

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ**  
**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ**



**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ**  
**ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ**

**ΓΑΪΤΑΝΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ**  
**ΓΚΙΚΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ**

**ΑΘΗΝΑ, ΜΑΪΟΣ 2008**

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	1
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	5
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	10
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	12
ABSTRACT.....	13
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	14

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 :

#### ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

<b>1.1</b> ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.....	16
<b>1.1.1</b> Βασικές επιφάνειες αναφοράς στη Γεωδαισία.....	16
1.1.1.α Γεωειδές.....	16
1.1.1.β Ελλειψοειδές εκ περιστροφής.....	17
1.1.1.γ Σφαίρα.....	18
1.1.1.δ Οριζόντιο επίπεδο.....	18
<b>1.1.2</b> Συστήματα συντεταγμένων που συνοδεύουν επιφάνειες αναφοράς...18	
<b>1.2</b> ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ.....	20
<b>1.2.1</b> Γενικά.....	20
<b>1.2.2</b> Γήινα (παγκόσμια) συστήματα αναφοράς.....	21
<b>1.2.3</b> Τοπικά Γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς.....	22
<b>1.2.4</b> ΓΣΑ στον ελληνικό χώρο.....	24
1.2.4.α Το Παλαιό Ελληνικό ΓΣΑ.....	24
1.2.4.β Το Ευρωπαϊκό Datum ED50.....	24
1.2.4.γ Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς του 1987(ΕΓΣΑ 87).....	25
<b>1.3</b> ΠΡΟΒΟΛΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ.....	25
<b>1.3.1</b> Βασικά χαρακτηριστικά προβολών.....	25
<b>1.3.2</b> Κατηγορίες προβολών.....	27
1.3.2.α Μερκατορική προβολή.....	29

1.3.2.β	Εγκάρσια Μερκατορική προβολή.....	30
1.3.2.γ	Σύμμορφη Κωνική προβολή Lambert.....	30
1.3.2.δ	Αζιμουθιακή Ισαπέχουσα προβολή.....	31
<b>1.3.3</b>	<b>Προβολικά συστήματα αναφοράς στην Ελλάδα.....</b>	<b>32</b>
1.3.3.α	Το προβολικό σύστημα Hatt.....	32
1.3.3.β	Το προβολικό σύστημα UTM (Universal Transverse Mercator)..	33
1.3.3.γ	Το σύστημα Εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής 3° (ΕΜΠ 3°)...	34
1.3.3.δ	Το προβολικό σύστημα ΕΓΣΑ 87.....	34

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 :**

### **ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ**

<b>2.1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>36</b>
<b>2.2</b>	<b>ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ.....</b>	<b>37</b>
2.2.1	Γενικά.....	37
2.2.2	Μετατροπές συστημάτων συντεταγμένων.....	38
2.2.3	Γενική διαδικασία μετασχηματισμού συστημάτων αναφοράς.....	40
<b>2.3</b>	<b>ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΟΥΣ.....</b>	<b>42</b>
<b>2.4</b>	<b>ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΤ....</b>	<b>44</b>

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 :**

### **ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ**

<b>3.1</b>	<b>ΓΕΝΙΚΑ.....</b>	<b>46</b>
<b>3.2</b>	<b>Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΠΤΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ.....</b>	<b>47</b>
3.2.1	Γενικά.....	47
3.2.2	Το μοντέλο Bursa-Wolf.....	48
3.2.3	Το μοντέλο Molodensky-Badekas.....	48
3.2.4	Ο μικτός μετασχηματισμός επτά παραμέτρων.....	49
<b>3.3</b>	<b>ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ.....</b>	<b>51</b>

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 :** **ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ**

4.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	53
4.2 ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	54
4.2.1 Μετασχηματισμός ομοιότητας.....	54
4.2.2 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός.....	56
4.2.3 Πολυωνυμικός μετασχηματισμός.....	58

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 :** **ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ** **ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΕ ΕΡΓΑ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗΣ** **ΚΛΙΜΑΚΑΣ**

5.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	60
5.2 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.....	61
5.2.1 Επιλογή της κατάλληλης μεθόδου συνόρθωσης.....	61
5.2.2 Η γενικευμένη μέθοδος συνόρθωσης.....	62
5.2.3 Ανάπτυξη μοντέλου για το δισδιάστατο μετασχηματισμό ομοιότητας.....	64
5.2.4 Ανάπτυξη μοντέλου για τον αφινικό μετασχηματισμό .....	67
5.2.5 Βοηθητικές διαδικασίες.....	68
5.3 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	69
5.3.1 Σημασία προϊόντων της ΜΕΤ.....	69
5.3.2 Στατιστικοί έλεγχοι της συνόρθωσης.....	70
5.3.3 Η μέθοδος κανονικοποιημένου υπολοίπου του Baarda.....	71
5.4 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.....	74

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 :** **ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

6.1 ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ.....	77
6.1.1 Γενικά.....	77

6.1.2 Περιγραφή δεδομένων.....	77
<b>6.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....</b>	<b>79</b>
6.2.1 Υπολογισμός αποτελεσμάτων για την πρώτη επανάληψη αλγορίθμου.....	79
6.2.2 Μελέτη υπολογισμένων διαφορών.....	81
6.2.2.α Μετασχηματισμός ομοιότητας.....	81
6.2.2.β Αφινικός μετασχηματισμός.....	87
6.2.3 Στατιστικός έλεγχος αποτελεσμάτων.....	89
6.2.3.α Μετασχηματισμός ομοιότητας.....	89
6.2.3.β Αφινικός μετασχηματισμός.....	94
6.2.4 Υπολογισμός τελικών αποτελεσμάτων με βάση το στατιστικό έλεγχο	97
6.2.5 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων.....	98
<b>6.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΣΗΜΕΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.....</b>	<b>99</b>
6.3.1 Περιγραφή σημείων ελέγχου.....	99
6.3.2 Υπολογισμοί συντεταγμένων και διαφορών τους.....	101
6.3.3 Εκτίμηση ακρίβειας υπολογισμένων συντεταγμένων.....	103
<b>6.4 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΔΙΑΚΟΠΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ - ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....</b>	<b>104</b>
6.4.1 1 <sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο.....	104
6.4.2 2 <sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο.....	108

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 :** **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ**

7.1 ΣΥΝΟΨΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	114
7.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ.....	115

<b><u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u></b> .....	<b>116</b>
<b><u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u></b> .....	<b>132</b>

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

### Κεφάλαιο 1

1.1 Γεωειδές και ελλειψοειδές	
1.1 The geoid and the ellipsoid.....	17
1.2 Γεωμετρία ελλειψοειδούς	
1.2 Ellipsoid geometry.....	17
1.3 Η σχέση του γεωειδούς με το ελλειψοειδές αναφοράς και τη σφαίρα	
1.3 The relationship between the geoid, reference ellipsoid and sphere.....	18
1.4 Τρισδιάστατες καρτεσιανές συντ/νες	
1.4 Three dimensional cartesian coordinates.....	19
1.5 Σφαιρικές συντ/νες	
1.5 Spherical coordinates.....	19
1.6 Το σύστημα αναφοράς WGS 84	
1.6 The WGS 84 reference system.....	22
1.7 Παγκόσμια και τοπικά ΓΣΑ	
1.7 Global and local reference systems .....	23
1.8 Κυλινδρικές (α), Κωνικές (β) και επίπεδες προβολές (γ)	
1.8 Cylindrical (α), conical (β) and plane projections (γ) .....	27
1.9 ορθή (α), εγκάρσια (β) και πλάγια προβολή (γ)	
1.9 normal (α), transverse (β) and oblique projections (γ).....	28
1.10 γνωμονική (α), στερεογραφική (β) και ορθογραφική προβολή (γ)	
1.10 gnomonic (α), stereographic (β) and orthographic projections (γ).....	28
1.11 Απεικόνιση παραλλήλων διαφορετικών προβολών	
1.11 Parallels projected based on different projections.....	28
1.12 Μερκατορική προβολή	
1.12 Mercator projection .....	29
1.13 Λοξοδρομία	
1.13 Rhumb line.....	30
1.14 Σύμμορφη κωνική προβολή Lambert	
1.14 Lambert conformal conical projection .....	31
1.15 Πολική ισαπέχουσα προβολή	
1.15 Polar equidistant projection .....	31
1.16 Βασική αρχή προβολής Hatt	
1.16 Basic concept of Hatt projection.....	32

1.17 Διαδικασία διανομής Φ.Χ. Hatt	
1.17 Procedure of map distribution of Hatt system .....	33
1.18 Η διανομή Φ.Χ. 1:100.000 στην προβολή Hatt	
1.18 1:100.000 map distribution of the Hatt projection .....	33
1.19 Το προβολικό σύστημα ΕΓΣΑ 87	
1.19 The HGRS 87system .....	35

## Κεφάλαιο 2

2.1 Γενική παρουσίαση των μετασχηματισμών μεταξύ συστημάτων αναφοράς	
2.1 General layout of coordinate transformations.....	37
2.2 Ορθομετρικό και γεωμετρικό υψόμετρο ενός σημείου P	
2.2 Orthometric and geometric height of a point P.....	39
2.3 Διάγραμμα ροής για τη γενική διαδικασία μετασχηματισμού συστημάτων αναφοράς	
2.3 Flow chart for the general transformation process between geodetic coordinate systems..	42
2.4 Στροφές και αλλαγές κλίμακας μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς (I) και (II)	
2.4 Rotations and scale factors between two geodetic datums (I) and (II).....	43

## Κεφάλαιο 3

3.1 Ο μετασχηματισμός τριών παραμέτρων	
3.1 three-parameter transformation .....	47
3.2 Ο μετασχηματισμός επτά παραμέτρων	
3.2 seven-parameter transformation .....	47
3.3 Διάγραμμα ροής για το μικτό μετασχηματισμό επτά παραμέτρων	
3.3 Flow chart for the mixed seven-parameter transformation .....	50
3.4 Παράδειγμα καλής κατανομής των κοινών σημείων στο δίκτυο (τα κοινά σημεία συμβολίζονται με τρίγωνα)	
3.4 Example of acceptable distribution of common points in the network (common points are indicated by triangles) .....	52

## Κεφάλαιο 4

4.1 Δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας	
4.1 Two dimensional similarity transformation.....	55
4.2 Αφινικός μετασχηματισμός	
4.2 Affine transformation.....	57

## Κεφάλαιο 5

5.1 Πιθανότητες για λάθη τύπου I και II	
5.1 Probabilities for type I and type II errors.....	71

## Κεφάλαιο 6

6.1 Κατανομή σημείων στο Φ.Χ. Ελασσών	
6.1 Point distribution at Elasson.....	78
6.2 Κατανομή σημείων στο Φ.Χ. Καρπενήσι	
6.2 Point distribution at Karpenisi.....	78
6.3 Τιμές των υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.3 Residual values for the first iteration for the similarity transformation (Elasson).....	82
6.4 Τιμές των συνδυασμένων υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.4 Combined residual values for the first iteration for the similarity transformation (Elasson).....	82
6.5 Τιμές των υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ξάνθη)	
6.5 Residual values for the first iteration for the similarity transformation (Ksanthi).....	83
6.6 Τιμές των συνδυασμένων υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ξάνθη)	
6.6 Combined residual values for the first iteration for the similarity transformation (Ksanthi).....	83
6.7 Σχέση υπολοίπου και απόστασης (Ελασσών)	
6.7 Relation between residual and distance (Elasson).....	84
6.8 Σχέση υπολοίπου και απόστασης (Καρπενήσι)	
6.8 Relation between residual and distance (Karpenisi).....	84
6.9 Μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο σε κάθε επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.9 Maximum combined residual in every iteration for the similarity transformation (Elasson).....	85
6.10 Μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο σε κάθε επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Καρπενήσι)	
6.10 Maximum combined residual in every iteration for the similarity transformation (Karpenisi).....	85
6.11 Βαθμός ελευθερίας σε κάθε επανάληψη	
6.11 Degrees of freedom in every iteration .....	86
6.12 Μέγιστη απόσταση σημείου σε κάθε επανάληψη (Ελασσών)	
6.12 Max point distance in every iteration (Elasson).....	86
6.13 Συντελεστής συσχέτισης σε κάθε επανάληψη (Ελασσών)	
6.13 Factor of correlation in every iteration (Elasson).....	87
6.14 Τιμές των υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)	
6.14 Residual values for the first iteration for the affine transformation (Elasson).....	88



6.15 Τιμές των συνδυασμένων υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)	
6.15 Combined residual values for the first iteration for the affine transformation (Elasson)....	88
6.16 Μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο σε κάθε επανάληψη για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)	
6.16 Maximum combined residual in every iteration for the affine transformation (Elasson) ....	89
6.17 Μέγιστο κανονικοποιημένο συνδυασμένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.17 Maximum normalized combined residual for the similarity transformation (Elasson).....	90
6.18 Μέγιστα κανονικοποιημένα υπόλοιπα συντεταγμένων για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.18 Maximum normalized coordinate residuals for the similarity transformation (Elasson).....	90
6.19 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.19 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Elasson).....	91
6.20 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Γόννοι)	
6.20 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Gonoi).....	92
6.21 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ξάνθη)	
6.21 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Ksanthi).....	93
6.22 Κατανομή σημείων μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού ομοιότητας (Ελασσών)	
6.22 Point distribution after applying the similarity transformation (Elasson).....	93
6.23 Τελικές τιμές των υπολοίπων για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)	
6.23 Final residual values for the similarity transformation (Elasson).....	94
6.24 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)	
6.24 Maximum normalized residual for the affine transformation (Elasson).....	95
6.25 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ξάνθη)	
6.25 Maximum normalized residual for the affine transformation (Ksanthi).....	95
6.26 Κατανομή σημείων μετά την εφαρμογή του αφινικού μετασχηματισμού (Ελασσών)	
6.26 Point distribution after applying the affine transformation (Elasson).....	96
6.27 Τελικές τιμές των υπολοίπων για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)	
6.27 Final residual values for the affine transformation (Elasson).....	96
6.28 Περιοχή ενδιαφέροντος και σημεία ελέγχου (Ελασσών)	
6.28 Area of interest and control points (Elasson).....	100
6.29 Περιοχή ενδιαφέροντος και σημεία ελέγχου (Καρπενήσι)	
6.29 Area of interest and control points (Karpenisi).....	100
6.30 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Γόννοι)	
6.30 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Gonoi).....	105

6.31 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Γόννοι)	
6.31 Maximum normalized residual for the affine transformation (Gonoi).....	105
6.32 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Γόννοι)	
6.32 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Gonoi).....	109
6.33 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Γόννοι)	
6.33 Maximum normalized residual for the affine transformation (Gonoi).....	109

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

### Κεφάλαιο 6

6.1 Παράμετροι του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη	79
6.1 Parameters of the similarity transformation for the first iteration.....	79
6.2 Τιμές των $\hat{\sigma}_0^2$ , $\hat{\sigma}_0$ του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη	79
6.2 Values of $\hat{\sigma}_0^2$ , $\hat{\sigma}_0$ of the similarity transformation for the first iteration.....	79
6.3 Νέες τιμές των $\hat{\sigma}_0^2$ , $\hat{\sigma}_0$ του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη	80
6.3 New values of $\hat{\sigma}_0^2$ , $\hat{\sigma}_0$ of the similarity transformation for the first iteration.....	80
6.4 Τυπικά σφάλματα των παραμέτρων του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη	80
6.4 Standard errors of the parameters of the similarity transformation for the first iteration.....	80
6.5 Παράμετροι του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη	80
6.5 Parameters of the affine transformation for the first iteration.....	80
6.6 Νέες τιμές των $\hat{\sigma}_0^2$ , $\hat{\sigma}_0$ του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη	81
6.6 New values of $\hat{\sigma}_0^2$ , $\hat{\sigma}_0$ of the affine transformation for the first iteration.....	81
6.7 Τυπικά σφάλματα των παραμέτρων του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη	81
6.7 Standard errors of the parameters of the affine transformation for the first iteration.....	81
6.8 Τελικά αποτελέσματα για το μετασχηματισμό ομοιότητας	97
6.8 Final results for the similarity transformation.....	97
6.9 Τελικά αποτελέσματα για τον αφινικό μετασχηματισμό	98
6.9 Final results for the affine transformation.....	98
6.10 Λόγοι t για το μετασχηματισμό ομοιότητας	99
6.10 t values for the similarity transformation.....	99
6.11 Λόγοι t για τον αφινικό μετασχηματισμό	99
6.11 t values for the affine transformation.....	99
6.12 Συντεταγμένες σημείων ελέγχου στο σύστημα Hatt	101
6.12 Coordinates of control points in Hatt datum.....	101
6.13 Προσδιορισθείσες συντεταγμένες Hatt και διαφορές τους από τις γνωστές (μετασχηματισμός ομοιότητας)	102
6.13 Determined Hatt coordinates and their differences from the known ones (similarity transformation).....	102

6.14 Προσδιορισθείσες συντεταγμένες Hatt και διαφορές τους από τις γνωστές (αφινικός μετασχηματισμός)	
6.14 Determined Hatt coordinates and their differences from the known ones (affine transformation).....	103
6.15 Τυπικά σφάλματα των υπολογισμένων συντεταγμένων Hatt	
6.15 Standard errors of determined Hatt coordinates .....	104
6.16 Αποτελέσματα με βάση το 1 <sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο	
6.16 Results based on the 1 <sup>st</sup> alternative criterion.....	106
6.17 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για το μετασχηματισμό ομοιότητας	
6.17 Comparison between new and previous results for the similarity transformation.....	106
6.18 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για τον αφινικό μετασχηματισμό	
6.18 Comparison between new and previous results for the affine transformation.....	107
6.19 Σύγκριση διαφορών για το μετασχηματισμό ομοιότητας	
6.19 Comparison of differences for the similarity transformation.....	107
6.20 Σύγκριση διαφορών για τον αφινικό μετασχηματισμό	
6.20 Comparison of differences for the affine transformation.....	108
6.21 Αποτελέσματα με βάση το 2 <sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο	
6.21 Results based on the 2 <sup>nd</sup> alternative criterion.....	110
6.22 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για το μετασχηματισμό ομοιότητας	
6.22 Comparison between new and previous results for the similarity transformation.....	110
6.23 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για τον αφινικό μετασχηματισμό	
6.23 Comparison between new and previous results for the affine transformation.....	111
6.24 Σύγκριση διαφορών για το μετασχηματισμό ομοιότητας	
6.24 Comparison of differences for the similarity transformation.....	111
6.25 Σύγκριση διαφορών για τον αφινικό μετασχηματισμό	
6.25 Comparison of differences for the affine transformation.....	112

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αφορά τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών και την ανάπτυξη αυτοματοποιημένων αλγορίθμων για την υλοποίηση βασικών επίπεδων μετασχηματισμών στη γεωδαισία. Ειδικότερα, διερευνώνται και αναπτύσσονται αλγόριθμοι μετασχηματισμού για τον δισδιάστατο μετασχηματισμό ομοιότητας και τον αφινικό μετασχηματισμό.

Οι αλγόριθμοι υλοποιούνται επαναληπτικά και στηρίζονται στη γενικευμένη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Η διαδικασία περιλαμβάνει προσδιορισμό της βέλτιστης ομάδας και πλήθους σημείων που θα συμμετέχουν στον υπολογισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το κριτήριο του Baarda για το κανονικοποιημένο υπόλοιπο με κατάλληλες τροποποιήσεις. Η διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου περιλαμβάνει επίσης τη στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων και τη χρήση ανεξάρτητων σημείων ελέγχου.

Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε πραγματικά δεδομένα με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Από την ανάλυση προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα αναφορικά με την ποιότητα των παραμέτρων του μετασχηματισμού και την ακρίβεια εφαρμογής τους σε σημεία ενδιαφέροντος.

## **ABSTRACT**

This diploma thesis aims to the investigation and algorithm development for the automated operation of basic plane coordinate system transformations for geodetic engineering works. It focuses on two basic coordinate transformations - namely the 2D similarity transformation and 2D affine transformation.

The algorithms operate in the form of successive adjustments employing the general least squares method. An attempt is also being made to determine the optimum group and number of points which will participate in the computation of transformation parameters. Baarda's test for the normalized residual is used, with some modifications.

Finally, areas with different control point characteristics are selected for the testing of the algorithms. Analysis results in useful conclusions regarding the quality measures of different transformations, outlier rejection and the accuracy of implementation based on independent control points.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για τον προσδιορισμό της θέσης μιας ομάδας σημείων (περιοχής, αντικειμένου) στη Γεωδαισία χρησιμοποιούνται συστήματα συντεταγμένων σε συνδυασμό με επιφάνειες αναφοράς. Ο συνδυασμός αυτός παράγει την έννοια του συστήματος αναφοράς. Λόγω της ύπαρξης διαφορετικών συστημάτων αναφοράς και της ανάγκης αναθεώρησης τους με το χρόνο (εξαιτίας τεκτονικών μετακινήσεων, εξέλιξης της τεχνολογίας, των αναγκών κλπ), η θέση ενός σημείου μπορεί να εκφράζεται συνήθως σε περισσότερα από ένα συστήματα αναφοράς. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται λοιπόν και η ανάγκη μεταφοράς (μετασχηματισμού) ενός σημείου από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο.

Η υλοποίηση ενός μετασχηματισμού μπορεί να γίνει μέσω ενός αλγορίθμου που θα στοχεύει στον υπολογισμό των “βέλτιστων” παραμέτρων του, ανάλογα με τις ανάγκες του έργου. Ένα τέτοιο έργο μπορεί να καλύπτει μικρή έκταση έως μία περιοχή μήκους μερικών χιλιομέτρων, όπως στην περίπτωση ενός τμήματος δικτύου ή μιας σήραγγας κλπ. Τα σημεία όμως που θα χρησιμοποιηθούν στη συνόρθωση για τον υπολογισμό των παραμέτρων του μετασχηματισμού θα πρέπει αρχικά τουλάχιστον να καλύπτουν μεγαλύτερη έκταση από αυτή του έργου. Επίσης, είναι σκόπιμο ένας αριθμός σημείων να μη συμμετέχει στη συνόρθωση, προκειμένου να ελεγχθούν οι τελικές τιμές των παραμέτρων του μετασχηματισμού.

Σε αυτό το πλαίσιο, η δημιουργία ενός κατά το δυνατόν αυτοματοποιημένου αλγορίθμου μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι επιθυμητή λόγω της ανάγκης απόρριψης ή προσθήκης παρατηρήσεων στη συνόρθωση και της επανάληψης της διαδικασίας προσδιορισμού των παραμέτρων μετασχηματισμού. Ένας τέτοιος αλγόριθμος, προκειμένου να υπολογίσει το “βέλτιστο” συνδυασμό παραμέτρων, θα πρέπει να μπορεί να εκτελεί διαδοχικές συνορθώσεις, να αξιολογεί τα αποτελέσματα κάθε συνόρθωσης και να μπορεί να απορρίπτει κάποιες παρατηρήσεις βάσει κάποιου κριτηρίου.

Τέλος, η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού προϋποθέτει την επιλογή ενός μοντέλου (είδος μετασχηματισμού). Για έργα που αφορούν περιοχές μικρής κλίμακας, ένας απλός δισδιάστατος μετασχηματισμός μπορεί εν γένει να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα (Iliffe, 2005). Επιπρόσθετα, ένας δισδιάστατος μετασχηματισμός δεν απαιτεί τη γνώση του γεωμετρικών υψομέτρων στα σημεία που συμμετέχουν στον υπολογισμό των παραμέτρων, γεγονός που καθιστά ευκολότερη την εφαρμογή τους. Σε αυτήν την

εργασία, από τους επίπεδους μετασχηματισμούς επιλέχθηκε ο δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας και ο αφινικός μετασχηματισμός.

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε επτά κεφάλαια, η διάρθρωση των οποίων έχει ως εξής. Στο Πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική αναφορά σε θεμελιώδεις έννοιες της γεωδαισίας, όπως τις επιφάνειες αναφοράς, τα γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς και τις προβολές. Στη συνέχεια, στο Δεύτερο κεφάλαιο θίγεται το θέμα των μετασχηματισμών μεταξύ συστημάτων συντεταγμένων και συστημάτων αναφοράς. Τα κεφάλαια Τρία και Τέσσερα περιγράφουν τα χαρακτηριστικά των τρισδιάστατων και δισδιάστατων μετασχηματισμών αντιστοίχως. Στο Πέμπτο κεφάλαιο δίνεται το μαθηματικό υπόβαθρο για την κατασκευή ενός αλγορίθμου μετασχηματισμού και περιγράφονται οι διαδικασίες με τις οποίες ελέγχονται τα αποτελέσματα που αυτός παράγει. Η εφαρμογή του αλγορίθμου σε διαφορετικές περιοχές και τα αποτελέσματα της παρουσιάζονται στο Έκτο κεφάλαιο, ενώ στο κεφάλαιο Επτά συνοψίζονται τα συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

### ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

#### 1.1 Επιφάνειες αναφοράς και συστήματα συντεταγμένων

##### 1.1.1 Βασικές επιφάνειες αναφοράς στη Γεωδαισία

Η Φυσική Γήινη Επιφάνεια (Φ.Γ.Ε.) είναι η πραγματική επιφάνεια της γης, στην οποία πραγματοποιούνται όλες οι γεωδαιτικές μετρήσεις. Αποτελείται από την τοπογραφική επιφάνεια στην ξηρά και στη θάλασσα. Πρόκειται για μία “ανώμαλη” επιφάνεια, στην οποία είναι αδύνατο να εκτελεστούν μαθηματικοί υπολογισμοί. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητη η χρήση επιφανειών αναφοράς, οι οποίες ανάλογα με την εφαρμογή προσομοιάζουν με επάρκεια το σχήμα και τη μορφή της γης και επιτρέπουν την διεξαγωγή των απαραίτητων υπολογισμών.

##### 1.1.1.α Γεωειδές

Η επιφάνεια που προσεγγίζει περισσότερο τη Φυσική Γήινη Επιφάνεια είναι το γεωειδές. Το γεωειδές είναι η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει από τη μέση στάθμη της θάλασσας, όταν αυτή προεκτείνεται και κάτω από τις ηπείρους. Περιγράφει με βέλτιστο τρόπο το σχήμα της γης, διότι είναι ισοδυναμική επιφάνεια και εξ ορισμού κάθετη προς την διεύθυνση της βαρύτητας (βλ σχήμα 1.1). Το γεωειδές είναι μια επιφάνεια χωρίς γωνίες και ακμές, και λόγω της επίδρασης του πεδίου βαρύτητας στρέφει τα κυρτά προς τα έξω. Ως γεωδυναμική επιφάνεια, το γεωειδές μπορεί να προσδιορισθεί με μετρήσεις του γήινου πεδίου βαρύτητας, με γεωδαιτικές μετρήσεις, αστρονομικές παρατηρήσεις και συνδυασμό των παραπάνω. Ωστόσο, ο προσδιορισμός του γεωειδούς είναι κοπιώδης εργασία και μπορεί να γίνει μόνο σημειακά. Κατά συνέπεια, δεδομένου ότι το γεωειδές είναι πολύπλοκη και ιδιόσχημη επιφάνεια και ως εκ τούτου δεν μπορεί να περιγραφεί από απλές μαθηματικές σχέσεις, είναι αναγκαία η αντικατάστασή του από άλλες

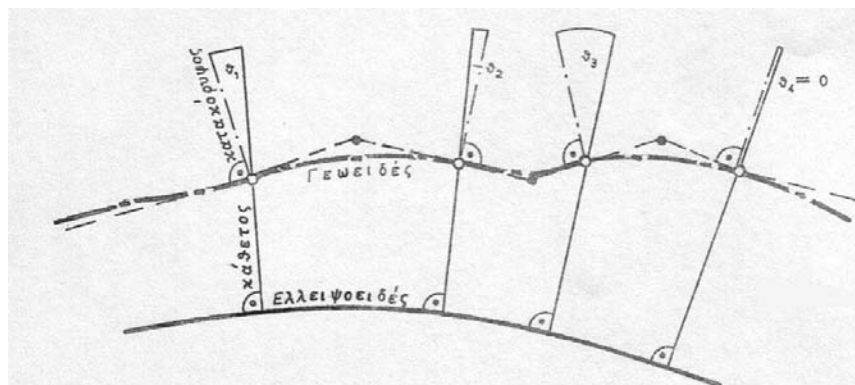
επιφάνειες, οι οποίες να μπορούν να περιγράψουν με απλούστερο τρόπο το σχήμα της γης.

### 1.1.1.β Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Απλούστερο μαθηματικό μοντέλο από το γεωειδές είναι το διαξονικό ελλειψοειδές εκ περιστροφής, το οποίο ορίζεται από το μεγάλο ημιάξονα  $a$  και το μικρό ημιάξονα  $b$  ή από το μεγάλο ημιάξονα  $a$  και την εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς  $f$  που ορίζεται ως εξής:

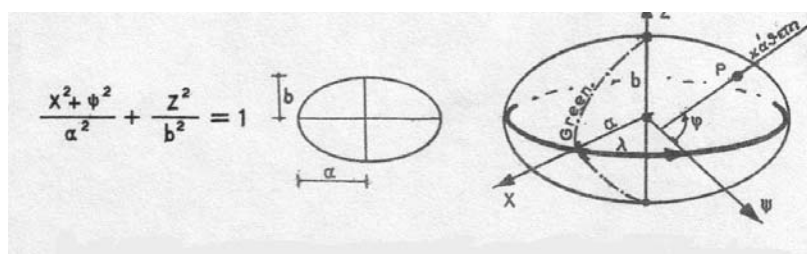
$$f = \frac{(a-b)}{a} \quad (1.1)$$

Το γήινο ή γεωκεντρικό ελλειψοειδές έχει ως κέντρο του το κέντρο μάζας της γης, ο μικρός άξονάς του συμπίπτει με το μέσο άξονα περιστροφής της γης και προσεγγίζει την επιφάνεια του γεωειδούς στο σύνολο της γης με μέγιστη απόκλιση που δεν ξεπερνά τα 150 m. Γεωδαιτικό ελλειψοειδές είναι ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής παράλληλα μετατοπισμένο ως προς το γήινο ελλειψοειδές. Η μετατόπιση αυτή γίνεται με σκοπό την βέλτιστη προσαρμογή του ελλειψοειδούς με το γεωειδές σε μια συγκεκριμένη περιοχή ενδιαφέροντος. Κάθε κράτος επιλέγει συνήθως ως επιφάνεια αναφοράς ένα κατάλληλα ορισμένο γεωδαιτικό ελλειψοειδές.



Σχήμα 1.1 Γεωειδές και ελλειψοειδές

Figure 1.1 The geoid and the ellipsoid

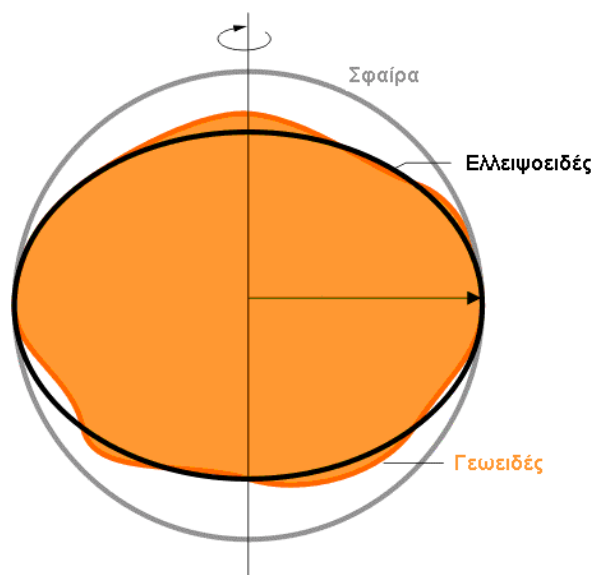


Σχήμα 1.2 Γεωμετρία ελλειψοειδούς

Figure 1.2 Ellipsoid geometry

### 1.1.1.γ Σφαίρα

Για εργασίες σε περιοχές μικρής εμβέλειας και γενικότερα όταν επιτρέπεται από τις απαιτήσεις ακρίβειας είναι δυνατό για την διευκόλυνση των υπολογισμών να αντικατασταθεί το ελλειψοειδές εκ περιστροφής με μία σφαίρα αναφοράς, συνήθως με μέση ακτίνα καμπυλότητας  $R=6371$  km. Η σφαίρα ως επιφάνεια αναφοράς χρησιμοποιείται επίσης στη χαρτογραφία, στην αστρονομία και στη ναυσιπλοΐα. Σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ότι η διεύθυνση της κατακόρυφου συμπίπτει με την ακτίνα της σφαίρας σε κάθε σημείο.



Σχήμα 1.3 Η σχέση του γεωειδούς με το ελλειψοειδές αναφοράς και τη σφαίρα

Figure 1.3 The relationship between the geoid, reference ellipsoid and sphere

### 1.1.1.δ Οριζόντιο επίπεδο

Στην περίπτωση κατά την οποία η περιοχή μελέτης είναι περιορισμένη (για συμβατικές τοπογραφικές αποτυπώσεις με ακτίνα περιοχής  $< 10$  km) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως επιφάνεια αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που “ταυτίζεται” με το γεωειδές στο κέντρο της περιοχής, καθώς τα σφάλματα που προκύπτουν από αυτή τη θεώρηση είναι αμελητέα.

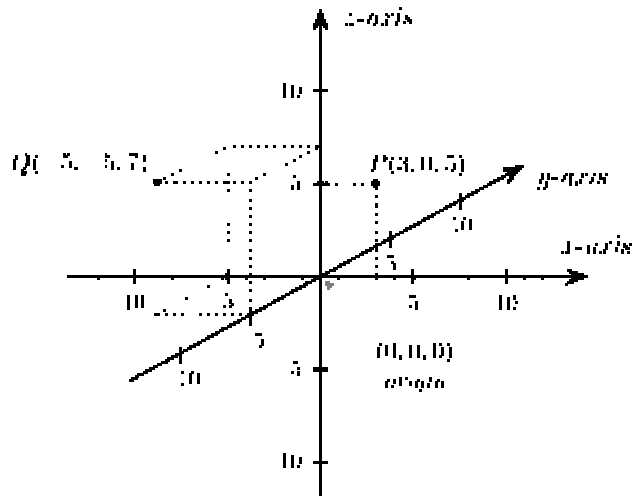
### 1.1.2 Συστήματα συντεταγμένων που συνοδεύουν επιφάνειες αναφοράς

Ένα σύστημα συντεταγμένων προσδιορίζει μονοσήμαντα τη θέση ενός σημείου στο χώρο. Υπάρχουν διάφορα συστήματα συντεταγμένων, δισδιάστατα και τρισδιάστατα, τα

οποία περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο τη θέση σημείων ως προς μια επιφάνεια αναφοράς:

- **Ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες**

Η θέση ενός σημείου ορίζεται με τις τρεις συνιστώσες του  $(X,Y,Z)$  σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

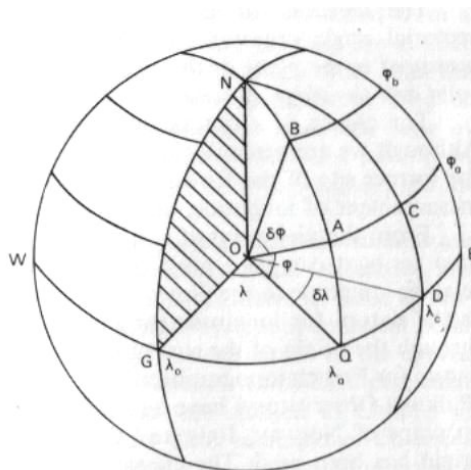


Σχήμα 1.4 Τρισδιάστατες καρτεσιανές συντ/νες

Figure 1.4 Three dimensional cartesian coordinates

- **Γεωγραφικές συντεταγμένες η σφαιρικές**

Ως αναφορά χρησιμοποιείται ο άξονας περιστροφής της γης και ένας αυθαίρετος μηδενικός μεσημβρινός. Τα σημεία περιγράφονται από δύο γωνιακά μεγέθη  $(\varphi, \lambda)$ . Χρησιμοποιούνται ευρέως στη γεωγραφία, στην πλοήγηση κ.α.



Σχήμα 1.5 Σφαιρικές συντεταγμένες

Figure 1.5 Spherical coordinates

- **Γεωδαιτικές συντεταγμένες η ελλειψοειδείς**

Παρόμοιες με τις γεωγραφικές συντ/νες (φ,λ), προκύπτουν όμως από το γεωμετρικό μοντέλο του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Η συντεταγμένη λ ταυτίζεται και στα δύο συστήματα.

## 1.2 Συστήματα αναφοράς στη Γεωδαισία

### 1.2.1 Γενικά

“Ως σύστημα αναφοράς ορίζεται ο συνδυασμός μιας επιφάνειας αναφοράς με ένα σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμεύσει ως υπόβαθρο όλων των τοπογραφικών εργασιών (προσδιορισμός – εντοπισμός θέσεων σημείων ή και αντικειμένων του χώρου).

Τα κριτήρια επιλογής ενός συστήματος αναφοράς είναι:

- εύκολη αναγωγή μετρήσεων
- απλοί υπολογισμοί
- εύχρηστα αποτελέσματα”

(Παπαζήση, 2002)

Τα συστήματα αναφοράς που βρίσκουν εφαρμογή στη γεωδαισία μπορούν να ταξινομηθούν με τον τρόπο ορισμού τους ως εξής:

- Φυσικό σύστημα αναφοράς είναι εκείνο στο οποίο η θέση ενός σημείου ορίζεται με βάση τη διεύθυνση της κατακορύφου και το γεωδυναμικό αριθμό του σημείου. Η θέση ενός σημείου μπορεί να προσδιορισθεί ακόμα με μετρήσεις του αστρονομικού πλάτους και μήκους και υπολογισμό της έντασης του πεδίου βαρύτητας μεταξύ του γεωειδούς και της θέσης του υπόψη σημείου. Ένα φυσικό σύστημα αναφοράς είναι ένα προσανατολισμένο τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς.
- Γήινο ή γεωγραφικό σύστημα αναφοράς είναι εκείνο το οποίο χρησιμοποιεί ένα γήινο ελλειψοειδές ως επιφάνεια (σήμερα το GRS80) και στο οποίο τα σημεία ενδιαφέροντος προσδιορίζονται από τις γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ,λ) και το γεωμετρικό υψόμετρο  $h$  ή τις γεωκεντρικές καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z). Σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς ο προσδιορισμός ενός σημείου αναφέρεται σε

σχέση με το κέντρο μάζας της γης (αφετηρία συστήματος αναφοράς) και όχι την κατακόρυφο.

- Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς είναι ένα γήινο σύστημα αναφοράς κατάλληλα μετατοπισμένο, έτσι ώστε το ελλειψοειδές που το συνοδεύει να περιγράφει καλύτερα (μικρές αποχές γεωειδούς) ένα τμήμα της ΦΓΕ. Για λόγους ευκολίας στους μετασχηματισμούς μεταξύ συστημάτων αναφοράς η μετατόπιση ενός γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς περιλαμβάνει μόνο μετάθεση χωρίς στροφές. Όμοια με το γήινο σύστημα αναφοράς, ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου γίνεται με τις ελλειψοειδείς ή καρτεσιανές συντεταγμένες.
- Τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς είναι το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, του οποίου ο άξονας Z ορίζεται με βάση την κατακόρυφο του τόπου (σημείο αφετηρίας συστήματος αναφοράς στη ΦΓΕ). Εάν πρόκειται για προσανατολισμένο τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς, ο άξονας Y εφάπτεται στον μεσημβρινό του σημείου με κατεύθυνση προς το βορρά, εάν όχι τότε πρόκειται για αυθαίρετο τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς. Συστήματα αναφοράς αυτής της κατηγορίας έχουν εφαρμογή σε τοπογραφικές εργασίες μικρής έκτασης λόγω της σύγκλισης της κατακορύφου.

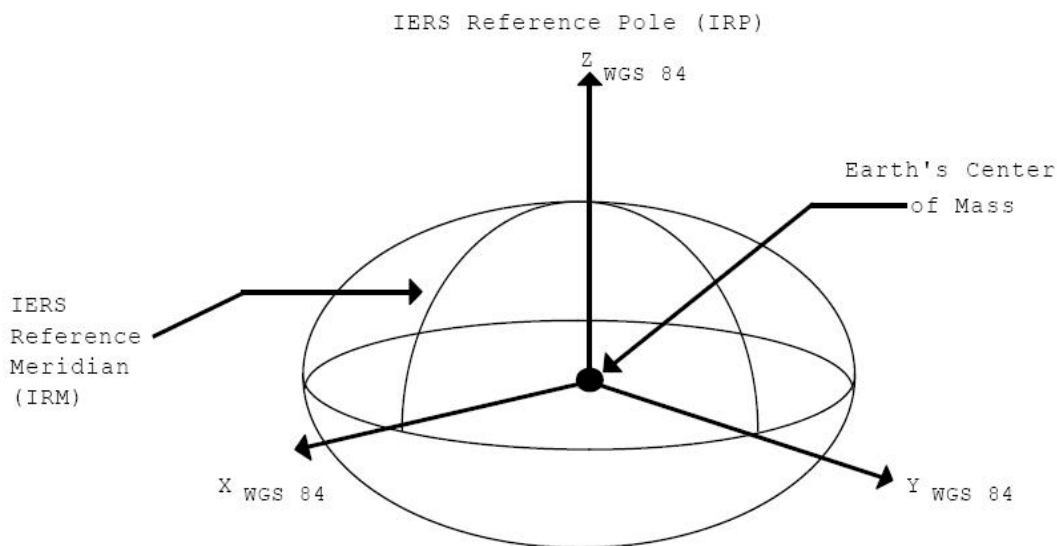
Επίσης, εκτός από τα συστήματα αναφοράς που αναφέρθηκαν, η θέση ενός σημείου μπορεί να εκφραστεί ως προς ένα προβολικό σύστημα αναφοράς σε μια αναπτυσσόμενη επιφάνεια (συνήθως επίπεδο) όπου η θέση του προσδιορίζεται με βάση τις ορθογώνιες συντεταγμένες του. Στη συνέχεια δίνονται περισσότερες πληροφορίες για τα γήινα και γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς, ενώ σε ξεχωριστή ενότητα πραγματεύονται τα προβολικά συστήματα αναφοράς, δεδομένου ότι κατέχουν βαρύνουσα θέση στο αντικείμενο αυτής της εργασίας.

### 1.2.2 Γήινα (παγκόσμια) συστήματα αναφοράς

Ένα γήινο (παγκόσμιο) σύστημα αναφοράς χρησιμοποιεί ως επιφάνεια αναφοράς ένα γεωκεντρικό ελλειψοειδές που αναπαριστά κατά το δυνατόν καλύτερα το σχήμα της γης στο σύνολό της. Εδώ ενδεικτικά αναφέρουμε τα συστήματα αναφοράς ITRS και WGS 84.

- Το ITRS είναι ένα γεωκεντρικό, καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του οποίου το κέντρο ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της γης, άξονα Z τον άξονα περιστροφής της γης, τον άξονα X να περνάει από το μεσημβρινό του αστεροσκοπείου

- Greenwich και τον άξονα Y να συμπληρώνει το σύστημα ως δεξιόστροφο. Το ITRS είναι βασισμένο στο συνδυασμό των συντεταγμένων και ταχυτήτων μετακίνησης ενός συνόλου επιλεγμένων σημείων στην επιφάνεια της γης, που προέρχονται από παρατηρήσεις των πλέον προηγμένων διαστημικών-γεωδαιτικών τεχνικών (VLBI, LLR, SLR, GPS (από το 1991) και DORIS(από το 1994)). Το ITRS υλοποιείται ως ITRF (International Terrestrial Reference Frame) μέσω των συντεταγμένων X, Y, Z και των τεκτονικών ταχυτήτων  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  των σταθμών IGS (International GPS Service).
- Το σύστημα αναφοράς WGS 84 (World Geodetic System 1984) είναι ένα γήινο σύστημα αναφοράς το οποίο στηρίζεται στο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς GRS80. Το WGS 84 πρακτικά ταυτίζεται με το ITRF 2002 και έχει ιδιαίτερη σημασία διότι χρησιμοποιείται από το παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού GPS (Global Positioning System).



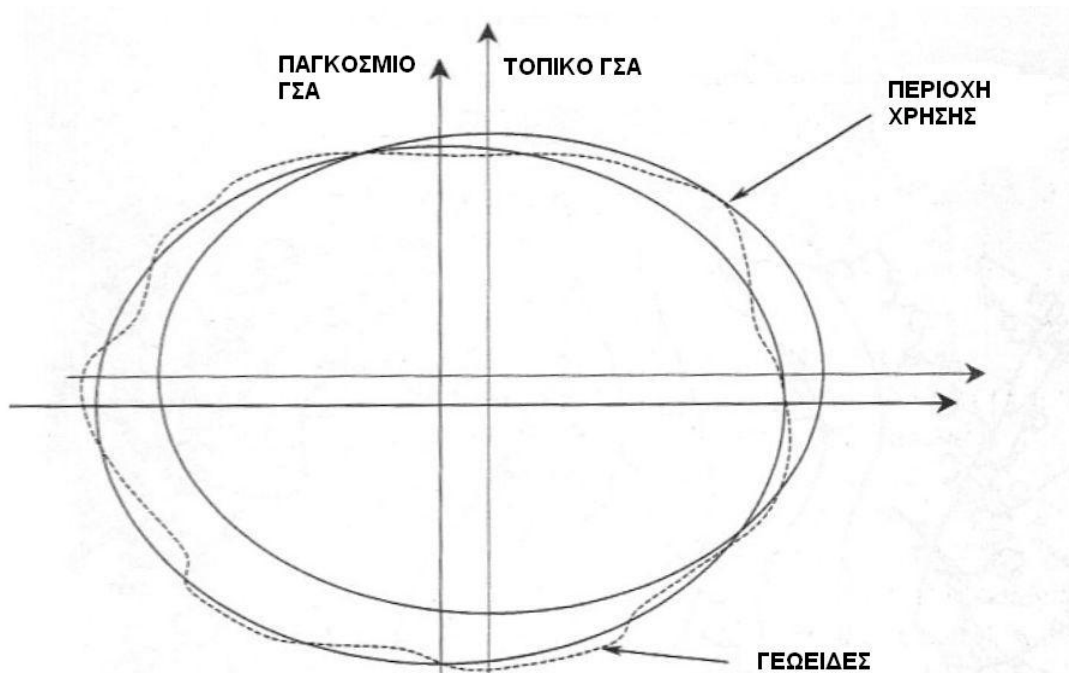
Σχήμα 1.6 Το σύστημα αναφοράς WGS 84

Figure 1.6 The WGS 84 reference system

### 1.2.3 Τοπικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς

Όπως αναφέρθηκε, σε κρατικό επίπεδο δεν χρησιμοποιούνται γεωκεντρικά συστήματα αναφοράς, αλλά γεωδαιτικά. Συνήθως ένα γεωδαιτικό ελλειψοειδές επιλέγεται να είναι παράλληλα μετατοπισμένο ως προς το γήινο και να προσαρμόζεται όσο το δυνατόν

καλύτερα στο γεωειδές της περιοχής χρήσης, ώστε τα σφάλματα λόγω αποχής του γεωειδούς να ελαχιστοποιούνται. Η μετατόπιση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7 Παγκόσμια και τοπικά ΓΣΑ

Figure 1.7 Global and local reference systems

Παραδοσιακά, ο ορισμός ενός τοπικού ΓΣΑ (datum) γίνεται με τις συντεταγμένες ( $\varphi, \lambda, h$ ) ενός βασικού σημείου, το αζιμούθιο ( $A$ ) προς ένα δεύτερο σημείο και την επιλογή των διαστάσεων του ελλειψοειδούς αναφοράς. Στην πράξη επιλέγεται:

$$\varphi = \Phi \quad \lambda = \Lambda \quad h = H \quad A = A_A \quad (1.2)$$

( $\Phi, \Lambda$ : αστρονομικές συντ/νες,  $A_A$ : αστρονομικό αζιμούθιο)

Με αυτή τη σύμβαση διατηρείται η παραλληλία γήινου και γεωδαιτικού συστήματος, διευκολύνοντας τους μετασχηματισμούς από το ένα σύστημα στο άλλο. Στο βασικό σημείο επιλέγεται συνήθως η απόκλιση της κατακορύφου και η αποχή του γεωειδούς ( $N$ ) να είναι μηδενικές, που σημαίνει ότι σε αυτό το σημείο το ελλειψοειδές ταυτίζεται με το γεωειδές.

Η υλοποίηση ενός γεωδαιτικού datum γίνεται προσδιορίζοντας τις γεωδαιτικές συντεταγμένες στα βασικά σημεία του τοπικού δικτύου.



## 1.2.4 ΓΣΑ στον Ελληνικό Χώρο

### 1.2.4.α Το Παλαιό Ελληνικό ΓΣΑ

Το ΠΕΓΣΑ η αλλιώς Παλαιό Ελληνικό Datum ορίστηκε στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα και ήταν το πρώτο ΓΣΑ στην Ελλάδα. Βασίστηκε στο ελλειψοειδές Bessel του 1841 και ως αφετηρία ορίστηκε το βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών. Τα στοιχεία ορισμού του συστήματος είναι:

$$a = 6377397$$

$$1/f = 299.15$$

$$\varphi_0 = 37^\circ 58' 20'' 100$$

$$\lambda_0 = 0^\circ 0' 0'' 0000 \text{ και αργότερα } \lambda_0 = 23^\circ 42' 58'' 815 \quad (1.3)$$

$$A_0 = 35^\circ 46' 13'' 100 \text{ προς το τριγωνομετρικό της Πάρνηθας}$$

Επίσης θεωρήθηκε

$$\xi_0 = 0$$

$$\eta_0 = 0$$

$$N_0 = 0$$

Το ΠΕΓΣΑ υλοποιείται με το δίκτυο Α' και Β' τάξης της ΓΥΣ (Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού). Χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από τις πολιτικές υπηρεσίες και σε αυτό αναφέρεται ένα μεγάλο μέρος των γεωδαιτικών και χαρτογραφικών εργασιών της χώρας. Το σύστημα υπέστη αρκετές αναθεωρήσεις και επαναλαμβανόμενες συνορθώσεις τμημάτων του και δεν παρουσιάζει ενιαία ακρίβεια. Μετά τη δεύτερη αναθεώρησή του ονομάστηκε Νέο Ελληνικό datum αλλά κατά κύριο λόγο περιορίζεται σε εσωτερική χρήση από τη ΓΥΣ.

### 1.2.4.β Το Ευρωπαϊκό Datum ED50

Το Ευρωπαϊκό Datum του 1950 αναπτύχθηκε στη Δυτική Ευρώπη μετά το τέλος του 2<sup>ου</sup> Παγκοσμίου Πολέμου. Βασίστηκε στο ελλειψοειδές του Hayford και η αφετηρία του ορίστηκε στο Potsdam της Γερμανίας. Τα βασικά στοιχεία ορισμού του συστήματος είναι:

$$a = 6378388$$

$$1/f = 297$$

$$\xi_0 = 3''36 \quad (1.4)$$

$$\eta_0 = 1''78$$

$$N_0 = 0$$

Το ED50 χρησιμοποιήθηκε στην Ελλάδα κυρίως για στρατιωτικούς σκοπούς και σε ναυτικούς χάρτες. Έγιναν κάποιες αναθεωρήσεις του συστήματος (ED77, ED79), τις οποίες η Ελλάδα δεν ακολούθησε για πρακτικούς λόγους.

#### **1.2.4.γ Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς του 1987 (ΕΓΣΑ 87)**

Το ΕΓΣΑ 87 ορίζεται με τις συντεταγμένες του κεντρικού βάθρου στο Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου του ΕΜΠ. Βασίζεται στο ελλειψοειδές GRS80 και συνοδεύεται από το μοντέλο γεωειδούς του EGM96. Το κέντρο του απέχει από το γεώκεντρο κατά ποσότητες όπως φαίνονται στη συνέχεια. Το ΕΓΣΑ 87 υλοποιείται μέσω των συντεταγμένων περίπου 28000 τριγωνομετρικών σημείων.

Συντεταγμένες κεντρικού βάθρου ΚΔΔ του ΕΜΠ

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 38^\circ 04' 33'' 8107 \\ \lambda_0 &= 23^\circ 55' 51'' 0095 \\ h_0 &= 481.743 \text{ m} \\ N_0 &= 7 \text{ m} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Αποχή κέντρου ΕΓΣΑ 87 από το γεώκεντρο

$$\begin{aligned} \Delta X &= 199.652 \text{ m} \\ \Delta Y &= -74.759 \text{ m} \\ \Delta Z &= -26.055 \text{ m} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Επισημαίνεται ότι λόγω των τεκτονικών παραμορφώσεων της χώρας το σύστημα ΕΓΣΑ 87 σταδιακά γίνεται όλο και μειωμένης ακρίβειας και προοδευτικά τείνει να αντικατασταθεί από το σύστημα ITRS.

### **1.3 Προβολικά συστήματα αναφοράς**

#### **1.3.1 Βασικά χαρακτηριστικά προβολών**

Γενικά είναι επιθυμητό για πρακτικούς λόγους να απεικονίζονται χωρικά δεδομένα σε δισδιάστατη μορφή (πχ σε ένα χάρτη), προκειμένου να είναι ευκολότερο να εκτελεστούν υπολογισμοί, όπως ο προσδιορισμός μιας απόστασης. Χρειάζεται επομένως να μεταφέρονται δεδομένα όπως γεωδαιτικές συντεταγμένες στο ελλειψοειδές (φ,λ) σε επίπεδες καρτεσιανές (x,y). Η διαδικασία μεταφοράς γεωμετρικών μεγεθών από μία

επιφάνεια σε μία άλλη μέσω μιας αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας μεταξύ σημείων των δύο επιφανειών ορίζεται ως προβολή.

Παρόλο που μια προβολή ανάλογα με το είδος της μπορεί να οριστεί με αμιγώς γεωμετρικές μεθόδους, μία προβολή ορίζεται με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων που συνδέουν τις θέσεις σημείων στις δύο επιφάνειες της μορφής:

$$x = f(\varphi, \lambda) \quad (1.7)$$

$$y = g(\varphi, \lambda) \quad (1.8)$$

Αυτές οι σχέσεις καθορίζουν τη μορφή που θα έχει η απεικόνιση και εκλέγονται ώστε να ικανοποιούνται ορισμένες προϋποθέσεις.

Η απεικόνιση μιας μη αναπτυσσόμενης επιφάνειας όπως η σφαίρα ή το ελλειψοειδές στο επίπεδο δεν είναι δυνατό να γίνει χωρίς παραμορφώσεις. Βασικό μέγεθος για την περιγραφή των παραμορφώσεων είναι ο συντελεστής κλίμακας:

$$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta S} \quad (1.9)$$

όπου  $\Delta s$  μία απόσταση στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα και  $\Delta S$  η ίδια απόσταση στην προβολή. Αυτή η παράμετρος μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και ανάλογα με το είδος της προβολής είναι διαφορετική σε κάθε διεύθυνση. Όταν δεν υπάρχει παραμόρφωση ο συντελεστής κλίμακας  $m$  ισούται με τη μονάδα.

Όλες οι προβολές παράγουν χάρτες, στους οποίους μεγέθη όπως μήκη, γωνίες και εμβαδά εμφανίζονται αλλοιωμένα. Τις περισσότερες φορές γίνεται προσπάθεια να διατηρηθεί αναλλοίωτο ένα από τα παραπάνω μεγέθη, συνήθως σε βάρος των υπολοίπων. Έτσι είναι δυνατό να κατασκευαστούν προβολές που να μην παραμορφώνουν τα μήκη σε ορισμένες διευθύνσεις, να διατηρούν το σχήμα των αντικειμένων ή να διατηρούν το εμβαδό τους. Υπάρχουν όμως και προβολές που δεν έχουν καμία από τις παραπάνω ιδιότητες.

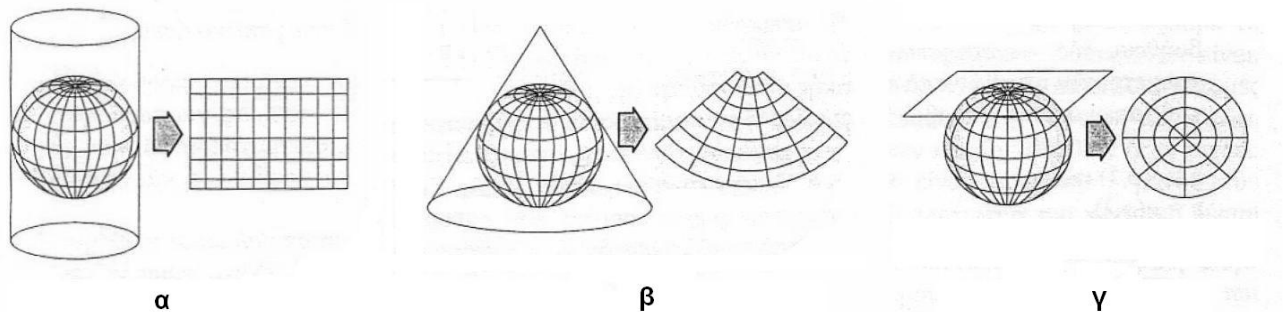
Τα κριτήρια για την επιλογή μιας προβολής είναι διάφορα. Ο σκοπός για τον οποίο κατασκευάζεται ένας χάρτης καθορίζει το είδος της προβολής που θα χρησιμοποιηθεί. Για παράδειγμα, στην τοπογραφία και στην πλοήγηση επιλέγεται μια προβολή που θα

διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες, ενώ σε άλλες εφαρμογές ενδέχεται να προτιμηθεί μια προβολή που να διατηρεί αναλλοίωτα τα εμβαδά κλπ. Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο είναι το ποσοστό και η κατανομή της παραμόρφωσης που εμφανίζει μια προβολή σε σχέση με μια άλλη. Επίσης πολλές φορές ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση των παραμορφώσεων σε μια συγκεκριμένη περιοχή (ο συντελεστής κλίμακας θα πρέπει να πλησιάζει την μονάδα παντού στην περιοχή).

### 1.3.2 Κατηγορίες Προβολών

Στην περίπτωση γεωμετρικών προβολών η απεικόνιση μπορεί να γίνει αρχικά σε μία αναπτυσσόμενη επιφάνεια και μετά να μεταφερθεί στο επίπεδο ή αν πρόκειται για επίπεδη προβολή να γίνει απευθείας στο επίπεδο. Κατάλληλες αναπτυσσόμενες επιφάνειες είναι η παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου ή ενός κώνου. Ανάλογα με την επιφάνεια που χρησιμοποιείται έχουμε απεικονίσεις:

- κυλινδρικές
- κωνικές
- επίπεδες η αζιμουθιακές

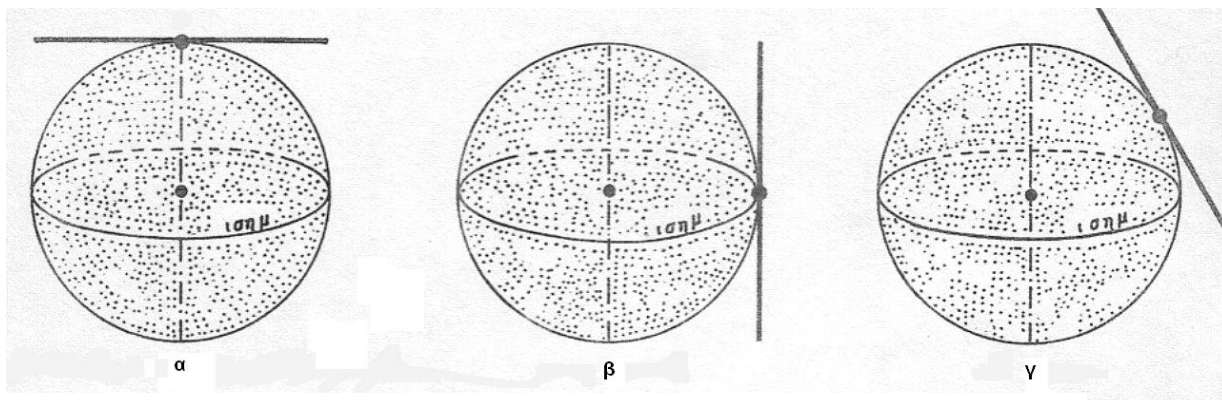


Σχήμα 1.8 Κυλινδρικές (α), Κωνικές (β) και επίπεδες προβολές (γ)

Figure 1.8 Cylindrical (α), conical (β) and plane projections (γ)

Μία άλλη κατηγοριοποίηση των προβολών γίνεται ανάλογα με τον προσανατολισμό του άξονα συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας, ως προς τον άξονα περιστροφής της γης (βλ Σχήμα 1.9).

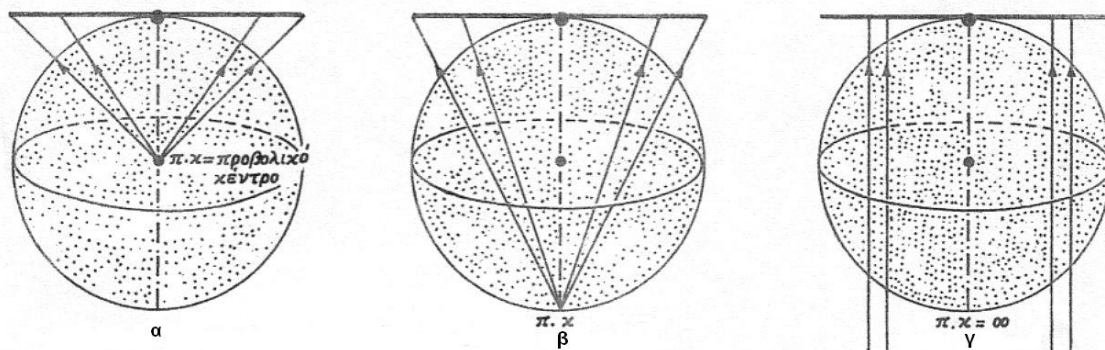
- στις ορθές προβολές οι δύο άξονες τέμνονται κάθετα,
- στις εγκάρσιες η ισημερινές προβολές ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας είναι παράλληλος με τον άξονα περιστροφής της γης,
- στις πλάγιες προβολές οι δύο άξονες σχηματίζουν τυχαία γωνία



Σχήμα 1.9 ορθή (α), εγκάρσια (β) και πλάγια προβολή (γ)

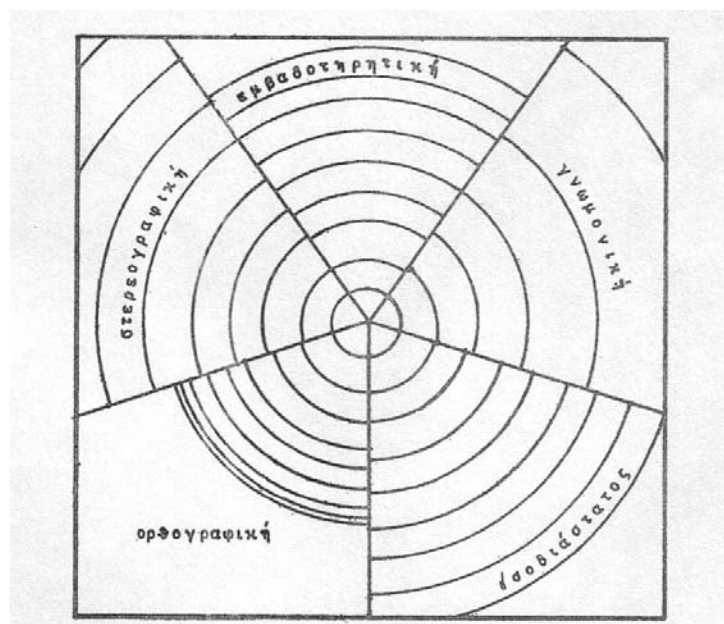
Figure 1.9 normal (α), transverse (β) and oblique projections (γ)

Επίσης, ανάλογα με τη θέση του προβολικού κέντρου διακρίνονται σε γωνιωματικές, στερεογραφικές και ορθογραφικές (βλ Σχήματα 1.10, 1.11).



Σχήμα 1.10 γωνιωματική (α), στερεογραφική (β) και ορθογραφική προβολή (γ)

Figure 1.10 gnomonic (α), stereographic (β) and orthographic projections (γ)



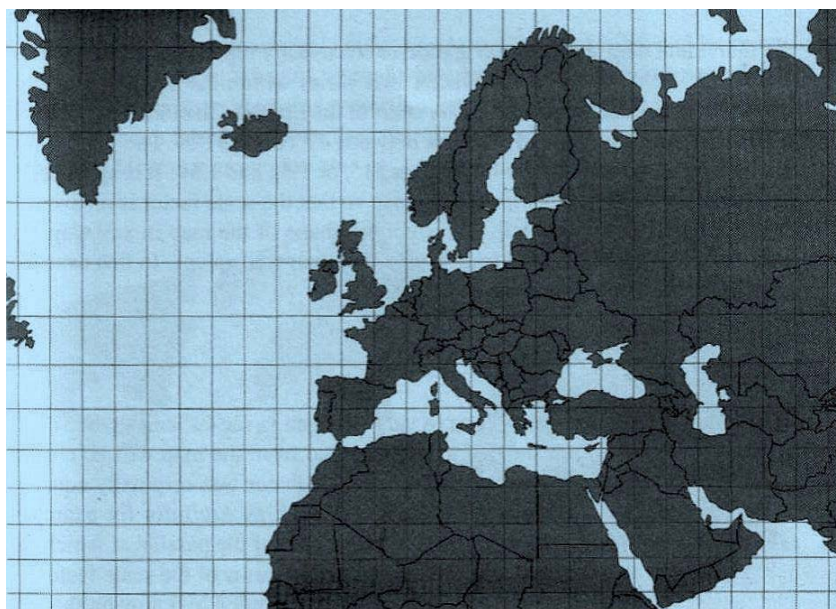
Σχήμα 1.11 Απεικόνιση παραλλήλων διαφορετικών προβολών

Figure 1.11 Parallels projected based on different projections

Τέλος, ανάλογα με την ιδιότητά τους να διατηρούν αναλλοίωτα ορισμένα μεγέθη οι προβολές διακρίνονται στις παρακάτω βασικές κατηγορίες:

- Οι σύμμορφες προβολές διατηρούν το σχήμα των αντικειμένων, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να διατηρούνται οι γωνίες στο χάρτη. Σε αυτές τις προβολές η κλίμακα σε κάποιο σημείο είναι η ίδια σε κάθε κατεύθυνση.
- Οι ισοδύναμες προβολές έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τα εμβαδά των αντικειμένων αλλά να αλλοιώνουν το σχήμα τους. Σε αυτές τις προβολές η κλίμακα σε μία διεύθυνση θα διαφέρει γενικά από την κλίμακα σε μια άλλη διεύθυνση.
- Οι ισαπέχουσες προβολές διατηρούν αναλλοίωτες κάποιες αποστάσεις αλλά όχι όλες (αυτό θα σήμαινε ότι δεν υπάρχουν καθόλου παραμορφώσεις). Τα μήκη που δεν αλλοιώνονται βρίσκονται πάνω σε συγκεκριμένες διευθύνσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές από τις πιο σημαντικές προβολές.



Σχήμα 1.12 Μερκατορική προβολή

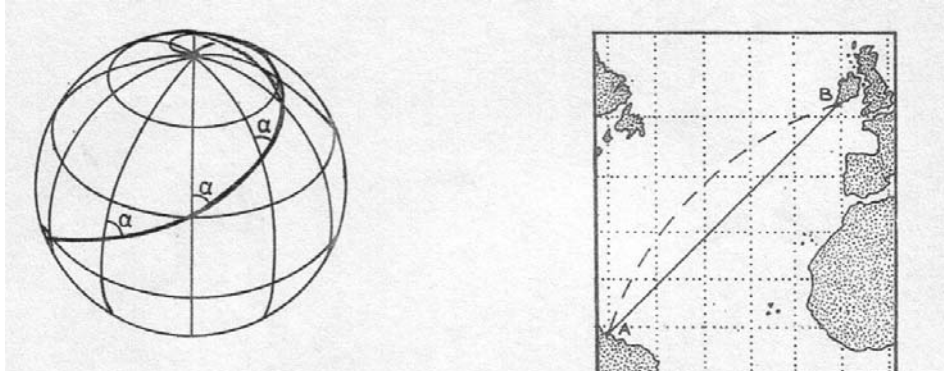
Figure 1.12 Mercator projection

### 1.3.2.α Μερκατορική προβολή

Η Μερκατορική προβολή είναι μία σύμμορφη ορθή κυλινδρική προβολή. Οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών και οι μεσημβρινοί ισαπέχουν μεταξύ τους. Ο συντελεστής κλίμακας  $m$  είναι ίσος με τη μονάδα στον



ισημερινό και αυξάνεται όσο πλησιάζουμε στους πόλους, με αποτέλεσμα περιοχές σε μεγάλα πλάτη να μεγεθύνονται. Η προβολή αυτή έχει την ιδιότητα να παρουσιάζει τις λοξοδρομίες ως ευθείες γραμμές και χρησιμοποιείται στη ναυσιπλοΐα (βλ Σχήμα 1.13).



Σχήμα 1.13 Λοξοδρομία

Figure 1.13 Rhumb line

### 1.3.2.β Εγκάρσια Μερκατορική προβολή

Η Εγκάρσια Μερκατορική προβολή είναι σύμμορφη κυλινδρική προβολή με κύλινδρο που εφάπτεται σε έναν κεντρικό μεσημβρινό. Ο συντελεστής κλίμακας  $m$  στον κεντρικό μεσημβρινό ισούται με τη μονάδα και οι παραμορφώσεις μεγαλώνουν με την απόσταση των σημείων από αυτόν. Σε αυτήν την προβολή οι λοξοδρομίες δεν παρουσιάζονται ως ευθείες γραμμές. Η προβολή είναι χρήσιμη σε μία μικρή ζώνη κατά μήκος του κεντρικού μεσημβρινού και ενδείκνυται για χρήση σε περιοχές που απέχουν από τον ισημερινό. Συχνά για τη μείωση των παραμορφώσεων μέσα στη ζώνη χρησιμοποιείται ένας συντελεστής κλίμακας  $m_0$  που η τιμή του εξαρτάται από το επιδιωκόμενο μέγεθος της μέγιστης παραμόρφωσης μέσα στη ζώνη.

### 1.3.2.γ Σύμμορφη Κωνική προβολή Lambert

Η Σύμμορφη Κωνική προβολή Lambert με δύο βασικούς παράλληλους έχει ομόκεντρους ισαπέχοντες παράλληλους και μεσημβρινούς ευθείες γραμμές, που τέμνουν τους παράλληλους σε ορθές γωνίες. Οι παραμορφώσεις κοντά στους βασικούς παραλλήλους είναι σχετικά μικρές και η προβολή ενδείκνυται για χώρες μέσου πλάτους. Χρησιμοποιείται στις ΗΠΑ και μαζί με την Εγκάρσια Μερκατορική προβολή αποτελούν τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες προβολές παγκοσμίως.



Σχήμα 1.14 Σύμμορφη κωνική προβολή Lambert  
Figure 1.14 Lambert conformal conical projection

### 1.3.2.δ Αζιμουθιακή Ισαπέχουσα προβολή

Η Αζιμουθιακή Ισαπέχουσα προβολή κατασκευάζεται κρατώντας τον συντελεστή κλίμακας ίσο με τη μονάδα κατά μήκος των ευθειών που εκτείνονται ακτινικά από το κέντρο της προβολής. Έτσι όλα τα μήκη από το κέντρο της προβολής απεικονίζονται χωρίς παραμόρφωση. Αυτή η προβολή ταιριάζει καλύτερα σε μικρές περιοχές κυκλικού σχήματος, επειδή οι παραμορφώσεις αυξάνονται γρήγορα όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο.



Σχήμα 1.15 Πολική ισαπέχουσα προβολή  
Figure 1.15 Polar equidistant projection

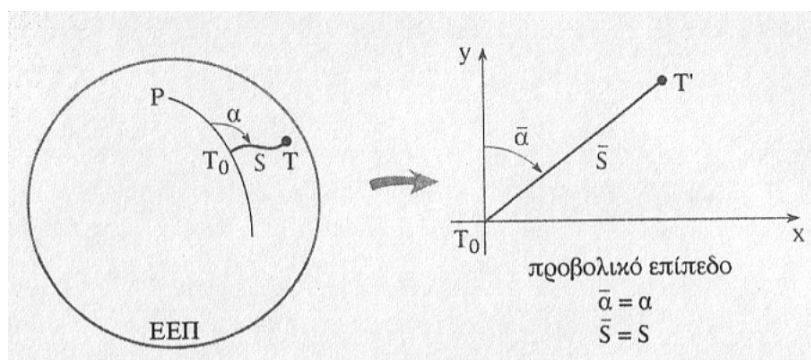


### 1.3.3 Προβολικά συστήματα αναφοράς στην Ελλάδα

Ο όρος προβολικό σύστημα αναφέρεται σε μία προβολή που εφαρμόζεται σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Προβολικά συστήματα χρησιμοποιούνται σε γεωδαιτικές και χαρτογραφικές εργασίες. Μεταξύ άλλων στην Ελλάδα χρησιμοποιούνται τα επόμενα προβολικά συστήματα αναφοράς.

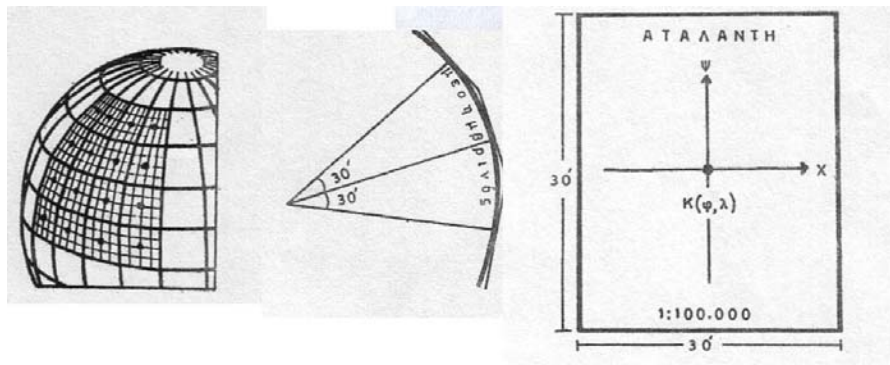
#### 1.3.3.α Το προβολικό σύστημα Hatt

Το σύστημα Hatt είναι μια Πλάγια Αζιμουθιακή Ισαπέχουσα προβολή που βασίζεται στο Παλαιό Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΠΕΓΣΑ). Λόγω των μεγάλων παραμορφώσεων που εισάγει η προβολή αυτή σε χαρτογραφήσεις μεγάλων εκτάσεων και προκειμένου να αποφευχθούν οι αναγωγές μεγεθών, η Ελλάδα έχει χωριστεί σε 130 σφαιροειδή τραπέζια, τα οποία συνιστούν και διαφορετικά τοπικά συστήματα. Τα τραπέζια αυτά που ονομάζονται και Φύλλα Χάρτου (Φ.Χ.), έχουν διαστάσεις 30'X30' και αντιστοιχούν σε χάρτες κλίμακας 1:100.000 της ΓΥΣ. Τα κέντρα των Φ.Χ. είναι και τα κέντρα της προβολής στα τοπικά συστήματα με συντεταγμένες  $(x,y)=(0,0)$ . Η αφετηρία όλου του συστήματος είναι στο Αστεροσκοπείο Αθηνών με γεωδαιτικό μήκος  $\lambda_0 = 23^\circ 42' 58'' 815$ . Ως προς την αφετηρία αυτή, τα κέντρα Φ.Χ. έχουν γεωδαιτικές συντ/νες σε ακέραιες μοίρες και 15' ή 45'. Οι μέγιστες παραμορφώσεις στα άκρα κάθε Φ.Χ. είναι της τάξης των 5 ppm, αλλά αυξάνουν πολύ γρήγορα, όσο απομακρυνόμαστε από τα όρια του Φ.Χ. Το σύστημα παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα όπως η ανάγκη ενοποίησης των Φ.Χ. σε αποτυπώσεις και η ασυμβατότητά του με την τεχνολογία GPS. Ωστόσο, δεδομένου ότι πληθώρα εργασιών στο παρελθόν έχει γίνει στην προβολή Hatt, είναι αναγκαία η χρήση της προβολής και σήμερα.



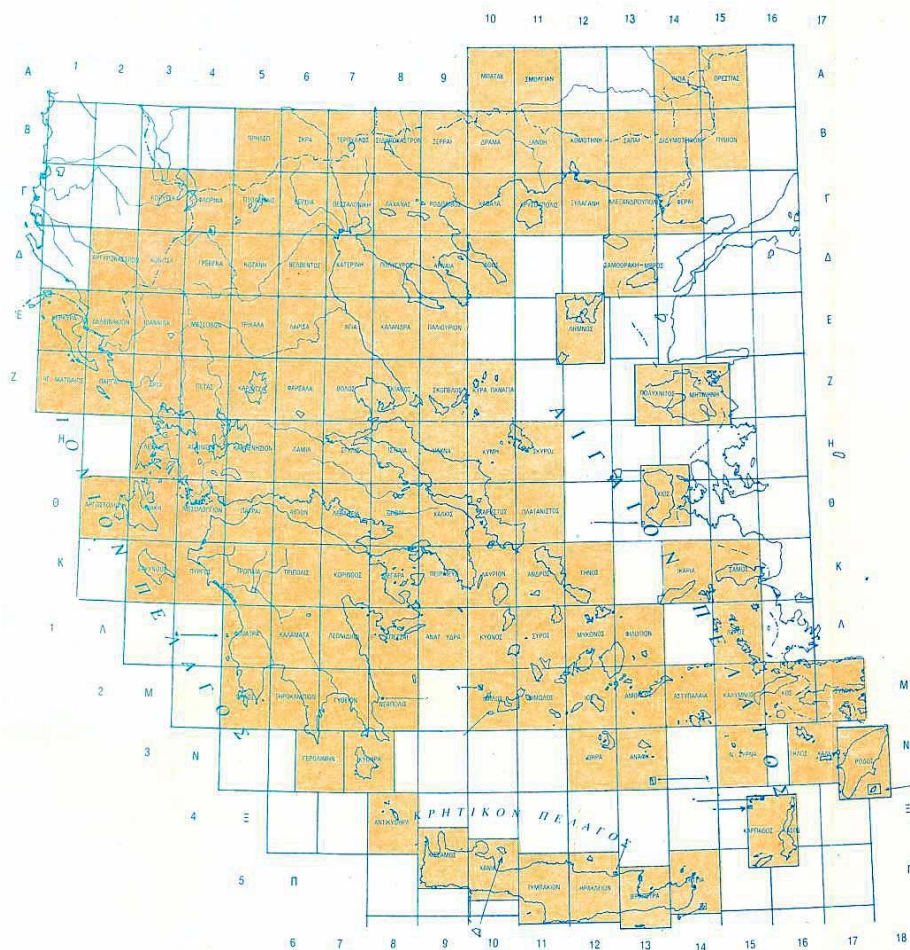
Σχήμα 1.16 Βασική αρχή προβολής Hatt

Figure 1.16 Basic concept of Hatt projection



Σχήμα 1.17 Διαδικασία διανομής Φ.Χ. Hatt

Figure 1.17 Procedure of map distribution of Hatt system



Σχήμα 1.18 Η διανομή Φ.Χ. 1:100.000 στην προβολή Hatt

Figure 1.18 1:100,000 map distribution of the Hatt projection

### 1.3.3.β Το προβολικό σύστημα UTM (Universal Transverse Mercator)

Το σύστημα UTM εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική προβολή και στο ελλειψοειδές του Hayford. Χρησιμοποιείται στο ΓΣΑ ED50. Στο σύστημα UTM ολόκληρη

η επιφάνεια της γης χωρίζεται σε 60 ζώνες πλάτους  $6^\circ$ , με την πρώτη ζώνη να έχει κεντρικό μεσημβρινό το μεσημβρινό του Greenwich. Στην Ελλάδα αντιστοιχούν δύο ζώνες με κεντρικούς μεσημβρινούς  $\lambda_0=21^\circ$  και  $\lambda_0=27^\circ$ . Για να αποφευχθούν αρνητικές συντεταγμένες, η τιμή των τετμημένων των κεντρικών μεσημβρινών είναι 500.000 m. Ο συντελεστής κλίμακας  $m_0$  της προβολής είναι ίσος προς 0.9996 και οι μέγιστες παραμορφώσεις είναι της τάξης των 500 ppm.

### 1.3.3.γ Το σύστημα Εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής $3^\circ$ (ΕΜΠ $3^\circ$ )

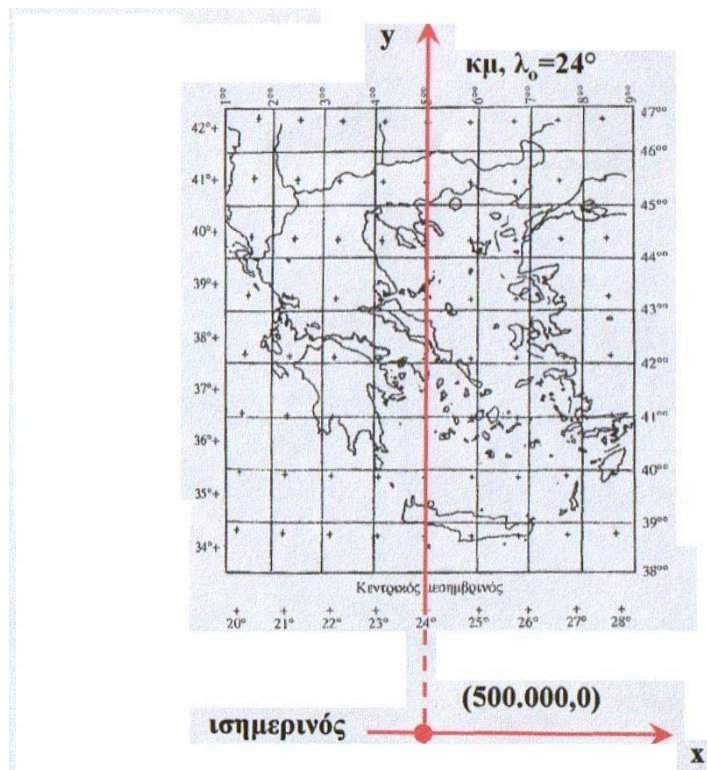
Το σύστημα ΕΜΠ  $3^\circ$  χρησιμοποιήθηκε στο ΠΕΓΣΑ ιδιαίτερα από το υπουργείο Γεωργίας. Με το σύστημα αυτό η χώρα χωρίζεται σε τρεις ζώνες πλάτους  $3^\circ$  η καθεμία, με τρεις κεντρικούς μεσημβρινούς  $\lambda=-3^\circ$ ,  $\lambda=0^\circ$  και  $\lambda=3^\circ$  ως προς το Αστεροσκοπείο Αθηνών. Για να αποφευχθούν αρνητικές τιμές ο κεντρικός μεσημβρινός που άγεται από το Αστεροσκοπείο Αθηνών έχει τετμημένη 200.000 m, ενώ αφετηρία των τεταγμένων θεωρείται η τομή του κεντρικού μεσημβρινού με τον παράλληλο  $\varphi=34^\circ$ . Ο συντελεστής κλίμακας είναι  $m_0=0.9999$  και οι μέγιστες παραμορφώσεις είναι της τάξεως των 140 ppm.

### 1.3.3.δ Το προβολικό σύστημα ΕΓΣΑ 87

Το σύστημα αυτό εντάσσεται στο Γεωδαιτικό Datum του ΕΓΣΑ87 που ορίζεται με το ελλειψοειδές αναφοράς GRS80. Το σύστημα εφαρμόζει την Εγκάρσια Μερκατορική προβολή σε μία μόνο ζώνη για όλη την Ελλάδα με κεντρικό μεσημβρινό  $\lambda_0=24^\circ$  από τον μεσημβρινό του Greenwich. Ο κεντρικός μεσημβρινός έχει τετμημένη 500.000 m και σαν αρχή τεταγμένων θεωρείται η τομή του Ισημερινού με τον κεντρικό μεσημβρινό. Ο συντελεστής κλίμακας είναι  $m_0=0.9996$ . Οι παραμορφώσεις ενώ είναι σχετικά μικρές στην ηπειρωτική χώρα ( $\pm 400$  ppm) μπορούν να φτάσουν τα 1200 ppm στα άκρα της ζώνης και θα πρέπει να εκτελούνται οι κατάλληλες αναγωγές. Το σύστημα προσφέρει ενιαία αναφορά για το σύνολο της χώρας, που βοηθάει στην ηλεκτρονική αρχειοθέτηση των κτηματολογικών και χαρτογραφικών πληροφοριών.

Το προβολικό σύστημα αναφοράς στο ΕΓΣΑ 87 είναι η Εγκάρσια Μερκατορική προβολή (TM) με τα εξής χαρακτηριστικά:

Κεντρικός μεσημβρινός	$\lambda_0 = 24^\circ A$	
Συντελεστής κλίμακας σε $\lambda = 24^\circ A$	$m_0 = 0.9996$	
Πλάτος αναφοράς	$\varphi_0 = 0^\circ 00' 00''.00$	(1.10)
Προσθετική σταθερά στο X	$X_0 = 500000.00$ m	
Προσθετική σταθερά στο Y	$Y_0 = 0.00$ m	



Σχήμα 1.19 Το προβολικό σύστημα ΕΓΣΑ 87

Figure 1.19 The HGRS 87 system

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

#### 2.1 Εισαγωγή

Τα χωρικά δεδομένα μπορούν να καταχωρούνται με πολλές διαφορετικές μορφές, δεδομένου του πλήθους των διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων και συστημάτων αναφοράς που υπάρχουν. Για παράδειγμα, είναι δυνατό να απεικονίζονται μερικά σημεία μέσω τρισδιάστατων καρτεσιανών συντεταγμένων και μερικά άλλα με γεωδαιτικές ελλειψοειδείς συντεταγμένες στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Πριν την επεξεργασία μιας τέτοιας ομάδας σημείων είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων, έτσι ώστε όλα να αναφέρονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

Επίσης, είναι συνηθισμένο να απαιτείται η κοινή επεξεργασία σημείων που αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, πχ να έχουμε συντεταγμένες σημείων στο ΕΓΣΑ 87 και να χρειάζεται να τις συνδυάσουμε με κάποια παλιότερα σημεία του ΠΕΓΣΑ στην προβολή Hatt. Το πρόβλημα μετάβασης από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο είναι σαφώς πιο πολύπλοκο πρόβλημα, δεδομένου ότι πρέπει να ληφθεί υπόψη η αλλαγή της επιφάνειας αναφοράς, της αφετηρίας των συστημάτων αναφοράς, του προσανατολισμού και της κλίμακας συστημάτων αναφοράς.

Στην Ελλάδα, οι μετασχηματισμοί μεταξύ συστημάτων αναφοράς είναι μία απαραίτητη διαδικασία, λόγω των διαφορετικών συστημάτων αναφοράς που είναι σε χρήση και του όγκου των δεδομένων που αναφέρονται στο ΠΕΓΣΑ. Για παράδειγμα, συχνά είναι αναγκαίο να συνδυαστούν νέες μετρήσεις στο ΕΓΣΑ 87 με παλιότερες ή να ενημερωθεί ένας παλιός χάρτης που αναφέρεται στο ΠΕΓΣΑ. Τα τελευταία χρόνια, η ανάγκη για μετασχηματισμούς μεταξύ συστημάτων αναφοράς είναι ακόμα μεγαλύτερη με την αυξανόμενη χρήση του δορυφορικού συστήματος GPS. Οι μετρήσεις GPS γίνονται στο παγκόσμιο σύστημα αναφοράς WGS 84 και κατόπιν μεταφέρονται στο ΕΓΣΑ 87 ή ακόμα και σε παλιότερα συστήματα αναφοράς αν χρειάζεται.

## 2.2 Μετασχηματισμοί συστημάτων συντεταγμένων και συστημάτων αναφοράς

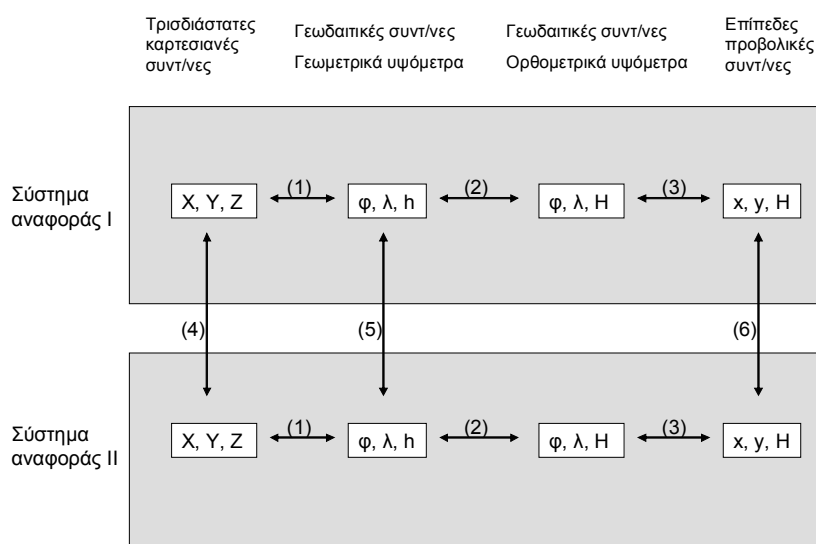
### 2.2.1 Γενικά

Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, οι συντεταγμένες σημείων σε ένα ΓΣΑ μπορούν να βρίσκονται σε διάφορες μορφές:

- τρισδιάστατες καρτεσιανές (X,Y,Z)
- γεωδαιτικές ελλειψοειδείς (φ,λ)
- επίπεδες καρτεσιανές (x,y) στο προβολικό επίπεδο

Συνήθως για τα υψόμετρα χρησιμοποιείται ανεξάρτητο datum που βασίζεται στη ΜΣΘ (ορθομετρικά υψόμετρα). Ως τρίτη διάσταση λοιπόν για τις επίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) χρησιμοποιείται το ορθομετρικό (H) υψόμετρο, ενώ για τις γεωδαιτικές συντεταγμένες μπορεί να χρησιμοποιηθεί ορθομετρικό ή γεωμετρικό (h) υψόμετρο.

Η τυπική διαδικασία μετασχηματισμού μεταξύ των διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων και μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναφοράς φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Οριζόντια απεικονίζονται δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς A και B, ενώ τα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων απεικονίζονται σε στήλες. Η μετάβαση από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο περιλαμβάνει έναν ή και περισσότερους από τους παρακάτω μετασχηματισμούς ως επιμέρους βήματα.



Σχήμα 2.1 Γενική παρουσίαση των μετασχηματισμών μεταξύ συστημάτων αναφοράς

Figure 2.1 General layout of coordinate transformations

Οι μετασχηματισμοί (1), (2) και (3) αναφέρονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς και καλύπτονται στην επόμενη ενότητα.

Ο μετασχηματισμός (4) είναι ο κυριότερος τρόπος να μεταβούμε από ένα datum σε ένα άλλο. Η σχετική διαδικασία περιγράφεται στην Ενότητα 2.2.3.

Ο μετασχηματισμός (5) μετατρέπει τις γεωδαιτικές συντεταγμένες ενός συστήματος αναφοράς σε γεωδαιτικές συντεταγμένες στο άλλο σύστημα αναφοράς και μπορεί να γίνει με τους τύπους του Molodensky. Αποτελεί απλούστευση του προηγούμενου μετασχηματισμού και έχει λιγότερη ακρίβεια.

Η απευθείας μετάβαση (6) από επίπεδες προβολικές συντεταγμένες σε ένα σύστημα αναφοράς σε επίπεδες προβολικές στο άλλο σύστημα αναφοράς αποτελεί την απλούστερη μέθοδο μετασχηματισμού μεταξύ συστημάτων αναφοράς. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί όμως μόνο για μικρού εύρους περιοχές καθώς η ακρίβεια του μετασχηματισμού είναι αρκετά μειωμένη.

## 2.2.2 Μετατροπές συστημάτων συντεταγμένων

Η μετάβαση από γεωδαιτικές ελλειψοειδείς συντεταγμένες σε τρισδιάστατες καρτεσιανές και το αντίστροφο, είναι μια εύκολη διαδικασία που βασίζεται σε σχετικά απλές μαθηματικές σχέσεις.

Η μετατροπή από ελλειψοειδείς σε καρτεσιανές συντεταγμένες γίνεται μέσω των σχέσεων:

$$X = (N + h) \cos \phi \cos \lambda \quad (2.1)$$

$$Y = (N + h) \cos \phi \sin \lambda \quad (2.2)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \phi \quad (2.3)$$

όπου  $N$  η ακτίνα καμπυλότητας της κύριας καθέτου τομής στο σημείο και  $e$  η κύρια εκκεντρότητα, παράμετροι γνωστοί από τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς.

Η αντίστροφη διαδικασία γίνεται με τη βοήθεια των σχέσεων



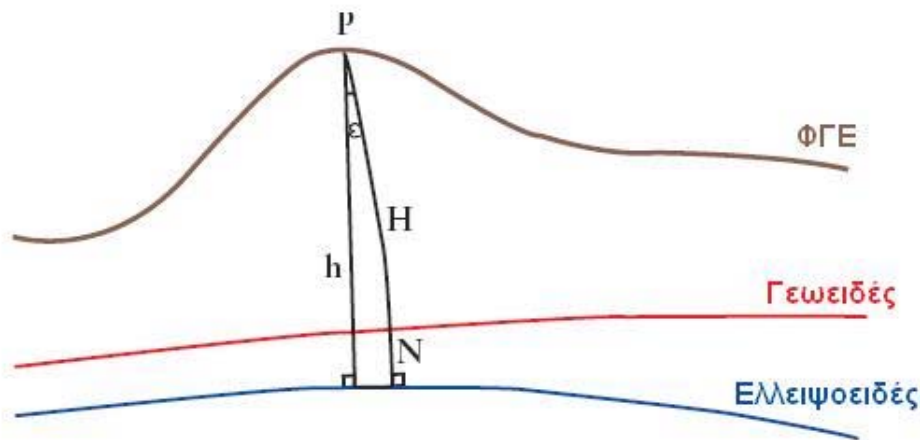
$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (2.4)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{Z + e^2 N \sin \phi}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \quad (2.5)$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \phi} - N \quad (2.6)$$

Προκειμένου να υπολογιστεί το γεωδαιτικό πλάτος  $\phi$  πρέπει να γίνουν διαδοχικές προσεγγίσεις θεωρώντας ένα αρχικό  $\phi_0$ . Ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια και επιλέγεται έτσι ώστε το τελικό  $\phi_n$  να μη διαφέρει από το  $\phi_{n-1}$  της προηγούμενης επανάληψης περισσότερο από μια καθορισμένη ποσότητα  $d$ .

Η μετατροπή ορθομετρικών υψομέτρων σε γεωμετρικά υψόμετρα και το αντίστροφο απαιτεί τη γνώση της αποχής του γεωειδούς από το ελλειψοειδές  $N$ . Η σχέση μεταξύ των δύο υψομέτρων φαίνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 Ορθομετρικό και γεωμετρικό υψόμετρο ενός σημείου P

Figure 2.2 Orthometric and geometric height of a point P

Η γωνία  $\varepsilon$  που σχηματίζεται από την κατακόρυφο και την κάθετο είναι πολύ μικρή και έτσι μπορούμε να πούμε ότι ισχύει:

$$h = H + N \quad (2.7)$$

Συνήθως τα ορθομετρικά υψόμετρα είναι γνωστά από χωροσταθμήσεις. Σήμερα όμως με το σύστημα GPS μετράμε γεωμετρικά υψόμετρα και καθώς μας ενδιαφέρει η μετατροπή τους σε ορθομετρικά, είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός του  $N$ , ή σε πολλές



περιπτώσεις του  $\Delta N$ , της διαφοράς δηλαδή της αποχής του γεωειδούς από σημείο σε σημείο (κλίση γεωειδούς).

Η μετάβαση από γεωδαιτικές συντ/νες σε επίπεδες προβολικές και το αντίστροφο είναι μια διαδικασία διαφορετική για κάθε προβολικό σύστημα και εξαρτάται από τις σχέσεις ορισμού και τις ιδιότητες της κάθε προβολής. Γενικά χρησιμοποιούνται κάποιες σχέσεις της μορφής:

$$x = F_x(\phi, \lambda) \quad (2.8)$$

$$y = F_y(\phi, \lambda) \quad (2.9)$$

και για την αντίστροφη διαδικασία:

$$\phi = F_\phi(x, y) \quad (2.10)$$

$$\lambda = F_\lambda(x, y) \quad (2.11)$$

Είναι συνηθισμένο σε αρκετά προβολικά συστήματα να μην χρησιμοποιούνται οι απόλυτες τιμές των  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $x$ ,  $y$  αλλά σχετικές τιμές τους ως προς κάποιον κεντρικό μεσημβρινό, μέσο μεσημβρινό, βασικό παράλληλο, κέντρο προβολής (όπως στο προβολικό σύστημα Hatt).

### 2.2.3 Γενική διαδικασία μετασχηματισμού συστημάτων αναφοράς

Βασικό στοιχείο κατά τον ορισμό ενός γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς είναι η αποδοχή ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και η θέση του κέντρου του ως προς το γεωκεντρικό ή γήινο ελλειψοειδές. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένα τοπικό ΓΣΑ χρησιμοποιεί ένα ελλειψοειδές, παράλληλα μετατοπισμένο προς το γήινο, έτσι ώστε να προσαρμόζεται καλύτερα στο γεωειδές της περιοχής χρήσης.

Με βάση τα παραπάνω, ένα τοπικό και ένα παγκόσμιο σύστημα αναφοράς είναι δύο παράλληλα συστήματα που μπορούν εύκολα να συνδεθούν μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες μπορούμε να συνδέσουμε δύο τέτοια συστήματα μέσω της σχέσης:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{I \rightarrow II} \quad (2.12)$$

όπου I ένα παγκόσμιο και II ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς. Όπως φαίνεται από τον παραπάνω τύπο, η μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο γίνεται με μια απλή μετάθεση.

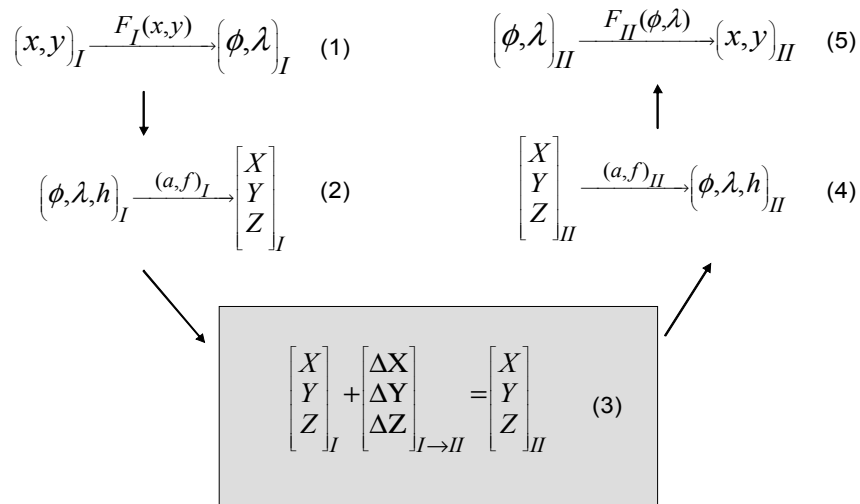
Σε περίπτωση που το διάνυσμα μετάθεσης  $[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]$  δεν είναι γνωστό μπορεί να προσδιοριστεί αν υπάρχουν οι συντεταγμένες ενός κοινού σημείου και στα δύο συστήματα. Έστω P το σημείο αυτό. Τότε:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{I \rightarrow II} = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_{II} - \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_I \quad (2.13)$$

Συμπερασματικά, οι μετασχηματισμοί μεταξύ συστημάτων αναφοράς γίνονται μέσω τρισδιάστατων καρτεσιανών συντεταγμένων. Στην περίπτωση που απαιτείται να μετατραπούν επίπεδες προβολικές ή γεωδαιτικές συντεταγμένες από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο, τότε ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία (βλ Σχήμα 2.3):

- Οι επίπεδες προβολικές συντεταγμένες του πρώτου συστήματος μετατρέπονται σε γεωδαιτικές σύμφωνα με τις μαθηματικές σχέσεις του προβολικού συστήματος που χρησιμοποιεί το πρώτο σύστημα αναφοράς (1).
- Στη συνέχεια μετατρέπονται οι γεωδαιτικές συντεταγμένες σε τρισδιάστατες καρτεσιανές με βάση τα στοιχεία του ελλειψοειδούς που χρησιμοποιείται από το πρώτο σύστημα αναφοράς (2).
- Με γνωστό το διάνυσμα μετάθεσης από το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, γίνεται ο μετασχηματισμός μεταξύ των δύο συστημάτων αναφοράς (3).
- Τέλος, οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες στο δεύτερο σύστημα αναφοράς μετατρέπονται πρώτα σε γεωδαιτικές και μετά σε επίπεδες προβολικές, σύμφωνα με τα στοιχεία του δεύτερου συστήματος αναφοράς (γεωμετρία ελλειψοειδούς και μαθηματικές σχέσεις προβολικού συστήματος) (4) και (5).

Στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο επίπεδες προβολικές συντεταγμένες και για μικρά υψόμετρα, μπορεί να θεωρηθεί ότι  $h=0$  και να αγνοηθεί τελείως η τρίτη διάσταση, χωρίς να δημιουργείται πρόβλημα στον υπολογισμό των γεωδαιτικών  $(\varphi, \lambda)$  (Iliffe 2000).



Σχήμα 2.3 Διάγραμμα ροής για τη γενική διαδικασία μετασχηματισμού συστημάτων αναφοράς

Figure 2.3 Flow chart for the general transformation process between geodetic coordinate systems

### 2.3 Σφάλματα υλοποίησης συστημάτων αναφοράς και επιπτώσεις στη διαδικασία μετασχηματισμού τους

Στο στάδιο ορισμού του, ένα γεωδαιτικό datum, όπως το ΕΓΣΑ 87 ή το ΠΕΣΑ, επιλέγεται έτσι ώστε να είναι παράλληλο με ένα παγκόσμιο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς. Θεωρητικά, αυτό σημαίνει ότι καθένα από τα παραπάνω συστήματα θα πρέπει να συνδέεται με τα υπόλοιπα αποκλειστικά με κάποιο διάνυσμα μετάθεσης. Στο στάδιο υλοποίησης όμως ενός γεωδαιτικού datum υπεισέρχονται διάφορα σφάλματα:

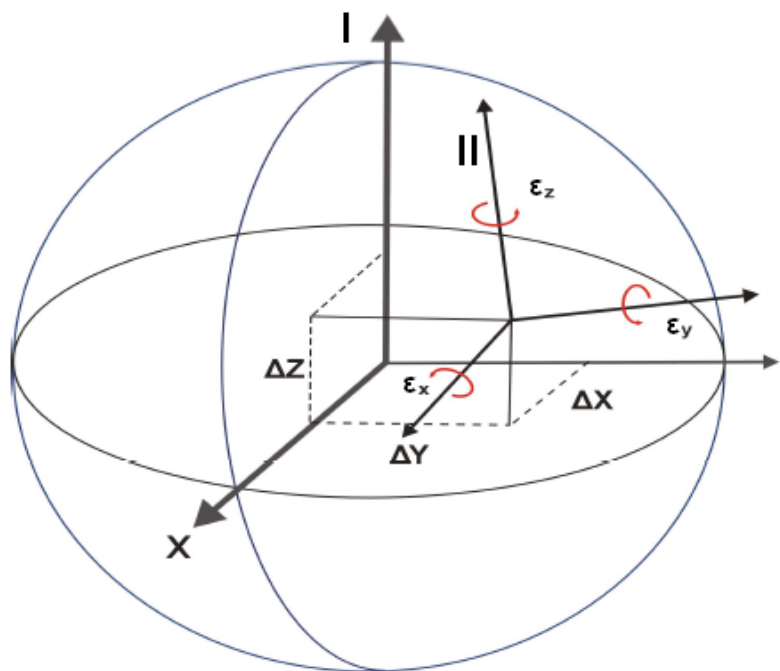
- Ο προσανατολισμός του γεωδαιτικού datum κατά τη φάση σχεδιασμού του δεν μπορεί να είναι απόλυτα ακριβής. Σήμερα ο προσανατολισμός γίνεται με δορυφορικές μεθόδους αλλά παλαιότερα χρησιμοποιούνταν συμβατικές μέθοδοι όπως αστρονομικές παρατηρήσεις και τα σφάλματα προσανατολισμού ήταν αρκετά μεγαλύτερα.
- Η υλοποίηση του γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς γίνεται με γεωδαιτικές μετρήσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχει μια αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης των βασικών τριγωνομετρικών σημείων του δικτύου.

Επίσης, με την πάροδο του χρόνου υπεισέρχονται σφάλματα στην υλοποίηση των συστημάτων αναφοράς λόγω τεκτονικών μετακινήσεων.

Η παρουσία των παραπάνω σφαλμάτων στην υλοποίηση δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς καθιστά το μετασχηματισμό μεταξύ τους μία πιο σύνθετη διαδικασία, δεδομένου ότι τα δύο συστήματα, ανάλογα με την εφαρμογή, δεν μπορούν τώρα να θεωρηθούν παράλληλα. Ουσιαστικά δεν μπορεί να υπάρξει κάποιος μετασχηματισμός που να μετατρέπει ακριβώς συντεταγμένες από το ένα σύστημα στο άλλο. Γενικά όμως όσο καλύτερη είναι η ποιότητα των γεωδαιτικών δικτύων τόσο πιο εύκολο είναι να κατασκευαστεί ένα ακριβές μοντέλο μετασχηματισμού, το οποίο μπορεί να έχει εφαρμογή σε κάποια περιοχή.

Η αντιμετώπιση του προβλήματος γίνεται αρχικά με την εισαγωγή κάποιων συμπληρωματικών παραμέτρων μετασχηματισμού:

- τρεις μικρές στροφές ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ) μία για κάθε άξονα
- μια παραμόρφωση κλίμακας ( $k$ ) ειδικά στα συστήματα αναφοράς που έχουν οριστεί με συμβατικές μεθόδους



Σχήμα 2.4 Στροφές και αλλαγές κλίμακας μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς (I) και (II)

Figure 2.4 Rotations and scale factors between two geodetic datums (I) and (II)

Είναι αναμενόμενο οι παραμορφώσεις σε ένα γεωδαιτικό δίκτυο να είναι μεγαλύτερες στα άκρα του, επειδή όσο μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των κορυφών του δικτύου, τόσο αυξάνεται και το σχετικό σφάλμα μεταξύ τους. Σε μια μικρή περιοχή τα σφάλματα εμφανίζουν μεγαλύτερη συσχέτιση και μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν υπάρχουν παραμορφώσεις. Επομένως, για να αντιμετωπισθούν τα σφάλματα υλοποίησης των γεωδαιτικών δικτύων είναι γενικά καλύτερο να γίνεται ο μετασχηματισμός σε μια μικρή περιοχή. Είναι φανερό ότι οι παράμετροι του μετασχηματισμού θα είναι κατάλληλες μόνο για την περιοχή μελέτης και ότι για άλλες περιοχές θα πρέπει να υπολογισθούν διαφορετικές παράμετροι.

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα μετασχηματισμών τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν και που ανάλογα με την περιοχή μπορεί να είναι τρισδιάστατα ή δισδιάστατα. Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου εξαρτάται από παράγοντες, όπως τα χαρακτηριστικά των δύο γεωδαιτικών datum, μεταξύ των οποίων θα γίνει ο μετασχηματισμός, το μέγεθος της περιοχής που θα εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός, το πλήθος των κοινών σημείων και την ακρίβεια που απαιτείται.

#### **2.4 Προσδιορισμός παραμέτρων μετασχηματισμού με τη MET**

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού χρειάζεται να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες κάποιων σημείων και στα δύο συστήματα αναφοράς. Ανάλογα με το μετασχηματισμό απαιτούνται κατ' ελάχιστον συνήθως 2-4 κοινά σημεία.

Στην περίπτωση που οι παράμετροι μετασχηματισμού προκύπτουν από τα ελάχιστα απαιτούμενα σημεία, θα δοθεί μοναδική λύση για τις παραμέτρους μετασχηματισμού, για τις οποίες δεν θα υπολογιστούν μέτρα της ποιότητάς τους. Ο μετασχηματισμός θα αντιστοιχίσει τέλεια τα κοινά σημεία, ενώ θα παράγει σημαντικά εσφαλμένα αποτελέσματα όταν χρησιμοποιηθεί αλλού.

Η αντιμετώπιση του προβλήματος γίνεται με την εισαγωγή πλεονάζουσας πληροφορίας (περισσότερα από τα απαιτούμενα σημεία) και τη συνόρθωση των παρατηρήσεων με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων. Με τη χρήση περισσότερων σημείων και την ύπαρξη βαθμού ελευθερίας μπορούν να υπολογιστούν υπόλοιπα και τυπικά σφάλματα για τον έλεγχο της ποιότητας του μετασχηματισμού.

Ακόμα όμως και με τη χρήση κάποιων παραπάνω κοινών σημείων ο μετασχηματισμός ενδέχεται να μη δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Με λίγα επιπλέον σημεία τα υπόλοιπα τείνουν να είναι μικρότερα από τα πραγματικά και ο μετασχηματισμός γίνεται υπεραισιόδοξος, Επομένως είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται μεγάλος αριθμός κοινών σημείων για τη συνόρθωση, όποτε βέβαια αυτό είναι εφικτό. Αρκεί τα διατιθέμενα σημεία να μη βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις από τα όρια της περιοχής ενδιαφέροντος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

#### 3.1 Γενικά

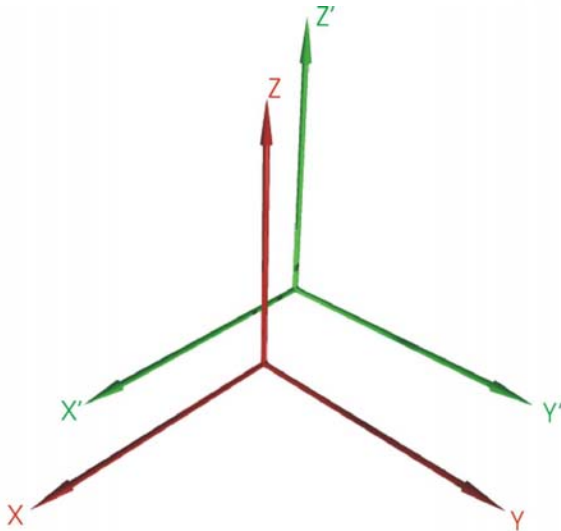
Η μετάβαση από ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο γίνεται γενικά με τις γεωκεντρικές καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω ενός μετασχηματισμού στις τρεις διαστάσεις. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να εφαρμοσθεί σε ένα μικρό τοπικό δίκτυο, για να συνδέσει πχ παλαιότερες με νεότερες μετρήσεις σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, αλλά και σε δίκτυα μεγαλύτερης κλίμακας. Τρισδιάστατοι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για τη μετάβαση από εθνικά δίκτυα σε παγκόσμια (πχ από ΕΓΣΑ 87 σε WGS 84), ακόμα και για τη σύνδεση δύο παγκοσμίων συστημάτων αναφοράς.

Υπάρχουν αρκετοί τρισδιάστατοι μετασχηματισμοί που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με την εφαρμογή:

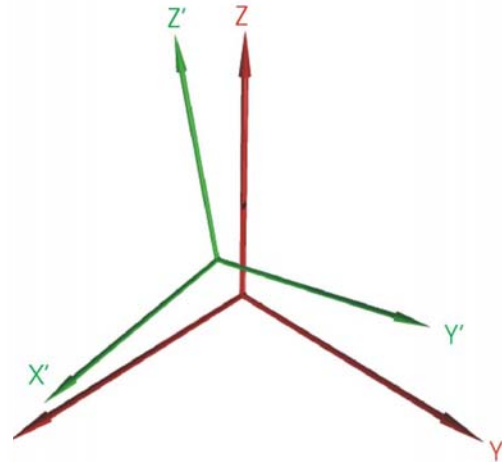
- ο μετασχηματισμός τριών παραμέτρων εφαρμόζει ένα διάνυσμα μετάθεσης  $[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]$ .
- ο μετασχηματισμός τεσσάρων παραμέτρων χρησιμοποιεί το προηγούμενο διάνυσμα μετάθεσης και μία παράμετρο κλίμακας.
- ο μετασχηματισμός έξι παραμέτρων χρησιμοποιεί το διάνυσμα μετάθεσης και τρεις παραμέτρους στροφής γύρω από τους άξονες X, Y και Z.
- ο μετασχηματισμός επτά παραμέτρων ή μετασχηματισμός Helmert χρησιμοποιεί το διάνυσμα μετάθεσης, τρεις στροφές και ένα συντελεστή κλίμακας.
- ο μετασχηματισμός εννέα παραμέτρων χρησιμοποιεί το διάνυσμα μετάθεσης, τις τρεις στροφές και τρεις συντελεστές κλίμακας, έναν για κάθε άξονα.

Ο απλός μετασχηματισμός μέσω ενός διανύσματος μετάθεσης (μετασχηματισμός τριών παραμέτρων) δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα και δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί

για αποστάσεις μεγαλύτερες των 200 m (Iliffe, 2000) Τη συνηθέστερη επιλογή για το μετασχηματισμό καρτεσιανών συντεταγμένων αποτελεί ο τρισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας επτά παραμέτρων, ο οποίος και θα περιγραφεί στη συνέχεια.



Σχήμα 3.1 Ο μετασχηματισμός τριών παραμέτρων  
Figure 3.1 three-parameter transformation



Σχήμα 3.2 Ο μετασχηματισμός επτά παραμέτρων  
Figure 3.2 seven-parameter transformation

## 3.2 Ο μετασχηματισμός επτά παραμέτρων

### 3.2.1 Γενικά

Η γενική μορφή του μετασχηματισμού Helmert είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{II} = kR \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{I \rightarrow II} \quad (3.1)$$

όπου  $k$  ο συντελεστής κλίμακας ανάμεσα στα δύο συστήματα και  $R$  ένας πίνακας στροφής που περιέχει τις γωνίες στροφής για κάθε άξονα:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$



Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του μετασχηματισμού απαιτούνται τουλάχιστον τρία κοινά σημεία. Στην πράξη όμως χρειάζονται περισσότερα έτσι ώστε να γίνει αξιολόγηση της ακρίβειας του μετασχηματισμού.

### 3.2.2 Το μοντέλο Bursa-Wolf

Στο προηγούμενο μοντέλο του μετασχηματισμού μπορεί να αντικατασταθεί ο συντελεστής κλίμακας  $k$  με έναν διορθωτικό συντελεστή κλίμακας  $(1+k)$ . Για στροφές της τάξης των μερικών δευτερολέπτων τόξου μπορούμε να θεωρήσουμε επιπλέον ότι η επίδραση του συντελεστή κλίμακας στις διορθωτικές ποσότητες είναι αμελητέα. Ο μετασχηματισμός τότε παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} 1+k & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1+k & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{I \rightarrow II} \quad (3.3)$$

Το μοντέλο αυτό του μετασχηματισμού ονομάζεται και μοντέλο Bursa-Wolf. Το μειονέκτημα του παραπάνω μοντέλου είναι ότι υπάρχει μεγάλη συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων μετάθεσης και των στροφών, ιδιαίτερα όταν ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε τοπικά δίκτυα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι στροφές εφαρμόζονται ως προς το κέντρο του ελλειψοειδούς αναφοράς που χρησιμοποιείται, το οποίο βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τα σημεία του τοπικού δικτύου. Στροφές αυτού του μεγέθους έχουν παρόμοιο αποτέλεσμα με τις μεταθέσεις με αποτέλεσμα οι παράμετροι μετάθεσης που θα παράγει το μοντέλο να μην αντιπροσωπεύουν τις πραγματικές. Για τους λόγους αυτούς, το μοντέλο είναι καταλληλότερο για μετασχηματισμούς μεταξύ δικτύων μεγάλης κλίμακας, παγκόσμιων ή και εθνικών.

### 3.2.3 Το μοντέλο Molodensky-Badekas

Τα προβλήματα του προηγούμενου μοντέλου παρακάμπτονται αν ο μετασχηματισμός εφαρμοσθεί ως προς ένα άλλο σημείο αντί για το κέντρο του ελλειψοειδούς. Αυτό το σημείο είναι συνήθως το κέντρο βάρους της περιοχής που θα γίνει ο μετασχηματισμός. Συμβολίζοντας το σημείο αυτό με  $[X_0, Y_0, Z_0]$ , ο μετασχηματισμός παίρνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} 1+k & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1+k & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-X_0 \\ Y-Y_0 \\ Z-Z_0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{I \rightarrow II} \quad (3.4)$$

Το μοντέλο αυτό είναι θεωρητικά παρόμοιο με το μοντέλο Bursa-Wolf και παράγει τα ανάλογα αποτελέσματα.

### 3.2.4 Ο μικτός μετασχηματισμός επτά παραμέτρων

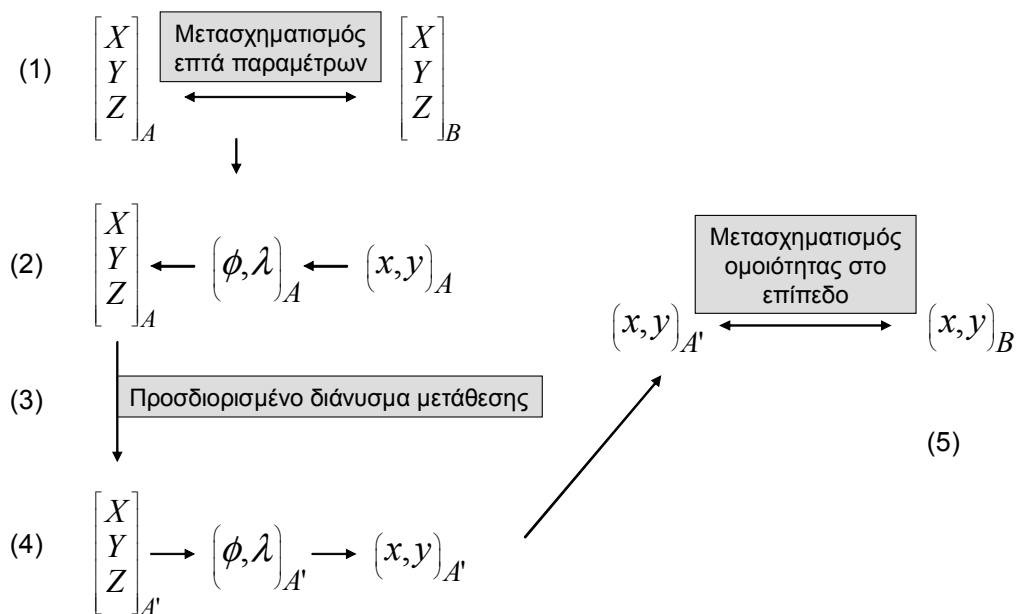
Ο μετασχηματισμός αυτός χρησιμοποιείται προκειμένου να αρθούν οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί σε εφαρμογές περιορισμένης κλίμακας. Ο μετασχηματισμός αυτός εφαρμόζει δύο επιμέρους μετασχηματισμούς. Ο πρώτος εξ' αυτών πραγματοποιείται στον τρισδιάστατο χώρο, για τον υπολογισμό του διανύσματος μετάθεσης μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς. Μετά τον πρώτο μετασχηματισμό δημιουργείται ένα μεταβατικό σύστημα αναφοράς, το οποίο είναι παράλληλα μετατεθειμένο ως προς το πρώτο σύστημα αναφοράς. Ο δεύτερος μετασχηματισμός πραγματοποιείται στο προβολικό επίπεδο και συνδέει το μεταβατικό σύστημα με το δεύτερο σύστημα, χρησιμοποιώντας παραμέτρους μετάθεσης, στροφής και κλίμακας.

Τα επιμέρους βήματα του μετασχηματισμού παρουσιάζονται στη συνέχεια:

(Έστω A το πρώτο σύστημα αναφοράς, A' το μεταβατικό σύστημα και B το δεύτερο σύστημα αναφοράς).

- Αρχικά εκτελείται μετασχηματισμός επτά παραμέτρων προκειμένου να υπολογιστούν προσεγγιστικές τιμές για τις συνιστώσες του διανύσματος μετάθεσης μεταξύ των δύο συστημάτων στο χώρο. Οι τιμές αυτές είναι προσεγγιστικές με ακρίβεια της τάξεως των λίγων μέτρων ως επί το πλείστον λόγω της αποχής του γεωειδούς N που είναι γνωστή με ακρίβεια το πολύ 0.5 m.
- Από τις προβολικές συντεταγμένες και τα υψόμετρα των σημείων στο σύστημα αναφοράς A υπολογίζονται οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες και από αυτές οι γεωκεντρικές καρτεσιανές συντεταγμένες στο ίδιο datum. Οι τιμές αυτές έχουν και πάλι ακρίβεια λίγων μέτρων λόγω της αβεβαιότητας στην αποχή του γεωειδούς.

- Με το διάνυσμα μετάθεσης που έχει υπολογιστεί εκτελείται μετάθεση από τις γεωκεντρικές καρτεσιανές συντ/νες των σημείων του συστήματος A σε αυτές του μεταβατικού συστήματος A'.
- Από τις υπολογισθείσες στο προηγούμενο βήμα συντεταγμένες στο σύστημα A', υπολογίζονται οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες και από αυτές οι προβολικές συντεταγμένες, μέσω των μαθηματικών σχέσεων της προβολής που χρησιμοποιείται για το σύστημα B.
- Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υπολογισθείσες προβολικές συντεταγμένες στο σύστημα A' μαζί με τις αντίστοιχες στο σύστημα B εκτιμώνται με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων οι παράμετροι ενός μετασχηματισμού ομοιότητας. Ο μετασχηματισμός αυτός αποκαθιστά τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων στο μεταβατικό σύστημα και στο σύστημα B και περιλαμβάνει πλέον τη στροφή μεταξύ τους στο προβολικό επίπεδο, κλίμακα και υπολειπόμενη μετάθεση επίσης στο προβολικό επίπεδο.



Σχήμα 3.3 Διάγραμμα ροής για το μικτό μετασχηματισμό επτά παραμέτρων

Figure 3.3 Flow chart for the mixed seven-parameter transformation

Η εφαρμογή του τρισδιάστατου μετασχηματισμού ομοιότητας κατά την παραπάνω διαδικασία έχει το πλεονέκτημα ότι εξασφαλίζει την ανεξαρτησία των παραμέτρων

μετάθεσης από τις παραμέτρους στροφής που δημιουργούν τα προβλήματα που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 3.2.2.

### **3.3 Προϋποθέσεις εφαρμογής του μετασχηματισμού επτά παραμέτρων**

Ο μετασχηματισμός επτά παραμέτρων χρησιμοποιείται ευρέως για τη μετάβαση από δορυφορικά δίκτυα GPS σε τοπικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων που θα παράγει ο μετασχηματισμός εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες όπως η ακρίβεια των γνωστών σημείων, η γνώση του γεωειδούς, η έκταση της περιοχής που θα εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός και οι απαιτήσεις ακρίβειας.

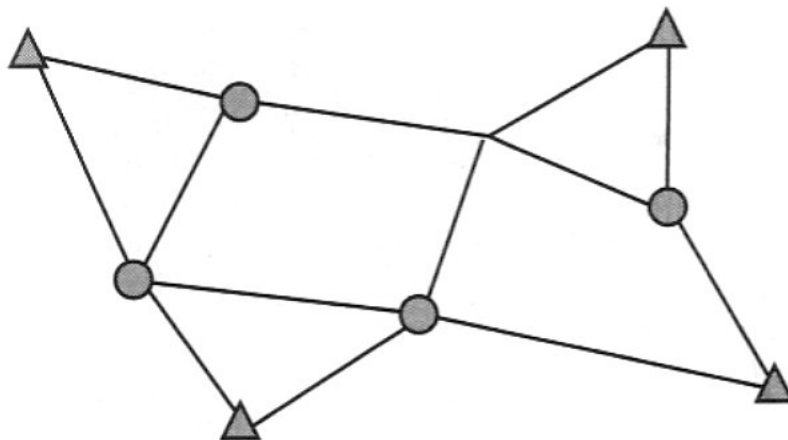
Ένα βασικό πρόβλημα κατά την εφαρμογή του τρισδιάστατου μετασχηματισμού ομοιότητας είναι ότι η ακρίβεια των γεωμετρικών υψομέτρων σε σχέση με την ακρίβεια των οριζοντιογραφικών συντεταγμένων είναι μειωμένη, γεγονός που οφείλεται στην ελλiptή γνώση της αποχής του γεωειδούς. Αυτή η αβεβαιότητα στα υψόμετρα επηρεάζει την αποτελεσματικότητα του μετασχηματισμού στην μετατροπή των υψομέτρων, μπορεί ωστόσο να επηρεάσει και τη διαδικασία του μετασχηματισμού στο σύνολό της. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι μία αβεβαιότητα της τάξης των 1-2 m στον προσδιορισμό των γεωμετρικών υψομέτρων θα έχει ως αποτέλεσμα μια ακρίβεια μετασχηματισμού υψομέτρων 1-2 m χωρίς να προκύπτει ουσιαστική επίδραση στις οριζοντιογραφικές συντεταγμένες. Αβεβαιότητες όμως της τάξης των 20 m μπορεί να έχουν σοβαρό αντίκτυπο τόσο στα υψόμετρα όσο και στις οριζοντιογραφικές συντεταγμένες (Iliffe 2000).

Επιπρόσθετα, υπάρχει η περίπτωση να είναι εντελώς άγνωστα τα υψόμετρα του γεωειδούς στην περιοχή εφαρμογής του μετασχηματισμού. Μια λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι η θεώρηση ότι τα γεωμετρικά υψόμετρα ταυτίζονται με τα ορθομετρικά, η αποχή του γεωειδούς δηλαδή είναι μηδέν. Τα σφάλματα από τη θεώρηση αυτή εξαρτώνται από το μέγεθος της περιοχής και τη σχέση του γεωειδούς με το ελλειψοειδές στην περιοχή. Έχει διαπιστωθεί ότι ο μετασχηματισμός επτά παραμέτρων μπορεί να εφαρμοσθεί με ικανοποιητική ακρίβεια όταν το γεωειδές είναι παράλληλο με το ελλειψοειδές. Ακόμα και όταν η επιφάνεια του γεωειδούς έχει σταθερή κλίση ως προς την επιφάνεια του ελλειψοειδούς, οι παράμετροι στροφής του μετασχηματισμού

μπορούν να προσαρμοστούν σε αυτήν την κλίση. Ο μετασχηματισμός δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστος όμως όταν το γεωειδές παρουσιάζει ανωμαλίες.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων είναι σκόπιμο να γίνεται διαίρεση της περιοχής σε μικρότερες και εφαρμογή του μετασχηματισμού σε κάθε μία ξεχωριστά. Μία εναλλακτική αντιμετώπιση είναι να χρησιμοποιηθεί ένας δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας και για το μετασχηματισμό των υψομέτρων να χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική μέθοδος, όπως μία βέλτιστη προσαρμογή επιφάνειας σε συνδυασμό με μια κατάλληλη μέθοδο παρεμβολής.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι χρειάζεται μεγάλος αριθμός κοινών σημείων στα δύο δίκτυα και ότι πρέπει να υπάρχει καλή κατανομή των σημείων αυτών. Τα κοινά σημεία δηλαδή πρέπει να είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα και να περικλείουν την περιοχή εφαρμογής του μετασχηματισμού. Μία τέτοια ικανοποιητική κατανομή φαίνεται στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4 Παράδειγμα καλής κατανομής των κοινών σημείων στο δίκτυο (τα κοινά σημεία συμβολίζονται με τρίγωνα)

Figure 3.4 Example of acceptable distribution of common points in the network (common points are indicated by triangles)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

### ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

#### 4.1 Γενικά

Σε αντίθεση με τους τρισδιάστατους μετασχηματισμούς, οι οποίοι γίνονται στο χώρο χρησιμοποιώντας γεωκεντρικές καρτεσιανές συντεταγμένες, η διαδικασία επίπεδων μετασχηματισμών υλοποιείται στο προβολικό επίπεδο μεταξύ των δισδιάστατων προβολικών συντεταγμένων δύο συστημάτων αναφοράς.

Η χρήση ενός επίπεδου μετασχηματισμού μπορεί να είναι επιθυμητή για λόγους απλότητας, καθώς προβολικές συντεταγμένες μπορούν να μετασχηματιστούν κατευθείαν χωρίς να χρειάζεται η μετατροπή τους σε γεωδαιτικές ή γεωκεντρικές καρτεσιανές. Ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι ότι πληροφορίες για το προβολικό σύστημα ή στοιχεία ορισμού του ΓΣΑ, τα οποία χρειάζονται για την μετατροπή δεν είναι διαθέσιμα. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν θέλουμε να μετασχηματίσουμε σημεία από ένα χάρτη ή ένα παλιό διάγραμμα. Προφανώς είναι αναγκαίο να υπάρχουν κοινά σημεία στο χάρτη και στο νέο σύστημα αναφοράς.

Ωστόσο, σημειώνεται ότι ένας απλός επίπεδος μετασχηματισμός μπορεί να μην έχει πάντα ικανοποιητικά αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει επειδή μερικά προβολικά συστήματα είναι τόσο διαφορετικά που δεν συσχετίζονται εύκολα μεταξύ τους. Ένας χονδρικός έλεγχος για τη συμβατότητα δύο προβολικών συστημάτων μπορεί να γίνει με την παρατήρηση του συντελεστή κλίμακας και των μεταβολών του από περιοχή σε περιοχή. Αν οι συντελεστές κλίμακας των δύο προβολικών συστημάτων είναι παρόμοιοι στις ίδιες περιοχές του χάρτη, τότε η γεωμετρία των δύο συστημάτων είναι παρόμοια και ένας επίπεδος μετασχηματισμός ενδέχεται να είναι αποδοτικός.

Σε περίπτωση που θέλουμε να αντλήσουμε πληροφορίες από χάρτες, προσοχή θα πρέπει να δοθεί στην ποιότητα των δεδομένων, ιδιαίτερα για χάρτες μικρής κλίμακας. Εκτός από τα σφάλματα των σημείων του χάρτη που προέρχονται από γεωδαιτικές μετρήσεις, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη σφάλματα από τη χαρτογραφική γενίκευση, την ψηφιοποίηση των δεδομένων, αλλά και σφάλματα εκτύπωσης και παραμόρφωσης του χαρτιού.

Όπως έχει τονιστεί ήδη και στους τρισδιάστατους μετασχηματισμούς, πρέπει να υπάρχει πλήθος κοινών σημείων ανάμεσα στα δύο δίκτυα και καλή κατανομή των σημείων αυτών. Κατ' αντιστοιχία και στους επίπεδους μετασχηματισμούς, αν σε ορισμένες περιοχές του χάρτη δεν υπάρχουν κοινά σημεία, τότε είναι πολύ πιθανό εκεί να μη λειτουργεί σωστά ο μετασχηματισμός. Τέλος, επισημαίνεται ότι η εφαρμογή επίπεδων μετασχηματισμών δεν προϋποθέτει τη γνώση υψομέτρων στα κοινά σημεία.

## 4.2 Επίπεδοι μετασχηματισμοί

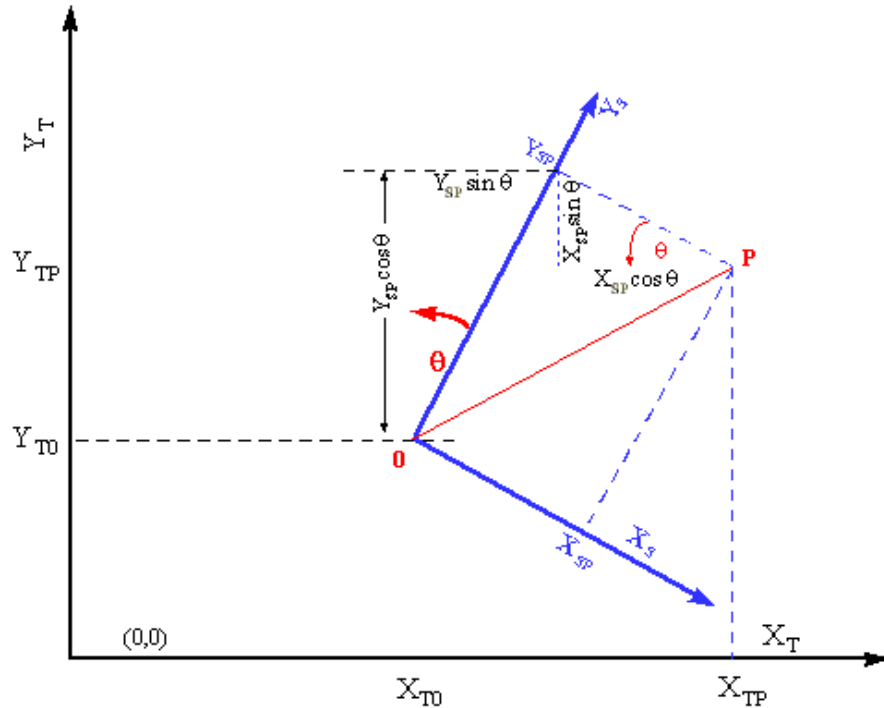
### 4.2.1 Μετασχηματισμός ομοιότητας

Πρόκειται για την εφαρμογή του τρισδιάστατου μετασχηματισμού Helmert στο επίπεδο. Ο δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας περιλαμβάνει τέσσερις παραμέτρους: δύο μεταθέσεις (κατά τον άξονα X και τον άξονα Y), μία γωνία στροφής από τον άξονα X και ενιαίο συντελεστή κλίμακας.

Συμβολίζοντας με  $(x,y)$  τις συντεταγμένες ενός σημείου πριν τον μετασχηματισμό και με  $(X,Y)$  τις συντ/νες του σημείου μετά τον μετασχηματισμό, το μοντέλο του μετασχηματισμού είναι:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

όπου  $D_x$ ,  $D_y$  οι δύο μεταθέσεις,  $\theta$  η γωνία στροφής και  $k$  ο συντελεστής κλίμακας. Ο πίνακας που περιέχει τις στροφές λέγεται πίνακας στροφής και μπορεί να συμβολιστεί με  $R$ .



Σχήμα 4.1 Δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας

Figure 4.1 Two dimensional similarity transformation

Ο μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί και σε γραμμική μορφή με τις παρακάτω σχέσεις:

$$X = ax - by + c \quad (4.2)$$

$$Y = bx + ay + d \quad (4.3)$$

Στην προηγούμενη μορφή του μετασχηματισμού, οι μεταβλητές  $c$  και  $d$  εκφράζουν τη μετάθεση κατά  $X$  και κατά  $Y$  αντίστοιχα, ενώ οι παράμετροι στροφής και κλίμακας προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.4)$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.5)$$

Ο μετασχηματισμός μπορεί να απλουστευθεί περαιτέρω θεωρώντας ότι για πολύ μικρές στροφές ισχύει:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$



Αντικαθιστώντας ακόμα τον συντελεστή κλίμακας  $k$  με τον διορθωτικό συντελεστή κλίμακας  $(1+k)$ , η σχέση γίνεται:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k & \theta \\ -\theta & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ο δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας είναι ιδιαίτερα απλός μετασχηματισμός και απαιτούνται μόνο δύο σημεία για να προσδιορισθούν οι παράμετροί του. Ο μετασχηματισμός μεταβάλλει τη θέση, τον προσανατολισμό και το μέγεθος των αντικειμένων αλλά διατηρεί το σχήμα τους, έχει δηλαδή την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την εσωτερική γεωμετρία του δικτύου που μετασχηματίζεται. Η ιδιότητά του αυτή χαρακτηρίζει και τις σύμμορφες προβολές και για αυτό το λόγο είναι συχνή η εφαρμογή του μετασχηματισμού σε αυτές τις προβολές. Μία διαφορετική εφαρμογή του, με βάση πάλι την ιδιότητα του να διατηρεί το σχήμα του δικτύου, είναι στη σύγκριση της γεωμετρίας δύο διαφορετικών δικτύων, ελέγχοντας τα υπόλοιπα και το τυπικό σφάλμα μετά τη συνόρθωση.

#### 4.2.2 Αφινικός μετασχηματισμός

Ο αφινικός μετασχηματισμός, ή ομοπαράλληλος, περιγράφεται από έξι παραμέτρους: δύο μεταθέσεις  $D_x$ ,  $D_y$  δύο γωνίες στροφής  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  γύρω από τους άξονες  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, και δύο συντελεστές κλίμακας  $k_x$ ,  $k_y$ , έναν για κάθε άξονα.

Η γενική σχέση του μετασχηματισμού είναι:

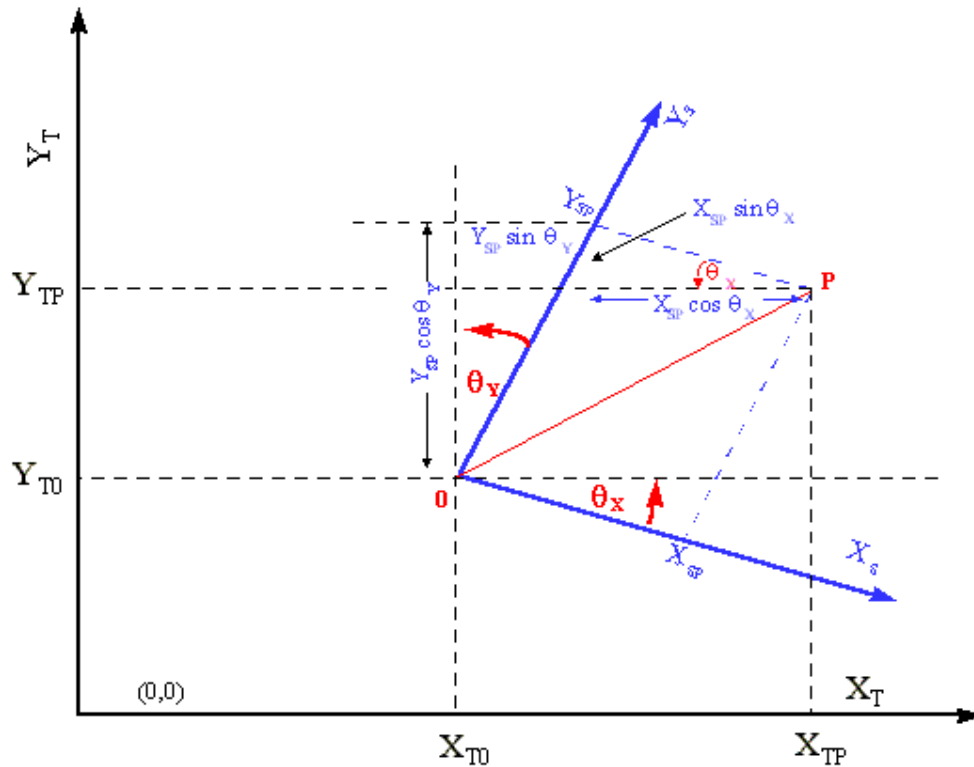
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \sin \theta_y \\ -\sin \theta_x & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Και σε γραμμική μορφή:

$$X = ax + by + c \quad (4.9)$$

$$Y = dx + ey + f \quad (4.10)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις οι μεταθέσεις εκφράζονται από τις μεταβλητές  $c$  και  $f$ .



Σχήμα 4.2 Αφινικός μετασχηματισμός

Figure 4.2 Affine transformation

Οι υπόλοιπες παράμετροι του μετασχηματισμού προσδιορίζονται ως εξής:

$$\theta_x = \arctan\left(\frac{-d}{a}\right) \quad (4.11)$$

$$\theta_y = \arctan\left(\frac{-b}{e}\right) \quad (4.12)$$

$$k_x = \sqrt{a^2 + d^2} \quad (4.13)$$

$$k_y = \sqrt{b^2 + e^2} \quad (4.14)$$

Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους μετασχηματισμούς στο επίπεδο. Δεν διατηρεί τις ορθές γωνίες, αλλά διατηρεί τις γραμμές και την παραλληλία μεταξύ τους. Το πλεονέκτημα του μετασχηματισμού είναι ότι μπορεί να εκτελέσει διαφορετικές διορθώσεις σε κάθε διεύθυνση. Μπορεί ακόμα να διορθώνει παραμορφώσεις ανάμεσα σε δίκτυα που οφείλονται σε αλλαγές του datum και του προβολικού συστήματος. Οι παραπάνω ιδιότητες του τον καθιστούν κατάλληλο για να χρησιμοποιηθεί σε παλιούς τοπογραφικούς χάρτες που περιέχουν παραμορφώσεις.

Εκτός από την Τοπογραφία βρίσκει πολλές εφαρμογές στη Χαρτογραφία, στα GIS και στη φωτογραμμετρία. Για τον προσδιορισμό των έξι παραμέτρων του αφινικού μετασχηματισμού απαιτούνται τουλάχιστον τρία σημεία.

#### 4.2.3 Πολυωνυμικός μετασχηματισμός

Οι πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί είναι δισδιάστατοι μετασχηματισμοί που αποτελούνται από σχετικά απλές εξισώσεις και χρησιμοποιούν πολυώνυμα 1<sup>ου</sup>, 2<sup>ου</sup> ή υψηλότερου βαθμού. Η απλούστερη μορφή πολυωνυμικού μετασχηματισμού είναι η ακόλουθη:

$$X = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy \quad (4.15)$$

$$Y = B_0 + B_1x + B_2y + B_3xy \quad (4.16)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός έχει οκτώ άγνωστες παραμέτρους και καλείται και προβολικός. Αν χρησιμοποιηθεί πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού τότε οι άγνωστες παράμετροι γίνονται δώδεκα και ο μετασχηματισμός παίρνει τη μορφή:

$$X = A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4y^2 + A_5xy \quad (4.17)$$

$$Y = B_0 + B_1x + B_2y + B_3x^2 + B_4y^2 + B_5xy \quad (4.18)$$

Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του τελευταίου μετασχηματισμού απαιτούνται έξι κοινά σημεία ενώ οι ανάγκες για κοινά σημεία αυξάνονται με τον βαθμό του πολυωνύμου που χρησιμοποιείται.

Οι πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί είναι πολύ εύκολοι στην εφαρμογή τους και μπορούν να περιγράψουν πολλά είδη παραμορφώσεων. Για το λόγο αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις που ένας μετασχηματισμός ομοιότητας ή ένας αφινικός δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Παρόλα αυτά χρειάζεται προσοχή στη χρήση αυτών των μετασχηματισμών επειδή μπορούν να εισάγουν επιπλέον παραμορφώσεις στο μοντέλο και να μην παράγουν αξιόπιστα αποτελέσματα. Για να αποφευχθεί μια τέτοια κατάσταση, είναι σημαντικό να υπάρχουν πολλά κοινά σημεία με καλή κατανομή στο δίκτυο.

Εν γένει είναι επιθυμητό να χρησιμοποιούνται πολυώνυμα μικρού βαθμού, να είναι δηλαδή το μοντέλο όσο το δυνατόν απλούστερο. Όταν όμως σε σπάνιες περιπτώσεις χρειάζεται να αντιμετωπιστούν πιο πολύπλοκες παραμορφώσεις, μπορούν να

χρησιμοποιηθούν και πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί υψηλότερου βαθμού. Αν και πάλι η λύση δεν ικανοποιεί θα πρέπει να ακολουθηθεί μια διαφορετική στρατηγική, όπως περαιτέρω διαχωρισμός της περιοχής μελέτης.

Στον ελληνικό χώρο, πολυώνυμα μετατροπής συντεταγμένων έχουν χρησιμοποιηθεί για τη σύνδεση του συστήματος Hatt με το σύστημα ΕΓΣΑ 87. Με τη συνεργασία της ΓΥΣ και των εργαστηρίων Ανώτερης Γεωδαισίας και Κέντρου Δορυφόρων Διονύσου του ΕΜΠ έχουν προσδιορισθεί ξεχωριστοί συντελεστές πολυωνύμων 2<sup>ου</sup> βαθμού για κάθε φύλλο χάρτου 1:100000 της Hatt. Τα πολυώνυμα μετατροπής αυτά δεν έχουν όμως ικανοποιητική ακρίβεια για γεωδαιτικές εφαρμογές και χρησιμοποιούνται κυρίως για τη σύνδεση χαρτογραφικών εργασιών.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΕ ΕΡΓΑ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

#### 5.1 Γενικά

Όπως επισημαίνεται στην εισαγωγή, σε μεγάλο αριθμό εφαρμογών μηχανικού χρησιμοποιούνται περισσότερα από ένα συστήματα αναφοράς. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαία η εφαρμογή μετασχηματισμού συντεταγμένων στα σημεία ενδιαφέροντος (σημεία ελέγχου, κορυφές γεωδαιτικών δικτύων, κλπ) προκειμένου αυτά να εκφραστούν σε ενιαίο σύστημα αναφοράς.

Η υλοποίηση ενός μετασχηματισμού μπορεί να γίνει μέσω ενός αλγορίθμου που θα στοχεύει στον υπολογισμό των “βέλτιστων” παραμέτρων του, ανάλογα με τις ανάγκες του έργου. Ένα τέτοιο έργο μπορεί να καλύπτει μικρή έκταση έως μία περιοχή μήκους μερικών χιλιομέτρων, όπως στην περίπτωση ενός τμήματος δικτύου ή μιας σήραγγας κλπ. Τα σημεία όμως που θα χρησιμοποιηθούν στη συνόρθωση για τον υπολογισμό των παραμέτρων του μετασχηματισμού θα πρέπει αρχικά τουλάχιστον να καλύπτουν μεγαλύτερη έκταση από αυτή του έργου. Επίσης, είναι σκόπιμο ένας αριθμός σημείων να μη συμμετέχει στη συνόρθωση, προκειμένου να ελεγχθούν οι τελικές τιμές των παραμέτρων του μετασχηματισμού.

Σε αυτό το πλαίσιο, η δημιουργία ενός κατά το δυνατόν αυτοματοποιημένου αλγορίθμου μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι επιθυμητή λόγω της ανάγκης απόρριψης ή προσθήκης παρατηρήσεων στη συνόρθωση και της επανάληψης της διαδικασίας προσδιορισμού των παραμέτρων μετασχηματισμού. Ένας τέτοιος αλγόριθμος, προκειμένου να υπολογίσει το “βέλτιστο” συνδυασμό παραμέτρων, θα πρέπει να μπορεί να εκτελεί διαδοχικές συνορθώσεις, να αξιολογεί τα αποτελέσματα κάθε συνόρθωσης και να μπορεί να απορρίπτει κάποιες παρατηρήσεις βάσει κάποιου κριτηρίου.

Τέλος, η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού προϋποθέτει την επιλογή ενός μοντέλου (είδος μετασχηματισμού). Για έργα που αφορούν περιοχές μικρής κλίμακας, ένας απλός δισδιάστατος μετασχηματισμός μπορεί εν γένει να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα (Iliffe, 2005). Επιπρόσθετα, ένας δισδιάστατος μετασχηματισμός δεν απαιτεί τη γνώση του γεωμετρικών υψομέτρων στα σημεία που συμμετέχουν στον υπολογισμό των παραμέτρων, γεγονός που καθιστά ευκολότερη την εφαρμογή τους. Σε αυτήν την εργασία, από τους επίπεδους μετασχηματισμούς επιλέχθηκε ο δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας και ο αφινικός μετασχηματισμός.

## **5.2 Υλοποίηση μετασχηματισμών με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων**

### **5.2.1 Επιλογή της κατάλληλης μεθόδου συνόρθωσης**

Ο υπολογισμός των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς στηρίζεται στη χρήση σημείων γνωστών συντεταγμένων και στα δύο συστήματα. Προκειμένου οι παράμετροι μετασχηματισμού να είναι αξιόπιστοι, θα πρέπει το πλήθος των κοινών σημείων να είναι μεγαλύτερο από τα απολύτως αναγκαία. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (MET). Ειδικότερα, η MET μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μορφή των εμμέσων παρατηρήσεων ή η γενικευμένη μέθοδος συνόρθωσης.

Στην περίπτωση των εμμέσων παρατηρήσεων θεωρούνται άγνωστες όλες οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι του μοντέλου. Η μέθοδος εφαρμόζεται με το σχηματισμό εξισώσεων παρατήρησης που συνδέουν γραμμικά κάθε μέτρηση με τις άγνωστες καθοριστικές παραμέτρους. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου στο μοντέλο ενός μετασχηματισμού, οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι αποτελούνται από τις παραμέτρους του μετασχηματισμού (πχ τέσσερις παράμετροι για το μετασχηματισμό ομοιότητας στο επίπεδο, επτά για τον επταπαραμετρικό Helmert κλπ) και από τις τελικές συντεταγμένες των σημείων μετά το μετασχηματισμό. Αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες των σημείων στο “αρχικό” σύστημα αναφοράς δεν αντιμετωπίζονται ως παρατηρήσεις, αλλά θεωρούνται γνωστές χωρίς σφάλμα. Πρακτικά δηλαδή, αν θέλουμε να μεταβούμε από το σύστημα ΕΓΣΑ 87 στο σύστημα Hatt, η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων θα μας δώσει τις καλύτερες τιμές των παραμέτρων του μετασχηματισμού και των συντεταγμένων των σημείων στο σύστημα Hatt.

Η εφαρμογή της γενικευμένης μεθόδου συνόρθωσης μπορεί να θεωρηθεί εν γένει ορθότερη σε σχέση με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων, στην περίπτωση υπολογισμού παραμέτρων μετασχηματισμού. Ειδικότερα, η εφαρμογή της γενικευμένης μεθόδου υποθέτει ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι μετρήσεις και στα δύο συστήματα αναφοράς, που συνοδεύονται από κάποια ποσότητα σφάλματος. Η υπόθεση αυτή είναι πιο ρεαλιστική σε σχέση με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων, όπου οι συντεταγμένες στο ένα σύστημα αναφοράς θεωρούνται σταθερές ποσότητες. Ωστόσο, για λόγους πληρότητας, θα πρέπει να διευκρινισθεί ότι στη συγκεκριμένη εργασία η εφαρμογή του αλγόριθμου μετασχηματισμού αναφέρεται στα προβολικά συστήματα αναφοράς ΕΓΣΑ 87 και Hatt. Σε αυτήν την περίπτωση οι συντεταγμένες των τριγωνομετρικών σημείων στο σύστημα αναφοράς ΕΓΣΑ 87 “στηρίζονται” και σε συνορθώσεις που προηγήθηκαν της υλοποίησης του συστήματος ΕΓΣΑ 87. Υπό αυτήν την έννοια οι συντεταγμένες κοινών σημείων δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους – και ως εκ τούτου ενδεχομένως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος εμμέσων παρατηρήσεων. Ωστόσο, εν προκειμένω χρησιμοποιείται η γενικευμένη μέθοδος. Με τη μέθοδο αυτή οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι του μοντέλου που ενδιαφέρει να προσδιορισθούν (οι παράμετροι δηλαδή του μετασχηματισμού) παραμένουν σταθερές ενώ εισάγονται περισσότερα σημεία στο μοντέλο, αντίθετα με την προηγούμενη μέθοδο. Οι εξισώσεις παρατήρησης συνδέουν τώρα τις άγνωστες παραμέτρους με περισσότερα από ένα μετρημένα μεγέθη και όλες οι συντεταγμένες των σημείων (σε Hatt και σε ΕΓΣΑ) θεωρούνται ως μετρήσεις. Η συνόρθωση θα δώσει δηλαδή τις διορθωμένες συντεταγμένες των σημείων και στα δύο συστήματα.

### 5.2.2 Η γενικευμένη μέθοδος συνόρθωσης

Αν συμβολίσουμε με  $n$  το πλήθος των μετρημένων μεγεθών και  $m$  το πλήθος των αγνώστων ανεξάρτητων παραμέτρων, οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι που ενδιαφέρουν να υπολογιστούν μπορούν να εκφραστούν με  $m_0$ . Τότε ο βαθμός ελευθερίας δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$r = n - m \quad (5.1)$$

Ο αριθμός των εξισώσεων συνθήκης που θα σχηματιστούν θα είναι  $c$ , όπου:

$$c = r + m_0 \quad (5.2)$$

Το σύστημα των εξισώσεων συνθήκης σε μορφή πινάκων είναι:

$$A\hat{x} + B(l + v) = k \quad (5.3)$$

όπου:

- A ο πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων που ενδιαφέρουν ( $m_0$ ). Στην περίπτωση που οι εξισώσεις συνθήκης δεν είναι γραμμικές θα πρέπει να γίνει γραμμικοποίηση και ο πίνακας θα σχηματιστεί από τις μερικές παραγώγους ως προς τις παραμέτρους  $m_0$ . Οι διαστάσεις του πίνακα A θα είναι ( $c \times m_0$ ).
- $\hat{x}$  το διάνυσμα των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων  $m_0$ . Αν οι σχέσεις είναι μη γραμμικές τότε το διάνυσμα αντικαθίσταται με το  $\delta x$ , που αποτελείται από τις διορθώσεις για ένα διάνυσμα προσωρινών τιμών των παραμέτρων που ενδιαφέρουν  $x_0$ .
- B ο πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των μετρημένων μεγεθών, η στην περίπτωση των μη γραμμικών εξισώσεων τις μερικές παραγώγους ως προς τα μετρημένα μεγέθη. Ο πίνακας θα έχει διαστάσεις ( $c \times n$ ).
- l διάνυσμα που περιέχει τις μετρήσεις n.
- u διάνυσμα που περιέχει τα υπόλοιπα των μετρήσεων με διαστάσεις ( $n \times 1$ ).
- k διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους των εξισώσεων συνθήκης με διαστάσεις ( $c \times 1$ ).

Θέτοντας  $w = k - Bl$  η Σχέση 5.3 γίνεται:

$$A\hat{x} + Bv = w \quad (5.4)$$

Στη συνέχεια κατασκευάζεται ο πίνακας βαρών P των μετρημένων μεγεθών. Το διάνυσμα  $\hat{x}$  της λύσης θα υπολογιστεί από τον τύπο:

$$\hat{x} = \{A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} A\}^{-1} A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} w \quad (5.5)$$

Για απλοποίηση της σχέσης μπορεί να θεωρηθεί ότι:

$$P_a = (BP^{-1}B^T)^{-1} \quad (5.6)$$

$$N_a = A^T P_a A \quad (5.7)$$



Τότε η Σχέση 5.5 γίνεται:

$$\hat{x} = N_a^{-1} A^T P_a w \quad (5.8)$$

Υπενθυμίζεται ότι για μη γραμμικές σχέσεις ο παραπάνω τύπος θα υπολογίσει το διάνυσμα με τις διορθώσεις για τις προσωρινές τιμές δχ.

Η a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους  $\hat{\sigma}_0^2$  δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{w^T P_a w - \hat{x}^T N_a \hat{x}}{n - m} \quad (5.9)$$

η εναλλακτικά:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n - m} \quad (5.10)$$

Τα υπόλοιπα υ υπολογίζονται από τη Σχέση 5.11 και με την προσθήκη των υπολοίπων στο διάνυσμα των μετρήσεων προκύπτουν οι καλύτερες τιμές των μετρήσεων:

$$v = P^{-1} B^T P_a (w - A \hat{x}) \quad (5.11)$$

$$\hat{l} = l + v \quad (5.12)$$

Στη συνέχεια δίνονται οι σχέσεις υπολογισμού των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του διανύσματος  $\hat{x}$ , των καλύτερων τιμών των μετρήσεων  $\hat{l}$  και των υπολοίπων υ.

$$\hat{V}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N_a^{-1} \quad (5.13)$$

$$V_{\hat{l}} = \sigma_0^2 P^{-1} - \sigma_0^2 P^{-1} B^T P_a [I - A N_a^{-1} A^T P_a] B P^{-1} \quad (5.14)$$

$$\hat{V}_v = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} B^T P_a [I - A N_a^{-1} A^T P_a] B P^{-1} \quad (5.15)$$

### 5.2.3 Ανάπτυξη μοντέλου για το δισδιάστατο μετασχηματισμό ομοιότητας

Οι σχέσεις για το δισδιάστατο μετασχηματισμό ομοιότητας, όπως παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 4.2.1 φαίνονται παρακάτω:

$$X = ax - by + c \quad (5.16)$$

$$Y = bx + ay + d \quad (5.17)$$

Τα βασικά μεγέθη της συνόρθωσης  $n$ ,  $m$ ,  $m_0$ ,  $r$  και  $c$  για το μοντέλο του μετασχηματισμού εξαρτώνται από τον αριθμό των κοινών σημείων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνόρθωση. Αν συμβολιστεί με  $P_n$  ο αριθμός των σημείων τότε:

- τα μετρημένα μεγέθη θα είναι τέσσερα για κάθε σημείο (δύο συντεταγμένες στο ένα και δύο συντεταγμένες στο δεύτερο σύστημα αναφοράς), επομένως

$$n = 4P_n \quad (5.18)$$

- οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι που ενδιαφέρουν είναι οι τέσσερις παράμετροι του μετασχηματισμού ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ) και ο αριθμός τους δεν μεταβάλλεται με την προσθήκη ή αφαίρεση σημείων, επομένως

$$m_0 = 4 \quad (5.19)$$

- οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι είναι οι τέσσερις προηγούμενες συν δύο επιπλέον παραμέτρους ανά σημείο, επειδή δύο παράμετροι αρκούν για να προσδιορίσουν μονοσήμαντα ένα σημείο. Άρα

$$m = m_0 + 2P_n = 2P_n + 4 \quad (5.20)$$

- ο βαθμός ελευθερίας θα είναι

$$r = n - m = 2P_n - 4 \quad (5.21)$$

- ο αριθμός των εξισώσεων συνθήκης θα είναι

$$c = r + m_0 = 2P_n \quad (5.22)$$

Όπως φαίνεται και από την τελευταία σχέση, σε κάθε σημείο αντιστοιχούν δύο εξισώσεις συνθήκης. Αυτές έχουν τη ακόλουθη μορφή για κάθε σημείο  $i$ :

$$F_i(x_i, y_i, X_i, Y_i) : ax_i - by_i + c - X_i = 0 \quad (5.23)$$

$$G_i(x_i, y_i, X_i, Y_i) : bx_i + ay_i + d - Y_i = 0 \quad (5.24)$$

Ο πίνακας  $A$  θα αποτελείται από τους υποπίνακες  $A_i$  κάθε σημείου. Κάθε υποπίνακας  $A_i$  σχηματίζεται από τις μερικές παραγώγους των  $F_i$ ,  $G_i$  ως προς κάθε μία από τις παραμέτρους  $m_0$ :

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial a} & \frac{\partial F_i}{\partial b} & \frac{\partial F_i}{\partial c} & \frac{\partial F_i}{\partial d} \\ \frac{\partial G_i}{\partial a} & \frac{\partial G_i}{\partial b} & \frac{\partial G_i}{\partial c} & \frac{\partial G_i}{\partial d} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Μετά τους υπολογισμούς:

$$A_i = \begin{pmatrix} x_i & -y_i & 1 & 0 \\ y_i & x_i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Παρόμοια με τον πίνακα A, ο πίνακας B αποτελείται από τους υποπίνακες  $B_i$  για κάθε σημείο, οι οποίοι περιέχουν τις μερικές παραγώγους των  $F_i, G_i$  ως προς τα μετρημένα μεγέθη  $x, y, X, Y$ .

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & \frac{\partial F_i}{\partial y_i} & \frac{\partial F_i}{\partial X_i} & \frac{\partial F_i}{\partial Y_i} \\ \frac{\partial G_i}{\partial x_i} & \frac{\partial G_i}{\partial y_i} & \frac{\partial G_i}{\partial X_i} & \frac{\partial G_i}{\partial Y_i} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Μετά τους υπολογισμούς:

$$B_i = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 & -1 & 0 \\ b_0 & a_0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Όπου  $a_0, b_0$  προσωρινές τιμές. Το διάνυσμα  $w$  για κάθε σημείο θα είναι:

$$w_i = k - Bl = \begin{pmatrix} -c_0 \\ -d_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 x_i - b_0 y_i - X_i \\ b_0 x_i + a_0 y_i - Y_i \end{pmatrix}$$

$$w_i = \begin{pmatrix} X_i - (a_0 x_i - b_0 y_i + c_0) \\ Y_i - (b_0 x_i + a_0 y_i + d_0) \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Οι συνολικοί πίνακες A, B και το διάνυσμα  $w$  θα είναι:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{p_n} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{p_n} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{P_n} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

#### 5.2.4 Ανάπτυξη μοντέλου για τον αφινικό μετασχηματισμό

Όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού ομοιότητας, τα μεγέθη  $n$ ,  $m$ ,  $m_0$ ,  $r$  και  $c$  είναι συνάρτηση του αριθμού των κοινών σημείων που θα χρησιμοποιηθούν:

- οι μετρήσεις για κάθε σημείο θα είναι τέσσερις, επομένως

$$n = 4P_n \quad (5.33)$$

- οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι που ενδιαφέρουν θα είναι οι έξι παράμετροι του μετασχηματισμού ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ) και ο αριθμός τους παραμένει σταθερός.

$$m_0 = 6 \quad (5.34)$$

- οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι είναι οι έξι προηγούμενες συν δύο επιπλέον παραμέτρους ανά σημείο, επομένως

$$m = m_0 + 2P_n = 2P_n + 6 \quad (5.35)$$

- ο βαθμός ελευθερίας θα είναι

$$r = n - m = 2P_n - 6 \quad (5.36)$$

- ο αριθμός των εξισώσεων συνθήκης θα είναι

$$c = r + m_0 = 2P_n \quad (5.37)$$

Οι εξισώσεις συνθήκης θα έχουν τώρα τη μορφή:

$$F_i(x_i, y_i, X_i, Y_i) : ax_i + by_i + c - X_i = 0 \quad (5.38)$$

$$G_i(x_i, y_i, X_i, Y_i) : dx_i + ey_i + f - Y_i = 0 \quad (5.39)$$

Οι υποπίνακες  $A_i$  του πίνακα  $A$  θα σχηματίζονται από τις μερικές παραγώγους των  $F$ ,  $G$  ως προς κάθε μία από τις έξι παραμέτρους  $m_0$ :

$$A_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Οι υποπίνακες  $B_i$  του πίνακα  $B$  θα έχουν τώρα τη μορφή:

$$B_i = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & -1 & 0 \\ d_0 & e_0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Το διάνυσμα  $w$  για κάθε σημείο θα είναι:

$$w_i = \begin{pmatrix} X_i - (a_0x_i + b_0y_i + c_0) \\ Y_i - (d_0x_i + e_0y_i + f_0) \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Οι συνολικοί πίνακες  $A$ ,  $B$  και το διάνυσμα  $w$  θα σχηματιστούν όπως και στην προηγούμενη ενότητα.

### 5.2.5 Βοηθητικές διαδικασίες

Πριν από την εφαρμογή της διαδικασίας των μετασχηματισμών είναι επιθυμητό να γίνεται αναγωγή των συντεταγμένων ΕΓΣΑ εν προκειμένω ως προς το κέντρο βάρους της περιοχής. Αρχικά υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της περιοχής  $(x_{cg}, y_{cg})$  με την παρακάτω σχέση:

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{P_n} x_i}{P_n} \quad (5.43)$$

$$y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{P_n} y_i}{P_n}$$

Κατόπιν αφαιρούνται οι παραπάνω συντεταγμένες του κέντρου βάρους από τις συντεταγμένες ΕΓΣΑ όλων των σημείων. Η διαδικασία αυτή γίνεται για λόγους βελτιστοποίησης των υπολογισμών.

Πρέπει να επισημανθεί ωστόσο ότι το κέντρο βάρους της περιοχής δεν παραμένει σταθερό αν μεταβληθούν τα σημεία που συμμετέχουν στη συνόρθωση. Συνεπώς, λόγω του επαναληπτικού χαρακτήρα που έχει ο αλγόριθμος, ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους και η διαδικασία αναγωγής των συντεταγμένων θα πρέπει να επαναλαμβάνεται κάθε φορά που προσθέτουμε ή αφαιρούμε σημεία από τη συνόρθωση.

Επίσης, για την εφαρμογή της μεθόδου χρειάστηκαν προσωρινές τιμές των παραμέτρων του κάθε μετασχηματισμού. Αυτές υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τυχαία σημεία, δύο για το μετασχηματισμό ομοιότητας και τρία για τον αφινικό μετασχηματισμό. Τα γραμμικά συστήματα που προέκυψαν από τα παραπάνω σημεία επιλύθηκαν με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

### 5.3 Κριτήρια αξιολόγησης και στατιστικός έλεγχος αποτελεσμάτων

#### 5.3.1 Σημασία προϊόντων της MET

Ένα από τα βασικά προϊόντα της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων είναι ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων  $\hat{V}_{\hat{x}}$ . Ο πίνακας  $\hat{V}_{\hat{x}}$  περιέχει τις μεταβλητότητες των παραμέτρων του μετασχηματισμού και με βάση αυτές μπορεί να γίνει μια αρχική αξιολόγηση της συνόρθωσης. Επίσης, χρησιμοποιώντας τον πίνακα  $\hat{V}_{\hat{x}}$  μπορεί να γίνει ένας έλεγχος της στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων. Η διαδικασία αυτή αφορά τον υπολογισμό του λόγου  $t$  που ακολουθεί την κατανομή  $t$  για κάθε παράμετρο του μετασχηματισμού σύμφωνα με τη σχέση 5.44, και τη σύγκρισή του με την τιμή  $t$  για επίπεδο εμπιστοσύνης  $1-\alpha$  και βαθμό ελευθερίας  $r$ .

$$t = \frac{|\hat{x}_i|}{\hat{\sigma}_{\hat{x}_i}} \quad (5.44)$$

Αν ο λόγος  $t$  μιας παραμέτρου είναι μεγαλύτερος από την τιμή  $t$  για κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης, τότε η παράμετρος κρίνεται στατιστικά σημαντική για το υπόψη επίπεδο εμπιστοσύνης. Ανάλογα με τα αποτελέσματα αυτού του ελέγχου μπορεί να εξεταστεί αν είναι αναγκαίες κάποιες παράμετροι ή αν είναι καλύτερο να μεταβούμε σε ένα πιο απλό μοντέλο μετασχηματισμού (Ghilani, Wolf).

Η a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους  $\hat{\sigma}_0^2$ , η ορθότερα ο λόγος των a posteriori και a priori μεταβλητοτήτων  $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$  δείχνει πόσο ρεαλιστικό είναι το μαθηματικό μοντέλο που έχουμε χρησιμοποιήσει και πόσο αξιόπιστη είναι η λύση που έχει

υπολογιστεί. Κανονικά η *a posteriori* μεταβλητότητα πρέπει να είναι κοντά στην *a priori*, δηλαδή ο λόγος τους να ισούται περίπου με τη μονάδα.

Ο λόγος μπορεί να αποκλίνει από τη μονάδα για διάφορες αιτίες: τα τυπικά σφάλματα των μετρήσεων μπορεί να μην είναι ρεαλιστικά, το συναρτησιακό μοντέλο και οι μετρήσεις να περιέχουν χονδροειδή ή συστηματικά σφάλματα. Για να διαπιστωθεί αν η λύση είναι αξιόπιστη η όχι, γίνεται στατιστικός έλεγχος με βάση την κατανομή  $\chi^2$ . Αν ο στατιστικός έλεγχος δεν έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα και υπάρχουν καλοί λόγοι να πιστεύουμε ότι οι μετρήσεις και το συναρτησιακό μοντέλο είναι απαλλαγμένα χονδροειδών και συστηματικών λαθών, τότε μπορεί να επαναπροσδιορισθούν οι μεταβλητότητες των μετρήσεων σύμφωνα με τη σχέση 5.45 και να ενημερωθεί ο πίνακας βαρών.

$$\hat{V}_i = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} V_i \quad (5.45)$$

Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο πίνακας βαρών θα διορθωθεί μόνο κατά μέσο όρο. Δηλαδή αν πρέπει να δοθεί διαφορετικό βάρος σε μερικές μετρήσεις η διαδικασία αυτή δεν θα έχει καλά αποτελέσματα.

Τέλος, πολύ σημαντικά προϊόντα της συνόρθωσης είναι το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων και ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των υπολοίπων. Τα υπόλοιπα δείχνουν γενικά πόσο καλά προσαρμόζεται ο μετασχηματισμός σε ένα συγκεκριμένο δίκτυο σημείων. Επίσης, είναι ένας πολύ σημαντικός δείκτης της ποιότητας κάθε ξεχωριστής μέτρησης. Η χρήση των υπολοίπων για τον έλεγχο των μετρημένων σημείων περιγράφεται αναλυτικότερα στην επόμενη ενότητα.

### 5.3.2 Στατιστικοί έλεγχοι της συνόρθωσης

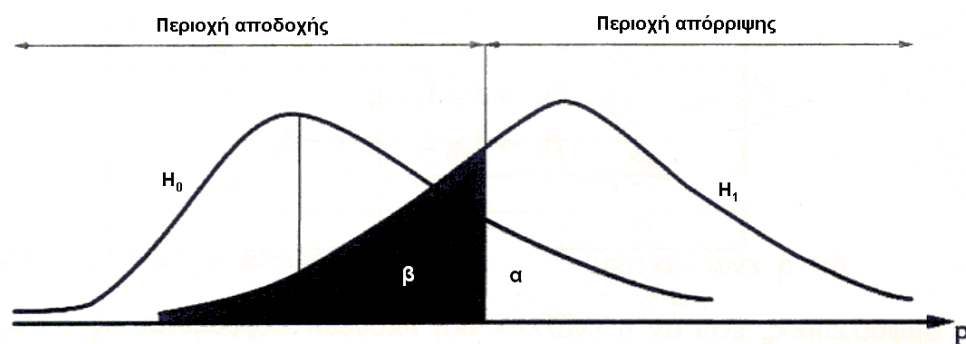
Ο όρος μηδενική υπόθεση ( $H_0$ ), αναφέρεται στην υπόθεση ότι ένα μέγεθος που προέρχεται από ένα δείγμα ενός πληθυσμού ανήκει πράγματι στον πληθυσμό αυτό. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί ότι το μέγεθος αυτό δεν ανήκει στον πληθυσμό, η μηδενική υπόθεση θα πρέπει να απορριφθεί έναντι μίας εναλλακτικής υπόθεσης ( $H_1$ ). Ο έλεγχος που εκτελείται για τη διαπίστωση της προέλευσης του μεγέθους ονομάζεται στατιστικός έλεγχος η στατιστικό τεστ (statistical test), ενώ το μέγεθος το οποίο υπόκειται στον στατιστικό έλεγχο καλείται στατιστικό μέγεθος ελέγχου (test statistic).

Επειδή η διαπίστωση της προέλευσης του μεγέθους δεν μπορεί να γίνει με απόλυτη βεβαιότητα, ένας στατιστικός έλεγχος δεν μπορεί να είναι ποτέ απολύτως αξιόπιστος. Σε έναν τέτοιο έλεγχο υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις:

- i. Να γίνει αποδεκτή η μηδενική υπόθεση  $H_0$  όταν αυτή ισχύει.
- ii. Να γίνει αποδεκτή η μηδενική υπόθεση  $H_0$  όταν αυτή δεν ισχύει.
- iii. Να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση  $H_0$  όταν αυτή δεν ισχύει.
- iv. Να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση  $H_0$  όταν αυτή ισχύει.

Οι περιπτώσεις i και iii αποτελούν τις σωστές αποφάσεις. Η περίπτωση ii αποτελεί λανθασμένη απόφαση και ονομάζεται λάθος τύπου I. Η περίπτωση iv αποτελεί επίσης λανθασμένη απόφαση και ονομάζεται λάθος τύπου II.

Η πιθανότητα να συμβεί λάθος τύπου I ισούται με  $\alpha$  και καλείται επίπεδο σημαντικότητας του τεστ. Η πιθανότητα να αποφύγουμε ένα λάθος τύπου I είναι τότε  $1-\alpha$ . Η τιμή του  $\alpha$  επιλέγεται συνήθως να είναι 0.05 ή 0.01, οπότε το επίπεδο σημαντικότητας του τεστ είναι αντίστοιχα 95% ή 99%. Η πιθανότητα να συμβεί λάθος τύπου II είναι ίση με  $\beta$  και καλείται ισχύς του ελέγχου. Οι πιθανότητες  $\beta$  ή  $1-\beta$  όμως προσδιορίζονται δυσκολότερα επειδή βασίζονται στην άγνωστη κατανομή της  $H_1$  (βλ Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1 Πιθανότητες για λάθη τύπου I και II

Figure 5.1 Probabilities for type I and type II errors

### 5.3.3 Η μέθοδος κανονικοποιημένου υπολοίπου του Baarda

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, τα υπόλοιπα των μετρήσεων είναι σημαντικοί δείκτες της ποιότητας της κάθε μέτρησης. Τα υπόλοιπα όμως από μόνα τους



δεν αποτελούν αξιόπιστη πληροφορία, επειδή κάθε υπόλοιπο χαρακτηρίζεται από διαφορετικό τυπικό σφάλμα και εκφράζεται επιπρόσθετα σε διαφορετικές μονάδες.

Η μέθοδος του κανονικοποιημένου υπολοίπου του Baarda βασίζεται στην εξέταση των κανονικοποιημένων υπολοίπων, μεγέθη που υπολογίζονται από το λόγο των υπολοίπων προς τα τυπικά τους σφάλματα.

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (5.46)$$

Όπου  $w_i$  το κανονικοποιημένο υπόλοιπο,  $v_i$  το υπόλοιπο κάθε παρατήρησης, και  $\sigma_{v_i}$  το τυπικό σφάλμα του υπολοίπου  $v_i$ , το οποίο βρίσκεται από τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των υπολοίπων  $\hat{V}_v$ .

Το μέγεθος  $w$  αποδεικνύεται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν υπολογιστεί με βάση την κανονική κατανομή μία τιμή του  $w$  για ένα συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας του τεστ, τότε σύμφωνα με τη μέθοδο του Baarda, τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα που ξεπερνούν την τιμή αυτή θεωρείται ότι ανήκουν σε μετρήσεις με χονδροειδή σφάλματα. Για παράδειγμα, αν θεωρηθεί ότι  $\alpha=0.01$ , δηλαδή για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, τιμές του  $w$  κάτω του ορίου του 2.576 γίνονται αποδεκτές.

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κατανομή  $t$ , θεωρώντας  $r-1$  βαθμό ελευθερίας, αν μεταβληθεί η Σχέση 5.46 πολλαπλασιάζοντας το τυπικό σφάλμα των υπολοίπων με το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους:

$$w_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_0 \sigma_{v_i}} \quad (5.47)$$

Σε ισοβαρείς παρατηρήσεις όμως και όταν οι αβεβαιότητες των μετρήσεων δεν είναι γνωστές, που είναι και αρκετά συνήθης περίπτωση, τότε χρησιμοποιείται η αρχική σχέση 5.46 με βάση την κατανομή  $t$  (Αγατζά-Μπαλοδήμου, 2005).

Πρακτικά, έχει διαπιστωθεί (Amer, 1979, Harvey, 1984) ότι και η τιμή 3.29 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για τον εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων στις παρατηρήσεις.

Παρόλο που η μέθοδος αυτή μπορεί να εντοπίσει χονδροειδή σφάλματα σε περισσότερες από μία μετρήσεις, ιδιαίτερα όταν ο βαθμός ελευθερίας είναι πολύ μεγάλος, είναι ορθότερο να απορρίπτεται μόνο το σημείο με το μεγαλύτερο κανονικοποιημένο υπόλοιπο κάθε φορά που εφαρμόζεται ο στατιστικός έλεγχος. Ο λόγος είναι ότι η εσφαλμένη μέτρηση είναι πολύ πιθανό να επηρεάζει αρνητικά και τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα των υπόλοιπων μετρήσεων και να εμφανίζουν και αυτά αυξημένες τιμές.

Επομένως, η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί είναι η εξής: Σε κάθε επανάληψη της συνόρθωσης υπολογίζονται τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα  $w_i$  τα οποία συγκρίνονται με τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του  $w$  για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Αν υπάρχουν μεγαλύτερες τιμές της επιτρεπόμενης, η παρατήρηση που εμφανίζει τη μέγιστη εξ αυτών απορρίπτεται από τη συνόρθωση. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την επανάληψη όπου όλα τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα θα είναι μικρότερα από την τεθείσα ανοχή.

Το πρόβλημα που ανακύπτει κατά την εφαρμογή της περιγραφείσας διαδικασίας στον αλγόριθμο μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι ότι οι παρατηρήσεις αναφέρονται σε συντεταγμένες σημείων, οπότε είναι αδύνατο να απορριφθεί μία μονάχα μέτρηση. Ειδικά στην περίπτωση της γενικευμένης μεθόδου συνόρθωσης οι παρατηρήσεις για κάθε σημείο είναι τέσσερις: δύο συντεταγμένες στο σύστημα ΕΓΣΑ και δύο στο σύστημα Hatt. Συμπερασματικά, θα πρέπει να εντοπιστούν σημεία που περιέχουν χονδροειδή σφάλματα και όχι μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Εκτός από τα υπόλοιπα που αφορούν κάθε συντεταγμένη χωριστά, μία εναλλακτική αντιμετώπιση θα ήταν η χρήση ενός “συνδυασμένου” υπολοίπου για κάθε σημείο σύμφωνα με τη Σχέση 5.48:

$$v_{Comb} = \frac{|v_{x_{ΕΓΣΑ}}| + |v_{y_{ΕΓΣΑ}}| + |v_{x_{Hatt}}| + |v_{y_{Hatt}}|}{4} \quad (5.48)$$

Για το παραπάνω συνδυασμένο υπόλοιπο θα πρέπει να υπολογιστεί και ένα συνδυασμένο τυπικό σφάλμα. Η Σχέση 5.49 προκύπτει με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης μεταβλητοτήτων στη Σχέση 5.48:

$$\sigma_{v_{Comb}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{v_{\text{ΕΓΣΑ}}} + \sigma^2_{v_{\text{ΕΓΣΑ}}} + \sigma^2_{v_{\text{Hatt}}} + \sigma^2_{v_{\text{Hatt}}}}{4}} \quad (5.49)$$

Με την εισαγωγή των παραπάνω μεγεθών στη Σχέση 5.46 μπορεί να υπολογιστεί το κανονικοποιημένο υπόλοιπο για κάθε σημείο και να διεξαχθεί ο στατιστικός έλεγχος για αυτήν την ποσότητα.

Ωστόσο, ενώ η ποσότητα αυτή μπορεί να περιγράψει συνολικά την ποιότητα κάθε σημείου, πρακτικά υπάρχουν προβλήματα στη χρήση της για το στατιστικό έλεγχο. Τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα των μετρήσεων είναι ποσότητες που αποδεδειγμένα ακολουθούν την κανονική κατανομή. Παρά το γεγονός ότι το κανονικοποιημένο συνδυασμένο υπόλοιπο αποτελείται από ένα συνδυασμό των ποσοτήτων αυτών δεν μπορεί ελεγχθεί και αυτό με βάση την κανονική κατανομή, επομένως δεν θα χρησιμοποιηθεί αυτή η μέθοδος.

Μία άλλη αντιμετώπιση του προβλήματος θα ήταν να χρησιμοποιηθούν τα αρχικά κανονικοποιημένα υπόλοιπα με βάση τη Σχέση 5.46 και να απορρίπτεται βάσει του στατιστικού ελέγχου σε κάθε επανάληψη η παρατήρηση που εμφανίζει το μεγαλύτερο χονδροειδές σφάλμα, μαζί με το σημείο στο οποίο ανήκει. Η διαδικασία αυτή είναι και εκείνη που θα εφαρμοσθεί τελικά στον αλγόριθμο.

#### 5.4 Αξιολόγηση με βάση τα σημεία ελέγχου

Μετά τον υπολογισμό των παραμέτρων του μετασχηματισμού, ο αλγόριθμος μπορεί να μετασχηματίζει συντεταγμένες σημείων στην περιοχή για την οποία έχουν προσδιορισθεί παράμετροι μετασχηματισμού. Ο έλεγχος των αποτελεσμάτων που θα παραχθούν αποτελεί και μια τελική αξιολόγηση του αλγορίθμου στο σύνολό του.

Για το σκοπό αυτό πρέπει να υπάρχουν κάποια σημεία ελέγχου, τα οποία να είναι γνωστά και στα δύο συστήματα αναφοράς και να μη συμμετέχουν στη συνόρθωση. Μόλις ολοκληρωθεί η συνόρθωση και προσδιοριστούν οι βέλτιστες παράμετροι του μετασχηματισμού, αυτές θα χρησιμοποιηθούν για τη μετατροπή των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου από το ένα σύστημα αναφοράς στο δεύτερο. Έχοντας ήδη τις συντεταγμένες Hatt των σημείων, όπως έχουν υπολογιστεί από τη ΓΥΣ, μπορούμε να

συγκρίνουμε τα δεδομένα και να υπολογίσουμε τις διαφορές των δύο συντεταγμένων Hatt.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{X_1}^{hatt} & \mathbf{v}_{Y_1}^{hatt} \\ \mathbf{v}_{X_2}^{hatt} & \mathbf{v}_{Y_2}^{hatt} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_{X_{Cp_n}}^{hatt} & \mathbf{v}_{Y_{Cp_n}}^{hatt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{alg} & Y_1^{alg} \\ X_2^{alg} & Y_2^{alg} \\ \vdots & \vdots \\ X_{Cp_n}^{alg} & Y_{Cp_n}^{alg} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1^{hatt} & Y_1^{hatt} \\ X_2^{hatt} & Y_2^{hatt} \\ \vdots & \vdots \\ X_{Cp_n}^{hatt} & Y_{Cp_n}^{hatt} \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Όπου  $Cp_n$  το πλήθος των σημείων ελέγχου,  $(X_i^{hatt}, Y_i^{hatt})$  οι υπάρχουσες συντεταγμένες Hatt από τη ΓΥΣ για το σημείο  $i$ ,  $(X_i^{alg}, Y_i^{alg})$  οι συντεταγμένες Hatt όπως προκύπτουν από τον αλγόριθμο και  $\mathbf{v}_i^{hatt}$  οι διαφορές τους.

Άλλο σημαντικό μέγεθος είναι ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των υπολογισθέντων συντεταγμένων Hatt μέσω του αλγορίθμου. Ο υπολογισμός του πίνακα θα γίνει με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης των μεταβλητοτήτων στις σχέσεις του μετασχηματισμού. Ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας για το σημείο ελέγχου  $i$  θα είναι ο  $\hat{V}_i$  και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{V}_i = J\hat{W}J^T \quad (5.51)$$

Ο  $J$  είναι ένας Ιακωβιανός πίνακας που περιέχει τις μερικές παραγώγους των σχέσεων του μετασχηματισμού ως προς όλες τις παραμέτρους που έχουν μεταβλητότητα. Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο ελέγχου δεν έχει μεταβλητότητα, ο  $J$  θα έχει διαστάσεις  $(2 \times m_0)$ , ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα έχει  $(2 \times (m_0+2))$ . Παράλληλα, ο πίνακας  $\hat{V}$  θα ισούται με τον πίνακα  $\hat{V}_{\hat{x}}$  αν δεχτούμε ότι το σημείο  $i$  δεν έχει μεταβλητότητα. Αλλιώς, θα αποτελείται από τον πίνακα  $\hat{V}_{\hat{x}}$  και από τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του σημείου στο αρχικό σύστημα αναφοράς. Ο πίνακας  $\hat{V}_i$  για κάθε σημείο ελέγχου δείχνει την ακρίβεια που αναμένεται να έχουν τα σημεία στα οποία θα εφαρμόσουμε τελικά τον αλγόριθμο.

Εφόσον μας ενδιαφέρει ο αλγόριθμος να παράγει ακριβή αποτελέσματα σε μία συγκεκριμένη περιοχή που θα έχει συγκεκριμένη έκταση και σχήμα, τα σημεία ελέγχου πρέπει να κατανέμονται ομαλά σε όλη την έκταση της περιοχής. Τότε χρησιμοποιώντας

τους παραπάνω δείκτες μπορούμε τελικά να συμπεράνουμε αν η ακρίβεια που απαιτείται για τις ανάγκες του έργου καλύπτεται από τον αλγόριθμο μετασχηματισμού.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

### ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

#### 6.1 Περιοχές εφαρμογής του αλγόριθμου

##### 6.1.1 Γενικά

Προκειμένου να ελεγχθούν τα αποτελέσματα που παράγει ο αλγόριθμος, έγινε επιλογή διαφορετικών ως προς τα χαρακτηριστικά τους περιοχών μελέτης – ειδικότερα, της περιοχής Λάρισας, του Καρπενησίου και της Ξάνθης. Η Λάρισα είναι πεδινή περιοχή και εμφανίζει καλή κατανομή των τριγωνομετρικών σημείων, ενώ οι περιοχές του Καρπενησίου και της Ξάνθης είναι ορεινές με ελαφρώς πιο αραιά τριγωνομετρικά σημεία και ενδεχομένως μειωμένης ποιότητας.

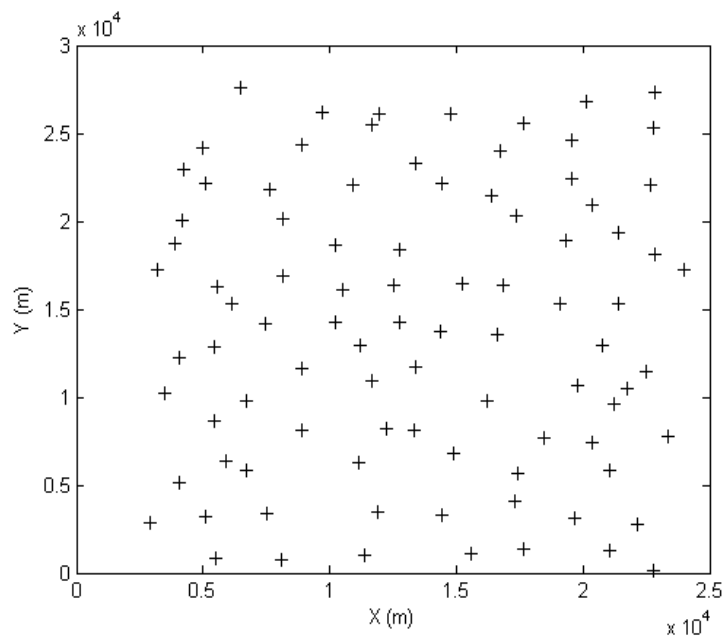
Στην περιοχή της Λάρισας εξετάστηκαν τα τέσσερα Φύλλα Χάρτη 1:50.000 που ανήκουν στο ομώνυμο Φύλλο Χάρτη 1:100.000 για την περιοχή. Στις άλλες περιοχές εξετάστηκαν τα Φ.Χ. 1:50.000 “Καρπενήσι” και “Ξάνθη”. Παρακάτω δίνονται στοιχεία για τον αριθμό και την κατανομή των τριγωνομετρικών σημείων των Φύλλων Χάρτη που εξετάστηκαν για κάθε περιοχή.

##### 6.1.2 Περιγραφή δεδομένων

Τα Φ.Χ. “Καρπενήσι” και “Ξάνθη” περιέχουν αντίστοιχα 99 και 108 τριγωνομετρικά σημεία. Για την περιοχή της Λάρισας υπάρχουν συνολικά 409 τριγωνομετρικά σημεία διαθέσιμα, τα οποία είναι διανεμημένα σε τέσσερα Φ.Χ. 1:50.000 και συνιστούν το Φ.Χ. “Λάρισα” 1:100.000 κατά την ακόλουθη διάταξη:

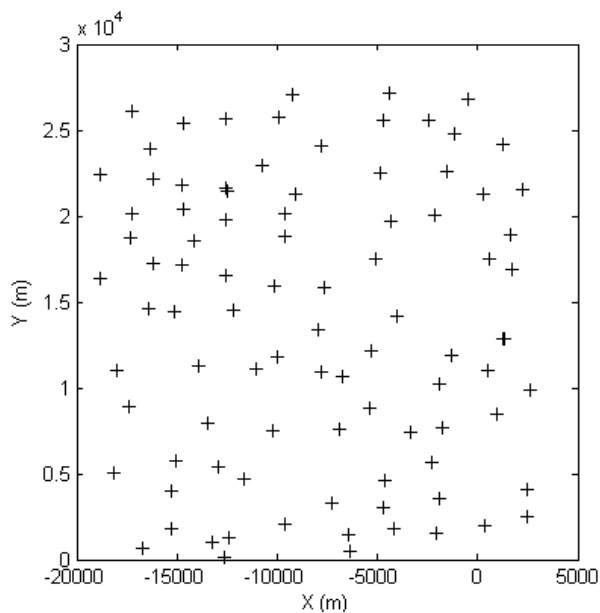
Φ.Χ. Ελασσών : 91 τριγωνομετρικά	Φ.Χ. Γόννοι : 103 τριγωνομετρικά
Φ.Χ. Φαρκάδων : 105 τριγωνομετρικά	Φ.Χ. Λάρισα : 110 τριγωνομετρικά

Στα Σχήματα 6.1 και 6.2 φαίνεται ενδεικτικά η κατανομή των σημείων σε συντεταγμένες Hatt στα Φ.Χ. “Ελασσών” και “Καρπενήσι”.



Σχήμα 6.1 Κατανομή σημείων στο Φ.Χ. Ελασσών

Figure 6.1 Point distribution at Elasson



Σχήμα 6.2 Κατανομή σημείων στο Φ.Χ. Καρπενήσι

Figure 6.2 Point distribution at Karpenisi

Για λόγους απλούστευσης και εξαιτίας του μεγάλου όγκου των δεδομένων δε θα γίνει αναλυτική παρουσίαση της εφαρμογής του αλγόριθμου σε όλα τα Φ.Χ. 1:50.000 κάθε

περιοχής. Θα παρουσιαστούν αποτελέσματα για τα Φ.Χ. “Ελασσών” και “Γόννοι” στην περιοχή της Λάρισας και για τα Φ.Χ. “Καρπενήσι” και “Ξάνθη”, ενώ ενδιάμεσα αποτελέσματα και διαγράμματα θα παρουσιαστούν ενδεικτικά για μία ή δύο περιοχές.

## 6.2 Προσδιορισμός παραμέτρων μετασχηματισμού και στατιστικός έλεγχος αποτελεσμάτων

### 6.2.1 Υπολογισμός αποτελεσμάτων για την πρώτη επανάληψη αλγορίθμου

Με εφαρμογή του αλγορίθμου για τον μετασχηματισμό ομοιότητας προκύπτουν οι τιμές των παραμέτρων του μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη που φαίνονται στον Πίνακα 6.1.

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
a	0.999818	1.000008	0.999693	1.000258
b	0.022774	0.017180	0.022295	-0.011088
c	13365.434	-8420.365	-8205.073	-7625.624
d	13836.857	13392.270	13756.737	-13809.114

Πίνακας 6.1 Παράμετροι του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη

Table 6.1 Parameters of the similarity transformation for the first iteration

Οι τιμές για την a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους και για το τυπικό σφάλμα  $\hat{\sigma}_0$  δίνονται στον πίνακα 6.2. Η a priori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους θεωρήθηκε ίση με τη μονάδα και χρησιμοποιήθηκε μοναδιαίος πίνακας βαρών.

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
$\hat{\sigma}_0^2$	0.020	0.010	0.037	0.003
$\hat{\sigma}_0$	0.140	0.100	0.192	0.054

Πίνακας 6.2 Τιμές των  $\hat{\sigma}_0^2$ ,  $\hat{\sigma}_0$  του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη

Table 6.2 Values of  $\hat{\sigma}_0^2$ ,  $\hat{\sigma}_0$  of the similarity transformation for the first iteration

Οι τιμές αυτές δείχνουν ότι ο λόγος  $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$  απέχει σημαντικά από τη μονάδα. Η πιθανότερη

αιτία είναι ότι οι αβεβαιότητες για κάθε μέτρηση δεν είναι γνωστές και ο πίνακας βαρών θεωρήθηκε εσφαλμένα μοναδιαίος. Σύμφωνα με τη Σχέση 5.45 προσδιορίζονται οι διορθωμένες αβεβαιότητες για κάθε μέτρηση και επαναλαμβάνεται η συνόρθωση. Τα νέα



αποτελέσματα μαζί με τις διορθωμένες αβεβαιότητες των μετρήσεων φαίνονται στον Πίνακα 6.3.

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
$\hat{\sigma}_0^2$	0.980	1.002	0.917	0.979
$\hat{\sigma}_0$	0.990	1.001	0.958	0.989
$\hat{\sigma}_l^2$	0.02	0.01	0.04	0.003

Πίνακας 6.3 Νέες τιμές των  $\hat{\sigma}_0^2$ ,  $\hat{\sigma}_0$  του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη  
Table 6.3 New values of  $\hat{\sigma}_0^2$ ,  $\hat{\sigma}_0$  of the similarity transformation for the first iteration

Παρατηρούμε ότι οι αβεβαιότητες αυτές μεταφράζονται σε τυπικά σφάλματα μετρήσεων της τάξης των 10-20 εκατοστών, τα οποία είναι αρκετά μεγάλα – ωστόσο μπορεί να είναι οριακά ρεαλιστικά για ορισμένα σημεία IV τάξης του τριγωνομετρικού δικτύου. Για το λόγο αυτό οι αβεβαιότητες των μετρήσεων και ο πίνακας βαρών θα διορθώνονται σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω διορθωμένες τιμές υπολογίστηκαν τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων του μετασχηματισμού (Πίνακας 6.4).

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
$\sigma_a$	0.00000208	0.00000140	0.00000272	0.00000078
$\sigma_b$	0.00000208	0.00000140	0.00000272	0.00000078
$\sigma_c$	0.021477	0.014373	0.028082	0.007585
$\sigma_d$	0.021477	0.014373	0.028082	0.007585

Πίνακας 6.4 Τυπικά σφάλματα των παραμέτρων του μετασχηματισμού ομοιότητας για την πρώτη επανάληψη  
Table 6.4 Standard errors of the parameters of the similarity transformation for the first iteration

Οι Πίνακες 6.5, 6.6, και 6.7 δείχνουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη.

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
a	0.999814	1.000011	0.999716	1.000262
b	-0.022771	-0.017174	-0.022291	0.011087
c	13365.434	-8420.365	-8205.073	-7625.624
d	0.022778	0.017189	0.022301	-0.011090
e	0.999821	1.000007	0.999680	1.000256
f	13836.857	13392.270	13756.737	-13809.114

Πίνακας 6.5 Παράμετροι του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη  
Table 6.5 Parameters of the affine transformation for the first iteration

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
$\hat{\sigma}_0^2$	0.961	1.006	0.934	0.926
$\hat{\sigma}_0$	0.980	1.003	0.967	0.962
$\hat{\sigma}_l^2$	0.02	0.008	0.03	0.003

Πίνακας 6.6 Νέες τιμές των  $\hat{\sigma}_0^2$ ,  $\hat{\sigma}_0$  του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη

Table 6.6 New values of  $\hat{\sigma}_n^2$ ,  $\hat{\sigma}_n$  of the affine transformation for the first iteration

	Λάρισα			
	Ελασσών	Γόννοι	Καρπενήσι	Ξάνθη
$\sigma_a$	0.00000335	0.00000210	0.00000388	0.00000129
$\sigma_b$	0.00000261	0.00000165	0.00000302	0.00000095
$\sigma_c$	0.021269	0.013279	0.024553	0.007380
$\sigma_d$	0.00000335	0.00000210	0.00000388	0.00000129
$\sigma_e$	0.00000261	0.00000165	0.00000302	0.00000095
$\sigma_f$	0.021269	0.013279	0.024553	0.007380

Πίνακας 6.7 Τυπικά σφάλματα των παραμέτρων του αφινικού μετασχηματισμού για την πρώτη επανάληψη

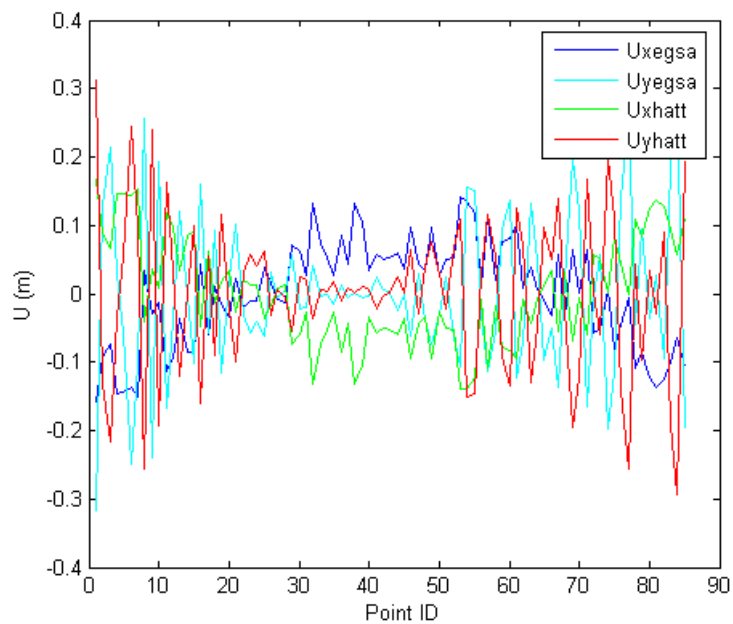
Table 6.7 Standard errors of the parameters of the affine transformation for the first iteration

Ένα πρώτο σχόλιο για τις προσωρινές αυτές τιμές είναι ότι τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων και των μετρήσεων είναι μικρότερα στην περιοχή της Ξάνθης. Ακολουθούν οι περιοχές της “Λάρισας”, “Γόννοι” και “Ελασσών”, ενώ μεγαλύτερες τιμές εμφανίζονται στο Φ.Χ. “Καρπενήσι”. Επίσης φαίνεται ότι οι παράμετροι του μετασχηματισμού ομοιότητας έχουν γενικά μικρότερη αβεβαιότητα από αυτές του αφινικού μετασχηματισμού.

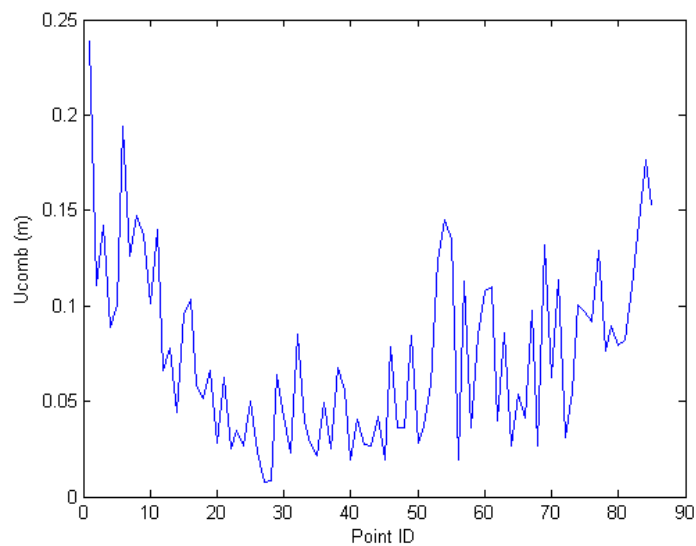
## 6.2.2 Μελέτη υπολογισμένων διαφορών

### 6.2.2.α Μετασχηματισμός ομοιότητας

Όπως αναφέρθηκε στο Πέμπτο κεφάλαιο, κάθε υπόλοιπο που υπολογίζεται από τη συνόρθωση αναφέρεται σε μία από τις τέσσερις συντεταγμένες κάθε σημείου (δύο συντεταγμένες σε κάθε σύστημα αναφοράς). Με χρήση της σχέσης 5.48 υπολογίζεται το συνδυασμένο υπόλοιπο, το οποίο αναφέρεται σε κάθε σημείο. Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η τιμή των απλών υπολοίπων και του συνδυασμένου υπολοίπου για τα Φ.Χ. “Ελασσών” και “Ξάνθη”.

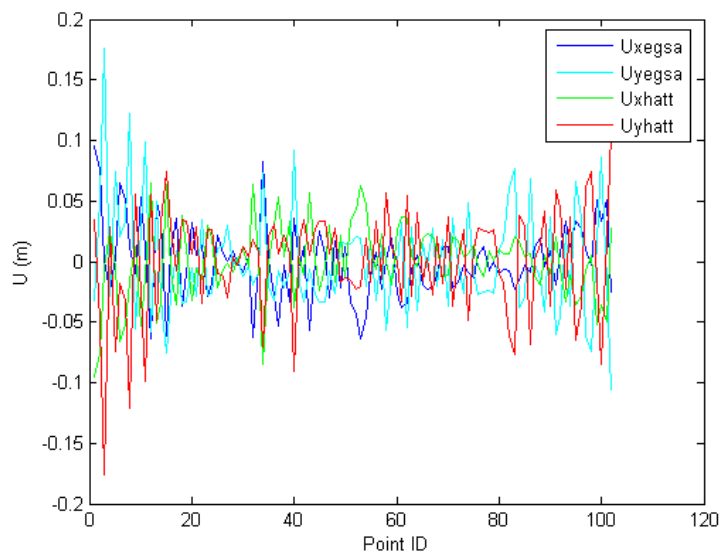


Σχήμα 6.3 Τιμές των υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)  
 Figure 6.3 Residual values for the first iteration for the similarity transformation (Elasson)



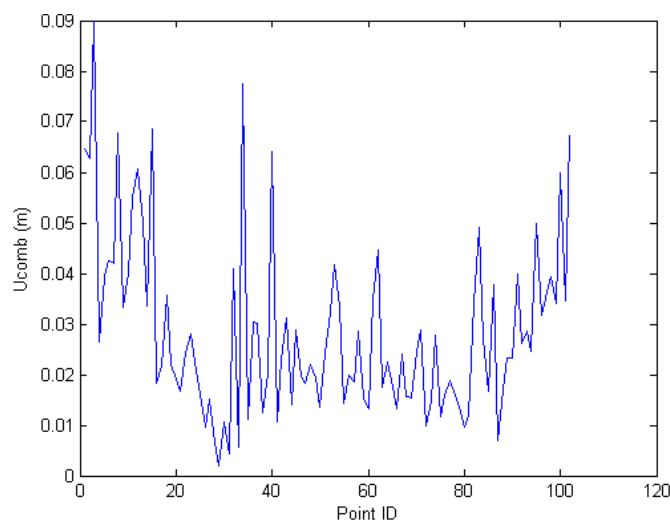
Σχήμα 6.4 Τιμές των συνδυασμένων υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)

Figure 6.4 Combined residual values for the first iteration for the similarity transformation (Elasson)



Σχήμα 6.5 Τιμές των υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ξάνθη)

Figure 6.5 Residual values for the first iteration for the similarity transformation (Ksanthi)

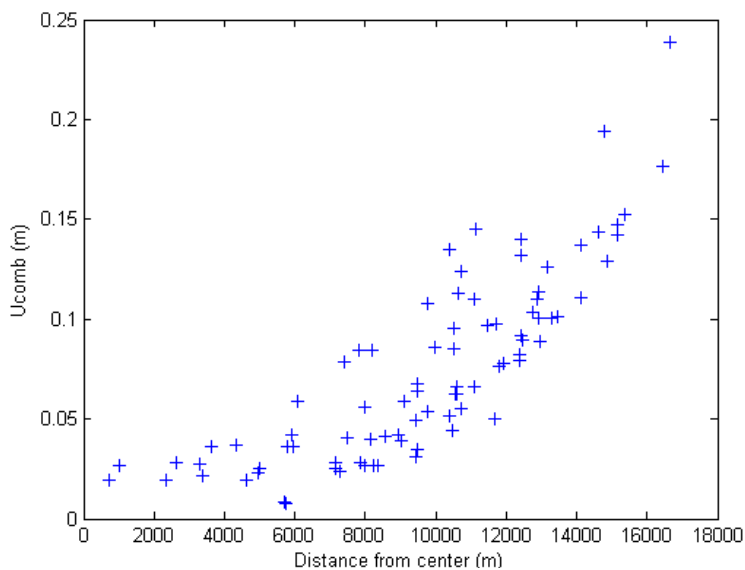


Σχήμα 6.6 Τιμές των συνδυασμένων υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ξάνθη)

Figure 6.6 Combined residual values for the first iteration for the similarity transformation (Ksanthi)

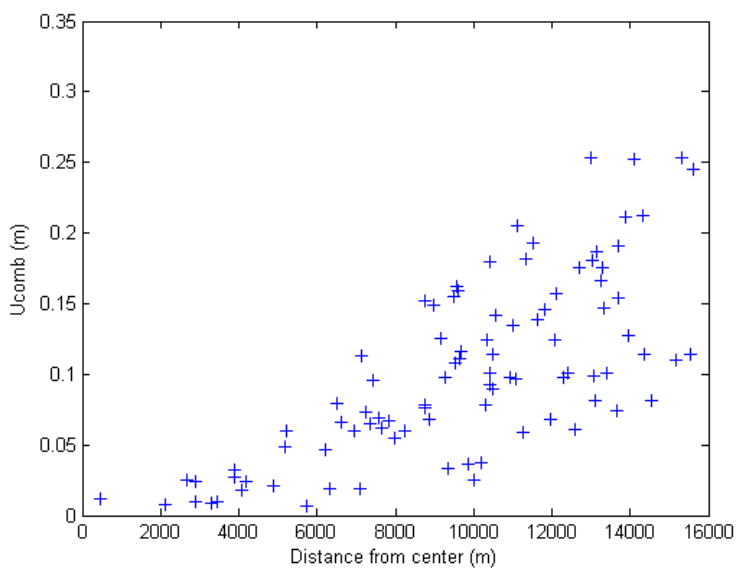
Είναι και πάλι εμφανές από τα διαγράμματα ότι ο μετασχηματισμός δίνει καλύτερα αποτελέσματα για το Φ.Χ. “Ξάνθη”. Γενικά μπορεί να παρατηρηθεί επίσης ότι τα σημεία στη μεσαία περιοχή της αρίθμησης έχουν μικρότερα υπόλοιπα από τα άλλα. Αυτό συμβαίνει επειδή η αρίθμηση των σημείων έχει γίνει κατά αύξουσα συντεταγμένη  $Y$ , που σημαίνει ότι τα μεσαία σημεία είναι πιο κοντά στο κέντρο της περιοχής. Άρα η μορφή του διαγράμματος είναι αναμενόμενη αφού είναι γνωστό ότι οι επίπεδοι μετασχηματισμοί

έχουν καλύτερη ακρίβεια όταν εφαρμόζονται σε μια μικρή περιοχή. Η συσχέτιση των υπολοίπων με την απόσταση φαίνεται καλύτερα στα επόμενα διαγράμματα.



Σχήμα 6.7 Σχέση υπολοίπου και απόστασης (Ελασσών)

Figure 6.7 Relation between residual and distance (Ellasson)

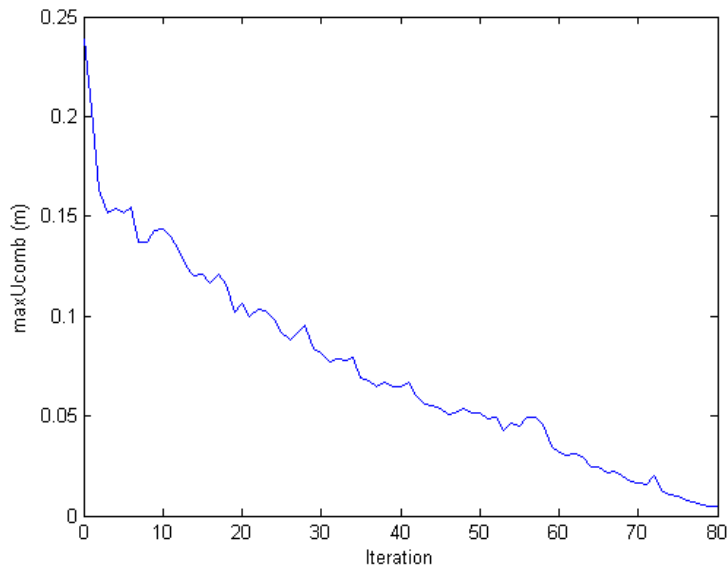


Σχήμα 6.8 Σχέση υπολοίπου και απόστασης (Καρπενήσι)

Figure 6.8 Relation between residual and distance (Karpenisi)

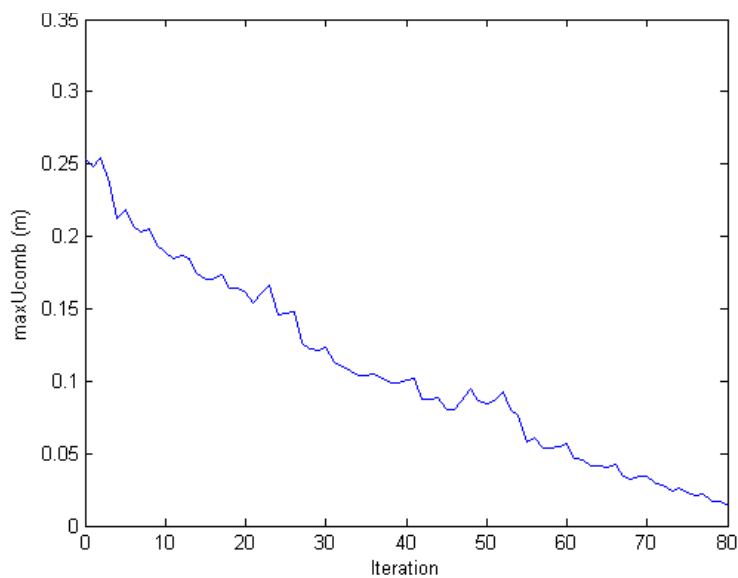
Τα υπόλοιπα παρουσιάζουν δηλαδή θετική συσχέτιση με την απόσταση, ιδιαίτερα σε αποστάσεις μεγαλύτερες των έξι - οκτώ χιλιομέτρων από το κέντρο βάρους της περιοχής.

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα του αλγορίθμου σε κάθε επανάληψη μπορούμε να παράγουμε κάποια πρόσθετα διαγράμματα. Τα διαγράμματα 6.9 και 6.10 δείχνουν τη μέγιστη τιμή του συνδυασμένου υπολοίπου, όπως αυτή διαμορφώνεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.



Σχήμα 6.9 Μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο σε κάθε επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)

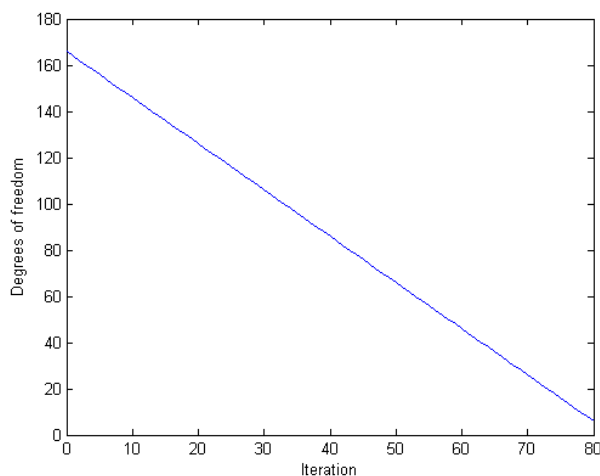
Figure 6.9 Maximum combined residual in every iteration for the similarity transformation (Elasson)



Σχήμα 6.10 Μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο σε κάθε επανάληψη για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Καρπενήσι)

Figure 6.10 Maximum combined residual in every iteration for the similarity transformation (Karpenisi)

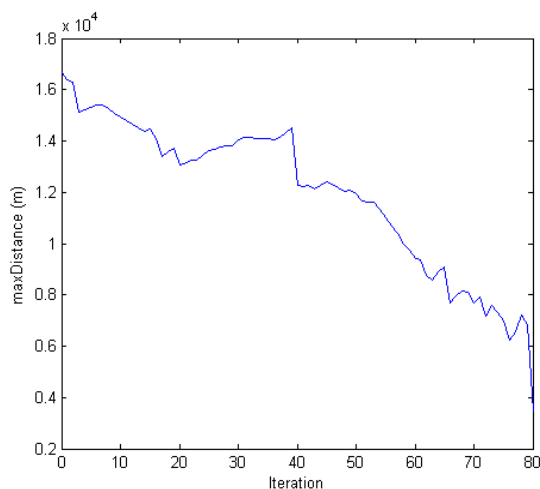
Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, το μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο μειώνεται με κάθε επανάληψη, κάτι το οποίο είναι φυσιολογικό. Η μεγάλη μείωση όμως του μέγιστου συνδυασμένου υπολοίπου στις τελευταίες επαναλήψεις δεν σημαίνει απαραίτητα ότι ο μετασχηματισμός γίνεται καλύτερος. Αν απορριφθούν τόσα πολλά σημεία η περιοχή γίνεται μικρότερη σε μέγεθος και ο βαθμός ελευθερίας της συνόρθωσης μειώνεται σημαντικά, κάτι που δεν είναι επιθυμητό. Στο διάγραμμα 6.11 φαίνεται η τιμή του βαθμού ελευθερίας καθώς προχωρούν οι επαναλήψεις.



Σχήμα 6.11 Βαθμός ελευθερίας σε κάθε επανάληψη

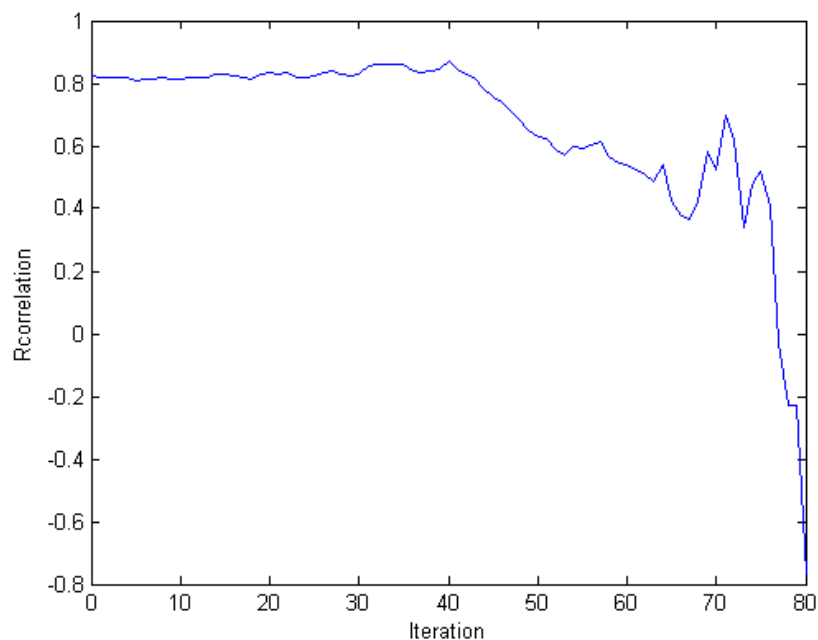
Figure 6.11 Degrees of freedom in every iteration

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η τιμή της μέγιστης απόστασης σημείου από το κέντρο βάρους της περιοχής σε κάθε επανάληψη (σχήμα 6.12) και η τιμή του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ του συνδυασμένου υπολοίπου και της απόστασης σε κάθε επανάληψη (σχήμα 6.13).



Σχήμα 6.12 Μέγιστη απόσταση σημείου σε κάθε επανάληψη (Ελασσών)

Figure 6.12 Max point distance in every iteration (Elasson)



Σχήμα 6.13 Συντελεστής συσχέτισης σε κάθε επανάληψη (Ελασσών)

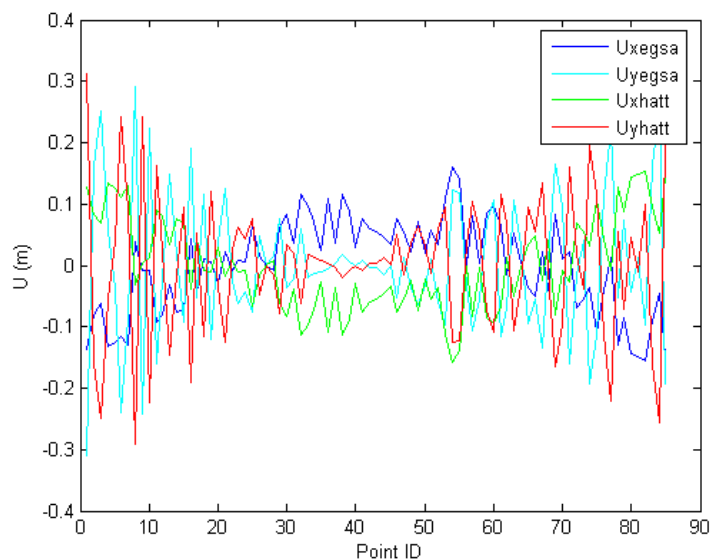
Figure 6.13 Factor of correlation in every iteration (Elasson)

Παρατηρείται ότι για την πλειοψηφία των επαναλήψεων ο συντελεστής συσχέτισης παραμένει θετικός και όπως φαίνεται από το διάγραμμα 6.12, στις περισσότερες επαναλήψεις απορρίπτεται το σημείο που απέχει περισσότερο από το κέντρο βάρους. Το σημείο δηλαδή που έχει το μεγαλύτερο συνδυασμένο υπόλοιπο έχει συνήθως και την πιο μεγάλη απόσταση από το κέντρο της περιοχής.

### 6.2.2.β Αφινικός μετασχηματισμός

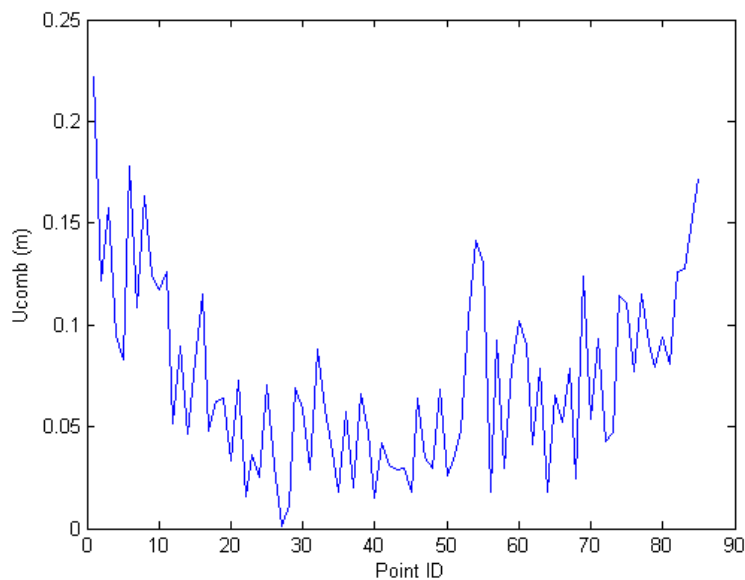
Εν γένει, η συμπεριφορά των υπολοίπων στον αφινικό μετασχηματισμό είναι παρόμοια με το μετασχηματισμό ομοιότητας. Τα σχήματα 6.14 και 6.15 παρουσιάζουν τα υπόλοιπα και το συνδυασμένο υπόλοιπο κάθε σημείου για την περιοχή της Ελασσόνας. Στο σχήμα 6.16 φαίνεται η συμπεριφορά του συνδυασμένου υπολοίπου με κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.





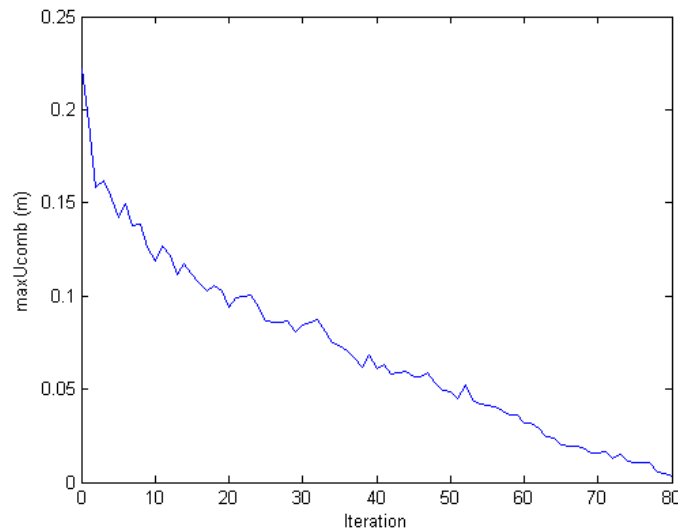
Σχήμα 6.14 Τιμές των υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)

Figure 6.14 Residual values for the first iteration for the affine transformation (Elasson)



Σχήμα 6.15 Τιμές των συνδυασμένων υπολοίπων στην πρώτη επανάληψη για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)

Figure 6.15 Combined residual values for the first iteration for the affine transformation (Elasson)



Σχήμα 6.16 Μέγιστο συνδυασμένο υπόλοιπο σε κάθε επανάληψη για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)

Figure 6.16 Maximum combined residual in every iteration for the affine transformation (Elasson)

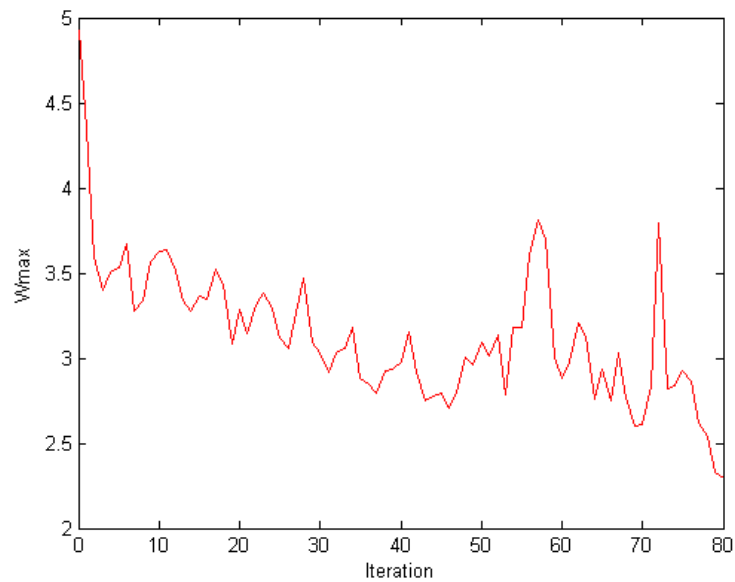
Τα υπόλοιπα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν για το μετασχηματισμό ομοιότητας εμφανίζουν την ίδια μορφή και στον αφινικό μετασχηματισμό και κατά συνέπεια παραλείπονται.

### 6.2.3 Στατιστικός έλεγχος αποτελεσμάτων

#### 6.2.3.α Μετασχηματισμός ομοιότητας

Στο κεφάλαιο πέντε έγινε αναφορά σε δύο διαφορετικά μεγέθη τα οποία μπορούν να αποτελέσουν κριτήριο για την απόρριψη σημείων. Το πρώτο είναι το κανονικοποιημένο υπόλοιπο της κάθε μέτρησης και το δεύτερο είναι το κανονικοποιημένο “συνδυασμένο” υπόλοιπο τεσσάρων μετρήσεων (συντεταγμένων), το οποίο υπολογίζεται για κάθε σημείο. Κάθε ένα από τα κριτήρια αυτά οδηγεί σε απόρριψη διαφορετικών σημείων και επομένως σε υπολογισμό διαφορετικών παραμέτρων μετασχηματισμού.

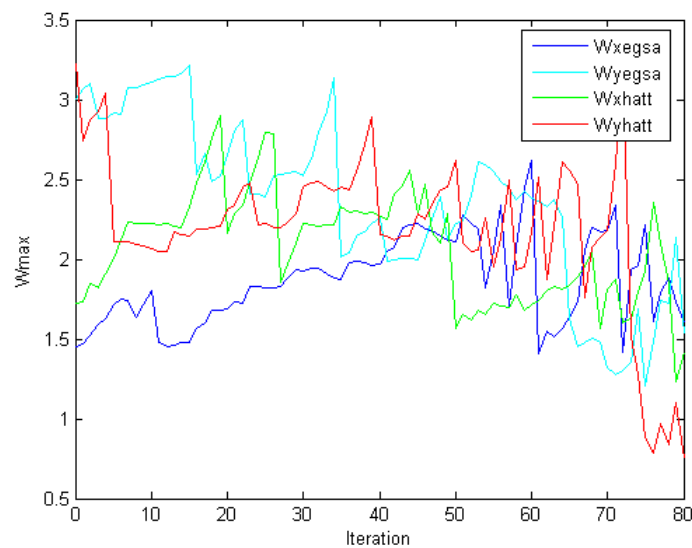
Αρχικά γίνεται χρήση του κριτηρίου του συνδυασμένου υπολοίπου για την απόρριψη σημείων. Στο Σχήμα 6.17 παρουσιάζονται οι τιμές του κανονικοποιημένου συνδυασμένου υπολοίπου μετά την εφαρμογή του κριτηρίου για κάθε επανάληψη.



Σχήμα 6.17 Μέγιστο κανονικοποιημένο συνδυασμένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)

Figure 6.17 Maximum normalized combined residual for the similarity transformation (Elasson)

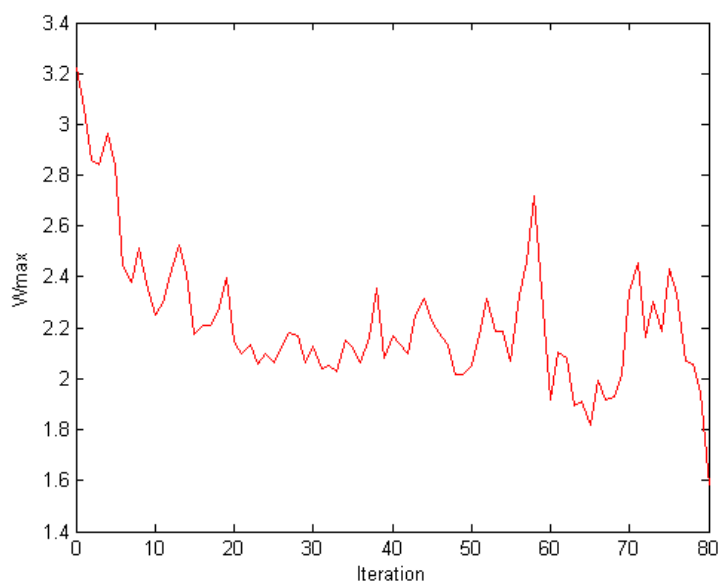
Έχει ενδιαφέρον όμως να παρουσιαστεί και η συμπεριφορά των τεσσάρων συνιστωσών κάθε σημείου, δηλαδή των κανονικοποιημένων υπολοίπων για κάθε μία συντεταγμένη. Τα μεγέθη αυτά μπορούν να ονομαστούν  $w_{x_{EΓΣΑ}}$ ,  $w_{y_{EΓΣΑ}}$ ,  $w_{x_{Hatt}}$  και  $w_{y_{Hatt}}$ . Στο σχήμα 6.18 φαίνονται οι μέγιστες τιμές τους για κάθε επανάληψη.



Σχήμα 6.18 Μέγιστα κανονικοποιημένα υπόλοιπα συντεταγμένων για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)

Figure 6.18 Maximum normalized coordinate residuals for the similarity transformation (Elasson)

Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.17, οι τιμές του κανονικοποιημένου συνδυασμένου υπολοίπου παρουσιάζουν φθίνουσα τάση. Ωστόσο, το εύρος των τιμών δεν είναι μικρότερο από 2.5. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ποσότητα αυτή δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή και έτσι βρίσκεται εκτός ορίων κλίμακας. Για αυτό το λόγο γίνεται χρήση του απλού κανονικοποιημένου υπολοίπου το οποίο χρησιμοποιείται ως κριτήριο για την απόρριψη σημείων. Με χρήση του κριτηρίου αυτού το διάγραμμα των μέγιστων κανονικοποιημένων υπολοίπων παίρνει τη μορφή του Σχήματος 6.19.



Σχήμα 6.19 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)  
Figure 6.19 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Elasson)

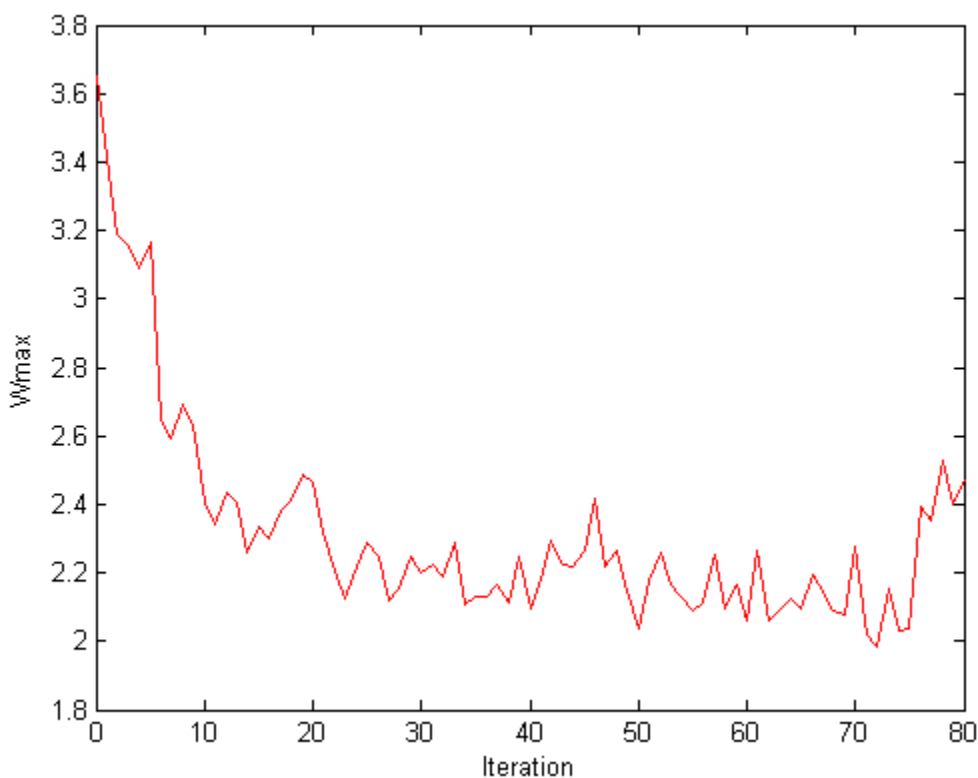
Για την εφαρμογή του κριτηρίου του Baarda θα πρέπει να γίνει επιλογή ενός επιπέδου εμπιστοσύνης. Εν προκειμένω, επιλέγεται επίπεδο εμπιστοσύνης 99% και συγκρίνονται τα υπόλοιπα με την τιμή  $z_{99} = 2.576$ .

Με βάση το διάγραμμα για το Φ.Χ. “Ελασσών” λοιπόν, στην 6<sup>η</sup> επανάληψη όλα τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα των μετρήσεων είναι μικρότερα από την τιμή αναφοράς  $z_{99}$ . Αυτό θα πρέπει να είναι και το σημείο διακοπής του αλγορίθμου σύμφωνα με το κριτήριο Baarda. Παρατηρούμε όμως ότι τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα μειώνονται ακόμα περισσότερο με κάθε επιπλέον επανάληψη και είναι πολύ πιθανό οι παράμετροι του μετασχηματισμού να είναι πιο ακριβείς σε κάποιο διαφορετικό σημείο διακοπής του αλγορίθμου. Υποψήφιο σημείο διακοπής θα μπορούσε επίσης να είναι το σημείο όπου η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο. Ωστόσο, εκτιμάται ότι η συνόρθωση θα πρέπει να

περιέχει πάνω από είκοσι σημεία για να υπάρχει αρκετός βαθμός ελευθερίας. Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν να σταματήσουν οι επαναλήψεις εκεί που το κανονικοποιημένο υπόλοιπο φαίνεται να σταθεροποιείται σε μία χαμηλή τιμή, χωρίς να έχει απορριφθεί ιδιαίτερα μεγάλος αριθμός σημείων.

Στο σημείο αυτό εξετάζεται η τελευταία προσέγγιση. Ονομάζουμε λοιπόν 1<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο το κριτήριο διακοπής των επαναλήψεων κατά Baarda και 2<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο το κριτήριο διακοπής στην ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Το σημείο διακοπής των επαναλήψεων σύμφωνα με το χρησιμοποιούμενο κριτήριο θα είναι η επανάληψη 21. Η διερεύνηση των αποτελεσμάτων αν επιλεγούν τα εναλλακτικά σημεία (επαναλήψεις 6 και 65 στο σχήμα για το Φ.Χ. “Ελασσών”) γίνεται στην Ενότητα 6.4.

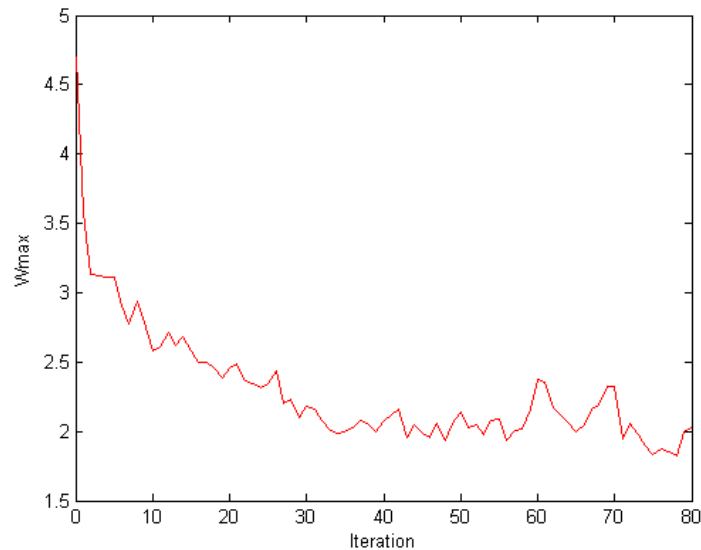
Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και στα υπόλοιπα Φ.Χ. με το σημείο διακοπής των επαναλήψεων να είναι βέβαια διαφορετικό σε κάθε περιοχή.



Σχήμα 6.20 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Γόννοι)

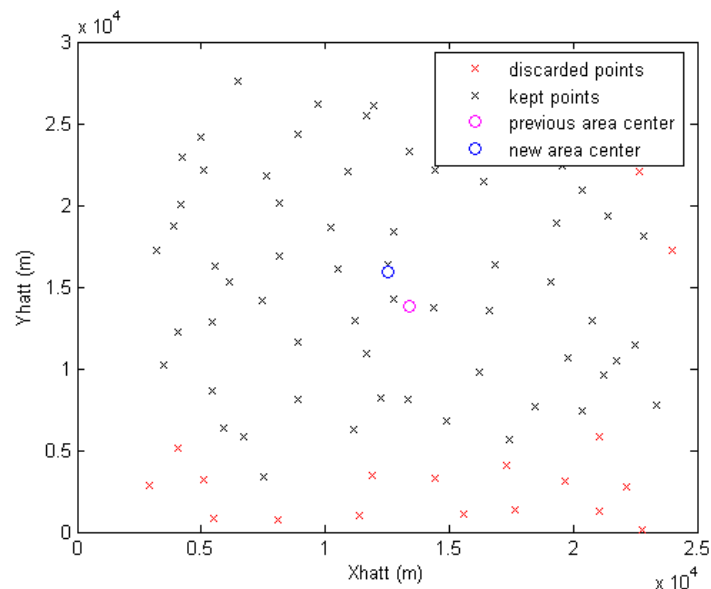
Figure 6.20 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Gonoi)

Για το Φ.Χ. “Γόννοι” (Σχήμα 6.20) κρίνεται ότι ο αλγόριθμος πρέπει να σταματήσει στην επανάληψη 23. Στην περιοχή της Ξάνθης (Σχήμα 6.21) η τελευταία επανάληψη του αλγορίθμου πρέπει να είναι η 34.



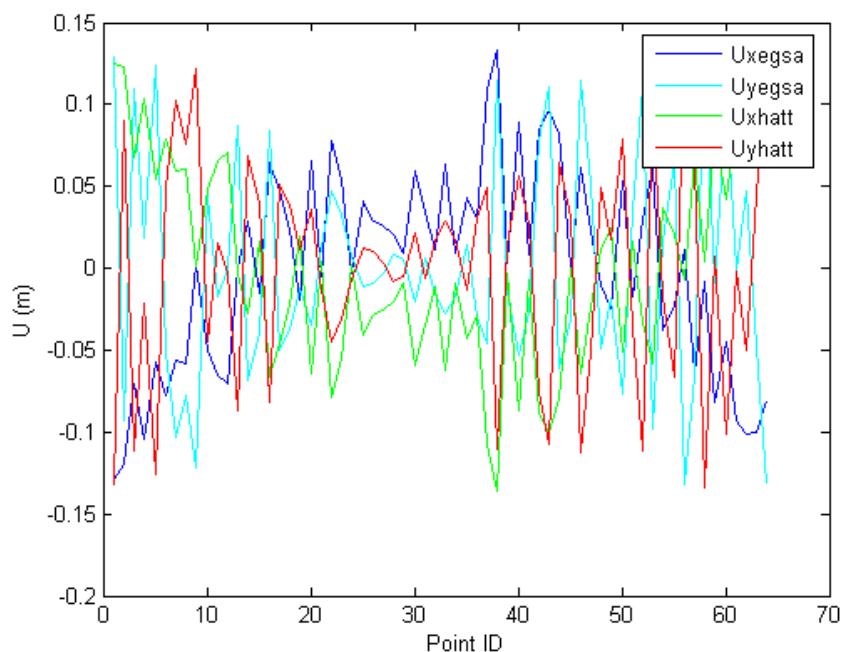
Σχήμα 6.21 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ξάνθη)  
Figure 6.21 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Ksanthi)

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξέταση των σημείων που έχουν απορριφθεί. Στο Φ.Χ. “Ελασσών” (Σχήμα 6.22) φαίνονται τα σημεία που διατηρήθηκαν, τα σημεία που απορρίφθηκαν και η μετακίνηση του κέντρου βάρους της περιοχής μετά τις 21 επαναλήψεις.



Σχήμα 6.22 Κατανομή σημείων μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού ομοιότητας (Ελασσών)  
Figure 6.22 Point distribution after applying the similarity transformation (Elasson)

Μετά το πέρας των επαναλήψεων υπολογίζουμε ξανά τα υπόλοιπα των μετρήσεων για τα σημεία που παραμένουν στη συνόρθωση (Σχήματα 6.23 και 6.24).



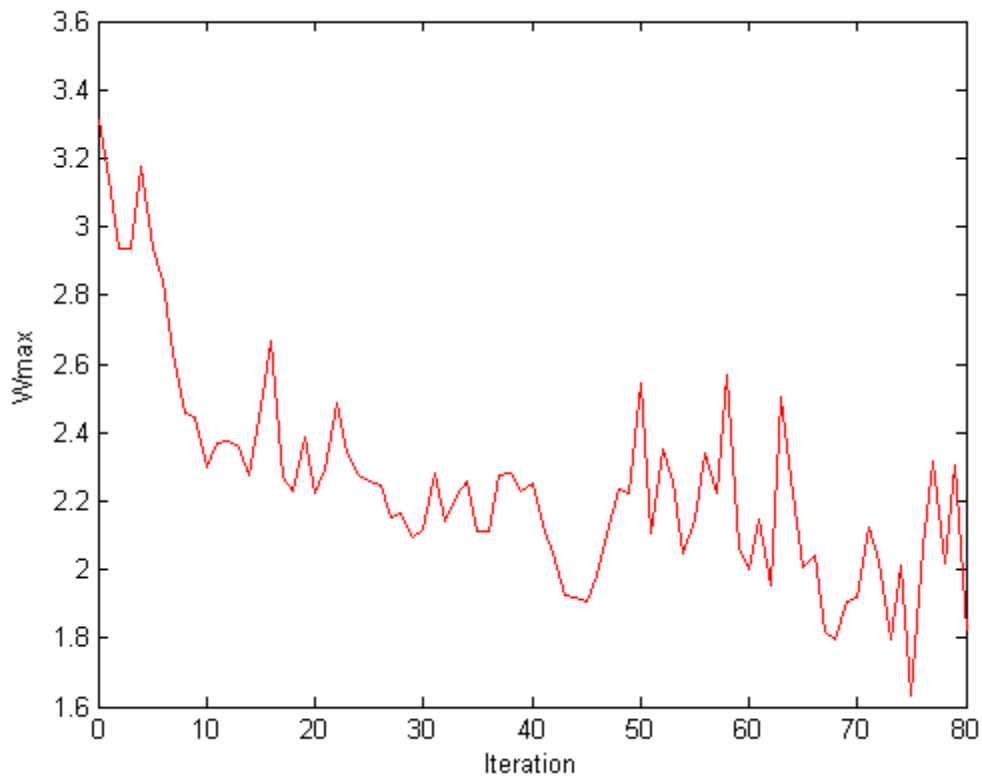
Σχήμα 6.23 Τελικές τιμές των υπολοίπων για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Ελασσών)

Figure 6.23 Final residual values for the similarity transformation (Elasson)

Αν συγκρίνουμε το διάγραμμα αυτό με το αντίστοιχο της πρώτης επανάληψης (Σχήμα 6.3), παρατηρούμε κυρίως ότι οι τιμές των υπολοίπων βρίσκονται σε μικρότερο εύρος – οι εξαιρετικά ακραίες τιμές των υπολοίπων έχουν αφαιρεθεί χρησιμοποιώντας το κριτήριο απόρριψης.

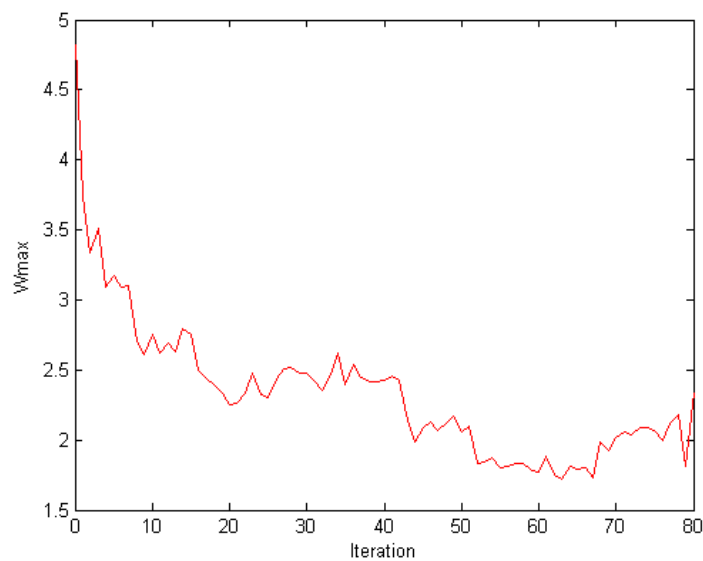
### 6.2.3.β Αφινικός μετασχηματισμός

Η διαδικασία εύρεσης του σημείου διακοπής των επαναλήψεων είναι παρόμοια και για τον αφινικό μετασχηματισμό. Τα διαγράμματα όμως των υπολοίπων για τον αφινικό μετασχηματισμό έχουν διαφορετική μορφή και επομένως ο αριθμός των σημείων που θα απορριφθούν θα είναι διαφορετικός.



Σχήμα 6.24 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)  
 Figure 6.24 Maximum normalized residual for the affine transformation (Elasson)

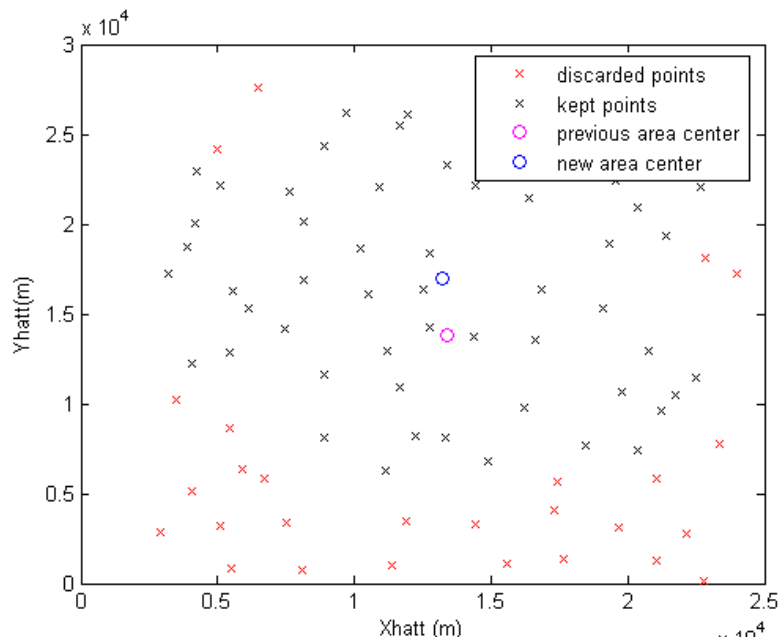
Στο σχήμα 6.25 για την περιοχή της Ελασσόνας, τα πιθανά σημεία διακοπής των επαναλήψεων είναι οι επαναλήψεις 29 και 43. Τελικά έγινε επιλογή της 29 ως τελευταίας επανάληψης.



Σχήμα 6.25 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ξάνθη)  
 Figure 6.25 Maximum normalized residual for the affine transformation (Ksanthi)

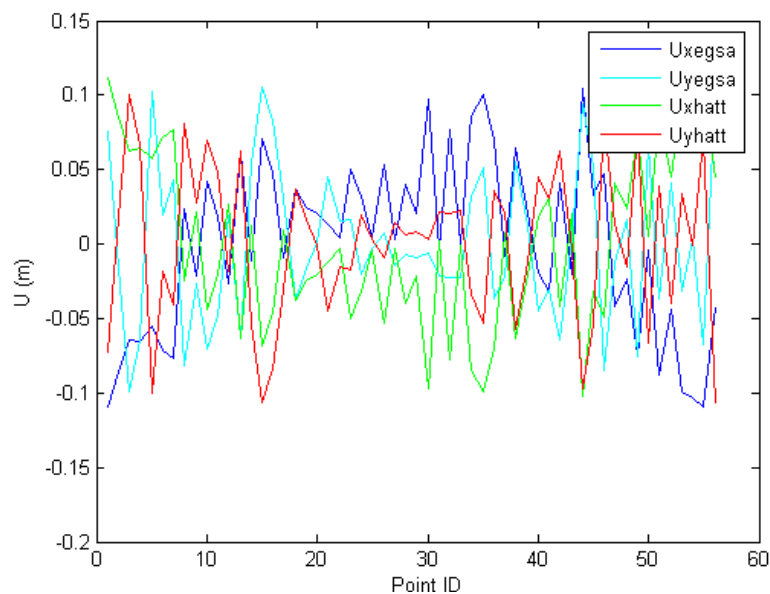


Στην περιοχή της Ξάνθης (Σχήμα 6.25), επιλέχθηκε ως τελευταία επανάληψη η επανάληψη 20.



Σχήμα 6.26 Κατανομή σημείων μετά την εφαρμογή του αφινικού μετασχηματισμού (Ελασσών)  
Figure 6.26 Point distribution after applying the affine transformation (Elasson)

Με σύγκριση των Σχημάτων 6.26 και 6.22 παρατηρείται ότι τα σημεία που απορρίφθηκαν στην περιοχή της Ελασσόνας είναι διαφορετικά για κάθε μετασχηματισμό.



Σχήμα 6.27 Τελικές τιμές των υπολοίπων για τον αφινικό μετασχηματισμό (Ελασσών)  
Figure 6.27 Final residual values for the affine transformation (Elasson)

Συγκρίνοντας τα υπόλοιπα της τελευταίας επανάληψης (29) με αυτά της πρώτης για την Ελασσόνα, παρατηρούμε ότι όπως και στο μετασχηματισμό ομοιότητας έχουν αφαιρεθεί οι ακραίες τιμές υπολοίπων. Το φαινόμενο αυτό εδώ είναι ακόμα εντονότερο από ότι στο μετασχηματισμό ομοιότητας.

#### 6.2.4 Υπολογισμός τελικών αποτελεσμάτων με βάση το στατιστικό έλεγχο

Σε κάθε περιοχή πραγματοποιήθηκαν τόσες επαναλήψεις του αλγόριθμου όσες προσδιορίστηκαν από το στατιστικό έλεγχο του κανονικοποιημένου υπολοίπου. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα τελικά αποτελέσματα της συνόρθωσης όπως προέκυψαν για το εκάστοτε σημείο διακοπής των επαναλήψεων.

	Περιοχή Λάρισας			
	Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι	Φ.Χ. Καρπενήσι	Φ.Χ. Ξάνθη
Παράμετροι μετασχηματισμού				
a	0.999814	1.000009	0.999680	1.000261
b	0.022784	0.017174	0.022305	-0.011091
c	12547.538	-8454.018	-9880.121	-8114.304
d	15893.926	11501.377	14896.681	-12783.631
$\sigma_a$	0.00000185	0.00000121	0.00000206	0.00000059
$\sigma_b$	0.00000185	0.00000121	0.00000206	0.00000059
$\sigma_c$	0.016243	0.010757	0.017056	0.004748
$\sigma_d$	0.016243	0.010757	0.017056	0.004748
Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$	0.984	0.984	0.988	0.988
Τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης $\hat{\sigma}_l$	0.097	0.062	0.104	0.034

Πίνακας 6.8 Τελικά αποτελέσματα για το μετασχηματισμό ομοιότητας

Table 6.8 Final results for the similarity transformation

	Περιοχή Λάρισας			
	Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι	Φ.Χ. Καρπενήσι	Φ.Χ. Ξάνθη
Παράμετροι μετασχηματισμού				
a	0.999813	1.000010	0.999718	1.000261
b	-0.022784	-0.017167	-0.022286	0.011089
c	13244.075	-8459.335	-8869.149	-8404.672
d	0.022794	0.017181	0.022292	-0.011097
e	0.999822	1.000007	0.999668	1.000262
f	16933.573	11357.183	12647.457	-12236.657
$\sigma_a$	0.00000263	0.00000180	0.00000370	0.00000092
$\sigma_b$	0.00000248	0.00000159	0.00000301	0.00000076
$\sigma_c$	0.014799	0.010712	0.021511	0.004874
$\sigma_d$	0.00000263	0.00000180	0.00000370	0.00000092
$\sigma_e$	0.00000248	0.00000159	0.00000301	0.00000076
$\sigma_f$	0.014799	0.010712	0.021511	0.004874
Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$	0.982	0.971	0.989	0.984
Τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης $\hat{\sigma}_l$	0.095	0.068	0.095	0.024

Πίνακας 6.9 Τελικά αποτελέσματα για τον αφινικό μετασχηματισμό

Table 6.9 Final results for the affine transformation

Συγκρίνοντας τα τελικά αποτελέσματα με τα προσωρινά αποτελέσματα της πρώτης επανάληψης, είναι εμφανές ότι τα τυπικά σφάλματα για όλες τις παραμέτρους και των δύο μετασχηματισμών είναι αρκετά μικρότερα. Το ίδιο ισχύει και για τα a posteriori τυπικά σφάλματα των μετρήσεων, τα οποία είναι τώρα της τάξης των 2-10 εκατοστών.

### 6.2.5 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων

Για να ελεγχθεί η στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων υπολογίζονται οι λόγοι  $t$  των παραμέτρων σύμφωνα με τη σχέση 5.44. Στη συνέχεια θα γίνει σύγκρισή τους με την τιμή  $t$  για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και κάποιο βαθμό ελευθερίας. Επειδή ο βαθμός ελευθερίας διαφέρει για κάθε περιοχή, αφού ο αριθμός των σημείων που συμμετέχουν στη συνόρθωση είναι διαφορετικός, γίνεται η παραδοχή ότι  $t_{0.025,r} = 2.042$ .

	Λόγοι t			
	Περιοχή Λάρισας			
Παράμετρος	Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι	Φ.Χ. Καρπενήσι	Φ.Χ. Ξάνθη
a	540714.2	827267.2	486207.7	1697721.2
b	12321.8	14207.4	10848.2	18825.1
c	772472.2	785879.7	579271.9	1708736.1
d	978488.1	1069160.0	873393.1	2692017.7

Πίνακας 6.10 Λόγοι t για το μετασχηματισμό ομοιότητας

Table 6.10 t values for the similarity transformation

	Λόγοι t			
	Περιοχή Λάρισας			
Παράμετρος	Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι	Φ.Χ. Καρπενήσι	Φ.Χ. Ξάνθη
a	379992.0	556248.3	269944.6	1081124.6
b	9180.7	10778.6	7383.5	14564.8
c	894953.4	789673.2	412306.3	1724059.9
d	8663.1	9557.0	6019.2	11993.7
e	402874.4	627873.2	331202.2	1313773.3
f	1144267.1	1060185.3	587951.2	2510119.2

Πίνακας 6.11 Λόγοι t για τον αφινικό μετασχηματισμό

Table 6.11 t values for the affine transformation

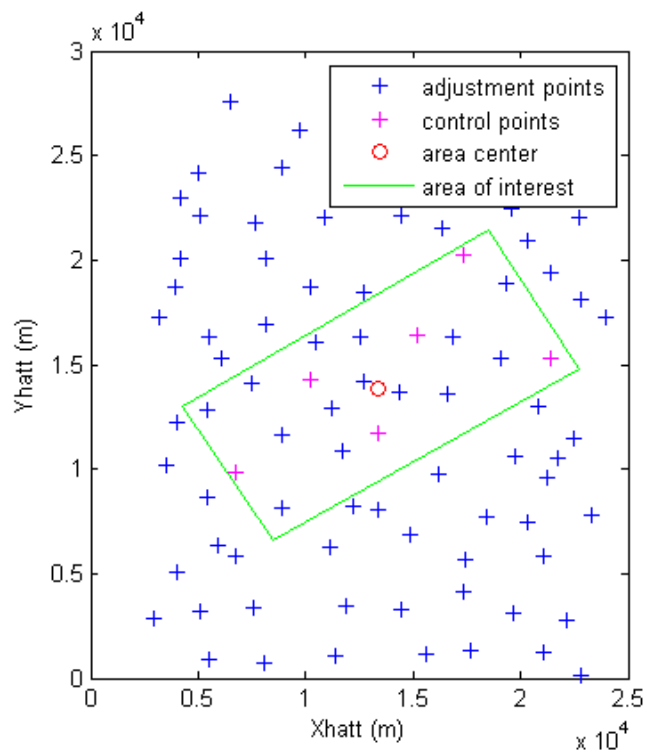
Παρατηρούμε ότι όλοι οι λόγοι t είναι αρκετά πιο μεγάλοι από την τιμή αναφοράς, επομένως όλες οι παράμετροι κρίνονται στατιστικά σημαντικές.

### 6.3 Εφαρμογή αλγορίθμου σε σημεία ελέγχου

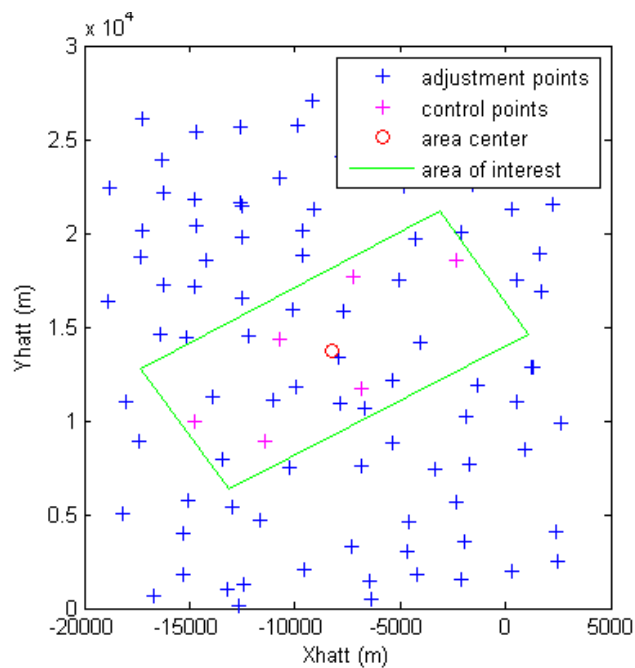
#### 6.3.1 Περιγραφή σημείων ελέγχου

Τα σημεία ελέγχου επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχουν μία εικόνα της ακρίβειας του μετασχηματισμού στην έκταση που μας ενδιαφέρει. Στην παρούσα εργασία θεωρείται ότι μας ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός συντεταγμένων για έργα που καταλαμβάνουν μία έκταση λίγων τετραγωνικών χιλιομέτρων, όπως ένα μεγάλο οδικού ή σιδηροδρομικού δικτύου.

Για τις ανάγκες ορισμού μιας τέτοιας έκτασης σχεδιάστηκε σε κάθε Φ.Χ. μία ορθογωνική περιοχή διαστάσεων 16 x 8 χιλιόμετρα (απεικονίζεται με πράσινη γραμμή στα σχήματα). Μέσα στην περιοχή αυτή επιλέχθηκαν έξι σημεία ανά Φ.Χ. ως σημεία ελέγχου. Η επιλογή έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε τα σημεία αυτά να κατανέμονται ομαλά στην περιοχή ενδιαφέροντος. Οι συντεταγμένες των σημείων στο σύστημα Hatt δίνονται στον Πίνακα 6.12.



Σχήμα 6.28 Περιοχή ενδιαφέροντος και σημεία ελέγχου (Ελασσών)  
 Figure 6.28 Area of interest and control points (Elasson)



Σχήμα 6.29 Περιοχή ενδιαφέροντος και σημεία ελέγχου (Καρπενήσι)  
 Figure 6.29 Area of interest and control points (Karpenisi)

	Κωδικός σημείου	X	Y
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.120	9810.104
	87	13367.008	11676.952
	88	10246.306	14237.006
	89	21392.625	15340.042
	90	15218.401	16435.916
	91	17344.840	20282.767
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.918	8817.023
	99	-9890.839	10630.819
	100	-15360.404	10926.905
	101	-2119.490	14968.348
	102	-5088.153	15675.651
	103	-4047.778	19569.356
Φ.Χ. Καρπενήσι	94	-11449.036	8929.437
	95	-14730.152	9929.668
	96	-6861.442	11696.419
	97	-10739.233	14343.154
	98	-7219.061	17696.421
	99	-2357.704	18523.351
Φ.Χ. Ξάνθη	103	-10218.937	-16899.435
	104	-3533.826	-14379.712
	105	-14403.268	-14137.939
	106	-420.076	-11367.604
	107	-8830.828	-11238.214
	108	-4351.571	-7877.609

Πίνακας 6.12 Συντεταγμένες σημείων ελέγχου στο σύστημα Hatt

Table 6.12 Coordinates of control points in Hatt datum

### 6.3.2 Υπολογισμοί συντεταγμένων και διαφορών τους

Σύμφωνα με τις βέλτιστες παραμέτρους μετασχηματισμού, όπως υπολογίστηκαν στην Ενότητα 6.2.4, προσδιορίστηκαν οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου στο σύστημα Hatt. Στους Πίνακες 6.13 και 6.14 παρουσιάζονται μαζί με τις διαφορές τους από τις γνωστές συντεταγμένες Hatt της ΓΥΣ.

	Κωδικός σημείου	X	Y	$\delta X$	$\delta Y$
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.130	9810.002	0.010	-0.102
	87	13367.004	11676.985	-0.004	0.033
	88	10246.279	14237.003	-0.027	-0.003
	89	21392.531	15340.024	-0.094	-0.018
	90	15218.324	16435.958	-0.077	0.042
	91	17344.756	20282.644	-0.084	-0.123
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.049</b>	<b>0.053</b>
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.952	8816.992	-0.034	-0.031
	99	-9890.868	10630.815	-0.029	-0.004
	100	-15360.499	10926.920	-0.095	0.015
	101	-2119.530	14968.265	-0.040	-0.083
	102	-5088.170	15675.597	-0.017	-0.054
	103	-4047.772	19569.211	0.006	-0.145
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.037</b>	<b>0.055</b>
Φ.Χ. Καρπενήσι	94	-11448.973	8929.236	0.063	-0.201
	95	-14730.179	9929.327	-0.027	-0.341
	96	-6861.521	11696.354	-0.079	-0.065
	97	-10739.278	14343.067	-0.045	-0.087
	98	-7219.157	17696.352	-0.096	-0.069
	99	-2358.053	18523.192	-0.349	-0.159
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.109</b>	<b>0.153</b>
Φ.Χ. Ξάνθη	103	-10218.965	-16899.431	-0.028	0.004
	104	-3533.846	-14379.700	-0.020	0.012
	105	-14403.230	-14137.970	0.038	-0.031
	106	-420.087	-11367.571	-0.011	0.033
	107	-8830.874	-11238.273	-0.046	-0.059
	108	-4351.537	-7877.580	0.034	0.029
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.029</b>	<b>0.028</b>

Πίνακας 6.13 Προσδιορισθείσες συντεταγμένες Hatt και διαφορές τους από τις γνωστές (μετασχηματισμός ομοιότητας)

Table 6.13 Determined Hatt coordinates and their differences from the known ones (similarity transformation)

	Κωδικός σημείου	X	Y	$\delta X$	$\delta Y$
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.149	9809.883	0.029	-0.221
	87	13367.016	11676.948	0.008	-0.004
	88	10246.293	14236.957	-0.013	-0.049
	89	21392.534	15340.098	-0.091	0.056
	90	15218.333	16435.980	-0.068	0.064
	91	17344.762	20282.720	-0.078	-0.047

<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.048</b>	<b>0.073</b>
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.982	8816.980	-0.064	-0.043
	99	-9890.880	10630.822	-0.041	0.003
	100	-15360.517	10926.887	-0.113	-0.018
	101	-2119.502	14968.324	-0.012	-0.024
	102	-5088.140	15675.632	0.013	-0.019
	103	-4047.714	19569.250	0.064	-0.106
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.051</b>	<b>0.035</b>
Φ.Χ. Καρπενήσι	94	-11449.091	8929.366	-0.055	-0.071
	95	-14730.400	9929.486	-0.248	-0.182
	96	-6861.411	11696.393	0.031	-0.026
	97	-10739.261	14343.123	-0.028	-0.031
	98	-7218.941	17696.324	0.120	-0.097
	99	-2357.637	18523.092	0.067	-0.259
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.091</b>	<b>0.111</b>
Φ.Χ. Ξάνθη	103	-10218.952	-16899.424	-0.015	0.011
	104	-3533.840	-14379.724	-0.014	-0.012
	105	-14403.223	-14137.936	0.045	0.003
	106	-420.088	-11367.606	-0.012	-0.002
	107	-8830.874	-11238.263	-0.046	-0.049
	108	-4351.545	-7877.589	0.026	0.020
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.026</b>	<b>0.016</b>

Πίνακας 6.14 Προσδιορισθείσες συντεταγμένες Hatt και διαφορές τους από τις γνωστές (αφινικός μετασχηματισμός)

Table 6.14 Determined Hatt coordinates and their differences from the known ones (affine transformation)

Σε γενικές γραμμές και οι δύο μετασχηματισμοί δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Οι διαφορές φτάνουν σχεδόν όλες μέχρι τα 10 εκατοστά, με λίγες εξαιρέσεις. Βέβαια σε περιοχές όπως η Ξάνθη τα αποτελέσματα είναι αρκετά καλύτερα, με τις διαφορές να μην ξεπερνούν τα 5 εκατοστά.

Οι διαφορές αυτές αποτελούν ίσως το πιο σημαντικό κριτήριο για την επιλογή του καλύτερου μετασχηματισμού. Ο αφινικός μετασχηματισμός παράγει λίγο καλύτερα αποτελέσματα στις περιοχές Γόννοι, Καρπενήσι και Ξάνθη, ενώ εξαίρεση ίσως αποτελεί η περιοχή της Ελασσόνας.

### 6.3.3 Εκτίμηση ακρίβειας υπολογισμένων συντεταγμένων

Ο πίνακας  $\hat{V}_i$  κάθε σημείου ελέγχου περιέχει τις αβεβαιότητες ως προς τις υπολογισμένες συντεταγμένες του και υπολογίζεται σύμφωνα με τη Σχέση 5.51. Αρχικά μπορεί να θεωρηθεί ότι οι συντεταγμένες ΕΓΣΑ 87 των σημείων ελέγχου δεν έχουν



αβεβαιότητα (θεώρηση 1). Αν δεχτούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων έχουν αβεβαιότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την a posteriori αβεβαιότητα της μίας μέτρησης που υπολογίστηκε στην Ενότητα 6.2.4 (θεώρηση 2).

Λόγω του μεγάλου όγκου των αποτελεσμάτων που προκύπτει για τους δύο μετασχηματισμούς και επειδή τα τυπικά σφάλματα των υπολογισμένων συντεταγμένων  $\sigma_x$  ταυτίζονται με τα  $\sigma_y$ , παρατίθενται εδώ οι μέσες τιμές των τυπικών σφαλμάτων για τα σημεία ελέγχου και για τους δύο μετασχηματισμούς.

	Μετασχηματισμός ομοιότητας		Αφινικός μετασχηματισμός	
	Θεώρηση 1	Θεώρηση 2	Θεώρηση 1	Θεώρηση 2
Φ.Χ. Ελασσών	0.020	0.096	0.021	0.083
Φ.Χ. Γόννοι	0.013	0.068	0.015	0.070
Φ.Χ. Καρπενήσι	0.020	0.088	0.029	0.140
Φ.Χ. Ξάνθη	0.006	0.028	0.007	0.032

Πίνακας 6.15 Τυπικά σφάλματα των υπολογισμένων συντεταγμένων Hatt (m)

Table 6.15 Standard errors of determined Hatt coordinates (m)

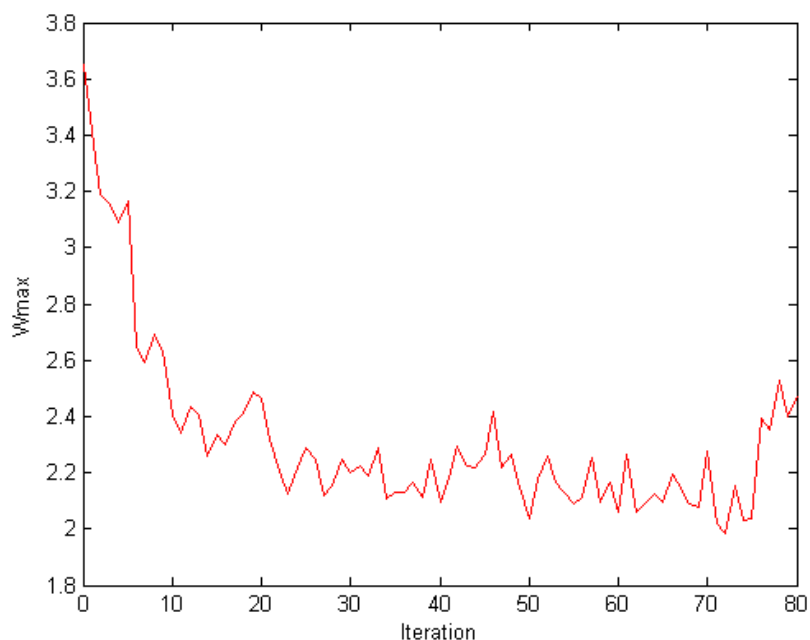
Η ακρίβεια που θα έχουν λοιπόν οι υπολογισμένες συντεταγμένες κυμαίνεται από 3-15 εκατοστά με βάση τη θεώρηση 2. Το εύρος αυτό συμφωνεί ουσιαστικά με τις υπολογισμένες διαφορές των Πινάκων 6.13 και 6.14. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές μεταξύ των δύο μετασχηματισμών.

#### 6.4 Εναλλακτικά κριτήρια εύρεσης σημείου διακοπής επαναλήψεων – διερεύνηση αποτελεσμάτων

##### 6.4.1 1<sup>ο</sup> Εναλλακτικό κριτήριο

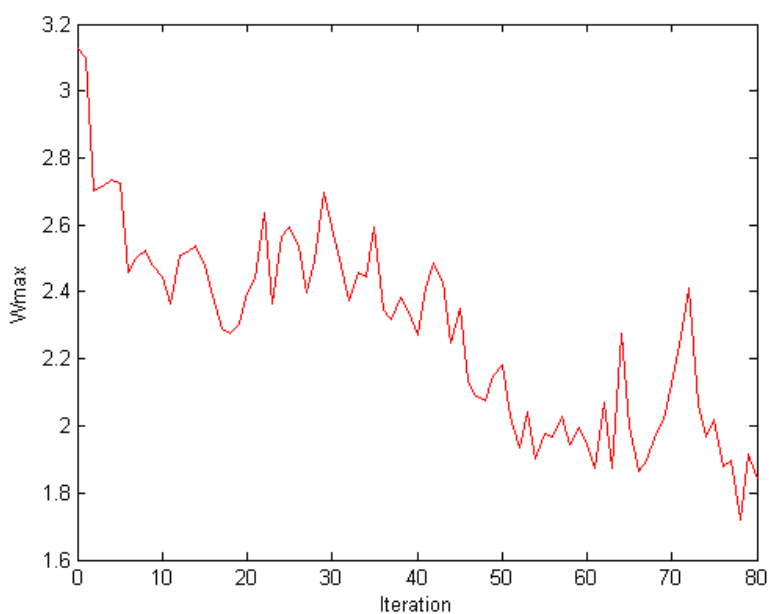
Το 1<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο συνίσταται στη διακοπή των επαναλήψεων αμέσως μόλις ικανοποιηθεί η συνθήκη ότι όλα τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα είναι μικρότερα από την τιμή αναφοράς 2.576 για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Για τη διερεύνηση των αποτελεσμάτων επιλέχθηκαν τα Φ.Χ. “Ελασσών” και “Γόννοι”.

Παρακάτω δίνονται ενδεικτικά τα διαγράμματα του μέγιστου κανονικοποιημένου υπολοίπου των δύο μετασχηματισμών για την περιοχή “Γόννοι” και γίνεται η επιλογή ενός νέου σημείου διακοπής σύμφωνα με το 1<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο.



Σχήμα 6.30 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Γόννοι)  
 Figure 6.30 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Gonoi)

Τα νέα σημεία διακοπής για την περιοχή Γόννοι είναι η επανάληψη 10 για το μετασχηματισμό ομοιότητας και η επανάληψη 6 για τον αφινικό μετασχηματισμό. Αποτελέσματα με βάση τα νέα σημεία διακοπής δίνονται στον Πίνακα 6.16.



Σχήμα 6.31 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Γόννοι)  
 Figure 6.31 Maximum normalized residual for the affine transformation (Gonoi)

Μετασχηματισμός ομοιότητας			Αφινικός μετασχηματισμός		
	Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι		Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι
Παράμετροι			Παράμετροι		
a	0.999815	1.000010	a	0.999815	1.000011
b	0.022776	0.017176	b	-0.022773	-0.017173
c	12930.428	-8217.958	c	13372.444	-8447.690
d	14132.799	12411.712	d	0.022787	0.017183
			e	0.999820	1.000007
			f	14709.757	12650.778
$\sigma_a$	0.00000195	0.00000127	$\sigma_a$	0.00000305	0.00000204
$\sigma_b$	0.00000195	0.00000127	$\sigma_b$	0.00000240	0.00000158
$\sigma_c$	0.019171	0.012164	$\sigma_c$	0.018273	0.012264
$\sigma_d$	0.019171	0.012164	$\sigma_d$	0.00000305	0.00000204
			$\sigma_e$	0.00000240	0.00000158
			$\sigma_f$	0.018273	0.012264
Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$	0.988	0.975	Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$	0.980	0.986
Τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης $\hat{\sigma}_i$	0.121	0.087	Τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης $\hat{\sigma}_i$	0.117	0.081

Πίνακας 6.16 Αποτελέσματα με βάση το 1<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριοTable 6.16 Results based on the 1<sup>st</sup> alternative criterion

Στους Πίνακες 6.17 και 6.18 συγκρίνονται τα αρχικά αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν από το 1<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο.

		Προσωρινές τιμές (πρώτη επανάληψη)	Τιμές στο αρχικό σημείο διακοπής	Τιμές στο εναλλακτικό σημείο διακοπής
Φ.Χ. Ελασσών	$\sigma_a$	0.00000208	0.00000185	0.00000195
	$\sigma_b$	0.00000208	0.00000185	0.00000195
	$\sigma_c$	0.021477	0.016243	0.019171
	$\sigma_d$	0.021477	0.016243	0.019171
Φ.Χ. Γόννοι	$\sigma_a$	0.00000140	0.00000121	0.00000127
	$\sigma_b$	0.00000140	0.00000121	0.00000127
	$\sigma_c$	0.014373	0.010757	0.012164
	$\sigma_d$	0.014373	0.010757	0.012164

Πίνακας 6.17 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για το μετασχηματισμό ομοιότητας

Table 6.17 Comparison between new and previous results for the similarity transformation

		Αρχικές τιμές (πρώτη επανάληψη)	Τιμές στο πρώτο σημείο διακοπής	Τιμές στο εναλλακτικό σημείο διακοπής
Φ.Χ. Ελασσών	$\sigma_a$	0.00000335	0.00000263	0.00000305
	$\sigma_b$	0.00000261	0.00000248	0.00000240
	$\sigma_c$	0.021269	0.014799	0.018273
	$\sigma_d$	0.00000335	0.00000263	0.00000305
	$\sigma_e$	0.00000261	0.00000248	0.00000240
	$\sigma_f$	0.021269	0.014799	0.018273
Φ.Χ. Γόννοι	$\sigma_a$	0.00000210	0.00000180	0.00000204
	$\sigma_b$	0.00000165	0.00000159	0.00000158
	$\sigma_c$	0.013279	0.010712	0.012264
	$\sigma_d$	0.00000210	0.00000180	0.00000204
	$\sigma_e$	0.00000165	0.00000159	0.00000158
	$\sigma_f$	0.013279	0.010712	0.012264

Πίνακας 6.18 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για τον αφινικό μετασχηματισμό  
Table 6.18 Comparison between new and previous results for the affine transformation

Παρατηρούμε ότι όλες οι παράμετροι έχουν μεγαλύτερα τυπικά σφάλματα αν σταματήσουν οι επαναλήψεις με βάση το εναλλακτικό κριτήριο.

Για να ελεγχθεί και πρακτικά η ακρίβεια των νέων αποτελεσμάτων προσδιορίζονται οι νέες συντεταγμένες Hatt των σημείων ελέγχου και υπολογίζονται οι διαφορές τους με τις πραγματικές από τη ΓΥΣ. Οι διαφορές αυτές συγκρίνονται στη συνέχεια με αυτές που προέκυψαν για τα προηγούμενα σημεία διακοπής (Πίνακες 6.19, 6.20).

	Κωδικός σημείου	Νέα εκτίμηση των σημείων ελέγχου		Νέες διαφορές		Προηγούμενες διαφορές	
		X	Y	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta X$	$\delta Y$
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.042	9810.056	-0.078	-0.048	0.010	-0.102
	87	13366.940	11676.989	-0.068	0.037	-0.004	0.033
	88	10246.231	14237.036	-0.075	0.030	-0.027	-0.003
	89	21392.507	15339.970	-0.118	-0.072	-0.094	-0.018
	90	15218.301	16435.954	-0.100	0.038	-0.077	0.042
	91	17344.767	20282.629	-0.073	-0.138	-0.084	-0.123
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.085</b>	<b>0.060</b>	<b>0.049</b>	<b>0.053</b>
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.969	8816.993	-0.051	-0.030	-0.034	-0.031
	99	-9890.884	10630.824	-0.045	0.005	-0.029	-0.004
	100	-15360.524	10926.918	-0.120	0.013	-0.095	0.015
	101	-2119.546	14968.299	-0.056	-0.049	-0.040	-0.083
	102	-5088.191	15675.624	-0.038	-0.027	-0.017	-0.054
	103	-4047.801	19569.247	-0.023	-0.109	0.006	-0.145
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.055</b>	<b>0.039</b>	<b>0.037</b>	<b>0.055</b>

Πίνακας 6.19 Σύγκριση διαφορών για το μετασχηματισμό ομοιότητας  
Table 6.19 Comparison of differences for the similarity transformation

	Κωδικός σημείου	Νέα εκτίμηση των σημείων ελέγχου		Νέες διαφορές		Προηγούμενες διαφορές	
		X	Y	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta X$	$\delta Y$
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.030	9809.951	-0.090	-0.153	0.029	-0.221
	87	13366.933	11676.968	-0.075	0.016	0.008	-0.004
	88	10246.233	14236.990	-0.073	-0.016	-0.013	-0.049
	89	21392.512	15340.057	-0.113	0.015	-0.091	0.056
	90	15218.309	16435.975	-0.092	0.059	-0.068	0.064
	91	17344.787	20282.692	-0.053	-0.075	-0.078	-0.047
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.082</b>	<b>0.056</b>	<b>0.048</b>	<b>0.073</b>
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.987	8816.963	-0.069	-0.060	-0.064	-0.043
	99	-9890.895	10630.809	-0.056	-0.010	-0.041	0.003
	100	-15360.538	10926.865	-0.134	-0.040	-0.113	-0.018
	101	-2119.538	14968.325	-0.048	-0.023	-0.012	-0.024
	102	-5088.183	15675.628	-0.030	-0.023	0.013	-0.019
	103	-4047.780	19569.248	-0.002	-0.108	0.064	-0.106
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.056</b>	<b>0.044</b>	<b>0.051</b>	<b>0.035</b>

Πίνακας 6.20 Σύγκριση διαφορών για τον αφινικό μετασχηματισμό

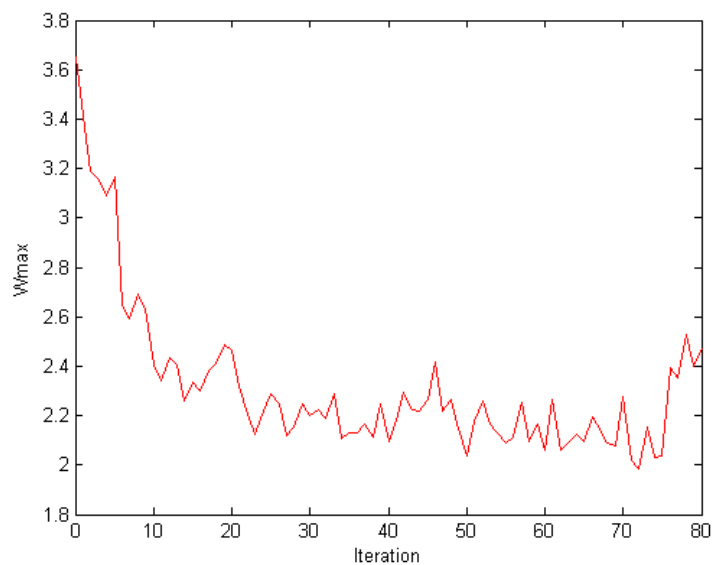
Table 6.20 Comparison of differences for the affine transformation

Μετά από εξέταση των αποτελεσμάτων παρατηρούμε γενικά ότι οι διαφορές στα σημεία ελέγχου είναι μεγαλύτερες αν χρησιμοποιηθεί το 1<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η απόφαση να διακοπούν οι επαναλήψεις σε μεταγενέστερο σημείο και όχι χρησιμοποιώντας αυστηρά το κριτήριο του Baarda φαίνεται σωστή.

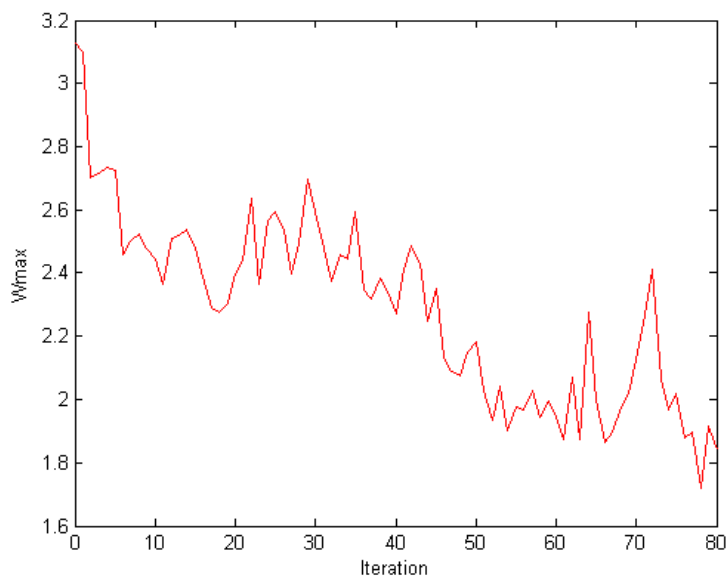
#### 6.4.2 2<sup>ο</sup> Εναλλακτικό κριτήριο

Στην ενότητα αυτή θα εξεταστεί η λύση που θα δώσει ο αλγόριθμος αν τα σημεία διακοπής των επαναλήψεων επιλεχθούν με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του μέγιστου κανονικοποιημένου υπολοίπου. Το κριτήριο αυτό θα εφαρμοστεί με τη δέσμευση ότι θα παραμείνουν τουλάχιστον είκοσι σημεία στη συνόρθωση. Παρακάτω δίνονται ξανά για λόγους ευκολίας τα διαγράμματα του κανονικοποιημένου υπολοίπου για το Φ.Χ. “Γόννοι”.

Με βάση το 2<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο, τα νέα σημεία διακοπής για το Φ.Χ. “Γόννοι” είναι οι επαναλήψεις 72 και 66 αντίστοιχα για τους δύο μετασχηματισμούς.



Σχήμα 6.32 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για το μετασχηματισμό ομοιότητας (Γόννοι)  
 Figure 6.32 Maximum normalized residual for the similarity transformation (Gonoi)



Σχήμα 6.33 Μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο για τον αφινικό μετασχηματισμό (Γόννοι)  
 Figure 6.33 Maximum normalized residual for the affine transformation (Gonoi)

Στον Πίνακα 6.21 παρουσιάζονται οι υπολογισμένες παράμετροι των δύο μετασχηματισμών στα προσδιορισμένα σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριο σημεία διακοπής των επαναλήψεων. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αρχικά αποτελέσματα παρουσιάζεται στους Πίνακες 6.22 και 6.23.

Μετασχηματισμός ομοιότητας			Αφινικός μετασχηματισμός		
	Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι		Φ.Χ. Ελασσών	Φ.Χ. Γόννοι
Παράμετροι			Παράμετροι		
a	0.999819	1.000011	a	0.999814	1.000008
b	0.022785	0.017170	b	-0.022793	-0.017152
c	14125.675	-7997.749	c	15618.688	-10607.169
d	15369.821	9412.158	d	0.022792	0.017176
			e	0.999830	0.999997
			f	16253.865	7642.239
$\sigma_a$	0.00000149	0.00000091	$\sigma_a$	0.00000212	0.00000115
$\sigma_b$	0.00000149	0.00000091	$\sigma_b$	0.00000220	0.00000149
$\sigma_c$	0.008555	0.005995	$\sigma_c$	0.007501	0.005846
$\sigma_d$	0.008555	0.005995	$\sigma_d$	0.00000212	0.00000115
			$\sigma_e$	0.00000220	0.00000149
			$\sigma_f$	0.007501	0.005846
Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$	0.982	0.953	Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$	0.974	0.982
Τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης $\hat{\sigma}_l$	0.057	0.021	Τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης $\hat{\sigma}_l$	0.022	0.028

Πίνακας 6.21 Αποτελέσματα με βάση το 2<sup>ο</sup> εναλλακτικό κριτήριοTable 6.21 Results based on the 2<sup>nd</sup> alternative criterion

		Αρχικές τιμές (πρώτη επανάληψη)	Τιμές στο πρώτο σημείο διακοπής	Τιμές στο εναλλακτικό σημείο διακοπής
Φ.Χ. Ελασσών	$\sigma_a$	0.00000208	0.00000185	0.00000149
	$\sigma_b$	0.00000208	0.00000185	0.00000149
	$\sigma_c$	0.021477	0.016243	0.008555
	$\sigma_d$	0.021477	0.016243	0.008555
Φ.Χ. Γόννοι	$\sigma_a$	0.00000140	0.00000121	0.00000091
	$\sigma_b$	0.00000140	0.00000121	0.00000091
	$\sigma_c$	0.014373	0.010757	0.005995
	$\sigma_d$	0.014373	0.010757	0.005995

Πίνακας 6.22 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για το μετασχηματισμό ομοιότητας

Table 6.22 Comparison between new and previous results for the similarity transformation

		Αρχικές τιμές (πρώτη επανάληψη)	Τιμές στο πρώτο σημείο διακοπής	Τιμές στο εναλλακτικό σημείο διακοπής
Φ.Χ. Ελασσών	$\sigma_a$	0.00000335	0.00000263	0.00000212
	$\sigma_b$	0.00000261	0.00000248	0.00000220
	$\sigma_c$	0.021269	0.014799	0.007501
	$\sigma_d$	0.00000335	0.00000263	0.00000212
	$\sigma_e$	0.00000261	0.00000248	0.00000220
	$\sigma_f$	0.021269	0.014799	0.007501
Φ.Χ. Γόννοι	$\sigma_a$	0.00000210	0.00000180	0.00000115
	$\sigma_b$	0.00000165	0.00000159	0.00000149
	$\sigma_c$	0.013279	0.010712	0.005846
	$\sigma_d$	0.00000210	0.00000180	0.00000115
	$\sigma_e$	0.00000165	0.00000159	0.00000149
	$\sigma_f$	0.013279	0.010712	0.005846

Πίνακας 6.23 Σύγκριση νέων και προηγούμενων αποτελεσμάτων για τον αφινικό μετασχηματισμό  
Table 6.23 Comparison between new and previous results for the affine transformation

Παρατηρούμε ότι τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων τώρα είναι μικρότερα από αυτά στο αρχικό σημείο διακοπής, φαίνεται δηλαδή ότι και οι δύο μετασχηματισμοί βελτιώνονται αν συνεχιστούν περισσότερο οι επαναλήψεις.

Οι Πίνακες 6.24 και 6.25 παρουσιάζουν τις διαφορές στις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου που προκύπτουν με εφαρμογή των νέων παραμέτρων μετασχηματισμού.

	Κωδικός σημείου	Νέα εκτίμηση των σημείων ελέγχου		Νέες διαφορές		Προηγούμενες διαφορές	
		X	Y	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta X$	$\delta Y$
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.131	9809.936	0.011	-0.168	0.010	-0.102
	87	13367.038	11676.939	0.030	-0.013	-0.004	0.033
	88	10246.292	14236.966	-0.014	-0.040	-0.027	-0.003
	89	21392.604	15340.011	-0.021	-0.031	-0.094	-0.018
	90	15218.362	16435.941	-0.039	0.025	-0.077	0.042
	91	17344.800	20282.652	-0.040	-0.115	-0.084	-0.123
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.026</b>	<b>0.065</b>	<b>0.049</b>	<b>0.053</b>
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.958	8817.013	-0.040	-0.010	-0.034	-0.031
	99	-9890.858	10630.829	-0.019	0.010	-0.029	-0.004
	100	-15360.503	10926.957	-0.099	0.052	-0.095	0.015
	101	-2119.483	14968.259	0.007	-0.089	-0.040	-0.083
	102	-5088.128	15675.604	0.025	-0.047	-0.017	-0.054
	103	-4047.711	19569.225	0.067	-0.131	0.006	-0.145
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.043</b>	<b>0.056</b>	<b>0.037</b>	<b>0.055</b>

Πίνακας 6.24 Σύγκριση διαφορών για το μετασχηματισμό ομοιότητας  
Table 6.24 Comparison of differences for the similarity transformation



	Κωδικός σημείου	Νέα εκτίμηση των σημείων ελέγχου		Νέες διαφορές		Προηγούμενες διαφορές	
		X	Y	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta X$	$\delta Y$
Φ.Χ. Ελασσών	86	6711.225	9809.799	0.105	-0.305	0.029	-0.221
	87	13367.082	11676.865	0.074	-0.087	0.008	-0.004
	88	10246.331	14236.901	0.025	-0.105	-0.013	-0.049
	89	21392.576	15340.029	-0.049	-0.013	-0.091	0.056
	90	15218.357	16435.932	-0.044	0.016	-0.068	0.064
	91	17344.752	20282.700	-0.088	-0.067	-0.078	-0.047
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.064</b>	<b>0.099</b>	<b>0.048</b>	<b>0.073</b>
Φ.Χ. Γόννοι	98	-12798.942	8817.002	-0.024	-0.021	-0.064	-0.043
	99	-9890.818	10630.810	0.021	-0.009	-0.041	0.003
	100	-15360.439	10926.902	-0.035	-0.003	-0.113	-0.018
	101	-2119.390	14968.227	0.100	-0.121	-0.012	-0.024
	102	-5088.011	15675.545	0.142	-0.106	0.013	-0.019
	103	-4047.527	19569.118	0.251	-0.238	0.064	-0.106
<b>Μέσος όρος απόλυτων τιμών</b>				<b>0.095</b>	<b>0.083</b>	<b>0.051</b>	<b>0.035</b>

Πίνακας 6.25 Σύγκριση διαφορών για τον αφινικό μετασχηματισμό

Table 6.25 Comparison of differences for the affine transformation

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές δεν βελτιώνονται αν συνεχιστούν οι επαναλήψεις και μάλιστα στην περίπτωση του αφινικού μετασχηματισμού αυτές είναι αρκετά μεγαλύτερες.

Το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί αν εξετάσουμε τα υπόλοιπα των σημείων του Φ.Χ. “Ελασσών” στην επανάληψη 18 του αφινικού μετασχηματισμού (Σχήμα 6.27) και τα συγκρίνουμε με αυτά της πρώτης επανάληψης (Σχήμα 6.14). Παρατηρείται ότι στην επανάληψη 18 έχουν ήδη απορριφθεί όλες οι ακραίες τιμές των υπολοίπων, δηλαδή δεν υπάρχουν πια απομονωμένες τιμές που να διαφέρουν σημαντικά από τις άλλες. Μπορούμε να θεωρήσουμε επομένως ότι οι παρατηρήσεις που πρόκειται να απορριφθούν πέραν του σημείου αυτού είναι χρήσιμες για τη συνόρθωση.

Το συμπέρασμα είναι λοιπόν ότι η απόρριψη μεγάλου αριθμού σημείων δε συνεπάγεται βελτίωση ενός μετασχηματισμού. Με βάση τα σημεία ελέγχου, ο μετασχηματισμός γίνεται καλύτερος όσο απορρίπτονται σημεία με ακραίες τιμές υπολοίπων αλλά αν η διαδικασία απόρριψης συνεχιστεί μετά το σημείο όπου το εύρος των μέγιστων υπολοίπων σταθεροποιείται, ο μετασχηματισμός μπορεί να παράγει χειρότερα αποτελέσματα. Οι αβεβαιότητες των παραμέτρων του μετασχηματισμού συνεχίζουν να μειώνονται με κάθε επανάληψη αλλά αυτό αποτελεί μάλλον μία υπεραισιόδοξη

κατάσταση. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται πιθανότατα στην συνεχιζόμενη μείωση του βαθμού ελευθερίας, η οποία καθιστά αδύναμο το μοντέλο της συνόρθωσης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

#### 7.1 Σύνοψη - συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε διαφορετικές περιοχές, τα οποία παρουσιάστηκαν στο Έβδομο κεφάλαιο, μπορούν να συνοψισθούν ως εξής.

Προκειμένου να προσδιοριστούν οι παράμετροι ενός μετασχηματισμού σε μία περιοχή με ικανοποιητική ακρίβεια για τις ανάγκες ενός έργου, απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η ύπαρξη μεγάλου αριθμού κοινών σημείων, ώστε να προκύπτει μεγάλος βαθμός ελευθερίας και ισχυρό μοντέλο της συνόρθωσης. Για τη βελτιστοποίηση όμως των αποτελεσμάτων του μετασχηματισμού είναι αναγκαία η απόρριψη των σημείων που περιέχουν χονδροειδή σφάλματα καθώς και σημεία που απέχουν μεγάλη απόσταση από το κέντρο βάρους της περιοχής. Η αναγνώριση των σημείων αυτών γίνεται με εξέταση των κανονικοποιημένων υπολοίπων τους.

Με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα ανάγεται τελικά στον προσδιορισμό ενός “σημείου ισορροπίας”, μιας κατάστασης δηλαδή όπου θα έχουν απορριφθεί αρκετά “άχρηστα” σημεία, αλλά θα παραμένει συγχρόνως ικανός αριθμός σημείων (δηλαδή μεγάλος βαθμός ελευθερίας). Το σημείο αυτό προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας ως βάση το κριτήριο του Baarda και εξετάζοντας τη γραφική παράσταση των μέγιστων κανονικοποιημένων υπολοίπων. Ως σημείο διακοπής των επαναλήψεων προτείνεται να επιλέγεται εκείνο όπου το μέγιστο κανονικοποιημένο υπόλοιπο φαίνεται να σταθεροποιείται σε ένα χαμηλό σημείο. Με βάση τις περιοχές που εξετάστηκαν, διαφαίνεται επίσης ότι τα σημεία που θα απορριφθούν αποτελούν το 15% – 35% του συνολικού αριθμού των αρχικών σημείων. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, η μέθοδος για την εύρεση του βέλτιστου σημείου αποκοπής της συνόρθωσης είναι εμπειρική και χρειάζεται να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων που παράγονται από κάποια πιθανά σημεία ισορροπίας για την επιλογή του βέλτιστου.

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόσθηκε με στόχο τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων επίπεδων μετασχηματισμών σε περιοχές αρκετά μεγάλης έκτασης της τάξης (περίπου  $100 \text{ km}^2$ ).

Όσον αφορά την επιλογή του κατάλληλου μετασχηματισμού, η διερεύνηση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι για όλες γενικά τις περιοχές εφαρμογής, τόσο ο μετασχηματισμός ομοιότητας όσο και ο αφινικός μετασχηματισμός δίνουν παρόμοιες λύσεις, η ακρίβεια των οποίων εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την ποιότητα των τριγωνομετρικών σημείων της περιοχής εφαρμογής και κυμαίνεται από 3 cm έως 15 cm. Στην περίπτωση του αφινικού μετασχηματισμού αναμένεται να είναι λίγο βελτιωμένες και να φτάσουν και τα 2 cm. Με βάση τα αποτελέσματα λοιπόν, προκύπτει ότι η επιλογή του μετασχηματισμού θα γίνεται μετά από δοκιμές.

## 7.2 Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση

Οι προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση του αντικειμένου στρέφονται προς δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά την προσθήκη επιπλέον ελέγχου και κριτηρίου ώστε ο αλγόριθμος να παράγει τεκμηριωμένα αξιόπιστα αποτελέσματα. Προτείνεται η εφαρμογή δοκιμών για την υιοθέτηση οριακών τιμών (threshold values) στη μεταβολή των παραμέτρων του μετασχηματισμού (πχ κλίμακα δκ, στροφή δφ) τα οποία θα αποτελούν κριτήριο διακοπής των επαναλήψεων.

Η δεύτερη κατεύθυνση αφορά την περαιτέρω αυτοματοποίηση του αλγορίθμου. Ιδανικά, ένας παραμετροποιημένος αλγόριθμος θα πρέπει με στοιχεία εισαγωγής την περιοχή ενδιαφέροντος να προσδιορίζει αυτόματα το κέντρο βάρους της περιοχής, να εκτελεί επαναλήψεις με διαφορετικούς μετασχηματισμούς βάσει προκαθορισμένων κριτηρίων (όπως τα εναλλακτικά σενάρια που υιοθετήθηκαν σε αυτήν την εργασία) και να προτείνει τη βέλτιστη λύση παραμέτρων.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### ΚΩΔΙΚΕΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΣΕ MATLAB

#### Δισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας

```
%2D similarity transformation

clear all
format long g

%Points upload
%First line of txt : first number = number of common points that will
participate in adjustment
%second number = number of control points
Data = load('mPCP0gonoi.txt');
Dataconst = Data;

%set repeats
repeats=80;

%Initialization of matrices
Rfreedom = zeros(repeats+1,1);
S0 = ones(repeats+1,1);
Ummean = zeros(repeats+1,1);
Ummax = zeros(repeats+1,1);
wxegsamax = zeros(repeats+1,1);
wyegsamax = zeros(repeats+1,1);
wxhattmax = zeros(repeats+1,1);
wyhattmax = zeros(repeats+1,1);
wmean = zeros(repeats+1,1);
wmax = zeros(repeats+1,1);
wmax2 = zeros(repeats+1,1);
wmaxalt = zeros(repeats+1,1);
Dmax = zeros(repeats+1,1);
Rsysx = zeros(repeats+1,1);
PointsKept = ([1:Data(1,1)])';
Temp = Data(2:Data(1,1)+1,1:2);
PointsKept = [PointsKept Temp]; %pinakas me synt/nes olvn tvn simeivn
se hatt
PointsDiscarded = zeros(repeats,3);

%Initialization
for metritis=0:repeats

%Separation of points
pointsnum=Data(1,1);
controlpoints=Data(1,2);
Rawpoints = Data(2:pointsnum+1,:);
Rawcpoints = Data(pointsnum+2:pointsnum+controlpoints+1,:);
if (metritis==0)
    vx=0.003;
    vX=0.003;
```

```

else
    vx=S0(metritis)^2*vx;
    vX=S0(metritis)^2*vX;
end

%Point correction according to area center
xcg=mean(Rawpoints(:,3));
ycg=mean(Rawpoints(:,4));
Points = [Rawpoints(:,1:2) Rawpoints(:,3)-xcg Rawpoints(:,4)-ycg];
CPoints = [Rawpoints(:,1:2) Rawpoints(:,3)-xcg Rawpoints(:,4)-ycg];

%Least squares parameters
n=pointsnum*4;
m=4+pointsnum*2;
m0=4;
c=n-m+m0;
Rfreedom(metritis+1,1)=n-m;

X0 = [0.999457;-0.028051;6421.298;10427.259];

%Building of matrices
A = zeros(c,m0);
for i=1:pointsnum
    j1=2*i-1;
    A(j1,1)=Points(i,3);
    A(j1,2)=-Points(i,4);
    A(j1,3)=1;
    A(j1+1,1)=Points(i,4);
    A(j1+1,2)=Points(i,3);
    A(j1+1,4)=1;
end

B = zeros(c,n);
for i=1:2:c
    j1=2*i-1;
    B(i,j1)=X0(1,1);
    B(i,j1+1)=-X0(2,1);
    B(i,j1+2)=-1;
    B(i+1,j1)=X0(2,1);
    B(i+1,j1+1)=X0(1,1);
    B(i+1,j1+3)=-1;
end

L = zeros(n,1);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-3;
    L(j1,1)=Points(i,3);
    L(j1+1,1)=Points(i,4);
    L(j1+2,1)=Points(i,1);
    L(j1+3,1)=Points(i,2);
end

K = zeros(c,1);
for i=1:2:c
    K(i,1)=-X0(3,1);
    K(i+1,1)=-X0(4,1);
end

```

```

Vl = zeros(n,n);
for i=1:4:n
    Vl(i,i)=vx;
    Vl(i+1,i+1)=vx;
    Vl(i+2,i+2)=vx;
    Vl(i+3,i+3)=vx;
end

%Adjustment procedure
Ql = Vl;
W = K-B*L;
Pa = inv(B*Ql*B');
Na = A'*Pa*A;
dX = inv(Na)*A'*Pa*W;
X = X0+dX;

U = Ql*B'*Pa*(W-A*dX);
s02=(U'*inv(Ql)*U)/(n-m);
S0(metritis+1)=sqrt(s02);
Vx = s02*inv(Na);
Vu = s02*Ql*B'*Pa*(diag(ones(c,1))-A*inv(Na)*A'*Pa)*B*Ql;

%Normalized U and sU, calculation of w=U/su for each point and
%calculation of wmean, wmax
Uxegsa = U(1:4:pointsnum*4);
Uyegsa = U(2:4:pointsnum*4);
Uxhatt = U(3:4:pointsnum*4);
Uyhatt = U(4:4:pointsnum*4);
sUxegsa = zeros(pointsnum,1);
sUyegsa = zeros(pointsnum,1);
sUxhatt = zeros(pointsnum,1);
sUyhatt = zeros(pointsnum,1);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-3;
    sUxegsa(i,1)=sqrt(Vu(j1,j1));
    sUyegsa(i,1)=sqrt(Vu(j1+1,j1+1));
    sUxhatt(i,1)=sqrt(Vu(j1+2,j1+2));
    sUyhatt(i,1)=sqrt(Vu(j1+3,j1+3));
end
wxegsa=Uxegsa./sUxegsa;
wyegsa=Uyegsa./sUyegsa;
wxhatt=Uxhatt./sUxhatt;
wyhatt=Uyhatt./sUyhatt;
Um = zeros(pointsnum,1);
sUm = zeros(pointsnum,1);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-3;

Um(i,1)=(abs(U(j1,1))+abs(U(j1+1,1))+abs(U(j1+2,1))+abs(U(j1+3,1)))/4;

sUm(i,1)=sqrt(Vu(j1,j1)+Vu(j1+1,j1+1)+Vu(j1+2,j1+2)+Vu(j1+3,j1+3))/4;
end
Ummean(metritis+1)=mean(Um);
Ummax(metritis+1)=max(Um);
wi = Um./sUm;
wi2=(abs(wxegsa)+abs(wyegsa)+abs(wxhatt)+abs(wyhatt))/4; %neos typos

```

```

wxegsamax(metritis+1)=max(wxegsa);
wyegsamax(metritis+1)=max(wyegsa);
wxhattmax(metritis+1)=max(wxhatt);
wyhattmax(metritis+1)=max(wyhatt);
wialt = zeros(pointsnum,4);
for i=1:pointsnum
    wialt(i,1)=wxegsa(i,1);
    wialt(i,2)=wyegsa(i,1);
    wialt(i,3)=wxhatt(i,1);
    wialt(i,4)=wyhatt(i,1);
end

wmaxalt(metritis+1)=max(max(wialt));
wmean(metritis+1)=mean(wi);
wmax(metritis+1)=max(wi);
wmax2(metritis+1)=max(wi2);

%Calculation of distances from area center
PDist=pointdistances(Rawpoints);
Dmax(metritis+1)=max(PDist);

%Calculation of Rsysx of normalized residual and distance
sUcomb=sqrt((sum(Um.^2)-pointsnum*Ummean(metritis+1,1)^2)/(pointsnum-1));
sPDist=sqrt((sum(PDist.^2)-pointsnum*mean(PDist)^2)/(pointsnum-1));
sUcombPDist=(sum(Um.*PDist)-pointsnum*Ummean(metritis+1,1)*mean(PDist))/(pointsnum-1);
Rsysx(metritis+1)=sUcombPDist/(sUcomb*sPDist);

%Point rejection
if (metritis~=repeats) %Stin teleutaia epanalipsi den tha aporrifthei simeio
% discard=find(wi>=max(wi));
discard=find(wialt>=max(max(wialt)));
for i=1:4
    if (discard>pointsnum)
        discard=discard-pointsnum;
    end
end
Temp = Data(discard+1,:);
Data(discard+1,:) = []; %Diagrafi simeiou apo ta simeia synorthosis
% Data=[Data;Temp]; %Prosthiki simeiou sta simeia eleghou
Data(1,1)=Data(1,1)-1;
% Data(1,2)=Data(1,2)+1; %Epanaprosarmogi tvn 2 protvvn arithmvn sto txt
PointsDiscarded(metritis+1,:)=PointsKept(discard,:);
PointsKept(discard,:) = [];
end
end

%Check parameters for statistical validity
Tvalue = zeros(4,1);
for i=1:4
    Tvalue(i,1)=abs(X(i,1))/sqrt(Vx(i,i));
end

%Calculation of optimum Hatt coordinates
Lopt = L+U;

```



```

Pointsopt = zeros(pointsnum,2);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-1;
    Pointsopt(i,1)=Lopt(j1,1);
    Pointsopt(i,2)=Lopt(j1+1,1);
end

CPointsopt = zeros(controlpoints,2);
for i=1:controlpoints
    CPointsopt(i,1)=X(1,1)*CPoints(i,3)-X(2,1)*CPoints(i,4)+X(3,1);
    CPointsopt(i,2)=X(1,1)*CPoints(i,4)+X(2,1)*CPoints(i,3)+X(4,1);
end

%Calculation of VX matrix
V = Vx;
J = zeros(controlpoints*2,4);
for i=1:controlpoints
    j1=2*i-1;
    J(j1,1)=CPoints(i,3);
    J(j1,2)=-CPoints(i,4);
    J(j1,3)=1;
    J(j1+1,1)=CPoints(i,3);
    J(j1+1,2)=CPoints(i,4);
    J(j1+1,4)=1;
end

VX = J*V*J';
VXdiag1 = zeros(12,1);
for i=1:12
    VXdiag1(i,1)=VX(i,i);
end

%Calculation of VX matrix (based also on errors of original points as
estimated
Vcp = vx*diag(ones(2*controlpoints,1));
V = [Vx zeros(m0,controlpoints*2);zeros(controlpoints*2,m0) Vcp];
J = zeros(controlpoints*2,controlpoints*2+4);
for i=1:controlpoints
    j1=2*i-1;
    j2=(2*i-1)+4;
    J(j1,1)=CPoints(i,3);
    J(j1,2)=-CPoints(i,4);
    J(j1,3)=1;
    J(j1,j2)=X(1,1);
    J(j1,j2+1)=X(2,1);
    J(j1+1,1)=CPoints(i,4);
    J(j1+1,2)=CPoints(i,3);
    J(j1+1,4)=1;
    J(j1+1,j2)=-X(2,1);
    J(j1+1,j2+1)=X(1,1);
end

VX = J*V*J';
VXdiag2 = zeros(12,1);
for i=1:12
    VXdiag2(i,1)=VX(i,i);
end

```

```

%Differences between actual and determined Hatt coordinates of control
points
UHatt = CPointsopt-CPoints(:,1:2);

%Order of points graph
% plot(PointsKept(:,1),PointsKept(:,2))
% figure
% plot(PointsKept(:,1),PointsKept(:,3))

%Print Results
% X
% Vx
% S0
% Ummean
% wmean
% wmax
% PointsKept
% PointsDiscarded

%Basic plots
% S0 black, Ummean blue, wmean green, wmax red
xaxis=0:repeats;
% figure
% plot(xaxis,S0,'k')
% figure
% plot(xaxis,Ummean,'b')
% figure
% plot(xaxis,wmean,'g')
% figure
% plot(xaxis,wmax,'r',xaxis,3.29.*ones(repeats+1,1),'m--')
% figure
% plot(xaxis,wmax2,'r',xaxis,3.29.*ones(repeats+1,1),'m--')
figure
plot(xaxis,wmaxalt,'r')
% figure
% plot(xaxis,wxegsamax)
% figure
% plot(xaxis,wyegsamax)
% figure
% plot(xaxis,wxhattmax)
% figure
% plot(xaxis,wyhattmax)
% figure
% plot
(xaxis,wxegsamax,'b',xaxis,wyegsamax,'c',xaxis,wxhattmax,'g',xaxis,wyha
ttmax,'r')

%Iteration 0/20 plots
% xaxis=1:pointsnum;
% figure
% plot(xaxis,Uxegsa)
% figure
% plot(xaxis,Uyegsa)
% figure
% plot(xaxis,Uxhatt)

```

```

% figure
% plot(xaxis,Uyhatt)
% figure
%
plot(xaxis,Uxegsa,'b',xaxis,Uyegsa,'c',xaxis,Uxhatt,'g',xaxis,Uyhatt,'r
')
% figure
% plot(xaxis,Um)
% figure
% plot(PDist,Um,'+')
% Azim = zeros(pointsnum,1);
% for i=1:pointsnum
%     azpros=atan(abs(Points(i,3)/Points(i,4)));
%     if (Points(i,3)>=0)
%         if (Points(i,4)>=0)
%             Azim(i,1)=azpros;
%         end
%         if (Points(i,4)<0)
%             Azim(i,1)=pi-azpros;
%         end
%     end
%     if (Points(i,3)<0)
%         if (Points(i,4)>=0)
%             Azim(i,1)=2*pi-azpros;
%         end
%         if (Points(i,4)<0)
%             Azim(i,1)=azpros+pi;
%         end
%     end
% end
% rho=ones(pointsnum,1);
% figure
% polar(Azim,rho,'o')

%Discarded points plot
%First 5 points red, next 5 green, last 5 cyan, points kept black,
%additional points discarded (more repeats) blue
% xaxis1=PointsKept(:,2);
% yaxis1=PointsKept(:,3);
% xaxis2=PointsDiscarded(1:5,2);
% yaxis2=PointsDiscarded(1:5,3);
% xaxis3=PointsDiscarded(6:10,2);
% yaxis3=PointsDiscarded(6:10,3);
% xaxis4=PointsDiscarded(11:15,2);
% yaxis4=PointsDiscarded(11:15,3);
% xaxis5=PointsDiscarded(16:repeats,2);
% yaxis5=PointsDiscarded(16:repeats,3);
% figure
%
plot(xaxis1,yaxis1,'kx',xaxis2,yaxis2,'r+',xaxis3,yaxis3,'g+',xaxis4,ya
xis4,'c+',xaxis5,yaxis5,'b+')

%Area center plot
% xaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,1);
% yaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,2);
% xaxis2=PointsKept(:,2);
% yaxis2=PointsKept(:,3);

```

```

% xcg1=mean(xaxis1);
% ycg1=mean(yaxis1);
% xcg2=mean(xaxis2);
% ycg2=mean(yaxis2);
% figure
%
plot(xaxis1,yaxis1,'rx',xaxis2,yaxis2,'kx',xcg1,ycg1,'mo',xcg2,ycg2,'bo
')

%Area and control points plot
% xaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,1);
% yaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,2);
% xaxis2=CPoints(:,1);
% yaxis2=CPoints(:,2);
% xcg1=mean(xaxis1);
% ycg1=mean(yaxis1);
% Xparal=[-13100;1100;-3100;-17300;-13100];
% Yparal=[6400;14600;21200;12800;6400];
% figure
%
plot(xaxis1,yaxis1,'b+',xaxis2,yaxis2,'m+',xcg1,ycg1,'ro',Xparal,Yparal
,'g-')

%Control point plots
%DX in red, DY in blue
% xaxis=1:controlpoints;
% figure
% plot(xaxis,UHatt(:,1),'r',xaxis,UHatt(:,2),'b')

%Additional plots
% xaxis=0:repeats;
% figure
% plot(xaxis,Rfreedom)
% figure
% plot(xaxis,Rsysx)
% figure
% plot(xaxis,Ummax)
% figure
% plot(xaxis,Dmax)

```

### Αφινικός μετασχηματισμός

```

%Affine transformation

clear all
format long g

%Points upload
%First line of txt : first number = number of common points that will
participate in adjustment
%second number = number of control points
Data = load('mPCP0gonoi.txt');
Dataconst = Data;

%set repeats

```

```

repeats=80;

%Initialization of matrices
Rfreedom = zeros(repeats+1,1);
S0 = ones(repeats+1,1);
Ummean = zeros(repeats+1,1);
Ummax = zeros(repeats+1,1);
wxegsamax = zeros(repeats+1,1);
wyegsamax = zeros(repeats+1,1);
wxhattmax = zeros(repeats+1,1);
wyhattmax = zeros(repeats+1,1);
wmean = zeros(repeats+1,1);
wmax = zeros(repeats+1,1);
wmaxalt = zeros(repeats+1,1);
Dmax = zeros(repeats+1,1);
Rsysx = zeros(repeats+1,1);
PointsKept = ([1:Data(1,1)])';
Temp = Data(2:Data(1,1)+1,1:2);
PointsKept = [PointsKept Temp]; %pinakas me synt/nes olvn tvn simeivn
se hatt
PointsDiscarded = zeros(repeats,3);

%Initialization
for metritis=0:repeats

%Separation of points
pointsnum=Data(1,1);
controlpoints=Data(1,2);
Rawpoints = Data(2:pointsnum+1,:);
Rawpoints = Data(pointsnum+2:pointsnum+controlpoints+1,:);
if (metritis==0)
    vx=0.02;
    vX=0.02;
else
    vx=S0(metritis)^2*vx;
    vX=S0(metritis)^2*vX;
end

%Point correction according to area center
xcg=mean(Rawpoints(:,3));
ycg=mean(Rawpoints(:,4));
Points = [Rawpoints(:,1:2) Rawpoints(:,3)-xcg Rawpoints(:,4)-ycg];
CPoints = [Rawpoints(:,1:2) Rawpoints(:,3)-xcg Rawpoints(:,4)-ycg];

%Least squares parameters
n=pointsnum*4;
m=6+pointsnum*2;
m0=6;
c=n-m+m0;
Rfreedom(metritis+1,1)=n-m;

X0 = [0.9998;-0.0228;13410;0.0228;0.9998;13890];

%Building of matrices
A = zeros(c,m0);
for i=1:pointsnum
    j1=2*i-1;

```

```

    A(j1,1)=Points(i,3);
    A(j1,2)=Points(i,4);
    A(j1,3)=1;
    A(j1+1,4)=Points(i,3);
    A(j1+1,5)=Points(i,4);
    A(j1+1,6)=1;
end

B = zeros(c,n);
for i=1:2:c
    j1=2*i-1;
    B(i,j1)=X0(1,1);
    B(i,j1+1)=X0(2,1);
    B(i,j1+2)=-1;
    B(i+1,j1)=X0(4,1);
    B(i+1,j1+1)=X0(5,1);
    B(i+1,j1+3)=-1;
end

L = zeros(n,1);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-3;
    L(j1,1)=Points(i,3);
    L(j1+1,1)=Points(i,4);
    L(j1+2,1)=Points(i,1);
    L(j1+3,1)=Points(i,2);
end

K = zeros(c,1);
for i=1:2:c
    K(i,1)=-X0(3,1);
    K(i+1,1)=-X0(6,1);
end

Vl = zeros(n,n);
for i=1:4:n
    Vl(i,i)=vx;
    Vl(i+1,i+1)=vx;
    Vl(i+2,i+2)=vx;
    Vl(i+3,i+3)=vx;
end

%Adjustment procedure
Ql = Vl;
W = K-B*L;
Pa = inv(B*Ql*B');
Na = A'*Pa*A;
dX = inv(Na)*A'*Pa*W;
X = X0+dX;

U = Ql*B'*Pa*(W-A*dX);
s02=(U'*inv(Ql)*U)/(n-m);
S0(metritis+1)=sqrt(s02);
Vx = s02*inv(Na);
Vu = s02*Ql*B'*Pa*(diag(ones(c,1))-A*inv(Na)*A'*Pa)*B*Ql;

%Normalized U and sU, calculation of w=U/su for each point and

```

```

%calculation of wmean, wmax
Uxegsa = U(1:4:pointsnum*4);
Uyegsa = U(2:4:pointsnum*4);
Uxhatt = U(3:4:pointsnum*4);
Uyhatt = U(4:4:pointsnum*4);
sUxegsa = zeros(pointsnum,1);
sUyegsa = zeros(pointsnum,1);
sUxhatt = zeros(pointsnum,1);
sUyhatt = zeros(pointsnum,1);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-3;
    sUxegsa(i,1)=sqrt(Vu(j1,j1));
    sUyegsa(i,1)=sqrt(Vu(j1+1,j1+1));
    sUxhatt(i,1)=sqrt(Vu(j1+2,j1+2));
    sUyhatt(i,1)=sqrt(Vu(j1+3,j1+3));
end
wxegsa=Uxegsa./sUxegsa;
wyegsa=Uyegsa./sUyegsa;
wxhatt=Uxhatt./sUxhatt;
wyhatt=Uyhatt./sUyhatt;
Um = zeros(pointsnum,1);
sUm = zeros(pointsnum,1);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-3;

Um(i,1)=(abs(U(j1,1))+abs(U(j1+1,1))+abs(U(j1+2,1))+abs(U(j1+3,1)))/4;

sUm(i,1)=sqrt(Vu(j1,j1)+Vu(j1+1,j1+1)+Vu(j1+2,j1+2)+Vu(j1+3,j1+3))/4;
end
Ummean(metritis+1)=mean(Um);
Ummax(metritis+1)=max(Um);
wi = Um./sUm;
% wi=(abs(wxegsa)+abs(wyegsa)+abs(wxhatt)+abs(wyhatt))/4; %neos typos
% wxegsamax(metritis+1)=max(wxegsa);
% wyegsamax(metritis+1)=max(wyegsa);
% wxhattmax(metritis+1)=max(wxhatt);
% wyhattmax(metritis+1)=max(wyhatt);
wialt = zeros(pointsnum,4);
for i=1:pointsnum
    wialt(i,1)=wxegsa(i,1);
    wialt(i,2)=wyegsa(i,1);
    wialt(i,3)=wxhatt(i,1);
    wialt(i,4)=wyhatt(i,1);
end

wmaxalt(metritis+1)=max(max(wialt));
wmean(metritis+1)=mean(wi);
wmax(metritis+1)=max(wi);

%Calculation of distances from area center
PDist=PointDistances(Rawpoints);
Dmax(metritis+1)=max(PDist);

%Calculation of Rsysx of normalized residual and distance
sUcomb=sqrt((sum(Um.^2)-pointsnum*Ummean(metritis+1,1)^2)/(pointsnum-1));
sPDist=sqrt((sum(PDist.^2)-pointsnum*mean(PDist)^2)/(pointsnum-1));

```

```

sUcombPDist=(sum(Um.*PDist)-
pointsnum*Ummean(metritis+1,1)*mean(PDist))/(pointsnum-1);
Rsysx(metritis+1)=sUcombPDist/(sUcomb*sPDist);

%Point rejection
if (metritis~=repeats) %Stin teleutaia epanalipsi den tha aporrifthei
simeio
% discard=find(wi>=max(wi));
discard=find(wialt>=max(max(wialt)));
for i=1:4
    if (discard>pointsnum)
        discard=discard-pointsnum;
    end
end
Temp = Data(discard+1,:);
Data(discard+1,:) = []; %Diagrafi simeiou apo ta simeia synorthosis
% Data=[Data;Temp]; %Prosthiki simeiou sta simeia eleghou
Data(1,1)=Data(1,1)-1;
% Data(1,2)=Data(1,2)+1; %Epanaprosarmogi tvn 2 protvn arithmvn sto txt
PointsDiscarded(metritis+1,:)=PointsKept(discard,:);
PointsKept(discard,:) = [];
end
end

%Check parameters for statistical validity
Tvalue = zeros(6,1);
for i=1:6
    Tvalue(i,1)=abs(X(i,1))/sqrt(Vx(i,i));
end

%Calculation of optimum Hatt coordinates
Lopt = L+U;
Pointsopt = zeros(pointsnum,2);
for i=1:pointsnum
    j1=4*i-1;
    Pointsopt(i,1)=Lopt(j1,1);
    Pointsopt(i,2)=Lopt(j1+1,1);
end

CPointsopt = zeros(controlpoints,2);
for i=1:controlpoints
    CPointsopt(i,1)=X(1,1)*CPoints(i,3)+X(2,1)*CPoints(i,4)+X(3,1);
    CPointsopt(i,2)=X(4,1)*CPoints(i,3)+X(5,1)*CPoints(i,4)+X(6,1);
end

%Calculation of VX matrix
V = Vx;
J = zeros(controlpoints*2,6);
for i=1:controlpoints
    j1=2*i-1;
    J(j1,1)=CPoints(i,3);
    J(j1,2)=CPoints(i,4);
    J(j1,3)=1;
    J(j1+1,4)=CPoints(i,3);
    J(j1+1,5)=CPoints(i,4);
    J(j1+1,6)=1;
end
end

```



```

VX = J*V*J';
VXdiag1 = zeros(12,1);
for i=1:12
    VXdiag1(i,1)=VX(i,i);
end

%Calculation of VX matrix (based also on errors of original points as
estimated
Vcp = vx*diag(ones(2*controlpoints,1));
V = [Vx zeros(m0,controlpoints*2);zeros(controlpoints*2,m0) Vcp];
J = zeros(controlpoints*2,controlpoints*2+6);
for i=1:controlpoints
    j1=2*i-1;
    j2=(2*i-1)+6;
    J(j1,1)=CPoints(i,3);
    J(j1,2)=CPoints(i,4);
    J(j1,3)=1;
    J(j1,j2)=X(1,1);
    J(j1,j2+1)=X(2,1);
    J(j1+1,4)=CPoints(i,3);
    J(j1+1,5)=CPoints(i,4);
    J(j1+1,6)=1;
    J(j1+1,j2)=X(4,1);
    J(j1+1,j2+1)=X(5,1);
end

VX = J*V*J';
VXdiag2 = zeros(12,1);
for i=1:12
    VXdiag2(i,1)=VX(i,i);
end

%Differences between actual and determined Hatt coordinates of control
points
UHatt = CPointsopt-CPoints(:,1:2);

%Order of points graph
% plot(PointsKept(:,1),PointsKept(:,2))
% figure
% plot(PointsKept(:,1),PointsKept(:,3))

%Print Results
% X
% Vx
% S0
% Ummean
% wmean
% wmax
% PointsKept
% PointsDiscarded

%Basic plots
% S0 black, Ummean blue, wmean green, wmax red
xaxis=0:repeats;
% figure
% plot(xaxis,S0,'k')

```

```

% figure
% plot(xaxis,Ummean,'b')
% figure
% plot(xaxis,wmean,'g')
% figure
% plot(xaxis,wmax,'r',xaxis,3.29.*ones(repeats+1,1),'m--')
figure
plot(xaxis,wmaxalt,'r')
% figure
% plot(xaxis,wxegsamax)
% figure
% plot(xaxis,wyegsamax)
% figure
% plot(xaxis,wxhattmax)
% figure
% plot(xaxis,wyhattmax)

%Iteration 0/20 plots
% xaxis=1:pointsnum;
% figure
% plot(xaxis,Uxegsa)
% figure
% plot(xaxis,Uyegsa)
% figure
% plot(xaxis,Uxhatt)
% figure
% plot(xaxis,Uyhatt)
% figure
%
plot(xaxis,Uxegsa,'b',xaxis,Uyegsa,'c',xaxis,Uxhatt,'g',xaxis,Uyhatt,'r
')
% figure
% plot(xaxis,Um)
% figure
% plot(PDist,Um,'+')
% Azim = zeros(pointsnum,1);
% for i=1:pointsnum
%     azpros=atan(abs(Points(i,3)/Points(i,4)));
%     if (Points(i,3)>=0)
%         if (Points(i,4)>=0)
%             Azim(i,1)=azpros;
%         end
%     if (Points(i,4)<0)
%         Azim(i,1)=pi-azpros;
%     end
% end
% if (Points(i,3)<0)
%     if (Points(i,4)>=0)
%         Azim(i,1)=2*pi-azpros;
%     end
%     if (Points(i,4)<0)
%         Azim(i,1)=azpros+pi;
%     end
% end
% end
% end
% rho=ones(pointsnum,1);
% figure

```

```

% polar(Azim,rho,'o')

%Discarded points plot
%First 5 points red, next 5 green, last 5 cyan, points kept black,
%additional points discarded (more repeats) blue
% xaxis1=PointsKept(:,2);
% yaxis1=PointsKept(:,3);
% xaxis2=PointsDiscarded(1:5,2);
% yaxis2=PointsDiscarded(1:5,3);
% xaxis3=PointsDiscarded(6:10,2);
% yaxis3=PointsDiscarded(6:10,3);
% xaxis4=PointsDiscarded(11:15,2);
% yaxis4=PointsDiscarded(11:15,3);
% xaxis5=PointsDiscarded(16:repeats,2);
% yaxis5=PointsDiscarded(16:repeats,3);
% figure
%
plot(xaxis1,yaxis1,'kx',xaxis2,yaxis2,'r+',xaxis3,yaxis3,'g+',xaxis4,yaxis4,'c+',xaxis5,yaxis5,'b+')

%Area center plot
% xaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,1);
% yaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,2);
% xaxis2=PointsKept(:,2);
% yaxis2=PointsKept(:,3);
% xcg1=mean(xaxis1);
% ycg1=mean(yaxis1);
% xcg2=mean(xaxis2);
% ycg2=mean(yaxis2);
% figure
%
plot(xaxis1,yaxis1,'rx',xaxis2,yaxis2,'kx',xcg1,ycg1,'mo',xcg2,ycg2,'bo')

%Area and control points plot
% xaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,1);
% yaxis1=Dataconst(2:Dataconst(1,1)+1,2);
% xaxis2=CPoints(:,1);
% yaxis2=CPoints(:,2);
% xcg1=mean(xaxis1);
% ycg1=mean(yaxis1);
% Xparal=[-13100;1100;-3100;-17300;-13100];
% Yparal=[6400;14600;21200;12800;6400];
% Xparal=[-13100;1100;-3100;-17300;-13100];
% Yparal=[6400;14600;21200;12800;6400];
% figure
%
plot(xaxis1,yaxis1,'b+',xaxis2,yaxis2,'k+',xcg1,ycg1,'ro',Xparal,Yparal,'g-')

%Control point plots
%DX in red, DY in blue
% xaxis=1:controlpoints;
% figure
% plot(xaxis,UHatt(:,1),'r',xaxis,UHatt(:,2),'b')

%Additional plots

```

```
% xaxis=0:repeats;  
% figure  
% plot(xaxis,Rfreedom)  
% figure  
% plot(xaxis,Rsysx)  
% figure  
% plot(xaxis,Ummax)  
% figure  
% plot(xaxis,Dmax)
```

```
function PDist=PointDistances(Points)
```

```
%Find center Xm Ym and distances from center
```

```
pnumber=size(Points,1);
```

```
Xm=mean(Points(:,3));
```

```
Ym=mean(Points(:,4));
```

```
PDist = zeros(pnumber,1);
```

```
for i=1:pnumber
```

```
    PDist(i,1)=sqrt((Points(i,3)-Xm)^2+(Points(i,4)-Ym)^2);
```

```
end
```

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Μήλας Π., Μπιλλήρης Χ. “Μετατροπές συστημάτων αναφοράς και προβολικών συστημάτων – υψομετρικά συστήματα αναφοράς”, Αθήνα 2006
- Αγατζά – Μπαλοδήμου “Θεωρία σφαλμάτων και συνιορθώσεις I”, Αθήνα 2004
- Αγατζά – Μπαλοδήμου “Θεωρία σφαλμάτων και συνιορθώσεις II”, Αθήνα 2005
- Βέης Γ., Μπιλλήρης Χ., Παπαζήση Κ. «Κεφάλαια ανώτερης γεωδαισίας», Αθήνα 2004
- Παπαζήση Κ. “Επιφάνειες αναφοράς – συστήματα αναφοράς”, Αθήνα 2002
- Φωτίου Α., Πικριδάς Χ. “Μετασχηματισμός δικτύου GPS στα ελληνικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς”
- Συγγρός Ι. “Μετασχηματισμοί συντεταγμένων των γεωγραφικών δεδομένων στον ελληνικό χώρο”
- Βέργος Γ.Σ. “Τοπογραφία III”, 2003-2004
- Νάκος Β. “Αναλυτική Χαρτογραφία”, Αθήνα 2004
- Robinson A.H., Morrison J.L., Muehrcke P.C., Jon Kimerling A., Guptill S.C. “Στοιχεία Χαρτογραφίας”, Αθήνα 2002
- Mitsakaki C. “Coordinate Transformations”, Athens 2004
- Ghilani C.D. and Wolf P.R. “Adjustment computations: spatial data analysis”, New Jersey 2006
- Maling D.H. “Coordinate systems and map projections”, London 1973.
- Iliffe J.C. “Datums and map projections”, Scotland 2000
- Marzooqi Y., Fashir H, Ahmed S.I. “Derivation of datum transformation parameters for Dubai Emirate”, Cairo 2005
- Clynch J.R. “Projections” 2006
- [www.ordnancesurvey.co.uk](http://www.ordnancesurvey.co.uk)
- [www.geoapikonisis.gr](http://www.geoapikonisis.gr)