



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ: ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ: ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ

ΕΛΕΓΧΟΥ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

στο πλαίσιο του μαθήματος

Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών Ι

Επίλυση Τρισδιάστατων Ακουστικών Προβλημάτων με τη βοήθεια της Δυναμικής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων

Επιμέλεια

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΒΑΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής

Χρ. Προβατίδης

Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2008

Copyright ©, ΒΑΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ 2008.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θεωρώ χρέος μου πριν ξεκινήσει η ανάπτυξη και παρουσίαση του θέματος της Διπλωματικής μου εργασίας να ευχαριστήσω ορισμένα άτομα που με βοήθησαν και συνέβαλαν σημαντικά σε αυτή

Κατ' αρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Δρ. Χριστοφορο Προβατιδη για την ανάθεση του θέματος άλλα και για την καθοδήγησή του, τις επικοινωνιακές παρατηρήσεις του και την άψογη συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας. Είναι ο άνθρωπος που με υποδεχόταν οποιαδήποτε ημέρα και ώρα στο γραφείο του είτε για να μου δώσει λύσεις είτε για να μου πει που να ανατρέξω ώστε να βρω λύσεις σε όλες τις απορίες μου. Είναι η πρώτη φορά που γίνεται μια τέτοια προσπάθεια στη Σχολή των Μηχανολόγων Μηχανικών και αυτό από μόνο του κρύβει ένα ρίσκο για όλες τις τυχόν δυσκολίες που ήταν αναμενόμενο να συναντήσω.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τον αείμνηστο Ιωάννη Ζαφειρόπουλο που δυστυχώς δεν είναι πια κοντά μας. Με την βαθιά και ουσιαστική γνώση του θέματος προσέφερε απλόχερα τον πολύτιμο χρόνο του αλλά και την υποστήριξή του με τις συμβουλές τις ενδείξεις και τις επεξηγήσεις του όπου ήταν αναγκαίο. Χωρίς αυτόν δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση του θέματος.

Ευχαριστώ ακόμη τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του εργαστηρίου που μου διάθεσαν υπολογιστή για τις ανάγκες της εργασίας αυτής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους μου έδωσαν, με τον δικό τους τρόπο, μια μικρή ή μεγάλη βοήθεια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΟΨΗ.....	σελ. 6
------------	--------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

1.1 Γενικά.....	σελ. 7
1.2 Ιστορική Εξέλιξη.....	σελ.9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

2.1 Γενικά περί Ακουστικής.....	σελ.13
2.2 Βασικοί Ορισμοί.....	σελ. 14
2.3 Ολοκληρωτικές Μέθοδοι στην Ακουστική.....	σελ. 16
2.4 Ανάλυση Ιδιοτιμών.....	σελ. 17
2.5 Η Κυματική Εξίσωση.....	σελ. 18
2.5.1 Τεχνικές BEM.....	σελ. 18
2.5.2 Η Δυναμική Μέθοδος στον Προσδιορισμό Ακουστικών Συχνοτήτων...	σελ. 20
2.5.3 Συναρτησεις Βάσης.....	σελ. 22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

3.1	
Κύβος.....	σελ.24
3.1.1 Κωνική Ακτινική Συνάρτηση $f_j = c-r$	σελ.26
3.1.2 Multiquadrics $f_j = (r^2+c^2)^{1/2}$	σελ. 32
3.1.3 Εκθετική Συνάρτηση $f_j = e^{-(r^2/c^2)}$	σελ. 38
3.1.4 Thin Plate Splines $f_j = r^2 \log r$	σελ. 44
3.1.5 Πολυωνυμική Συνάρτηση Δεύτερου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^2$	σελ. 45
3.1.6 Πολυωνυμική Συνάρτηση Πέμπτου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^4(1+4R/d)$	σελ. 46
3.1.7 Πολυωνυμική Συνάρτηση Ογδού Βαθμού $f_j = (1-R/d)^6[3+18R/d+25(R/d)^2]$	σελ. 47
3.1.8 Πολυωνυμική Συνάρτηση Εντεκάτου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^8[1+18R/d+25(R/d)^2+32(R/d)^3]$	σελ. 48
3.2 Παραλληλεπίπεδο.....	σελ. 49
3.2.1 Κωνική Ακτινική Συνάρτηση $f_j = c-r$	σελ. 55
3.2.2 Multiquadrics $f_j = (r^2+c^2)^{1/2}$	σελ. 61
3.2.3 Εκθετική Συνάρτηση $f_j = e^{-(r^2/c^2)}$	σελ. 66
3.2.4 Thin Plate Splines $f_j = r^2 \log r$	σελ. 72
3.2.5 Πολυωνυμική Συνάρτηση Δεύτερου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^2$	σελ. 73
3.2.6 Πολυωνυμική Συνάρτηση Πέμπτου Βαθμού $f_j = (R/d)^4(1+4R/d)$	σελ. 74
3.2.7 Πολυωνυμική Συνάρτηση Ογδού Βαθμού $f_j = (1-R/d)^6[3+18R/d+25(R/d)^2]$	σελ.75
3.2.8 Πολυωνυμική Συνάρτηση Εντεκάτου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^8[3+18R/d+25(R/d)^2+32(R/d)^3]$	σελ. 76

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	σελ. 77
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	σελ. 78
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....	σελ. 84
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	σελ. 96

ΕΠΟΨΗ

Η εν λόγω διπλωματική εργασία αναλύει την αποτελεσματικότητα της δυαδικής μεθόδου συνοριακών στοιχείων [DR (Dual Reciprocity)/BEM] και άλλων συνοριακών τεχνικών για τον υπολογισμό ιδιοτιμών σε τρισδιάστατες ακουστικές κοιλότητες. Αρχικά εξετάζονται οι γνωστές κωνικές ακτινικές συναρτήσεις βάσης (RBF), οι οποίες οδηγούν σε εξαιρετικά ασταθή αποτελέσματα σε περιπτώσεις που το ύψος του κώνου δεν έχει επιλεγθεί κατάλληλα. Επίσης, εξετάζεται η ακρίβεια άλλων γνωστών ακτινικών συναρτήσεων βάσης υψηλού βαθμού. Η ποιότητα των αποτελεσμάτων αυτών των μεθόδων επαληθεύεται υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές μιας ορθογώνιας και μιας κυβικής κοιλότητας όπου οι αναλυτικές λύσεις είναι γνωστές.

Βέβαια υπάρχουν και έτοιμα λογισμικά πακέτα που σχετίζονται με τέτοιου είδους υπολογιστικές μεθόδους συνοριακών στοιχείων, τα οποία όμως κοστίζουν. Επίσης είναι καλό για το Ε.Μ.Π., σαν εκπαιδευτικό ίδρυμα, να έχει δικό του πηγαίο κώδικα έτσι ώστε οι φοιτητές να εξοικιώνονται με την μέθοδο αλλά και να μπορούν να παρέμβουν σε αυτή στα πλαίσια έρευνας και εξέλιξης της μεθόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Elements Method B.E.M.) είναι μια αριθμητική υπολογιστική μέθοδος για την επίλυση γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά επιστημονικά προβλήματα και σε εφαρμογές των μηχανικών, όπως η μηχανική ρευστών, η ακουστική, ο ηλεκτρομαγνητισμός και η μηχανική των θραύσεων.

Η ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως η ακριβής λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων προσπαθεί να κάνει χρήση των δεδομένων συνοριακών συνθηκών και να «ταιριάζει» τις συνοριακές τιμές στην διαφορική εξίσωση. Όταν γίνει αυτό, η διαφορική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ξανά για να υπολογιστεί αριθμητικά η λύση απευθείας σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού (π.ο.) του προβλήματος. Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων είναι συχνά ακριβέστερη από άλλες μεθόδους, συμπεριλαμβανομένων των πεπερασμένων στοιχείων, όσον αφορά τα υπολογιστικά δεδομένα σε προβλήματα όπου έχουμε μικρή αναλογία επιφάνειας/όγκου. Βασικά κατασκευάζει ένα πλέγμα πάνω στην επιφάνεια που μελετάμε. Ωστόσο, για πολλά προβλήματα είναι σημαντικά λιγότερο ακριβής από άλλες μεθόδους όπως τα πεπερασμένα στοιχεία και οι πεπερασμένες διαφορές. Λόγω της φύσης της, η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων καταλήγει σε πλήρεις πίνακες. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι οι απαιτήσεις για αποθηκευτικό χώρο και για υπολογιστικό χρόνο μεγαλώνουν σύμφωνα με το τετράγωνο του μεγέθους του προβλήματος. Αντιθέτως στα πεπερασμένα στοιχεία οι πίνακες είναι *ταινιωτοί* (banded), δηλαδή τα στοιχεία είναι μόνο τοπικά συνδεδεμένα, και οι απαιτήσεις αποθήκευσης για τους πίνακες του συστήματος μεγαλώνουν αρκετά γραμμικά σε σχέση με το μέγεθος του προβλήματος. Υπάρχουν τεχνικές συμπίεσης για την βελτίωση αυτού του φαινομένου, αλλά κάνουν την μέθοδο πιο περίπλοκη και η επιτυχία τους εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την φύση του προβλήματος και την γεωμετρία του.

Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα που μπορεί να υπολογιστεί η συνάρτηση του Green. Συνήθως τα π.ο. είναι γραμμικά και ομογενή μέσα. Το γεγονός αυτό βάζει σοβαρούς περιορισμούς στο εύρος και στην γενικότητα των προβλημάτων όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος. Μη γραμμικά στοιχεία μπορούν να περιληφθούν, όμως θα δημιουργηθούν χωρικά ολοκληρώματα, τα οποία απαιτούν διακριτοποίηση πριν από την λύση του προβλήματος, ακυρώνοντας έτσι ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα της μεθόδου. Μια χρήσιμη τεχνική για τον χειρισμό των χωρικών ολοκληρωμάτων χωρίς διακριτοποίηση είναι η δυαδική μέθοδος (dual reciprocity method). Η τεχνική αυτή προσεγγίζει μέρος της υπό ολοκλήρωση έκφρασης με την χρήση ακτινικών συναρτήσεων βάσης (τοπικές συναρτήσεις παρεμβολής) και μετατρέπει το χωρικό ολοκλήρωμα σε

συνοριακό ολοκλήρωμα αφού εφαρμοσθεί σε επιλεγμένα σημεία κατανεμημένα σε όλο το π.ο. συμπεριλαμβανομένου και του συνόρου. Στα BEM δυαδικής αμοιβαιότητας, αν και δεν χρειάζεται η διακριτοποίηση και η δημιουργία πλέγματος, υπάρχουν άγνωστοι σε επιλεγμένα σημεία μέσα στο π.ο., στις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις που προσεγγίζουν το πρόβλημα.

Οι όροι της συνάρτησης Green συνδέουν τα ζευγάρια πηγής (source) και πεδίου (field) που προσδιορίζονται από το πλέγμα δημιουργούν ένα πίνακα που λύνεται αριθμητικά. Εκτός εάν η συνάρτηση Green έχει καλή συμπεριφορά, τουλάχιστον για τα ζευγάρια που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση, η συνάρτηση Green πρέπει να ολοκληρωθεί στο ένα ή ακόμα και στα δυο σύνορα κοντά στα σημεία πηγής και πεδίου. Η περίπτωση στην οποία τα ολοκληρώματα και στα χωρία πηγής και πεδίου είναι ίδια ονομάζεται μέθοδος Galerkin. Η μέθοδος αυτή είναι η προφανής προσέγγιση για προβλήματα που είναι συμμετρικά ως προς την εναλλαγή των σημείων πεδίου και πηγής. Στον ηλεκτρομαγνητισμό σε π.ο. συχνοτήτων αυτό το εγγυάται η αμοιβαιότητα. Το υπολογιστικό «κόστος» στην απλοϊκή μέθοδο Galerkin είναι πολύ μεγάλο. Πρέπει να γίνουν δυο βρόχοι (loop) στα στοιχεία (έτσι ώστε να έχουμε n^2 περάσματα συνολικά. Και για κάθε ζευγάρι στοιχείων κάνουμε loop στα σημεία Gauss των στοιχείων για να δημιουργήσουμε ένα συντελεστή ανάλογο με τον αριθμό των σημείων Gauss υψωμένο στο τετράγωνο. Ωστόσο η εκτίμηση των συναρτήσεων που χρειάζονται απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ, και την χρησιμοποίηση τριγωνομετρικών / υπερβολικών συναρτήσεων. Παρόλα αυτά, το μεγαλύτερο μέρος της υπολογιστικής ισχύος χρειάζεται για το διπλό loop στα στοιχεία του προβλήματος για την δημιουργία ενός πλήρους πίνακα.

Οι συναρτήσεις Green, ή θεμελιώδεις λύσεις, είναι συχνά προβληματικές ως προς την ολοκλήρωσή τους, αφού βασίζονται σε λύση του συστήματος για σημειακά φορτία (π.χ. το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από σημειακό φορτίο). Η ολοκλήρωση τέτοιων μοναδιαίων πεδίων δεν είναι εύκολη. Για απλές γεωμετρίες (π.χ. για επίπεδα τρίγωνα) μπορεί να γίνει αναλυτική ολοκλήρωση. Για πιο περίπλοκες γεωμετρίες μπορούν να σχεδιαστούν καθαρά αριθμητικά σχήματα που προσαρμόζονται στην ιδιομορφία (singularity), αλλά με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Φυσικά, όταν το σημείο πηγής και του πεδίου (εκεί όπου γίνεται η ολοκλήρωση) είναι αρκετά μακριά το ένα από το άλλο, δίνεται η δυνατότητα να αποφύγουμε την ολοκλήρωση λόγω της ομαλής απόσβεσης της θεμελιώδους λύσεως. Αυτό το χαρακτηριστικό χρησιμοποιείται σε αριθμητικά σχήματα που είναι φτιαγμένα για να επιταχύνουν/συμπιέσουν τους υπολογισμούς στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

Η απαρχή των Συνοριακών Στοιχείων βρίσκεται στην δουλειά μικρών ομάδων ερευνητών στην δεκαετία του 1960 σε εφαρμογές των συνοριακών συναρτήσεων ολοκλήρωσης σε προβλήματα με δυναμικές ροές και ανάλυση τάσεων. Οι πρώτες προσπάθειες βασίζονταν στη χρησιμοποίηση μιας σειράς στοιχείων στο σύνορο, οι τιμές των οποίων θεωρούνταν σταθερές για μια συγκεκριμένη περιοχή ή στοιχείο. Η χρήση πηγών και διπόλων σήμερα ονομάζεται Έμμεση Προσέγγιση/Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Indirect Boundary Element Method). Πιο πρόσφατα η Άμμεση Προσέγγιση που βασίζεται σε φυσικές μεταβλητές όπως δυναμικά και ροές ή χωρητικότητες και επιφανειακή τάση ξεπέρασε τις έμμεσες τεχνικές. Η αρχική σταθερή πηγή εφαρμογών και στα έμμεσα και στα άμμεσα στοιχεία είχαν το μειονέκτημα ότι έδιναν ανακριβή αποτελέσματα σε πολλές εφαρμογές, όπως στην ανάλυση τάσεων. Η δυσκολία αυτή ήταν ένας από τους παράγοντες που έκαναν την αρχική Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ) μη δημοφιλή, σε μηχανικούς και επιστήμονες.

Στην δεκαετία του εβδομήντα υπήρξε αυξημένη δραστηριότητα την ανάπτυξη συνοριακών τεχνικών και εφαρμογών. Στα μέσα εκείνης της δεκαετίας έγινε ξεκάθαρο ότι η προσέγγιση της συνοριακής ολοκλήρωσης προσέφερε μια εξαιρετική εναλλακτική τεχνική σε σχέση με τα Πεπερασμένα Στοιχεία για την επίλυση πολλών πρακτικών προβλημάτων. Τότε γεννήθηκε η ιδέα της χρήσης καμπυλόγραμμων συνοριακών στοιχείων με την απεικόνιση των μεταβλητών με συναρτήσης παρεμβολής. Έτσι δημιουργήθηκε μια τεχνική το ίδιο ευέλικτη με τα πεπερασμένα στοιχεία για την απεικόνιση της γεωμετρίας του προβλήματος. Πολλοί ερευνητές επισήμαναν τα πλεονεκτήματα της άμμεσης από την έμμεση συνοριακή ολοκλήρωση.

Τα διεθνή συνέδρια για τα Συνοριακά Στοιχεία που διοργανώνονται από το 1978 έφεραν σε επαφή όλη την καινούργια δουλειά πάνω στο θέμα και συνετέλεσαν στην καλύτερη αντιμετώπιση της μεθόδου. Στα συνέδρια αυτά παρουσιάστηκαν αναρίθμητες εργασίες για μη γραμμικά και εξαρτώμενα από το χρόνο προβλήματα, πολλά από τα οποία υπογράμμιζαν τις δυσκολίες της επέκτασης της τεχνικής σε τέτοιου είδους προβλήματα. Η κύρια δυσκολία σε αυτές τις περιπτώσεις είναι πως πρέπει να διακριτοποιηθεί το π.ο. σε μια σειρά από εσωτερικές κυψέλες/κελλιά (cells) για τους όρους που δεν βρίσκονται στο σύνορο με την εφαρμογή της θεμελιώδους λύσης όπως οι μη γραμμικοί όροι. Λόγω της πρόσθετης απαιτούμενης διακριτοποίησης, η μέθοδος παραμελήθηκε λόγω των πρόσθετων δεδομένων που χρειάζονται για ένα πρόβλημα και την πολυπλοκότητα των πρόσθετων υπολογισμών.

Αναφορικά με το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, πριν από 25 χρόνια η πρωτοποριακή δουλειά των Nardini και Brebbia (1982) [50] άνοιξε νέους δρόμους στην έρευνα της ΜΣΣ επεκτείνοντας τους αδρανειακούς όρους σε μια σειρά από κωνικές συναρτήσεις βάσης. Εκτός από την ελαστοδυναμική, τα επόμενα χρόνια η μέθοδος σταδιακά επεκτάθηκε και εφαρμόστηκε επισταμένα σε μια σειρά από προβλήματα της δυναμικής όπως μεταβατικά προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας, προβλήματα αγωγής-συναγωγής (convection-diffusion), προβλήματα κάμψης πλακών, κλπ. Σαν αποτέλεσμα κυριάρχησε το όνομα dual reciprocity DR/BEM (Partridge et al. 92) [56], το οποίο μεταφράζουμε ως 'δυναμική μέθοδο συνοριακών στοιχείων'.

Επίσης, επειδή οι προτεινόμενες γενικές προσεγγιστικές συναρτήσεις εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ της πηγής και των σημείων πεδίου (field points), αυτές ονομάζονται *Ακτινικές Συναρτήσεις Βάσης* (Radial Basis Functions RBF). Ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί μια αναλυτική έκδοση από τον Beskos (1987) [14].

Γενικότερα εκτός από το προαναφερθέν κωνικό σελ, χρησιμοποιήθηκαν και άλλες συναρτήσεις όπως splines και πολυτετραγωνες (multiquadrics) (Goldberg & Chen 1996) [36]. Εμφανίστηκε μια τεράστια παραγωγή επιστημονικών έργων σε πολλά επιστημονικά πεδία και η κυρίαρχη άποψη είναι ότι η ακτινικές συναρτήσεις βάσης είναι ισχυρά εργαλεία σε επιφάνειες παρεμβολής πολλών μεταβλητών και έχουν εκτεταμένες εφαρμογές στα νευρωνικά δίκτυα, σχεδιασμο γραφικών σε υπολογιστή, γεωλογία (Goldberg & Chen 1996) [36]. Μια επιθεώρηση για την εκτίμηση 29 διδιαστατων παρεμβατικών μεθόδων δημοσιεύθηκε από τον Franke(1982) [34]. Επίσης ο Michelli (1986) [49] ξεκαθάρισε το ζήτημα της αντιστροφής του πίνακα που προκύπτει χρησιμοποιώντας παρεμβολή RBF, το οποίο έδωσε μια ακλόνητη μαθηματική θεμελίωση για την ανάπτυξη των RBF.

Όμως, παρά την προαναφερθείσα χρησιμότητα των DR/BEM, πολλές διαφωνίες αναφέρθηκαν όταν χρησιμοποιούνταν για την εξαγωγή ιδιοτιμών σε ακουστικές κοιλότητες (Provatidis 1987 [58]; Coyette & Fyfe 1990 [30]; Ali et al.1991 [4],1995 [5]; Provatidis & Kanarachos 1995 [61]). Προσπαθώντας να εξηγήσουν αυτό το ελάττωμα έγινε η υπόθεση ότι οι ψηλότερες αρμονικές που εμφανίζονται στην ακουστική δημιουργούν το πρόβλημα. Για να υποστηρίξουν άλυτη την άποψη, ανέλυσαν με FEM μια ορθογώνια κυρτή δοκό με διαστάσεις 24X6 Nardini και Brebbia (1982) [50] και καταγράφηκαν οι εννιά πρώτες ιδιοτιμές της. Μετά προσπάθησαν να απεικονίσουν τις ιδιοτιμές του εσωτερικού βασιζόμενη μόνο σε συνοριακά στοιχεία σε συνύπαρξη με κωνικά RBF ($f_j = C - r$). Το συμπέρασμα ήταν ότι αυτές οι συναρτήσεις βάσης είναι ικανές να αναπαραστήσουν το εσωτερικό με επαρκή ακρίβεια (Provatidis 1987 [58]). Αντιθέτως, όταν η ίδια διαδικασία εφαρμόζοταν σε ορθογώνια ακουστική κοιλότητα με διαστάσεις 2.5X1.1, η διαδικασία των κωνικών RBF οδηγούσε σε σημαντικά λάθη (Kanarachos & Provatidis 1987 [41]).

Το 1985 ο Χ.Προβατίδης κοινοποίησε την αρνητική του εμπειρία στην ακουστική με την χρήση των κωνικών RBF.(Provatidis 1985 [57]). Επίσης παρουσιάστηκε μια λεπτομερής τεχνική αναφορά που αφορούσε δυο διπλωματικές σε διδιάστατα και αξονοσυμμετρικά προβλήματα.(Kyriakopoulos & Tirpintiris 1985 [45]). Εφτά μήνες αργότερα οι Nardini και Brebbia(1985) [52] έδωσαν την απάντηση τους μέσω εργασίας που πρότεινε την χρησιμοποίηση τριγωνομετρικών συναρτήσεων και μονόνυμων αλλά δεν παρουσιάστηκαν αριθμητικά αποτελέσματα. Αμέσως έγινε προσπάθεια να εφαρμοστεί η νέα προσέγγιση αλλά η προσπάθεια απέτυχε λόγω δυσκολίας αντιστροφής πίνακων ή κακών αποτελεσμάτων.

Αργότερα, αναγνωρίστηκε η αναγκαιότητα της χρησιμοποίησης εσωτερικών κόμβων στην ακουστική (Brebbia 1985 [20]; Loeffler & Mansur 1987 [48]). Σε συμφωνία με αυτό προτάθηκαν λογαριθμικές συναρτήσεις (r , $\ln r$, $r \ln r$, $r^2 \ln r$ και πολική γωνία μηδέν) για τους συνοριακούς όρους και το πεδίο ορισμού (Kanarachos & Provatidis 1987 [41], Provatidis & Kanarachos 1995 [61]). Η ακρίβεια αυτού του συνόλου αποδείχθηκε ανώτερη σε σύγκριση με τα κωνικά

RBF. Βρέθηκε ότι οι κωνικές συναρτήσεις είναι γενικές προσεγγίσεις των λεγόμενων 'ακριβών' αποσβενόμενων συναρτήσεων, ενώ δόθηκε ένας πιο συγκεκριμένος ορισμός της σταθεράς C με όρους BEM (Kanarachos & Provatidis 1987 [40]). Το συμπέρασμα της πρώιμης αυτής έρευνας ήταν, ειδικά στην ακουστική, ότι είναι κρίσιμο να χρησιμοποιείται ακόμη και ένας μικρός αριθμός εσωτερικών κόμβων.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στις παραπάνω μεθόδους DR/BEM, ο Laplace-ιανός τελεστής βρίσκεται στην δεξιά μεριά της διαφορικής εξίσωσης. Όμως στα ακουστικά προβλήματα μια εναλλακτική μέθοδος δυαδικής αμοιβαιότητας. Για παράδειγμα, ξεκινώντας από τον τελεστή Helmholtz $(\nabla^2 + \lambda^2)u = f$, οι Chen και Rashed (1998) [28] προσέγγισαν τον όρο φόρτισης, f , με μια σειρά από ακτινικές συναρτήσεις βάσης (π.χ. thin plate splines συν γραμμικούς όρους: 1, x , y) και προσδιόρισαν λεπτομερείς λύσεις που περιλαμβάνουν λογαριθμικές λύσεις όπως $\ln r$, $r^2 \ln r$, και επίσης συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους μηδενικής σειράς.

Επίσης, σαν μια εναλλακτική προσέγγιση στις συνήθεις κωνικές RBF χωρίς εσωτερικούς κόμβους ο Χ.Προβατίδης μελέτησε την χρήση της παρεμβολής του Gordon (Gordon 1971 [39]) για την συνολική προσέγγιση της άγνωστης μεταβλητής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού. Υπενθυμίζεται ότι αυτή η διμεταβλητή παρεμβολή χρησιμοποιούνταν από το μέσον της δεκαετίας του 60 για να προσεγγιστούν επιφάνειες CAD και αργότερα για δομημένα πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων (Beer & Watson 1992 [16]). Σε δυναμικά προβλήματα υπήρχε η άποψη πως το γράφημα οποιασδήποτε ιδιοτιμής είναι μια ομαλή C^0 συνεχής επιφάνεια και με αυτόν τον τρόπο η ίδια προσέγγιση της γεωμετρίας μπορεί να εφαρμοστεί για να παρεμβάλουμε την μεταβλητή (μεγάλα ισοπαραμετρικά στοιχεία). Η ιδέα αυτή εφαρμόστηκε επιτυχημένα στην ακουστική (Provatidis & Kanarachos 2001 [62]), θερμικά προβλήματα (Provatidis 2002) και ελαστοστατική (Provatidis 2003).

Ξεκάθαρα, οι σχετικές εργασίες που αφορούν σε μακροστοιχεία Coons που είναι πιο κοντά σε FEM παρά σε BEM, αφού δε χρησιμοποιούν θεμελιώδεις λύσεις και απαιτούν ολοκλήρωση στο πεδίο ορισμού για τον υπολογισμό των συμμετρικών μαζών και των πινάκων ακαμψίας. Μέχρι σήμερα δεν κατορθώθηκε η σχετική ολοκλήρωση του πεδίου ορισμού στο σύνορο και συνεπώς η DR/BEM παραμένει συνολικά καλύτερη μέθοδος. Ωστόσο όσον αφορά την εξαγωγή ιδιοτιμών σε ορθογωνικές κοιλοτητες, το μακροστοιχείο Coons αποδείχθηκε πιο ακριβές και από τα συμβατικά FEM και τα DR/BEM βασισμένα σε κωνικές RBF: $f_j = C - r$.

Εν τω μεταξύ, σημαντική πρόοδος επιτεύχθηκε στην ελαστοδυναμική (Agnantiaris et al. 1996 [2], 2001 [3]; Rashed 2002a,b [63][64]) όπου δοκιμάστηκαν πολυωνυμικές, λογαριθμικές και Γκαουσιανές αποσβενόμενες συναρτήσεις βάσης. Συγκεκριμένα, ο Rashed χρησιμοποιεί τέσσερις ομάδες υψηλού βαθμού RBF που πρόσφατα προτάθηκαν από τον Wendland (1995) [70]. Όλες οι μεταγενέστερες σχετικές δουλειές εφαρμόστηκαν στο ελαστικό πρόβλημα της διάδοσης κυμάτων και η ποιότητα των αποτελεσμάτων δοκιμάστηκε στη βάση της χρονικής απόκρισης. Όμως, αφού οι ελαστοδυναμικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες με σύστημα δυο ακουστικών εξισώσεων (μετασχηματισμός Helmholtz), η ακουστική προσφέρει πρόσφορο έδαφος για την ανάπτυξη νέων RBF, τα οποία μπορούν αργότερα να

εφαρμοστούν στην ελαστοδυναμική. Επίσης, στην ακουστική είναι διαθέσιμες ακριβείς λύσεις ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων σε κλειστή μορφή, προφανώς για απλά γεωμετρικά σχήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

2.1. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ

Η ακουστική είναι ο τομέας της Φυσικής που ασχολείται με την μελέτη του ήχου(ηχητικά κύματα σε υγρά,στερεά και αέρια). Ο επιστήμονας που δουλεύει πάνω στην ακουστική ονομάζεται 'ακουστικός'. Η εφαρμογή της ακουστικής ονομάζεται 'ακουστική τεχνολογία'. Συχνά υπάρχει μεγάλη αλληλοκάλυψη μεταξύ των δυο παραπάνω.

Η λέξη ακουστική προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη 'ακουστός' που σημαίνει αυτο που μπορεί να ακουστεί (Woodhouse, 1910, 392).

Η ακουστική χαρακτηρίζεται από στην εξάρτηση σε συνδυασμούς φυσικών αρχών που ορίζουν άλλες πηγές, και ότι ο κύριος σκοπός της μοντέρνας ακουστικής είναι να συνθέσει αρχές που συνήθως υπάρχουν σε άλλες επιστήμες σε μια συνεπή βάση για την κατανόηση, την μέτρηση, τον έλεγχο και την χρήση όλου του φάσματος του φαινομένου των δονήσεων σε οποιοδήποτε υλικό.

Origins in Acoustics. F.V. Hunt. Yale University Press, 1978

Η ακουστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με την παραγωγή, τον έλεγχο, την μετάδοση, τη λήψη και τα αποτελέσματα του ήχου. Ξεκίνησε από την μελέτη μηχανικών δονήσεων και την μετάδοση αυτών των δονήσεων μέσω κυμάτων και συνεχίζεται ακόμη και σήμερα. Γίνεται έρευνα για την εξακρίβωση πολλών θεμελιωδών φυσικών διαδικασιών που έχουν σχέση με κύματα και ήχο και για τις πιθανές εφαρμογές αυτών των φυσικών διαδικασιών στην συγχρονη ζωή. Η μελέτη των ηχητικών κυμάτων οδήγησε σε φυσικές αρχές που μπορούν να εφαρμοστούν σε όλα τα κύματα.

Η μελέτη της ακουστικής είναι θεμελιώδης για πολλές εξελίξεις στην τέχνη. Μερικές από αυτές, ειδικά στον τομέα των μουσικών κλιμάκων και οργάνων, εξηγήθηκαν θεωρητικά από τους επιστήμονες μετά από πολλά χρόνια πειραματισμών από τους καλλιτεχνες. Για παράδειγμα πολλά από αυτά που γνωρίζουμε για την αρχιτεκτονική της ακουστικής ουσιαστικά έγιναν γνωστά με την μέθοδο της δοκιμής και του λάθους μέσα από τους αιώνες και μόνο πρόσφατα εξηγήθηκαν και αναλύθηκαν επιστημονικά. Άλλες εφαρμογές της ακουστικής είναι στην μελέτη γεωλογικών φαινομένων, την μελέτη της ατμόσφαιρας και υποθαλάσσια φαινόμενα.

Ένα ακουστικό πεδίο μπορεί να υπάρχει σε ρευστό όπως ο αέρας ή το νερό,δυο από τα πιο σημαντικά ακουστικά μέσα. Η γραμμική κυματική εξίσωση είναι κοινώς αποδεκτό μοντελο σε πολλά ρευστά και χρησιμοποιείται συχνά σε περιπτώσεις που το μέσο είναι αέρας ή νερό. Σε πολλά φυσικά προβλήματα το ακουστικό πεδίο είναι περιοδικό και έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της ακουστικής εξίσωσης σε σειρά εξισώσεων Helmholtz με μετασχηματισμό Fourier με μια εξίσωση Helmholtz για κάθε συχνότητα δείγματος.

Η εξίσωση Helmholtz που χαρακτηρίζει πολλά συστήματα μπορεί να λυθεί με την μέθοδο συνοριακών στοιχείων. Για αυτό η BEM έχει τύχει της προσοχής των μηχανικών οι οποίοι ενδιαφέρονται για εφαρμογές όπως ο ήχος που παράγει ένα ηχείο, ο θόρυβος από μια παλλόμενη πηγή όπως ένας κινητήρας και η ακουστική κλειστών εσωτερικών χώρων όπως το εσωτερικό ενός αυτοκινήτου. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί στην υποβρύχια ακουστική και στην μοντελοποίηση του φαινομένου της διάχυσης στον ωκεανό ή για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου γύρω από έναν ηχητικό διαχύτη.

2.2 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Η αίσθηση του ήχου προκύπτει από μια σειρά διαμήκων κυμάτων πίεσης σε ένα ελαστικό μέσο, που δημιουργούνται από μια ταχέως παλόμενη πηγή. Η συχνότητα του ήχου f εξαρτάται από το εύρος της ταλάντωσης της πηγής του ήχου, και μετριέται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο ή αλλιώς Hertz ($\text{Hz}=\text{s}^{-1}$). Ο χρόνος που χρειάζεται για κάθε κύκλο είναι η περίοδος T (s). Οι δυο αυτές ποσότητες συνδέονται με την σχέση

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} \quad (2.1)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του ήχου (m/sec) και λ το μήκος κύματος(m). Τυπικές τιμές της ταχύτητας του ήχου είναι $c = 340$ m/sec στον αέρα, $c = 1500$ m/sec στο νερό, $c = 3850$ m/sec στο ξύλο και $c = 5100$ m/sec στο αλουμίνιο. Άλλες σημαντικές ακουστικές παράμετροι είναι η γωνιακή συχνότητα $\omega=2\pi f$ (rad/sec) και ο αριθμός κυμάτων $k = \omega/c$. Πρέπει να σημειωθεί πως το μήκος κύματος στον αέρα είναι $\lambda=17\text{m}$ για χαμηλή συχνότητα $f=20\text{Hz}$ αλλά είναι $\lambda=17\text{mm}$ για υψηλή συχνότητα $f=20\text{KHz}$.

Το εύρος των αντιληπτών ακουστικών συχνοτήτων (I) εκτείνεται από 10^{-12} W/m^2 έως 10 W/m^2 . Το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται αυτή την μεγάλη γκάμα συχνοτήτων αντιδρώντας με σχεδόν λογαριθμικό τρόπο. Για αυτό μια παρόμοια αντιμετώπιση είναι λογική για μια μετρητική κλίμακα. Παίρνοντας τους λογαρίθμους με βάση το 10 έχουμε ένα εύρος από -12 έως και 1 αλλά σχεδόν όλες οι τιμές είναι αρνητικές. Ένας καλύτερος τρόπος για την μέτρηση της έντασης του ήχου είναι χρησιμοποιώντας μια αδιάστατη κλίμακα της μορφής

$$\text{SIL}=\log(I/I_{\text{ref}}) \quad (2.2)$$

Όπου SIL είναι το επίπεδο της έντασης του ήχου και η ένταση αναφοράς είναι $I_{\text{ref}}=10^{-12}$ W/m^2 . Η μονάδα του SIL είναι το Bel (αδιάστατο). Η κλίμακα του Bel είναι από 0 έως 13.Μια πιο εύχρηστη κλίμακα είναι η

$$SIL=10*\log(I/I_{ref}) \quad (2.3)$$

που μετρίεται σε ντεσιμπέλ(dB). Η κλίμακα των ντεσιμπέλ είναι από 0 έως 130. Να σημειωθεί πως 0 dB δεν σημαίνει πλήρη απουσία ήχου αλλά απλά $I = I_{ref}$.

Μια παρόμοια αλλά πιο δημοφιλής κλίμακα όσον αφορά την πίεση του ήχου δίνεται από το Επίπεδο Πίεσης του Ήχου(Sound Pressure Level)(SPL). Το I σε p^2 και έχουμε

$$SPL=10*\log(p^2/p_{ref}^2)=20*\log(p/p_{ref}) \quad (2.4)$$

Με την πίεση αναφοράς να είναι $p_{ref} = 2*10^{-5}Pa$ δηλαδή το όριο της ακοής. Όταν μετράμε την απόδοση ακουστικών εμποδίων, τα αποτελέσματα δίνονται σε Απώλεια Εισχώρησης(Insertion Loss)(IL)

$$IL=-20*\log(p/p_w) \quad (2.5)$$

Όπου p_w είναι η ακουστική πίεση χωρίς το εμπόδιο.

Η διάδοση ακουστικών κυμάτων μέσω ενός υγρού V περιγράφεται από την γραμμική κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 U}{dt^2} \quad (2.6)$$

Όπου U είναι η ταχύτητα. Όταν η κίνηση είναι αρμονική σε σχέση με τον χρόνο η συνάρτηση U μπορεί να γίνει

$$U(x,t)=\varphi(x)*e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

Όπου φ είναι μια μειωμένη ταχύτητα (reduced velocity potential) και έτσι η εξίσωση (2.6) μετατρέπεται σε εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 \varphi + \kappa^2 \varphi = 0 \quad (2.8)$$

Η ταχύτητα φ συνδέεται με την ακουστική πίεση με την εξίσωση

$$p = -i\rho\omega\varphi \quad (2.9)$$

Όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού. Η πρώτη παράγωγος της πίεσης συνδέεται με την ταχύτητα με την εξίσωση

$$\frac{dp}{dn} = -i\rho\omega u \quad (2.10)$$

2.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Παλαιότερες μέθοδοι συνοριακών στοιχείων και συναφών διαδικασιών

Ολοκληρωτικές μέθοδοι για την διάδοση και διασπορά κυμάτων εφαρμόζονται για περισσότερο από έναν αιώνα, για την εξαγωγή αναλυτικών λύσεων σε ένα περιορισμένο αριθμό απλοποιημένων προβλημάτων. Ωστόσο η χρήση συνοριακών διαφορικών εξισώσεων για την αριθμητική λύση ακουστικών προβλημάτων ξεκίνησε μόλις την δεκαετία του 1960 με τις εργασίες των Shaw και Friedman [67], Banaugh και Goldsmith [8], Chen και Schweikert [29] και πολλών άλλων.

Η διάδοση και διασπορά ακουστικών κυμάτων είναι ιδανική περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου συνοριακών στοιχείων λόγω της ευκολίας με την οποία χειρίζεται μη πεπερασμένα π.ο., δίχως να χρειάζεται αποκοπή και εξειδίκευση τεχνητών οριακών συνθηκών ανάκλασης και απορρόφησης, όπως στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Ο λεπτομερής καθορισμός των πηγών θορύβου και των σημείων μέτρησης (δέκτες) είναι επίσης πολύ απλός, χωρίς να χρειάζεται βελτίωση του τοπικού πλέγματος.

Ένα αρκετά γνωστό μειονέκτημα της ολοκληρωτικής εξίσωσης αναπαράστασης εξωτερικών ακουστικών προβλημάτων στο πεδίο συχνοτήτων είναι ότι δεν δίνουν μόνο μια λύση σε συχνότητες κοντά στις ιδιοσυχνότητες του *συζυγούς εσωτερικού προβλήματος*. Αυτή η δυσκολία δεν εμφανίζεται όταν χρησιμοποιούνται μερικές διαφορικές εξισώσεις, ωστόσο εμφανίζεται έντονα με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές για να ξεπεραστεί το παραπάνω πρόβλημα.

Η μέθοδος συνοριακών στοιχείων έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την μελέτη της διάδοσης του ήχου και την απορρόφηση του από ηχομονωτικά υλικά. Ο Seznec [65] μελέτησε με BEM ακουστικά πετάσματα/φράγματα (barriers) σε άκαμπτο επίπεδο, όπου η διακριτοποίηση του εδάφους μπορεί να αποφευχθεί με την μέθοδο των εικόνων (images). Αν το επίπεδο δεν είναι άκαμπτο, η μέθοδος των εικόνων δεν είναι επαρκής για να δώσει μια συνάρτηση Green που να αποδίδει την αντίσταση του εδάφους και είναι απαραίτητος ένας όρος διόρθωσης. Αυτός ο όρος είναι ένα άπειρο ολοκλήρωμα με μια ολοκληρώσιμη ταλάντωση (oscillatory integrand) και πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να εκτιμήσουν το ολοκλήρωμα αυτό για μια σημειακή πηγή ή μια γραμμική πηγή πάνω από επίπεδο σύνορο. Μια πρόσφατη έρευνα για την διασπορά θορύβου σε εξωτερικούς χώρους με BEM παρουσιάστηκε από τους Chandler και Wilde [27].

Μια ακόμη εφαρμογή των BEM είναι στην διάχυση από λεπτά σώματα. Οι πρώτες εργασίες των Filippi [33] και Terai [69] εφαρμόζουν την θεωρία επιμήκους σώματος (slender body theory) στην διάθλαση ακουστικών κυμάτων σε περιοχές χωρίς όρια. Η αριθμητική τεχνική χρησιμοποιεί μια υπερδιόμορφη (hypersingular) συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση και χρειάζεται διακριτοποίηση μόνο στον άξονα του πετάσματος. Ο μετασχηματισμός επεκτάθηκε αργότερα από τους Kawai και Terai [43] για την ανάλυση της διάδοσης ήχου σε εξωτερικούς χώρους και την εξασθένηση του σε άκαμπτα εμπόδια πάνω σε άκαμπτο επίπεδο. Ο μετασχηματισμός τους έκανε χρήση και μιας υπερδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης πάνω στον

άξονα του εμποδίου, και απόφευγε την διακριτοποίηση του μη πεπερασμένου επιπέδου τροποποιώντας την συνάρτηση του Green ελεύθερου χώρου (free space) χρησιμοποιώντας την μέθοδο των εικόνων. Αριθμητικές λύσεις που χρησιμοποιούσαν δυαδική μέθοδο BEM (ένας μετασχηματισμός που ταίριαζε την κλασική και την υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση) για προβλήματα στα οποία το λεπτό εμπόδιο και το επίπεδο αντιμετωπίζονται ως απορροφητικά έχουν παρουσιαστεί από τον Lacerda et al. [46][47] για προβλήματα δυο και τριων διαστάσεων.

2.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Συμβατική Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων

Τα προβλήματα ελεύθερης ταλάντωσης στην ακουστική είναι δύσκολο να λυθούν με την μέθοδο συνοριακών στοιχείων γιατί η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι μιγαδική και μη γραμμικά εξαρτώμενη από την συχνότητα του αρμονικού κύματος. Οι πίνακες που προκύπτουν για το διακριτοποιημένο πρόβλημα είναι εκ φύσεως περίπλοκοι και δεν εξαρτώνται γραμμικά από την συχνότητα.

Όπως θα δούμε παρακάτω (βλ. σχέση 2.16), για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών πρέπει να λυθεί μια (**μη αλγεβρική**) εξίσωση της μορφής

$$\det(\mathbf{A}(k)) = 0 \quad (2.11)$$

Η μέθοδος της αναζήτησης ορίζουσας χρησιμοποιείται για την εύρεση ιδιοτιμών σε τέτοια συστήματα και για ακουστικά και για προβλήματα ελαστικότητας. Ακολουθώντας μεταβάλλοντας των αριθμό των κυμάτων k , μπορούμε να βρούμε ένα τοπικό ελάχιστο της ορίζουσας του πίνακα ιδιοτιμών, που θα μας δείχνει την θέση των ιδιοτιμών. Αυτή η μέθοδος ερευνήθηκε από τους Tai και Shaw(1974) [68], DeMey(1976) [31] και αργότερα από άλλους. Ένα σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι ο πίνακας \mathbf{A} πρέπει να υπολογίζεται με κάθε αλλαγή της τιμής του k , το οποίο είναι ισοδύναμο με την λύση όλου του προβλήματος για κάθε αλλαγή. Ο Bai [7] πρότεινε μια μέθοδο που θα βασίζεται στην αποσύζευξη ιδιόμορφης τιμής (singular value decomposition), επιτρέποντας πιο άμεση έρευνα που δεν θα είναι σειριακή, αλλά αυτό διορθώνει ελαφρώς τα πράγματα. Ένα ακόμη πρόβλημα είναι ότι η μέθοδος μπορεί να μην αναγνωρίσει εκφυλισμένες(degenerate) ιδιοσυχνότητες.

Αν και η μέθοδος της εύρεσης κατάλληλης ορίζουσας κάνει την εφαρμογή μεθόδου συνοριακών στοιχείων σε προβλήματα ελεύθερης ταλάντωσης (free vibration) δυνατή, η απευθείας χρήση των δυναμικών θεμελιωδών λύσεων δεν είναι καθόλου πρακτική. Το επόμενο βήμα μπροστά ήταν η εφαρμογή στατικών θεμελιωδών λύσεων στην ανάλυση ιδιοτιμών, που έγινε από τον Bezine [17] σε συσχέτιση με την ταλάντωση πλακών σε κάμψη (plate vibration).

2.5 Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Προκειμένου να αντιληφθούμε καλύτερα τα αναγραφόμενα στην παράγραφο 2.4, θεωρούμε ως κυρίαρχη εξίσωση αυτήν της διάδοσης του ήχου στον αέρα:

$$(1/c^2) (\partial^2 p / \partial t^2) - \nabla^2 p = 0 \quad (2.12)$$

όπου p είναι η ακουστική πίεση.

Εναλλακτικά η εξίσωση γράφεται στο πεδίο ορισμού των συχνοτήτων

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2.13)$$

2.5.1 Τεχνικές BEM

ι. Λύση στο πεδίο ορισμού

Συμβατικοί Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί της εξίσωσης (2.13) έχουν εξαχθεί και εφαρμοστεί αριθμητικά (De Mey 1976 [31]; Tai & Saw 1974 [68]).

Η εξίσωση

$$\nabla^2 p_i^* + k^2 p_i^* = \pm \Delta^i \quad (2.14)$$

Έχει γενική λύση για τρεις διαστάσεις την τρίτη ταυτότητα του Green και

$$p_i^* = e^{ikr} / 4\pi r \quad k \in \mathbb{C} \quad (2.15)$$

όπου $r=|r|$, \mathbb{C} είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και i η φανταστική μονάδα. Η φυσική σημασία του p_i^* είναι ότι αναπαριστά το φαινόμενο που παρατηρείται σε ένα σημείο a λόγω μιας μοναδιαίας πηγής στο σημείο b σε απόσταση r .

Η γενική διαδικασία οδηγεί σε εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{p} = \mathbf{G}(\omega) (\partial \mathbf{p} / \partial \mathbf{n}) \quad (2.16)$$

όπου \mathbf{p} και $\partial \mathbf{p} / \partial \mathbf{n}$ δηλώνουν το διάνυσμα των κομβικών ακουστικών πιέσεων και την πρώτη τους παράγωγο αντιστοίχως. Να σημειωθεί ότι ο όρος $\mathbf{A}(k)$ στη σχέση (2.11) αντιστοιχεί στην παραπάνω εξίσωση μετά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Το μειονέκτημα του μετασχηματισμού που δίνει την εξίσωση (2.16) είναι ότι λόγω της εξάρτησης των θεμελιωδών λύσεων από την συχνότητα (συναρτήσεις Hankel) το πρόβλημα των ιδιοτιμών είναι **μη-αλγεβρικό**. Με άλλα λόγια η ακουστική πίεση πρέπει να υπολογισθεί για ένα αριθμό συχνοτήτων χρησιμοποιώντας συγκεκριμένο βήμα και να σχεδιαστεί το

γράφημα γεγονός που απαιτεί πολλές επαναλήψεις και κάνει την διαδικασία ιδιαίτερα χρονοβόρα.

Το επόμενο βήμα μπροστά ήταν η εφαρμογή στατικών θεμελιωδών λύσεων στην ανάλυση ιδιοτιμών, που έγινε από τον Bezzine σε συσχέτιση με την ταλάντωση καμπτόμενων πλακών. Οι στατικές θεμελιώδεις λύσεις δεν εξαρτώνται από την συχνότητα, και η εφαρμογή τους οδήγησε σε ένα γενικό πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.17)$$

Όπου \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι πίνακες πλήρεις, μη συμμετρικοί και πραγματικοί και το λ είναι μια ιδιοτιμή. Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι που μπορούν να βγάλουν τις ιδιοτιμές από ένα τέτοιο σύστημα, αποφεύγοντας τις επαναλήψεις. Ωστόσο η συνέπεια της εφαρμογής στατικών θεμελιωδών λύσεων είναι ότι οι αντίστοιχες συνοριακές διαφορικές εξισώσεις περιέχουν ένα χωρικό ολοκλήρωμα. Ο Bezzine διακριτοποίησε το π.ο. σε εσωτερικά κελιά (cells) ονομάζοντας την μεικτή μέθοδο συνοριακών – πεπερασμένων στοιχείων. Προφανώς μια μέθοδος που απαιτεί την εσωτερική διακριτοποίηση και οδηγεί σε πλήρη, μη συμμετρικό γενικό πρόβλημα ιδιοτιμών θα πρέπει να είναι πιο ακριβής από τα FEM για να είναι αξια λόγου.

Η εφαρμογή στατικών θεμελιωδών λύσεων αναμφίβολα κάνει χρήση του γεγονότος ότι η λύση μπορεί να είναι σπασμένη σε δυο μέρη: μιας συμπληρωματικής συνάρτησης που είναι η λύση της σχετικής ομογενούς εξίσωσης, και οποιαδήποτε λύση όλης της εξίσωσης που δεν έχει σχέση με τις συνοριακές συνθήκες. Αφού η συμπληρωματική συνάρτηση είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης, η χρήση της στατικής θεμελιώδους λύσης διευκολύνει την κατάσταση. Για προβλήματα ελεύθερης ταλάντωσης είναι αδύνατο να βρεθεί μια έκφραση για μια συγκεκριμένη λύση, αφού η μη ομογενής λύση της αρχικής εξίσωσης είναι και αυτή συνάρτηση της άγνωστης μεταβλητής.

Για παράδειγμα η ελαστοδυναμική εξίσωση με μηδενική καθολική δύναμη

$$\sigma_{ij,j} = \rho u_i \quad (2.18)$$

Η οποία έχει τον μη ομογενή όρο ρu_i που εξαρτάται από τον άγνωστο u_i . Οι Nardini και Brebbia και άλλοι προσέγγισαν αυτόν τον όρο χρησιμοποιώντας σταθμισμένες (weighted) σειρές γνωστών συναρτήσεων. Αφού η εξίσωση είναι γραμμική, μια συγκεκριμένη λύση όλης της εξίσωσης μπορεί να «χτιστεί» από μια σειρά λύσεων που να αντιστοιχούν σε κάθε όρο της προσέγγισης.

Αν αυτές οι λύσεις ήταν φτιαγμένες ως διαφορά κάποιου διανυσματος, τότε τα ολοκληρώματα αυτών των όρων θα μπορούσαν να μετασχηματιστούν στο σύνορο με το θεώρημα διαφορών. Οι Nardini και Brebbia την ονόμασαν Δυαδική Μέθοδο, αφού γίνεται χρήση του θεωρήματος της δυαδικότητας και στην συζυγή (complimentary) συνάρτηση και στη σειρά των ειδικών λύσεων. Η μέθοδος DRM έχει δυο μειονεκτήματα. Το πρώτο έχει σχέση με την φύση της προσέγγισης του μη ομογενούς όρου. Εγείρονται ερωτήσεις σχετικά με τις συναρτήσεις που θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν, πόσα points απαιτούνται για την προσέγγιση του όρου σε όλο το π.ο. και που θα πρέπει

να βρίσκονται. Το άλλο έχει να κάνει με τον αποθηκευτικό χώρο που απαιτείται για την αριθμητική λύση. Συνολικά, έχουμε πέντε πλήρεις πίνακες με διαστάσεις τουλάχιστον ίσες με τους βαθμούς ελευθερίας που χρειάζονται για αποθηκευτούν οι ολοκληρούμενοι πυρήνες της θεμελιώδους λύσης και της παραγώγου της, τις μερικές λύσεων, τις συναρτήσεις βάσης και μια πέμπτη για εκτέλεση πράξεων.

2.5.2 Η Δυναμική Μέθοδος στον Προσδιορισμό Ακουστικών Συχνοτήτων

ii. Συνοριακού Τύπου mass πίνακας

Σύμφωνα με τα παραπάνω για την μέθοδο DR/BEM εφαρμόζοντας την σταθμισμένη μέθοδο Galerkin η μερική διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται

$$\int_{\Omega} p_i^* \cdot [(1/c^2) \partial^2 p / \partial r^2 - \nabla^2 p] d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

όπου p_i^* είναι η θεμελιώδης λύση της 3-D εξίσωσης Laplace που ικανοποιεί την εξίσωση.

$$\nabla^2 p_i^* + \Delta^i = 0 \quad (2.20)$$

όπου Δ^i είναι η συνάρτηση Dirac στο σημείο πηγής του π.ο..

Για την 3-D περίπτωση σε αυτή την εργασία το p_i^* δίνεται από

$$p_i^*(\xi, x_i) = 1/4\pi r \quad (2.21)$$

ξ και x_i είναι τα σημεία πεδίου και πηγής, αντιστοίχως, και $r = \text{abs}(\xi - x_i)$ η απόσταση μεταξύ των παραπάνω σημείων.

Αντικατάσταση της (2.19) στην (2.20) σε συνάρτηση με το θεώρημα του Green οδηγεί τελικά στην παρακάτω ισότητα

$$p_i^* \cdot [(1/c^2) \partial^2 p / \partial r^2 - \nabla^2 p] dV + c_i p_i + \oint_{\Gamma} p \cdot \partial p_i^* / \partial n = \oint_{\Gamma} p_i^* \cdot \partial p / \partial n d\Gamma \quad (2.22)$$

όπου c_i ισούται με $1/2$ ή 1 για ένα επίπεδο (smooth) σύνορο ή ένα εσωτερικό σημείο αντιστοίχως.

Στα συμβατικά Συνοριακά Στοιχεία, το σύνορο διακριτοποιείται σε ένα αριθμό συνοριακών στοιχείων όπου σταθερές, γραμμικές και τετραγωνικές παρεμβολές θεωρούνται για την ακουστική πίεση και την ταχύτητα. Υπενθυμίζεται ότι η κανονική συνιστώσα της ταχύτητας v_n είναι ανάλογη με την πρώτη παράγωγο της ακουστικής πίεσης ($\partial p / \partial n = -j\omega \rho_0 v_n$) με το ω να δείχνει την γωνιακή ταχύτητα, το ρ_0 την πυκνότητα του ακίνητου ρευστού, και $j^2 = -1$.

Τώρα η παρεμβολή πρέπει να γίνει για τους αδρανειακούς όρους μέσω αναπτύγματος σε σειρά

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}, \xi_j) \cdot \alpha_j(t) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) \cdot \alpha_j(t) \quad (2.23)$$

όπου \mathbf{x} είναι ένα σημείο μέσα στην κοιλότητα, ξ_j είναι ένας συνοριακός κόμβος και $f_j = (\mathbf{x}, \xi_j)$ είναι συνάρτηση βάσης που αντιστοιχεί στον κόμβο με αύξοντα αριθμό j . Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή τα αποτελέσματα βελτιώνονται όταν το άθροισμα επεκτείνεται στην εξ. (2.23) μέσω κάποιων εσωτερικών κόμβων. (Brebbia 1985 [20]; Kanarachos & Provatidis 1987 [41]; Loeffler & Mansur 1987 [48]; Provatidis & Kanarachos 1995 [61]). Παίρνοντας την δευτερη παράγωγο του χρόνου στην εξ. (2.23) και αντικαθιστώντας στην (2.22) έχουμε

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\alpha} + \mathbf{H} \cdot \dot{p} = \mathbf{G} \cdot v \quad (2.24)$$

όπου \mathbf{H} και \mathbf{G} είναι οι συμβατικοί στατικοί πίνακες. (Brebbia & Dominguez 1992 [18]). Αν το ομαλό σύνορο διακριτοποιηθεί χρησιμοποιώντας n κομβικά σημεία τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{M}(n \times n)$ δίνονται

$$m_{ij} = (1/c^2) \cdot \int_{\Omega} p_i^* \cdot f_j d\Omega \quad (2.25)$$

Τώρα προσδιορίζουμε ένα διπλό σέτ συναρτήσεων έτσι ώστε

$$\nabla^2 \psi_j = f_j \quad (2.26)$$

Αντικαθιστώντας την (2.26) στη (2.25) και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green έχουμε

$$m_{ij} = (1/c^2) \cdot \left\{ \oint_{\Gamma} p_i^* (\partial \psi_j / \partial n) d\Gamma - [c_i \cdot \psi_j(x_i) + \oint_{\Gamma} (\partial p_i^* / \partial n) \cdot \psi_j d\Gamma] \right\} \quad (2.27)$$

Έτσι σύμφωνα με την (2.27) τα στοιχεία του πίνακα μάζας μπορούν να υπολογισθούν ως συνοριακά ολοκληρώματα. Επίσης αν η συνεχής συνάρτηση ψ_j προσεγγισθεί γύρω από κάθε συνοριακό στοιχείο, με τον ίδιο τρόπο με την ταχύτητα και την πίεση, η (2.27) απλοποιείται

$$\mathbf{M} = (1/c^2) \cdot (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\eta} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\psi}) \quad (2.28)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση μεταξύ των συνοριακών ακουστικών πιέσεων p και των συντελεστών α μέσω ενός πίνακα \mathbf{F}

$$\mathbf{p} = \mathbf{F} \alpha \quad (2.29)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (2.24) με τον αντίστροφο του πίνακα \mathbf{G} (υποθέτωντας ομαλό σύνορο) γίνεται

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}(t) \quad (2.30)$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{M} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \quad (2.32)$$

Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας χρησιμοποιούμε έναν κατάλληλο πίνακα \mathbf{L} γνωστό από τις διαδικασίες σύζευξης BEM/FEM (Brebbia & Dominguez 1992 [18]) ο οποίος μετατρέπει τις εξαρτώμενες από το χρόνο σωματιδιακές ταχύτητες (particle velocity) $\mathbf{v}(t)$ σε συνοριακές κομβικές δυνάμεις $\mathbf{f}(t)$ όπως παρακατω.

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{L}\mathbf{v}(t) \quad (2.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την εξίσωση (2.30) με τον πίνακα \mathbf{L} με βάση την εξίσωση (2.33) η εξ. (2.30) γίνεται

$$\mathbf{M}\mathbf{p} + \mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{f}(t) \quad (2.34)$$

όπου

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{K} \quad (2.35)$$

Ετσι τα DR/BEM οδηγούν τελικά σε σχηματισμό πινάκων παρόμοιο με τα πεπερασμένα. Η αριθμητική εμπειρία στις σχέσεις (2.34) και (2.35) σε στατικά και δυναμικά προβλήματα με υποπεριοχές έχει ερευνηθεί (Kanakarachos & Provatidis 1992). Πρέπει να ξεκαθαρισθεί ότι οι πίνακες \mathbf{M} και \mathbf{K} στην εξ. (2.35) είναι μη συμμετρικοί αλλά παρόλα αυτά οι πιο συνηθισμένες διαδικασίες FEM όπως οι ιδιοτιμές, η ιδιοανυσματική ανάλυση (modal analysis) και η χρονική ολοκλήρωση μπορούν να γίνουν.

2.5.3 Συναρτήσεις Βάσης

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μελετήθηκε η επίδοση των παρακάτω συναρτήσεων βάσης

Ι.Κωνικές Ακτινικές Συναρτήσεις

Οι Nardini και Brebbia 1982 [50] πρότειναν τις ακόλουθες κωνικές συναρτήσεις βάσης.

$$F_j = f(\mathbf{x}, \xi_j) = C - r \quad (2.36)$$

όπου C είναι η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δυο σημείων στο σώμα και r η απόσταση μεταξύ \mathbf{x} και ξ_j . Συγκεκριμένα για την εξ. (2.36) το διπλό συναρτησιακό σέτ μπορεί να δωθεί ως (Kanakarachos & Provatidis 1987)

$$\psi_j = r^3/9 - Cr^2/4 \quad (2.37)$$

ii. Υψηλόβαθμες Ακτινικές Συναρτήσεις

Ο Wendland (1995) [70] πρότεινε τις παρακάτω συναρτήσεις βάσης

Συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού

$$\begin{aligned} f &= (1 - R/d)^2 & R \leq d \\ f &= 0 & R > d \end{aligned} \quad (2.38)$$

Συναρτήσεις 5^{ου} βαθμού

$$F = (1 - R/d)^4 (1 + 4R/d) \quad (2.39)$$

Συναρτήσεις 8^{ου} βαθμού

$$f = (1 - R/d)^6 [3 + 18R/d + 35(R/d)^2] \quad (2.40)$$

Συναρτήσεις 11^{ου} βαθμού

$$f = (1 - R/d)^8 [1 + 8R/d + 25(R/d)^2 + 32(R/d)^3] \quad (2.41)$$

Στις εξισώσεις (2.38) έως (2.41) η μεταβλητή d συμβολίζει την ακτίνα της συμπαγούς στήριξης (compact support). Σε αυτή την εργασία το d επιλέχθηκε ίσο με την μέγιστη απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε σημείων το π.ο. η οποία είναι η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου. Με άλλα λόγια οι συναρτήσεις επιλέχθηκαν έτσι ώστε να είναι θετικές σε όλο το π.ο.

iii. Thin Plate Splines(TPS)

Οι Goldberg και Chen [36] πρότειναν ότι τα TPS $f_j = r_j^2 \ln r_j$ ίσως είναι πιο μαθηματικά «υπερασπιδισμη» επιλογή σε σχέση με τα $(1+r)$ -RBF. Αργότερα ο Goldberg [38] ισχυρίστηκε ότι η αποδοτικότητα των DR/BEM επηρεάζονται θετικά όταν τα TPS ακολουθούνται από γραμμικούς όρους όπως παρακάτω (N = αριθμός συνοριακών κόμβων)

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j r_j \ln r_j + ax + by + c \quad (2.42)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \quad (2.43)$$

iv. Πολυτετράγωνα

Οι Goldberg et al.[37] έδειξε ότι με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου σχήματος c τα πολυτετράγωνα $(r^2 + c^2)^{1/2}$ παράγουν σημαντική αύξηση στην ακρίβεια σε σχέση με τα TPS και τα $(1+r)$ -RBF .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Η ενότητα αυτή της διπλωματικής εργασίας περιλαμβάνει την εφαρμογή της αντίστοιχης θεωρίας των προηγούμενων σελίδων σε πρόγραμμα στην γλώσσα προγραμματισμού Fortran και των υπολογισμό ιδιοτιμών σε ένα κύβο και σε ένα παραλληλεπίπεδο. Θα λέγαμε ότι αποτελεί στην ουσία την 'καρδιά' της εργασίας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μέρη του προγράμματος, οι πραγματικές ιδιοτιμές για κάθε περίπτωση υπολογισμένες αναλυτικά, οι υπολογισμένες ιδιοτιμές για διάφορες συναρτήσεις βάσης αλλά και για διαφορετικούς συντελεστες στις συναρτήσεις αυτές. Επίσης υπολογίζεται και το ποσοστιαίο σφάλμα των ιδιοτιμών που υπολογίζονται με την Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων και τα διαγράμματα που προκύπτουν από όλα τα παραπάνω καθώς και τα τελικά συμπεράσματα. Οι πίνακες που υπάρχουν όλα τα αποτελέσματα βρίσκονται στο παράρτημα στο τέλος της εργασίας.

3.1 Κύβος

Ο κύβος έχει διαστάσεις $1 \times 1 \times 1$ και μοντελοποιήθηκε με 26 συνοριακούς κόμβους συνολικά. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν 9 κόμβοι οι οποίοι δημιουργούν 4 συνοριακά στοιχεία σε κάθε πλευρά. Το αρχείο που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται παρακάτω. Εύκολα διακρίνονται οι 26 κόμβοι και οι 9 κάθε πλευράς. Η ταχύτητα αναφοράς για τον ήχο είναι $c=1\text{m/sec}$. Οι συνοριακές συνθήκες θεωρούνται σκληρά τοιχώματα (free-free) και οι ιδιοτιμές δίνονται από τη σχέση

$$\omega_{mnq}^2 = \pi^2 c^2 [(m/L_x)^2 + (n/L_y)^2 + (q/L_z)^2] \quad (3.1)$$

με $m, n, q = 0, 1, 2, \dots$

ενώ οι ιδιομορφές

$$u(x, y) = \cos(m\pi x/L_x) + \cos(n\pi y/L_y) + \cos(q\pi x/L_z) \quad (3.2)$$

με $m, n, q = 0, 1, 2, \dots$

Το παρακάτω αρχείο Tetragon.txt αποτελεί το αρχείο δεδομένων του κώδικα.

PHYSICAL PROPERTIES OF STEEL

0.8 0.8

GEOMETRY OF A UNIT CUBE

1 0.0 0.0 0.0

2 0.5 0.0 0.0

3 1.0 0.0 0.0

4 0.0 0.0 0.5

5 0.5 0.0 0.5

6 1.0 0.0 0.5

7 0.0 0.0 1.0

8 0.5 0.0 1.0

9 1.0 0.0 1.0

10 0.0 1.0 0.0

11 0.5 1.0 0.0

12 1.0 1.0 0.0

13 0.0 1.0 0.5

14 0.5 1.0 0.5

15 1.0 1.0 0.5

16 0.0 1.0 1.0

17 0.5 1.0 1.0

18 1.0 1.0 1.0

19 0.0 0.5 0.0

20 0.5 0.5 0.0

21 1.0 0.5 0.0

22 0.0 0.5 1.0

23 0.5 0.5 1.0

24 1.0 0.5 1.0

25 0.0 0.5 0.5

26 1.0 0.5 0.5

GEOMETRIC TOPOLOGY

1 1 3 9 7 2 6 8 4 5

2 10 16 18 12 13 17 15 11 14

3 7 9 18 16 8 24 17 22 23

4 1 10 12 3 19 11 21 2 20

5 1 7 16 10 4 22 13 19 25

6 3 12 18 9 21 15 24 6 26

KODES

3

1 36 1 0.0

37 45 0 0.0

46 54 0 2.0

WHAT_TO_DO

0

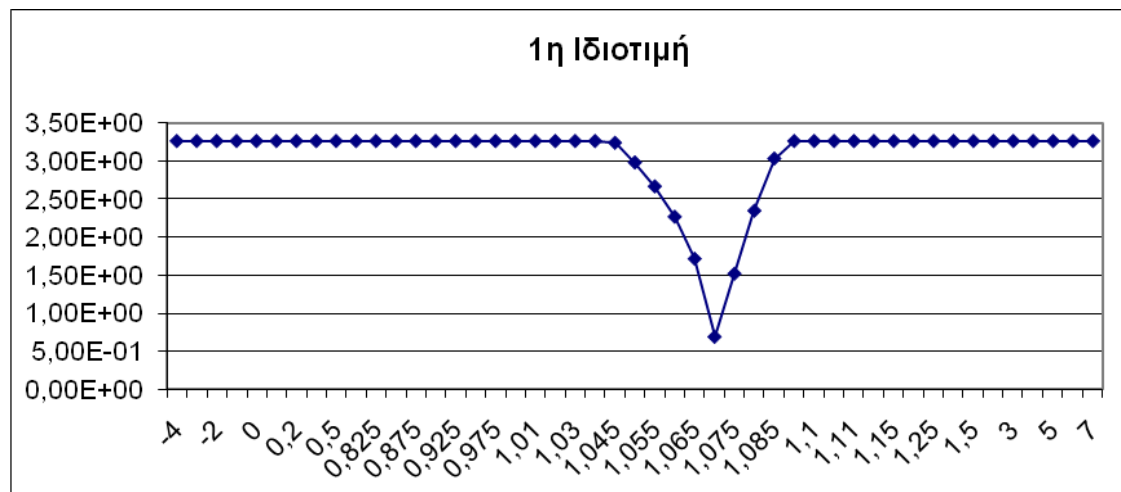
Στη συνέχεια, παρατίθενται αποτελέσματα (ιδιοτιμές) για διάφορες συναρτήσεις βάσης.

3.1.1 Κωνική Ακτινική Συνάρτηση $f_j = c-r$

Για την συνάρτηση βάσης $c-r$ οι ιδιοτιμές υπολογίζονται με επικάμπυλια ολοκλήρωση, ενώ για τις υπόλοιπες συναρτήσεις βάσης υπολογίζονται με χωρική ολοκλήρωση.

Στις επόμενες σελίδες βρίσκονται τα αποτελέσματα καθώς και οι γραφικές παραστάσεις. Παντού ο οριζόντιος άξονας είναι η σταθερά c .

Η πρώτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πραγματική τιμή είναι 3,14 και η μέθοδος μας δίνει 3,26. Δηλαδή το σφάλμα είναι 3,8% όπως φαίνεται και παρακάτω στα διαγράμματα. Το σφάλμα που παρουσιάζεται αυξάνει σημαντικά από $c=1,04$ έως $c=1,09$ και η μέγιστη τιμή του για $c=1,07$ δηλαδή στο 65% του μήκους της διαγωνίου, όπως ήταν αναμενόμενο. Το σφάλμα φτάνει στο 78% για αυτή την τιμή του c .

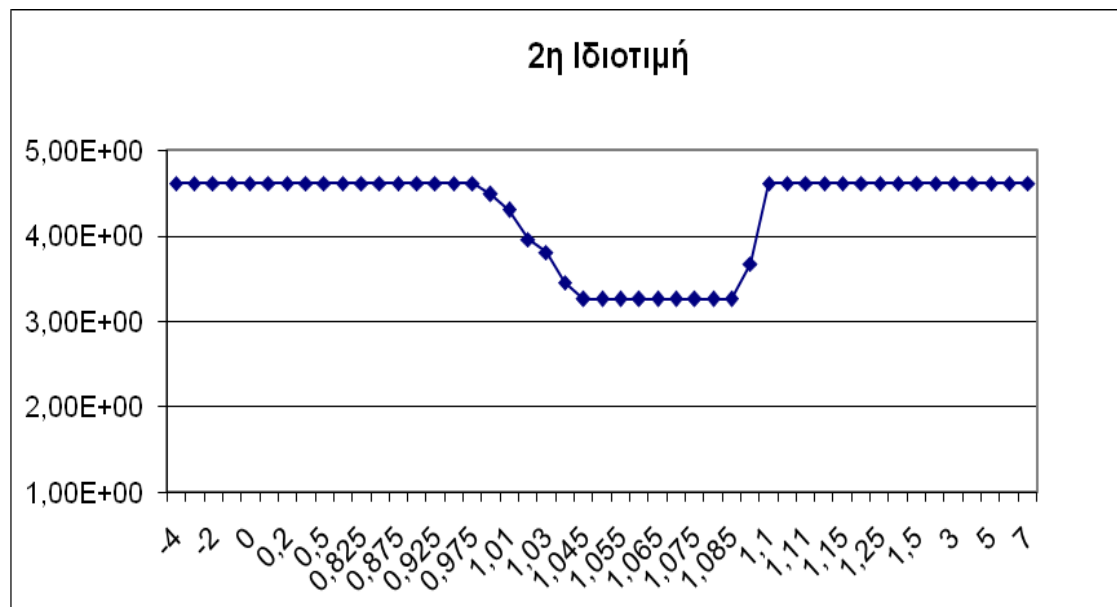


Σχήμα 3.1

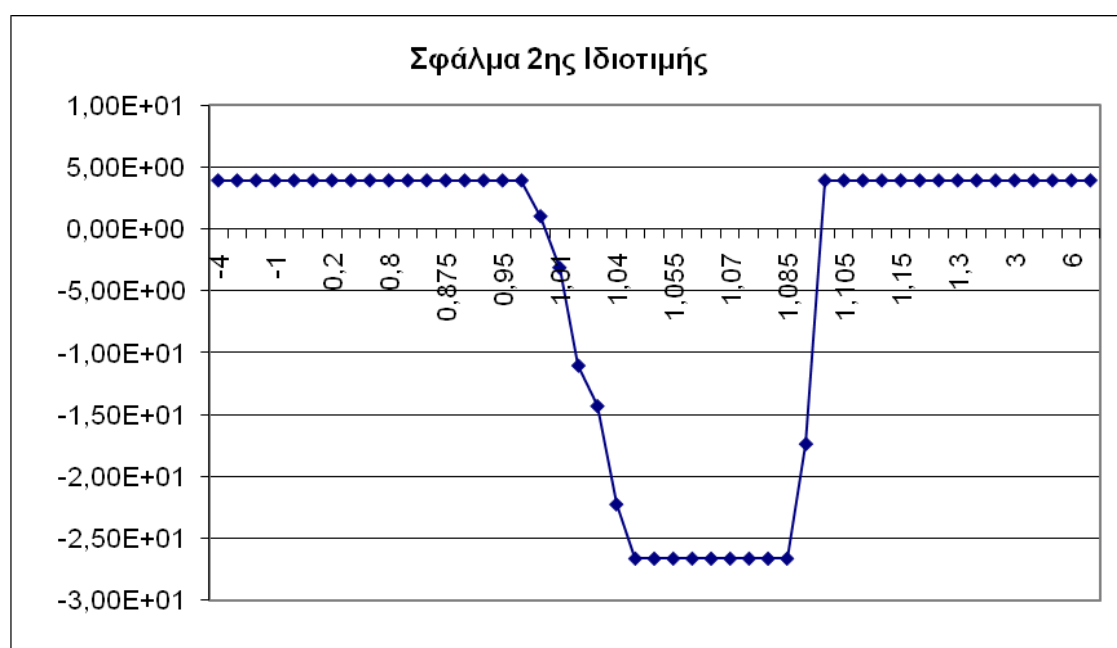


Σχήμα 3.2

Και η δεύτερη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πραγματική τιμή είναι 4,44 και η μέθοδος μας δίνει 4,46. Το σφάλμα είναι της τάξης του 3,92%. Το σφάλμα που παρουσιάζεται αυξάνει σημαντικά από $c=0,95$ έως $c=1,1$. Για $c=1,045$ έως $c=1,085$ σταθεροποιείται στην μέγιστη τιμή του που είναι 3,26. Το σφάλμα φτάνει στο 26,6% για αυτές τις τιμές του c .

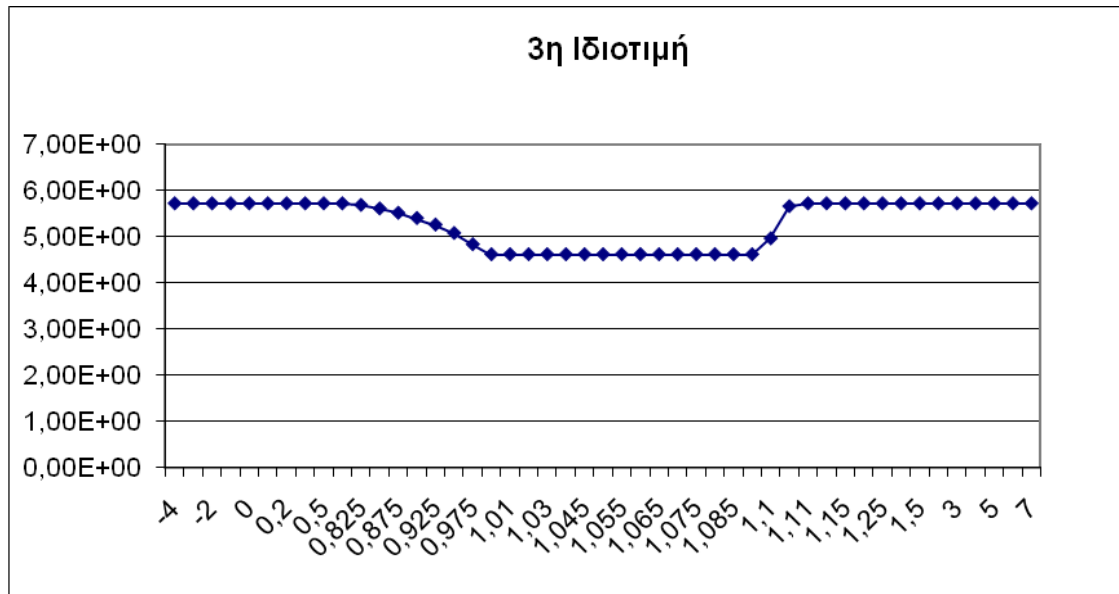


Σχήμα 3.3

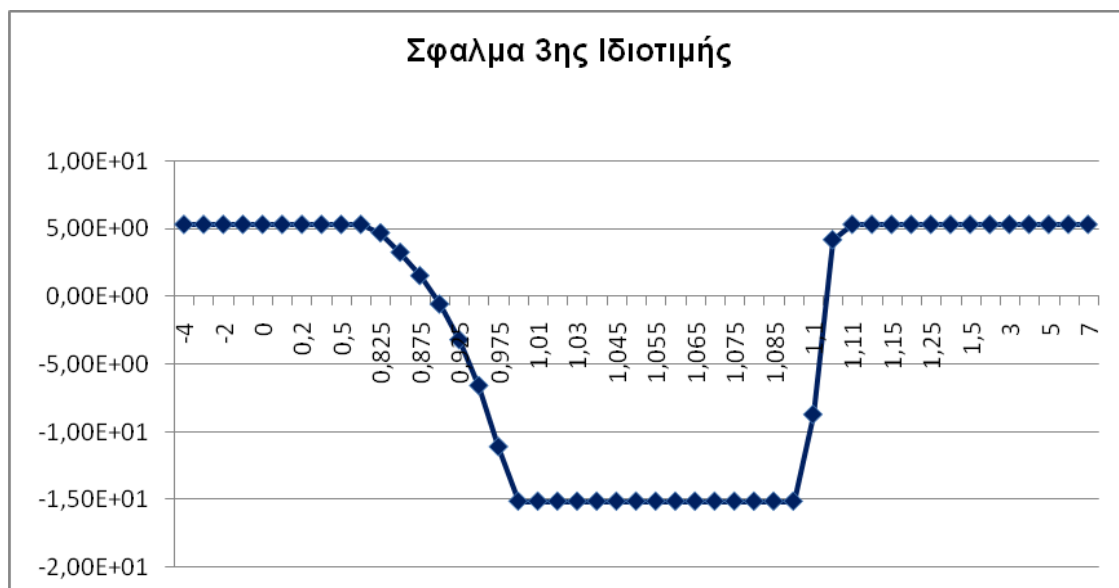


Σχήμα 3.4

Και η τρίτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πραγματική τιμή είναι 5,44 και η μέθοδος μας δίνει 5,73. Το σφάλμα είναι της τάξης του 5,31%. Το σφάλμα που παρουσιάζεται αρχίζει να αυξάνει από $c=0,8$ και σταθεροποιείται στην μέγιστη τιμή του από $c=1$ έως $c=1,09$. Το σφάλμα φτάνει στο 15,2% για αυτές τις τιμές του c .

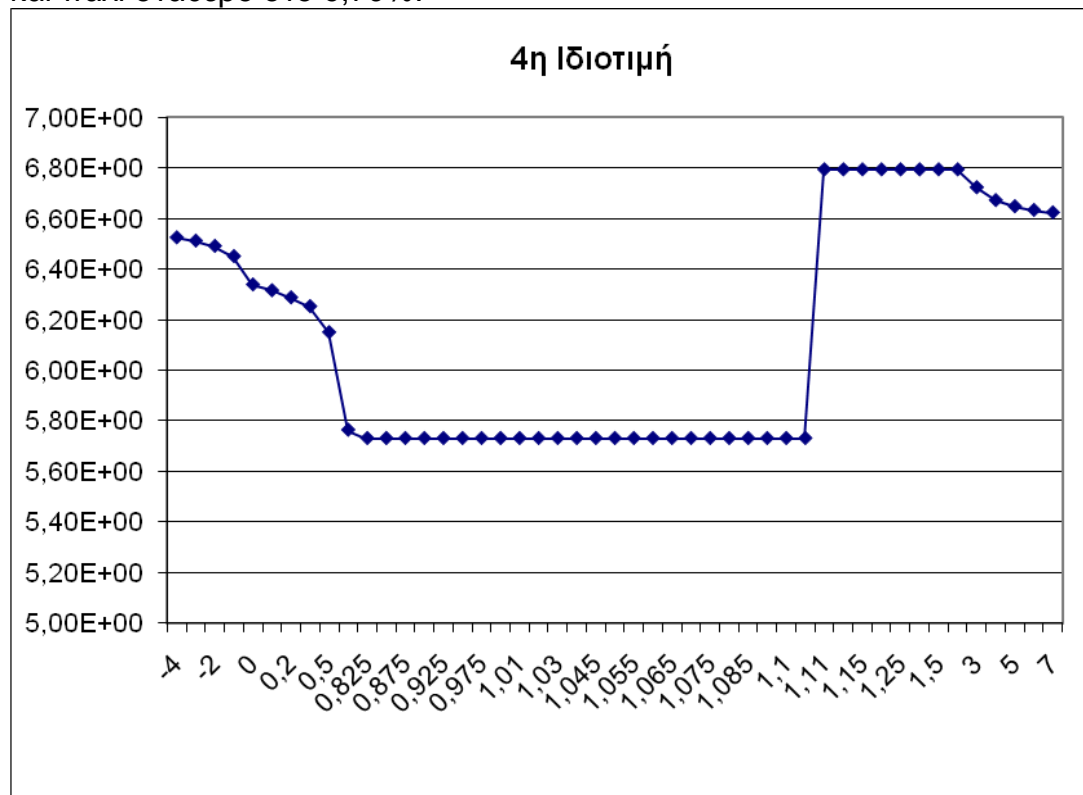


Σχήμα 3.5

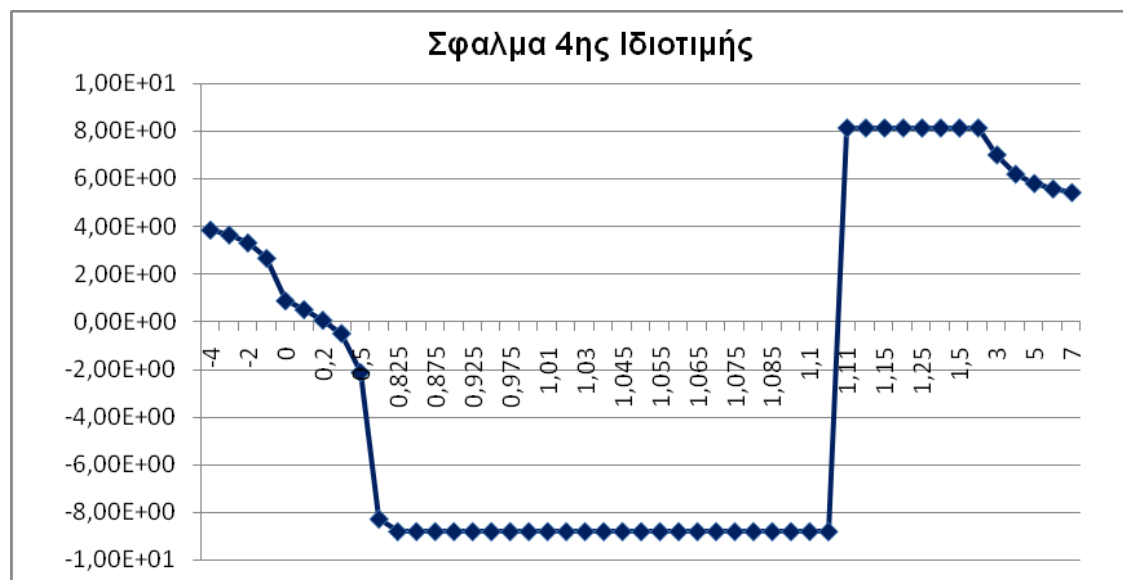


Σχήμα 3.6

Η τέταρτη ιδιοτιμή δεν υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια αλλά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το σφάλμα παραμένει σταθερό για μεγάλο εύρος. Από $c=0.825$ έως $c=1,105$ είναι 8,79%. Επίσης από $c=1,11$ έως $c=1,79$ παραμένει και πάλι σταθερό στο 6,79%.



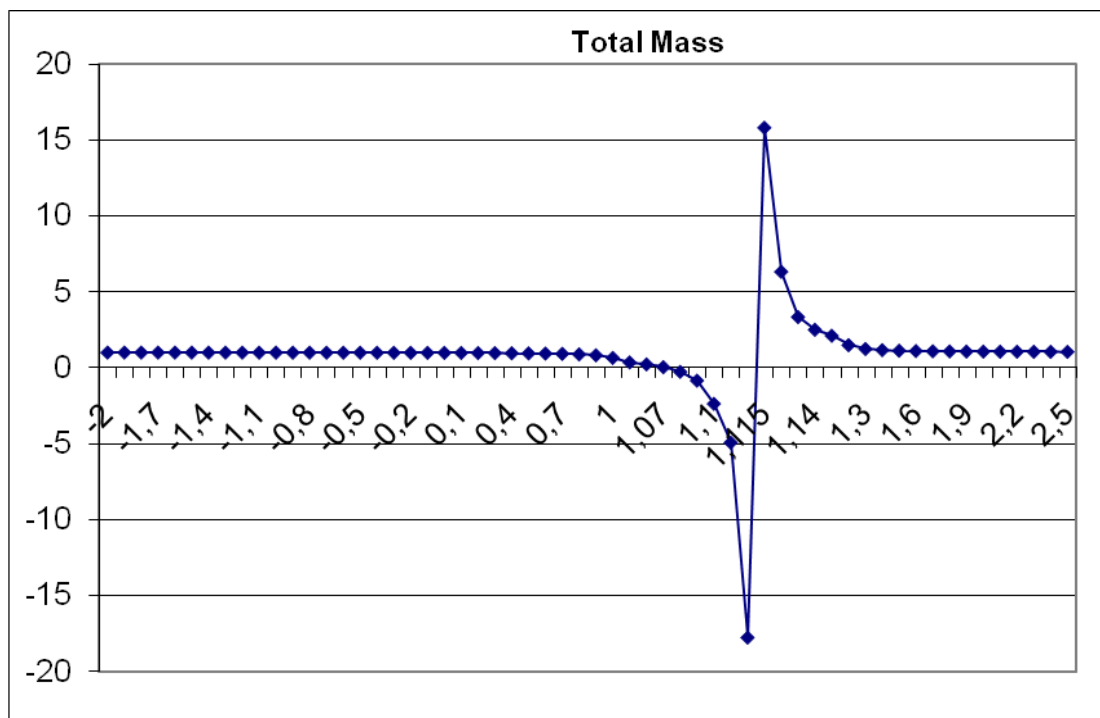
Σχήμα 3.7



Σχήμα 3.8

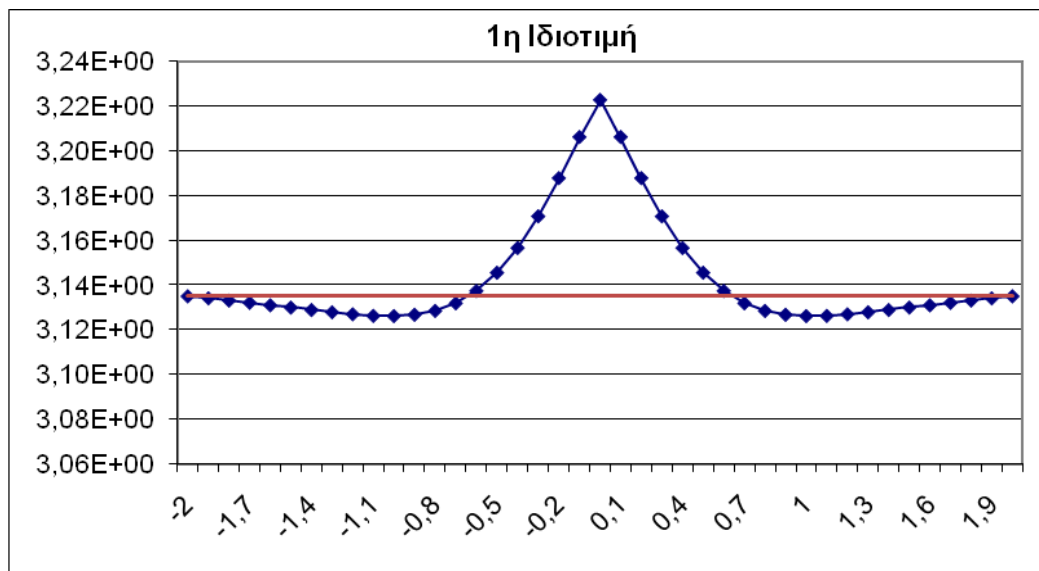
Ένας έλεγχος που αναπτύξαμε αφορά στον υπολογισμό της συνολικής μάζας που προκύπτει με βάση τα μητρώα των συνοριακών στοιχείων. Αυτή υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα αλλά και στα διαγράμματα. Το σφάλμα είναι μηδενικό και αυξάνεται από $c=0,9$ έως $c=1,2$. Θα πρέπει να σημειωθεί πως το μέγιστο και το ελάχιστο σφάλμα για $c=1,115$ και $c=1,11$,αντιστοίχως, παίρνει τιμές 1477,6% και 1877,1%.

c	total mass	c	total mass
-2	0,9874	0,9	0,8059
-1,9	0,987	1	0,6322
-1,8	0,9865	1,05	0,3361
-1,7	0,986	1,06	0,2088
			2,12E-
-1,6	0,9855	1,07	02
-1,5	0,9849	1,08	-0,283
-1,4	0,9843	1,09	-0,8612
-1,3	0,9836	1,1	-2,3871
-1,2	0,9828	1,105	-4,9371
-1,1	0,982	1,11	-17,771
-1	0,9811	1,115	15,7766
-0,9	0,9802	1,12	6,3021
-0,8	0,9791	1,13	3,3234
-0,7	0,9779	1,14	2,4879
-0,6	0,9766	1,15	2,0944
-0,5	0,9751	1,2	1,4716
-0,4	0,9734	1,3	1,2208
-0,3	0,9714	1,4	1,1444
-0,2	0,9692	1,5	1,1073
-0,1	0,9666	1,6	1,0855
0	0,9635	1,7	1,071
0,1	0,9599	1,8	1,0608
0,2	0,9554	1,9	1,0532
0,3	0,9498	2	1,0473
0,4	0,9427	2,1	1,0426
0,5	0,9332	2,2	1,0387
0,6	0,92	2,3	1,0355
0,7	0,9004	2,4	1,0328
0,8	0,8683	2,5	1,0305

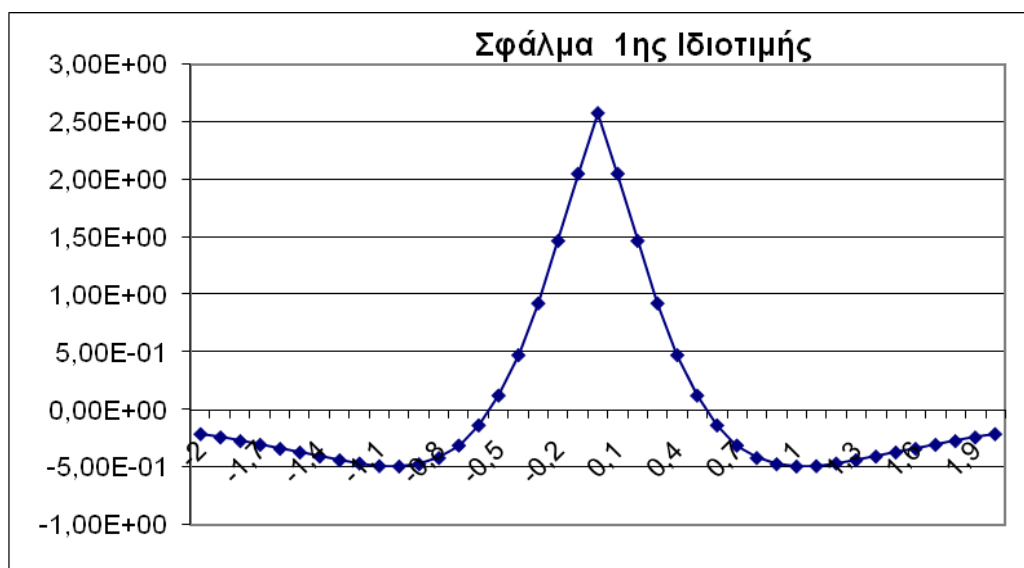


3.1.2 Multiquadrics $f_j = (r^2 + c^2)^{1/2}$

Η πρώτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ακρίβεια. Η πραγματική της τιμή είναι 3,14. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα έχουμε σχεδόν μηδενικό σφάλμα έως $c = -0,6$. Από εκεί και πέρα αυξάνεται για να φτάσει στην μέγιστη τιμή του που είναι 2,58% για $c=0$. Η υπολογιζόμενη ιδιοτιμή είναι 3,22. Για $c=0,6$ και πέρα το σφάλμα επανέρχεται σε μηδενικά επίπεδα.

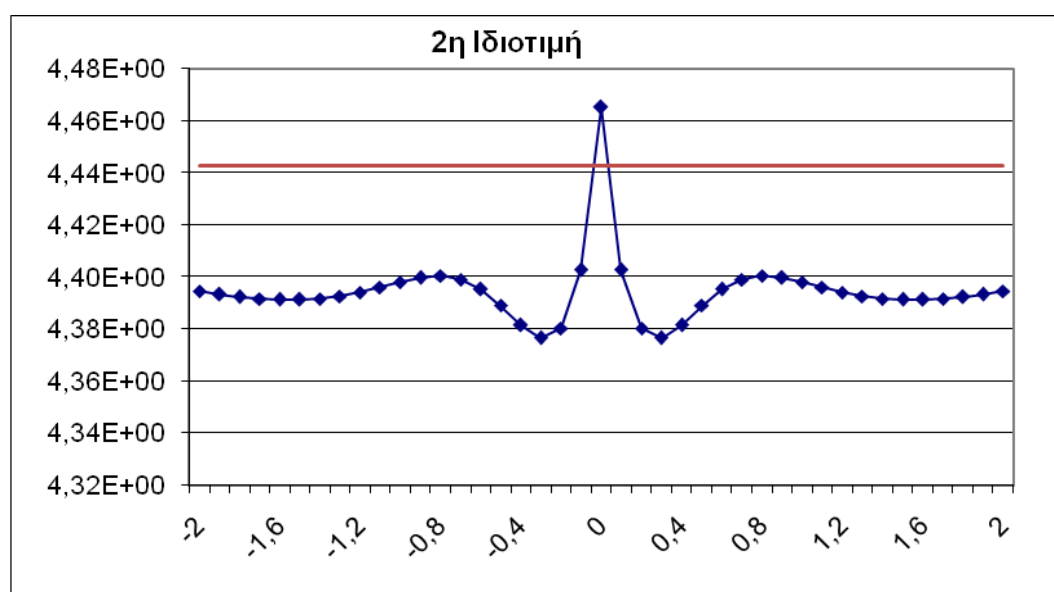


Σχήμα 3.12

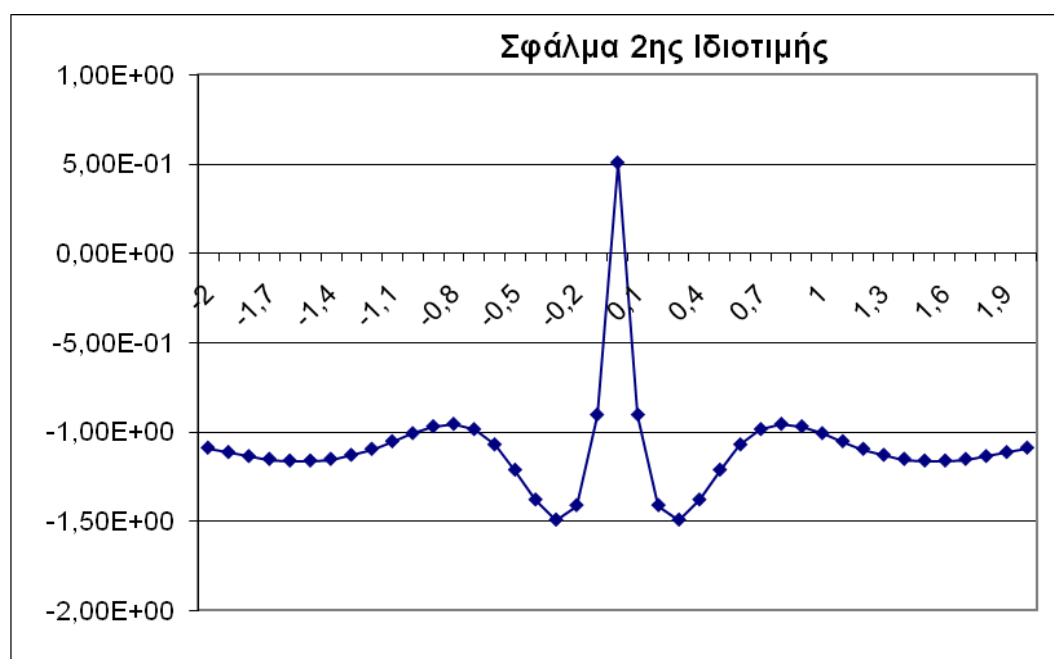


Σχήμα 3.13

Η δεύτερη ιδιοτιμή υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια. Η πραγματική τιμή είναι 4,44. Το μέγιστο σφάλμα για $c = -0.3$ και $c = 0.3$ είναι μόλις 1,49%!

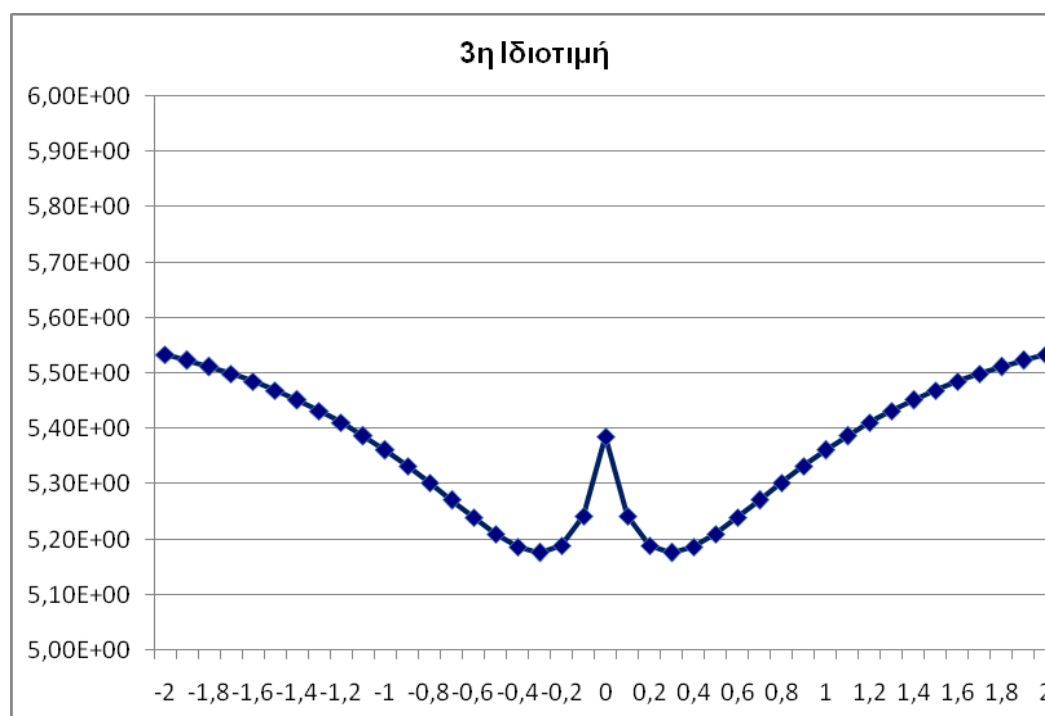


Σχήμα 3.14



Σχήμα 3.15

Η τρίτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ακρίβεια. Το μέγιστο σφάλμα είναι 4,91% για $c = -0,4$ και για $c = 0,4$. Η πραγματική ιδιοτιμή είναι 5,44 ενώ οι υπολογιζόμενες 5,19 αμφότερες. Το σφάλμα σταθεροποιείται στο 2%.

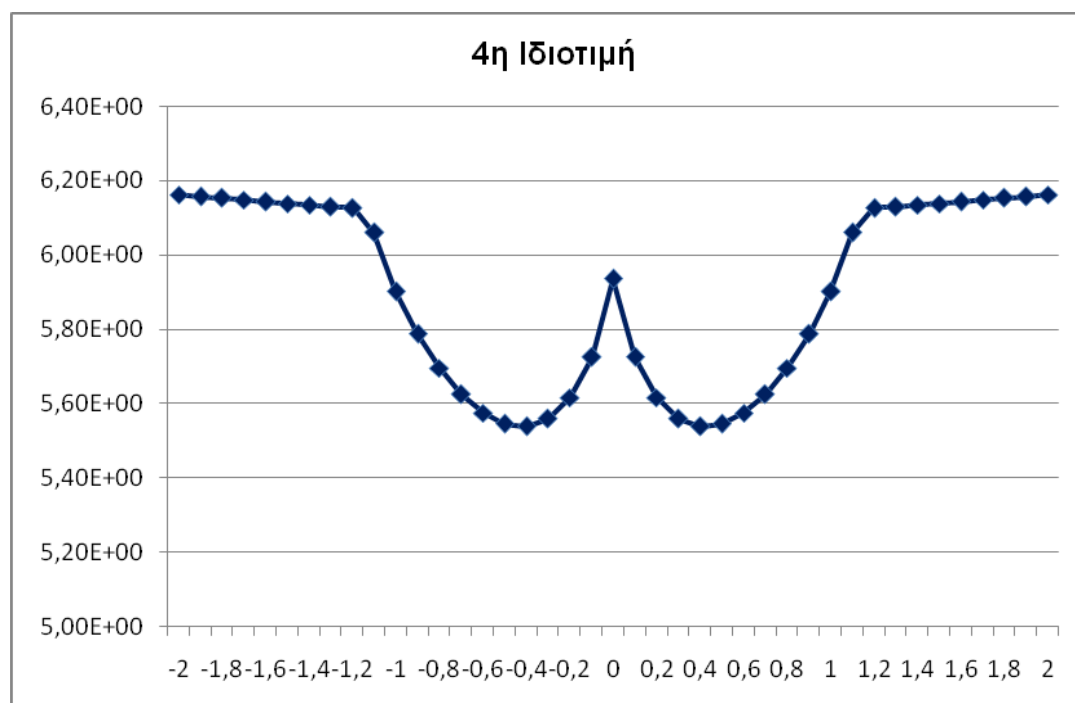


Σχήμα 3.16

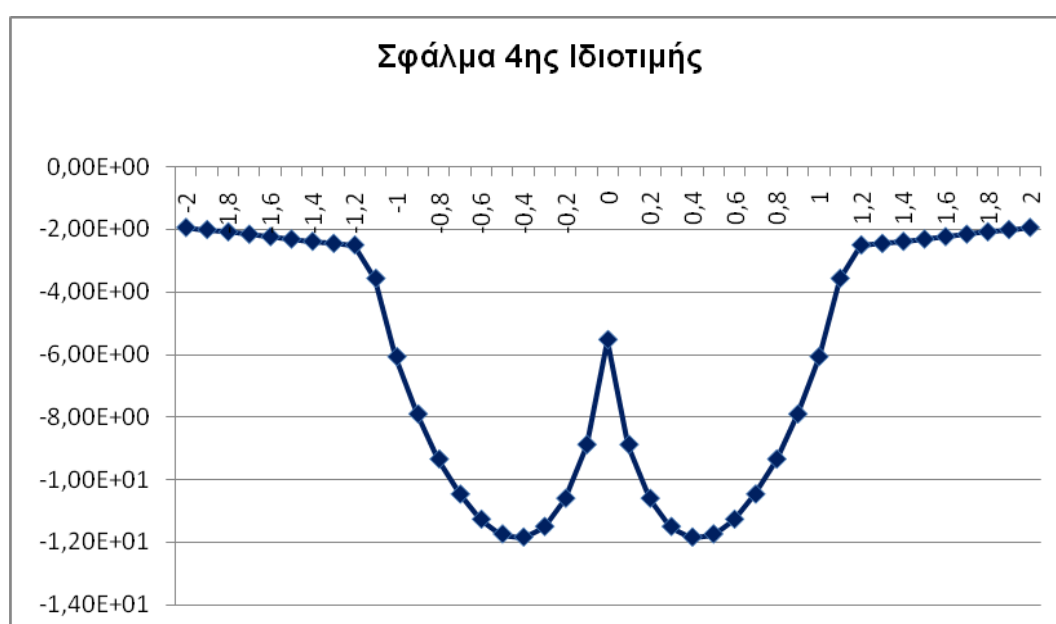


Σχήμα 3.17

Και η τέταρτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ακρίβεια. Το μέγιστο σφάλμα είναι 11,8% για $c=-0,4$ και για $c=0,4$. Η πραγματική ιδιοτιμή είναι 6,28 ενώ οι υπολογιζόμενες 5,54 αμφότερες. Το σφάλμα σταθεροποιείται στο 2%.



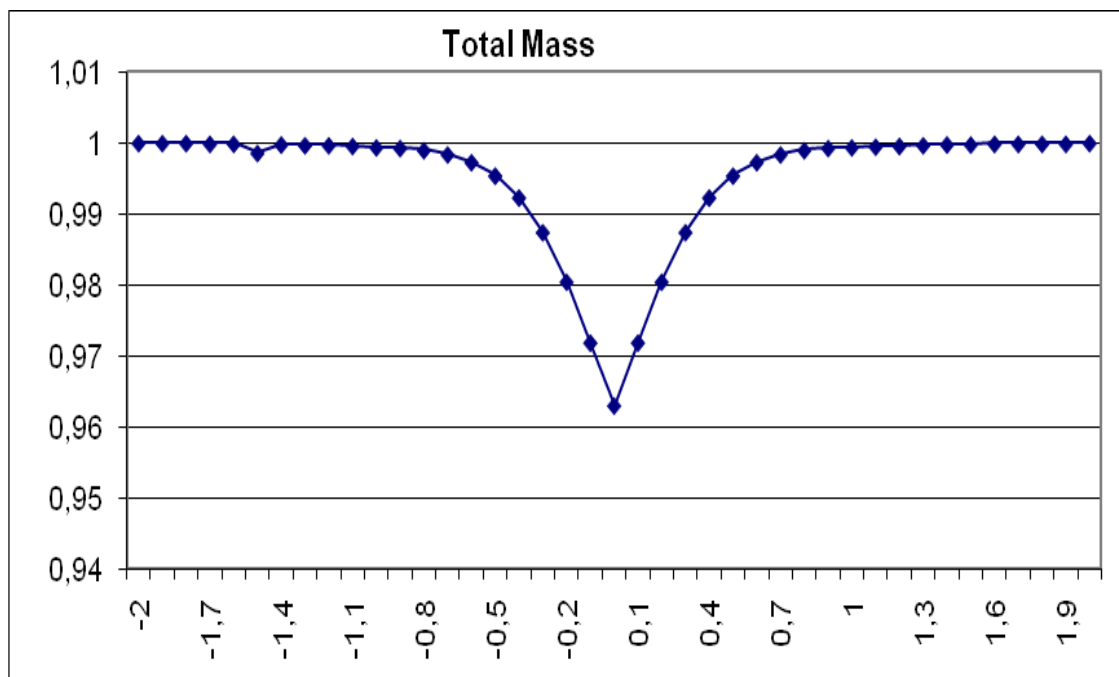
Σχήμα 3.18



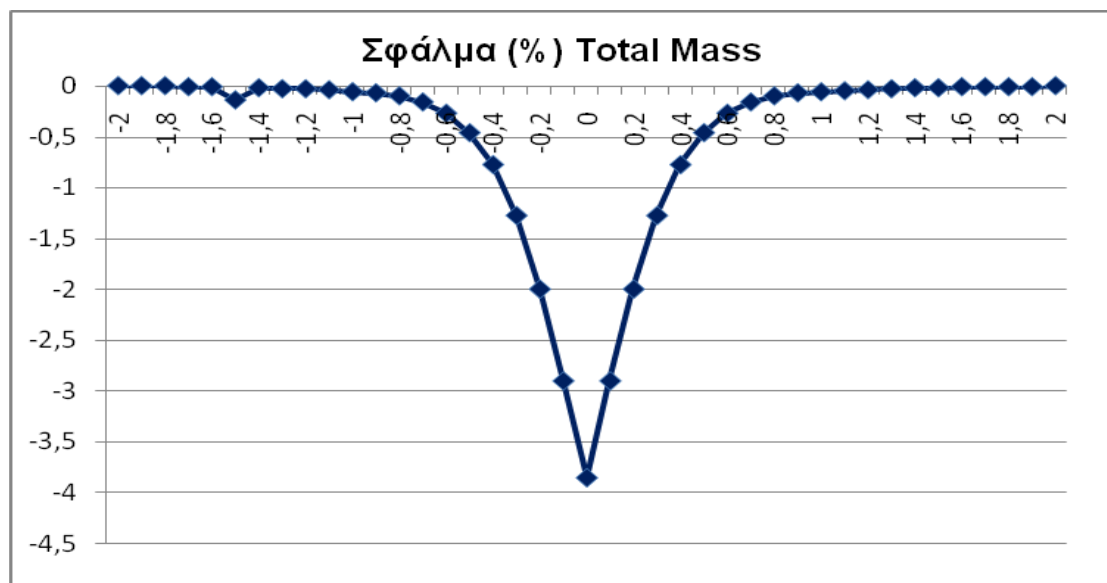
Σχήμα 3.19

Η total mass υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια όπως φαίνεται και στα διαγράμματα. Το σφάλμα είναι μηδενικό και αυξάνεται από $c = -0,8$ έως $c = 0,8$. Το μέγιστο σφάλμα για $c = 0$ είναι 0,97 δηλαδή 3,85%

c	total mass	c	total mass
-2	1	0,1	0,9718
-1,9	1	0,2	0,9804
-1,8	1	0,3	0,9874
-1,7	0,9999	0,4	0,9923
-1,6	0,9999	0,5	0,9954
-1,5	0,9986	0,6	0,9973
-1,4	0,9998	0,7	0,9984
-1,3	0,9997	0,8	0,999
-1,2	0,9997	0,9	0,9993
-1,1	0,9996	1	0,9994
-1	0,9994	1,1	0,9995
-0,9	0,9993	1,2	0,9996
-0,8	0,999	1,3	0,9997
-0,7	0,9984	1,4	0,9998
-0,6	0,9973	1,5	0,9998
-0,5	0,9954	1,6	0,9999
-0,4	0,9923	1,7	0,9999
-0,3	0,9874	1,8	0,9999
-0,2	0,9804	1,9	0,9999
-0,1	0,9718	2	1
0	0,9629		



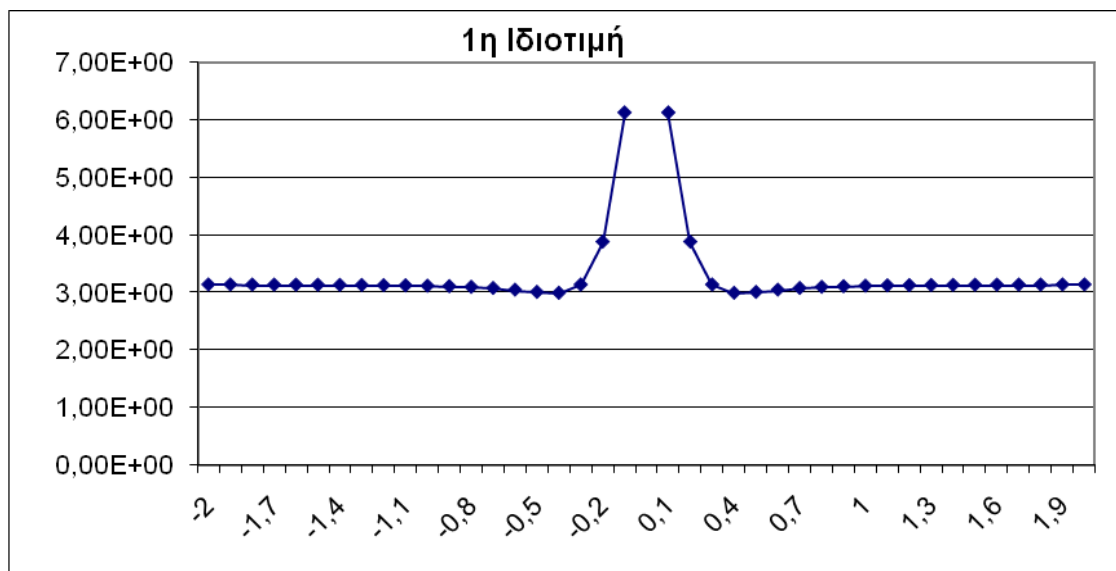
Σχήμα 3.20



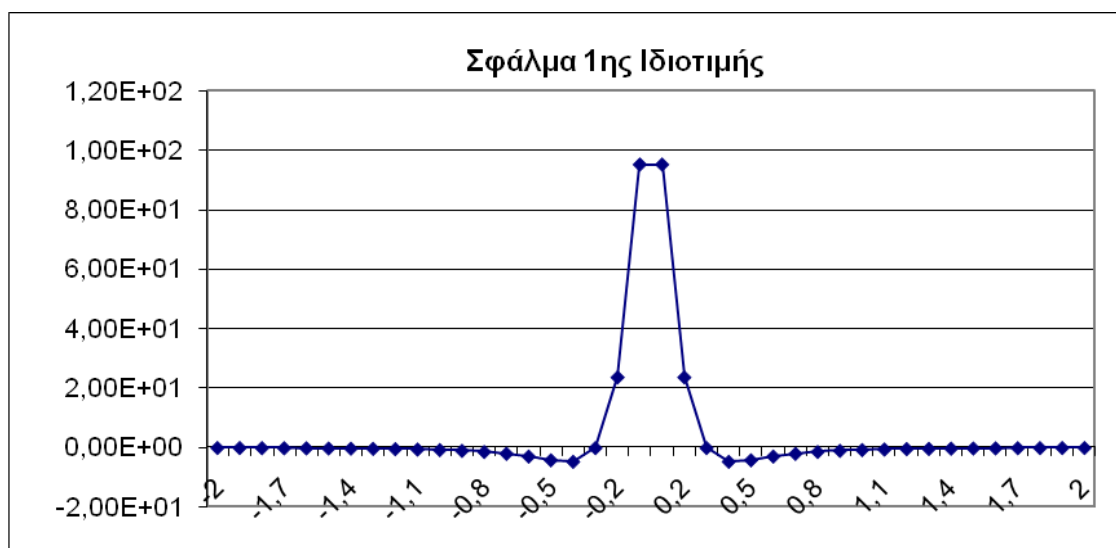
Σχήμα 3.21

3.1.3 Εκθετική Συνάρτηση $f_j = e^{-(r^2/c^2)}$

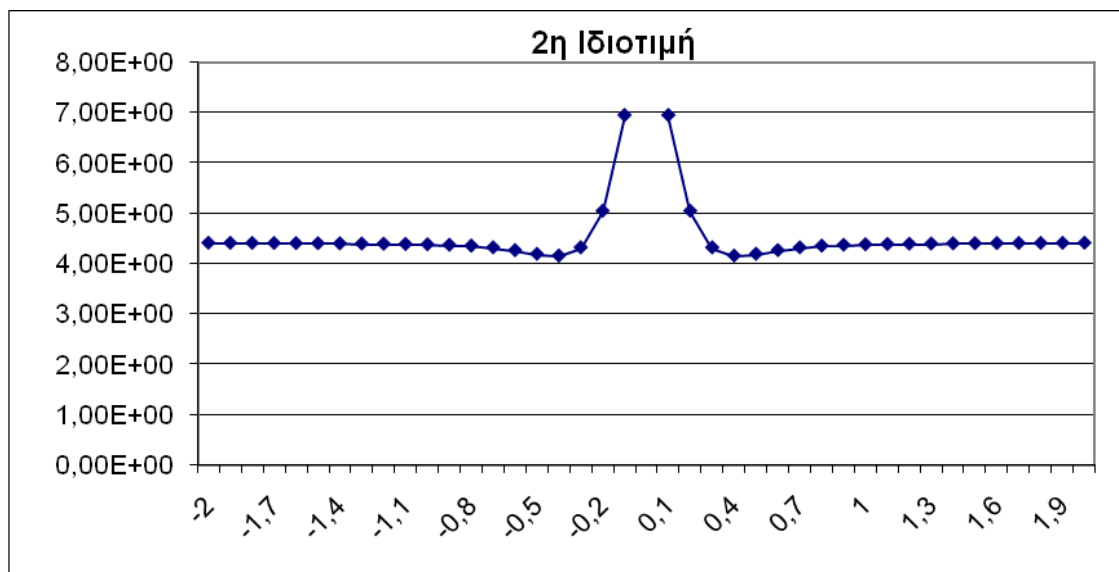
Όλες οι ιδιοτιμές υπολογίζονται με σχεδόν μηδενικό σφάλμα. Το σφάλμα αυξάνεται σημαντικά για όλες τις ιδιοτιμές κοντά στο μηδέν λόγω της φύσης της έκθετικής συνάρτησης.



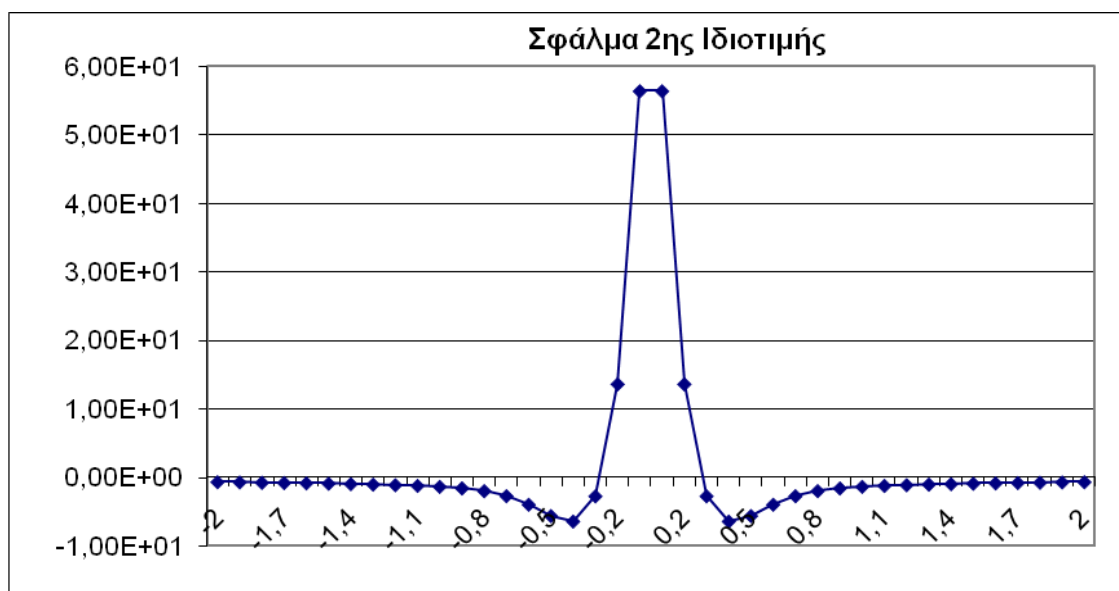
Σχήμα 3.22



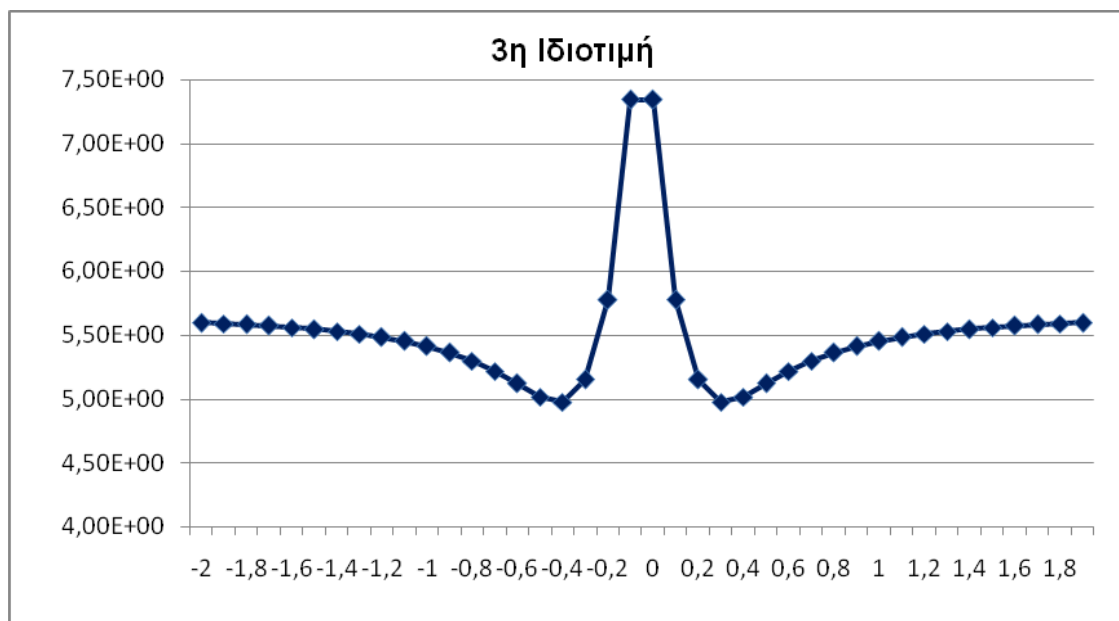
Σχήμα 3.23



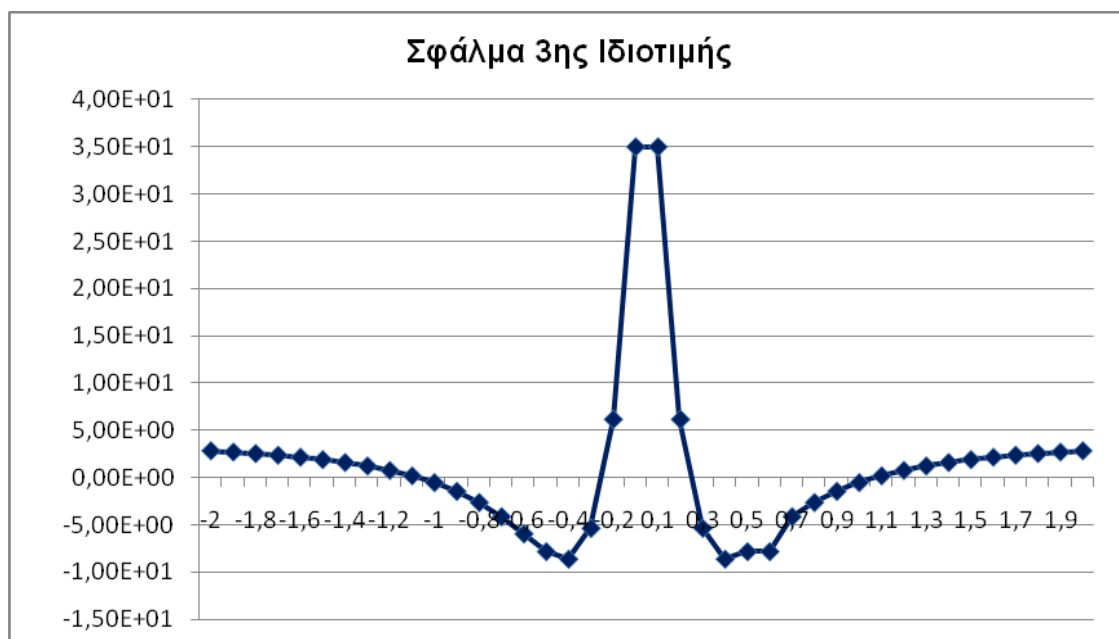
Σχήμα 3.24



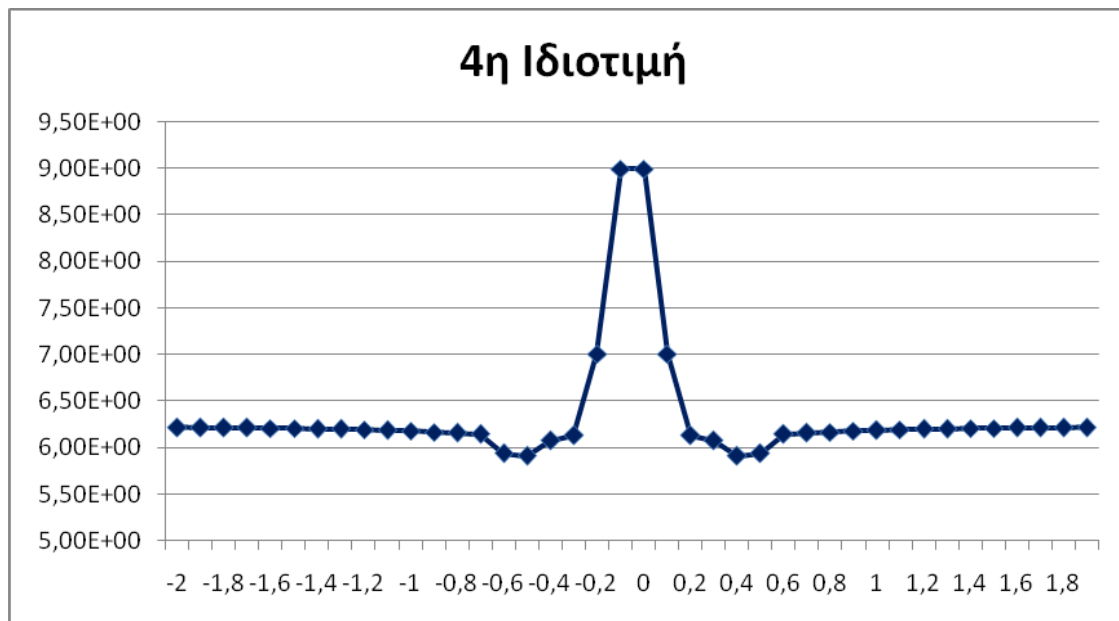
Σχήμα 3.25



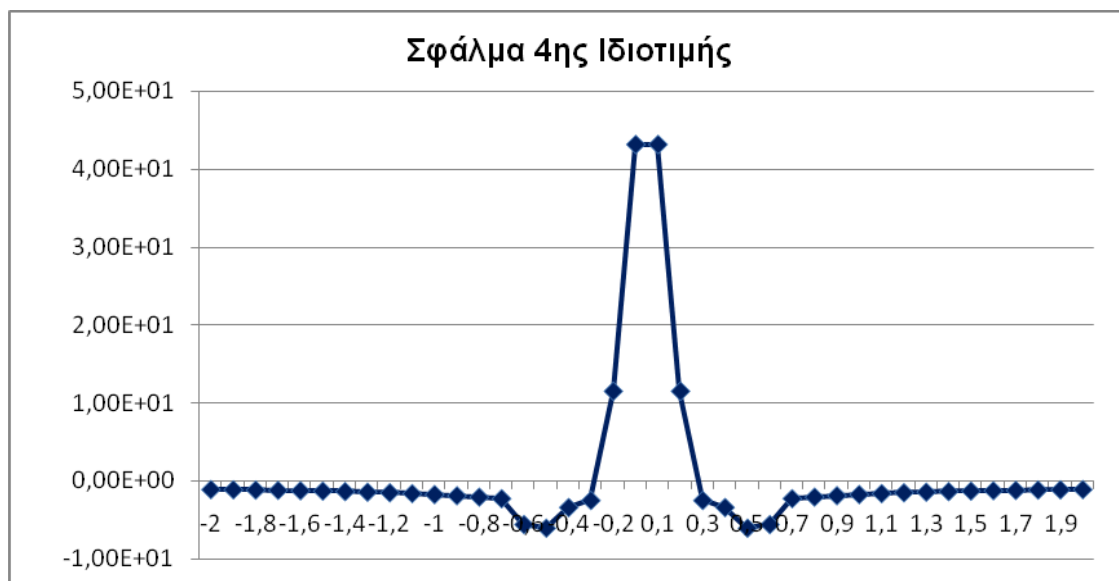
Σχήμα 3.26



Σχήμα 3.27



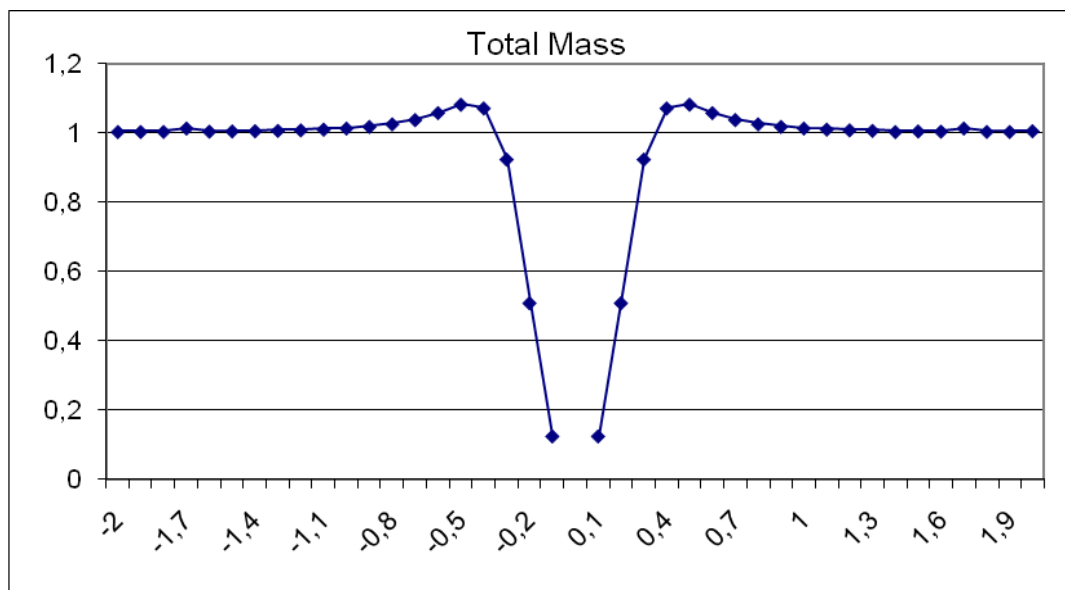
Σχήμα 3.28



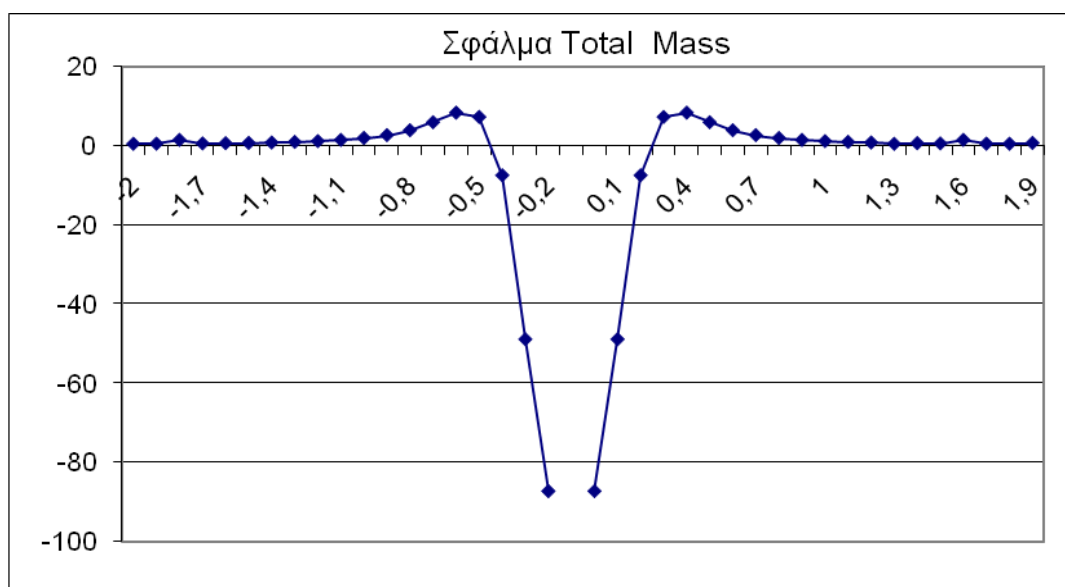
Σχήμα 3.29

Και η total mass υπολογίζεται με ακρίβεια και μηδενικό σφάλμα που όμως αυξάνεται κοντά στο μηδέν λόγω της φύσης της συνάρτησης.

c	total mass
-2	1,0049
-1,9	1,0051
-1,8	1,0053
-1,7	1,015
-1,6	1,006
-1,5	1,0066
-1,4	1,0073
-1,3	1,0083
-1,2	1,0098
-1,1	1,0119
-1	1,015
-0,9	1,0197
-0,8	1,0271
-0,7	1,0394
-0,6	1,0597
-0,5	1,0838
-0,4	1,073
-0,3	0,9254
-0,2	0,5107
-0,1	0,1263
0,1	0,1263
0,2	0,5107
0,3	0,9254
0,4	1,073
0,5	1,0838
0,6	1,0597
0,7	1,0394
0,8	1,0271
0,9	1,0197
1	1,015
1,1	1,0119
1,2	1,0098
1,3	1,0083
1,4	1,0049
1,5	1,0066
1,6	1,006
1,7	1,015
1,8	1,0053
1,9	1,0051
2	1,0073



Σχήμα 3.30



Σχήμα 3.31

3.1.4 Thin Plate Splines $f_j = r^2 \log r$

Όπως φαίνεται και στον πίνακα παρακάτω το σφάλμα κυμαίνεται σε χαμηλά επίπεδα. Το ελάχιστο σφάλμα είναι 0,12% ενώ το μέγιστο είναι 8,36%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	1,21E-06	
3,1416	3,3479	6,5667176
3,1416	3,35E+00	6,5667176
3,14E+00	3,35E+00	6,5667176
4,44E+00	4,46E+00	0,33536654
4,44E+00	4,46E+00	0,33536654
4,44E+00	4,46E+00	0,33536654
5,44E+00	5,25E+00	-3,51747712
6,28E+00	5,68E+00	-9,5683728
6,28E+00	6,43E+00	2,4096002
6,28E+00	6,43E+00	2,4096002
7,02E+00	6,44E+00	-8,36465095
7,02E+00	6,44E+00	-8,36465095
7,02E+00	6,44E+00	-8,36465095
7,02E+00	6,97E+00	-0,74308165
7,02E+00	6,97E+00	-0,74308165
7,02E+00	6,97E+00	-0,74308165
7,70E+00	7,29E+00	-5,27464816
7,70E+00	7,29E+00	-5,27464816
7,70E+00	7,29E+00	-5,27464816
8,89E+00	9,17E+00	3,22424543
8,89E+00	9,17E+00	3,22424543
8,89E+00	9,31E+00	4,73564564
9,42E+00	9,44E+00	0,12414057
9,42E+00	9,44E+00	0,12414057
9,42E+00	9,44E+00	0,12414057
1,09E+01	1,57E+01	44,1606175

Η συνολική μάζα υπολογίζεται 1,0441 δηλαδή με ποσοστιαίο σφάλμα 4,41%.

3.1.5 Πολυωνυμική Συνάρτηση Δεύτερου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^2$

Η πολυωνυμική συνάρτηση δεύτερου βαθμού δεν έδωσε καλά αποτελέσματα με το σφάλμα να κυμαίνεται από 90% έως και 94%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	5,58E-07	
3,14E+00	2,82E-01	-91,00477707
3,14E+00	2,82E-01	-91,00477707
3,14E+00	2,82E-01	-90,99140127
4,44E+00	2,83E-01	-93,62905405
4,44E+00	2,83E-01	-93,59887387
4,44E+00	2,84E-01	-93,59887387
5,44E+00	2,84E-01	-94,77555147
6,28E+00	2,84E-01	-94,88200637
6,28E+00	3,21E-01	-95,41305732
6,28E+00	2,88E-01	-95,41305732
7,02E+00	2,88E-01	-95,78418803
7,02E+00	2,96E-01	-95,7497151
7,02E+00	2,98E-01	-95,7497151
7,02E+00	2,98E-01	-95,7497151
7,02E+00	2,98E-01	-95,73475783
7,02E+00	2,99E-01	-95,73475783
7,70E+00	2,99E-01	-95,98649351
7,70E+00	3,09E-01	-95,98649351
7,70E+00	3,09E-01	-95,98649351
8,89E+00	3,09E-01	-96,46175478
8,89E+00	3,15E-01	-96,46175478
8,89E+00	3,15E-01	-96,38863892
9,42E+00	3,21E-01	-96,58800425
9,42E+00	3,21E-01	-96,58800425
9,42E+00	3,21E-01	-96,94203822
1,09E+01	2,88E-01	-9,74E+01

3.1.6 Πολυωνυμική Συνάρτηση Πέμπτου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^4(1+4R/d)$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Πέμπτου Βαθμού έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα με το σφάλμα να έχει ελάχιστο 1,86% και μέγιστο 11,3%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	5,65E-07	
3,14E+00	3,08E+00	1,86E+00
3,14E+00	3,08E+00	1,86E+00
3,14E+00	3,08E+00	1,86E+00
4,44E+00	4,34E+00	2,35E+00
4,44E+00	4,34E+00	2,35E+00
4,44E+00	4,34E+00	2,35E+00
5,44E+00	5,22E+00	4,09E+00
6,28E+00	5,57E+00	1,13E+01
6,28E+00	6,32E+00	-6,46E-01
6,28E+00	6,32E+00	-6,46E-01
7,02E+00	6,58E+00	6,32E+00
7,02E+00	6,58E+00	6,32E+00
7,02E+00	6,58E+00	6,32E+00
7,02E+00	6,92E+00	1,48E+00
7,02E+00	6,92E+00	1,48E+00
7,02E+00	6,92E+00	1,48E+00
7,70E+00	7,22E+00	6,28E+00
7,70E+00	7,22E+00	6,28E+00
7,70E+00	7,22E+00	6,28E+00
8,89E+00	8,92E+00	-3,81E-01
8,89E+00	8,96E+00	-8,39E-01
8,89E+00	8,96E+00	-8,39E-01
9,42E+00	9,17E+00	2,70E+00
9,42E+00	9,17E+00	2,70E+00
9,42E+00	9,17E+00	2,70E+00
1,09E+01	1,51E+01	-3,84E+01

Η συνολική μάζα υπολογίζεται 1,0571 δηλαδή με ποσοστιαίο σφάλμα 5,71%.

3.1.7 Πολυωνυμική Συνάρτηση Ογδού Βαθμού

$$f_j = (1-R/d)^6[3+18R/d+25(R/d)^2]$$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Ογδού Βαθμού δεν έδωσε καλά αποτελέσματα με το μέγιστο σφάλμα να φτάνει μέχρι και 138%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	9,94E-07	
3,14E+00	3,42E+00	-8,82E+00
3,14E+00	3,42E+00	-8,818471
3,14E+00	3,60E+00	-14,49682
4,44E+00	3,64E+00	18,033784
4,44E+00	3,64E+00	18,033784
4,44E+00	3,64E+00	18,033784
5,44E+00	3,90E+00	28,301471
6,28E+00	3,90E+00	37,89172
6,28E+00	3,90E+00	37,89172
6,28E+00	4,58E+00	27,05414
7,02E+00	4,88E+00	30,47151
7,02E+00	4,88E+00	30,47151
7,02E+00	4,88E+00	30,47151
7,02E+00	5,15E+00	26,576923
7,02E+00	5,15E+00	26,576923
7,02E+00	5,15E+00	26,576923
7,70E+00	5,33E+00	30,748052
7,70E+00	5,33E+00	30,748052
7,70E+00	5,78E+00	24,998701
8,89E+00	5,78E+00	35,038245
8,89E+00	5,78E+00	35,038245
8,89E+00	1,71E+01	-92,67717
9,42E+00	2,25E+01	-138,8747
9,42E+00	2,25E+01	-138,8747
9,42E+00	2,25E+01	-138,8747
1,09E+01	2,40E+01	-120,578

Η συνολική μάζα υπολογίζεται 0,9939 δηλαδή με ποσοστιαίο σφάλμα 0,61%

3.1.8 Πολυωνυμική Συνάρτηση Εντεκάτου Βαθμού

$$f_j = (1-R/d)^8[1+18R/d+25(R/d)^2+32(R/d)^3]$$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Εντεκάτου Βαθμού δεν έδωσε καλά αποτελέσματα με το μέγιστο σφάλμα να φτάνει μέχρι και 68,7%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
.00000E+00	.10006E-06	
3,14E+00	1,16E+00	63,00929463
3,14E+00	1,18E+00	62,35676089
3,14E+00	1,18E+00	62,35676089
4,44E+00	1,60E+00	64,07751694
4,44E+00	1,60E+00	64,07751694
4,44E+00	1,64E+00	63,09617592
5,44E+00	1,93E+00	64,52199802
6,28E+00	2,00E+00	68,10542399
6,28E+00	2,05E+00	67,29851031
6,28E+00	2,20E+00	65,05602241
7,02E+00	2,20E+00	68,70515887
7,02E+00	2,21E+00	68,58842956
7,02E+00	2,25E+00	68,00478305
7,02E+00	2,25E+00	68,00478305
7,02E+00	2,39E+00	65,99618494
7,02E+00	2,39E+00	65,99618494
7,70E+00	2,40E+00	68,83422349
7,70E+00	2,40E+00	68,83422349
7,70E+00	2,62E+00	66,00912245
8,89E+00	2,62E+00	70,46073511
8,89E+00	2,73E+00	69,32183934
8,89E+00	2,75E+00	69,00335367
9,42E+00	2,87E+00	69,56009677
9,42E+00	2,90E+00	69,22375011
9,42E+00	2,90E+00	69,22375011
1,09E+01	4,96E+00	54,4224938

Η συνολική μάζα υπολογίζεται 6,7080, δηλαδή με ποσοστιαίο σφάλμα 670,8%.

3.2 Παραλληλεπίπεδο

Το παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 2,5x1,1x1. Οι διαστάσεις του επιλέχθηκαν έτσι ώστε να μην διαιρούνται ακριβώς μεταξύ τους. Μοντελοποιήθηκε με 230 συνοριακούς κόμβους συνολικά. Στις μεγάλες πλευρές 9 συνοριακοί κόμβοι και στις μικρές 5 με αποτέλεσμα να δημιουργούνται 8 συνοριακά στοιχεία στις μεγάλες πλευρές και 4 στις μικρές. Οι συνοριακές συνθήκες είναι ακλόνητα τοιχώματα (free-free). Το αρχείο που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται παρακάτω.

2.5X1.1X1.0

0.8D00 0.8D00

COOR

1	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
2	.31250E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.62500E+00	.00000E+00	.00000E+00
4	.93750E+00	.00000E+00	.00000E+00
5	.12500E+01	.00000E+00	.00000E+00
6	.15625E+01	.00000E+00	.00000E+00
7	.18750E+01	.00000E+00	.00000E+00
8	.21875E+01	.00000E+00	.00000E+00
9	.25000E+01	.00000E+00	.00000E+00
10	.00000E+00	.00000E+00	.25000E+00
11	.31250E+00	.00000E+00	.25000E+00
12	.62500E+00	.00000E+00	.25000E+00
13	.93750E+00	.00000E+00	.25000E+00
14	.12500E+01	.00000E+00	.25000E+00
15	.15625E+01	.00000E+00	.25000E+00
16	.18750E+01	.00000E+00	.25000E+00
17	.21875E+01	.00000E+00	.25000E+00
18	.25000E+01	.00000E+00	.25000E+00
19	.00000E+00	.00000E+00	.50000E+00
20	.31250E+00	.00000E+00	.50000E+00
21	.62500E+00	.00000E+00	.50000E+00
22	.93750E+00	.00000E+00	.50000E+00
23	.12500E+01	.00000E+00	.50000E+00
24	.15625E+01	.00000E+00	.50000E+00
25	.18750E+01	.00000E+00	.50000E+00
26	.21875E+01	.00000E+00	.50000E+00
27	.25000E+01	.00000E+00	.50000E+00
28	.00000E+00	.00000E+00	.75000E+00
29	.31250E+00	.00000E+00	.75000E+00
30	.62500E+00	.00000E+00	.75000E+00
31	.93750E+00	.00000E+00	.75000E+00
32	.12500E+01	.00000E+00	.75000E+00
33	.15625E+01	.00000E+00	.75000E+00
34	.18750E+01	.00000E+00	.75000E+00
35	.21875E+01	.00000E+00	.75000E+00
36	.25000E+01	.00000E+00	.75000E+00

37	.00000E+00	.00000E+00	.10000E+01
38	.31250E+00	.00000E+00	.10000E+01
39	.62500E+00	.00000E+00	.10000E+01
40	.93750E+00	.00000E+00	.10000E+01
41	.12500E+01	.00000E+00	.10000E+01
42	.15625E+01	.00000E+00	.10000E+01
43	.18750E+01	.00000E+00	.10000E+01
44	.21875E+01	.00000E+00	.10000E+01
45	.25000E+01	.00000E+00	.10000E+01
46	.00000E+00	.11000E+01	.00000E+00
47	.31250E+00	.11000E+01	.00000E+00
48	.62500E+00	.11000E+01	.00000E+00
49	.93750E+00	.11000E+01	.00000E+00
50	.12500E+01	.11000E+01	.00000E+00
51	.15625E+01	.11000E+01	.00000E+00
52	.18750E+01	.11000E+01	.00000E+00
53	.21875E+01	.11000E+01	.00000E+00
54	.25000E+01	.11000E+01	.00000E+00
55	.00000E+00	.11000E+01	.25000E+00
56	.31250E+00	.11000E+01	.25000E+00
57	.62500E+00	.11000E+01	.25000E+00
58	.93750E+00	.11000E+01	.25000E+00
59	.12500E+01	.11000E+01	.25000E+00
60	.15625E+01	.11000E+01	.25000E+00
61	.18750E+01	.11000E+01	.25000E+00
62	.21875E+01	.11000E+01	.25000E+00
63	.25000E+01	.11000E+01	.25000E+00
64	.00000E+00	.11000E+01	.50000E+00
65	.31250E+00	.11000E+01	.50000E+00
66	.62500E+00	.11000E+01	.50000E+00
67	.93750E+00	.11000E+01	.50000E+00
68	.12500E+01	.11000E+01	.50000E+00
69	.15625E+01	.11000E+01	.50000E+00
70	.18750E+01	.11000E+01	.50000E+00
71	.21875E+01	.11000E+01	.50000E+00
72	.25000E+01	.11000E+01	.50000E+00
73	.00000E+00	.11000E+01	.75000E+00
74	.31250E+00	.11000E+01	.75000E+00
75	.62500E+00	.11000E+01	.75000E+00
76	.93750E+00	.11000E+01	.75000E+00
77	.12500E+01	.11000E+01	.75000E+00
78	.15625E+01	.11000E+01	.75000E+00
79	.18750E+01	.11000E+01	.75000E+00
80	.21875E+01	.11000E+01	.75000E+00
81	.25000E+01	.11000E+01	.75000E+00
82	.00000E+00	.11000E+01	.10000E+01
83	.31250E+00	.11000E+01	.10000E+01
84	.62500E+00	.11000E+01	.10000E+01
85	.93750E+00	.11000E+01	.10000E+01
86	.12500E+01	.11000E+01	.10000E+01

87	.15625E+01	.11000E+01	.10000E+01
88	.18750E+01	.11000E+01	.10000E+01
89	.21875E+01	.11000E+01	.10000E+01
90	.25000E+01	.11000E+01	.10000E+01
91	.25000E+01	.00000E+00	.00000E+00
92	.25000E+01	.27500E+00	.00000E+00
93	.25000E+01	.55000E+00	.00000E+00
94	.25000E+01	.82500E+00	.00000E+00
95	.25000E+01	.11000E+01	.00000E+00
96	.25000E+01	.00000E+00	.25000E+00
97	.25000E+01	.27500E+00	.25000E+00
98	.25000E+01	.55000E+00	.25000E+00
99	.25000E+01	.82500E+00	.25000E+00
100	.25000E+01	.11000E+01	.25000E+00
101	.25000E+01	.00000E+00	.50000E+00
102	.25000E+01	.27500E+00	.50000E+00
103	.25000E+01	.55000E+00	.50000E+00
104	.25000E+01	.82500E+00	.50000E+00
105	.25000E+01	.11000E+01	.50000E+00
106	.25000E+01	.00000E+00	.75000E+00
107	.25000E+01	.27500E+00	.75000E+00
108	.25000E+01	.55000E+00	.75000E+00
109	.25000E+01	.82500E+00	.75000E+00
110	.25000E+01	.11000E+01	.75000E+00
111	.25000E+01	.00000E+00	.10000E+01
112	.25000E+01	.27500E+00	.10000E+01
113	.25000E+01	.55000E+00	.10000E+01
114	.25000E+01	.82500E+00	.10000E+01
115	.25000E+01	.11000E+01	.10000E+01
116	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
117	.00000E+00	.27500E+00	.00000E+00
118	.00000E+00	.55000E+00	.00000E+00
119	.00000E+00	.82500E+00	.00000E+00
120	.00000E+00	.11000E+01	.00000E+00
121	.00000E+00	.00000E+00	.25000E+00
122	.00000E+00	.27500E+00	.25000E+00
123	.00000E+00	.55000E+00	.25000E+00
124	.00000E+00	.82500E+00	.25000E+00
125	.00000E+00	.11000E+01	.25000E+00
126	.00000E+00	.00000E+00	.50000E+00
127	.00000E+00	.27500E+00	.50000E+00
128	.00000E+00	.55000E+00	.50000E+00
129	.00000E+00	.82500E+00	.50000E+00
130	.00000E+00	.11000E+01	.50000E+00
131	.00000E+00	.00000E+00	.75000E+00
132	.00000E+00	.27500E+00	.75000E+00
133	.00000E+00	.55000E+00	.75000E+00
134	.00000E+00	.82500E+00	.75000E+00
135	.00000E+00	.11000E+01	.75000E+00
136	.00000E+00	.00000E+00	.10000E+01

137	.00000E+00	.27500E+00	.10000E+01
138	.00000E+00	.55000E+00	.10000E+01
139	.00000E+00	.82500E+00	.10000E+01
140	.00000E+00	.11000E+01	.10000E+01
141	.00000E+00	.00000E+00	.10000E+01
142	.31250E+00	.00000E+00	.10000E+01
143	.62500E+00	.00000E+00	.10000E+01
144	.93750E+00	.00000E+00	.10000E+01
145	.12500E+01	.00000E+00	.10000E+01
146	.15625E+01	.00000E+00	.10000E+01
147	.18750E+01	.00000E+00	.10000E+01
148	.21875E+01	.00000E+00	.10000E+01
149	.25000E+01	.00000E+00	.10000E+01
150	.00000E+00	.27500E+00	.10000E+01
151	.31250E+00	.27500E+00	.10000E+01
152	.62500E+00	.27500E+00	.10000E+01
153	.93750E+00	.27500E+00	.10000E+01
154	.12500E+01	.27500E+00	.10000E+01
155	.15625E+01	.27500E+00	.10000E+01
156	.18750E+01	.27500E+00	.10000E+01
157	.21875E+01	.27500E+00	.10000E+01
158	.25000E+01	.27500E+00	.10000E+01
159	.00000E+00	.55000E+00	.10000E+01
160	.31250E+00	.55000E+00	.10000E+01
161	.62500E+00	.55000E+00	.10000E+01
162	.93750E+00	.55000E+00	.10000E+01
163	.12500E+01	.55000E+00	.10000E+01
164	.15625E+01	.55000E+00	.10000E+01
165	.18750E+01	.55000E+00	.10000E+01
166	.21875E+01	.55000E+00	.10000E+01
167	.25000E+01	.55000E+00	.10000E+01
168	.00000E+00	.82500E+00	.10000E+01
169	.31250E+00	.82500E+00	.10000E+01
170	.62500E+00	.82500E+00	.10000E+01
171	.93750E+00	.82500E+00	.10000E+01
172	.12500E+01	.82500E+00	.10000E+01
173	.15625E+01	.82500E+00	.10000E+01
174	.18750E+01	.82500E+00	.10000E+01
175	.21875E+01	.82500E+00	.10000E+01
176	.25000E+01	.82500E+00	.10000E+01
177	.00000E+00	.11000E+01	.10000E+01
178	.31250E+00	.11000E+01	.10000E+01
179	.62500E+00	.11000E+01	.10000E+01
180	.93750E+00	.11000E+01	.10000E+01
181	.12500E+01	.11000E+01	.10000E+01
182	.15625E+01	.11000E+01	.10000E+01
183	.18750E+01	.11000E+01	.10000E+01
184	.21875E+01	.11000E+01	.10000E+01
185	.25000E+01	.11000E+01	.10000E+01
186	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00

187	.31250E+00	.00000E+00	.00000E+00
188	.62500E+00	.00000E+00	.00000E+00
189	.93750E+00	.00000E+00	.00000E+00
190	.12500E+01	.00000E+00	.00000E+00
191	.15625E+01	.00000E+00	.00000E+00
192	.18750E+01	.00000E+00	.00000E+00
193	.21875E+01	.00000E+00	.00000E+00
194	.25000E+01	.00000E+00	.00000E+00
195	.00000E+00	.27500E+00	.00000E+00
196	.31250E+00	.27500E+00	.00000E+00
197	.62500E+00	.27500E+00	.00000E+00
198	.93750E+00	.27500E+00	.00000E+00
199	.12500E+01	.27500E+00	.00000E+00
200	.15625E+01	.27500E+00	.00000E+00
201	.18750E+01	.27500E+00	.00000E+00
202	.21875E+01	.27500E+00	.00000E+00
203	.25000E+01	.27500E+00	.00000E+00
204	.00000E+00	.55000E+00	.00000E+00
205	.31250E+00	.55000E+00	.00000E+00
206	.62500E+00	.55000E+00	.00000E+00
207	.93750E+00	.55000E+00	.00000E+00
208	.12500E+01	.55000E+00	.00000E+00
209	.15625E+01	.55000E+00	.00000E+00
210	.18750E+01	.55000E+00	.00000E+00
211	.21875E+01	.55000E+00	.00000E+00
212	.25000E+01	.55000E+00	.00000E+00
213	.00000E+00	.82500E+00	.00000E+00
214	.31250E+00	.82500E+00	.00000E+00
215	.62500E+00	.82500E+00	.00000E+00
216	.93750E+00	.82500E+00	.00000E+00
217	.12500E+01	.82500E+00	.00000E+00
218	.15625E+01	.82500E+00	.00000E+00
219	.18750E+01	.82500E+00	.00000E+00
220	.21875E+01	.82500E+00	.00000E+00
221	.25000E+01	.82500E+00	.00000E+00
222	.00000E+00	.11000E+01	.00000E+00
223	.31250E+00	.11000E+01	.00000E+00
224	.62500E+00	.11000E+01	.00000E+00
225	.93750E+00	.11000E+01	.00000E+00
226	.12500E+01	.11000E+01	.00000E+00
227	.15625E+01	.11000E+01	.00000E+00
228	.18750E+01	.11000E+01	.00000E+00
229	.21875E+01	.11000E+01	.00000E+00
230	.25000E+01	.11000E+01	.00000E+00

ELEM

1	1	3	21	19	2	12	20	10	11
2	3	5	23	21	4	14	22	12	13
3	5	7	25	23	6	16	24	14	15
4	7	9	27	25	8	18	26	16	17
5	19	21	39	37	20	30	38	28	29

6	21	23	41	39	22	32	40	30	31
7	23	25	43	41	24	34	42	32	33
8	25	27	45	43	26	36	44	34	35
9	46	64	66	48	55	65	57	47	56
10	48	66	68	50	57	67	59	49	58
11	50	68	70	52	59	69	61	51	60
12	52	70	72	54	61	71	63	53	62
13	64	82	84	66	73	83	75	65	74
14	66	84	86	68	75	85	77	67	76
15	68	86	88	70	77	87	79	69	78
16	70	88	90	72	79	89	81	71	80
17	91	93	103	101	92	98	102	96	97
18	93	95	105	103	94	100	104	98	99
19	101	103	113	111	102	108	112	106	107
20	103	105	115	113	104	110	114	108	109
21	116	126	128	118	121	127	123	117	122
22	118	128	130	120	123	129	125	119	124
23	126	136	138	128	131	137	133	127	132
24	128	138	140	130	133	139	135	129	134
25	141	143	161	159	142	152	160	150	151
26	143	145	163	161	144	154	162	152	153
27	145	147	165	163	146	156	164	154	155
28	147	149	167	165	148	158	166	156	157
29	159	161	179	177	160	170	178	168	169
30	161	163	181	179	162	172	180	170	171
31	163	165	183	181	164	174	182	172	173
32	165	167	185	183	166	176	184	174	175
33	186	204	206	188	195	205	197	187	196
34	188	206	208	190	197	207	199	189	198
35	190	208	210	192	199	209	201	191	200
36	192	210	212	194	201	211	203	193	202
37	204	222	224	206	213	223	215	205	214
38	206	224	226	208	215	225	217	207	216
39	208	226	228	210	217	227	219	209	218
40	210	228	230	212	219	229	221	211	220

KODES

1

1 360 1 0.0

WHAT_TO_DO

1

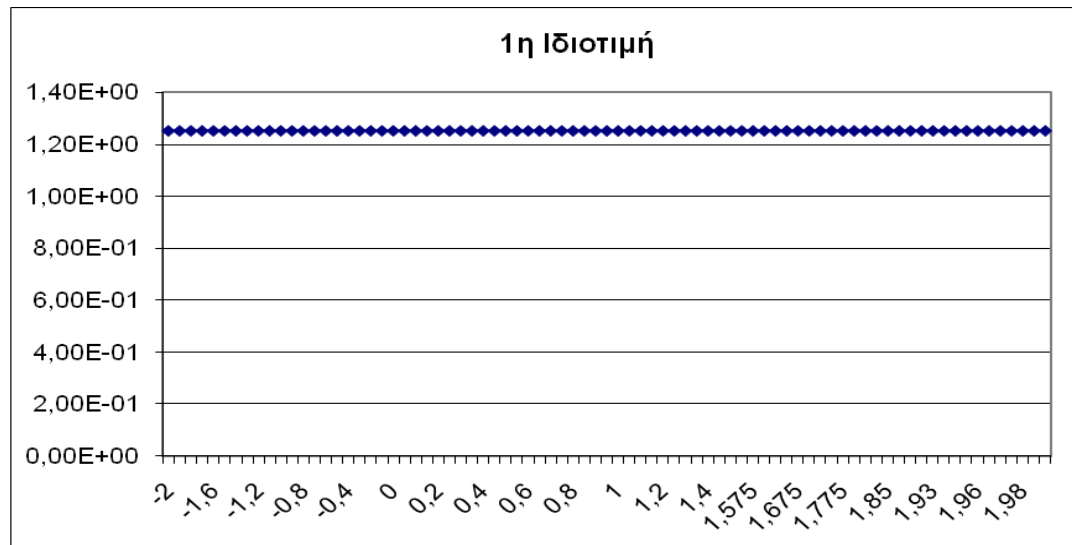
Παρακάτω δίνονται αποτελέσματα για διάφορες συναρτήσεις βάσης.

3.2.1 Κωνική Ακτινική Συνάρτηση $f_j = c-r$

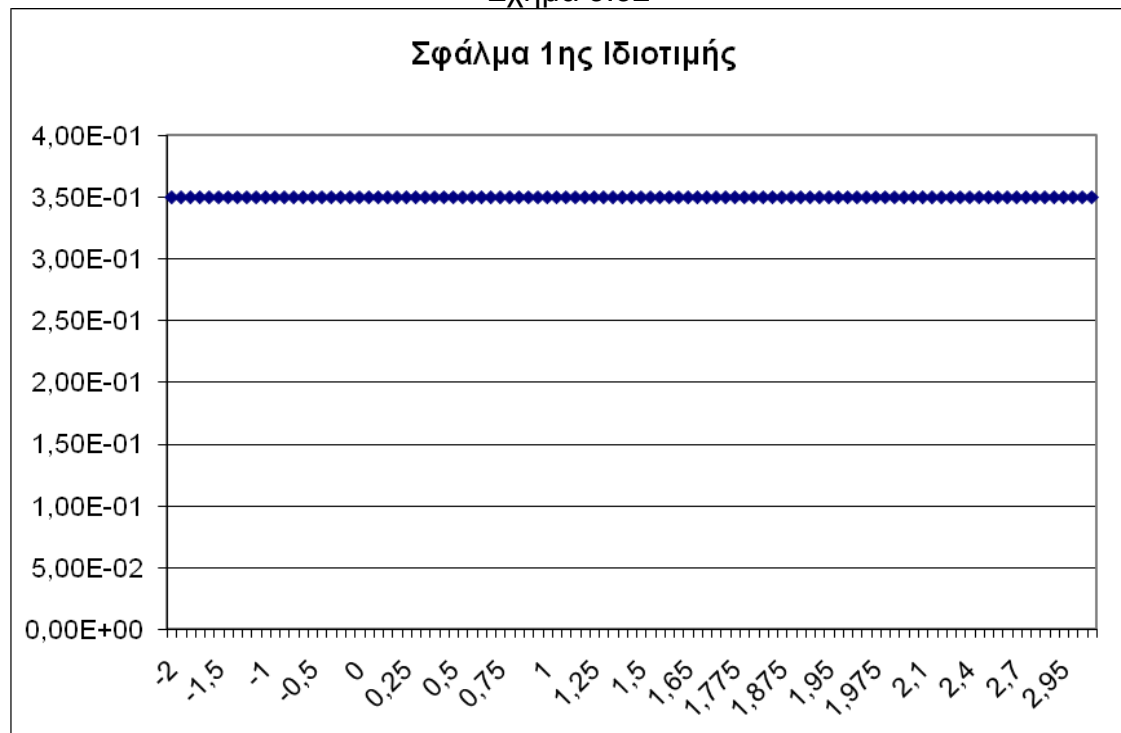
Για την συνάρτηση βάσης $c-r$ οι ιδιοτιμές υπολογίζονται με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, ενώ για τις υπόλοιπες συναρτήσεις βάσης υπολογίζονται με χωρική ολοκλήρωση.

Στις επόμενες σελίδες βρίσκονται τα αποτελέσματα καθώς και οι γραφικές παραστάσεις.

Η πρώτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια. Το σφάλμα είναι πολύ μικρό 0,35% και παραμένει σταθερό για όλες τις τιμές της σταθεράς c .

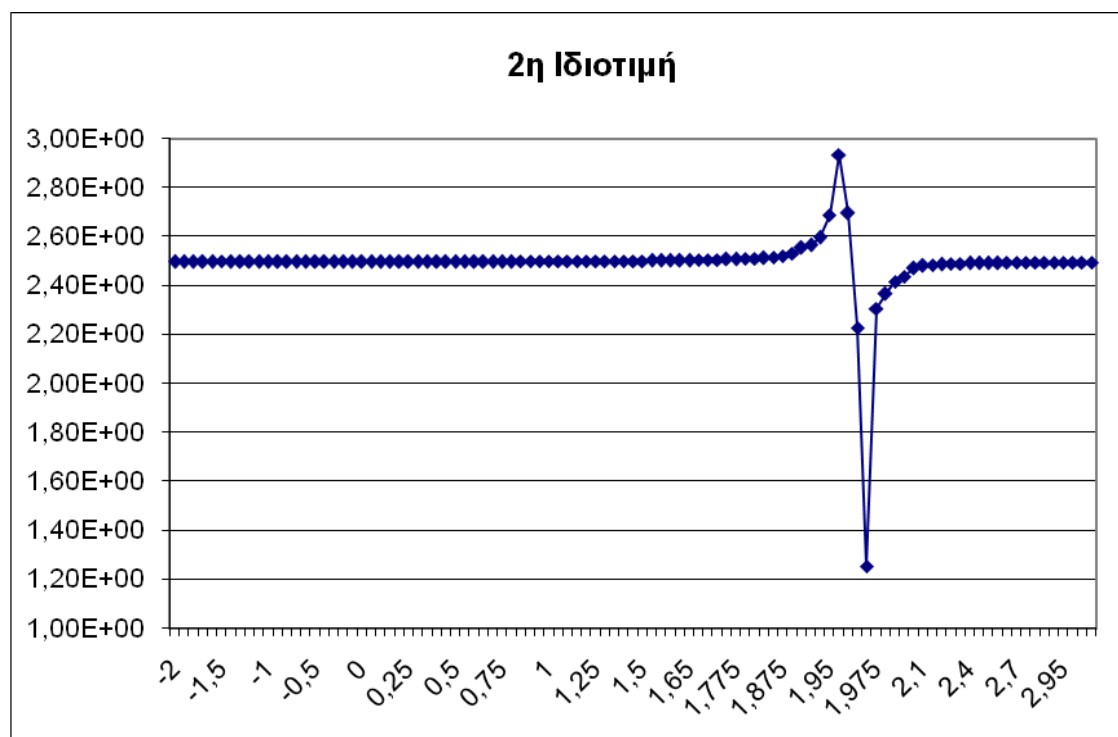


Σχήμα 3.32

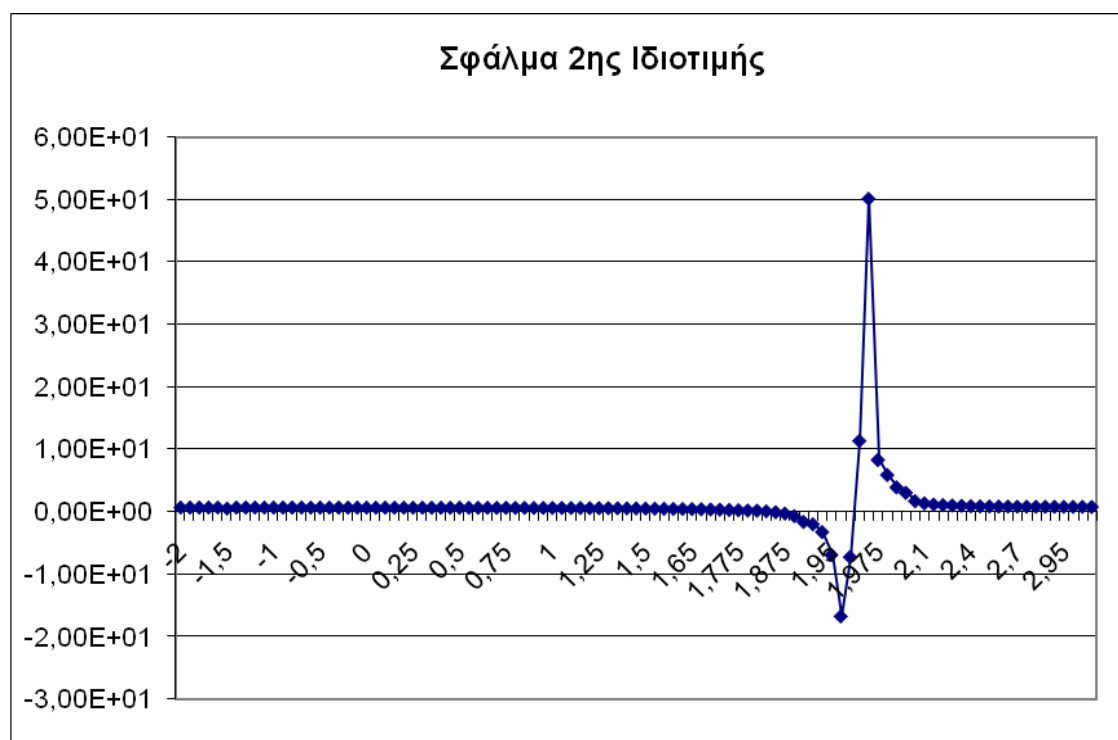


Σχήμα 3.33

Η δεύτερη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ακρίβεια. Το σφάλμα είναι της τάξης του 0,6%. Για $c=1,9$ έως $c=2$ το σφάλμα αυξάνεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του που είναι 50,2%.

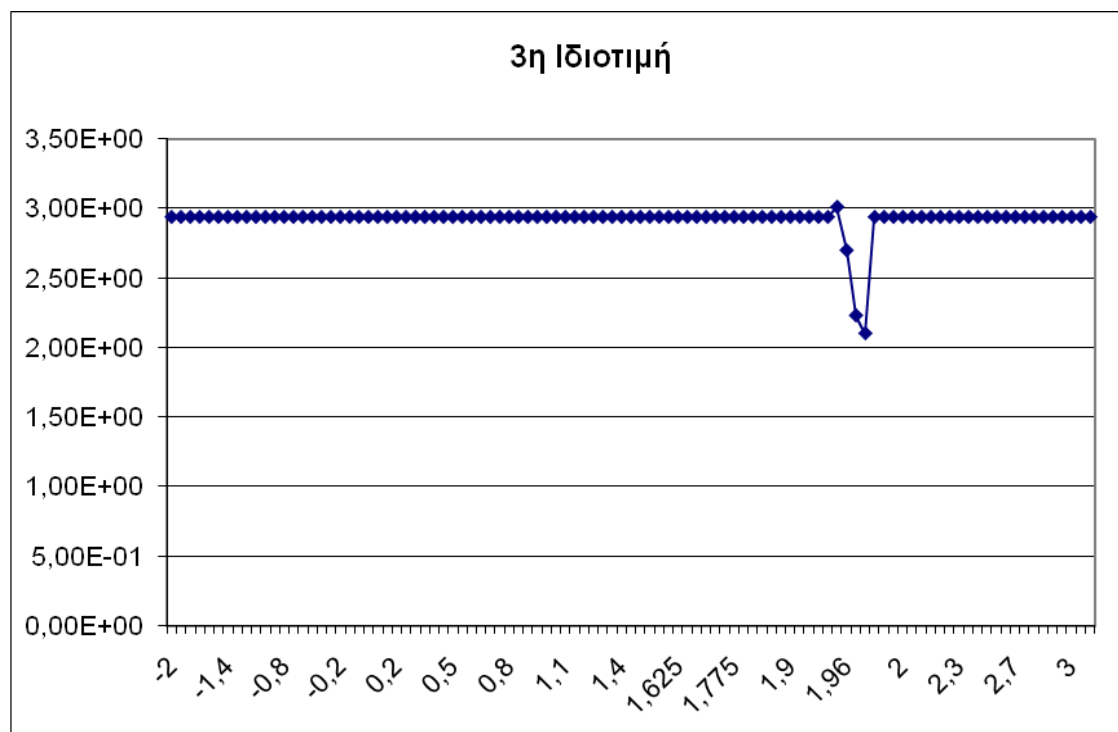


Σχήμα 3.34

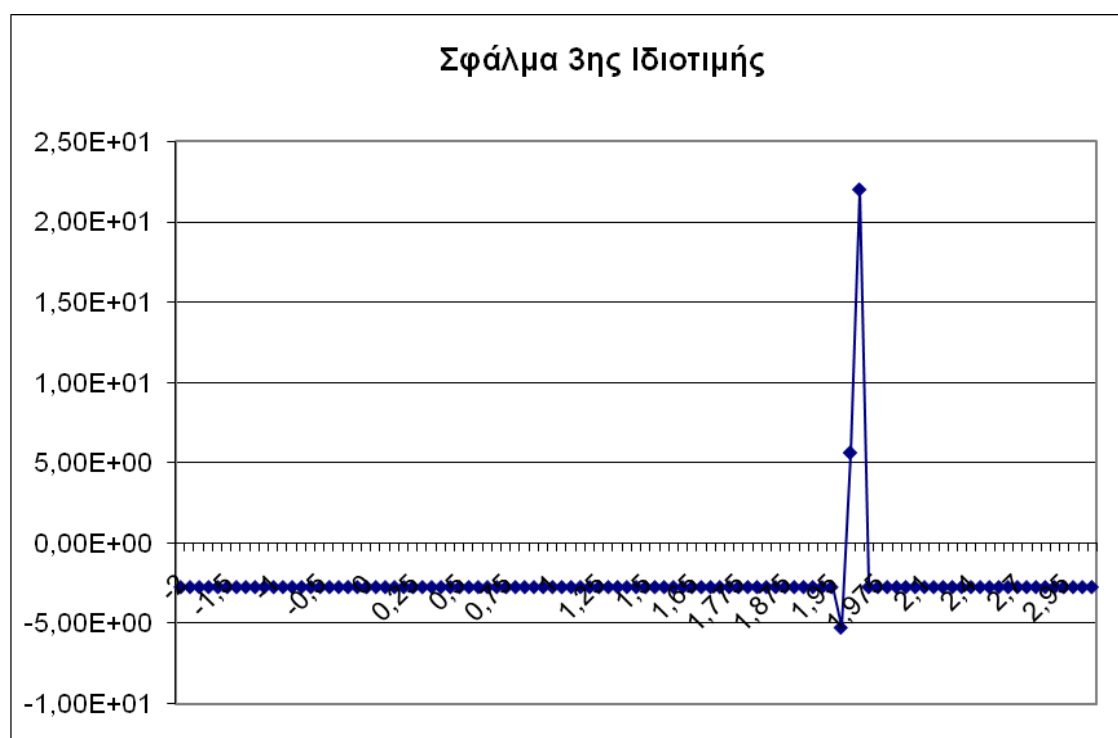


Σχήμα 3.35

Η τρίτη ιδιοτιμή υπολογίζεται με ακρίβεια. Το σφάλμα είναι της τάξης του 2,75%. Για $c=1,955$ το σφάλμα αρχίζει να μεγαλώνει και μεγιστοποιείται για $c=1,965$ που φτάνει το 22%.

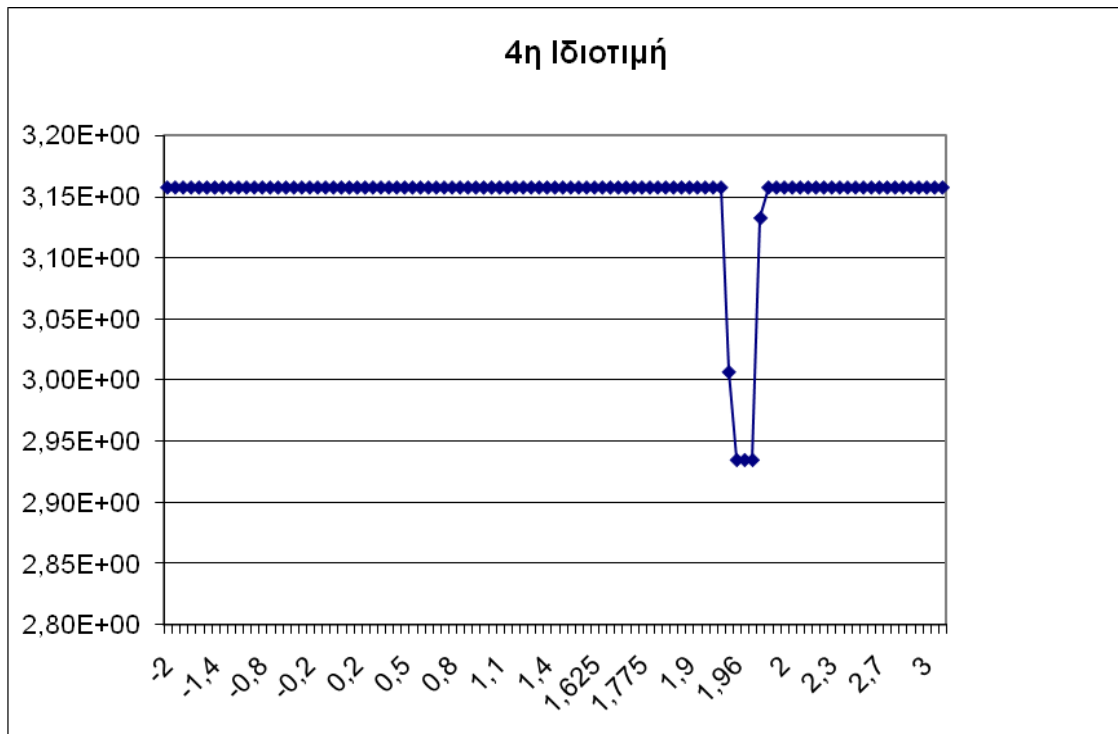


Σχήμα 3.36

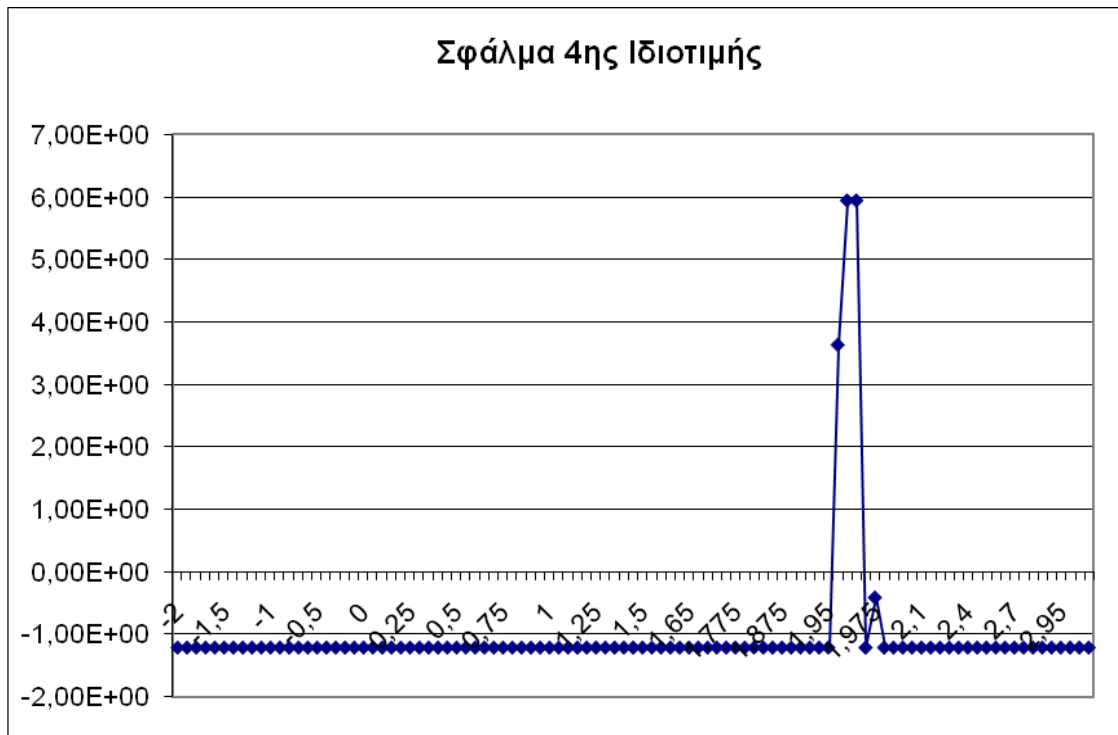


Σχήμα 3.37

Η τέταρτη ιδιοτιμή υπολογίζεται και αυτή με ακρίβεια. Το σφάλμα είναι της τάξης του 1,21%. Για $c=1,955$ το σφάλμα μεγαλώνει και μεγιστοποιείται για $c=1,96$ που φτάνει το 5,95% ενώ για $c=1,98$ γυρίζει στο 1,21%.



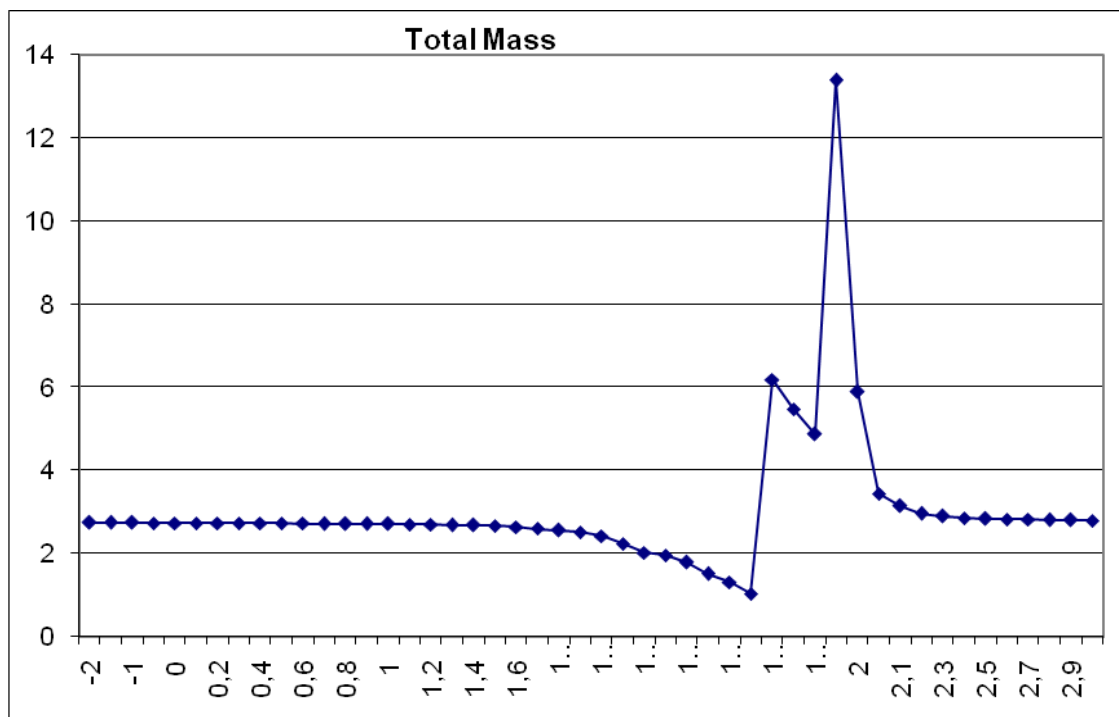
Σχήμα 3.38



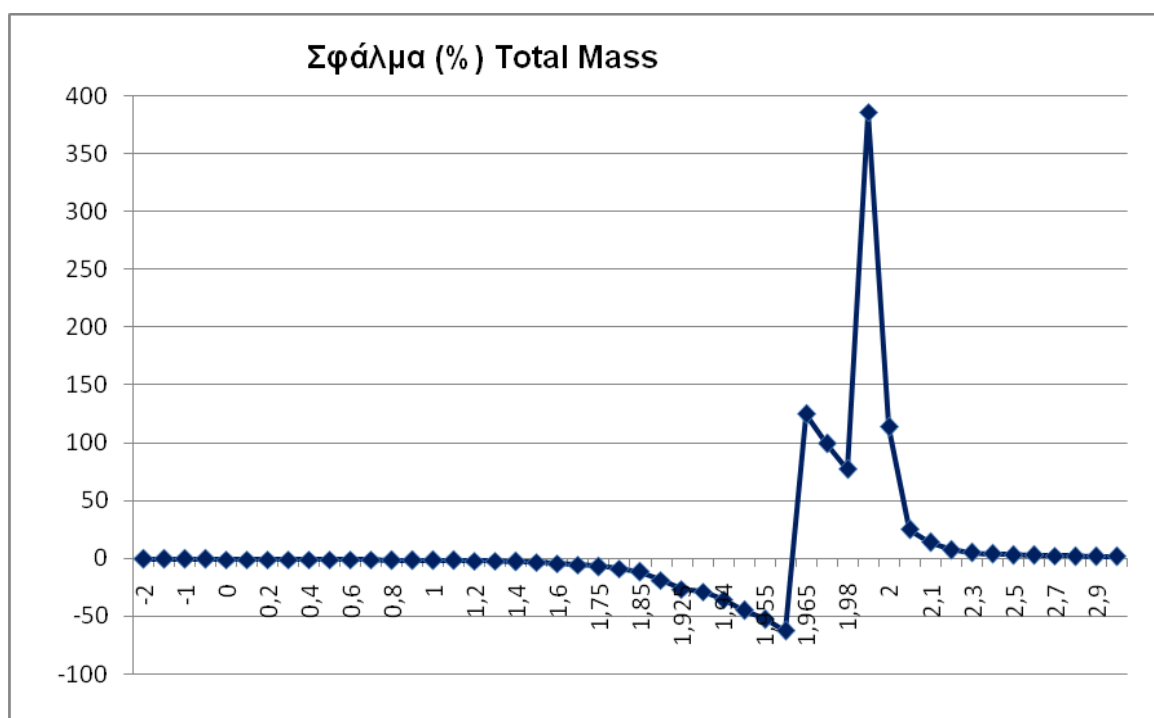
Σχήμα 3.39

Η συνολική μάζα υπολογίζεται με ακρίβεια. Το σφάλμα κυμαίνεται σε μηδενικά επίπεδα. Για $c=1,7$ το σφάλμα αρχίζει να μεγαλώνει και για $c=1,99$ παίρνει την μέγιστη τιμή του 13,97%, και επανέρχεται στα προηγούμενα επίπεδα.

c	total mass
-2	2,7391
-1,5	2,7375
-1	2,7354
-0,5	2,7324
0	2,7279
0,1	2,7267
0,2	2,7254
0,3	2,7239
0,4	2,7223
0,5	2,7204
0,6	2,7182
0,7	2,7157
0,8	2,7128
0,9	2,7094
1	2,7052
1,1	2,7002
1,2	2,6938
1,3	2,6855
1,4	2,6745
1,5	2,6589
1,6	2,6352
1,7	2,595
1,75	2,562
1,8	2,5114
1,85	2,4235
1,9	2,2331
1,925	2,0205
1,93	1,9551
1,94	1,7816
1,95	1,5112
1,955	1,3102
1,96	1,0314
1,965	6,1871
197	5,4796
1,98	4,8709
1,99	13,3804
2	5,8816
2,05	3,4419
2,1	3,139
2,2	2,9575
2,3	2,8916
2,4	2,8574
2,5	2,8366
2,6	2,8225
2,7	2,8124
2,8	2,8048
2,9	2,7988
3	2,794



Σχήμα 3.40

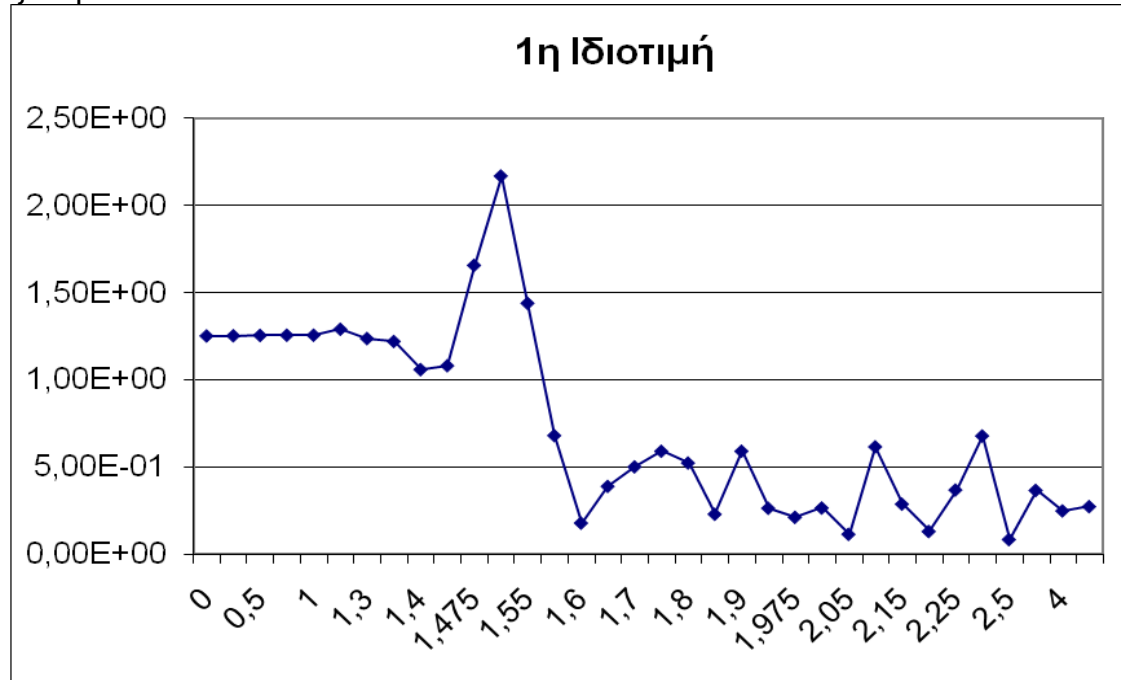


Σχήμα 3.41

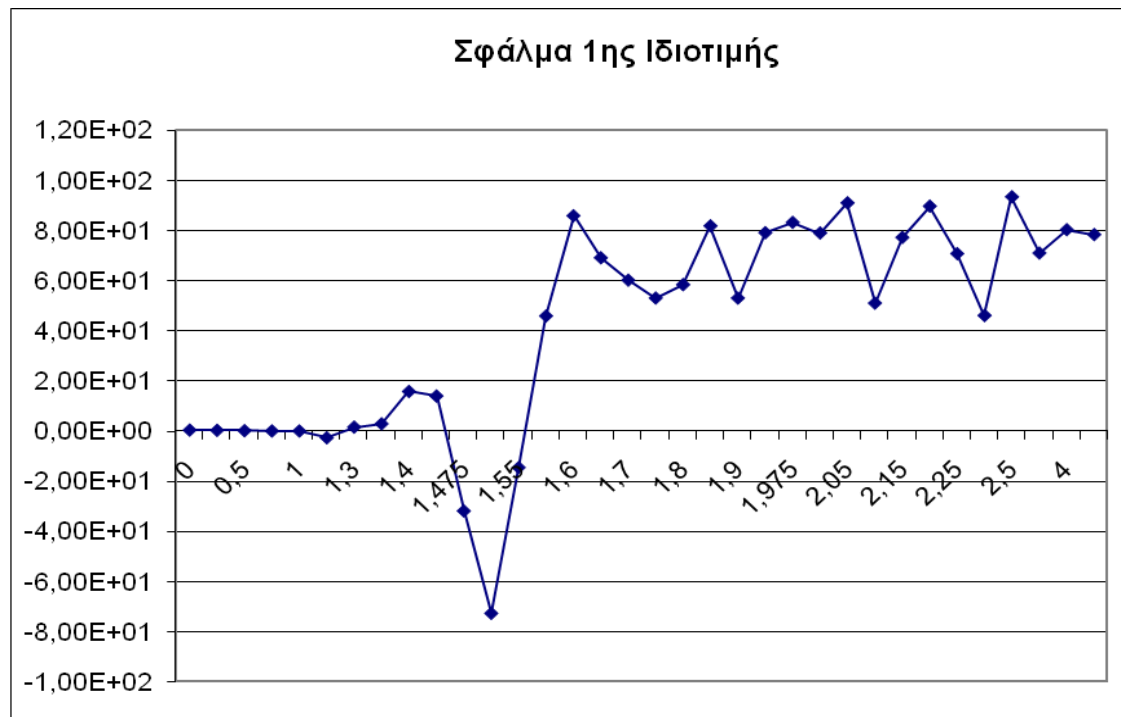
3.2.2 Multiquadrics $f_j = (r^2 + c^2)^{1/2}$

Η ριζική συνάρτηση δεν έδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Αξίζει ωστόσο να σημειωθεί ότι για μικρές τιμές του c οι υπολογισμοί είναι αρκετά ακριβείς.

Για την πρώτη ιδιοτιμή για $0 < c < 1.35$ το σφάλμα είναι πολύ μικρό. Δεν ξεπερνά το 3%.

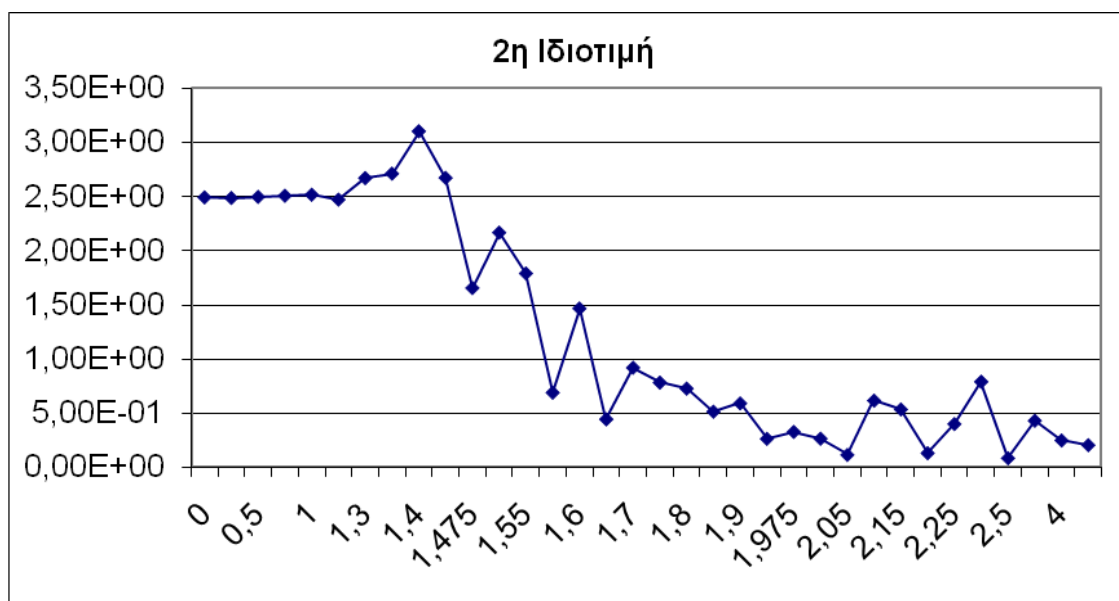


Σχήμα 3.42

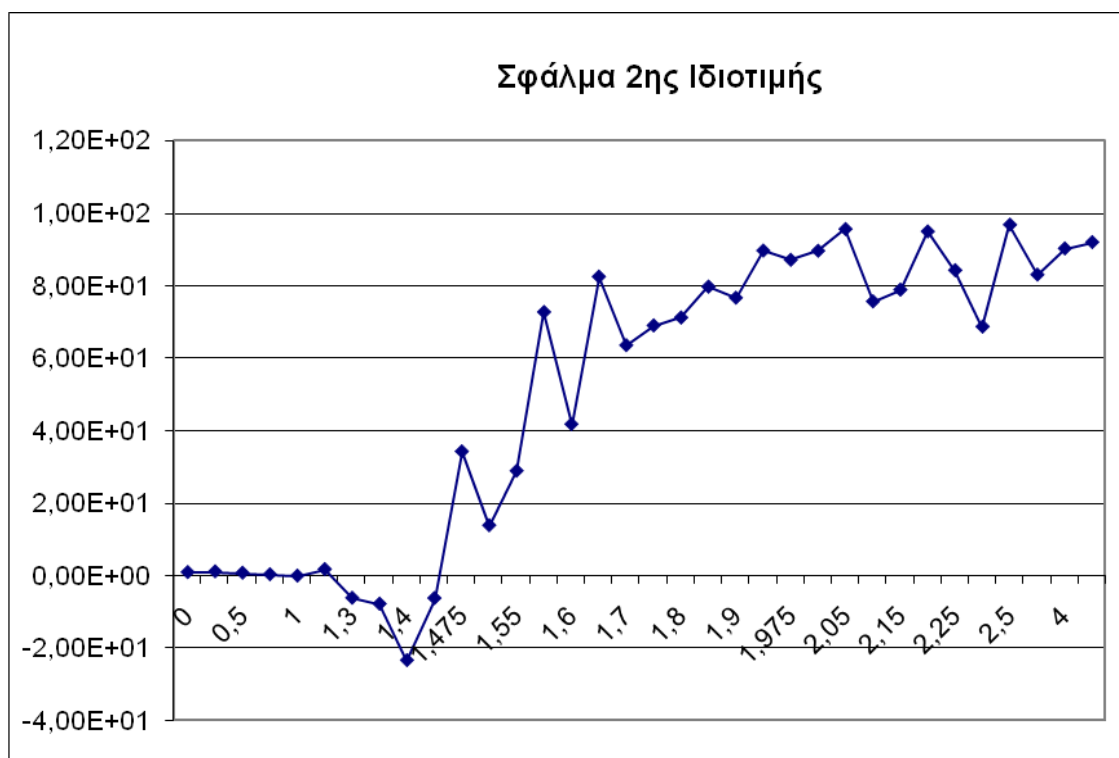


Σχήμα 3.43

Για την δεύτερη ιδιοτιμή για $0 < c < 1.25$ το σφάλμα είναι πολύ μικρό. Δεν ξεπερνά το 1%.

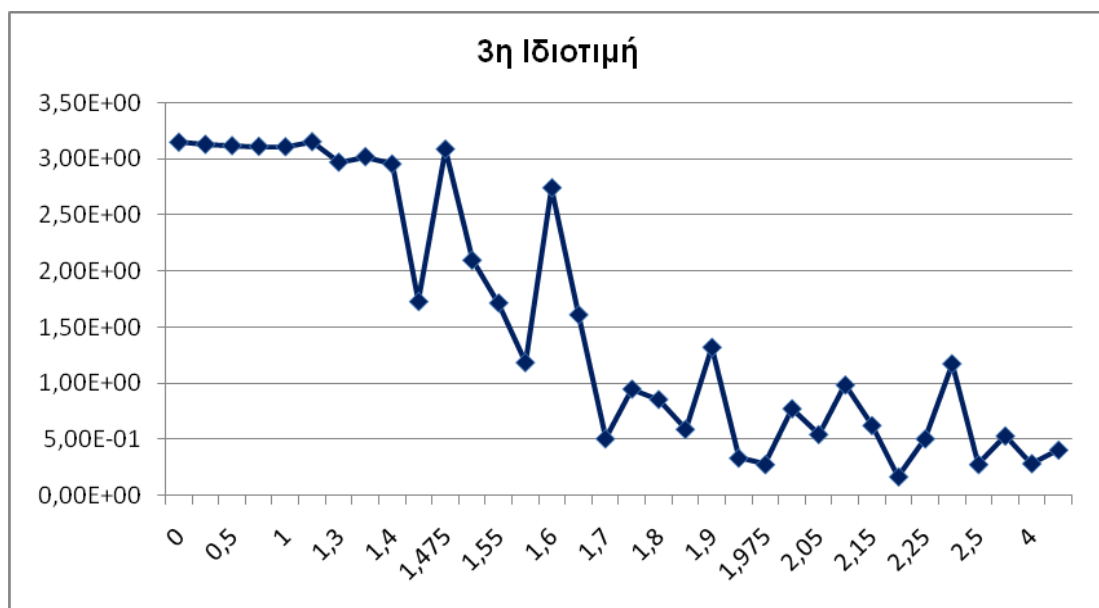


Σχήμα 3.44

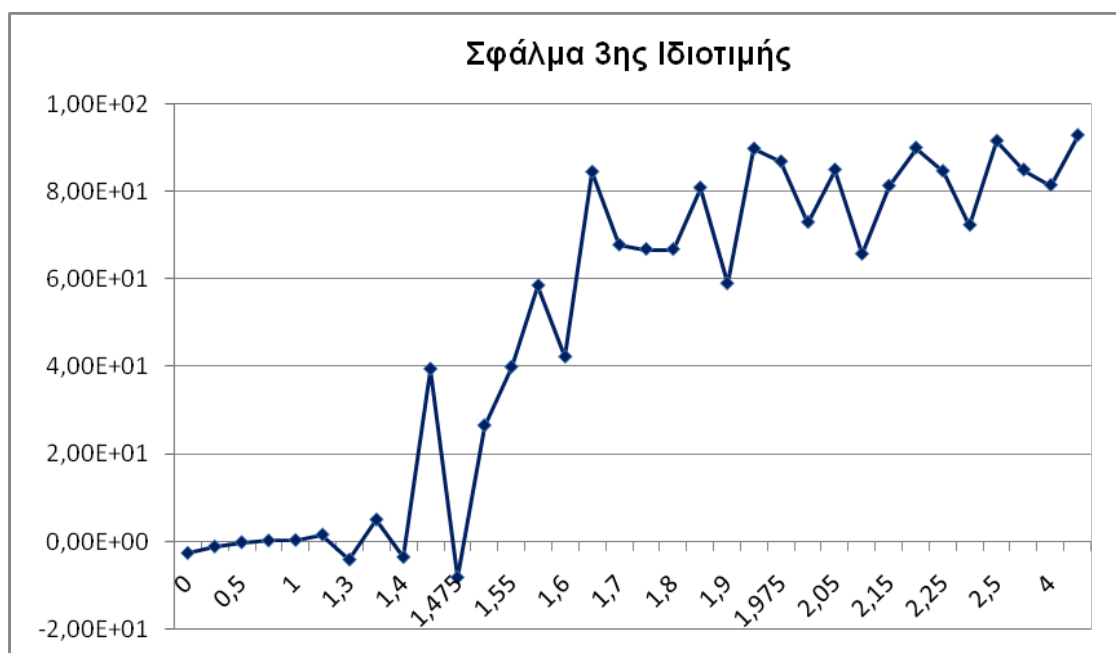


Σχήμα 3.45

Για την τρίτη ιδιοτιμή για $0 < c < 1,25$ το σφάλμα είναι πολύ μικρό. Δεν ξεπερνά το 1,6%.

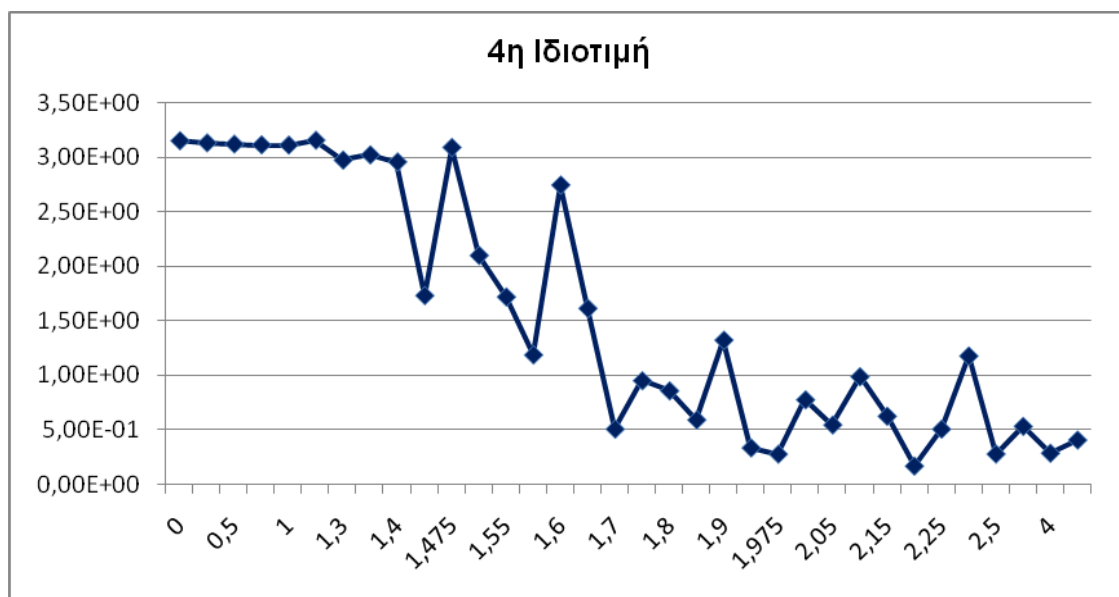


Σχήμα 3.46

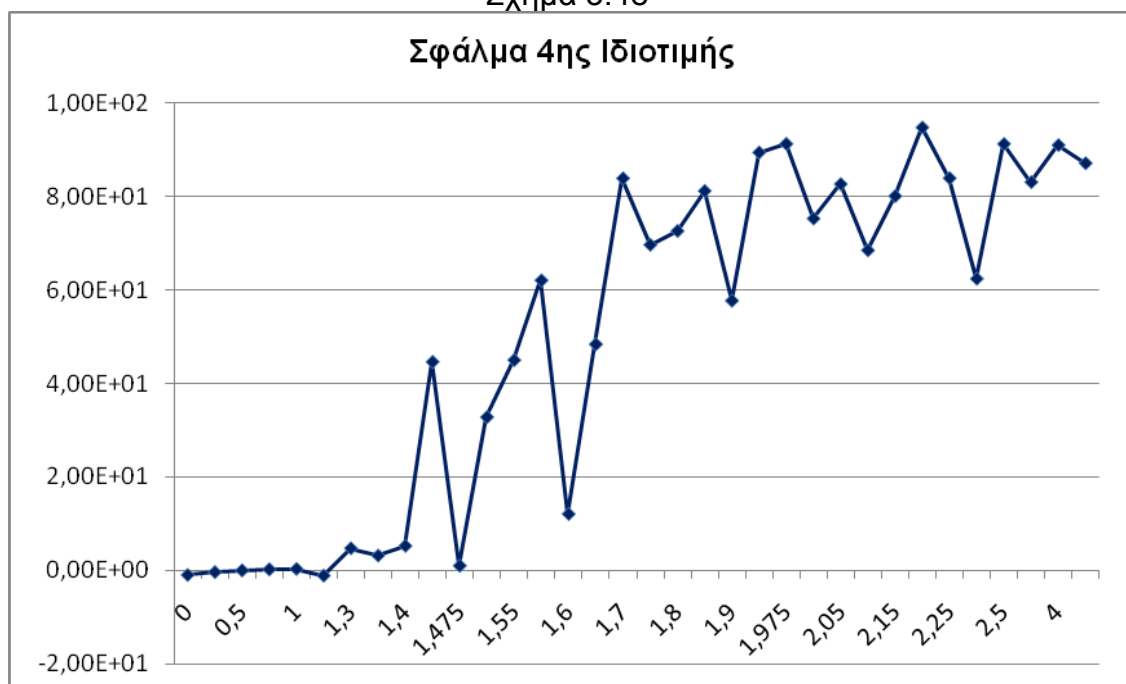


Σχήμα 3.47

Για την τέταρτη ιδιοτιμή για $0 < c < 1,25$ το σφάλμα είναι πολύ μικρό. Δεν ξεπερνά το 1,2%.



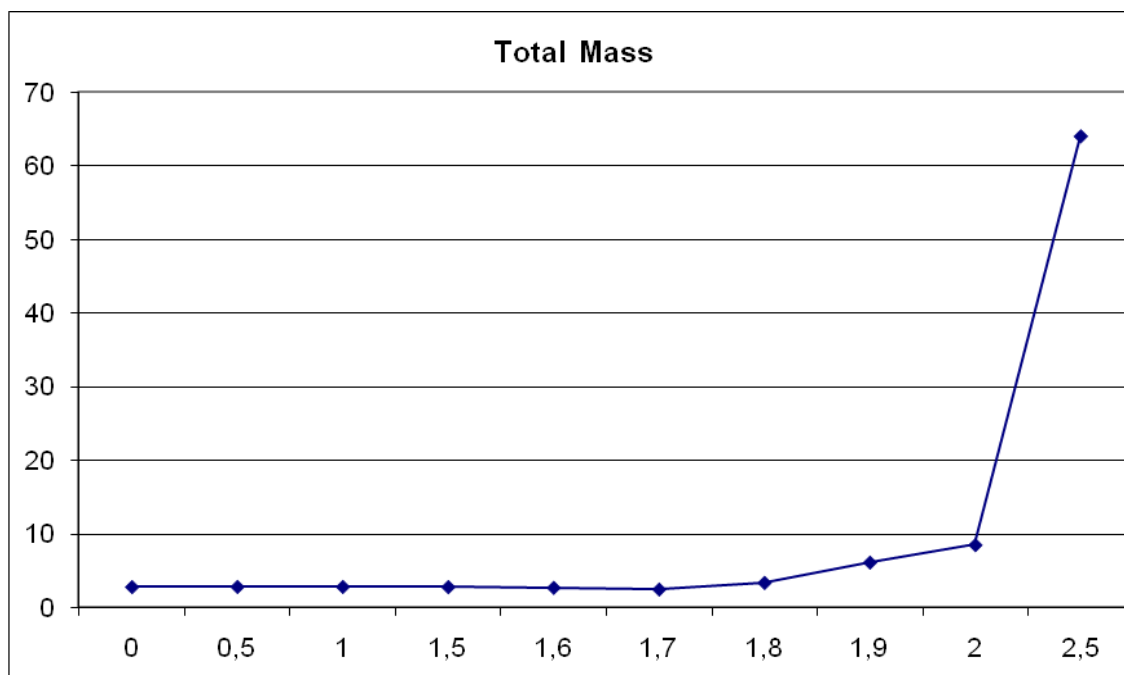
Σχήμα 3.48



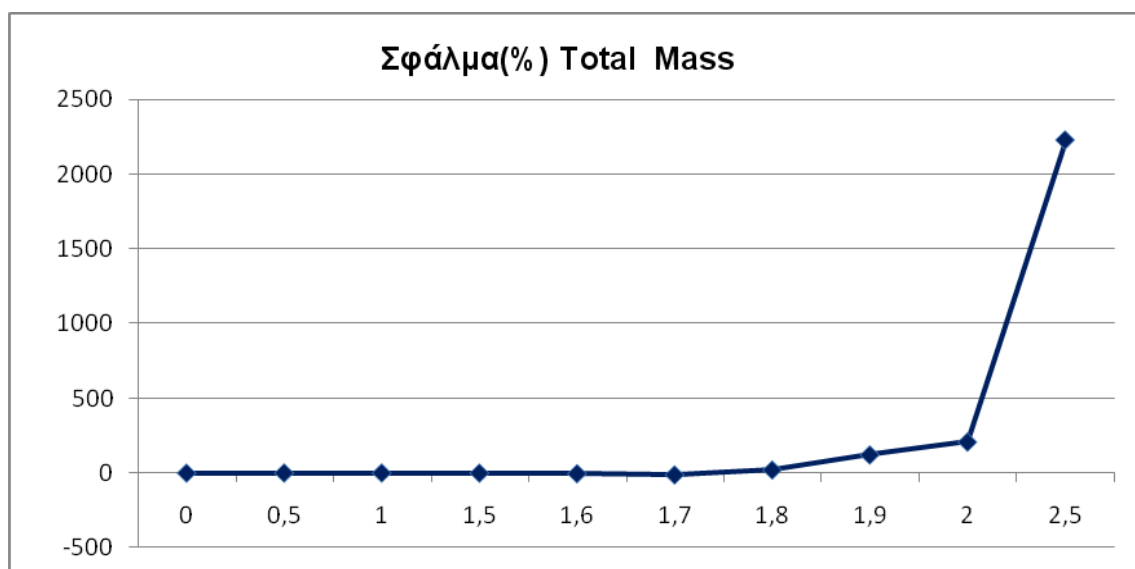
Σχήμα 3.49

Η συνολική μάζα υπολογίζεται με ακρίβεια. Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα. Για $c=0$ το σφάλμα είναι 0,75% όμως όσο η σταθερά μεγαλώνει αυξάνεται και το σφάλμα που για $c=2$ φτάνει στο 207%

constant	0	0,5	1	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,5
total mass	2,7294	2,753	2,7524	2,7263	2,6282	2,4015	3,3044	6,0675	8,4469	64,076
exact total mass	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75



Σχήμα 3.50

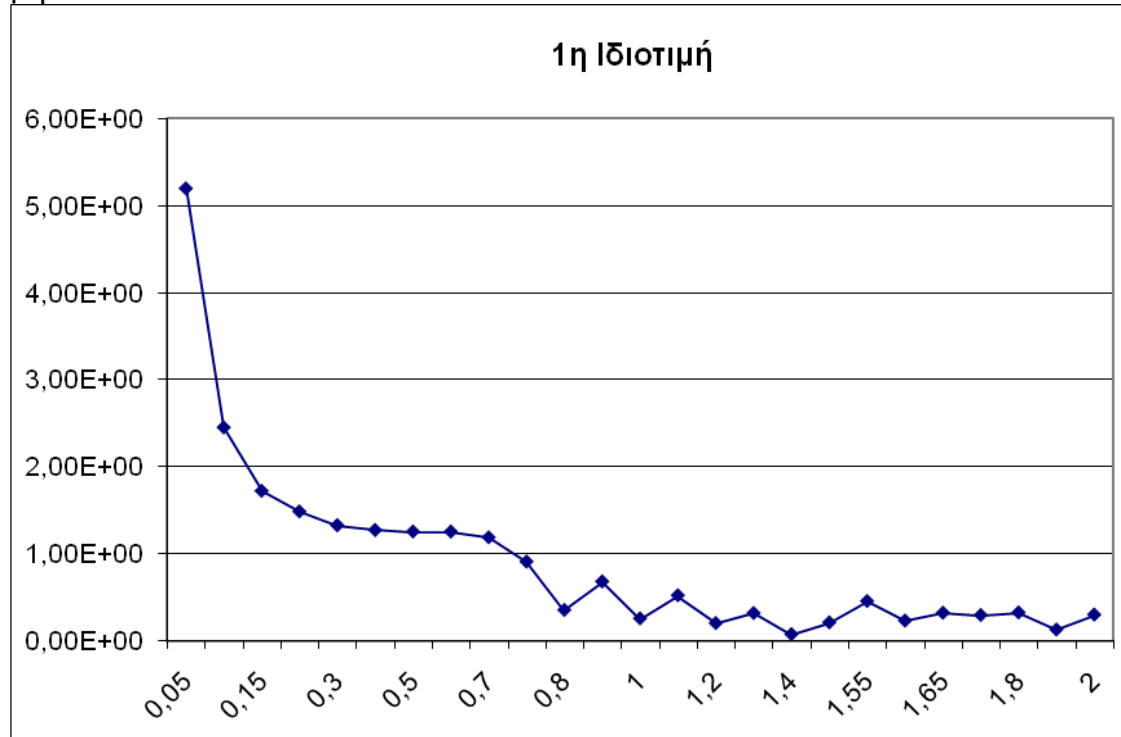


Σχήμα 3.51

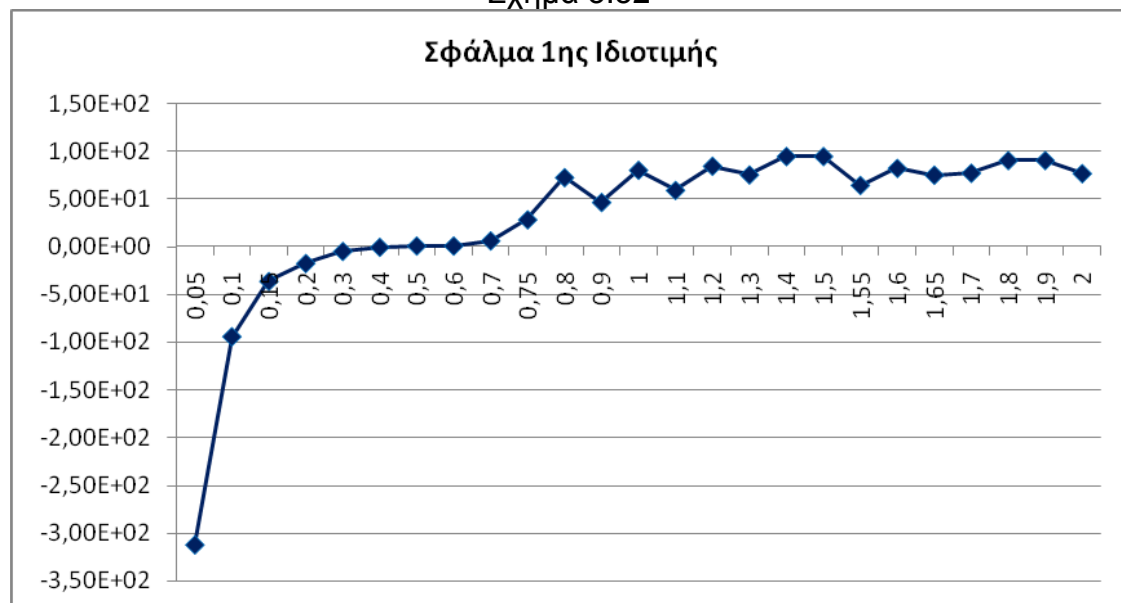
3.2.3 Εκθετική Συνάρτηση $f_j = e^{-(r^2/c^2)}$

Η εκθετική συνάρτηση δεν έδωσε καλά αποτελέσματα. Παρατηρούμε όμως ότι για συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς c το σφάλμα γίνεται ελάχιστο.

Για $c=0.3$ έως και $c=0.7$ το σφάλμα της πρώτης ιδιοτιμής είναι σχεδόν μηδενικό.

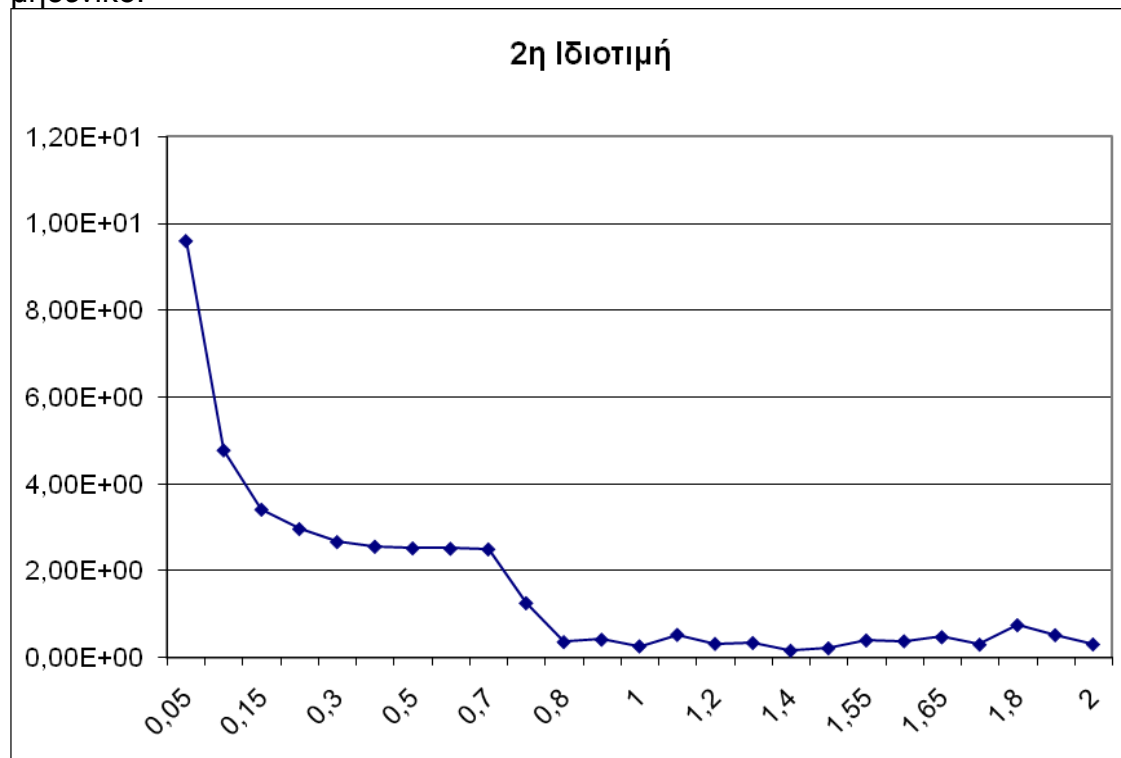


Σχήμα 3.52

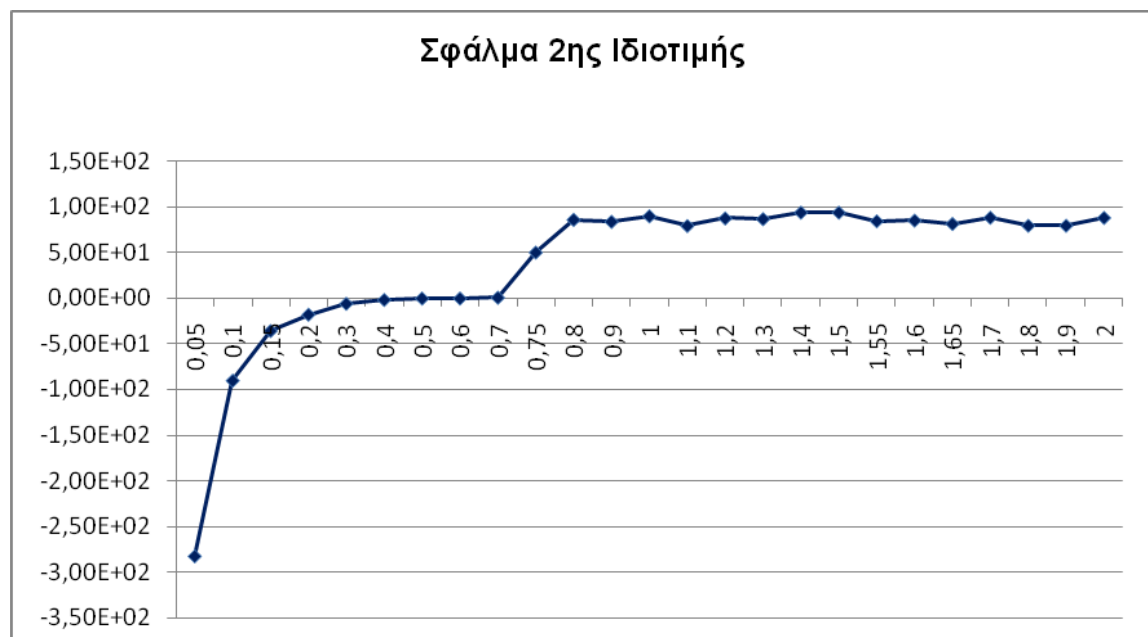


Σχήμα 3.53

Για $c=0.2$ έως και $c=0.7$ το σφάλμα της δεύτερης ιδιοτιμής είναι σχεδόν μηδενικό.

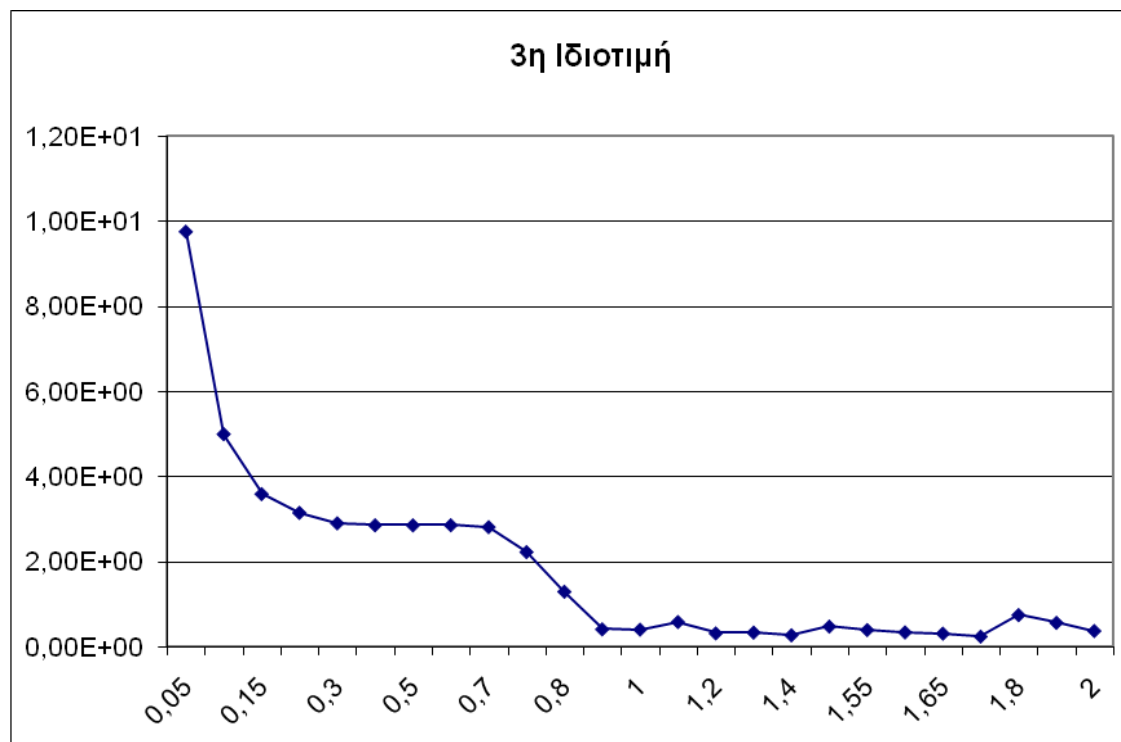


Σχήμα 3.54

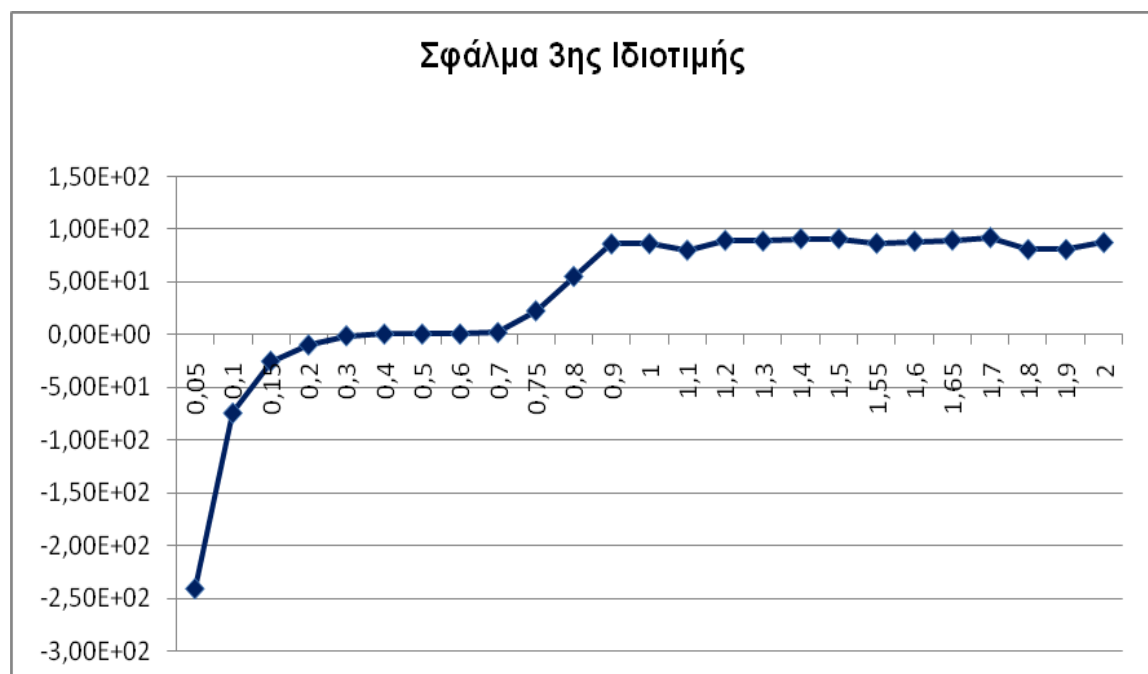


Σχήμα 3.55

Για $c=0.2$ έως και $c=0.7$ το σφάλμα της τρίτης ιδιοτιμής είναι σχεδόν μηδενικό.

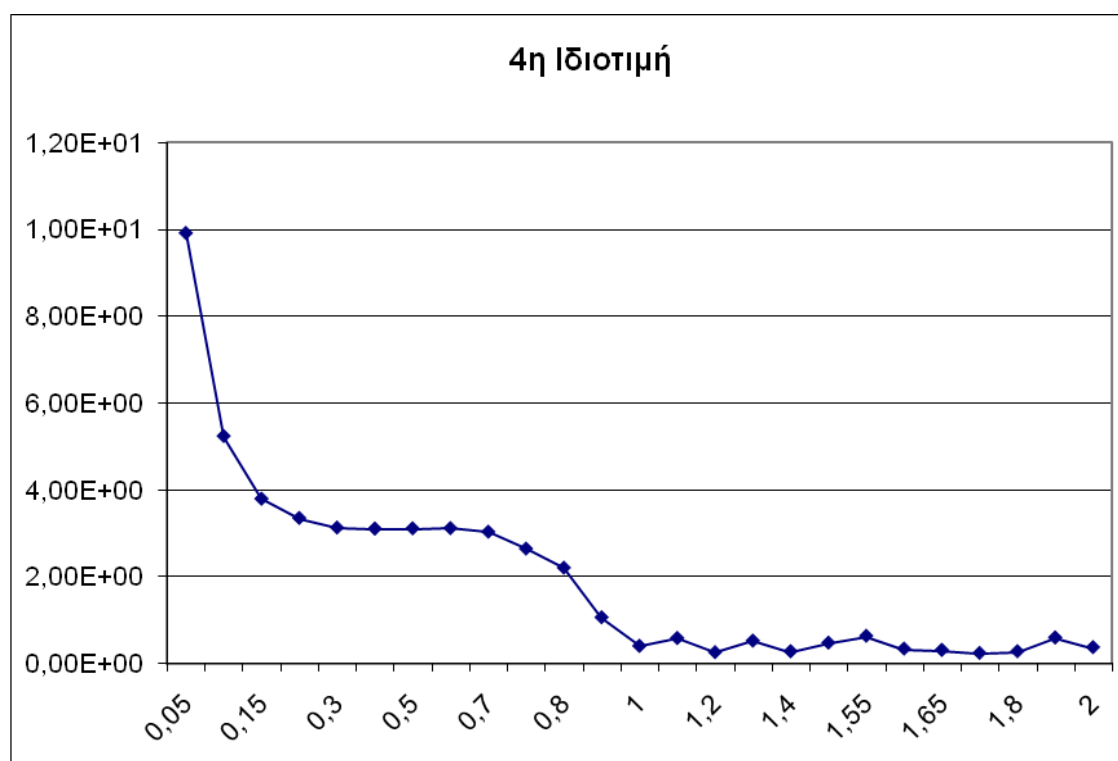


Σχήμα 3.56

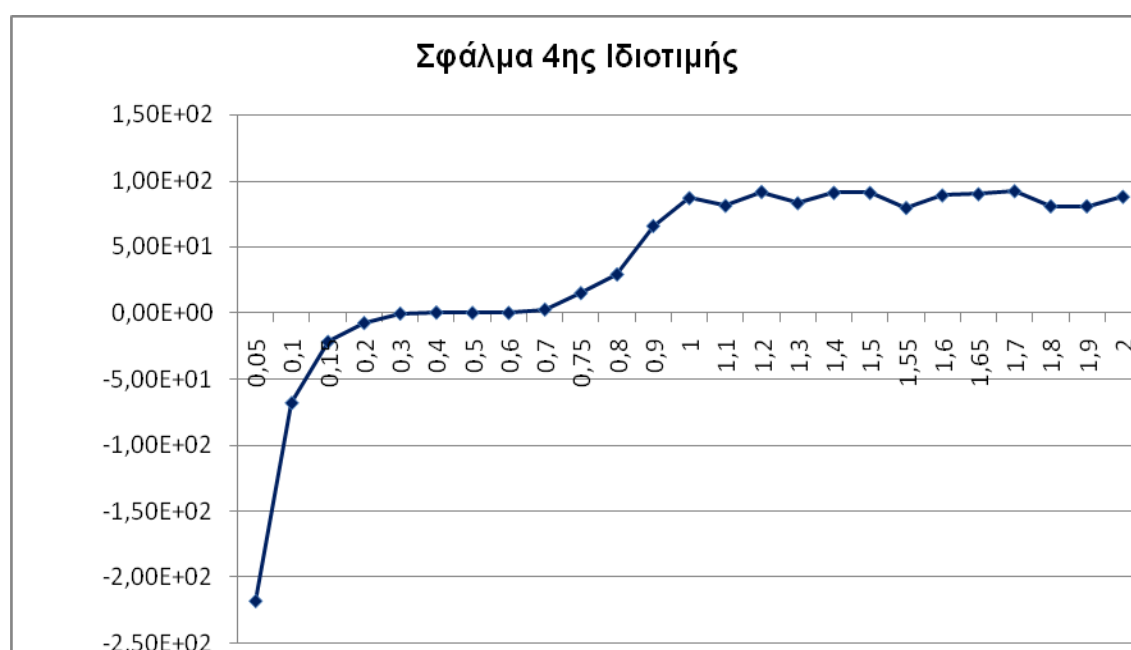


Σχήμα 3.57

Για $c=0.3$ έως και $c=0.7$ το σφάλμα της τέταρτης ιδιοτιμής είναι σχεδόν μηδενικό.



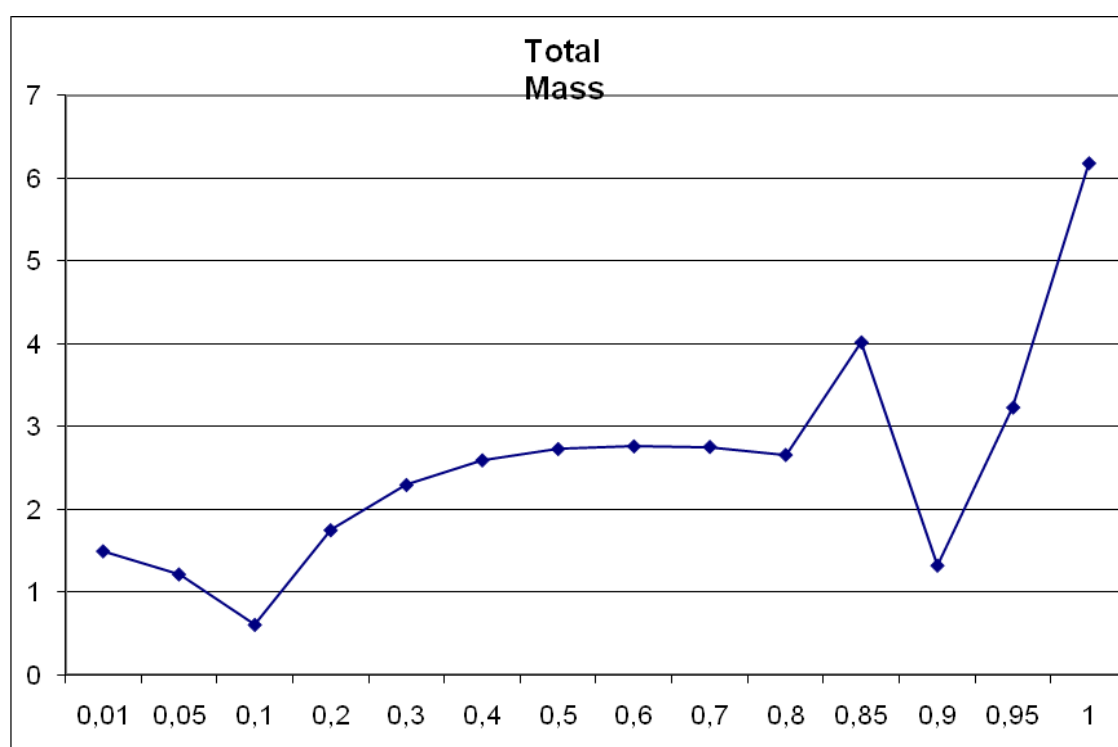
Σχήμα 3.58



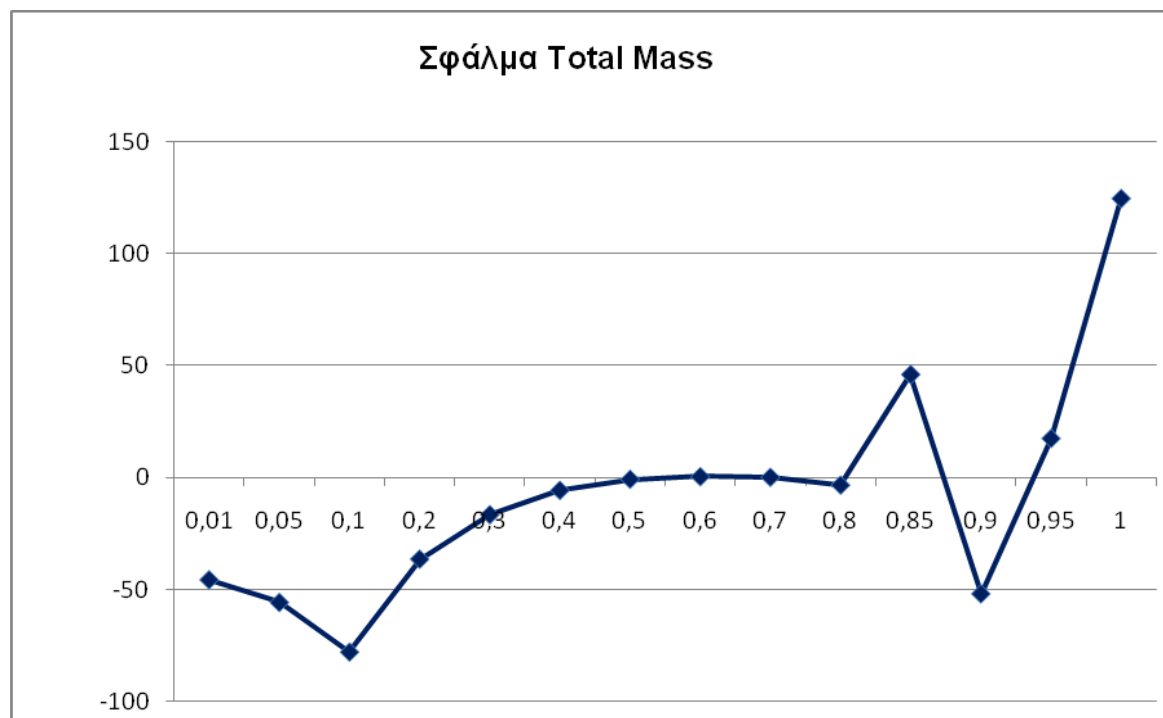
Σχήμα 3.59

Και η συνολική μάζα έχει μηδενικό σφάλμα για συγκεκριμένες τιμές του c . Για $c=0.4$ έως και $c=0.8$ το σφάλμα είναι πολύ μικρό.

c	total mass
0,01	1,4972
0,05	1,218
0,1	6,09E-01
0,2	1,75E+00
0,3	2,30E+00
0,4	2,60E+00
0,5	2,7313
0,6	2,76E+00
0,7	2,7561
0,8	2,66E+00
0,85	4,02E+00
0,9	1,32E+00
0,95	3,23E+00
1	6,1798
1,5	73,8262



Σχήμα 3.60



Σχήμα 3.61

3.2.4 Thin Plate Splines $f_j = r^2 \log r$

Η λογαριθμική συνάρτηση δεν έδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Το σφάλμα είναι της τάξης του 60%

exact eigen	eigen	error %
0,00E+00	5,90E-07	
1,26E+00	5,01E-01	6,03E+01
2,51E+00	9,91E-01	6,05E+01
2,86E+00	1,12E+00	6,08E+01
3,12E+00	1,22E+00	6,08E+01
3,14E+00	1,23E+00	6,09E+01
3,38E+00	1,32E+00	6,09E+01
3,80E+00	1,46E+00	6,16E+01
4,02E+00	1,48E+00	6,32E+01
4,25E+00	1,56E+00	6,33E+01
4,43E+00	1,65E+00	6,28E+01
4,93E+00	1,71E+00	6,53E+01
5,71E+00	1,82E+00	6,82E+01
5,85E+00	1,88E+00	6,78E+01
6,24E+00	1,89E+00	6,97E+01
6,28E+00	1,92E+00	6,95E+01
6,41E+00	2,15E+00	6,64E+01
6,52E+00	2,19E+00	6,64E+01
8,86E+00	2,54E+00	7,14E+01
6,77E+00	2,24E+00	6,69E+01
6,90E+00	2,25E+00	6,74E+01
6,99E+00	2,36E+00	6,62E+01
7,02E+00	2,39E+00	6,59E+01
7,35E+00	2,43E+00	6,70E+01
8,49E+00	2,45E+00	7,11E+01
8,58E+00	2,47E+00	7,13E+01
6,64E+00	2,20E+00	6,68E+01

3.2.5 Πολυωνυμική Συνάρτηση Δεύτερου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^2$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Δεύτερου Βαθμού δεν έδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Το σφάλμα είναι της τάξης του 95%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	8,29E-08	
1,26E+00	4,20E-02	9,67E+01
2,51E+00	1,13E-01	9,55E+01
2,86E+00	1,26E-01	9,56E+01
3,12E+00	1,41E-01	9,55E+01
3,14E+00	1,70E-01	9,46E+01
3,38E+00	1,81E-01	9,46E+01
3,80E+00	1,85E-01	9,51E+01
4,02E+00	1,96E-01	9,51E+01
4,25E+00	2,09E-01	9,51E+01
4,43E+00	2,28E-01	9,49E+01
4,93E+00	2,28E-01	9,54E+01
5,71E+00	2,54E-01	9,56E+01
5,85E+00	2,60E-01	9,56E+01
6,24E+00	2,64E-01	9,58E+01
6,28E+00	2,85E-01	9,55E+01
6,41E+00	3,57E-01	9,44E+01
6,52E+00	3,01E-01	9,54E+01
8,86E+00	3,10E-01	9,65E+01
6,77E+00	3,13E-01	9,54E+01
6,90E+00	3,24E-01	9,53E+01
6,99E+00	3,25E-01	9,53E+01
7,02E+00	3,47E-01	9,51E+01
7,35E+00	3,50E-01	9,52E+01
8,49E+00	3,51E-01	9,59E+01
8,58E+00	3,54E-01	9,59E+01
6,64E+00	2,95E-01	9,56E+01

3.2.6 Πολυωνυμική Συνάρτηση Πέμπτου Βαθμού $f_j = (1-R/d)^4(1+4R/d)$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Πέμπτου Βαθμού δεν έδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Το ελάχιστο σφάλμα είναι 6,79% και το μέγιστο 135%

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	9,71E-06	
1,26E+00	8,87E-01	2,96E+01
2,51E+00	2,19E+00	1,27E+01
2,86E+00	2,41E+00	1,56E+01
3,12E+00	2,72E+00	1,29E+01
3,14E+00	2,93E+00	6,79E+00
3,38E+00	3,25E+00	3,79E+00
3,80E+00	4,53E+00	-1,91E+01
4,02E+00	4,66E+00	-1,60E+01
4,25E+00	4,90E+00	-1,54E+01
4,43E+00	4,90E+00	-1,07E+01
4,93E+00	5,83E+00	-1,82E+01
5,71E+00	7,62E+00	-3,35E+01
5,85E+00	1,38E+01	-1,35E+02
6,24E+00	8,08E+00	-2,95E+01
6,28E+00	8,17E+00	-3,01E+01
6,41E+00	8,57E+00	-3,37E+01
6,52E+00	9,40E+00	-4,42E+01
8,86E+00	9,91E+00	-1,18E+01
6,77E+00	1,11E+01	-6,45E+01
6,90E+00	1,15E+01	-6,65E+01
6,99E+00	1,17E+01	-6,79E+01
7,02E+00	1,22E+01	-7,44E+01
7,35E+00	1,22E+01	-6,66E+01
8,49E+00	1,25E+01	-4,75E+01
8,58E+00	1,37E+01	-5,92E+01
6,64E+00	8,06E+00	-2,14E+01

3.2.7 Πολυωνυμική Συνάρτηση Ογδού Βαθμού

$$f_j = (1-R/d)^6[3+18R/d+25(R/d)^2]$$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Ογδού Βαθμού έδωσε καλές τιμές για τις πρώτες ιδιοτιμές αλλά μετά το σφάλμα αυξήθηκε πολύ φτάνοντας στο 43%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	2,40E-06	
1,26E+00	1,37E+00	-9,103
2,51E+00	2,75E+00	-9,562
2,86E+00	2,82E+00	1,5664
3,12E+00	3,21E+00	-2,856
3,14E+00	3,23E+00	-2,952
3,38E+00	3,31E+00	2,068
3,80E+00	3,37E+00	11,418
4,02E+00	3,52E+00	12,535
4,25E+00	3,64E+00	14,438
4,43E+00	3,80E+00	14,172
4,93E+00	4,31E+00	12,598
5,71E+00	4,40E+00	23,021
5,85E+00	4,40E+00	24,863
6,24E+00	4,52E+00	27,625
6,28E+00	4,49E+00	28,572
6,41E+00	6,66E+00	-3,852
6,52E+00	4,94E+00	24,242
8,86E+00	5,02E+00	43,331
6,77E+00	5,06E+00	25,254
6,90E+00	5,52E+00	19,965
6,99E+00	5,89E+00	15,767
7,02E+00	6,03E+00	14,144
7,35E+00	6,18E+00	15,984
8,49E+00	6,45E+00	24,008
8,58E+00	6,66E+00	22,431
6,64E+00	4,49E+00	32,444

3.2.8 Πολυωνυμική Συνάρτηση Εντεκάτου Βαθμού

$$f_j = (1-R/d)^8[3+18R/d+25(R/d)^2+32(R/d)^3]$$

Η Πολυωνυμική Συνάρτηση Εντεκάτου Βαθμού δεν έδωσε καλά αποτελέσματα. Το ελάχιστο σφάλμα είναι της τάξης του 60%.

Ακριβής Ιδιοτιμή	Υπολογιζόμενη Ιδιοτιμή	Σφάλμα %
0,00E+00	5,90E-07	
1,26E+00	5,01E-01	60,27777778
2,51E+00	9,91E-01	60,53505976
2,86E+00	1,12E+00	60,77972028
3,12E+00	1,22E+00	60,80448718
3,14E+00	1,23E+00	60,86624204
3,38E+00	1,32E+00	60,91420118
3,80E+00	1,46E+00	61,56842105
4,02E+00	1,48E+00	63,22885572
4,25E+00	1,56E+00	63,32235294
4,43E+00	1,65E+00	62,82844244
4,93E+00	1,71E+00	65,30425963
5,71E+00	1,82E+00	68,1821366
5,85E+00	1,88E+00	67,81196581
6,24E+00	1,89E+00	69,68429487
6,28E+00	1,92E+00	69,48248408
6,41E+00	2,15E+00	66,44461778
6,52E+00	2,19E+00	66,44171779
8,86E+00	2,54E+00	71,36681716
6,77E+00	2,24E+00	66,85672083
6,90E+00	2,20E+00	68,06666667
6,99E+00	2,36E+00	66,19742489
7,02E+00	2,39E+00	65,93447293
7,35E+00	2,43E+00	66,97006803
8,49E+00	2,45E+00	71,12367491
8,58E+00	2,47E+00	71,26923077
6,64E+00	2,25E+00	66,08283133

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από ότι φάνηκε παραπάνω οι ακτινικές RBF δεν δίνουν ακριβή αποτελέσματα σε τρισδιάστατα προβλήματα. Στον κύβο(1x1x1) τα αποτελέσματα ήταν πολύ ενθαρυντικά, ίσως λόγω της συμμετρίας που έχει σαν γεωμετρικό σχήμα. Στο παραλληλεπίπεδο(2.5x1.1x1) όμως δεν ήταν καλά. Το ελάχιστο σφάλμα έφτασε μέχρι και το 90% για κάποιες συναρτήσεις.

Η μόνη συνάρτηση που έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα και στα δυο σχήματα είναι η κωνική ακτινική συνάρτηση $f_j = c - r$. Είχε μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς που έγιναν. Σφάλμα εμφανίστηκε για τιμές της σταθεράς c για τιμές στο 65% - 70% του μήκους της διαγωνίου. Για τις υπόλοιπες τιμές τα αποτελέσματα είναι πολύ καλά, το σφάλμα είναι πολύ μικρό και παραμένει σταθερό.

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις (πολυτετράγωνο, εκθετική, υψηλόβαθμο πολυώνυμο) θα πρέπει να σημειωθεί πως για συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς c είχαμε μηδενικό σφάλμα, γεγονός που μπορεί να ποτελεήσει αντικείμενο περαιτέρω έρευνας. Ωστόσο για τις υπόλοιπες τιμές το σφάλμα είναι πολύ μεγάλο.

Βιβλιογραφία

1. Adeyeye J.O., Bernal M.J.M., Pitman K.E. (1985) An improved boundary integral equation method for Helmholtz equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 779-787
2. Agnantiaris JP, Polyzos D, Beskos DE (1996) Some studies in on DR-BEM for elastodynamic analysis. *Computational Mechanics*, 17, 270-277
3. Agnantiaris JP, Polyzos D, Beskos DE (2001) Free vibration analysis of non-axisymmetric and axisymmetric structures by the DR-BEM. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 25, 713-723
4. Ali A, Rajakumar C, Yunus SM (1991) On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, 1271-1282
5. Ali A, Rajakumar C, Yunus SM (1995) Advances in acoustic eigenvalue analysis using boundary element method. *Comput. Struct.*, 56, 837-847
6. Aliabadi A (2002) *The Boundary Elements Method Vol I and Vol II*. Wiley
7. Bai M.R. (1992) Study of acoustic resonance in enclosures using eigenanalysis based on Boundary Elements Methods, *Journal of the Acoustic Society of America*, 91, 2529-2538
8. Banaugh R.P., Goldsmith W. (1963) Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape, *Journal of the Acoustic Society of America*, 35, 1590-1601
9. Banerjee PK, Ahmad S., Wand H.C. (1988) A New BEM Formulation for Acoustic Eigenfrequency Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 1299-1309
10. Banerjee PK (ed) (1982) *Developments in Boundary Elements Method* 2. Elsevier
11. Banerjee PK (ed) (1984) *Developments in Boundary Elements Method* 3. Elsevier
12. Banerjee PK (ed) (1986) *Developments in Boundary Elements Method* 4. Elsevier
13. Banerjee PK and Butterfield R (1981) *Boundary Elements Method in Engineering*, Science. McGraw-Hill
14. Beskos DE (1987) Boundary Elements Methods in dynamic analysis. *Appl. Mech. Rev.*, 40, 1-23

15. Beer G. (2001) Programming The Boundary Elements Method – AN Introduction for Engineers. Wiley
16. Beer G. and Watson J.O. (1992) Introduction to Finite and Boundary Elements Method. Wiley
17. Bezzine G. (1980) A mixed boundary-integral-finite elements approach for plate vibration problems, Mechanics Research Communications, 7, 141-150
18. Brebbia CA, Dominguez J (1992) Boundary Elements: An Introductory Course. Computational Mechanics Publications
19. Brebbia CA (1984) Boundary Elements Method for Engineers. Pentech Press
20. Brebbia CA (1985) The solution of wave propagation problems using boundary elements. In TA Cruse, AB Pifko, H Armen (eds), Advanced Topics in Boundary Elements Analysis ASME, AMD, 72, 91-111
21. Brebbia CA (ed) (2000) International Series on the Advances in Boundary Elements. WIT Press
22. Brebbia CA (ed) (1992) Boundary Elements Technics VII. Elsevier
23. Brebbia CA (ed) (1983) Proceedings of the Fifth International Conference on BEM. Springer –Verlag
24. Brebbia CA (ed) (1986) Proceedings of the Eighth International Conference on BEM . Computational Mechanics Publications
25. Brebbia CA, Nardini D. (1983) Dynamic analysis in solid mechanics by an alternate boundary elements procedure, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2, 228-233
26. Burton A.J., Miller G.F. (1971) The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, Proc. Of the Royal Society of London, 323, 201-220
27. Chandler-Wilde S.N. (1997) The boundary elements method in outdoor noise propagation, Proc. of the Institute of Acoustics, 19, 27-50
28. Chen CS, Rashed YF (1998) Evaluation of thin plate splines based on particular solutions for Helmholtz-type operators for the DRM. Mech Res. Comm., 25, 195-201
29. Chen L.H., Schweikert P.G. (1963) Sound radiation from an arbitrary body, Journal of the Acoustic Society of America, 35, 1626-1632

30. Coyette JP & Fyfe KR (1990) An improved formulation for acoustic eigenmode extraction from boundary elements models. Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 112, 39-48
31. DeMey G. (1976) Calculation of the Eigenvalues of the Helmholtz Equation by an Integral Equation, Journal of Numerical Methods in Engineering, 10, 57-66
32. DeMey G. (1976) A simplified integral equation method for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation, of Numerical Methods in Engineering, 14, 72-84
33. Filippi P.J.T. (1977) Layer potentials and acoustic diffraction, Journal of Sound and Vibration, 54, 473-500
34. Franke R. (1982) Scattered data interpolation: test of some methods. Math. Comput., 48, 181-200
35. Goldberg M.A., Chen C.S. (1994) The Theory of Radial Basis Functions Applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations. Boundary Elements Commun.
36. Goldberg M.A., Chen CS (1996) A bibliography on radial basis function approximation. Bound. Elem. Comm., 7, 155-163
37. Goldberg M.A., Chen CS, Bowman H, Power H (1998) Some Comments on the use of Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Method. Computational Mechanics Publications, 22, 61-69
38. Goldberg M.A. et al. (1999) Boundary Integral Methods – Numerical and Mathematical Aspects. WIT Press
39. Gordon W.J. (1971) Blending Function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation, SIAM Journal of Numerical Analysis, 8, 158-171
40. Kamiya N., Andoh E. (1993) Eigenvalue analysis by Boundary Elements Methods, Journal of Sound and Vibration, 160, 279-287
41. Kanarachos A. Provatidis C.G. (1987) Performance of Mass Matrices for the BEM Dynamic Analysis of Wave Propagation Problems. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 63, 155-166
42. Katsikadelis J. (2002) Boundary Elements Method – Theory and Applications. Elsevier
43. Kawai Y., Terai T. (1990) The application of integral equation methods to the calculation of sound attenuation by barriers, Applied Acoustics, 31, 101-117

44. Kitahara M. (1985) Boundary integral equations methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thick plates, Elsevier
45. Kyriakopoulos M, Tirpintiris A (1985) The boundary elements method in potential and scalar problems, Diploma works, NTUA, Mechanical Engineering Dep. (in Greek)
46. Lacerda L.A., Wrobel L.C., Mansur W.J. (1997) A dual boundary formulation for sound propagation around barriers over an impedance plane, *Journal of Sound and Vibration*, 202, 235-247
47. Lacerda L.A., Wrobel L.C., Mansur W.J., Power H. (1998) A novel boundary integral formulation for three dimension analysis of acoustic barriers over an impedance plane, *Journal of the Acoustic Society of America*, 104, 671-678
48. Loeffer CF, Mansun WJ (1987) Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems. In Brebbia CA, Venturini WS (eds), *Boundary Element Techniques (BETECH 1987): Applications in Stress Analysis and Heat Transfer*. Computational Mechanics Publications, 105-122
49. Michelli CA (1986) Interpolation of Scattered Data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2, 11-12
50. Nardini D, Brebbia CA (1982) A new approach to free vibration analysis using boundary elements, In CA Brebbia(ed) *Boundary Elements Methods in Engineering*. Springer –Verlag
51. Nardini D., Brebbia CA (1983) A new approach to free vibration analysis using boundary elements, *Applied Mathematical Modeling*, 1, 157-163
52. Nardini D, Brebbia CA (1985) The solution of parabolic and hyperbolic problems using an alternative boundary element formulation. In Brebbia C, Maier G (eds) *Boundary Elements VII, Vol I*. Springer –Verlag
53. Niwa Y., Kobayashi S., Kitahara M. (1982) Determination of eigenvalues by boundary elements methods, in *Developments in boundary elements methods*, Applied Science Publishers
54. Panick O.I. (1985) On the question of the solvability of the exterior boundary problems for the wave equation and Maxwell's equation, *Upseki Mat. Nauk*, 20, 221-226
55. Paris Federico and Cans Jose (1997) *Boundary Elements Method – Fundamentals and Applications*. Oxford Science Publications
56. Partridge PW, Brebbia CA, Wrobel LC (1992) *The Dual Reciprocity Boundary Elements Method*. Computational Mechanics Publications

57. Provatidis C. (1985) Letter to Dr. D.Nardini
58. Provatidis C (1987) On the application of boundary elements in field and dynamic problems, Doctoral Dissertation, NTUA, Mechanical Engineering Department, Athens, Greece (in Greek)
59. Provatidis CG (2004) On DR/BEM eigenvalue Analysis of 2-D acoustics. Computational Mechanics Publications, 35, 41-53
60. Provatidis CG, Zafiropoulos N (2003) Determination of Eigenfrequencies in Three-Dimensional Acoustic Cavities using Coons patch Boundary Supplements. In Aifantis E (ed) Abstracts, Fifth European Solid Mechanics, p. 181
61. Provatidis CG Kanarachos A (1995) Further Research on the Performance of Consistent Mass Matrices using BEM for symmetric/nonsymmetric formulations Computational Mechanics 16, 197-207
62. Provatidis CG Kanarachos A (2001) Performance of macro-FEM approach using global interpolation (Coons') functions in axisymmetric potential problems. Comput. Struct., 79, 1769-1779
63. Rashed YF (2002a) Transient dynamic boundary elements analysis using Gaussian-based mass matrix. Eng. Anal. Bound. Elem., 26, 265-279
64. Rashed YF (2002b) BEM for dynamic analysis using compact supported radial basis functions. Comput. Struct., 80, 1351-1367
65. Seznec R. (1980) Diffraction of sound around barriers: Use of the boundary elements technique, Journal of Sound and Vibration, 73, 195-209
66. Schenck H.A. (1968) Improved integral formulation for acoustic radiation problems, Journal of Acoustic Society in America, 44, 41-58
67. Shaw R.P., Friedman F.B. (1962) Diffraction of steady acoustic waves by a free cylindrical obstacle at a free surface, Proc. 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, 371-379
68. Tai G.R.C., Shaw R.P. (1974) Helmholtz equation eigenvalues and eigenmodes for arbitrary domains, Journal of Acoustic Society in America, 56, 1437-1443
69. Terai T. (1980) On calculation of sound fields around three dimension objects by integral equation methods, Journal of Sound and Vibration, 69, 71-100
70. Wendland H (1995) Piecewise Polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. Adv Comput. Math., 4, 389-396
71. Wrobel LC (2002) The Boundary Elements Method Vol 1 and Vol 2. Wiley

Πηγές από το Διαδίκτυο

1. www.wikipedia.org
2. www.ntu.edu.sg/home/mwtang/bemsite.htm
3. www.boundary-element-method.com/
4. www.iam.uni-stuttgart.de/bem/
5. www.soundsoft.demon.co.uk/

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στο παράρτημα αυτό παρατίθεται το κυρίως πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την μελέτη των συναρτήσεων στον κύβο. Είναι γραμμένο σε γλώσσα Fortran και «έτρεξε» σε υπολογιστή με επεξεργαστή AMD Athlon XP 3000+ στα 2GHz.και 2x512MB μνήμη RAM.

```
C-----
C   EIGENSOLUTION OF ACOUSTIC CAVITIES
C   FOR 9 NODE TETRAGON LAGRANGIAN NON COMPATIBLE
C-----
      PROGRAM NARDINI_BEMPOT9NC
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C   PARAMETER (NGEOM=1,NUMEL=1)
C   PARAMETER (NGEOM=42,NUMEL=10)
      PARAMETER (NGEOM=26,NUMEL=6)
      PARAMETER
(NCOL=NUMEL*9,NDM=3,NCASE=1,NNM=NCOL,NG=17)
      COMMON/CIXH/CIX,CIH
C-----
C   XG : COORDINATES OF THE GEOMETRY (ELEMENTS)
C   XC : COORDINATES OF THE COLLOCATION POINTS
C   G , H : USUAL G H MATRICES OF BEM
C   KODE : KODES OF COLLOCATION POINTS
C   BOUNDARY CONDITIONS
C   0 >>> U PRESCRIBED
C   1 >>> T PRESCRIBED
C   U : TEMPERATURE OF COLLOCATION POINTS
C   T : FLUX OF COLLOCATION POINTS
C   RHS : RIGHT HAND SIDE OF SOLUTION
C   BC : GIVEN BOUNDARY CONDITIONS
C   IF KODE(I) = 0 >>> BC(I) = TEMPERATURE
C   OF COLLOCAION POINT I
C   IF KODE(I) = 1 >>> BC(I) = FLUX
C   OF COLLOCATION POINT I
C   NUMEL : NUMBER OF ELEMENTS
C   NGEOM : NUMBER OF GEOMETRY NODES
C   NCOL : NUMBER OF COLLOCATION POINTS = 9 * NUMEL
C   NDM : NUMBER OF DIMENSIONS OF THE PROBLEM HERE = 3
C   IXG : TOPOLOGY OF THE ELEMENTS THAT IS
C   IXG(L,I) = J >>> THE L GEOMETRY NODE
C   OF I ELEMENT IS THE J GEOMETRY NODE
C   IXC : TOPOLOGY OF THE COLLOCATION POINTS
C   THE SAME COMMENT AS IXG
C   XS : COORDINATES OF THE SOURCE POINT UNDER
C   EXAMINATION EVERY TIME
C   XGLOC : GEOMETRY NODES OF THE LOCAL
C   ELEMENT FOR INTEGRATION
C   GFLOC , HFLOC : LOCAL INFLUENCE MATRICES
```

```

C      G AND H OF THE ELEMENT UNDER CONSIDERATION
C-----
      DIMENSION XG(NDM,NGEOM),IXG(9,NUMEL)
      DIMENSION G(NCOL,NCOL),H(NCOL,NCOL)
      DIMENSION A(NCOL,NCOL)
      DIMENSION KODE(NCOL,NCASE)
      DIMENSION XC(NDM,NCOL),IXC(9,NUMEL)
      DIMENSION RHS(NCOL),BC(NCOL,NCASE)
      DIMENSION U(NCOL,NCASE),T(NCOL,NCASE)
      DIMENSION XGLOC(9,NDM)
      DIMENSION GF(9),HF(9)
      DIMENSION XS(NDM)
C-----
      INTEGER WHAT_TO_DO
C-----
      COMMON/PVARCOM/PVAR
C-----
      DIMENSION AM(NNM,NNM),F(NNM,NNM),Adyn(NNM,NNM)
      DIMENSION AMinv(NNM,NNM),HELP(NNM,NNM)
      DIMENSION WR(NNM),WI(NNM),SCALER(NNM),INTR(NNM)
      DIMENSION HGTHELP(NNM,NNM)
      DOUBLE COMPLEX EVAL(NNM)
      DIMENSION XCL(NNM),YCL(NNM),ZCL(NNM)
C-----
      DIMENSION AMNIK(NNM,NNM)
      DIMENSION SAB(NNM)
      DIMENSION ALMAT(NNM,NNM)
      DIMENSION FINV(NNM,NNM)
      DIMENSION SUML(9),RNGL(9)
      DIMENSION
DN(NDM,NCOL),DNXCL(NCOL),DNYCL(NCOL),DNZCL(NCOL)
      DIMENSION TBAN(NNM,NNM),DBAN(NNM,NNM)
      PARAMETER (ITHEO=2)
      DIMENSION EIGENTHEO((ITHEO+1)*(ITHEO+1)*(ITHEO+1))
      DIMENSION EIGENTHEOSRT((ITHEO+1)*(ITHEO+1)*(ITHEO+1))
C-----
      DATA PI/3.141592653589793D00/
      COMMON/GAUSD/GIL(NG,NG),OMEDL(NG,NG)
C-----
      PVAR=1.0D00/(4.0D00*PI)
      CALL GAU
C-----
      ! INPUT
      OPEN(7,FILE='POT.BEM3D')
      READ(7,*)
      READ(7,*) CIX,CIH
      READ(7,*)
      READ(7,*)(IL,(XG(J,IL),J=1,NDM),I=1,NGEOM)
C-----
      DO 413 IL=1,NGEOM

```

```

413 WRITE(*,'(I5,3E13.5)')IL,(XG(J,IL),J=1,NDM)
C-----
      READ(7,*)
      READ(7,*) (IL,(IXG(J,IL),J=1,9),I=1,NUMEL)
      READ(7,*)
C-----
      DO 107 ICASE=1,NCASE
        READ(7,*)NCODE
        DO 11 J=1,NCODE
          READ(7,*) IL1,IL2,KOD1,BC1
          DO 12 L=IL1,IL2
            BC(L,ICASE)=BC1
            KODE(L,ICASE)=KOD1
          12 CONTINUE
        11 CONTINUE
      107 CONTINUE
C-----
      READ(7,*)
      READ(7,*)WHAT_TO_DO
C-----
      CLOSE(7)
C-----
      CALL GAU
      CALL INLO2DATA
      CALL INLODATA
C-----
      CALL MAKECOL(XG,IXG,XC,CIX,CIH,NDM,NGEOM,NUMEL,NCOL)
C-----
      DO I=1,NNM
        XCL(I)=XC(1,I)
        YCL(I)=XC(2,I)
        ZCL(I)=XC(3,I)
      ENDDO
C-----
C   MAKES COLLOCATION MATRIX IXC
C-----
      IJ=0
      DO 101 I=1,NUMEL
        DO 102 J=1,9
          IJ=IJ+1
        102 IXC(J,I)=IJ
      101 CONTINUE
C-----
      DO 1001 I=1,NCOL
        DO 1001 J=1,NCOL
          H(I,J)=0.0D00
        1001 G(I,J)=0.0D00
C-----
C   CONSTRUCTING L MATRIX
C-----

```

```

DO I=1,NCOL
  DO J=1,NCOL
    ALMAT(I,J)=0.0D00
  ENDDO
ENDDO

C
DO J=1,NUMEL
C
  DO L=1,9
    DO K=1,NDM
      XGLOC(L,K)=XG(K,IXG(L,J))
    ENDDO
  ENDDO

  NPGLMAT=17

C
C ONLY FOR 1X1 TETRAGONS
C
C BX=0.5D00
C BH=0.5D00
C AX=0.5D00
C AH=0.5D00
C RJAC = BX*BH

  BX=DSQRT( (XGLOC(2,1)-XGLOC(1,1))**2 +
$ (XGLOC(2,2)-XGLOC(1,2))**2 +
$ (XGLOC(2,3)-XGLOC(1,3))**2 )/2.0D00

  BH=DSQRT( (XGLOC(3,1)-XGLOC(2,1))**2 +
$ (XGLOC(3,2)-XGLOC(2,2))**2 +
$ (XGLOC(3,3)-XGLOC(2,3))**2 )/2.0D00

  RJAC=BX*BH

  SUM = 0.0D00
  DO L=1,9
    SUML(L) = 0.0D00
  ENDDO

  DO IG=1,NPGLMAT
    DO JG=1,NPGLMAT
      XI = GIL(IG,NPGLMAT)
      HI = GIL(JG,NPGLMAT)
      CALL DL2DCNEW(XI,HI,RNGL,9)
      SUM = SUM +
RJAC*OMEDL(IG,NPGLMAT)*OMEDL(JG,NPGLMAT)
      DO L=1,9
        SUML(L)=SUML(L)+RNGL(L)*RJAC
      $ *OMEDL(IG,NPGLMAT)*OMEDL(JG,NPGLMAT)
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO

```



```

        ENDDO
        ENDDO

        SUMT=0.0D00
        DO L=1,9
            SUMT=SUMT+SUML(L)
        ENDDO

        DO L=1,9
            IL1=(IXC(L,J)-1)+1
            ALMAT(IL,IL1)=SUML(L)
        ENDDO
C
        ENDDO
C-----
C  CALCULATE OUTWARD NORMAL IN COLOCATION POINTS
C-----
        CALL MAKEDN(XG,IXG,DN,CIX,CIH,NDM,NGEOM,NUMEL,NCOL)
C-----
        DO 1003 I=1,NCOL
C  WRITE(*,'(I5,3E13.5)')I,DN(1,I),DN(2,I),DN(3,I)
        DNXCL(I)=DN(1,I)
        DNYCL(I)=DN(2,I)
        DNZCL(I)=DN(3,I)
C  PAUSE
        1003 CONTINUE
        PAUSE
C-----
        IF (WHAT_TO_DO.EQ.1) GOTO 69
C-----
        ! FMAT
        DO 1 I=1,NCOL
C-----
            DO 3 L=1,NDM
                3 XS(L)=XC(L,I)
                WRITE(*,'(A,I5,3E13.5)') ' COL NODE ',I,(XS(L),L=1,NDM)
C  PAUSE
C-----
                DO 2 J=1,NUMEL
C-----
                    DO 4 L=1,9
                        DO 41 K=1,NDM
                            41 XGLOC(L,K)=XG(K,IXG(L,J))
C-----
C  WRITE(*,'(A,3I5,3E13.5)') ' NODE ELEM NODEL ',
C  $  I,J,L,(XGLOC(L,K),K=1,NDM)
C  PAUSE
                4 CONTINUE
C-----

```

```

      LI=0
      DO 103 L=1,9
        IF (IXC(L,J).EQ.I) LI=L
103  CONTINUE
C-----
      IF (LI.EQ.0) CALL PINTE9(XS,XGLOC,GF,HF,NDM,9)
      IF (LI.NE.0) CALL PINLO9(XS,XGLOC,GF,HF,NDM,9,LI)
C-----
      DO 5 M=1,9
        IL=I
        JK=IXC(M,J)
        G(IL,JK)=G(IL,JK)+GF(M)
      5 H(IL,JK)=H(IL,JK)+HF(M)
C-----
C   WRITE(*,'(2I5,4E13.5)')I,J,GF(1),GF(2),GF(3),GF(4)
C   WRITE(*,'(10X,5E13.5)')GF(5),GF(6),GF(7),GF(8),GF(9)
C   WRITE(*,'(2I5,4E13.5)')I,J,HF(1),HF(2),HF(3),HF(4)
C   WRITE(*,'(10X,5E13.5)')HF(5),HF(6),HF(7),HF(8),HF(9)
C   PAUSE
C-----
      2 CONTINUE
C-----
C   H(I,I)=0.0D000
      HIIOLD=H(I,I)
C-----
      SUM=0.0D00
      DO 9 J=1,NCOL
C   IF (J.EQ.I) GOTO 9
C   H(I,I)=H(I,I)-H(I,J)
      SUM=SUM+H(I,J)
      9 CONTINUE
      H(I,I)=-SUM
C-----
      WRITE(*,'(A,I5,E13.5)') H NUMBERS ',I,H(I,I)
C   PAUSE
      1 CONTINUE
C-----
      WRITE(*,'(A)') ' WRITING IN FILES'
      NDF=NCOL
      OPEN(7,FILE='GFILEP.',ACCESS='DIRECT',RECL=NDF*8)
      OPEN(8,FILE='HFILEP.',ACCESS='DIRECT',RECL=NDF*8)
      DO 109 I=1,NDF
        WRITE(7,REC=I) (G(I,J),J=1,NDF)
        WRITE(8,REC=I) (H(I,J),J=1,NDF)
109  CONTINUE
      CLOSE(7)
      CLOSE(8)
      GOTO 10017
      GOTO 79
C-----

```

```

69 WRITE(*,'(A)') 'READING FROM FILES'
   NDF=NCOL
   OPEN(7,FILE='GFILEP.',ACCESS='DIRECT',RECL=NDF*8)
   OPEN(8,FILE='HFILEP.',ACCESS='DIRECT',RECL=NDF*8)
     DO 119 I=1,NDF
       READ(7,REC=I) (G(I,J),J=1,NDF)
       READ(8,REC=I) (H(I,J),J=1,NDF)
119  CONTINUE
     CLOSE(7)
     CLOSE(8)

     GOTO 10017

C-----
79 CONTINUE
   OPEN(7,FILE='POT.OUT')
   DO 106 ICASE=1,NCASE
     WRITE(*,'(A,I5)') 'ASSEMBLING CASE ',ICASE
     CALL ASSEMB(A,G,H,RHS,BC,KODE,NCOL,NCASE,ICASE)
     EPS=1.0D-10
     WRITE(*,'(A,I5)') 'SOLVING CASE ',ICASE
     CALL DGAUPSOLV(A,RHS,NCOL,1,0,EPS)
     CALL DGAUPSOLV(A,RHS,NCOL,1,1,EPS)
     WRITE(*,'(A,I5)') 'DISASSEMBLING CASE ',ICASE
     CALL DASSEMB(RHS,BC,U,T,KODE,NCOL,NCASE,ICASE)

C-----
   IEL1=9
   IEL2=10
   DO 111 I=9*(IEL1-1)+1,9*IEL2
     WRITE(*,'(A,I5,2E13.5)') 'NODE U T ',
$ I,U(I,ICASE),T(I,ICASE)
     PAUSE
111  CONTINUE

C-----
   WRITE(7,'(A,I5)') 'LOAD CASE ',ICASE
   DO 114 I=1,NCOL
     WRITE(7,'(A,I5)') 'NODE X U T ',I
     WRITE(7,'(3E13.5)')(XC(L,I),L=1,NDM)
     WRITE(7,'(2E13.5)')U(I,ICASE),T(I,ICASE)
114  CONTINUE

C-----
106 CONTINUE
   CLOSE(7)
   PAUSE
   RETURN

C
C...CHECK SUMS OF ROWS
C

10017 CONTINUE

```

```

NNOD=NCOL
DENS=1.0D00

OPEN(16,FILE='HSUMS')
DO I=1,NNOD
  SUM=0.0D+00
  DO J=1,NNOD
    SUM=SUM+H(I,J)
  ENDDO
  WRITE(16,*) I,SUM
ENDDO
CLOSE(16)

DO I=1,NNM
  DO J=1,NNM
    HGTHELP(I,J)=H(I,J)
  ENDDO
ENDDO

WRITE(*,*) 'FIND EIGENVALUES OF H MATRIX'

CALL DEVLRG(NNOD,HGTHELP,NNM,EVAL)

OPEN(13,FILE='EIGEN_H')
WRITE(13,'(2(2X,E13.5))') (EVAL(NNOD-I+1),I=1,10)
CLOSE(13)

C    PAUSE
C    STOP

C
C
C...CALCULATE [M_hut} & [F]-MATRICES ...
C

WRITE(*,*) ' GIVE CONSTANT '
READ(*,*) CONSTANT

C    CONSTANT = DSQRT(1.0D00)

C    WRITE(*,*) 'G ,XNU, CONSTANT =', G , XNU, CONSTANT

IMASS = 0    ! 2

IF (IMASS.EQ.0) THEN
  WRITE(*,*) 'COMPUTING Mhut...VOLUME INTEGRATION'
  CALL MASS_hut(XCL,YCL,ZCL,
$  AM,NNOD,GE,XNU,CONSTANT,DENS)      !ELASTICITY

```

```

ENDIF

IMASSBAN=0      !1

IF (IMASSBAN.EQ.1) THEN
  WRITE(*,*) 'COMPUTING Mhut...BANERJEE'
  CALL MASS_HUT_BAN(XCL,YCL,ZCL,
$  AM,G,H,TBAN,DBAN,NNOD,CONSTANT,DNXCL,DNYCL,DNZCL)
ENDIF

OPEN(13,FILE='AM_3DCOO')
DO I=1,NNOD
  DO J=1,NNOD
    IF (IMASS.EQ.0) WRITE(13,*) AM(I,J)
    IF (IMASS.EQ.1) READ(13,*) AM(I,J)
  ENDDO
ENDDO
CLOSE(13)

OPEN(13,FILE='AM_3DCOO.BAN')
DO I=1,NNOD
  DO J=1,NNOD
    IF (IMASSBAN.EQ.1) WRITE(13,*) AM(I,J)
    IF (IMASSBAN.EQ.2) READ(13,*) AM(I,J)
  ENDDO
ENDDO
CLOSE(13)

C  WRITE(*,*) AM(1,1),AM(1,2),AM(1,3)
C  WRITE(*,*) AM(2,1),AM(2,2),AM(2,3)
C  WRITE(*,*) AM(3,1),AM(3,2),AM(3,3)

C  WRITE(*,*) AM(4,4),AM(4,5),AM(4,6)
C  WRITE(*,*) AM(5,4),AM(5,5),AM(5,6)
C  WRITE(*,*) AM(6,4),AM(6,5),AM(6,6)
C
C  WRITE(*,*) 'AM(I,I), I=10,14,36,40'
C  WRITE(*,*) AM(3*9+1,3*9+1),AM(3*13+1,3*13+1)
C  !      ,AM(3*35+1,3*35+1),AM(3*39+1,3*39+1)
C  PAUSE
C
C  STOP
C
C  WRITE(*,*) 'COMPUTING FBASIS...'
C  WRITE(*,*) NNOD NNM IS ',NNOD,NNM
C  PAUSE

```

```

      IF (IMASS.EQ.0.OR.IMASS.EQ.2)
$    CALL FBASIS(XCL,YCL,ZCL,F,NNOD,CONSTANT)
C
      OPEN(13,FILE='F_3DCOO')
      DO I=1,NNOD
      DO J=1,NNOD
        IF (IMASS.EQ.0.OR.IMASS.EQ.2) WRITE(13,*) F(I,J)
        IF (IMASS.EQ.1) READ(13,*) F(I,J)
      ENDDO
      ENDDO
      CLOSE(13)

```

```

C  9 NOD NONCOMPATIBLE

```

```

      ICALC_MASS=0

```

```

      IF (ICALC_MASS.EQ.0) GOTO 666

```

```

C  CALCULATE TOTAL MASS

```

```

C

```

```

C...INVERSE [F]-1

```

```

C

```

```

      write(*,*) 'Calculating INV_F...'

```

```

      CALL INV(f,Finv,f,Df,NCOL,NCOL)

```

```

C

```

```

C...Fing [Mhut]*[F-1] stored in AMNIK

```

```

C

```

```

      call MULTA(am,Finv,amNIK,sab,NCOL,NCOL)

```

```

C

```

```

C...Find [G-1]

```

```

C

```

```

      write(*,*) 'Calculating INV_G...'

```

```

C 444 continue

```

```

      CALL INV(g,AMinv,g,Dg,NCOL,NCOL)

```

```

      write(*,*) 'Calculating [G-1]*[Mhut]*[F-1]...'

```

```

C

```

```

C...Find [G-1]*[Mhut]*[F-1]

```

```

C

```

```

      call MULTA(AMinv,amNIK,H,sab,NCOL,NCOL)

```

```

      write(*,*) 'Calculating [L][G-1]*[Mhut]*[F-1]...'

```

```

C
C...Find [L][G-1]*[Mhut]*[F-1]
C
      call MULTA(ALMAT,H,g,sab,NCOL,NCOL)
C
C...Find total mass
C
      smass=0.0d00
      do i=1,NCOL
        do j=1,NCOL
          smass=smass+g(i,j)
        enddo
      enddo
      write(*,*) 'TOTAL MASS =',smass

      PAUSE
      STOP
666  CONTINUE
C
C...CALCULATE INVERSE OF MATRIX AM
C
      WRITE(*,*) 'COMPUTING INV...'
      CALL INV(AM,AMinv,AM,DETERM,NNOD,NNM)
C
C...CALCULATE PRODUCT 'F*AMinv*H'
C
      WRITE(*,*) 'COMPUTING MATMUL 1/2...'
      HELP=MATMUL(F,AMinv)
      WRITE(*,*) 'COMPUTING MATMUL 2/2...'
      Adyn=MATMUL(HELP,H)
C
      WRITE(*,*) 'FIND EIGENVALUES OF ADYN MATRIX'

      CALL DEVLRG(NNOD,ADYN,NNM,EVAL)

      AX=1.0D00
      BX=1.0D00
      CX=1.0D00

      IEIGEN=0

      PITHEO=3.141592653589793D00

      DO M=0,ITHEO
        DO N=0,ITHEO
          DO L=0,ITHEO
            IEIGEN=IEIGEN+1
            EIGENTHEO(IEIGEN)=PITHEO*DSQRT( (DBLE(M)/AX)**2 +
$ (DBLE(N)/BX)**2 + (DBLE(L)/CX)**2 )

```

```

        ENDDO
        ENDDO
        ENDDO

        CALL DSVRGN((ITHEO+1)**3,EIGENTHEO,EIGENTHEOSRT)

        OPEN(13,FILE='EIGEN.POT')
        WRITE(13,'(A)') ' AX BX CX CONSTANT '
        WRITE(13,'(4E13.5)')AX,BX,CX,CONSTANT
        WRITE(13,'(A)') ' NGEOM NUMEL NCOL '
        WRITE(13,'(3I5)')NGEOM,NUMEL,NCOL
        WRITE(13,'(A)') ' EIGENVALUES '
        WRITE(13,'(3(2X,E13.5))') (DSQRT(DABS(DBLE(EVAL(NNOD-I+1))))),
$  DIMAG(EVAL(NNOD-I+1)),EIGENTHEOSRT(I),I=1,(ITHEO+1)**3)
        CLOSE(13)
C
C      M=3*NNOD
C      NX=3*NNM
C      WRITE(*,*) 'TOTAL DOF =',M
C      WRITE(*,*) 'COMPUTING EIGENVALUES...'
C      CALL BALANC(NX,M,Adyn,LOW,IGH,SCALE)
C      CALL ELMHES(NX,M,LOW,IGH,Adyn,INT)
C      CALL HQR(NX,M,LOW,IGH,Adyn,WR,WI,IERR)
C
C PRINT EIGENVALUES
C
C
C 140 CALL OUTEIG(WR,WI,IERR,M)
C 700      FORMAT(1X,'XXX /DET/=',D14.7,' XXX')
C
        PAUSE
        RETURN
        END

```


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Στο παράρτημα αυτό βρίσκονται όλες οι υπολογισμένες ιδιοτιμές καθώς και τα ποσοστιαία σφάλματα για όλες τις συναρτήσεις βάσης που εξετάστηκαν.

Υπολογισμένες Ιδιοσυχνότητες για την συνάρτηση c-r

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Ποσοστιαίο Σφάλμα για την συνάρτηση c-r

c -4	c -3	c -2	c -1	c 0	c 0,1	c 0,2	c 0,3	c 0,5	c 0,8	c 0,825	c 0,85	c 0,875
3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00
3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00
3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00
3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00
3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00
3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00	3,92E+00
5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	5,31E+00	4,70E+00	3,25E+00	1,53E+00
3,84E+00	3,64E+00	3,30E+00	2,66E+00	8,77E-01	5,09E-01	6,21E-02	-4,92E-01	-	-	-	-	-
8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00
8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	8,12E+00	2,19E+01	8,12E+00	8,12E+00
9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	3,29E+00	9,01E+00	9,01E+00
9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00
9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,35E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00	9,01E+00
9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,01E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00
9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00
9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	5,91E+01	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00	9,35E+00
9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00
9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00
9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00	9,73E+00
1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01
1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	2,58E+01	1,11E+02	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01
2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01	2,58E+01
1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	2,33E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01
1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	9,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01	1,86E+01
2,30E+01	2,30E+01	2,30E+01	2,30E+01	2,32E+01	2,32E+01	1,86E+01	1,86E+01	2,34E+01	2,37E+01	2,38E+01	2,39E+01	2,39E+01
7,20E+01	7,20E+01	7,20E+01	7,20E+01	7,20E+01	2,16E+00	7,20E+01	2,16E+00	2,16E+00	7,20E+01	7,20E+01	7,20E+01	7,20E+01

[illegible]

[illegible]

Υπολογισμένες Ιδιοσυχνότητες για την συνάρτηση $(c^2+r^2)^{1/2}$

exact eigen	c -2	c -1,9	c -1,8	c -1,7	c -1,6	c -1,5	c -1,4	c -1,3	c -1,2	c -1,1	c -1
0,00E+00											
3,14E+00	-2,07E-01	-2,36E-01	-2,67E-01	-2,99E-01	-3,34E-01	-3,66E-01	-4,01E-01	-4,33E-01	-4,62E-01	-4,84E-01	-4,87E-01
3,14E+00	-2,07E-01	-2,36E-01	-2,67E-01	-2,99E-01	-3,34E-01	-3,66E-01	-4,01E-01	-4,33E-01	-4,62E-01	-4,84E-01	-4,87E-01
3,14E+00	-2,07E-01	-2,36E-01	-2,67E-01	-2,99E-01	-3,34E-01	-3,66E-01	-4,01E-01	-4,33E-01	-4,62E-01	-4,84E-01	-4,87E-01
4,44E+00	-1,09E+00	-1,11E+00	-1,14E+00	-1,15E+00	-1,16E+00	-1,16E+00	-1,15E+00	-1,13E+00	-1,10E+00	-1,05E+00	-1,01E+00
4,44E+00	-1,09E+00	-1,11E+00	-1,14E+00	-1,15E+00	-1,16E+00	-1,16E+00	-1,15E+00	-1,13E+00	-1,10E+00	-1,05E+00	-1,01E+00
4,44E+00	-1,09E+00	-1,11E+00	-1,14E+00	-1,15E+00	-1,16E+00	-1,16E+00	-1,15E+00	-1,13E+00	-1,10E+00	-1,05E+00	-1,01E+00
5,44E+00	1,70E+00	1,51E+00	1,30E+00	1,06E+00	8,03E-01	5,15E-01	1,93E-01	-1,64E-01	-5,59E-01	-9,94E-01	-1,47E+00
6,28E+00	-1,93E+00	-2,00E+00	-2,07E+00	-2,15E+00	-2,22E+00	-2,30E+00	-2,37E+00	1,41E+02	-2,49E+00	-3,56E+00	-6,07E+00
6,28E+00	-1,93E+00	-2,00E+00	-2,07E+00	-2,15E+00	1,42E+02	-2,30E+00	1,41E+02	-2,44E+00	-2,49E+00	-2,51E+00	-2,49E+00
6,28E+00	-9,74E-01	-9,64E-01	-9,12E-01	-7,99E-01	-6,03E-01	1,42E+02	1,62E-01	8,12E-01	1,70E+00	-2,51E+00	1,38E+02
7,02E+00	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,13E+01	-1,11E+01	-1,08E+01	-1,04E+01	-9,83E+00	-9,04E+00	-7,78E+00	-7,99E+00
7,02E+00	-6,82E+00	-6,88E+00	-6,94E+00	-7,00E+00	-7,08E+00	-7,18E+00	-7,29E+00	-7,43E+00	1,15E+02	-7,78E+00	-7,99E+00
7,02E+00	-6,82E+00	1,18E+02	-6,94E+00	-7,00E+00	-7,08E+00	-7,18E+00	-7,29E+00	-7,43E+00	-7,59E+00	-7,78E+00	-7,99E+00
7,02E+00	1,18E+02	-6,88E+00	-6,94E+00	-7,00E+00	-7,08E+00	-7,18E+00	-7,29E+00	-7,43E+00	-7,59E+00	-4,10E+00	-3,91E+00
7,02E+00	-4,37E+00	-4,41E+00	-4,44E+00	-4,47E+00	-4,47E+00	-4,46E+00	-4,43E+00	-4,36E+00	-4,25E+00	-4,10E+00	-3,91E+00
7,02E+00	-4,37E+00	-4,41E+00	-4,44E+00	-4,47E+00	-4,47E+00	-4,46E+00	-4,43E+00	-4,36E+00	-4,25E+00	-4,10E+00	-3,91E+00
7,70E+00	-1,27E+01	-1,27E+01	-1,28E+01	9,82E+01	-1,28E+01	-1,28E+01	-1,28E+01	-1,27E+01	-1,26E+01	-1,11E+01	-8,88E+00
7,70E+00	-7,74E+00	-7,88E+00	9,85E+01	-8,16E+00	-8,31E+00	-8,45E+00	-8,59E+00	-8,71E+00	-8,81E+00	9,53E+01	-8,88E+00
7,70E+00	-7,74E+00	-7,88E+00	-8,02E+00	-8,16E+00	-8,31E+00	-8,45E+00	-8,59E+00	-8,71E+00	-8,81E+00	-8,87E+00	-8,88E+00
8,89E+00	-2,01E+01	-2,02E+01	-2,03E+01	-2,05E+01	-2,06E+01	-2,07E+01	-2,08E+01	-2,09E+01	-2,10E+01	-2,11E+01	-1,95E+01
8,89E+00	-7,08E+00	-7,01E+00	-6,90E+00	-6,73E+00	-6,48E+00	-6,14E+00	-5,69E+00	-5,13E+00	-4,45E+00	-3,66E+00	-3,06E+00
8,89E+00	-7,08E+00	-7,01E+00	-6,90E+00	-6,73E+00	-6,48E+00	-6,14E+00	-5,69E+00	-5,13E+00	-4,45E+00	-3,66E+00	-3,06E+00
9,42E+00	-1,24E+01	-1,23E+01	-1,22E+01	-1,21E+01	-1,18E+01	-1,15E+01	-1,11E+01	-1,06E+01	-9,91E+00	-9,17E+00	-8,35E+00
9,42E+00	-1,06E+01	-1,06E+01	-1,05E+01	-1,04E+01	-1,03E+01	-1,01E+01	-9,93E+00	-9,67E+00	-9,36E+00	-9,00E+00	-8,35E+00
9,42E+00	-1,06E+01	-1,06E+01	-1,05E+01	-1,04E+01	-1,03E+01	-1,01E+01	-9,93E+00	-9,67E+00	-9,36E+00	-9,00E+00	-8,35E+00
1,09E+01	-3,99E+01	-3,99E+01	-3,50E+01	-3,83E+01	-4,35E+01	-4,24E+01	-4,36E+01	-4,37E+01	-4,04E+01	-3,56E+01	-4,37E+01

C -0,9	C -0,8	C -0,7	C -0,6	C -0,5	C -0,4	C -0,3	C -0,2	C -0,1	C 0	C 0,1	C 0,2
-4,68E-01	-4,14E-01	-3,06E-01	-1,31E-01	1,27E-01	4,77E-01	9,26E-01	1,47E+00	2,05E+00	2,58E+00	2,05E+00	1,47E+00
-4,68E-01	-4,14E-01	-3,06E-01	-1,31E-01	1,27E-01	4,77E-01	9,26E-01	1,47E+00	2,05E+00	2,58E+00	2,05E+00	1,47E+00
-4,68E-01	-4,14E-01	-3,06E-01	-1,31E-01	1,27E-01	4,77E-01	9,26E-01	1,47E+00	2,05E+00	2,58E+00	2,05E+00	1,47E+00
-9,70E-01	-9,57E-01	-9,86E-01	-1,07E+00	-1,21E+00	-1,38E+00	-1,49E+00	-1,41E+00	-9,05E-01	5,06E-01	-9,05E-01	-1,41E+00
-9,70E-01	-9,57E-01	-9,86E-01	-1,07E+00	-1,21E+00	-1,38E+00	-1,49E+00	-1,41E+00	-9,05E-01	5,06E-01	-9,05E-01	-1,41E+00
-9,70E-01	-9,57E-01	-9,86E-01	-1,07E+00	-1,21E+00	-1,38E+00	-1,49E+00	-1,41E+00	-9,05E-01	5,06E-01	-9,05E-01	-1,41E+00
-1,99E+00	-2,55E+00	-3,13E+00	-3,71E+00	-4,25E+00	1,69E+02	-4,88E+00	-4,64E+00	-3,66E+00	-1,01E+00	-3,66E+00	-4,64E+00
-7,91E+00	-9,35E+00	-1,05E+01	-1,13E+01	-1,17E+01	-1,18E+01	-1,15E+01	-1,06E+01	-8,88E+00	-5,52E+00	-8,88E+00	-1,06E+01
-2,41E+00	-2,24E+00	-1,98E+00	-1,60E+00	-1,10E+00	-4,93E-01	2,05E-01	1,39E+02	2,36E+00	5,65E+00	2,36E+00	1,05E+00
1,38E+02	1,37E+02	-1,98E+00	1,35E+02	1,33E+02	-4,93E-01	1,34E+02	1,05E+00	1,55E+02	5,65E+00	2,36E+00	1,05E+00
-8,21E+00	-8,41E+00	-8,56E+00	-8,61E+00	-8,50E+00	-8,16E+00	-7,50E+00	-6,33E+00	-4,20E+00	1,10E+00	-4,20E+00	-6,33E+00
-8,21E+00	-8,41E+00	-8,56E+00	-8,61E+00	-8,50E+00	-8,16E+00	-7,50E+00	-6,33E+00	-4,20E+00	1,10E+00	-4,20E+00	-6,33E+00
-8,21E+00	-8,41E+00	-8,56E+00	-8,61E+00	-8,50E+00	-8,16E+00	-7,50E+00	-6,33E+00	-4,20E+00	1,10E+00	-4,20E+00	-6,33E+00
-3,69E+00	-3,44E+00	-3,19E+00	-2,97E+00	-2,80E+00	-2,68E+00	-2,52E+00	-2,07E+00	-6,08E-01	1,71E+02	-6,08E-01	-2,07E+00
-3,69E+00	-3,44E+00	-3,19E+00	-2,97E+00	-2,80E+00	-2,68E+00	-2,52E+00	-2,07E+00	-6,08E-01	4,21E+00	1,28E+02	1,14E+02
-3,69E+00	-3,44E+00	1,11E+02	-2,97E+00	-2,80E+00	-2,68E+00	-2,52E+00	-2,07E+00	-6,08E-01	4,21E+00	-6,08E-01	-2,07E+00
-8,84E+00	-8,74E+00	-8,57E+00	-8,34E+00	-8,06E+00	-7,71E+00	-7,24E+00	-6,40E+00	-4,54E+00	1,12E+00	-4,54E+00	-6,40E+00
-8,84E+00	-8,74E+00	-8,57E+00	-8,34E+00	-8,06E+00	-7,71E+00	-7,24E+00	-6,40E+00	-4,54E+00	1,12E+00	-4,54E+00	-6,40E+00
-8,84E+00	-8,74E+00	-8,57E+00	-8,34E+00	-8,06E+00	-7,71E+00	-7,24E+00	-6,40E+00	-4,54E+00	1,12E+00	-4,54E+00	-6,40E+00
-1,61E+01	-1,27E+01	-9,35E+00	-6,17E+00	-3,35E+00	-1,02E+00	-5,99E-01	5,53E-01	3,89E+00	1,46E+01	3,89E+00	5,53E-01
-2,62E+00	-2,19E+00	-1,80E+00	-1,49E+00	-1,25E+00	-1,02E+00	-5,99E-01	5,53E-01	3,89E+00	1,46E+01	3,89E+00	5,53E-01
-2,62E+00	-2,19E+00	-1,80E+00	-1,49E+00	-1,25E+00	-9,77E-01	1,02E+00	3,03E+00	6,38E+00	1,75E+01	6,38E+00	3,03E+00
-7,50E+00	-6,69E+00	-5,96E+00	-5,35E+00	-4,87E+00	-4,46E+00	-3,91E+00	-2,76E+00	3,41E-01	1,09E+01	3,41E-01	-2,76E+00
-7,50E+00	-6,69E+00	-5,96E+00	-5,35E+00	-4,87E+00	-4,46E+00	-3,91E+00	-2,76E+00	3,41E-01	1,09E+01	3,41E-01	-2,76E+00
-7,50E+00	-6,69E+00	-5,96E+00	-5,35E+00	-4,87E+00	-4,46E+00	-3,91E+00	-2,76E+00	3,41E-01	1,09E+01	3,41E-01	-2,76E+00
-4,37E+01	-4,36E+01	-3,75E+01	-4,32E+01	-4,29E+01	-5,23E+01	-4,21E+01	-4,17E+01	-4,09E+01	-3,27E+01	-3,58E+01	-3,68E+01

C 0,3	C 0,4	C 0,5	C 0,6	C 0,7	C 0,8	C 0,9	C 1	C 1,1	C 1,2	C 1,3	C 1,4
9,26E-01	4,77E-01	1,27E-01	-1,31E-01	-3,06E-01	-4,14E-01	-4,68E-01	-4,87E-01	-4,84E-01	-4,62E-01	-4,33E-01	-4,01E-01
9,26E-01	4,77E-01	1,27E-01	-1,31E-01	-3,06E-01	-4,14E-01	-4,68E-01	-4,87E-01	-4,84E-01	-4,62E-01	-4,33E-01	-4,01E-01
9,26E-01	4,77E-01	1,27E-01	-1,31E-01	-3,06E-01	-4,14E-01	-4,68E-01	-4,87E-01	-4,84E-01	-4,62E-01	-4,33E-01	-4,01E-01
-1,49E+00	-1,38E+00	-1,21E+00	-1,07E+00	-9,86E-01	-9,57E-01	-9,70E-01	-1,01E+00	-1,05E+00	-1,10E+00	-1,13E+00	-1,15E+00
-1,49E+00	-1,38E+00	-1,21E+00	-1,07E+00	-9,86E-01	-9,57E-01	-9,70E-01	-1,01E+00	-1,05E+00	-1,10E+00	-1,13E+00	-1,15E+00
-1,49E+00	-1,38E+00	-1,21E+00	-1,07E+00	-9,86E-01	-9,57E-01	-9,70E-01	-1,01E+00	-1,05E+00	-1,10E+00	-1,13E+00	-1,15E+00
-4,88E+00	-4,68E+00	-4,25E+00	-3,71E+00	-3,13E+00	-2,55E+00	-1,99E+00	-1,47E+00	-9,94E-01	-5,59E-01	-1,64E-01	1,93E-01
-1,15E+01	-1,18E+01	1,33E+02	-1,13E+01	-1,05E+01	-9,35E+00	-7,91E+00	-6,07E+00	-3,56E+00	-2,49E+00	-2,44E+00	1,41E+02
2,05E-01	-4,93E-01	-1,10E+00	-1,60E+00	-1,98E+00	-2,24E+00	-2,41E+00	-2,49E+00	-2,51E+00	-2,49E+00	-2,44E+00	-2,37E+00
1,34E+02	-4,93E-01	-1,10E+00	-1,60E+00	-1,98E+00	-2,24E+00	-2,41E+00	-2,49E+00	-2,51E+00	1,70E+00	1,41E+02	1,62E-01
-7,50E+00	1,08E+02	-8,50E+00	-8,61E+00	-8,56E+00	-8,41E+00	-8,21E+00	1,13E+02	-7,78E+00	1,15E+02	-9,83E+00	-1,04E+01
-7,50E+00	-8,16E+00	-8,50E+00	-8,61E+00	1,11E+02	-8,41E+00	-8,21E+00	-7,99E+00	-7,78E+00	-7,59E+00	-7,43E+00	-7,29E+00
-7,50E+00	-8,16E+00	-8,50E+00	-8,61E+00	-8,56E+00	-8,41E+00	-8,21E+00	-7,99E+00	1,14E+02	-7,59E+00	-7,43E+00	-7,29E+00
-2,52E+00	-2,68E+00	-2,80E+00	1,10E+02	-3,19E+00	-3,44E+00	-3,69E+00	-3,91E+00	-4,10E+00	-7,59E+00	-7,43E+00	-7,29E+00
-2,52E+00	-2,68E+00	-2,80E+00	-2,97E+00	-3,19E+00	-3,44E+00	-3,69E+00	-3,91E+00	-4,10E+00	-4,25E+00	-4,36E+00	-4,43E+00
-2,52E+00	-2,68E+00	-2,80E+00	-2,97E+00	-3,19E+00	1,12E+02	1,13E+02	-3,91E+00	-4,10E+00	-4,25E+00	-4,36E+00	-4,43E+00
-7,24E+00	-7,71E+00	-8,06E+00	-8,34E+00	-8,57E+00	-8,74E+00	-8,84E+00	-8,88E+00	-1,11E+01	-1,26E+01	-1,27E+01	-1,28E+01
-7,24E+00	-7,71E+00	-8,06E+00	-8,34E+00	-8,57E+00	-8,74E+00	-8,84E+00	-8,88E+00	-8,87E+00	-8,81E+00	-8,71E+00	-8,59E+00
-7,24E+00	-7,71E+00	-8,06E+00	-8,34E+00	-8,57E+00	-8,74E+00	-8,84E+00	-8,88E+00	-8,87E+00	-8,81E+00	-8,71E+00	-8,59E+00
-5,99E-01	-1,02E+00	-3,35E+00	-6,17E+00	-9,35E+00	-1,27E+01	-1,61E+01	-1,95E+01	-2,11E+01	-2,10E+01	-2,09E+01	-2,08E+01
-5,99E-01	-1,02E+00	-1,25E+00	-1,49E+00	-1,80E+00	-2,19E+00	-2,62E+00	-3,06E+00	-3,66E+00	-4,45E+00	-5,13E+00	-5,69E+00
1,02E+00	-9,77E-01	-1,25E+00	-1,49E+00	-1,80E+00	-2,19E+00	-2,62E+00	-3,06E+00	-3,66E+00	-4,45E+00	-5,13E+00	-5,69E+00
-3,91E+00	-4,46E+00	-4,87E+00	-5,35E+00	-5,96E+00	-6,69E+00	-7,50E+00	-8,35E+00	-9,17E+00	-9,91E+00	-1,06E+01	-1,11E+01
-3,91E+00	-4,46E+00	-4,87E+00	-5,35E+00	-5,96E+00	-6,69E+00	-7,50E+00	-8,35E+00	-9,00E+00	-9,36E+00	-9,67E+00	-9,93E+00
-3,91E+00	-4,46E+00	-4,87E+00	-5,35E+00	-5,96E+00	-6,69E+00	-7,50E+00	-8,35E+00	-9,00E+00	-9,36E+00	-9,67E+00	-9,93E+00
-4,21E+01	-4,07E+01	-4,90E+01	-3,74E+01	-4,10E+01	-3,77E+01	-3,78E+01	-4,06E+01	-4,05E+01	-4,13E+01	-4,18E+01	-4,36E+01

C 1,5	C 1,6	C 1,7	C 1,8	C 1,9	C 2
-3,66E-01	-3,34E-01	-2,99E-01	-2,67E-01	-2,36E-01	-2,07E-01
-3,66E-01	-3,34E-01	-2,99E-01	-2,67E-01	-2,36E-01	-2,07E-01
-3,66E-01	-3,34E-01	-2,99E-01	-2,67E-01	-2,36E-01	-2,07E-01
-1,16E+00	-1,16E+00	-1,15E+00	-1,14E+00	-1,11E+00	-1,09E+00
-1,16E+00	-1,16E+00	-1,15E+00	-1,14E+00	-1,11E+00	-1,09E+00
-1,16E+00	-1,16E+00	-1,15E+00	-1,14E+00	-1,11E+00	-1,09E+00
5,15E-01	8,03E-01	1,06E+00	1,30E+00	1,51E+00	1,70E+00
-2,30E+00	-2,22E+00	-2,15E+00	-2,07E+00	-2,00E+00	-1,93E+00
1,42E+02	-2,22E+00	-2,15E+00	1,43E+02	-2,00E+00	-1,93E+00
-2,94E-01	1,42E+02	-7,99E-01	-9,12E-01	-9,64E-01	-9,74E-01
-1,08E+01	-1,11E+01	-1,13E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	1,18E+02
-7,18E+00	-7,08E+00	1,17E+02	-6,94E+00	1,18E+02	-6,82E+00
-7,18E+00	-7,08E+00	-7,00E+00	-6,94E+00	-6,88E+00	-6,82E+00
-7,18E+00	-7,08E+00	-7,00E+00	-6,94E+00	-6,88E+00	-6,82E+00
-4,46E+00	-4,47E+00	-4,47E+00	-4,44E+00	-4,41E+00	-4,37E+00
-4,46E+00	-4,47E+00	-4,47E+00	-4,44E+00	-4,41E+00	-4,37E+00
-1,28E+01	-1,28E+01	-1,28E+01	-1,28E+01	-1,27E+01	-1,27E+01
-8,45E+00	-8,31E+00	-8,16E+00	-8,02E+00	-7,88E+00	-7,74E+00
-8,45E+00	-8,31E+00	-8,16E+00	-8,02E+00	-7,88E+00	-7,74E+00
-2,07E+01	-2,06E+01	-2,05E+01	-2,03E+01	-2,02E+01	-2,01E+01
-6,14E+00	-6,48E+00	-6,73E+00	-6,90E+00	-7,01E+00	-7,08E+00
-6,14E+00	-6,48E+00	-6,73E+00	-6,90E+00	-7,01E+00	-7,08E+00
-1,15E+01	-1,18E+01	-1,21E+01	-1,22E+01	-1,23E+01	-1,24E+01
-1,01E+01	-1,03E+01	-1,04E+01	-1,05E+01	-1,06E+01	-1,06E+01
-1,01E+01	-1,03E+01	-1,04E+01	-1,05E+01	-1,06E+01	-1,06E+01
-4,36E+01	-4,26E+01	-4,00E+01	-4,35E+01	-3,99E+01	-4,28E+01

Υπολογισμένες Ιδιοσυχνότητες για την συνάρτηση e^{-r^2/c^2}

	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
	-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1
exact eigen											
0,00E+00											
3,14E+00	-1,72E-01	-1,94E-01	-2,20E-01	-2,51E-01	-2,86E-01	-3,34E-01	-3,92E-01	-4,65E-01	-5,60E-01	-6,91E-01	-8,72E-01
3,14E+00	-1,72E-01	-1,94E-01	-2,20E-01	-2,51E-01	-2,86E-01	-3,34E-01	-3,92E-01	-4,65E-01	-5,60E-01	-6,91E-01	-8,72E-01
4,44E+00	-1,72E-01	-1,94E-01	-2,20E-01	-2,51E-01	-2,86E-01	-3,34E-01	-3,92E-01	-4,65E-01	-5,60E-01	-6,91E-01	-8,72E-01
4,44E+00	-7,02E-01	-7,36E-01	-7,77E-01	-8,19E-01	-8,69E-01	-9,23E-01	-9,84E-01	-1,05E+00	-1,13E+00	-1,24E+00	-1,38E+00
4,44E+00	-7,02E-01	-7,36E-01	-7,77E-01	-8,19E-01	-8,69E-01	-9,23E-01	-9,84E-01	-1,05E+00	-1,13E+00	-1,24E+00	-1,38E+00
5,44E+00	-7,02E-01	-7,36E-01	-7,77E-01	-8,19E-01	-8,69E-01	-9,23E-01	-9,84E-01	-1,05E+00	-1,13E+00	-1,24E+00	-1,38E+00
6,28E+00	2,84E+00	2,71E+00	2,56E+00	2,38E+00	2,16E+00	1,91E+00	1,60E+00	1,23E+00	7,74E-01	2,00E-01	-5,22E-01
6,28E+00	-1,06E+00	-1,09E+00	-1,13E+00	-1,17E+00	-1,21E+00	-1,26E+00	-1,32E+00	-1,39E+00	-1,48E+00	-1,58E+00	-1,70E+00
6,28E+00	-1,06E+00	-1,09E+00	-1,13E+00	-1,17E+00	-1,21E+00	-1,26E+00	-1,32E+00	-1,39E+00	-1,48E+00	-1,58E+00	-1,70E+00
7,02E+00	-8,58E-01	-9,93E-01	-1,14E+00	-1,31E+00	-1,49E+00	-1,68E+00	-1,87E+00	-2,05E+00	-2,20E+00	-2,24E+00	-2,07E+00
7,02E+00	-1,13E+01	-1,14E+01	-1,16E+01	-1,17E+01	-1,19E+01	-1,21E+01	-1,22E+01	-1,24E+01	-1,25E+01	-1,26E+01	1,14E+02
7,02E+00	-5,85E+00	-5,84E+00	-5,83E+00	-5,82E+00	-5,80E+00	-5,78E+00	-5,76E+00	-5,73E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,76E+00
7,02E+00	-5,85E+00	-5,84E+00	-5,83E+00	-5,82E+00	-5,80E+00	-5,78E+00	-5,76E+00	-5,73E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,76E+00
7,02E+00	-5,85E+00	-5,84E+00	-5,83E+00	-5,82E+00	-5,80E+00	-5,78E+00	-5,76E+00	-5,73E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,76E+00
7,02E+00	-3,62E+00	-3,66E+00	-3,71E+00	-3,77E+00	-3,84E+00	-3,91E+00	-3,98E+00	-4,06E+00	-4,14E+00	-4,22E+00	-4,27E+00
7,70E+00	-3,62E+00	-3,66E+00	-3,71E+00	-3,77E+00	-3,84E+00	-3,91E+00	-3,98E+00	-4,06E+00	-4,14E+00	-4,22E+00	-4,27E+00
7,70E+00	-1,20E+01	-1,21E+01	-1,21E+01	-1,22E+01	-1,22E+01	-1,23E+01	-1,23E+01	-1,24E+01	-1,25E+01	-1,26E+01	-1,26E+01
7,70E+00	-6,56E+00	-6,66E+00	-6,77E+00	-6,90E+00	-7,04E+00	-7,21E+00	-7,39E+00	-7,60E+00	-7,83E+00	-8,08E+00	-8,33E+00
8,89E+00	-6,56E+00	-6,66E+00	-6,77E+00	-6,90E+00	-7,04E+00	-7,21E+00	-7,39E+00	-7,60E+00	-7,83E+00	-8,08E+00	-8,33E+00
8,89E+00	-1,91E+01	-1,92E+01	-1,93E+01	-1,94E+01	-1,95E+01	-1,96E+01	-1,98E+01	-2,00E+01	-2,02E+01	-2,04E+01	-2,06E+01
8,89E+00	-7,62E+00	-7,72E+00	-7,83E+00	-7,96E+00	-8,10E+00	-8,24E+00	-8,39E+00	-8,53E+00	-8,64E+00	-8,67E+00	-8,52E+00
9,42E+00	-7,62E+00	-7,72E+00	-7,83E+00	-7,96E+00	-8,10E+00	-8,24E+00	-8,39E+00	-8,53E+00	-8,64E+00	-8,67E+00	-8,52E+00
9,42E+00	-1,29E+01	-1,30E+01	-1,31E+01	-1,32E+01	-1,34E+01	-1,35E+01	-1,36E+01	-1,38E+01	-1,39E+01	-1,39E+01	-1,38E+01
9,42E+00	-1,13E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,15E+01
1,09E+01	-1,13E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,15E+01
	4,20E+01	4,18E+01	4,16E+01	4,14E+01	4,12E+01	4,09E+01	4,05E+01	4,01E+01	3,96E+01	3,91E+01	-4,35E+01

C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
-1,13E+00	-1,52E+00	-2,12E+00	-3,06E+00	-4,31E+00	-4,82E+00	-2,07E-01	2,36E+01	9,52E+01	9,52E+01	2,36E+01	-2,07E-01	-4,82E+00
-1,13E+00	-1,52E+00	-2,12E+00	-3,06E+00	-4,31E+00	-4,82E+00	-2,07E-01	2,36E+01	9,52E+01	9,52E+01	2,36E+01	-2,07E-01	-4,82E+00
-1,13E+00	-1,52E+00	-2,12E+00	-3,06E+00	-4,31E+00	-4,82E+00	-2,07E-01	2,36E+01	9,52E+01	9,52E+01	2,36E+01	-2,07E-01	-4,82E+00
-1,61E+00	-2,01E+00	-2,74E+00	-4,00E+00	-5,64E+00	-6,46E+00	-2,77E+00	1,36E+01	5,64E+01	5,64E+01	1,36E+01	-2,77E+00	-6,46E+00
-1,61E+00	-2,01E+00	-2,74E+00	-4,00E+00	-5,64E+00	-6,46E+00	-2,77E+00	1,36E+01	5,64E+01	5,64E+01	1,36E+01	-2,77E+00	-6,46E+00
-1,61E+00	-2,01E+00	-2,74E+00	-4,00E+00	-5,64E+00	-6,46E+00	-2,77E+00	1,36E+01	5,64E+01	5,64E+01	1,36E+01	-2,77E+00	-6,46E+00
-1,44E+00	-2,62E+00	-4,12E+00	-5,95E+00	1,66E+02	1,59E+02	-5,35E+00	6,17E+00	3,50E+01	3,50E+01	6,17E+00	-5,35E+00	-8,61E+00
1,38E+02	-2,03E+00	-2,23E+00	-5,55E+00	-6,01E+00	-3,36E+00	-2,47E+00	1,15E+01	2,20E+02	4,31E+01	1,15E+01	-2,47E+00	-3,36E+00
-1,85E+00	-2,03E+00	-2,23E+00	-2,48E+00	-2,84E+00	-3,36E+00	-2,47E+00	1,15E+01	5,74E+01	5,74E+01	1,15E+01	-2,47E+00	-3,36E+00
-1,49E+00	-1,23E-01	2,59E+00	-2,48E+00	-2,84E+00	-3,12E+00	1,51E+00	1,63E+02	5,74E+01	2,20E+02	1,15E+01	1,28E+02	-3,12E+00
-1,19E+01	-1,07E+01	1,09E+02	-7,34E+00	-7,63E+00	-7,27E+00	-5,21E+00	4,16E+00	4,07E+01	4,07E+01	1,36E+02	-5,21E+00	-7,27E+00
-5,91E+00	-6,24E+00	-6,76E+00	-7,34E+00	-7,63E+00	-7,27E+00	-5,21E+00	4,16E+00	4,94E+01	4,94E+01	4,16E+00	-5,21E+00	-7,27E+00
-5,91E+00	-6,24E+00	-6,76E+00	1,08E+02	-7,63E+00	-7,27E+00	-5,21E+00	4,16E+00	4,94E+01	4,94E+01	4,16E+00	-5,21E+00	-7,27E+00
-5,91E+00	1,11E+02	-6,76E+00	-4,28E+00	-4,71E+00	-5,49E+00	1,04E+02	5,37E+00	4,94E+01	4,94E+01	5,37E+00	-4,86E+00	1,01E+02
-4,29E+00	-4,26E+00	-4,22E+00	-4,28E+00	-4,71E+00	-5,49E+00	-4,86E+00	5,37E+00	5,01E+01	5,01E+01	5,37E+00	-4,86E+00	-5,49E+00
-4,29E+00	-4,26E+00	-4,22E+00	-4,28E+00	-4,71E+00	-5,49E+00	-4,86E+00	5,37E+00	5,01E+01	5,01E+01	5,37E+00	-4,86E+00	-5,49E+00
-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,78E+00	-7,51E+00	-1,26E-01	3,89E+01	3,89E+01	-1,26E-01	-7,51E+00	-8,78E+00
-8,54E+00	-8,67E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,78E+00	-7,51E+00	-1,26E-01	3,89E+01	3,89E+01	-1,26E-01	-7,51E+00	-8,78E+00
-8,54E+00	-8,67E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,78E+00	-7,51E+00	-1,26E-01	3,89E+01	3,89E+01	-1,26E-01	-7,51E+00	-8,78E+00
-2,08E+01	-2,09E+01	-2,09E+01	-1,61E+01	-7,48E+00	-2,57E+00	-2,26E+00	7,84E+00	6,24E+01	6,24E+01	7,84E+00	-2,26E+00	-2,57E+00
-8,06E+00	-7,07E+00	-5,38E+00	-3,89E+00	-2,94E+00	-2,57E+00	-2,26E+00	7,84E+00	7,48E+01	7,48E+01	7,84E+00	-2,26E+00	-2,57E+00
-8,06E+00	-7,07E+00	-5,38E+00	-3,89E+00	-2,94E+00	-2,07E-01	1,16E+00	9,66E+00	7,48E+01	7,48E+01	9,66E+00	1,16E+00	-2,07E-01
-1,33E+01	-1,24E+01	-1,08E+01	-8,64E+00	-6,57E+00	-5,42E+00	-4,62E+00	3,39E+00	6,48E+01	6,48E+01	3,39E+00	-4,62E+00	-5,42E+00
-1,13E+01	-1,09E+01	-1,03E+01	-8,64E+00	-6,57E+00	-5,42E+00	-4,62E+00	3,39E+00	6,90E+01	6,90E+01	3,39E+00	-4,62E+00	-5,42E+00
-1,13E+01	-1,09E+01	-1,03E+01	-8,64E+00	-6,57E+00	-5,42E+00	-1,51E+00	4,48E+00	6,90E+01	6,90E+01	4,48E+00	-1,51E+00	-5,42E+00
-4,33E+01	-3,95E+01	-4,08E+01	-4,02E+01	-5,39E+01	-5,43E+01	-3,86E+01	-3,56E+01	-1,74E+01	-9,15E+00	-3,28E+01	-4,14E+01	-3,90E+01

C 0,5	C 0,6	C 0,7	C 0,8	C 0,9	C 1	C 1,1	C 1,2	C 1,3	C 1,4	C 1,5	C 1,6	C 1,7
-4,31E+00	-3,06E+00	-2,12E+00	-1,52E+00	-1,13E+00	-8,72E-01	-6,91E-01	-5,60E-01	-4,65E-01	-3,92E-01	-3,34E-01	-2,86E-01	-2,51E-01
-4,31E+00	-3,06E+00	-2,12E+00	-1,52E+00	-1,13E+00	-8,72E-01	-6,91E-01	-5,60E-01	-4,65E-01	-3,92E-01	-3,34E-01	-2,86E-01	-2,51E-01
-4,31E+00	-3,06E+00	-2,12E+00	-1,52E+00	-1,13E+00	-8,72E-01	-6,91E-01	-5,60E-01	-4,65E-01	-3,92E-01	-3,34E-01	-2,86E-01	-2,51E-01
-5,64E+00	-4,00E+00	-2,74E+00	-2,01E+00	-1,61E+00	-1,38E+00	-1,24E+00	-1,13E+00	-1,05E+00	-9,84E-01	-9,23E-01	-8,69E-01	-8,19E-01
-5,64E+00	-4,00E+00	2,31E+02	-2,01E+00	-1,61E+00	-1,38E+00	-1,24E+00	-1,13E+00	-1,05E+00	-9,84E-01	-9,23E-01	-8,69E-01	-8,19E-01
-5,64E+00	1,52E+01	-2,74E+00	-2,01E+00	-1,61E+00	-1,38E+00	-1,24E+00	-1,13E+00	-1,05E+00	-9,84E-01	-9,23E-01	-8,69E-01	-8,19E-01
-7,82E+00	1,68E+02	-4,12E+00	-2,62E+00	-1,44E+00	-5,22E-01	2,00E-01	7,74E-01	1,80E+02	1,60E+00	1,91E+00	2,16E+00	2,38E+00
-6,01E+00	-5,55E+00	-2,23E+00	-2,03E+00	-1,85E+00	-1,70E+00	-1,58E+00	-1,48E+00	-1,39E+00	-1,32E+00	-1,26E+00	-1,21E+00	-1,17E+00
-2,84E+00	-2,48E+00	-2,23E+00	-2,03E+00	-1,85E+00	-1,70E+00	1,41E+02	-1,48E+00	-1,39E+00	-1,32E+00	-1,26E+00	-1,21E+00	-1,17E+00
1,30E+02	-2,48E+00	2,59E+00	-1,23E-01	-1,49E+00	-2,07E+00	-2,24E+00	1,42E+02	-2,05E+00	-1,87E+00	1,44E+02	-1,49E+00	-1,31E+00
-7,63E+00	-7,34E+00	-8,24E+00	-1,07E+01	-1,19E+01	-1,24E+01	-1,26E+01	-1,25E+01	-1,24E+01	-1,22E+01	-1,21E+01	-1,19E+01	1,19E+02
-7,63E+00	-7,34E+00	-6,76E+00	-6,24E+00	-5,91E+00	1,14E+02	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,73E+00	-5,76E+00	-5,78E+00	-5,80E+00	-5,82E+00
-7,63E+00	-7,34E+00	-6,76E+00	1,11E+02	1,13E+02	-5,76E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,73E+00	-5,76E+00	-5,78E+00	1,19E+02	-5,82E+00
-4,71E+00	-4,28E+00	-6,76E+00	-6,24E+00	-5,91E+00	-5,76E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,73E+00	-5,76E+00	-5,78E+00	-5,80E+00	-5,82E+00
-4,71E+00	-4,28E+00	-4,22E+00	-4,26E+00	-4,29E+00	-4,27E+00	-4,22E+00	-4,14E+00	-4,06E+00	-3,98E+00	-3,91E+00	-3,84E+00	-3,77E+00
-4,71E+00	-4,28E+00	-4,22E+00	-4,26E+00	-4,29E+00	-4,27E+00	-4,22E+00	-4,14E+00	-4,06E+00	-3,98E+00	-3,91E+00	-3,84E+00	-3,77E+00
-8,69E+00	-8,64E+00	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,25E+01	-1,24E+01	9,88E+01	-1,23E+01	-1,22E+01	-1,22E+01
-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,67E+00	-8,54E+00	-8,33E+00	-8,08E+00	-7,83E+00	-7,60E+00	-7,39E+00	-7,21E+00	-7,04E+00	-6,90E+00
-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,67E+00	-8,54E+00	-8,33E+00	-8,08E+00	-7,83E+00	-7,60E+00	-7,39E+00	-7,21E+00	-7,04E+00	-6,90E+00
-7,48E+00	-1,61E+01	-2,09E+01	-2,09E+01	-2,08E+01	-2,06E+01	-2,04E+01	-2,02E+01	-2,00E+01	-1,98E+01	-1,96E+01	-1,95E+01	-1,94E+01
-2,94E+00	-3,89E+00	-5,38E+00	-7,07E+00	-8,06E+00	-8,52E+00	-8,67E+00	-8,64E+00	-8,53E+00	-8,39E+00	-8,24E+00	-8,10E+00	-7,96E+00
-2,94E+00	-3,89E+00	-5,38E+00	-7,07E+00	-8,06E+00	-8,52E+00	-8,67E+00	-8,64E+00	-8,53E+00	-8,39E+00	-8,24E+00	-8,10E+00	-7,96E+00
-6,57E+00	-8,64E+00	-1,08E+01	-1,24E+01	-1,33E+01	-1,38E+01	-1,39E+01	-1,39E+01	-1,38E+01	-1,36E+01	-1,35E+01	-1,34E+01	-1,32E+01
-6,57E+00	-8,64E+00	-1,03E+01	-1,09E+01	-1,13E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,14E+01
-6,57E+00	-8,64E+00	-1,03E+01	-1,09E+01	-1,13E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,14E+01
-4,39E+01	-6,08E+01	-6,03E+01	-3,95E+01	-3,93E+01	-3,92E+01	-4,32E+01	-4,35E+01	-4,94E+01	-3,80E+01	-4,32E+01	-3,92E+01	-4,30E+01

c 1,8	c 1,9	c 2
-2,20E-01	-1,94E-01	-1,72E-01
-2,20E-01	-1,94E-01	-1,72E-01
-2,20E-01	-1,94E-01	-1,72E-01
-7,77E-01	-7,36E-01	-7,02E-01
-7,77E-01	-7,36E-01	-7,02E-01
-7,77E-01	-7,36E-01	-7,02E-01
2,56E+00	1,84E+02	2,84E+00
-1,13E+00	-1,09E+00	-1,06E+00
1,45E+02	-1,09E+00	-1,06E+00
-1,14E+00	-9,93E-01	-8,58E-01
-1,16E+01	-1,14E+01	-1,13E+01
-5,83E+00	-5,84E+00	1,20E+02
-5,83E+00	-5,84E+00	-5,85E+00
-5,83E+00	-5,84E+00	-5,85E+00
-3,71E+00	-3,66E+00	-3,62E+00
-3,71E+00	-3,66E+00	-3,62E+00
-1,21E+01	-1,21E+01	-1,20E+01
-6,77E+00	-6,66E+00	-6,56E+00
-6,77E+00	-6,66E+00	-6,56E+00
-1,93E+01	-1,92E+01	-1,91E+01
-7,83E+00	-7,72E+00	-7,62E+00
-7,83E+00	-7,72E+00	-7,62E+00
-1,31E+01	-1,30E+01	-1,29E+01
-1,14E+01	-1,14E+01	-1,13E+01
-1,14E+01	-1,14E+01	-1,13E+01
-4,29E+01	-4,86E+01	-3,92E+01

Ποσοστιαίο Σφάλμα για την συνάρτηση e^{-r^2/c^2}

c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1
-1,72E-01	-1,94E-01	-2,20E-01	-2,51E-01	-2,86E-01	-3,34E-01	-3,92E-01	-4,65E-01	-5,60E-01	-6,91E-01	-8,72E-01
-1,72E-01	-1,94E-01	-2,20E-01	-2,51E-01	-2,86E-01	-3,34E-01	-3,92E-01	-4,65E-01	-5,60E-01	-6,91E-01	-8,72E-01
-1,72E-01	-1,94E-01	-2,20E-01	-2,51E-01	-2,86E-01	-3,34E-01	-3,92E-01	-4,65E-01	-5,60E-01	-6,91E-01	-8,72E-01
-7,02E-01	-7,36E-01	-7,77E-01	-8,19E-01	-8,69E-01	-9,23E-01	-9,84E-01	-1,05E+00	-1,13E+00	-1,24E+00	-1,38E+00
-7,02E-01	-7,36E-01	-7,77E-01	-8,19E-01	-8,69E-01	-9,23E-01	-9,84E-01	-1,05E+00	-1,13E+00	-1,24E+00	-1,38E+00
-7,02E-01	-7,36E-01	-7,77E-01	-8,19E-01	-8,69E-01	-9,23E-01	-9,84E-01	-1,05E+00	-1,13E+00	-1,24E+00	-1,38E+00
2,84E+00	2,71E+00	2,56E+00	2,38E+00	2,16E+00	1,91E+00	1,60E+00	1,23E+00	7,74E-01	2,00E-01	-5,22E-01
-1,06E+00	-1,09E+00	-1,13E+00	-1,17E+00	-1,21E+00	-1,26E+00	-1,32E+00	-1,39E+00	-1,48E+00	-1,58E+00	-1,70E+00
-1,06E+00	-1,09E+00	-1,13E+00	-1,17E+00	-1,21E+00	-1,26E+00	-1,32E+00	-1,39E+00	-1,48E+00	-1,58E+00	-1,70E+00
-8,58E-01	-9,93E-01	-1,14E+00	-1,31E+00	-1,49E+00	-1,68E+00	-1,87E+00	-2,05E+00	-2,20E+00	-2,24E+00	-2,07E+00
-1,13E+01	-1,14E+01	-1,16E+01	-1,17E+01	-1,19E+01	-1,21E+01	-1,22E+01	-1,24E+01	-1,25E+01	-1,26E+01	1,14E+02
-5,85E+00	-5,84E+00	-5,83E+00	-5,82E+00	-5,80E+00	-5,78E+00	-5,76E+00	-5,73E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,76E+00
-5,85E+00	-5,84E+00	-5,83E+00	-5,82E+00	-5,80E+00	-5,78E+00	-5,76E+00	-5,73E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,76E+00
-5,85E+00	-5,84E+00	-5,83E+00	-5,82E+00	-5,80E+00	-5,78E+00	-5,76E+00	-5,73E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,76E+00
-3,62E+00	-3,66E+00	-3,71E+00	-3,77E+00	-3,84E+00	-3,91E+00	-3,98E+00	-4,06E+00	-4,14E+00	-4,22E+00	-4,27E+00
-3,62E+00	-3,66E+00	-3,71E+00	-3,77E+00	-3,84E+00	-3,91E+00	-3,98E+00	-4,06E+00	-4,14E+00	-4,22E+00	-4,27E+00
-1,20E+01	-1,21E+01	-1,21E+01	-1,22E+01	-1,22E+01	-1,23E+01	-1,23E+01	-1,24E+01	-1,25E+01	-1,26E+01	-1,26E+01
-6,56E+00	-6,66E+00	-6,77E+00	-6,90E+00	-7,04E+00	-7,21E+00	-7,39E+00	-7,60E+00	-7,83E+00	-8,08E+00	-8,33E+00
-6,56E+00	-6,66E+00	-6,77E+00	-6,90E+00	-7,04E+00	-7,21E+00	-7,39E+00	-7,60E+00	-7,83E+00	-8,08E+00	-8,33E+00
-1,91E+01	-1,92E+01	-1,93E+01	-1,94E+01	-1,95E+01	-1,96E+01	-1,98E+01	-2,00E+01	-2,02E+01	-2,04E+01	-2,06E+01
-7,62E+00	-7,72E+00	-7,83E+00	-7,96E+00	-8,10E+00	-8,24E+00	-8,39E+00	-8,53E+00	-8,64E+00	-8,67E+00	-8,52E+00
-7,62E+00	-7,72E+00	-7,83E+00	-7,96E+00	-8,10E+00	-8,24E+00	-8,39E+00	-8,53E+00	-8,64E+00	-8,67E+00	-8,52E+00
-1,29E+01	-1,30E+01	-1,31E+01	-1,32E+01	-1,34E+01	-1,35E+01	-1,36E+01	-1,38E+01	-1,39E+01	-1,39E+01	-1,38E+01
-1,13E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,15E+01
-1,13E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,15E+01
4,20E+01	4,18E+01	4,16E+01	4,14E+01	4,12E+01	4,09E+01	4,05E+01	4,01E+01	3,96E+01	3,91E+01	-4,35E+01

C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2
-1,13E+00	-1,52E+00	-2,12E+00	-3,06E+00	-4,31E+00	-4,82E+00	-2,07E-01	2,36E+01	9,52E+01	9,52E+01	2,36E+01
-1,13E+00	-1,52E+00	-2,12E+00	-3,06E+00	-4,31E+00	-4,82E+00	-2,07E-01	2,36E+01	9,52E+01	9,52E+01	2,36E+01
-1,13E+00	-1,52E+00	-2,12E+00	-3,06E+00	-4,31E+00	-4,82E+00	-2,07E-01	2,36E+01	9,52E+01	9,52E+01	2,36E+01
-1,61E+00	-2,01E+00	-2,74E+00	-4,00E+00	-5,64E+00	-6,46E+00	-2,77E+00	1,36E+01	5,64E+01	5,64E+01	1,36E+01
-1,61E+00	-2,01E+00	-2,74E+00	-4,00E+00	-5,64E+00	-6,46E+00	-2,77E+00	1,36E+01	5,64E+01	5,64E+01	1,36E+01
-1,61E+00	-2,01E+00	-2,74E+00	-4,00E+00	-5,64E+00	-6,46E+00	-2,77E+00	1,36E+01	5,64E+01	5,64E+01	1,36E+01
-1,44E+00	-2,62E+00	-4,12E+00	-5,95E+00	1,66E+02	1,59E+02	-5,35E+00	6,17E+00	3,50E+01	3,50E+01	6,17E+00
1,38E+02	-2,03E+00	-2,23E+00	-5,55E+00	-6,01E+00	-3,36E+00	-2,47E+00	1,15E+01	2,20E+02	4,31E+01	1,15E+01
-1,85E+00	-2,03E+00	-2,23E+00	-2,48E+00	-2,84E+00	-3,36E+00	-2,47E+00	1,15E+01	5,74E+01	5,74E+01	1,15E+01
-1,49E+00	-1,23E-01	2,59E+00	-2,48E+00	-2,84E+00	-3,12E+00	1,51E+00	1,63E+02	5,74E+01	2,20E+02	1,15E+01
-1,19E+01	-1,07E+01	1,09E+02	-7,34E+00	-7,63E+00	-7,27E+00	-5,21E+00	4,16E+00	4,07E+01	4,07E+01	1,36E+02
-5,91E+00	-6,24E+00	-6,76E+00	-7,34E+00	-7,63E+00	-7,27E+00	-5,21E+00	4,16E+00	4,94E+01	4,94E+01	4,16E+00
-5,91E+00	-6,24E+00	-6,76E+00	1,08E+02	-7,63E+00	-7,27E+00	-5,21E+00	4,16E+00	4,94E+01	4,94E+01	4,16E+00
-5,91E+00	1,11E+02	-6,76E+00	-4,28E+00	-4,71E+00	-5,49E+00	1,04E+02	5,37E+00	4,94E+01	4,94E+01	5,37E+00
-4,29E+00	-4,26E+00	-4,22E+00	-4,28E+00	-4,71E+00	-5,49E+00	-4,86E+00	5,37E+00	5,01E+01	5,01E+01	5,37E+00
-4,29E+00	-4,26E+00	-4,22E+00	-4,28E+00	-4,71E+00	-5,49E+00	-4,86E+00	5,37E+00	5,01E+01	5,01E+01	5,37E+00
-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,78E+00	-7,51E+00	-1,26E-01	3,89E+01	3,89E+01	-1,26E-01
-8,54E+00	-8,67E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,78E+00	-7,51E+00	-1,26E-01	3,89E+01	3,89E+01	-1,26E-01
-8,54E+00	-8,67E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,78E+00	-7,51E+00	-1,26E-01	3,89E+01	3,89E+01	-1,26E-01
-2,08E+01	-2,09E+01	-2,09E+01	-1,61E+01	-7,48E+00	-2,57E+00	-2,26E+00	7,84E+00	6,24E+01	6,24E+01	7,84E+00
-8,06E+00	-7,07E+00	-5,38E+00	-3,89E+00	-2,94E+00	-2,57E+00	-2,26E+00	7,84E+00	7,48E+01	7,48E+01	7,84E+00
-8,06E+00	-7,07E+00	-5,38E+00	-3,89E+00	-2,94E+00	-2,07E-01	1,16E+00	9,66E+00	7,48E+01	7,48E+01	9,66E+00
-1,33E+01	-1,24E+01	-1,08E+01	-8,64E+00	-6,57E+00	-5,42E+00	-4,62E+00	3,39E+00	6,48E+01	6,48E+01	3,39E+00
-1,13E+01	-1,09E+01	-1,03E+01	-8,64E+00	-6,57E+00	-5,42E+00	-4,62E+00	3,39E+00	6,90E+01	6,90E+01	3,39E+00
-1,13E+01	-1,09E+01	-1,03E+01	-8,64E+00	-6,57E+00	-5,42E+00	-1,51E+00	4,48E+00	6,90E+01	6,90E+01	4,48E+00
-4,33E+01	-3,95E+01	-4,08E+01	-4,02E+01	-5,39E+01	-5,43E+01	-3,86E+01	-3,56E+01	-1,74E+01	-9,15E+00	-3,28E+01

c 0,3	c 0,4	c 0,5	c 0,6	c 0,7	c 0,8	c 0,9	c 1	c 1,1	c 1,2	c 1,3
-2,07E-01	-4,82E+00	-4,31E+00	-3,06E+00	-2,12E+00	-1,52E+00	-1,13E+00	-8,72E-01	-6,91E-01	-5,60E-01	-4,65E-01
-2,07E-01	-4,82E+00	-4,31E+00	-3,06E+00	-2,12E+00	-1,52E+00	-1,13E+00	-8,72E-01	-6,91E-01	-5,60E-01	-4,65E-01
-2,07E-01	-4,82E+00	-4,31E+00	-3,06E+00	-2,12E+00	-1,52E+00	-1,13E+00	-8,72E-01	-6,91E-01	-5,60E-01	-4,65E-01
-2,77E+00	-6,46E+00	-5,64E+00	-4,00E+00	-2,74E+00	-2,01E+00	-1,61E+00	-1,38E+00	-1,24E+00	-1,13E+00	-1,05E+00
-2,77E+00	-6,46E+00	-5,64E+00	-4,00E+00	2,31E+02	-2,01E+00	-1,61E+00	-1,38E+00	-1,24E+00	-1,13E+00	-1,05E+00
-2,77E+00	-6,46E+00	-5,64E+00	1,52E+01	-2,74E+00	-2,01E+00	-1,61E+00	-1,38E+00	-1,24E+00	-1,13E+00	-1,05E+00
-5,35E+00	-8,61E+00	-7,82E+00	1,68E+02	-4,12E+00	-2,62E+00	-1,44E+00	-5,22E-01	2,00E-01	7,74E-01	1,80E+02
-2,47E+00	-3,36E+00	-6,01E+00	-5,55E+00	-2,23E+00	-2,03E+00	-1,85E+00	-1,70E+00	-1,58E+00	-1,48E+00	-1,39E+00
-2,47E+00	-3,36E+00	-2,84E+00	-2,48E+00	-2,23E+00	-2,03E+00	-1,85E+00	-1,70E+00	1,41E+02	-1,48E+00	-1,39E+00
1,28E+02	-3,12E+00	1,30E+02	-2,48E+00	2,59E+00	-1,23E-01	-1,49E+00	-2,07E+00	-2,24E+00	1,42E+02	-2,05E+00
-5,21E+00	-7,27E+00	-7,63E+00	-7,34E+00	-8,24E+00	-1,07E+01	-1,19E+01	-1,24E+01	-1,26E+01	-1,25E+01	-1,24E+01
-5,21E+00	-7,27E+00	-7,63E+00	-7,34E+00	-6,76E+00	-6,24E+00	-5,91E+00	1,14E+02	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,73E+00
-5,21E+00	-7,27E+00	-7,63E+00	-7,34E+00	-6,76E+00	1,11E+02	1,13E+02	-5,76E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,73E+00
-4,86E+00	1,01E+02	-4,71E+00	-4,28E+00	-6,76E+00	-6,24E+00	-5,91E+00	-5,76E+00	-5,71E+00	-5,71E+00	-5,73E+00
-4,86E+00	-5,49E+00	-4,71E+00	-4,28E+00	-4,22E+00	-4,26E+00	-4,29E+00	-4,27E+00	-4,22E+00	-4,14E+00	-4,06E+00
-4,86E+00	-5,49E+00	-4,71E+00	-4,28E+00	-4,22E+00	-4,26E+00	-4,29E+00	-4,27E+00	-4,22E+00	-4,14E+00	-4,06E+00
-7,51E+00	-8,78E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,26E+01	-1,25E+01	-1,24E+01
-7,51E+00	-8,78E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,67E+00	-8,54E+00	-8,33E+00	-8,08E+00	-7,83E+00	-7,60E+00
-7,51E+00	-8,78E+00	-8,69E+00	-8,64E+00	-8,69E+00	-8,67E+00	-8,54E+00	-8,33E+00	-8,08E+00	-7,83E+00	-7,60E+00
-2,26E+00	-2,57E+00	-7,48E+00	-1,61E+01	-2,09E+01	-2,09E+01	-2,08E+01	-2,06E+01	-2,04E+01	-2,02E+01	-2,00E+01
-2,26E+00	-2,57E+00	-2,94E+00	-3,89E+00	-5,38E+00	-7,07E+00	-8,06E+00	-8,52E+00	-8,67E+00	-8,64E+00	-8,53E+00
1,16E+00	-2,07E-01	-2,94E+00	-3,89E+00	-5,38E+00	-7,07E+00	-8,06E+00	-8,52E+00	-8,67E+00	-8,64E+00	-8,53E+00
-4,62E+00	-5,42E+00	-6,57E+00	-8,64E+00	-1,08E+01	-1,24E+01	-1,33E+01	-1,38E+01	-1,39E+01	-1,39E+01	-1,38E+01
-4,62E+00	-5,42E+00	-6,57E+00	-8,64E+00	-1,03E+01	-1,09E+01	-1,13E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01
-1,51E+00	-5,42E+00	-6,57E+00	-8,64E+00	-1,03E+01	-1,09E+01	-1,13E+01	-1,15E+01	-1,16E+01	-1,16E+01	-1,16E+01
-4,14E+01	-3,90E+01	-4,39E+01	-6,08E+01	-6,03E+01	-3,95E+01	-3,93E+01	-3,92E+01	-4,32E+01	-4,35E+01	-4,94E+01

c 1,4	c 1,5	c 1,6	c 1,7	c 1,8	c 1,9	c 2
-3,92E-01	-3,34E-01	-2,86E-01	-2,51E-01	-2,20E-01	-1,94E-01	-1,72E-01
-3,92E-01	-3,34E-01	-2,86E-01	-2,51E-01	-2,20E-01	-1,94E-01	-1,72E-01
-3,92E-01	-3,34E-01	-2,86E-01	-2,51E-01	-2,20E-01	-1,94E-01	-1,72E-01
-9,84E-01	-9,23E-01	-8,69E-01	-8,19E-01	-7,77E-01	-7,36E-01	-7,02E-01
-9,84E-01	-9,23E-01	-8,69E-01	-8,19E-01	-7,77E-01	-7,36E-01	-7,02E-01
-9,84E-01	-9,23E-01	-8,69E-01	-8,19E-01	-7,77E-01	-7,36E-01	-7,02E-01
1,60E+00	1,91E+00	2,16E+00	2,38E+00	2,56E+00	1,84E+02	2,84E+00
-1,32E+00	-1,26E+00	-1,21E+00	-1,17E+00	-1,13E+00	-1,09E+00	-1,06E+00
-1,32E+00	-1,26E+00	-1,21E+00	-1,17E+00	1,45E+02	-1,09E+00	-1,06E+00
-1,87E+00	1,44E+02	-1,49E+00	-1,31E+00	-1,14E+00	-9,93E-01	-8,58E-01
-1,22E+01	-1,21E+01	-1,19E+01	1,19E+02	-1,16E+01	-1,14E+01	-1,13E+01
-5,76E+00	-5,78E+00	-5,80E+00	-5,82E+00	-5,83E+00	-5,84E+00	1,20E+02
-5,76E+00	-5,78E+00	1,19E+02	-5,82E+00	-5,83E+00	-5,84E+00	-5,85E+00
-5,76E+00	-5,78E+00	-5,80E+00	-5,82E+00	-5,83E+00	-5,84E+00	-5,85E+00
-3,98E+00	-3,91E+00	-3,84E+00	-3,77E+00	-3,71E+00	-3,66E+00	-3,62E+00
-3,98E+00	-3,91E+00	-3,84E+00	-3,77E+00	-3,71E+00	-3,66E+00	-3,62E+00
9,88E+01	-1,23E+01	-1,22E+01	-1,22E+01	-1,21E+01	-1,21E+01	-1,20E+01
-7,39E+00	-7,21E+00	-7,04E+00	-6,90E+00	-6,77E+00	-6,66E+00	-6,56E+00
-7,39E+00	-7,21E+00	-7,04E+00	-6,90E+00	-6,77E+00	-6,66E+00	-6,56E+00
-1,98E+01	-1,96E+01	-1,95E+01	-1,94E+01	-1,93E+01	-1,92E+01	-1,91E+01
-8,39E+00	-8,24E+00	-8,10E+00	-7,96E+00	-7,83E+00	-7,72E+00	-7,62E+00
-8,39E+00	-8,24E+00	-8,10E+00	-7,96E+00	-7,83E+00	-7,72E+00	-7,62E+00
-1,36E+01	-1,35E+01	-1,34E+01	-1,32E+01	-1,31E+01	-1,30E+01	-1,29E+01
-1,16E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,13E+01
-1,16E+01	-1,15E+01	-1,15E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,14E+01	-1,13E+01
-3,80E+01	-4,32E+01	-3,92E+01	-4,30E+01	-4,29E+01	-4,86E+01	-3,92E+01

Υπολογισμένες Ιδιοσυχνότητες για την συνάρτηση c-r

	constant	constant	constant	constant	constant	constant	constant	constant	constant	constant
	-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1
exact eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
0,00E+00	6,82E-07	1,13E-06	9,36E-07	1,25E-06	1,21E-06	9,84E-07	6,69E-07	6,73E-07	7,16E-07	1,08E-06
1,26E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00
2,51E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00	2,50E+00
2,86E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00	2,93E+00
3,12E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00	3,16E+00
3,14E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00	3,25E+00
3,38E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00	3,44E+00
3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,80E+00
4,02E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00	3,84E+00
4,25E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00	4,08E+00
4,43E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00	4,33E+00
4,93E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00	4,48E+00
5,71E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00	4,81E+00
5,85E+00	5,00E+00	5,00E+00	6,85E+00	5,00E+00	5,00E+00	5,00E+00	5,00E+00	5,00E+00	5,00E+00	5,00E+00
6,24E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00
6,28E+00	5,21E+00	5,21E+00	5,21E+00	5,21E+00	5,21E+00	5,20E+00	5,21E+00	5,21E+00	5,21E+00	5,21E+00
6,41E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,79E+00
6,52E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00	5,97E+00
8,86E+00	6,04E+00	6,04E+00	6,04E+00	6,04E+00	6,04E+00	5,97E+00	6,04E+00	6,04E+00	6,04E+00	6,04E+00
6,77E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00	6,13E+00
6,90E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00	6,16E+00
6,99E+00	6,70E+00	6,70E+00	6,70E+00	6,70E+00	6,70E+00	6,69E+00	6,70E+00	6,70E+00	6,70E+00	6,70E+00
7,02E+00	6,74E+00	6,74E+00	6,74E+00	6,74E+00	6,74E+00	6,69E+00	6,74E+00	6,74E+00	6,74E+00	6,74E+00
7,35E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00
8,49E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00	6,79E+00
8,58E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00	6,81E+00
6,64E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00	6,85E+00

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Ποσοστιαίο Σφάλμα της συνάρτησης c-r

[illegible]

-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%
3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01
6,84E-01	6,84E-01	6,84E-01	6,80E-01	6,80E-01	6,76E-01	6,76E-01	6,76E-01	6,72E-01	6,72E-01
-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00
-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00
-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00
-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00
2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02
4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	-9,54E+06
3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00
2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00
9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	-2,23E+01	9,22E+00	9,22E+00
1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01
1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01
1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01
1,70E+01	1,70E+01	1,70E+01	1,71E+01	1,71E+01	1,71E+01	1,71E+01	1,71E+01	1,71E+01	-9,08E+00
9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00
8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00
3,18E+01	3,18E+01	3,18E+01	3,18E+01	3,18E+01	2,26E+01	3,18E+01	2,26E+01	3,19E+01	3,19E+01
9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	-1,28E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00
1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	6,98E-01	1,08E+01
4,13E+00	4,13E+00	4,13E+00	4,13E+00	1,00E+02	4,13E+00	4,13E+00	4,13E+00	4,13E+00	4,13E+00
3,94E+00	3,94E+00	3,95E+00	3,96E+00	4,52E+00	3,98E+00	3,99E+00	4,00E+00	4,01E+00	4,03E+00
7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	8,28E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00
2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,01E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01
2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,09E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01
-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-2,64E+00	9,08E+00	7,61E+00	3,25E+01	#REF!	#REF!

[illegible]

[illegible]

constant 1,1	constant 1,15	constant 1,2	constant 1,25	constant 1,3	constant 1,35	constant 1,4	constant 1,45	constant 1,5	constant 1,55	constant 1,575	
error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	
3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	
6,13E-01	6,09E-01	6,01E-01	5,93E-01	5,85E-01	5,73E-01	5,61E-01	5,45E-01	5,25E-01	5,05E-01	4,89E-01	
-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	
-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	
-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	
-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	
2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	
4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	
3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	
2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	
9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	
1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	
1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	
1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	
1,71E+01	1,72E+01	1,72E+01	1,72E+01	1,72E+01	1,72E+01	1,72E+01	1,73E+01	1,73E+01	1,73E+01	1,73E+01	
9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	-6,96E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	
8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,57E+00	8,66E+00	
3,21E+01	3,22E+01	3,22E+01	3,23E+01	3,23E+01	#REF!	3,24E+01	3,25E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	
9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	
1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	
4,04E+00	4,05E+00	4,07E+00	4,09E+00	4,12E+00	4,14E+00	4,17E+00	4,21E+00	4,25E+00	4,35E+00	4,44E+00	
4,43E+00	4,44E+00	4,46E+00	4,48E+00	4,51E+00	4,53E+00	4,56E+00	4,60E+00	4,64E+00	4,64E+00	4,61E+00	
7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	
2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	
2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	
-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	9,76E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	

constant 1,6	constant 1,625	constant 1,65	constant 1,675	constant 1,7	constant 1,725	constant 1,75	constant 1,775	constant 1,79	constant 1,8	constant 1,825
error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%
3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01
4,73E-01	4,58E-01	4,38E-01	4,14E-01	3,82E-01	3,50E-01	3,06E-01	2,51E-01	2,11E-01	1,79E-01	8,36E-02
-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00
-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00
-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00
-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00
2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02
4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00
3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00
2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00
9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00
1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01
1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01
1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01
1,74E+01	1,74E+01	1,74E+01	1,75E+01	1,75E+01	1,76E+01	1,77E+01	1,78E+01	1,79E+01	1,80E+01	1,82E+01
9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,83E+00
8,77E+00	8,89E+00	9,03E+00	9,19E+00	9,39E+00	9,63E+00	9,92E+00	1,03E+01	1,06E+01	1,08E+01	1,11E+01
3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01
9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00
1,08E+01	1,08E+01	6,98E-01	6,98E-01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01
4,51E+00	4,60E+00	4,68E+00	4,78E+00	1,22E+01	5,01E+00	#REF!	5,31E+00	5,42E+00	5,50E+00	5,72E+00
4,60E+00	4,59E+00	4,58E+00	4,58E+00	4,58E+00	4,58E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,56E+00
7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00
2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01
2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01
-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	1,79E-01	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00	-3,23E+00

constant 1,85	constant 1,875	constant 1,9	constant 1,925	constant 1,93	constant 1,94	constant 1,95	constant 1,955	constant 1,96	constant 1,965	constant 1,97	
error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	
3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,86E+01	
-5,97E-02	-2,79E-01	-6,80E-01	-1,62E+00	-1,99E+00	-3,24E+00	-6,92E+00	-1,68E+01	-7,25E+00	1,14E+01	5,02E+01	
-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-5,28E+00	5,62E+00	2,20E+01	-2,75E+00	
-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	3,64E+00	5,95E+00	5,95E+00	-1,21E+00	
-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-5,19E-01	-5,19E-01	-5,19E-01	-3,50E+00	
-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	3,90E+00	3,90E+00	3,90E+00	-1,79E+00	
2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,93E+00	9,47E+00	9,47E+00	9,47E+00	2,89E-02	
4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	5,47E+00	5,47E+00	5,47E+00	5,47E+00	4,57E+00	
3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	9,57E+00	9,57E+00	9,57E+00	9,57E+00	3,89E+00	
2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	3,92E+00	7,84E+00	7,84E+00	7,84E+00	7,84E+00	2,19E+00	
9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	1,22E+01	1,22E+01	1,22E+01	1,22E+01	1,22E+01	9,22E+00	
1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,82E+01	2,01E+01	2,16E+01	2,16E+01	2,16E+01	2,16E+01	2,16E+01	1,58E+01	
1,46E+01	1,46E+01	1,52E+01	1,78E+01	1,78E+01	1,78E+01	1,78E+01	1,78E+01	1,78E+01	1,78E+01	1,46E+01	
1,97E+01	1,97E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	-9,82E+00	2,00E+01	2,00E+01	1,97E+01	
1,86E+01	1,94E+01	2,03E+01	2,03E+01	2,03E+01	2,03E+01	2,03E+01	2,03E+01	2,03E+01	-9,08E+00	1,52E+01	
1,07E+01	1,18E+01	1,33E+01	1,50E+01	1,53E+01	-6,96E+00	1,62E+01	1,64E+01	-6,96E+00	1,67E+01	-6,96E+00	
1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	1,11E+01	8,42E+00	
2,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	2,26E+01	3,26E+01	2,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,26E+01	3,07E+01	
9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	9,36E+00	8,98E+00	
1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01	7,00E+00	
5,99E+00	1,90E+00	1,90E+00	7,14E+00	7,24E+00	7,45E+00	7,67E+00	7,78E+00	7,89E+00	8,01E+00	4,16E+00	
4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	4,56E+00	3,27E+00	
7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,61E+00	7,54E+00	
2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01	1,98E+01	
2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01	3,25E+01	
1,01E+01	1,40E+00	1,80E+00	-3,23E+00	1,01E+01	1,87E+01	1,00E+02	2,48E+01	1,95E+01	2,45E+01	1,00E+02	

constant 1,975	constant 1,98	constant 1,99	constant 2	constant 2,05	constant 2,1	constant 2,15	constant 2,2	constant 2,25	constant 2,3	
error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	error%	
3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01	
8,30E+00	5,90E+00	3,93E+00	3,06E+00	1,71E+00	1,35E+00	1,18E+00	1,08E+00	1,02E+00	9,71E-01	
-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00	
-4,07E-01	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00	
-5,19E-01	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	
3,90E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00	
9,47E+00	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02	
5,47E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00	
9,57E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00	
7,84E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00	
1,22E+01	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00	
2,16E+01	1,84E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01	
1,78E+01	1,78E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01	
2,00E+01	-9,82E+00	1,97E+01	1,97E+01	-1,13E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01	
2,03E+01	2,03E+01	1,56E+01	1,57E+01	1,62E+01	1,64E+01	1,65E+01	-1,06E+01	1,67E+01	1,67E+01	
1,70E+01	1,71E+01	-8,40E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00	
-5,13E+00	1,11E+01	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	8,42E+00	
3,26E+01	3,26E+01	3,07E+01	3,07E+01	3,07E+01	3,07E+01	3,07E+01	3,07E+01	3,07E+01	3,07E+01	
9,36E+00	9,36E+00	8,98E+00	8,98E+00	8,98E+00	8,98E+00	8,98E+00	8,98E+00	8,98E+00	9,17E+00	
1,08E+01	1,08E+01	7,47E+00	7,71E+00	8,78E+00	9,55E+00	1,01E+01	1,05E+01	-3,19E-01	1,22E-01	
8,24E+00	8,36E+00	4,16E+00	5,80E-01	4,16E+00	4,16E+00	4,16E+00	4,16E+00	4,16E+00	4,16E+00	
4,55E+00	4,55E+00	3,27E+00	3,27E+00	3,27E+00	9,86E-01	3,27E+00	3,27E+00	3,27E+00	3,27E+00	
7,61E+00	7,61E+00	7,54E+00	7,54E+00	7,54E+00	7,54E+00	7,54E+00	7,54E+00	7,54E+00	7,54E+00	
2,00E+01	2,00E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	1,98E+01	
2,06E+01	2,06E+01	2,02E+01	2,02E+01	2,02E+01	2,02E+01	2,02E+01	2,02E+01	2,02E+01	2,02E+01	
1,00E+02	-3,23E+00	1,27E+01	#REF!	1,00E+02	1,00E+02	1,01E+01	1,00E+02	1,00E+02	#REF!	

constant 3	constant 3,05	constant 3,25
---------------	------------------	------------------

error%	error%	error%
3,50E-01	3,50E-01	3,50E-01
8,00E-01	7,96E-01	7,84E-01
-2,75E+00	-2,75E+00	-2,75E+00
-1,21E+00	-1,21E+00	-1,21E+00
-3,50E+00	-3,50E+00	-3,50E+00
-1,79E+00	-1,79E+00	-1,79E+00
2,89E-02	2,89E-02	2,89E-02
4,57E+00	4,57E+00	4,57E+00
3,89E+00	3,89E+00	3,89E+00
2,19E+00	2,19E+00	2,19E+00
9,22E+00	9,22E+00	9,22E+00
1,58E+01	1,58E+01	1,58E+01
1,46E+01	1,46E+01	1,46E+01
1,97E+01	1,97E+01	1,97E+01
1,69E+01	1,69E+01	1,69E+01
9,60E+00	9,60E+00	9,60E+00
8,42E+00	8,42E+00	-5,13E+00
2,26E+01	3,13E+01	3,14E+01
9,36E+00	-1,28E+00	9,36E+00
1,08E+01	1,08E+01	1,08E+01
4,15E+00	4,15E+00	4,15E+00
3,27E+00	3,27E+00	3,29E+00
7,54E+00	7,55E+00	7,61E+00
2,00E+01	2,00E+01	2,00E+01
2,06E+01	2,06E+01	2,06E+01

Υπολογισμένες Ιδιοσυχνότητες για την συνάρτηση $(r^2+c^2)^{1/2}$

	constant 0	constant 0,25	constant 0,5	constant 0,75	constant 1	constant 1,25	constant 1,3	constant 1,35	constant 1,4
exact eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
1,26E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,26E+00	1,26E+00	1,29E+00	1,24E+00	1,22E+00	1,06E+00
2,51E+00	2,49E+00	2,49E+00	2,50E+00	2,51E+00	2,52E+00	2,47E+00	2,67E+00	2,71E+00	3,10E+00
2,86E+00	2,93E+00	2,89E+00	2,86E+00	2,85E+00	2,85E+00	2,81E+00	2,97E+00	2,71E+00	2,96E+00
3,12E+00	3,15E+00	3,13E+00	3,12E+00	3,11E+00	3,11E+00	3,16E+00	2,97E+00	3,02E+00	2,96E+00
3,14E+00	3,25E+00	3,20E+00	3,16E+00	3,14E+00	3,13E+00	3,16E+00	3,15E+00	3,02E+00	3,41E+00
3,38E+00	3,44E+00	3,41E+00	3,39E+00	3,38E+00	3,37E+00	3,35E+00	3,29E+00	3,55E+00	3,41E+00
3,80E+00	3,79E+00	3,74E+00	3,73E+00	3,75E+00	3,77E+00	3,78E+00	3,82E+00	3,55E+00	3,42E+00
4,02E+00	3,83E+00	3,81E+00	3,81E+00	3,80E+00	3,80E+00	3,83E+00	3,82E+00	4,02E+00	3,42E+00
4,25E+00	4,07E+00	4,04E+00	4,04E+00	4,03E+00	4,02E+00	4,03E+00	4,07E+00	4,02E+00	3,60E+00
4,43E+00	4,32E+00	4,27E+00	4,26E+00	4,25E+00	4,25E+00	4,24E+00	4,24E+00	4,34E+00	4,48E+00
4,93E+00	4,46E+00	4,43E+00	4,43E+00	4,43E+00	4,42E+00	4,41E+00	4,39E+00	4,34E+00	4,48E+00
5,71E+00	4,79E+00	4,72E+00	4,73E+00	4,73E+00	4,73E+00	4,76E+00	4,76E+00	4,50E+00	4,90E+00
5,85E+00	4,97E+00	4,91E+00	4,92E+00	4,92E+00	4,92E+00	4,91E+00	4,94E+00	4,71E+00	4,91E+00
6,24E+00	4,98E+00	4,92E+00	4,94E+00	6,60E+00	4,94E+00	4,95E+00	4,94E+00	4,82E+00	4,91E+00
6,28E+00	5,18E+00	6,56E+00	4,99E+00	5,00E+00	5,03E+00	5,05E+00	6,60E+00	5,02E+00	6,30E+00
6,41E+00	5,75E+00	5,64E+00	6,56E+00	4,94E+00	5,65E+00	5,61E+00	5,55E+00	5,85E+00	5,41E+00
6,52E+00	5,92E+00	5,76E+00	5,70E+00	5,69E+00	5,69E+00	5,72E+00	5,72E+00	5,85E+00	5,41E+00
8,86E+00	5,98E+00	5,78E+00	5,77E+00	5,79E+00	6,61E+00	6,61E+00	5,80E+00	5,87E+00	5,61E+00
6,77E+00	6,08E+00	5,90E+00	5,83E+00	5,82E+00	5,83E+00	5,82E+00	5,85E+00	6,59E+00	5,69E+00
6,90E+00	6,77E+00	5,92E+00	5,93E+00	5,95E+00	5,96E+00	5,95E+00	5,94E+00	5,88E+00	5,69E+00
6,99E+00	6,66E+00	6,34E+00	6,26E+00	6,23E+00	6,17E+00	6,02E+00	6,09E+00	6,09E+00	5,95E+00
7,02E+00	6,66E+00	6,37E+00	6,27E+00	6,26E+00	6,23E+00	6,22E+00	6,22E+00	6,09E+00	5,95E+00
7,35E+00	6,71E+00	6,42E+00	6,33E+00	6,26E+00	6,28E+00	6,30E+00	6,29E+00	6,32E+00	6,17E+00
8,49E+00	6,73E+00	6,49E+00	6,41E+00	6,41E+00	6,42E+00	6,49E+00	6,49E+00	6,37E+00	6,29E+00
8,58E+00	6,73E+00	6,52E+00	6,54E+00	6,55E+00	6,58E+00	6,54E+00	6,49E+00	6,59E+00	6,30E+00
6,64E+00	6,10E+00	5,03E+00	5,68E+00	5,66E+00	5,79E+00	5,79E+00	5,01E+00	5,88E+00	5,19E+00

constant 1,45	constant 1,475	constant 1,5	constant 1,55	constant 1,575	constant 1,6	constant 1,65	constant 1,7	constant 1,75	constant 1,8
eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
1,08E+00	1,66E+00	2,17E+00	1,44E+00	6,80E-01	1,79E-01	3,89E-01	5,01E-01	5,90E-01	5,23E-01
2,67E+00	1,66E+00	2,17E+00	1,79E+00	6,90E-01	1,47E+00	4,44E-01	9,20E-01	7,83E-01	7,27E-01
1,73E+00	3,09E+00	2,10E+00	1,72E+00	1,18E+00	1,65E+00	4,44E-01	9,20E-01	9,47E-01	9,48E-01
1,73E+00	3,09E+00	2,10E+00	1,72E+00	1,18E+00	2,74E+00	1,61E+00	5,03E-01	9,47E-01	8,55E-01
3,24E+00	3,75E+00	3,69E+00	1,64E+00	2,19E+00	2,74E+00	1,42E+00	5,03E-01	5,55E-01	8,55E-01
3,24E+00	3,75E+00	3,81E+00	1,64E+00	2,19E+00	3,16E+00	1,42E+00	1,27E+00	5,55E-01	8,49E-01
3,80E+00	3,83E+00	3,81E+00	3,02E+00	2,57E+00	2,41E+00	1,81E+00	1,28E-01	1,49E+00	8,49E-01
3,69E+00	3,83E+00	4,09E+00	2,49E+00	3,28E+00	2,41E+00	2,20E+00	1,28E-01	1,56E+00	1,43E+00
3,69E+00	3,31E+00	4,02E+00	2,49E+00	3,33E+00	2,78E+00	1,50E+00	1,74E+00	1,56E+00	5,36E-01
4,23E+00	3,31E+00	4,02E+00	3,37E+00	3,41E+00	2,78E+00	1,50E+00	2,09E+00	1,84E+00	5,36E-01
4,23E+00	3,97E+00	4,68E+00	4,04E+00	3,34E+00	3,11E+00	2,77E+00	2,09E+00	2,14E+00	1,65E+00
4,25E+00	3,97E+00	6,19E+00	3,56E+00	3,34E+00	3,11E+00	1,77E+00	1,57E+00	1,75E+00	1,33E+00
4,25E+00	4,65E+00	5,00E+00	3,56E+00	1,92E+00	1,23E+00	1,77E+00	1,57E+00	1,75E+00	1,33E+00
4,62E+00	4,80E+00	5,31E+00	4,31E+00	1,92E+00	1,23E+00	3,59E+00	2,61E+00	2,36E+00	1,49E+00
4,64E+00	6,09E+00	5,50E+00	4,74E+00	3,71E+00	5,89E+00	3,59E+00	2,61E+00	2,76E+00	1,49E+00
6,14E+00	5,12E+00	5,37E+00	4,74E+00	4,34E+00	4,40E+00	3,56E+00	1,12E+00	2,21E+00	3,46E+00
4,86E+00	5,12E+00	5,37E+00	5,26E+00	4,34E+00	4,22E+00	3,56E+00	4,35E+00	2,21E+00	2,37E+00
5,16E+00	2,32E+00	5,70E+00	3,50E+00	4,09E+00	4,22E+00	4,80E+00	3,13E+00	3,67E+00	2,37E+00
5,16E+00	2,32E+00	5,15E+00	5,08E+00	4,99E+00	5,27E+00	2,65E+00	3,13E+00	1,13E+00	2,73E+00
5,63E+00	5,63E+00	5,15E+00	5,00E+00	4,84E+00	5,05E+00	3,97E+00	3,37E+00	3,04E+00	2,73E+00
5,63E+00	5,64E+00	3,24E+00	5,00E+00	4,84E+00	5,05E+00	4,85E+00	2,23E+00	3,04E+00	1,92E+00
5,80E+00	5,77E+00	3,24E+00	5,40E+00	3,56E+00	5,31E+00	4,85E+00	2,23E+00	1,28E+00	1,92E+00
5,80E+00	6,10E+00	6,08E+00	5,40E+00	3,56E+00	5,31E+00	4,77E+00	3,58E+00	1,28E+00	3,19E+00
6,08E+00	6,10E+00	3,92E+00	5,58E+00	5,49E+00	4,87E+00	4,77E+00	2,56E+00	3,15E+00	3,24E+00
6,14E+00	6,09E+00	3,92E+00	3,50E+00	4,09E+00	4,87E+00	4,80E+00	2,56E+00	3,15E+00	3,24E+00
4,86E+00	4,80E+00	4,68E+00	5,08E+00	4,99E+00	4,65E+00	2,65E+00	1,12E+00	1,13E+00	2,36E+00

constant 1,85	constant 1,9	constant 1,95	constant 1,975	constant 2	constant 2,05	constant 2,1	constant 2,15	constant 2,2	constant 2,25	constant 2,3
eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
2,29E-01	5,91E-01	2,63E-01	2,12E-01	2,65E-01	1,14E-01	6,16E-01	2,87E-01	1,30E-01	3,68E-01	6,78E-01
5,14E-01	5,91E-01	2,63E-01	3,27E-01	2,65E-01	1,14E-01	6,16E-01	5,35E-01	1,30E-01	4,00E-01	7,91E-01
5,47E-01	1,17E+00	2,93E-01	3,76E-01	7,72E-01	4,29E-01	9,79E-01	5,35E-01	2,87E-01	4,38E-01	7,91E-01
5,88E-01	1,32E+00	3,31E-01	2,73E-01	7,72E-01	5,42E-01	9,84E-01	6,22E-01	1,64E-01	5,03E-01	1,17E+00
5,88E-01	1,32E+00	3,31E-01	2,73E-01	9,08E-01	5,42E-01	5,51E-01	6,22E-01	1,64E-01	2,70E-01	1,17E+00
7,43E-01	1,46E+00	5,03E-01	3,66E-01	9,08E-01	6,28E-01	5,51E-01	3,53E-01	2,09E-01	2,70E-01	1,17E+00
7,43E-01	9,51E-01	4,81E-01	3,66E-01	1,13E+00	8,67E-02	1,02E+00	3,53E-01	2,09E-01	6,42E-01	8,90E-01
5,48E-01	9,51E-01	4,81E-01	6,71E-01	1,13E+00	8,67E-02	1,02E+00	7,57E-01	5,05E-01	5,67E-01	8,90E-01
5,48E-01	9,88E-01	5,92E-01	6,71E-01	3,47E-01	6,94E-01	1,25E+00	8,45E-01	5,25E-01	5,67E-01	1,36E+00
1,03E+00	9,88E-01	4,01E-01	3,48E-01	3,47E-01	6,94E-01	1,32E+00	5,19E-01	5,25E-01	7,04E-01	1,31E-01
1,07E+00	1,70E+00	4,01E-01	3,48E-01	1,25E+00	8,37E-01	1,67E-01	5,19E-01	5,84E-01	5,87E-01	1,31E-01
1,07E+00	1,70E+00	6,21E-01	7,60E-01	1,25E+00	3,31E-01	1,67E-01	8,81E-01	5,84E-01	5,87E-01	1,21E+00
1,33E+00	1,51E+00	6,21E-01	7,60E-01	1,39E+00	3,31E-01	1,46E+00	8,81E-01	5,28E-01	6,34E-01	1,21E+00
7,65E-01	1,51E+00	8,89E-01	6,13E-01	1,39E+00	7,46E-01	1,10E+00	9,25E-01	5,28E-01	9,15E-01	1,60E+00
7,65E-01	1,07E+00	1,37E+00	6,13E-01	1,19E+00	7,46E-01	1,10E+00	9,25E-01	2,98E-01	3,17E-01	1,60E+00
1,63E+00	1,07E+00	9,37E-01	1,86E-01	1,19E+00	9,43E-01	1,43E+00	2,84E-01	7,29E-01	3,17E-01	1,65E+00
2,84E+00	1,35E+00	9,37E-01	1,86E-01	2,76E-01	1,07E+00	1,43E+00	2,48E-01	6,77E-01	7,42E-01	1,65E+00
1,37E+00	1,35E+00	5,60E-01	4,74E-01	2,76E-01	1,10E+00	1,53E+00	8,52E-01	4,94E-01	7,42E-01	1,00E+00
1,37E+00	1,85E+00	5,60E-01	8,84E-01	1,68E+00	1,05E+00	5,87E-01	8,52E-01	4,94E-01	4,44E-01	1,00E+00
2,08E+00	1,81E+00	9,93E-01	9,07E-01	2,95E-01	1,05E+00	1,83E+00	7,84E-01	4,70E-01	4,44E-01	1,95E+00
2,24E+00	2,26E+00	9,93E-01	9,07E-01	1,01E+00	9,32E-01	1,83E+00	7,84E-01	4,70E-01	8,60E-01	2,08E+00
2,24E+00	2,26E+00	1,26E+00	1,18E+00	1,92E+00	9,32E-01	1,91E+00	1,18E+00	6,11E-01	7,20E-01	1,41E+00
2,51E+00	3,85E-01	1,26E+00	1,10E+00	1,78E+00	1,17E+00	1,22E+00	1,10E+00	6,11E-01	7,20E-01	1,41E+00
2,04E+00	3,85E-01	1,30E+00	1,10E+00	1,78E+00	1,17E+00	1,22E+00	1,10E+00	7,43E-01	9,57E-01	1,92E+00
2,04E+00	1,81E+00	1,30E+00	4,74E-01	2,95E-01	1,07E+00	5,87E-01	2,48E-01	7,43E-01	9,15E-01	1,92E+00
1,63E+00	1,85E+00	8,89E-01	8,84E-01	1,01E+00	9,43E-01	1,53E+00	2,84E-01	2,98E-01	6,34E-01	1,95E+00

constant 2,5	constant 3	constant 4	constant 5
eigen	eigen	eigen	eigen
8,40E-02	3,65E-01	2,48E-01	2,73E-01
8,40E-02	4,30E-01	2,48E-01	2,05E-01
2,42E-01	4,30E-01	5,30E-01	2,05E-01
2,74E-01	5,29E-01	2,82E-01	4,03E-01
2,74E-01	2,59E-01	2,82E-01	3,44E-01
2,36E-01	2,59E-01	5,80E-01	3,44E-01
2,36E-01	3,36E-01	5,80E-01	3,58E-01
3,84E-01	3,36E-01	3,63E-01	3,58E-01
1,17E-02	6,27E-01	6,85E-01	5,33E-01
1,17E-02	3,05E-01	6,85E-01	5,47E-01
2,98E-01	3,05E-01	4,58E-01	1,53E-01
2,98E-01	5,40E-01	5,22E-01	1,53E-01
4,33E-01	5,40E-01	5,22E-01	5,60E-01
4,33E-01	5,77E-01	7,56E-01	3,33E-01
4,40E-01	5,77E-01	7,70E-01	5,69E-01
4,40E-01	7,02E-01	6,88E-01	5,69E-01
3,21E-01	4,38E-01	6,88E-01	3,73E-01
3,62E-01	7,24E-01	7,83E-01	3,73E-01
4,46E-01	5,29E-01	7,83E-01	5,57E-01
4,46E-01	5,29E-01	4,20E-01	5,60E-01
3,32E-01	8,11E-01	4,20E-01	4,58E-01
3,32E-01	8,11E-01	8,73E-01	4,58E-01
5,20E-01	5,46E-01	7,81E-01	2,91E-01
2,64E-01	5,46E-01	7,81E-01	2,91E-01
2,64E-01	4,38E-01	4,58E-01	3,33E-01
3,62E-01	7,02E-01	3,63E-01	5,57E-01

Ποσοστιαίο Σφάλμα για την συνάρτηση $(r^2+c^2)^{1/2}$

constant 0	constant 0,25	constant 0,5	constant 0,75	constant 1	constant 1,25	constant 1,3	eigen 1,35	constant 1,4	constant 1,45	constant 1,475
eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
4,22E-01	3,34E-01	1,83E-01	8,75E-02	7,16E-02	-2,64E+00	1,61E+00	2,94E+00	1,58E+01	1,40E+01	-3,18E+01
7,96E-01	1,01E+00	6,29E-01	2,03E-01	-1,71E-01	1,62E+00	-6,28E+00	-7,93E+00	-2,35E+01	-6,37E+00	3,41E+01
-2,62E+00	-1,13E+00	-1,54E-01	2,35E-01	3,50E-01	1,60E+00	-4,11E+00	5,02E+00	-3,55E+00	3,95E+01	-8,19E+00
-1,01E+00	-3,88E-01	-2,56E-02	1,92E-01	2,88E-01	-1,14E+00	4,70E+00	3,15E+00	5,22E+00	4,46E+01	9,68E-01
-3,34E+00	-1,86E+00	-5,79E-01	1,02E-01	3,85E-01	-4,55E-01	-4,07E-01	3,81E+00	-8,39E+00	-3,28E+00	-1,93E+01
-1,56E+00	-8,84E-01	-3,19E-01	1,00E-01	3,25E-01	1,03E+00	2,63E+00	-4,77E+00	-6,41E-01	4,10E+00	-1,09E+01
2,84E-01	1,81E+00	1,90E+00	1,42E+00	7,83E-01	6,70E-01	-3,10E-01	6,82E+00	1,01E+01	1,05E-02	-7,65E-01
4,84E+00	5,41E+00	5,39E+00	5,47E+00	5,52E+00	4,90E+00	5,15E+00	5,47E-02	1,50E+01	8,23E+00	4,72E+00
4,20E+00	4,79E+00	4,85E+00	5,05E+00	5,22E+00	5,05E+00	4,17E+00	5,29E+00	1,53E+01	1,30E+01	2,19E+01
2,55E+00	3,48E+00	3,83E+00	3,99E+00	4,05E+00	4,15E+00	4,34E+00	1,89E+00	-1,22E+00	4,46E+00	2,52E+01
9,63E+00	1,02E+01	1,01E+01	1,02E+01	1,04E+01	1,05E+01	1,09E+01	1,20E+01	9,16E+00	1,43E+01	1,95E+01
1,62E+01	1,74E+01	1,73E+01	1,72E+01	1,71E+01	1,67E+01	1,67E+01	2,11E+01	1,43E+01	2,56E+01	3,05E+01
1,51E+01	1,60E+01	1,59E+01	1,58E+01	1,58E+01	1,60E+01	1,56E+01	1,96E+01	1,60E+01	2,74E+01	2,04E+01
2,01E+01	2,11E+01	2,09E+01	-5,70E+00	2,08E+01	2,07E+01	2,09E+01	2,28E+01	2,13E+01	2,59E+01	2,30E+01
1,76E+01	-4,41E+00	2,06E+01	2,03E+01	2,00E+01	1,96E+01	-5,10E+00	2,01E+01	-2,01E-01	2,61E+01	3,02E+00
1,03E+01	1,19E+01	-2,45E+00	2,29E+01	1,19E+01	1,24E+01	1,34E+01	8,67E+00	1,55E+01	4,23E+00	2,01E+01
9,19E+00	1,16E+01	1,26E+01	1,27E+01	1,26E+01	1,23E+01	1,22E+01	1,02E+01	1,69E+01	2,54E+01	2,15E+01
3,25E+01	3,47E+01	3,49E+01	3,47E+01	2,54E+01	2,54E+01	3,45E+01	3,37E+01	3,67E+01	4,17E+01	7,38E+01
1,02E+01	1,29E+01	1,38E+01	1,40E+01	1,38E+01	1,40E+01	1,35E+01	2,57E+00	1,59E+01	2,37E+01	6,57E+01
1,84E+00	1,42E+01	1,41E+01	1,38E+01	1,37E+01	1,38E+01	1,39E+01	1,48E+01	1,75E+01	1,84E+01	1,84E+01
4,74E+00	9,31E+00	1,05E+01	1,09E+01	1,17E+01	1,39E+01	1,28E+01	1,29E+01	1,49E+01	1,94E+01	1,92E+01
5,13E+00	9,18E+00	1,07E+01	1,08E+01	1,13E+01	1,13E+01	1,14E+01	1,33E+01	1,52E+01	1,73E+01	1,78E+01
8,70E+00	1,25E+01	1,39E+01	1,47E+01	1,45E+01	1,43E+01	1,44E+01	1,40E+01	1,61E+01	2,10E+01	1,70E+01
2,07E+01	2,35E+01	2,45E+01	2,45E+01	2,44E+01	2,36E+01	2,36E+01	2,50E+01	2,59E+01	2,84E+01	2,82E+01
2,16E+01	2,40E+01	2,39E+01	2,37E+01	2,34E+01	2,39E+01	2,44E+01	2,32E+01	2,67E+01	2,85E+01	2,90E+01
8,08E+00	2,43E+01	1,45E+01	1,47E+01	1,27E+01	1,28E+01	2,45E+01	1,15E+01	2,19E+01	2,68E+01	2,76E+01

constant 1,5	constant 1,55	1,575	constant 1,6	1,65	1,7	constant 1,75	constant 1,8	1,85	constant 1,9	1,95
eigen	eigen	eigen	eigen	eigen						
-7,25E+01	-1,45E+01	4,59E+01	8,58E+01	6,90E+01	6,01E+01	5,30E+01	5,84E+01	8,18E+01	5,30E+01	7,90E+01
1,37E+01	2,88E+01	7,26E+01	4,16E+01	8,23E+01	6,34E+01	6,89E+01	7,11E+01	7,96E+01	7,65E+01	8,95E+01
2,65E+01	3,99E+01	5,85E+01	4,22E+01	8,45E+01	6,78E+01	6,68E+01	6,68E+01	8,09E+01	5,90E+01	8,98E+01
3,28E+01	4,50E+01	6,20E+01	1,20E+01	4,84E+01	8,39E+01	6,96E+01	7,26E+01	8,12E+01	5,77E+01	8,94E+01
-1,74E+01	4,77E+01	3,04E+01	1,26E+01	5,48E+01	8,40E+01	8,23E+01	7,28E+01	8,13E+01	5,80E+01	8,95E+01
-1,25E+01	5,14E+01	3,53E+01	6,69E+00	5,81E+01	6,25E+01	8,36E+01	7,49E+01	7,80E+01	5,69E+01	8,51E+01
-9,20E-02	2,05E+01	3,24E+01	3,67E+01	5,24E+01	9,66E+01	6,09E+01	7,77E+01	8,05E+01	7,50E+01	8,74E+01
-1,59E+00	3,80E+01	1,84E+01	4,02E+01	4,54E+01	9,68E+01	6,11E+01	6,44E+01	8,64E+01	7,64E+01	8,80E+01
5,24E+00	4,12E+01	2,15E+01	3,46E+01	6,46E+01	5,90E+01	6,32E+01	8,74E+01	8,71E+01	7,67E+01	8,61E+01
9,13E+00	2,38E+01	2,30E+01	3,73E+01	6,60E+01	5,29E+01	5,85E+01	8,79E+01	7,68E+01	7,77E+01	9,09E+01
5,11E+00	1,81E+01	3,24E+01	3,70E+01	4,39E+01	5,77E+01	5,66E+01	6,66E+01	7,83E+01	6,55E+01	9,19E+01
-8,33E+00	3,77E+01	4,16E+01	4,55E+01	6,90E+01	7,26E+01	6,94E+01	7,67E+01	8,13E+01	7,02E+01	8,91E+01
1,46E+01	3,92E+01	6,72E+01	7,90E+01	6,97E+01	7,32E+01	7,02E+01	7,72E+01	7,73E+01	7,42E+01	8,94E+01
1,49E+01	3,10E+01	6,92E+01	8,03E+01	4,24E+01	5,82E+01	6,21E+01	7,62E+01	8,77E+01	7,58E+01	8,57E+01
1,24E+01	2,46E+01	4,09E+01	6,24E+00	4,28E+01	5,84E+01	5,61E+01	7,63E+01	8,78E+01	8,29E+01	7,82E+01
1,63E+01	2,61E+01	3,22E+01	3,13E+01	4,44E+01	8,26E+01	6,55E+01	4,60E+01	7,46E+01	8,33E+01	8,54E+01
1,77E+01	1,93E+01	3,34E+01	3,52E+01	4,54E+01	3,33E+01	6,61E+01	6,37E+01	5,64E+01	7,94E+01	8,56E+01
3,56E+01	6,05E+01	5,38E+01	5,23E+01	4,58E+01	6,47E+01	5,86E+01	7,33E+01	8,46E+01	8,48E+01	9,37E+01
2,39E+01	2,50E+01	2,62E+01	2,21E+01	6,08E+01	5,37E+01	8,34E+01	5,97E+01	7,98E+01	7,26E+01	9,17E+01
2,54E+01	2,76E+01	2,99E+01	2,68E+01	4,25E+01	5,12E+01	5,60E+01	6,05E+01	6,98E+01	7,38E+01	8,56E+01
5,36E+01	2,85E+01	3,08E+01	2,77E+01	3,06E+01	6,80E+01	5,65E+01	7,25E+01	6,79E+01	6,77E+01	8,58E+01
5,38E+01	2,30E+01	4,93E+01	2,43E+01	3,08E+01	6,82E+01	8,18E+01	7,26E+01	6,80E+01	6,78E+01	8,20E+01
1,73E+01	2,65E+01	5,15E+01	2,77E+01	3,50E+01	5,13E+01	8,26E+01	5,66E+01	6,58E+01	9,48E+01	8,28E+01
5,38E+01	3,43E+01	3,54E+01	4,26E+01	4,38E+01	6,98E+01	6,29E+01	6,19E+01	7,60E+01	9,55E+01	8,46E+01
5,43E+01	5,93E+01	5,23E+01	4,33E+01	4,41E+01	7,01E+01	6,33E+01	6,23E+01	7,63E+01	7,89E+01	8,48E+01
2,95E+01	2,35E+01	2,48E+01	2,99E+01	6,01E+01	8,32E+01	8,30E+01	6,45E+01	7,55E+01	7,21E+01	8,66E+01

constant 1,975	constant 2	constant 2,05	constant 2,1	constant 2,15	constant 2,2	constant 2,25	constant 2,3	constant 2,5	constant 3	constant 4	constant 5
eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
8,31E+01	7,89E+01	9,09E+01	5,10E+01	7,72E+01	8,96E+01	7,07E+01	4,61E+01	9,33E+01	7,09E+01	8,02E+01	7,83E+01
8,70E+01	8,95E+01	9,55E+01	7,55E+01	7,87E+01	9,48E+01	8,41E+01	6,85E+01	9,67E+01	8,29E+01	9,01E+01	9,18E+01
8,68E+01	7,30E+01	8,50E+01	6,57E+01	8,13E+01	9,00E+01	8,47E+01	7,23E+01	9,15E+01	8,49E+01	8,15E+01	9,28E+01
9,12E+01	7,53E+01	8,26E+01	6,85E+01	8,01E+01	9,47E+01	8,39E+01	6,24E+01	9,12E+01	8,31E+01	9,10E+01	8,71E+01
9,13E+01	7,11E+01	8,28E+01	8,24E+01	8,02E+01	9,48E+01	9,14E+01	6,28E+01	9,13E+01	9,18E+01	9,10E+01	8,90E+01
8,92E+01	7,32E+01	8,14E+01	8,37E+01	8,96E+01	9,38E+01	9,20E+01	6,55E+01	9,30E+01	9,24E+01	8,29E+01	8,98E+01
9,04E+01	7,04E+01	9,77E+01	7,33E+01	9,07E+01	9,45E+01	8,31E+01	7,66E+01	9,38E+01	9,12E+01	8,48E+01	9,06E+01
8,33E+01	7,20E+01	9,78E+01	7,48E+01	8,12E+01	8,75E+01	8,59E+01	7,79E+01	9,04E+01	9,16E+01	9,10E+01	9,11E+01
8,42E+01	9,18E+01	8,37E+01	7,05E+01	8,01E+01	8,76E+01	8,66E+01	6,80E+01	9,97E+01	8,52E+01	8,39E+01	8,75E+01
9,21E+01	9,22E+01	8,43E+01	7,03E+01	8,83E+01	8,81E+01	8,41E+01	9,70E+01	9,97E+01	9,31E+01	8,45E+01	8,76E+01
9,29E+01	7,46E+01	8,30E+01	9,66E+01	8,95E+01	8,82E+01	8,81E+01	9,73E+01	9,40E+01	9,38E+01	9,07E+01	9,69E+01
8,67E+01	7,81E+01	9,42E+01	9,71E+01	8,46E+01	8,98E+01	8,97E+01	7,88E+01	9,48E+01	9,05E+01	9,09E+01	9,73E+01
8,70E+01	7,62E+01	9,43E+01	7,51E+01	8,49E+01	9,10E+01	8,92E+01	7,93E+01	9,26E+01	9,08E+01	9,11E+01	9,04E+01
9,02E+01	7,77E+01	8,81E+01	8,24E+01	8,52E+01	9,15E+01	8,53E+01	7,44E+01	9,31E+01	9,08E+01	8,79E+01	9,47E+01
9,02E+01	8,11E+01	8,81E+01	8,25E+01	8,53E+01	9,53E+01	9,50E+01	7,46E+01	9,30E+01	9,08E+01	8,77E+01	9,10E+01
9,71E+01	8,14E+01	8,53E+01	7,77E+01	9,56E+01	8,86E+01	9,50E+01	7,43E+01	9,31E+01	8,90E+01	8,93E+01	9,11E+01
9,71E+01	9,58E+01	8,36E+01	7,81E+01	9,62E+01	8,96E+01	8,86E+01	7,47E+01	9,51E+01	9,33E+01	8,95E+01	9,43E+01
9,47E+01	9,69E+01	8,76E+01	8,28E+01	9,04E+01	9,44E+01	9,16E+01	8,87E+01	9,59E+01	9,18E+01	9,12E+01	9,58E+01
8,69E+01	7,52E+01	8,45E+01	9,13E+01	8,74E+01	9,27E+01	9,34E+01	8,52E+01	9,34E+01	9,22E+01	8,84E+01	9,18E+01
8,69E+01	9,57E+01	8,48E+01	7,34E+01	8,86E+01	9,32E+01	9,36E+01	7,17E+01	9,35E+01	9,23E+01	9,39E+01	9,19E+01
8,70E+01	8,56E+01	8,67E+01	7,38E+01	8,88E+01	9,33E+01	8,77E+01	7,03E+01	9,52E+01	8,84E+01	9,40E+01	9,34E+01
8,31E+01	7,27E+01	8,67E+01	7,28E+01	8,31E+01	9,13E+01	8,97E+01	7,99E+01	9,53E+01	8,84E+01	8,76E+01	9,35E+01
8,50E+01	7,58E+01	8,41E+01	8,34E+01	8,50E+01	9,17E+01	9,02E+01	8,08E+01	9,29E+01	9,26E+01	8,94E+01	9,60E+01
8,70E+01	7,91E+01	8,62E+01	8,56E+01	8,70E+01	9,13E+01	8,87E+01	7,74E+01	9,69E+01	9,36E+01	9,08E+01	9,66E+01
9,45E+01	9,66E+01	8,75E+01	9,32E+01	9,71E+01	9,13E+01	8,93E+01	7,76E+01	9,69E+01	9,49E+01	9,47E+01	9,61E+01
8,67E+01	8,48E+01	8,58E+01	7,70E+01	9,57E+01	9,55E+01	9,04E+01	7,06E+01	9,45E+01	8,94E+01	9,45E+01	9,16E+01

Υπολογισμένες Ιδιοσυχνότητες για την συνάρτηση e^{-r^2/c^2}

exact eigen	constant 0,05 eigen	constant 0,1 eigen	constant 0,15 eigen	constant 0,2 eigen	constant 0,3 eigen	constant 0,4 eigen	constant 0,5 eigen	constant 0,6 eigen	constant 0,7 eigen
0,00E+00	1,93E-06	1,21E-06	1,13E-06	1,41E-06	1,45E-06	9,94E-07	3,96E-07	1,17E-06	4,82E-06
1,26E+00	5,20E+00	2,45E+00	1,72E+00	1,49E+00	1,33E+00	1,27E+00	1,25E+00	1,25E+00	1,19E+00
2,51E+00	9,61E+00	4,78E+00	3,41E+00	2,96E+00	2,66E+00	2,55E+00	2,52E+00	2,51E+00	2,49E+00
2,86E+00	9,75E+00	4,99E+00	3,59E+00	3,14E+00	2,90E+00	2,85E+00	2,85E+00	2,85E+00	2,81E+00
3,12E+00	9,91E+00	5,24E+00	3,79E+00	3,35E+00	3,13E+00	3,10E+00	3,11E+00	3,11E+00	3,03E+00
3,14E+00	1,04E+01	5,42E+00	3,90E+00	3,42E+00	3,18E+00	3,14E+00	3,14E+00	3,14E+00	3,11E+00
3,38E+00	1,05E+01	5,62E+00	4,07E+00	3,60E+00	3,39E+00	3,37E+00	3,38E+00	3,38E+00	3,57E+00
3,80E+00	1,15E+01	6,34E+00	4,64E+00	4,10E+00	3,82E+00	3,79E+00	3,78E+00	3,76E+00	3,73E+00
4,02E+00	1,15E+01	6,64E+00	4,86E+00	4,30E+00	3,98E+00	3,84E+00	3,79E+00	3,80E+00	3,82E+00
4,25E+00	1,19E+01	6,65E+00	4,90E+00	4,38E+00	4,04E+00	4,01E+00	4,02E+00	4,02E+00	4,02E+00
4,43E+00	1,24E+01	6,76E+00	4,99E+00	4,38E+00	4,20E+00	4,23E+00	4,24E+00	4,24E+00	4,23E+00
4,93E+00	1,26E+01	6,81E+00	5,02E+00	4,51E+00	4,36E+00	4,40E+00	4,41E+00	4,42E+00	4,41E+00
5,71E+00	1,33E+01	7,52E+00	5,62E+00	5,05E+00	4,76E+00	4,71E+00	4,72E+00	4,72E+00	4,71E+00
5,85E+00	1,48E+01	7,63E+00	5,71E+00	5,08E+00	4,86E+00	4,90E+00	4,91E+00	4,91E+00	4,72E+00
6,24E+00	1,36E+01	7,86E+00	5,88E+00	5,24E+00	4,93E+00	4,90E+00	4,92E+00	4,93E+00	4,89E+00
6,28E+00	1,38E+01	8,33E+00	6,43E+00	5,75E+00	5,27E+00	5,12E+00	5,05E+00	5,04E+00	4,94E+00
6,41E+00	1,41E+01	8,44E+00	6,44E+00	7,04E+00	5,60E+00	5,65E+00	5,67E+00	5,68E+00	5,05E+00
6,52E+00	1,41E+01	8,76E+00	6,89E+00	6,21E+00	5,82E+00	5,77E+00	5,77E+00	5,70E+00	5,63E+00
8,86E+00	1,43E+01	8,91E+00	7,76E+00	6,26E+00	6,71E+00	6,60E+00	6,60E+00	5,81E+00	6,58E+00
6,77E+00	1,44E+01	8,92E+00	6,98E+00	6,28E+00	5,95E+00	5,91E+00	5,88E+00	6,62E+00	5,79E+00
6,90E+00	1,44E+01	9,93E+00	7,01E+00	6,32E+00	5,96E+00	5,93E+00	5,95E+00	5,96E+00	5,82E+00
6,99E+00	1,45E+01	9,27E+00	7,41E+00	6,76E+00	6,37E+00	6,30E+00	6,25E+00	6,23E+00	5,96E+00
7,02E+00	1,47E+01	9,44E+00	7,53E+00	6,80E+00	6,44E+00	6,36E+00	6,30E+00	6,28E+00	6,20E+00
7,35E+00	1,48E+01	9,44E+00	7,54E+00	6,80E+00	6,50E+00	6,53E+00	6,47E+00	6,32E+00	6,21E+00
8,49E+00	1,48E+01	9,67E+00	7,55E+00	6,83E+00	6,55E+00	6,56E+00	6,47E+00	6,41E+00	6,31E+00
8,58E+00	1,48E+01	9,68E+00	7,61E+00	6,85E+00	6,61E+00	6,58E+00	6,53E+00	6,55E+00	6,31E+00
6,64E+00	1,34E+01	8,92E+00	6,98E+00	5,81E+00	5,90E+00	5,83E+00	5,79E+00	5,84E+00	5,68E+00

constant 0,75 eigen	constant 0,8 eigen	constant 0,9 eigen	constant 1 eigen	constant 1,1 eigen	constant 1,2 eigen	constant 1,3 eigen	constant 1,4 eigen	constant 1,5 eigen	constant 1,55 eigen
4,90E-06	1,81E-05	1,07E-05	2,86E-05	1,17E-04	9,29E-06	1,28E-05	4,75E-05	7,76E-05	4,81E-05
9,09E-01	3,52E-01	6,80E-01	2,55E-01	5,21E-01	2,01E-01	3,16E-01	7,29E-02	2,09E-01	4,54E-01
1,25E+00	3,52E-01	4,07E-01	2,55E-01	5,21E-01	3,12E-01	3,32E-01	1,54E-01	2,09E-01	3,91E-01
2,22E+00	1,29E+00	4,07E-01	4,00E-01	5,80E-01	3,12E-01	3,32E-01	2,67E-01	4,73E-01	3,91E-01
2,64E+00	2,20E+00	1,06E+00	4,00E-01	5,80E-01	2,54E-01	5,20E-01	2,76E-01	4,73E-01	6,32E-01
2,64E+00	2,20E+00	4,11E-01	5,34E-01	1,02E+00	2,54E-01	5,20E-01	1,65E-01	3,57E-01	6,41E-01
3,30E+00	2,81E+00	4,11E-01	5,34E-01	8,68E-01	2,96E-01	5,47E-01	1,65E-01	3,57E-01	6,41E-01
3,30E+00	3,10E+00	1,36E+00	2,34E-01	8,68E-01	2,96E-01	5,50E-01	4,30E-01	6,65E-01	6,53E-01
3,45E+00	1,34E+00	1,36E+00	2,34E-01	9,85E-01	5,15E-01	4,42E-01	3,91E-01	4,63E-01	6,53E-01
3,45E+00	1,34E+00	1,43E+00	4,36E-01	9,85E-01	1,23E-01	4,42E-01	3,91E-01	4,63E-01	4,40E-01
3,58E+00	4,02E+00	1,43E+00	4,36E-01	1,16E+00	1,23E-01	3,55E-01	2,32E-01	6,41E-01	4,40E-01
3,90E+00	4,14E+00	7,86E-01	7,98E-01	1,16E+00	5,21E-01	3,55E-01	2,32E-01	6,41E-01	6,54E-01
3,90E+00	4,14E+00	7,86E-01	7,98E-01	1,22E+00	5,21E-01	3,75E-01	3,42E-01	5,45E-01	6,54E-01
4,08E+00	3,64E+00	1,65E+00	8,91E-01	4,02E-01	5,86E-01	3,75E-01	3,42E-01	5,45E-01	9,34E-01
4,08E+00	3,64E+00	1,84E+00	8,91E-01	4,02E-01	5,98E-01	4,48E-01	4,65E-01	7,12E-01	9,22E-01
4,33E+00	1,43E+00	4,04E+00	6,57E-01	1,69E+00	5,98E-01	4,48E-01	3,17E-01	7,12E-01	9,22E-01
4,68E+00	1,43E+00	2,27E+00	6,57E-01	1,06E+00	4,59E-01	6,76E-01	4,83E-01	3,37E-01	1,04E+00
4,93E+00	6,20E+00	2,66E+00	1,06E+00	1,06E+00	4,59E-01	6,12E-01	4,83E-01	5,02E-01	9,67E-01
6,21E+00	4,64E+00	2,66E+00	9,87E-01	1,47E+00	4,85E-01	6,12E-01	5,26E-01	5,26E-01	7,54E-01
5,05E+00	4,83E+00	3,12E+00	9,87E-01	1,54E+00	5,04E-01	6,03E-01	1,55E-01	5,26E-01	7,54E-01
5,63E+00	4,94E+00	3,12E+00	1,19E+00	1,49E+00	6,99E-01	6,03E-01	1,55E-01	8,13E-01	9,94E-01
5,71E+00	5,25E+00	2,91E+00	1,52E+00	1,49E+00	6,99E-01	8,48E-01	5,03E-01	6,43E-01	9,94E-01
5,77E+00	5,37E+00	2,91E+00	1,18E+00	1,20E+00	7,01E-01	6,87E-01	5,03E-01	6,43E-01	4,22E-01
5,84E+00	5,52E+00	2,81E+00	3,29E-01	1,20E+00	7,01E-01	7,18E-01	5,78E-01	8,67E-01	4,22E-01
6,05E+00	5,88E+00	2,81E+00	3,29E-01	1,85E+00	2,17E-01	7,18E-01	5,78E-01	8,67E-01	7,14E-01
6,21E+00	5,88E+00	4,04E+00	1,52E+00	1,69E+00	2,17E-01	8,05E-01	3,17E-01	3,37E-01	7,14E-01
4,94E+00	4,64E+00	2,27E+00	1,18E+00	1,38E+00	5,04E-01	6,87E-01	4,65E-01	5,02E-01	1,04E+00

constant	constant	constant	constant	constant
1,65	1,7	1,8	1,9	2
eigen	eigen	eigen	eigen	eigen
7,17E-05	1,18E-05	1,07E-04	1,62E-04	2,90E-05
3,19E-01	2,93E-01	3,23E-01	1,26E-01	2,99E-01
4,64E-01	2,93E-01	7,42E-01	5,13E-01	2,99E-01
3,07E-01	2,37E-01	7,42E-01	5,60E-01	3,69E-01
3,07E-01	2,37E-01	2,77E-01	5,92E-01	3,69E-01
4,63E-01	4,00E-01	2,77E-01	3,84E-01	4,31E-01
4,63E-01	2,32E-01	5,95E-01	3,84E-01	4,31E-01
7,48E-01	2,32E-01	5,95E-01	6,16E-01	2,77E-01
7,73E-01	4,35E-01	9,29E-01	6,16E-01	2,77E-01
4,77E-01	4,22E-01	1,00E+00	6,96E-01	6,73E-01
4,77E-01	4,22E-01	1,00E+00	6,96E-01	6,73E-01
8,40E-01	4,23E-01	5,35E-01	1,06E+00	6,54E-01
8,97E-01	4,23E-01	5,35E-01	9,23E-01	6,54E-01
8,97E-01	4,34E-01	1,14E+00	9,23E-01	7,02E-01
1,02E+00	4,34E-01	1,17E+00	7,88E-01	7,03E-01
5,75E-01	5,77E-01	1,31E+00	7,88E-01	7,29E-01
5,75E-01	6,30E-01	5,67E-01	1,31E+00	7,29E-01
8,90E-01	2,71E-01	5,67E-01	1,10E+00	6,76E-01
8,90E-01	6,01E-01	1,06E+00	1,10E+00	3,54E-01
3,45E-01	4,51E-01	1,06E+00	9,25E-01	7,19E-01
3,45E-01	4,51E-01	9,73E-01	9,25E-01	7,19E-01
5,76E-01	4,41E-01	9,73E-01	4,89E-01	8,02E-01
5,76E-01	4,41E-01	1,34E+00	4,89E-01	1,50E-01
4,95E-01	6,14E-01	1,28E+00	1,29E+00	1,50E-01
4,95E-01	1,61E-01	1,28E+00	1,29E+00	6,65E-01
1,02E+00	1,61E-01	1,31E+00	1,36E+00	6,65E-01
9,75E-01	2,71E-01	1,17E+00	1,15E+00	3,54E-01

Ποσοστιαίο Σφάλμα για την συνάρτηση e^{-r^2/c^2}

constant 0,05 eigen	constant 0,1 eigen	constant 0,15 eigen	constant 0,2 eigen	constant 0,3 eigen	constant 0,4 eigen	constant 0,5 eigen	constant 0,6 eigen	constant 0,7 eigen	constant 0,75 eigen	constant 0,8 eigen
-3,13E+02	-9,47E+01	-3,67E+01	-1,79E+01	-5,29E+00	-9,60E-01	4,05E-01	4,05E-01	5,75E+00	2,79E+01	7,21E+01
-2,83E+02	-9,02E+01	-3,58E+01	-1,79E+01	-5,98E+00	-1,78E+00	-2,11E-01	-2,11E-01	7,37E-01	5,02E+01	8,60E+01
-2,41E+02	-7,45E+01	-2,53E+01	-9,90E+00	-1,33E+00	3,29E-01	3,50E-01	3,50E-01	1,83E+00	2,23E+01	5,49E+01
-2,18E+02	-6,78E+01	-2,15E+01	-7,28E+00	-1,96E-01	5,87E-01	3,56E-01	3,56E-01	2,89E+00	1,53E+01	2,95E+01
-2,31E+02	-7,26E+01	-2,41E+01	-8,98E+00	-1,25E+00	-1,59E-02	-4,46E-02	-4,46E-02	9,49E-01	1,59E+01	2,99E+01
-2,10E+02	-6,61E+01	-2,05E+01	-6,53E+00	-2,37E-01	2,37E-01	5,33E-02	5,33E-02	-5,70E+00	2,33E+00	1,69E+01
-2,02E+02	-6,69E+01	-2,20E+01	-7,88E+00	-5,61E-01	3,55E-01	5,00E-01	5,00E-01	1,87E+00	1,31E+01	1,85E+01
-1,86E+02	-6,53E+01	-2,10E+01	-7,03E+00	9,53E-01	4,43E+00	5,65E+00	5,65E+00	4,96E+00	1,42E+01	6,66E+01
-1,81E+02	-5,65E+01	-1,54E+01	-3,12E+00	5,01E+00	5,58E+00	5,44E+00	5,44E+00	5,51E+00	1,89E+01	6,84E+01
-1,80E+02	-5,25E+01	-1,27E+01	1,05E+00	5,12E+00	4,61E+00	4,25E+00	4,25E+00	4,51E+00	1,92E+01	9,23E+00
-1,55E+02	-3,82E+01	-1,75E+00	8,56E+00	1,16E+01	1,08E+01	1,05E+01	1,05E+01	1,06E+01	2,08E+01	1,61E+01
-1,33E+02	-3,17E+01	1,61E+00	1,16E+01	1,67E+01	1,74E+01	1,73E+01	1,73E+01	1,74E+01	3,16E+01	2,75E+01
-1,53E+02	-3,05E+01	2,44E+00	1,31E+01	1,69E+01	1,62E+01	1,61E+01	1,61E+01	1,92E+01	3,03E+01	3,78E+01
-1,18E+02	-2,59E+01	5,83E+00	1,61E+01	2,10E+01	2,14E+01	2,11E+01	2,11E+01	2,16E+01	3,46E+01	4,17E+01
-1,20E+02	-3,27E+01	-2,45E+00	8,50E+00	1,61E+01	1,84E+01	1,95E+01	1,95E+01	2,13E+01	3,11E+01	7,72E+01
-1,20E+02	-3,16E+01	-5,24E-01	-9,83E+00	1,26E+01	1,19E+01	1,15E+01	1,15E+01	2,12E+01	2,69E+01	7,76E+01
-1,16E+02	-3,43E+01	-5,73E+00	4,71E+00	1,08E+01	1,15E+01	1,15E+01	1,15E+01	1,36E+01	2,44E+01	4,87E+00
-6,17E+01	-5,94E-01	1,24E+01	2,93E+01	2,43E+01	2,56E+01	2,55E+01	2,55E+01	2,57E+01	2,99E+01	4,76E+01
-1,12E+02	-3,17E+01	-3,12E+00	7,27E+00	1,21E+01	1,26E+01	1,31E+01	1,31E+01	1,45E+01	2,54E+01	2,87E+01
-1,09E+02	-4,38E+01	-1,62E+00	8,34E+00	1,37E+01	1,41E+01	1,38E+01	1,38E+01	1,57E+01	1,84E+01	2,85E+01
-1,08E+02	-3,26E+01	-6,06E+00	3,31E+00	8,89E+00	9,94E+00	1,05E+01	1,05E+01	1,47E+01	1,83E+01	2,50E+01
-1,10E+02	-3,45E+01	-7,30E+00	3,14E+00	8,27E+00	9,46E+00	1,03E+01	1,03E+01	1,17E+01	1,77E+01	2,35E+01
-1,01E+02	-2,84E+01	-2,56E+00	7,42E+00	1,16E+01	1,11E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,54E+01	2,05E+01	2,50E+01
-7,42E+01	-1,39E+01	1,11E+01	1,95E+01	2,29E+01	2,28E+01	2,38E+01	2,38E+01	2,57E+01	2,88E+01	3,07E+01
-7,26E+01	-1,28E+01	1,14E+01	2,02E+01	2,29E+01	2,33E+01	2,39E+01	2,39E+01	2,65E+01	2,76E+01	3,14E+01
-1,02E+02	-3,44E+01	-5,10E+00	1,25E+01	1,12E+01	1,22E+01	1,28E+01	1,28E+01	1,45E+01	2,56E+01	3,01E+01

constant 0,9 eigen	constant 1 eigen	constant 1,1 eigen	constant 1,2 eigen	constant 1,3 eigen	constant 1,4 eigen	constant 1,5 eigen	constant 1,55 eigen	constant 1,6 eigen	constant 1,65 eigen	constant 1,7 eigen
4,60E+01	7,98E+01	5,87E+01	8,41E+01	7,49E+01	9,42E+01	9,42E+01	6,39E+01	8,18E+01	7,47E+01	7,67E+01
8,38E+01	8,98E+01	7,93E+01	8,76E+01	8,68E+01	9,39E+01	9,39E+01	8,44E+01	8,52E+01	8,15E+01	8,83E+01
8,58E+01	8,60E+01	7,97E+01	8,91E+01	8,84E+01	9,07E+01	9,07E+01	8,63E+01	8,82E+01	8,93E+01	9,17E+01
6,61E+01	8,72E+01	8,14E+01	9,19E+01	8,33E+01	9,11E+01	9,11E+01	7,97E+01	8,92E+01	9,02E+01	9,24E+01
8,69E+01	8,30E+01	6,75E+01	9,19E+01	8,34E+01	9,47E+01	9,47E+01	7,96E+01	8,49E+01	8,53E+01	8,73E+01
8,78E+01	8,42E+01	7,43E+01	9,12E+01	8,38E+01	9,51E+01	9,51E+01	8,10E+01	8,44E+01	8,63E+01	9,31E+01
6,42E+01	9,38E+01	7,72E+01	9,22E+01	8,55E+01	8,87E+01	8,87E+01	8,28E+01	8,61E+01	8,03E+01	9,39E+01
6,62E+01	9,42E+01	7,55E+01	8,72E+01	8,90E+01	9,03E+01	9,03E+01	8,38E+01	9,15E+01	8,08E+01	8,92E+01
6,63E+01	8,97E+01	7,68E+01	9,71E+01	8,96E+01	9,08E+01	9,08E+01	8,96E+01	9,20E+01	8,88E+01	9,01E+01
6,77E+01	9,02E+01	7,39E+01	9,72E+01	9,20E+01	9,48E+01	9,48E+01	9,01E+01	8,57E+01	8,92E+01	9,05E+01
8,41E+01	8,38E+01	7,66E+01	8,94E+01	9,28E+01	9,53E+01	9,53E+01	8,67E+01	8,62E+01	8,30E+01	9,14E+01
8,62E+01	8,60E+01	7,86E+01	9,09E+01	9,34E+01	9,40E+01	9,40E+01	8,85E+01	8,81E+01	8,43E+01	9,26E+01
7,18E+01	8,48E+01	9,31E+01	9,00E+01	9,36E+01	9,42E+01	9,42E+01	8,40E+01	8,73E+01	8,47E+01	9,26E+01
7,04E+01	8,57E+01	9,36E+01	9,04E+01	9,28E+01	9,26E+01	9,26E+01	8,52E+01	8,81E+01	8,37E+01	9,31E+01
3,56E+01	8,95E+01	7,30E+01	9,05E+01	9,29E+01	9,49E+01	9,49E+01	8,53E+01	8,59E+01	9,08E+01	9,08E+01
6,46E+01	8,97E+01	8,35E+01	9,28E+01	8,95E+01	9,25E+01	9,25E+01	8,37E+01	9,52E+01	9,10E+01	9,02E+01
5,92E+01	8,38E+01	8,38E+01	9,30E+01	9,06E+01	9,26E+01	9,26E+01	8,52E+01	9,53E+01	8,63E+01	9,58E+01
7,00E+01	8,89E+01	8,34E+01	9,45E+01	9,31E+01	9,41E+01	9,41E+01	9,15E+01	9,50E+01	9,00E+01	9,32E+01
5,38E+01	8,54E+01	7,73E+01	9,26E+01	9,11E+01	9,77E+01	9,77E+01	8,89E+01	9,35E+01	9,49E+01	9,33E+01
5,47E+01	8,28E+01	7,84E+01	8,99E+01	9,13E+01	9,78E+01	9,78E+01	8,56E+01	8,79E+01	9,50E+01	9,35E+01
5,83E+01	7,82E+01	7,86E+01	9,00E+01	8,79E+01	9,28E+01	9,28E+01	8,58E+01	8,80E+01	9,18E+01	9,37E+01
5,85E+01	8,31E+01	8,29E+01	9,00E+01	9,02E+01	9,28E+01	9,28E+01	9,40E+01	9,13E+01	9,18E+01	9,37E+01
6,18E+01	9,55E+01	8,36E+01	9,05E+01	9,02E+01	9,21E+01	9,21E+01	9,43E+01	9,17E+01	9,33E+01	9,16E+01
6,69E+01	9,61E+01	7,83E+01	9,74E+01	9,15E+01	9,32E+01	9,32E+01	9,16E+01	9,12E+01	9,42E+01	9,81E+01
5,29E+01	8,23E+01	8,03E+01	9,75E+01	9,06E+01	9,63E+01	9,63E+01	9,17E+01	9,13E+01	8,81E+01	9,81E+01
6,58E+01	8,22E+01	7,93E+01	9,24E+01	8,96E+01	9,30E+01	9,30E+01	8,43E+01	8,88E+01	8,53E+01	9,59E+01

constant 1,8 eigen	constant 1,9 eigen	constant 2 eigen
9,00E+01	9,00E+01	7,63E+01
7,95E+01	7,95E+01	8,81E+01
8,04E+01	8,04E+01	8,71E+01
8,10E+01	8,10E+01	8,82E+01
8,78E+01	8,78E+01	8,63E+01
8,86E+01	8,86E+01	8,73E+01
8,38E+01	8,38E+01	9,27E+01
8,47E+01	8,47E+01	9,31E+01
8,36E+01	8,36E+01	8,42E+01
8,43E+01	8,43E+01	8,48E+01
7,86E+01	7,86E+01	8,67E+01
8,38E+01	8,38E+01	8,86E+01
8,42E+01	8,42E+01	8,80E+01
8,74E+01	8,74E+01	8,87E+01
8,74E+01	8,74E+01	8,84E+01
7,95E+01	7,95E+01	8,86E+01
8,32E+01	8,32E+01	8,96E+01
8,76E+01	8,76E+01	9,60E+01
8,63E+01	8,63E+01	8,94E+01
8,66E+01	8,66E+01	8,96E+01
9,30E+01	9,30E+01	8,85E+01
9,30E+01	9,30E+01	9,79E+01
8,25E+01	8,25E+01	9,80E+01
8,48E+01	8,48E+01	9,22E+01
8,42E+01	8,42E+01	9,23E+01
8,27E+01	8,27E+01	9,47E+01