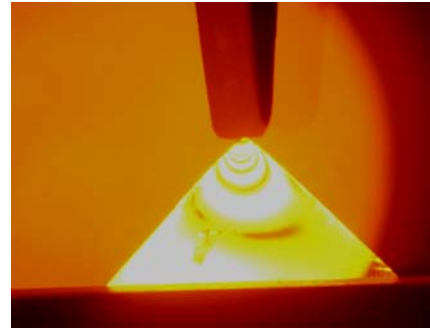
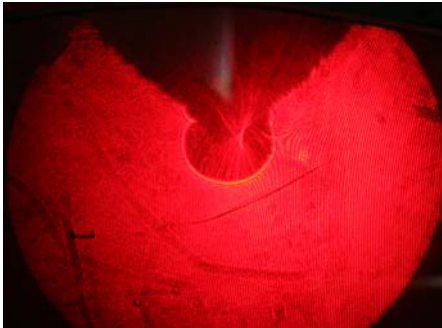




**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ**

**ΘΕΜΑ : ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ
ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ**



**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΠΕΡΡΕΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
Α.Μ : 02102617**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	3
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
1.1 Γενικά	3
1.2 Μεταβολή της Έντασης Φωτεινής Ακτίνας Διερχόμενης δια Διαφανούς Μέσου	3
1.3 Επίδραση της Φόρτισης επί του Οπτικού Δρόμου των Ανακλώμενων και Διερχόμενων Ακτινών	4
1.4 Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών	7
1.5 Εφαρμογή της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	12
2.1 Εισαγωγή	12
2.2 Συγκεντρωμένη Δύναμη επί Ευθύγραμμου Συνόρου	13
2.3 Συγκεντρωμένη Δύναμη στην Κορυφή Σφήνας	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ	21
3.1 Γενικά	21
3.2 Βασικές Έννοιες της Θεωρίας του Φωτός	21
3.3 Πόλωση του φωτός	22
3.3.1 Διπλοδιάθλαση	22
3.3.2 Πολωτές	23
3.4 Φωτοτασεοπτικός Νόμος	25
3.5 Πολωσισκόπιο	26
3.5.1 Επίπεδο Πολωσισκόπιο	26
3.5.2 Κυκλικό Πολωσισκόπιο	28
3.6 Υπολογισμός της Φωτοτασεοπτικής Σταθεράς	31
3.7 Τροχιές Κυρίων Τάσεων	32
3.8 Υπολογισμός των Κυρίων Τάσεων	35
3.8.1 Μέθοδος της Διαφοράς των Διατμητικών Τάσεων	35
3.9 Σχεδιασμός Ισοχρώμων	36

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΠΕΙΡΑΜΑ	41
5.1 Εισαγωγή	41
5.2 Πειραματική Διάταξη	41
5.3 Περιγραφή Δοκιμίου	42
5.4 Φωτογραφικό Υλικό	42

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η πειραματική επίλυση προβλημάτων επαφών και κυρίως ο πειραματικός υπολογισμός της κατανομής των τάσεων στα σημεία επαφής δύο σωμάτων ή στα ιδιόμορφα σημεία εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων επί της επιφάνειας σωμάτων ή γενικότερα ημιχώρων. Αντιστρόφως, από το σχηματισμό της καυστικής στα ιδιόμορφα αυτά σημεία είναι δυνατός ο υπολογισμός των εξωτερικών φορτίων. Η κατανομή των τάσεων στον ημιχώρο δίνεται από κατάλληλες τασικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν υπολογιστεί θεωρητικά για κάθε πρόβλημα επαφής. Ακολουθώντας, γίνεται η θεωρητική ανάπτυξη των καυστικών και η πειραματική τους επαλήθευση. Τέλος, δίνονται κατάλληλες σχέσεις, εξαρτώμενες από τα χαρακτηριστικά της καυστικής, από τις οποίες προκύπτουν τα ζητούμενα φορτία.

1.1 Γενικά

Στα προβλήματα ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και πλησίον της μικρής αυτής περιοχής οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες, γεγονός που καθιστά πολύ δύσκολη την επίλυση του προβλήματος με τις κλασικές μεθόδους πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων, ενώ αντιθέτως, η μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος σημείωσε σημαντική πρόοδο.

Κατά την τελευταία δεκαετία αναπτύχθηκε μια πειραματική μέθοδος από τους Manogg και Θεοχάρη, η οποία κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής παρά το άκρο της ρωγμής ιδιόμορφης περιοχής. Η πειραματική αυτή μέθοδος καλείται **Οπτική Μέθοδος των Καυστικών** και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Με την πειραματική αυτή μέθοδο **η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων παρά το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία, η οποία μετρούμενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία για την μελέτη της παρά το άκρο της ρωγμής περιοχής.**

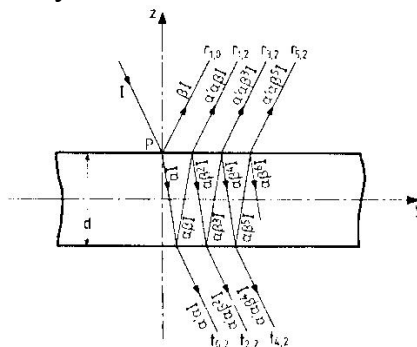
Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται απ' τη συγκέντρωση της ιδιόμορφης στο χώρο καμπύλης, η οποία καλείται **Καυστική** των ακτινών φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η καυστική αυτή λαμβάνεται πάνω σε πέτασμα και αφού ευρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς το άκρο της ρωγμής περιοχή επιτρέπει την μελέτη αυτή.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών δύναται να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά, διαφανή (μέθοδος διερχόμενων καυστικών) και μη διαφανή (μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών) και αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο μοναδική για τη μελέτη των ρωγμών.

1.2 Μεταβολή της Έντασης Φωτεινής Ακτίνας Διερχόμενης δια Διαφανούς Μέσου.

Θεωρούμε επίπεδη πλάκα πάχους d , με παράλληλες παράπλευρες επιφάνειες από διαφανές υλικό και ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτουσα καθέτως επί της πλάκας σε τυχαίο σημείο P, Σχ. 1.1. Η ακτίνα κατά την πρόσπτωσή της επί της πλάκας αφ' ενός ανακλάται αφ' εταίρου δε διαθλάται και ακολούθως διέρχεται από την πλάκα. Η διαθλώμενη όμως ακτίνα ανακλάται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας και ακολούθως με την διάθλαση εξέρχεται από την εμπρός επιφάνεια. Οι διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις της

ακτίνας εξακολουθούν επ' άπειρον, έτσι ώστε μια απειρία ακτινών εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια της πλάκας.



Σχήμα 1.1 : Μεταβολή της έντασης φωτεινής δέσμης διερχόμενης δια διαφανούς μέσου.

Η ένταση I της φωτεινής ακτίνας μειώνεται συνεχώς κατά τις διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις. Εάν με $r_{m,l}$ συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας και με $t_{m,l}$ συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, όπου ο δείκτης m παριστάνει τον αριθμό των ανακλάσεων και ο δείκτης l τον αριθμό των διαθλάσεων, τότε οι εντάσεις των ακτινών αυτών δίνονται από τις σχέσεις :

$$I_{r_{m,l}, t_{m,l}} = \beta^m (1 - \beta)^l I \quad (1.1)$$

όπου ο λόγος β μείωσης της έντασης δίνεται από τη σχέση :

$$\beta = \left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2 \quad (1.2)$$

όπου η είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της πλάκας.

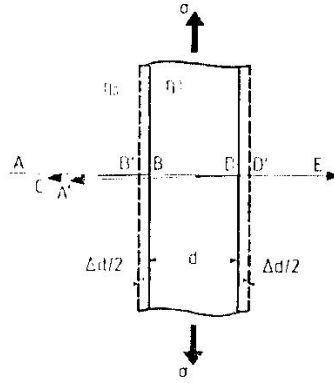
1.3 Επίδραση της Φόρτισης επί του Οπτικού Δρόμου των Ανακλώμενων και Διερχόμενων Ακτινών

Ας θεωρήσουμε φωτεινή ακτίνα ABDE, Σχ. 1.2, πολωμένη κατά τη διεύθυνση είτε της κυρίας τάσης σ_1 είτε της κύριας τάσης σ_2 και προσπίπτουσα καθέτως επί της πλευρικής επιφάνειας της πλάκας η οποία βρίσκεται σε εντατική κατάσταση (plane stress). Για την περίπτωση της ανακλάσεως της φωτεινής ακτίνας από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, ο οπτικός δρόμος μεταξύ δύο σημείων A και A' της φωτεινής ακτίνας ABDA' ($AB=A'B$), όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη, είναι :

$$s_A = 2(AB)\eta_o + 2d\eta \quad (1.3)$$

όπου d είναι το πάχος της πλάκας, η_o είναι ο δείκτης διαθλάσεως του περιβάλλοντος της πλάκας μέσου και η είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της αφόρτιστης πλάκας. Όταν η πλάκα φορτιστεί, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των αυτών σημείων, A και A', είναι :

$$s_{L_{1,2}} = 2 \left(\left(AB - \frac{\Delta d}{2} \right) \eta_o + 2(d + \Delta d)\eta_{1,2} \right) \quad (1.4)$$



Σχήμα 1.2 : Κάθετη πρόσπτωση ακτίνας επί της πλάκας.

όπου Δd είναι η μεταβολή του πάχους της πλάκας που οφείλεται στη φόρτιση και $\eta_{1,2}$ είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού, της φορτισμένης πλάκας, κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$, αντιστοίχως.

Θέτοντας :

$$\eta_{1,2} = \eta + \Delta\eta_{1,2} \quad (1.5)$$

όπου $\Delta\eta_{1,2}$ είναι η μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως, η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας $ABDA'$, που οφείλεται στη φόρτιση, δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta s_{\eta_{1,2}} = s_{L_{1,2}} - s_A = 2 \left[(\eta_{1,2} - \eta)d + \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \Delta d \right] \quad (1.6)$$

Ομοίως, για την οπτική ακτίνα $ABDE$ τη διερχόμενη δια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου που οφείλεται στη φόρτιση είναι :

$$\Delta s_f = (\eta_{1,2} - \eta)d + (\eta - \eta_o)\Delta d \quad (1.7)$$

Για τη φωτεινή ακτίνα ABC την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου είναι :

$$\Delta s_f = -\eta_o \Delta d \quad (1.8)$$

Ο αριθμός των κροσσών $N_{1,2}$ του λαμβανόμενου συμβολογράμματος από τη συμβολή των ακτινών DA' και BC ανακλωμένων από την πίσω και εμπρός επιφάνεια της πλάκας αντιστοίχως, σχετίζεται με τη διαφορά των οπτικών δρόμων τους, $\delta_{1,2}$, που δίνεται από τη σχέση :

$$\delta_{1,2} = (\Delta s_{\eta_{1,2}} - \Delta s_f) = 2[(\eta_{1,2} - \eta)d + \eta\Delta d] \quad (1.9)$$

δια μέσου της σχέσης :

$$N_{1,2} = \frac{\delta_{1,2}}{\lambda} \quad (1.10)$$

όπου λ είναι το μήκος κύματος του χρησιμοποιούμενου μονοχρωματικού φωτός.

Οι μεταβολές του δείκτη διαθλάσεως η κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 , σ_2 , στο επίπεδο τασικό πρόβλημα, δίνονται από τον φωτοτασεοπτικό νόμο των Neumann-Maxwell:

$$\Delta\eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1 \varepsilon_{1,2} + b_2 (\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3) \quad (1.11)$$

όπου b_1 , b_2 σταθερές και ε_1 , ε_2 , ε_3 οι κύριες παραμορφώσεις. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.9) και (1.10) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το νόμο Hooke, προκύπτει για τον αριθμό των κροσσών :

$$N_{1,2} = 2\delta(\alpha^* \sigma_{1,2} + \beta^* \sigma_{2,1}) \quad (1.12)$$

όπου οι σταθερές α^* και β^* δίνονται από τις σχέσεις :

$$\alpha^* = \frac{1}{E\lambda}(b_1 - 2\nu b_2 - \nu\eta) \quad (1.13)$$

$$\beta^* = \frac{1}{E\lambda}(b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu\eta) \quad (1.14)$$

Ομοίως, η μεταβολή των οπτικών δρόμων των φωτεινών ακτινών ABDA' και ABDE που οφείλονται στη φόρτιση δίνονται από τις συνθήκες Favre :

$$\Delta s_{r_1,2} = 2c_r [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (1.15)$$

$$\Delta s_{t_1,2} = 2c_t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t (\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (1.16)$$

όπου $\xi_{r,t}$ είναι ο συντελεστής της **οπτικής ανισοτροπίας** του υλικού και $c_{r,t}$ είναι **τασεοπτικές σταθερές** οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις :

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2}, \quad \xi_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} - \beta_{r,t}}{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}} \quad (1.17)$$

με :

$$\alpha_r = \frac{1}{E} \left[b_1 - 2\nu b_2 - \nu \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (1.18)$$

$$\beta_r = \frac{1}{E} \left[b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (1.19)$$

$$\alpha_t = \frac{1}{E} [b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (1.20)$$

$$\beta_t = \frac{1}{E} [b_2 - 2\nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (1.21)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η μεταβολή του οπτικού δρόμου κατά τη φόρτιση ενός διπλοθλαστικού υλικού αποτελείται από ένα ισότροπο μέρος, το οποίο εξαρτάται από το άθροισμα των κυρίων τάσεων, και ένα ανισότροπο μέρος, το οποίο εξαρτάται από τη διαφορά των κυρίων τάσεων. Για την περίπτωση των οπτικών ισότροπων υλικών ισχύουν οι σχέσεις :

$$b_1 = b_2 = b \quad (1.22)$$

$$\Delta s_{r_1} = \Delta s_{r_2} = 2c_r (\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (1.23)$$

$$\Delta s_{t_1} = \Delta s_{t_2} = c_t (\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (1.24)$$

$$\alpha_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[(1 - 2\nu)b - \nu \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (1.25)$$

$$\alpha_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu)b - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (1.26)$$

Από τις σχέσεις (1.25) και (1.26) προκύπτει ότι :

$$c_r = c_t - \frac{\nu\eta_o}{2E} \quad (1.27)$$

Οι τασεοπτικές σταθερές c_r και c_t υπολογίζονται πειραματικά με τη Συμβολομετρική μέθοδο.

1.4 Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών.

Οι φωτεινές ακτίνες $r_{1,2}$ (Σχ. 1.1) οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας και σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x, y, z) = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (1.28)$$

Εάν $s(x,y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντιστοίχου φωτεινής ακτίνας μεταξύ δύο επιπέδων παραλλήλων προς το μέσο επίπεδο της φορτιζόμενης πλάκας και κειμένων επί των παραπλεύρων επιφανειών της πλάκας, τότε ισχύει η σχέση :

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (1.29)$$

και απ' αυτή προκύπτει ότι :

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x}i - \frac{\partial s}{\partial y}j \quad (1.30)$$

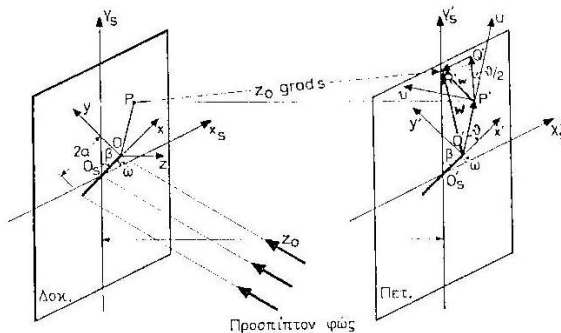
όπου i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ του οποίου η αρχή O συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας Ox συμπίπτει με τον άξονα της ρωγμής και ο άξονας Oz είναι κάθετος στην πλάκα και $s(x,y)$ είναι ο οπτικός δρόμος δια της πλάκας στο τυχαίο σημείο P αυτής (Σχ. 1.3)

Η απόκλιση των ανακλώμενων φωτεινών ακτινών σε απόσταση z_0 από του μέσου επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα w επί του επιπέδου $z=z_0$ και δίνεται, σύμφωνα με τη θεωρία της Εικονικής, από τη σχέση :

$$w = z_0 \text{grad}S(x, y, z) \quad (1.31)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις (1.29) και (1.30) προκύπτει :

$$w = -z_0 \text{grad}s(x, y) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x}i + \frac{\partial s}{\partial y}j \right) \quad (1.32)$$



Σχήμα 1.3 : Γεωμετρία της ρηγματωμένης πλάκας και σχετική θέση της πλάκας και του πετάσματος αναφοράς.

Δεδομένου ότι τα κυματικά μέτωπα των προσπιπτουσών φωτεινών ακτινών επί του μέσου επιπέδου της πλάκας είναι παράλληλα προς το επίπεδο αυτό, ισχύει η σχέση :

$$s(x, y) = s_0 + \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (1.33)$$

όπου s_0 παριστάνει σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο από την πλάκα και η οποία απαλείφεται κατά τον υπολογισμό των κλίσεων και $\Delta s_{r,t}$ παριστάνει τη μεταβολή του οπτικού δρόμου δια της πλάκας που δίνεται από τις σχέσεις (1.15) και (1.16). Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.33) στη σχέση (1.32) προκύπτει :

$$w = -z_0 \text{grad} \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (1.34)$$

Οι αιχμές του διανύσματος w καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z=z_0$ περιβάλλουσα (**καυστική**), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.15), (1.16), (1.23) και (1.24) στη σχέση (1.34) προκύπτει το διάνυσμα απόκλισης για τις περιπτώσεις :

1. Οπτικώς ανισότροπα υλικά με συντελεστή διπλοθλαστικότητας $\xi_{r,t}$.

1.1 Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας.

$$w = -2z_0 dc_r \text{grad} [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (1.35)$$

1.2 Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη δια της πλάκας.

$$w = -z_0 dc_t \text{grad} [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (1.36)$$

Οι σχέσεις (1.35) και (1.36) γενικά μπορούν να γραφούν :

$$w = -\varepsilon z_0 dc_{r,t} \text{grad} [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_{r,t} (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (1.37)$$

όπου η σταθερά ε παίρνει την τιμή $\varepsilon=2$ για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την πίσω επιφάνεια της πλάκας (r) και $\varepsilon=1$ για την πρώτη διερχόμενη δια της πλάκας ακτίνα (t).

2. Οπτικώς ισότροπα υλικά ($\xi_{r,t}=0$).

2.1 Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας.

$$w = -2z_0 dc_r \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.38)$$

2.2 Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη δια της πλάκας.

$$w = -z_0 dc_t \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.39)$$

Οι σχέσεις (1.38) και (1.39) γενικά μπορούν να γραφούν :

$$w = -\varepsilon z_0 dc_{r,t} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.40)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση ϕ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με το νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση :

$$\phi = 2\alpha \quad (1.41)$$

και η γωνία α δίνεται από τη σχέση :

$$\alpha = \text{grad} \frac{\Delta d}{2} = -\text{grad} \left[\frac{vd}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (1.42)$$

οπότε η γωνία ϕ είναι :

$$\phi = -\frac{vd}{E} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.43)$$

όπου :

$$c_f = \frac{v}{E} \quad (1.44)$$

είναι η τασεοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης w , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση z_0 από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση :

$$w = -z_0 dc_f grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.45)$$

Οι σχέσεις (1.40) και (1.45) γενικά μπορούν να γραφούν :

$$w = -\varepsilon_z dc_{r,t,f} grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.46)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα επί της πλάκας φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα (+), ή συγκλίνουσα (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση :

$$\lambda_m = \frac{z_0 \pm z_i}{z_i}$$

όπου z_0 είναι η απόσταση του πετάσματος αναφοράς από την πλάκα (Σχ. 1.3) και z_i είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα (δοκίμιο). Θέτοντας:

$$C_{r,t,f}^* = -\frac{\varepsilon_z dc_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (1.47)$$

η σχέση (1.46), για τα οπτικώς ισότροπα υλικά, γενικά μπορεί να γραφεί :

$$w = C_{r,t,f}^* grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.48)$$

1.5 Εφαρμογή της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά.

Κατά την επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος, με την μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \phi(z) \quad (1.49)$$

όπου $\phi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Έστω ότι $\phi(z)$ είναι της μορφής :

$$\phi(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (1.50)$$

όπου $u(x, y)$, $v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x, y που ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.51)$$

Από τις σχέσεις (1.51) συμπεραίνεται ότι οι συναρτήσεις u, v ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.52)$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα ισότροπα υλικά δίνεται από τη σχέση :

$$w = C_{r,t,f}^* grad(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C_{r,t,f}^* grad \operatorname{Re} \phi(z) = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (1.53)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η σχέση αυτή γράφεται :

$$w = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.54)$$

Το διάνυσμα w εκφράζει τη σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ τυχαίου σημείου P , στη γειτονιά του άκρου της ρωγμής, της πλάκας και της εικόνας του πάνω στο πέτασμα

αναφοράς τοποθετούμενου σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Εάν η απόκλιση αυτή αναφερθεί στην αρχή $O'x'y'z'$ επί του πετάσματος αναφοράς (Σχ. 1.3), τότε το διάνυσμα απόκλισης εκφράζεται ως $\mathbf{W}=\mathbf{z}+\mathbf{w}$. Στο μιγαδικό επίπεδο γράφεται :

$$W = z + w = x + iy + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.55)$$

Το διάνυσμα \mathbf{W} στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέτασμα αναφοράς, γράφεται :

$$W = x' + iy' \quad (1.56)$$

$$x' + iy' = \left(x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left(y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.57)$$

και εξ' αυτής προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις :

$$x' = x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.58)$$

$$y' = y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.59)$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ακτινών. Η απόκλιση των ακτινών στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω απ' την άκρη της ρωγμής εξαρτάται από την μεταβολή του πάχους και του δείκτη διαθλάσεως του υλικού. Οι αποκλίνουσες ακτίνες συγκεντρώνονται πάνω σε μια οριακή καμπύλη η οποία φωτίζεται έντονα. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **Καυστική**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει **ιδιόμορφη (singular) καμπύλη** για το μέγεθος W . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας (singularity) πληρούνται με το μηδενισμό της **Ιακωβιανής (Jacobian) διακρίνουσας** :

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0 \quad (1.60)$$

η οποία γράφεται :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.61)$$

όπου :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.63)$$

και αντικαθιστώντας στην ορίζουσα (1.61) προκύπτει :

$$\begin{vmatrix} 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (1.64)$$

Από την ανάπτυξη της ορίζουσας (1.64) προκύπτει :

$$1 + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.65)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.65) την πρώτη των σχέσεων (1.52) προκύπτει :

$$16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.66)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\phi(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, δύο φορές ως προς x , προκύπτει :

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.67)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη δεύτερη των σχέσεων (1.51) προκύπτει :

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.68)$$

Το μέτρο της (1.68) είναι :

$$|\phi''(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (1.69)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν την πρώτη των σχέσεων (1.52) προκύπτει :

$$|\phi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (1.70)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.70) στη σχέση (1.68) προκύπτει :

$$|4C_{r,t,f}^* \phi''(z)|^2 = 1 \quad (1.71)$$

και απ' την τελευταία σχέση προκύπτει :

$$\boxed{|4C_{r,t,f}^* \phi''(z)| = 1} \quad (1.72)$$

Η σχέση (1.72) είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής αφού ισχύει :

$$\overline{\phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.73)$$

Η σχέση (1.55) γίνεται :

$$\boxed{W = z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\phi'(z)}} \quad (1.74)$$

Η σχέση (1.74) είναι η εξίσωση της καυστικής.

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard Z , η οποία συνδέεται με την $\phi(z)$ με τη σχέση $2\phi(z) = Z$, η εξίσωση (1.72) της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται :

$$\boxed{|2C_{r,t,f}^* Z''(z)| = 1} \quad (1.75)$$

Η δε εξίσωση (1.74) της καυστικής, λαμβανομένου και του συντελεστή μεγέθυνσης λ_m , γίνεται :

$$\boxed{W = \lambda_m \left| z + 2C_{r,t,f}^* \overline{Z'(z)} \right|} \quad (1.76)$$

**ΕΠΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ
ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ**

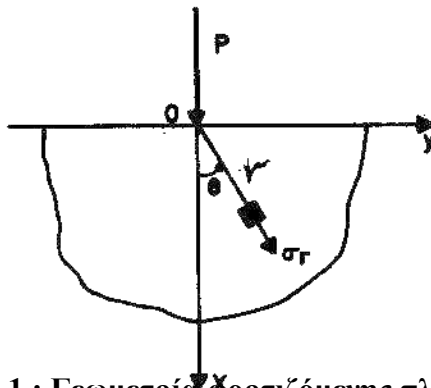
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα επαφών παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον με πολλές πρακτικές εφαρμογές. Για τη λύση των προβλημάτων αυτών, εκτός από τις μαθηματικές αναλύσεις και τις υπολογιστικές μεθόδους, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πειραματικές μέθοδοι όπως η μέθοδος των καυστικών και η μέθοδος της φωτοελαστικότητας.

Η μέθοδος των καυστικών έχει εφαρμοστεί στην μελέτη των ιδιόμορφων τασικών πεδίων τα οποία αναπτύσσονται πλησίον συγκεντρωμένων ή κατανεμημένων φορτίων κατά μήκος ευθυγράμμου συνόρου. Στην παρούσα εργασία επιλύονται διάφορα προβλήματα επαφών με την πειραματική μέθοδο των καυστικών. Τέτοια προβλήματα είναι : συγκεντρωμένα φορτία επί της επιφάνειας ημίχωρων, συγκεντρωμένα φορτία στις κορυφές σφηνών διαφόρων γωνιών. Τα σημεία επαφών και τα σημεία εφαρμογής των φορτίων είναι ιδιόμορφα σημεία εις τα οποία η σχηματιζόμενη καυστική δίνει πληροφορίες για τα αναπτυσσόμενα τασικά πεδία. Από κατάλληλες τασικές συναρτήσεις προκύπτουν οι συναρτήσεις των τάσεων και εξ αυτών οι εξισώσεις των καυστικών.

2.2 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΗ ΔΥΝΑΜΗ ΕΠΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΥΝΟΡΟΥ ΗΜΙΑΠΕΙΡΗΣ ΠΛΑΚΑΣ (Σχ.2.1).

Συγκεντρωμένη δύναμη P εξασκείται σε σημείο ευθυγράμμου συνόρου ημιάπειρης πλάκας (Σχ.2.1). Η τασική συνάρτηση η οποία επιλύει το πρόβλημα αυτό είναι :



Σχ. 2.1 : Γεωμετρία φορτιζόμενης πλάκας.

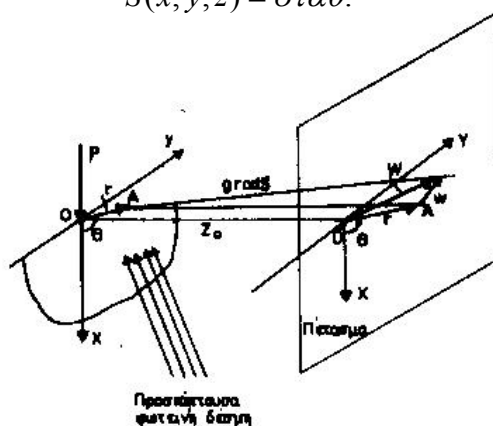
$$\Phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (2.1)$$

Οι τάσεις οι οποίες προκύπτουν από την τασική συνάρτηση αυτή, σε πολικές συντεταγμένες, είναι :

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.2)$$

Παράλληλη δέσμη φωτός προσπίπτει στη γειτονία του σημείου εφαρμογής του φορτίου, έστω στο σημείο A (Σχ. 2.2). Οι φωτεινές ακτίνες ανακλώνται από τις επιφάνειες της πλάκας ή διέρχονται δια της πλάκας και σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x, y, z) = \text{στα}\theta. \quad (2.3)$$



Σχ. 2.2 : Οπτική διάταξη.

Για οπτικώς ισότροπα υλικά η διερχόμενη δια της πλάκας ακτίνα φωτός εκτρέπεται λόγω της παραμορφωμένης περιοχής γύρω από το σημείο εφαρμογής του φορτίου. Επί

πετάσματος, σε απόσταση z_0 από την πλάκα, η εκτροπή της διερχόμενης φωτεινής ακτίνας δίνεται από το διάνυσμα :

$$w_f = -\frac{z_0 dc_f}{\lambda_m} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.4)$$

όπου d είναι το πάχος της πλάκας, $c_f \left(c_f = \frac{v}{E} \right)$ είναι η ταυροοπτική σταθερά του υλικού της πλάκας και λ_m είναι ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης ο οποίος δίνεται από τη σχέση :

$$\lambda_m = \frac{z_0 - z_i}{z_i} \quad (2.5)$$

όπου z_0 είναι η απόσταση μεταξύ της πλάκας και του πετάσματος και z_i είναι η απόσταση μεταξύ της εστίας της φωτεινής δέσμης και της πλάκας. Από τις σχέσεις (2.2) και (2.4) προκύπτει :

$$w_f = C_f \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta i + \sin 2\theta j) \quad (2.6)$$

όπου η σταθερά C_f είναι :

$$C_f = -\frac{2z_0 dc_f P}{\lambda_m \pi} \quad (2.7)$$

Η αρχική καμπύλη της καυστικής και οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής είναι :

$$r_0 = (2C_f)^{\frac{1}{3}} \quad (2.8)$$

$$X_f = \lambda_m (2C_f)^{\frac{1}{3}} (\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta) \quad (2.9)$$

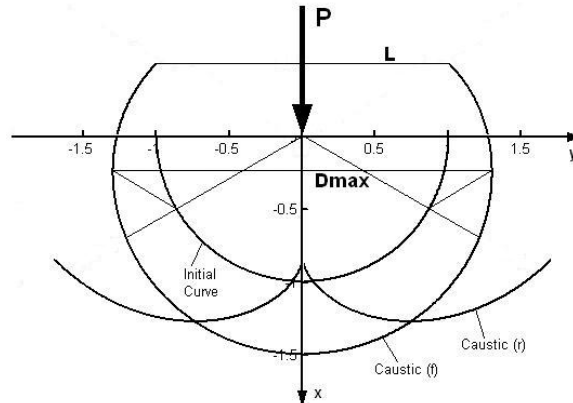
$$Y_f = \lambda_m (2C_f)^{\frac{1}{3}} (\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta)$$

Για τιμές της γωνίας θ μεταξύ $-\frac{\pi}{2}$ και $+\frac{\pi}{2}$, η αρχική καμπύλη και η αντίστοιχη καυστική σχηματίζονται γύρω από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P. Στο Σχ. 2.3 φαίνονται η αρχική καμπύλη και η αντίστοιχη καυστική. Από τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής D_{\max} (για $\theta=60^\circ$) προκύπτει :

$$D_{\max} = 2Y_f^{\max} \big|_{\theta=60^\circ} = \lambda_m C_f^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} \quad (2.10)$$

και εξ αυτής προκύπτει το φορτίο P :

$$P = \frac{2\pi D_{\max}^3}{81\sqrt{3}z_0 d\lambda_m^2 c_t} \quad (2.11)$$



Σχ. 2.3 : Γεωμετρία της αρχικής καμπύλης και της αντίστοιχης καυστικής στο σημείο εφαρμογής του φορτίου.

Το φορτίο P υπολογίζεται πειραματικά από τη διάμετρο της καυστικής με τη χρήση της σχέσης (2.11). Επίσης, το φορτίο P είναι δυνατόν να υπολογιστεί πειραματικά από το άνοιγμα L των άκρων της καυστικής (Σχ. 2.3). Το μήκος L προκύπτει από τις παραμετρικές εξισώσεις (2.9) της καυστικής :

$$L = 2Y_f \Big|_{\theta=\phi-\pi/2} = 2\lambda_m (2C_f)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12)$$

και εξ αυτής, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.7), προκύπτει :

$$P = \frac{\pi L^3}{32z_0 d\lambda_m^2 c_f} \quad (2.13)$$

2.3 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ ΣΦΗΝΑΣ

Συγκεντρωμένη δύναμη P εξασκείται στην κορυφή σφήνας γωνίας 2ϕ (Σχ. 2.4). Η τασική συνάρτηση η οποία επιλύει το πρόβλημα αυτό είναι :

$$\Phi = -\frac{P}{2(\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi)} r\theta \sin \theta \quad (2.14)$$

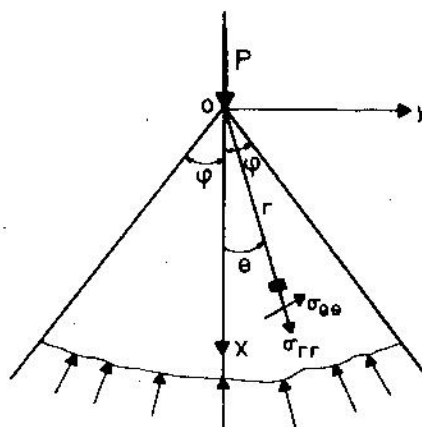
Οι τάσεις οι οποίες προκύπτουν από την τασική αυτή συνάρτηση, σε πολικές συντεταγμένες, είναι :

$$\sigma_r = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.15)$$

Για $\phi = \frac{\pi}{2}$ προκύπτουν η τασική συνάρτηση της σχέσης (2.1) και οι τάσεις της σχέσης (2.2), δηλαδή είναι η περίπτωση ημίχωρου με ευθύγραμμο σύνορο.

Ανάλογα με την περίπτωση 2, του ευθυγράμμου συνόρου, προκύπτουν η εξίσωση της αρχικής καμπύλης (r_0) και οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής (X_f, Y_f). Οι εξισώσεις αυτές είναι :

$$r_0 = (2C_f^*)^{\frac{1}{3}} \quad (2.16)$$



Σχ. 2.4 : Γεωμετρία σφήνας γωνίας 2ϕ

$$X_f = \lambda_m (2C_f^*)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \quad (2.17)$$

$$Y_f = \lambda_m (2C_f^*)^{\frac{1}{3}} \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

όπου η σταθερά C_f^* είναι :

$$C_f^* = - \frac{z_0 d c_f P}{\left(\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \lambda_m} \quad (2.18)$$

Το φορτίο προκύπτει από τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής, από σχέση ανάλογη της σχέσης (2.11), για γωνίες $\phi \geq \theta^{\max} = 60^\circ$:

$$P = \frac{4\left(\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi\right) D_{\max}^3}{81\sqrt{3} z_0 d \lambda_m^2 c_f} \quad (2.19)$$

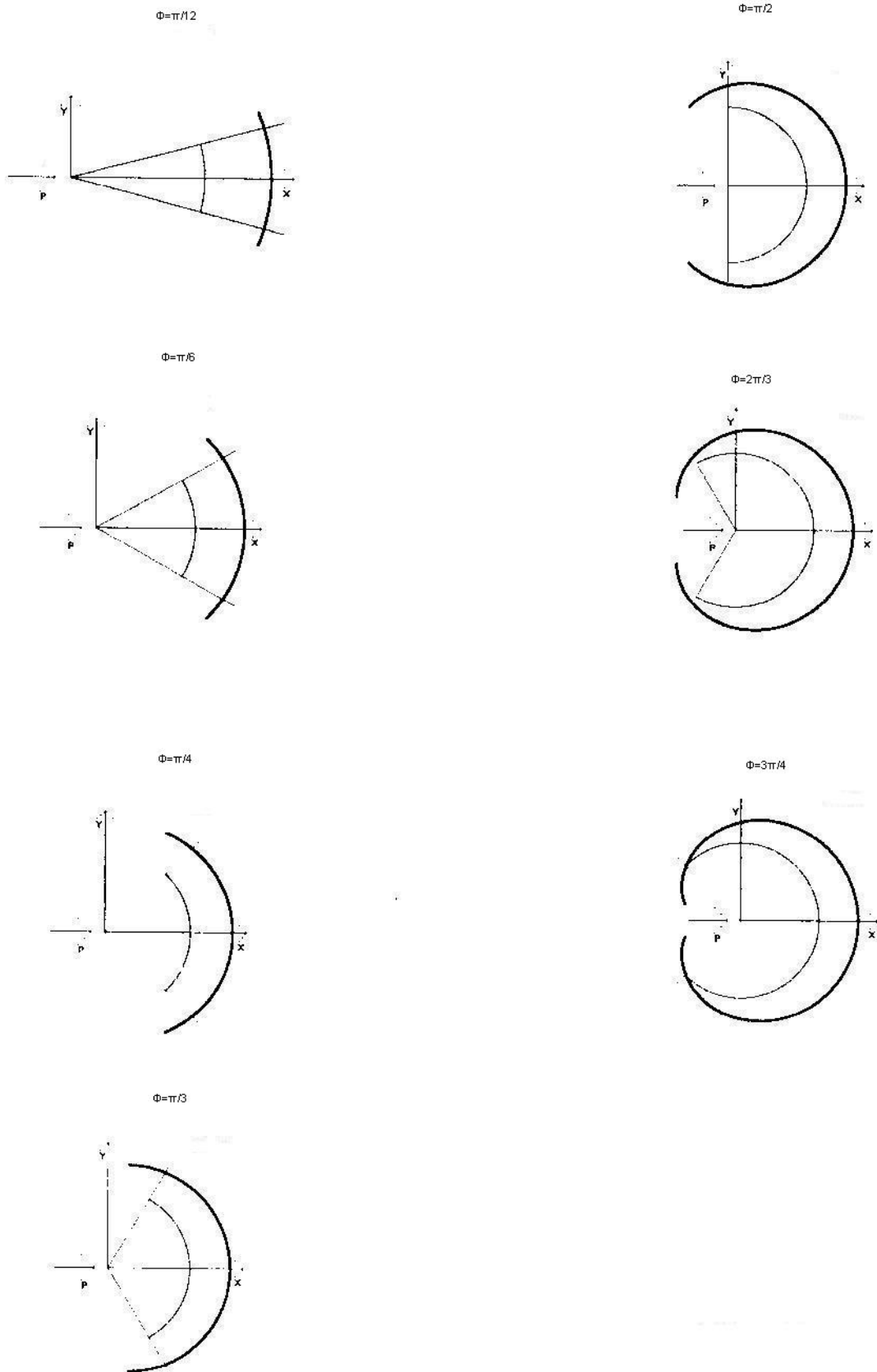
Για γωνίες $\phi < 60^\circ$ η διάμετρος της καυστικής δεν παρουσιάζει μέγιστο οπότε, για τις περιπτώσεις αυτές, το φορτίο υπολογίζεται από το μήκος L από σχέση ανάλογη της σχέσης (2.12) :

$$L = 2Y_f I_{\theta=\phi} = 2\lambda_m (2C_f^*)^{\frac{1}{3}} \left[\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right] \quad (2.20)$$

και εξ αυτής το φορτίο :

$$P = \frac{L^3}{16z_0 d \lambda_m^2 c_f} \frac{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi}{\left(\sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right)^3} \quad (2.21)$$

Στα Σχ. 2.5 παρουσιάζονται οι αρχικές καμπύλες και οι αντίστοιχες καυστικές, όπως σχεδιάστηκαν με τον υπολογιστή σύμφωνα με τις σχέσεις (2.16) και (2.17). Ο σχεδιασμός έγινε για σφήνες γωνιών $\phi = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$, αντίστοιχα.



Σχ. 2.5 : Αρχικές καμπύλες και αντίστοιχες καυστικές

Για τις περιπτώσεις αυτές οι τασικές συναρτήσεις, οι τάσεις και τα φορτία δίνονται στον Πίνακα 1 :

Πίνακας 1

ϕ	Τασική συνάρτηση Φ	Τάση σ_r	Φορτίο P
$\phi = \frac{\pi}{12}$	$\Phi = -\frac{6P}{\pi+3} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{12P \cos \theta}{\pi+3} \frac{1}{r}$	$P = 0,243 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$
$\phi = \frac{\pi}{6}$	$\Phi = -\frac{6P}{2\pi+3\sqrt{3}} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{12P \cos \theta}{2\pi+3\sqrt{3}} \frac{1}{r}$	$P = 0,074 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$
$\phi = \frac{\pi}{4}$	$\Phi = -\frac{2P}{\pi+2} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{4P \cos \theta}{\pi+2} \frac{1}{r}$	$P = 0,046 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$
$\phi = \frac{\pi}{3}$	$\Phi = -\frac{6P}{4\pi+3\sqrt{3}} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{12P \cos \theta}{4\pi+3\sqrt{3}} \frac{1}{r}$	$P = 0,042 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$ $P = 0,042 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$
$\phi = \frac{\pi}{2}$	$\Phi = -\frac{P}{\pi} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi} \frac{1}{r}$	$P = 0,098 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$ $P = 0,045 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$
$\phi = \frac{2\pi}{3}$	$\Phi = -\frac{6P}{8\pi-3\sqrt{3}} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{12P \cos \theta}{8\pi-3\sqrt{3}} \frac{1}{r}$	$P = 1,279 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$ $P = 0,047 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$
$\phi = \frac{3\pi}{4}$	$\Phi = -\frac{2P}{3\pi-2} r\theta \sin \theta$	$\sigma_r = -\frac{4P \cos \theta}{3\pi-2} \frac{1}{r}$	$P = 13,059 \frac{L^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$ $P = 0,053 \frac{D_{\max}^3}{z_0 d \lambda_m^2 c_f}$

Στο Σχ. 2.6 παρουσιάζεται καυστική διελεύσεως σε σφήνα γωνίας $\phi = \frac{3\pi}{4}$, η οποία φορτίζεται με κατακόρυφο φορτίο P.



Σχ. 2.6 : Καυστική διελεύσεως σε σφήνα γωνίας $\phi=3\pi/4$

ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

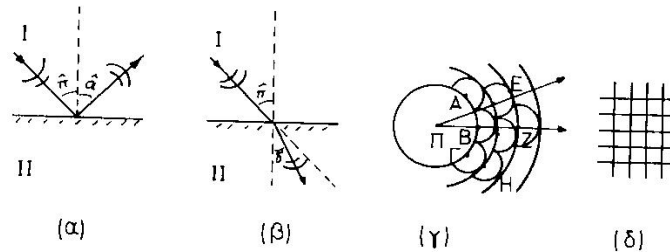
3.1 Γενικά

Η πειραματική μέθοδος της φωτοελαστικότητας αν και ανακαλύφθηκε στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, η ανάπτυξη και η ευρεία εφαρμογή της έγινε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Είναι μια απλή στην εφαρμογή της πειραματική μέθοδος και ως εκ τούτου εφαρμόζεται ευρύτατα από πολλούς πειραματικούς ερευνητές. Για την πειραματική διάταξη απαιτούνται ένα προσομοίωμα (μοντέλο) της προς μελέτη κατασκευής και δύο πολωτές για δημιουργία πολωμένου φωτός. Έτσι ο συνδυασμός της εντατικής κατάστασης των σωμάτων και του πολωμένου φωτός συμβάλλει στην ανάπτυξη της πειραματικής μεθόδου της Φωτοελαστικότητας.

Στη Φωτοελαστικότητα χρησιμοποιούνται τα φαινόμενα της ανάκλασης, διάθλασης και πόλωσης του φωτός που ερμηνεύονται με την κυματική ή την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός. Για την ανάπτυξη της θεωρίας της Φωτοελαστικότητας λαμβάνεται υπ' όψιν το **διάνυσμα του φωτός** που παριστάνει το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του κύματος του φωτός ή του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

3.2 Βασικές Έννοιες της Θεωρίας του Φωτός

Σύμφωνα με τη **Σωματιδιακή Θεωρία** του φωτός, τα σωματίδια τα οποία εκπέμπονται από την φωτεινή πηγή κινούνται ευθύγραμμα εντός του μέσου έως ότου συναντήσουν την επιφάνεια ενός άλλου μέσου όπου ανακλώνται (Σχ. 3.1.α) ή διαθλώνται (Σχ. 3.1.β).



Σχήμα 3.1 : (α) Ανάκλαση, (β) Διάθλαση φωτεινών ακτινών και (γ,δ) Διάδοση μετώπων κύματος

Κατά την ανάκλαση η γωνία προσπτώσεως $\hat{\pi}$ είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεως $\hat{\alpha}$ ($\hat{\pi} = \hat{\alpha}$), ενώ κατά τη διάθλαση ισχύει :

$$\eta = \frac{\sin \hat{\pi}}{\sin \hat{\delta}} = \frac{c_1}{c_2} \tag{3.1}$$

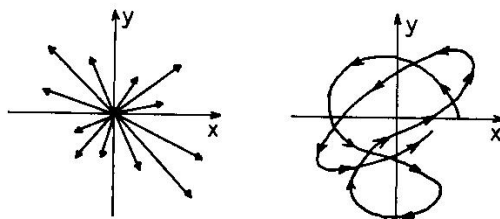
όπου η είναι ο δείκτης διαθλάσεως του φωτός, $\hat{\delta}$ είναι η γωνία διαθλάσεως, c_1 είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (I) και c_2 είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (II).

Σύμφωνα με την κυματική θεωρία του φωτός, από σημειακή φωτεινή πηγή Π (Σχ. 3.1.γ) εκπέμπεται κύμα το οποίο γεννάται από τις δονήσεις των ατόμων της πηγής. Το κύμα διαδίδεται στο χώρο με ταχύτητα c , όπου c η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο χώρο της πηγής. Το κύμα, διαδιδόμενο προς όλες τις διευθύνσεις, σχηματίζει σφαιρικές επιφάνειες

ακτίνας $R=ct$. Όλα τα σημεία της σφαίρας ευρίσκονται σε φάση. Οι επιφάνειες αυτές αποτελούν τα μέτωπα του κύματος. Τα σημεία του πρώτου μετώπου καθίστανται νέες φωτεινές πηγές οι οποίες σχηματίζουν νέα μέτωπα κύματος και η περιβάλλουσα των επί μέρους μετώπων σχηματίζει το νέο μέτωπο του κύματος σύμφωνα με την αρχή του Huygens. Τα σφαιρικά κύματα τα ευρισκόμενα πολύ μακριά της πηγής Π καθίστανται σχεδόν επίπεδα έτσι ώστε, σε άπειρη απόσταση από την πηγή Π , να θεωρούνται επίπεδα κάθετα στις φωτεινές ακτίνες όπως φαίνεται στο Σχ. 3.1.δ.

3.3 Πόλωση του φωτός

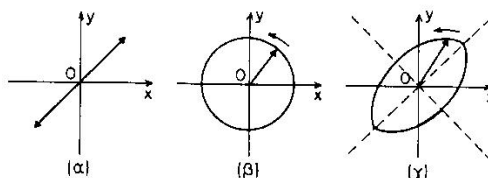
Σύμφωνα με την κυματική θεωρία του φωτός, το κοινό φως αποτελείται από εγκάρσια κύματα διαφόρων συχνοτήτων και διευθύνσεων, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2 : Σχηματική παράσταση του κοινού φωτός

Εάν το κοινό φως προσπέσει πάνω σε υάλινη πλάκα με κατάλληλη γωνία πρόσπτωσης τότε το ανακλώμενο φως αποτελείται από εγκάρσια κύματα με επίπεδα ταλάντωσης παράλληλα μεταξύ τους κάθετα στη διάδοση του κύματος. Στην περίπτωση αυτή το φως καλείται **πολωμένο**. Το διάνυσμα του πολωμένου φωτός κινείται πάνω σε ορισμένη τροχιά, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.3, κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Επίπεδα πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός ευρίσκεται πάνω σε ευθεία γραμμή κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης (Σχ. 3.3.α).



Σχήμα 3.3 : (α) Επίπεδα πολωμένο φως, (β) Κυκλικά πολωμένο φως, (γ) Ελλειπτικά πολωμένο φως.

Κυκλικά πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός κινείται σε κυκλική τροχιά το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης (Σχ. 3.3.β). Κατά συνέπεια σ' αυτή την περίπτωση σχηματίζεται κυκλική έλικα.

Ελλειπτικά πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός κινείται σε ελλειπτική τροχιά το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης (Σχ. 3.3.γ). Κατά συνέπεια σ' αυτή την περίπτωση σχηματίζεται ελλειπτική έλικα.

3.3.1 Διπλοδιάθλαση

Τα φυσικά σώματα, ανάλογα με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός μέσα τους, διακρίνονται σε **οπτικώς ισότροπα** και **οπτικώς ανισότροπα ή διπλοδιαθλαστικά**. Στα

οπτικώς ισότροπα σώματα το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα προς όλες τις διευθύνσεις, ενώ στα οπτικώς ανισότροπα το φως διαδίδεται με διαφορετικές ταχύτητες οι οποίες εξαρτώνται από τη διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός πάνω σ' αυτά.

Εάν d είναι το πάχος της οπτικώς ανισότροπης πλάκας και v_1, v_2 είναι οι ταχύτητες διάδοσης των δύο πολωμένων δεσμών εντός της πλάκας τότε, σύμφωνα με τη διάθλαση του φωτός, ισχύουν :

$$\eta_1 = \frac{c}{v_1}, \eta_2 = \frac{c}{v_2} \quad (3.2)$$

όπου η_1, η_2 είναι οι δείκτες διάθλασης του φωτός κατά τις διευθύνσεις διάδοσης των πολωμένων δεσμών εντός του σώματος και c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Επίσης εάν t_1, t_2 είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι διέλευσης των ακτινών δια του πάχους d της πλάκας, προκύπτει :

$$v_1 = \frac{d}{t_1}, v_2 = \frac{d}{t_2} \quad (3.3)$$

και απ' αυτές προκύπτει :

$$\eta_1 = \frac{c}{d} t_1, \eta_2 = \frac{c}{d} t_2 \quad (3.4)$$

Η διαφορά φάσης των κυμάτων κατά τις διευθύνσεις η_1, η_2 , σύμφωνα με την εξίσωση κύματος (3.25), είναι :

$$\beta = \frac{2\pi}{T}(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{T} \frac{d}{c} (\eta_1 - \eta_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (\eta_1 - \eta_2) \quad (3.5)$$

Οπότε προκύπτει :

$$x = d(\eta_1 - \eta_2) \quad (3.6)$$

δηλαδή προκύπτει η διαφορά x του οπτικού δρόμου των δύο κυμάτων.

3.3.2 Πολωτές

α) *Επίπεδος Πολωτής*, είναι το οπτικό στοιχείο που πολώνει το κοινό φως **επίπεδα**. Ο επίπεδος πολωτής χαρακτηρίζεται από τον άξονα πόλωσης δια του οποίου διέρχεται φως, ενώ κατά την κάθετη διεύθυνση, προς τον άξονα πόλωσης, δεν διέρχεται φως. Εάν $y = a \sin \omega t$ είναι το προσπίπτων κοινό φως και δ είναι η γωνία η οποία σχηματίζεται από το διάνυσμα του φωτός και τον άξονα πόλωσης, τότε οι δύο συνιστώσες του φωτός είναι :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_\delta = y \cos \delta = a \cos \delta \sin \omega t \\ y_a = y \sin \delta = a \sin \delta \sin \omega t \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Από τις δύο αυτές συνιστώσες η y_δ διέρχεται δια του επιπέδου του πολωτή, ενώ η y_a αποκόπτεται. Το διάνυσμα y_δ βρίσκεται πάνω σε επίπεδο που περιέχει τον άξονα πόλωσης του επιπέδου πολωτή.

β) *Κυκλικός Πολωτής*, είναι το οπτικό στοιχείο που πολώνει το κοινό φως **κυκλικά**. Ένα τέτοιο οπτικό στοιχείο είναι μια διπλοδιαθλαστική πλάκα τέτοιου πάχους ώστε η διαφορά φάσης β να ισούται με $\frac{\pi}{2}$. Από τη σχέση (3.5), αντικαθιστώντας με $\beta = \frac{\pi}{2}$, προκύπτει διαφορά δρόμου $x = \frac{\lambda}{4}$. Επομένως ένα τέτοιο οπτικό στοιχείο καλείται

πλάκα τετάρτου μήκους κύματος, $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$.

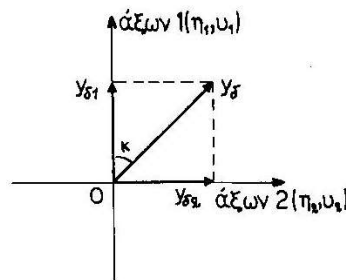
γ) *Ελλειπτικά Πολωμένο Φως*, επιτυγχάνεται από οπτικό στοιχείο το οποίο αποτελείται από ένα επίπεδο πολωτή και ένα κυκλικό πολωτή. Το φως που εξέρχεται είναι ελλειπτικά πολωμένο, δηλαδή το διερχόμενο διάνυσμα του φωτός διαγράφει ελλειπτική έλικα.

Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4, το διάνυσμα y_δ , του επίπεδα πολωμένου φωτός, αναλύεται σε δύο συνιστώσες κατά τους άξονες $1(\eta_1, \nu_1)$ και $2(\eta_2, \nu_2)$ της διπλοδιαθλαστικής πλάκας. Οι συνιστώσες αυτές είναι :

$$y_{\delta 1} = y_\delta \cos \kappa = \alpha \cos \delta \cos \kappa \sin \omega t \quad (3.8)$$

$$y_{\delta 2} = y_\delta \sin \kappa = \alpha \cos \delta \sin \kappa \sin \omega t \quad (3.9)$$

όπου κ είναι η γωνία η οποία σχηματίζεται από τη συνιστώσα y_δ και τον άξονα $1(\eta_1, \nu_1)$ του κυκλικού πολωτή.



Σχήμα 3.4 : Ανάλυση επίπεδα πολωμένου φωτός από διπλοδιαθλαστικά πλάκα.

Οι δύο συνιστώσες $y_{\delta 1}, y_{\delta 2}$ εξερχόμενες από τον κυκλικό πολωτή παρουσιάζουν διαφορά φάσης β . Οι εξερχόμενες αυτές συνιστώσες είναι :

$$y'_{\delta 1} = \alpha \cos \delta \cos \kappa \sin(\omega t + \beta) \quad (3.10)$$

$$y'_{\delta 2} = \alpha \cos \delta \sin \kappa \sin \omega t \quad (3.11)$$

Οι συνιστώσες αυτές προστιθέμενες δίνουν κύμανση :

$$\frac{(y'_{\delta 1})^2}{(\alpha \cos \delta \cos \kappa)^2} + \frac{(y'_{\delta 2})^2}{(\alpha \cos \delta \sin \kappa)^2} - 2 \frac{y'_{\delta 1} y'_{\delta 2}}{\alpha^2 \cos^2 \delta \sin \kappa \cos \kappa} \cos \beta = \sin^2 \beta \quad (3.12)$$

Η εξίσωση αυτή, όπως και η εξίσωση (3.19), παριστάνει έλλειψη στο επίπεδο $(y'_{\delta 1} y'_{\delta 2})$, δηλαδή η εξερχόμενη κίνηση είναι ελλειπτική έλικα.

Εάν η διαφορά φάσης είναι $\beta = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή η διπλοδιαθλαστική πλάκα αποτελεί κυκλικό πολωτή και η γωνία $\kappa = \frac{\pi}{4}$, τότε το εξερχόμενο φως είναι **κυκλικά**

πολωμένο. Στην περίπτωση όπου είναι $\kappa=0$ ή $\frac{\pi}{2}$, τότε το εξερχόμενο φως είναι **επίπεδα πολωμένο**.

3.4 Φωτοτασεοπτικός Νόμος

Φυσική διπλοδιάθλαση παρουσιάζουν τα κρυσταλλικά σώματα, όπως ο Τουρμαλίνης, η μίκα του ασβεστίου, κλπ. Όμως είναι δυνατόν διπλοδιάθλαση να παρουσιάσουν και τα οπτικώς ισότροπα σώματα, όπως ο ύαλος, ο βακελίτης, το Lexan, μετά από εντατική ή παραμορφωσιακή κατάσταση. Κατά την ένταση του σώματος αναπτύσσονται οι Κύριες Τάσεις, οι οποίες μεταβάλλουν την εσωτερική δομή του σώματος με αποτέλεσμα τη μεταβολή της οπτικώς ισότροπης συμπεριφοράς του σώματος, δηλαδή μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Η διπλοδιάθλαση είναι ανάλογη της εντατικής κατάστασης του σώματος. Η αναλογία αυτή διατυπώνεται από τον **Φωτοτασεοπτικό Νόμο**.

Κατ' αυτόν τον νόμο, εφόσον το σώμα φορτίζεται στην ελαστική περιοχή, η εμφανιζόμενη διπλοδιάθλαση είναι ανάλογη της διαφοράς των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος, δηλαδή :

$$\eta_1 - \eta_2 = c_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.13)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.13) στη σχέση (3.5), η διαφορά φάσης των δύο κυμάνσεων κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων είναι :

$$\beta = \frac{2\pi d}{\lambda} c_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.14)$$

Από τη σχέση (3.14) προκύπτει :

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{dc_\sigma}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.15)$$

Από την σχέση (3.15) συμπεραίνεται ότι η ποσότητα $\frac{\beta}{2\pi}$ είναι ανάλογη της διαφοράς των κυρίων τάσεων για σταθερό πάχος d του σώματος και μήκος κύματος λ μονοχρωματικής ακτινοβολίας (μονοχρωματικό φως). Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του σώματος στα οποία η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι σταθερή καλείται **κροσσός** και η τάξη του συμβολίζεται με N . Όσο αυξάνεται η εντατική κατάσταση του σώματος αυξάνεται η διαφορά των κυρίων τάσεων με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται κροσσοί τάξεως N . Επομένως η σχέση (3.15) γράφεται :

$$N = \frac{dc_\sigma}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{d}{f_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.16)$$

όπου :

$$f_\sigma = \frac{\lambda}{c_\sigma}$$

Η σταθερά f_σ καλείται **φωτοελαστική σταθερά** του υλικού του σώματος και εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Η φωτοελαστική σταθερά f_σ υπολογίζεται πειραματικά για κάθε υλικό και για κάθε ακτινοβολία μήκους κύματος λ (μονοχρωματικό φως). Η σχέση (3.16), αντικαθιστώντας τη διαφορά των κυρίων τάσεων με τη μέγιστη διατμητική τάση τ_{\max} , γράφεται :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = N \frac{f_\sigma}{2d} \quad (3.17)$$

δηλαδή, **οι φωτοελαστικοί κροσσοί είναι ο γεωμετρικός τόπος σημείων που έχουν την αυτή μέγιστη διατμητική τάση.**

3.5 Πολωσισκόπιο

Σύμφωνα με τον προηγούμενο Φωτοτασεοπτικό Νόμο, όταν φωτεινή ακτίνα προσπέσει κάθετα σε διαφανές σώμα ευρισκόμενο υπό ένταση αναλύεται σε δύο κυμάνσεις κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 με διαφορά φάσης β . Οι δύο κυμάνσεις είναι γραμμικά πολωμένες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Κατά συνέπεια, οι εξερχόμενες δια του σώματος κυμάνσεις δίνουν πληροφορίες ως προς τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων, οι οποίες είναι δυνατόν να ληφθούν με το πολωσισκόπιο δια του οποίου το προσπίπτον φως επί του σώματος είναι επίπεδα ή κυκλικά πολωμένο για την καλύτερη λήψη των παραπάνω πληροφοριών.

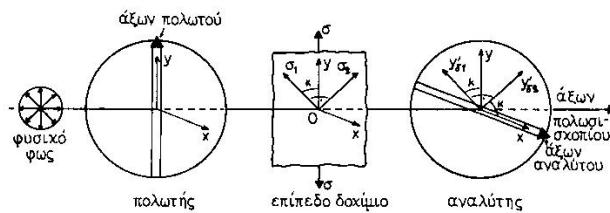
Το πολωσισκόπιο αποτελείται από δύο πολωτές και δύο πλάκες τετάρτου μήκους κύματος. Ανάλογα με τη διάταξη των τεσσάρων αυτών οπτικών στοιχείων το πολωσισκόπιο διακρίνεται σε : **επίπεδο πολωσισκόπιο** και σε **κυκλικό πολωσισκόπιο**.

Δια του **επιπέδου πολωσισκοπίου** λαμβάνονται πληροφορίες για τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος, ενώ δια του **κυκλικού πολωσισκοπίου** λαμβάνονται πληροφορίες για τη διαφορά των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος. Με τη μέθοδο αυτή επιτυγχάνεται η **πειραματική ανάλυση των τάσεων** σε κάθε σημείο του σώματος και κυρίως γύρω από ιδιόμορφα σημεία (singular points).

3.5.1 Επίπεδο Πολωσισκόπιο

Το επίπεδο πολωσισκόπιο αποτελείται από δύο πολωτές διατεταγμένους έτσι ώστε ένας πολωτής να πολώνει το φυσικό φως, οπότε καλείται **πολωτής**, ενώ ο άλλος τοποθετείται μετά το υπό ένταση σώμα και καλείται **αναλυτής**. Εάν τα επίπεδα πόλωσης του πολωτή και αναλυτή είναι παράλληλα τότε το πολωμένο φως διέρχεται δια του αναλυτή οπότε το πολωσισκόπιο καλείται **επίπεδο πολωσισκόπιο φωτεινού πεδίου**. Εάν τα επίπεδα πόλωσης είναι κάθετα τότε το πολωμένο φως αποκόπτεται απ' τον αναλυτή οπότε το πολωσισκόπιο καλείται **επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου**.

Στο Σχ. 3.5 φαίνεται σχηματικά το επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου εντός του οποίου έχει τοποθετηθεί επίπεδο διαφανές δοκίμιο, από οπτικός ισότροπο υλικό, το οποίο φορτίζεται με τάση σ στο άπειρο.



Σχήμα 3.5 : Επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου.

Μετά τη φόρτιση το υλικό καθίσταται οπτικώς ανισότροπο με αποτέλεσμα τη διπλοδιάθλαση του διερχόμενου φωτός. Σε κάθε σημείο του σώματος η εντατική κατάσταση είναι σ_1 και σ_2 . Έστω κ η γωνία μεταξύ της κύριας τάσης σ_1 και του άξονα του πολωτή. Προσπίπτοντας το πολωμένο φως πάνω στην επίπεδη πλάκα (δοκίμιο) αναλύεται σε δύο συνιστώσες, κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων, με εξισώσεις (3.33) και (3.34). Οι δύο αυτές συνιστώσες $y'_{\delta 1}$ και $y'_{\delta 2}$ προσπίπτουν πάνω στον αναλυτή όπου αναλύονται σε δύο συνιστώσες έκαστη, εκ των οποίων διέρχονται απ' τον

αναλυτή μόνο οι παράλληλες προς τον άξονα πόλωσης του αναλυτή ενώ οι κάθετες προς τον άξονα αποκόπτονται. Οι αναλύσεις αυτές δίνουν :

α) Διερχόμενες δια του αναλυτή συνιστώσες :

$$x''_{\delta 1\delta} = y'_{\delta 1} \sin \kappa = \alpha \cos \delta \cos \kappa \sin \kappa \sin(\omega t + \beta) \quad (3.18)$$

$$x''_{\delta 2\delta} = y'_{\delta 2} \sin \kappa = \alpha \cos \delta \cos \kappa \sin \kappa \sin \omega t \quad (3.19)$$

β) Αποκοπτόμενες δια του αναλυτή συνιστώσες :

$$y''_{\delta 1\alpha} = y'_{\delta 1} \cos \kappa = \alpha \cos \delta \cos^2 \kappa \sin \kappa \sin(\omega t + \beta) \quad (3.20)$$

$$y''_{\delta 2\alpha} = y'_{\delta 2} \sin \kappa = \alpha \cos \delta \sin^2 \kappa \sin \omega t \quad (3.21)$$

Οι δύο συνιστώσες δίνουν συνισταμένη δύναμη ίση με την διαφορά τους, δηλαδή:

$$x = x''_{\delta 1\delta} - x''_{\delta 2\delta} = \alpha \cos \delta \sin \kappa \cos \kappa [\sin(\omega t + \beta) - \sin \omega t] =$$

$$a \cos \delta \sin 2\kappa \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.22)$$

Η ένταση της διερχόμενης αυτής κύμανσης είναι ανάλογη του διπλασίου τετραγώνου του πλάτους της, δηλαδή :

$$I = 2a^2 \cos^2 \delta \sin^2 2\kappa \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (3.23)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ένταση του διερχόμενου φωτός παίρνει ακρότατες τιμές, δηλαδή είτε μηδενίζεται είτε γίνεται μέγιστη. Ο μηδενισμός της έντασης, που σημαίνει σκότος, επιτυγχάνεται με :

$$\sin^2 2\kappa = 0 \rightarrow \kappa = 0, k \frac{\pi}{2}, \text{ με } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

που σημαίνει ότι ορίζονται επί του δοκιμίου σκοτεινές γραμμές οι οποίες αντιστοιχούν σε γεωμετρικό τόπο σημείων όπου οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων είναι παράλληλες προς τους άξονες του πολωτή και αναλυτή. Οι σκοτεινές αυτές γραμμές καλούνται **ισοκλινείς καμπύλες**, από το γεγονός ότι σε όλα αυτά τα σημεία οι κύριες τάσεις έχουν την αυτή κλίση των αξόνων του πολωτή και αναλυτή.

Από την σχέση (3.22) παρατηρείται ότι το διερχόμενο φως δεν εξαρτάται απ' το μήκος κύματος του φωτός και ως εκ τούτου είτε χρησιμοποιείται λευκό φως είτε μονοχρωματικό, οι εμφανιζόμενες ισοκλινείς καμπύλες είναι πάντοτε σκοτεινές (μαύρες γραμμές).

Επίσης ο μηδενισμός της σχέσης (3.23) επιτυγχάνεται με :

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = 0 \rightarrow \kappa = 0, k 2\pi, \text{ με } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

δηλαδή, διαφορά φάσης β ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π που αντιστοιχεί σε μια περίοδο. Στην περίπτωση αυτή οι κροσσοί που εμφανίζονται παριστάνουν γεωμετρικούς τόπους ίσων διαφορών φάσεως, οι οποίες αντιστοιχούν σε ακέραια πολλαπλάσια πλήρων περιόδων. Από την σχέση (3.25) προκύπτει :

$$\frac{\beta}{2\pi} = k = N \quad (3.26)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (3.14), προκύπτει :

$$N = \frac{d}{\lambda} c_{\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\lambda}{c_{\sigma}} \frac{N}{d} = N \frac{f_{\sigma}}{d} \quad (3.52)$$

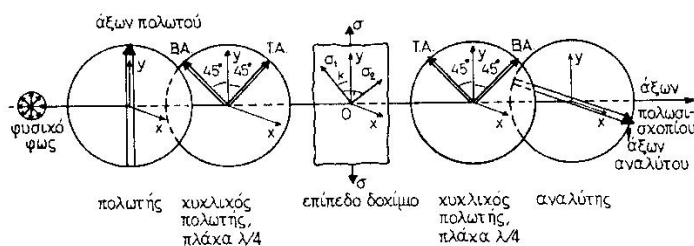
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι οι λαμβανόμενοι κροσσοί παριστάνουν γεωμετρικούς τόπους ίσων τιμών της διαφοράς ($\sigma_1 - \sigma_2$) των κυρίων τάσεων. Οι κροσσοί αυτοί καλούνται **ισόχρωμες καμπύλες**. Οι ισόχρωμες καμπύλες δεν εξαρτώνται από την κλίση των αξόνων του πολωτή και αναλυτή και επομένως *κατά την ταυτόχρονη περιστροφή του πολωτή και αναλυτή, ενώ οι ισοκλινείς καμπύλες περιστρέφονται, οι ισόχρωμες καμπύλες παραμένουν ακίνητες*.

3.5.2 Κυκλικό Πολωσισκόπιο

Δια του κυκλικού πολωσισκοπίου λαμβάνεται το δίκτυο των ισόχρωμων κροσσών και απαλείφεται το δίκτυο των ισοκλινών. Το κυκλικό πολωσισκόπιο αποτελείται από το επίπεδο πολωσισκόπιο παρεμβάλλοντας δύο κυκλικούς πολωτές (πλάκες $\frac{\lambda}{4}$). Ο

κυκλικός πολωτής χαρακτηρίζεται από δύο κάθετους άξονες, τον **ταχύ άξονα (TA)** και τον **βραδύ άξονα (BA)**. Οι κυκλικοί πολωτές τοποθετούνται έτσι ώστε οι δύο άξονες, TA και BA, να σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα του πολωτή, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.8. Οι κυκλικοί πολωτές τοποθετούνται έτσι ώστε ο TA του ενός να είναι παράλληλος προς τον BA του άλλου για να μην αλλοιωθεί το εξερχόμενο φως από τον αναλυτή. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν ο TA του ενός κυκλικού πολωτή είναι παράλληλος προς τον TA του άλλου, το εξερχόμενο φως από τον αναλυτή στρέφεται κατά γωνία 90° .

Στην πρώτη περίπτωση το κυκλικό πολωσισκόπιο είναι **σκοτεινού πεδίου**, ενώ στη δεύτερη **φωτεινού πεδίου**. Στο Σχ. 3.6 το σχεδιασμένο πολωσισκόπιο είναι σκοτεινού πεδίου.



Σχήμα 3.6 : Κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου

Το διερχόμενο επίπεδο φως από τον πολωτή είναι της μορφής που δίνεται από την πρώτη των εξισώσεων (3.7). Ακολουθώντας, το φως αυτό προσπίπτει πάνω στον κυκλικό πολωτή και αναλύεται σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των αξόνων.

Το διερχόμενο φως περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.35) και (3.36) με $\beta = \frac{\pi}{2}$,

αφού ο κυκλικός πολωτής εισάγει διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$ μεταξύ των κυμάνσεων των δύο αξόνων. Οι συνιστώσες αυτές, κατά τον TA $y_{\delta T}$ και κατά τον BA $y_{\delta B}$, είναι :

$$y_{\delta T} = a \cos \delta \cos 45^\circ \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta \cos \omega t \quad (3.27)$$

$$y_{\delta B} = a \cos \delta \sin 45^\circ \sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta \sin \omega t \quad (3.28)$$

Η σύνθεση αυτών των δύο κυμάνσεων δίνει διάνυσμα σταθερού πλάτους που διαγράφει κυκλική έλικα, δηλαδή είναι κυκλικά πολωμένο φως. Το φως αυτό προσπίπτει επί του υπό ένταση ευρισκόμενου δοκιμίου και δίνει δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 , οι οποίες αθροιζόμενες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων, δίνουν :

$$y_1 = y_{\delta T_1} + y_{\delta B_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [\sin(45^\circ - \kappa) \cos \omega t + \cos(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.29)$$

$$y_2 = y_{\delta B_2} - y_{\delta T_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [-\cos(45^\circ - \kappa) \cos \omega t + \sin(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.30)$$

Οι δύο αυτές κυμάνσεις διερχόμενες δια του δοκιμίου παρουσιάζουν διαφορά φάσης β , δηλαδή :

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [\sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta)] \quad (3.31)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [-\cos(45^\circ - \kappa) \cos \omega t + \sin(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.32)$$

Οι κυμάνσεις αυτές προσπίπτουν πάνω στο δεύτερο κυκλικό πολωτή και δίνουν συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις του ταχύ και βραδύ άξονα, οι οποίες αθροιζόμενες κατά τις διευθύνσεις των αξόνων του κυκλικού πολωτή, δίνουν :

$$y_T = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [\cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) - \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \cos \omega t + \sin^2(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.33)$$

$$y_B = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [\sin^2(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \cos \omega t - \cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.34)$$

Οι δύο αυτές διακυμάνσεις διερχόμενες δια του κυκλικού πολωτή παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$, δηλαδή :

$$y_T = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [-\cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) + \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \cos \omega t + \sin^2(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.35)$$

$$y_B = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \delta [\sin^2(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \cos \omega t - \cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \sin \omega t] \quad (3.36)$$

Οι κυμάνσεις (3.35) και (3.36) προσπίπτουν πάνω στον αναλυτή και αναλύονται κατά τον άξονα του αναλυτή και κατά τον κάθετο άξονα. Οι συνιστώσες κατά τον άξονα του αναλυτή διέρχονται δια του αναλυτή, ενώ οι άλλες συνιστώσες, κατά τον κάθετο προς τον άξονα του αναλυτή, αποκόπονται. Οι διερχόμενες συνιστώσες είναι :

$$x_{T\delta} = y_T \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_{B\delta} = y_B \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Κατά συνέπεια, η διερχόμενη συνισταμένη δια του αναλυτή, είναι :

$$x = x_{B\delta} - x_{T\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_B - y_T) = a \cos \delta \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\beta}{2} - 2\kappa \right) \quad (3.37)$$

Η ένταση της διερχόμενης κύμανσης είναι ανάλογη του διπλασίου τετραγώνου του πλάτους της, δηλαδή :

$$I = 2\alpha^2 \cos^2 \delta \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (3.38)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η ένταση I του διερχόμενου φωτός μηδενίζεται όταν :

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\beta}{2} = k\pi \quad , \quad \text{με} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.39)$$

Η συνθήκη αυτή είναι ίδια με τη συνθήκη (3.25), που σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων απόσβεσης είναι σκοτεινές γραμμές οι οποίες καλούνται **ισόχρωμες**, δηλαδή δημιουργείται το **δίκτυο των ισόχρωμων**.

Εάν ο αναλυτής στραφεί κατά 90° , δηλαδή ο άξονας του αναλυτή θα είναι παράλληλος με τον άξονα του πολωτή, τότε το πολωσισκόπιο γίνεται **φωτεινού πεδίου** και το διερχόμενο φως είναι :

$$\begin{aligned} y = y_{T\delta} + y_{B\delta} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(y_T + y_B) = \frac{1}{2} a \cos \delta [\cos(\omega t + \beta) + \cos \omega t] = \\ &= \frac{1}{2} a \cos \delta 2 \cos \frac{\omega t + \beta + \omega t}{2} \cos \frac{\omega t + \beta - \omega t}{2} = a \cos \delta \cos \left(\omega t + \frac{\beta}{2} \right) \cos \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Η ένταση της διερχόμενης κύμανσης είναι ανάλογη του διπλασίου τετραγώνου του πλάτους της, δηλαδή :

$$I = 2\alpha^2 \cos^2 \delta \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (3.41)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η ένταση I του διερχόμενου φωτός μηδενίζεται όταν :

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad \text{με} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.42)$$

δηλαδή :

$$\frac{\beta}{2\pi} = k + \frac{1}{2} = N + \frac{1}{2} \quad (3.43)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι οι λαμβανόμενοι κροσσοί είναι ισόχρωμες ημιακέραιας τάξεως, δηλαδή τάξεως $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι με το πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου το δίκτυο των ισόχρωμων είναι ακεραίας τάξεως, $N=1, 2, 3, \dots$ ενώ με το πολωσισκόπιο φωτεινού πεδίου το δίκτυο των ισόχρωμων είναι ημιακέραιας τάξεως, $N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Η σχέση της διαφοράς των κυρίων τάσεων με την τάξη των κροσσών του δικτύου των ισόχρωμων είναι :

α) Για πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = N \frac{f_\sigma}{d} \quad (3.44)$$

β) Για πολωσισκόπιο φωτεινού πεδίου

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{f_\sigma}{d} \quad (3.45)$$

όπου f_σ είναι η φωτοασεοπτική σταθερά του υλικού, d είναι το πάχος της πλάκας (δοκιμίου) και N είναι η τάξη των κροσσών του δικτύου των ισόχρωμων.

3.6 Υπολογισμός της Φωτοασεοπτικής Σταθεράς

Η φωτοασεοπτική σταθερά του υλικού υπολογίζεται πειραματικά. Γι' αυτό το λόγο το δοκίμιο κατασκευάζεται από υλικό του οποίου η φωτοασεοπτική σταθερά ζητείται και ακολούθως γίνεται *πείραμα απλού εφελκυσμού ή θλίψης ή πείραμα καθαρής κάμψης*.

Στο *πείραμα απλού εφελκυσμού* υπάρχει μόνο μια κύρια τάση κατά τη διεύθυνση της φόρτισης, επομένως η ισόχρωμη που εμφανίζεται είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση της φόρτισης. Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (3.44), προκύπτει :

$$\sigma = N \frac{f_\sigma}{d} \rightarrow \frac{P}{wd} = N \frac{f_\sigma}{d} \rightarrow f_\sigma = \frac{1}{N} \left(\frac{P}{w} \right) \quad (3.46)$$

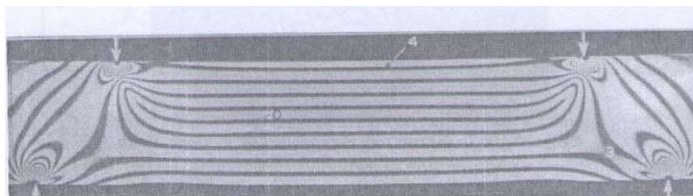
όπου P είναι το φορτίο και w είναι το πλάτος του χρησιμοποιούμενου δοκιμίου. Η φωτοασεοπτική σταθερά υπολογίζεται από την κλίση της καμπύλης $\frac{P}{wd} = f(N)$. Γι' αυτό το

δοκίμιο φορτίζεται στην ελαστική περιοχή και για κάθε φορτίο $\frac{P}{wd}$ μετράται ο αριθμός των ισόχρωμων που εμφανίζονται και περνούν από ένα σταθερό σημείο αναφοράς πάνω στο δοκίμιο. Έπειτα σχεδιάζεται η καμπύλη $\frac{P}{wd} = f(N)$, η κλίση της οποίας είναι η σταθερά f_σ .

Στο *πείραμα της καθαρής κάμψης*, υπάρχει μια μόνο κύρια τάση κατά τη διεύθυνση του άξονα του δοκιμίου, επομένως οι εμφανιζόμενοι ισόχρωμοι κροσσοί είναι παράλληλοι προς τον άξονα του δοκιμίου. Ο κροσσός που συμπίπτει με τον ουδέτερο άξονα του δοκιμίου είναι τάξης μηδέν, $N=0$, διότι η τάση εκεί είναι μηδέν. Σύμφωνα με τη θεωρία της καθαρής κάμψης και τη σχέση (3.44) προκύπτει :

$$\sigma = \frac{M}{I} y = N \frac{f_\sigma}{d} \quad (3.47)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (3.47), γνωρίζοντας την τάση σ σε απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα του δοκιμίου και μετρώντας τον αριθμό των κροσσών από τον ουδέτερο άξονα μέχρι την απόσταση y , υπολογίζεται η φωτοασεοπτική σταθερά f_σ . Το δίκτυο των ισόχρωμων σε δοκίμιο καθαρής κάμψης φαίνεται στο Σχ. 3.7.



Σχήμα 3.7 : Το δίκτυο των ισόχρωμων σε δοκίμιο καθαρής κάμψης

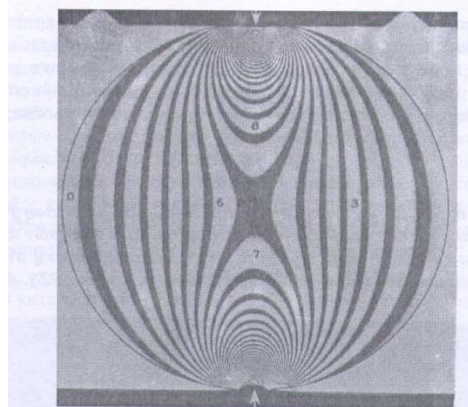
Επίσης η φωτοτασεοπτική σταθερά f_σ υπολογίζεται εύκολα από την **αντιδιαμετρική θλίψη κυκλικού δίσκου** διαμέτρου D και πάχους d . Από την εντατική κατάσταση στο κέντρο του δίσκου προκύπτει η διαφορά των κυρίων τάσεων $\sigma_1 - \sigma_2$:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8P}{\pi d D}$$

όπου P είναι το θλιπτικό φορτίο. Από την σχέση αυτή σε συνδυασμό με τη σχέση (3.44), προκύπτει :

$$f_\sigma = \frac{1}{N} \frac{8P}{\pi D} \quad (3.48)$$

όπου N είναι η τάξη της ισοχρώμου στο κέντρο του δίσκου. Το δίκτυο των ισοχρώμων σε κυκλικό δίσκο υπό αντιδιαμετρική θλίψη φαίνεται στο Σχ. 3.8.



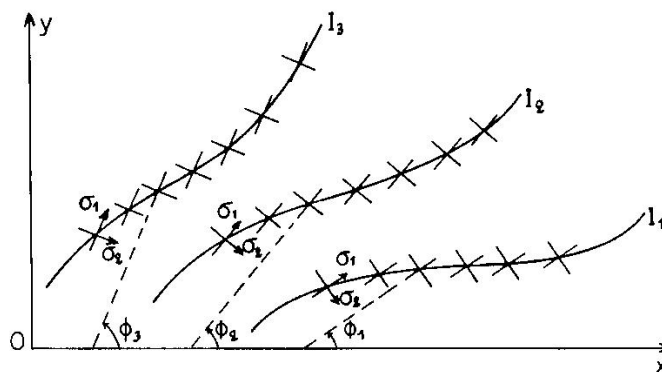
Σχήμα 3.8 : Το δίκτυο των ισοχρώμων σε κυκλικό δίσκο υπό αντιδιαμετρική θλίψη.

3.7 Τροχιές Κυρίων Τάσεων

Όπως έχει προαναφερθεί, ισοκλινείς γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου η κλίση των κυρίων τάσεων, ως προς καθορισμένη διεύθυνση, είναι ίδια, δηλαδή οι κύριες τάσεις στα σημεία αυτά παραμένουν παράλληλες όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9. Κάθε ισοκλινείς χαρακτηρίζεται από τη γωνία κλίσης. Έτσι στο Σχ. 3.9 έχουν σχεδιαστεί τρεις ισοκλινείς κλίσεων (παραμέτρων) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Το δίκτυο των ισοκλινών λαμβάνεται με το επίπεδο πολωσισκόπιο και με την ταυτόχρονη περιστροφή του πολωτή και αναλυτή.

Οι ισοκλινείς χαρακτηρίζονται από ορισμένες ιδιότητες δια των οποίων επιτυγχάνεται ακριβέστερη χάραξη των. Οι ιδιότητες αυτές είναι :

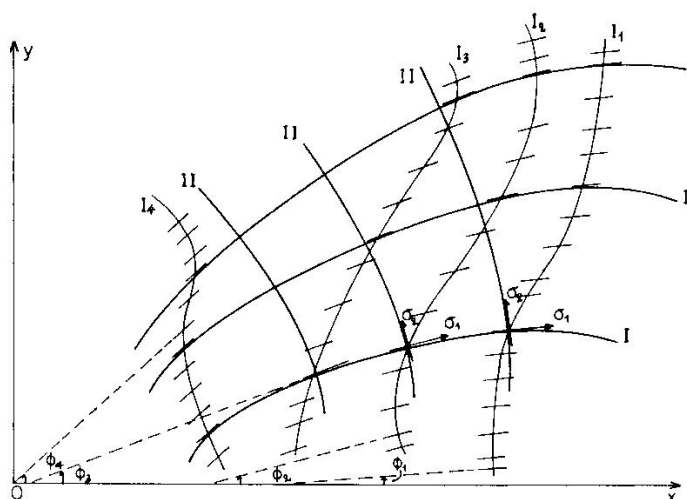
1. Στα αφόρτιστα σύνορα ενός δοκιμίου καταλήγουν ισοκλινείς της ίδιας κλίσης με το σύνορο του δοκιμίου διότι, η μόνη τάση που υπάρχει στο ελεύθερο σύνορο έχει διεύθυνση την εφαπτόμενη του συνόρου.



Σχήμα 3.9 : Ισοκλινείς κλίσεων (παραμέτρων) φ_1, φ_2 και φ_3 .

2. Στα γεωμετρικώς συμμετρικά δοκίμια το δίκτυο των ισοκλινών είναι συμμετρικό με παραμέτρους φ και $90^\circ - \varphi$.
3. Στην περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου κάθετου στην επιφάνεια ημιεπιπέδου, η αναπτυσσόμενη ακτινική τάση είναι σ_r . Επομένως, οι ισοκλινείς διέρχονται από το σημείο εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου και συμπίπτουν με τις ακτίνες κατά μήκος των οποίων αναπτύσσεται η κύρια τάση σ_r . Η παράμετρος των ισοκλινών συμπίπτει με την κατακόρυφη ή οριζόντια διεύθυνση.
4. Από το άκρο της ρωγμής διέρχονται οι ισοκλινείς με παραμέτρους $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.
5. Οι ισοκλινείς διέρχονται από τα ισότροπα σημεία όπου η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι μηδέν δηλαδή $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Ισότροπα σημεία όπου οι κύριες τάσεις είναι μηδέν καλούνται *ιδιόμορφα σημεία*.

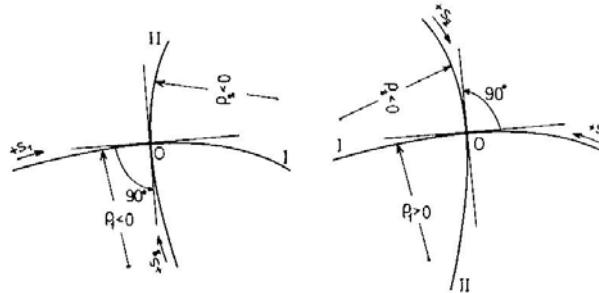
Από το δίκτυο των ισοκλινών είναι εύκολο να χαραχθούν γραφικά οι τροχιές των κυρίων τάσεων. *Τροχιές κυρίων τάσεων είναι οι γραμμές σε κάθε σημείο των οποίων η εφαπτόμενη συμπίπτει με τη διεύθυνση της κύριας τάσης*. Αφού οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων είναι κάθετες μεταξύ τους έπεται ότι το δίκτυο των τροχιών των κυρίων τάσεων αποτελείται από ορθογώνιες καμπύλες δηλαδή καμπύλες οι οποίες τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. Στο Σχ. 3.10 φαίνεται η σχεδίαση των τροχιών των κυρίων τάσεων από το δίκτυο των ισοκλινών. Προς τούτο χαράσσονται οι ισοκλινείς παραμέτρων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ και φ_4 , ως προς τον οριζόντιο άξονα (συνήθως με παραμέτρους ανά 10°).



Σχήμα 3.10 : Σχεδίαση των τροχιών των κυρίων τάσεων από το δίκτυο των ισοκλινών.

Ακολούθως χαράσσεται ένα πυκνό δίκτυο μικρών παραλλήλων ευθειών σε κάθε ισοκλινή με γωνία κλίσης ίση με την παράμετρο της ισοκλινούς. Δια μέσου του δικτύου των παραλλήλων ευθειών, χαράσσονται καμπύλες εφαπτόμενες των παραλλήλων ευθειών όλων των ισοκλινών. Η καμπύλη αυτή παριστάνει την τροχιά I της κύριας τάσης σ_1 (ή την τροχιά II της κύριας τάσης σ_2 , ανάλογα με το πρόβλημα). Κατά τον ίδιο τρόπο χαράσσονται και άλλες τροχιές I με αποτέλεσμα να σχηματιστεί ένα δίκτυο τροχιών κύριας τάσης σ_1 . Το δίκτυο των τροχιών II της κύριας τάσης σ_2 σχηματίζεται από τις ορθογώνιες καμπύλες των τροχιών I. Προς τούτο χαράσσονται καμπύλες γραμμές οι οποίες τέμνουν κάθετα τις τροχιές I. Έτσι λαμβάνεται το δίκτυο των τροχιών των κυρίων τάσεων. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος δεν είναι πολύ ακριβής. Για μεγαλύτερη ακρίβεια χάραξης των τροχιών προσδιορίζονται γραφικά τα σημεία πάνω στις ισοκλινείς από τα οποία περνά η τροχιά. Προς τούτο, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11, από τυχαίο σημείο A της ισοκλινούς I_1 χαράσσεται η διεύθυνση κλίσης $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ η οποία τέμνει την ισοκλινή I_2 στο σημείο B. Από το σημείο B χαράσσεται η

διεύθυνση με κλίση ϕ_2 . Ακολούθως χαράσσεται η διεύθυνση με κλίση $\frac{\phi_2 + \phi_3}{2}$ η οποία τέμνει την ισοκλινή I_3 στο σημείο Γ . Από το σημείο Γ χαράσσεται η διεύθυνση με κλίση ϕ_3 . Η καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ και εφάπτεται των διευθύνσεων ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 είναι η τροχιά I της κύριας τάσης σ_1 . Κατά τον ίδιο τρόπο ξεκινώντας από άλλα σημεία της ισοκλινούς I_1 χαράσσονται άλλες τροχιές I και στη συνέχεια χαράσσονται κατά τα γνωστά οι τροχιές II (ορθογώνιες καμπύλες) της κύριας τάσης σ_2 .

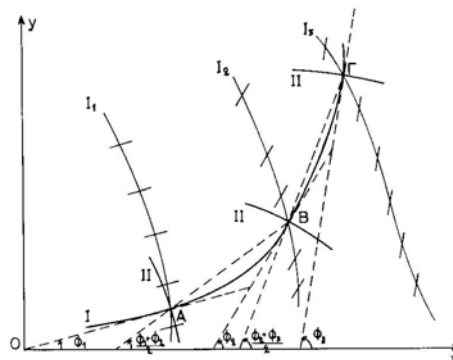


Σχήμα 3.11 : Ακριβής χάραξη των τροχιών των κυρίων τάσεων

Στα ισότροπα και στα ιδιόμορφα σημεία οι ισοκλινείς ακολουθούν ορισμένες ιδιότητες οπότε είναι εύκολο να χαραχθούν οι τροχιές των κυρίων τάσεων. Εάν υπάρχουν διαδοχικά ισότροπα σημεία τότε οι ισοκλινείς εναλλάσσονται και αυτό γίνεται διότι **τα ισότροπα σημεία χαρακτηρίζονται σε θετικά όταν οι ισοκλινείς στρέφονται με την ίδια φορά στροφής του επίπεδου πολωσισκοπίου και αρνητικά όταν οι ισοκλινείς στρέφονται αντίθετα προς τη φορά στροφής του επίπεδου πολωσισκοπίου**. Μεταξύ δύο ομόσημων ισότροπων σημείων υπάρχει ιδιόμορφο σημείο. Επειδή όμως το ιδιόμορφο σημείο είναι αρνητικό τότε τα ισότροπα σημεία, τα οποία περιέχουν το ιδιόμορφο σημείο, είναι πάντοτε θετικά.

Οι τροχιές των κυρίων τάσεων εμφανίζουν βασικές ιδιότητες που βοηθούν στη φωτοελαστική ανάλυση των τάσεων. Οι τροχιές των κυρίων τάσεων, ως καμπύλες γραμμές, εμφανίζουν ακτίνες καμπυλότητας προσημασμένες ανάλογα με την προσήμανση των τροχιών. Έτσι όπως φαίνεται στο Σχ. 3.12, έστω I, II οι τροχιές των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 αντιστοίχως.

Εάν επιλεγεί αυθαίρετα η θετική $+s_1$ της τροχιάς I, τότε η θετική φορά $+s_2$ της τροχιάς II προκύπτει από τη στροφή της τροχιάς I κατά 90° αντίθετα προς την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου. Οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας ρ_1, ρ_2 αντιστοίχως, λαμβάνονται θετικές όταν ακολουθώντας τη θετική κατεύθυνση πάνω στην τροχιά, η εφαπτομένη αυτής στρέφεται αντίθετα προς την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου.



Σχήμα 3.12 : Προσήμανση των τροχιών των κυρίων τάσεων και των ακτίνων καμπυλότητάς των

3.8 Υπολογισμός των Κυρίων Τάσεων

Η μέθοδος της φωτοελαστικότητας παρέχει πειραματικά δύο ποσότητες του επιπέδου εντατικού προβλήματος, δηλαδή τη διαφορά των κυρίων τάσεων (ισόχρωμες) και τη διεύθυνση των κυρίων τάσεων (ισοκλινείς). Το εντατικό πεδίο χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους, δηλαδή τις τρεις τάσεις ή τις δύο κύριες τάσεις και τη διεύθυνσή των.

Οι τρεις όμως αυτές παράμετροι συνδέονται μεταξύ τους με τις δύο εξισώσεις ισορροπίας και την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Με δεδομένα τα πειραματικά φωτοελαστικά στοιχεία έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι υπολογισμού των κυρίων τάσεων και της διεύθυνσής των. Αυτές είναι :

- Η μέθοδος της διαφοράς των διατμητικών τάσεων.
- Η μέθοδος της γραφικής ολοκλήρωσης κατά μήκος των τροχιών των κυρίων τάσεων.
- Μέθοδοι βασισμένες στις εξισώσεις ισορροπίας.
- Η μέθοδος της πλάγιας πρόσπτωσης του φωτός.
- Μέθοδοι υπολογισμού του αθροίσματος των κυρίων τάσεων ή η μέθοδος των ισοπαχών.

Απ' τις παραπάνω μεθόδους οι δύο πρώτες βασίζονται στα δίκτυα των ισοχρώμων και των ισοκλινών, ενώ οι επόμενες τρεις βασίζονται στο δίκτυο των ισοχρώμων.

3.8.1 Μέθοδος της Διαφοράς των Διατμητικών Τάσεων

Σύμφωνα με τη θεωρία ελαστικότητας και τον φωτοτασεοπτικό νόμο η διατμητική τάση, συναρτήσει των κυρίων τάσεων, δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = -N \frac{f_\sigma}{2d} \sin 2\theta \quad (3.49)$$

όπου θ είναι η γωνία στροφής του κυρίου συστήματος. Σε κάθε σημείο του σώματος η διαφορά $\sigma_1 - \sigma_2$ υπολογίζεται από τις ισόχρωμες και η γωνία $\theta = \varphi$ (φ είναι η παράμετρος της ισοκλινούς) από τις ισοκλινείς. Αντικαθιστώντας την τιμή τ_{xy} στις εξισώσεις ισορροπίας, υπολογίζονται οι ορθές τάσεις σ_{xx} και σ_{yy} . Έτσι, από τις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν :

$$\sigma_{xx} = c_{xx0} - \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \quad (3.50)$$

$$\sigma_{yy} = c_{yy0} - \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy \quad (3.51)$$

όπου c_{xx0} , c_{yy0} είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης και εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή είναι οι τάσεις c_{xx0} , c_{yy0} στο σημείο αναφοράς (x_0, y_0) .

Μετά από πράξεις προκύπτουν οι τελικές σχέσεις οι οποίες είναι :

$$\sigma_{xx} = c_{xx0} - \frac{f_\sigma}{d} \int_{x_0, y_0}^{x, y} N \frac{d\phi}{dy} dx \quad (3.52)$$

$$\sigma_{yy} = c_{yy0} - \frac{f_\sigma}{d} \int_{x_0, y_0}^{x, y} N \frac{d\phi}{dx} dy \quad (3.53)$$

3.9 Σχεδιασμός Ισοχρόμων

Συγκεντρωμένη δύναμη P εξασκείται στην κορυφή σφήνας γωνίας 2ϕ (σχ. 3.13). Η τασική συνάρτηση η οποία επιλύει το πρόβλημα αυτό είναι :

$$\Phi = -\frac{P}{2(\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi)} r\theta \sin \theta \quad (3.54)$$

Οι τάσεις οι οποίες προκύπτουν από την τασική αυτή συνάρτηση, σε πολικές συντεταγμένες, είναι :

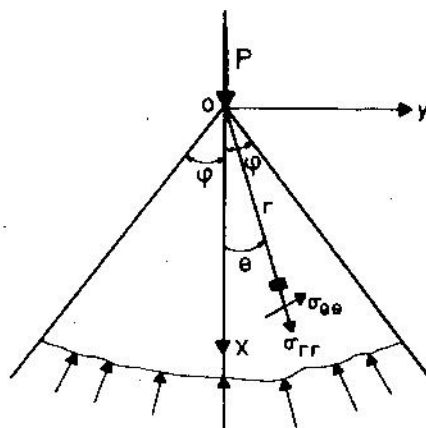
$$\sigma_r = -\frac{P}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (3.55)$$

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά των κύριων τάσεων έχουμε :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N \frac{f_c}{d} \quad (3.56)$$

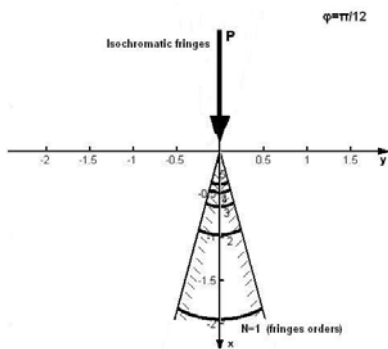
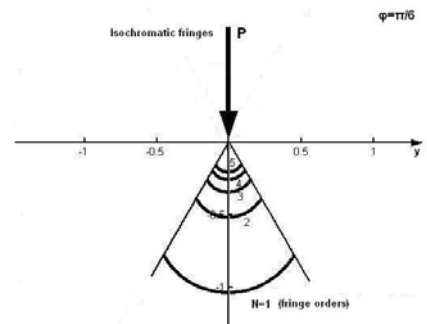
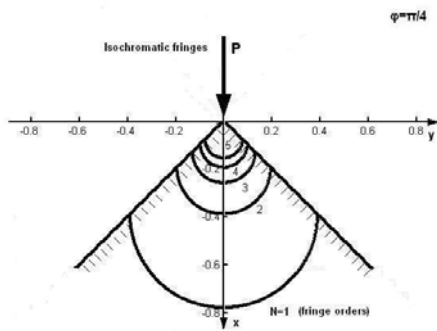
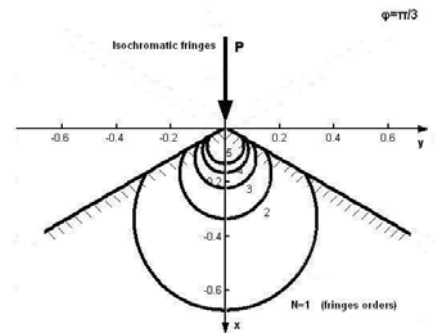
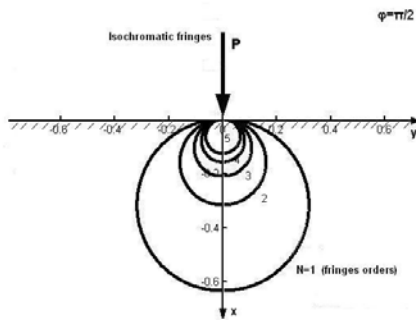
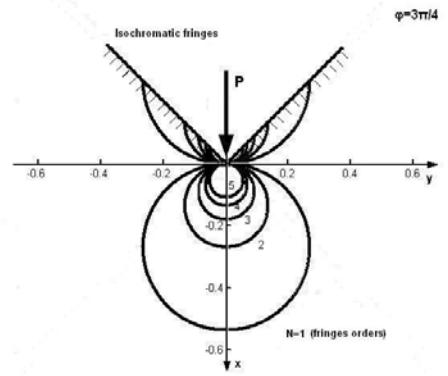
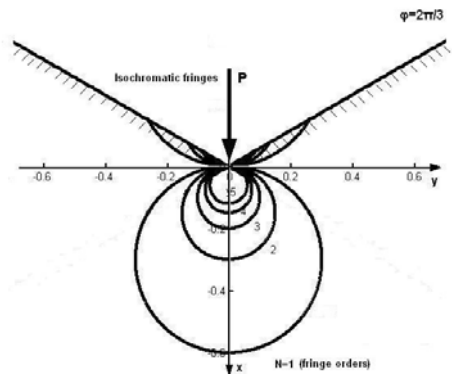
Εξισώνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει :

$$r = -\left(\frac{Pd}{f_c}\right) \frac{1}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi} \frac{|\cos \theta|}{N_c} \quad (3.57)$$



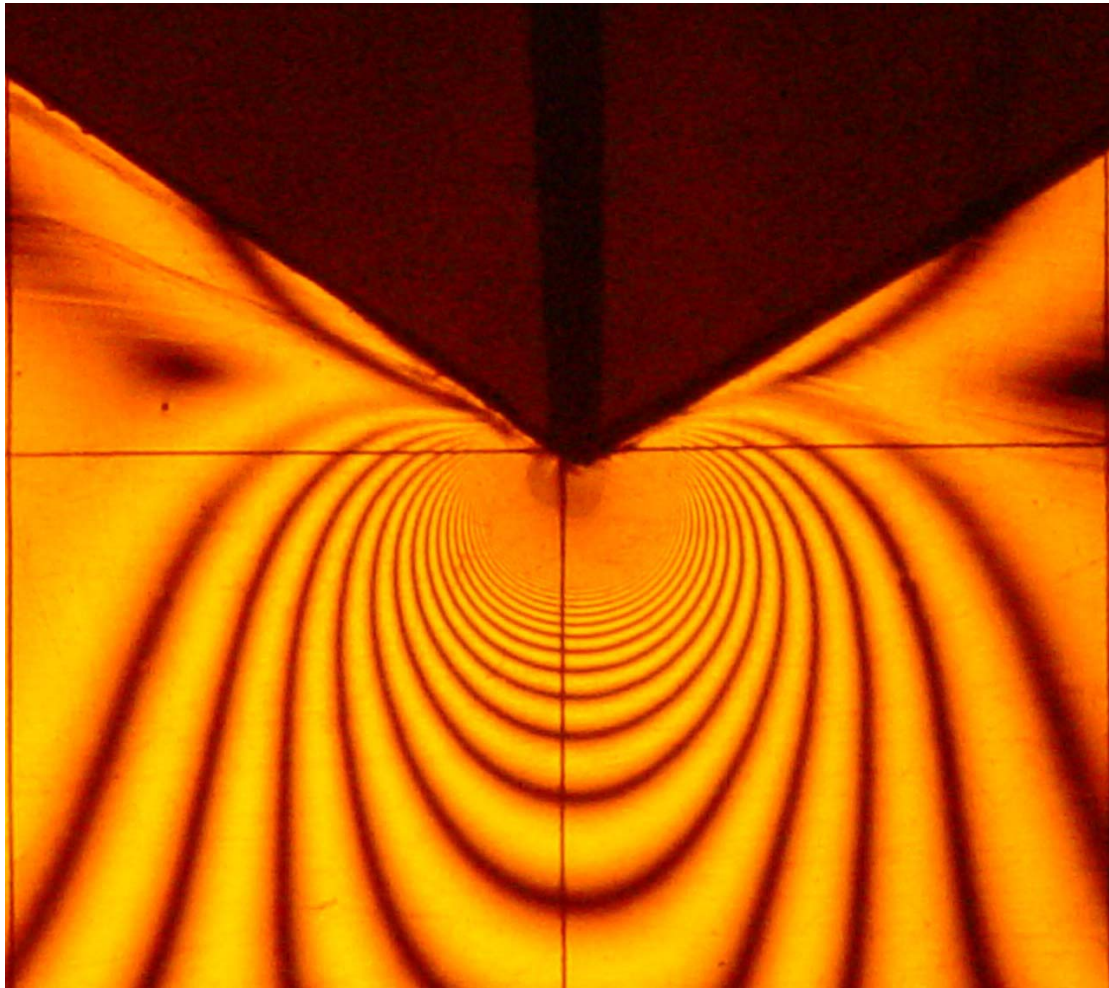
Σχ. 3.13 : Γεωμετρία σφήνας γωνίας 2ϕ

Ακολουθούν τα σχήματα των ισοχρόμων για διάφορες γωνίες :



Σχ. 3.14 Σχήματα Ισόχρωμων για διάφορες γωνίες

Το Σχ. 3.15 παρουσιάζει τις ισόχρωμες καμπύλες σε σφήνα γωνίας $\varphi=2\pi/3$ με κατακόρυφο φορτίο στην κορυφή της σφήνας.



Σχ. 3.15 : Ισόχρωμες καμπύλες σε σφήνα γωνίας $\varphi=2\pi/3$ η οποία φορτίζεται με κατακόρυφο φορτίο P.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τη μελέτη αυτή προκύπτει ότι είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι κατανομές των Τάσεων σε σφήνες και ο υπολογισμός των φορτίων πειραματικά.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σημεία επαφής δύο σωμάτων όπως στα ρουλεμάν και στους οδοντωτούς τροχούς. Από τη θεωρητική και πειραματική μελέτη απεδείχθη η ταύτιση των θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων όσον αφορά την λήψη των καυστικών και ισοχρώμων με τις αντίστοιχες σχεδιασθείσες.

Η μέθοδος της Φωτοελαστικότητας είναι “Ολοκλήρου Πεδίου” μέθοδος, που σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες από το κάθε σημείο του δοκιμίου μας. Σ’ αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούνται τα φαινόμενα της αντανάκλασης, διάθλασης και πόλωσης του φωτός, τα οποία αναλύονται στο κεφάλαιο 3.

Η άλλη μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε είναι η Μέθοδος της Καυστικής, η οποία μπορεί να δημιουργηθεί από μια περιοχή πάρα πολύ κοντά στην άκρη της ρωγμής, επομένως έχουμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε την περιοχή αυτή, από πληροφορίες που συλλέγονται αποκλειστικά και μόνο από αυτή την περιοχή, γεγονός που δε συμβαίνει με την παραπάνω μέθοδο της Φωτοελαστικότητας.

Από τη μελέτη των καυστικών φάνηκε ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά την μορφή και το μέγεθος της καυστικής είναι :

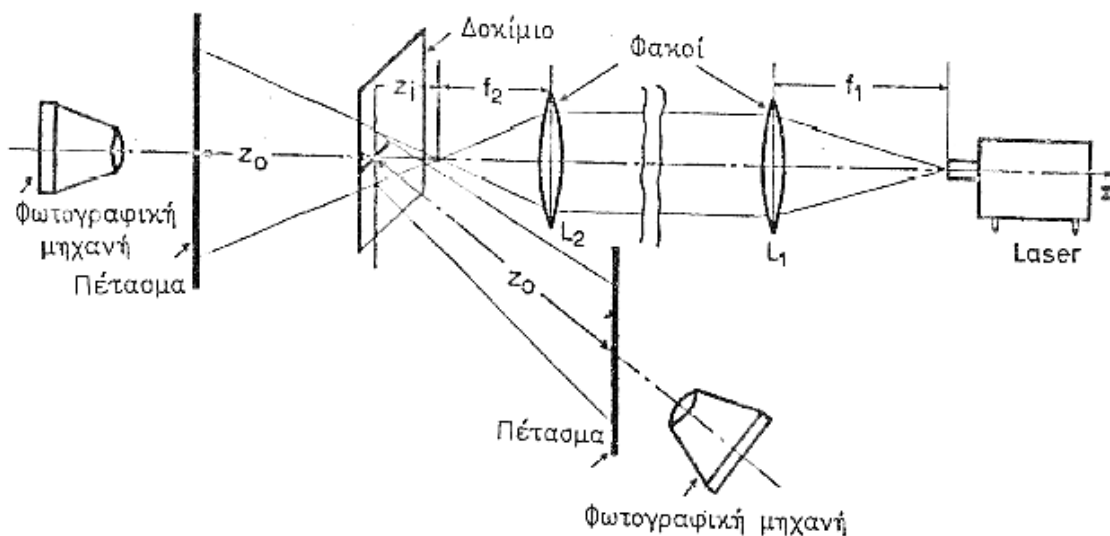
1. Ο συντελεστής μεγέθυνσης λ_m , ο οποίος για σταθερή απόσταση δοκιμίου πετάσματος z_0 πρέπει να παίρνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή για καλύτερα αποτελέσματα.
2. Η απόσταση δοκιμίου πετάσματος z_0 για παράλληλη δέσμη φωτός να παίρνει όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή για καλύτερα αποτελέσματα.
3. Η χρησιμοποίηση της εγκάρσιας μέγιστης διαμέτρου και όχι της διαμήκουσ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

5.1 Εισαγωγή :

Στο πείραμά μας χρησιμοποιήσαμε δοκίμιο από Plexiglas, υλικό που έχει παρόμοια συμπεριφορά με αυτή του σκυροδέματος. Το πάχος του δοκιμίου επιδιώκεται να είναι μικρότερο από 3,5 mm προκειμένου να επιτευχθεί επίπεδη εντατική κατάσταση. Όσο πιο λεπτό είναι το δοκίμιο τόσο ακριβέστερα και ορθότερα θα είναι τα αποτελέσματα που θα προκύψουν. Η διεξαγωγή του πειράματος έγινε στο εργαστήριο του τομέα Μηχανικής στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε περιγράφεται στη συνέχεια :



Σχ. 5.1 : Πειραματική διάταξη Καστικών

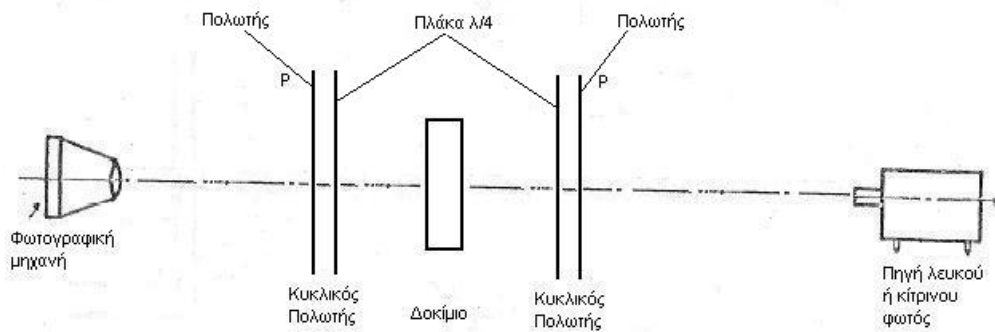
5.2 Πειραματική Διάταξη:

- Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε για την διεξαγωγή του πειράματος των *Καστικών* φαίνεται στο σχήμα 5.1 και αποτελείται από τα εξής :
 1. Laser τύπου He-Ne, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σαν φωτεινή πηγή.
 2. Δύο ειδικοί φακοί εστιακής απόστασης $f=1m$ για τη δημιουργία συγκλίνουσας ή αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης.
 3. Ένα πέτασμα αναφοράς πάνω στο οποίο προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές.
 4. Μια φωτογραφική μηχανή για την φωτογράφιση των καυστικών.

Για τις καυστικές το πέτασμα αναφοράς τοποθετείται σε απόσταση z_o μπροστά απ' το δοκίμιο. Στην περίπτωση του πειράματός μας η συγκεκριμένη απόσταση είναι $z_o=102$ cm. Η εστία της φωτεινής δέσμης είναι μπροστά απ' το δοκίμιο και σε απόσταση z_i από αυτό. Η συγκεκριμένη απόσταση είναι $z_i=10$ cm. Ένα άλλο μέγεθος που πρέπει να ορισθεί είναι ο συντελεστής μεγέθυνσης λ_m , ο οποίος προσδιορίζεται ως εξής :

$$\lambda_m = \frac{z_o + z_i}{z_i} = \frac{102 + 10}{10} = 11,2 \text{ cm}$$

- Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε για την διεξαγωγή του πειράματος των *Ισόχρωμων* φαίνεται στο σχήμα 5.2 και αποτελείται από τα εξής :
 1. Πηγή κίτρινου φωτός ή λευκού φωτός.
 2. Ένα κυκλικό πολωσισκόπιο, το οποίο αποτελείται από το επίπεδο πολωσισκόπιο παρεμβάλλοντας δύο κυκλικούς πολωτές.
 3. Μια φωτογραφική μηχανή για την φωτογράφιση των *ισόχρωμων*.



Σχ. 5.2 : Πειραματική διάταξη για λήψη Ισόχρωμων καμπύλων

5.3 Περιγραφή Δοκιμίου:

Το δοκίμιο που χρησιμοποιήθηκε υποβλήθηκε σε συγκεντρωμένη κατακόρυφη φόρτιση και για συγκεκριμένη τιμή του φορτίου αποτυπώθηκαν σε φιλμ οι ζητούμενες καυστικές. Τα πειράματα που κάναμε αφορούν σφήνες γωνίας $\varphi=135^0$, $\varphi=90^0$ και $\varphi=45^0$ για καυστικές, και $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi=90^0$, $\varphi=45^0$ για *ισόχρωμες*.

Οι μετρήσεις που πήραμε σε κάθε περίπτωση αφορούν σταθερή τιμή του φορτίου έτσι ώστε τα αποτελέσματά μας να μπορούν να συγκριθούν.

5.4 Φωτογραφικό Υλικό για διάφορες γωνίες (Καυστικές – Ισόχρωμες)

Στο Σχ. 5.3.α παρουσιάζονται οι σχεδιασθείσες καυστικές και οι αντίστοιχες πειραματικές για σφήνα γωνίας $\varphi=3\pi/4$.

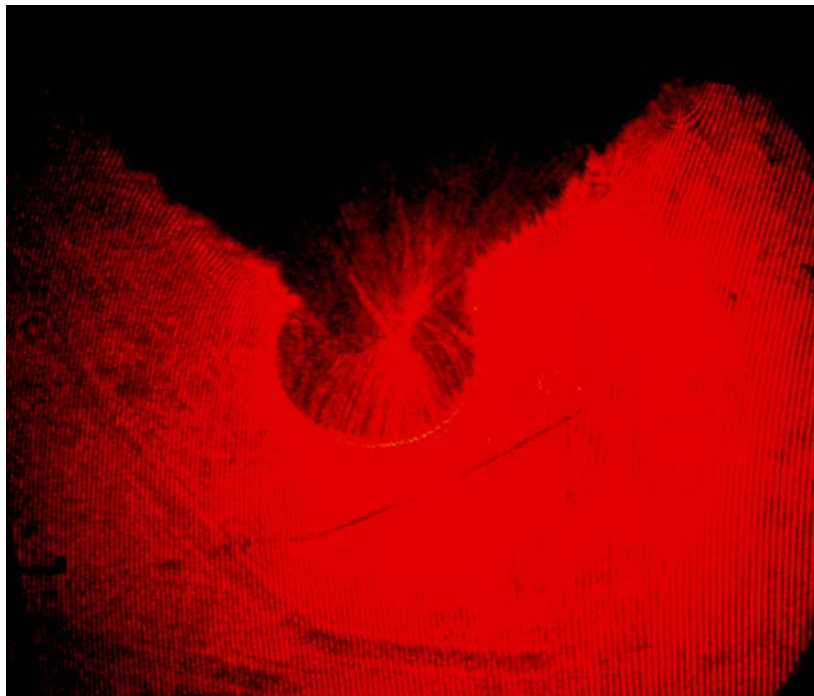
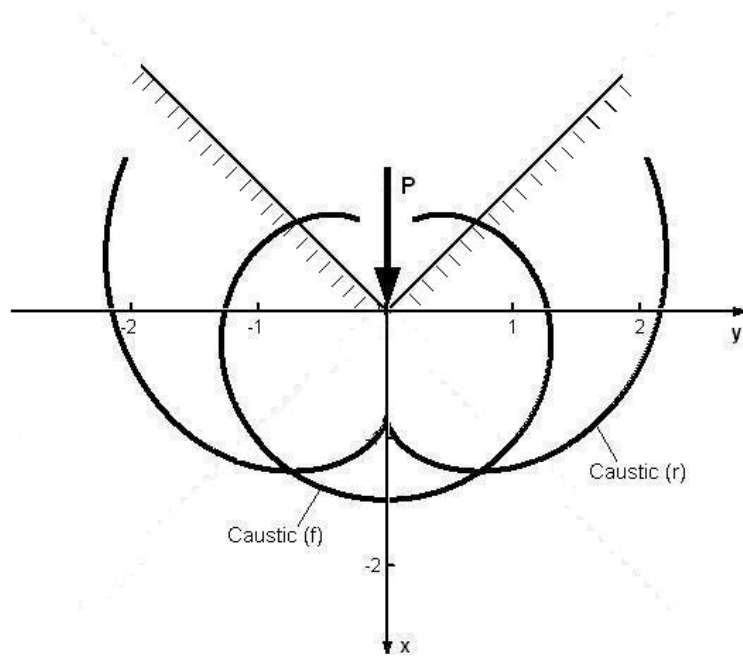
Στο Σχ. 5.3.β παρουσιάζονται οι σχεδιασθείσες καυστικές και οι αντίστοιχες πειραματικές για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/2$.

Στο Σχ. 5.3.γ παρουσιάζονται οι σχεδιασθείσες καυστικές και οι αντίστοιχες πειραματικές για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/4$.

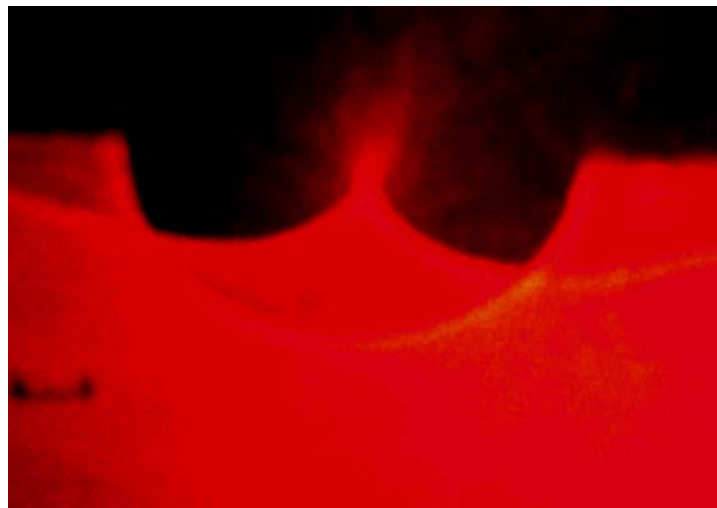
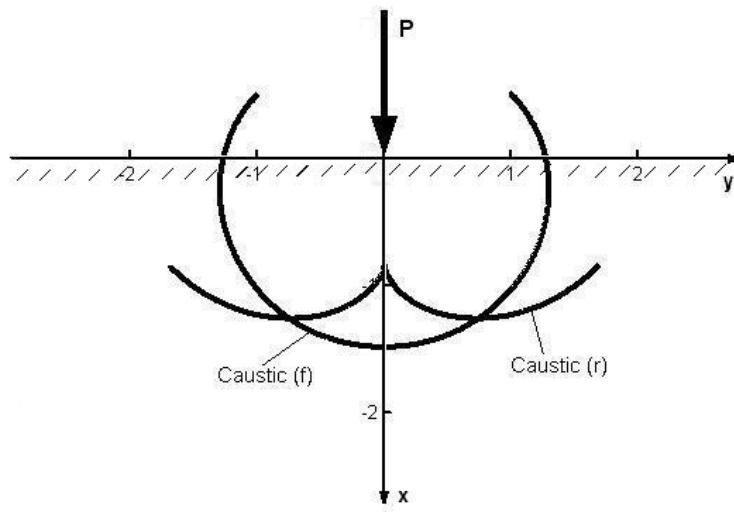
Στο Σχ. 5.4.α παρουσιάζονται οι σχεδιασθείσες *Ισόχρωμες* και οι αντίστοιχες πειραματικές για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/4$.

Στο Σχ. 5.4.β παρουσιάζονται οι σχεδιασθείσες *Ισόχρωμες* και οι αντίστοιχες πειραματικές για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/2$.

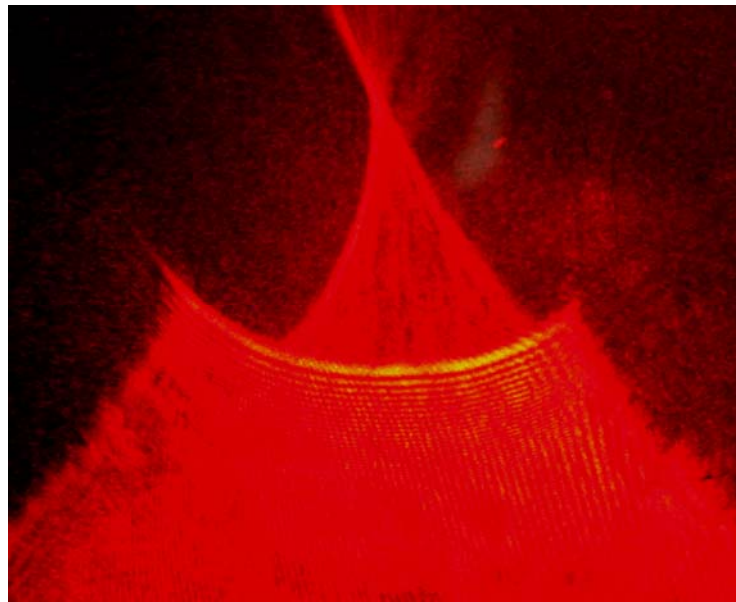
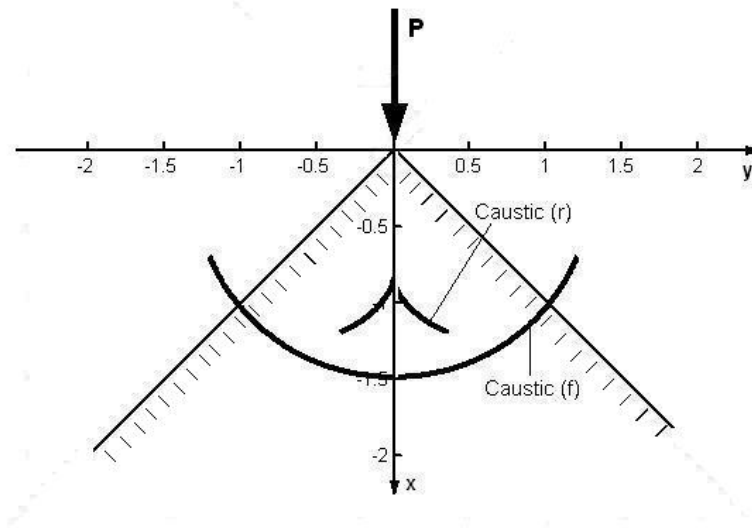
Στο Σχ. 5.4.γ παρουσιάζονται οι σχεδιασθείσες *Ισόχρωμες* και οι αντίστοιχες πειραματικές για σφήνα γωνίας $\varphi=2\pi/3$.



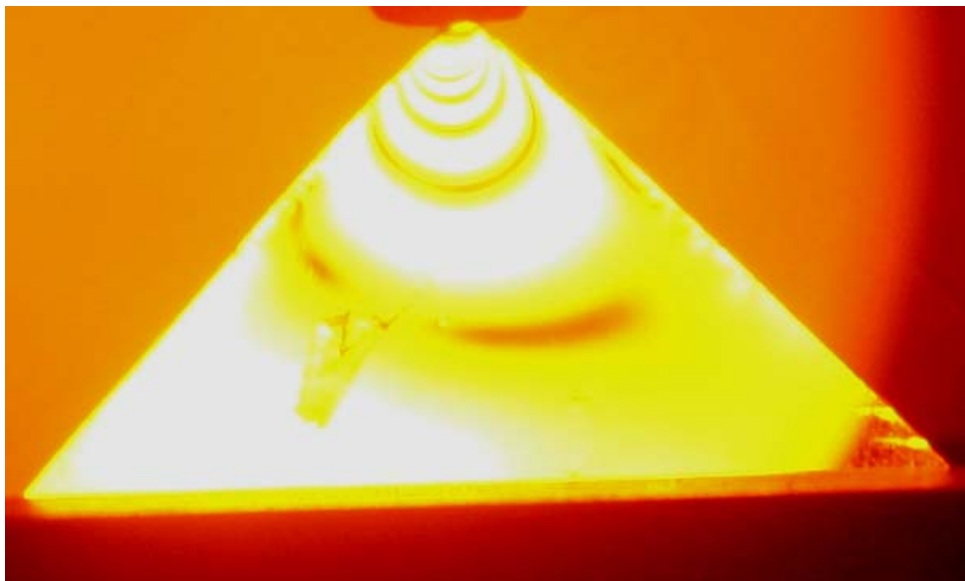
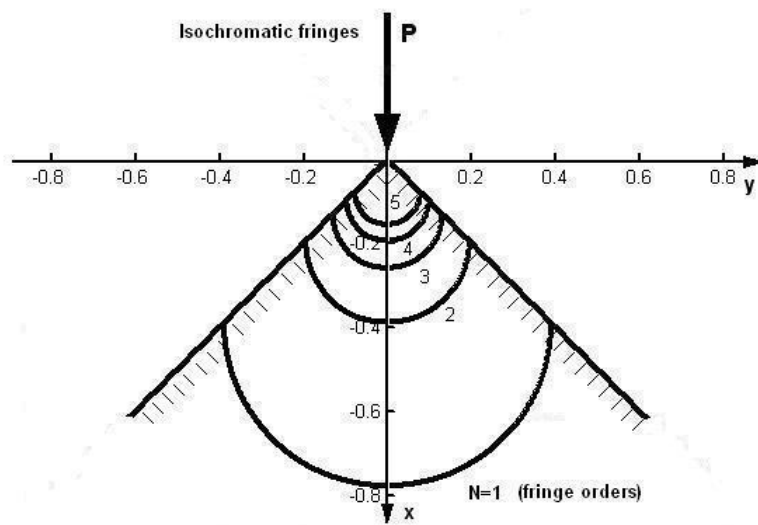
Σχ. 5.3.α : Καυστική για σφήνα γωνίας $\varphi=3\pi/4$



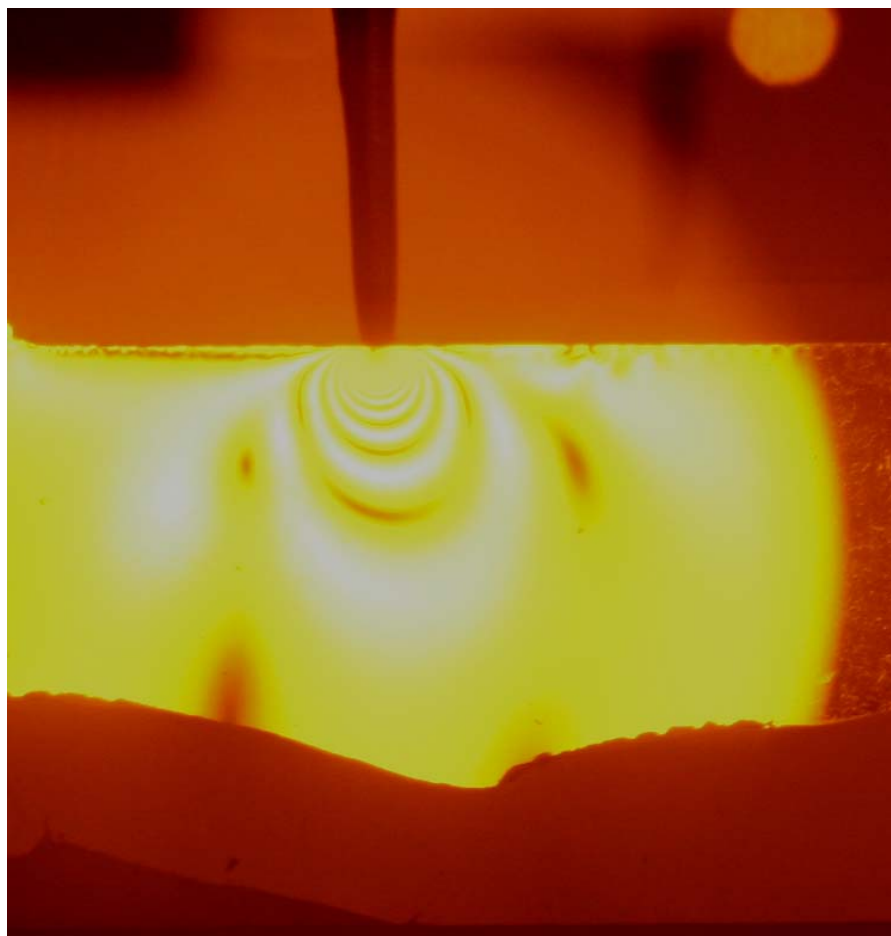
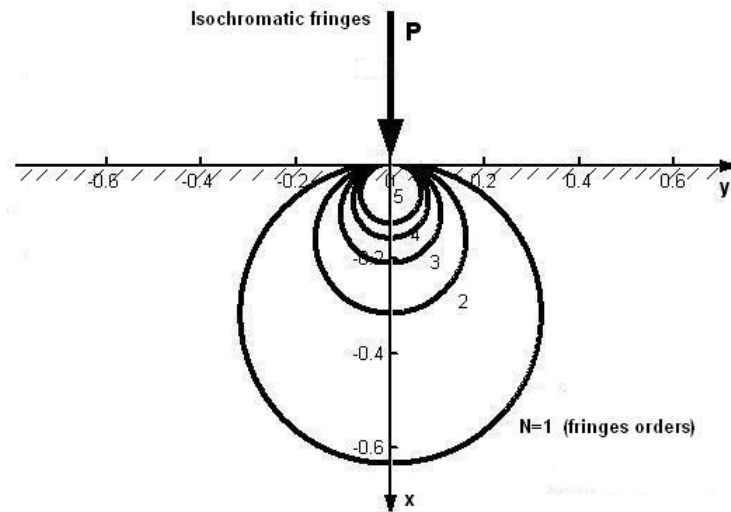
Σχ. 5.3.β : Καυστική για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/2$



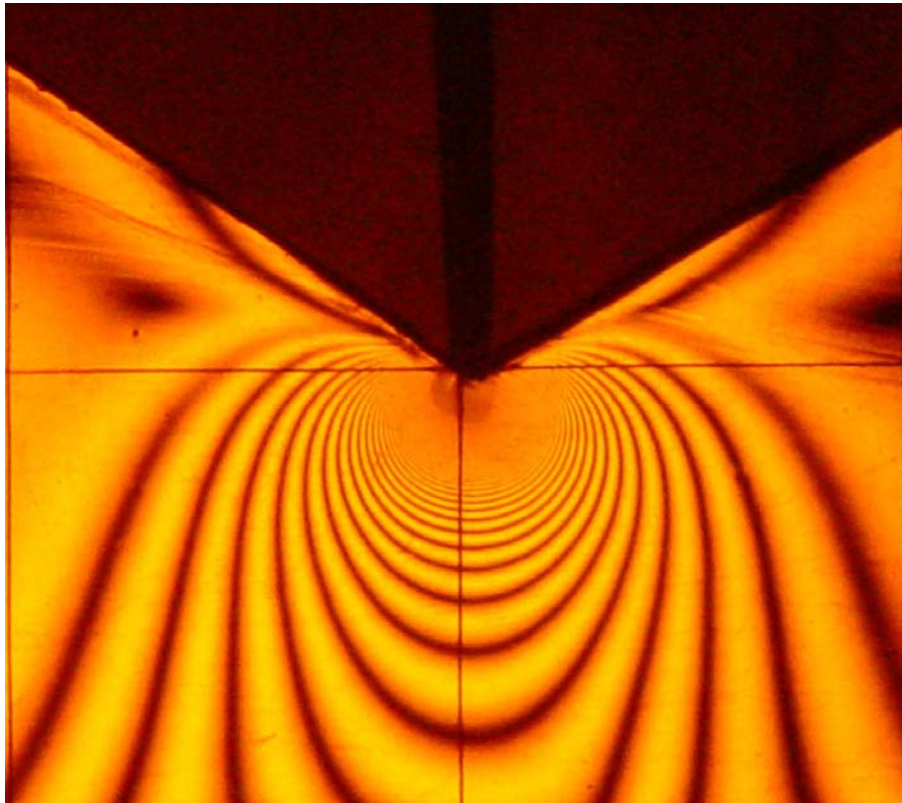
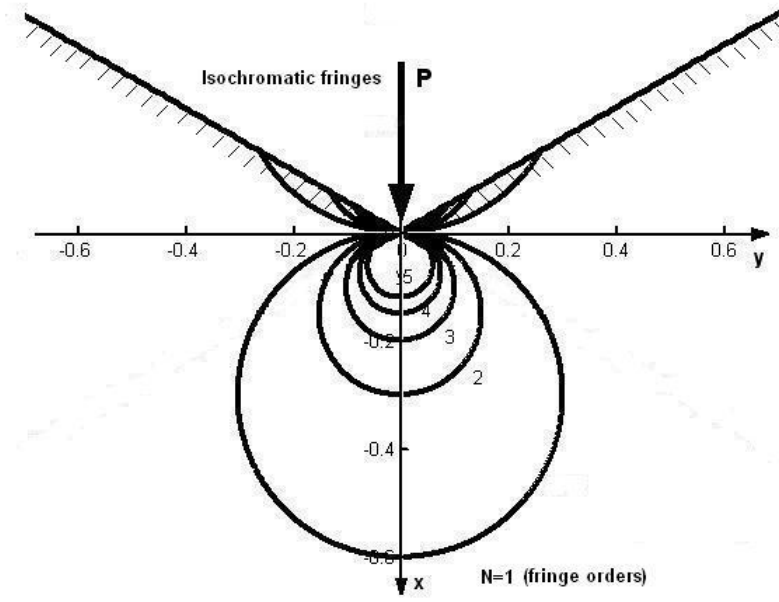
Σχ. 5.3.γ : Καυστική για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/4$



Σχ. 5.4.α : Ισόχρωμη για σφήνα γωνίας $\phi=\pi/4$



Σχ. 5.4.β : Ισόχρωμη για σφήνα γωνίας $\varphi=\pi/2$



Σχ. 5.4.γ : Ισόχρωμη για σφήνα γωνίας $\varphi=2\pi/3$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος, Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων – Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων. [1], [2], [3].

George A. Papadopoulos, Fracture Mechanics – The Experimental Method of Caustics and the Det. – Criterion of Fracture, Springer – Verlog London Limited 1993.

Γ. Α. Παπαδόπουλος και Β. Βαδαλούκα, Επίλυση προβλημάτων επαφών με τη μέθοδο των καυστικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή ΕΜΦΕ, Τομέας Μηχανικής, Λεωφ. Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Τ.Κ. 157 73 Ζωγράφου, Αθήνα.