

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΝΑΥΤΙΚΗ & ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ & ΕΠΙΣΤΗΜΗ"

ΑΛΕΞΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής (catenary riser) με τη χρήση της μεθόδου WKB, λαμβάνοντας υπόψη όρους ανώτερης τάξης του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών.

Επιβλέπων καθηγητής: Ι. Κ. Χατζηγεωργίου



ΑΘΗΝΑ, Ιούλιος 2008

Ο δρόμος της Εξερεύνησης και της Ανακάλυψης σκοπό έχει να εκπαιδεύσει τον άνθρωπο και να τον οδηγήσει προς την Αυτοπροσφορά και τη Θυσία. Δεν είναι επιλογή του, μα επιθυμία γραμμένη στην καρδιά του. Σύντροφοί του θα είναι ο Λόγος του Θεού, η Ψυχή του και η Ιπποσύνη του. Θα έρθουν στιγμές μοναξιάς και κόπωσης, άγνωστες για τους πολλούς, όμως, θα αντέξει. Θα θεωρηθεί παράκαιρος, όμως, θα συνεχίσει. Οι πράξεις του θα καταστήσουν τον κόσμο καλύτερο και οι βλαβερές συνέπειες της Μετριότητας θα εξαλειφθούν. Και αυτή θα είναι η Δόξα του Ανδρός και μετά θα σιωπήσει μεγαλοπρεπώς.

Κ. Γ. Α

Περιεχόμενα

Πρόλογος	6
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγικά στοιχεία για τον αγωγό-riser	7
Κεφάλαιο 2. Εισαγωγή στη δυναμική θαλάσσιων κατασκευών	11
1. Γενικά είδη δυναμικών συστημάτων	11
2. Τύποι εξωτερικών διεγέρσεων	12
Κεφάλαιο 3. Euler-Bernoulli θεωρία δοκού	
1. Γενικά στοιχεία	14
2. Εξίσωση δοκού	14
3. Ένταση	16
4. Οριακές συνθήκες	16
Κεφάλαιο 4. Η WKB μέθοδος προσέγγισης	19
1. Θεωρητικό υπόβαθρο	20
2. Η περίπτωση κατά την οποία δεν έχουμε ταλαντώσεις	21
3. Η περίπτωση κατά την οποία έχουμε ταλαντώσεις	23
4. Θεωρία διαταραχών	25
5. Η μέθοδος διαταραχών	26
6. Παρούσα μελέτη – εφαρμογή	27
Κεφάλαιο 5. Εφαρμογή οριακών συνθηκών - εξαγωγή ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών	30
Κεφάλαιο 6. Αποτελέσματα	
1. 1 ^η Περίπτωση: Riser μήκους $L=1400\text{m}$ και βάθους πόντισης $D=1200\text{m}$.	32
2. 2 ^η Περίπτωση: Riser μήκους $L=1500\text{m}$ και βάθους πόντισης $D=1300\text{m}$.	35
3. 3 ^η Περίπτωση: Riser μήκους $L=2022\text{m}$ και βάθους πόντισης $D=1800\text{m}$.	39
Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα	44
Παράρτημα	45
Αναφορές	63

Abstract

The oil industry, during the last years, has focused efforts to identify and develop economical and technically feasible solutions for production of oil and gas from deep water fields. Catenary-shaped slender structures appear to be a flexible solution and mainly are used as risers. A riser is a string of pipe between the sea bottom and ship or rig. Risers are flexible structures, but also the oil industry has become interested in the technical feasibility of the steel catenary riser (SCR).

The purpose of this work is the derivation of closed form expressions for the linear vibration modes of catenary-shaped slender structures. More specifically, we applied the WKB approximation for the calculation of the eigenfrequencies and the eigenmodes of catenary-shaped slender structures including second-order (ε^2) perturbation terms. The dynamic behaviour of the structure is described using the Euler-Bernoulli beam formulation with variable tension and angle terms. The desired expressions are obtained by treating the governing fourth-order partial differential equation of dynamic equilibrium using the WKB method [2].

Περίληψη

Η βιομηχανία πετρελαίου τα τελευταία χρόνια έχει επικεντρώσει τις προσπάθειές της στην εξεύρεση και εξέλιξη οικονομικά και τεχνικά βιώσιμων μεθόδων για την παραγωγή πετρελαίου και φυσικού αερίου από μεγάλα βάθη του υδάτινου σώματος. Προς αυτήν την κατεύθυνση χρησιμοποιούνται λεπτόγραμμες αλυσοειδείς κατασκευές ως αγωγοί (risers), οι οποίες αποτελούν μια ιδιαίτερα ευέλικτη λύση. Οι αγωγοί αυτοί (risers) είναι κατακόρυφοι, αλυσοειδείς που τοποθετούνται μεταξύ του υδάτινου πυθμένα και του πλοίου-φορέα ή της πλωτής εξέδρας.

Υπολογίζοντας τις συχνότητες και τις ιδιομορφές των κατασκευών αυτών λαμβάνουμε ενδεικτικά την τάση μεταβολής των τιμών των κανονικών μετακινήσεων και των καμπτικών ροπών στην αλυσίδα. Ειδικότερα, επιλύσαμε το πρόβλημα ιδιοτιμών αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής (catenary riser) με τη χρήση της μεθόδου WKB, λαμβάνοντας υπόψη όρους ανώτερης τάξης του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρέχεται μια εισαγωγική παράγραφος σχετικά με τα χαρακτηριστικά των αγωγών-risers και τον τρόπο χρήσης αυτών. Αναφέρεται ποιοτικά η επίδραση του υδάτινου σώματος στους αγωγούς-risers και συστήνεται στον αναγνώστη το δυναμικό πρόβλημα που θα μελετήσουμε καθώς και η θεμελιώδης εξίσωση που το διέπει.

Στο δεύτερο κεφάλαιο λαμβάνει μέρος μια εισαγωγή στη δυναμική θαλάσσιων κατασκευών σχετικά με τα γενικά είδη συστημάτων και τους τύπους εξωτερικών διεγέρσεων και στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται μια περιγραφή της θεωρίας δοκών κατά Euler-Bernoulli.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύουμε τόσο το θεωρητικό όσο και το πρακτικό υπόβαθρο (με δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα της WKB μεθόδου) της WKB μεθόδου προσέγγισης και της θεωρίας διαταραχών γενικότερα. Στη συνέχεια ακολουθεί η εφαρμογή της μεθόδου στην παρούσα εργασία.

Τελειώνοντας, εκτελούμε την απαιτούμενη υπολογιστική διαδικασία για τη λήψη των επιθυμητών αποτελεσμάτων, καθώς και την εξαγωγή των ανάλογων συμπερασμάτων.

Πρόλογος

Η βιομηχανία πετρελαίου τα τελευταία χρόνια έχει επικεντρώσει τις προσπάθειες της στην εξεύρεση και εξέλιξη οικονομικά και τεχνικά βιώσιμων μεθόδων για την παραγωγή πετρελαίου και φυσικού αερίου από μεγάλα βάθη του υδάτινου σώματος. Προς αυτήν την κατεύθυνση χρησιμοποιούνται λεπτόγραμμες αλυσοειδείς κατασκευές ως αγωγοί (risers), οι οποίες αποτελούν μια ιδιαίτερα ευέλικτη λύση. Οι αγωγοί αυτοί (risers) είναι κατακόρυφοι, αλυσοειδείς που τοποθετούνται μεταξύ του υδάτινου πυθμένα και του πλοίου-φορέα ή της πλωτής εξέδρας.

Υπολογίζοντας τις συχνότητες και τις ιδιομορφές των κατασκευών αυτών λαμβάνουμε ενδεικτικά την τάση μεταβολής των τιμών των κανονικών μετακινήσεων και των καμπτικών ροπών στην αλυσίδα. Ειδικότερα, επιλύσαμε το πρόβλημα ιδιοτιμών αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής (catenary riser) με τη χρήση της μεθόδου WKB, λαμβάνοντας υπόψη όρους ανώτερης τάξης, συγκεκριμένα (ε^2), του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών.

Να τονίσουμε, πως ο βασικός κορμός του κώδικα MATLAB αναπτύχθηκε από τον κ. Ι. Κ. Χατζηγεωργίου, για την ανάγκη παλαιότερης μελέτης του ιδίου. Με βάση αυτόν τον κώδικα έγιναν όλες οι τροποποιήσεις, ανάλογα με τις συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ι. Κ. Χατζηγεωργίου για την υπόδειξη του θέματος και την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την περίοδο εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Κωνσταντίνος Γ. Αλεξίου

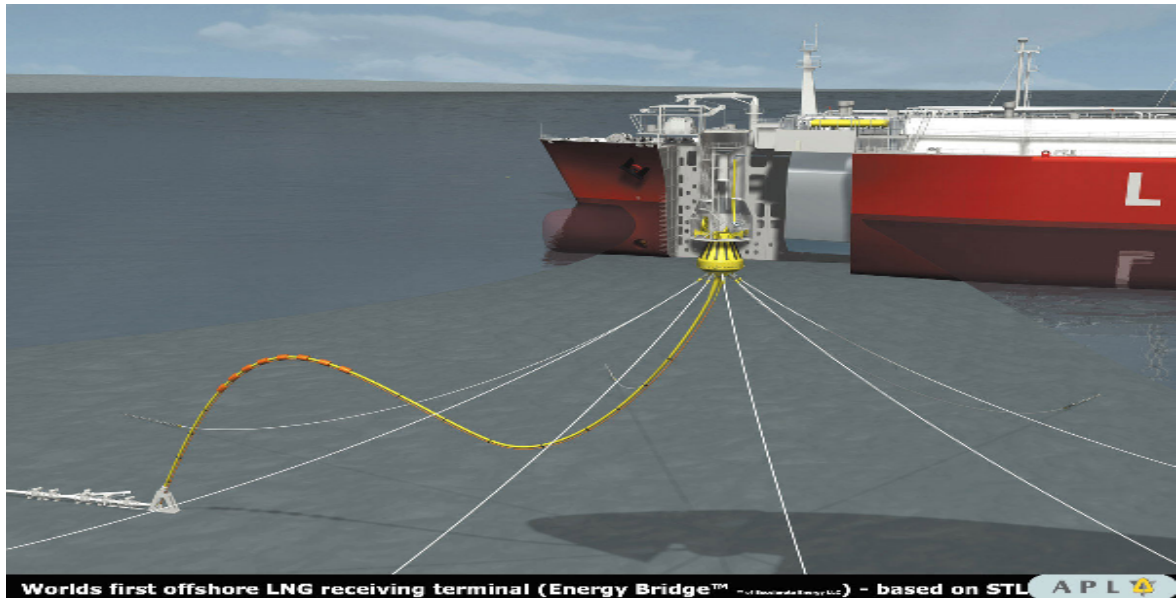
1. Εισαγωγή

Η βιομηχανία πετρελαίου τα τελευταία χρόνια έχει επικεντρώσει τις προσπάθειες της στην εξεύρεση και εξέλιξη οικονομικά και τεχνικά βιώσιμων μεθόδων για την παραγωγή πετρελαίου και φυσικού αερίου από μεγάλα βάθη του υδάτινου σώματος. Προς αυτήν την κατεύθυνση χρησιμοποιούνται λεπτόγραμμες αλυσοειδείς κατασκευές ως αγωγοί (risers), οι οποίες αποτελούν μια ιδιαίτερα ευέλικτη λύση. Οι αγωγοί αυτοί (risers) είναι κατακόρυφοι, αλυσοειδείς που τοποθετούνται μεταξύ του υδάτινου πυθμένα και του πλοίου-φορέα ή της πλωτής εξέδρας. Ο εντατήρας (riser tensioner) είναι μια μηχανική διάταξη που χρησιμοποιείται ευρύτατα στις πλωτές εγκαταστάσεις εξόρυξης πετρελαίου ή στα πλοία εξόρυξης και αποσκοπεί στη διατήρηση θετικών ελκτικών δυνάμεων πάνω στο riser, ανεξάρτητα από τις κινήσεις μέσα στο υδάτινο σώμα της πλωτής εγκατάστασης (πλοίου) εξόρυξης. Η επίσημη ονομασία του είναι Marine Riser Tensioner. Απαραίτητη κρίνεται η ύπαρξη ενός εντατήρα (riser tensioner) στην κατασκευή-δομή του riser, επειδή σε περιπτώσεις καθοδικών κινήσεων του πλοίου ή της εξέδρας αυτό θα δεχόταν καμπτικά φορτία, ενώ σε ανοδικές θα μεταφερόταν κατά μήκος του μεγάλες δυνάμεις. Για να εξισορροπηθούν οι ανωτέρω δυνάμεις μια σειρά τέτοιων εντατήρων (springs) τοποθετούνται μεταξύ του riser και του πλοίου (εξέδρας). Κάθε εντατήρας (riser tensioner) αποτελείται από υδραυλικούς κυλίνδρους με αυλακώσεις τροχαλίας και στις δύο πλευρές. Ο κύλινδρος συνδέεται άμεσα με φιάλες αερίου υψηλής πίεσεως διά μέσου ενός διαχωριστή (separator). Ένα συρματόσχοινο τυλίγεται γύρω από τον κύλινδρο: η μία του άκρη ενώνεται με το σταθερό μέρος του εντατήρα (tensioner) και η άλλη με το riser. Υπάρχουν και άλλα δύο είδη εντατήρων, όπως οι Drill String Compensators και οι Guideline Tensioners. Παρακάτω απεικονίζονται οι μηχανικές αυτές διατάξεις.

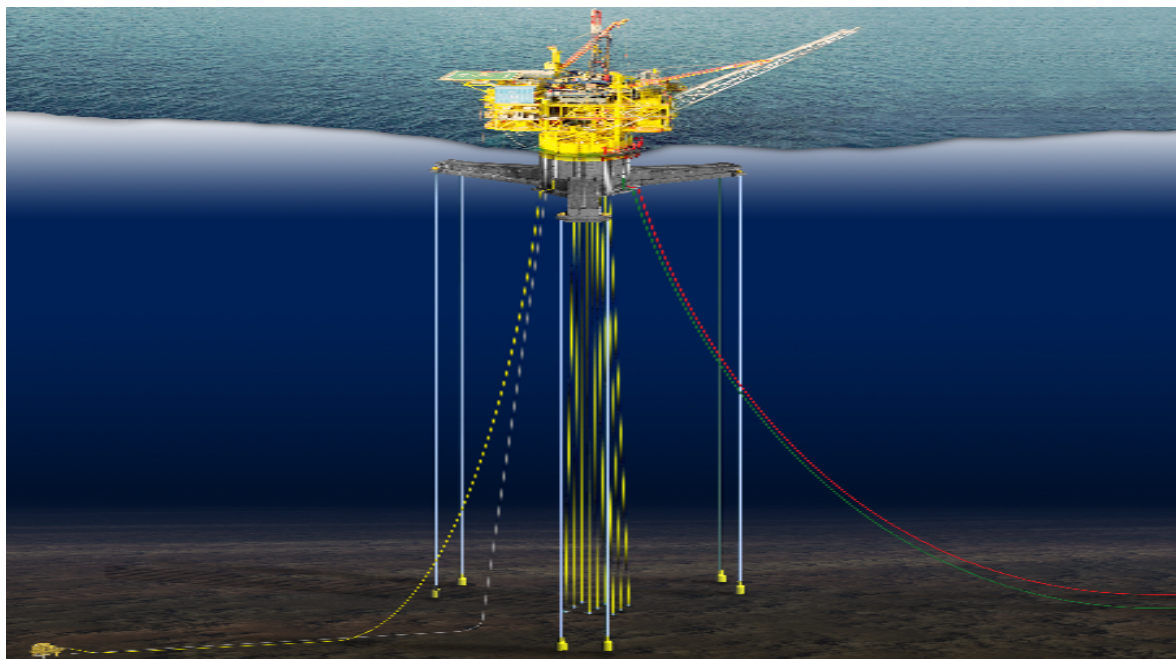


Εικόνα 1. Marine Riser Tensioners.

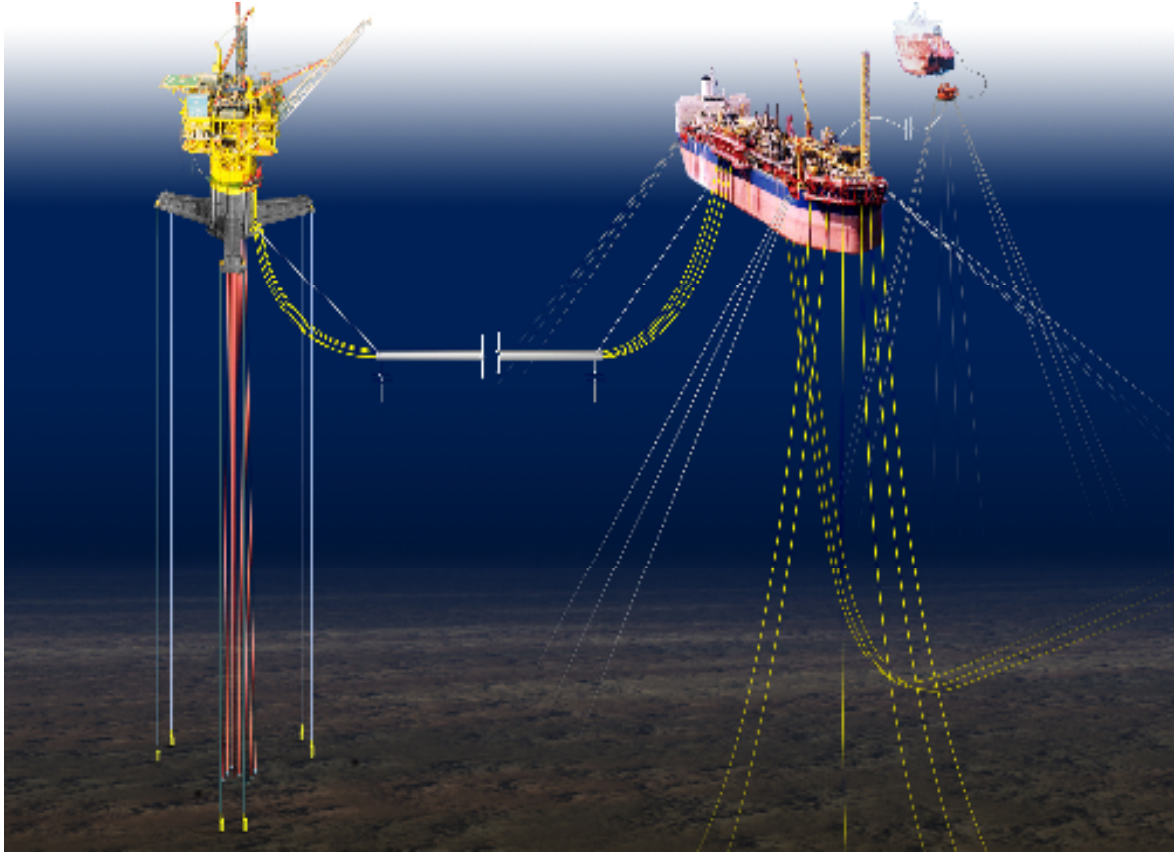
Οι αγωγοί-risers μπορεί να είναι εύκαμπτες κατασκευές (flexible risers), αλλά η βιομηχανία πετρελαίου θεωρεί οικονομικά ευέλικτη και τη χρήση χαλύβδινων risers, steel catenary risers (SCR). Ακολουθούν αναπαραστάσεις των risers και ο τρόπος ανάπτυξής τους στο υδάτινο σώμα.



Εικόνα 2. Πλοία εξόρυξης – Drilling ships.



Εικόνα 3. Πλωτές εγκαταστάσεις εξόρυξης πετρελαίου (και φυσικού αερίου) – Marine Drilling Rig.



Εικόνα 4. FPSO platforms (Floating, Production, Storage and Offloading vessels).

Αυτές οι κατασκευές, συνήθως, υφίστανται τεράστια δυναμικά καμπτικά φορτία που εστιάζονται στην περιοχή επαφής με τον πυθμένα, touch-down area (TDA). Οπότε η επίλυση του δυναμικού προβλήματος κρίνεται απαραίτητη για την κατανόηση της συμπεριφοράς των συγκεκριμένων ανεπιθύμητων επιρροών. Το δυναμικό πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε αριθμητικά είτε αναλυτικά μέχρι ενός σημείου. Στις περισσότερες περιπτώσεις η αναλυτική προσέγγιση της επιθυμητής λύσης έγκειται στη χρήση της μεθόδου χωριζόμενων μεταβλητών. Υπολογίζοντας τις συχνότητες και τις ιδιομορφές των κατασκευών αυτών λαμβάνουμε ενδεικτικά την τάση μεταβολής των τιμών των κανονικών μετακινήσεων και των καμπτικών ροπών στην αλυσίδα. Ειδικότερα, επιλύσαμε το πρόβλημα ιδιοτιμών αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής (catenary riser) με τη χρήση της μεθόδου WKB, λαμβάνοντας υπόψη όρους ανώτερης τάξης του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών.

Η εξίσωση που θεωρήσαμε είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = -K \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \beta(x) \frac{\partial y}{\partial x} \quad (1)$$

Η αδιάστατη Εξ. (1) περιγράφει την ασύζευκτη καμπτική ταλάντωση μιας λεπτότοιχης αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής, θεωρώντας πως τα καμπτικά φορτία έχουν μη αμελητέα συνεισφορά συγκρινόμενα με τους εντατικούς όρους. Η Εξ. (1) είναι γραμμικοποιημένο παράγωγο της βασικής εξίσωσης σε κατακόρυφη διεύθυνση και εξάγεται από το πλήρες μη γραμμικό σύστημα της δυναμικής ισορροπίας σε δισδιάστατο χώρο (2D space) [3], απαλείφοντας τους μη γραμμικούς όρους και αμελώντας τους παράγοντες που περιγράφουν τις συζευγμένες αξονικές και κατακόρυφες δονήσεις-ταλαντώσεις. Οι διαφορετικοί αδιάστατοι όροι που εμφανίζονται στην Εξ. (1) δίνονται παρακάτω:

$$x = s / L, K = EI / (w_0 L), \beta(x) = \sin(\varphi_0), \tau = t \sqrt{w_0 / (ML)}$$

Το L είναι το αδιάστατο μήκος της κατασκευής, EI η καμπτική ακαμψία, w_0 το ενεργό βάρος, M η ενεργή μάζα, που στην περίπτωση βυθισμένης κατασκευής εκφράζεται ως άθροισμα της μάζας m και της πρόσθετης μάζας m_a , s η αδιάστατη Lagrangian συντεταγμένη και t ο χρόνος. Όλοι οι όροι βάρους και μάζας ορίζονται ανά μονάδα αδιάστατου μήκους. Επιπρόσθετα, ως $q(s,t)$ δηλώνουμε την εγκάρσια κίνηση στην εφαπτομένη κατά μήκος της κατασκευής, ενώ $T_0 = T_0(s)$ και $\varphi_0 = \varphi_0(s)$ είναι οι συναρτήσεις που περιγράφουν τη μεταβολή της στατικής τάσης και στατικής γωνίας της αλυσίδας. Η γωνία ορίζεται από την εφαπτομένη και την οριζόντιο κάθε φορά. Οι $T_0(s)$ και $\varphi_0(s)$ προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος στατικής ισορροπίας.

Για την ανάπτυξη της Εξ. (1) μόνο αρμονικές κινήσεις θεωρούνται αποδεκτές. Επομένως, η επίλυση της μας παρέχει τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές της αλυσίδας, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαδοχικά για την διατύπωση της κατάλληλης έκφρασης της γενικευμένης λύσης της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, με ή χωρίς απόσβεση.

Βέβαια, όπως αναφέρθηκε, η αδιάστατη αυτή εξίσωση προέκυψε από τη θεμελιώδη μερική διαφορική εξίσωση, που ακολουθεί (Τριανταφύλλου, 1994), και περιγράφει τη δισδιάστατη δυναμική συμπεριφορά μιας αλυσοειδούς κατασκευής, σαν τον αγωγό-riser (catenary riser):

$$M \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 q}{\partial s^4} + T(s) \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + w_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial q}{\partial s}$$

όπου q : οι κινήσεις στον κατακόρυφο άξονα. Οι υπόλοιποι στατικοί και δυναμικοί όροι δόθηκαν παραπάνω.

2. Εισαγωγή στη δυναμική θαλάσσιων κατασκευών

Γενικά είδη συστημάτων

Η μελέτη των σχέσεων μεταξύ της κίνησης ενός φυσικού συστήματος και των δυνάμεων που προκαλούν την κίνηση αυτή, αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας και μελέτης από τους αρχαίους χρόνους μέχρι σήμερα, η ευρύτερη έκφραση αυτής δίνεται μέσα από την περιοχή της δυναμικής.

Η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς απαραμόρφωτων σωμάτων υπό την επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενων διεγέρσεων, αποτελεί αντικείμενο της κινηματικής του στερεού σώματος. Η δε μελέτη των τάσεων και παραμορφώσεων που οφείλονται σε χρονικά μεταβαλλόμενη εξωτερική διέγερση, καλύπτεται από τη δυναμική των κατασκευών. Στόχος του δεύτερου τύπου φυσικών συστημάτων είναι η ανάπτυξη και παρουσίαση μεθόδων για τον ακριβή ή προσεγγιστικό προσδιορισμό της ταλαντωτικής τους συμπεριφοράς.

Τα φυσικά συστήματα είναι γενικά σύνθετα και δύσκολα μπορούν να αναλυθούν με τη χρήση ακριβών ή κλειστών λύσεων και αυτό επειδή αποτελούνται από μεγάλο αριθμό συνιστωσών που ενεργούν σαν μια ολότητα. Προκειμένου να αναλυθούν τέτοια συστήματα χρειάζεται να αναγνωριστούν οι συνιστώσες αυτές και στη συνέχεια να τους προσδοθούν φυσικές ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές, που καθορίζουν εν πολλοίς τη δυναμική τους συμπεριφορά, προσδιορίζονται συνήθως με τη βοήθεια πειραμάτων. Η γνώση αυτών των ιδιοτήτων οδηγεί στην κατασκευή ενός μαθηματικού προτύπου, που θα αντιπροσωπεύει μια διακριτοποίηση του πραγματικού φυσικού συστήματος. Βέβαια, για το ίδιο φυσικό σύστημα είναι δυνατόν να κατασκευαστούν περισσότερα από ένα μαθηματικά πρότυπα. Το απλούστερο από αυτά, το οποίο, όμως, διατηρεί τα ουσιώδη χαρακτηριστικά του πραγματικού φυσικού συστήματος επικρατεί στις μελέτες μας.

Οι φυσικές ιδιότητες ενός συστήματος αναφέρονται ως παράμετροί του. Τα πραγματικά συστήματα είναι συνεχή και οι παράμετροί τους διανεμημένες. Σε πολλές περιπτώσεις εν τούτοις, είναι δυνατόν να απλοποιήσουμε την ανάλυση με αντικατάσταση των διανεμημένων χαρακτηριστικών του συστήματος από διακριτά. Αυτό επιτυγχάνεται με τη διακριτοποίηση ("lumping") του συνεχούς συστήματος. Έτσι, λοιπόν, τα μαθηματικά πρότυπα υποδιαιρούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- α. συστήματα με διακριτοποιημένες παραμέτρους, ή διακριτά ("lumped") συστήματα
- β. συστήματα με διανεμημένες παραμέτρους, ή συνεχή συστήματα.

Εξέχουσα σημασία αποτελεί ο τύπος του μαθηματικού προτύπου που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση του συστήματος, άρα για τη διατύπωση του μαθηματικού προβλήματος. Στα συστήματα με διακριτοποιημένες παραμέτρους η

συμπεριφορά του περιγράφεται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ τα συνεχή συστήματα από μερικές διαφορικές εξισώσεις

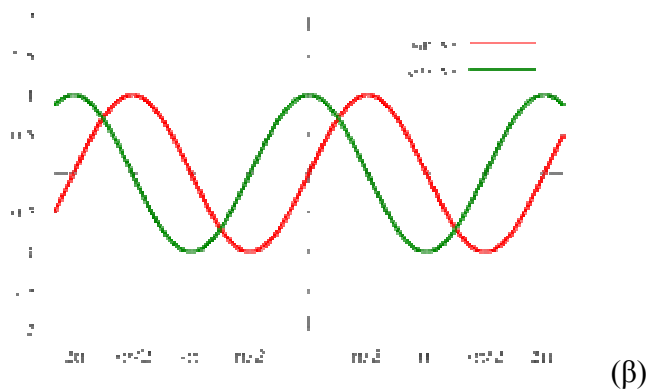
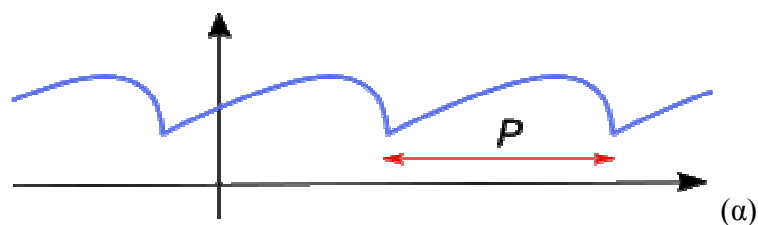
Τα ταλαντευόμενα δυναμικά συστήματα ανάλογα με τη συμπεριφορά τους διακρίνονται σε γραμμικά και μη γραμμικά. Εάν οι εξαρτώμενες μεταβλητές εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και δεν υπάρχουν μεταξύ τους γινόμενα, τότε το σύστημα καλείται γραμμικό. Αν υπάρχουν δυνάμεις μεγαλύτερης της πρώτης ή κλασματικές δυνάμεις, τότε είναι μη γραμμικό.

Τύποι εξωτερικών διεγέρσεων

Σχεδόν όλες οι κατασκευές υποβάλλονται κατά τη διάρκεια της ζωής τους σε διάφορους τύπους φορτίσεων. Από τη μεριά της ανάλυσης, είναι συνήθως χρήσιμο να υποδιαιρούνται τα προκαθορισμένα εξωτερικά φορτία σε δύο κατηγορίες:

- περιοδικά
- μη περιοδικά

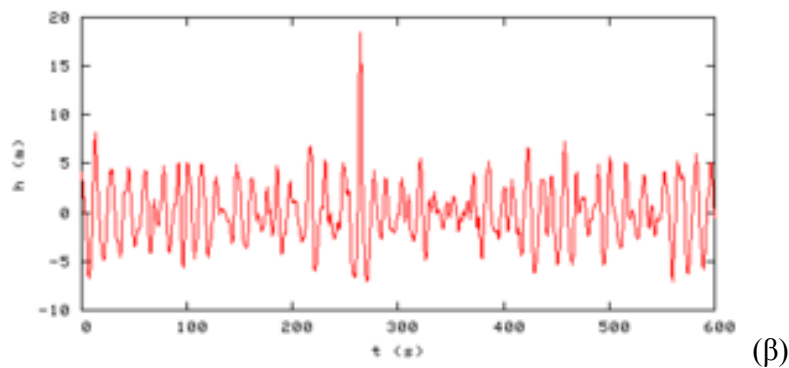
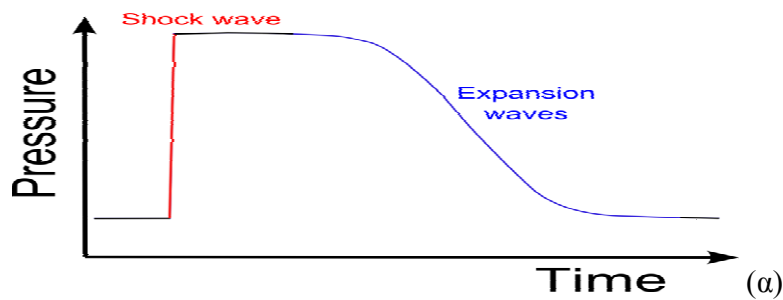
Οι περιοδικές φορτίσεις (περιπτώσεις (α) και (β), στο σχήμα 1) είναι επαναλαμβανόμενα φορτία που εμφανίζουν την ίδια επαναλαμβανόμενη χρονική μεταβολή για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Η απλούστερη περιοδική διεγέρση είναι η ημιτονοειδής μεταβολή, που ονομάζεται απλή αρμονική.



Σχήμα 1

Τέτοιες φορτίσεις είναι χαρακτηριστικές στις περιπτώσεις μη ζυγοσταθμισμένων μαζών, περιστρεφόμενων μηχανών. Άλλοι τύποι περιοδικών διεγέρσεων, όπως για παράδειγμα αυτές που προκαλούνται από τις υδροδυναμικές πιέσεις από την έλικα στην πρύμνη του πλοίου ή από αδρανειακά φαινόμενα σε παλινδρομικές μηχανές είναι συνήθως πιο πολύπλοκοι. Με τη βοήθεια, όμως, της ανάλυσης κατά Fourier, αναπαριστούμε την περιοδική διεγερση ως άθροισμα μιας σειράς δύο απλών αρμονικών συνιστωσών.

Οι μη περιοδικές διεγέρσεις μπορεί να είναι είτε μικρής διάρκειας κρουστικές φορτίσεις ή μακράς διάρκειας φορτίσεις τυχαίας μορφής. Μια έκρηξη αποτελεί παράδειγμα πηγής κρουστικής φόρτισης (περίπτωση (α), στο σχήμα 2). Για αυτές τις μικρής διάρκειας φορτίσεις χρησιμοποιούνται ειδικές απλοποιημένες μορφές ανάλυσης. Όμως, υπάρχουν και οι μακράς διάρκειας τυχαίες φορτίσεις, όπως για παράδειγμα αυτή που προκαλείται από σεισμική δράση, από τεράστια και τυχαία επιφανειακά κύματα στον ωκεανό (Rogue Waves, περίπτωση (β), σχήμα 2) κ.ά. Σε αυτά η ανάλυση είναι πιο πολύπλοκη και λαμβάνει χώρα με τη βοήθεια στοχαστικών ή μη αιτιοκρατικών μεθόδων αναλύσεων.



Σχήμα 2

3. Euler-Bernoulli θεωρία δοκού

Στην παρούσα μελέτη επιχειρήθηκε η εξαγωγή κλειστής μορφής εκφράσεων-λύσεων στην περίπτωση γραμμικών ταλαντώσεων μιας λεπτότοιχης αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής. Η δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής (catenary-shaped slender riser) προσεγγίστηκε με τη βοήθεια της Euler-Bernoulli εξίσωσης δοκού με μεταβλητή ένταση και όρους φασικής γωνίας. Με την εφαρμογή της WKB μεθόδου στην παραπάνω μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καταλήγουμε στο επιθυμητό.

Η κατά Euler-Bernoulli θεωρία δοκού είναι απλοποίηση της ισοτροπικής θεωρίας ελαστικότητας που σκοπό έχει τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών φορτίου και εκτροπής των δοκών. Η επίσημη εμφάνισή της υπολογίζεται γύρω στο 18^ο αιώνα (1750), αλλά δεν εφαρμόστηκε εκτενώς, μέχρι και την ανέγερση του πύργου του Eiffel και της Ferris Wheel στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Με αφετηρία αυτά τα σημαντικά έργα, άθλους της Μηχανικής, η συγκεκριμένη θεωρία αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο της μηχανικής και εκφραστή της Δεύτερης Βιομηχανικής Επανάστασης (1870-1914).

Επιπρόσθετα εργαλεία, όπως η θεωρία πλακών και η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία αναπτύχθηκαν, αλλά η απλότητα της θεωρίας δοκών την καθιστά αξιόπιστο και σημαντικό εργαλείο της μηχανικής.

Η εξίσωση δοκού

Η Euler-Bernoulli εξίσωση δοκού βασίζεται σε πέντε βασικές υποθέσεις, αναφορικά με την κάμψη της δοκού:

1. Η μαθηματική ανάλυση εφαρμόζεται αποτελεσματικά σε υπό κάμψη δοκούς.
2. Οι εντάσεις σε αυτές διαδίδονται με ένα συγκεκριμένο μαθηματικά απλό τρόπο.
3. Η δύναμη που αντιστέκεται στην κάμψη εξαρτάται από τη συνολική κάμψη, με ένα συγκεκριμένο μαθηματικά απλό τρόπο.
4. Το υλικό είναι ισοτροπικό.
5. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό προκαλούν μόνο κάμψη, όχι στροφή ή έκταση: ασύζευκτη περίπτωση.

Με πιο αυστηρό τρόπο έκφρασης οι παραπάνω υποθέσεις μετατρέπονται στις:

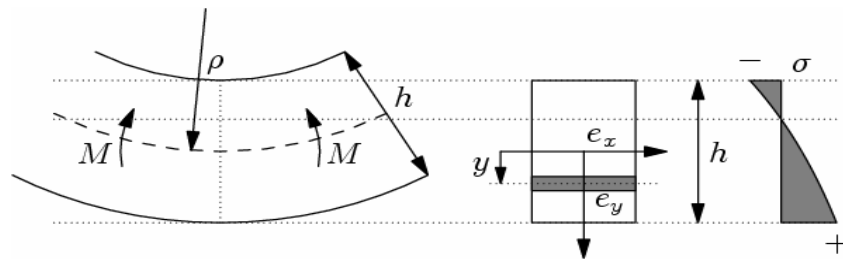
1. Η Μηχανική του Συνεχούς εφαρμόζεται αποτελεσματικά στις υπό κάμψη δοκούς.
2. Η ένταση σε μια εγκάρσια τομή της δοκού μεταβάλλεται γραμμικά κατά τη διεύθυνση της κάμψης, και είναι μηδέν στο κέντρο βάρους κάθε τέτοιας τομής.

3. Η καμπτική ροπή σε μια συγκεκριμένη τομή της δοκού μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με τη δεύτερη παράγωγο της εκτροπής προς την κατεύθυνση της (της εκτροπής).
4. Η δοκός αποτελείται από ισοτροπικά υλικά.
5. Το εφαρμοζόμενο φορτίο ασκείται ορθογώνια προς τον ουδέτερο άξονα της δοκού και κατά μοναδικό επίπεδο.

Μετά από αυτές τις παραδοχές εξάγεται η βασική εξίσωση που συνδέει την εκτροπή με το ασκούμενο φορτίο:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = w$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την Euler-Bernoulli εξίσωση δοκού. Η καμπύλη $u(x)$ εκφράζει την εκτροπή της δοκού κατά μία διεύθυνση x (η δοκός θεωρείται μονοδιάστατο σώμα), w είναι το διανεμημένο εγκάρσιο φορτίο ανά μονάδα μήκους, που μπορεί να είναι συνάρτηση των x, u ή και άλλων μεταβλητών. Ως γνωστό, το E είναι το μέτρο ελαστικότητας, και I η ροπή αδράνειας της διατομής ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο των x και y που διέρχεται από το κέντρο της διατομής.



Ο άξονας της δοκού κατά τον οποίον δεν ασκείται αξονικό φορτίο καλείται ουδέτερος. Συχνά $w = w(x), u = u(x)$ και $EI = \sigma\alpha\theta.$, άρα έχουμε:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = w(x)$$

- u : είναι η εκτροπή
- $\frac{\partial u}{\partial x}$: η γωνία εκτροπής (βέλος κάμψης)
- $E I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: η καμπτική ροπή

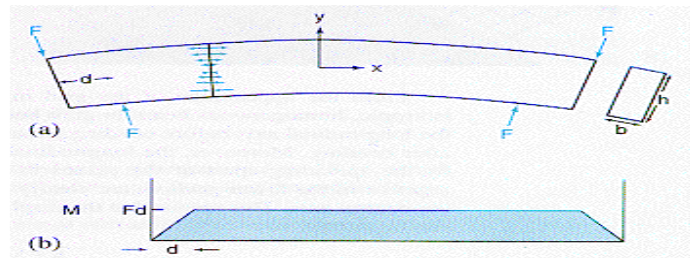
- $-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$: η διατμητική δύναμη στη δοκό

Ένταση

Εκτός από την εκτροπή (μετατόπιση σε ένα σημείο x τη χρονική στιγμή t), η εξίσωση περιγράφει τις δυνάμεις και τις ροπές, άρα εξάγονται συμπεράσματα για τις εντάσεις των δυνάμεων στη δοκό, ένας λόγος για την ευρύτατη χρήση της στη Μηχανική ώστε να καθορίζεται η αντοχή των δοκών σε κάμψη.

Τόσο η καμπτική ροπή όσο και η διατμητική δύναμη προκαλούν εντάσεις στη δοκό. Η ένταση λόγω της διατμητικής δύναμης είναι μέγιστη κατά μήκος του ουδέτερου άξονά της, ενώ η εφελκυστική μεγιστοποιείται και στις δύο πλευρές (άνω-κάτω) της επιφάνειας. Βέβαια, οι διατμητικές δυνάμεις είναι αμελητέες σε σχέση με τις καμπτικές ροπές.

Οριακές συνθήκες



A. Πάκτωση στο $x = 0$. Το βέλος κάμψης και η κλίση θα είναι μηδέν.

$$u(0, t) = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

B. Άρθρωση στο $x = 0$. Το βέλος κάμψης και η ροπή θα είναι μηδενικά.

$$u(0, t) = EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0$$

Γ. Ελεύθερο άκρο. Καμπτική ροπή και διατμητική δύναμη θα είναι μηδενικές.

$$EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=0} = 0$$

Ανάλογες συνθήκες ισχύουν για το άκρο $x = L$.

Δ. Συγκεντρωμένη μάζα m_0 στο ένα άκρο της δοκού.

Στην περίπτωση αυτή η αδρανειακή δύναμη $-m_0 \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2}$ θα πρέπει να ισούται με τη διατμητική δύναμη. Οπότε η οριακή συνθήκη γίνεται:

$$\pm \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = m_0 \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2}$$

Σημειώνουμε ότι το θετικό πρόσημο ισχύει στην περίπτωση που η συγκεντρωμένη μάζα m_0 είναι προσαρμοσμένη στο αριστερό άκρο της δοκού, ενώ το αρνητικό πρόσημο στην αντίθετη περίπτωση.

Η δεύτερη οριακή συνθήκη στο άκρο της δοκού που βρίσκεται η συγκεντρωμένη μάζα m_0 προκύπτει από το γεγονός ότι η ροπή κάμψης εκεί θα πρέπει να είναι μηδενική. Άρα,

$$EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Ε. Ελαστικά εδραζόμενο άκρο δοκού.

Στην περίπτωση αυτή η ροπή κάμψης θα πρέπει να είναι μηδενική ενώ η δύναμη διάτμησης θα πρέπει να ισούται με την αντίδραση της ελαστικής έδρασης. Θεωρώντας

ότι η ελαστική έδραση θα μπορούσε να προσομοιωθεί με ελατήριο σταθεράς k_0 , οι οριακές συνθήκες γίνονται:

$$EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = \pm k_0 u(x, t)$$

Σημειώνουμε ότι το θετικό πρόσημο ισχύει στην περίπτωση που το ελατήριο βρίσκεται προσαρμοσμένο στο δεξιό άκρο της δοκού, ενώ το αρνητικό πρόσημο στην αντίθετη περίπτωση.

4. Η WKB μέθοδος προσέγγισης

Η μέθοδος WKB είναι μέθοδος διαταραχών που εφαρμόζεται σε μια ποικιλία προβλημάτων και, ειδικότερα, σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\varepsilon^2 y'' + q(x)y = 0, 0 < \varepsilon \ll 1 \text{ (i)}$$

$$y'' + (\lambda^2 p(x) - q(x))y = 0, \lambda \gg 1 \text{ (ii)}$$

$$y'' + q(\varepsilon x)^2 y = 0, 0 < \varepsilon \leq 1, \text{ (iii)}$$

Παρατηρούμε ότι στις εξισώσεις (i) και (iii) εμφανίζεται μια μικρή παράμετρος, ενώ στην εξίσωση (ii) μια παράμετρος που είναι μεγάλη· αν θέσουμε $\varepsilon = \lambda^{-1}$ η περίπτωση αυτή ανάγεται στις προηγούμενες. Υπενθυμίζουμε ότι δεν είναι δυνατόν, εν γένει, να υπολογίσουμε λύση σε κλειστή μορφή, όταν οι διαφορικές εξισώσεις έχουν μεταβλητούς συντελεστές, όπως οι (i) και (iii). Τα πρώτα βήματα ανάπτυξης της έγιναν από τον Liouville στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, ενώ στις αρχές του 20^{ου} επεκτάθηκε από άλλους, όπως, π.χ., τον Rayleigh (στο πλαίσιο της μελέτης της ανάκλασης των ηχητικών κυμάτων), και τον Jeffreys (εξίσωση Mathieu). Η συγκεκριμένη μέθοδος ονομάστηκε έτσι από τους φυσικούς Wentzel, Kramers, και Brillouin, που την ανέπτυξαν το 1926. Το 1923, ο μαθηματικός Harold Jeffreys είχε αναπτύξει μια γενική μέθοδο προσέγγισης, ανώτερης τάξης διαφορικών εξισώσεων, στις οποίες περιέχεται και η εξίσωση του Schrödinger. Αλλά από τη στιγμή που η εξίσωση του Schrödinger παρουσιάστηκε δύο χρόνια αργότερα, και οι Wentzel, Kramers, και Brillouin προφανώς δεν γνώριζαν την εργασία του πρώτου, ο Jeffreys συνήθως παραλείπεται από την ονομασία της μεθόδου. Η σημαντική συνεισφορά, όμως και των τεσσάρων, έγκειται στο τρόπο αντιμετώπισης των στάσιμων σημείων, συσχετίζοντας τις φθίνουσες και ταλαντωτικές λύσεις αμφιπλευρώς του στάσιμου σημείου. Γενικά, η WKB μέθοδος προσεγγίζει τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, της οποίας η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος πολλαπλασιάζεται επί μια μικρή παράμετρο ε . Η μέθοδος έχει ως εξής:

Για μια διαφορική εξίσωση

$$\varepsilon \frac{d^n y}{dx^n} + a(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k(x) \frac{dy}{dx} + m(x)y = 0$$

ας υποθέσουμε ότι έχει λύση της μορφής ενός αναπτύγματος ασυμπτωτικής σειράς

$$y(x) \sim \exp \left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(x) \right]$$

με $\delta \rightarrow 0$. Εισάγοντας την παραπάνω υποθετική λύση στη διαφορική εξίσωση και απαλείφοντας τους εκθετικούς όρους, επιλύουμε για έναν αυθαίρετο αριθμό όρων $S_n(x)$ το ανάπτυγμα.

Θεωρητικό υπόβαθρο της WKB μεθόδου

Το θεωρητικό υπόβαθρο της WKB μεθόδου είναι πιο πολύπλοκη κι έχει ως εξής:

Ας υποθέσουμε τη δεύτερης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = Q(x)y$$

με $Q(x) \neq 0$. Εισάγοντας όπου $y(x)$

$$y(x) = \exp \left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(x) \right] \quad \text{στην εξίσωση, λαμβάνουμε:}$$

$$\epsilon^2 \left[\frac{1}{\delta^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n' \right)^2 + \frac{1}{\delta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n'' \right) \right] = Q(x).$$

Θεωρώντας, ότι η σειρά είναι θα είναι ασυμπτωτικά σταθερή το παραπάνω υπολογίζεται ως:

$$\frac{\epsilon^2}{\delta^2} S_0'^2 + \frac{2\epsilon^2}{\delta} S_0' S_1' + \frac{\epsilon^2}{\delta} S_0'' = Q(x)$$

Με $\delta \rightarrow 0$, από την ισορροπία των επικρατέστερων όρων έχουμε:

$$\frac{\epsilon^2}{\delta^2} S_0'^2 \sim Q(x)$$

Οπότε, το δ είναι ανάλογο του ε . Εξισώνοντας τα και διερευνώντας για τις διαφορετικές του εκθέτη του ε , έχουμε:

$$\varepsilon^0 : S_0'^2 = Q(x)$$

που είναι εξίσωση Eikonal, με λύση:

$$S_0(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt$$

Για τις πρωτοτάξιες δυνάμεις του ε λαμβάνουμε:

$$\varepsilon^1 : 2S_0'S_1' + S_0'' = 0$$

που είναι η μονοδιάστατη συνάρτηση μεταφοράς, με λύση:

$$S_1(x) = -\frac{1}{4} \log(Q(x)) + k_1.$$

και k_1 μια αυθαίρετη σταθερά. Έχουμε τώρα ένα ζεύγος προσεγγίσεων (δύο γιατί η S_0 λαμβάνει δύο τιμές, όπως είδαμε παραπάνω), και η πρώτη τάξης προσέγγιση κατά WKB θα είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων:

$$y(x) \approx c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right] + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right]$$

Ανώτερης τάξης όροι παρέχονται, αν το ε λάβει μεγαλύτερες τιμές. Τελειώνοντας, ισχύει:

$$2S_0'S_n' + S_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{n-1} S_j'S_{n-j}' = 0$$

για $n > 2$.

Ας επιχειρήσουμε, όμως, μια πιο πρακτική ματιά στη συγκεκριμένη μέθοδο ώστε να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο θα προσεγγίσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Η περίπτωση κατά την οποία δεν έχουμε ταλαντώσεις

Αρχικά, θεωρούμε την εξίσωση (i) στην περίπτωση που η $q(x)$ είναι μια γνήσια αρνητική συνάρτηση σε όλο το διάστημα που μας ενδιαφέρει. Συγκεκριμένα, έστω $q(x) = -k(x)^2$, όπου $k(x) > 0$. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$\varepsilon^2 y'' - k(x)^2 y = 0 \quad (\text{iv})$$

Αν το k ήταν σταθερά, π.χ. $k = k_0$, τότε η (iv) θα είχε πραγματικές λύσεις εκθετικής μορφής $e^{\pm k_0 x / \varepsilon}$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί να δοκιμάσουμε στη (iv) την αντικατάσταση:

$$y = e^{u(x)/\varepsilon}.$$

Τότε η εξίσωση (iv) λαμβάνει τη μορφή:

$$\varepsilon v' + v^2 - k(x)^2 = 0, v = u'. \quad (\text{v})$$

Ας επιχειρήσουμε τώρα ένα ανάπτυγμα κανονικών διαταραχών (βλ. μέθοδος διαταραχών, παρακάτω) της μορφής:

$$v(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + O(\varepsilon^2).$$

Αντικαθιστώντας την παράσταση αυτή στην (v) παίρνουμε, από τους όρους τάξης $O(1)$ και $O(\varepsilon)$, αντίστοιχα, τις εξισώσεις:

$$v_0 = \pm k(x)^2, 2v_0 v_1 = -v_0'.$$

Επομένως,

$$v(x) = \pm k(x), v_1 = -\frac{k'(x)}{2k(x)},$$

και το ανάπτυγμα ως προς v παίρνει τη μορφή:

$$v(x) = \pm k(x) - \varepsilon \frac{k'(x)}{2k(x)} + O(\varepsilon^2).$$

Συνεπώς, το u δίνεται από τη σχέση:

$$u(x) = \pm \int_a^x k(\xi) d\xi - \frac{\varepsilon}{2} \ln k(x) + O(\varepsilon^2),$$

όπου το a είναι αυθαίρετη σταθερά· οι υπόλοιπες σταθερές ενσωματώνονται στο ολοκλήρωμα. Άρα, τελικά, το ανάπτυγμα για την $y(x)$ είναι:

$$y(x) = e^{u(x)/\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(\pm \frac{1}{\varepsilon} \int_a^x k(\xi) d\xi\right) (1 + O(\varepsilon)), \varepsilon \ll 1.$$

Η εξίσωση αυτή ορίζει δύο γραμμικά ανεξάρτητες προσεγγίσεις (μία με το θετικό πρόσημο και μία με το αρνητικό) της γραμμικής εξίσωσης (iv). Ο γραμμικός συνδυασμός των προσεγγίσεων αυτών μας δίνει την προσέγγιση WKB για την περίπτωση που δεν έχουμε ταλαντώσεις:

$$y_{WKB}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x k(\xi) d\xi} + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x k(\xi) d\xi}.$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 από τα αρχικά ή από τα συνοριακά δεδομένα, ενώ ως κάτω όριο ολοκλήρωσης a μπορούμε να θεωρήσουμε είτε το σημείο στο οποίο δίνονται τα αρχικά δεδομένα είτε ένα συνοριακό σημείο.

Η περίπτωση κατά την οποία έχουμε ταλαντώσεις

Στην περίπτωση που το $q(x)$ είναι γνήσια θετικό, περιμένουμε οι λύσεις της (i) να παρουσιάζουν ταλαντώσεις. Και εδώ μπορούμε να ακολουθήσουμε σχεδόν την ίδια τακτική όπως στην περίπτωση που δεν έχουμε ταλαντώσεις. Έτσι, θεωρούμε την εξίσωση

$$\varepsilon^2 y'' + k(x)^2 y = 0, \quad (\text{vi})$$

όπου $k(x) > 0$. Τώρα, αν στην εξίσωση (vi) θέσουμε $y = e^{iu(x)/\varepsilon}$ και εργαστούμε ακριβώς πριν, καταλήγουμε στην παρακάτω WKB προσέγγιση με ταλαντώσεις:

$$y_{WKB}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} e^{i/\varepsilon \int_a^x k(\xi) d\xi} + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} e^{-i/\varepsilon \int_a^x k(\xi) d\xi}.$$

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση αυτή διαφέρει από την προηγούμενη μόνο κατά την παρουσία του φανταστικού αριθμού i στον εκθέτη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, μπορούμε να γράψουμε την προσέγγιση της (vi) με ημίτονα και συνημίτονα, ως:

$$y_{WKB}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x k(\xi) d\xi\right) + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x k(\xi) d\xi\right).$$

Παραδείγματα αυτής της μεθόδου για τον καθορισμό της δυναμικής καλωδίων ή risers δίνονται στις αναφορές [4-8]. Στην αναφορές [4-5], Τριανταφύλλου, εξήχθησαν ασυμπτωτικές λύσεις για τα δυναμικά προβλήματα ταλαντευόμενης χορδής [4] και καλωδίων μεταφοράς [5]. Στην [6], Cheng κ.ά, γίνεται χρήση της WKB μεθόδου για την ανάλυση μη ομοιόμορφων marine risers με την παραδοχή ότι οι ιδιότητες των διαφορετικών στοιχείων τους διαφέρουν ελάχιστα. Επίσης, αυτή η μέθοδος εφαρμόστηκε από τους Pesce κ.ά, [7], για την εξαγωγή κλειστής μορφής λύσεων στο γενικό πρόβλημα όμοιο αυτό του riser με γνωστή τη συνάρτηση έντασης κατά μήκος του, και πάλι από τους Pesce κ.ά, [8], ως μέθοδος επίλυσης του προβλήματος ιδιοτιμών για την εκτίμηση των απότομων κινήσεων του riser στο σημείο επαφής του με τον πυθμένα, touch-down point (TDP). Στην προκειμένη περίπτωση η χρήση της μεθόδου επεκτείνεται στις λεπτότοιχες αλυσοειδείς λεπτόγραμμες κατασκευές με μη μηδενική καμπτική ακαμψία και μεταβλητούς όρους έντασης και γωνίας.

Θεωρώντας μόνο τις αρμονικές κινήσεις, η Εξ. (1) γίνεται:

$$-K \frac{d^4 y_0(x)}{d^4 x} + a(x) \frac{d^2 y_0(x)}{d^2 x} + \beta(x) \frac{dy_0(x)}{dx} + \omega^2 y_0(x) = 0 \quad (2)$$

με ω την κυκλική συχνότητα.

Η παρουσία των συναρτήσεων $a(x)$ και $\beta(x)$ αποκλείει την περίπτωση ανεύρεσης κλειστής μορφής λύσεων που να ικανοποιούν την Εξ. (2). Αυτό ισχύει και στην περίπτωση γραμμικών $a(x)$ και $\beta(x)$, που παρατηρείται στην περίπτωση προβλήματος ταλαντευόμενης χορδής. Ωστόσο, μπορούμε να προσεγγίσουμε μια κλειστή μορφή λύση μέχρι ενός σημείου, χρησιμοποιώντας μια επαρκή τεχνική από τη θεωρία διαταραχών. Μέχρι εδώ η μέθοδος WKB υλοποιείται, άσχετα με τη μεταβολή που παρουσιάζουν οι $a(x)$ και $\beta(x)$. Όπως αναπτύχθηκε παραπάνω η εν λόγω μέθοδος υπολογίζει προσεγγιστικά τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, της οποίας η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος πολλαπλασιάζεται επί μια μικρή παράμετρο ε . Αναφορικά με το γεγονός ότι στις λεπτότοιχες, λεπτόγραμμες κατασκευές η αδιάστατη καμπτική ακαμψία λαμβάνει πολύ μικρές τιμές, το K μπορεί να αντικατασταθεί από μία μικρή παράμετρο $\varepsilon \ll 1$. Επίσης, ορίζοντας μια νέα χωρική συντεταγμένη τη $z = \varepsilon x$, η Εξ. (2) γίνεται:

$$-\varepsilon^5 \frac{d^4 y_0(z)}{d^4 z} + \varepsilon^2 a(z) \frac{d^2 y_0(z)}{d^2 z} + \varepsilon \beta(z) \frac{dy_0(z)}{dz} + \omega^2 y_0(z) = 0 \quad (3)$$

Θεωρώντας σταθερούς τους συντελεστές, δηλαδή $a(z)=a, \beta(z)=\beta$, τότε όλες οι παραπάνω λύσεις της εξίσωσης θα είναι εκθετικές συναρτήσεις με σταθερά ορίσματα.

Έστω δύο πιθανές, οι $y_0(z) = e^{u(z)/\varepsilon}$, $y_0(z) = e^{iu(z)/\varepsilon}$.

Δεχόμαστε μόνο την πρώτη έκφραση, εισάγουμε αυτή στην Εξ. (3) κι αν $u' = v$ (4), λαμβάνουμε:

$$-(\varepsilon^4 v''' + 4\varepsilon^3 v''v' + 3\varepsilon^3 v'v'' + 6\varepsilon^2 v'v'^2 + \varepsilon v^4) + a(z)(\varepsilon v' + v^2) + \beta(z)v + \omega^2 = 0 \quad (5)$$

Το σύμβολο ' υποδηλώνει παραγωγή ως προς z . Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα κανονικό ανάπτυγμα διαταραχών:

$$v(z) = v_0(z) + \varepsilon v_1(z) + \varepsilon^2 v_2(z) + O(\varepsilon^3) \quad (6)$$

Θεωρία διαταραχών

Ας αναπτύξουμε το θεωρητικό υπόβαθρο της θεωρίας διαταραχών ώστε να κατανοήσουμε ευκολότερα τη διαδικασία που θα ακολουθήσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση προβλήματος.

Πολλές φορές οι εξισώσεις ενός μαθηματικού μοντέλου, το οποίο περιγράφει κάποιο φυσικό πρόβλημα, δεν είναι δυνατόν να λυθούν με χρήση αναλυτικών μεθόδων. Έτσι, είναι συχνά απαραίτητο να καταφύγουμε στη χρήση προσεγγιστικών και αριθμητικών μεθόδων. Εξέχουσα θέση ανάμεσα στις προσεγγιστικές μεθόδους κατέχουν οι λεγόμενες μέθοδοι διαταραχών. Χονδρικά, μια μέθοδος διαταραχών μας επιτρέπει να βρούμε μια προσεγγιστική λύση του προβλήματός μας, όταν οι εξισώσεις που το περιγράφουν περιέχουν όρους που είναι μικροί. Οι όροι αυτοί εμφανίζονται επειδή η φυσική διαδικασία που περιγράφεται από το πρόβλημα περιέχει και φαινόμενα που έχουν μικρή επίδραση. Παραδείγματος χάριν, σε ένα πρόβλημα ροής ρευστού, το ιξώδες μπορεί να είναι μικρό· στην περίπτωση της κίνησης ενός βλήματος, η δύναμη που οφείλεται στην αντίσταση του αέρα μπορεί να είναι μικρή. Αυτές η χαμηλής τάξης επιδράσεις αναπαρίστανται στις εξισώσεις του μοντέλου από όρους που, σε σύγκριση με τους άλλους, είναι μικροί. Χρησιμοποιώντας τη σωστή κανονικοποίηση, η τάξη μεγέθους των όρων αυτών περιγράφεται με έναν συντελεστή, έστω ε , που είναι μικρός. Με τον όρο λύση διαταραχών εννοούμε μια προσεγγιστική λύση που αποτελείται από μερικούς

όρους ενός αναπτύγματος της μορφής Taylor ως προς την παράμετρο ε , η οποία ουσιαστικά ποσοτικοποιεί την απόκλιση από το προς επίλυση πρόβλημα (ακριβές).

Η μέθοδος διαταραχών

Για να κατανοήσουμε τη γενική ιδέα της μεθόδου, ας θεωρήσουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, την οποία γράφουμε, συμβολικά, ως:

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \varepsilon) = 0, t \in I \quad (\alpha)$$

όπου t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, I είναι ένα διάστημα και y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Η τελεία πάνω από το y δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο t και η παράμετρος ε εμφανίζεται ως όρισμα της F . Η εξίσωση μπορεί να συνοδεύεται εν γένει από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, όμως εμείς προς το παρόν θα αγνοήσουμε αυτές τις βοηθητικές συνθήκες. Για να δηλώσουμε ότι το ε είναι μια μικρή παράμετρος, συνήθως γράφουμε $\varepsilon \ll 1$. Αυτό σημαίνει ότι το ε συγκρινόμενο με τη μονάδα είναι μικρό, που είναι κάπως μια ασαφή φράση που δε συνοδεύεται από κάποιο συγκεκριμένο ποσοτικό φράγμα για το ε : προφανώς $0,001 \ll 1$, αλλά το $0,75$ δεν είναι μικρό συγκρινόμενο με τη μονάδα. Οι παραπάνω παρατηρήσεις εφαρμόζονται και σε εξισώσεις με μεγάλες παραμέτρους, έστω λ , αφού στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θέσουμε $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$, που είναι μικρό.

Με τον όρο *σειρά διαταραχής* εννοούμε μια δυναμοσειρά ως προς ε της μορφής

$$y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (\beta)$$

Η μέθοδος των *κανονικών διαταραχών* βασίζεται στην υπόθεση ότι έχουμε μια λύση της εξίσωσης (α) που είναι της μορφής (β), όπου οι συναρτήσεις y_0, y_1, y_2, \dots θα προσδιοριστούν αν αντικαταστήσουμε την (β) στην (α). Οι λίγοι πρώτοι όροι μιας τέτοιας σειράς απαρτίζουν μια προσεγγιστική λύση, τη λεγόμενη *λύση διαταραχών* του προβλήματος: συνήθως παίρνουμε δύο ή τρεις όρους της σειράς. Γενικά, η μέθοδος θα θεωρείται επιτυχής όταν η προσέγγιση θα είναι ομοιόμορφη, δηλαδή όταν η διαφορά της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς συγκλίνει προς το μηδέν ομοιόμορφα στο I με κάποια καλώς ορισμένη ταχύτητα, καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$. Τονίζουμε το γεγονός ότι δε θα υπήρχε κανένα όφελος αν επιλέγαμε εκ των προτέρων μια συγκεκριμένη τιμή του ε : αντίθετα, θεωρούμε το ε ως έναν αυθαίρετο μικρό αριθμό ώστε η ανάλυσή μας να ισχύει για κάθε επιλογή του ε . Σε πολλά προβλήματα ενδιαφέρει κυρίως η συμπεριφορά των λύσεων, καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$. Όμως, σε ορισμένες περιπτώσεις, το ανάπτυγμα

διαταραχής ως προς ε μπορεί να είναι καλή προσέγγιση ακόμα κι αν το ε είναι κοντά στο 1. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η σειρά διαταραχής είναι μια αναπαράσταση που ισχύει για $\varepsilon < \varepsilon_0$, για κάποιο ε_0 που δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Ο όρος y_0 στη σειρά διαταραχής λέγεται όρος *πρωτεύουσας τάξης* ή *πρωτεύων όρος*. Οι όροι $\varepsilon y_1, \varepsilon^2 y_2, \dots$ θεωρούνται ως διορθωτικοί όροι υψηλότερης τάξης, οι οποίοι αναμένονται να είναι μικροί. Αν η μέθοδος είναι επιτυχής, η y_0 θα είναι λύση του *μη διαταραγμένου προβλήματος* $F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, 0) = 0, t \in I$,

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, 0) = 0, t \in I,$$

στο οποίο το ε είναι μηδέν. Σε αυτό το πλαίσιο, λέμε ότι η εξίσωση (α) παριστάνει το διαταραγμένο πρόβλημα.

Παρούσα μελέτη - εφαρμογή

Επιστρέφοντας στην περίπτωση του προβλήματος που μελετούμε εκτελούμε τα ακόλουθα:

Εισάγοντας την Εξ. (6) στην Εξ. (5) και διατηρώντας μόνο τους όρους $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} & -6\varepsilon^2 v_0' v_0'^2 - \varepsilon v_0'^4 - 4\varepsilon^2 v_1 v_0'^3 + a(z)[\varepsilon v_0' + \varepsilon^2 v_1' + v_0'^2 + \\ & + \varepsilon^2 v_1'^2 + 2\varepsilon v_0 v_1 + 2\varepsilon^2 v_0 v_2] + \beta(z)[v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2] + \quad (7) \\ & + \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση παράγει στις τάξεις $O(\varepsilon^0), O(\varepsilon^1), O(\varepsilon^2)$ τις παρακάτω εκφράσεις:

- $O(\varepsilon^0) \Rightarrow a(z)v_0'^2 + \beta(z)v_0 + \omega^2 = 0$
- $O(\varepsilon^1) \Rightarrow -v_0'^4 + a(z)v_0' + 2a(z)v_0 v_1 + \beta(z)v_1 = 0$
- $O(\varepsilon^2) \Rightarrow -6v_0' v_0'^2 - 4v_1 v_0'^3 + a(z)[v_1' + v_1'^2 + 2v_0 v_2] + \beta(z)v_2 = 0$ (8), (9) και (10)

Επιλύοντας τις (8) και (9), ως προς v_0 και v_1 αντίστοιχα, προκύπτει:

$$v_0 = \frac{-\beta(z) \pm \sqrt{\beta^2(z) - 4\omega^2 a(z)}}{2a(z)} \quad (11)$$

$$v_1 = \frac{v_0^4 - a(z)v_0'}{2a(z)v_0 + \beta(z)} \quad (12)$$

Ενώ η (10) ως προς v_2 δίνει:

$$v_2 = \frac{6v_0'v_0^2 + 4v_1v_0^3 - a(z)[v_1' + v_1^2]}{2a(z)v_0 + \beta(z)} \quad (13)$$

Χρησιμοποιώντας τον απλό μετασχηματισμό (4), αποδεικνύεται ότι οι γενικές εκφράσεις που παρέχουν τις ανεξάρτητες λύσεις για την αδιάστατη κατακόρυφη ταλάντωση $y_0(z)$ υπολογίζονται από:

$$u(z) = \int_0^z \varepsilon^0 v_0(\xi) d\xi + \int_0^z \varepsilon^1 v_1(\xi) d\xi + \int_0^z \varepsilon^2 v_2(\xi) d\xi + O(\varepsilon^3)$$

Οπότε,

$$y_0(z) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^z v_0(\xi) d\xi + \int_0^z v_1(\xi) d\xi + \varepsilon \int_0^z v_2(\xi) d\xi + O(\varepsilon^2)\right) \quad (14)$$

$$y_0(z) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^z v_0(\xi) d\xi + i \int_0^z v_1(\xi) d\xi + \varepsilon i \int_0^z v_2(\xi) d\xi + O(\varepsilon^2)\right) \quad (15)$$

Από τη θεωρία που αναπτύχθηκε παραπάνω οι Εξ. (14) και Εξ. (15), εκφράζουν την WKB μέθοδο προσέγγισης για τις τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις του βασικού προβλήματος που διατυπώνεται στην Εξ. (3), και η πλήρης λύση δίνεται από το γραμμικό συνδυασμό αυτών. Ακόμη, η Εξ. (11) δίνει δύο λύσεις, ενώ οι λύσεις των Εξ. (12), Εξ. (13) εξαρτώνται απευθείας από την εκάστοτε διαφορετική λύση της πρώτης, κι έχουμε:

$$v_0^{(1)} = \frac{-\beta(z) + \sqrt{\beta^2(z) - 4\omega^2 a(z)}}{2a(z)} \quad (16) \quad \text{και}$$

$$v_0^{(2)} = \frac{-\beta(z) - \sqrt{\beta^2(z) - 4\omega^2 a(z)}}{2a(z)} \quad (17).$$

Άρα για την Εξ. (12) έχουμε, για τις τιμές του v_1 :

$$v_1^{(1)} = \frac{(v_0^{(1)})^4 - a(z)(v_0^{(1)})'}{2a(z)v_0^{(1)} + \beta(z)} \quad (18)$$

$$v_1^{(2)} = \frac{(v_0^{(2)})^4 - a(z)(v_0^{(2)})'}{2a(z)v_0^{(2)} + \beta(z)} \quad (19).$$

Ενώ για τις τιμές του v_2 :

$$v_2^{(1)} = \frac{6(v_0^{(1)})'(v_0^{(1)})^2 + 4v_1^{(1)}(v_0^{(1)})^3 - a(z)\left[(v_1^{(1)})' + (v_1^{(1)})^2\right]}{2a(z)v_0^{(1)} + \beta(z)} \quad (20)$$

$$\text{και } v_2^{(2)} = \frac{6(v_0^{(2)})'(v_0^{(2)})^2 + 4v_1^{(2)}(v_0^{(2)})^3 - a(z)\left[(v_1^{(2)})' + (v_1^{(2)})^2\right]}{2a(z)v_0^{(2)} + \beta(z)} \quad (21).$$

Τελικά, η έκφραση που δίνει τις ιδιομορφές καθορίζεται από την ανάπτυξη των τεσσάρων γραμμικών ανεξάρτητων λύσεων. Έτσι, εισάγοντας το μετασχηματισμό $z = \varepsilon x$ και απαλείφοντας τους όρους τρίτης τάξης (ε^3) από τη σειρά διαταραχών, εξάγεται το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}
y_0(x) = & C_1 \exp\left(\int_0^x v_0^{(1)}(\xi) d\xi + \varepsilon \int_0^x v_1^{(1)}(\xi) d\xi + \varepsilon^2 \int_0^x v_2^{(1)}(\xi) d\xi\right) + \\
& + C_2 \exp\left(\int_0^x v_0^{(2)}(\xi) d\xi + \varepsilon \int_0^x v_1^{(2)}(\xi) d\xi + \varepsilon^2 \int_0^x v_2^{(2)}(\xi) d\xi\right) + \\
& + C_3 \exp\left(i \int_0^x v_0^{(1)}(\xi) d\xi + \varepsilon i \int_0^x v_1^{(1)}(\xi) d\xi + i \varepsilon^2 \int_0^x v_2^{(1)}(\xi) d\xi\right) + \\
& + C_4 \exp\left(i \int_0^x v_0^{(2)}(\xi) d\xi + \varepsilon i \int_0^x v_1^{(2)}(\xi) d\xi + i \varepsilon^2 \int_0^x v_2^{(2)}(\xi) d\xi\right)
\end{aligned} \tag{22}$$

με C_1, C_2, C_3 και C_4 αυθαίρετες σταθερές.

5. Εφαρμογή οριακών συνθηκών - εξαγωγή ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών

Εφαρμόζουμε άρθρωση στα σημεία $s=0 \Rightarrow x = \frac{s}{L} = \frac{0}{L} = 0$ και $s=L \Rightarrow x = \frac{s}{L} = \frac{L}{L} = 1$.

Άρα θα εφαρμοστεί άρθρωση στα σημεία $x = 0, x = 1$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω (βλ. Οριακές συνθήκες) το βέλος κάμψης και η ροπή θα πρέπει να είναι μηδενικά.

$$y_0(0,t) = EI(x) \frac{\partial^2 y_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0,x=1} = 0 \xrightarrow{I=\text{σταθερό}} y_0(0,t) = EI \frac{\partial^2 y_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0,x=1} = 0$$

Με τη χρήση των παραπάνω οριακών συνθηκών στην Εξ. (22), προκειμένου να λάβουμε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές, παράγεται ένα 4×4 ομογενές σύστημα ως προς τις άγνωστες αυθαίρετες σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 . Όπως γνωρίζουμε, οι ιδιοσυχνότητες υπολογίζονται υπό την απαίτηση η ορίζουσα του 4×4 πίνακα, που σχηματίζεται από το μητρώο $\zeta = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$, να είναι μηδενική. Δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0, \det[A] = \|A\| = 0$$

Για παράδειγμα, αν εφαρμόσουμε τη συνθήκη $y_0(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2+C_3+C_4=0$, τότε το παραπάνω γίνεται:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Στη συνέχεια οι ιδιομορφές εξάγονται με τη βοήθεια του ισοδύναμου 3×3 γραμμικού ανομοιογενούς συστήματος, που παρέχει τις τρεις άγνωστες σταθερές συναρτήσεως της τέταρτης. Όλοι οι αριθμητικοί υπολογισμοί έγιναν με λογισμικό MATLAB, εκφράζοντας τόσο τις ιδιοσυχνότητες όσο και τις άγνωστες σταθερές C με τη γενικευμένη μιγαδική μορφή. Ωστόσο, οι αριθμητικές εκτιμήσεις γίνονται με την απαίτηση οι ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχες ιδιομορφές να μην είναι μιγαδικές. Συγκεκριμένα, σε όλες τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα δείχνουν πως τα φανταστικά μέρη των ιδιοσυχνοτήτων και τα πραγματικά των σταθερών C είναι μηδενικά.

Εκτελέσαμε την ίδια ακριβώς διαδικασία, εφαρμόζοντας και πάκτωση στα σημεία $x = 0$, $x = 1$ και απαιτώντας το βέλος κάμψης και η κλίση σε αυτά να είναι μηδενικά:

$$y_0(0, t) = \left. \frac{\partial y_0(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0, x=1} = 0.$$

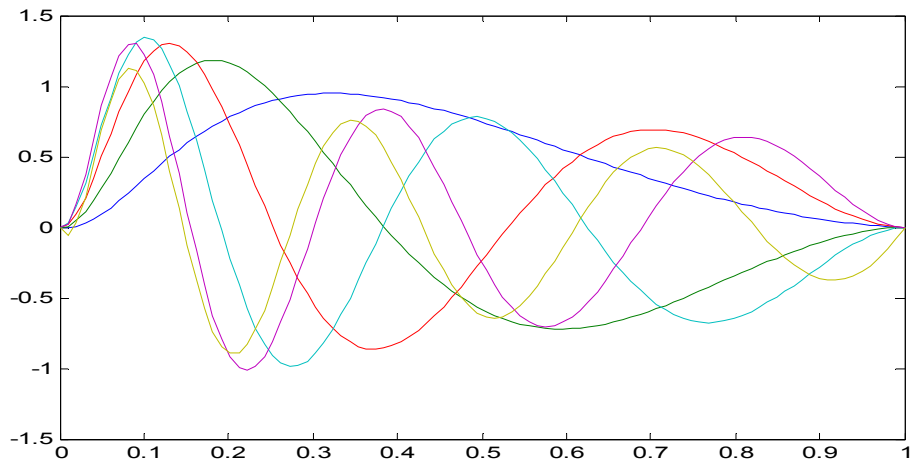
6. Αποτελέσματα

1^η Περίπτωση: Riser μήκους L=1400m και βάθους πόντισης D=1200m.

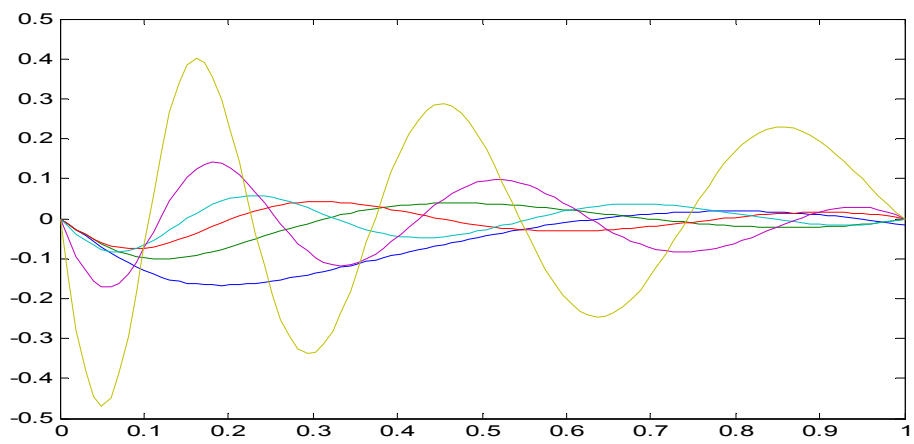
Eigenfrequencies (L=1400m)	Eigenfrequencies (L=1400m)
WKB_14 (first-order perturbation terms)	WKB_14 (second-order perturbation terms)
om = 3.0871	om = 3.0874
om = 5.1429	om = 5.1428
om = 7.2544	om = 7.2481
om = 9.4289	om = 9.3978
om = 11.6883	om = 11.6052
om = 13.7774	om = 12.9089

Πίνακας 1. Προκύπτουσες ιδιοσυχνότητες με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ (αριστερή στήλη-παλαιότερη μελέτη) και με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ (δεξιά στήλη-παρούσα μελέτη).

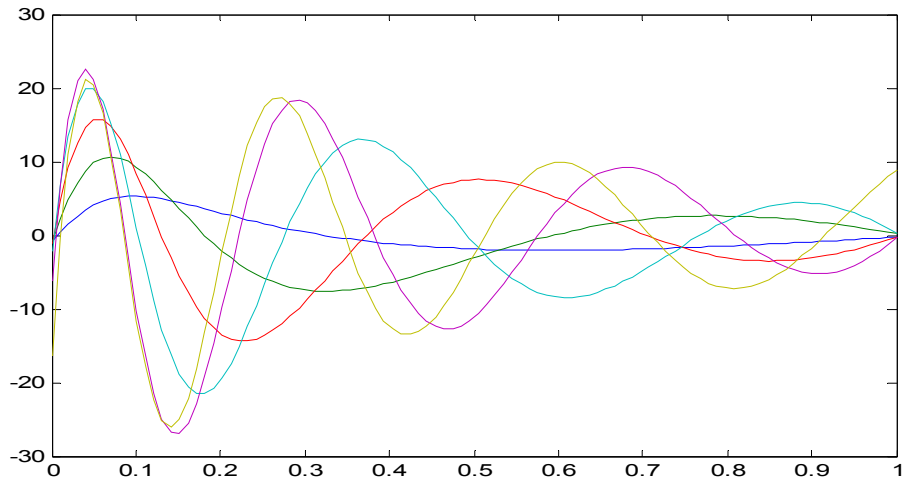
Στην αριστερή στήλη του πίνακα απεικονίζονται οι ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν από παλαιότερη μελέτη με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ και στη δεξιά στήλη είναι αυτές που εξήχθησαν με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$. Στο εξής σε κάθε πίνακα θα ισχύει το παραπάνω. Ακολουθούν τα σχήματα (plots) των ιδιομορφών, στατικής τάσης και γωνίας:



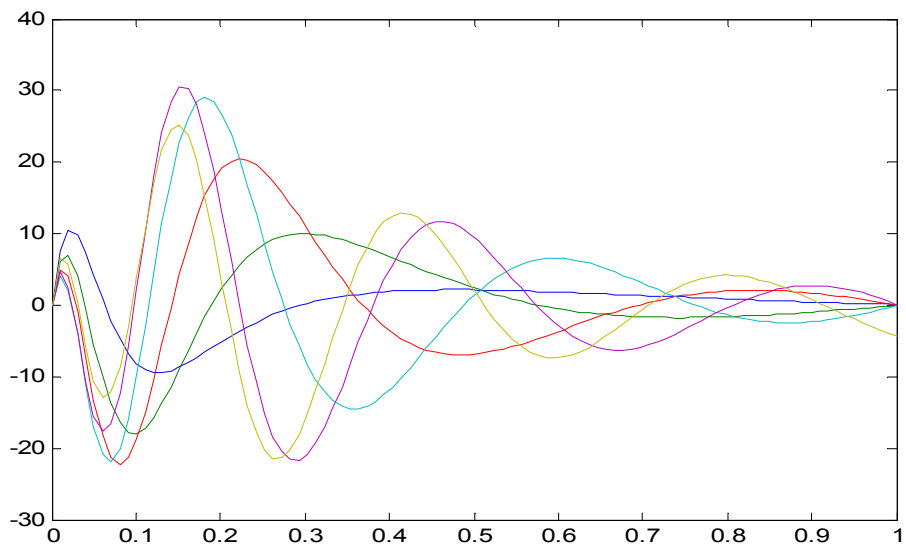
$plot(x, y_0(x))$



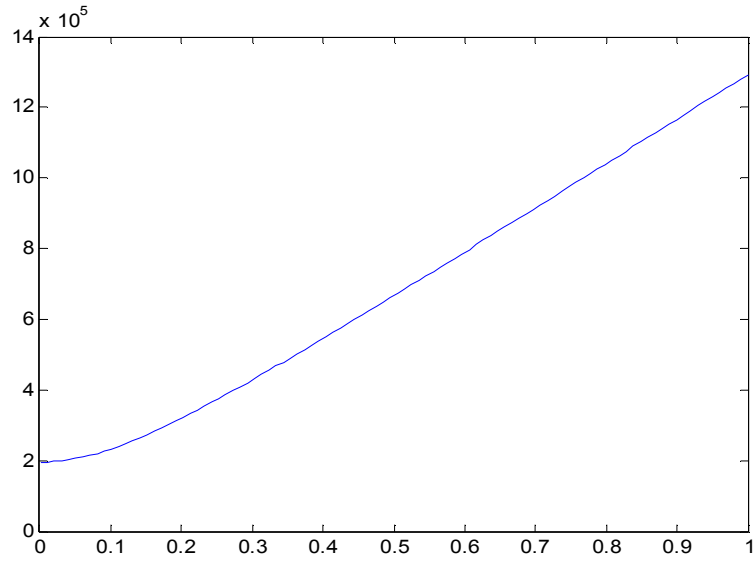
$plot(x, imag(y_0(x)))$



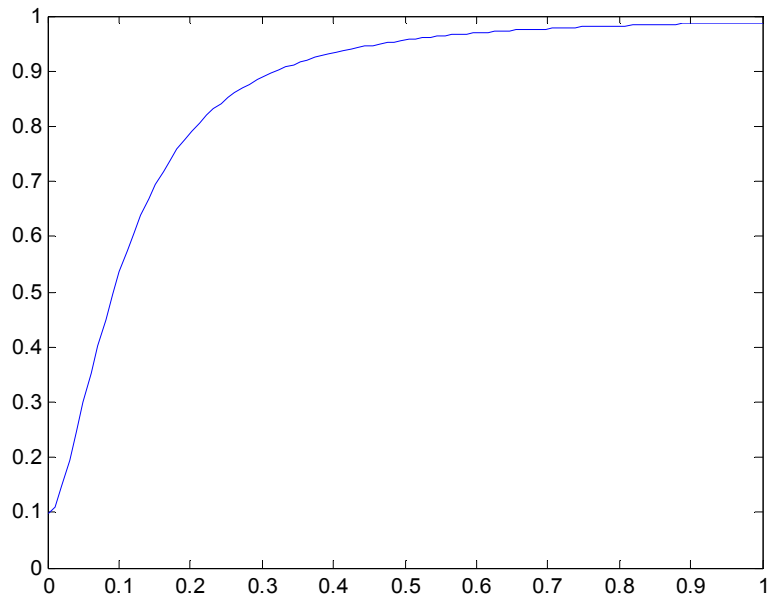
$$\text{plot}\left(x, \frac{dy_0(x)}{dx}\right)$$



$$\text{plot}\left(x, \frac{d^2y_0(x)}{dx^2}\right)$$



plot(x, T₀)



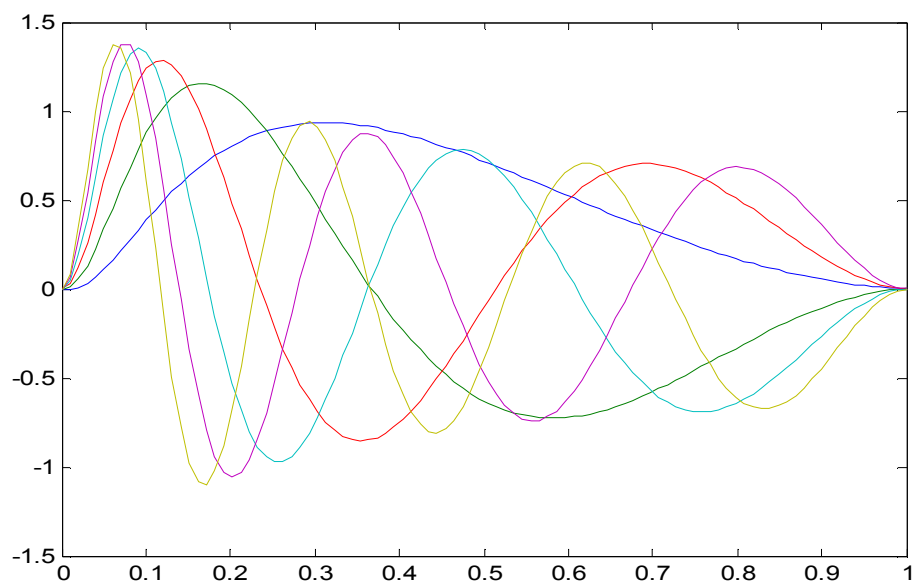
plot(x, b)

2^η Περίπτωση: Riser μήκους L=1500m και βάθους πόντισης D=1300m.

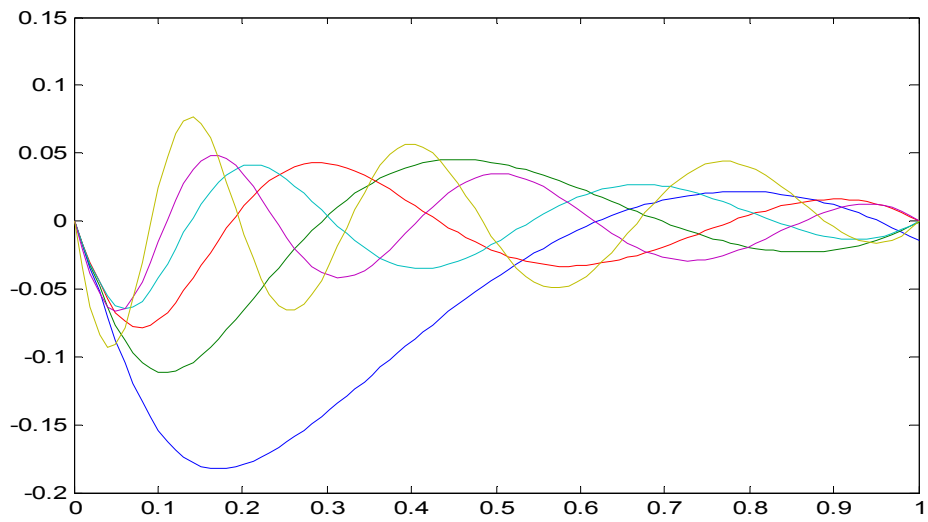
Eigenfrequencies (L=1500m)	Eigenfrequencies (L=1500m)
WKB_15 (first-order perturbation terms)	WKB_15(second-order perturbation terms)
om = 3.2862	om = 3.2863
om = 5.4464	om = 5.4464
om = 7.6474	om = 7.6453
om = 9.8827	om = 9.8718
om = 12.1633	om = 12.1284
om = 14.5018	om = 14.4156

Πίνακας 2. Προκύπτουσες ιδιοσυχνότητες με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ (αριστερή στήλη-παλαιότερη μελέτη) και με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ (δεξιά στήλη-παρούσα μελέτη).

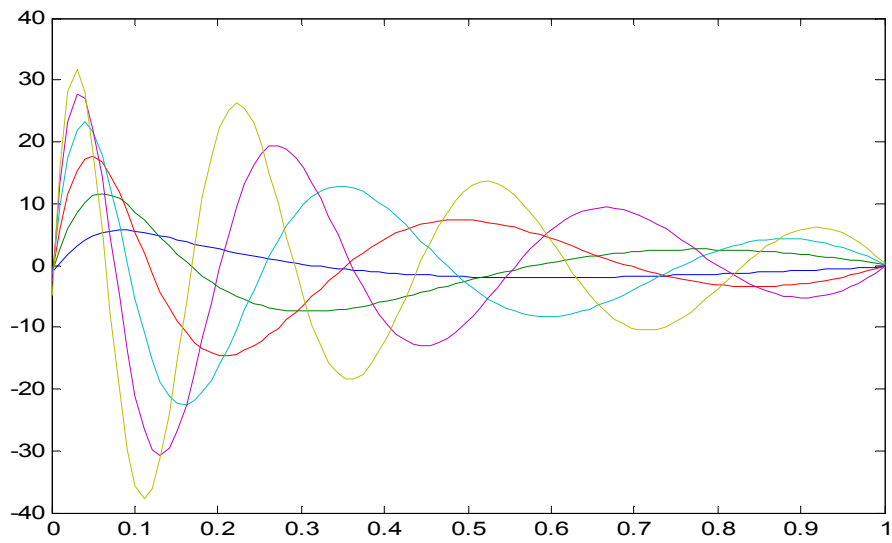
Και ακολουθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα:



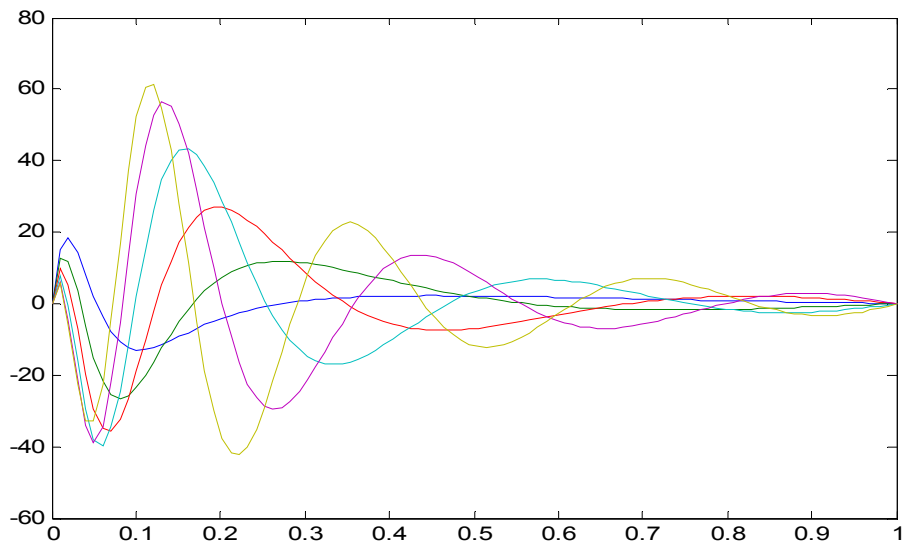
$plot(x, y_0(x))$



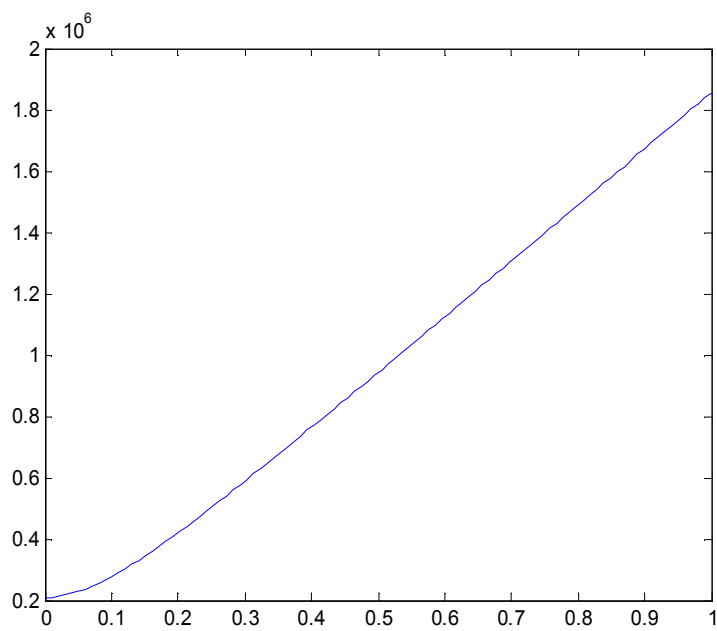
$$\text{plot}(x, \text{imag}(y_0(x)))$$



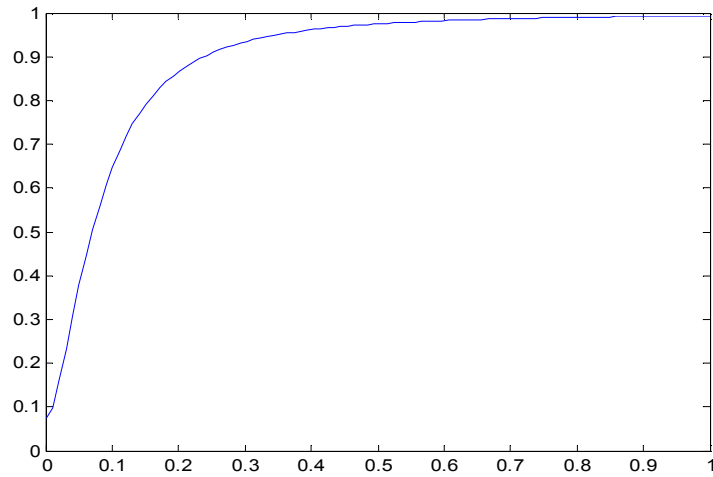
$$\text{plot}\left(x, \frac{dy_0(x)}{dx}\right)$$



$$plot\left(x, \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2}\right)$$



$$plot(x, T_0)$$



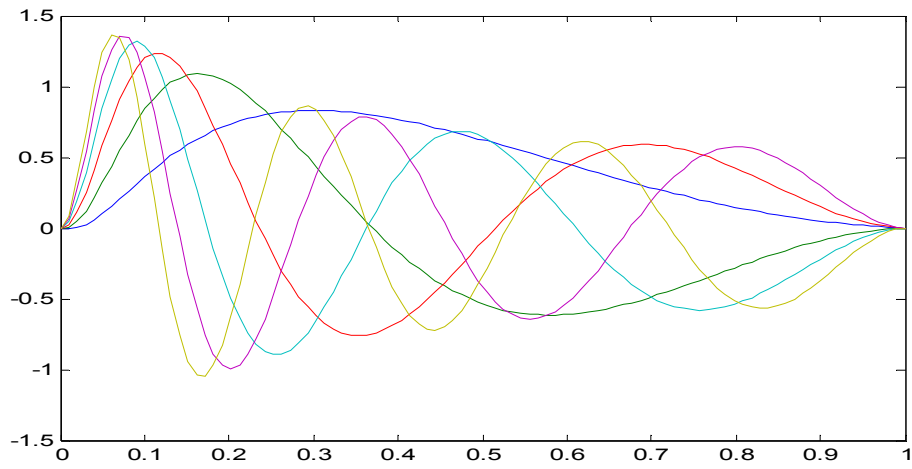
$plot(x,b)$

3^η Περίπτωση: Riser μήκους L=2022m και βάθους πόντισης D=1800m.

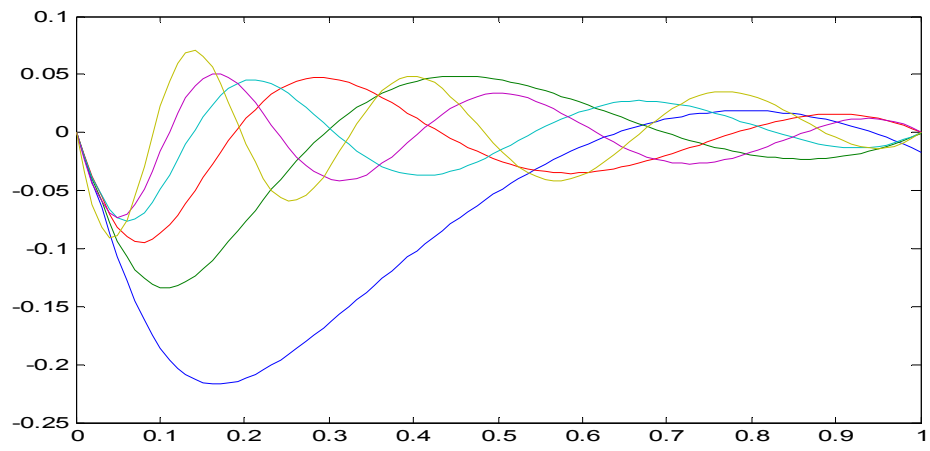
Eigenfrequencies (L=2022m) WKB_20 (first-order perturbation terms)	Eigenfrequencies (L=2022m) WKB_20(second-order perturbation terms)
om = 2.9892	om = 2.9893
om = 4.9319	om = 4.9321
om = 6.9133	om = 6.9123
om = 8.9238	om = 8.9171
om = 10.9712	om = 10.9483
om = 13.0648	om = 13.0064

Πίνακας 3. Προκύπτουσες ιδιοσυχνότητες με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ (αριστερή στήλη-παλαιότερη μελέτη) και με χρήση όρων $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ (δεξιά στήλη-παρούσα μελέτη).

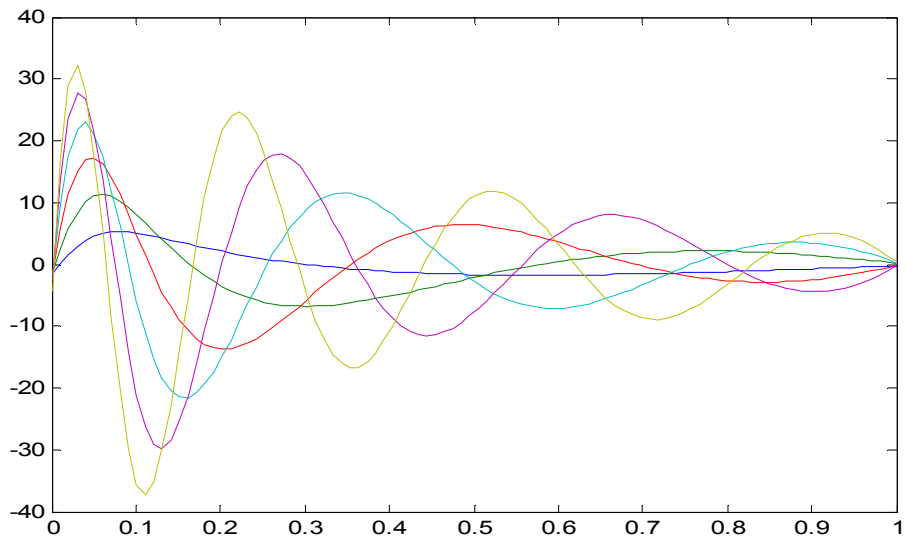
Στη συγκεκριμένη περίπτωση λάβαμε τα παρακάτω διαγράμματα:



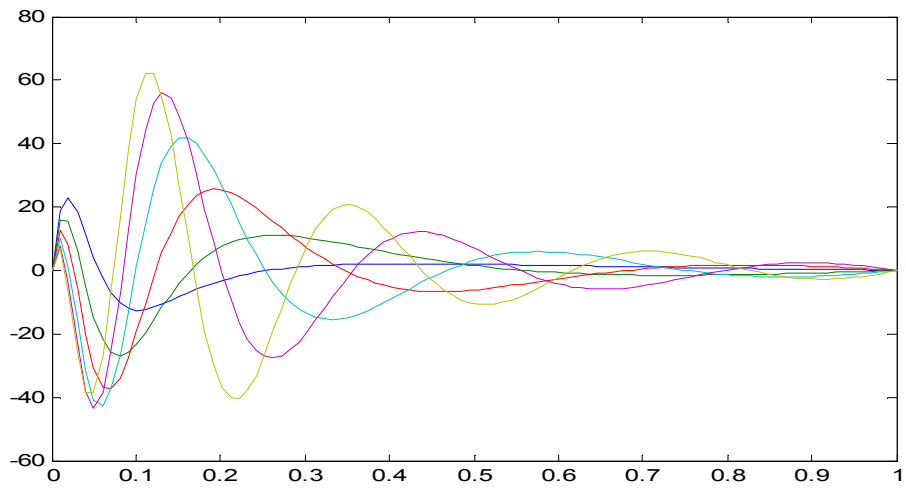
$plot(x, y_0(x))$



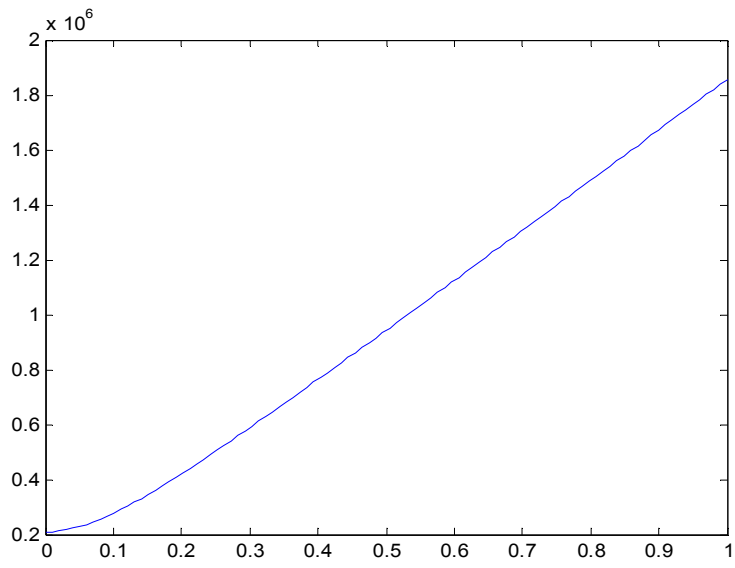
$plot(x, imag(y_0(x)))$



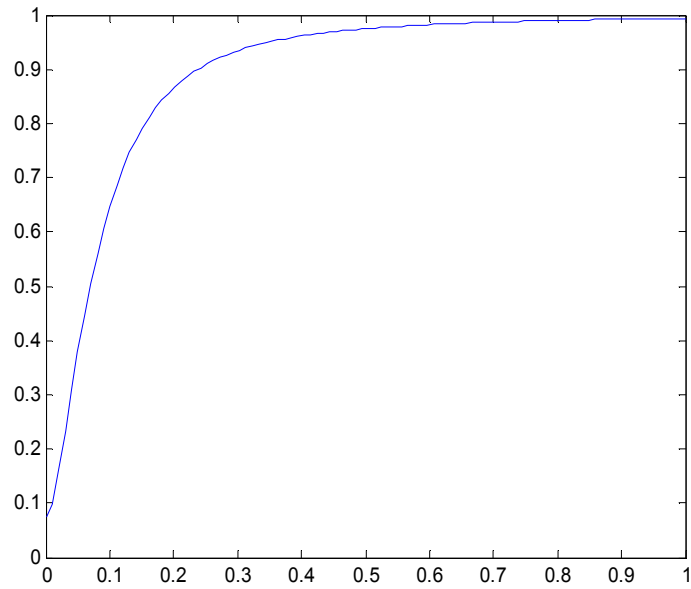
$$\text{plot}\left(x, \frac{dy_0(x)}{dx}\right)$$



$$\text{plot}\left(x, \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2}\right)$$



$plot(x, T_0)$



$plot(x, b)$

Στη συνέχεια εφαρμόσαμε πάκτωση στα ανωτέρω σημεία, δηλαδή στα $s = 0 \Rightarrow x = \frac{s}{L} = \frac{0}{L} = 0$ και $s = L \Rightarrow x = \frac{s}{L} = \frac{L}{L} = 1$, βέλος κάμψης και κλίση πρέπει να είναι μηδενικά:

$$y_0(0,t) = \left. \frac{\partial y_0(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0,x=1} = 0$$

Ακολουθήσαμε ακριβώς την ίδια διαδικασία με την περίπτωση της άρθρωσης. Οι ιδιομορφές που προκύπτουν είναι ακριβώς ίδιες με τις παραπάνω για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις των riser, και αυτό οφείλεται στο ότι εξήχθησαν οι ίδιες ιδιοσυχνότητες.

Παρατήρηση: Οι υπόλοιπες ιδιότητες καθώς και τα χαρακτηριστικά των Risers σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις υπάρχουν αναλυτικά στο Παράρτημα των κωδίκων λογισμικού MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη.

7. Συμπεράσματα

Πολλές φορές οι εξισώσεις ενός μαθηματικού μοντέλου, το οποίο περιγράφει κάποιο φυσικό πρόβλημα, δεν είναι δυνατόν να λυθούν με χρήση αναλυτικών μεθόδων. Έτσι, είναι συχνά απαραίτητο να καταφύγουμε στη χρήση προσεγγιστικών και αριθμητικών μεθόδων. Εξέχουσα θέση ανάμεσα στις προσεγγιστικές μεθόδους κατέχουν οι λεγόμενες μέθοδοι διαταραχών. Χονδρικά, μια μέθοδος διαταραχών μας επιτρέπει να βρούμε μια προσεγγιστική λύση του προβλήματός μας, όταν οι εξισώσεις που το περιγράφουν περιέχουν όρους που είναι μικροί. Οι όροι αυτοί εμφανίζονται επειδή η φυσική διαδικασία που περιγράφεται από το πρόβλημα περιέχει και φαινόμενα που έχουν μικρή επίδραση. Παραδείγματος χάριν, σε ένα πρόβλημα ροής ρευστού, το ιξώδες μπορεί να είναι μικρό· στην περίπτωση της κίνησης ενός βλήματος, η δύναμη που οφείλεται στην αντίσταση του αέρα μπορεί να είναι μικρή. Αυτές η χαμηλής τάξης επιδράσεις αναπαρίστανται στις εξισώσεις του μοντέλου από όρους που, σε σύγκριση με τους άλλους, είναι μικροί. Χρησιμοποιώντας τη σωστή κανονικοποίηση, η τάξη μεγέθους των όρων αυτών περιγράφεται με έναν συντελεστή, έστω ε , που είναι μικρός. Με τον όρο λύση διαταραχών εννοούμε μια προσεγγιστική λύση που αποτελείται από μερικούς όρους ενός αναπτύγματος της μορφής Taylor ως προς την παράμετρο ε , η οποία ουσιαστικά ποσοτικοποιεί την απόκλιση από το προς επίλυση πρόβλημα (ακριβές).

Στη συγκεκριμένη μελέτη θελήσαμε να ελέγξουμε τη συμπεριφορά του δυναμικού προβλήματος, αναφορικά με τις προκύπτουσες ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές. Με τη

βοήθεια αυτών λαμβάνουμε ενδεικτικά τον τρόπο δυναμικής συμπεριφοράς των συγκεκριμένων ανεπιθύμητων επιρροών, των μεγάλων καμπτικών φορτίων, αλλά και την τάση μεταβολής των κανονικών μετακινήσεων στην αλυσίδα. Σε παλαιότερη μελέτη του κ. Ι. Κ. Χατζηγεωργίου, και επιβλέποντα καθηγητή μου, η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών αλυσοειδούς λεπτόγραμμης κατασκευής (catenary riser) με τη χρήση της μεθόδου WKB, έγινε λαμβάνοντας υπόψη μόνο όρους $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών. Στην παρούσα εργασία θελήσαμε να ελέγξουμε τι θα επιφέρει η προσθήκη ενός ανώτερου όρου, και χρησιμοποιήσαμε όρους $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών. Θέλαμε να μελετήσουμε τη διαφορά στα αποτελέσματα-αν υπήρχε-ειδικά στις πρώτες ιδιομορφές, ποιά η επίδρασή του νέου όρου, δηλαδή.

Από τα αποτελέσματα, διαπιστώσαμε πως δεν προκαλείται σημαίνουσα μεταβολή στη συμπεριφορά του δυναμικού προβλήματος. Αυτό φαίνεται έντονα και από τις πολύ μικρές διαφορές στις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων που προέκυψαν. Κάποιες μικρές διαφορές οφείλονται στις αριθμητικές μεθόδους και δεν κρίνονται σημαντικές. Ως φυσικό, ανάλογο συμπέρασμα εξάγεται και για τις ιδιομορφές.

Παράρτημα

Κώδικας MATLAB για το Riser 1^{ης} περίπτωσης:

```
clear all

% The program uses the following functions: @eigenfreq0,
% @eigencomplete_new,
% @tdomain, @floquet, @floquet1

L=1400;%1500;           %length of catenary
EI=.1209e9;%74515e3;    %flexural rigidity
EA=0.5823e10;          %elastic stiffness
wo=915.56;%1008.2;     wet weight
m=262.9331;           %mass per length
ma=169.654;           %added mass per length
M=m+ma;               %mass + added mass
row=1025;             %water density
CDn=1.0;              %normal drag coefficient
diam=429;%0.355;      %external diameter
```

```

beta=4/3/pi*row*CDn*diam*L/M; %normalized damping coefficient in normal
direction - used in frequency domain
bo=1/2*row*CDn*diam*L/M; %normalized damping coefficient in normal
direction - used in time domain
mio=0.0; %artificial viscus damping

nomeg=2; %number of modes to be considered
mi=(1:nomeg)*mio; %damping components proportional to mode
number
ya=5/L; %normalized normal top excitation ya=qa/L;
ra=1.27E-04; %normalized axial top excitation ra=pa/L -
this will be used only for time domain simulation
pao=0.00E-04; %normalized axial top excitation for
coupled linear problem
qao=0.00E-04; %normalized normal top excitation for
coupled linear problem

x=load('static2.out');
To=x(:,1); fi=x(:,2); xs=x(:,3); zs=x(:,4); dfi=x(:,5); dTo=x(:,7);
d2fi=-x(:,6)/EI; dfidx=dfi*L; d2fidx2=d2fi*L^2;

clear x

a=To/wo/L; b=sin(fi); g=cos(fi); da=dTo/wo; K=EI/wo/L^3; epsilon=K;
lamda=EA/wo/L;

n=max(size(a));

for i=1:n
    db(i)=cos(fi(i))*dfi(i);
end

dx=1/(n-1);
for i=1:n
    x(i)=(i-1)*dx;
end

dxi=x(2)-x(1);
coef(1:n)=1; coef(1)=0.5;coef(n)=0.5;
sum=0;
for i=1:n
    sum=sum+1/sqrt(a(i))*dxi*coef(i);
end
inttop=sum;

step=0.05:.1:100;

jj=1;
for i=1:max(size(step))

```

```

    optnx = optimset('Tolx',1e-20,'TolFun',1e-20);
    yy(i)=fsolve(@eigencomplete_new,step(i),
optnx,a,da,b,db,n,K)*sqrt(wo/M/L);
    if (i > 1 & yy(i) > step(1) & abs(yy(i)-yy(i-1)) > 1.e-2)
        yyy(jj) = yy(i);
        jj=jj+1;
        if (jj > nomeg)
            break
        end
    end
end
end

oml=real(yyy)*sqrt(M*L/wo); %yyy = actual eigenfrequencies, oml =
normalized eigenfrequencies

clear dxi
clear coef
npo=n;
coef(1:npo)=1;coef(1)=0.5;coef(npo)=0.5;

for jjj=1:max(size(oml))
    om=oml(jjj)
    dxi=x(2)-x(1);

    for i=1:n
        uo1(i)=(-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i);
        uo2(i)=(-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i);
        reuo1(i)=real((-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        reuo2(i)=real((-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        imuo1(i)=imag((-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        imuo2(i)=imag((-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
    end
    fresult=fit(x',reuo1,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    reduo1=deriv1;
    fresult=fit(x',reuo2,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    reduo2=deriv1;
    fresult=fit(x',imuo1,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imduo1=deriv1;
    fresult=fit(x',imuo2,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imduo2=deriv1;
    duo1=reduo1+j*imduo1;
    duo2=reduo2+j*imduo2;

    for i=1:n
        u11(i)=(uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
        u12(i)=(uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
        reu11(i)=real((uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));

```

```

        reu12(i)=real((uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
        imu11(i)=imag((uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
        imu12(i)=imag((uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
    end

    fresult=fit(x',reu11','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    redu11=deriv1;
    fresult=fit(x',reu12','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    redu12=deriv1;
    fresult=fit(x',imu11','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imdu11=deriv1;
    fresult=fit(x',imu12','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imdu12=deriv1;
    du11=redu11+j*imdu11;
    du12=redu12+j*imdu12;

    for i=1:n
        u21(i)=(6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(du11(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
        u22(i)=(6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(du12(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
        reu21(i)=real((6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(du11(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
        reu22(i)=real((6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(du12(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
        imu21(i)=imag(6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(du11(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
        imu22(i)=imag(6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(du12(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
    end

    fresult=fit(x',reu21','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    redu21=deriv1;
    fresult=fit(x',reu22','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    redu22=deriv1;
    fresult=fit(x',imu21','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imdu21=deriv1;
    fresult=fit(x',imu22','spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imdu22=deriv1;
    du21=redu21+j*imdu21;
    du22=redu22+j*imdu22;

    sum1=0;sum2=0;sum3=0;sum4=0;sum5=0;sum6=0;
    for i=1:n

```



```

sum1=sum1+uo1(i)*dxi*coef(i);
sum2=sum2+uo2(i)*dxi*coef(i);
sum3=sum3+u11(i)*dxi*coef(i);
sum4=sum4+u12(i)*dxi*coef(i);
sum5=sum5+u21(i)*dxi*coef(i);
sum6=sum6+u22(i)*dxi*coef(i);

end
intuo1=sum1; intuo2=sum2; intu11=sum3; intu12=sum4; intu21=sum5;
intu22=sum6;

a11=1;a12=1;a13=1;a14=1;
a21=exp(intuo1+K*intu11+K^2*intu21);
a22=exp(intuo2+K*intu12+K^2*intu22);
a23=exp(j*intuo1+K*j*intu11+j*(K^2)*intu21);
a24=exp(j*intuo2+K*j*intu12+j*(K^2)*intu22);

a31=duo1(1)+K*du11(1)+K^2*du21(1);
a32=duo2(1)+K*du12(1)+K^2*du22(1);
a33=j*duo1(1)+j*K*du11(1)+j*(K^2)*du21(1);
a34=j*duo2(1)+j*K*du12(1)+j*(K^2)*du22(1);

a41=(duo1(n)+K*du11(n)+K^2*du21(n))*a21;
a42=(duo2(n)+K*du12(n)+K^2*du22(n))*a22;
a43=(j*duo1(n)+j*K*du11(n)+j*(K^2)*du21(n))*a23;
a44=(j*duo2(n)+j*K*du12(n)+j*(K^2)*du22(n))*a24;

AA=[a11 a12 a13 a14; a21 a22 a23 a24; a31 a32 a33 a34; a41 a42 a43
a44];

B(1)=-a13;B(2)=-a23;B(3)=-a33;
A(1,1)=a11;A(1,2)=a12;A(1,3)=a14;
A(2,1)=a21;A(2,2)=a22;A(2,3)=a24;
A(3,1)=a31;A(3,2)=a32;A(3,3)=a34;

C=A\B';

C=inv(A)*B';

clear dxi
clear coef
npo=n;
coef(1:npo)=1; coef(1)=0.5; coef(npo)=0.5;
intuo1(1)=0; intu11(1)=0; intuo2(1)=0; intu12(1)=0; intu21(1)=0;
intu22(1)=0;

for i=2:n
xi=0;
dxi=x(i)/(npo-1);
for jj=1:npo
xi(jj)=(jj-1)*dxi;
end

```

```

sum1=0;sum2=0;sum3=0;sum4=0;sum5=0;sum6=0;
for jj=1:npo
    vo1 = interp1(x,uo1,xi(jj));
    vo2 = interp1(x,uo2,xi(jj));
    v11 = interp1(x,u11,xi(jj));
    v12 = interp1(x,u12,xi(jj));
    v21 = interp1(x,u21,xi(jj));
    v22 = interp1(x,u22,xi(jj));
    sum1=sum1+dx1*coef(jj)*vo1;
    sum2=sum2+dx1*coef(jj)*v11;
    sum3=sum3+dx1*coef(jj)*vo2;
    sum4=sum4+dx1*coef(jj)*v12;
    sum5=sum5+dx1*coef(jj)*v21;
    sum6=sum6+dx1*coef(jj)*v22;
end

intuo1(i)=sum1; intu11(i)=sum2; intuo2(i)=sum3; intu12(i)=sum4;
intu21(i)=sum5; intu22(i)=sum6;
end

for i=1:npo
yo(i,jjj)=C(1)*exp(intuo1(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i)) ...
    +C(2)*exp(intuo2(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i)) ...
    +exp(j*intuo1(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i)) ...
    +C(3)*exp(j*intuo2(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i));

d1yo(i,jjj)=C(1)*exp(intuo1(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i))*(uo1(i)+K*u11
(i)+K^2*intu21(i)) ...

+C(2)*exp(intuo2(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i))*(uo2(i)+K*u12(i)+K^2*int
u22(i)) ...

+exp(j*intuo1(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i))*(j*uo1(i)+j*K*u11(i)+
j*(K^2)*u21(i)) ...

+C(3)*exp(j*intuo2(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i))*(j*uo2(i)+j*K*u1
2(i)+j*(K^2)*u22(i));

d2yo(i,jjj)=C(1)*exp(intuo1(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i))*(duo1(i)+K*du
11(i)+K^2*du21(i)) ...

+C(2)*exp(intuo2(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i))*(duo2(i)+K*du12(i)+K^2*d
u22(i)) ...

+exp(j*intuo1(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i))*(j*duo1(i)+j*K*du11(i)
)+j*(K^2)*du21(i)) ...

+C(3)*exp(j*intuo2(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i))*(j*duo2(i)+j*K*d
u12(i)+j*(K^2)*du22(i));

end
end

clear A
clear xi;clear dx1;
clear step

```

```

step=0.05:.1:100;
jj=1;
for i=1:max(size(step))
    optnx = optimset('Tolx',1e-20,'TolFun',1e-20);
    xx(i)=fsolve(@eigenfreq0,step(i),
optnx,a,da,b,db,n,K)*sqrt(wo/M/L);
    if (i > 1 & real(xx(i)) > step(1) & abs(real(xx(i))-real(xx(i-1)))
>1.e-2)
        xxx(jj) = xx(i);
        jj=jj+1;
        if (jj > nomeg)
            break
        end
    end
end
break

```

Κώδικας MATLAB για το Riser 2^{ης} περίπτωσης:

```

clear all

% The program uses the following functions: @eigenfreq0,
@eigencomplete_new,
% @tdomain, @floquet, @floquet1

L=1500; %length of catenary
EI=74515e3; %flexural rigidity
EA=5.4428e9; %elastic stiffness
wo=1008.2; %wet weight
m=262.9331; %mass per length
ma=42.7269; %added mass per length
M=m+ma; %mass + added mass
row=1025; %water density
CDn=1.0; %normal drag coefficient
diam=0.355; %external diameter
beta=4/3/pi*row*CDn*diam*L/M; %normalized damping coefficient in normal
direction - used in frequency domain
bo=1/2*row*CDn*diam*L/M; %normalized damping coefficient in normal
direction - used in time domain

```

```

mio=0.0; %artificial viscous damping

nomeg=2; %number of modes to be considered
mi=(1:nomeg)*mio; %damping components proportional to mode
number
ya=5/L; %normalized normal top excitation ya=qa/L;
ra=1.27E-04; %normalized axial top excitation ra=pa/L -
this will be used only for time domain simulation
pao=0.00E-04; %normalized axial top excitation for
coupled linear problem
qao=0.00E-04; %normalized normal top excitation for
coupled linear problem

x=load('static.out');
To=x(:,1); fi=x(:,2); xs=x(:,3); zs=x(:,4); dfi=x(:,5); dTo=x(:,7);
d2fi=-x(:,6)/EI; dfidx=dfi*L; d2fidx2=d2fi*L^2;

clear x

a=To/wo/L; b=sin(fi); g=cos(fi); da=dTo/wo; K=EI/wo/L^3; epsilon=K;
lamda=EA/wo/L;

n=max(size(a));

for i=1:n
    db(i)=cos(fi(i))*dfi(i);
end

dx=1/(n-1);
for i=1:n
    x(i)=(i-1)*dx;
end

dxi=x(2)-x(1);
coef(1:n)=1; coef(1)=0.5;coef(n)=0.5;
sum=0;
for i=1:n
    sum=sum+1/sqrt(a(i))*dxi*coef(i);
end
inttop=sum;

step=0.05:.1:100;

jj=1;
for i=1:max(size(step))
    optnx = optimset('Tolx',1e-20,'TolFun',1e-20);
    yy(i)=fsolve(@eigencomplete_new,step(i),
    optnx,a,da,b,db,n,K)*sqrt(wo/M/L);
    if (i > 1 & yy(i) > step(1) & abs(yy(i)-yy(i-1)) > 1.e-2)

```

```

        yyy(jj) = yy(i);
        jj=jj+1;
        if (jj > nomeg)
            break
        end
    end
end
end

om1=real(yyy)*sqrt(M*L/wo); %yyy = actual eigenfrequencies, om1 =
normalized eigenfrequencies

clear dxi
clear coef
npo=n;
coef(1:npo)=1;coef(1)=0.5;coef(npo)=0.5;

for jjj=1:max(size(om1))
    om=om1(jjj)
    dxi=x(2)-x(1);

    for i=1:n
        uo1(i)=(-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i);
        uo2(i)=(-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i);
        reuo1(i)=real((-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        reuo2(i)=real((-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        imuo1(i)=imag((-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        imuo2(i)=imag((-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
    end
    fresult=fit(x',reuo1,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    reduo1=deriv1;
    fresult=fit(x',reuo2,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    reduo2=deriv1;
    fresult=fit(x',imuo1,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imduo1=deriv1;
    fresult=fit(x',imuo2,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imduo2=deriv1;
    duo1=reduo1+j*imduo1;
    duo2=reduo2+j*imduo2;

    for i=1:n
        u11(i)=(uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
        u12(i)=(uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
        reu11(i)=real((uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
        reu12(i)=real((uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
        imu11(i)=imag((uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
        imu12(i)=imag((uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
    end
end

```

```

fresult=fit(x',reul1','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redul1=deriv1;
fresult=fit(x',reul2','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redul2=deriv1;
fresult=fit(x',imu11','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdul1=deriv1;
fresult=fit(x',imu12','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdul2=deriv1;
dul1=redul1+j*imdul1;
dul2=redul2+j*imdul2;

for i=1:n
    u21(i)=(6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(dul1(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
    u22(i)=(6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(dul2(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
    reu21(i)=real((6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(dul1(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
    reu22(i)=real((6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(dul2(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
    imu21(i)=imag(6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(dul1(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
    imu22(i)=imag(6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(dul2(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
end

fresult=fit(x',reu21','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redu21=deriv1;
fresult=fit(x',reu22','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redu22=deriv1;
fresult=fit(x',imu21','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdu21=deriv1;
fresult=fit(x',imu22','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdu22=deriv1;
du21=redu21+j*imdu21;
du22=redu22+j*imdu22;

sum1=0;sum2=0;sum3=0;sum4=0;sum5=0;sum6=0;
for i=1:n
    sum1=sum1+uo1(i)*dxi*coef(i);
    sum2=sum2+uo2(i)*dxi*coef(i);
    sum3=sum3+u11(i)*dxi*coef(i);
    sum4=sum4+u12(i)*dxi*coef(i);

```

```

sum5=sum5+u21(i)*dxi*coef(i);
sum6=sum6+u22(i)*dxi*coef(i);

end
intuo1=sum1; intuo2=sum2; intu11=sum3; intu12=sum4; intu21=sum5;
intu22=sum6;

a11=1;a12=1;a13=1;a14=1;
a21=exp(intuo1+K*intu11+K^2*intu21);
a22=exp(intuo2+K*intu12+K^2*intu22);
a23=exp(j*intuo1+K*j*intu11+j*(K^2)*intu21);
a24=exp(j*intuo2+K*j*intu12+j*(K^2)*intu22);

a31=duo1(1)+K*du11(1)+K^2*du21(1);
a32=duo2(1)+K*du12(1)+K^2*du22(1);
a33=j*duo1(1)+j*K*du11(1)+j*(K^2)*du21(1);
a34=j*duo2(1)+j*K*du12(1)+j*(K^2)*du22(1);

a41=(duo1(n)+K*du11(n)+K^2*du21(n))*a21;
a42=(duo2(n)+K*du12(n)+K^2*du22(n))*a22;
a43=(j*duo1(n)+j*K*du11(n)+j*(K^2)*du21(n))*a23;
a44=(j*duo2(n)+j*K*du12(n)+j*(K^2)*du22(n))*a24;

AA=[a11 a12 a13 a14; a21 a22 a23 a24; a31 a32 a33 a34; a41 a42 a43
a44];

B(1)=-a13;B(2)=-a23;B(3)=-a33;
A(1,1)=a11;A(1,2)=a12;A(1,3)=a14;
A(2,1)=a21;A(2,2)=a22;A(2,3)=a24;
A(3,1)=a31;A(3,2)=a32;A(3,3)=a34;

C=A\B';

C=inv(A)*B';

clear dxi
clear coef
npo=n;
coef(1:npo)=1; coef(1)=0.5; coef(npo)=0.5;
intuo1(1)=0; intu11(1)=0; intuo2(1)=0; intu12(1)=0; intu21(1)=0;
intu22(1)=0;

for i=2:n
xi=0;
dxi=x(i)/(npo-1);
for jj=1:npo
xi(jj)=(jj-1)*dxi;
end
sum1=0;sum2=0;sum3=0;sum4=0;sum5=0;sum6=0;
for jj=1:npo
vo1 = interp1(x,uo1,xi(jj));
vo2 = interp1(x,uo2,xi(jj));

```

```

v11 = interp1(x,u11,xi(jj));
v12 = interp1(x,u12,xi(jj));
v21 = interp1(x,u21,xi(jj));
v22 = interp1(x,u22,xi(jj));
sum1=sum1+dx1*coef(jj)*v01;
sum2=sum2+dx1*coef(jj)*v11;
sum3=sum3+dx1*coef(jj)*v02;
sum4=sum4+dx1*coef(jj)*v12;
sum5=sum5+dx1*coef(jj)*v21;
sum6=sum6+dx1*coef(jj)*v22;
end

intuo1(i)=sum1; intu11(i)=sum2; intuo2(i)=sum3; intu12(i)=sum4;
intu21(i)=sum5; intu22(i)=sum6;
end

for i=1:npo
yo(i,jjj)=C(1)*exp(intuo1(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i)) ...
+C(2)*exp(intuo2(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i)) ...
+exp(j*intuo1(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i)) ...
+C(3)*exp(j*intuo2(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i));

d1yo(i,jjj)=C(1)*exp(intuo1(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i))*(uo1(i)+K*u11
(i)+K^2*intu21(i)) ...

+C(2)*exp(intuo2(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i))*(uo2(i)+K*u12(i)+K^2*int
u22(i)) ...

+exp(j*intuo1(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i))*(j*uo1(i)+j*K*u11(i)+
j*(K^2)*u21(i)) ...

+C(3)*exp(j*intuo2(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i))*(j*uo2(i)+j*K*u1
2(i)+j*(K^2)*u22(i));

d2yo(i,jjj)=C(1)*exp(intuo1(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i))*(duo1(i)+K*du
11(i)+K^2*du21(i)) ...

+C(2)*exp(intuo2(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i))*(duo2(i)+K*du12(i)+K^2*d
u22(i)) ...

+exp(j*intuo1(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i))*(j*duo1(i)+j*K*du11(i)
)+j*(K^2)*du21(i)) ...

+C(3)*exp(j*intuo2(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i))*(j*duo2(i)+j*K*d
u12(i)+j*(K^2)*du22(i));

end
end

clear A
clear xi;clear dxi;
clear step
step=0.05:.1:100;
jj=1;
for i=1:max(size(step))
optnx = optimset('Tolx',1e-20,'TolFun',1e-20);

```



```

        xx(i)=fsolve(@eigenfreq0,step(i),
optnx,a,da,b,db,n,K)*sqrt(wo/M/L);
        if (i > 1 & real(xx(i)) > step(1) & abs(real(xx(i))-real(xx(i-1)))
>1.e-2)
            xxx(jj) = xx(i);
            jj=jj+1;
            if (jj > nomeg)
                break
            end
        end
    end
end
break

```

Κώδικας MATLAB για το Riser 3^{ης} περίπτωσης:

```

clear all

% The program uses the following functions: @eigenfreq0,
@eigencomplete_new,
% @tdomain, @floquet, @floquet1

L=2022;%1500;                %length of catenary
EI=.1209e9;%74515e3;        %flexural rigidity
EA=0.5823e10;                %elastic stiffness
wo=915.56;%1008.2;         wet weight
m=262.9331;                  %mass per length
ma=169.654;                  %added mass per length
M=m+ma;                      %mass + added mass
row=1025;                    %water density
CDn=1.0;                     %normal drag coefficient
diam=429;%0.355;           %external diameter
beta=4/3/pi*row*CDn*diam*L/M; %normalized damping coefficient in normal
direction - used in frequency domain
bo=1/2*row*CDn*diam*L/M;    %normalized damping coefficient in normal
direction - used in time domain
mio=0.0;                     %artificial viscus damping

```

```

nomeg=2; %number of modes to be considered
mi=(1:nomeg)*mio; %damping components proportional to mode
number
ya=5/L; %normalized normal top excitation ya=qa/L;
ra=1.27E-04; %normalized axial top excitation ra=pa/L -
this will be used only for time domain simulation
pao=0.00E-04; %normalized axial top excitation for
coupled linear problem
qao=0.00E-04; %normalized normal top excitation for
coupled linear problem

x=load('static1.out');
To=x(:,1); fi=x(:,2); xs=x(:,3); zs=x(:,4); dfi=x(:,5); dTo=x(:,7);
d2fi=-x(:,6)/EI; dfidx=dfi*L; d2fidx2=d2fi*L^2;

clear x

a=To/wo/L; b=sin(fi); g=cos(fi); da=dTo/wo; K=EI/wo/L^3; epsilon=K;
lamda=EA/wo/L;

n=max(size(a));

for i=1:n
    db(i)=cos(fi(i))*dfi(i);
end

dx=1/(n-1);
for i=1:n
    x(i)=(i-1)*dx;
end

dxi=x(2)-x(1);
coef(1:n)=1; coef(1)=0.5;coef(n)=0.5;
sum=0;
for i=1:n
    sum=sum+1/sqrt(a(i))*dxi*coef(i);
end
inttop=sum;

step=0.05:.1:100;

jj=1;
for i=1:max(size(step))
    optnx = optimset('Tolx',1e-20,'TolFun',1e-20);
    yy(i)=fsolve(@eigencomplete_new,step(i),
    optnx,a,da,b,db,n,K)*sqrt(wo/M/L);
    if (i > 1 & yy(i) > step(1) & abs(yy(i)-yy(i-1)) > 1.e-2)
        yyy(jj) = yy(i);
        jj=jj+1;
    end
end

```

```

        if (jj > nomeg)
            break
        end
    end
end
end

om1=real(yyy)*sqrt(M*L/wo); %yyy = actual eigenfrequencies, om1 =
normalized eigenfrequencies

clear dxi
clear coef
npo=n;
coef(1:npo)=1;coef(1)=0.5;coef(npo)=0.5;

for jjj=1:max(size(om1))
    om=om1(jjj)
    dxi=x(2)-x(1);

    for i=1:n
        uo1(i)=(-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i);
        uo2(i)=(-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i);
        reuo1(i)=real((-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        reuo2(i)=real((-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        imuo1(i)=imag((-b(i)+sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
        imuo2(i)=imag((-b(i)-sqrt(b(i)^2-4*a(i)*om^2))/2/a(i));
    end
    fresult=fit(x',reuo1,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    reduo1=deriv1;
    fresult=fit(x',reuo2,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    reduo2=deriv1;
    fresult=fit(x',imuo1,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imduo1=deriv1;
    fresult=fit(x',imuo2,'spline');
    [deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
    imduo2=deriv1;
    duo1=reduo1+j*imduo1;
    duo2=reduo2+j*imduo2;

    for i=1:n
        u11(i)=(uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
        u12(i)=(uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
        reu11(i)=real((uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
        reu12(i)=real((uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
        imu11(i)=imag((uo1(i)^4-a(i)*duo1(i))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
        imu12(i)=imag((uo2(i)^4-a(i)*duo2(i))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
    end
end

```

```

fresult=fit(x',reul1','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redul1=deriv1;
fresult=fit(x',reul2','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redul2=deriv1;
fresult=fit(x',imu11','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdul1=deriv1;
fresult=fit(x',imu12','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdul2=deriv1;
dul1=redul1+j*imdul1;
dul2=redul2+j*imdul2;

for i=1:n
    u21(i)=(6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(dul1(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
    u22(i)=(6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(dul2(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
    reu21(i)=real((6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(dul1(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i)));
    reu22(i)=real((6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(dul2(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i)));
    imu21(i)=imag(6*duo1(i)*(uo1(i)^2)+4*u11(i)*(uo1(i)^3)-
a(i)*(dul1(i)+u11(i)^2))/(2*a(i)*uo1(i)+b(i));
    imu22(i)=imag(6*duo2(i)*(uo2(i)^2)+4*u12(i)*(uo2(i)^3)-
a(i)*(dul2(i)+u12(i)^2))/(2*a(i)*uo2(i)+b(i));
end

fresult=fit(x',reu21','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redu21=deriv1;
fresult=fit(x',reu22','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
redu22=deriv1;
fresult=fit(x',imu21','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdu21=deriv1;
fresult=fit(x',imu22','spline');
[deriv1,deriv2]=differentiate(fresult,x');
imdu22=deriv1;
du21=redu21+j*imdu21;
du22=redu22+j*imdu22;

sum1=0;sum2=0;sum3=0;sum4=0;sum5=0;sum6=0;
for i=1:n
    sum1=sum1+uo1(i)*dxi*coef(i);
    sum2=sum2+uo2(i)*dxi*coef(i);
    sum3=sum3+u11(i)*dxi*coef(i);
    sum4=sum4+u12(i)*dxi*coef(i);
    sum5=sum5+u21(i)*dxi*coef(i);
    sum6=sum6+u22(i)*dxi*coef(i);

```

```

end
intuo1=sum1; intuo2=sum2; intu11=sum3; intu12=sum4; intu21=sum5;
intu22=sum6;

a11=1;a12=1;a13=1;a14=1;
a21=exp(intuo1+K*intu11+K^2*intu21);
a22=exp(intuo2+K*intu12+K^2*intu22);
a23=exp(j*intuo1+K*j*intu11+j*(K^2)*intu21);
a24=exp(j*intuo2+K*j*intu12+j*(K^2)*intu22);

a31=duo1(1)+K*du11(1)+K^2*du21(1);
a32=duo2(1)+K*du12(1)+K^2*du22(1);
a33=j*duo1(1)+j*K*du11(1)+j*(K^2)*du21(1);
a34=j*duo2(1)+j*K*du12(1)+j*(K^2)*du22(1);

a41=(duo1(n)+K*du11(n)+K^2*du21(n))*a21;
a42=(duo2(n)+K*du12(n)+K^2*du22(n))*a22;
a43=(j*duo1(n)+j*K*du11(n)+j*(K^2)*du21(n))*a23;
a44=(j*duo2(n)+j*K*du12(n)+j*(K^2)*du22(n))*a24;

AA=[a11 a12 a13 a14; a21 a22 a23 a24; a31 a32 a33 a34; a41 a42 a43
a44];

B(1)=-a13;B(2)=-a23;B(3)=-a33;
A(1,1)=a11;A(1,2)=a12;A(1,3)=a14;
A(2,1)=a21;A(2,2)=a22;A(2,3)=a24;
A(3,1)=a31;A(3,2)=a32;A(3,3)=a34;

C=A\B';

C=inv(A)*B';

clear dxi
clear coef
npo=n;
coef(1:npo)=1; coef(1)=0.5; coef(npo)=0.5;
intuo1(1)=0; intu11(1)=0; intuo2(1)=0; intu12(1)=0; intu21(1)=0;
intu22(1)=0;

for i=2:n
xi=0;
dxi=x(i)/(npo-1);
for jj=1:npo
xi(jj)=(jj-1)*dxi;
end
sum1=0;sum2=0;sum3=0;sum4=0;sum5=0;sum6=0;
for jj=1:npo
vo1 = interp1(x,uo1,xi(jj));
vo2 = interp1(x,uo2,xi(jj));
v11 = interp1(x,u11,xi(jj));
v12 = interp1(x,u12,xi(jj));
v21 = interp1(x,u21,xi(jj));
v22 = interp1(x,u22,xi(jj));

```

```

        sum1=sum1+dxj*coef(jj)*v01;
        sum2=sum2+dxj*coef(jj)*v11;
        sum3=sum3+dxj*coef(jj)*v02;
        sum4=sum4+dxj*coef(jj)*v12;
        sum5=sum5+dxj*coef(jj)*v21;
        sum6=sum6+dxj*coef(jj)*v22;
    end

    intu01(i)=sum1; intu11(i)=sum2; intu02(i)=sum3; intu12(i)=sum4;
    intu21(i)=sum5; intu22(i)=sum6;
end

for i=1:npo
yo(i,jjj)=C(1)*exp(intu01(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i)) ...
    +C(2)*exp(intu02(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i)) ...
    +exp(j*intu01(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i)) ...
    +C(3)*exp(j*intu02(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i));

d1yo(i,jjj)=C(1)*exp(intu01(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i))*(uo1(i)+K*u11
(i)+K^2*intu21(i)) ...

+C(2)*exp(intu02(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i))*(uo2(i)+K*u12(i)+K^2*int
u22(i)) ...

+exp(j*intu01(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i))*(j*uo1(i)+j*K*u11(i)+
j*(K^2)*u21(i)) ...

+C(3)*exp(j*intu02(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i))*(j*uo2(i)+j*K*u1
2(i)+j*(K^2)*u22(i));

d2yo(i,jjj)=C(1)*exp(intu01(i)+K*intu11(i)+K^2*intu21(i))*(duo1(i)+K*du
11(i)+K^2*du21(i)) ...

+C(2)*exp(intu02(i)+K*intu12(i)+K^2*intu22(i))*(duo2(i)+K*du12(i)+K^2*d
u22(i)) ...

+exp(j*intu01(i)+j*K*intu11(i)+j*(K^2)*intu21(i))*(j*duo1(i)+j*K*du11(i)
+j*(K^2)*du21(i)) ...

+C(3)*exp(j*intu02(i)+j*K*intu12(i)+j*(K^2)*intu22(i))*(j*duo2(i)+j*K*d
u12(i)+j*(K^2)*du22(i));

end
end

clear A
clear xi;clear dxj;
clear step
step=0.05:.1:100;
jj=1;
for i=1:max(size(step))
    optnx = optimset('Tolx',1e-20,'TolFun',1e-20);
    xx(i)=fsolve(@eigenfreq0,step(i),
    optnx,a,da,b,db,n,K)*sqrt(wo/M/L);
    if (i > 1 & real(xx(i)) > step(1) & abs(real(xx(i))-real(xx(i-1)))
>1.e-2)

```

```
    xxx(jj) = xx(i);  
    jj=jj+1;  
    if (jj > nomeg)  
        break  
    end  
end  
end  
break
```

Αναφορές

1. Σ. Α. Μαυράκου, *Δυναμική ναυπηγικών κατασκευών*, Μάρτιος 2000.
2. J.D. Logan, *Applied Mathematics*, Wiley Interscience, second edition (1997).
3. I.K. Chatjigeorgiou, On the parametric excitation of vertical elastic slender structures and the effect of damping in marine applications, *Applied Ocean Research*, 26 (2004) 23-33.
4. M.S. Triantafyllou, The dynamics of taut inclined cables, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 37 (1984) (pt 3), pp. 421-440
5. M.S. Triantafyllou, The dynamics of translating cables, *Journal of Sound and Vibration*, 103 (1985), 171-182.
6. Y. Cheng, J.K. Vandiver and G. Moe, The linear vibration analysis of marine risers using the WKB-based dynamic stiffness method, *Journal of Sound and Vibration*, 251 (2002), 750-760.
7. C.P. Pesce, A.L.C. Fajarra, A.N. Simos and E.A. Tannuri., Analytical and closed form solutions for deep water riser-like eigenvalue problem, *Proc of the 9th International Offshore and Polar Engineering Conference*, ISOPE' 99, Brest, France, Vol. II, (1999) 255-263.

8. C.P. Pesce, C.A. Martins and L.K.Y. Silveira, Riser-soil interaction: Local dynamics at TDP and a discussion on the eigenvalue and the VIV problems, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 128 (2006), 39-55.
9. M.S. Triantafyllou, A. Bliet and H. Shin, Dynamic analysis as a tool for open-sea mooring system design, *Transactions - Society of Naval Architects and Marine Engineers* 93 (1985), 303-324.
10. Y.T. Chai and K.S. Varyani, *An absolute coordinate formulation for three-dimensional flexible pipe analysis*, *Ocean Engineering*, 33 (2006), 23-58.
11. Nonlinear Dynamic Response of a Steel Catenary Riser at the Touch-Down Point, Luciano de A. Campos, Petrobras SA - E&P, Rio de Janeiro, Brazil, Clóvis Arruda Martins, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brazil.