

ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΡΩΓΜΗΣ ΣΕ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΕΠΙΘΕΜΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΟΥΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων: Γ.Α. Παπαδόπουλος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μέλη: Β.Γ. Βαδαλούκα, Λέκτορας Ε.Μ.Π.
Δ. Μανωλάκος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2008

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΚΡΟ
ΡΩΓΜΗΣ ΣΕ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ
ΕΠΙΘΕΜΑ**

ΑΘΗΝΑ 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στον Τομέα Μηχανικής του Ε.Μ. Πολυτεχνείου. Η υπόδειξη του θέματος έγινε από τον Αναπληρωτή Καθηγητή Γ.Α. Παπαδόπουλο και η πραγματοποίηση του πειράματος έγινε και με την βοήθεια από την Λέκτορα Β.Γ. Βαδαλούκα, τους οποίους εκτιμώ βαθύτατα και τους ευχαριστώ για την ευκαιρία που μου έδωσαν να ασχοληθώ με έναν καινούριο τομέα έρευνας, την μελέτη των τάσεων στο άκρο ρωγμής, καθώς και να γνωρίσω μια πολύ ενδιαφέρουσα πειραματική διαδικασία που βασίζεται στην οπτική μέθοδο των καυστικών.

Ευχαριστώ επίσης όλους όσους με βοήθησαν να αποκτήσω τις απαραίτητες γνώσεις ώστε να διεκπεραιώσω την εργασία αυτή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	4
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	6
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	7
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.....</u>	10
1.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	10
1.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ.....	10
1.3 ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.....	12
1.4 ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.....	14
1.5 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.....	16
1.6 ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	18
1.7 ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.....	21
1.8 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΑΣΕΩΝ.....	24
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ.....</u>	25
2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	25
2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ..... ΤΙΣ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ WESTERGAARD.....	27
2.3 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ.....	30
2.4 ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	32
2.4.1 ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ-I.....	33
2.4.2 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ-II.....	38
2.4.3 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ-III.....	40
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ.....</u>	42
3.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	42
3.2 Η ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ..... ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ.....	43
3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ..... ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ..... ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ.....	47
3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ..... ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	51
3.5 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ..... ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ.....	57

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ.....</u>	63
4.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	63
4.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ.....	63
4.3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ.....	65
4.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ.....	68
4.4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΩΝ.....	68
4.4.2 ΕΞΑΓΩΓΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	84
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....</u>	93
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	93
5.2 ΙΣΤΟΡΙΚΑ.....	93
5.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	95
ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ.....	95
5.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΕ.....	97
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	97
5.5 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΞΑΓΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	107
ΑΠΟ Η/Υ.....	107
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</u>	111
6.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	111
6.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	119
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</u>	121

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αστοχία των κατασκευών υπό την επίδραση τάσεων κατωτέρων των αντιστοίχων τάσεων διαρροής των υλικών της κατασκευής έχει αρχίσει να μελετάται από το τέλος του 19^{ου} αιώνα. Η αιτία της αστοχίας οφείλεται κυρίως (αν αποκλείσουμε τον κακό σχεδιασμό της κατασκευής) στις μικρές ρωγμές ή “ραγίσματα” οι οποίες δημιουργούνται κατά την διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής του υλικού, της βιομηχανικής κατεργασίας του, της περιβαλλοντικής διαβρώσεως του ή ακόμη από τον τρόπο και τις συνθήκες φορτίσεως του κατά την λειτουργία της κατασκευής. Έτσι η ύπαρξη ρωγμών ή οποιονδήποτε ασυνεχειών π.χ. μικροκενά, εγκλείσματα κ.λ.π., στα υλικά σώματα, δημιουργεί συγκέντρωση των τάσεων στις περιοχές των ασυνεχειών αυτών και ιδιαίτερα στις αιχμηρές άκρες τους. Αποτέλεσμα της συγκεντρώσεως των τάσεων σ’ αυτές είναι, ότι σώματα με ρωγμές παρουσιάζουν σημαντικά διαφορετική αντοχή, από τα χωρίς ασυνέχειες αντίστοιχα σώματα, όταν αυτά καταπονούνται στα ίδια εξωτερικά φορτία. Επομένως η παρουσία μιας ρωγμής σ’ ένα στερεό σώμα είναι καθοριστικής σημασίας για την συμπεριφορά του σώματος υπό την επίδραση των εξωτερικών φορτίων [10,11].

Το βασικό επομένως “πρόβλημα των ρωγμών” είναι ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου για το οποίο η προϋπάρχουσα ρωγμή εντός του σώματος αρχίζει να διαδίδεται και στη συνέχεια η δημιουργία υλικών και κατασκευών ικανών να αντέξουν σε υψηλά φορτία με την ύπαρξη ή όχι ρωγμών.

Η Μηχανική των Θραύσεων (Fracture Mechanics), που αποτελεί ιδιαίτερο κλάδο της Μηχανικής του συνεχούς μέσου (Continuum Mechanics), αναπτύχθηκε τα τελευταία χρόνια και ασχολείται εκτός των άλλων με την γραμμική ελαστική συμπεριφορά (L.E.F.M.) των στερεών σωμάτων με ασυνέχειες [10,11,12].

Οι Συντελεστές Εντάσεως των Τάσεων είναι μεγέθη που δίνουν τις τάσεις και τις μετατοπίσεις σε μια περιοχή πολύ κοντά στην περιοχή μιας ρωγμής.

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται το πρόβλημα του υπολογισμού του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων παρά το άκρο ρωγμής σε δοκίμιο με και χωρίς ενίσχυση και το οποίο καταπονείται σε επίπεδη εντατική κατάσταση. Ο υπολογισμός του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων θα υπολογιστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

α) Αναλυτικός υπολογισμός με την βοήθεια του προγράμματος Πεπερασμένων Στοιχείων ANSYS 11.

β) Πειραματικός υπολογισμός με χρησιμοποίηση της μεθόδου των Ανακλώμενων Καυστικών.

Στο τέλος της εργασίας θα υπάρξει σύγκριση των διαφόρων αποτελεσμάτων καθώς και εξαγωγή συμπερασμάτων.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η ανάγκη για την εύρεση της ακριβούς διανομής των τάσεων γύρω από τα άκρα μιας ρωγμής και του τρόπου διάδοσης της, ήταν η αιτία της δημιουργίας της επιστήμης της “Μηχανικής των Θραύσεων” [10,11,12].

Ως ρωγή μπορούμε να ορίσουμε γενικά την τοπική λύση της συνεχείας ενός στερεού σώματος. Υπάρχουν δύο βασικά θεωρητικά υποδείγματα περιγραφής της ρωγμής στο επίπεδο. Το πρώτο την θεωρεί ως το όριο μιας ελλειπτικής οπής της οποίας ο μικρός ημιάξονας τείνει προς το μηδέν και το δεύτερο την θεωρεί ως φυσική ασυνέχεια χωρίς πάχος δηλαδή μια μαθηματική γραμμή.

Πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με την μελέτη των φαινομένων της θραύσεως. Πρώτος ο C.E. Inglis [13] έλυσε το πρόβλημα της διανομής των τάσεων εντός απείρου ελαστικού σώματος, που περιείχε “ελλειπτική οπή” υπό την επίδραση ομοιόμορφου πεδίου τάσεων. Ο N.I. Muskhelishvili [9] στη συνέχεια έλυσε το ίδιο πρόβλημα υπό την επίδραση όμως οποιουδήποτε συστήματος επενεργουσών δυνάμεων χρησιμοποιώντας την θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Και οι δύο αυτές εργασίες όμως δεν δίνουν καμία πληροφορία για τη σχέση των χαρακτηριστικών στοιχείων της ρωγμής και των φορτίων που εφαρμόστηκαν και ακόμη οδηγούν στον απειρισμό των τάσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής.

Ο A.A. Griffith [14], ο οποίος ασχολήθηκε με το φαινόμενο της ψαθυράς θραύσεως, με τη βοήθεια της λύσεως του Inglis και τον υπολογισμό της μεταβολής της ενέργειας του σώματος κατά την δημιουργία της ρωγμής καθώς και την πειραματική παρατήρηση ότι μικρές αόρατες ρωγμές δημιουργούνται στα περισσότερα στερεά πριν από τη θραύση τους, οδηγήθηκε στον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου υπό την επίδραση του οποίου η ρωγή διαδίδεται, για την περίπτωση που βρίσκεται μέσα σ’ ένα άπειρο ελαστικό σώμα και υπόκειται στην επίδραση ενός ομοιόμορφου εφελκυστικού πεδίου τάσεων.

Σημαντική είναι επίσης η συμβολή των ερευνητών Westergaard [15], N.I. Sneddon [16], M.L. Williams [17] και N.I. Muskhelishvili [9] των οποίων οι εργασίες αποτελούν το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας των ρωγμών.

Ουσιαστική πρόοδος επιτεύχθηκε στο πεδίο της Μηχανικής των Θραύσεων από τους G.R. Irwin [18,19] και E.O. Gdowan [12], οι οποίοι εισηγήθηκαν την αρχή, ότι “υλικά τα οποία εμφανίζουν όλκιμη συμπεριφορά σε τυποποιημένα πειράματα εφελκυσμού θραύονται κατά ψαθυρό τρόπο σε ρηγματωμένα δοκίμια, και κατ’ αυτόν τον τρόπο έγινε δυνατή η επέκταση της θεωρίας του Griffith και σε όλκιμα υλικά.

Βελτιώσεις του προτύπου των ρωγμών και πληρέστερη μελέτη των συνθηκών πλησίον των άκρων της ρωγμής οφείλονται στον S.A. Khristianowitch [12] ο οποίος μελετώντας ρηγματωμένους βράχους διετύπωσε την υπόθεση ότι οι πλησίον των άκρων της ρωγμής τάσεις έχουν συγκεκριμένες και όχι άπειρες τιμές και ότι οι απέναντι παρειές της ρωγμής παρουσιάζουν στα άκρα τους κοινή εφαπτομένη.

Ο G.J. Barenblatt παρουσίασε ένα περισσότερο ολοκληρωμένο πρότυπο ρωγμών με την εισαγωγή των μοριακών δυνάμεων συνάφειας οι οποίες αναπτύσσονται μεταξύ των στοιχειωδών δομικών λίθων, που βρίσκονται πλησίον της περιοχής των άκρων των ρωγμών και οι οποίες προκαλούν αντίθετο απειρισμό των τάσεων στο άκρο της ρωγμής, απ' ό,τι τα επιβαλλόμενα φορτία. Κατ' αυτόν τον τρόπο υπερπηδήθηκε το εμπόδιο του απειρισμού των τάσεων στο άκρο των ρωγμών [10,11,12]

Οι περισσότερες από τις εργασίες αυτές αναφέρονται σε υλικά με τυπική ψαθυρή συμπεριφορά. Η μελέτη των ρωγμών σε υλικά των οποίων η πλαστική συμπεριφορά δεν είναι δυνατόν να αγνοηθεί αναπτύχθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 80'.

Οι J.A. Hunt και F.A. McClintock μελέτησαν το ελαστικό και πλαστικό πρόβλημα της διανομής των τάσεων και παραμορφώσεων σε απλή ρωγμή και σε περιοδική διάταξη ρωγμών που ισαπέχουν μεταξύ τους για την περίπτωση της εγκάρσιας (μη συνεπίπεδου) διατμήσεως [10,11,12]

Ο J.R. Rice [20]διόρισε το ελαστοπλαστικό σύνορο κοντά στο άκρο της ρωγμής έχει την μορφή κύκλου, η ακτίνα του οποίου είναι ανεξάρτητη της κρατύνσεως για χαμηλές βαθμίδες φορτίσεως, για υλικά με ελαστική-απολύτως πλαστική συμπεριφορά ή κρατυνόμενα και για την περίπτωση της εγκάρσιας διατμήσεως.

Οι E. Smith και B.A. Billy παρουσίασαν αντίστοιχα εργασίες οι οποίες αναφέρονται στην εξάπλωση των πλαστικών περιοχών στα άκρα ρωγμών για την περίπτωση καταπονήσεως της ρωγμής ή των ρωγμών υπό την επίδραση ομοιόμορφου εγκάρσιας διατμήσεως [10,11,12]

Η επίλυση όμως του πολύ σημαντικού, από πρακτική άποψη προβλήματος της καταπονήσεως ρωγμής υπό συνεπίπεδων δυνάμεων κάθετων προς την διεύθυνση της ρωγμής και σε συνθήκες επιπέδου εντατικής καταστάσεως ή επιπέδου παραμορφωσιακής καταστάσεως είναι μαθηματικά δυσχερής αν όχι αδύνατος. Το προσεγγιστικό πρότυπο που προτάθηκε από τον D.S. Dugdale ανάγεται στην επίλυση αντίστοιχου ελαστικού προβλήματος με την υπόθεση ότι η ρωγμή επεκτείνεται κατά μήκος ίσο προς το μήκος της πλαστικής ζώνης εντός της οποίας εξασκείται σταθερή τάση ίση προς την τάση διαρροής του υλικού, σε τρόπο ώστε ο απειρισμός των τάσεων που προκαλείται στα άκρα της υποθετικής ρωγμής να εξαλείφεται. Επειδή οι παραδοχές Dugdale για το πλαστικό πρόβλημα προσομοιάζουν με τις αντίστοιχες του Barenblatt για το ελαστικό πρόβλημα το πρότυπο Dugdale είναι περισσότερο γνωστό ως πρότυπο Dugdale- Barenblatt. Οι Θεοχάρης και Γδούτος έδωσαν νέα μορφή στο προηγούμενο πρότυπο θεωρώντας την διανομή των τάσεων μέσα στην πλαστική περιοχή μεταβλητή εξ αιτίας της κρατύνσεως του υλικού.

Οι Rice και Rosengreen χρησιμοποιώντας την παραμορφωσιακή θεωρία της πλαστικότητας πήραν αριθμητικές λύσεις για την κατανομή του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στην περίπτωση της επίπεδης παραμορφώσεως και ο Hutchinsen με τη βοήθεια του ανεξαρτήτου της τροχιάς ολοκληρώματος J του Rice διαπίστωσε ότι η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας (γινόμενο τάσεως επί παραμόρφωση) θα πρέπει να είναι της μορφής $1/r$, όπου r η απόσταση από την κορυφή της ρωγμής.

Οι Swedlow, οι Larsson και Clarsson, Anderson, Sorensen, Lee και Liebowitz, Kim και Hsu καθώς και οι Hilton και Hutchinson χρησιμοποίησαν την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση διαφόρων πλαστικών προβλημάτων.

Εκτός από τις θεωρητικές προσεγγίσεις στην επίλυση των προβλημάτων της πλαστικότητας υπάρχουν πειραματικές μέθοδοι οι οποίες σε συνδυασμό προς τα διάφορα θεωρητικά πρότυπα αντιμετωπίζουν τα προβλήματα αυτά.

Οι G.V Orpel και Hill χρησιμοποίησαν συμβολομετρικές μεθόδους για την μελέτη διαφόρων κραμμάτων αλουμινίου και ο Dudderar ολογραφικές και διαπίστωσαν, ότι η ζώνη διαρροής στο άκρο της ρωγμής έχει καθορισμένη καμπύλη μορφή [10,11,12].

Οι Π.Σ. Θεοχάρης και Μαρκέτος μελέτησαν με την μέθοδο των φωτοελαστικών επιστρώσεων την διανομή των τάσεων σε πλάκες με εγκοπές υπό συνθήκες επιπέδου εντάσεως.

Τέλος, ο καθηγητής Π.Σ. Θεοχάρης (πρ. Διευθυντής του Τομέα Μηχανικής του Ε.Μ.Π.) ανέπτυξε την οπτική μέθοδο των καυστικών, η οποία μπορεί να παρακολουθήσει απότομες μεταβολές του εντατικού πεδίου και μελέτησε πλήθος άλλων περιπτώσεων ιδιόμορφων (singular) εντατικών πεδίων. Η τελευταία αυτή μέθοδος, είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία [5,7].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

1.1 Γενικά

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στην κλασσική θεωρία της ελαστικότητας για κατασκευές που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης ή της ρηγμάτωσης των υλικών, γίνεται με αναγωγή του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, που χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα, τα φορτία που εφαρμόζονται προκαλούν μικρές παραμορφώσεις, έτσι ώστε τα μόρια του υλικού που βρίσκονται πλησίον των συνόρων να παραμένουν και πάλι πλησίον μετά την φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες να ανάγονται στα απαραμόρφωτα σύνορα του σώματος. Μετά όμως από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου, εμφανίζονται ρωγμές, που αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος μετατόπισης. Η προυπάρχουσα εντατική κατάσταση στις θέσεις των ρωγμών δεν υπάρχει πια, τα δε σύνορα έχουν αλλάξει. Έτσι ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος, γιατί ανάλογα με το πρόβλημα απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες που οδηγούν στον καθορισμό των συνόρων [1,2,8].

1.2 Σχέσεις Τάσεων και Παραμορφώσεων στην Ελαστική Περιοχή

Γραμμικά και ελαστικά είναι τα υλικά όπου, οι αναπτυσσόμενες παραμορφώσεις είναι ελαστικές και υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων. Η γραμμικότητα μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται από αυτές, εκφράζει τον γενικευμένο νόμο του Hooke, που για την περίπτωση ισοτρόπου και ομογενούς πολυκρυσταλλικού υλικού γράφεται:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [s_{xx} - \nu(s_{yy} + s_{zz})]$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [s_{yy} - \nu(s_{xx} + s_{zz})] \quad (1.1)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} [s_{zz} - \nu(s_{xx} + s_{yy})]$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, ν ο λόγος Poisson και G το μέτρο διατμήσεως ή μέτρο ακαμψίας σε διάτμηση του υλικού. Είναι $G=E/2(1+\nu)$.

Οι σχέσεις (1) αντιστρεφόμενες δίνουν :

$$s_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz})]$$

$$s_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz})] \quad (1.2)$$

$$s_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy})]$$

$$t_{xy} = Gg_{xy}, \quad t_{yz} = Gg_{yz}, \quad t_{zx} = Gg_{zx},$$

Αναφέρεται ότι μεταξύ διατμητικών παραμορφώσεων ϵ_{ij} και γ_{ij} ($i \neq j$) για μικρές γωνίες κλίσεως είναι:

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} \quad (1.3)$$

ενώ οι σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων είναι:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.4)$$

όπου u, v, w οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα.

1.3 Η Επίπεδη Εντατική Κατάσταση [1,2,3,8]

Στην περίπτωση λεπτής πλάκας που καταπονείται από δυνάμεις που ενεργούν επί του συνόρου της παράλληλα προς το επίπεδο της πλάκας και κατανεμημένες κατά το πάχος της και αν υποθεθεί ότι το μέσο επίπεδο της συμπίπτει με το επίπεδο Oxy του θεωρημένου συστήματος αξόνων Oxyz , τότε οι συνιστώσες των τάσεων σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} είναι:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.5)$$

και χωρίς μεγάλο σφάλμα , καθ' όλο το πάχος της.

Η εντατική κατάσταση της λεπτής πλάκας καλείται επίπεδη εντατική κατάσταση. Όταν το πάχος της πλάκας είναι πάρα πολύ μικρό, δηλαδή όταν η πλάκα γίνει λεπτή μεμβράνη, τότε επιτυγχάνεται ιδανική περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης. Οι μη μηδενικές συνιστώσες των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} θεωρούμε ότι παραμένουν πρακτικά σταθερές σε όλο το πάχος της πλάκας.

Οι σχέσεις μεταξύ των επιβαλλόμενων τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων από τις σχέσεις (1.1) με την προϋπόθεση της (1.5):

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad (1.6)$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

ενώ από (1.2) προκύπτει :

$$s_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\mathbf{e}_{xx} + \nu \mathbf{e}_{yy})$$

$$s_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\mathbf{e}_{yy} + \nu \mathbf{e}_{xx}) \quad (1.7)$$

$$s_{zz} = 0$$

$$t_{xy} = G\mathbf{g}_{xy}, \quad t_{yz} = G\mathbf{g}_{yz} = t_{zz} = 0$$

1.4 Η Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση

Η περίπτωση όπου το πάχος του σώματος είναι πολύ μεγάλο αντιμετωπίζεται όπως και στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, δηλαδή η αναπτυσσόμενη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι επίπεδη. Επιπλέον οι παράμετροι δε μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση z, οπότε οι μετατοπίσεις κατά τους άλλους άξονες είναι μόνο συνάρτηση των x και y [1,2,3,8]. Δηλαδή:

$$u = u(x,y) , \quad v = v(x,y) , \quad w = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x,y) , \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x,y) , \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad (1.8)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x,y)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Με βάση τις σχέσεις (1) αν θέσουμε $\varepsilon_{zz} = 0$ τότε θα έχουμε $\sigma_{zz} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

Οπότε οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων θα γίνουν:

$$e_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)s_{xx} - \nu s_{yy}]$$

$$e_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)s_{yy} - \nu s_{xx}]$$

(1.9)

$$e_{zz} = 0$$

$$g_{xy} = t_{xy}/G, \quad g_{yz} = g_{zx} = 0$$

και αντίστοιχα:

$$s_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + e_{yy}]$$

$$s_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{yy} + e_{xx}] \quad (1.10)$$

$$s_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [e_{xx} + e_{yy}]$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Παρατηρούμε ότι η λύση του προβλήματος επιπέδου παραμορφωσιακής όπως και επιπέδου εντατικής κατάστασης, απαιτεί τον προσδιορισμό τριών μόνο συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} . Συγκρίνοντας αυτά τα δυο προβλήματα βλέπουμε ότι στην επίπεδη εντατική κατάσταση επιτρέπονται οι παραμορφώσεις κατά τον άξονα z ενώ $\sigma_{zz} = 0$, ενώ αντίθετως στην επίπεδη παραμορφωσιακή η αντίστοιχη σ_{zz} δεν επιτρέπει παραμορφώσεις στην ίδια κατεύθυνση. Κάνοντας αναφορά στην θεωρία των καυστικών (Κεφ. 3) παρατηρούμε ότι η μεταβολή της οπτικής πορείας του δρόμου των ακτινών εξαρτάται από την μεταβολή του πάχους του δοκιμίου λόγω φόρτισης. Επίσης στην πειραματική διαδικασία το δοκίμιο που χρησιμοποιείται έχει πάχος 2 mm, δηλαδή αντιστοιχεί σε πάρα πολύ λεπτή πλάκα. Συνεπώς από τα δύο αυτά τελευταία στοιχεία συμπεραίνεται ότι το πεδίο που αντιστοιχεί στο δοκίμιο του πειράματος είναι το επίπεδο αυτό.

1.5 Η Γενικευμένη Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις της επίπεδης εντατικής κατάστασης, πρέπει το πάχος της πλάκας να είναι πάρα πολύ μικρό, κάτι που πραγματικά δεν συμβαίνει. Έτσι καταφεύγουμε μια άλλη επίπεδη εντατική κατάσταση, την γενικευμένη επίπεδη εντατική κατάσταση [1,2,3,8].

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε λεπτή πλάκα καταπονούμενη στην παράπλευρη επιφάνειά της με δυνάμεις κατά το επίπεδο (x,y), έτσι ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τάση S_{zz} είναι εκ ταυτότητος μηδέν, ενώ οι λοιπές τάσεις, οι παραμορφώσεις και μετατοπίσεις εξαρτώνται από όλες τις μεταβλητές (x,y,z). Επί πλέον θεωρούμε ότι οι μέσες τιμές των τάσεων S_{xz} και S_{yz} , κατά το πάχος της λεπτής πλάκας, είναι μηδενικές. Στην περίπτωση αυτή οι μέσες τιμές των τάσεων και παραμορφώσεων, φυσικά, δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή z και για τις μέσες αυτές τάσεις και παραμορφώσεις ισχύουν πάλι οι ίδιες σχέσεις (1.6), όπως και στην επίπεδη εντατική κατάσταση που δεν εξαρτώνται όμως πλέον από τη μεταβλητή z.

Έτσι, αν στην τρίτη εξίσωση των (1.2) αν θέσουμε $\sigma_{zz} = 0$ θα έχουμε:

$$\varepsilon_{zz} = [v/(1-\nu)] (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (1.11)$$

Οπότε οι υπόλοιπες σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων γράφονται:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ S_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ t_{xy} &= \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (1.12)$$

και οι εξισώσεις (1.2) γίνονται:

$$s_{xx} = 2m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + I' \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]$$

$$s_{yy} = 2m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + I' \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]$$

(1.13)

$$t_{xy} = m \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]$$

$$\text{όπου } I' = \frac{2Im}{I + 2m}.$$

Το πρόβλημα λοιπόν αντιμετωπίζεται όπως και στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης με την διαφορά ότι η σταθερά λ θα αντικαθίσταται από τη νέα τιμή λ' .

Σε αντίστοιχο πρόβλημα επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης, αντικαθιστούμε τον λόγο ν του Poisson με την νέα τιμή:

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{και} \quad E' = \frac{E}{1-E^2} \quad (1.14)$$

1.6 Μιγαδική Τασική Συνάρτηση

Για την επίλυση του επιπέδου εντατικού προβλήματος απαιτείται προσδιορισμός των συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} που ικανοποιούν τις εξής σχέσεις ισορροπίας [1,2,3,8].

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0$$

(1.15)

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} = 0$$

και την εξίσωση συμβιβαστού συναρτήσει των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , που για απουσία μαζικών δυνάμεων είναι:

$$\nabla^2 (s_{xx} + s_{yy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (s_{xx} + s_{yy}) = 0$$

(1.16)

Για να επιλύσουμε τις εξισώσεις αυτές εισάγουμε μια συνάρτηση $F(x,y)$, που καλείται τασική συνάρτηση Airy, τέτοια ώστε:

$$s_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad s_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad s_{zz} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

(1.17)

Οι εξισώσεις (1.15) ικανοποιούνται από τις (1.17),θα πρέπει επίσης να ικανοποιείται και η (1.16) ,δηλαδή θα πρέπει:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0$$

ή (1.18)

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

άρα η λύση του προβλήματος της επίπεδης εντατικής κατάστασης με αμελητέες καθολικές δυνάμεις, ανάγεται στην λύση της (1.18), που είναι μία διαρμονική εξίσωση.

Η συνάρτηση $F(x,y)$ που ικανοποιεί την (1.18) μπορεί να παρασταθεί σαν γραμμικός συνδυασμός δύο αναλυτικών συναρτήσεων $f(z)$ και $\bar{\chi}(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$ διά των σχέσεων :

$$F = \text{Re}[zj(z) + x(z)] \tag{1.19}$$

ή

$$2F = \bar{z}f(z) + z\bar{j}(\bar{z}) + x(z) + x(\bar{z}) \tag{1.20}$$

από τις σχέσεις 17 και 20 έχουμε για το εντατικό και παραμορφωσιακό πεδίο του επίπεδου προβλήματος :

$$s_{xx} + s_{yy} = 2 \left[j'(z) + \bar{j}'(\bar{z}) \right] = 4 \text{Re} j'(z) \tag{1.21}$$

$$s_{yy} - s_{xx} + 2t_{xy}i = 2 \left[\bar{z}j''(z) + y'(z) \right] \tag{1.22}$$

$$2m(u + iv) = k j(z) - z j''(\bar{z}) - \overline{y'(z)} \quad (1.23)$$

όπου $y'(z) = \frac{\partial X(z)}{\partial z}$, $k = \frac{l+3m}{l+2m}$ για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση και

$k = \frac{l'+3m}{l'+2m}$ για επίπεδη εντατική με $l' = \frac{2lm}{l+2m}$, όπου λ, μ οι σταθερές του Lamé.

Το αυθαίρετο του καθορισμού των συναρτήσεων $\varphi(z)$ και $\chi(z)$ εφ' όσον

$$\varphi(0)=0, \quad \text{Im}\varphi'(0)=0, \quad \psi(0)=0 \quad (1.24)$$

όταν δίνονται οι τάσεις $\varphi(0)=0$, όταν δίνονται οι παραμορφώσεις από σχέσεις (1.21) και (1.22) προκύπτει τελικά

$$\sigma_{xx} = 2\text{Re}\varphi'(z) - \text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

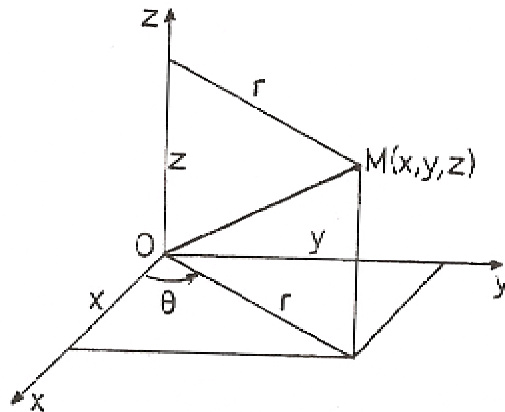
$$\sigma_{yy} = 2\text{Re}\varphi'(z) - \text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (1.25)$$

$$\tau_{xy} = \text{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

1.7 Πολικές Συντεταγμένες

Πολλά εντατικά προβλήματα διευκολύνονται αν εκφραστούν σε πολικές συντεταγμένες (r,θ) [1,2,3,8].

Από το σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 1.1 Τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

προκύπτει:

$$x=r\cos\theta, \quad r=(x^2+y^2)^{1/2} \quad (1.26)$$

και εξ αυτών

$$y=r\sin\theta, \quad \theta=\tan^{-1}(y/x) \quad (1.27)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων δίνονται από το μητρώο:

$$\Sigma \begin{pmatrix} s_{rr} & s_{r\theta} \\ s_{r\theta} & s_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

γιατί λόγω επιπεδότητας μηδενίζονται οι συνιστώσες κατά z

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (1.29)$$

ο μετασχηματισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες γίνεται σύμφωνα με την σχέση :

$$\Sigma' = R \Sigma R^T \quad (1.30)$$

όπου Σ' , Σ ο ταυιστής των τάσεων στα δυο συστήματα και R το μητρώο στροφής :

$$R = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

οπότε οι συνιστώσες της τάσης θα είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} + \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2q + t_{xy} \sin 2q \\ t_{rq} &= -\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \sin 2q + t_{xy} \cos 2q \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} + \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2q - t_{xy} \sin 2q$$

και ανάλογα προκύπτουν οι αντίστροφες τους.

Οι εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο πρόβλημα , σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{s_{rr} - s_{qq}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{qq}}{\partial q} + \frac{2t_{rq}}{r} & \end{aligned} \quad (1.33)$$

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων μετατοπίσεων είναι:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ e_{qq} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q} \\ e_{rq} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial r} - \frac{u_q}{r} \right] \end{aligned} \quad (1.34)$$

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων δεν αλλοιώνονται.

Η τασική συνάρτηση $F(x,y)$ σε πολικές συντεταγμένες r,θ γίνεται $F(r,\theta)$. Μετασηματίζοντας τις μερικές παραγώγους ,προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = \nabla^2 F \quad (1.35)$$

όποτε η διαρμονική εξίσωση γράφεται:

$$\nabla^2(\nabla^2 F) = \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \right) \quad (1.36)$$

και οι τάσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$$

$$s_{qq} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (1.37)$$

$$t_{rq} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial q} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial q} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial q}$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις ισορροπίας (1.33) και συμβιβαστού

$$\nabla^2(s'_{rr} + s_{qq}) = 0 \quad (1.38)$$

1.8 Συγκέντρωση τάσεων

Αν έχουμε ομοιόμορφη διατομή κατασκευής ή δοκιμίου, θεωρούμε και ομοιόμορφη διανομή των καθέτων τάσεων στις διατομές αυτές . Ακόμη αν η διατομή αλλάζει βαθμιαία, κάνουμε κατάλληλες προσεγγίσεις.

Αν όμως υπάρχει μια γεωμετρική ανωμαλία, όπου η διατομή μεταβάλλεται απότομα, έχουμε ανακατανομή των τάσεων και οι διανομές που προκύπτουν δεν είναι πια ομοιόμορφες.

Η τιμή της μέγιστης τάσης , που μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη της μέσης τιμής εξαρτάται από τη γεωμετρία της κατασκευής ή του δοκιμίου. Η υπέρβαση της επιτρεπόμενης στα σημεία της μέγιστης τάσης, είναι αιτία δημιουργίας πυρήνων τοπικών παραμορφώσεων ή ρωγμών, κατά τις στατικές και δυναμικές φορτίσεις αντίστοιχα.

Συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων ορίζουμε τον λόγο της μέγιστης τάσης προς την μέση τάση, που υπολογίζεται για την περίπτωση που η τάση είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στη διατομή που εξετάζουμε. Αλλιώς αναλύονται οι τάσεις και απαιτείται πλήρης γνώση των γεωμετρικών στοιχείων, των οριακών συνθηκών και του τρόπου φόρτισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

2.1 Ορισμός του Προβλήματος

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στη κλασσική θεωρία ελαστικότητας, για καταστάσεις που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης ή της ρηγματώσης των υλικών, πραγματοποιείται δια της αναγωγής του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα. Τα εφαρμοσμένα φορτία προκαλούν μικρέα παραμορφώσεις των συνόρων, έτσι ώστε τα μόρια του υλικού που ευρίσκοντο πλησίον των συνόρων να παραμένουν και πάλι πλησίον μετά τη φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες να ανάγονται στα απαραμόρφωτα σύνορα του σώματος.[5,6]

Μετά από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου εμφανίζονται ρωγμές οι οποίες αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος των μετατοπίσεων. Η προϋπάρχουσα πλέον εντατική κατάσταση στις θέσεις των ρωγμών εξέλιπε, τα δε σύνορα του σώματος άλλαξαν. Έτσι, ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος διότι, ανάλογα με το πρόβλημα, απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες που οδηγούν στο καθορισμό των συνόρων.

Προς αποφυγή των ανυπέβλητων δυσχερειών που παρουσιάζονται στην ως άνω γενικότητα περίπτωση της Μηχανικής των Θραύσεων, στη θεωρία των Ρωγμών, ζητείται η επίλυση του ακόλουθου προβλήματος: **«Εντός σώματος που υπόκειται στην επίδραση εξωτερικών φορτίων, το μέγεθος των οποίων αυξάνει συνεχώς, δίνεται ορισμένο σύστημα ρωγμών. Ζητείται ο καθορισμός των επιφανειών των ρωγμών καθώς και της διανομής των τάσεων και παραμορφώσεων για κάθε βαθμίδα φόρτισης. Η αύξηση των φορτίων υποτίθεται γίνεται ομαλώς, έτσι ώστε η επίδραση των δυναμικών φαινομένων να είναι αμελητέα».** Στη θεωρία ελαστικότητας το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: **«Ζητείται η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ελαστικότητας εντός περιοχής περικλειομένης υπό συνόρου Σ , στην οποία υπάρχουν ρωγμές, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες».** Η διαφορά του προβλήματος αυτού των ρωγμών από τα συνήθη προβλήματα ελαστικότητας είναι ουσιώδης και τούτο διότι πρόκειται περί προβλήματος με άγνωστα σύνορα των οποίων ζητείται ο προσδιορισμός κατά την επίλυση.

Άλλη βασική δυσχέρεια του προβλήματος των ρωγμών είναι η εκλογή κατάλληλου προσομοιώματος, βάσει του οποίου θα γίνει η επίλυση. Δύο είναι τα χρησιμοποιούμενα προσομοιώματα. Το προσομοίωμα του υλικού σημείου επί της αρχής του οποίου θεμελιώνεται η Νευτώνιος δυναμική και το προσομοίωμα του συνεχούς μέσου επί του οποίου βασίζεται η θεωρία της Ελαστικότητας. Η επίλυση των προβλημάτων ελαστικότητας με την αρχή του υλικού σημείου γίνεται δύσκολη

λόγω μαθηματικών δυσχερειών. Η επίλυση όμως του προβλήματος της ρωγμής και κυρίως παρά το άκρο, γίνεται βάσει της αρχής του υλικού σημείου και τούτο διότι η δημιουργία και διάδοση μιας ρωγμής συνίσταται στο διαχωρισμό του ενός ατόμου από το άλλο σε ζεύγος γειτονικών ατόμων, ακολουθούμενο από παρόμοιο διαχωρισμό στο επόμενο ζεύγος και ούτω καθεξής. Πέρα όμως του άκρου της ρωγμής που η μικρομοριακή φύση του υλικού δεν επιδρά σημαντικά επί του τασικού πεδίου, η επίλυση δύναται να γίνει με την αρχή του συνεχούς μέσου.

Η ρωγμή μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί σαν μια κοιλότητα εντός του σώματος της οποίας η απόσταση των απέναντι παρειών των χειλέων της είναι μικρή σχετικά με το μήκος της. Η πρώτη πληρέστερη θεώρηση της δομής παρά τα άκρα της οφείλεται στον A.A. Griffith ο οποίος, με την κλασσική θεωρία ελαστικότητας και τη λύση του Inglis, οδηγήθηκε σε απειρισμό των τάσεων παρά τα άκρα της ρωγμής και ότι τα άκρα της ρωγμής είναι στρογγυλά με ακτίνα καμπυλότητας της τάξεως της μοριακής αποστάσεως, γεγονός απαράδεκτο στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων. Παρατηρείται ότι οι τάσεις στα άκρα των ρωγμών δύναται να είναι πεπερασμένες, εφ' όσον οι απέναντι παρειές της ρωγμής παρουσιάζουν στο υπ' όψη σημείο κοινή επαπτομένη και δεν είναι ελεύθερες τάσεων. Όμως, σε τέτοια μορφή συνόρων της ρωγμής αποδεικνύεται ότι η απελευθερουμένη ενέργεια δι' απειροστή μεταβολή των συνόρων της ρωγμής ισούται με μηδέν. Επομένως, μόνο τέτοιου είδους καμπύλες δύναται να αποτελούν το σύνορο των εν ισορροπία ρωγμών. Εάν οι επιφάνειες της ρωγμής θεωρηθούν ελεύθερες τάσεων τότε για οποιαδήποτε μορφή συνόρων της ρωγμής οι τάσεις γίνονται άπειρες, οπότε δεν δύναται να υπάρχουν ρωγμές σε ισορροπία. Προς τούτο, για να προκύψουν παραδεκτές λύσεις πρέπει να θεωρηθούν μοριακές δυνάμεις συνάφειας παρά τα άκρα της ρωγμής.

Η θεωρητική και πειραματική προσέγγιση της επιλύσεως όλων των προβλημάτων των ρωγμών αντιμετωπίζεται συνήθως με τη δημιουργία προκατασκευασμένων ρωγμών με γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχεία και διερευνάται η ιδιόμορφη κατανομή των τάσεων που δημιουργείται γύρω από την αιχμή τους υπό την επίδραση γνωστών εξωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων.

Το τασικό πεδίο στο άκρο της ρωγμής για ομογενή γραμμικά-ελαστικά υλικά προσεγγίζεται με τη βοήθεια των Συντελεστών Εντάσεως Τάσεων K , οι οποίοι αποτελούν την χαρακτηριστική εκείνη παράμετρο η οποία αποδίδει την ανακατανομή τάσεων εξ αιτίας της ρωγμής σ' ένα καταπονούμενο υλικό. Οι Συντελεστές Εντάσεως των Τάσεων K αντιστοιχούν σε διάφορους τύπους παραμορφώσεως των χειλέων μιας ρωγμής εξ αιτίας του τρόπου φορτίσεως της (Irwin) και εξαρτώνται από τη θέση και το μέγεθός της. Για τον υπολογισμό τους έχουν αναπτυχθεί τόσο αναλυτικές όσο και πειραματικές μέθοδοι για μεγάλο αριθμό προβλημάτων και περιπτώσεων φορτίσεως. [5,6,10,11,12]

2.2 Επίλυση του Προβλήματος των Ρωγμών με τις Τασικές Συναρτήσεις του Westergaard.

Όπως είδαμε και παραπάνω ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στην κλασική θεωρία ελαστικότητας, για καταστάσεις που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης ή της ρηγμάτωσης των υλικών, πραγματοποιείται δια της αναγωγής του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα. Τα εφαρμοσμένα φορτία προκαλούν μικρές παραμορφώσεις των συνόρων, έτσι ώστε τα μόρια του υλικού που ευρίσκοντο πλησίον των συνόρων να παραμένουν και πάλι πλησίον μετά τη φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες να ανάγονται στα απαραμόρφωτα σύνορα του σώματος.

Μετά από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου εμφανίζονται ρωγμές οι οποίες αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος των μετατοπίσεων. Η προϋπάρχουσα πλέον εντατική κατάσταση στις θέσεις των ρωγμών εξέλιπε, τα δε σύνορα του σώματος άλλαξαν. Έτσι, ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου καθίσταται δύσκολος. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος των ρωγμών με την βοήθεια των τασικών συναρτήσεων του Westergaard.

Τα διδιάστατα προβλήματα των ρωγμών μπορεί να επιλυθούν κατά τον Westergaard, εφ' όσον η τασική συνάρτηση Airy ορισθεί διά της σχέσης:

$$F = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (2.1)$$

όπου Z αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$, και:

$$\bar{Z} = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (2.2)$$

Εκ των σχέσεων Cauchy-Riemann συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = \operatorname{Re} Z \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = -\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \operatorname{Im} Z \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \nabla^2 (\operatorname{Im} \bar{Z}) = 0 \quad (2.5)$$

όπου:

$$Z = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (2.6)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτουν:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} Z, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = y \operatorname{Re} Z \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = y \operatorname{Re} Z' \quad (2.9)$$

όπου:

$$Z' = \frac{dZ}{dz} \quad (2.10)$$

Οπότε από τις σχέσεις (17) δι' αντικατάστασης προκύπτουν οι τάσεις:

$$s_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'$$

$$s_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad (2.11)$$

$$t_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z'$$

Επομένως, η μέθοδος Westergaard ανάγεται στην εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης Z , με εξαίρεση το υπο της ρωγμής οριζόμενο διάστημα, σε τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Τέλος, η τασική συνάρτηση Westergaard δι' οποιαδήποτε παραμόρφωση της ρωγμής μπορεί να προκύψει διά κατάλληλου συνδυασμού των τασικών συναρτήσεων των τριών ως άνω απλών τύπων παραμόρφωσης.[6]

2.4 Συντελεστές Εντάσεως των Τάσεων

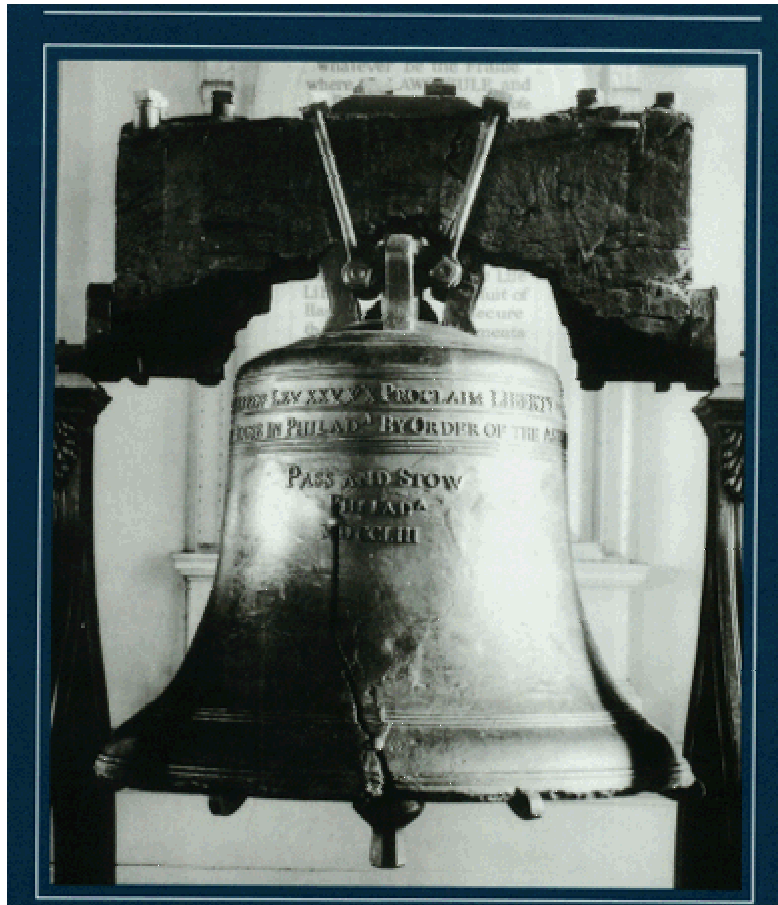
Το τασικό πεδίο στην περίπτωση της γραμμικής θεωρίας της ελαστικότητας, το οποίο σχηματίζεται γύρω από την κορυφή μιας διαδεδομένης ρωγμής σε κατάσταση επιπέδου εντάσεως δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$s_{ij}(r, J) = \frac{K}{\sqrt{2pr}} f(J)$$

όπου r, J είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου με κέντρο την κορυφή της ρωγμής και άξονα x κατά την προέκταση του μήκους της ρωγμής (σχήμα 2.7), $f(J)$ συναρτήσεις της γωνίας J οι οποίες εξαρτώνται από τον τρόπο παραμορφώσεως των χειλέων της ρωγμής και K ο Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων ο οποίος εξαρτάται ομοίως από τον τρόπο παραμορφώσεως των χειλέων της ρωγμής.

Διακρίνουμε τρεις τύπους Συντελεστών Εντάσεως των Τάσεων, τους K_I , K_{II} και K_{III} , που αντιστοιχούν στους τρεις προαναφερόμενους βασικούς τρόπους φορτίσεως μιας ρωγμής.

Ο Συντελεστής Εντάσεως των Τάσεων, K , χρησιμοποιείται στην Μηχανική των Θραύσεων για την πιο ακριβή εκτίμηση των τάσεων (της εντάσεως των τάσεων) παρά το άκρο ρωγμής, που προκαλούνται από την άσκηση φορτίων. Όταν το φορτίο αυξηθεί, οι τάσεις αυξάνονται επίσης και όταν φτάσουν σε μία κρίσιμη τιμή τότε η ρωγμή μεγαλώνει και το υλικό αστοχεί. Το φορτίο για το οποίο εμφανίζεται η αστοχία αναφέρεται ως δύναμη θραύσεως. Η πειραματική δύναμη θραύσεως των στερεών υλικών είναι 10 με 1000 μικρότερη από τις θεωρητικές τιμές δυνάμεων, μιας και οι μικροσκοπικές εσωτερικές και εξωτερικές ρωγμές επιφανείας δημιουργούν υψηλότερες τάσεις γύρω από τις μελετώμενες ρωγμές, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την μείωση των θεωρητικών τιμών. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το “Liberty Bell” στην Φιλαδέλφεια των Η.Π.Α., όπου η μεγάλη ρωγμή που εμφανίστηκε κάποτε ήταν αποτέλεσμα άλλων μικρότερων ρωγμών που δεν είχαν γίνει γνωστές μέχρι την θραύση.[10,11,12]

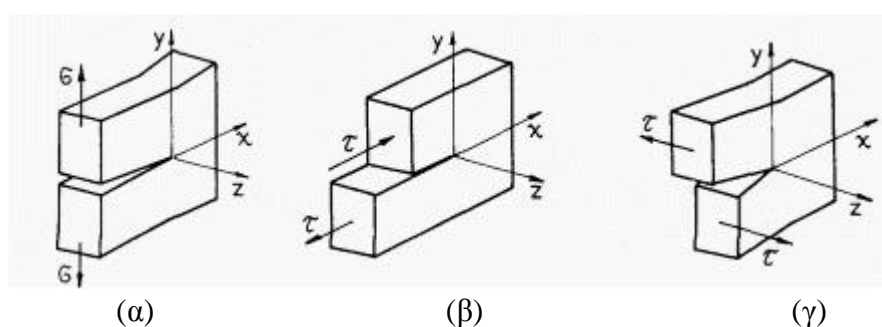


Σχήμα 2.1 Liberty Bell, Philadelphia, USA.

2.4 Τύποι Παραμόρφωσης της Ρωγμής.

Ρωγμή στο επίπεδο μπορεί να οριστεί ότι είναι το όριο ελλειπτικής οπής ο μικρός ημιάξονας της οποίας τείνει στο μηδέν ή ότι είναι μια φυσική ασυνέχεια χωρίς πάχος (μαθηματική γραμμή).

Ο Irwin μελετώντας το τασικό πεδίο στην αιχμή μιας ρωγμής παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακινήσεως (παραμορφώσεως) των χειλέων της ανάλογα με το είδος της εφαρμοζόμενης φορτίσεως. Οποιαδήποτε άλλη μορφή παραμορφώσεως μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από τον συνδυασμό των τριών αυτών τύπων.



2.2 Οι τρεις βασικοί τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής.(α,β,γ)

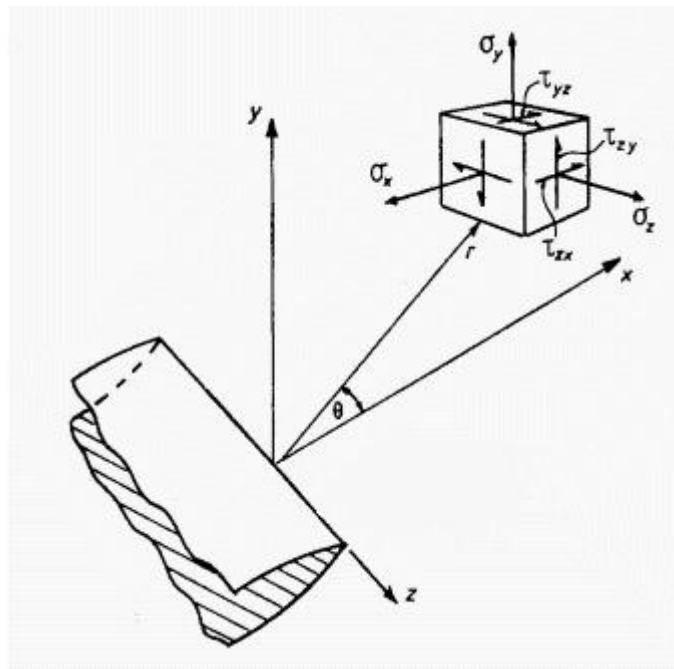
α) Επίπεδος Εφελκυστικός Τύπος-I. (Opening Mode ή Mode I). Αντιστοιχεί σε ομοαξονικό εφελκυσμό κάθετο στο μεγάλο άξονα της ρωγμής. Στην περίπτωση αυτή τα χείλη της ρωγμής τείνουν να διαχωρισθούν συμμετρικά ως προς το πριν την παραμόρφωση επίπεδο της. (Σχήμα 2.2α)

β) Συνεπίπεδος Διατμητικός Τύπος-II (Sliding Mode ή Mode II). Αντιστοιχεί σε διάτμηση κατά μήκος του μεγάλου άξονα της ρωγμής και προκύπτει όταν τα απέναντι χείλη της τείνουν να ολισθήσουν το ένα σχετικά με το άλλο προς αντίθετες διευθύνσεις, αλλά πάνω στο ίδιο επίπεδο. (Σχήμα 2.2β)

γ) Εγκάρσιος Διατμητικός Τύπος-III (Tearing Mode ή Mode III). Αντιστοιχεί στην εγκάρσια διάτμηση και προκύπτει όταν τα χείλη της ρωγμής διαχωρίζονται προς αντίθετες εγκάρσιες διευθύνσεις εξ αιτίας της επιδράσεως ίσων και αντίθετων δυνάμεων κάθετων στο επίπεδο του σώματος. (Σχήμα 2.2γ)

Στα προβλήματα επίπεδων ρωγμών ως σύστημα αξόνων χρησιμοποιούμε το καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Oxyz$ (Σχήμα 2.3) του οποίου η αρχή O τοποθετείται στο μέσο της κορυφής της ρωγμής ενώ το επίπεδο Oxz ταυτίζεται με το επίπεδο της ρωγμής.

Για τον τύπο I (ο οποίος και θα μας απασχολήσει στο παρόν) το εντατικό πεδίο που δημιουργείται στην αιχμή της ρωγμής είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο Oxz , για τον τύπο II είναι πλάγια συμμετρικό ως προς το επίπεδο Oxz και για τον τύπο III κατανέμεται αντισυμμετρικά ως προς το ίδιο επίπεδο.[10,11,12]



2.3 Τρισσορθόγωνιο σύστημα αναφοράς του εντατικού πεδίου κοντά στο άκρο της ρωγμής.

2.4.1 Εφελκυστικός Τύπος –I [6]

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο-I δίνεται από την σχέση:

$$Z = \frac{Sz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.12)$$

Αναφέροντας τη συνάρτηση αυτή σε σύστημα αξόνων δια του άκρου της ρωγμής, αντί του συστήματος τοποθετούμενου στο μέσο του μήκους της ρωγμής και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό:

$$z = z - a \quad (2.13)$$

προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{s(z+a)}{\sqrt{z}\sqrt{z+2a}} \quad (2.14)$$

Η ποσότητα $1/\sqrt{z+2a}$ αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων του z κατά Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{z+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2a} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{z}{2a} \right)^2 - \dots \right] \quad (2.15)$$

οπότε η σχέση (2.14) γίνεται:

$$Z_I = \frac{s(z+a)}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2a} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{z}{2a} \right)^2 - \dots \right] \quad (2.16)$$

Για προσεγγιστική λύση παραλείπονται οι δυνάμεις του (z/a) , εφ' όσον το z είναι πολύ μικρό σε σχέση προς το a , οπότε προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{s\sqrt{pa}}{\sqrt{2pz}} \quad (2.17)$$

Θέτοντας :

$$K_I = s\sqrt{pa} \quad (2.18)$$

στην σχέση (2.17) προκύπτει:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2pz}} \quad (2.19)$$

Η σταθερά K_I είναι χαρακτηριστική του τύπου I και ονομάζεται εφελκυστικός Συντελεστής Εντάσεως των Τάσεων (Stress Intensity Factor).

Θέτοντας $z = re^{iq}$ και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.11), προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} s_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2} \left(1 - \sin \frac{q}{2} \sin \frac{3q}{2} \right) \\ s_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2} \left(1 + \sin \frac{q}{2} \sin \frac{3q}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$t_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} \cos \frac{3q}{2}$$

$$t_{xy} = t_{yz} = 0$$

Η προσεγγιστική αυτή λύση ισχύει για $0 < \frac{r}{a} \ll 1$.

Οι εξισώσεις (2.20) περιέχουν μια ιδιομορφία της τάξεως $r^{-\frac{1}{2}}$ που είναι χαρακτηριστικό όλων των προβλημάτων των ρωγμών σε ομογενή υλικά. Αυτό σημαίνει ότι καθώς πλησιάζουμε την αιχμή της ρωγμής οι τάσεις αυξάνουν σε αναλογία με τον όρο $r^{-\frac{1}{2}}$ και αν θεωρήσουμε ότι το υλικό παραμένει γραμμικά ελαστικό τότε στην αιχμή των ρωγμών οι τάσεις τείνουν προς το άπειρο καθώς το r τείνει προς το μηδέν.

Από τον νόμο Hooke προκύπτουν οι μετατοπίσεις, u και v :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [s_{xx} - \nu(s_{xx} + s_{zz})]$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [s_{yy} - \nu(s_{xx} + s_{zz})]$$
(2.21)

Αντικαθιστώντας τις τάσεις σ_{xx} και σ_{yy} από τις σχέσεις στις σχέσεις προκύπτουν οι μετατοπίσεις κατόπιν ολοκλήρωσης. Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση ισχύει:

$$e_{zz}=0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$u = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \cos \frac{q}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{q}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \sin \frac{q}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{q}{2} \right)$$
(2.22)

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση ισχύει:

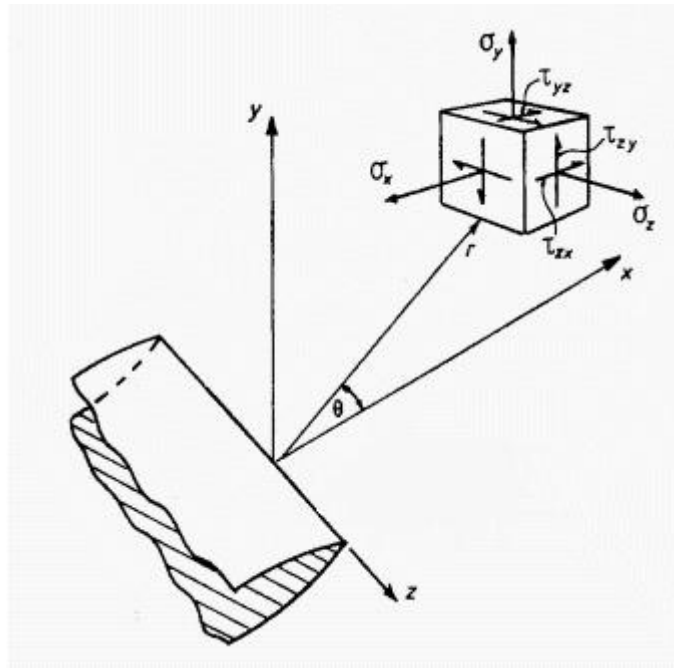
$$s_{zz} = 0$$

$$u = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \cos \frac{q}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{q}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \sin \frac{q}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{q}{2} \right)$$
(2.23)

Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I προκύπτει από τη σχέση:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2p} \sqrt{z - a} s_{yy} = \lim \sqrt{2p} \sqrt{z} \lim s_{yy} = \lim \sqrt{2p} \sqrt{re^{iq}} s_{yy} \Big|_{q=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2pr} s_{yy} = \sqrt{2pr} \lim_{r \rightarrow 0} s_{yy} \quad (2.24)$$



2.4 Το τασικό πεδίο παρά το άκρο ρωγμής.

2.4.2 Συνεπίπεδος Διατμητικός Τύπος –II [6]

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν, η μία σχετικά προς την άλλη, προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ίδιου επιπέδου. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο II δίνεται από την σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pz}}, \text{ με } K_{II} = t\sqrt{pa} \quad (2.25)$$

όπου η σταθερά K_{II} είναι χαρακτηριστική του τύπου II και ονομάζεται **συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων**.

Οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες προκύπτουν:

$$s_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \sin \frac{q}{2} \left(2 + \cos \frac{q}{2} \cos \frac{3q}{2} \right)$$

$$s_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} \cos \frac{3q}{2}$$
(2.26)

$$t_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2} \left(1 - \sin \frac{q}{2} \sin \frac{3q}{2} \right)$$

$$t_{xy} = t_{yz} = 0, \quad \text{με } 0 < \frac{r}{a} \ll 1$$

Οι μετατοπίσεις υπολογίζονται, ανάλογα προς τον τύπο-I, από τον νόμο Hooke. Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι:

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \sin \frac{q}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{q}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \cos \frac{q}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{q}{2} \right) \quad (2.27)$$

και για την **επίπεδη εντατική κατάσταση** είναι:

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \sin \frac{q}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{q}{2} \right) \quad (2.28)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2p}} \cos \frac{q}{2} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu} + \sin^2 \frac{q}{2} \right)$$

Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_{II} προκύπτει από τη σχέση:

$$K_{II} = \sqrt{2pr} \lim_{r \rightarrow 0} t_{xy} \quad (2.29)$$

2.4.3 Εγκάρσιος Διατμητικός Τύπος –III [6]

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν προς αντίθετες εγκάρσιες κατευθύνσεις υπό την επίδραση ίσων και αντίθετων δυνάμεων, κάθετων προς το επίπεδο του σώματος. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο III δίνεται από την σχέση:

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2pz}}, \quad (2.30)$$

όπου η σταθερά K_{III} είναι χαρακτηριστική του τύπου III και ονομάζεται **μη συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων**.

Οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες προκύπτουν:

$$t_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}} \sin \frac{q}{2} \quad (2.31)$$

$$t_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}} \cos \frac{q}{2}$$

Για τον τύπο-III οι μετατοπίσεις είναι:

$$u=0, v=0, w = w(x,y) \quad (2.32)$$

και από τον νόμο του Hooke προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$g_{xz} = \frac{t_{xz}}{G} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$g_{yz} = \frac{t_{yz}}{G} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας κατά τις διευθύνσεις x,y πληρούνται εκ ταυτότητας, ενώ κατά τη διεύθυνση z ισχύει:

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.34)$$

Από την οποία, δι' αντικατάστασης των σχέσεων (2.33), προκύπτει:

$$\Delta w = 0 \quad (2.35)$$

Θέτοντας τη μετατόπιση w :

$$w = \frac{1}{G} \text{Im} Z_{III} \quad (2.36)$$

και η μετατόπιση w σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{p}} \sin \frac{q}{2} \quad (2.37)$$

$$\text{όπου} \quad K_{III} = \sqrt{2pr} \lim_{r \rightarrow 0} t_{yz} \quad (2.38)$$

Στο σημείο αυτό παρουσιάστηκαν τα κυριότερα σημεία της Θεωρίας των Ρωγμών. Στην συνέχεια του παρόντος θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τον **εφελκυστικό τύπο I** παραμόρφωσης της ρωγμής. Το δοκίμιο το οποίο χρησιμοποιείται στην πειραματική διαδικασία, φέρει εγκάρσια ρωγή συγκεκριμένου μήκους και πάχους. Τα οποιαδήποτε δυναμικά χαρακτηριστικά της ρωγμής δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

3.1 Γενικά

Στα προβλήματα ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και πλησίον της μικρής αυτής περιοχής οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες, το γεγονός αυτό καθιστά δυσχερή την επίλυση του προβλήματος δια των κλασικών μεθόδων πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων, ενώ αντιθέτως, η μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος σημείωσε σημαντική πρόοδο. [4,5,6,7]

Η οπτική μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών αναπτύχθηκε από τον Καθ. Π.Σ. Θεοχάρη για την μελέτη της επικρατούσας ιδιομορφίας των τάσεων, στο άκρο της ρωγμής. Η πρώτη εφαρμογή αυτής φαίνεται να έχει γίνει από Manogg, ο οποίος χρησιμοποίησε διερχόμενο φως για την μελέτη της διάδοσης ρωγμής σε Plexiglas.

Η πειραματική αυτή μέθοδος βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων στο άκρο μιας ρωγμής ή οπής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων, σε οπτική ιδιομορφία, που προέρχεται σε ιδιόμορφη στον χώρο καμπύλη, που καλείται **καυστική**, των ακτινών φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη περιοχή κοντά στο άκρο της ρωγμής ή οπής. Η καυστική αυτή λαμβάνεται πάνω σε πέτασμα και αφού βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την στο άκρο της ρωγμής περιοχή, επιτρέπει την μελέτη της.

Η μέθοδος των καυστικών κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής τάσεων εντός της μικρής παρά το άκρο της ρωγμής ιδιόμορφης (singular) περιοχής. Το μέγεθος και το σχήμα της καυστικής εξαρτώνται από τις μηχανικές και οπτικές ιδιότητες των υλικών στην περιοχή της ιδιομορφίας και από την απόσταση πλάκας-πετάσματος. Ειδικά για την περίπτωση της καυστικής που δημιουργείται στο σύνορο μιας ρωγμής, η διεύθυνση και οι διαστάσεις της καυστικής, που εξαρτώνται από τον προσανατολισμό των κυρίων τάσεων, μας δείχνουν απευθείας την διεύθυνση των κυρίων τάσεων σε αντίθεση με την κλασική μέθοδο της φωτοελαστικότητας όπου οι κύριες διευθύνσεις καθορίζονται μέσω ισοκλινών. Επίσης δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού της τιμής της διαφοράς των κυρίων τάσεων.

Τέλος η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε υλικά διαφανή και μη, σε στατικά και δυναμικά προβλήματα.[6]

3.2 Η Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Κουστικών [6]

Οι φωτεινές ακτίνες που ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x,y,z) = \text{σταθ.} \quad (3.1)$$

Εάν $S(x,y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντίστοιχης φωτεινής ακτίνας μεταξύ δυο επίπεδων παράλληλων στο μέσο επίπεδο της φορτισμένης πλάκας , και κείμενων επί των παραπλεύρων επιφανειών της πλάκας, τότε ισχύει η σχέση:

$$S(x,y,z) = z-s(x,y) = \text{σταθ.} \quad (3.2)$$

και εξ' αυτής προκύπτει:

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j, \quad (3.3)$$

όπου i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ του οποίου η αρχή O συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας Ox συμπίπτει με τον άξονα της ρωγμής και ο άξονας Oz είναι κάθετος επί της πλάκας και $s(x,y)$ είναι ο οπτικός δρόμος διά της πλάκας στο τυχόν σημείο P αυτής.

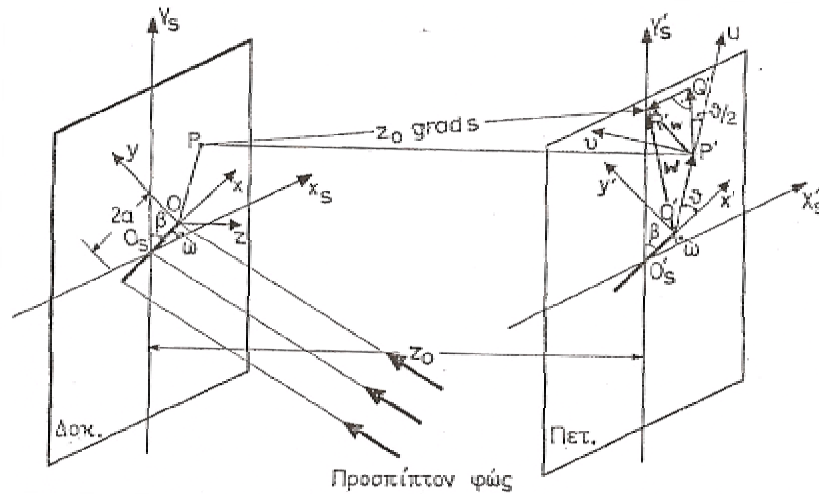
Έστω, τώρα, ένα επίπεδο αναφοράς σε απόσταση z_0 από το μέσο επίπεδο της πλάκας και παράλληλο σε αυτό. Τότε το διάνυσμα w δίνει την απόκλιση των ανακλώμενων ακτινών στο επίπεδο με:

$$w = z_0 \text{grad}S(x,y,z) \quad (3.4)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2) και (3.3) προκύπτει:

$$w = -z_0 \text{grad}s(x, y) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (3.5)$$

Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 3.1 Γεωμετρία της ρηγματωμένης πλάκας και σχετική θέση του πετάσματος αναφοράς.

Δεδομένου, ότι τα κυματικά μέτωπα των προσπιπτουσών φωτεινών ακτίνων στο μέσο επίπεδο της πλάκας, είναι παράλληλα σε αυτό, ισχύει:

$$s(x,y) = s_0 + \Delta s_{r,t}(x,y) \quad (3.5)$$

όπου s_0 σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο και $\Delta s_{r,t}$ παριστάνει τη μεταβολή του οπτικού δρόμου των φωτεινών ακτίνων διά της πλάκας που οφείλονται στη φόρτιση και δίνονται από τις συνθήκες του Favre [], [], και συνεπώς :

$$w = -z_0 \text{ grad} \Delta s_{r,t}(x,y) \quad (3.6)$$

Οι αιχμές του διανύσματος w καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z=z_0$ περιβάλλουσα (καυστική), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες.

Αντικαθιστώντας στην (3.6) τον όρο $\Delta s_{r,t}$, την μεταβολή δηλαδή του οπτικού δρόμου λόγω φορτίσεως, για οπτικός ισότροπα υλικά από τις σχέσεις του Favre έχουμε:

1. Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας.

$$w = -2z_0 dc_r grad(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \quad (3.7)$$

2. Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη διά της πλάκας .

$$w = -2z_0 dc_t grad(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \quad (3.8)$$

Οι σχέσεις (3.7) και (3.8) γενικά δύνανται να γραφούν:

$$w = -e_0 z_0 dc_{r,t} grad(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \quad (3.9)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν a είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση φ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με τον νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση:

$$j = 2a \quad (3.10)$$

και η γωνία a δίνεται από τη σχέση:

$$a = grad \frac{\Delta d}{2} = -grad \left[\frac{vd}{2E} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \right] \quad (3.11)$$

οπότε η γωνία j είναι:

$$j = -\frac{vd}{E} grad(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = -dc_f grad(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \quad (3.12)$$

όπου:

$$c_f = \frac{v}{E} \quad (3.13)$$

είναι η ταυροοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάλυσμα απόκλισης w , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση z_0 από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση:

$$w = -z_0 dc_{r,t,f} grad(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \quad (3.14)$$

Οι σχέσεις (3.9) και (3.14) γενικά δύνανται να γραφούν:

$$w = -ez_0 dc_{r,t,f} grad(s_1 + s_2) \quad (3.15)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα επί της πλάκας φωτεινή δέσμη είναι απόκλίνουσα, (+), ή συγκλίνουσα (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$I_m = \frac{z_0 + z_1}{z_i} \quad (3.16)$$

όπου z_0 είναι η απόσταση του πετάσματος αναφοράς από την πλάκα (βλ. προηγούμενο σχήμα) και z_1 είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα (δοκίμιο). Θέτοντας:

$$C_{r,t,f} = -\frac{ez_0 dc_{r,t,f}}{I_m} \quad (3.17)$$

η σχέση (3.15) γίνεται:

$$w = C_{r,t,f} grad(s_1 + s_2) \quad (3.18)$$

3.3 Εφαρμογή της Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά. [6]

Για την επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος με την μέθοδο των μιγαδικών (3.1) το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από την σχέση :

$$S_1 + S_2 = S_{xx} + S_{yy} = 4 \operatorname{Re} f(z) \quad (3.19)$$

όπου $\Phi(z)$ η αναλυτική μορφή της συνάρτησης z . Έστω $\Phi(z)$ της μορφής :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.20)$$

με $u(x, y)$ και $v(x, y)$ να ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.21)$$

και την αρμονική εξίσωση του Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.22)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.18) που δίνει απόκλιση φωτός για οπτικώς ισότροπα υλικά έχουμε από (3.19) και (3.20):

$$w = 4C_{r,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (3.23)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η σχέση αυτή γράφεται:

$$w = 4C_{r,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.24)$$

Το διάνυσμα w εκφράζει την σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ ενός τυχαίου σημείου P , στη γειτονία του άκρου της ρωγμής, της πλάκας και της εικόνας του στο επίπεδο αναφοράς, που βρίσκεται σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Η απόκλιση αυτή σε σχέση με το σύστημα αξόνων $O'x'y'z'$ του πετάσματος (στο 1^ο σχήμα) εκφράζεται ως $W=z + w$. Για το μιγαδικό επίπεδο είναι:

$$W = z + w = x + iy + 4C_{r,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.25)$$

πάνω στο πέτασμα αναφοράς γράφεται:

$$W=X'+iY' \quad (3.26)$$

από όπου προκύπτει:

$$X' = x + 4C_{r,t} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.27)$$

$$Y' = y + 4C_{r,t} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.28)$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ανακλώμενων ή διερχομένων ακτινών. Οι ακτίνες αυτές στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω από την ρωγμή αποκλίνουν κατά διάφορα ποσά που εξαρτώνται από την μεταβολή του πάχους και του δείκτη διαθλάσεως του υλικού. Οι ακτίνες συγκεντρώνονται σε μια οριακή καμπύλη που φωτίζεται ισχυρά και σχηματίζει μία **καυστική**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει **ιδιόμορφη (singular) καμπύλη** για το μέγεθος w . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας (singularity) πληρούνται με τον μηδενισμό της **Ιακωβιανής (Jacobian) διακρίνουσας**:

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

Η ανάπτυξη της ορίζουσας λόγω 3.22 και 3.26 μετά από επίλυση δίνει:

$$1 + 16C_{r,t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0 \quad (3.31)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\Phi(z)$ δυο φορές παίρνοντας το μέτρο έχουμε:

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.32) στην (3.31) έχουμε :

$$|4C_{r,t} f'(z)|^2 = 1 \quad (3.33)$$

η οποία εκφράζει την εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής. Αφού ισχύει:

$$f(\bar{z}) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.34)$$

τότε η (3.25) γίνεται:

$$W = z + 4C_{r,t} \overline{f(z)} \quad (3.35)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση της καυστικής με την $\Phi(z)$ να ικανοποιεί την σχέση (3.19).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard Z , η οποία συνδέεται με την $\varphi(z)$ με την σχέση $2\varphi(z) = Z$ η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται:

$$|2C_{r,t}Z''(z)| = 1 \quad (3.36)$$

Η δε εξίσωση της καυστικής, λαμβανομένου υπόψη και του συντελεστή μεγέθυνσης λ_m γίνεται:

$$W = I_m \left[z + 2C_{r,t} \overline{Z'(z)} \right] \quad (3.37)$$

3.4 Ανάλυση του Ελαστικού Προβλήματος της Εγκάρσιας Ρωγμής[6]

Όπως έχει αναφερθεί ήδη, η ρωγμή στο δοκίμιο που μελετάται είναι εγκάρσια. Για αυτόν τον λόγο στο σημείο αυτό θα δούμε πως εφαρμόζεται η οπτική μέθοδος των καυστικών στις εγκάρσιες ρωγμές.

Η συνάρτηση Westergaard για ρωγμή μήκους $2a$ εντός απείρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από την σχέση:

$$Z_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2pz}}, \quad K_1 = \sigma \sqrt{pa} \quad (3.38)$$

όπου σ είναι η ομοιόμορφη τάση κάθετη προς τον άξονα της ρωγμής και ζ είναι η μιγαδική μεταβλητή η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$z = re^{iq}$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (41) προκύπτει:

$$Z_1'(z) = \frac{dZ_1}{dz} = -\frac{K_1}{2\sqrt{2p}} z^{-3/2} \quad (3.39)$$

$$\overline{Z_1'(z)} = \overline{Z_1'(\bar{z})} = \frac{K_1}{2\sqrt{2p}} \bar{z}^{-3/2} \quad (3.40)$$

$$Z_1''(z) = \frac{d^2 Z_1}{dz^2} = \frac{3K_1}{4\sqrt{2p}} z^{-5/2} \quad (3.41)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.41) στην σχέση (3.36) της αρχικής καμπύλης προκύπτει:

$$\left| 2C_{r,t} \frac{3K_1}{4\sqrt{2p}} z^{-5/2} \right| = 1 \quad (3.42)$$

Από την οποία προκύπτει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης:

$$|z| = r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t} \frac{K_I}{\sqrt{2p}} \right)^{2/5} \quad (3.43)$$

και θέτοντας:

$$|C_{r,t}| = \frac{|C_{r,t}| K_I}{\sqrt{2p}} = \frac{e z_0 d c_{r,t} K_I}{I_m \sqrt{2p}} \quad (3.44)$$

η σχέση (3.43) γράφεται:

$$|z| = r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t} \right)^{2/5} \quad (3.45)$$

δηλαδή η αρχική καμπύλη είναι κύκλος ακτίνας r_0 , η οποία ορίζεται από την ανωτέρω σχέση.

Για την εξίσωση της καυστικής, από τη σχέση (3.37) προκύπτει:

$$\frac{W}{I_m} = z + C_{r,t} \bar{z}^{-3/2} \quad (3.46)$$

Και χρησιμοποιώντας την πολική μορφή της z :

$$z = r e^{iq}, \quad \bar{z} = r e^{-iq} \quad (3.47)$$

η σχέση (3.46) γράφεται:

$$\frac{W}{I_m} = r e^{iq} + C_{r,t} r^{-3/2} e^{3iq/2} \quad (3.48)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.45), η (3.48) γράφεται:

$$\frac{W}{I_m} = r_0 \left(e^{iq} + \frac{2}{3} e^{3iq/2} \right) \quad (3.49)$$

Ισχύει όμως ότι:

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q, \quad e^{3iq/2} = \cos \frac{3q}{2} + i \sin \frac{3q}{2} \quad (3.50)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.50) στην (3.49) προκύπτει:

$$\frac{W}{I_m} = r_0 \left(\cos q + \frac{2}{3} \cos \frac{3q}{2} \right) + ir_0 \left(\sin q + \frac{2}{3} \sin \frac{3q}{2} \right) \quad (3.51)$$

Και θέτοντας το $W = x'_{r,t} + iy'_{r,t}$ στη σχέση (3.51), προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών:

$$x'_{r,t} = I_m r_0 \left(\cos q + \frac{2}{3} \cos \frac{3q}{2} \right) \quad (3.52)$$

$$y'_{r,t} = I_m r_0 \left(\sin q + \frac{2}{3} \sin \frac{3q}{2} \right) \quad (3.53)$$

Οι σχέσεις (3.52) και (3.53) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της λαμβανομένης παρά το άκρο της ρωγμής καυστικής, η οποία είναι μια συμμετρική καμπύλη με άξονα συμμετρίας συμπίπτοντα με τον άξονα της ρωγμής. Από τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής συμπεραίνεται ότι αυτή είναι καμπύλη κλειστή, περατωμένη και περιοδική με περίοδο 4π .

Η καυστική είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K με συντεταγμένες (x', y') . Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα α. Οι συντεταγμένες του σημείου K της καυστικής είναι:

$$x' = (OA) + (OB) = r_o \cos q + \frac{2}{3} r_o \cos \frac{3q}{2} = r_o \left(\cos q + \frac{2}{3} \cos \frac{3q}{2} \right) \quad (3.54)$$

$$y' = (B\Gamma) + (\Gamma K) = r_o \sin q + \frac{2}{3} r_o \sin \frac{3q}{2} = r_o \left(\sin q + \frac{2}{3} \sin \frac{3q}{2} \right) \quad (3.55)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ίδιες με τις σχέσεις (3.52) και (3.53) της καυστικής. Εκτός της καυστικής αυτής (εξωτερική καυστική) σχηματίζεται καυστική εσωτερικά της αρχικής καμπύλης (εσωτερική καυστική) όπως φαίνεται στο σχήμα β.

Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής αυτής προκύπτει από τις συντεταγμένες των σημείων K':

$$x' = (O\Delta) = (OA) - (O\Delta) = r_o \cos q - \frac{2}{3} r_o \cos \frac{3q}{2} = r_o \left(\cos q - \frac{2}{3} \cos \frac{3q}{2} \right) \quad (3.56)$$

$$y' = (\Delta K') = (A\Gamma) + (A'\Gamma') = r_o \sin q - \frac{2}{3} r_o \sin \frac{3q}{2} = r_o \left(\sin q - \frac{2}{3} \sin \frac{3q}{2} \right) \quad (3.57)$$

Επομένως, προκύπτει ότι για τη γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής, αρκεί από το άκρο O' της ρωγμής, β, να αχθεί ως προς τον άξονα συμμετρίας της καυστικής ακτίνα O'P μήκους r_o , που καθορίζεται από τη σχέση (3.45), υπό γωνία θ και ακολούθως από το σημείο P διάνυσμα (το διάνυσμα απόκλισης) PK (για την εξωτερική καυστική) ή PK' (για την εσωτερική καυστική μήκους $2r_o/3$ υπό γωνία $\theta/2$ ως προς την O'P.

Η ακτίνα της καυστικής δίνεται από τη σχέση:

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2} = r_o \sqrt{\frac{13}{9} + \frac{4}{3} \cos \frac{q}{2}} \quad (3.58)$$

Τα ακρότατα της ακτίνας αυτής υπολογίζονται από τη συνθήκη: $\frac{\partial r}{\partial q} = 0$, η οποία ισχύει για τιμές της γωνίας θ :

$$q_l^{\max} = 0, \quad 2p, \quad \dots \quad (3.59)$$

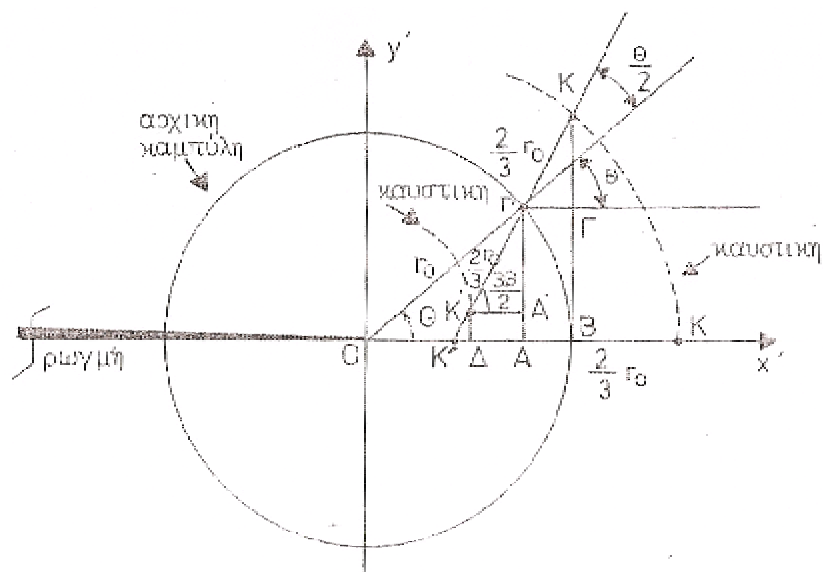
Από τις τιμές αυτές προκύπτει ότι η καυστική παρουσιάζει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στον άξονα συμμετρίας της. Οι τιμές αυτές είναι ,β, :

$$\text{Για } q_{l(1)}^{\max} = 0 \rightarrow r_{\max} = \frac{5}{3} r_0 l_m \quad (3.60)$$

$$\text{Για } q_{l(2)}^{\min} = 0 \rightarrow r_{\min} = \frac{1}{3} r_0 l_m \quad (3.61)$$

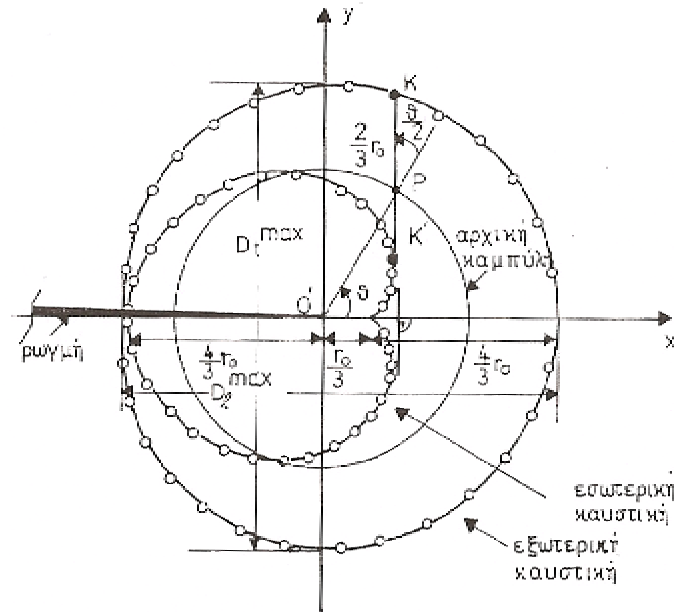
Ο άξονας συμμετρίας τέμνει την καυστική σε δύο σημεία που απέχουν απόσταση:

$$D_l^{\max} = 3r_0 l_m \quad (3.62)$$



Σχήμα 3.2 Η γεωμετρική σχεδίαση των καυστικών

η οποία παριστάνει τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της, Ο'χ'.



Σχήμα 3.3 Τα γεωμετρικά στοιχεία των καυστικών.

Ο υπολογισμός της μέγιστης εγκάρσιας διαμέτρου, D_t^{\max} , της καυστικής προκύπτει από τη συνθήκη: $\frac{\partial y'}{\partial q} = 0$, η οποία ισχύει για τιμές της γωνίας θ :

$$q_l^{\max} = 72^\circ \quad (3.63)$$

και από την τιμή αυτή της γωνίας προκύπτει:

$$D_t^{\max} = 2y' = 3.1702r_0l_m \quad (3.64)$$

Οι ανωτέρω ευρεθείσες σχέσεις αποτελούν χαρακτηριστικές αναλλοίωτες της καυστικής.

Θέτοντας:

$$d_l^{\max} = 3.00 \quad d_t^{\max} = 3.1702 \quad (3.65)$$

Οι σχέσεις (3.62) και (3.64) δύνανται να γραφούν:

$$D_l^{\max} = l_m r_0 d_l^{\max} \quad (3.66)$$

$$D_t^{\max} = l_m r_0 d_t^{\max} \quad (3.67)$$

όπου $d_{l,t}^{\max}$ καλούνται **συντελεστές διόρθωσης (correction factors)** των διαμέτρων $D_{l,t}^{\max}$ της καυστικής.

Από τις σχέσεις (3.44), (3.45), (3.66) και (3.67) υπολογίζεται ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I :

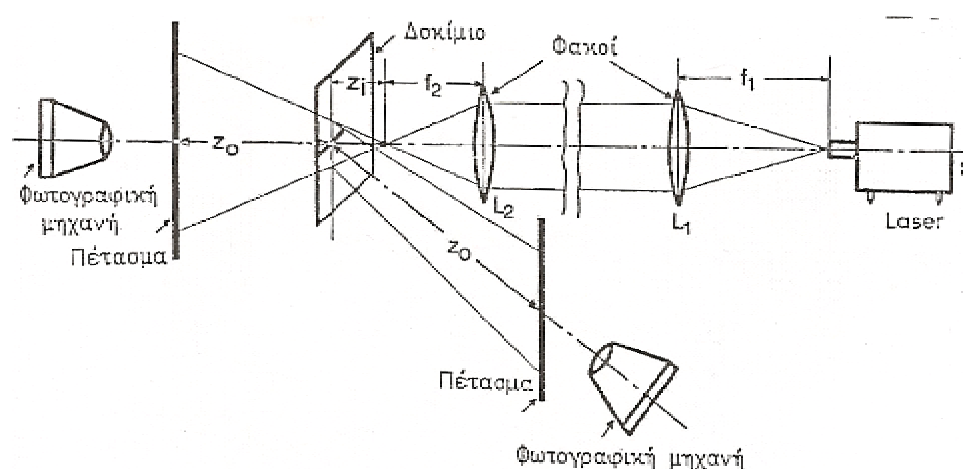
$$K_I = \frac{2\sqrt{2p}}{3ez_0 d l_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{\max}}{d_{l,t}^{\max}} \right)^{5/2} \quad (3.68)$$

Από τη σχέση (3.68) υπολογίζεται ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I , για τον τύπο-I (εφελκυστικό τύπο) της παραμόρφωσης της ρωγμής, από τις διαμέτρους της καυστικής που σχηματίζεται παρά τα άκρα της ρωγμής.

3.5 Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης για τον Σχηματισμό Κουστικών [4,5,6]

Η πειραματική διάταξη για το σχηματισμό κουστικών είναι απλή όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Για την πειραματική αυτή διάταξη απαιτούνται:

- Πηγή φωτός (Laser He-Ne),
- Ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του Laser,
- Δύο συγκλίνοντες οπτικοί φακοί εστιακής απόστασης $f=1$ m για να δημιουργηθεί συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα δέσμη,
- Δύο πετάσματα αναφοράς (θαμπόγυαλο) πάνω στα οποία προβάλλονται οι σχηματιζόμενες κουστικές και
- Φωτογραφική μηχανή για την λήψη των κουστικών.

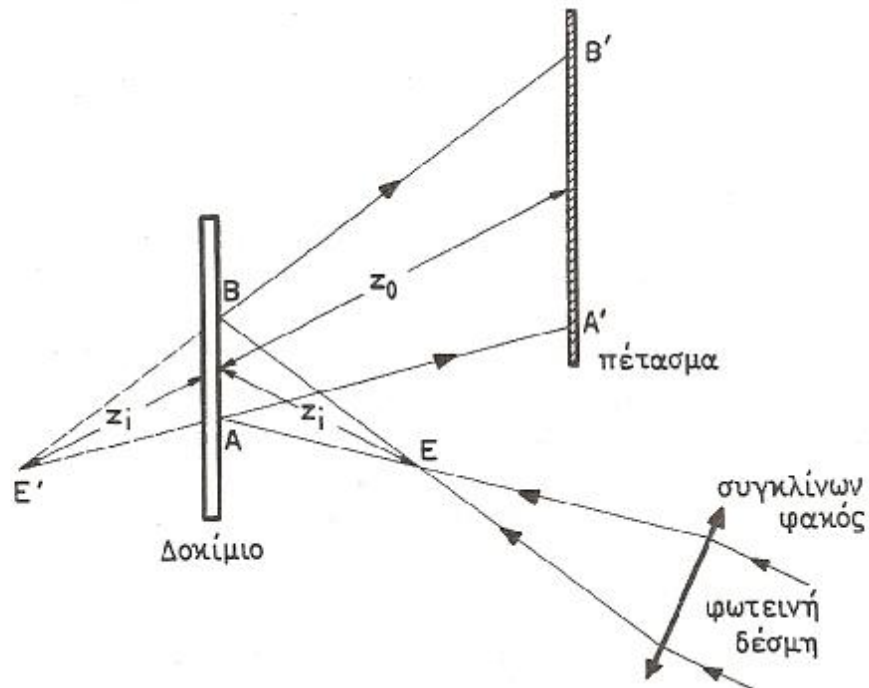


Σχήμα 3.4 Σχηματική παράσταση της οπτικής διάταξης των κουστικών.

Τα πετάσματα αναφοράς τοποθετούνται εμπρός και πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_0 από αυτό. Στο πέτασμα εμπρός από το δοκίμιο λαμβάνονται οι κουστικές εξ ανακλάσεως, ενώ στο πέτασμα πίσω από το δοκίμιο λαμβάνεται η κουστική διελεύσεως. Η εστία της φωτεινής, ανάλογα με το είδος του δοκιμίου και τον τύπο των κουστικών, τοποθετείται εμπρός ή πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_i . Για διαφανή υλικά η εστία τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο (αποκλίνουσα δέσμη) ενώ για αδιαφανή υλικά η εστία τοποθετείται πίσω από το δοκίμιο (συγκλίνουσα δέσμη).

Η οπτική διάταξη για αποκλίνουσα ή συγκλίνουσα δέσμη έχει συντελεστή μεγέθυνσης λ_m , ενώ για παράλληλη δέσμη ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι ίσος με ένα ($\lambda_m=1$). Ο συντελεστής μεγέθυνσης υπολογίζεται γεωμετρικά σύμφωνα με την γεωμετρική οπτική. Για αποκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

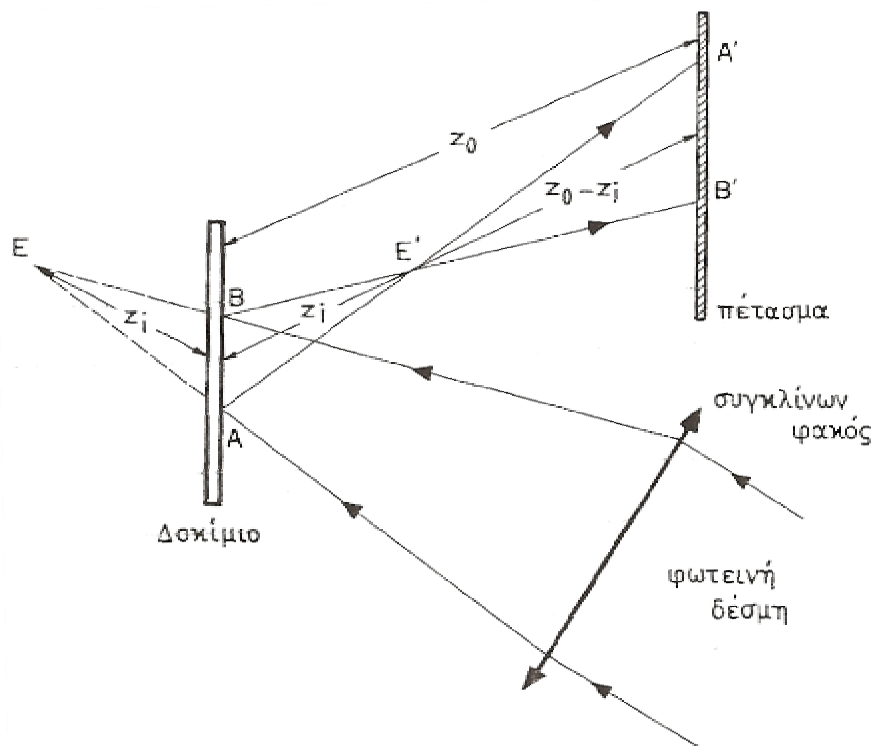
$$I_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_0 + z_i}{z_i} \quad (4.1)$$



Σχήμα 3.5 Γεωμετρία αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης.

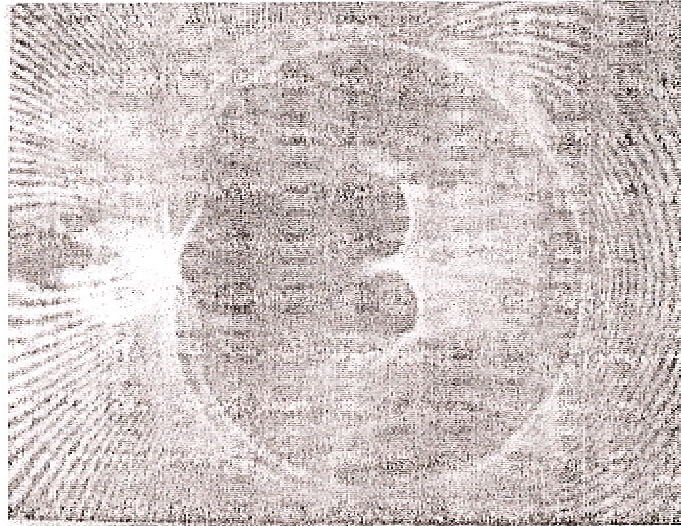
Για συγκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται στο σχήμα, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

$$I_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_0 - z_i}{z_i} \quad (4.2)$$

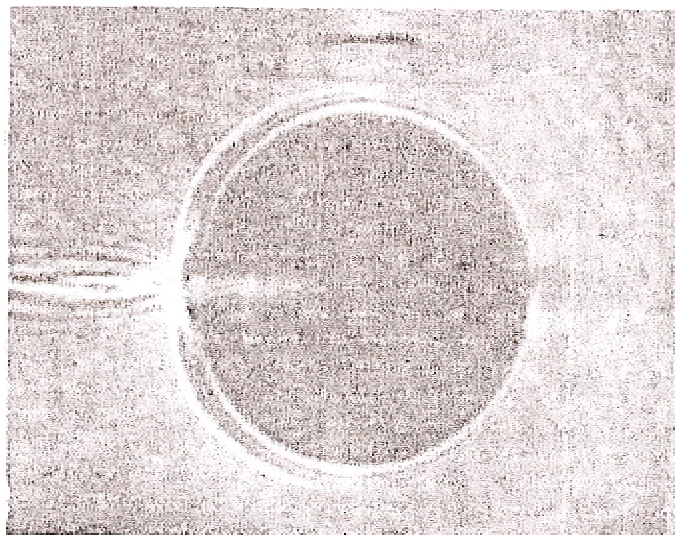


Σχήμα 3.6 Γεωμετρία συγκλίνουσας φωτεινής δέσμης.

Επίσης παραθέτουμε (Σχήματα 1 και 2) και δύο εικόνες πειραματικών καυστικών που ελήφθησαν με διάταξη αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης. Οι καυστικές του σχήματος 1 σχηματίστηκαν από την ανάκλαση των φωτεινών ακτινών από την εμπρός (ανοικτή καυστική) και πίσω (κλειστή καυστική) επιφάνεια του δοκιμίου, ενώ η καυστική του σχήματος 2 σχηματίστηκε από τις διερχόμενες δια του δοκιμίου φωτεινές ακτίνες. Οι κλειστές καυστικές είναι διπλές διότι το δοκίμιο κατασκευάστηκε από διθοπλαστικό υλικό Lexan (PCBA). Η ανοικτή καυστική παραμένει απλή διότι οι ανακλώμενες ακτίνες από τις οποίες σχηματίζεται δεν επηρεάζονται από τη μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως του υλικού.



Σχήμα 3.7 Πειραματικές καυστικές από ανάκλαση φωτεινών ακτινών σε δοκίμιο από Lexan.



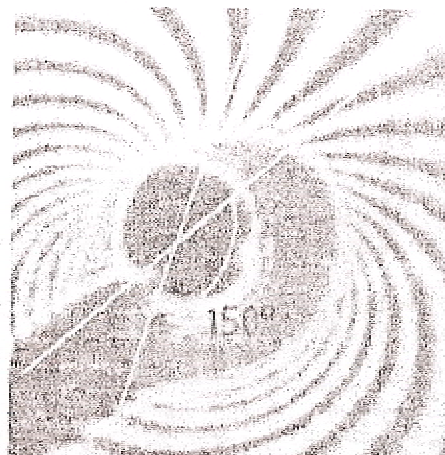
Σχήμα 3.8 Πειραματικές καυστικές από διέλευση φωτεινών ακτινών σε δοκίμιο από Lexan.

Τέλος, στο σχήμα 3 φαίνονται πειραματικές καυστικές που ελήφθησαν σε δοκίμιο από οπτικώς ισότροπο υλικό (Plexiglas) υπο διαξονική φόρτιση στο άπειρο, με εσωτερική ρωγμή με γωνία κλίσης $w = 45^\circ$ και διάφορους συντελεστές διαξονικής φόρτισης k .

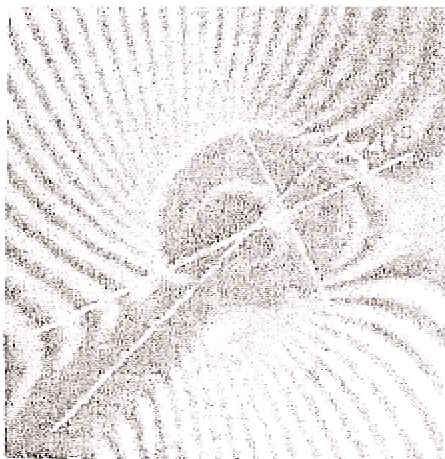
Τα παραπάνω αναφέρονται διότι στο πείραμα που εκτελέστηκε στην προκειμένη περίπτωση, το δοκίμιο (ρηγματωμένη πλάκα) ήταν από Lexan, ενώ τα διάφορα επιθέματα (δηλ. οι επενδύσεις) ήταν κατασκευασμένα από Plexiglas. Έτσι έχουμε ήδη πάρει μια πρώτη εικόνα για το πώς είναι οι καυστικές και δη αυτών των υλικών.



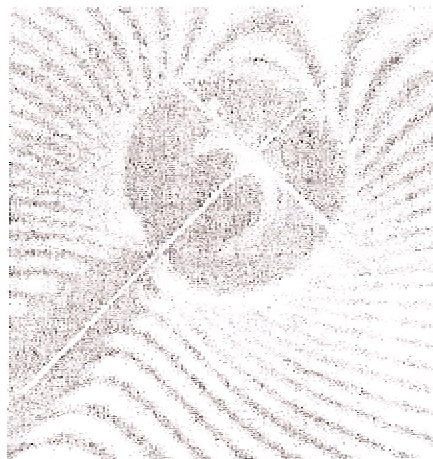
(a) $\omega=45^\circ$, $k=-10$
($\phi = 180^\circ$)



(b) $\omega=45^\circ$, $k=-0.6$
($\phi = 150^\circ$)



(c) $\omega=45^\circ$, $k=0.7$
($\phi = 20^\circ$)



(d) $\omega=45^\circ$, $k=10$
($\phi = 0^\circ$)

Σχήμα 3.9 Πειραματικές καυστικές ανακλάσεις σε δοκίμιο από Plexiglas με εσωτερική λοξή ρωγμή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

4.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η διαδικασία εκτέλεσης του πειράματος καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση αυτού. Συγκεκριμένα γίνεται αναφορά των παραμέτρων, περιγραφή της πειραματικής διάταξης, ανάλυση των φωτογραφιών του δοκιμίου καθώς και παρουσίαση δεδομένων που αφορούν τον σχηματισμό της καυστικής γύρω από την ρωγμή και την εξέλιξη αυτής κατά την διάρκεια επιβολής των φορτίων με και χωρίς τα διάφορα επιθέματα.

4.2 Πειραματική Διάταξη

Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε, κατά την εκτέλεση του πειράματος, για να λάβουμε τις καυστικές φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πρόκειται για οπτική διάταξη συγκλίνουσας δέσμης:

- Η φωτεινή πηγή εκπέμπει την δέσμη Laser.
- Η δέσμη διέρχεται από κατάλληλο φίλτρο.
- Στην πορεία της δέσμης παρεμβάλλονται δύο συγκλίνοντες φακοί. Κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργείται η συγκλίνουσα φωτεινή δέσμη.
- Η δέσμη προσπίπτει στο δοκίμιο. Η εστία τοποθετείται πίσω από το δοκίμιο. Σε πέτασμα αναφοράς που βρίσκεται μπροστά από το δοκίμιο λαμβάνεται η καυστική.
- Με την βοήθεια φωτογραφικής μηχανής λαμβάνονται φωτογραφίες της καυστικής για τα διάφορα φορτία, χωρίς και με τα επιθέματα.

Οι μετρήσεις που λάβαμε κατά την εκτέλεση του πειράματος για την απόσταση, z_0 , του πετάσματος από το δοκίμιο και της απόστασης της εστίας z_i είναι:

$$z_0 = 228mm$$

$$z_i = 18mm$$

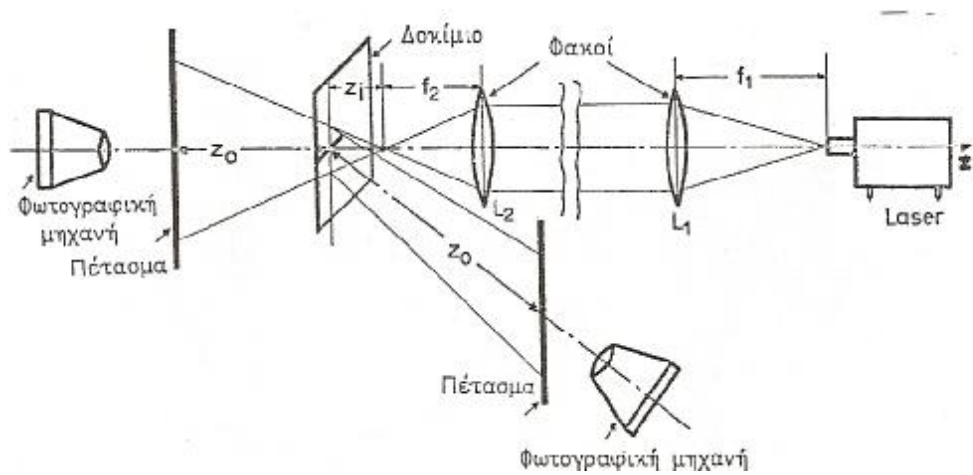
και

$$z_0 = 184mm$$

$$z_i = 14mm, \quad \text{για το τρίτο σετ φωτογραφιών, όπως θα αναφερθεί παρακάτω.}$$

Για συγκλίνουσα δέσμη ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$I_m = \frac{z_0 - z_i}{z_i}$$



Σχήμα 4.1 Σχηματική παράσταση της οπτικής διάταξης των καυστικών.

4.3 Παράμετροι Πειράματος

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του δοκιμίου ήταν Lexan πάχους $d = 0.002m$. Οι τασεοπτικές σταθερές του Lexan όπως έχουν υπολογιστεί πειραματικά για στατικές τιμές φαίνονται στον πίνακα 1:

Πίνακας 4.1 Τασεοπτικές σταθερές του Lexan

ν^s	E^s	$c_f^s = \frac{\nu^s}{E^s}$	c_t^s	c_r^s	χ
0.36	2.8 GPa	$1.286 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$-1.40 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$-2.04 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	0.153

Το πείραμα αφορά κατακόρυφη άσκηση εφελκυστικού φορτίου σε δοκίμιο που φέρει εγκάρσια ρωγμή ορισμένου μήκους. Πρόκειται για μονοαξονικό πείραμα. Κόπηκαν δοκίμια από μεγάλα φύλλα LEXAN. Το πάχος όλων των δοκιμίων (τόσο του βασικού όσο και των επιθεμάτων) ήταν πολύ μικρό ($2 \times 10^{-3}m$) και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε με πολύ καλή προσέγγιση ότι είχαμε την περίπτωση της Επίπεδης Εντατικής Κατάστασης. Τα δοκίμια αυτά καταπονήθηκαν εφελκυστικά σε μία μηχανή τύπου RETLEY με μέγιστη ικανότητα επιβολής φορτίου 60 τόνους. Σε όλα τα πειράματα η ταχύτητα κινήσεως των αρπαγών της μηχανής ήταν 50 mm/min, δηλαδή ταχύτητα που καλύπτει τις προδιαγραφές των κανονισμών για στατική φόρτιση. Το μέγεθος των ασκούμενων φορτίων κυμαίνεται από τα 20 kp και φτάνει έως και τα 120 kp. Ιδιαίτερα για την περίπτωση του δοκιμίου 2 με την επένδυση φτάνει και τα 540 kp. Η φωτεινή δέσμη που προσπίπτει σ' αυτό, από πηγή φωτός, με την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω και στην οποία θα αναφερθούμε και στην συνέχεια, μας δίνει τις καυστικές. Το πείραμα επαναλαμβάνεται τόσο όταν δεν έχουμε τοποθετήσει κανένα επίθεμα, όσο και όταν προσθέσουμε επιθέματα με ύψη 8 cm και 20 cm. Τα επιθέματα είναι κατασκευασμένα από το υλικό Plexiglas. Οι τασεοπτικές σταθερές του Plexiglas όπως έχουν υπολογιστεί πειραματικά για στατικές τιμές φαίνονται στον πίνακα 2:

Πίνακας 4.2 Τασεοπτικές σταθερές του Plexiglas

ν^s	E^s	$c_f^s = \frac{\nu^s}{E^s}$	c_t^s	c_r^s
0.34	3.4 GPa	$1 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$-1.21 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$-1.70 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$

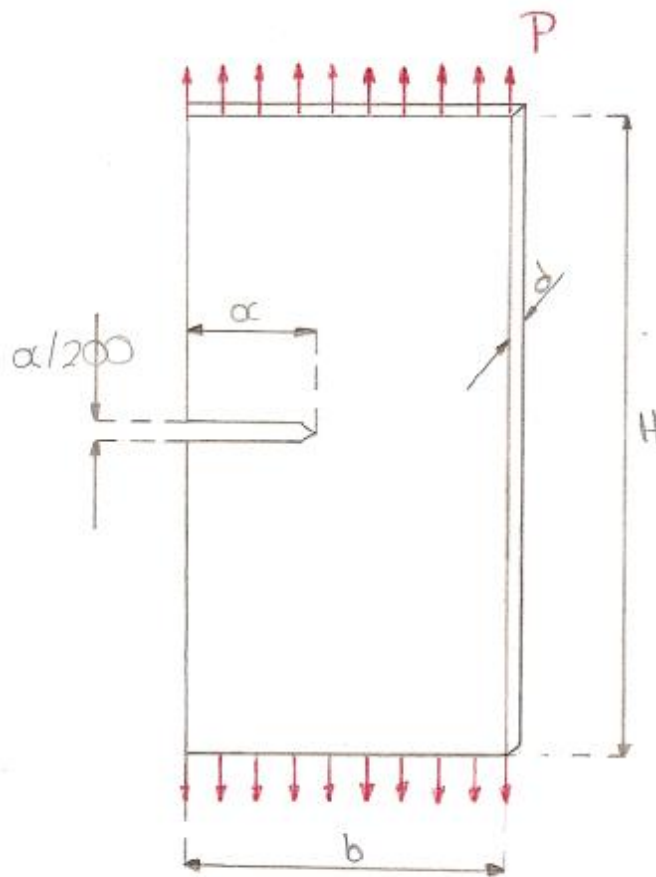
Η τυπική μορφή και διάσταση του δοκιμίου παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί. Στο σχήμα φαίνεται επίσης και το εφελκυστικό φορτίο που ασκείται. Τα δοκίμια, τόσο το βασικό όσο και τα επιθέματα, κόπηκαν με «κορδέλα» στο Μηχανουργείο. Στην συνέχεια οι πλευρές τους λειάνθηκαν με την βοήθεια πλάνης. Οι διαστάσεις του βασικού δοκιμίου, που παρουσιάζεται και παρακάτω στο σχήμα, είναι οι εξής:

- $H = 200 \text{ mm}$
- $b = 100 \text{ mm}$
- $a = 40 \text{ mm}$
- $d = 2 \text{ mm}$

Οι διαστάσεις του επιθέματος είναι:

- $h' = 80\text{mm}$ και 200mm
- $b' = 100 \text{ mm}$
- $d' = 2 \text{ mm}$

Κατά την εκτέλεση του πειράματος χρησιμοποιήθηκαν δύο δοκίμια. Τόσο στο δοκίμιο 1 όσο και στο δοκίμιο 2 ασκήθηκαν τα ίδια φορτία. Αρχικά η φόρτιση έγινε χωρίς τα επιθέματα και γι' αυτό λαμβάνουμε δύο σειρές μετρήσεων για την ίδια κατάσταση. Στην συνέχεια στο δοκίμιο 1 «κολλάμε» την επένδυση διαστάσεων $200\text{mm} \times 100\text{mm}$, ενώ στο δοκίμιο 2 «κολλάμε την επένδυση διαστάσεων $100\text{mm} \times 100\text{mm}$. Η κόλλα που χρησιμοποιήθηκε ήταν η «Tricl & Dicl». Τα αποτελέσματα συγκεντρωτικά παρουσιάζονται σε πίνακες σε επόμενη παράγραφο.



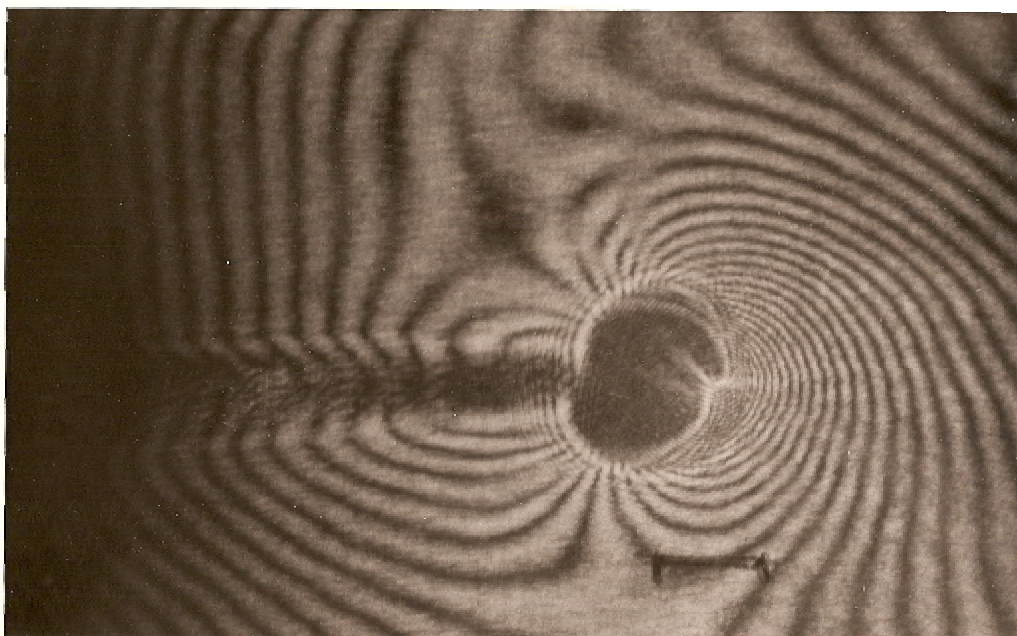
Σχήμα 4.2 Γεωμετρία Βασικού Δοκιμίου.

Μετά την εκτέλεση του πειράματος με το βασικό δοκίμιο χωρίς επίθεμα, προχωρήσαμε στην ένωση του βασικού δοκιμίου με τα επιθέματα. Αυτό πραγματοποιήθηκε με την βοήθεια κόλλας. Τα δύο δοκίμια έμειναν κολλημένα για περισσότερο από 24 ώρες με σκοπό να κολλήσουν όσο το δυνατόν καλύτερα. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε την επομένη. Η εισαγωγή του επιθέματος θα οδηγήσει, όπως θα φανεί και αργότερα, σε μικρότερη διάμετρο της καυστικής, δηλ. μικρότερο D , κάτι που συνεπάγεται μικρότερο Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων. Τα αποτελέσματα ομαδοποιημένα σε πίνακες και με αντίστοιχα γραφήματα θα παρουσιασθούν σε επόμενη παράγραφο.

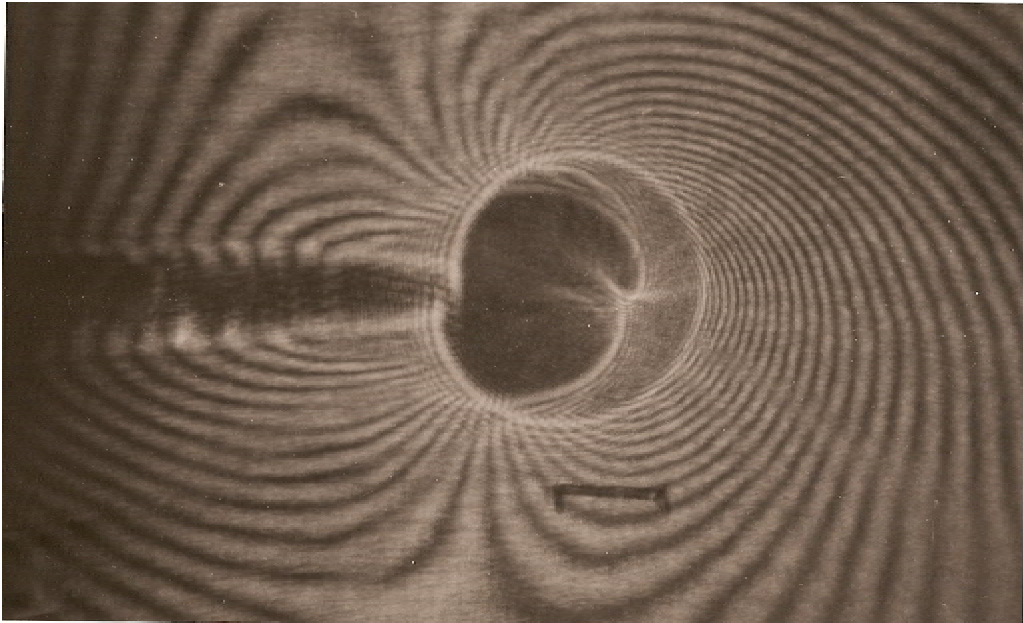
4.4 Αποτελέσματα

4.4.1 Περιγραφική Ανάλυση των φωτογραφιών

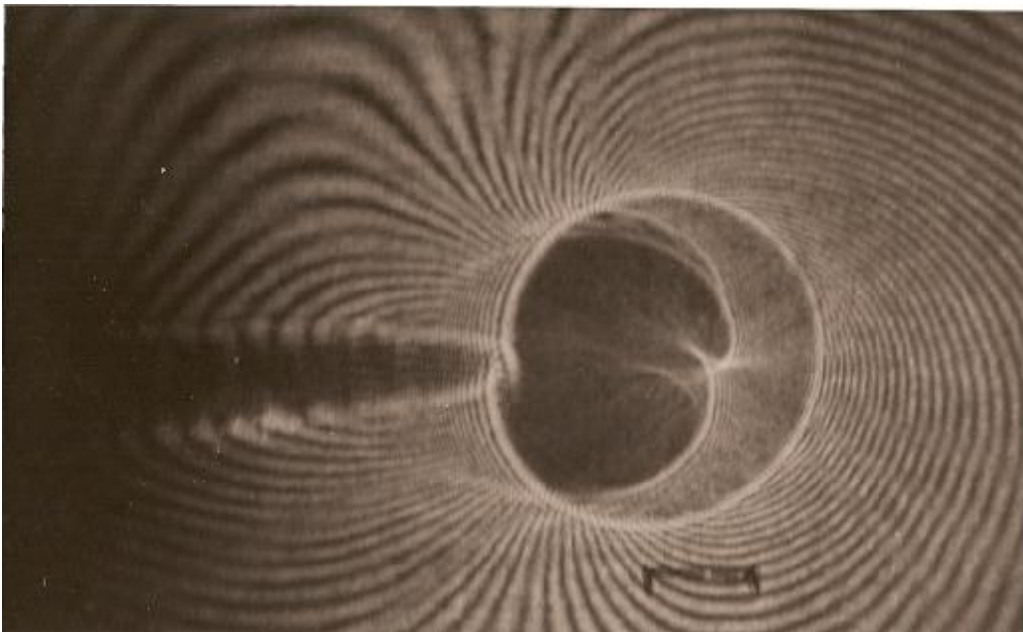
Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η παρουσίαση των φωτογραφιών που ελήφθησαν κατά την εκτέλεση του πειράματος. Αφού έχουμε λάβει όλες τις μετρήσεις που είναι απαραίτητες και το δοκίμιο είναι τοποθετημένο κατάλληλα, ασκούνται τα φορτία που έχουμε προϋπολογίσει. Στις φωτογραφίες που ακολουθούν για κάθε μία περίπτωση, παρουσιάζονται οι καυστικές όπως είχαν προβληθεί στο πέτασμα αναφοράς. Κατά τις μετρήσεις, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η διάμετρος της κλειστής καυστικής (ανάκλαση από την εμπρός επιφάνεια του δοκιμίου). Στην συνέχεια με αντικατάσταση στην σχέση (3.68), για κάθε φόρτιση παίρνουμε τον Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF). Παρακάτω ακολουθούν οι φωτογραφίες με τις αντίστοιχες επεξηγήσεις:



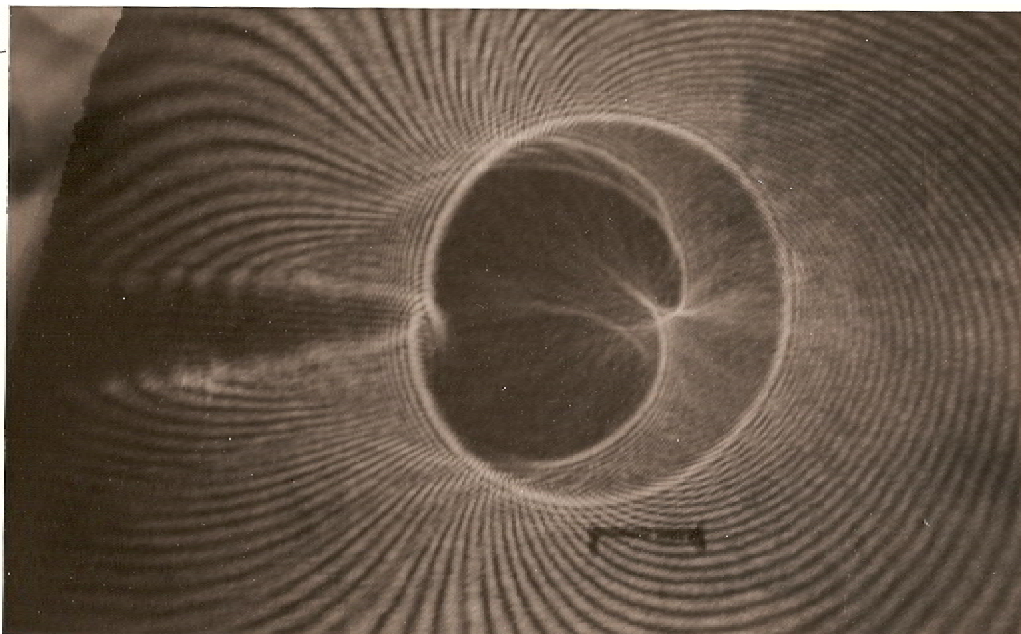
Εικόνα 1. Καυστική Δοκιμίου 1, χωρίς επένδυση για φορτίο 20kp.



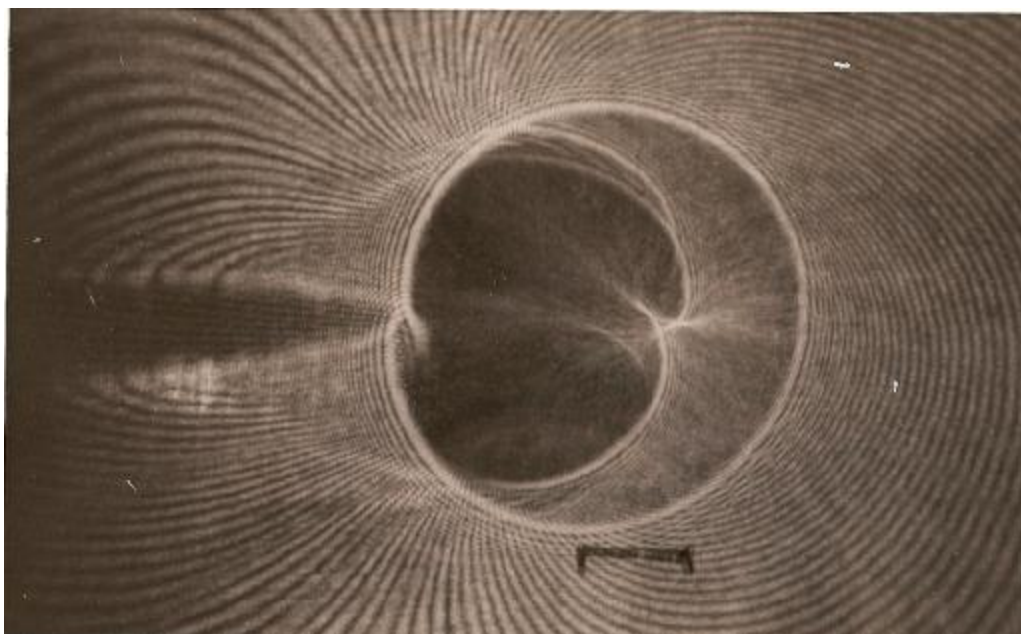
Εικόνα 2. Καυστική Δοκιμίου 1, χωρίς επένδυση για φορτίο 40kρ.



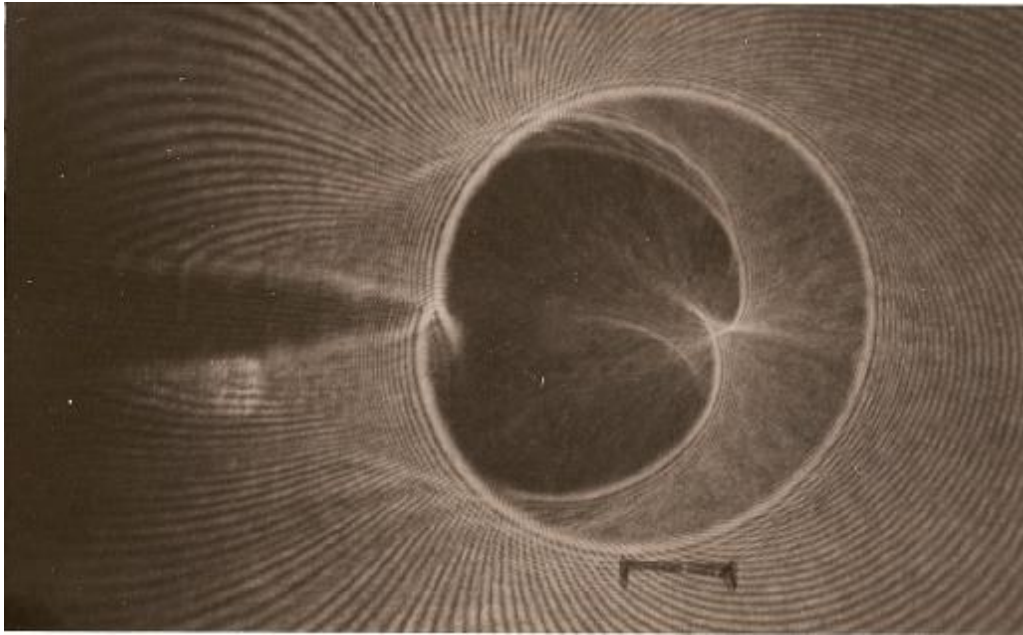
Εικόνα 3. Καυστική Δοκιμίου 1, χωρίς επένδυση για φορτίο 60kρ.



Εικόνα 4. Κραστική Δοκιμίου 1, χωρίς επένδυση για φορτίο 80kρ.

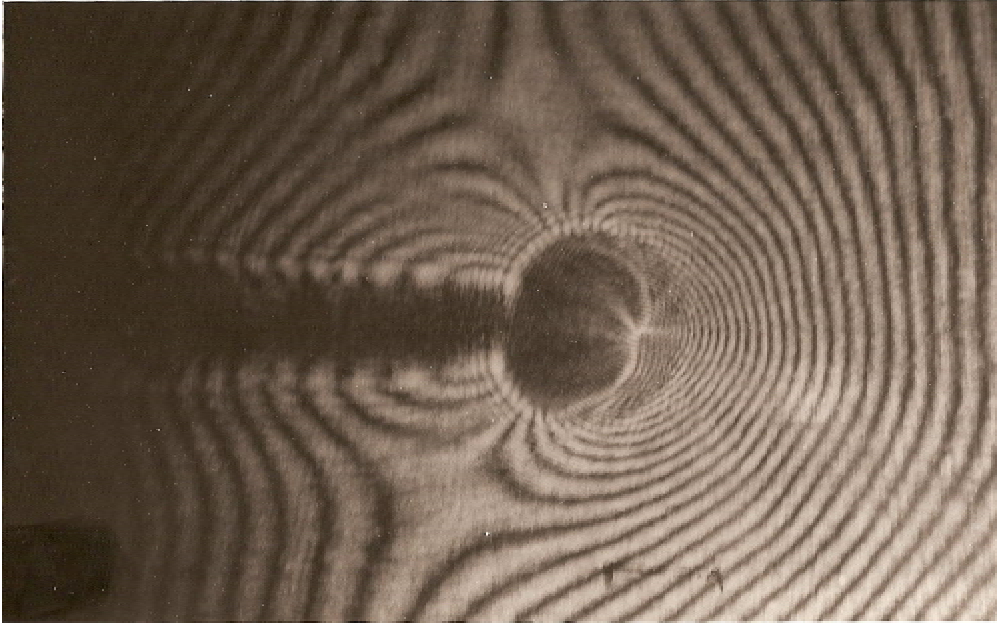


Εικόνα 5. Κραστική Δοκιμίου 1, χωρίς επένδυση για φορτίο 100kρ.

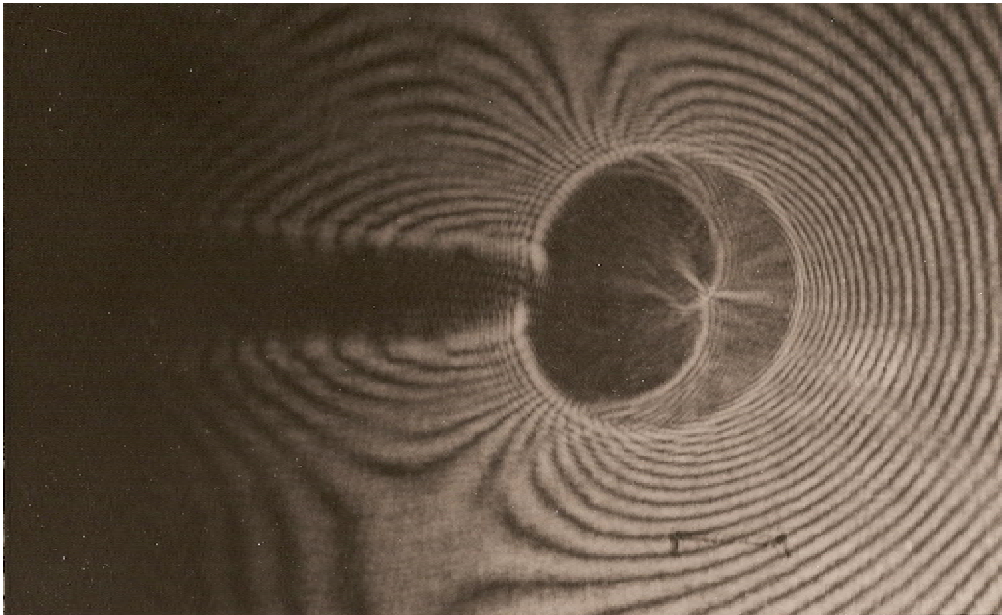


Εικόνα 6. Καυστική Δοκμίου 1, χωρίς επένδυση για φορτίο 120kr.

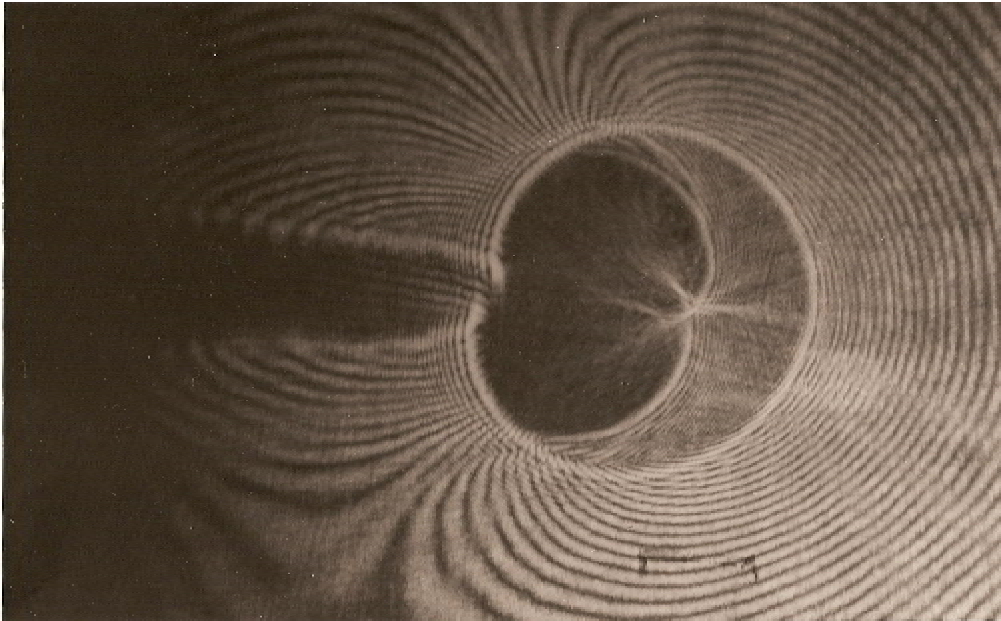
Στην συνέχεια ακολουθούν οι φωτογραφίες των καυστικών από το Βασικό Δοκίμιο 2. Η διαδικασία καθώς και τα μεγέθη των φορτίων που ασκήθηκαν είναι τα ίδια με το Δοκίμιο 1.



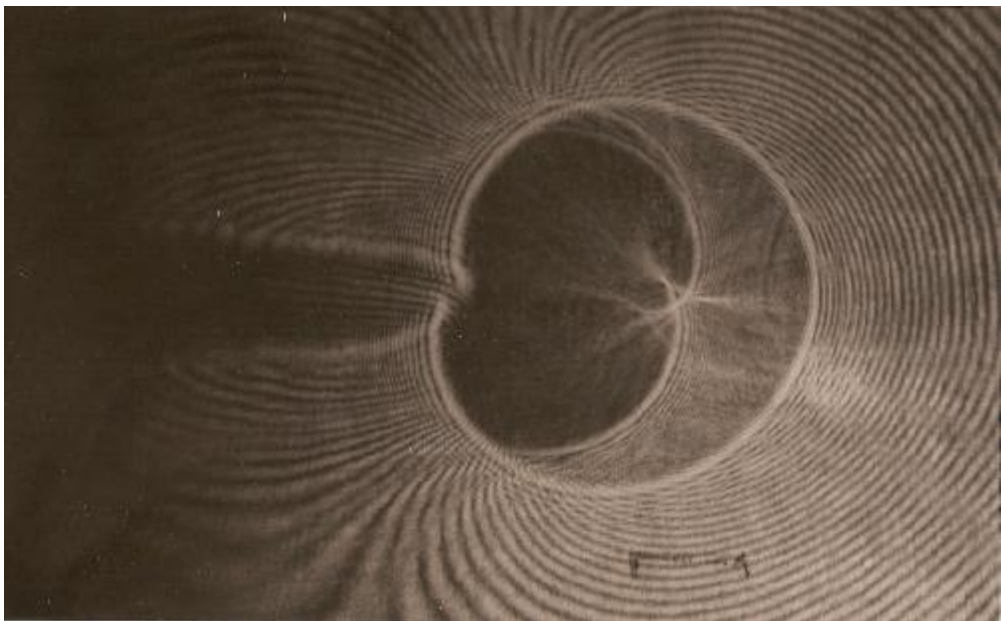
Εικόνα 7. Καυστική Δοκιμίου 2, χωρίς επένδυση για φορτίο 20kρ.



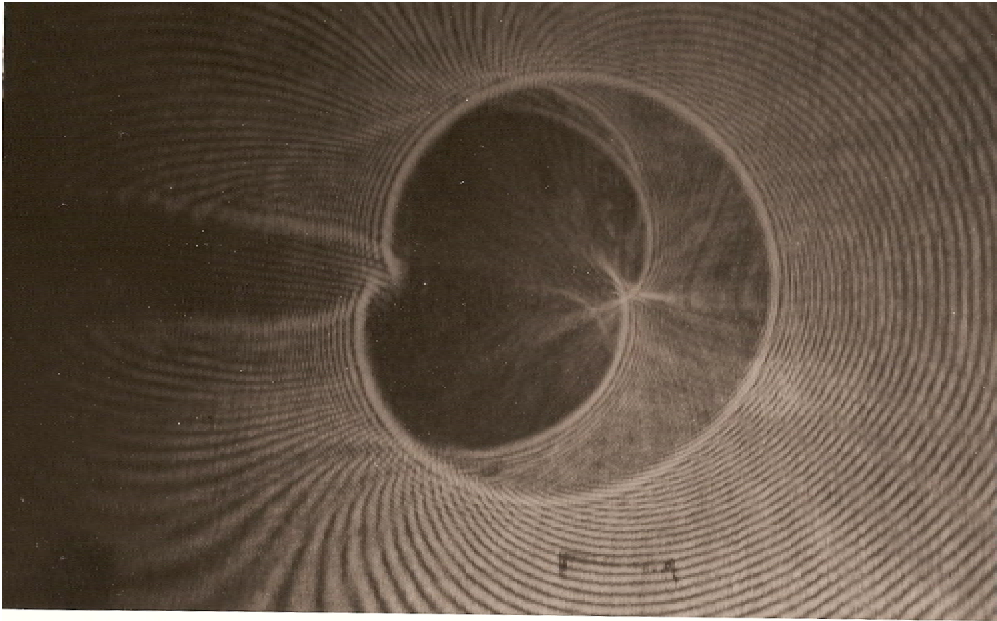
Εικόνα 8. Καυστική Δοκιμίου 2, χωρίς επένδυση για φορτίο 40kρ.



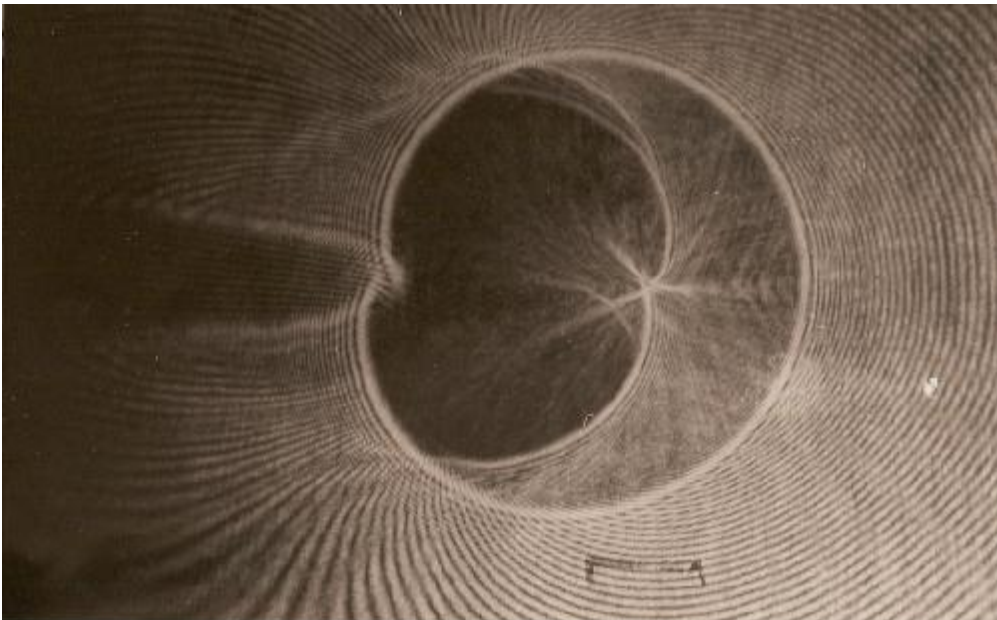
Εικόνα 9. Καυστική Δοκιμίου 2, χωρίς επένδυση για φορτίο 60kρ.



Εικόνα 10. Καυστική Δοκιμίου 2, χωρίς επένδυση για φορτίο 80kρ.

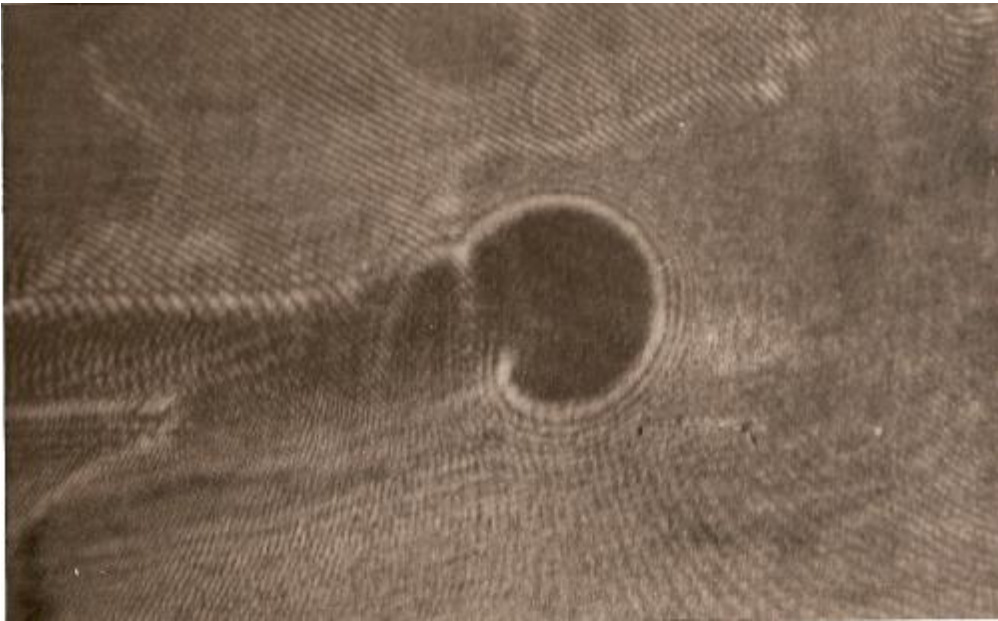


Εικόνα 11. Καστική Δοκιμίου 2, χωρίς επένδυση για φορτίο 100kr.

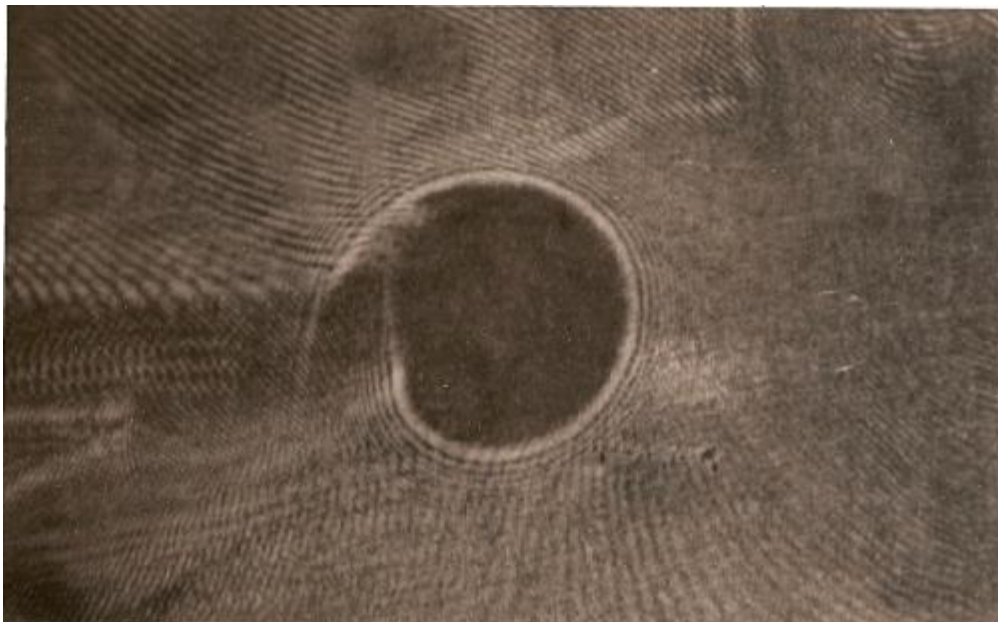


Εικόνα 12. Καστική Δοκιμίου 2, χωρίς επένδυση για φορτίο 120kr.

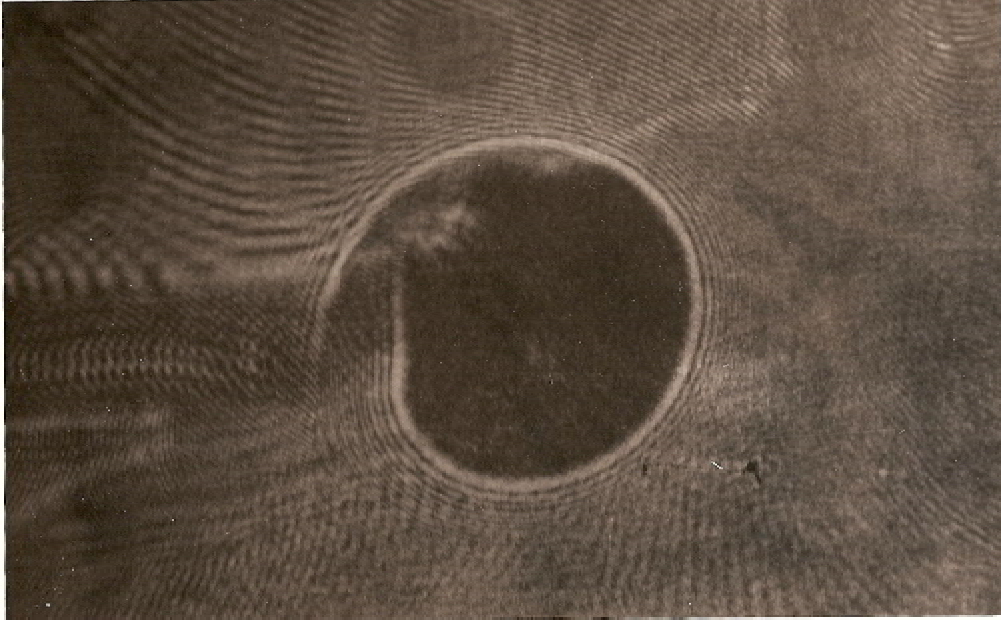
Οι φωτογραφίες που ακολουθούν αφορούν το Βασικό Δοκίμιο 1. Πρόκειται για την απεικόνιση των καυστικών, όταν όμως το δοκίμιο φέρει την επένδυση διαστάσεων 200mm x 100mm.



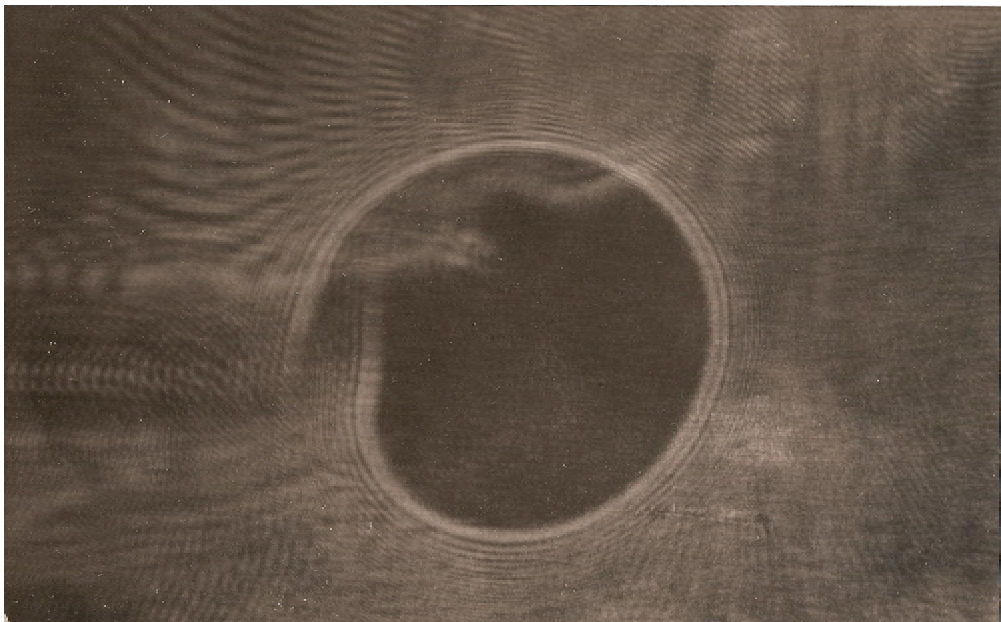
Εικόνα 13. Καυστική Δοκίμιου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 20kρ.



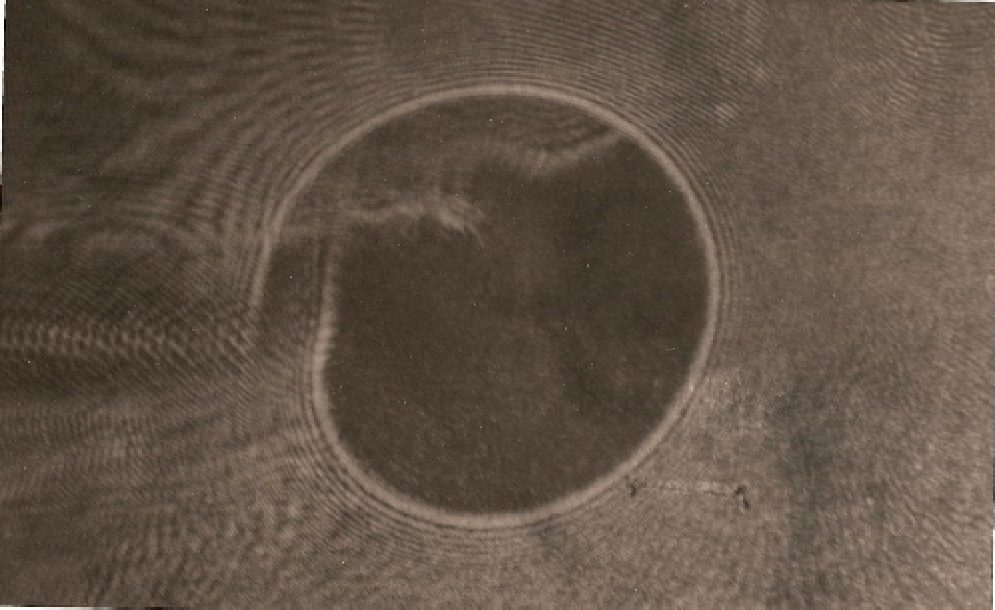
Εικόνα 14. Καυστική Δοκίμιου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 40kρ.



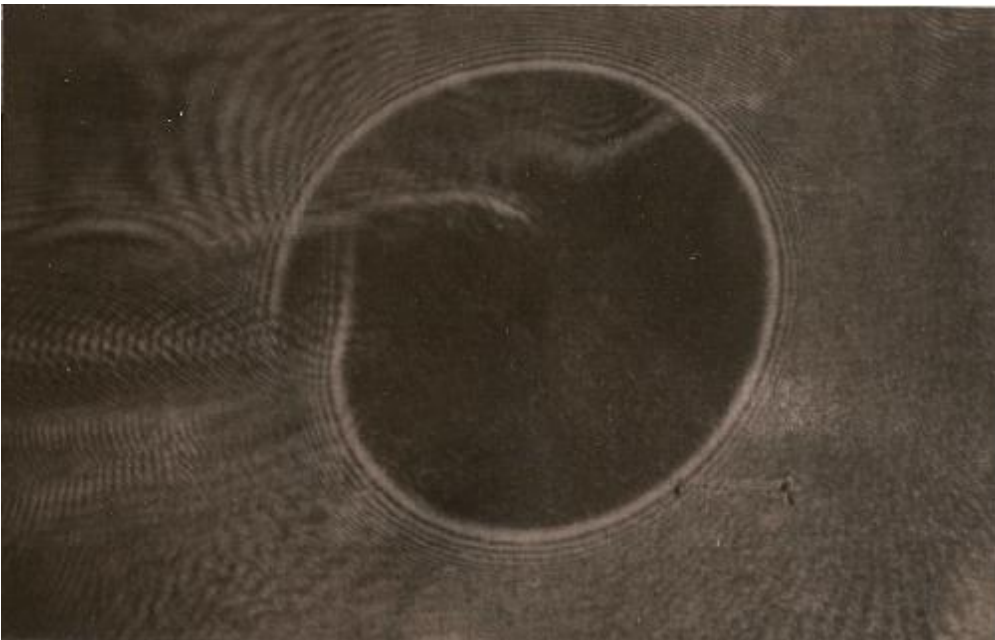
Εικόνα 15. Καυστική Δοκμίου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 60kp.



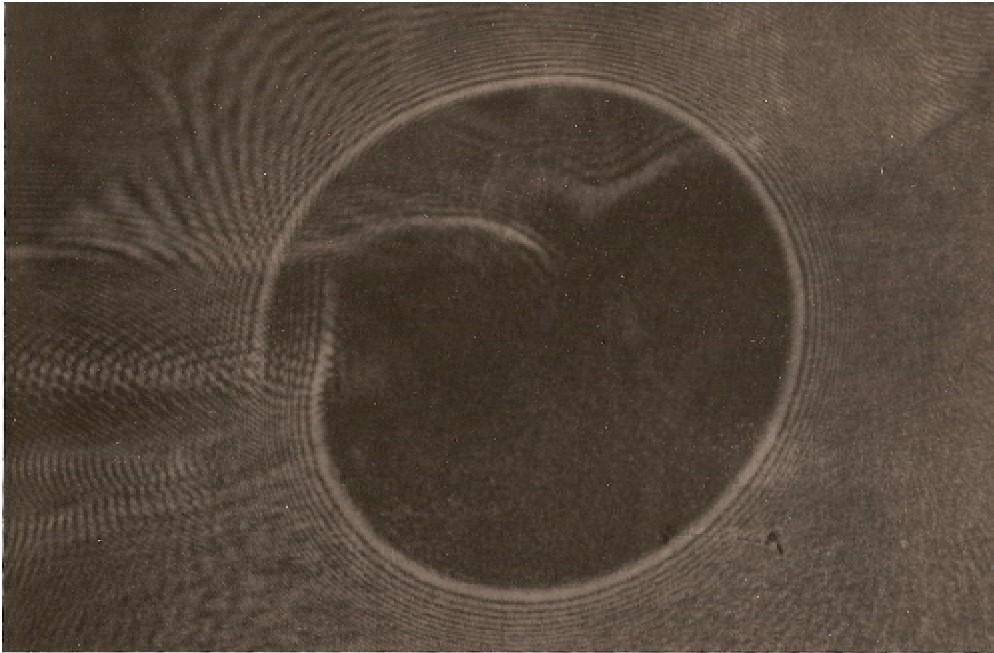
Εικόνα 16. Καυστική Δοκμίου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 80kp.



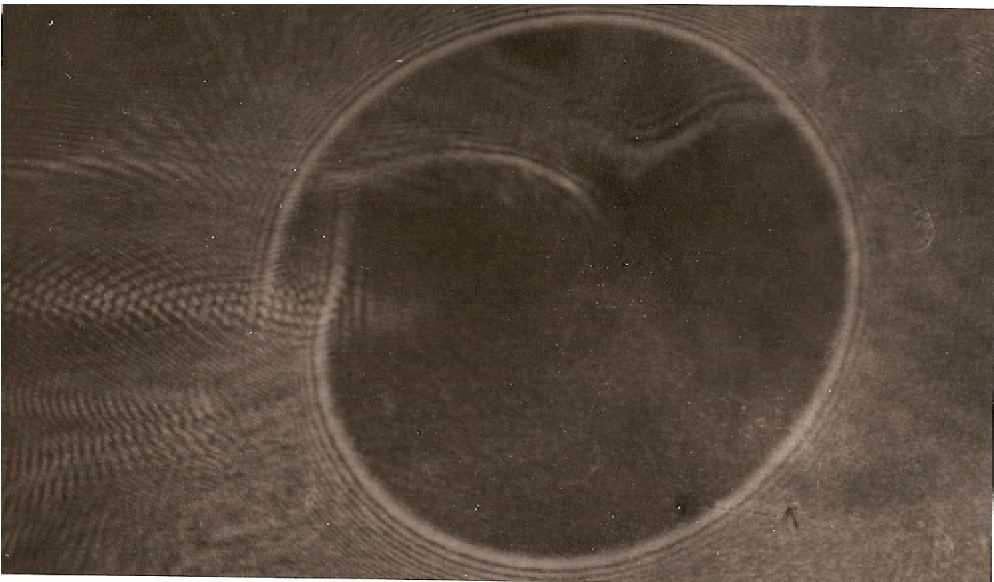
Εικόνα 17. Καυστική Δοκιμίου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 100kp.



Εικόνα 18. Καυστική Δοκιμίου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 120kp.



Εικόνα 19. Καυστική Δοκμίου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 140kp.

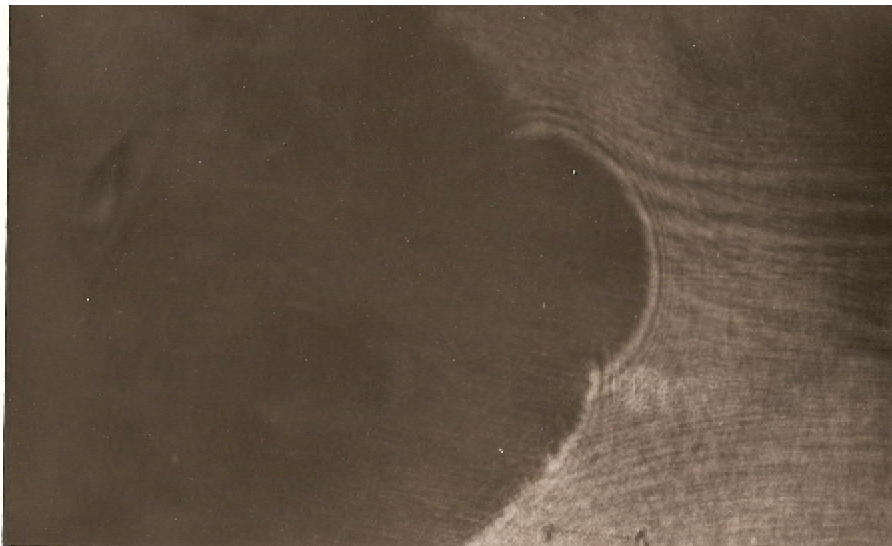


Εικόνα 20. Καυστική Δοκμίου 1, με επένδυση 200x100 mm για φορτίο 160kp.

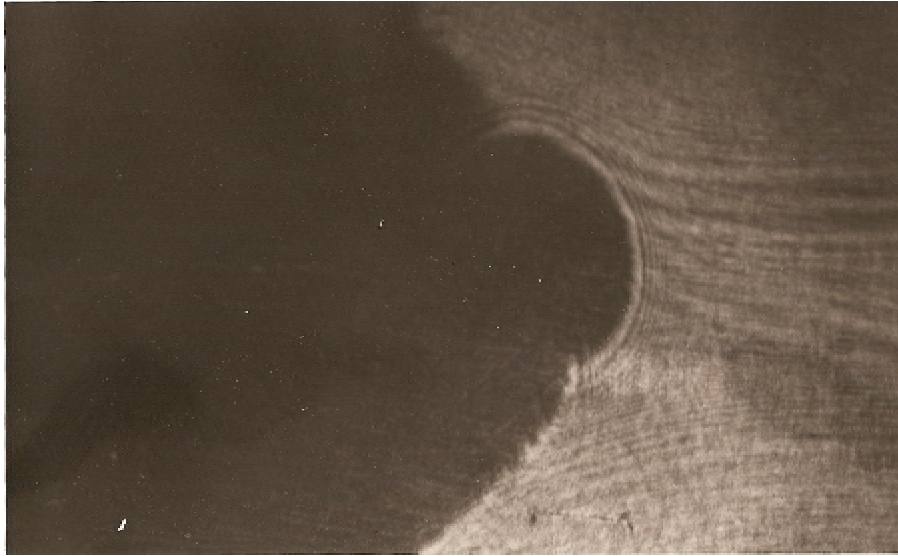
Τέλος, παραθέτουμε φωτογραφίες που αφορούν το Βασικό Δοκίμιο 2. Πρόκειται για την απεικόνιση των καυστικών, όταν όμως το δοκίμιο φέρει την επένδυση διαστάσεων 80mm x 100mm.



Εικόνα 21. Καυστική Δοκμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 80kρ.



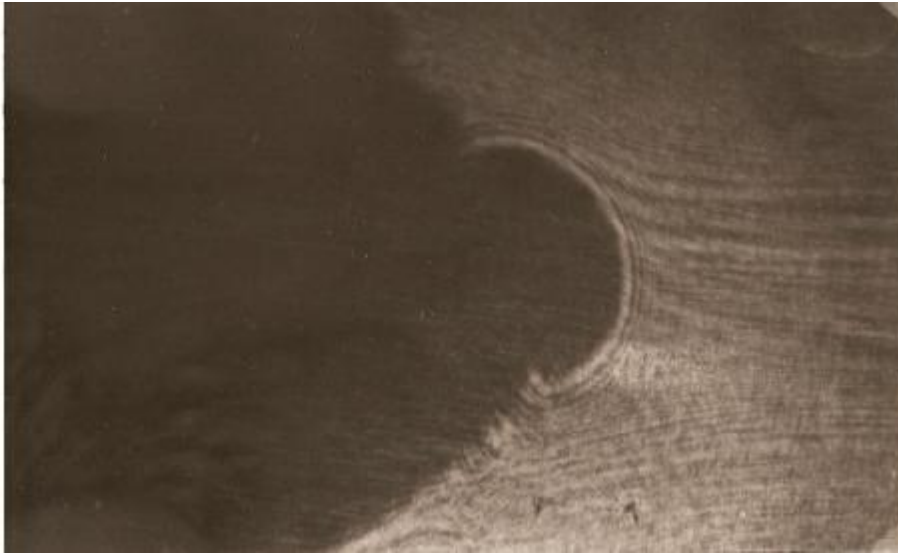
Εικόνα 22. Καυστική Δοκμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 120kρ.



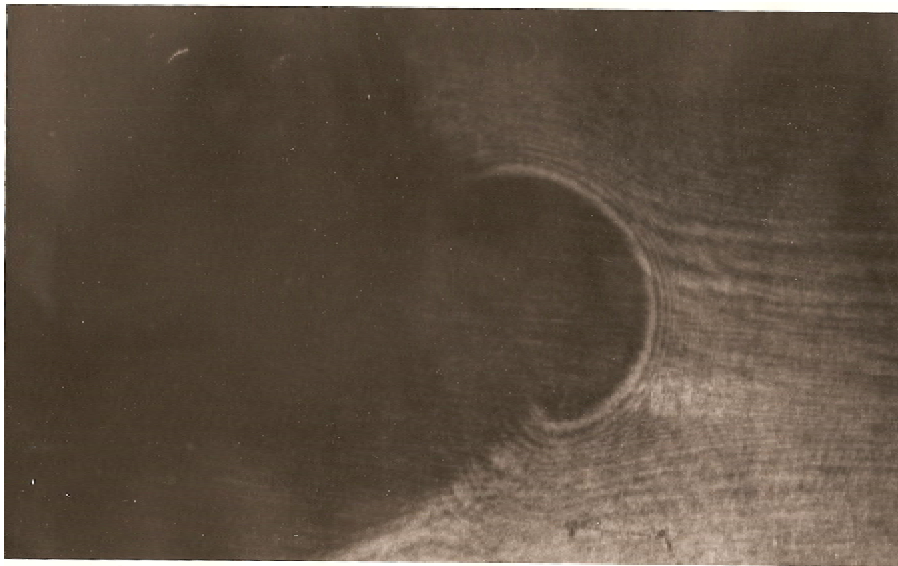
Εικόνα 23. Καυστική Δοκιμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 150kp.



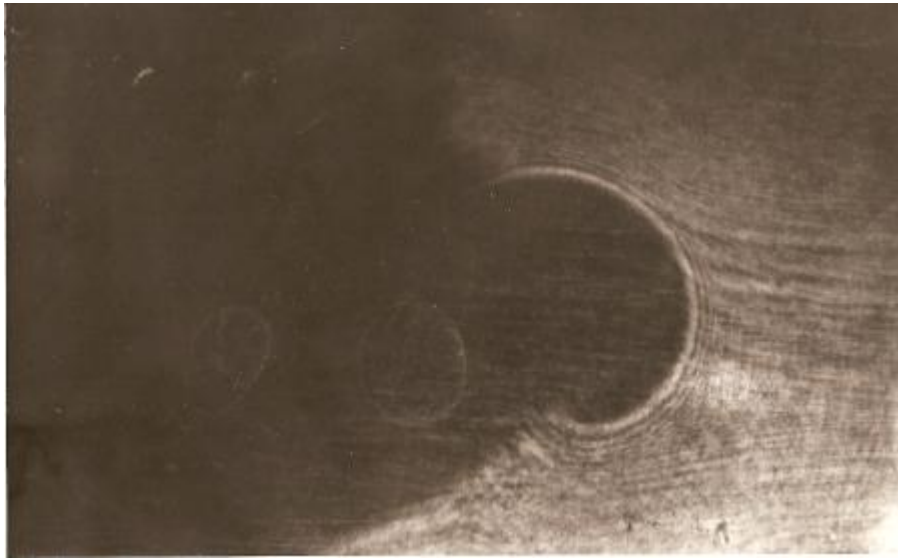
Εικόνα 24. Καυστική Δοκιμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 180kp.



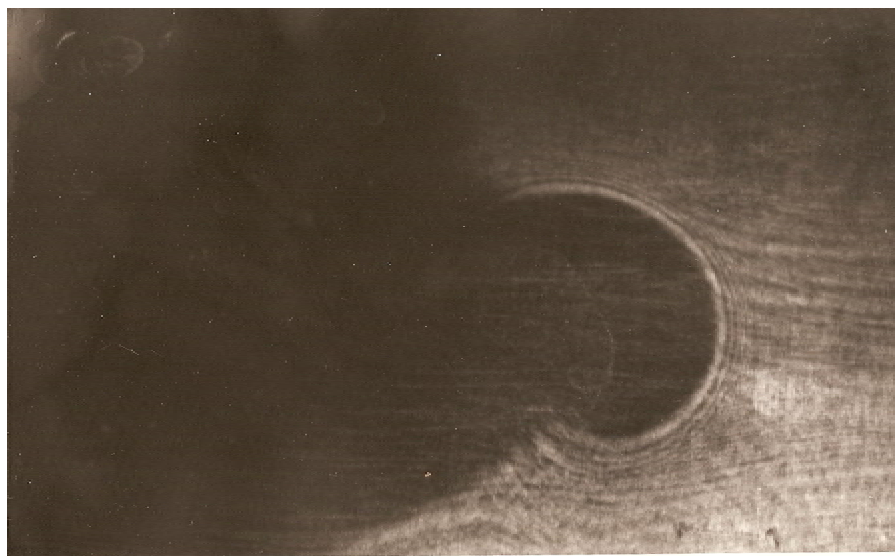
Εικόνα 25. Καυστική Δοκιμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 240kr.



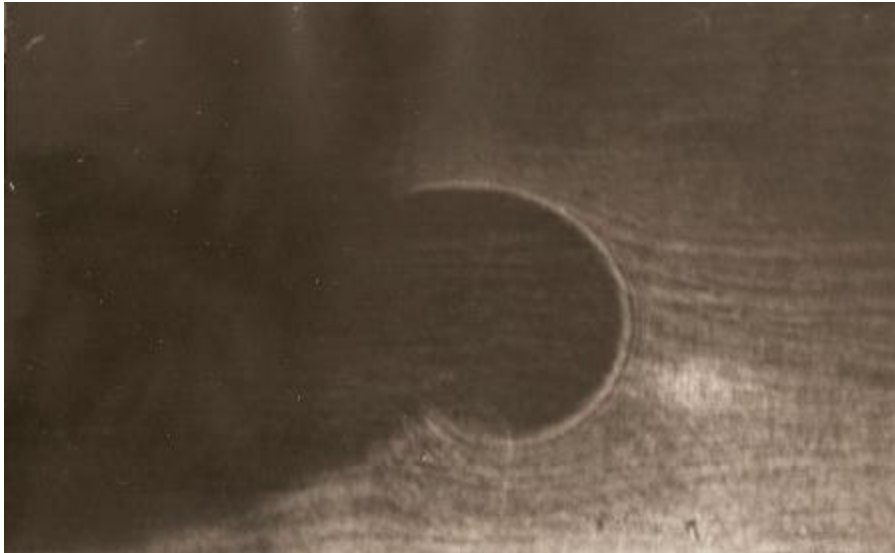
Εικόνα 26. Καυστική Δοκιμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 300kr.



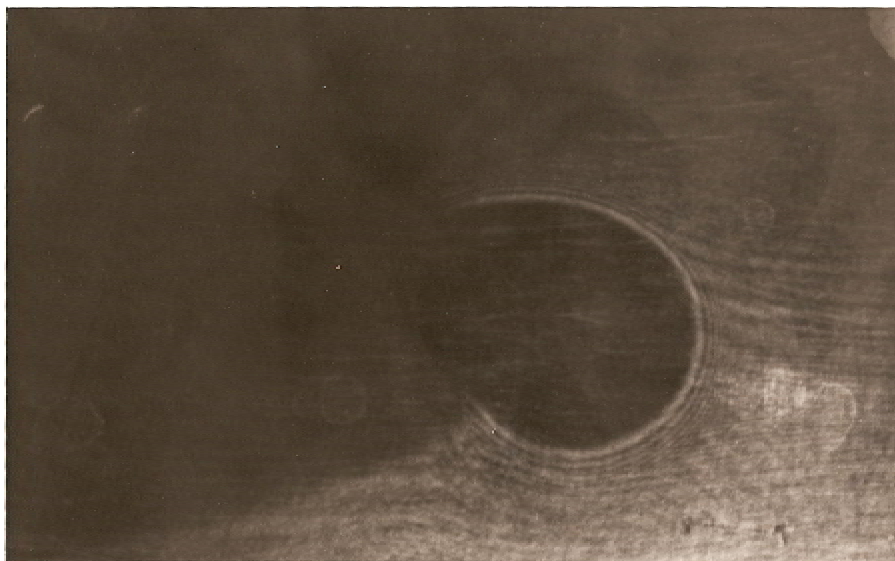
Εικόνα 27. Καυστική Δοκιμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 360kr.



Εικόνα 28. Καυστική Δοκιμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 420kr.



Εικόνα 29. Καυστική Δοκμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 480kp.



Εικόνα 30. Καυστική Δοκμίου 2, με επένδυση 80x100 mm για φορτίο 540kp.

4.4.2 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε την τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF). Από τις φωτογραφίες που παρουσιάσαμε ανωτέρω μετρούμε με την βοήθεια κανόνα το μήκος της διαμέτρου της εσωτερικής καυστικής.

Αυτό που είναι πολύ σημαντικό και απαραίτητο να τονιστεί είναι το εξής: σε κάθε φωτογραφία κάτω δεξιά βρίσκεται μια οριζόντια μαύρη γραμμή. Πρόκειται για τον μάρτυρα που ήταν σχεδιασμένος στο πέτασμα. Ο μάρτυρας μετρήθηκε στο εργαστήριο 2cm. Με την βοήθεια του θα υπολογίσουμε το ακριβές μέγεθος της διαμέτρου της καυστικής μετρώντας ταυτόχρονα το μήκος του μάρτυρα στην φωτογραφία και λαμβάνοντας υπ' όψη το πραγματικό του μέγεθος. Έτσι, για παράδειγμα, εάν μετρήσουμε σε μία φωτογραφία, διάμετρο $D = 4 \text{ cm}$ και μήκος μάρτυρα $m = 3 \text{ cm}$, το πραγματικό μέγεθος της διαμέτρου της καυστικής θα'ναι:

$$D' = \frac{2 \times 4}{3} = 2.66 \text{ cm}$$

Οι φωτογραφίες που παρουσιάστηκαν παραπάνω μποτούν να χωριστούν σε τρία σετ αντίστοιχα με το κάθε φιλμ που χρησιμοποιήθηκε.

-Στο πρώτο φιλμ έχουμε τις φωτογραφίες των δύο Δοκιμίων 1 και 2, χωρίς επένδυση, δηλ. φωτογραφίες 1 έως 12. Για το σετ αυτών των φωτογραφιών ο μάρτυρας μετρήθηκε ίσος με $m = 1.75 \text{ cm}$ ή αλλιώς $m = 175 \times 10^{-4} \text{ m}$.

-Από το δεύτερο φιλμ παρουσιάστηκαν οι φωτογραφίες του Δοκιμίου 1 όταν αυτό έφερε την επένδυση διαστάσεων 200mm x 100mm. Πρόκειται για τις φωτογραφίες 13 έως 20. Για το σετ αυτών των φωτογραφιών ο μάρτυρας μετρήθηκε ίσος με $m = 1.90 \text{ cm}$ ή αλλιώς $m = 190 \times 10^{-4} \text{ m}$.

-Τέλος, από το δεύτερο φιλμ παρουσιάστηκαν οι φωτογραφίες του Δοκιμίου 2 όταν αυτό έφερε την επένδυση διαστάσεων 80mm x 100mm. Πρόκειται για τις φωτογραφίες 21 έως 30. Για το σετ αυτών των φωτογραφιών ο μάρτυρας μετρήθηκε ίσος με $m = 1.90 \text{ cm}$ ή αλλιώς $m = 190 \times 10^{-4} \text{ m}$.

Οι μεταβολές που παρατηρούνται στο μέγεθος του μάρτυρα οφείλονται στην μετακίνηση της βάσης της φωτογραφικής μηχανής κατά τις αλλαγές των φιλμ, καθώς και στο ότι τα πειράματα δεν πραγματοποιήθηκαν όλα μαζί. Έτσι είναι πολύ πιθανή τυχόν μετακίνηση του πετάσματος στο οποίο προβάλλεται η καυστική.

Όπως αποδείχτηκε στο Κεφάλαιο 3 και παρουσιάστηκε στην σχέση (3.68) ο Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) είναι ίσος με:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2p}}{3ez_0 d l_m^{3/2} c_f} \left(\frac{D_t^{\max}}{d_t^{\max}} \right)^{5/2} \quad (3.68)$$

Το μετρούμενο μέγεθος που είναι η διάμετρος της εσωτερικής καυστικής είναι το D_i^{\max} . Αυτές οι τιμές μετρούνται και αντικαθίστανται. Ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$I_m = \frac{z_0 - z_i}{z_i},$$

και για τις τιμές των $z_0 = 228mm$ και $z_i = 18mm$ που μετρήθηκαν προκύπτει $I_m = 11.67$.

Για τις μετρήσεις του Δοκιμίου 2 με την επένδυση διαστάσεων $100mm \times 100mm$, μετρήθηκαν $z_0 = 184mm$ και $z_i = 14mm$. Έτσι προκύπτει $I_m = 12.14$

Τα υπόλοιπα μεγέθη που εμφανίζονται στην σχέση (3.68) έχουν ως εξής:

- $e = 1$, για το είδος της συγκεκριμένης ρωγμής και φόρτισης,
- $d = 2 \times 10^{-3} m$, το πάχος του δοκιμίου,
- $c_f = \frac{\nu}{E}$, όπου ν ο λόγος του Poisson και E το μέτρο της ελαστικότητας. Άρα υπολογίζουμε $c_f = 1.286 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$ όπως δίνεται και στον πίνακα 1.
- $d_i^{\max} = 3.1702$, συντελεστής διόρθωσης των διαμέτρων της καυστικής.

Συνεπώς, με την βοήθεια όλων των παραπάνω, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) K_I ύστερα από την μέτρηση των διαμέτρων της καυστικής.

Στους Πίνακες, 3 έως 6, που ακολουθούν παρουσιάζονται οι τιμές της διαμέτρου της καυστικής για τα διάφορα φορτία, τόσο για το Δοκίμιο 1 με και χωρίς την επένδυση όσο και για το Δοκίμιο 2, επίσης με και χωρίς την επένδυση. Σε κάθε πίνακα σημειώνουμε δίπλα και το μέγεθος του μάρτυρα. Στην συνέχεια και με την βοήθεια όλων των παραπάνω γίνεται ο υπολογισμός του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων όπως παρατίθεται παρακάτω.

Έχουμε:

Πίνακας 4.3: Δοκίμιο 1 χωρίς Επέκταση.

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	Διάμετρος D_t^{\max} (m)
20	196,133	0,0388
40	392,266	0,0462
60	588,399	0,0588
80	784,532	0,0742
100	980,665	0,0817
120	1176,798	0,0880

Σημ: Μήκος μάρτυρα $m=1.75\text{cm}$.

Πίνακας 4.4: Δοκίμιο 1 με Επέκταση.

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	Διάμετρος D_t^{\max} (m)
20	196,133	0.0368
40	392,266	0.0435
60	588,399	0.0547
80	784,532	0.0684
100	980,665	0.0768
120	1176,798	0.0832
140	1372,931	0.0915
160	1569,064	0.0979

Σημ: Μήκος μάρτυρα $m=1.90\text{cm}$.

Πίνακας 4.5: Δοκίμιο 2 χωρίς Επένδυση.

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	Διάμετρος D_t^{\max} (m)
20	196,133	0.0377
40	392,266	0.0491
60	588,399	0.0662
80	784,532	0.0742
100	980,665	0.0822
120	1176,798	0.0880

Σημ: Μήκος μάρτυρα m=1.75cm.

Πίνακας 4.6: Δοκίμιο 2 με Επένδυση.

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	Διάμετρος D_t^{\max} (m)
20	196,133	0,057
40	392,266	0,064
60	588,399	0,069
80	784,532	0,073
100	980,665	0,079
120	1176,798	0,084
140	1372,931	0,087
160	1569,064	0,091

Σημ: Μήκος μάρτυρα m=1.90cm.

Συνεπώς, γνωρίζοντας όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στην σχέση (3.86) είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε τον Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) για κάθε περίπτωση. Επίσης, τα αποτελέσματα παριστάνονται και σε αντίστοιχα γραφήματα.

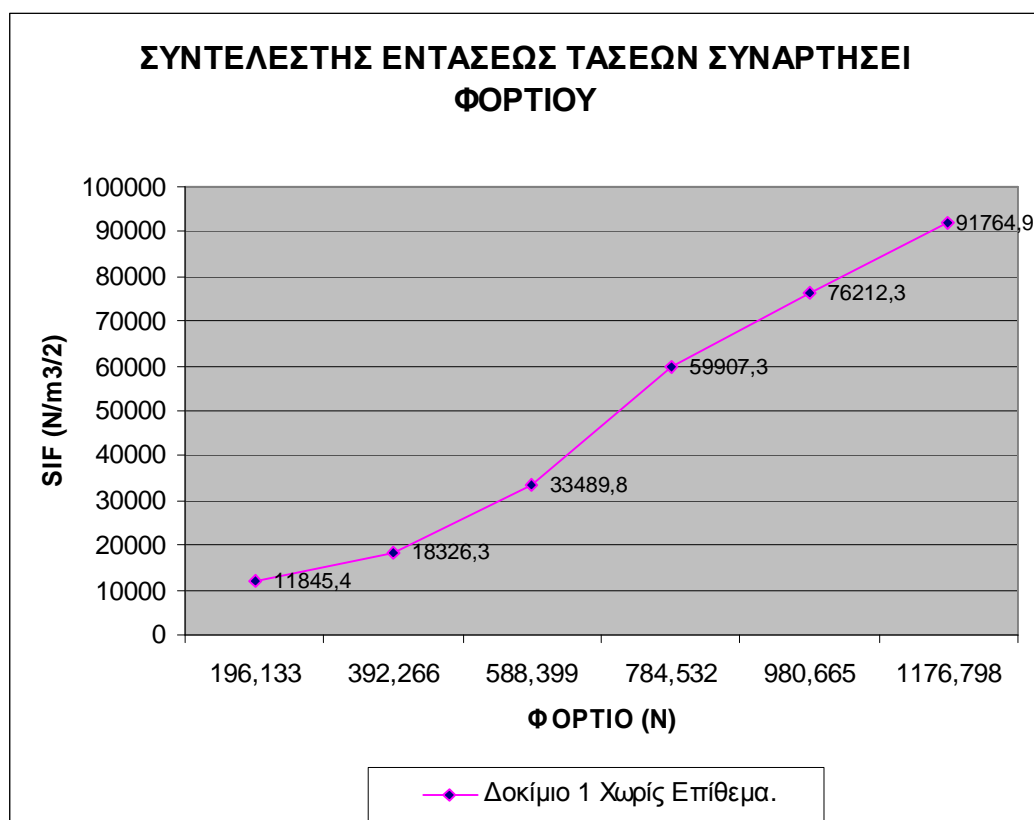
1) Βασικό Δοκίμιο 1 LEXAN χωρίς Επίθεμα

Στον παρακάτω Πίνακα 4.7 παρουσιάζεται η τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) για τα φορτία των 20,40,60,80,100 και 120 kp αντίστοιχα:

Πίνακας 4.7

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	11845,4
40	392,266	18326,3
60	588,399	33489,8
80	784,532	59907,3
100	980,665	76212,3
120	1176,798	91764,9

Ακολουθεί διαγραμματική απεικόνιση της μεταβολής του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) κατά την αύξηση των ασκούμενων εφελκυστικών φορτίων.



Γράφημα 4.1: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσεϊ του φορτίου στο Δοκίμιο 1 χωρίς επένδυση.

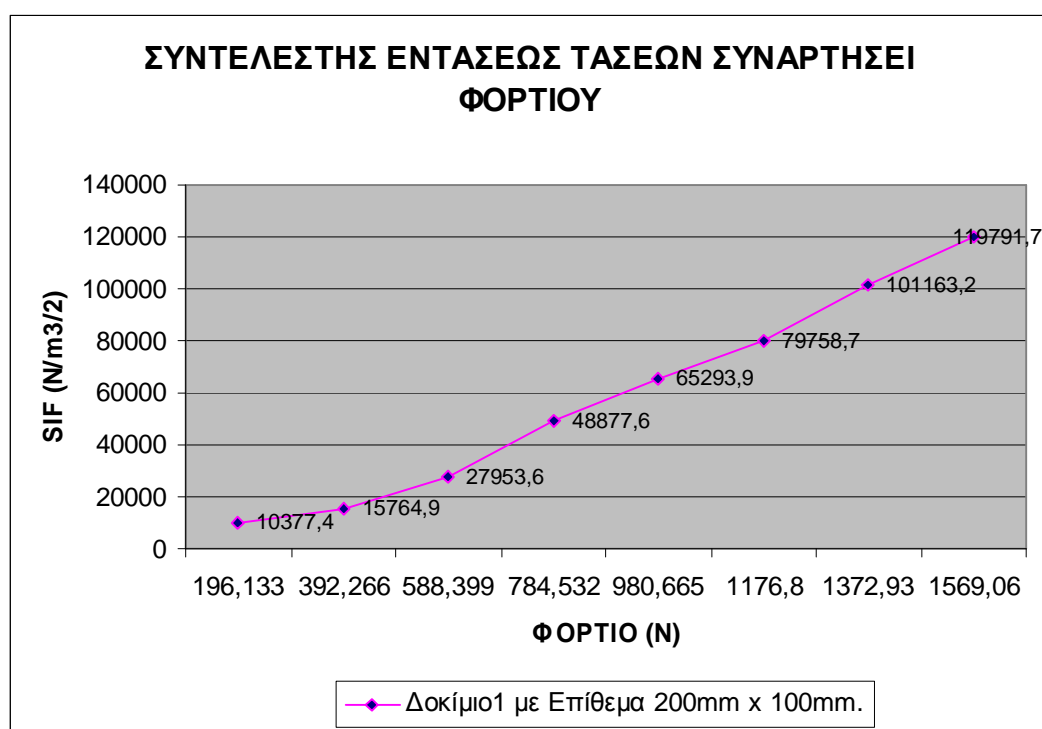
2) Βασικό Δοκίμιο 1 LEXAN με Επίθεμα Plexiglas Διαστάσεων 200mm x 100mm

Στον παρακάτω Πίνακα 4.8 παρουσιάζεται η τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) για τα φορτία των 20,40,60,80,100,120,140 και 160 kp αντίστοιχα:

Πίνακας 4.8

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	10377,4
40	392,266	15764,9
60	588,399	27953,6
80	784,532	48877,6
100	980,665	65293,9
120	1176,798	79758,7
140	1372,931	101163,2
160	1569,064	119791,7

Ακολουθεί διαγραμματική απεικόνιση της μεταβολής του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) κατά την αύξηση των ασκούμενων εφελκυστικών φορτίων.



Γράφημα 4.2: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσει του φορτίου στο Δοκίμιο 1, με επένδυση διαστάσεων 20mm x 10mm.

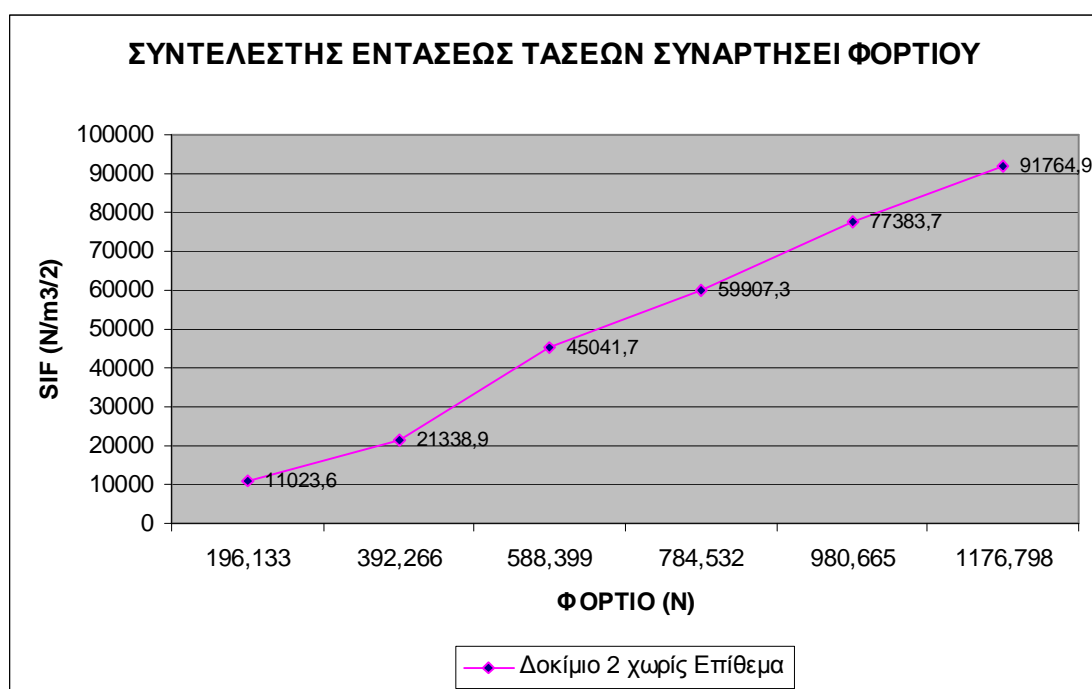
3) Βασικό Δοκίμιο 2 LEXAN χωρίς Επίθεμα.

Στον παρακάτω Πίνακα 4.9 παρουσιάζεται η τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) για τα φορτία των 20,40,60,80,100 και 120 kp αντίστοιχα:

Πίνακας 4.9

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	11023,6
40	392,266	21338,9
60	588,399	45041,7
80	784,532	59907,3
100	980,665	77383,7
120	1176,798	91764,9

Ακολουθεί διαγραμματική απεικόνιση της μεταβολής του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) κατά την αύξηση των ασκούμενων εφελκυστικών φορτίων.



Γράφημα 4.3: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσεϊ του φορτίου στο Δοκίμιο 2 χωρίς επένδυση.

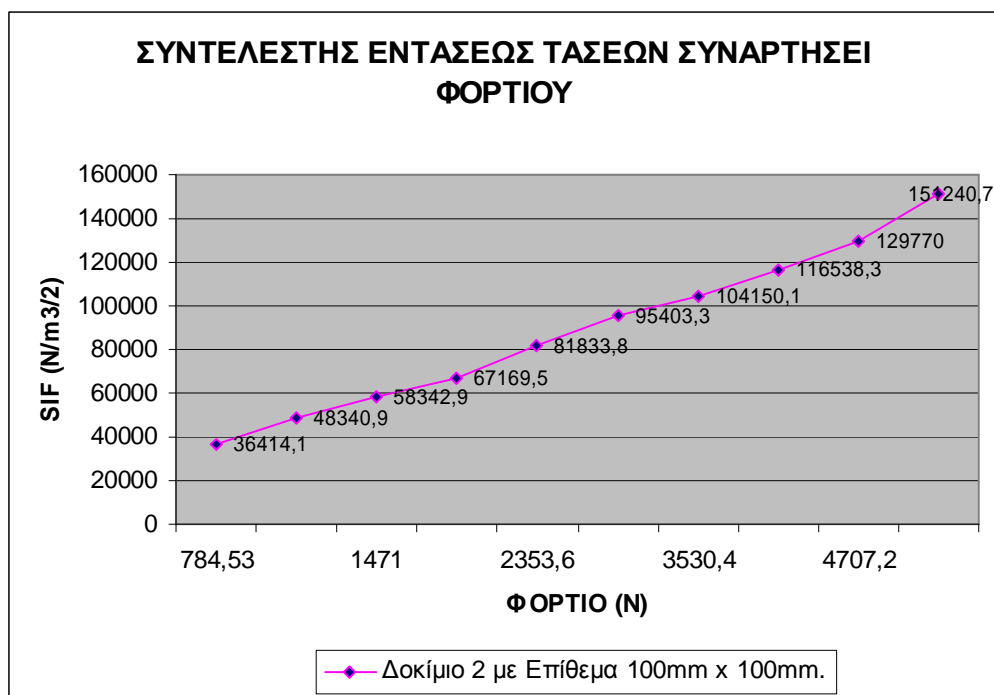
4) Βασικό Δοκίμιο 2 LEXAN με Επίθεμα Plexiglas Διαστάσεων 80mm x 100mm

Στον παρακάτω Πίνακα 4.10 παρουσιάζεται η τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) για τα φορτία των 20,40,60,80,100 και 120 kp αντίστοιχα:

Πίνακας 4.10

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
80	784,532	36414,1
120	1176,798	48340,9
150	1470,9975	58342,9
180	1765,197	67169,5
240	2353,596	81833,8
300	2941,995	95403,3
360	3530,394	104150,1
420	4118,793	116538,3
480	4707,192	129770,0
540	5295,591	151240,7

Ακολουθεί διαγραμματική απεικόνιση της μεταβολής του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) κατά την αύξηση των ασκούμενων εφελκυστικών φορτίων.



Γράφημα 4.3: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσεως του φορτίου στο Δοκίμιο 2 με επένδυση 100mm x 100mm.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία για τις τιμές του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF), είναι πραγματικά εντυπωσιακά. Οι τιμές είναι πολύ μικρές συγκριτικά με αυτές που υπολογίσαμε για τα δοκίμια 1 και 2 χωρίς την επένδυση αλλά και για το Δοκίμιο 1 με την επένδυση των διαστάσεων 80mm x 200mm. Αυτό εξηγείται, όπως αναφέρεται και στην παράγραφο που θα γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων, λόγω του σημαντικά μεγαλύτερου πάχους του επιθέματος σε σχέση με τις υπόλοιπες επενδύσεις (4mm έναντι 2mm). Επίσης το κόλλημα που επιτεύχθηκε μεταξύ των δύο επιφανειών ήταν πολύ καλύτερης ποιότητας, με αποτέλεσμα να ενισχύεται πολύ καλύτερα η περιοχή της ρωγμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

5.1) Εισαγωγή

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΠΣ) θεωρείται σήμερα μια αριθμητική μέθοδος κατάλληλη να λύνει προβλήματα μηχανικής ή μαθηματικών που διέπονται από διαφορικές εξισώσεις.

Σύμφωνα με την μέθοδο των ΠΣ ένας χώρος V χωρίζεται νοητά σ' ένα πεπερασμένο αριθμό υποχώρων V_n , που δεν αλληλοεπικαλύπτονται. Οι υποχώροι V_n καλούνται πεπερασμένα στοιχεία. Τα πεπερασμένα στοιχεία θεωρούνται ότι συνδέονται μεταξύ τους σ' ένα αριθμό σημείων, που καλούνται κόμβοι ή κομβικά σημεία. Κάθε στοιχείο θεωρείται ότι συνίσταται από το ίδιο υλικό με το αρχικό σώμα και ότι υπόκειται στις ίδιες καταστατικές εξισώσεις μ' αυτό. Το απλούστερο όμως σχήμα των στοιχείων και το πεπερασμένο μέγεθος τους, μας επιτρέπει να βρούμε μια προσεγγιστική λύση που να περιγράφει την εντατική τους κατάσταση με την βοήθεια ενός αριθμού παραμέτρων που συνήθως αναφέρονται στους κόμβους και επομένως καλούνται κομβικές παράμετροι. Γνωρίζοντας δηλαδή, τις μετακινήσεις (ή τάσεις) των κόμβων είναι δυνατόν χρησιμοποιώντας μια μέθοδο παρεμβολής να προσδιορίσουμε τις μετακινήσεις (ή τάσεις) μέσα σε κάθε στοιχείο. Γνωρίζοντας όμως το πεδίο των μετακινήσεων μέσα σε κάθε στοιχείο είναι εύκολο να βρούμε το πεδίο των τάσεων σ' αυτό και αντίστροφα.[21,22]

5.2) Ιστορικά

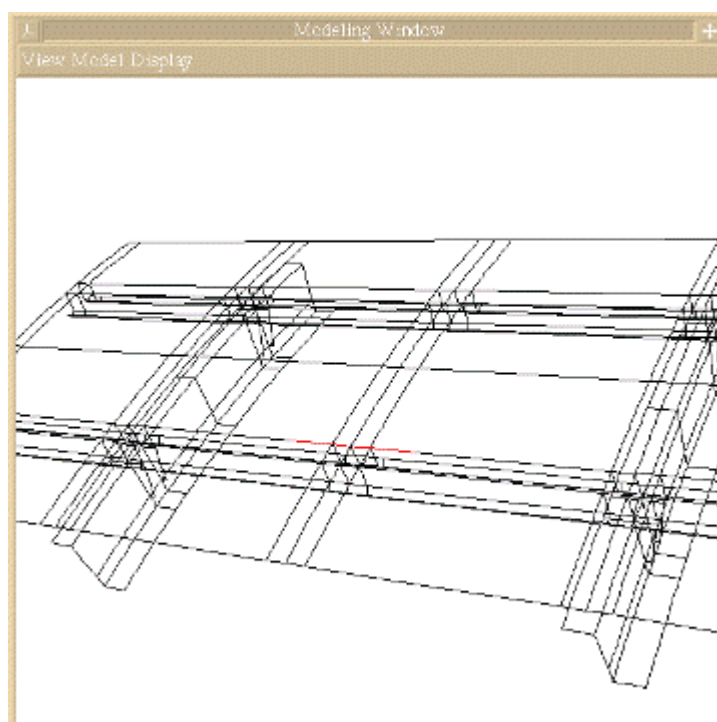
Η αναλυτική λύση των [εξισώσεων](#) με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά προβλήματα είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Όμως, υπήρχε η ανάγκη να λυθούν και πιο σύνθετα προβλήματα και γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία από τις σημαντικότερες εξελίξεις στις επιστήμες του μηχανικού κατά το δεύτερο ήμισυ του 20ού αιώνα. Η σύλληψη της μεθόδου αποδίδεται στο μεγάλο Έλληνα μηχανικό-ερευνητή Τζον Αργύρη, στην προσπάθειά του να επιλύσει το πρόβλημα του σχεδιασμού των πρώτων αεριοθούμενων μαχητικών αεροσκαφών με κεκλιμένες προς τα πίσω πτέρυγες στο Royal Aeronautical Society της Βρετανίας περί το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Η τυπική διατύπωση της μεθόδου παρουσιάστηκε με πληρότητα το 1960 σε μία εκτεταμένη μονογραφία των Τ. Αργύρη και S. Kelsey, καθώς και σε άρθρο του R. Clough στην άλλη πλευρά του Ατλαντικού.

Τα πεπερασμένα στοιχεία είναι μια από τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιεί η υπολογιστική μηχανική για να προσομοιώσει τα φυσικά προβλήματα. Ναι μεν πρόκειται για μέθοδο προσεγγιστική, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε [υπολογιστική ισχύ](#), ιδίως όταν

εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Στα χρόνια που ακολούθησαν, ωστόσο, μέχρι και σήμερα η μέθοδος εξελίχθηκε πάρα πολύ παράλληλα με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η μέθοδος από την φύση της είναι πολύ δαπανηρή σε πόρους ηλεκτρονικού υπολογιστή. Όταν πρωτοπαρουσιάστηκε, οι υπολογιστές της εποχής εκείνης (υπερυπολογιστές μάλιστα) είχαν πολύ μικρές δυνατότητες (μνήμες της τάξης των 16-32 Kb, μικρές τιμές MFLOP-αριθμού πράξεων πραγματικών αριθμών ανά δευτερόλεπτο). Οι σημερινοί (προσωπικοί) υπολογιστές που τρέχουν προγράμματα Π.Σ. έχουν πολλαπλάσιες δυνατότητες από τους υπολογιστές εκείνης της εποχής (μνήμες της τάξης των 128 Mb, 200 MFLOP και πλέον).

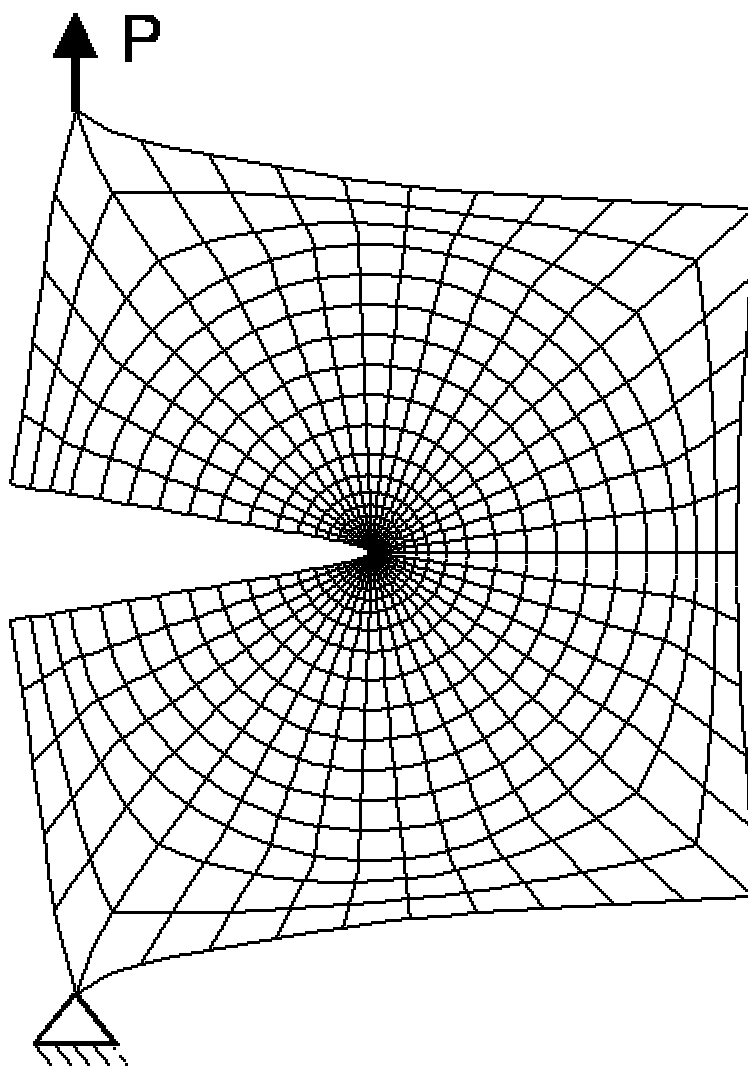
Η εξέλιξη αυτή στους υπολογιστές δεν άλλαξε μόνο το μέγεθος των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν, αλλά και τις μεθοδολογίες που ακολουθούνται και το εύρος και την πολυπλοκότητα των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν. Για παράδειγμα, ένας υπολογιστής της δεκαετίας του 70 μπορούσε να λύσει προβλήματα της τάξης των 90-120 κόμβων με 30-40 στοιχεία. Ένας σύγχρονος υπολογιστής μπορεί να λύσει εύκολα προβλήματα της τάξης των 50-60x10³ κόμβων με 8-10x10³ στοιχεία. Όμως, όπως αναφέραμε υπάρχουν πιο ριζικές αλλαγές.

Ενώ παλιότερα τα προβλήματα λύνονταν στις 2 διαστάσεις κάνοντας απλοποιητικές παραδοχές, τώρα μπορούμε να επιλύσουμε κατευθείαν τα προβλήματα όπως είναι στην φύση (στις 3 διαστάσεις). Ακόμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πιο πολύπλοκα μοντέλα για την περιγραφή των υλικών: Ενώ αρχικά η μέθοδος επίλυε προβλήματα θεωρώντας τα υλικά με γραμμική συμπεριφορά (ελαστική), τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολύ πιο σύνθετα μοντέλα όπως πλαστικότητα, ρεολογία, κ.α. Όλα αυτά είναι δυνατόν να εφαρμοστούν επειδή έχουμε πια την απαραίτητη υπολογιστική ισχύ. Ενώ η γνώση για να επιλυθούν αυτά τα προβλήματα υπήρχε και παλαιότερα, ήταν αδύνατη η εφαρμογή της. Η επιτυχία αυτής της μεθόδου ήταν τόσο μεγάλη, που ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται στην έρευνα και στην βιομηχανία για τον υπολογισμό και τη μελέτη διάφορων κατασκευών.[22]



5.3) Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στην Επίλυση Προβλημάτων Ρωγμών. [10,11,12]

Η Βασική προσπάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΠΣ) στη Μηχανική Θραύσεως έχει συγκεντρωθεί στην πληρέστερη προσέγγιση των ιδιόμορφων πεδίων που υπάρχουν γύρω από την κορυφή της ρωγμής και επομένως στον προσδιορισμό των παραμέτρων της Μηχανικής Θραύσεως που συνδέονται μ' αυτά τα πεδία. Όμως, η μέθοδος των ΠΣ είναι μια συγκεκριμένη τεχνική με καθορισμένο πεδίο εφαρμογών και με ορισμένο σφάλμα προσέγγισης, της οποίας η θεωρητική ακρίβεια εξαρτάται από το πόσο καλά μπορεί το προσεγγιστικό πεδίο που εισάγει να πλησιάσει το πραγματικό πεδίο που ισχύει στο πρόβλημα που εξετάζεται.



Σχήμα 5.2 Πλεγματοποίηση πλάκας που φέρει ρωγμή.

Οι διάφοροι παράγοντες που επηρεάζουν την θεωρητική προσέγγιση της μεθόδου των ΠΣ είναι:

- Ο τύπος του στοιχείου, δηλαδή η γεωμετρία του, ο αριθμός των κόμβων που έχει και ο βαθμός του πολυωνύμου παρεμβολής.
- Ο τύπος του καννάβου, δηλαδή αραιός ή πυκνός, διαφορετικής τάξεως στοιχεία, εκφυλισμένα στοιχεία, κτλ.
- Ο τρόπος υπολογισμού των κομβικών φορτίων και γενικά ο τρόπος εισαγωγής των οριακών συνθηκών.
- Η ύπαρξη ιδιομορφιών στο εξεταζόμενο πρόβλημα, δηλαδή εισέχουσες γωνίες, ρωγμές, ενώσεις υλικών με γωνιακά σημεία, κτλ.

Το σφάλμα που οφείλεται σ' αυτούς τους παράγοντες, προέρχεται από την συνέπεια της προσέγγισης ενός συνεχούς μέσου με άπειρους βαθμούς ελευθερίας, μ' ένα μοντέλο που έχει πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

5.4) Μεθοδολογία Δημιουργίας Μοντέλου σε Πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων. [21]

Στο σημείο αυτό θα γίνει αναφορά των βημάτων που ακολουθήθηκαν για την κατασκευή του μοντέλου σε υπολογιστικό πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε είναι το ANSYS 11. Θα παρατεθεί πλήθος γραφημάτων για καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας.

- ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Θα δημιουργήσουμε την γεωμετρία της πλάκας προσδιορίζοντας αρχικά ορισμένα σημεία και στην συνέχεια ενώνοντας τα με γραμμές. Τα σημεία αυτά καλούνται keypoints. Έτσι:

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Modeling<Create<Keypoints<In Active CS**

Οι συντεταγμένες των σημείων είναι:

Keypoint	x	y
1	0	0.0001
2	0.03	0.0001
3	0.04	0
4	-0.03	-0.0001
5	0	-0.0001
6	0	-0.1
7	0.1	-0.1
8	0.1	0.1
9	0	0.1

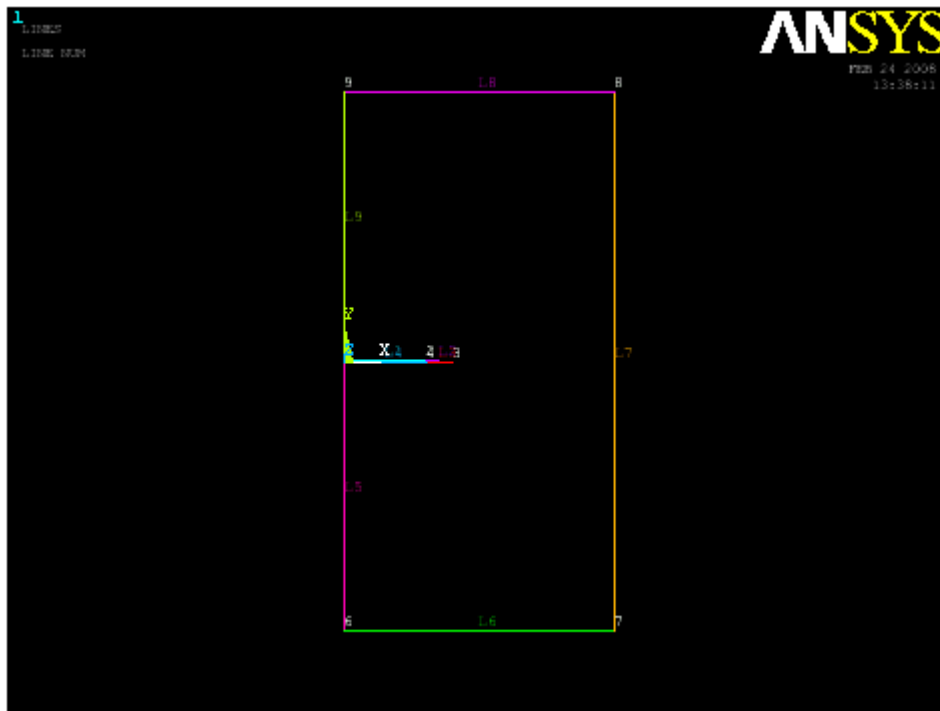
Ένωση των keypoints:

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Modeling<Create<Lines<Lines<Straight Line**

Σε περίπτωση που θέλουμε να δούμε αριθμημένα τα keypoints και τις γραμμές κάνουμε το εξής:

ANSYS Utility Menu: **PlotCtrls<Numbering**

Έτσι παίρνουμε την παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 5.1 Γραμμές και σημεία γεωμετρίας μοντέλου

Στην συνέχεια δημιουργούμε την επιφάνεια με την βοήθεια των γραμμών:

ANSYS Main Menu: **Preprosecor<Modeling<Create<Areas<Arbitrary<By
Lines**

- ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΥΛΙΚΩΝ

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τον τύπο του Πεπερασμένου Στοιχείου που θα χρησιμοποιήσουμε καθώς και τις ιδιότητες των υλικών (Lexan και Plexiglas).

-Ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Material Props<Material Models**

Επιλέγουμε **Structural<Linear<Elastic<Isotropic**

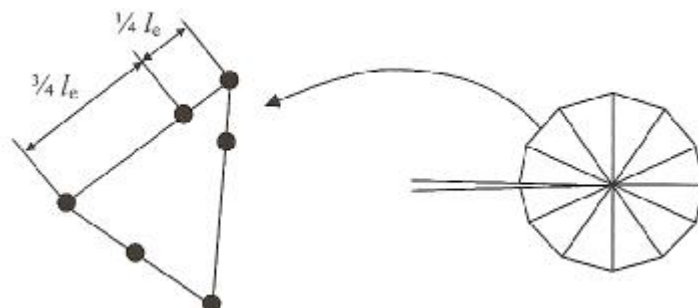
Και εισάγουμε στο κουτί που εμφανίζεται το μέτρο Ελαστικότητας E καθώς και τον λόγο Poisson για τα δύο υλικά.

-Στην συνέχεια επιλέγουμε τύπο Πεπερασμένου Στοιχείου. Από την βιβλιοθήκη τύπων ΠΣ του ANSYS επιλέγουμε το τριγωνικό στοιχείο 8-node 82.

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Element Type<Add/Edit/Delete<Add...**

Από τα **Options** για τον συγκεκριμένο στοιχείο επιλέγουμε επίπεδη εντατική κατάσταση (**Plane Strain**). Όπως έχουμε εξηγήσει και σε άλλη παράγραφο, άλλωστε, το πάχος της πλάκας είναι τόσο μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουμε Επίπεδη Εντατική Κατάσταση. Γι' αυτό η μοντελοποίηση που παρουσιάζεται και που έγινε στην πράξη είναι σε διδιάστατη πλάκα.

Σύγχρονες μελέτες και επιστημονικά άρθρα έχουν δείξει ότι για την μοντελοποίηση ρωγμής και δη το άκρο της καταλληλότερα είναι τα τριγωνικά στοιχεία. Η μορφή του 8-node 82 φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί. Επίσης γίνεται ορατή και η μορφή του ανοίγματος της ρωγμής, καθώς και το πώς αναπτύσσονται τα τριγωνικά ΠΣ γύρω από το άκρο της.



Σχήμα 5.3 Μορφή ΠΣ 8-node 82.

- **ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΑΚΡΟΥ ΡΩΓΜΗΣ**

Το σημείο 3 αποτελεί το άκρο της ρωγμής (Crack Tip). Παρακάτω παρουσιάζονται τα βήματα που ακολουθούνται για τον ορισμό του keypoint 3 ως άκρου της ρωγμής.

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Meshing<Size Ctrls<Concentrat KPs<Create**

Επιλέγουμε το keypoint 3. Στο παράθυρο που εμφανίζεται ορίζουμε τα εξής:

“Radius of 1st row of elems” = $(a/8) = 0.005$

και

“No of elems around circumf” = 16

Τέλος στην επιλογή “midside node position” = Skewed 1/4pt

Με τον τρόπο αυτό το keypoint 3 έχει οριστεί ως το άκρο της ρωγμής.

- **ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ**

Για την δημιουργία του πλέγματος είναι απαραίτητος ο διαμερισμός των γραμμών περιμετρικά της πλάκας.

Τις γραμμές #6 και #8 επιλέγουμε να τις χωρίσουμε σε 4 τμήματα. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Meshing<Size Ctrls<Manual Size<Lines<
<Picked Lines**

Επιλέγουμε τις γραμμές #6 και #8 και στο παράθυρο που εμφανίζεται επιλέγουμε αριθμό διαμερίσεων “No. Of element divisions” = 4

Την ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθούμε για να διαμερίσουμε την γραμμή #7. Η γραμμή #7, όμως, θα χωριστεί σε 8 τμήματα.

Τέλος, θα διαμερίσουμε τις γραμμές #9 και #5. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ακριβώς η ίδια, με την μόνη διαφορά ότι στην επιλογή “spacing ratio” θα βάλουμε 0.2. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα καθώς πλησιάζουμε προς το άνοιγμα της ρωγμής να πυκνώνει το πλέγμα.

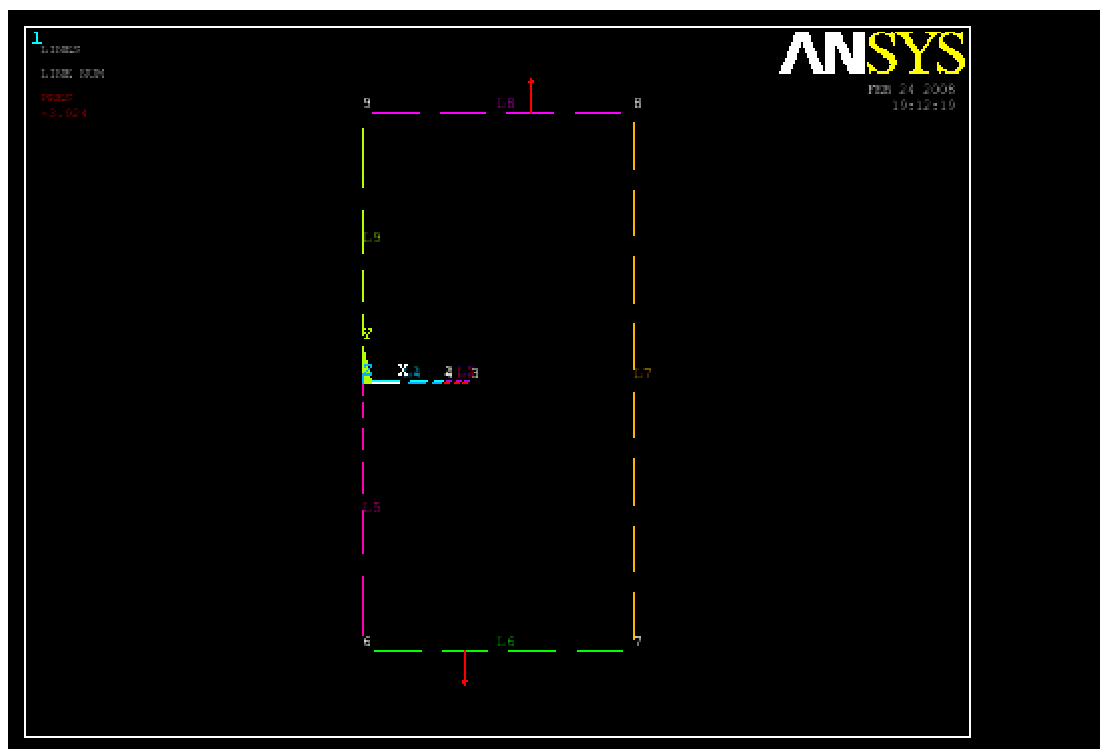
- **ΕΠΙΒΟΛΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**

Για να τοποθετήσουμε τις δυνάμεις στις δύο οριζόντιες πλευρές της πλάκας ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

ANSYS Main Menu: **Preprocessor<Loads<Define Loads<Apply<Structural<
<Pressure<On Lines**

Επιλέγουμε τις γραμμές #6 και #8 και επιλέγουμε OK. Στο παράθυρο που εμφανίζεται επιλέγουμε αφ' ενός να έχουμε Constant Value και αφ' ετέρου την τιμή της φόρτισης που επιθυμούμε να επιβληθεί.

Παραθέτουμε το σχήμα που δείχνει όλα τα παραπάνω:



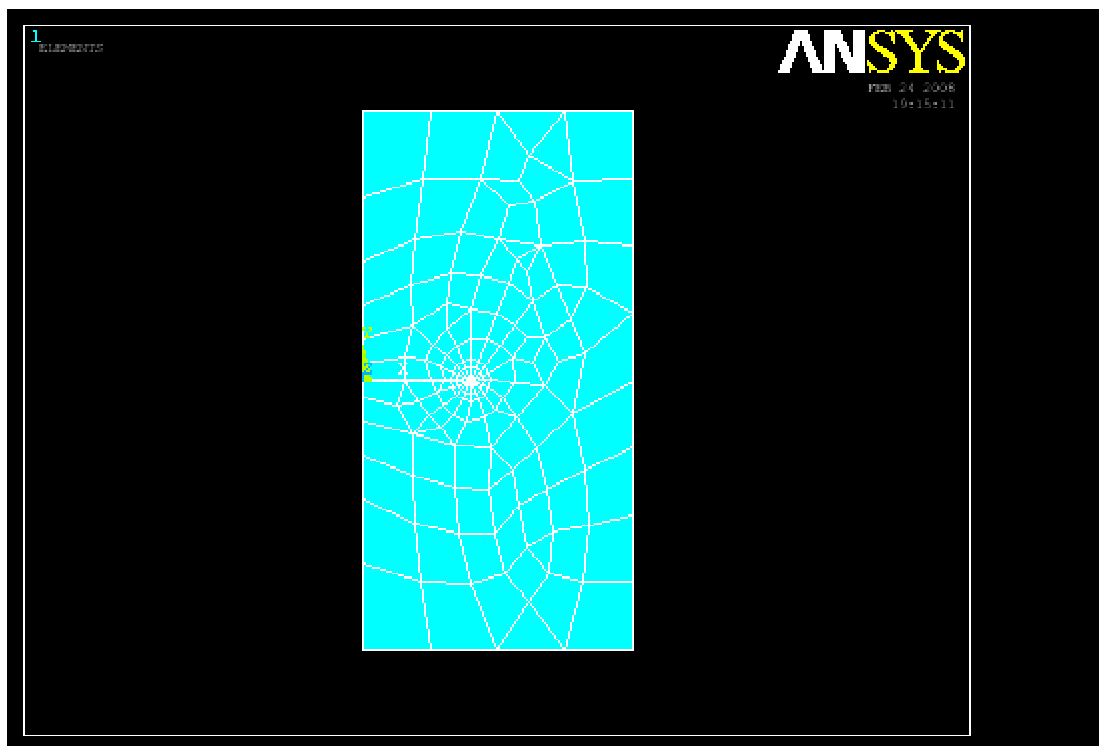
Εικόνα 5.2 Εμφάνιση διαμερισμένων γραμμών μοντέλου προς δημιουργία πλέγματος.

- ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Μετά την συμπλήρωση των παραπάνω είμαστε έτοιμοι να δημιουργήσουμε το πλέγμα. Προχωρούμε στα εξής βήματα:

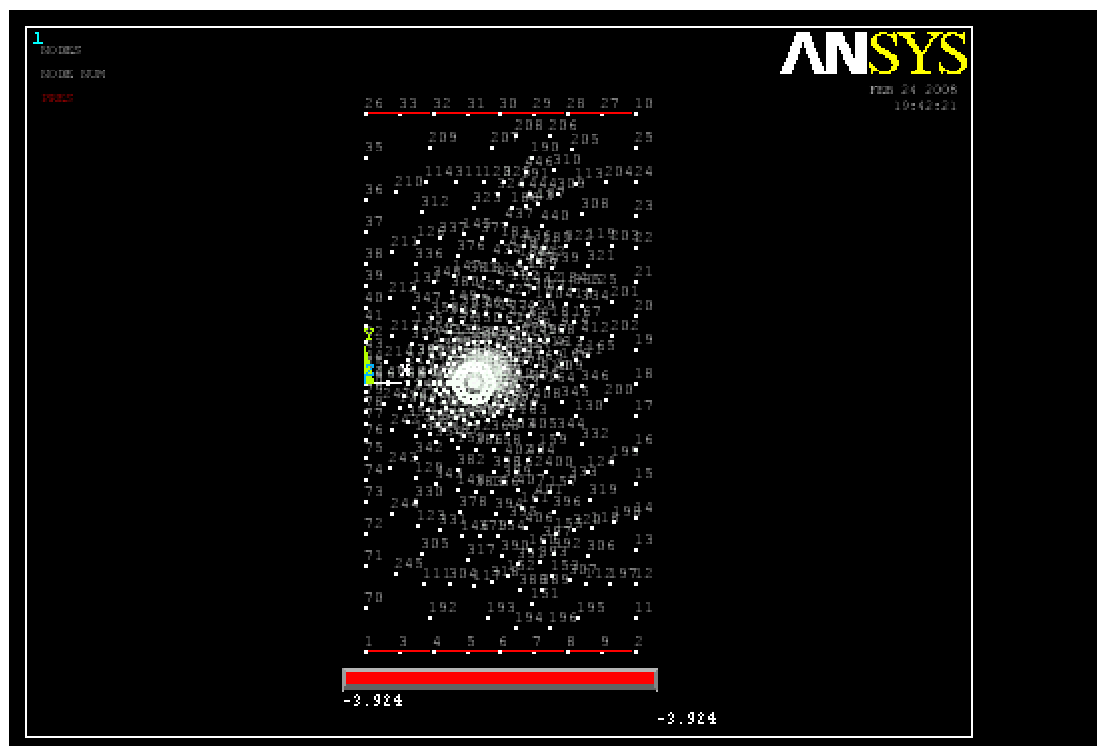
ANSYS Main Menu: **Preproccor<Meshing<Mesh<Areas<Free**

Το σχήμα που προκύπτει είναι το παρακάτω:



Εικόνα 5.3 Πλεγματοποιημένο μοντέλο.

Επίσης, στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται αριθμημένοι οι κόμβοι:



Εικόνα 5.4 Κόμβοι μοντέλου.

- **ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ**

Με βάση τα όσα χαρακτηριστικά έχουμε εισάγει στο σύστημα, προχωράμε στην επίλυση του μοντέλου.

Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

ANSYS Main Menu: **Solution<Analysis Type<New Analysis**

Επιλέγουμε Στατική επίλυση του μοντέλου (**STATIC**).

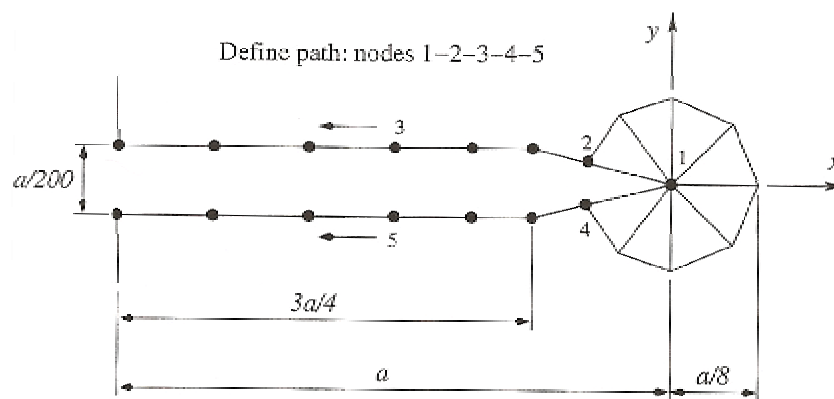
ANSYS Main Menu: **Solution<Solve<Current LS**

Στα παράθυρα που εμφανίζονται επιλέγουμε “**YES**” και “**OK**” και τελικά το σύστημα επιλύεται.

- **ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ**

Πλέον είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε τον Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF). Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να προσδιοριστεί το μέτωπο της ρωγμής.

Η μορφή του ανοίγματος της ρωγμής είναι η παρακάτω:



Σχήμα 5.4 Άνοιγμα ρωγμής και άκρο αυτής.

Αρχικά, κάνουμε zoom γύρω από το άκρο της ρωγμής. Αυτό επιτυγχάνεται με την επιλογή Pan Zoom Rotate από το Utility Menu.

ANSYS Utility Menu: **PlotCtrls<Pan Zoom Rotate**

Στην συνέχεια ορίζουμε το μονοπάτι κατά το μέτωπο της ρωγμής.

ANSYS Main Menu: **General Postproc<Path Operations<Define Path**

και επιλέγουμε τους 5 κόμβους μετά το άκρο της ρωγμής προς το άνοιγμα της. Στο παράθυρο που εμφανίζεται επιλέγουμε “K1” για το “Define Path Name”.

Αυτό που αξίζει, ιδιαίτερα, να τονιστεί είναι ότι για τον υπολογισμό του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) πρέπει να αλλάξουμε το ενεργό σύστημα συντεταγμένων. Αυτό γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

ANSYS Utility Menu: **WorkPlane<Local Coordinate System<Create Local CS<
<By 3 Nodes**

Επιλέγουμε ως “Ref number of new ccord sys” τον αριθμό 11.

Το ενεργοποιούμε ως εξής:

ANSYS Utility Menu: **WorkPlane<Change Active CS to<Specified Coord Sys...**

Στο παράθυρο που εμφανίζεται επιλέγουμε “11” και **OK**.

στην συνέχεια:

ANSYS Main Menu: **General Postproc<Options for Outp.**

και επιλέγοντας ξανά το “11” στο παράθυρο “Options for Output” το νέο σύστημα συντεταγμένων που έχει την αρχή του στο άκρο της ρωγμής έχει ενεργοποιηθεί.

Έτσι τώρα, είμαστε οριστικά έτοιμοι να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF). Η εκτελούμενη εντολή είναι η παρακάτω:

ANSYS Main Menu: **General Postproc<Nodal Calcs<Stress Int Factr**

Στο παράθυρο που εμφανίζεται επιλέγουμε **OK** και τα αποτελέσματα εμφανίζονται.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για το σύνολο των ασκούμενων φορτίων, λαμβάνοντας τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Αυτά θα παρουσιαστούν σε επόμενη παράγραφο.

• ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΕΠΙΘΕΜΑΤΩΝ

Για την δημιουργία των επιθεμάτων συνοπτικά αναφέρουμε τα εξής:

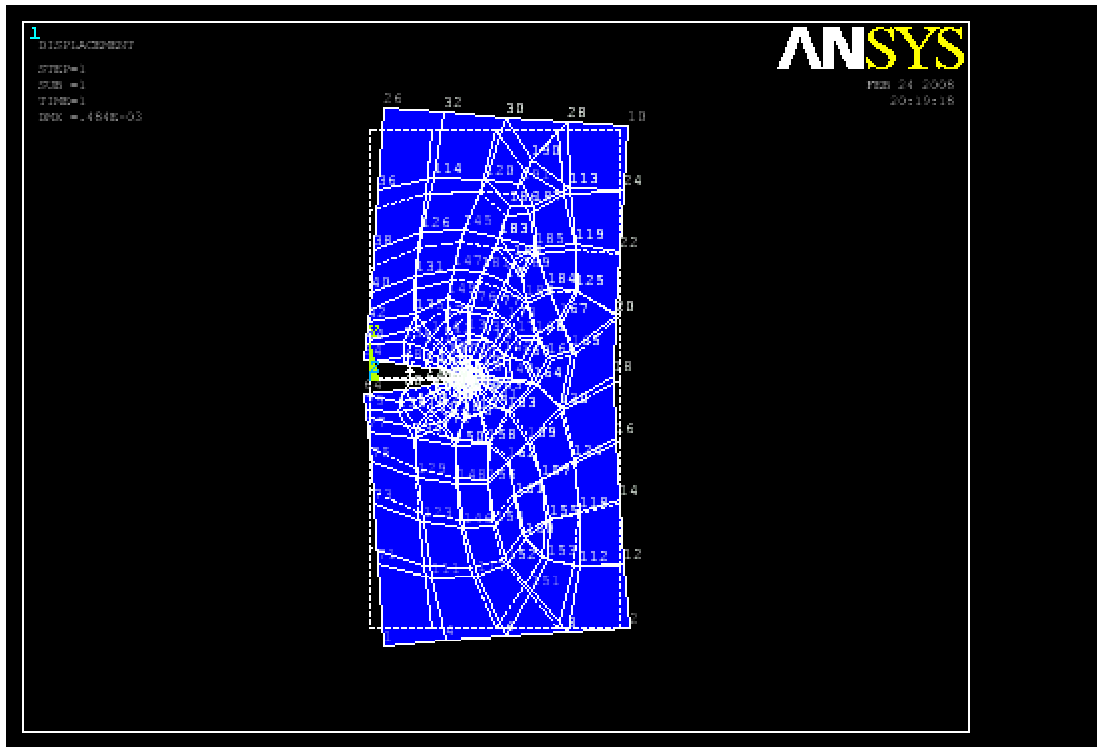
- Ø Δημιουργούμε με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν του Βασικού Δοκιμίου, την γεωμετρία των διαφόρων επιθεμάτων.
- Ø Προσδιορίζουμε τύπο ΠΣ, ο οποίος είναι ο ίδιος με του Βασικού Δοκιμίου, δηλ. το 8-node 82.
- Ø Ορίζουμε τις ιδιότητες του υλικού των επιθεμάτων (Plexiglas), με τον ίδιο τρόπο που το κάναμε και για το Lexan.
- Ø Ενώνουμε τις δύο επιφάνειες, με την επιλογή που δίνει το ANSYS, με μιας μορφής κόλλα, κάτι που έγινε και στην πραγματικότητα.

ANSYS Main Menu: **Preproseccor<Modeling<Operate<Booleans<Glue
<Areas**

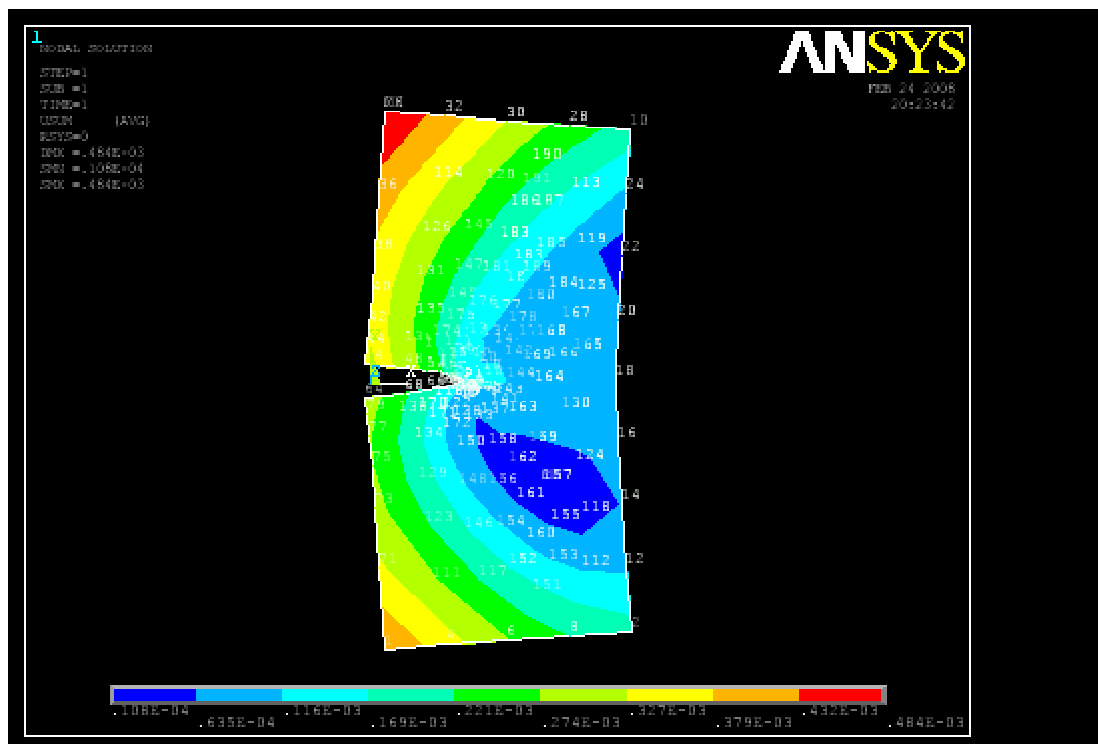
Και επιλέγουμε τις δύο επιφάνειες.

Στην συνέχεια τα υπόλοιπα βήματα, για τον υπολογισμό του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF), γίνονται όπως παρατέθηκαν παραπάνω. Και εδώ τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

Κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάσουμε τις δύο παρακάτω εικόνες που λάβαμε από το υπολογιστικό πρόγραμμα ANSYS, και οι οποίες δείχνουν το σχήμα του Δοκιμίου πριν και μετά την φόρτιση, καθώς και την διανομή των τάσεων σ' αυτό για την τυχαία φόρτιση των 80kp. Είναι προφανές ότι αντίστοιχες εικόνες μπορούμε να λάβουμε για όλες τις φορτίσεις, με και χωρίς επένδυση, αλλά δεν κρίνεται σκόπιμο:



Εικόνα 5.5 Παραμορφωμένο και απαραμόρφωτο μοντέλο.



5.5) Παρουσίαση Εξαγόμενων Αποτελεσμάτων

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει μία συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που λάβαμε από το υπολογιστικό πρόγραμμα ANSYS. Στους πίνακες που ακολουθούν θα καταγραφούν οι τιμές του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων για τα διάφορα φορτία που ασκούνται στο δοκίμιο. Επίσης, οι τιμές του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων καταγράφονται σε άλλους πίνακες για τις διάφορες διαστάσεις των επιθεμάτων που χρησιμοποιήσαμε και για τα διάφορα φορτία.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται και εποπτικά με χρήση διάφορων γραφημάτων.

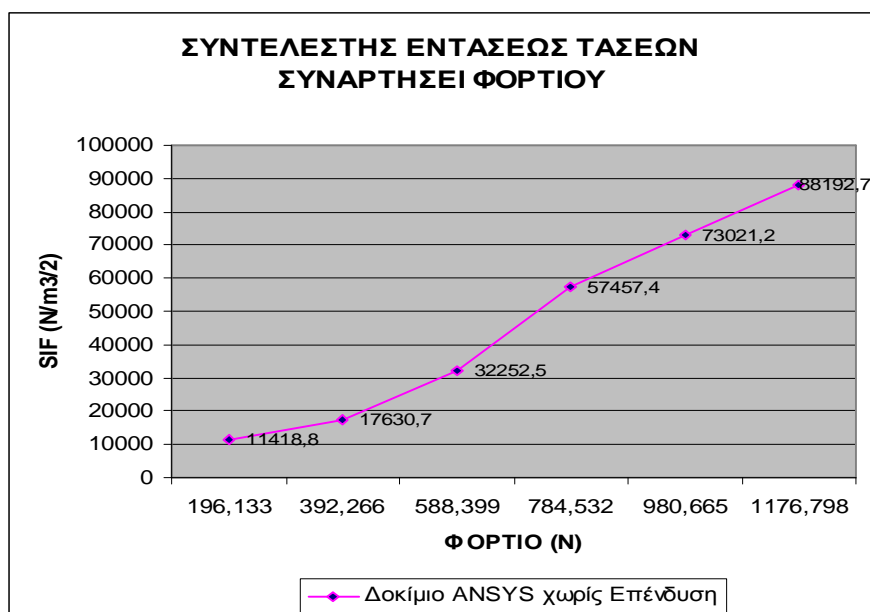
• ΒΑΣΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΛΕΧΑΝ ΧΩΡΙΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗ

Στον παρακάτω πίνακα 5.1 παρουσιάζουμε την τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) στο δοκίμιο χωρίς επένδυση, για τα φορτία των 20, 40, 60, 80, 100, 120kp. Έχουμε:

Πίνακας 5.1

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	11418,8
40	392,266	17630,7
60	588,399	32252,5
80	784,532	57457,4
100	980,665	73021,2
120	1176,798	88192,7

Τα παραπάνω φαίνονται στο ακόλουθο γράφημα:



Γράφημα 5.1: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσεΙ του φορτίου σε δοκίμιο χωρίς επένδυση.

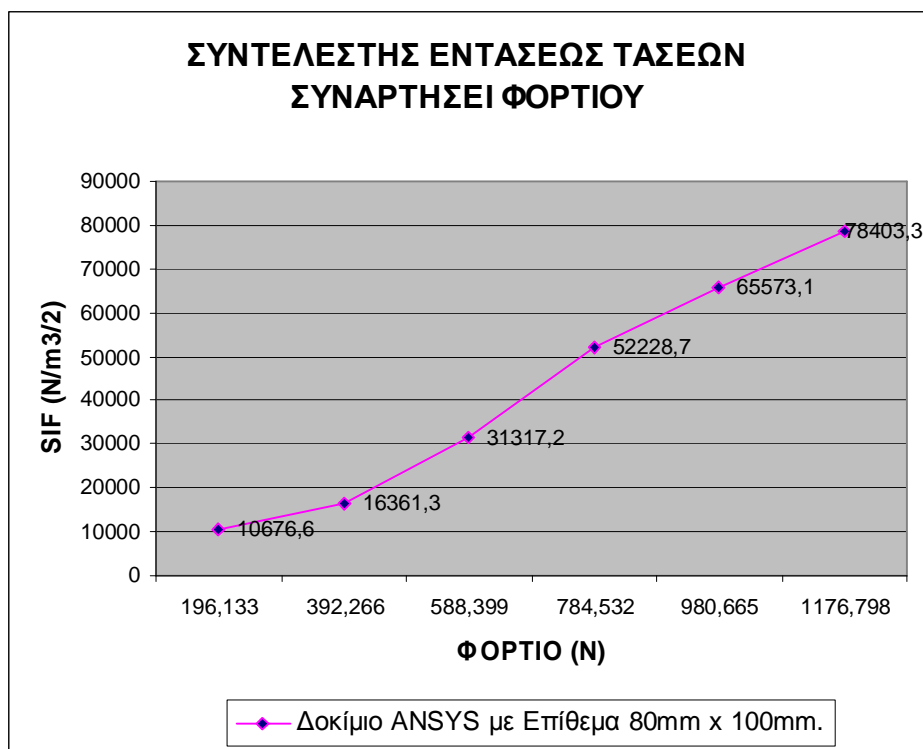
- **ΒΑΣΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΛΕΧΑΝ ΜΕ ΕΠΕΝΔΥΣΗ PLEXIGLAS (80mm x 100mm)**

Στον παρακάτω πίνακα 5.2 παρουσιάζουμε την τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) στο δοκίμιο με επένδυση διαστάσεων 8mm x 10mm, για τα φορτία των 20, 40, 60, 80, 100, 120kp. Έχουμε:

Πίνακας 5.2

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	10676,6
40	392,266	16361,3
60	588,399	31317,2
80	784,532	52228,7
100	980,665	65573,1
120	1176,798	78403,3

Τα παραπάνω φαίνονται στο ακόλουθο γράφημα:



Γράφημα 5.2: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσεως του φορτίου σε δοκίμιο με επένδυση διαστάσεων 80mm x 100mm.

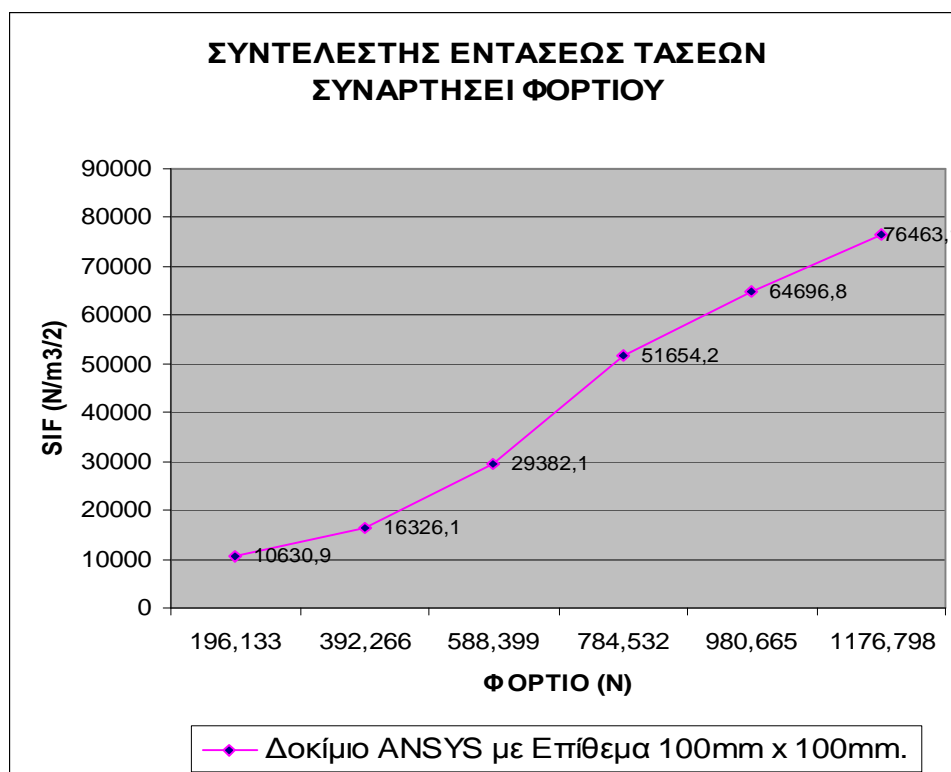
- **ΒΑΣΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΛΕΧΑΝ ΜΕ ΕΠΕΝΔΥΣΗ PLEXIGLAS (100mm x 100mm)**

Στον παρακάτω πίνακα 5.3 παρουσιάζουμε την τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) στο δοκίμιο με επένδυση διαστάσεων 10mm x 10mm, για τα φορτία των 20, 40, 60, 80, 100, 120kp. Έχουμε:

Πίνακας 5.3

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	10630,9
40	392,266	16326,1
60	588,399	29382,1
80	784,532	51654,2
100	980,665	64696,8
120	1176,798	76463,1

Τα παραπάνω φαίνονται στο ακόλουθο γράφημα:



Γράφημα 5.3: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσεως του φορτίου σε δοκίμιο με επένδυση διαστάσεων 100mm x 100mm.

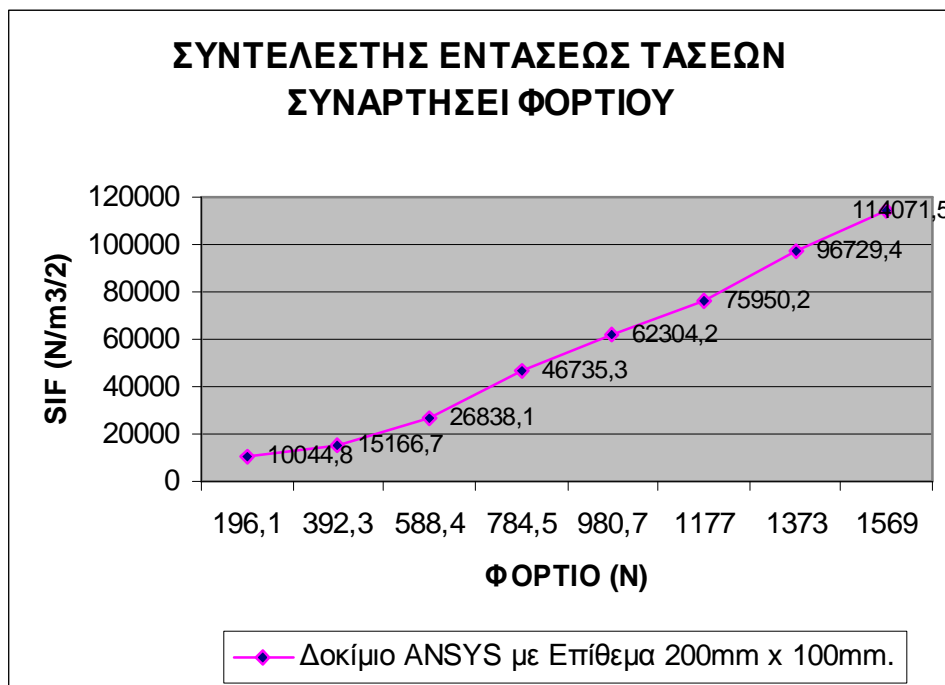
- **ΒΑΣΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΛΕΧΑΝ ΜΕ ΕΠΕΝΔΥΣΗ PLEXIGLAS (200mm x 100mm)**

Στον παρακάτω πίνακα 5.4 παρουσιάζουμε την τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) στο δοκίμιο με επένδυση διαστάσεων 200mm x 100mm, για τα φορτία των 20, 40, 60, 80, 100, 120kp. Έχουμε:

Πίνακας 5.4

Φορτίο (kp)	Φορτίο (N)	SIF - K_I ($N/m^{3/2}$)
20	196,133	10044,8
40	392,266	15166,7
60	588,399	26838,1
80	784,532	46735,3
100	980,665	62304,2
120	1176,798	75950,2
140	1372,931	96729,4
160	1569,064	114071,5

Τα παραπάνω φαίνονται στο ακόλουθο γράφημα:



Γράφημα 5.4: Συντελεστής Εντάσεως Τάσεων συναρτήσει του φορτίου σε δοκίμιο, με επένδυση διαστάσεων 200mm x 100mm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια προσπάθεια σύνοψης των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω καθώς και σύγκριση τους. Με χρήση κατάλληλων γραφημάτων θα δούμε ποιες διαφορές προκύπτουν στα αποτελέσματα που πήραμε από την αναλυτική λύση του προγράμματος ΠΣ ANSYS σε σχέση με τα αποτελέσματα από την πειραματική διαδικασία. Επίσης, πάλι με την βοήθεια γραφημάτων θα δούμε πόσο μειώνεται ο Συντελεστής Εντάσεως των Τάσεων με χρήση των διαφόρων επιθεμάτων. Τελικός σκοπός μας είναι να καταλήξουμε σε όσο το δυνατόν καλύτερα συμπεράσματα για το πώς επιδρούν οι διάφορες ενισχύσεις από Plexiglas στα ρηγματωμένα δοκίμια από Lexan. Η αναφορά των συμπερασμάτων θα γίνει στην επόμενη παράγραφο 6.2.

-Σύγκριση Πειραματικών-Αναλυτικών (ANSYS) τιμών.

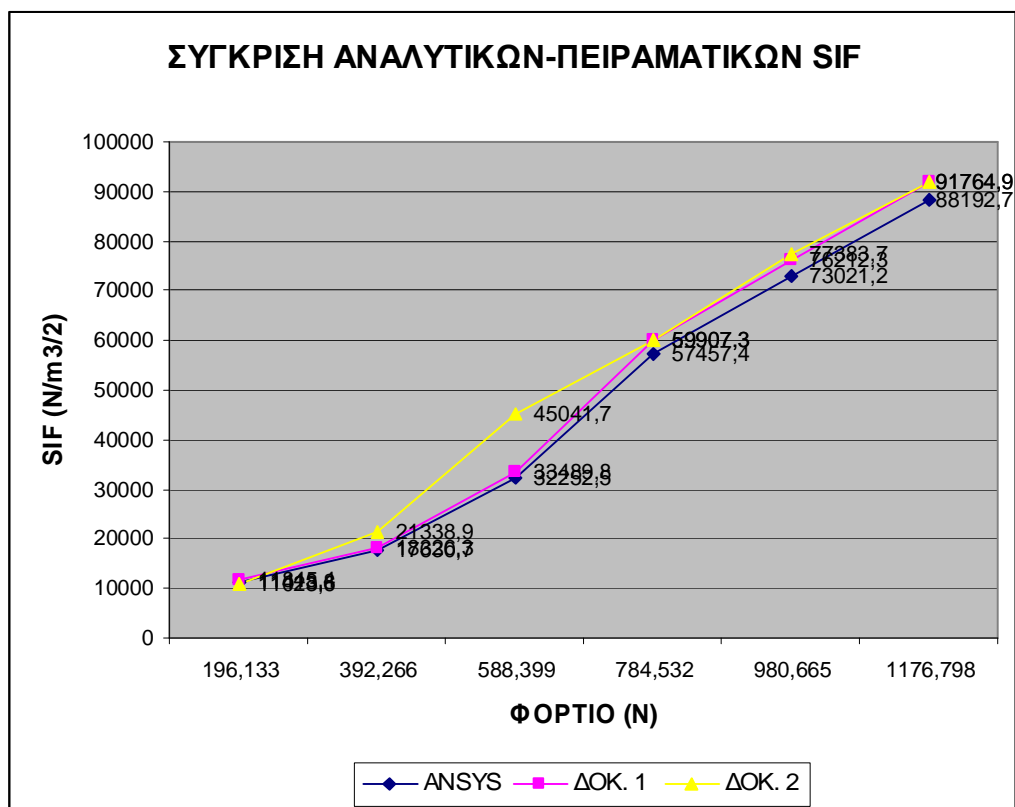
Στην παράγραφο 5.5 παρουσιάσαμε το σύνολο των αποτελεσμάτων που μας έδωσε το πρόγραμμα ΠΣ ANSYS.

Στην παράγραφο 4.4.2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά την πειραματική διαδικασία.

Μία προσεκτική παρατήρηση, θα μας δείξει ότι υπάρχει μια διαφορά ανάμεσα στα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα και από το πείραμα για τις ίδιες καταστάσεις. Πιο συγκεκριμένα:

- Δοκίμιο Lexan χωρίς ενίσχυση.

Πειραματικά χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά δοκίμια ίδιων διαστάσεων. Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται τόσο οι τιμές του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων για τα δύο δοκίμια όταν αυτά δεν φέρουν ενίσχυση, όπως υπολογίστηκαν σε προηγούμενη παράγραφο, όσο και οι τιμές που προέκυψαν από το ANSYS:



Γράφημα 6.1: Σύγκριση Αναλυτικών-Πειραματικών τιμών για δοκίμιο χωρίς επένδυση.

Υπάρχει, όπως γίνεται κατανοητό και από το γράφημα, μια διαφορά στις προκύπτουσες τιμές. Στον παρακάτω πίνακα 6.1 παρουσιάζεται η διαφορά των εξαγόμενων από τα πειράματα αποτελέσματα από αυτά του ANSYS, σε ποσοστό επί της εκατό.

Πίνακας 6.1

Φορτίο (N)	ANSYS (N/m ^{3/2})	ΔΟΚΙΜΙΟ 1 (%)	ΔΟΚΙΜΙΟ 2 (%)
196,133	11418,8	3.7	3.6
392,266	17630,7	3.9	21.0
588,399	32252,5	3.8	39.6
784,532	57457,4	4.2	4.2
980,665	73021,2	4.3	5.9
1176,798	88192,7	4.0	4.0

Παρατηρούμε ότι οι τιμές που προκύπτουν από το ANSYS διαφέρουν από αυτές του Δοκιμίου 1 περίπου κατά 4%. Αντίθετα, αν οι τιμές αυτές συγκριθούν με τις αντίστοιχες του Δοκιμίου 2, θα δούμε πολύ μεγαλύτερες διαφορές στην αρχή των φορτίσεων (για φόρτιση 40 kP η διαφορά φτάνει ακόμη και το 39.6%). Ωστόσο καθώς οι φορτίσεις αυξάνονται, η διαφορά πλησιάζει τα μεγέθη του Δοκιμίου 1, περίπου το 4-6%. Προφανώς οι τιμές που προέκυψαν από το πρόγραμμα ΠΣ είναι οι πραγματικές. Έτσι οι διαφορές στο Δοκίμιο 2 μπορούν να εξηγηθούν μόνο ως τυχόν κακή εκτέλεση του πειράματος ή κακή ποιότητα Δοκιμίου.

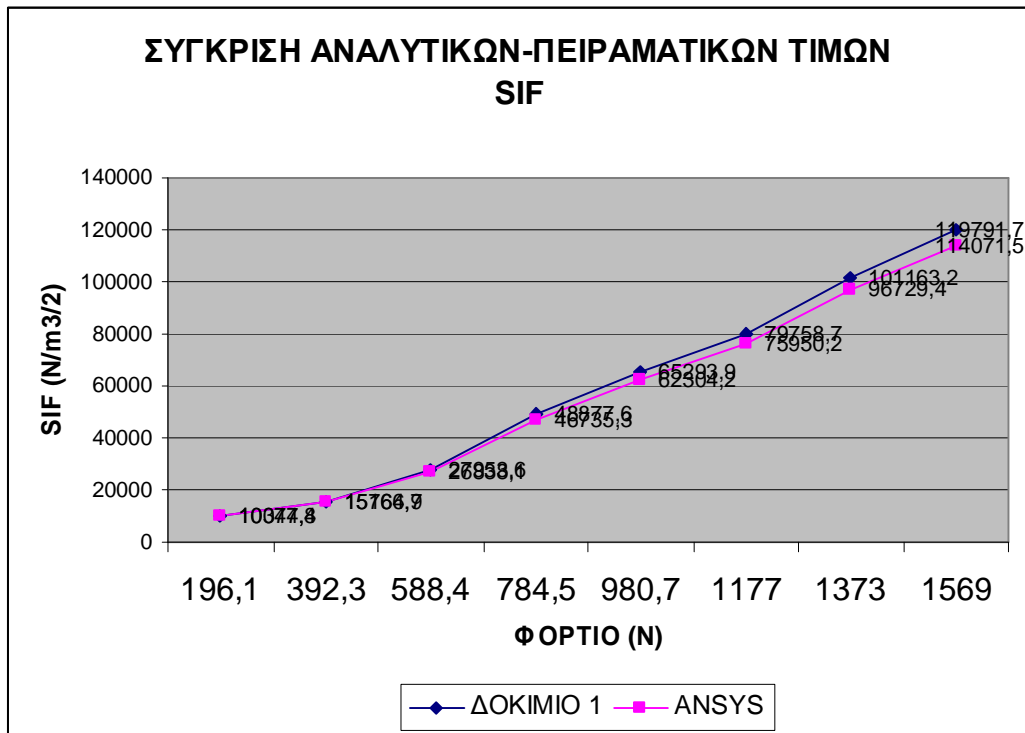
- **Δοκίμιο Lexan με ενίσχυση Plexiglas 80mm x 100mm.**

Στην συνέχεια στο Δοκίμιο 2 με χρήση κατάλληλης κόλλας κολλάμε επίθεμα διαστάσεων 80mm x 100mm. Οι πειραματικές τιμές που προέκυψαν δείχνουν ότι ο Συντελεστής Εντάσεως των Τάσεων μειώθηκε. Ανάλογο αποτέλεσμα προέκυψε και ύστερα από την επίλυση του αντίστοιχου μοντέλου στο πρόγραμμα ΠΣ. Ωστόσο η μείωση αυτή, η οποία είναι πολύ μεγάλη οφείλεται στο σημαντικά μεγάλο πάχος του επιθέματος (4mm έναντι 2mm των υπολοίπων επενδύσεων). Επίσης, το κόλλημα που επιτεύχθηκε μεταξύ των δύο επιφανειών ήταν πολύ καλύτερης ποιότητας, με αποτέλεσμα να ενισχύεται πολύ καλύτερα η περιοχή της ρωγμής.

Τέλος, λόγω των μεγάλων φορτίων που ασκήθηκαν (μέχρι και 540 kP) δεν παρατίθεται γράφημα των πειραματικών και αναλυτικών τιμών του SIF συναρτήσει του φορτίου γιατί δεν υπάρχουν αντίστοιχες τιμές από το πρόγραμμα ΠΣ. Άλλωστε εξ' αιτίας του πάχους του επιθέματος οι προκύπτουσες τιμές δεν θα ήταν συγκρίσιμες.

- Δοκίμιο Lexan με ενίσχυση Plexiglas 200mm x 100mm.

Στην συνέχεια στο Δοκίμιο 2 με χρήση της ίδιας κατάλληλης κόλλας κολλάμε νέο επίθεμα διαστάσεων 200mm x 100mm. Οι πειραματικές τιμές που προέκυψαν δείχνουν ότι ο Συντελεστής Εντάσεως των Τάσεων μειώθηκε αρκετά περισσότερο. Ανάλογο αποτέλεσμα προέκυψε και ύστερα από την επίλυση του αντίστοιχου μοντέλου στο πρόγραμμα ΠΣ. Στο γράφημα 6.2 που ακολουθεί φαίνεται η καμπύλη των τιμών του SIF συναρτήσει των ασκούμενων φορτίων, πειραματικές και αναλυτικές. Στον πίνακα, 6.2 για τα διάφορα φορτία γράφουμε την επί της εκατό διαφορά (%) των τιμών που προέκυψαν πειραματικά από αυτές που μας έδωσε το ANSYS:



Γράφημα 6.2: Σύγκριση Αναλυτικών-Πειραματικών τιμών για δοκίμιο με επένδυση διαστάσεων 200mm x 100mm.

Πίνακας 6.2

ΦΟΡΤΙΟ (kp)	ANSYS (N/m^{3/2})	ΔΟΚΙΜΙΟ 1 (%)
20	10044.8	3.31
40	15166.7	3.93
60	26838.1	4.14
80	46735.3	4.56
100	62304.2	4.77
120	75950.2	4.98
140	96729.4	4.56
160	114071.5	4.98

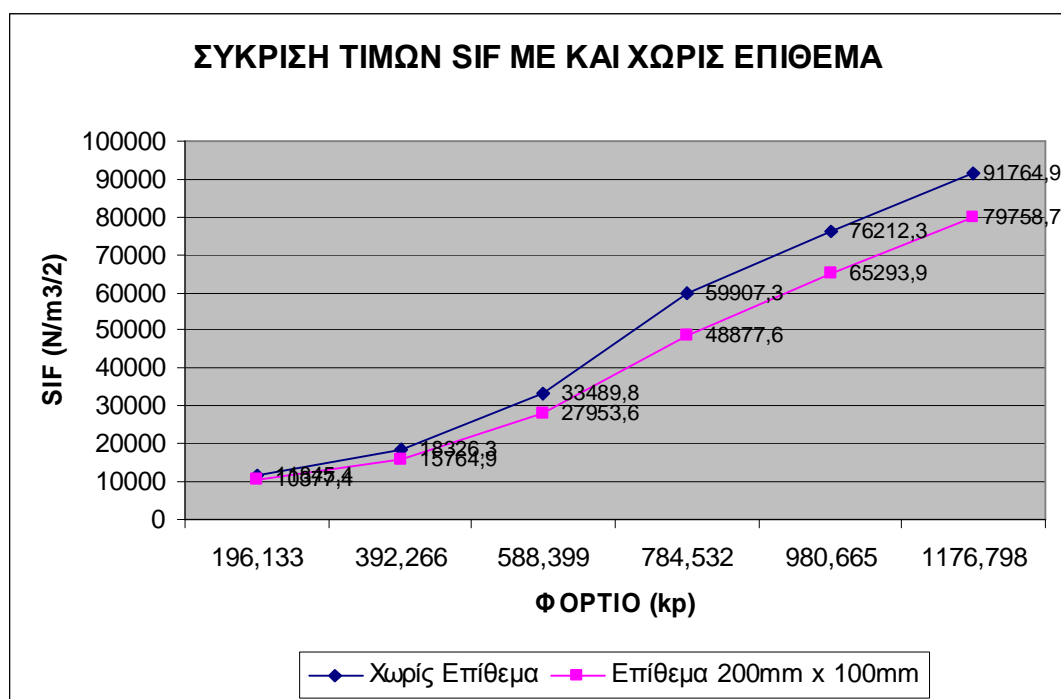
Παρατηρούμε ότι οι τιμές που προκύπτουν από το ANSYS διαφέρουν από αυτές του Δοκιμίου 1 κατά ένα ποσοστό που κυμαίνεται από 3.31% έως 4.98%. Πρόκειται για πολύ ικανοποιητική προσέγγιση του αναλυτικού προσδιορισμού του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων στον πειραματικό. Οι πολύ μικρές αυτές διαφορές είναι δυνατόν να οφείλονται στις στρογγυλοποιήσεις των μεγεθών που μετρήθηκαν για την χρησιμοποίησή τους στους διάφορους τύπους. Επίσης, σημαντικό ρόλο παίζει και η ακρίβεια των οργάνων. Τέλος, λάθος μετρήσεις δεν μπορούν να αποκλειστούν.

- Μεταβολή Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων με χρήση επιθεμάτων.

Στο σημείο αυτό θα δούμε τι μεταβολή προκαλεί στον Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων η επικόλληση επιθεμάτων διαφόρων διαστάσεων. Πειραματικά χρησιμοποιήσαμε δύο επιθέματα διαστάσεων 200mm x 100mm και 80mm x 100mm στα δοκίμια 1 και 2 αντίστοιχα. Ακριβώς, όμως, επειδή τα επιθέματα χρησιμοποιήθηκαν σε διαφορετικά δοκίμια δεν μπορεί να γίνει άμεση σύγκριση. Αρχικά θα δούμε τι μεταβολή επιφέρει η επένδυση 200mm x 100mm στο 1^ο Δοκίμιο και δευτερευόντως η επένδυση 80mm x 100mm στο 2^ο Δοκίμιο. Τέλος, θα δούμε τι μεταβολές προέκυψαν από το πρόγραμμα ΠΣ ANSYS για τα επιθέματα 80mm x 100mm, 100mm x 100mm και 200mm x 100mm.

Αποτελέσματα για την ποσοστιαία μεταβολή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων του Δοκιμίου 2 όταν αυτό δεν φέρει την επένδυση και όταν φέρει επίθεμα διαστάσεων 80mm x 100mm δεν είναι δυνατόν να γίνει. Αυτό συμβαίνει επειδή τα ασκούμενα φορτία στο Δοκίμιο όταν φέρει το επίθεμα είναι πάρα πολύ μεγάλα και αντίστοιχα για την περίπτωση μη επένδυσης δεν ασκήθηκαν. Μόνο για το φορτία των 80 και 120 kp παρατηρούμε μία μεταβολή του SIF της τάξεως του 64.5% και 89.8% αντίστοιχα. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί μόνο λόγω του μεγαλύτερου πάχους της επένδυσης (4mm έναντι 2mm) και της πολύ ισχυρής επικόλλησης των δύο δοκιμίων (βασικού και επιθέματος), κάτι που δεν επιτεύχθηκε σε τόσο μεγάλο βαθμό στην άλλη περίπτωση.

Στο παρακάτω γράφημα 6.3 μπορούμε να δούμε πως μεταβάλλεται η τιμή του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων στο Δοκίμιο 1 χωρίς την επένδυση και μετά την επικόλληση αυτής (200mm x 100mm).



Γράφημα 6.3: Μεταβολή τιμών SIF για δοκίμιο με και χωρίς επένδυση διαστάσεων 200mm x 100mm.

Στον πίνακα 6.3 που ακολουθεί παρουσιάζουμε την ποσοστιαία μεταβολή του SIF μετά την επικόλληση του επιθέματος (δεν πραγματοποιήθηκαν πειράματα για φορτία 140 και 160 kp και γι' αυτό δεν διατίθενται στοιχεία):

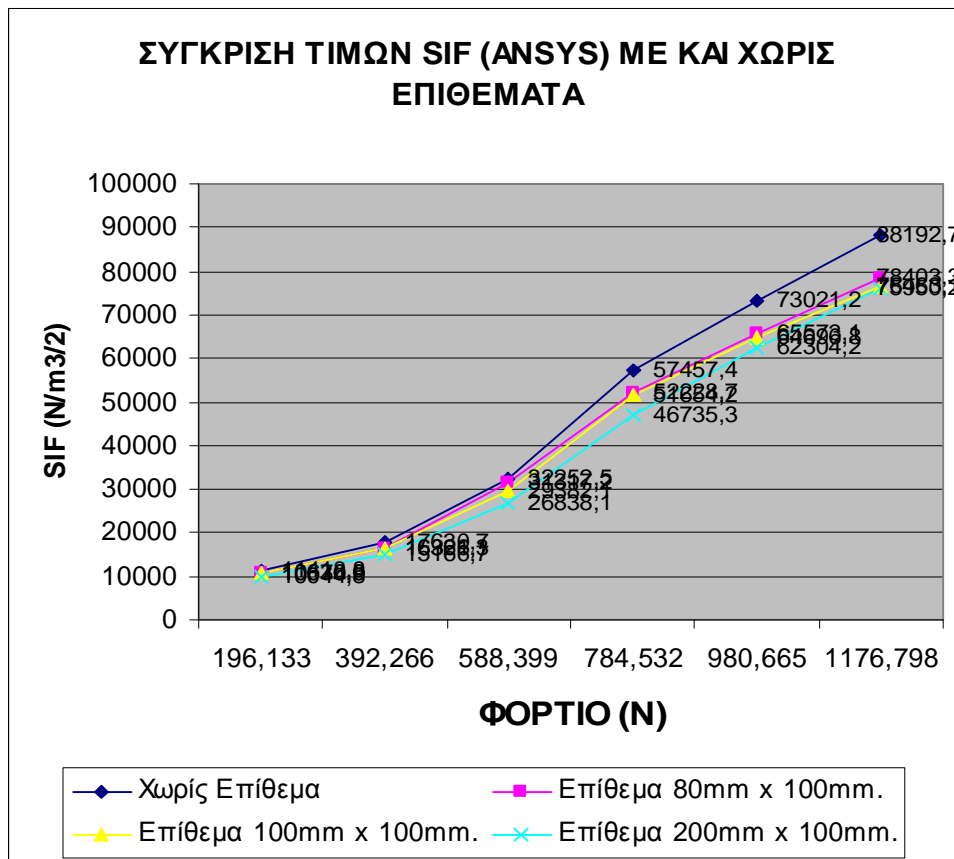
Πίνακας 6.3

ΦΟΡΤΙΟ (kp)	Χωρίς Επίθεμα	Μεταβολή με Επίθεμα 200mm x 100mm (%)
20	11845,4	14.14
40	18326,3	16.24
60	33489,8	19.80
80	59907,3	22.56
100	76212,3	16.70
120	91764,9	15.05

Συνεπώς, η επικόλληση επιθέματος Plexiglas διαστάσεων 200mm x 100mm επιφέρει μία αυξανόμενη μείωση του SIF της τάξεως του 20% περίπου. Η μείωση του ποσοστού της μεταβολής μετά τα 100kp μπορεί να οφείλεται σε πιθανή κακή επικόλληση της ενίσχυσης.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο, θα δούμε με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το ANSYS, σε κοινό γράφημα την διαφορά των τιμών του SIF τόσο με τα επίθεμα όσο και χωρίς αυτά, ενώ ακολουθεί και πίνακας με την σταδιακή ποσοστιαία μείωση του SIF. Πρέπει να τονιστεί ότι με το υπολογιστικό πρόγραμμα υπολογίσαμε τον SIF για τρεις διαφορετικές διαστάσεις επιθεμάτων, 80mm x 100mm, 100mm x 100mm και 200 x 100mm.

Όπως και πριν, θα δούμε σε γράφημα την διαφορά των τιμών του SIF τόσο με το επίθεμα όσο και χωρίς αυτό, ενώ ακολουθεί και πίνακας με την ποσοστιαία μείωση του SIF.



Γράφημα 6.4: Μεταβολή τιμών (από ANSYS) SIF για δοκίμιο με και χωρίς επένδυση διαστάσεων διαφόρων διαστάσεων.

Στον πίνακα 6.4 που ακολουθεί παρουσιάζουμε την ποσοστιαία μεταβολή του SIF μετά την επικόλληση των επιθέματος (δεν πραγματοποιήθηκαν πειράματα για φορτία 140 και 160 kp και γι' αυτό δεν διατίθενται στοιχεία):

Πίνακας 6.4

ΦΟΡΤΙΟ (kp)	ANSYS Χωρίς Επίθεμα	Μεταβολή με Επίθεμα 80mm x 100mm (%)	Μεταβολή με Επίθεμα 100mm x 100mm (%)	Μεταβολή με Επίθεμα 200mm x 100mm (%)
20	11418.8	6.51	6.91	13.67
40	17630.7	7.23	7.43	16.24
60	32252.5	7.88	8.89	20.11
80	57457.4	9.14	10.12	22.94
100	73021.2	10.21	11.46	17.20
120	88192.7	11.11	13.33	16.11

Από τον παραπάνω πίνακα είναι προφανή η μείωση του SIF μετά την επικόλληση των επιθεμάτων. Όσο μεγαλώνει το μέγεθος του επιθέματος τόσο μεγαλύτερη είναι η μείωση του SIF. Βλέπουμε πως για το επίθεμα διαστάσεων 80mm x 100mm η μείωση είναι περίπου από 7 έως 10% ανάλογα με το μέγεθος του φορτίου. Για επίθεμα διαστάσεων 100mm x 100mm η μείωση είναι περίπου από 7,5 έως 13%, ενώ για το επίθεμα των διαστάσεων 200mm x 100mm η μείωση φτάνει μέχρι και το 20 με 22%.

6.2 Συμπεράσματα

Η διπλωματική εργασία έγινε στο πλαίσιο διερεύνησης της επίδρασης εφελκυστικών φορτίων σε ρηγματωμένη πλάκα. Αντικείμενο μελέτης ήταν η επίδραση του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF) τόσο όταν η πλάκα φέρει ενίσχυση όσο και όταν δεν φέρει. Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν από το υλικό Lexan. Αντίθετα το υλικό των επιθεμάτων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν Plexiglas. Η αποκλειστική χρήση των δυο αυτών υλικών και μάλιστα χωρίς εναλλαγή τους, δηλ. υλικό δοκιμίου Plexiglas και υλικό ενίσχυσης Lexan, δεν μας επιτρέπει να προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε. Ακόμη, ένα πολύ σημαντικό στοιχείο που πρέπει να τονισθεί είναι ότι οι διαστάσεις του Βασικού δοκιμίου ήταν πάντα σταθερές και ίσες με 200mm x 100mm x 2mm. Έτσι τα αποτελέσματα και κατά συνέπεια τα συμπεράσματα μας περιορίζονται σε δοκίμιο των παραπάνω διαστάσεων, συγκεκριμένου υλικού, που ενισχύεται με επίθεμα Plexiglas τριών διαφορετικών διαστάσεων (80mm x 100mm, 100mm x 100mm και 200mm x 100mm).

Τόσο το πάχος του Βασικού δοκιμίου όσο και των επιθεμάτων ήταν 2mm, κάτι που μας επιτρέπει με πάρα πολύ καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι έχουμε Επίπεδη Εντατική Κατάσταση. Το μήκος της ρωγμής ήταν 40mm όπως έχει φανεί σε κατάλληλη εικόνα.

Η πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν αυτή της Μεθόδου των Ανακλώμενων Κανονικών, ενώ το πρόγραμμα ΠΣ ήταν το ANSYS 11. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, τόσο πειραματικά όσο και αναλυτικά, συγκριθήκαν και παρατηρήσαμε ότι τα μεγέθη δεν διαφέρουν ιδιαίτερα. Υπάρχει δηλαδή μια αλληλοεπαλήθευση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του πειράματος και των αποτελεσμάτων της ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία, αναφέρονται παρακάτω:

- Ανεξάρτητα από το αν φέρει το δοκίμιο επένδυση ή όχι, η αύξηση του μεγέθους των επιβαλλόμενων εφελκυστικών φορτίων στο δοκίμιο οδηγεί σε αύξηση του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF).
- Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα ΠΣ, η τοποθέτηση επιθεμάτων κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πλάκα να ενισχύεται, επιφέρει μείωση των τιμών του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF). Ιδιαίτερα όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του επιθέματος τόσο μεγαλύτερη είναι και η ποσοστιαία μείωση του Συντελεστή SIF. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις διαστάσεις που αναφέρονται παρακάτω, αναγράφεται το ποσοστό της μείωσης:
 - Επίθεμα διαστάσεων 80mm x 100mm: Αύξηση των φορτίων επιφέρει περαιτέρω μείωση του SIF. Θα λέγαμε ότι η μείωση είναι της τάξης του 9 με 10%.
 - Επίθεμα διαστάσεων 100mm x 100mm: Η μείωση που παρατηρήθηκε στον Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων, με χρήση λίγο μεγαλύτερου επιθέματος, ήταν περίπου 10 με 12%.
 - Επίθεμα διαστάσεων 200mm x 100mm: Εδώ το επίθεμα δεν είναι μόνο σημαντικά μεγαλύτερο από τα προηγούμενα, αλλά έχει ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις με το Βασικό δοκίμιο. Η μείωση σε υψηλές τιμές

φορτίων έφτασε ακόμα και το 22 με 24%. Βέβαια πρέπει να τονισθεί ότι μετά τα 100kp παρατηρείται μια ανεξήγητη μείωση του ποσοστού της μείωσης του SIF. Αυτό δεν παρατηρήθηκε στις περιπτώσεις των μικρότερων επιθεμάτων.

- Ανάλογα είναι και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την πειραματική διαδικασία:
 - Χωρίς την χρήση επιθεμάτων και την σταδιακή αύξηση των φορτίων, οδηγούμαστε σε αύξηση του SIF. Τα αποτελέσματα έχουν πολύ μικρή απόκλιση με αυτά που προέκυψαν από το ANSYS.
 - Η χρήση του επιθέματος 80mm x 100mm δεν μας επιτρέπει να καταφύγουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα. Αυτό συνέβη αφ' ενός γιατί το πάχος της επένδυσης ήταν μεγαλύτερο, 4mm, δηλαδή διπλάσιο. Έτσι τα φορτία αναγκαστήκαμε να είναι πολύ μεγαλύτερα, φτάνοντας ακόμα και 540 kp όπου είχαμε θραύση, με αποτέλεσμα να λάβουμε αποτελέσματα μη συγκρίσιμα με τις προηγούμενες μετρήσεις.
 - Η χρήση του επιθέματος 200mm x 100mm επιφέρει μείωση του SIF έως και 22-23% όταν ασκήθηκαν τα 80 kp. Περαιτέρω αύξηση των φορτίων οδηγεί σε μία ανεξήγητη μείωση του ποσοστού της μείωσης του SIF. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε όχι καλό κόλλημα των δύο επιφανειών. Έτσι όταν αυξήθηκαν τα φορτία αρκετά μπορεί να είχα ξεκινήσει κάποια ενδεχόμενη αποκόλληση.

Έτσι, από τα παραπάνω, κατανοούμε ότι η ενίσχυση των ρηγματωμένων πλακών από Lexan με χρήση επιθεμάτων από Plexiglas, οδηγεί σε σημαντικές μειώσεις του Συντελεστή Εντάσεως των Τάσεων (SIF).

Συνεπώς, η ενίσχυση ρωγμών με ενισχύσεις, όπως αποδεικνύουν και τα πειράματα, κρίνεται ως μία αξιόλογη και αξιόπιστη μέθοδος επέκτασης της ζωής διαφόρων κατασκευών. Άλλωστε προς αυτήν την κατεύθυνση κινούνται πολλές μελέτες των επιστημόνων αφού εκτός των άλλων πρόκειται και για μία οικονομική μέθοδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Γ.Α. Παπαδόπουλος** 'Ειδικά Κεφάλαια Μηχανικής', Πειραματικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων, Αθήνα 1994.
2. **Θεοχάρη Π.Σ.**, 'Σχέσεις Τάσεων Παραμορφώσεων', Αντοχή των Υλικών, Μηχανική Τόμος 2, Εκδ. ΕΜΠ, Αθήνα 1976.
3. **Τσαμασφύρος – Γ. Παπανικολάου**, 'Μηχανική Παραμορφώσεων Στερεών', Γ, Αθήνα 1985.
4. **Theocaris, P.S.**, 'Local yielding around a crack tip in Plexiglas' , J. Appl Mech., vol 37. pp.409-415.
5. **P.S. Theocaris**, 'Determination of Crack Opening Displacement by the Method of Caustics' Journal of Strain Analysis, Vo19, No3, 1974, pp. 197-205
6. **Γ.Α. Παπαδόπουλος** 'Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων' , Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων.
7. **P.S. Theocaris, and G.A. Papadopoulos**, 'The Dynamic behaviour of an Optique Edge- Crack under Impact Loading', J.Mech. Phys. Solids, 1984, 32(4), p.p. 281-300.
8. **Θεοχάρη, Π.Σ.**, 'Πειραματική Αντοχή Υλικών', σελ. 458-464.
9. **Muskhelishvili, N.I.**, 'Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition., Noordhoff, Groningen, 1963.
10. **Ευ.Γ. Κυριαζή**, 'Μελέτη της Ελαστικής - Απολύτως Πλαστικής Εντατικής και Παραμορφωσιακής Καταστάσεως Ρηγματωμένων Πλακών Σε Συνθήκες Επίπεδης Έντασης', Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα 1989.
11. **Βασ.Δ. Κωνσταντέλλου** 'Μελέτη του πεδίου των μετατοπίσεων σε άπειρες πλάκες με εσωτερικές ρωγμές. Συνέπειες στη μελέτη της Θραύσης', 1986.
12. **Ευστ. Ε. Θεοδοκόγλου** 'Επίλυση Προβλημάτων Ρωγμών με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων', Αθήνα 1986.
13. **Inglis CE**, 'Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners', Trans. Instn.Nav.Archiv, 55(1913).
14. **Griffith AA**, 'The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids', Ser. A, 1920.
15. **Westergaard HM**, 'Bearing Pressures and Cracks' J. Appl. Mech, 1923.
16. **Sneddon IN**, 'The Distribution of Stresses in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid', London 1946.

17. **Williams ML**, 'On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, J. Appl., Mech.,1957.
18. **Irwin GR**. 'Fracture Dynamics. Fracturing of Metals', Am. Soc. Publ., Cleveland 1948.
19. **Irwin GR**. 'Analysis of Stresse and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate', J. Appl., Mech.,1957.
20. **Rice JR**. 'Constrained Plastic Deformation Near Cracks and Notches Under Longitudinal Shear',Int.J.Fract.,1966.
21. <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys>.
22. http://www3.sympatico.ca/peter_budgell/home.html
23. **ANSYS 11, HELP**.