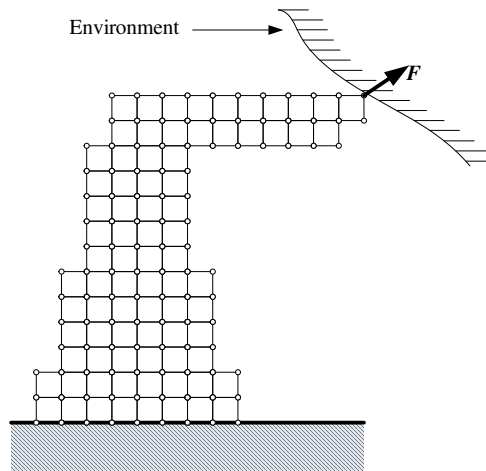
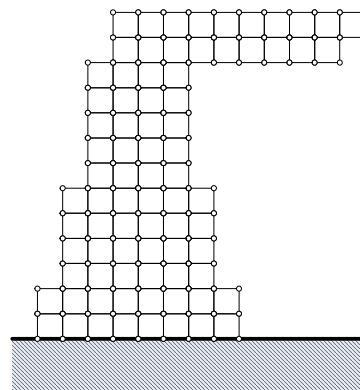
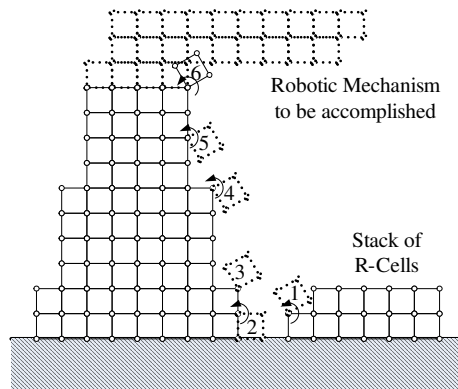
Πέρα από τις απαιτήσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως, υπάρχουν και κάποιοι βασικοί περιορισμοί στο πρόβλημά μας. Αυτοί οι περιορισμοί έχουν να κάνουν κυρίως με το σχήμα που μπορούμε να δώσουμε στο μηχανικό μας κύτταρο. Στο Σχ. 2.7 δίνεται ένα παράδειγμα υλοποίησης μιας συγκεκριμένης κυτταρικής δομής με “τετραγωνικά” και με “εξαγωνικά” κύτταρα. Είναι προφανές ότι το σχήμα που θα δώσουμε στο μηχανικό μας κύτταρο έχει αρκετά μεγάλη σημασία, αλλά δεν είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε ό,τι σχήμα θέλουμε όπως θα δούμε στη συνέχεια.



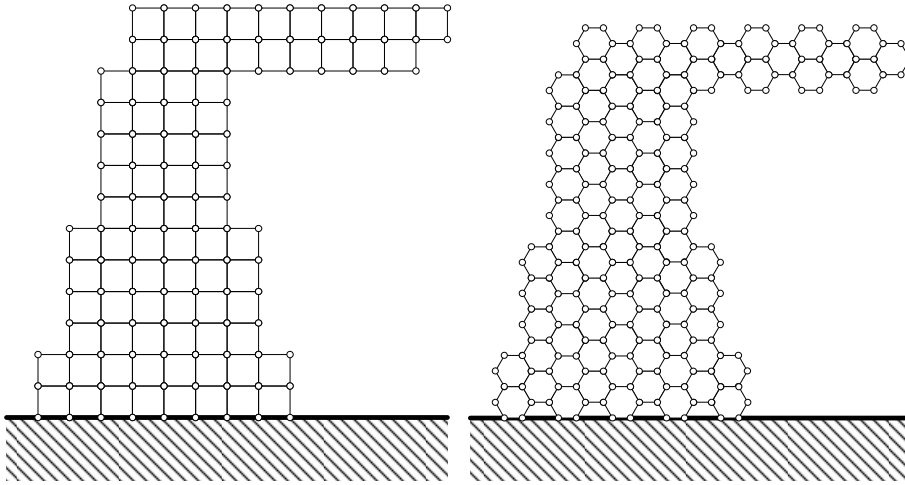
Σχήμα 2.4: Άσκηση δύναμης F στο άκρο μίας τυχαίας ρομποτικής κατασκευής αποτελούμενης από μηχανικά κύτταρα.



Σχήμα 2.5: Ενδεικτική παραμόρφωση ενός τετραγωνικού κυττάρου. Παρατηρούμε ότι το τελικό σχήμα δεν είναι πλέον τετράγωνο. Με τον τρόπο αυτό μπορεί το μηχανικό κύτταρο να ασκεί δυνάμεις στο περιβάλλον.



Σχήμα 2.6: Όλες οι φάσεις κατά την δημιουργία και λειτουργία μίας ρομποτικής κυτταρικής δομής. Ξεκινά με τη φάση της αυτόματης συναρμολόγησης και ολοκληρώνεται με την άσκηση της επιθυμητής δύναμης σε συγκεκριμένο σημείο στο περιβάλλον.



Σχήμα 2.7: Ένα παράδειγμα υλοποίησης μιας συγκεκριμένης κυτταρικής δομής με “τετραγωνικά” [αριστερά] και με “εξαγωνικά” κύτταρα [δεξιά].

Ο μηχανισμός μετακίνησης των ρομποτικών κυττάρων (*περιστροφή - σύνδεση - περιστροφή*) προϋποθέτει ότι τα κύτταρα μας είναι οπωσδήποτε *πολύγωνα*. Από ‘κει και πέρα ας εξετάσουμε την γενική περίπτωση που το κύτταρό μας έχει n -πλευρές (n -γωνο). Έστω τώρα ότι στο σημείο D έχουν συνδεθεί m ρομποτικά κύτταρα, όπως ακριβώς φαίνεται και στο Σχ. 2.8. Προφανώς θα ισχύει:

$$m \cdot \theta_n = 2\pi \quad (2.1)$$

Ενώ:

$$\theta_n = \pi - C_n \quad (2.2)$$

Όπου C_n η κεντρική γωνία του n -γώνου και έχουμε:

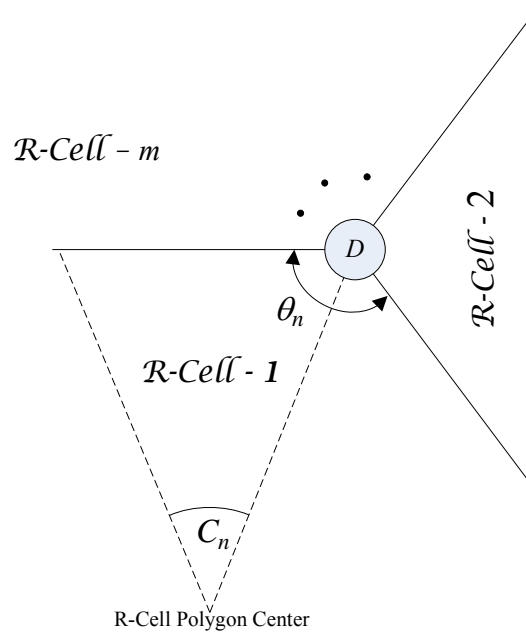
$$C_n = \frac{2\pi}{n} \quad (2.3)$$

Οπότε εάν συνδυάσουμε τις εξ. (2.2),(2.3) θα έχουμε:

$$\theta_n = \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (2.4)$$

Τελικά αντικαθιστώντας την τελευταία εξίσωση στην εξ. (2.1) έχουμε:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \quad (2.5)$$



Σχήμα 2.8: Σχηματική αναπαράσταση m ρομποτικών κυττάρων (n -γωνα) συνδεδεμένων στο σημείο D .

Πίνακας 2.1: Οι λύσεις της εξ. (2.5)

n	3	4	6
m	6	4	3

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι μόνες λύσεις για την εξ. (2.5) είναι αυτές που παρουσιάζονται στον Πίν. 2.1. Συμπεραίνουμε ότι το σχήμα των κυττάρων μπορεί να είναι μόνο τριγωνικό, τετραγωνικό ή και εξαγωνικό. Στην παρούσα εργασία θα υιοθετήσουμε το **τετραγωνικό σχήμα** για τα κύτταρά μας.

Κεφάλαιο 3

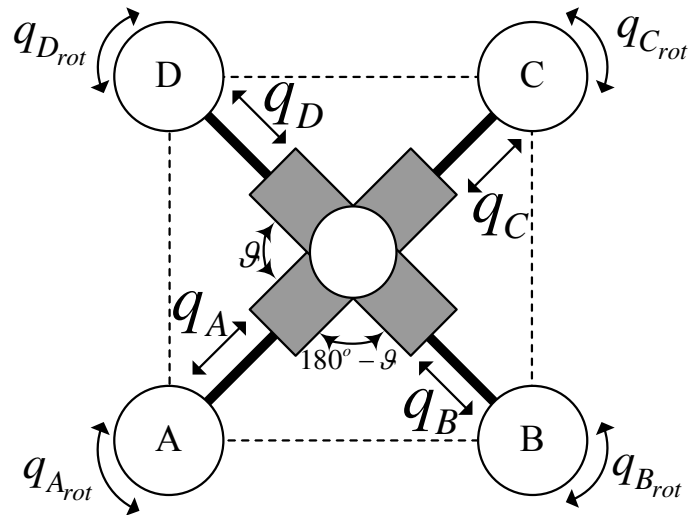
ΤΕΧΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 Σχεδίαση του ρομποτικού κυττάρου

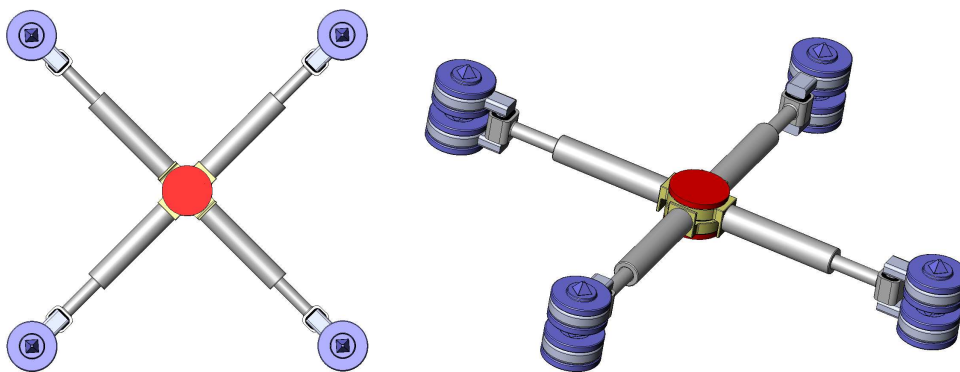
Στην παρούσα διπλωματική εργασία ένα νέο ρομποτικό κύτταρο, ονόματι **Robotic CELL (R-Cell)**, σχεδιάστηκε και αναλύθηκε. Το ρομποτικό αυτό κύτταρο, όπως θα δούμε και στη συνέχεια ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις που αναφέρθηκαν στα προηγούμενα εδάφια. Ένα απλό δισδιάστατο σχήμα του ρομποτικού κυττάρου παρουσιάζεται στο Σχ. 3.1. Επίσης ένα τρισδιάστατο σχήμα του ρομποτικού κυττάρου που σχεδιάστηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας παρουσιάζεται στο Σχ. 3.2. Στο Σχ. 3.3 φαίνονται οι δυνατότητες του ρομποτικού μας κυττάρου για παραμόρφωση.

Στην εργασία αυτή θεωρούμε ότι οι κατασκευές μας είναι επίπεδες (2D). Επίσης θέλουμε να έχουμε ένα μοναδικό είδος ρομποτικού κυττάρου, γεγονός που κάνει το σύστημά μας ομοιογενές. Όπως είδαμε στο Σχ. 3.1 το ρομποτικό μας κύτταρο έχει μορφή “**X**” (το εξωτερικό σχήμα είναι τετράγωνο, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο) και αποτελείται από 4 γραμμικές και 5 περιστροφικές αρθρώσεις. Η ανάλυση και επεξήγηση της επιλογής αυτών των αρθρώσεων θα γίνει στη συνέχεια. Μία τυχαία ρομποτική κυτταρική δομή με 6 κύτταρα παρουσιάζεται στο Σχ. 3.4.

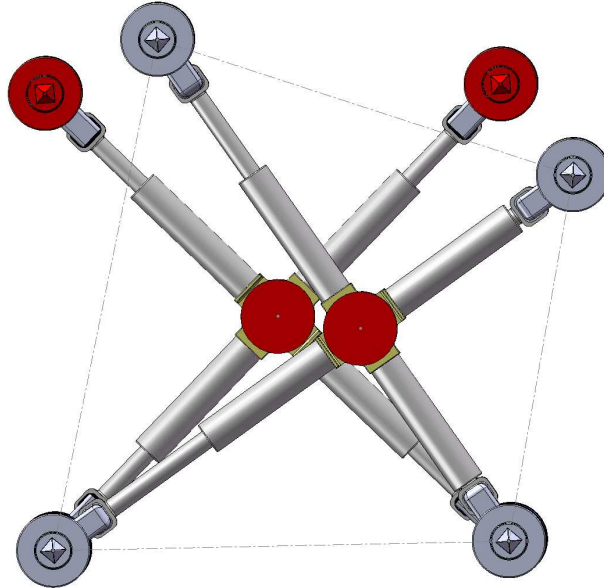
Η μηχανική σύνδεση ενός ρομποτικού κυττάρου με κάποιο άλλο μπορεί να γίνει στα σημεία (**κόμβους**) A, B, C και D με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.5. Τέλος, μέσω αυτής της μηχανικής σύνδεσης των κυττάρων μεταξύ τους είναι εφικτή και η μετακίνησή τους. Η μετακίνηση-μεταφορά, δηλαδή, των ρομποτικών κυττάρων γίνεται με περιστροφή γύρω από κάποιον κόμβο στον οποίο το κύτταρο έχει συνδεθεί μηχανικά, ακριβώς όπως είχαμε παρουσιάσει και στο Σχ. 2.2.



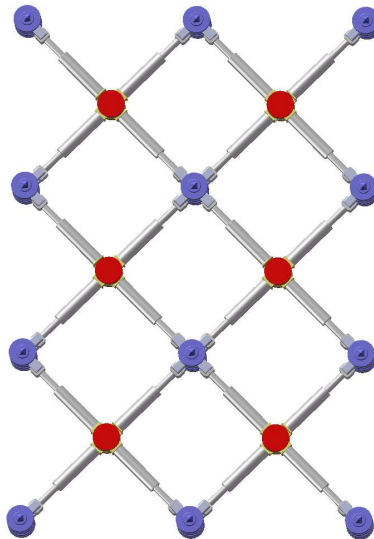
Σχήμα 3.1: Ένα ενδεικτικό σχήμα του ρομποτικού κυττάρου “R-Cell”. Στο σχήμα απεικονίζονται όλες οι αρθρώσεις (περιστροφικές και πρισματικές).



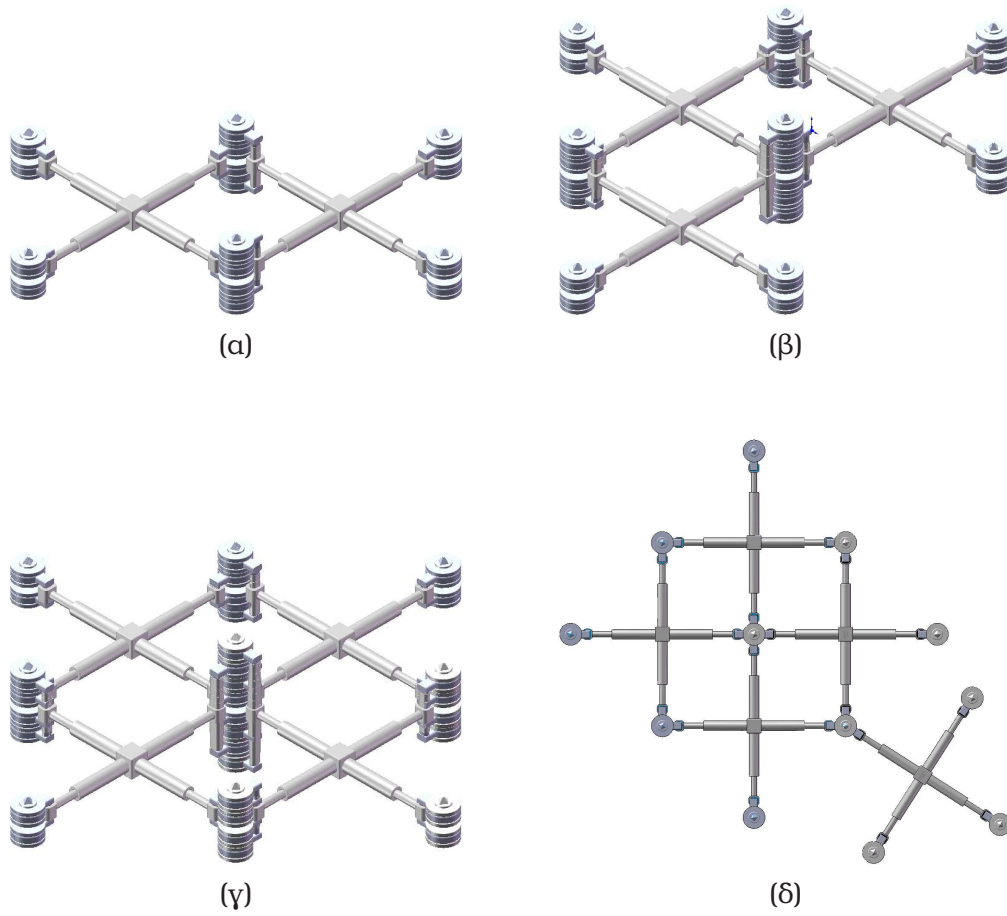
Σχήμα 3.2: Η τρισδιάστατη σχεδίαση του ρομποτικού κυττάρου.



Σχήμα 3.3: Στο πίσω μέρος φαίνεται το ρομποτικό κύτταρο στην αρχική του θέση και στο εμπρός το ίδιο κύτταρο σε μία τυχαία “παραμορφωμένη” θέση-κατάσταση.



Σχήμα 3.4: Μία τυχαία ρομποτική κυτταρική δομή αποτελούμενη από 6 ρομποτικά κύτταρα R-Cells.



Σχήμα 3.5: Ο τρόπος σύνδεσης (α) δύο, (β) τριών και (γ) τεσσάρων ρομποτικών κυττάρων. Στο (δ) ένα πέμπτο κύτταρο μόλις συνδέθηκε και περιστρέφεται για να κινηθεί προς την επιθυμητή θέση μέσα στη δομή.

3.2 Οι αρθρώσεις του ρομποτικού κύτταρου

Όπως παρουσιάστηκε και στην προηγούμενη παράγραφο το ρομποτικό κύτταρο έχει συνολικά :

- **4 πρισματικές αρθρώσεις** (q_A, q_B, q_C, q_D)
- **5 περιστροφικές αρθρώσεις** ($q_{A_{rot}}, q_{B_{rot}}, q_{C_{rot}}, q_{D_{rot}}$ και θ)

Το κύτταρο κατά τη λειτουργία του μπορεί να συμμετέχει σε δύο τελείως ξεχωριστές και αυτόνομες φάσεις, στη φάση της μετακίνησης (αυτόματης συναρμολόγησης) και στη φάση της παραμόρφωσης του κυττάρου (αφού πρώτα αυτό έχει συνδεθεί μηχανικά με άλλα κύτταρα). Κάθε φάση είναι ξεχωριστή και έχει διαφορετικές απαιτήσεις από τις αρθρώσεις του κυττάρου, γι' αυτό και οι δύο αυτές φάσεις θα μελετηθούν ξεχωριστά στις επόμενες παραγράφους.

3.2.1 Οι αρθρώσεις κατά τη φάση της συναρμολόγησης

Κατά τη διάρκεια της αυτόματης συναρμολόγησης κάθε κύτταρο μετακινείται μέχρι να βρεθεί στην επιθυμητή τελική θέση μέσα στην κατασκευή. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης δεν επιτρέπεται να αλλοιωθεί με κανέναν τρόπο το "σχήμα" του κυττάρου (δεν πρέπει να παραμορφωθεί καθόλου). Γι αυτό το λόγο οι πρισματικές αρθρώσεις q_A, q_B, q_C, q_D (που είναι άμεσα συνδεδεμένες με τις δυνατότητες παραμόρφωσης του κυττάρου) παραμένουν "**κλειδωμένες**" στην αρχική τους θέση και δεν τους επιτρέπεται να κινηθούν. Με παρόμοιο τρόπο πρέπει και η περιστροφική άρθρωση στο μέσον του κυττάρου, δηλαδή η γωνία θ , να παραμείνει "**κλειδωμένη**" στις 90° . Έτσι το σχήμα του κυττάρου παραμένει πάντα τετράγωνο και δεν αλλοιώνεται με κανέναν τρόπο. Αν ικανοποιηθούν όλες οι παραπάνω συνθήκες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποια άρθρωση χρειάζεται από τους υπόλοιπες ($q_{A_{rot}}, q_{B_{rot}}, q_{C_{rot}}, q_{D_{rot}}$) για να περιστρέψουμε το ρομποτικό κύτταρο γύρω από τον κόμβο στον οποίο υπάρχει μηχανική σύνδεση. Είναι προφανές ότι για να γίνει μια σειρά από k μετακινήσεις-περιστροφές ενός ρομποτικού κυττάρου θα πρέπει να επαναληφθεί η παρακάτω διαδικασία k -φορές :

- *Δημιουργία μηχανικής σύνδεσης* του κόμβου i του ρομποτικού κυττάρου με έναν άλλο σταθερό κόμβο j .
- *Περιστροφή* του κυττάρου με χρήση της άρθρωσης $q_{i_{rot}}$ γύρω από το σταθερό κόμβο j .
- *Αφαίρεση μηχανικής σύνδεσης* του κόμβου i του ρομποτικού κυττάρου με τον σταθερό κόμβο j .

3.2.2 Οι αρθρώσεις κατά τη φάση της παραμόρφωσης

Όταν ένα ρομποτικό κύτταρο έχει τοποθετηθεί πλέον στη σωστή θέση μέσα στην κατασκευή, είναι προφανές ότι **δύο τουλάχιστον διπλανοί κόμβοι του πρέπει να έχουν συνδεθεί μηχανικά με άλλους σταθερούς κόμβους του συστήματος**. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται η σιβαρότητα του κάθε κυττάρου ξεχωριστά και κατά συνέπεια της τελικής ρομποτικής κυτταρικής κατασκευής. Έχοντας εξασφαλισθεί η σιβαρότητα της κατασκευής μπορεί το σύστημα να βρεθεί στη φάση της “παραμόρφωσης”. Στη φάση αυτή χρησιμοποιούνται οι 4 *επενεργούμενες πρισματικές αρθρώσεις*. Οι πρισματικές αυτές αρθρώσεις είναι και οι “υπεύθυνες” για τις παραμορφώσεις που μπορεί να έχει το ρομποτικό μας κύτταρο, άρα και η τελική ρομποτική δομή ξεχωριστά. Κατά τη φάση αυτή θα πρέπει όλες οι υπόλοιπες περιστροφικές αρθρώσεις (δηλαδή οι $q_{A_{rot}}$, $q_{B_{rot}}$, $q_{C_{rot}}$, $q_{D_{rot}}$ και θ) να είναι τελείως **παθητικές** και να μην ενεργοποιούνται καθόλου (από κινητήρες). Με κατάλληλη επενέργεια στις 4 πρισματικές αρθρώσεις μπορούμε να “παραμορφώσουμε” το κύτταρό μας με όποιον τρόπο εμείς επιθυμούμε στο επίπεδο. Φυσικά, απαραίτητη προϋπόθεση, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, είναι να υπάρχει σταθερή σύνδεση για κάθε κύτταρο, γεγονός που μεταφράζεται σε μηχανική σύνδεση τουλάχιστον δύο διπλανών κόμβων του κάθε κυττάρου σε σταθερούς κόμβους του συστήματος.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι η χρησιμότητα της επιλογής των συγκεκριμένων αρθρώσεων φαίνεται αν αναλύσουμε και τις δύο φάσεις λειτουργίας του ρομποτικού κυττάρου. Υπάρχουν, δηλαδή, αρθρώσεις που επιτρέπουν στα κύτταρα να μετακινούνται γύρω από σταθερούς κόμβους και σχετίζονται με τις δυνατότητες μεταφοράς-μετακίνησης των ρομποτικών κυττάρων και άλλες αρθρώσεις που σχετίζονται άμεσα με την παραμόρφωση των κυττάρων και κατά συνέπεια με την παραμόρφωση της τελικής κατασκευής. Τα βασικότερα συμπεράσματα από την προηγούμενη ανάλυση είναι συγκεντρωμένα στον Πίν. 3.1.

3.3 Κατανομή βαθμών ελευθερίας κυτταρικής δομής

Όπως αναφέραμε προηγουμένως κάθε κύτταρο έχει 4 πρισματικές και 5 περιστροφικές αρθρώσεις. Εν γένει κάθε κύτταρο πρέπει να συνδεθεί μηχανικά τουλάχιστον σε δύο (ή σε τρεις) ήδη σταθερούς κόμβους του συστήματος για να μπορέσει να “σταθεί” και να εκτελέσει τις ζητούμενες λειτουργίες. Υπάρχουν κύτταρα που “στέκονται” έχοντας μηχανική σύνδεση σε δύο σταθερούς κόμβους και άλλα που συνδέονται μηχανικά με τρεις σταθερούς κόμ-

Πίνακας 3.1: Ρόλος των αρθρώσεων του κυττάρου (Σχ. 3.1) ανά φάση λειτουργίας.

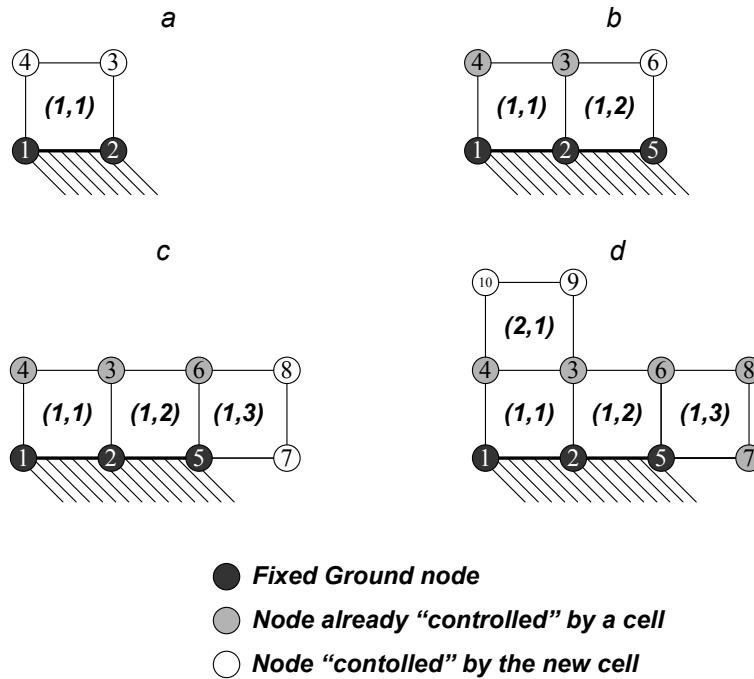
Φάση Λειτουργίας	Ενεργοποιημένες αρθρώσεις	Κλειδωμένες αρθρώσεις	Παθητικές αρθρώσεις
Αυτόματη Συναρμολόγηση	$q_{A_{rot}}, q_{B_{rot}}, q_{C_{rot}}, q_{D_{rot}}$	q_A, q_B, q_C, q_D και θ	-
Φάση στάσης/ παραμόρφωσης	q_A, q_B, q_C, q_D	-	$q_{A_{rot}}, q_{B_{rot}}, q_{C_{rot}}, q_{D_{rot}}$ και θ

Πίνακας 3.2: Σταθεροί και Ελεύθεροι κόμβοι για κάθε κύτταρο της κατασκευής του Σχ. 3.6.

Κύτταρο	Σταθεροί κόμβοι	Ελεύθεροι κόμβοι	Αριθμός β.ε.
(1,1)	1,2	3,4	4
(1,2)	2,5,3	6	2
(1,3)	6,5	7,8	4
(2,1)	4,3	9,10	4

βους. Σε κάθε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις το μηχανικό κύτταρο που συνδέεται θα συμπεριφερθεί διαφορετικά και χρειάζεται να αναλυθεί με διαφορετικό τρόπο. Για το λόγο αυτό θα χωρίσουμε από εδώ και πέρα τα κύτταρα μας σε δύο ξεχωριστές κατηγορίες. *Κύτταρα που συνδέονται με δύο σταθερούς κόμβους του συστήματος και έχουν τους υπόλοιπους δύο τους κόμβους ελεύθερους, θα ανήκουν στην πρώτη κατηγορία και κύτταρα που συνδέονται με τρεις σταθερούς κόμβους του συστήματος και έχουν τον ένα κόμβο που απομένει ελεύθερο, θα λέμε ότι βρίσκονται στην δεύτερη κατηγορία.* Για να γίνει πιο σαφής αυτός ο διαχωρισμός παρουσιάζεται η ανάλυση του Σχ. 3.6. Τα βασικά συμπεράσματα από το συγκεκριμένο σχήμα παρουσιάζονται στον Πιν. 3.2. Στο σχήμα αυτό γίνεται εμφανές ότι κάθε κύτταρο συνδέεται είτε σε δύο είτε σε τρεις σταθερούς κόμβους του συστήματος ανάλογα με την περίπτωση. Αναφέρουμε επίσης ότι επειδή το σύστημά μας κινείται στο επίπεδο, **κάθε ελεύθερος κόμβος αντιστοιχεί σε 2 βαθμούς ελευθερίας** (β.ε.), δηλαδή την τετμημένη x και την τεταγμένη y του κόμβου μιας και μας ενδιαφέρει μόνο η θέση του κόμβου και όχι ο προσανατολισμός.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μέσα σε μία κυτταρική δομή υπάρχουν κύτταρα που στηρίζονται μόνο σε δύο σταθερούς κόμβους και άρα έχουν τους

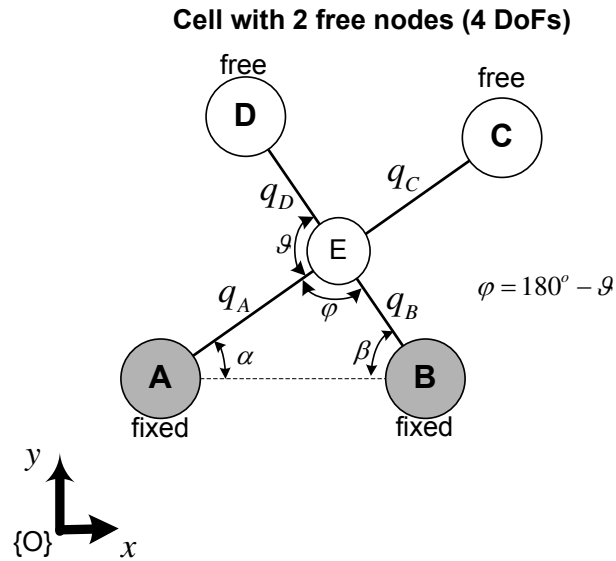


Σχήμα 3.6: Παράδειγμα κατανομής β.ε. μέσα στην κυτταρική δομή.

άλλους δύο κόμβους ελεύθερους (κατηγορία 1). Ενώ από την άλλη πλευρά υπάρχουν κύτταρα που στηρίζονται με μηχανική σύνδεση με τρεις σταθερούς κόμβους και συνεπώς έχουν μόνο έναν ελεύθερο κόμβο (κατηγορία 2). Έτσι κύτταρα της πρώτης κατηγορίας έχουν συνολικά **4 β.ε.**, ενώ κύτταρα της δεύτερης κατηγορίας έχουν μόνο **2 β.ε.** (Πίνακας 3.2). Στη συνέχεια θα αναλυθεί η κινηματική κάθε κατηγορίας κυττάρων ξεχωριστά. Επίσης, από εδώ και στο εξής κάθε κύτταρο θα θεωρείται ότι ανήκει σε μία εκ των δύο κατηγοριών χωρίς να αναφέρεται.

3.4 Κινηματική ανάλυση ρομποτικού κυττάρου

Στη συνέχεια θα γίνει η κινηματική ανάλυση [20, 21] για το ρομποτικό μας κύτταρο. Η ανάλυση αυτή θα χωριστεί στην ευθεία, αντίστροφη και διαφορική κινηματική ανάλυση και θα μελετηθεί φυσικά κάθε κατηγορία κυττάρων ξεχωριστά.



Σχήμα 3.7: Κύτταρο με δύο σταθερούς (A, B) και δύο ελεύθερους κόμβους (C, D) σε τυχαία κατάσταση.

3.4.1 Ευθεία Κινηματική Ανάλυση (ΕΚΑ)

Ευθεία Κινηματική ανάλυση για κύτταρο με δύο ελεύθερους κόμβους (ΕΚΑ-2)

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει η ευθεία κινηματική ανάλυση του ρομποτικού κυττάρου με δύο ελεύθερους κόμβους, όπως αυτό που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.7. Στην ανάλυση αυτή θεωρούμε δεδομένες τις θέσεις των κόμβων A και B , δηλαδή τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_A και \mathbf{p}_B , και αναζητούμε τις θέσεις των κόμβων C και D , δηλαδή τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_C και \mathbf{p}_D , ανάλογα με τις τιμές των αρθρώσεων q_A, q_B, q_C και q_D .

Αρχικά θέλουμε να βρούμε τη θέση του σημείου E (x_E, y_E). Για να γίνει αυτό αρκεί να λύσουμε το σύστημα των παρακάτω εξισώσεων:

$$\|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_A\| = q_A \quad (3.1)$$

$$\|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_B\| = q_B \quad (3.2)$$

Η εξ. (3.1) που περιλαμβάνει τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_E και \mathbf{p}_A μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = q_A \quad (3.3)$$

Και με παρόμοιο τρόπο η εξ. (3.2) που περιλαμβάνει τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_E και \mathbf{p}_B μπορεί να γραφτεί:

$$\sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2} = q_B \quad (3.4)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξ. (3.3) και (3.4) είναι οι εξισώσεις των δύο κύκλων με κέντρα τα σημεία A και B και ακτίνες q_A και q_B αντίστοιχα. Αυτό που αναζητούμε είναι το σημείο τομής των κύκλων αυτών, το οποίο ταυτίζεται με το σημείο E .

Οι εξ. (3.3) και (3.4) μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$x_E^2 + x_A^2 - 2 \cdot x_E \cdot x_A + y_E^2 + y_A^2 - 2 \cdot y_E \cdot y_A = q_A^2 \quad (3.5)$$

$$x_E^2 + x_B^2 - 2 \cdot x_E \cdot x_B + y_E^2 + y_B^2 - 2 \cdot y_E \cdot y_B = q_B^2 \quad (3.6)$$

Αφαιρούμε την εξ. (3.6) από την (3.5) και έχουμε:

$$x_A^2 - x_B^2 + 2 \cdot x_E(x_B - x_A) + y_A^2 - y_B^2 + 2 \cdot y_E(y_B - y_A) = q_A^2 - q_B^2 \quad (3.7)$$

Για να λύσουμε το σύστημα και να προχωρήσουμε με την επίλυση της εξ. (3.7) θα πρέπει να την εξετάσουμε με προϋποθέσεις.

Περίπτωση 1

Εάν $y_B \neq y_A$ τότε:

$$y_E = \frac{q_A^2 - q_B^2 - x_A^2 + x_B^2 - y_A^2 + y_B^2 - 2 \cdot x_E(x_B - x_A)}{2 \cdot (y_B - y_A)} \quad (3.8)$$

Θέτουμε τις επόμενες σταθερές ποσότητες για να μειώσουμε το μέγεθος των εξισώσεων:

$$C = \frac{q_A^2 - q_B^2 - x_A^2 + x_B^2 - y_A^2 + y_B^2}{2 \cdot (y_B - y_A)} \quad (3.9)$$

$$K = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad (3.10)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.9),(3.10) η εξ. (3.8) γίνεται:

$$y_E = C - K \cdot x_E \quad (3.11)$$

Αντικαθιστούμε την εξ. (3.11) στην εξ. (3.5):

$$x_E^2 + x_A^2 - 2 \cdot x_E \cdot x_A + (C - K \cdot x_E)^2 + y_A^2 - 2 \cdot (C - K \cdot x_E) \cdot y_A = q_A^2 \quad (3.12)$$

$$(K^2 + 1) \cdot x_E^2 + (2 \cdot K \cdot y_A - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot x_A) \cdot x_E + (x_A^2 + y_A^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot y_A - q_A^2) = 0 \quad (3.13)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές τους εξής:

$$A = K^2 + 1 \quad (3.14)$$

$$B = 2 \cdot K \cdot y_A - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot x_A \quad (3.15)$$

$$\Gamma = x_A^2 + y_A^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot y_A - q_A^2 \quad (3.16)$$

Προφανώς για τη διακρίνουσα έχουμε $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot \Gamma > 0$ λόγω της φυσικής υπόστασης του προβλήματος. Εάν $\Delta < 0$ αυτό θα σήμαινε ότι το πρόβλημά μας δεν έχει καμία λύση και άρα δεν θα υπήρχε το σημείο E. Αυτό είναι αδύνατο για το μηχανικό κύτταρο που εξετάζουμε. Επίσης πρέπει να ισχύει $\Delta \neq 0$ αφού το πρόβλημά μας δεν θα μπορούσε να έχει μία διπλή λύση.

Οι λύσεις του συστήματος είναι συνεπώς οι εξής:

$$x_{E_1} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}, \quad y_{E_1} = C - K \cdot x_{E_1}, \quad \forall y_B \neq y_A \quad (3.17)$$

$$x_{E_2} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}, \quad y_{E_2} = C - K \cdot x_{E_2}, \quad \forall y_B \neq y_A \quad (3.18)$$

Είναι προφανές ότι το σύστημά μας δεν μπορεί να δίνει δύο λύσεις και η ΕΚΑ θα πρέπει να έχει μόνο μία λύση για το ρομποτικό μας κύτταρο. Στην πραγματικότητα δηλαδή *μόνο μία εκ των δύο λύσεων είναι πραγματικά σωστή και έχει φυσική υπόσταση για το πρόβλημα που εξετάζουμε*. Το πως επιλέγεται η σωστή και απορρίπτεται η άλλη λύση θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Περίπτωση 2

Στην περίπτωση που ισχύει $y_B = y_A$ (ή έστω $y_B \approx y_A$) πρέπει να επανέλθουμε στην εξ. (3.7) και να την αντιμετωπίσουμε με άλλο τρόπο. Αντί να διαιρέσουμε με την ποσότητα $y_B - y_A$, θα διαιρέσουμε με $x_B - x_A$ και θα έχουμε:

$$x_E = \frac{q_A^2 - q_B^2 - x_A^2 + x_B^2 - y_A^2 + y_B^2 - 2 \cdot y_E(y_B - y_A)}{2 \cdot (x_B - x_A)} \quad (3.19)$$

Είναι προφανές ότι ισχύει $x_B \neq x_A$ όταν $y_B = y_A$, λόγω της φύσης του προβλήματος που προσπαθούμε να επιλύσουμε. Δηλαδή στο πρόβλημά μας δεν είναι δυνατόν να ισχύουν οι δύο ισότητες ταυτόχρονα. Εάν ίσχυε ταυτόχρονα $y_B = y_A$ και $x_B = x_A$, τότε ο κόμβος A θα ταυτιζόταν με τον κόμβο B ($A \equiv B$). Το τελευταίο δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να συμβεί λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων, της μορφής αλλά και των δυνατοτήτων του μηχανικού κυττάρου. Συνεπώς αρκεί να εξετάζουμε κάθε φορά που προσπαθούμε να κάνουμε την ΕΚΑ εάν ισχύει *μία* εκ των ακόλουθων συνθηκών $\begin{cases} y_B \neq y_A \\ x_B \neq x_A \end{cases}$ ή όχι και να προχωράμε κατάλληλα. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι κάποιες σταθερές για απλοποίηση των εξισώσεων:

$$C = \frac{q_A^2 - q_B^2 - x_A^2 + x_B^2 - y_A^2 + y_B^2}{2 \cdot (x_B - x_A)} \quad (3.20)$$

$$K = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (3.21)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.20),(3.21) η εξ. (3.19) γίνεται:

$$x_E = C - K \cdot y_E \quad (3.22)$$

Αντικαθιστούμε την εξ. (3.22) στην εξ. (3.5):

$$(C - K \cdot y_E)^2 + x_A^2 - 2 \cdot (C - K \cdot y_E) \cdot x_A + y_E^2 + y_A^2 - 2 \cdot y_E \cdot y_A = q_A^2 \quad (3.23)$$

$$(K^2 + 1) \cdot y_E^2 + (2 \cdot K \cdot x_A - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot y_A) \cdot y_E + (x_A^2 + y_A^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot x_A - q_A^2) = 0 \quad (3.24)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές τους εξής:

$$A = K^2 + 1 \quad (3.25)$$

Πίνακας 3.3: Όλες οι λύσεις του συστήματος ανάλογα με την συνθήκη για την εύρεση του σημείου E . Οι σταθερές είναι διαφορετικές ανάλογα με την περίπτωση.

Εάν $y_B \neq y_A$	$x_{E_1} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$ $x_{E_2} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$	$y_{E_1} = C - K \cdot x_{E_1}$ $y_{E_2} = C - K \cdot x_{E_2}$
Εάν $x_B \neq x_A$	$y_{E_1} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$ $y_{E_2} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$	$x_{E_1} = C - K \cdot y_{E_1}$ $x_{E_2} = C - K \cdot y_{E_2}$

$$B = 2 \cdot K \cdot x_A - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot y_A \quad (3.26)$$

$$\Gamma = x_A^2 + y_A^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot x_A - q_A^2 \quad (3.27)$$

Για τη διακρίνουσα έχουμε $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot \Gamma > 0$ λόγω της φυσικής υπόστασης του προβλήματος. Οι λύσεις του συστήματος είναι συνεπώς οι εξής:

$$y_{E_1} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}, \quad x_{E_1} = C - K \cdot y_{E_1}, \quad \forall x_B \neq x_A \quad (3.28)$$

$$y_{E_2} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}, \quad x_{E_2} = C - K \cdot y_{E_2}, \quad \forall x_B \neq x_A \quad (3.29)$$

Συνοψίζοντας οι λύσεις για την εύρεση του σημείου E είναι αυτές που περιγράφονται αναλυτικά στον Πίν. 3.3.

Είναι προφανές ότι η λύση του φυσικού μας συστήματος πρέπει να είναι μία και μοναδική και όχι δύο όπως φαίνεται από τον Πίν. 3.3 (ανάλογα με την περίπτωση). Για να επιλέξουμε τη σωστή λύση και να απορρίψουμε αυτήν που δεν έχει φυσική σημασία για το σύστημά μας θα ακολουθήσουμε την τεχνική που περιγράφεται στη συνέχεια.

Επιλογή σωστής λύσης

1. Έχοντας τις δύο λύσεις (Πιν. 3.3), έχουμε τα διανύσματα θέσης $\mathbf{p}_{E_1} = (x_{E_1}, y_{E_1})$ και $\mathbf{p}_{E_2} = (x_{E_2}, y_{E_2})$. Μεταξύ αυτών πρέπει να επιλεγεί το ένα (το σωστό) και να απορριφθεί το άλλο.
2. Βρίσκουμε το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n}_{AB} πάνω στην πλευρά \overline{AB} . Ισχύει: $\mathbf{n}_{AB} = \left(\frac{x_B - x_A}{\|\mathbf{p}_{AB}\|}, \frac{y_B - y_A}{\|\mathbf{p}_{AB}\|} \right)$ και προφανώς ισχύει:

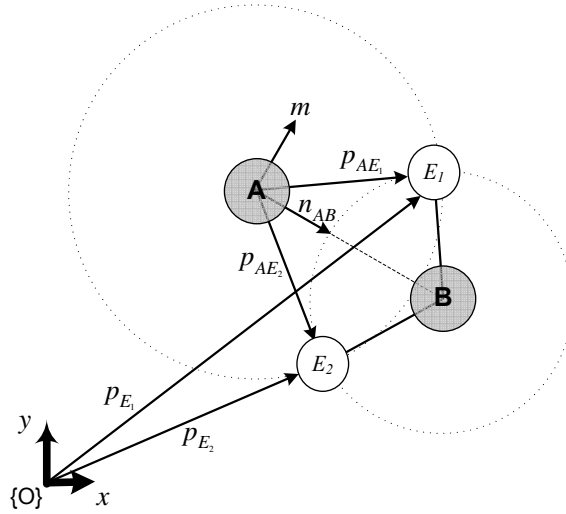
$$\|\mathbf{p}_{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

3. Στρέφουμε το διάνυσμα κατά 90° αριστερόστροφα για να βρούμε το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{m} που είναι κάθετο στην πλευρά \overline{AB} . Για να γίνει αυτό πολλαπλασιάζουμε το διάνυσμα \mathbf{n}_{AB} με τον πίνακα περιστροφής R^1 .
4. Έχοντας τις δύο λύσεις του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τα δύο διανύσματα:

$$\mathbf{p}_{AE_1} = (x_{E_1} - x_A, y_{E_1} - y_A) \text{ και} \\ \mathbf{p}_{AE_2} = (x_{E_2} - x_A, y_{E_2} - y_A)$$

5. Τέλος, υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα: $pr_1 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}_{AE_1}$ και $pr_2 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}_{AE_2}$. Εάν $pr_1 > 0$ τότε η σωστή λύση είναι η πρώτη (x_{E_1}, y_{E_1}) και απορρίπτεται η δεύτερη. Εάν αντίθετα ισχύει $pr_2 > 0$ τότε η σωστή λύση είναι η δεύτερη (x_{E_2}, y_{E_2}) και απορρίπτεται η πρώτη. (Σχ. 3.8)

${}^1R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ο πίνακας περιστροφής που στρέφει το διάνυσμα μας κατά 90° αριστερόστροφα.



Σχήμα 3.8: Οι δύο λύσεις και τα αντίστοιχα διανύσματα που αναφέρθηκαν για την επιλογή της “σωστής” λύσης για την ΕΚΑ του συστήματος με δύο ελεύθερους κόμβους. Εδώ προφανώς η σωστή λύση είναι η πρώτη (σημείο E_1) διότι το εσωτερικό γινόμενο $pr_1 > 0$, ενώ το αντίστοιχο $pr_2 < 0$.

Έχοντας πλέον τη λύση και τη θέση του σημείου E , δηλαδή τα x_E και y_E μπορούμε να ολοκληρώσουμε εύκολα πλέον την ΕΚΑ. Αρχικά υπολογίζουμε τις γωνίες:

$$\alpha = \arctan 2(y_E - y_A, x_E - x_A) \quad (3.30)$$

$$\beta = \arctan 2(y_E - y_B, x_B - x_E) \quad (3.31)$$

Οπότε τελικά έχουμε:

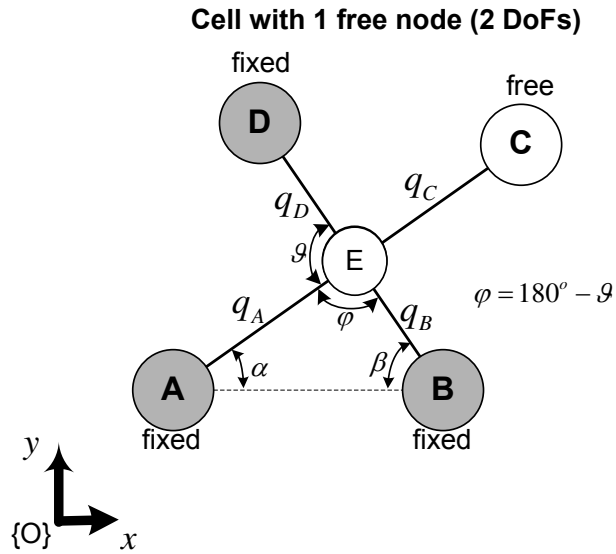
$$x_C = x_A + (q_A + q_C) \cdot \cos \alpha \quad (3.32)$$

$$y_C = y_A + (q_A + q_C) \cdot \sin \alpha \quad (3.33)$$

$$x_D = x_B - (q_B + q_D) \cdot \cos \beta \quad (3.34)$$

$$y_D = y_B + (q_B + q_D) \cdot \sin \beta \quad (3.35)$$

Οι εξ. (3.32),(3.33),(3.34),(3.35) αποτελούν τις τελικές εξισώσεις για την ΕΚΑ του μηχανικού μας κυττάρου σε περίπτωση που έχει δύο ελεύθερους κόμβους (άρα 4 β.ε.).



Σχήμα 3.9: Κύτταρο με τρεις σταθερούς (A, B και D) και έναν ελεύθερο κόμβο (C) σε τυχαία θέση-κατάσταση.

Ευθεία Κινηματική Ανάλυση για κύτταρο με έναν ελεύθερο κόμβο (ΕΚΑ-1)

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει η ευθεία κινηματική ανάλυση ρομποτικού κυττάρου με έναν ελεύθερο κόμβο, όπως αυτό που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.9. Στην ανάλυση αυτή θεωρούμε δεδομένες τις θέσεις των κόμβων A, B και D , δηλαδή τα διανύσματα θέσης $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B$ και \mathbf{p}_D και αναζητούμε τη θέση του κόμβου C , δηλαδή το διάνυσμα θέσης \mathbf{p}_C , ανάλογα με τις τιμές των αρθρώσεων q_A, q_B, q_C και q_D (εδώ όπως θα δούμε απαιτείται η επενέργεια μόνο των αρθρώσεων q_B και q_C).

Αρχικά θέλουμε να βρούμε τη θέση του σημείου E (x_E, y_E). Για να γίνει αυτό αρκεί να λύσουμε το σύστημα των παρακάτω εξισώσεων:

$$\|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_B\| = q_B \quad (3.36)$$

$$\|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_D\| = q_D \quad (3.37)$$

Η εξ. (3.36) που περιλαμβάνει τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_E και \mathbf{p}_B μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2} = q_B \quad (3.38)$$

Και με παρόμοιο τρόπο η εξ. (3.37) που περιλαμβάνει τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_E και \mathbf{p}_D μπορεί να γραφτεί:

$$\sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2} = q_D \quad (3.39)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξ. (3.38) και (3.39) είναι οι εξισώσεις των δύο κύκλων με κέντρα τα σημεία B και D και ακτίνες q_B και q_D αντίστοιχα. Αυτό που αναζητούμε είναι το σημείο τομής των κύκλων αυτών, το οποίο ταυτίζεται με το σημείο E . Οι εξ. (3.38) και (3.39) μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$x_E^2 + x_B^2 - 2 \cdot x_E \cdot x_B + y_E^2 + y_B^2 - 2 \cdot y_E \cdot y_B = q_B^2 \quad (3.40)$$

$$x_E^2 + x_D^2 - 2 \cdot x_E \cdot x_D + y_E^2 + y_D^2 - 2 \cdot y_E \cdot y_D = q_D^2 \quad (3.41)$$

Αφαιρούμε την εξ. (3.41) από την (3.40) και έχουμε:

$$x_B^2 - x_D^2 + 2 \cdot x_E(x_D - x_B) + y_B^2 - y_D^2 + 2 \cdot y_E(y_D - y_B) = q_B^2 - q_D^2 \quad (3.42)$$

Φυσικά, λόγω των δεδομένων θέσεων των κόμβων B και D υπάρχει άμεση εξάρτηση μεταξύ των αρθρώσεων q_B και q_D . Πιο συγκεκριμένα η τιμή q_D θα υπολογιστεί από την επόμενη σχέση και φυσικά η *αντίστοιχη άρθρωση θα είναι παθητική*:

$$q_D = -q_B + \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} \quad (3.43)$$

Και εδώ θα εξετάσουμε την εξ. (3.42) με προϋποθέσεις.

Περίπτωση 1

Εάν $y_D \neq y_B$ τότε:

$$y_E = \frac{q_B^2 - q_D^2 - x_B^2 + x_D^2 - y_B^2 + y_D^2 - 2 \cdot x_E(x_D - x_B)}{2 \cdot (y_D - y_B)} \quad (3.44)$$

Θέτουμε τις επόμενες σταθερές ποσότητες για να μειώσουμε το μέγεθος των εξισώσεων:

$$C = \frac{q_B^2 - q_D^2 - x_B^2 + x_D^2 - y_B^2 + y_D^2}{2 \cdot (y_D - y_B)} \quad (3.45)$$

$$K = \frac{x_D - x_B}{y_D - y_B} \quad (3.46)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.45), (3.46) η εξ. (3.44) γίνεται:

$$y_E = C - K \cdot x_E \quad (3.47)$$

Αντικαθιστούμε την εξ. (3.47) στην εξ. (3.40):

$$x_E^2 + x_B^2 - 2 \cdot x_E \cdot x_B + (C - K \cdot x_E)^2 + y_B^2 - 2 \cdot (C - K \cdot x_E) \cdot y_B = q_B^2 \quad (3.48)$$

$$(K^2 + 1) \cdot x_E^2 + (2 \cdot K \cdot y_B - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot x_B) \cdot x_E + (x_B^2 + y_B^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot y_B - q_B^2) = 0 \quad (3.49)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές τους εξής:

$$A = K^2 + 1 \quad (3.50)$$

$$B = 2 \cdot K \cdot y_B - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot x_B \quad (3.51)$$

$$\Gamma = x_B^2 + y_B^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot y_B - q_B^2 \quad (3.52)$$

Προφανώς για τη διακρίνουσα έχουμε $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot \Gamma = 0$ λόγω της φυσικής υπόστασης του προβλήματος. Εδώ δηλαδή το πρόβλημά μας έχει μία και μοναδική λύση (μαθηματικά: μία διπλή λύση). Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος είναι οι εξής:

$$x_E = \frac{-B}{2 \cdot A}, \quad y_E = C - K \cdot x_E, \quad \forall y_D \neq y_B \quad (3.53)$$

Περίπτωση 2

Είναι προφανές ότι ισχύει $x_D \neq x_B$ όταν $y_D = y_B$, λόγω της φύσης του προβλήματος που προσπαθούμε να επιλύσουμε. Εάν ίσχυε ταυτόχρονα $y_D = y_B$ και $x_D = x_B$, τότε ο κόμβος B θα ταυτιζόταν με τον κόμβο D ($B \equiv D$). Το τελευταίο δε μπορεί σε καμία περίπτωση να συμβεί λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων, της μορφής αλλά και των δυνατοτήτων του μηχανικού κυττάρου. Συνεπώς, αρκεί να εξετάζουμε κάθε φορά που προσπαθούμε να επιλύσουμε την ΕΚΑ εάν ισχύει μία εκ των ακόλουθων συνθηκών $\begin{cases} y_D \neq y_B \\ x_D \neq x_B \end{cases}$ ή όχι και να προχωράμε ανάλογα. Στην περίπτωση που ισχύει $y_D = y_B$ (ή έστω $y_D \approx y_B$) πρέπει να επανέλθουμε στην εξ. (3.42) και να την αντιμετωπίσουμε με άλλο τρόπο. Αντί να διαιρέσουμε με την ποσότητα $y_D - y_B$ θα διαιρέσουμε με $x_D - x_B$.

$$x_E = \frac{q_B^2 - q_D^2 - x_B^2 + x_D^2 - y_B^2 + y_D^2 - 2 \cdot y_E(y_D - y_B)}{2 \cdot (x_D - x_B)} \quad (3.54)$$

Θέτουμε τις επόμενες σταθερές ποσότητες για να μειώσουμε το μέγεθος των εξισώσεων:

$$C = \frac{q_B^2 - q_D^2 - x_B^2 + x_D^2 - y_B^2 + y_D^2}{2 \cdot (x_D - x_B)} \quad (3.55)$$

$$K = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \quad (3.56)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.55), (3.56) η εξ. (3.54) γίνεται:

$$x_E = C - K \cdot y_E \quad (3.57)$$

Αντικαθιστούμε την εξ. (3.57) στην εξ. (3.40):

$$y_E^2 + x_B^2 - 2 \cdot y_E \cdot x_B + (C - K \cdot y_E)^2 + y_B^2 - 2 \cdot (C - K \cdot y_E) \cdot y_B = q_B^2 \quad (3.58)$$

$$(K^2 + 1) \cdot y_E^2 + (2 \cdot K \cdot y_B - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot x_B) \cdot y_E + (x_B^2 + y_B^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot y_B - q_B^2) = 0 \quad (3.59)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές τους εξής:

$$A = K^2 + 1 \quad (3.60)$$

$$B = 2 \cdot K \cdot y_B - 2 \cdot C \cdot K - 2 \cdot x_B \quad (3.61)$$

$$\Gamma = x_B^2 + y_B^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot y_B - q_B^2 \quad (3.62)$$

Προφανώς για τη διακρίνουσα έχουμε $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot \Gamma = 0$. Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος είναι οι εξής:

$$y_E = \frac{-B}{2 \cdot A}, \quad x_E = C - K \cdot y_E, \quad \forall x_D \neq x_B \quad (3.63)$$

Πίνακας 3.4: Όλες οι λύσεις του συστήματος ανάλογα με την συνθήκη για την εύρεση του σημείου E . Οι σταθερές είναι διαφορετικές ανάλογα με την περίπτωση.

Εάν $y_D \neq y_B$	$x_E = \frac{-B}{2 \cdot A}$	$y_E = C - K \cdot x_E$
Εάν $x_D \neq x_B$	$y_E = \frac{-B}{2 \cdot A}$	$x_E = C - K \cdot y_E$

Συνοψίζοντας οι λύσεις για την εύρεση του σημείου E είναι αυτές που περιγράφονται αναλυτικά στον Πίν. 3.4. Αφού βρούμε τη θέση του σημείου E μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ΕΚΑ-1 ως εξής:

$$x_C = x_E + q_C \cdot \cos \alpha \quad (3.64)$$

$$y_C = y_E + q_C \cdot \sin \alpha \quad (3.65)$$

3.4.2 Αντίστροφη Κινηματική Ανάλυση (ΑΚΑ)

Η αντίστροφη κινηματική ανάλυση είναι αρκετά πιο απλή από την ΕΚΑ που αναφέρθηκε προηγουμένως. Επίσης η ΑΚΑ είναι ίδια για όλες τις μορφές κυττάρων, οπότε δεν υπάρχει λόγος να γίνει διαχωρισμός σε ΑΚΑ-2 για κύτταρα με δύο ελεύθερους κόμβους και σε ΑΚΑ-1 για κύτταρα με έναν ελεύθερο κόμβο. Συνεπώς σε κύτταρα με δύο ελεύθερους κόμβους και σε κύτταρα με έναν ελεύθερο κόμβο ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία για την εύρεση της αντίστροφης κινηματικής. Στην ανάλυση αυτή θεωρούμε δεδομένες τις θέσεις των κόμβων A , B , C και D , δηλαδή τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_A , \mathbf{p}_B , \mathbf{p}_C και \mathbf{p}_D και αναζητούμε τις τιμές των αρθρώσεων q_A , q_B , q_C και q_D .

Για να επιλύσουμε την ΑΚΑ πρέπει να βρεθεί πρώτα η θέση του κεντρικού σημείου E . Είναι προφανές ότι το σημείο E είναι το σημείο τομής δύο ευθειών. Η πρώτη είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία A και C , έστω ε_1 , ενώ η δεύτερη ευθεία είναι αυτή που περνάει από τα σημεία B και D , έστω ε_2 .

Στη γενική περίπτωση οι εξισώσεις των δύο ευθειών είναι οι:

$$\varepsilon_1 : y = \lambda_1 \cdot x + \mu_1 \quad (3.66)$$

$$\varepsilon_2 : y = \lambda_2 \cdot x + \mu_2 \quad (3.67)$$

Αφού η ευθεία ε_1 περνά από τα σημεία A και C έχουμε:

$$\lambda_1 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}, \quad \forall x_C \neq x_A \quad (3.68)$$

$$\mu_1 = y_A - \lambda_1 \cdot x_A \quad (3.69)$$

Με αντίστοιχο τρόπο έχουμε για την ευθεία ε_2 :

$$\lambda_2 = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B}, \quad \forall x_D \neq x_B \quad (3.70)$$

$$\mu_2 = y_B - \lambda_2 \cdot x_B \quad (3.71)$$

Είναι προφανές και πάλι ότι δεν μπορεί να συμβεί ταυτόχρονα $x_C = x_A$ και $x_D = x_B$. Αυτό συμβαίνει λόγω μηχανικών περιορισμών του μηχανικού μας κυττάρου. Οπότε αν είναι να ισχύει κάποια από τις συνθήκες θα ισχύει μόνο η μία από αυτές κάθε φορά.

Περίπτωση 1

Σε περίπτωση που $x_C \neq x_A$ και $x_D \neq x_B$, δηλαδή δεν ισχύει καμία εκ των συνθηκών, τότε μπορούμε να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών, το οποίο είναι το σημείο E , ως εξής:

$$x_E = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (3.72)$$

$$y_E = \lambda_1 \cdot x_E + \mu_1 \quad (3.73)$$

Περίπτωση 2

Εάν όμως ισχύει $x_C = x_A$, δηλαδή ισχύει η πρώτη συνθήκη, τότε η ευθεία ε_1 είναι κατακόρυφη και προφανώς ισχύει ότι:

$$x_E = x_A = x_C \quad (3.74)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (3.74) στην εξ. (3.67) έχουμε:

$$y_E = \lambda_2 \cdot x_E + \mu_2 \quad (3.75)$$

Πίνακας 3.5: Οι εξισώσεις εύρεσης του σημείου E κατά την επίλυση της ΑΚΑ ανάλογα με την περίπτωση.

Εάν $x_A \neq x_C$ και $x_B \neq x_D$	$x_E = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$	$y_E = \lambda_1 \cdot x_E + \mu_1$
Εάν $x_A = x_C$	$x_E = x_A$	$y_E = \lambda_2 \cdot x_E + \mu_2$
Εάν $x_B = x_D$	$x_E = x_B$	$y_E = \lambda_1 \cdot x_E + \mu_1$

Περίπτωση 3

Τελευταία θα εξετάσουμε την περίπτωση που ισχύει $x_B = x_D$, δηλαδή την περίπτωση που η δεύτερη συνθήκη είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση θα ισχύει ότι η ευθεία ε_2 είναι κατακόρυφη και προφανώς ισχύει ότι:

$$x_E = x_B = x_D \quad (3.76)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (3.76) στην εξ. (3.66) έχουμε:

$$y_E = \lambda_1 \cdot x_E + \mu_1 \quad (3.77)$$

Έχοντας πλέον εξετάσει όλες τις περιπτώσεις, μπορούμε να συνοψίσουμε όλες τις λύσεις στον Πιν. 3.5.

Έχοντας βρει το σημείο E μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των αρθρώσεων και να ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις για την ΑΚΑ. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι παρακάτω:

$$q_A = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} \quad (3.78)$$

$$q_B = \sqrt{(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2} \quad (3.79)$$

$$q_C = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2} \quad (3.80)$$

$$q_D = \sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2} \quad (3.81)$$

Πίνακας 3.6: Τα βασικά συμπεράσματα για την ΕΚΑ-2

Κόμβος	Εξάρτηση από τις παραμέτρους
Κόμβος C (\mathbf{p}_C)	$f(q_A, q_B, q_C, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B)$
Κόμβος D (\mathbf{p}_D)	$g(q_A, q_B, q_D, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B)$

3.4.3 Διαφορική Κινηματική Ανάλυση (ΔΚΑ)

Διαφορική Κινηματική Ανάλυση ρομποτικού κυττάρου με 2 ελεύθερους κόμβους (ΔΚΑ-2)

Όπως είδαμε στην ΕΚΑ του ρομποτικού κυττάρου με δύο ελεύθερους κόμβους, δηλαδή με 4 β.ε., η τελική θέση των κόμβων C και D εξαρτάται από τις παραμέτρους που παρουσιάζονται στον Πίν. 3.6. Οπότε για να κάνουμε τη ΔΚΑ θα πρέπει να παραγωγίσουμε τις σχέσεις της ΕΚΑ-2 ως εξής:

$$\dot{\mathbf{p}}_C = \frac{\partial f}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial f}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial f}{\partial q_C} \dot{q}_C + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_A} \dot{\mathbf{p}}_A + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_B} \dot{\mathbf{p}}_B \quad (3.82)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_D = \frac{\partial g}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial g}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial g}{\partial q_D} \dot{q}_D + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_A} \dot{\mathbf{p}}_A + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_B} \dot{\mathbf{p}}_B \quad (3.83)$$

Η εξ. (3.82) είναι ισοδύναμη με τις εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial f}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial f}{\partial q_C} \dot{q}_C + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_A} \dot{x}_A \\ \frac{\partial f}{\partial y_A} \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_B} \dot{x}_B \\ \frac{\partial f}{\partial y_B} \dot{y}_B \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Ενώ η εξ. (3.83) είναι ισοδύναμη με τις εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial g}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial g}{\partial q_D} \dot{q}_D + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_A} \dot{x}_A \\ \frac{\partial g}{\partial y_A} \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_B} \dot{x}_B \\ \frac{\partial g}{\partial y_B} \dot{y}_B \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Οι λεπτομερείς εκφράσεις των μερικών παραγώγων δεν θα δοθούν αναλυτικά στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής. Η ανάλυση έγινε χρησιμοποιώντας το πακέτο "Mathematica v5.2" και σε περίπτωση που ο αναγνώστης θελήσει κάποιες επιπλέον πληροφορίες μπορεί να επικοινωνήσει με τον συγγραφέα.

Σε περίπτωση κυττάρου για το οποίο ισχύει $\dot{\mathbf{p}}_A = 0$ και $\dot{\mathbf{p}}_B = 0$, δηλαδή κυττάρου που οι δύο του σταθεροί κόμβοι είναι σταθεροί στο χώρο και δεν μετακινούνται, η ΔΚΑ-2 μπορεί να απλοποιηθεί για ένα κύτταρο ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_C \\ \dot{\mathbf{p}}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_A} & \frac{\partial f}{\partial q_B} & \frac{\partial f}{\partial q_C} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial q_A} & \frac{\partial f}{\partial q_B} & \frac{\partial f}{\partial q_C} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial q_A} & \frac{\partial g}{\partial q_B} & 0 & \frac{\partial g}{\partial q_D} \\ \frac{\partial g}{\partial q_A} & \frac{\partial g}{\partial q_B} & 0 & \frac{\partial g}{\partial q_D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Ο πίνακας 4×4 είναι η ιακωβιανή του ρομποτικού κυττάρου με δύο ελεύθερους κόμβους (J_2):

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_A} & \frac{\partial f}{\partial q_B} & \frac{\partial f}{\partial q_C} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial q_A} & \frac{\partial f}{\partial q_B} & \frac{\partial f}{\partial q_C} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial q_A} & \frac{\partial g}{\partial q_B} & 0 & \frac{\partial g}{\partial q_D} \\ \frac{\partial g}{\partial q_A} & \frac{\partial g}{\partial q_B} & 0 & \frac{\partial g}{\partial q_D} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Ο πίνακας της ιακωβιανής στην εξ. (3.87) αναφέρεται όπως είπαμε σε κύτταρο με ακίνητους σταθερούς κόμβους. Αν όμως οι σταθεροί κόμβοι του κυττάρου κινούνται και δεν είναι σταθεροί στο χώρο, όταν δηλαδή αυτοί οι κόμβοι αντιστοιχούν σε ελεύθερους κόμβους ενός άλλου ρομποτικού κυττάρου ή άλλων ρομποτικών κυττάρων, τότε πρέπει να ληφθεί υπόψη η μεταβολή αυτή και η αντίστοιχη ιακωβιανή της ρομποτικής κατασκευής προκύπτει με χρήση των γενικευμένων εξ. (3.84), και (3.85).

Διαφορική Κινηματική Ανάλυση ρομποτικού κυττάρου με 1 ελεύθερο κόμβο (ΔΚΑ-1)

Όπως είδαμε στην ΕΚΑ του ρομποτικού κυττάρου με έναν ελεύθερο κόμβο, δηλαδή με 2 β.ε., η τελική θέση του κόμβου C εξαρτάται από τις παραμέτρους που παρουσιάζονται στον Πιν. 3.7.

Οπότε για να κάνουμε τη ΔΚΑ θα πρέπει να παραγωγίσουμε τις σχέσεις της ΕΚΑ-1 ως εξής:

$$\dot{\mathbf{p}}_C = \frac{\partial h}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial h}{\partial q_C} \dot{q}_C + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_A} \dot{\mathbf{p}}_A + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_B} \dot{\mathbf{p}}_B + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_D} \dot{\mathbf{p}}_D \quad (3.88)$$

Πίνακας 3.7: Τα βασικά συμπεράσματα για την ΕΚΑ-1

Κόμβος	Εξάρτηση από τις παραμέτρους
Κόμβος C (\mathbf{p}_C)	$h(q_B, q_C, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B, \mathbf{p}_D)$

Η εξ. (3.88) είναι ισοδύναμη με :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial h}{\partial q_C} \dot{q}_C + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_A} \dot{x}_A \\ \frac{\partial h}{\partial y_A} \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_B} \dot{x}_B \\ \frac{\partial h}{\partial y_B} \dot{y}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_D} \dot{x}_D \\ \frac{\partial h}{\partial y_D} \dot{y}_D \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Η λεπτομερής εκφράσεις των μερικών παραγώγων δεν θα δοθούν αναλυτικά στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής. Η ανάλυση έγινε και πάλι χρησιμοποιώντας το πακέτο “Mathematica v5.2” και σε περίπτωση που ο αναγνώστης θελήσει κάποιες επιπλέον πληροφορίες μπορεί να επικοινωνήσει με τον συγγραφέα.

Σε περίπτωση κυτάρου για το οποίο ισχύει $\dot{\mathbf{p}}_A = 0$, $\dot{\mathbf{p}}_B = 0$ και $\dot{\mathbf{p}}_D = 0$, δηλαδή κυτάρου που οι τρεις του σταθεροί κόμβοι είναι σταθεροί στο χώρο και δεν μετακινούνται, η ΔΚΑ-1 μπορεί να απλοποιηθεί για ένα κύτταρο ως εξής:

$$\dot{\mathbf{p}}_C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_B} & \frac{\partial h}{\partial q_C} \\ \frac{\partial h}{\partial q_B} & \frac{\partial h}{\partial q_C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_B} & \frac{\partial h}{\partial q_C} \\ \frac{\partial h}{\partial q_B} & \frac{\partial h}{\partial q_C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Ο πίνακας 2×2 είναι η ιακωβιανή του ίδιου ρομποτικού κυτάρου με έναν ελεύθερο κόμβο (J_1):

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_B} & \frac{\partial h}{\partial q_C} \\ \frac{\partial h}{\partial q_B} & \frac{\partial h}{\partial q_C} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Ο πίνακας της ιακωβιανής στην εξ. (3.92) αναφέρεται όπως είπαμε σε κύτταρο με ακίνητους σταθερούς κόμβους. Σε περίπτωση όμως που οι σταθεροί κόμβοι του κυτάρου κινούνται, όταν δηλαδή αυτοί οι κόμβοι αντιστοιχούν σε ελεύθερους κόμβους ενός άλλου ρομποτικού κυτάρου ή άλλων

ρομποτικών κυττάρων, τότε πρέπει να ληφθεί υπόψη η μεταβολή αυτή και η αντίστοιχη ιακωβιανή της ρομποτικής κατασκευής προκύπτει με χρήση της γενικευμένης εξ. (3.89).

3.5 Ανάλυση ρομποτικής κυτταρικής δομής

Αφού ολοκληρώθηκε η ανάλυση για ένα ρομποτικό κύτταρο στα προηγούμενα εδάφια, θα ακολουθήσει η περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθούμε για την ανάλυση μιας ολόκληρης ρομποτικής κυτταρικής δομής αποτελούμενης από n ρομποτικά κύτταρα. Θα μελετηθεί η συμπεριφορά και οι ιδιότητες της, οι βαθμοί ελευθερίας της και τέλος θα παρουσιαστεί μία ολοκληρωμένη μέθοδος ανάλυσης που βασίζεται στη *μέθοδο των γράφων*.

3.5.1 Ο δομικός πίνακας S

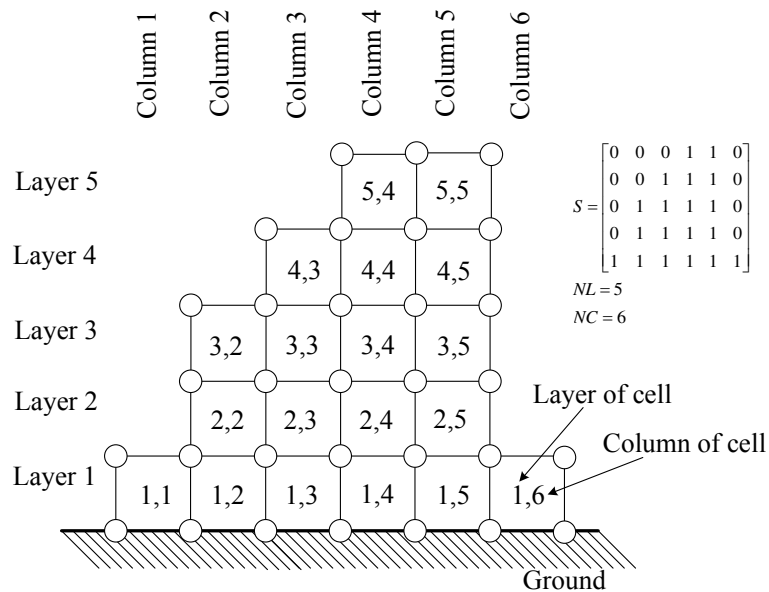
Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί ένας *εύκολος* και *“συμπαγής”* τρόπος παρουσίασης της μορφής της δομής του ρομποτικού μας συστήματος. Μία ρομποτική κυτταρική δομή αποτελείται από n ρομποτικά κύτταρα. Ο **δομικός πίνακας** ή **πίνακας δομής** S θα μας βοηθήσει να παρουσιάσουμε τη μορφή της κατασκευής με αρκετά απλό τρόπο. Μέσα από τον δομικό πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε πόσα κύτταρα εμπεριέχονται και σε ποια θέση αυτά βρίσκονται μέσα στη δομή. Ουσιαστικά ο δομικός πίνακας μας παρουσιάζει την *“μορφή-σχήμα”* της κυτταρικής κατασκευής που μας ενδιαφέρει.

Έστω ότι η κυτταρική δομή έχει NL σε αριθμό *“επίπεδα”* και NC σε αριθμό *“στήλες”* (Σχ. 3.10), τότε ο δομικός πίνακας S ορίζεται ως εξής:

$$S_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{εάν υπάρχει κύτταρο στη θέση } (i, j) \\ 0 & \text{εάν δεν υπάρχει κύτταρο στη θέση } (i, j) \end{cases} \quad (3.93)$$

Συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας S είναι ένας δυαδικός πίνακας με NL γραμμές και NC στήλες. Επίσης στο Σχ. 3.10 παρουσιάζεται ο τρόπος ονοματολογίας των κυττάρων. Βλέπουμε ότι κάθε κύτταρο έχει δύο αριθμούς που το ξεχωρίζουν από τα άλλα κύτταρα μέσα στη δομή. Ο πρώτος αριθμός είναι ο αριθμός του *“επιπέδου”* και ο δεύτερος είναι ο αριθμός της *“στήλης”* στα οποίο ανήκει.

Στο Σχ. 3.10 δίνεται ως παράδειγμα μία ρομποτική κυτταρική δομή που αποτελείται από 19 ρομποτικά κύτταρα. Στο δεξί μέρος φαίνεται ο πίνακας S της κατασκευής αυτής.



Σχήμα 3.10: Μία ρομποτική κυτταρική δομή αποτελούμενη από $n = 19$ ρομποτικά κύτταρα. Η δομή έχει 5 “επίπεδα” και 6 “στήλες”.

3.5.2 Θεωρία γράφων

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε ο δομικός πίνακας S . Μέσα από το συγκεκριμένο πίνακα μπορούμε όπως είπαμε να βγάλουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για τη μορφή-σχήμα της κατασκευής. Δυστυχώς όμως ο πίνακας αυτός δεν αρκεί για να περιγράψουμε πλήρως τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά μιας ρομποτικής κατασκευής αποτελούμενης από ρομποτικά κύτταρα. Ως πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι ο πίνακας της δομής δεν μας δείχνει ποια κύτταρα μέσα στη δομή ανήκουν στην πρώτη ή στη δεύτερη κατηγορία, έχουν δηλαδή 2 ή 1 ελεύθερο κόμβο αντίστοιχα.

Για να περιγράψουμε πλήρως, λοιπόν, μία κυτταρική δομή και να ξεπεράσουμε το προηγούμενο πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των γράφων [19], όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια. Οι γράφοι που θα παραχθούν θα μας παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για την ρομποτική μας κατασκευή όπως:

- την κατηγορία στην οποία ανήκει κάθε κύτταρο (με 2 ή με 1 έναν ελεύθερο κόμβο),

- τον αριθμό και τη θέση των κόμβων εδάφους,²
- τη μορφή της ρομποτικής κατασκευής (σχεδόν όλες πληροφορίες μας παρέχει και ο πίνακας δομής S).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μέσω των γράφων ο χρήστης μπορεί να αντλήσει πολύ περισσότερες και ουσιαστικότερες πληροφορίες για την κυτταρική ρομποτική κατασκευή από ότι μέσω του πίνακα δομής. Η δημιουργία όμως των σχετικών γράφων είναι μια διαδικασία αρκετά χρονοβόρα, ειδικά για συστήματα αποτελούμενα από πολλά κύτταρα. Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε για να επιτύχουμε την περιγραφή της δομής με γράφους είναι τα εξής:

- Ορίζουμε το δομικό πίνακα S .
- Ορίζουμε τους κόμβους εδάφους. Αυτοί είναι οι κόμβοι που θα στηρίζουν ολόκληρη την κατασκευή.
- Κατασκευάζουμε τον απλό γράφο (X) της δομής. Στη φάση αυτή ο γράφος μας είναι “μη κατευθυνόμενος” (*undirected graph*).
- Κατασκευάζουμε τον πίνακα γειννίαςσης (*Adjacency Matrix*) $A(X)$ για το γράφο X .
- Με συγκεκριμένη μεθοδολογία που θα περιγραφεί στη συνέχεια γίνεται μεταπήδηση από τον πίνακα $A(X)$ στον αντίστοιχο πίνακα $A(Y)$ για τον αντίστοιχο “κατευθυνόμενο” γράφο Y (*directed graph*).
- Σχεδιάζουμε το γράφο Y . Ο γράφος αυτός μας δίνει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για τη ρομποτική κυτταρική δομή.

Είδαμε λοιπόν ότι για να καταλήξουμε στον τελικό γράφο πρέπει να ακολουθήσουμε μια σειρά από βήματα. Στην συνέχεια θα αναλύσουμε την σημασία του κάθε βήματος και τις αποφάσεις που θα πρέπει να λάβει ο χρήστης σε κάθε ένα από αυτά.

²Κόμβοι εδάφους είναι οι σταθεροί κόμβοι που “παρέχονται” στη ρομποτική κατασκευή από το ίδιο το έδαφος. Οι κόμβοι αυτοί είναι πολύ χρήσιμοι για το σύστημα, μιας και σε αυτούς τελικά στηρίζεται όλη η κατασκευή. Οι κόμβοι εδάφους είναι οι σταθεροί κόμβοι στο έδαφος, πάνω στους οποίους θα στηριχτούν τα “πρώτα” κύτταρα της ρομποτικής δομής. Π.χ. όταν το πρώτο κύτταρο θα πάει να συναρμολογηθεί στην επιθυμητή θέση του δεν θα υπάρχει άλλο κύτταρο να το βοηθήσει να σταθεροποιηθεί. Αυτή τη λειτουργία επιτελούν οι κόμβοι εδάφους. Είναι προφανές ότι όποιες δυνάμεις ασκούνται στην κυτταρική δομή τελικά μεταφέρονται μέσω των ενδιάμεσων κυττάρων στους κόμβους εδάφους.

Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι να ορίσουμε το δομικό πίνακα. Η επιλογή του αριθμού n των ρομποτικών κυττάρων και του τρόπου σύνδεσης αυτών μέσα στην κατασκευή είναι σε γενικές γραμμές ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα για το χρήστη, αλλά η επιλογή έχει τεράστια σημασία για τη λειτουργικότητα και τις δυνατότητες του τελικού ρομπότ. Είναι δεδομένο ότι ο χρήστης είναι σε θέση να γνωρίζει την λειτουργικότητα και τις δυνατότητες ενός μεμονωμένου ρομποτικού κυττάρου και τον τρόπο σύνδεσης ενός κυττάρου με τα υπόλοιπα. *Είναι όμως πολύ δύσκολο να γνωρίζει εκ των προτέρων την λειτουργικότητα και τις ιδιότητες μιας ολόκληρης ρομποτικής κατασκευής αποτελούμενης από τέτοιου είδους ρομποτικά κύτταρα.* Δεν είναι δηλαδή εύκολο να διαλέξει κάποιος τον αριθμό n των κυττάρων και να επιλέξει με μοναδικό τρόπο τη μορφή της ρομποτικής κατασκευής έτσι ώστε να καταλήξει σε μία προεπιλεγμένη λειτουργικότητα και σε συγκεκριμένες δυνατότητες για την κυτταρική δομή. Συνεπώς η επιλογή του δομικού πίνακα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την **εμπειρία** του ίδιου του μηχανικού/χρήστη.

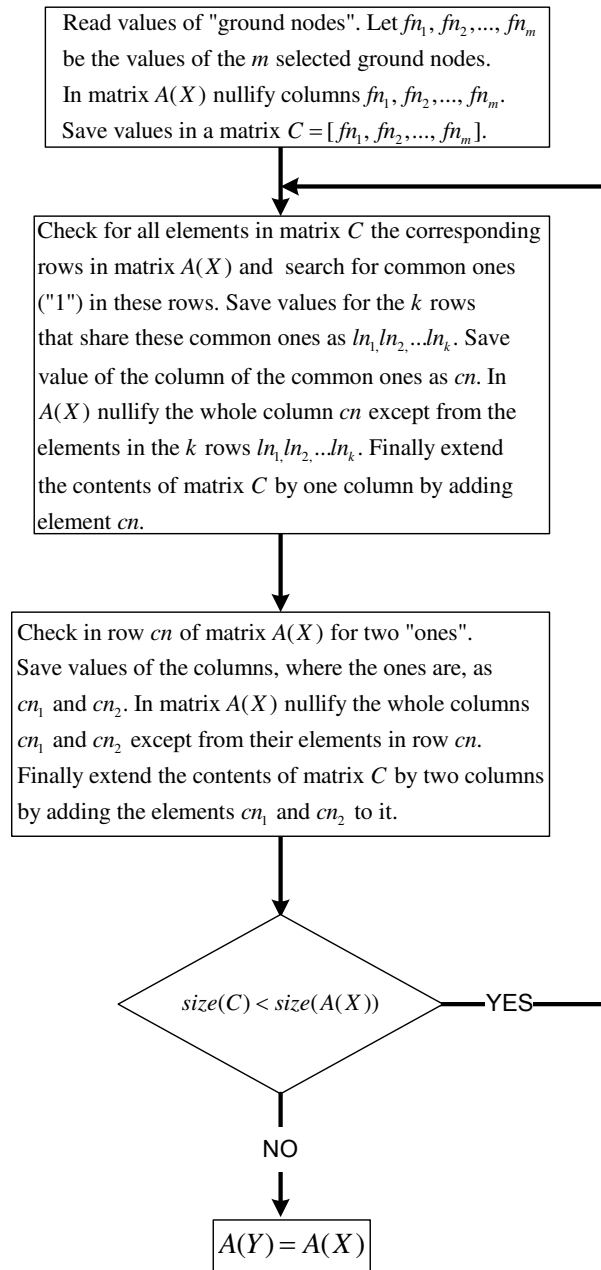
Στη συνέχεια θα πρέπει να επιλεγούν οι κόμβοι εδάφους. Αυτοί όπως είπαμε θα είναι οι κόμβοι που θα “στηρίζουν” ολόκληρη τη ρομποτική κατασκευή. Είναι προφανές ότι οι *κόμβοι εδάφους θα πρέπει να είναι τουλάχιστον δύο* (έτσι ώστε να στηριχτεί το πρώτο κύτταρο της κατασκευής) και φυσικά όσο περισσότεροι είναι, τόσο πιο καλή θα είναι η στήριξη της κυτταρικής δομής. Αντίθετα, όσο περισσότεροι είναι οι κόμβοι εδάφους, τόσο λιγότεροι είναι οι ελεύθεροι κόμβοι της κατασκευής και άρα τόσο πιο λίγοι είναι και οι βαθμοί ελευθερίας της. Το πρόβλημα της επιλογής των κόμβων εδάφους μπορεί να παρομοιασθεί με ένα κλασικό πρόβλημα στήριξης που συναντάται σε πολλά μηχανολογικά-στατικά προβλήματα. Εάν η στήριξη είναι “σωστά” επιλεγμένη, η τελική κατασκευή θα είναι αρκετά “δυνατή” και θα αντέχει σε μεγάλα φορτία.

Στη συνέχεια, θα πρέπει να κατασκευάσουμε τον απλό γράφο X που αντιστοιχεί στην κυτταρική δομή. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους κόμβους του κάθε κυττάρου (κόμβοι A, B, C, D) καθώς και έναν ακόμα κόμβο, τον κεντρικό κόμβο E για κάθε κύτταρο. Ο κεντρικός κόμβος αντιστοιχεί στο σημείο E που χρησιμοποιήθηκε και στην ΕΚΑ και ΑΚΑ. Συνεπώς, ο γράφος κάθε κυττάρου θα αντιστοιχεί στους 4 κόμβους του (A, B, C, D) και σε έναν κεντρικό κόμβο (E), οπότε θα αποτελείται συνολικά από 5 κόμβους. Οι ακριανοί κόμβοι θα ενώνονται μόνο με τον κεντρικό κόμβο και έτσι θα σχηματίζεται ο γράφος του κάθε κυττάρου. Όταν επαναληφθεί η διαδικασία αυτή n φορές για όλα τα κύτταρα του συστήματος τότε θα έχει δημιουργηθεί ο γράφος X ολόκληρης της ρομποτικής κυτταρικής δομής. Έχοντας τον γράφο μπορούμε εύκολα να δημιουργήσουμε τον πίνακα $A(X)$ σύμφωνα με την απλή θεωρία γράφων.

Το πιο σημαντικό και πολύπλοκο βήμα είναι η μετάβαση από τον πίνακα $A(X)$ στον αντίστοιχο πίνακα του “κατευθυνόμενου” γράφου Y , δηλαδή τον $A(Y)$. Η μεθοδολογία που ακολουθείται περιγράφεται παρακάτω σε μορφή αλγορίθμου:

1. Διάβασε τις τιμές των κόμβων εδάφους. Εάν ο χρήστης έχει επιλέξει m κόμβους εδάφους, σώσε τις τιμές τους με τις μεταβλητές fn_1, fn_2, \dots, fn_m .
2. Στον πίνακα $A(X)$ μηδένισε όλα τα στοιχεία στις στήλες fn_1, fn_2, \dots, fn_m . Σώσε τις μεταβλητές αυτές στον πίνακα $C = \begin{bmatrix} fn_1 & fn_2 & \dots & fn_m \end{bmatrix}$.
3. Έλεγξε για κάθε τιμή του πίνακα C όλες τις αντίστοιχες γραμμές του πίνακα $A(X)$ και ψάξε για “κοινούς” άσσους ανάμεσα στις γραμμές αυτές (άσσους στην ίδια θέση-στήλη). Σώσε τις τιμές για τις k γραμμές που έχουν αυτούς τους κοινούς άσσους με τις μεταβλητές ln_1, ln_2, \dots, ln_k . Σώσε την τιμή της στήλης που βρίσκονται οι κοινοί άσσοι ως cn .
4. Στον πίνακα $A(X)$ μηδένισε ολόκληρη τη στήλη cn εκτός από τα στοιχεία της που βρίσκονται στις γραμμές ln_1, ln_2, \dots, ln_k . Στη συνέχεια επέκτεινε τον πίνακα C και πρόσθεσε την τιμή cn , δηλαδή: $C = \begin{bmatrix} C & cn \end{bmatrix}$.
5. Ψάξε στην γραμμή cn του πίνακα $A(X)$ για δύο άσσους. Σώσε τις τιμές των στηλών στις οποίες βρίσκονται αυτοί οι άσσοι στις μεταβλητές cn_1, cn_2 .
6. Στον πίνακα $A(X)$ μηδένισε ολόκληρες τις στήλες cn_1, cn_2 εκτός από το στοιχείο στη γραμμή cn . Τέλος, επέκτεινε τον πίνακα C και πρόσθεσε τις τιμές cn_1, cn_2 , δηλαδή: $C = \begin{bmatrix} C & cn_1 & cn_2 \end{bmatrix}$.
7. Έλεγξε εάν $size(C) = size(A(X))$. Εάν δεν ισχύει η προηγούμενη σχέση επέστρεψε στο βήμα 3. Εάν ισχύει τότε έχει ολοκληρωθεί η διαδικασία και ο τελικός πίνακας που έχει παραχθεί είναι ο πίνακας του κατευθυνόμενου γράφου. Δηλαδή: $A(Y) = A(X)$.

Η προηγούμενη μεθοδολογία σε μορφή δομικού διαγράμματος-αλγορίθμου παρουσιάζεται και στο Σχ. 3.11. Έχοντας πλέον τον πίνακα $A(Y)$ μπορούμε να δημιουργήσουμε το γράφο που μας ενδιαφέρει. Η πληροφορία που εμπεριέχεται μέσα σε έναν τέτοιο γράφο και ο τρόπος αξιοποίησής της διαφαίνεται μέσα από τα παραδείγματα του επόμενου κεφαλαίου.



Σχήμα 3.11: Το δομικό διάγραμμα του αλγόριθμου που παράγει τον πίνακα $A(Y)$, δεδομένου του πίνακα $A(X)$.

Κεφάλαιο 4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΥΤΤΑΡΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ

Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα παρουσιαστούν διάφορα παραδείγματα απλών αλλά και σύνθετων ρομποτικών κυτταρικών δομών με βάση το ρομποτικό κύτταρο R-Cell έτσι ώστε να γίνουν πλήρως κατανοητά τα όσα αναφέρθηκαν στο 3^ο κεφάλαιο και να γίνουν εμφανή τα βασικά πλεονεκτήματα του κυττάρου που παρουσιάστηκε.

4.1 Παράδειγμα κινηματικής ανάλυσης κυτταρικής δομής

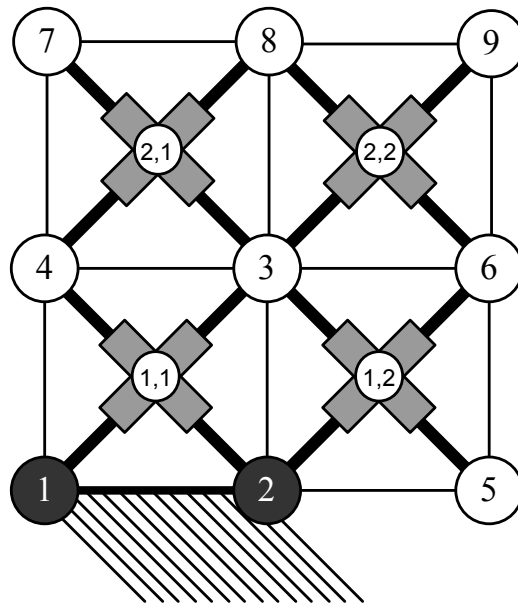
4.1.1 Πίνακας δομής και θεωρία γράφων

Πίνακας δομής και αρχικά δεδομένα

Έστω ότι έχουμε την κυτταρική δομή που φαίνεται στο Σχ. 4.1. Η ρομποτική κατασκευή αποτελείται από 4 R-Cells. Αξίζει να παρατηρήσουμε και τα ονόματα που έχουν δοθεί στα κύτταρα της δομής. Το κάθε όνομα αποτελείται από δύο αριθμούς που υποδηλώνουν το επίπεδο και τη στήλη που βρίσκεται το κάθε κύτταρο. *Για λόγους απλοποίησης θα θεωρήσουμε ότι κάθε κύτταρο είναι ένα τετράγωνο με μοναδιαία πλευρά χωρίς να χαλάει η γενικότητα.* Αυτό θα ισχύει για όλα τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν σε αυτό το κεφάλαιο.

Ο πίνακας δομής S θα είναι ο:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



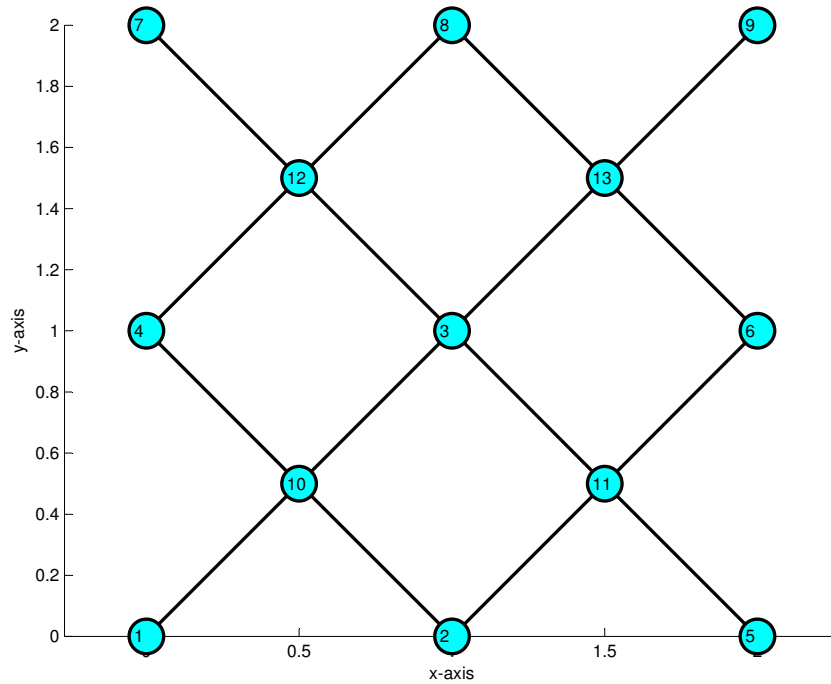
Σχήμα 4.1: Η απλή κυτταρική δομή του πρώτου παραδείγματος. Παρατηρούμε ότι κόμβοι εδάφους είναι οι κόμβοι 1 και 2.

Και φυσικά θα έχουμε $n = 4$ αφού η κατασκευή αποτελείται από 4 ρομποτικά κύτταρα. Επιλέγονται οι κόμβοι 1 και 2 ως κόμβοι εδάφους, άρα ως οι κόμβοι που θα στηρίξουν ολόκληρη την κατασκευή. Στο Σχ. 4.1 οι κόμβοι αυτοί φαίνονται με μαύρο χρώμα. Παρατηρούμε επίσης ότι όλοι οι κόμβοι της δομής είναι συνολικά 9. Άρα μένουν 7 ελεύθεροι κόμβοι που μεταφράζονται σε $2 \cdot 7 = 14$ β.ε. Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ακόμη ότι η δομή αποτελείται από δύο επίπεδα και από δύο στήλες, άρα $NL = NC = 2$.

Θεωρία γράφων

Ο απλός γράφος "X" της συγκεκριμένης δομής είναι αυτός που παρουσιάζεται στο Σχ. 4.2. Παρατηρούμε ότι στο γράφο έχουμε τους 9 κόμβους του συστήματος και τους 4 κεντρικούς κόμβους των κυττάρων, άρα **13 κόμβους συνολικά**.

Ο πίνακας $A(X)$ προκύπτει πολύ εύκολα παρατηρώντας το γράφο "X" στο Σχ. 4.2 και εφαρμόζοντας τη θεωρία των γράφων για τον πίνακα γειτνίασης.



Σχήμα 4.2: Ο απλός γράφος X για την δομή του Σχ. 4.1.

Προκύπτει:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη μεθοδολογία που περιγράφεται στο Σχ. 3.11 και στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορούμε με λίγα βήματα να κατασκευάσουμε τον αντίστοιχο πίνακα για τον κατευθυνόμενο γράφο Y. Τα διάφορα βήματα παρουσιάζονται στη συνέχεια.

- Πρώτα από όλα “διαβάζουμε” ότι οι κόμβοι εδάφους είναι οι 1 και 2. Συνεπώς έχουμε $fn_1 = 1$ και $fn_2 = 2$. Μηδενίζουμε ολόκληρες τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα $A(X)$ και σώζουμε τις τιμές στον πίνακα: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $A(X)$ είναι τώρα ο εξής:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε για τις τιμές του πίνακα C τις σειρές που έχουν κοινούς άσσους στην ίδια θέση. Ελέγχουμε δηλαδή τις γραμμές 1 και 2 και βλέπουμε ότι υπάρχει κοινός άσσος στη θέση 10. Οπότε $ln_1 = 1$ και $ln_2 = 2$, ενώ $cn = 10$. Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία στη στήλη 10 του πίνακα $A(X)$ εκτός από αυτά στις γραμμές 1 και 2. Επιπλέον ο πίνακας C θα γίνει: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $A(X)$ είναι τώρα ο εξής:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε στη γραμμή $cn = 10$ για δύο άσσοις. Βλέπουμε ότι οι άσσοι αυτοί είναι στις στήλες 3 και 4. Οπότε $cn_1 = 3$ και $cn_2 = 4$. Διαγράφουμε τις στήλες 3 και 4 του πίνακα εκτός από τα στοιχεία στη γραμμή 10. Ο πίνακας C θα είναι τώρα: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Και ο πίνακας $A(X)$:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη τερματισμού. Αφού δεν ισχύει συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία.
- Ελέγχουμε για τις τιμές του πίνακα C τις σειρές που έχουν κοινούς άσσοις στην ίδια θέση. Ελέγχουμε δηλαδή τις γραμμές 1, 2, 10, 3 και 4 και βλέπουμε ότι υπάρχει κοινός άσσος στη θέση 11 μεταξύ των γραμμών 2 και 3 (υπάρχει και στη θέση 12 μεταξύ των γραμμών 3 και 4, αλλά θα το εξετάσουμε μετά μας και δεν παίζει ρόλο η σειρά). Οπότε $ln_1 = 2$ και $ln_2 = 3$, ενώ $cn = 11$. Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία στη στήλη 11 του πίνακα $A(X)$ εκτός από αυτά στις γραμμές 2 και 3. Επιπλέον ο πίνακας C θα γίνει: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $A(X)$ φαίνεται στην επόμενη σελίδα.

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε στη γραμμή $cn = 11$ για δύο άσσους. Βλέπουμε ότι οι άσσοι αυτοί είναι στις στήλες 5 και 6. Οπότε $cn_1 = 5$ και $cn_2 = 6$. Διαγράφουμε τη στήλες 5 και 6 του πίνακα εκτός από τα στοιχεία στη γραμμή 11. Ο πίνακας C θα είναι τώρα: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Και ο πίνακας $A(X)$:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη τερματισμού. Αφού δεν ισχύει συνεχίζουμε.
- Ελέγχουμε για τις τιμές του πίνακα C τις σειρές που έχουν κοινούς άσσους στην ίδια θέση. Ελέγχουμε δηλαδή τις γραμμές 1, 2, 10, 3, 4, 11, 5 και 6 και βλέπουμε ότι υπάρχει κοινός άσσος στη θέση 12 μεταξύ των γραμμών 3 και 4. Οπότε $ln_1 = 3$ και $ln_2 = 4$, ενώ $cn = 12$.

Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία στη στήλη 12 του πίνακα $A(X)$ εκτός από αυτά στις γραμμές 3 και 4. Επιπλέον ο πίνακας C θα γίνει: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 & 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $A(X)$ είναι τώρα ο εξής:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε στη γραμμή $cn = 12$ για δύο άσους. Βλέπουμε ότι οι άσοι αυτοί είναι στις στήλες 7 και 8. Οπότε $cn_1 = 7$ και $cn_2 = 8$. Μηδενίζουμε τις στήλες 7 και 8 του πίνακα εκτός από τα στοιχεία στη γραμμή 12. Ο πίνακας C θα είναι τώρα: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 & 5 & 6 & 12 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη τερματισμού. Αφού δεν ισχύει συνεχίζουμε.

- Ελέγχουμε για τις τιμές του πίνακα C τις σειρές που έχουν κοινούς άσσους στην ίδια θέση. Ελέγχουμε δηλαδή τις γραμμές 1, 2, 10, 3, 4, 11, 5, 6, 12, 7 και 8 και βλέπουμε ότι υπάρχει κοινός άσσος στη θέση 13 μεταξύ των γραμμών 3, 6 και 8. Οπότε $ln_1 = 3$, $ln_2 = 6$ και $ln_3 = 8$, ενώ $cn = 13$. Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία στη στήλη 13 του πίνακα $A(X)$ εκτός από αυτά στις γραμμές 3, 6 και 8. Επιπλέον ο πίνακας C θα γίνει: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 & 5 & 6 & 12 & 7 & 8 & 13 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $A(X)$ είναι τώρα ο εξής:

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ελέγχουμε στη γραμμή $cn = 13$ για δύο άσσους. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν δύο άσσοι αλλά μόνο **ένας**³ που βρίσκεται στη στήλη 9. Οπότε $cn_1 = 9$. Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία στη στήλη 9 του πίνακα εκτός από το στοιχείο στη γραμμή 13. Ο πίνακας C θα είναι τώρα: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 & 5 & 6 & 12 & 7 & 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$.

³Από αυτό το γεγονός (ότι δηλαδή δεν βρίσκουμε δύο άσσους παρά μόνο έναν) συμπεραίνουμε ότι το κύτταρο που μελετάται εκείνη τη στιγμή **είναι κύτταρο της δεύτερης κατηγορίας**, δηλαδή με έναν μόνο ελεύθερο κόμβο. Για να βρούμε προφανώς πιο κύτταρο μελετάται εκείνη τη στιγμή αρκεί να κοιτάξουμε την τιμή του cn που θα μας δείξει τον κεντρικό κόμβο του κυττάρου που εξετάζεται.

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

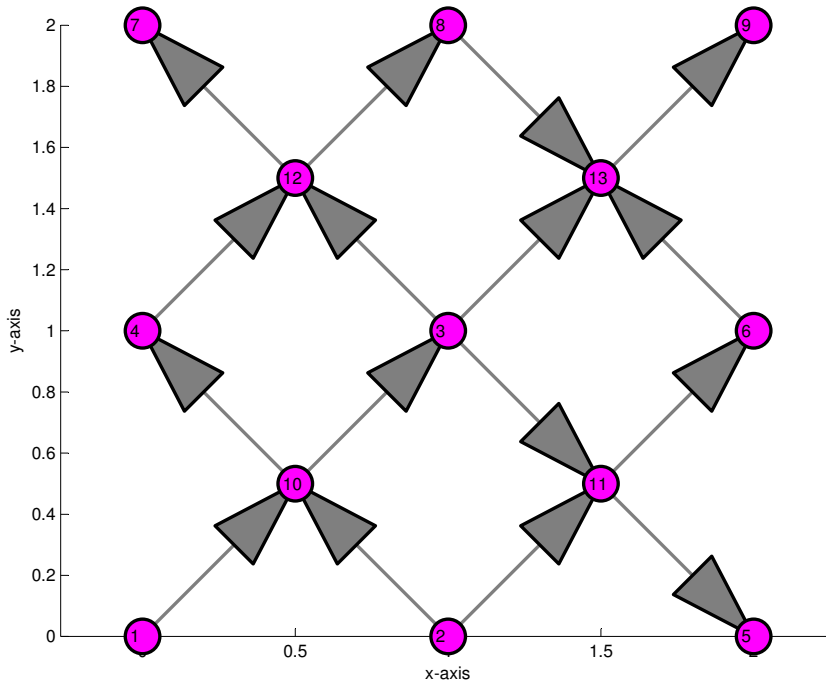
- Ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη τερματισμού. Αφού ισχύει η συνθήκη, μπορούμε να τερματίσουμε τη διαδικασία. Ο πίνακας που έχει παραχθεί είναι ο ζητούμενος. Δηλαδή ισχύει : $A(Y) = A(X)$.

Αφού πλέον έχουμε κατασκευάσει τον πίνακα $A(Y)$ μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε τον κατευθυνόμενο γράφο του συστήματος. Ο γράφος αυτός φαίνεται στο Σχ. 4.3.

$$A(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Χρήσιμα συμπεράσματα

Παρατηρώντας το Σχ. 4.3 του κατευθυνόμενου γράφου μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την δομή που μελετάμε. Τα συμπεράσματα αυτά παρουσιάζονται αναφορικά στη συνέχεια.



Σχήμα 4.3: Ο κατευθυνόμενος γράφος Υ για τη δομή του Σχ. 4.1.

- Παρατηρούμε αρχικά ότι τα βέλη στο γράφο ξεκινούν από τους κόμβους 1 και 2, γεγονός που υποδηλώνει ότι αυτοί οι δύο είναι οι επιλεγμένοι κόμβοι εδάφους.
- Παρατηρώντας τους κατευθυνόμενους γράφους κάθε κυττάρου (υπογράφοι) ξεχωριστά θα παρατηρήσουμε ότι δεν είναι όλοι όμοιοι. Αν προσέξουμε τους κεντρικούς κόμβους για όλα τα κύτταρα, θα παρατηρήσουμε ότι για τους κόμβους 10, 11 και 12 ισχύει:

$$\text{Αριθμός βελών προς τον κόμβο} = \text{Αριθμός βελών από τον κόμβο}$$

Αντίθετα για τον κεντρικό κόμβο 13, δεν ισχύει η παραπάνω σχέση. Υπάρχουν 3 βέλη που πηγαίνουν προς τον κόμβο και 1 μόνο βέλος που φεύγει από τον κόμβο. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα κύτταρα (1, 1), (1, 2) και (2, 1) είναι κύτταρα με 2 ελεύθερους κόμβους. Αντίθετα το κύτταρο (2, 2) είναι κύτταρο με έναν ελεύθερο κόμβο και μάλιστα τον ακριανό κόμβο 9. Μπορούμε λοιπόν με μία απλή παρατήρηση του κατευθυνόμενου γράφου της δομής να βγάλουμε συμπεράσματα για το είδος των κυττάρων.

Πίνακας 4.1: Ανάλυση κόμβων για την δομή του Σχ. 4.1.

Κύτταρο	Σταθεροί κόμβοι	Ελεύθεροι κόμβοι	Αριθμός β.ε.
(1,1)	$A \equiv 1, B \equiv 2$	$C \equiv 3, D \equiv 4$	4
(1,2)	$A \equiv 3, B \equiv 2$	$C \equiv 5, D \equiv 6$	4
(2,1)	$A \equiv 4, B \equiv 3$	$C \equiv 8, D \equiv 7$	4
(2,2)	$A \equiv 3, B \equiv 6, D \equiv 8$	$C \equiv 9$	2

- Λόγω της “μορφής” των γράφων μπορούμε να ορίσουμε σωστά τα ονόματα (A, B, C ή D) για τους κόμβους κάθε κυττάρου (όπως αυτά έχουν χρησιμοποιηθεί στην κινηματική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου). Με αυτόν τον τρόπο θα μπορέσουμε να επιλύσουμε σωστά την κινηματική. Η αντιστοίχιση των ονομάτων με τους αριθμούς των κόμβων για κάθε κύτταρο παρουσιάζεται στον Πιν. 4.1.
- Μια πολύ βασική πληροφορία που προκύπτει από τους κατευθυνόμενους γράφους είναι η σειρά “*ενεργοποίησης*” των κυττάρων, δηλαδή η σωστή σειρά με την οποία θα πρέπει να επιλέξει κάποιος τα κύτταρα έτσι ώστε να κάνει σωστά την κινηματική ανάλυση της δομής. Αυτό το στοιχείο προκύπτει από τον τελικό πίνακα C αν “διαβάσουμε” με τη σειρά τους κεντρικούς κόμβους. Δηλαδή θα “πάρουμε” από τον πίνακα αυτόν, μόνο τα στοιχεία που απευθύνονται σε κεντρικούς κόμβους διατηρώντας ταυτόχρονα την σειρά με την οποία αυτά εμφανίζονται σε αυτόν. Εδώ δηλαδή θα έχουμε: 10, 11, 12 και 13. Συνεπώς η σειρά με την οποία θα “ενεργοποιηθούν” τα κύτταρα θα είναι η εξής:
 1. “Κύτταρο (1,1)” (κεντρικός κόμβος 10)
 2. “Κύτταρο (1,2)” (κεντρικός κόμβος 11)
 3. “Κύτταρο (2,1)” (κεντρικός κόμβος 12)
 4. “Κύτταρο (2,2)” (κεντρικός κόμβος 13)
- Τέλος με τον πίνακα $A(Y)$ μπορούμε να αντλήσουμε και άλλες εξίσου σημαντικές πληροφορίες για το σύστημά μας. Μία από αυτές είναι η δυνατότητα υπολογισμού του αριθμού των διαφορετικών “μονοπατιών” με μήκος r που υπάρχουν για να πάμε από τον κόμβο u στον κόμβο v μέσα στον γράφο Y . Αυτό γίνεται απλά υπολογίζοντας το στοιχείο $(A^r)_{uv}$ του αντίστοιχου πίνακα A^r . Η τελευταία αυτή δυνατότητα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε αφενός τον αριθμό των μονοπατιών μήκους r από έναν

Πίνακας 4.2: Συντεταγμένες κόμβων για την δομή του Σχ. 4.1. σύμφωνα με την ΕΚΑ.

Κόμβος	Συντεταγμένες	Κόμβος	Συντεταγμένες
3	(1, 1)	7	(0, 2)
4	(0, 1)	8	(1, 2)
5	(2, 0)	9	(2, 2)
6	(2, 1)		

τυχαίο κόμβο (π.χ. έναν κόμβο εδάφους) μέχρι έναν επιθυμητό ακραίο κόμβο και αφετέρου το μήκος r δεδομένων μονοπατιών που ενώνουν δύο επιλεγμένους κόμβους.

4.1.2 Κινηματική ανάλυση

Ευθεία Κινηματική Ανάλυση της δομής

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού της ΕΚΑ της δομής. Όπως είπαμε κάθε κύτταρο θεωρείται ότι είναι τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, συνεπώς οι πρισματικές αρθρώσεις στην απαραμόρφωτη θέση θα έχουν τιμή:

$$q_A = q_B = q_C = q_D = \sqrt{2}/2$$

Επιλύοντας την ΕΚΑ για κάθε κύτταρο “σειριακά” χρησιμοποιώντας τις εξ. (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) για τα κύτταρα με δύο ελεύθερους κόμβους και τις εξ. (3.64), (3.65) για το κύτταρο με τον έναν ελεύθερο κόμβο μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την ευθεία κινηματική της δομής. Φυσικά θα ακολουθηθεί η σειρά που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και που προκύπτει από κατάλληλη επιλογή στοιχείων από τον πίνακα C . Οι συντεταγμένες των κόμβων όπως υπολογίζονται από της ΕΚΑ της δομής παρουσιάζονται στον Πιν. 4.2.

Αντίστροφη Κινηματική Ανάλυση της δομής

Η ΑΚΑ της δομής θα προκύψει πολύ εύκολα με χρήση των εξ. (3.78), (3.79), (3.80), (3.81). Προφανώς στην απαραμόρφωτη θέση θα δώσουμε τις θέσεις των κόμβων της κατασκευής, δηλαδή τα δεδομένα του πίνακα 4.2 και θα υπολογίσουμε οι τιμές των πρισματικών αρθρώσεων της δομής. Τελικά θα έχουμε για όλες τις πρισματικές αρθρώσεις:

$$q_A = q_B = q_C = q_D = \sqrt{2}/2$$

Διαφορική Κινηματική Ανάλυση της δομής

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ΔΚΑ της δομής. Θα παρουσιαστεί αναλυτικά η μεθοδολογία που ακολουθείται για την επίλυση της ΔΚΑ και τον υπολογισμό του πίνακα J , δηλαδή της **ιακωβιανής της δομής**. Λόγω περιορισμένου χώρου δε θα παρουσιαστεί η αναλυτική μορφή του πίνακα J , αλλά μόνο οι αναδρομικές σχέσεις που τον απαρτίζουν. Τέλος, θα υπολογιστεί ο πίνακας αυτός με χρήση σχετικού αλγορίθμου σε περιβάλλον Matlab για την απαραμόρφωτη κατάσταση της δομής.

Για να χτίσουμε την ιακωβιανή της δομής αρχικά δημιουργούμε ένα μηδενικό πίνακα με διαστάσεις 14×14 , έναν τετράγωνο πίνακα δηλαδή με γραμμές όσοι είναι και οι β.ε. της δομής. Εδώ όπως είπαμε οι βαθμοί ελευθερίας της δομής είναι 14 μιας και έχουμε συνολικά 7 ελεύθερους κόμβους. Θα μελετήσουμε κάθε κύτταρο ξεχωριστά και θα αναλύσουμε τη συνεισφορά που έχει το κάθε κύτταρο στην ιακωβιανή της δομής.

Κύτταρο (1,1)

Το κύτταρο (1,1) έχει δύο ελεύθερους κόμβους. Συνεπώς για να κάνουμε την ΔΚΑ, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εξ. (3.84), (3.85):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial f}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial f}{\partial q_C} \dot{q}_C + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_A} \dot{x}_A \\ \frac{\partial f}{\partial y_A} \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_B} \dot{x}_B \\ \frac{\partial f}{\partial y_B} \dot{y}_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial g}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial g}{\partial q_D} \dot{q}_D + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_A} \dot{x}_A \\ \frac{\partial g}{\partial y_A} \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_B} \dot{x}_B \\ \frac{\partial g}{\partial y_B} \dot{y}_B \end{bmatrix}$$

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα για απλοποίηση των εξισώσεων.

$$\frac{\partial f}{\partial q_A} = dfqa \quad (4.4) \qquad \frac{\partial g}{\partial q_A} = dgqa \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_B} = dfqb \quad (4.5) \qquad \frac{\partial g}{\partial q_B} = dgqb \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_C} = dfqc \quad (4.6) \qquad \frac{\partial g}{\partial q_D} = dgqd \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_A} = dfxa \quad (4.7) \qquad \frac{\partial g}{\partial x_A} = dgxa \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_A} = dfya \quad (4.8) \qquad \frac{\partial g}{\partial y_A} = dgya \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_B} = dfxb \quad (4.9) \qquad \frac{\partial g}{\partial x_B} = dgxb \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_B} = dfyb \quad (4.10) \qquad \frac{\partial g}{\partial y_B} = dgyb \quad (4.17)$$

Προφανώς για το συγκεκριμένο κύτταρο ισχύει ότι ${}^{(1,1)}\dot{\mathbf{p}}_A = 0$ και ${}^{(1,1)}\dot{\mathbf{p}}_B = 0$, αφού οι κόμβοι A και B για το κύτταρο αντιστοιχούν στους κόμβους 1 και 2 για το σύστημα που είναι οι κόμβοι εδάφους, άρα σταθεροί στο χώρο. Επίσης οι κόμβοι C και D του κυττάρου αντιστοιχούν στους κόμβους 3 και 4. Καταλήγουμε δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (dfqa)_{(1,1)} & (dfqb)_{(1,1)} & (dfqc)_{(1,1)} & 0 \\ (dfqa)_{(1,1)} & (dfqb)_{(1,1)} & (dfqc)_{(1,1)} & 0 \\ (dgqa)_{(1,1)} & (dgqb)_{(1,1)} & 0 & (dgqd)_{(1,1)} \\ (dgqa)_{(1,1)} & (dgqb)_{(1,1)} & 0 & (dgqd)_{(1,1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{(1,1)}\dot{q}_A \\ {}^{(1,1)}\dot{q}_B \\ {}^{(1,1)}\dot{q}_C \\ {}^{(1,1)}\dot{q}_D \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Κύτταρο (1,2)

Το κύτταρο (1,2) έχει δύο ελεύθερους κόμβους. Συνεπώς για να κάνουμε τη ΔΚΑ, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και πάλι τις εξ. (3.84), (3.85). Όμως εδώ ισχύει $A \equiv 3$ και $B \equiv 2$, αφού οι κόμβοι A και B του κυττάρου αντιστοιχούν στους κόμβους 3 και 2 του συστήματος, εκ των οποίων ο κόμβος 2

είναι κόμβος εδάφους, άρα σταθερός στο χώρο. Άρα προφανώς θα ισχύει: ${}^{(1,2)}\dot{\mathbf{p}}_B = 0$. Επίσης οι κόμβοι C και D του κυττάρου είναι αντίστοιχα οι κόμβοι 5 και 6 της δομής. Καταλήγουμε δηλαδή στις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = (dfqa)_{(1,2)} \cdot {}^{(1,2)}\dot{q}_A + (dfqb)_{(1,2)} \cdot {}^{(1,2)}\dot{q}_B + \\ + (dfqc)_{(1,2)} \cdot {}^{(1,2)}\dot{q}_C + \begin{bmatrix} (dfxa)_{(1,2)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dfya)_{(1,2)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = (dgqa)_{(1,2)} \cdot {}^{(1,2)}\dot{q}_A + (dgqb)_{(1,2)} \cdot {}^{(1,2)}\dot{q}_B + \\ + (dgqd)_{(1,2)} \cdot {}^{(1,2)}\dot{q}_D + \begin{bmatrix} (dgxa)_{(1,2)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dgya)_{(1,2)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Οι οποίες μπορούν εύκολα να γραφτούν σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (dfqa)_{(1,2)} & (dfqb)_{(1,2)} & (dfqc)_{(1,2)} & 0 \\ (dfqa)_{(1,2)} & (dfqb)_{(1,2)} & (dfqc)_{(1,2)} & 0 \\ (dgqa)_{(1,2)} & (dgqb)_{(1,2)} & 0 & (dgqd)_{(1,2)} \\ (dgqa)_{(1,2)} & (dgqb)_{(1,2)} & 0 & (dgqd)_{(1,2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{(1,2)}\dot{q}_A \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_B \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_C \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_D \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (dfxa)_{(1,2)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dfya)_{(1,2)} \cdot \dot{y}_3 \\ (dgxa)_{(1,2)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dgya)_{(1,2)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι η εξ. (4.21) εξαρτάται άμεσα από την εξ. (4.18).

Κύτταρο (2,1)

Το κύτταρο (2,1) έχει και αυτό δύο ελεύθερους κόμβους. Συνεπώς για να κάνουμε την ΔΚΑ, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πάλι τις εξ. (3.84), (3.85). Για το κύτταρο αυτό έχουμε $A \equiv 4$ και $B \equiv 3$, αφού οι κόμβοι A και B του κυττάρου αντιστοιχούν στους κόμβους 4 και 3 του συστήματος. Επίσης οι κόμβοι C και D του κυττάρου είναι αντίστοιχα οι κόμβοι 8 και 7 της δομής. Καταλήγουμε δηλαδή στις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_8 \\ \dot{y}_8 \end{bmatrix} = (dfqa)_{(2,1)} \cdot {}^{(2,1)}\dot{q}_A + (dfqb)_{(2,1)} \cdot {}^{(2,1)}\dot{q}_B + (dfqc)_{(2,1)} \cdot {}^{(2,1)}\dot{q}_C + \\ + \begin{bmatrix} (dfxa)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_4 \\ (dfya)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dfxb)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dfyb)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{y}_7 \end{bmatrix} = (dgqa)_{(2,1)} \cdot {}^{(2,1)}\dot{q}_A + (dgqb)_{(2,1)} \cdot {}^{(2,1)}\dot{q}_B + (dgqd)_{(2,1)} \cdot {}^{(2,1)}\dot{q}_D + \\ + \begin{bmatrix} (dgxa)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_4 \\ (dgya)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dgyb)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Οι οποίες μπορούν εύκολα να γραφτούν σε μητρωϊκή μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_8 \\ \dot{y}_8 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{y}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (dfqa)_{(2,1)} & (dfqb)_{(2,1)} & (dfqc)_{(2,1)} & 0 \\ (dfqa)_{(2,1)} & (dfqb)_{(2,1)} & (dfqc)_{(2,1)} & 0 \\ (dgqa)_{(2,1)} & (dgqb)_{(2,1)} & 0 & (dgqd)_{(2,1)} \\ (dgqa)_{(2,1)} & (dgqb)_{(2,1)} & 0 & (dgqd)_{(2,1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{(2,1)}\dot{q}_A \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_B \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_C \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_D \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (dfxa)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_4 \\ (dfya)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_4 \\ (dgxa)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_4 \\ (dgya)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dfxa)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dfya)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_3 \\ (dgxa)_{(2,1)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dgya)_{(2,1)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι η εξ. (4.24) εξαρτάται άμεσα από την εξ. (4.21), η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την εξ. (4.18).

Κύτταρο (2,2)

Το κύτταρο (2,2) έχει όπως έχουμε πει έναν ελεύθερο κόμβο. Για να κάνουμε την ΔΚΑ, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξ. (3.89). Για το κύτταρο αυτό έχουμε $A \equiv 3$, $B \equiv 6$ και $D \equiv 8$. Επίσης ο κόμβος C του κυττάρου αντιστοιχεί στον κόμβο 9 της δομής. Θα χρησιμοποιήσουμε δηλαδή την εξ.:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial h}{\partial q_C} \dot{q}_C + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_A} \dot{x}_A \\ \frac{\partial h}{\partial y_A} \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_B} \dot{x}_B \\ \frac{\partial h}{\partial y_B} \dot{y}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_D} \dot{x}_D \\ \frac{\partial h}{\partial y_D} \dot{y}_D \end{bmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα επόμενα σύμβολα για απλοποίηση των επόμενων εξισώσεων:

$$\frac{\partial h}{\partial q_B} = dhqb \quad (4.25) \quad \frac{\partial h}{\partial q_C} = dhqc \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_A} = dhxa \quad (4.27) \quad \frac{\partial h}{\partial y_A} = dhya \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_B} = dhxb \quad (4.29) \quad \frac{\partial h}{\partial y_B} = dhyb \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_D} = dhxd \quad (4.31) \quad \frac{\partial h}{\partial y_D} = dhyd \quad (4.32)$$

Οπότε οι εξισώσεις της ΔΚΑ για το κύτταρο που εξετάζουμε γίνονται:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_9 \\ \dot{y}_9 \end{bmatrix} &= (dhqb)_{(2,2)} \cdot {}^{(2,2)}\dot{q}_B + (dhqc)_{(2,2)} \cdot {}^{(2,2)}\dot{q}_C + \begin{bmatrix} (dhxa)_{(2,2)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dhya)_{(2,2)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} (dhxb)_{(2,2)} \cdot \dot{x}_6 \\ (dhyb)_{(2,2)} \cdot \dot{y}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dhxd)_{(2,2)} \cdot \dot{x}_8 \\ (dhyd)_{(2,2)} \cdot \dot{y}_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Και σε μητρώϊκή μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_9 \\ \dot{y}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (dhqb)_{(2,2)} & (dhqc)_{(2,2)} \\ (dhqb)_{(2,2)} & (dhqc)_{(2,2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{(1,2)}\dot{q}_B \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dhxa)_{(2,2)} \cdot \dot{x}_3 \\ (dhya)_{(2,2)} \cdot \dot{y}_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (dhxb)_{(2,2)} \cdot \dot{x}_6 \\ (dhyb)_{(2,2)} \cdot \dot{y}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dhxd)_{(2,2)} \cdot \dot{x}_8 \\ (dhyd)_{(2,2)} \cdot \dot{y}_8 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Έχουμε πλέον βρει τις αναλυτικές σχέσεις για την ΔΚΑ της δομής. Επιλύοντας με τη σειρά τις εξισώσεις (4.18), (4.21), (4.24), και (4.34) μπορούμε εύκολα να χτίσουμε τον πίνακα της ιακωβιανής της κατασκευής (14×14). Ο λόγος που πρέπει να λυθούν με τη σειρά οι εξισώσεις είναι επειδή η φύση των εξισώσεων είναι αναδρομική.

Για τον υπολογισμό του πίνακα της ιακωβιανής αναπτύχθηκε αλγόριθμος σε περιβάλλον Matlab. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα και στην κατάσταση της δομής που παρουσιάζεται στο Σχ. 4.1 (αρχική-απαραμόρφωτη κατάσταση) η ιακωβιανή όπως υπολογίζεται από τον αλγόριθμο παρουσιάζεται στην εξ. (4.35). Τέλος, η ΔΚΑ ολόκληρης της δομής υπολογίζεται από την εξ. (4.40).

$$J = \begin{bmatrix} {}^1J & {}^2J \\ {}^3J & {}^4J \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

όπου:

$${}^1J = \begin{bmatrix} 0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4142 & -0.7071 & 0 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 0.7071 & 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -1.4142 & -0.7071 & 0 & 0.7071 & 1.4142 & 0.7071 \\ -0.7071 & 1.4142 & -0.7071 & 0 & -0.7071 & 1.4142 & -0.7071 \\ 0 & -2.8284 & 0 & 0 & 1.4142 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$${}^2J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$${}^3J = \begin{bmatrix} 0 & 2.8284 & 0 & 0 & -1.4142 & 0.7071 & 0 \\ 1.4142 & -2.1213 & 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 2.1213 & 0 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1213 & -1.4142 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1213 & 1.4142 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & -4.2426 & 0 & 0 & 2.8284 & 0.3536 & 0 \\ 0.7071 & 4.2426 & 0 & 0 & -2.8284 & 0.3536 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$${}^4J = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 & -0.7071 & 0 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0.7071 & 0 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0.3536 & 0 & -1.4142 & 0.7071 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0.3536 & 0 & 1.4142 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Και φυσικά για ολόκληρη τη δομή ισχύει :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{y}_6 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{y}_8 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{y}_7 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{y}_9 \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} {}^{(1,1)}\dot{q}_A \\ {}^{(1,1)}\dot{q}_B \\ {}^{(1,1)}\dot{q}_C \\ {}^{(1,1)}\dot{q}_D \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_A \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_B \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_C \\ {}^{(1,2)}\dot{q}_D \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_A \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_B \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_C \\ {}^{(2,1)}\dot{q}_D \\ {}^{(2,2)}\dot{q}_B \\ {}^{(2,2)}\dot{q}_C \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

4.2 Παραδείγματα παραμόρφωσης κυτταρικών δομών

Τα επόμενα δύο παραδείγματα θα δώσουν μία πιο πλήρη εικόνα για τις δυνατότητες παραμόρφωσης των ρομποτικών κυτταρικών δομών. Για την παρουσίαση των δυνατοτήτων παραμόρφωσης του συστήματος επιλύθηκε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, έτσι ώστε να ισομοιραστεί η παραμόρφωση των κυττάρων και να μην παραμείνει συγκεντρωμένη σε λίγα κύτταρα. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη συνάρτηση κόστους, η οποία λαμβάνει υπόψη τις παραμορφώσεις που δέχονται οι πρισματικές αρθρώσεις όλων των κυττάρων:

$$f(q) = \sum_{i=1}^n [({}^i q_A - {}^i q_A^{initial})^2 + ({}^i q_B - {}^i q_B^{initial})^2 + ({}^i q_C - {}^i q_C^{initial})^2 + ({}^i q_D - {}^i q_D^{initial})^2] \quad (4.41)$$

Ταυτόχρονα το πρόβλημα βελτιστοποίησης πρέπει να λαμβάνει υπόψη του κάποιους βασικούς κινηματικούς περιορισμούς (ανισοτικούς ή ισοτικούς), που θα περιγράφονται με την παρακάτω μορφή:

$$c(q) \leq 0$$

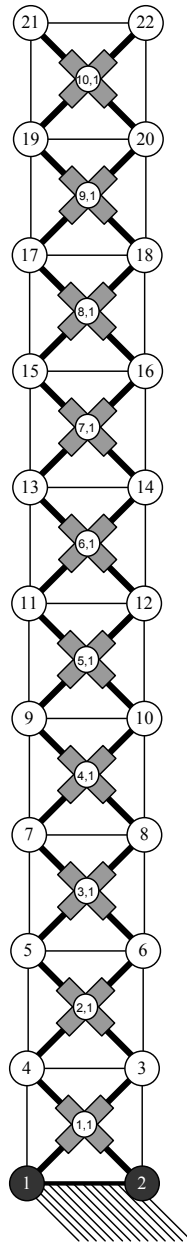
$$c_{eq}(q) = 0$$

Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση βελτιστοποίησης “*fmincon*” από το Matlab.

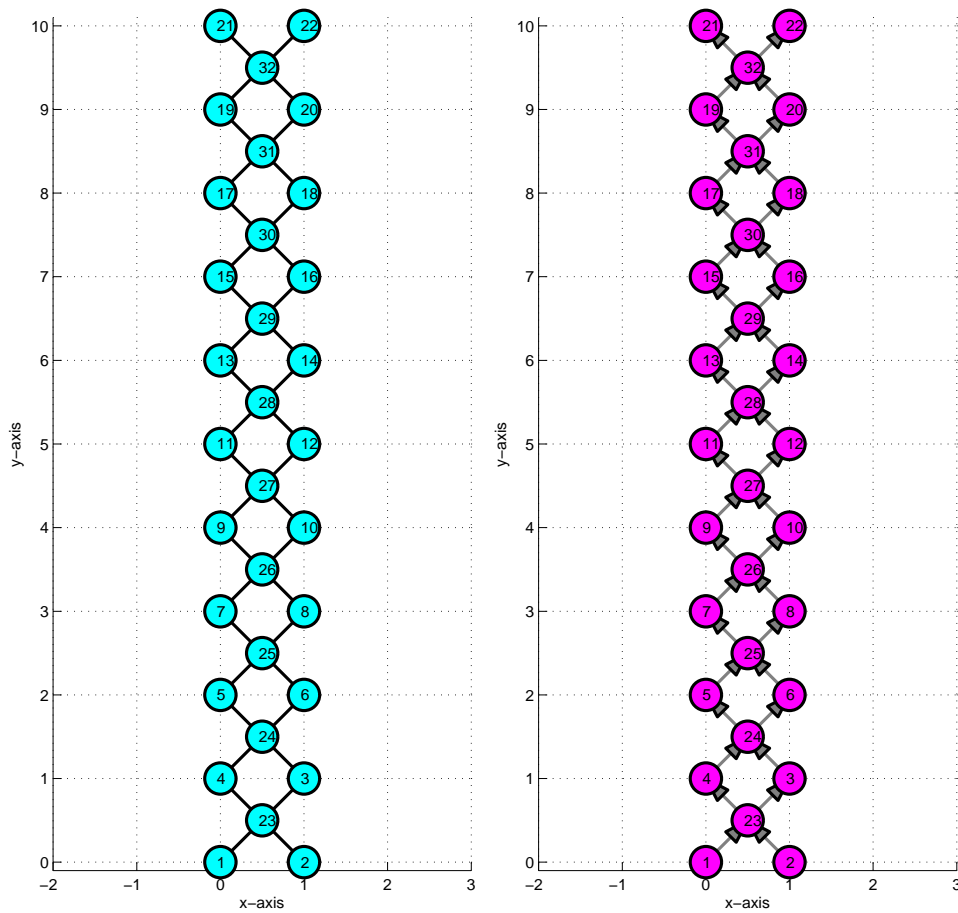
4.2.1 Πρώτο παράδειγμα παραμόρφωσης ρομποτικής κυτταρικής δομής

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα παραμόρφωσης της ρομποτικής κυτταρικής δομής που παρουσιάζεται στο Σχ. 4.4. Παρατηρούμε ότι η δομή αποτελείται από $n = 10$ ρομποτικά κύτταρα σε 10 επίπεδα ($NL = 10$) και μόνο μία στήλη ($NC = 1$). Η δομή μας αποτελείται από 22 κόμβους, εκ των οποίων μόνο οι 20 είναι ελεύθεροι. Έτσι έχουμε συνολικά 40 β.ε. Οι γράφοι του συστήματος παρουσιάζονται στο Σχ. 4.5.

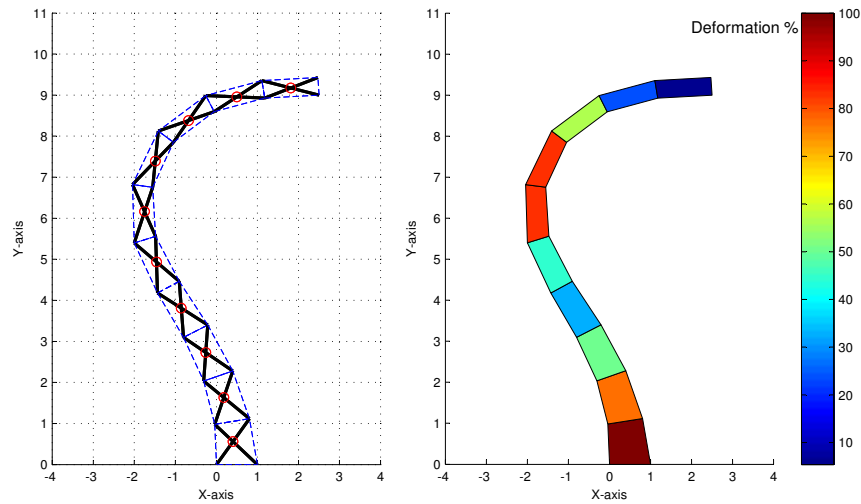
Οι περιορισμοί που επιβάλλουμε στο σύστημα ακολουθούν στη συνέχεια και αφορούν τη θέση των κόμβων 22 και 11. Οι αρχικές θέσεις και οι αντίστοιχες συντεταγμένες των κόμβων μπορούν να φανούν από απλή παρατήρηση των γράφων του συστήματος.



Σχήμα 4.4: Η κυτταρική δομή για το πρώτο παράδειγμα παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι κόμβοι εδάφους είναι οι κόμβοι 1 και 2.



Σχήμα 4.5: Ο απλός και ο κατευθυνόμενος γράφος για την δομή του Σχ. 4.4.



Σχήμα 4.6: Η παραμόρφωση της δομής για το πρώτο παράδειγμα.

$$x(22) = 2.5$$

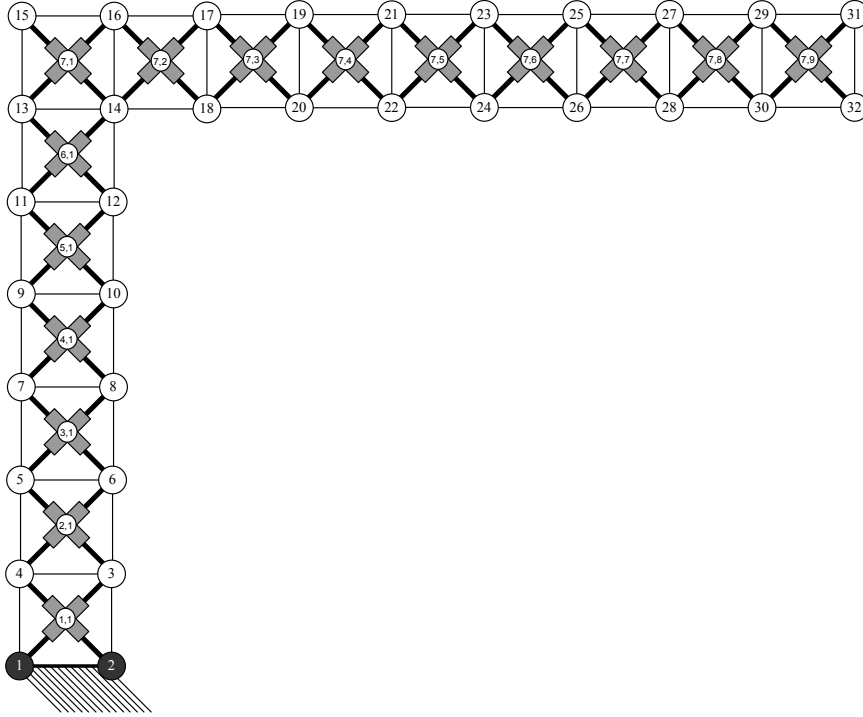
$$x(11) = -2$$

$$y(22) \leq 9$$

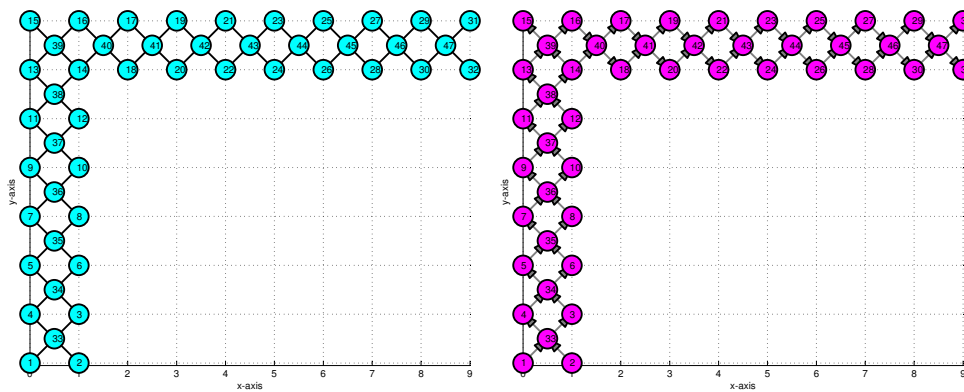
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχ. 4.6. Αξίζει να παρατηρήσουμε την έντονη παραμόρφωση και αλλαγή της γεωμετρίας όλης της δομής για να μπορέσει το ρομποτικό κυτταρικό σύστημα να καλύψει όλες τις απαιτήσεις που θέσαμε στο πρόβλημα.

4.2.2 Δεύτερο παράδειγμα παραμόρφωσης ρομποτικής κυτταρικής δομής

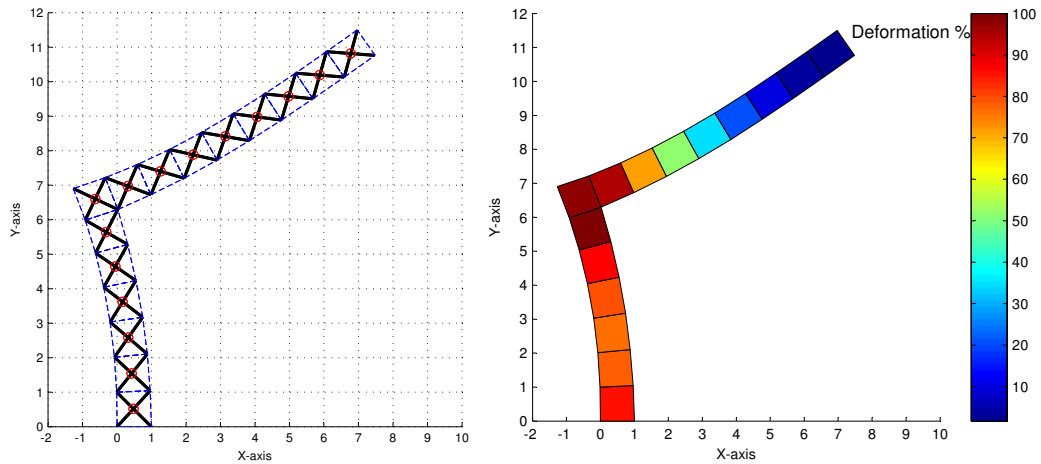
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ακόμα ένα παράδειγμα παραμόρφωσης της ρομποτικής κυτταρικής δομής που παρουσιάζεται στο Σχ. 4.7. Η δομή αποτελείται από $n = 15$ ρομποτικά κύτταρα σε 7 επίπεδα ($NL = 7$) και 9 στήλες ($NC = 9$). Η δομή μας αποτελείται από 32 κόμβους, εκ των οποίων οι 30 είναι ελεύθεροι. Έτσι έχουμε συνολικά 60 β.ε. Οι γράφοι της δομής φαίνονται στο Σχ. 4.8.



Σχήμα 4.7: Η κυτταρική δομή για το δεύτερο παραδείγμα παραμόρφωσης. Παρατηρούμε ότι κόμβοι εδάφους είναι οι κόμβοι 1 και 2.



Σχήμα 4.8: Ο απλός και ο κατευθυνόμενος γράφος για την δομή του Σχ. 4.7.



Σχήμα 4.9: Η παραμόρφωση της δομής για το πρώτο παράδειγμα.

Ο περιορισμός που επιβάλλουμε στο σύστημα σε αυτήν την περίπτωση είναι ο εξής και αφορά στη θέση του κόμβου 31:

$$y(31) = 11.5$$

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχ. 4.9. Τέλος στο Σχ. 4.10 παρουσιάζονται τα ενδιάμεσα στάδια από την αρχική στην τελική θέση της δομής. Και εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προσαρμόστηκε ολόκληρη η δομή στις συνθήκες που επιβάλαμε.

4.3 Δυνάμεις σε ρομποτικές κυτταρικές δομές

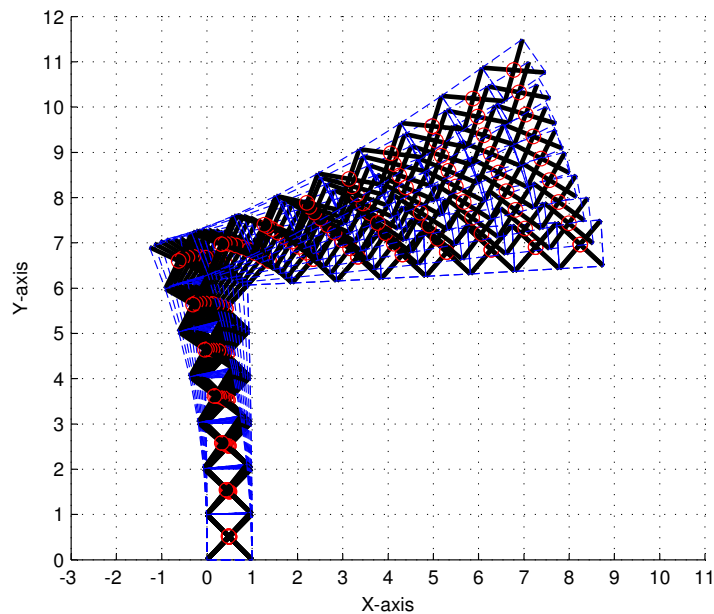
4.3.1 Παράδειγμα υπολογισμού δυνάμεων

Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα αναπτύξουμε τη μεθοδολογία που ακολουθείται για τον υπολογισμό των δυνάμεων στο εσωτερικό δεδομένης δομής, σε περίπτωση που αυτή η δομή δέχεται ή ασκεί δυνάμεις στο περιβάλλον. Προφανώς η ανάλυση που θα παρουσιάσουμε είναι *στατική*.

Έχοντας τον πίνακα της ιακωβιανής J της δομής, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή των εσωτερικών στη δομή δυνάμεων (τ) με την επόμενη σχέση:

$$\tau = J^T(q) \cdot \gamma \quad (4.42)$$

όπου: τ είναι ένα διάνυσμα ($m \times 1$) των εσωτερικών δυνάμεων και γ είναι



Σχήμα 4.10: Η παραμόρφωση της δομής για το δεύτερο παράδειγμα και διάφορα ενδιάμεσα στάδια.

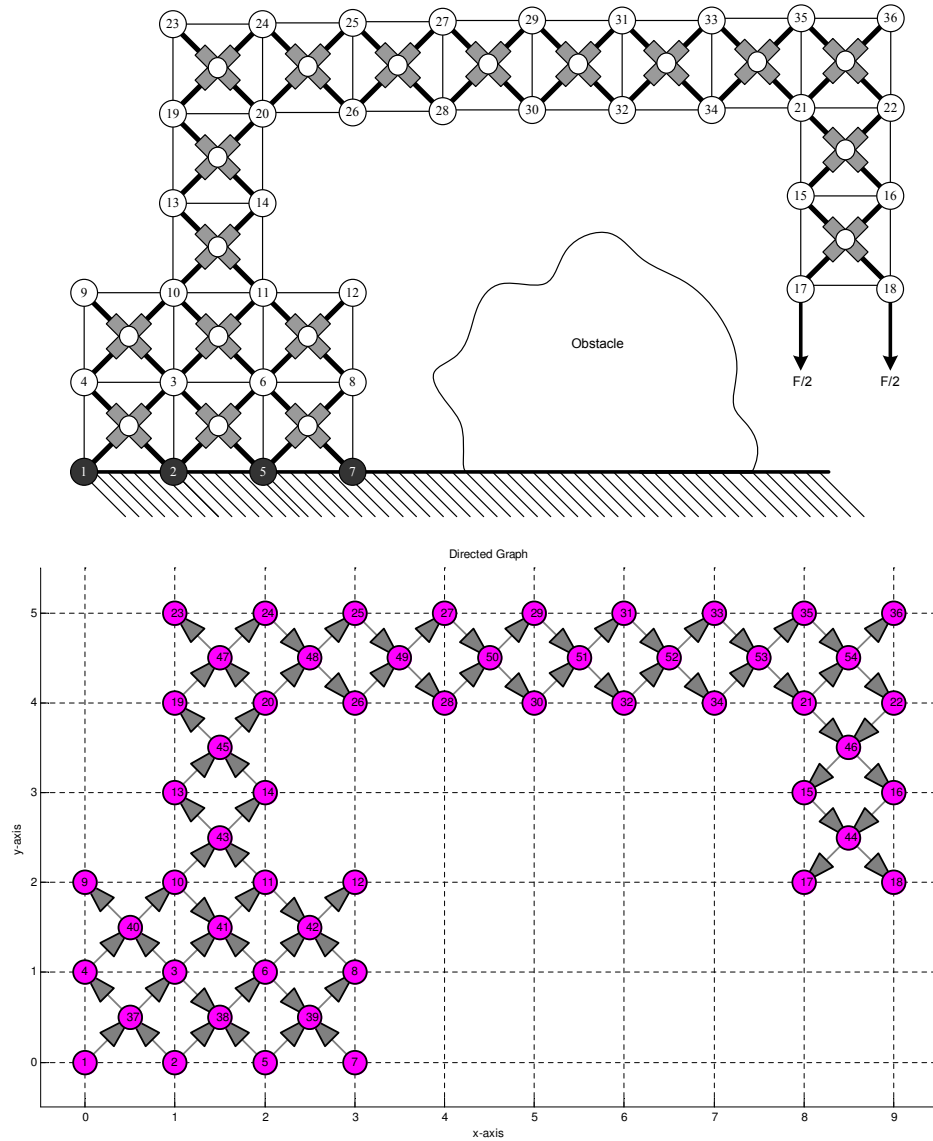
ένα διάνυσμα ($m \times 1$) των εξωτερικών δυνάμεων (ασκούμενων σε κόμβους). Τέλος αναφέρουμε ότι m είναι οι β.ε. της δομής.

Έστω ότι έχουμε τη δομή που φαίνεται στο Σχ. 4.11. Η δομή αυτή είναι σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να ξεπεράσει το εμπόδιο που βρίσκεται μπροστά της και να ασκεί μία συγκεκριμένη δύναμη από την άλλη πλευρά. Για τις ανάγκες της ανάλυσης θεωρούμε ότι η δύναμη αυτή F είναι μοναδιαία, δηλαδή ισχύει $F = 1$. Η μέση τιμή των εσωτερικών δυνάμεων σε κάθε κύτταρο (δυνάμεις στις πρισματικές αρθρώσεις) παρουσιάζεται με χρώμα στο Σχ. 4.12.

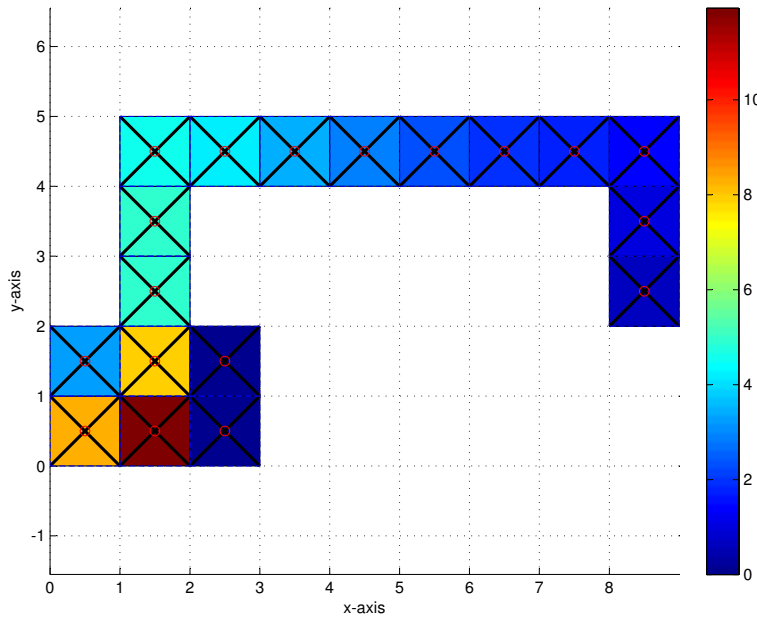
4.3.2 Αντίδραση ρομποτικής κυτταρικής δομής σε εξωτερικές συνθήκες

Έστω ότι έχουμε τη ρομποτική κυτταρική δομή του Σχ. 4.13. Η κατασκευή αυτή με τη φόρτιση που φαίνεται στο ίδιο σχήμα ($F = 1$) μοιάζει με το κλασικό πρόβλημα δοκού σε κάμψη. Μόλις ασκείται η δύναμη στον κόμβο 16 παρατηρούμε την κατανομή των δυνάμεων σε κάθε κύτταρο όπως φαίνεται στο Σχ. 4.14.

Παρατηρώντας τις δυνάμεις στις πρισματικές αρθρώσεις της δομής θα δούμε ότι είναι αρκετά μεγάλες σε σχέση με την δύναμη που ασκήθηκε στον



Σχήμα 4.11: Η δομή για το παράδειγμα υπολογισμού δύναμης [επάνω] και ο αντίστοιχος κατευθυνόμενος γράφος [κάτω].



Σχήμα 4.12: Η κατανομή των δυνάμεων στο εσωτερικό τη δομής. Με χρώμα παρουσιάζεται η μέση τιμή των δυνάμεων σε κάθε κύτταρο.

κόμβο. Αυτό συμβαίνει επειδή η δύναμη είναι καμπτική, ενώ οι αρθρώσεις του κυττάρου μπορούν να δεχθούν μόνο αξονικά φορτία. **Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δυνατότητες παραμόρφωσης της δομής για να προσαρμόσουμε την δομή καλύτερα στην εξωτερική φόρτιση.** Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

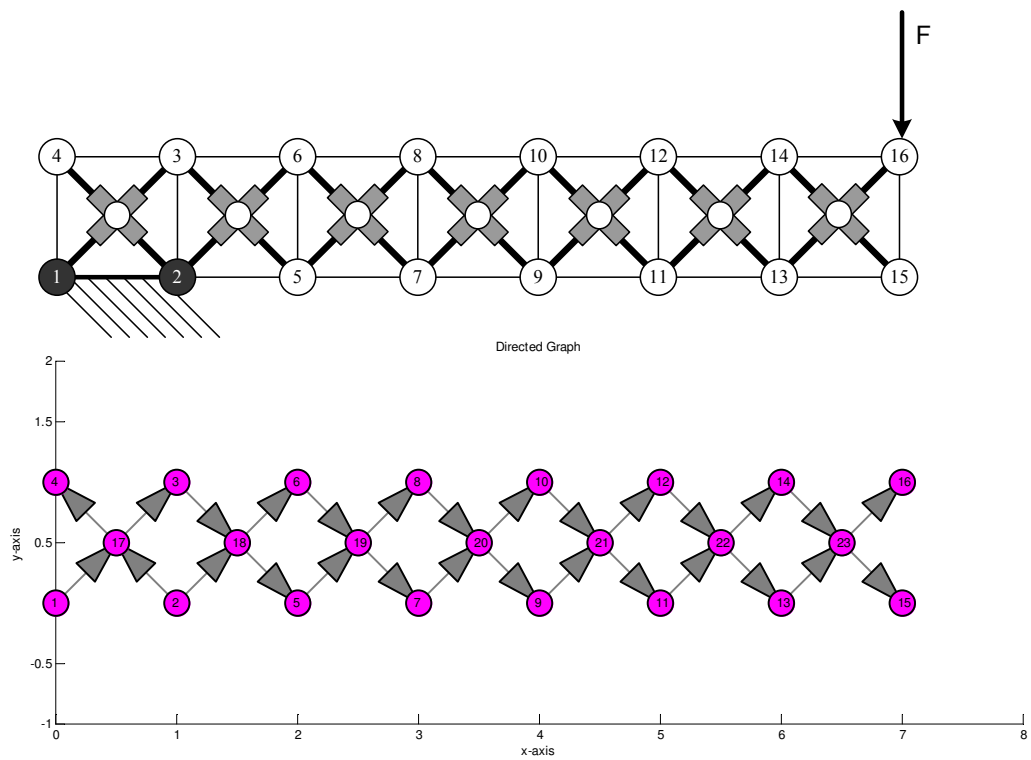
$$V = \gamma^T J J^T \gamma + \sum_{i=1}^n C \left(\frac{1}{(\theta_i - \theta_{\min})} + \frac{1}{(\theta_{\max} - \theta_i)} \right) \quad (4.43)$$

όπου $C > 0$ είναι μία σταθερά, θ_{\min} και θ_{\max} είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή για την γωνία θ αντίστοιχα και οι τιμές αυτές εξαρτώνται από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του μηχανικού κυττάρου. Ο πρώτος όρος στην προηγούμενη σχέση περιγράφει την επίδραση των εσωτερικών δυνάμεων στην τελική τιμή της συνάρτησης κόστους, ενώ ο δεύτερος όρος χρησιμεύει για να “κρατήσει” τη γωνία μέσα στα επιθυμητά όρια.

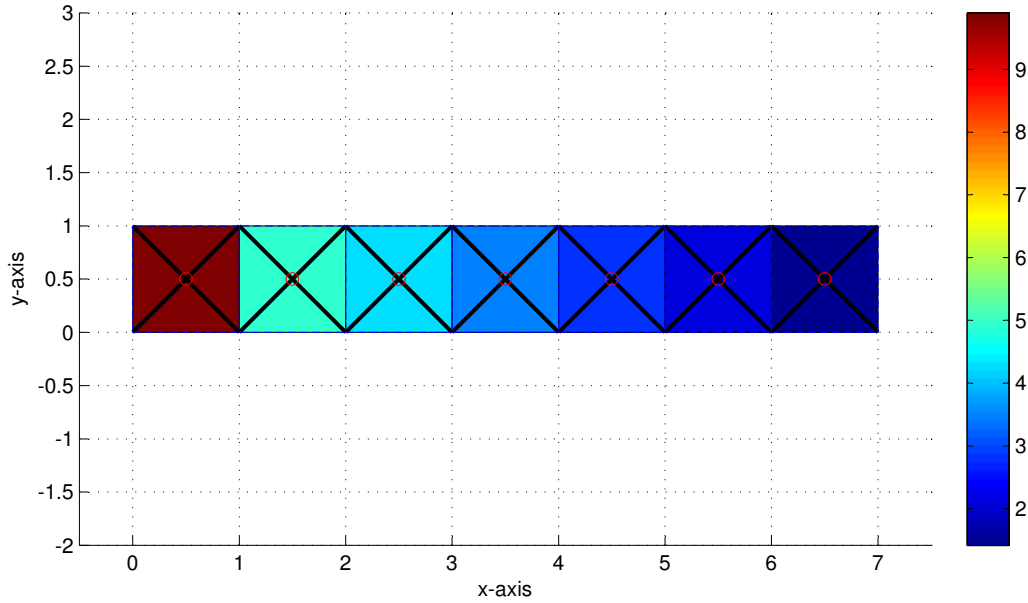
Αν μοντελοποιήσουμε την κατάσταση της ρομποτικής μας δομής χρησιμοποιώντας το διάνυσμα \mathbf{q} με διάσταση $m \times 1$, τότε μπορούμε να έχουμε το ακόλουθο μοντέλο:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}$$

όπου \mathbf{u} είναι το διάνυσμα $m \times 1$ του νόμου ελέγχου που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να ελέγξουμε όλες τις απαραίτητες πρισματικές αρθρώσεις



Σχήμα 4.13: Η δομή για το παράδειγμα αντίδρασης σε εξωτερικές συνθήκες [επάνω] και ο αντίστοιχος κατευθυνόμενος γράφος [κάτω].



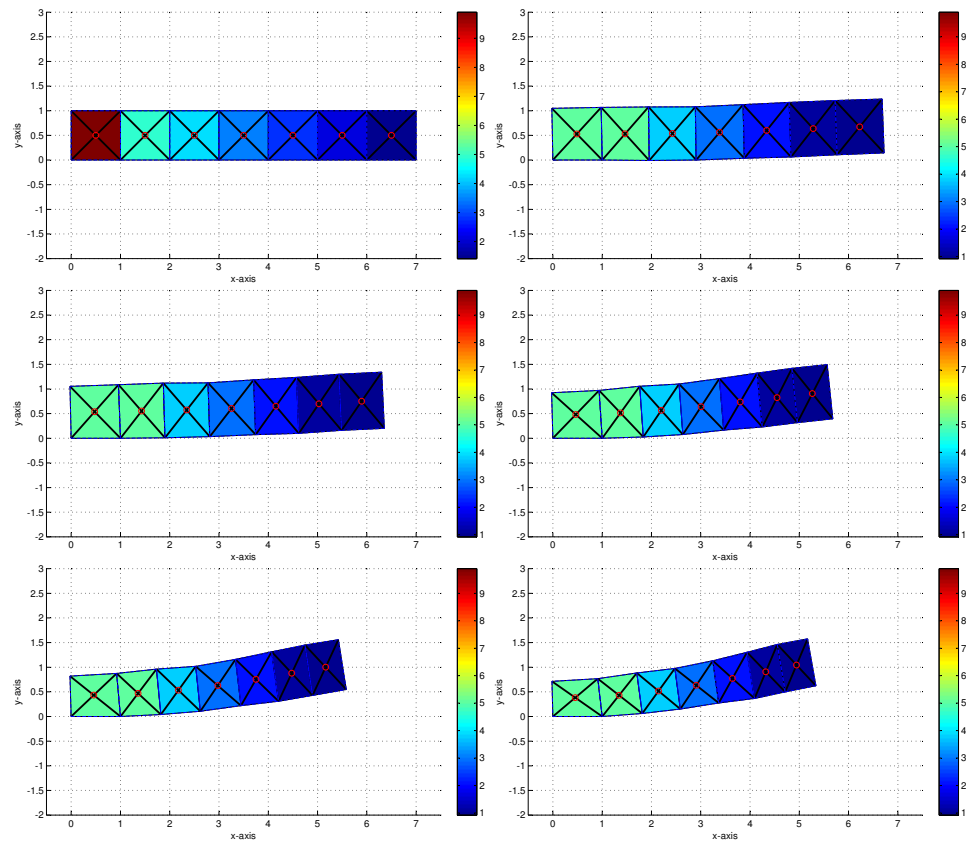
Σχήμα 4.14: Κατανομή των δυνάμεων στο εσωτερικό της δομής του Σχ. 4.13. Η μέγιστη τιμή για την δύναμη κάθε κυττάρου παρουσιάζεται με χρώμα.

της κατασκευής. Χρησιμοποιώντας έναν νόμο ελέγχου της ακόλουθης μορφής:

$$u_i = \begin{cases} -K\nabla_i V & \begin{cases} q_{\min} < q_i < q_{\max} \\ q_i \leq q_{\min} \wedge (-\nabla_i V > 0) \\ q_i \geq q_{\max} \wedge (\nabla_i V > 0) \\ elsewhere \end{cases} \\ 0 & \end{cases} \quad (4.44)$$

για $i = 1 \dots m$. Με τον συγκεκριμένο νόμο ελέγχου θα μπορούσαμε να κάνουμε την κατασκευή μας να “αντιδράσει” στις εξωτερικές συνθήκες και να την οδηγήσουμε τελικά σε μία νέα κατάσταση, θεωρητικά “καλύτερη” από την αρχική. Ως καλύτερη θεωρούμε μία κατάσταση στην οποία η ρομποτική κυτταρική δομή θα καταπονείται λιγότερο εσωτερικά. Χρησιμοποιήθηκαν τα εξής όρια για τις τιμές των αρθρώσεων και τη γωνία θ :

$$\begin{aligned} q_{\min} &= 0.75 \cdot q^{initial} \\ q_{\max} &= 1.25 \cdot q^{initial} \\ \theta_{\min} &= \theta^{initial} - 60^\circ = 30^\circ \\ \theta_{\max} &= \theta^{initial} + 60^\circ = 150^\circ \end{aligned}$$



Σχήμα 4.15: Οι διάφορες ενδιάμεσες φάσεις κατά τη φάση της αντίδρασης της ρομποτικής δομής στις εξωτερικές φορτίσεις.

Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του συγκεκριμένου νόμου ελέγχου παρουσιάζονται στο Σχ. 4.15. Αξίζει να σημειώσουμε το πόσο μειώνεται η μέση τιμή των εσωτερικών δυνάμεων στα κύτταρα σταδιακά. Η τελική μείωση είναι της τάξης του 50%.

Κεφάλαιο 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ & ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζονται τα συμπεράσματα και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παρούσα εργασία. Επίσης προτείνουμε κάποιες κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα, που θα μπορέσουν να οδηγήσουν την θεωρητική ανάλυση ένα βήμα πιο μπροστά αλλά και να βοηθήσουν στην υλοποίηση/κατασκευή του ρομποτικού κυττάρου R-Cell.

5.1 Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε το ρομποτικό κύτταρο *R-Cell* και οι ιδιότητές του. Το ρομποτικό αυτό κύτταρο μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία ενός νέου κυτταρικού ρομποτικού συστήματος με πολλές δυνατότητες. Οι δυνατότητες του τελικού συστήματος προέρχονται από τις δυνατότητες του κυττάρου, το οποίο έχει σχεδιασθεί σε μορφή “X” και περιλαμβάνει 4 πρισματικές και 5 περιστροφικές αρθρώσεις. Οι πρισματικές αρθρώσεις είναι υπεύθυνες για τις δυνατότητες παραμόρφωσης του κυττάρου, ενώ κάποιες από τις περιστροφικές είναι υπεύθυνες για τη μετακίνησή του. Η τελική ρομποτική δομή, πέραν των *δυνατοτήτων παραμόρφωσης* που έχει λόγω των αντίστοιχων ικανοτήτων του δομικού της στοιχείου, του ρομποτικού κυττάρου, έχει δυνατότητες *αυτόματης συναρμολόγησης* και *αυτόματης επιδιόρθωσης*.

Το ρομποτικό μας σύστημα θα μπορούσε να έχει πολλές εφαρμογές. Μία από αυτές θα μπορούσε να είναι η λειτουργία σε περιβάλλον που δε μπορεί να μεταβεί άνθρωπος είτε γιατί δεν υπάρχει διαθέσιμος χώρος, είτε γιατί μπορεί κάτι τέτοιο να είναι επικίνδυνο για τον ίδιο. Το κυτταρικό ρομποτικό σύστημα μπορεί όμως να μετακινηθεί στην επιθυμητή τοποθεσία, να αυτο-

συναρμολογηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να επιτελέσει τη λειτουργία που του ζητείται και στο τέλος να αποσυναρμολογηθεί στα δομικά του στοιχεία και να επιστρέψει στη βάση του. Επίσης, η δυνατότητα του συστήματος να αλλάζει τη μορφολογία της δομής του, του επιτρέπει να μπορεί να εκτελεί πολλές διαφορετικές λειτουργίες και να αναλαμβάνει πολλά, διαφορετικού είδους, καθήκοντα, που ένα απλό ρομπότ λόγω των “πεπερασμένων” ικανοτήτων του δεν θα μπορούσε ποτέ να εκτελέσει.

5.2 Συμπεράσματα

Το ρομποτικό κύτταρο που σχεδιάστηκε και αναλύθηκε έχει πάρα πολλές ικανότητες, όπως ικανότητες αυτόματης συναρμολόγησης και αυτόματης επιδιόρθωσης. Η βασική όμως ικανότητα που έχει και το κάνει να ξεχωρίζει από άλλα αντίστοιχα κύτταρα άλλων ερευνητών, είναι η δυνατότητα της παραμόρφωσης. Στην πραγματικότητα υπάρχουν και άλλα κύτταρα, τα οποία έχουν σχεδιασθεί για να παραμορφώνονται και το πιο χαρακτηριστικό από αυτά είναι το “Metamorphic Robot” [6], ένα σύστημα αποτελούμενο από έξι συνδέσμους σε σχήμα εξαγώνου οδηγούμενους από σερβοκινητήρες (Σχ. 1.4) και το οποίο παρουσιάστηκε και στο κεφάλαιο 1. Όλα όμως τα κύτταρα αυτής της κατηγορίας χρησιμοποιούν αυτή τη δυνατότητα παραμόρφωσης-αλλαγής του εξωτερικού τους σχήματος για να επιτύχουν *μετακίνηση*, δηλαδή να μπορούν να κινούνται σε σχέση με άλλα παρόμοια ρομποτικά κύτταρα. Το ρομποτικό όμως κύτταρο που παρουσιάστηκε σε αυτήν την εργασία έχει ανεξαρτησία μεταξύ των δύο λειτουργιών μετατόπιση-παραμόρφωση. Στο συγκεκριμένο κύτταρο η παραμόρφωση έχει ως μοναδικό σκοπό την άσκηση δυνάμεων στο εξωτερικό περιβάλλον του συστήματος, κάτι τελείως καινούριο και πρωτοποριακό για την κυτταρική ρομποτική. Επίσης παρατηρήσαμε μέσα από τα παραδείγματα του κεφαλαίου 4 τον τρόπο με τον οποίο μπορεί ένα τέτοιο ρομποτικό κυτταρικό σύστημα να “προσαρμοστεί” σε εξωτερικές συνθήκες (φορτίσεις). Με την παραμόρφωση που είναι δυνατό να κάνει, μπορεί το τελικό σύστημα να οδηγείται σε μικρότερες καταπονήσεις και συνεπώς να “αντέχει” σε μεγαλύτερα φορτία.

Στην πραγματικότητα η μηχανολογική σχεδίαση του κυττάρου στην εργασία αυτή δεν είναι λεπτομερής και σε καμία περίπτωση δε μπορεί να χαρακτηριστεί ως τελική. Έγινε απλά μια σχεδίαση που θα μπορούσε να λύσει σε πρώτη φάση το πρόβλημα. Η θεωρητική όμως ανάλυση που έγινε μπορεί να θεωρηθεί επαρκής σε αυτό το πρώτο στάδιο. Επιπλέον μπορούμε να πούμε ότι ο **αρχικός στόχος επιτεύχθηκε** μιας και η σχεδίαση που έγινε και η θεωρητική ανάλυση που ακολούθησε ικανοποίησαν όλες τις ανάγκες και τους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Το πρώτο βήμα που ίσως πρέπει να γίνει είναι μια πιο λεπτομερής σχεδίαση του ρομποτικού κυττάρου R-Cell. Γι' αυτό το σκοπό εργάζεται η ομάδα του Εργαστηρίου Αυτομάτου Ελέγχου αυτή τη στιγμή, έτσι ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν πιο σύντομα στα χέρια μας το πρώτο ρομποτικό κύτταρο R-Cell.

Μία ενδιαφέρουσα πρόταση για μελλοντική έρευνα είναι η επίλυση του βασικού **προβλήματος της σύνδεσης**, δηλαδή του προβλήματος αναζήτησης του βέλτιστου σχήματος και της καλύτερης δυνατής μορφολογίας μιας ρομποτικής κυτταρικής δομής για την εκτέλεση δεδομένων εργασιών με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Αναζητούμε δηλαδή από την αρχή την ρομποτική δομή που θα μας δώσει συγκεκριμένη λειτουργικότητα στο τέλος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα φαίνεται ιδιαίτερα ενδιαφέρον και εάν και εφόσον λυθεί δεν θα χρειάζεται πλέον ο χρήστης να επιλέγει το σχήμα και τη μορφή της ρομποτικής δομής από μόνος του, παρά θα εισάγει στο σύστημα τα χαρακτηριστικά της εργασίας που θέλει να εκτελέσει και πιθανόν και τους περιορισμούς που διέπουν το πρόβλημα και το ίδιο το σύστημα θα *“αποφασίζει”* ποια είναι η μορφή που θα κάνει με τον καλύτερο τρόπο την δουλειά που ζητά ο χρήστης. Φυσικά, για να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει να προχωρήσει και να *“ωριμάσει”* αρκετά ακόμη η θεωρητική ανάλυση του ρομποτικού κυττάρου και της δομής αντίστοιχα.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον πρόβλημα που προκύπτει για μελλοντική έρευνα είναι η εύρεση του *“βέλτιστου”* τρόπου αυτόματης συναρμολόγησης ή αυτόματης επιδιόρθωσης. Είναι προφανές ότι η αυτόματη συναρμολόγηση μιας δεδομένης ρομποτικής κυτταρικής δομής μπορεί να γίνει με πάρα πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η ανάπτυξη όμως ενός αλγόριθμου για την επίτευξη της συναρμολόγησης με έναν έξυπνο και γρήγορο τρόπο δεν έχει γίνει ακόμα και σίγουρα αν υπήρχε θα έλυσε τα χέρια του τελικού χρήστη του κυτταρικού ρομποτικού μας συστήματος.

Απώτερος σκοπός της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Αυτομάτου Ελέγχου της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών είναι η σχεδίαση και ανάπτυξη του ρομποτικού κυττάρου στις τρεις διαστάσεις (*R-Cell 3D*) και φυσικά η επέκταση της ανάλυσης, που θα έχει ως τότε γίνει, στο χώρο.

Βιβλιογραφία

- [1] S. Murata, E. Yoshida, H. Kurokawa, K. Tomita and S. Kokaji, "Self-Repairing Mechanical Systems," *Autonomous Robots*, vol. 10, no. 1, pp. 7-21, 2001.
- [2] K. Tomita, S. Murata, H. Kurokawa, E. Yoshida, and S. Kokaji, "Self-Assembly and Self-Repair Method for a Distributed Mechanical System," *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 15, pp. 1035-1045, Dec. 1999.
- [3] M. Yim, K. Roufas, D. Duff, Y. Zhang, C. Eldershaw and S. Homans, "Modular Reconfigurable Robots in Space Applications," *Autonomous Robots*, vol. 14, no. 2-3, pp. 225-237, 2004.
- [4] T. Fukuda and S. Nakagawa, "Dynamically Reconfigurable Robotic System," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 1581-1586, 1988.
- [5] T. Fukuda and S. Nakagawa, "Approach to the Dynamically Reconfigurable Robotic System," *J. Intell. Robot. Syst.*, pp.55-72, 1988.
- [6] A. Pamecha, C.J. Chiang, D.Stein, and G. Chirikjian, "Design and Implementation of Metamorphic Robots," *Proc. ASME Design Eng. Tech. Conf. Computers Eng. Conf.*, Irvine, CA, 1996.
- [7] S. Murata, H. Kurokawa, E. Yoshida, K. Tomita and S. Kokaji, "A 3-D Self-Reconfigurable Structure," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 432-439, 1998.
- [8] K. Kotay, D. Rus, M. Vona and C. McGray, "The Self-reconfiguring Robotic Molecule," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 424-431, 1998.
- [9] M.W. Jorgensen, E.H. Ostengaard, and H.H. Lund, "Modular ATRON: Modules for a self-reconfigurable robot," *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pp. 2068-2073, 2004.

- [10] D.J. Christensen, E.H. Ostengaard, and H.H. Lund, "Metamodule Control for the ATRON Self-Reconfigurable Robotic System," *Proc. Intelligent Autonomous Systems (IAS-8)*, pp. 685-692, 2004.
- [11] M. Yim, D. Duff, and K. Roufas, "Polybot: A Modular Reconfigurable Robot," *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.514-520, 2000.
- [12] Castano and P. Will, "Mechanical Design of a Module for Reconfigurable Robots," *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pp. 2203-2209, 2000.
- [13] W.M. Shen, B. Salemi, and P. Will, "Hormone-Inspired Adaptive Communication and Distributed Control for CONRO Self-Reconfigurable Robots," *IEEE Trans. Robot. And Automat.*, vol. 18, no. 5, pp. 700-712, Oct. 2002.
- [14] S. Murata, E. Yoshida, A. Kamimura, H. Kurokawa, K. Tomita, and S. Kokaji, "M-TRAN: Self-Reconfigurable Modular Robotic System," *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, vol. 7, pp. 431-441, Dec. 2002.
- [15] E. Yoshida, S. Murata, A. Kamimura, K. Tomita, H. Kurokawa, and S. Kokaji, "A Self-Reconfigurable Modular Robot: Reconfiguration Planning and Experiments," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 21, no.10-11, pp. 903-915, 2002.
- [16] V. Zykov, A. Chan and H. Lipson, "Molecubes: An Open-Source Modular Robotics Kit," *Self-Reconfigurable Robotics Workshop IROS 2007*.
- [17] D. Rus and M. Vona, "A Physical Implementation of the Self-reconfiguring Crystalline Robot," *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.1726-1733, 2000.
- [18] J. W. Suh, S. B. Homans and M. Yim, "Telecubes: Mechanical Design of a Module for Self-Reconfigurable Robotics," *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.4095-4101, 2002.
- [19] C. Godsil and G. Royle, "Algebraic Graph Theory," *Springer*, 2001.
- [20] L. Sciavicco and B. Siciliano, "Modelling and Control of Robot Manipulators," *McGraw Hill*, New York, 1996.
- [21] Ε. Παπαδόπουλος και Κ. Κυριακόπουλος, "Σημειώσεις Ρομποτικής," *Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*, 2006.

