



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών

Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών  
“Ναυτική & Θαλάσσια Τεχνολογία & Επιστήμη”

**Η «Απλή Δειγματική Μέθοδος» για την Επίλυση του Αντιστρόφου  
Προβλήματος Σκέδασης σε Διδιάστατο Ακουστικό Κυματοδηγό**

Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία

του

**Χρήστου Αγριόδημα**

Επιβλέπων: **Δρόσος Γκιντίδης**  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2008



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών

Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών  
“Ναυτική & Θαλάσσια Τεχνολογία & Επιστήμη”

## **Η «Απλή Δειγματική Μέθοδος» για την Επίλυση του Αντιστρόφου Προβλήματος Σκέδασης σε Διδιάστατο Ακουστικό Κυματοδηγό**

Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία

του

**Χρήστου Αγριόδημα**

Επιβλέπων: **Δρόσος Γκιντίδης**  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την παρακάτω τριμελή επιτροπή την 7 / 7 / 2008

κ. Γεράσιμος Αθανασούλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

κ. Δημήτριος Τζανετής  
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

κ. Δρόσος Γκιντίδης  
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2008

# Περιεχόμενα

	<i>σελ.</i>
<i>Περίληψη</i> .....	i
<i>Ευχαριστίες</i> .....	iii
<i>Πρόλογος</i> .....	iv
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Εισαγωγή</b> .....	<b>1</b>
1.1 Το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης .....	2
1.2 Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης .....	7
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Η Εξίσωση Helmholtz</b> .....	<b>9</b>
2.1 Ακουστικά Κύματα .....	9
2.2 Θεωρήματα και Τύποι Green .....	16
2.3 Σφαιρικές Αρμονικές .....	27
2.4 Σφαιρικές Συναρτήσεις Bessel .....	35
2.5 Πλάτος Σκέδασης .....	40
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Κυματοδηγοί</b> .....	<b>47</b>
3.1 Κυματική Διάδοση σε ένα Ντετερμινιστικό Μέσο .....	48
3.2 Διατύπωση και Θεμελιώδεις Εξισώσεις .....	50
3.3 Χρονικά Αρμονικά Κύματα .....	53
3.4 Ο Ομογενής Ωκεανός Σταθερού Βάθους .....	56
3.5 Αναπαράσταση Κανονικών Ιδιομορφών, (Normal Mode Representation) .....	57
3.6 Αναπαράσταση Μετασχηματισμού Hankel, (Hankel Transform Representation) .....	59
3.7 Αναπαράσταση Ακτίνων και Μέθοδος Ειδώλων, (Ray Representation and Image Method) .....	60
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Ευθύ και Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης σε Κυματοδηγό</b> .....	<b>63</b>
4.1 Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης σε Κυματοδηγό .....	63
4.2 Το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης σε Κυματοδηγό .....	65
4.3 Η Απλή Δειγματική Μέθοδος του Αντιστρόφου Προβλήματος Σκέδασης .....	67
4.4 Ομαλοποίηση Μη Καλά Τοποθετημένων Γραμμικών Συστημάτων .....	70
4.4.1 Δείκτης Κατάστασης .....	70
4.4.2 Ιδιάζουσα Παραγοντοποίηση (Singular Value Decomposition) .....	71
4.4.3 Ομαλοποίηση Tikhonov .....	74

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.</b>	<b>Αριθμητική Επίλυση του Αντιστρόφου</b>	
	<b>Προβλήματος.....</b>	<b>77</b>
	5.1 Ανακατασκευές για Διάφορες Τιμές του Κυματάριθμου $ka$ .....	77
	5.2 Ανακατασκευές σε Στροφές και Μετατοπίσεις.....	83
	5.2.1 Ανακατασκευές σε Οριζόντιες και Κατακόρυφες Μετατοπίσεις.....	83
	5.2.2 Ανακατασκευές Σκεδαστή σε Στροφές.....	85
	5.3 Ανακατασκευές Σκεδαστή με Θόρυβο.....	87
	5.4 Ανακατασκευές για Διάφορες τιμές του Συντελεστή Ομαλοποίησης $\alpha$ .....	88
	5.5 Ανακατασκευές Δύο Σκεδαστών στον Κυματοδηγό....	93
	5.6 Ανακατασκευές Σκεδαστών με τις Πηγές σε Οριζόντια Θέση.....	96
	5.7 Συμπεράσματα.....	98
<b>Βιβλιογραφία</b>	.....	<b>100</b>

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης σε διδιάστατο ακουστικό κυματοδηγό. Αρχικά γίνεται μελέτη του ευθέως προβλήματος σκέδασης σε άπειρο χωρίο. Παρουσιάζονται όλα τα θεωρήματα και οι προϋποθέσεις που εξασφαλίζουν την μοναδικότητα της λύσης του ευθέως προβλήματος. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η απαραίτητη θεωρία που διέπει την σκέδαση ακουστικών κυμάτων σε κυματοδηγό και εξετάζεται το αντίστοιχο πρόβλημα σκέδασης. Η αντιμετώπιση του αντιστρόφου προβλήματος γίνεται με την «απλή δειγματική μέθοδο» και τα αντίστοιχα γραμμικά συστήματα επιλύονται με τη μέθοδο «ομαλοποίησης Tikhonov». Στο τέλος γίνονται ανακατασκευές γνωστών σχημάτων σκεδαστών στον κυματοδηγό και γίνεται παραμετρική μελέτη για διάφορες τιμές του κυματάρθμου, συντελεστών ομαλοποίησης, της θέσης των σκεδαστών στον κυματοδηγό και της θέσης των πηγών των ακουστικών κυμάτων καθώς επίσης και όταν στα δεδομένα υπάρχει θόρυβος.

# Abstract

In this diploma thesis we consider the inverse scattering problem in a two-dimensional acoustic waveguide. Primarily, the direct scattering problem is studied in the infinity space. All theorems and the necessary conditions, that ensure the uniqueness of the solution of the direct problem, are presented. Then the basic theory of the scattering problem in a 2D waveguide is invoked and the corresponding inverse scattering problem is examined. The inverse scattering problem is handled with the “linear sampling method” and the corresponding linear systems are solved applying the “Tikhonov regularization”. Finally, our study is completed with the numerical solution of the inverse geometric scattering problem in a two-dimensional acoustic waveguide. A parametric study of reconstructions of scatterers is applied for several values of the wavenumber and the regularization factor. The same study is applied for the reposition of the scatterers, the reposition of the sources of the acoustic waves and also we examine a case where noise is introduced into our data.

# Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Δρόσο Γκιντίδη γιατί με μεγάλη χαρά δέχτηκε να αναλάβει την καθοδήγηση της εργασίας μου και για το ευχάριστο και φιλικό κλίμα συνεργασίας που αναπτύξαμε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής. Από την πρώτη στιγμή με ενθάρρυνε ενώ με μεγάλη προθυμία μου προσέφερε ωφέλιμες υποδείξεις.

# Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της μαθηματικής θεωρίας της σκέδασης και ειδικότερα του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης σε διδιάστατο ακουστικό κυματοδηγό.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται μία συνοπτική καταγραφή του ιστορικού πλαισίου της θεωρίας της σκέδασης και αναφέρονται τα δύο είδη προβλημάτων με τα οποία σχετίζεται η θεωρία της σκέδασης στον άπειρο χώρο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των βασικών εξισώσεων της υδροδυναμικής για την περίπτωση διάδοσης ενός ακουστικού κύματος μέσα σε ρευστό απείρου χωρίου. Μοντελοποιείται το πρόβλημα της σκέδασης που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση Helmholtz και στη συνέχεια παρουσιάζεται το αντίστοιχο πρόβλημα από ένα εμπόδιο για διάφορες συνοριακές συνθήκες. Εισάγεται και ερμηνεύεται η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld που ικανοποιείται μακριά από το σκεδαστή καθώς επίσης και η συνάρτηση του πλάτους σκέδασης, μιας συνάρτησης βασικής για την αντιμετώπιση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης. Στο τέλος αναπτύσσονται οι βασικές ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών και των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel που αποτελούν βασικά εργαλεία της θεωρίας της σκέδασης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθεται όλη η βασική θεωρία που διέπει τη διάδοση ακουστικών κυμάτων σε κυματοδηγό. Παρουσιάζεται η θεμελιώδης λύση του προβλήματος που προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις της υδροδυναμικής και τις συνοριακές συνθήκες στα σύνορα του κυματοδηγού.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από ένα μαλακό εμπόδιο σε διδιάστατο ακουστικό κυματοδηγό. Περιγράφεται η «απλή δειγματική μέθοδος» που χρησιμοποιείται για την αντιμετώπιση του αντιστρόφου προβλήματος και πώς διαμορφώνεται στην αριθμητική λύση του προβλήματος.

Στο τελευταίο κεφάλαιο εφαρμόζοντας την απλή δειγματική μέθοδο γίνονται ανακατασκευές γνωστών σχημάτων σκεδαστών στον κυματοδηγό και γίνεται παραμετρική μελέτη για διάφορες τιμές του κυματάριθμου, συντελεστών ομαλοποίησης αλλά και της θέσης των σκεδαστών στον κυματοδηγό και της θέσης των πηγών των ακουστικών κυμάτων στον κυματοδηγό.



## 1. Εισαγωγή

Η θεωρία της σκέδασης έχει παίξει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική φυσική του 20ού αιώνα και μπορεί κάποιος να διαπιστώσει πολλές εφαρμογές της σε ποικίλες περιοχές της σύγχρονης επιστήμης. Από την εξήγηση του Rayleigh γιατί ο ουρανός έχει μπλε χρώμα, μέχρι την ανακάλυψη των ατομικών νουκλεονίων από τον Rutherford ως και τη σύγχρονη ιατρική εφαρμογή του τομογράφου. Επίσης ο σχεδιασμός της ακουστικής ενός κτιρίου, η ανίχνευση ιζημάτων και ναρκών στον πυθμένα ενός βυθού σχετίζονται με τη θεωρία της σκέδασης καθώς και πλήθος άλλων εφαρμογών. Τα φαινόμενα σκέδασης έχουν προσελκύσει, απασχολήσει και προκαλέσει επιστήμονες και μαθηματικούς για περισσότερα από 100 χρόνια.

Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ελαστική σκέδαση, ανήκουν η σκέδαση Rayleigh και Mie, ενώ στην ανελαστική η σκέδαση Brillouin, Raman, ανελαστική σκέδαση ακτίνων X και σκέδαση Compton. Για παράδειγμα στην σκέδαση Raman το σκεδαζόμενο φωτόνιο ανταλλάσσει ενέργεια με τις ταλαντώσεις κυρίως των μοριακών δεσμών, παρατηρείται όμως και με ταλαντώσεις κρυσταλλικού πλέγματος του σκεδαστή και δίνει ενέργεια σε αυτόν συνήθως στην θεμελιώδη ιδιοκατάστασή του (Stokes). Είναι επίσης παρατηρήσιμο να παίρνει ενέργεια (anti-Stokes) από διεγερμένες ιδιοκαταστάσεις που μεταπίπτουν σε χαμηλότερες. Στη σκέδαση Mie σημαντικό ρόλο παίζει το μέγεθος του σκεδαζόντος σωματιδίου σε σχέση με το μήκος κύματος  $\lambda$  της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, καθώς επίσης και οι οπτικές ιδιότητες των σωματιδίων που σχετίζονται με τον δείκτη διάθλασής τους:  $m = n + ik$  ( $n$  και  $k$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, του δείκτη διάθλασης ο οποίος είναι συνάρτηση του μήκους κύματος). Ο δείκτης  $n$  καταδεικνύει την ταχύτητα του φωτός στο υλικό μέσο, ενώ ο δείκτης  $k$  είναι ένδειξη της απορροφητικότητας του υλικού του σωματιδίου αυτού.

Πειραματικά, ουσιαστικά παρατηρείται η συμβολή των σκεδαζόμενων κυμάτων πολύ μακριά από τον σκεδαστή. Έτσι, παρά την αρχή του Huygens που λέει ότι ανεξάρτητα του αν εκεί υπάρχει σκεδαστής ή όχι κάθε σημείο του μετώπου κύματος είναι σημειακή πηγή εκπομπής σφαιρικών κυμάτων, τα σφαιρικά αυτά κύματα από τον σκεδαστή είναι πρακτικά επίπεδα σε μεγάλες αποστάσεις και για όργανα με πολύ μικρότερες διαστάσεις από την απόσταση από τον σκεδαστή.

**Ευρύτερα η θεωρία της σκέδασης σχετίζεται με την επίδραση ενός μη ομογενούς μέσου σε ένα προσπίπτον κύμα.** Δηλαδή ασχολείται με την επίδραση έντονων μεταβολών των φυσικών παραμέτρων στη διάδοση ενός κύματος. Συγκεκριμένα αν το ολικό πεδίο  $u$  παρασταθεί ως η υπέρθεση του προσπίπτοντος πεδίου  $u^i$  και του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s$ , τότε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s$  από τη γνώση του προσπίπτοντος  $u^i$ , τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η κυματική διάδοση και τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούνται στο σύνορο του σώματος που παρεμβάλλεται στη διάδοση του κύματος. Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό της φύσης (σχήμα ή/και φυσικές ιδιότητες) του ανομοιογενούς μέσου που παρεμβάλλεται στην κυματική διάδοση, από τη γνώση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s$ .

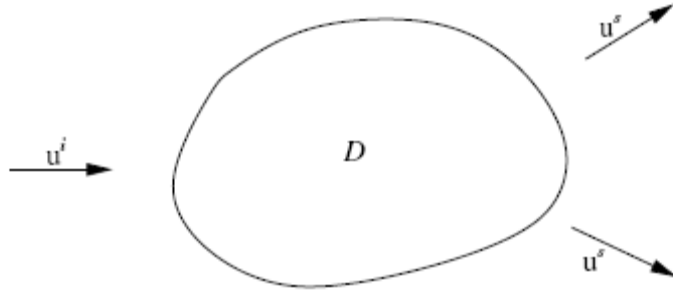
Η περιοχή της αντίστροφης σκέδασης τουλάχιστον για τα ηλεκτρομαγνητικά και ακουστικά κύματα μπορεί να θεωρηθεί ότι γεννιέται με την εφεύρεση του radar και του sonar κατά τη διάρκεια του 2<sup>ου</sup> Παγκοσμίου Πολέμου. Πράγματι η ικανότητα χρήσης ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για τον καθορισμό της θέσης εχθρικών αντικειμένων στην θάλασσα και τα σύννεφα έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην έκβαση του πολέμου. Εμπνευσμένοι από την επιτυχία των radar και των sonar, η προσδοκία αυξήθηκε από την πιθανότητα όχι μόνο του προσδιορισμού της εμβέλειας (βεληνεκές), ενός αντικειμένου από τον διαβιβαστή (πομπό), αλλά επίσης και την απεικόνιση του αντικειμένου και έτσι την ταυτοποίησή του. Για παράδειγμα την διάκριση μιας φάλαινας και ενός υποβρυχίου ή την διάκριση ενός αεροπλάνου και μιας χήνας. Ωστόσο, σύντομα συνειδητοποιήθηκε ότι το πρόβλημα της ταυτοποίησης ήταν σημαντικά πιο δύσκολο από ότι ο απλός καθορισμός της θέσης ενός στόχου. Συγκεκριμένα όχι μόνο η ταυτοποίηση του αντικειμένου ήταν ένα ακριβό υπολογιστικά πρόβλημα, πέρα από τις τεχνολογικές δυνατότητες της εποχής εκείνης, αλλά το πρόβλημα ήταν μη καλά τοποθετημένο με την έννοια ότι η λύση δεν εξαρτιόταν κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα του προβλήματος.

Το πρόβλημα της αντίστροφης σκέδασης άρχισε να γίνεται αντιμετωπίσιμο από τις αρχές της δεκαετίας του 70' όπου αναπτύχθηκε η μαθηματική θεωρία για τα μη καλά τοποθετημένα προβλήματα από τον Tikhonov και τους συνεργάτες του στην Σοβιετική Ένωση και τον Keith Miller και άλλους στις Η.Π.Α., μαζί με την ανάπτυξη των υπολογιστών. Από τότε η μαθηματική βάση των ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης έχει φτάσει σε ένα επίπεδο ωριμότητας. Όπως οι απαιτήσεις της σύγχρονης απεικόνισης έχουν αυξηθεί μαζί με τις μαθηματικές και υπολογιστικές προσδοκίες φαίνεται κατάλληλο να γίνει μια προσπάθεια περιγραφής της μαθηματικής θεμελίωσης των ακουστικών και ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων αντίστροφης σκέδασης.

Στην συγκεκριμένη εργασία θα μελετηθεί το φαινόμενο της αντίστροφης σκέδασης αποκλειστικά ακουστικών κυμάτων, για τον λόγο αυτό στα επόμενα κεφάλαια όπου αναφέρεται σκέδαση ή αντίστροφη σκέδαση θα εννοείται για ακουστικά κύματα.

### 1.1 Το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα κατά Hadamard δηλαδή έχει λύση, η λύση είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος. Το ευθύ πρόβλημα έχει ερευνηθεί σε βάθος τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο αριθμητικής ανάλυσης. Τα δύο βασικά προβλήματα της κλασικής θεωρίας σκέδασης είναι η σκέδαση ενός χρονικά αρμονικού ακουστικού κύματος α) από ένα διαπερατό μη ομογενές μέσο συμπαγούς φορέα και β) από ένα καθορισμένο αδιαπέραστο εμπόδιο (σχήμα 1.1).



**Σχήμα 1.1** Ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Από τη γνώση του προσπίπτοντος πεδίου  $u^i$ , τη διαφορική εξίσωση της κυματικής διάδοσης και τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $\partial D$  του σκεδαστή  $D$  προσδιορίζεται το σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s$ .

Θεωρώντας την περίπτωση των ακουστικών κυμάτων έστω ότι το προσπίπτον πεδίο δίνεται από το χρονικά αρμονικό επίπεδο ακουστικό κύμα της μορφής:

$$u^i(\vec{x}, t) = e^{i(k \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1.1)$$

όπου  $k = \frac{\omega}{c_0}$  είναι ο αριθμός του κύματος (κυματάριθμος),  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος,  $c_0$  είναι η ταχύτητα του κύματος στο μέσο που δημιουργήθηκε (περιβάλλον μέσο) και είναι διαφορετική από την ταχύτητα στο σκεδαστή και  $\hat{d}$  είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τότε το απλούστερο πρόβλημα σκέδασης για την περίπτωση μη ομογενούς μέσου είναι να βρεθεί το ολικό πεδίο  $u$  το οποίο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση Helmholtz και την συνθήκη απείρου σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις.

$$\Delta u + k^2 n(\vec{x})u = 0 \quad \text{στον } \mathbb{R}^3, \quad (1.2)$$

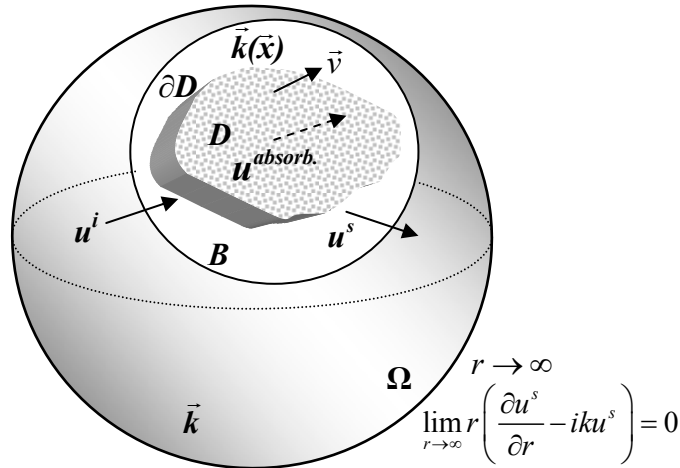
$$u(x) = e^{ik \cdot \vec{x} \cdot \hat{d}} + u^s(\vec{x}), \quad (1.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad (1.4)$$

όπου  $r = |\vec{x}|$ ,  $n = \frac{c_0^2}{c^2(\vec{x})}$  είναι ο δείκτης διάθλασης που δίνεται από τον λόγο του

τετραγώνου της ταχύτητας  $c = c_0$  του ήχου στο ομογενές μέσο που δημιουργήθηκε το κύμα και του τετραγώνου της ταχύτητας  $c(\vec{x})$  στο μη ομογενές μέσο που διαδίδεται το κύμα. Η σχέση 1.2 είναι η εξίσωση *Helmholtz* που περιγράφει το πρόβλημα σκέδασης σε μη ομογενές μέσο, η σχέση 1.3 είναι το ολικό πεδίο το οποίο θεωρείται σαν το άθροισμα του προσπίπτοντος πεδίου  $u^i$  και του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s$ . Εάν το μέσο είναι απορροφητικό τότε ο δείκτης διάθλασης  $n$  είναι μιγαδικός αριθμός. Η

σχέση 1.4 είναι η συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld* η οποία εξασφαλίζει ότι το εξερχόμενο σκεδαζόμενο κύμα επεκτείνεται σφαιρικά με μέτρο αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης  $r$ . (σχήμα 1.2)



**Σχήμα 1.2** Οι συνθήκες του προβλήματος σκέδασης σε μη ομογενές μέσο και διαπερατό σκεδαστή. Η περιοχή που εξετάζουμε είναι ο  $\mathbb{R}^3$  και η κυματική κίνηση προκαλείται από ένα προσπίπτον πεδίο  $u^i$  ικανοποιώντας τη μη διαταραγμένη γραμμικοποιημένη εξίσωση που σκεδάζεται από το μη ομογενές μέσο. Πάντα υποθέτουμε ότι το μη ομογενές μέσο περιέχεται σε μια σφαίρα  $B$ . Έτσι η ταχύτητα  $c(\vec{x}) = c_0 = constant$  για  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ . Σε πολύ μεγάλη απόσταση το μέσο είναι ομογενές γι' αυτό εκτός του  $B$  το  $k$  εμφανίζεται σταθερό σε κάποια επαρκώς μεγάλη σφαίρα. Τα παραπάνω οδηγούν στις εξισώσεις (1.2) – (1.4).

Στην περίπτωση που το μέσο είναι ομογενές και ο σκεδαστής αδιαπέραστο εμπόδιο τότε οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{στον } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (1.5)$$

$$u(x) = e^{ik \cdot \vec{x} \cdot \hat{d}} + u^s(x), \quad (1.6)$$

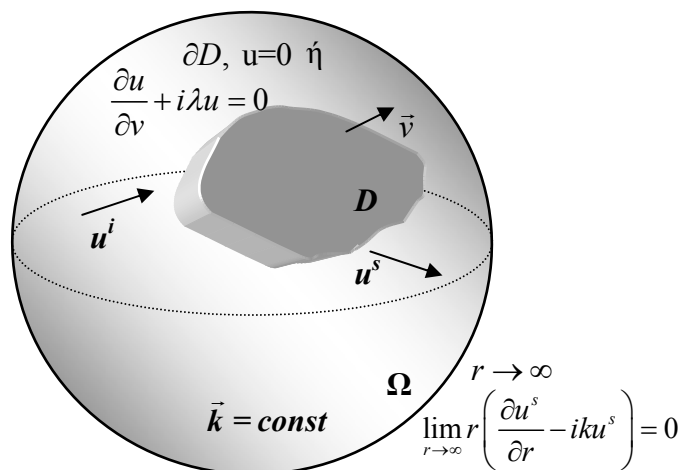
$$u = 0 \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0 \quad (1.8)$$

Η σχέση 1.5 είναι η εξίσωση Helmholtz η οποία ικανοποιείται σε όλο το χώρο εκτός του εμποδίου  $D$  και του συνόρου αυτού  $\partial D$ . Στο σύνορο επιβάλλεται αν είναι μαλακό, (sound-soft) εμπόδιο το πεδίο να είναι μηδέν (σχέση 1.7), ενώ αν είναι σκληρό εμπόδιο (sound-hard) μπορεί να επιβληθεί μια συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann ή συνθήκη Robin (σχέση 1.9).

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0, \text{ στο } \partial D \quad (1.9)$$

όπου  $\nu$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial D$  κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του συνόρου και  $\lambda$  μια θετική σταθερά. (σχήμα 1.3)



**Σχήμα 1.3** Οι συνθήκες του προβλήματος σκέδασης σε ομογενές μέσο και αδιαπέραστο σκεδαστή.

Παρατηρείται ότι στο πρόβλημα σκέδασης από ένα σώμα επιβάλλεται μία συνοριακή συνθήκη η οποία σχετίζεται με τον τύπο του αντικειμένου που παρεμβάλλεται στην κυματική διάδοση, ενώ στο μη ομογενές μέσο δεν υπάρχει. Αυτό συμβαίνει διότι στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης από ένα μη ομογενές μέσο, γύρω από το σκεδαστή  $D$  μπορεί να θεωρηθεί μία σφαίρα (η οποία προφανώς είναι συμπαγής), στο σύνορο της οποίας η μεταβολή του κυματάριθμου και επομένως και της λύσης είναι συνεχής. Εφόσον στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κάποιο είδος ασυνέχειας, δεν απαιτείται και η επιβολή κάποιας συνοριακής συνθήκης.

Οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη του ευθέως προβλήματος σκέδασης ακουστικών κυμάτων, εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη συχνότητα της κυματικής διάδοσης. Συγκεκριμένα αν το μήκος κύματος  $\lambda = 2\pi/k$  είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με τη μικρότερη απόσταση που μπορεί να παρατηρηθεί, ο σκεδαστής παράγει μια σκιά με φαινομενικά απότομες άκρες. Με μία καλύτερη εξέταση όμως αυτό πού πραγματικά συμβαίνει είναι ότι η σκιά αυτή αποτελείται από κροσσούς συμβολής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται περιθλαση. Από την άλλη μεριά, αν το αντικείμενο που παρεμβάλλεται στη διάδοση του κύματος είναι μικρό συγκρινόμενο με το μήκος κύματος, τότε το προσπίπτον κύμα διασπάται χωρίς να παράγει μία αναγνωρίσιμη σκιά.

Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τρία διαφορετικά πεδία συχνοτήτων ανταποκρινόμενα στο μέγεθος  $ka$  όπου  $a$  είναι η χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή (η διάμετρος της μικρότερης σφαίρας που περιέχει το σκεδαστή). Συγκεκριμένα το σύνολο των τιμών του κυματάριθμου  $k$  τέτοιο ώστε  $ka \gg 1$  καλείται *περιοχή υψηλών συχνοτήτων*, το σύνολο τιμών όπου το  $ka$  είναι λίγο μικρότερο από τη μονάδα ή συγκρίσιμη με αυτή καλείται *περιοχή συντονισμού*. Στην περιοχή όπου το  $ka$  είναι τέτοιο ώστε  $ka \ll 1$  καλείται *περιοχή χαμηλών συχνοτήτων*. Στην παρούσα εργασία η μελέτη θα γίνει στην περιοχή συντονισμού.

Το πρώτο ερώτημα που τίθεται στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι η μοναδικότητα της λύσης. Τα βασικά εργαλεία που εξασφαλίζουν κάτι τέτοιο είναι τα θεωρήματα του Green και η αρχή της μοναδικής συνέχειας των λύσεων μιας ελλειπτικής εξίσωσης. Στις εξισώσεις (1.5) – (1.8) οι συντελεστές είναι σταθεροί και η μοναδικότητα της λύσης είναι εύκολο να εξασφαλιστεί. Τα πρώτα αποτελέσματα σε αυτό το πρόβλημα για τα ακουστικά κύματα έδωσε ο Sommerfeld το 1912. Η μοναδικότητα της λύσης για το πρόβλημα (1.2) – (1.4) είναι πιο δύσκολο να εξασφαλιστεί γιατί το πρόβλημα πρέπει να λυθεί για την αρχή της μοναδικής συνέχειας της λύσης για ελλειπτική εξίσωση με μεταβλητούς μη αναλυτικούς συντελεστές. Τα πρώτα αποτελέσματα στην κατεύθυνση αυτή δόθηκαν από τον Muller για  $\text{Im } k \geq 0$ . Εξασφαλίζοντας τη μοναδικότητα της λύσης, το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι η ύπαρξη και η αριθμητική προσέγγιση της λύσης. Η πιο δημοφιλής μέθοδος που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

### **Παράδειγμα Ευθέως Προβλήματος Σκέδασης**

Θεωρούμε το διδιάστατο πρόβλημα σκέδασης ενός χρονικά αρμονικού προσπίπτοντος πεδίου από ένα μαλακό εμπόδιο (sound-soft)  $D$ . Χωρίζοντας το ολικό πεδίο στο προσπίπτον και το σκεδαζόμενο πεδίο έχουμε το παρακάτω πρόβλημα οριακών τιμών για το σκεδαζόμενο πεδίο:

$$\begin{aligned} \Delta u^s + k^2 u^s &= 0 & \text{στον } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ u^s + u^i &= 0 & \text{στο } \partial D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) &= 0, & \text{ομοιόμορφα στο } \bar{x}/r, \quad r = |\bar{x}| \end{aligned}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί πολύ αποτελεσματικά κάνοντας ένα συνδυασμό διπλού και μονού στρώματος δυναμικού.

$$u^s(\bar{x}) = \int_{\partial D} \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \nu(\bar{y})} - in\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) \phi(\bar{y}) ds(\bar{y}), \quad n \neq 0,$$

όπου το πεδίο

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\bar{x} - \bar{y}|),$$

δείχνει το ελεύθερο πεδίο της συνάρτησης Green για την εξίσωση του Helmholtz στις δύο διαστάσεις. Η ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Nyström η οποία αποφέρει εκθετικό ρυθμό σύγκλισης. (λεπτομέρειες στο βιβλίο των Colton/Kress *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Section 3.5*, Springer-Verlag, 1998)

## 1.2 Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω το ευθύ πρόβλημα σκέδασης έχει πλήρως διερευνηθεί και ένα αξιόλογο ποσό πληροφορίας είναι διαθέσιμο όσον αφορά τη λύση του. Σε αντίθεση το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης μόλις πρόσφατα έχει προοδεύσει από μία συλλογή από ειδικές τεχνικές που λίγο βασίζονται σε αυστηρή μαθηματική βάση σε μια περιοχή με έντονη δραστηριότητα με τουλάχιστον την αρχή μιας στέρεης μαθηματικής θεμελίωσης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό έγκειται στο γεγονός ότι το αντίστροφο πρόβλημα είναι εγγενώς μη γραμμικό και πιο σημαντικό από την άποψη των αριθμητικών υπολογισμών, μη καλά τοποθετημένο (δηλαδή ενδεχομένως να μην υπάρχει λύση ή αν υπάρχει να μην είναι μοναδική ή/και να μην εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος κατά συνεχή τρόπο). Συγκεκριμένα μικρές διαταραχές του πλάτους σκέδασης με οποιαδήποτε λογική νόρμα οδηγεί σε μία συνάρτηση η οποία δεν ανήκει στην κλάση των συναρτήσεων που αποτελούν πλάτη σκέδασης και αν δεν χρησιμοποιηθούν μέθοδοι ομαλοποίησης, μικρές μεταβολές στις μετρούμενες τιμές του πεδίου μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλα σφάλματα κατά την ανακατασκευή του σκεδαστή. Ωστόσο το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι βασικό σε διάφορες περιοχές της επιστήμης όπως στα radar, τα sonar, γεωφυσικές έρευνες, ιατρικές απεικονίσεις και μη καταστροφικός έλεγχος υλικών. Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι τουλάχιστον του ίδιου αντίστοιχου ενδιαφέροντος με το ευθύ. Εφοδιασμένοι με τη γνώση του ευθέως προβλήματος σκέδασης και τις απαιτούμενες γνώσεις του αντιστρόφου προβλήματος, βρισκόμαστε στο προσκήνιο της έρευνας του αντιστρόφου.

Μία σημαντική συνάρτηση που χρησιμοποιείται στη θεωρία της σκέδασης είναι το πλάτος σκέδασης των ακουστικών κυμάτων. Πιο συγκεκριμένα αν το  $u^s$  αναπαριστά το σκεδαζόμενο πεδίο, τότε αυτό έχει την εξής ασυμπτωτική συμπεριφορά:

$$u^s(\bar{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} u_\infty(\hat{x}; \hat{d}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ καθώς το } r = |\bar{x}| \rightarrow \infty$$

όπου  $\hat{x} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$  και  $u_\infty$  το πλάτος σκέδασης του  $u^s$ . Στο αντίστροφο πρόβλημα

γνωρίζοντας το πλάτος σκέδασης του σκεδαζόμενου πεδίου για  $\hat{x}$  και  $\hat{d}$  πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$  δύναται ο προσδιορισμός είτε του  $n$  είτε του  $D$ .

Όπως και με το ευθύ το πρώτο ερώτημα που τίθεται στο αντίστροφο πρόβλημα είναι η μοναδικότητα της λύσης. Το πρώτο αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή έγινε από τον Schiffer ο οποίος έδειξε ότι για το πρόβλημα (1.5) – (1.8) το πλάτος σκέδασης  $u_\infty(\hat{x}; \hat{d})$  για όλα τα  $\hat{x}$  και  $\hat{d}$  που ανήκουν στην μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$  και κυματάριθμο  $k$  σταθερό, ορίζει μοναδικά το σκεδαστή  $D$ . Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το πρόβλημα (1.2) – (1.4) έγινε από τον Nachman, τον Novikov και τον Ramm. Ένα θεώρημα που σχετίζεται στενά με τη μοναδικότητα της λύσης του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης είναι το θεώρημα του Karp, το οποίο αναφέρει ότι για το πρόβλημα (1.5) – (1.8) αν το  $u_\infty(\hat{x}; \hat{d}) = u_\infty(Q\hat{x}; Q\hat{d})$  για όλους τους  $3 \times 3$  πίνακες  $Q$  που περιγράφουν περιστροφές στον  $\mathbb{R}^3$  για κάθε  $\hat{x}$  και  $\hat{d}$  που ανήκουν στην μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$ , τότε ο σκεδαστής  $D$  είναι μια σφαίρα με κέντρο την αρχή

του συστήματος συντεταγμένων. Ανάλογα αποτελέσματα έχουν προκύψει για το πρόβλημα (1.2) – (1.4) από τους Colton και Kirsch.

Επιστρέφοντας τώρα στο ερώτημα της ύπαρξης της λύσης στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, αρχικά αναφέρουμε ότι είναι λάθος το ερώτημα αυτό γιατί το αντίστροφο πρόβλημα είναι μη καλά τοποθετημένο, για παράδειγμα σε οποιαδήποτε πραγματική περίπτωση τα μετρούμενα δεδομένα δεν είναι ακριβή και επομένως δεν υπάρχει λύση στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης. Η κατάλληλη ερώτηση που πρέπει να τεθεί είναι πως μπορεί το συγκεκριμένο πρόβλημα να ομαλοποιηθεί και πώς μπορούν να βρεθούν προσεγγιστικές λύσεις για το ομαλοποιημένο πλέον πρόβλημα. Αρχικές προσπάθειες που έγιναν προς αυτήν την κατεύθυνση οδήγησαν στη γραμμικοποίηση του προβλήματος, ανάγοντάς το σε ένα πρόβλημα μίας γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης πρώτου είδους. Οι κύριες τεχνικές επίλυσης για το πρόβλημα (1.2) – (1.4) έγιναν από τον Born και τον Kirchhoff για το πρόβλημα (1.5) – (1.8). Παρόλο που τα γραμμικοποιημένα προβλήματα είναι ελκυστικά εξαιτίας της μαθηματικής απλότητάς τους εντούτοις έχουν το ελάττωμα ότι αγνοούν τη βασική μη γραμμική φύση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης για παράδειγμα πολλαπλές ανακλάσεις αγνοούνται σημαντικά.

Οι πιο πρόσφατες προσπάθειες για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης χωρίς γραμμικοποίηση έγιναν από τους Imbriale και Mitta για το πρόβλημα (1.5) – (1.8). Η μέθοδός τους βασίστηκε στην αναλυτική συνέχεια με λίγη προσοχή να δίνεται σε προβλήματα σταθεροποίησης. Από την αρχή τέτοιων λύσεων τη δεκαετία του 80', ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων έχει δοθεί για τη λύση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης το οποίο ρητά λαμβάνουν τη μη γραμμική φύση και τη μη καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Συγκεκριμένα για την περίπτωση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης ακουστικών κυμάτων από ένα εμπόδιο για τον καθορισμό του συνόρου  $\partial D$  στο πρόβλημα (1.2) – (1.4) από το πλάτος σκέδασης  $u_\infty$  έχουν προταθεί τρόποι από τους Angell, Colton και Kirsch, Roger και πολλούς άλλους. Κάθε ένας από αυτούς τους ερευνητές χρησιμοποιεί είτε ολοκληρωτικές εξισώσεις είτε τους τύπους του Green. Με τη βοήθεια αυτών των εργαλείων γίνεται προσπάθεια να αναδιατυπωθεί το αντίστροφο πρόβλημα σαν ένα μη γραμμικό πρόβλημα το οποίο απαιτεί τη λύση ενός ευθέως προβλήματος σκέδασης για διαφορετικά πεδία σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας που χρησιμοποιείται για την εύρεση της λύσης. Οι μέθοδοι αυτοί μέχρι πρόσφατα ήταν υπολογιστικά ακριβοί αλλά με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αρκετά ανταγωνιστικοί.

Μια άλλη κατηγορία, γνωστή ως μέθοδος αποσύζευξης (ή αποσύνθεσης) της οποίας η κύρια ιδέα είναι ο διαχωρισμός του αντιστρόφου προβλήματος σε δύο επιμέρους κομμάτια, σε ένα γραμμικό μη καλά τοποθετημένο και σε ένα μη γραμμικό καλά τοποθετημένο εισήχθη και αναλύθηκε θεωρητικά και αριθμητικά επιλύθηκε από τους Kirsch και Kress καθώς και από τους Colton και Monk. Στο πρώτο πρόβλημα, (γραμμικό), σκοπός είναι η εύρεση του σκεδαζόμενου πεδίου από τη γνώση του πλάτους σκέδασης και στο δεύτερο, (μη γραμμικό), ο προσδιορισμός του συνόρου του σκεδαστή ως η περιοχή όπου το ολικό πεδίο ικανοποιεί κάποιες συνοριακές συνθήκες υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.



## 2. Η Εξίσωση Helmholtz

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθεται το απαραίτητο υπόβαθρο γνώσεων που απαιτείται για τη μελέτη του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης σε άπειρο χωρίο. Θα παρουσιαστούν τα θεωρήματα του Green για την αναπαράσταση των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz. Στη συνέχεια θα αναπτυχθεί η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, η οποία θα δώσει τη δυνατότητα να εισαχθεί το πλάτος σκέδασης, μία σημαντική συνάρτηση για το αντίστροφο πρόβλημα. Επίσης θα γίνει αναφορά στις βασικές ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών καθώς και των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel, οι οποίες αποτελούν βασικά εργαλεία για τη θεωρία της σκέδασης. Με την παρουσίαση όλων των παραπάνω θα είμαστε πλέον σε θέση να εξάγουμε αποτελέσματα μοναδικότητας και εκφράσεις για τις λύσεις της εξίσωσης Helmholtz καθώς και να ασχοληθούμε με τη μη καλή τοποθέτηση του αντιστρόφου προβλήματος εξετάζοντας τις ιδιότητες του πλάτους σκέδασης.

### 2.1 Ακουστικά Κύματα

Θεωρούμε τη διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους μέσα σε ένα ομογενές ισότροπο μέσο στον  $\mathbb{R}^3$  με μικρό ιξώδες. Έστω  $U = (\vec{x}, t)$  η ταχύτητα ενός σωματιδίου του ρευστού στο σημείο  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $p = p(\vec{x}, t)$ ,  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  και  $S = S(\vec{x}, t)$  η πίεση, η πυκνότητα και η ειδική εντροπία του ρευστού αντίστοιχα. Εάν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις να επιδρούν στο υγρό τότε η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από:

$$\text{την εξίσωση του Euler: } \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U + \gamma U + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

$$\text{την εξίσωση συνέχειας: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0$$

$$\text{η εξίσωση της κατάστασης: } p = f(\rho, S)$$

$$\text{και την αδιαβατική υπόθεση: } \frac{\partial S}{\partial t} + U \cdot \nabla S = 0$$

όπου  $\gamma$  είναι ο συντελεστής απορρόφησης του ρευστού και  $f$  μία συνάρτηση η οποία εξαρτάται από τη φύση του ρευστού. Οι συναρτήσεις  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$  είναι άγνωστες και το σύστημα που προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις είναι μη γραμμικό. Για τη γραμμικοποίηση του, θεωρώντας τη στάσιμη κατάσταση  $U_0 = 0$ ,  $p_0 = \text{constant}$ ,  $\rho_0 = \text{constant}$  και  $S_0 = \text{constant}$  μπορούμε να εκφράσουμε τα  $U$ ,  $p$ ,  $\rho$  και  $S$ , ως μικρές

διαταραχές γύρω από αυτή την κατάσταση. Έτσι αν  $0 < \varepsilon \ll 1$  τότε τα  $U$ ,  $p$ ,  $\rho$  και  $S$  εκφράζονται ως:

$$U = \varepsilon U_1(\vec{x}, t) + \dots$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(\vec{x}, t) + \dots$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1(\vec{x}, t) + \dots$$

$$S = S_0 + \varepsilon S_1(\vec{x}, t) + \dots$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στις εξισώσεις κίνησης και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς  $\varepsilon$  προκύπτει το παρακάτω γραμμικοποιημένο σύστημα:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \gamma U_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla U_1 = 0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + U_1 \cdot \nabla S_0 = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η κυματική εξίσωση:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

όπου η ταχύτητα του ήχου  $c$  ορίζεται από τον τύπο:

$$c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0).$$

Από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση του Euler είναι φανερό ότι υπάρχει ένα δυναμικό ταχύτητας  $V = V(\vec{x}, t)$  τέτοιο ώστε:

$$U = \frac{1}{\rho_0} \nabla V \quad \text{και}$$

$$p = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

Το δυναμικό ταχύτητας  $V$  ικανοποιεί και την κυματική εξίσωση  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V$ .

Για χρονικά αρμονικά κύματα της μορφής:

$$U(\vec{x}, t) = \text{Re}\{u(\vec{x})e^{-i\omega t}\}^1$$

με κυκλική συχνότητα  $\omega > 0$  και  $u(\vec{x})$  μια μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικό βαθμωτό πεδίο) αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση που ικανοποιεί η  $V$  καταλήγουμε στην εξίσωση Helmholtz την οποία ικανοποιεί η μιγαδική συνάρτηση  $u(\vec{x})$ .

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{Εξίσωση Helmholtz}$$

όπου  $k$  ο κυματάρριθμος ο οποίος είναι μια σταθερά και δίνεται από το  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Η κυματική εξίσωση ή αλλιώς εξίσωση D'Alembert είναι υπερβολικού τύπου, ενώ η εξίσωση Helmholtz ελλειπτικού τύπου.

---

<sup>1</sup> Έστω  $n(\vec{x}, t)$  το (οποιοδήποτε) θεμελιώδες πεδιακό μέγεθος το οποίο αναπαριστά την κυματική διαταραχή. Εφόσον η χρονική εξάρτηση υποτίθεται αρμονική, μιας ορισμένης συχνότητας  $\omega$  (μονοχρωματικό κύμα), η κυματική διαταραχή θα γράφεται στη μορφή:

$$n(\vec{x}, t) = n_c(\vec{x}) \cos \omega t + n_s(\vec{x}) \sin \omega t = \text{Re}\left\{ \overset{\circ}{n}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \text{όπου} \quad \overset{\circ}{n}(\vec{x}) = n_c(\vec{x}) + i n_s(\vec{x})$$

είναι το **μιγαδικό πλάτος** του χρονικά αρμονικού κύματος. Το μέγεθος  $\overset{\circ}{n}(\vec{x})$  αναφέρεται και ως **μιγαδικό πεδίο**. Η χρήση του μιγαδικού πεδίου  $\overset{\circ}{n}(\vec{x})$  δεν έχει κάποια ιδιαίτερη φυσική σημασία. Αποτελεί απλώς ένα βολικό τρόπο μαθηματικού χειρισμού της χρονικά αρμονικής εξάρτησης. Η μαθηματική ευκολία που προκύπτει με τη χρήση του μιγαδικού πεδίου καθίσταται φανερή από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$n_t(\vec{x}, t) = \text{Re}\left\{ (-i\omega) \overset{\circ}{n}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right\},$$

$$n_{tt}(\vec{x}, t) = \text{Re}\left\{ (-i\omega)^2 \overset{\circ}{n}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right\},$$

...

$$\frac{\partial^n n(\vec{x}, t)}{\partial t^n} = \text{Re}\left\{ (-i\omega)^n \overset{\circ}{n}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Οι οποίες δείχνουν την αντιστοιχία:

Αν  $\overset{\circ}{n}(\vec{x})$  είναι το μιγαδικό πλάτος του  $n(\vec{x}, t)$ , τότε το  $(-i\omega)^n \overset{\circ}{n}(\vec{x})$  είναι το μιγαδικό πλάτος του  $\frac{\partial^n n(\vec{x}, t)}{\partial t^n}$ . Με αυτόν τον τρόπο, στην περίπτωση των χρονικών αρμονικών κυματικών διαταραχών η χρονική παράγωγος αλγεβρικοποιείται κατά πολύ απλό και συστηματικό τρόπο.

Αν η σκέδαση γίνεται σε **μη ομογενές** μέσο υποθέτοντας πάλι ότι τα  $U$ ,  $p$ ,  $\rho$  και  $S$ , ως μικρές διαταραχές της στάσιμης κατάστασης  $U_0 = 0$ ,  $p = p_0 = \text{constant}$ ,  $\rho = \rho_0(\vec{x})$  και  $S = S_0(\vec{x})$  με  $p = f(p_0, S_0)$  τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon U_1(\vec{x}, t) + \dots \\ \rho &= \rho_0(\vec{x}) + \varepsilon \rho_1(\vec{x}, t) + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1(\vec{x}, t) + \dots \\ S &= S_0(\vec{x}) + \varepsilon S_1(\vec{x}, t) + \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στις μη γραμμικοποιημένες εξισώσεις καταλήγουμε στο παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \gamma U_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 U_1) = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2(\vec{x}) \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + U_1 \nabla \rho_0 \right)$$

με την ταχύτητα του ήχου στο μη ομογενές μέσο να δίνεται από τον τύπο:

$$c^2(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0(\vec{x}), S_0(\vec{x}))$$

από όπου και συμπεράνουμε ότι το  $p_1$  ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2(\vec{x}) \rho_0(\vec{x}) \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho_0(\vec{x})} \nabla p_1 \right)$$

Αν υποθέσουμε για την πίεση ότι οι όροι του  $\operatorname{grad} \rho_0$  είναι αμεληταίοι και ότι το  $p_1$  είναι χρονικώς αρμονικό δηλ.

$$p_1(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ u(\vec{x}) e^{-i\omega t} \right\}$$

τότε η  $u$  ικανοποιεί την

$$\Delta u(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c^2(\vec{x})} \left( 1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) u(\vec{x}) = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση διέπει την διάδοση χρονικού αρμονικού κύματος μικρού πλάτους σε ένα αργά μεταβαλλόμενο μη ομογενές μέσο, με κυματάριθμο  $k$  και δείκτη

διάθλασης  $n$  που δίνονται από τις σχέσεις:  $k = \frac{\omega}{c_0}$  και  $n = \frac{c_0^2}{c^2(\vec{x})} \left(1 + \frac{i\gamma}{\omega}\right)$ . Η εξίσωση Helmholtz παίρνει τη μορφή  $\Delta u(\vec{x}) + k^2 n(\vec{x})u(\vec{x}) = 0$ .

Στο πρόβλημα σκέδασης από ένα σώμα, θεωρούμε ότι μέσο διάδοσης και περιβάλλον μέσο ταυτίζονται και θεωρούνται ομογενή με την ταχύτητα του ήχου σταθερή. Η εξίσωση Helmholtz τότε γράφεται:

$$\Delta u(\vec{x}) + k^2 u(\vec{x}) = 0 \text{ με } k^2 = \frac{\omega(\omega + i\gamma)}{c_0^2}.$$

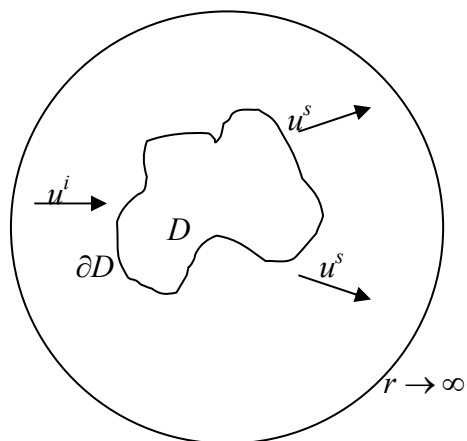
Το πρόσημο του κυματάριθμου  $k$  επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει  $\text{Im}(k) \geq 0$  και προφανώς ισχύει και  $\text{Re}(k) > 0$ , για να μπορεί να υφίσταται η έννοια της κυματικής διάδοσης. Το  $k$  μπορεί να είναι είτε πραγματικός είτε μιγαδικός αριθμός με  $\text{Im}(k) \neq 0$ . Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην απλή κυματική διάδοση, ενώ η δεύτερη σε κυματική διάδοση με απορρόφηση.

Στη σκέδαση από ένα αντικείμενο διακρίνουμε τους σκεδαστές σε διαπερατούς και μη διαπερατούς. Έτσι στο πρόβλημα σκέδασης από ένα σώμα υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

**α.)** Ο σκεδαστής να είναι μαλακό εμπόδιο μη διαπερατός, (soft sound). Τότε η πίεση του ολικού κύματος θα πρέπει να μηδενίζεται στο σύνορο. Έτσι αν το ολικό πεδίο  $u$  παρασταθεί ως η υπέρθεση του προσπίπτοντος πεδίου  $u^i$  και του σκεδαζόμενου  $u^s$  το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθεί το πεδίο  $u$ , έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ u(\vec{x}) &= e^{ik \cdot \vec{x} \cdot \hat{d}} + u^s(\vec{x}), \\ u &= 0 & \vec{x} \in \partial D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) &= 0 \end{aligned}$$

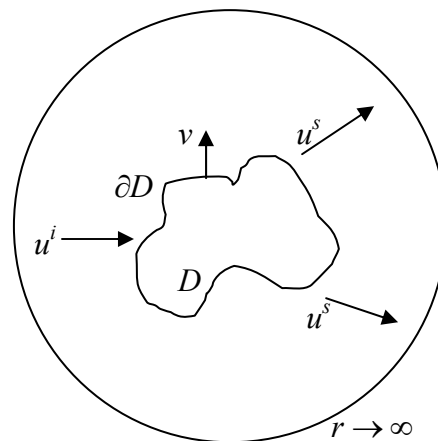


Το παραπάνω πρόβλημα λόγω των συνοριακών συνθηκών που επιβάλλονται καλείται πρόβλημα Dirichlet.

**β.)** Όταν ο σκεδαστής είναι σκληρό σώμα, (hard sound) η μεταβολή της  $u$  κατά την κάθετη διεύθυνση στο σύνορο του σώματος, θα πρέπει να μηδενίζεται. Από φυσική άποψη η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του ακουστικού κύματος θα πρέπει να είναι μηδενική στο σύνορο του σκεδαστή. Επομένως αν όπως και πριν το ολικό πεδίο  $u$  παρασταθεί ως η υπέρθεση του προσπίπτοντος πεδίου  $u^i$  και του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s$  τότε το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθεί το πεδίο  $u$ , έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ u(\bar{x}) &= e^{ik \cdot \bar{x} \cdot \hat{d}} + u^s(\bar{x}), \\ \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \nu} &= 0 & \bar{x} \in \partial D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) &= 0 \end{aligned}$$

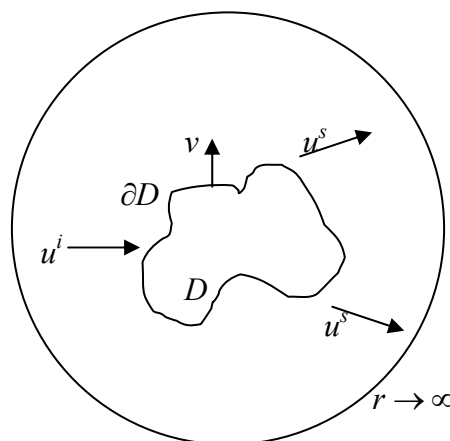


Το πρόβλημα αυτό καλείται πρόβλημα Neumann.

**γ.)** Πιο ρεαλιστική προσέγγιση στο παραπάνω πρόβλημα είναι να θεωρηθεί η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ανάλογη της διαφοράς πίεσης πάνω στο σύνορο του σκεδαστή. Η απαίτηση αυτή, θεωρώντας μία θετική σταθερά  $\lambda$  και όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις να ισχύει  $u = u^i + u^s$ , οδηγεί στο λεγόμενο Robin συνοριακό πρόβλημα :

Να βρεθεί το πεδίο  $u$ , έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ u(\bar{x}) &= e^{ik \cdot \bar{x} \cdot \hat{d}} + u^s(\bar{x}), \\ \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \nu} + i\lambda u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} \in \partial D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) &= 0 \end{aligned}$$



**δ.)** Στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι ένα διαπερατό αντικείμενο  $D$ , θεωρούμενο ως ρευστό με σταθερή πυκνότητα  $\rho_D$  και ταχύτητα του ήχου μέσα σε αυτό  $c_D$ , διαφορετικά από τα αντίστοιχα  $\rho$  και  $c$  στο περιβάλλον μέσο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  τότε οδηγεί σε ένα πρόβλημα μετάδοσης. Στην περίπτωση αυτή εκτός του  $u = u^i + u^s$  στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  όπου ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz με κυματάριθμο  $k = \omega/c$  υπάρχει και ένα επιπλέον κύμα το οποίο μεταδίδεται μέσα στο σκεδαστή  $D$  ικανοποιώντας την

εξίσωση Helmholtz με κυματάριθμο  $k_D = \omega/c_D \neq k$ . Η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας πάνω στο σύνορο οδηγεί στο εξής πρόβλημα:

Να βρεθεί το πεδίο  $u$ , έτσι ώστε:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

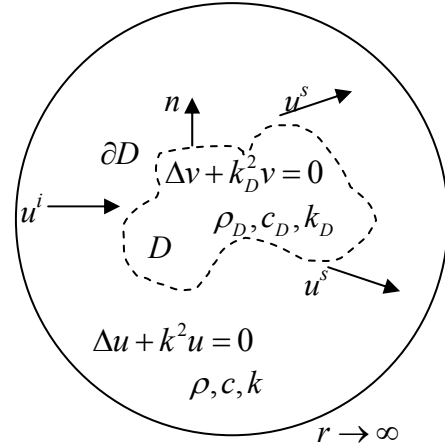
$$u(\bar{x}) = e^{ik \cdot \bar{x} \cdot \hat{d}} + u^s(\bar{x}),$$

$$\Delta v + k_D^2 v = 0 \quad \bar{x} \in D,$$

$$u(\bar{x}) = v(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \partial D,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} = \frac{1}{\rho_D} \frac{\partial v(\bar{x})}{\partial n} \quad \bar{x} \in \partial D,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0$$



Σε όλες τις περιπτώσεις πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld η οποία εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης σε προβλήματα σκέδασης. Από μαθηματική άποψη η σχέση αυτή λέει ότι σε μεγάλες αποστάσεις το εξερχόμενο κύμα επεκτείνεται σφαιρικά καθώς περνάει ο χρόνος. Δηλ. ένα κύμα το οποίο με την πάροδο του χρόνου επεκτείνεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad r = |\bar{x}| \quad : \text{ Σχέση ακτινοβολίας του Sommerfeld}$$

Οι δύο πιθανές σφαιρικές λύσεις της εξίσωσης του Helmholtz είναι  $\frac{e^{ikr}}{r}$  και  $\frac{e^{-ikr}}{r}$ .

Από αυτές μόνο η πρώτη ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας, γιατί

$$\text{Re} \left\{ \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \right\} = \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}$$

το οποίο εκφράζει σφαιρικό κύμα εκτεινόμενο σε

μεγαλύτερες αποστάσεις καθώς οδεύει ο χρόνος. Αυτό γίνεται φανερό αν θέσουμε  $\cos(kr - \omega t) = \cos a$  από όπου παίρνουμε  $kr - \omega t = a \Leftrightarrow r = \frac{a + \omega t}{k}$ . Η σχέση αυτή

εκφράζει σφαιρικά κύματα εκτεινόμενα σε μεγαλύτερες αποστάσεις καθώς περνάει ο

χρόνος. Αντίθετα, η άλλη λύση ακριβώς ανάλογα δίνει  $r = \frac{a - \omega t}{k}$  το οποίο δεν

απεικονίζει σφαιρικά κύματα εκτεινόμενα σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

## 2.2 Θεωρήματα και Τύποι Green

Αρχικά θα ξεκινήσουμε δίνοντας κάποιους ορισμούς οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την ανάλυση που θα κάνουμε.

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz με  $k > 0$ , (ο κυματάριθμος) είναι η ακόλουθη:

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \quad \vec{x} \neq \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

η οποία ικανοποιεί την  $\nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{y}) + k^2 \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta(\vec{x} - \vec{y})$ , στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{y}\}$ , με  $\delta(\vec{x} - \vec{y})$  τη συνάρτηση δέλτα του Dirac.

### Ορισμός

Έστω το ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Θα λέμε ότι το  $D$  είναι τάξης  $C^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , αν για κάθε σημείο  $z$  που ανήκει στο σύνορο  $\partial D$  υπάρχει μια περιοχή  $V_z$  του  $z$  με τις ακόλουθες ιδιότητες: η τομή  $V_z \cap \bar{D}$  μπορεί να απεικονιστεί 1-1 και επί πάνω στη μισή σφαίρα  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| < 1, x_3 \geq 0\}$ , η απεικόνιση αυτή και η αντίστροφη της είναι  $m$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και η τομή  $V_z \cap \partial D$  απεικονίζεται πάνω στο δίσκο  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| < 1, x_3 = 0\}$ . Πολλές φορές όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ένα σύνολο  $D$  είναι τάξης  $C^m$ , θα λέμε ότι το σύνορο  $\partial D$  είναι της τάξης  $C^m$ .

Ως  $C^m(D)$  ορίζουμε το γραμμικό χώρο των πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στο  $D$  και είναι  $m$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμες.

Βασικά εργαλεία στη μελέτη της εξίσωσης Helmholtz είναι τα ολοκληρωτικά θεωρήματα του Green.

Έστω  $D$  ένα φραγμένο χωρίο τάξης  $C^1$  και  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial D$ , κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του  $D$ .

Τότε αν  $u \in C^1(\bar{D})$  και  $v \in C^2(\bar{D})$  ισχύει το **1<sup>ο</sup> θεώρημα του Green**

$$\int_D \{u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds \quad (2.2)$$



Ενώ αν  $u, v \in C^2(\bar{D})$  τότε ισχύει το **2<sup>ο</sup> θεώρημα του Green**

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.3)$$

**Θεώρημα 2.1**

Έστω  $D$  ένα φραγμένο χωρίο της τάξης  $C^2$  και έστω  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του χωρίου  $D$ . Έστω ότι η  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  είναι μία συνάρτηση η οποία έχει κάθετη παράγωγο<sup>2</sup> πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , υπό την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow +0} n(\bar{x}) \cdot \nabla u(\bar{x} - hn(\bar{x})), \quad \bar{x} \in \partial D$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο  $\partial D$ , τότε έχουμε τον τύπο του Green:

$$u(\bar{x}) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) - \int_D \{ \Delta u(\bar{y}) + k^2 u(\bar{y}) \} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}, \quad \bar{x} \in D \quad (2.4)$$

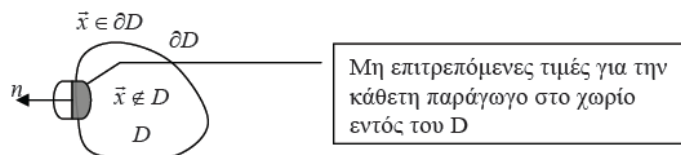
όπου τα ολοκληρώματα υπάρχουν ως γενικευμένα ολοκληρώματα. Αν η  $u$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{στο } D$$

τότε η σχέση (2.4) γίνεται:

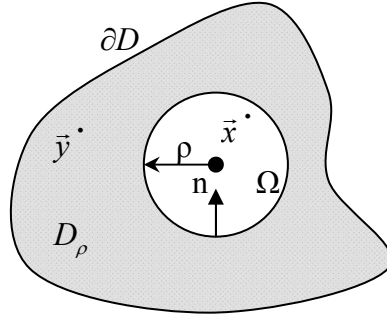
$$u(\bar{x}) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}), \quad \bar{x} \in D \quad (2.5)$$

<sup>2</sup> Η κάθετη παράγωγος ορίζεται με αυτή τη μορφή για να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές του  $u(\bar{x})$  θα βρίσκονται εκτός του χωρίου  $D$ . Η έννοια της παραγώγου είναι το  $\bar{x}$  να κινείται γύρω από μια μικρή περιοχή αυτού, στο όριο που το  $h \rightarrow 0$ . Έτσι με τον ορισμό αυτό αποφεύγουμε να βρεθούμε μέσα στο χωρίο αυτό,  $\bar{x} \in \partial D$ . Είναι ανάλογο με την πλευρική παράγωγο.



**Απόδειξη**

Υποθέτουμε ότι  $u \in C^2(\bar{D})$ . Περιγράφουμε το αυθαίρετο σταθερό σημείο  $\bar{x} \in D$ , με μια σφαίρα  $\Omega(\bar{x}; \rho) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^3 : |\bar{x} - \bar{y}| = \rho\}$  η οποία περιέχεται στο  $D$  και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη σφαίρα  $\Omega(\bar{x}; \rho)$  κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό της. Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα του Green στις συναρτήσεις  $u$  και  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  στο χωρίο  $D_\rho = \{\bar{y} \in D : |\bar{x} - \bar{y}| > \rho\}$  και λαμβάνουμε:



**Σχήμα 2.1** Σχηματική αναπαράσταση των χωρίων του θεωρήματος 2.1.

$$\int_{\partial D \cup \Omega(\bar{x}; \rho)} \left\{ \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) = \int_{D_\rho} (\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \Delta u(\bar{y}) - u(\bar{y}) \Delta \Phi(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{y} \quad (2.6)$$

η συνάρτηση  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  ως θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz την ικανοποιεί δηλ. ισχύει  $\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$ , στο  $D \setminus \{\bar{y}\}$ . Έτσι η σχέση (2.6) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D \cup \Omega(\bar{x}; \rho)} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) &= \int_{D_\rho} (\Delta u(\bar{y}) + k^2 u(\bar{y})) \Phi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \\ \Leftrightarrow \int_{\partial D} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) &+ \int_{\Omega(\bar{x}; \rho)} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) \\ &= \int_{D_\rho} (\Delta u(\bar{y}) + k^2 u(\bar{y})) \Phi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \end{aligned}$$

στη σφαίρα  $\Omega(\bar{x}; \rho)$  έχουμε  $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\rho}}{\rho}$  και το  $\nabla_{\bar{y}} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} n(\bar{y})$

παίρνοντας το όριο  $\rho \rightarrow 0$  η παραπάνω παράσταση παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega(\bar{x}, \rho)} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{D_\rho} (\Delta u(\bar{y}) + k^2 u(\bar{y})) \Phi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial D} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y})$$

Στο πρόβλημά μας ισχύει  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial \rho}$  επομένως έχουμε:

$$\int_{\Omega(\bar{x}, \rho)} \left\{ \Phi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \rho} \Phi + u \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\} \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} + u \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} (ik - \frac{1}{\rho}) \right\} \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= 4\pi \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} + u \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} (ik - \frac{1}{\rho}) \right\} \rho^2$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial \rho} \rho e^{ik\rho} + u \rho i k e^{ik\rho} - u e^{ik\rho}$$

έτσι ισχύει:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega(\bar{x}, \rho)} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y})$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( -\frac{\partial u}{\partial \rho} \rho e^{ik\rho} + u \rho i k e^{ik\rho} - u e^{ik\rho} \right)$$

$$= -u(\bar{x})$$

Επομένως καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση:

$$u(\bar{x}) = \int_{\partial D} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}) - \int_D \{ \Delta u(\bar{y}) + k^2 u(\bar{y}) \} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

Όταν η  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$ , στο χωρίο  $D$  το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται και έτσι έχουμε:

$$u(\bar{x}) = \int_{\partial D} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y})$$

□

Η σχέση (2.5) στη βιβλιογραφία είναι γνωστή με την ονομασία αναπαράσταση Helmholtz. Είναι φανερό ότι το θεώρημα 2.1 ισχύει και για μιγαδικές τιμές του κυματάρθμου  $k$ .

**Θεώρημα 2.2**

Αν η  $u$  είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz σε ένα χωρίο  $D$ , τότε η  $u$  είναι αναλυτική συνάρτηση.

**Απόδειξη**

Έστω ένα σημείο  $\bar{x} \in D$  και μια κλειστή σφαίρα  $B_x$  με κέντρο το  $\bar{x}$ , η οποία περιέχεται στο  $D$ . Θα δείξουμε ότι η  $u$  αναπτύσσεται σε σειρά Taylor. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.1 στη σφαίρα  $B_x$  έχουμε:

$$u(\bar{x}) = \int_{\partial B_x} \left\{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right\} ds(\bar{y}), \quad \bar{x} \in B_x$$

Για  $\bar{x} \neq \bar{y}$  η  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  είναι αναλυτική συνάρτηση πάνω στη συμπαγή σφαίρα  $B_x$  ως πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων που ο παρανομαστής είναι διαφορετικός του μηδενός. Δηλαδή αν  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  και  $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$  τότε η σειρά Taylor για τη  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  με κέντρο το  $\bar{x}_0$  είναι η ακόλουθη:

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^n \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \text{όπου } h_j = x_j - x_j^{(0)}$$

με  $j = 1, 2, 3$ .

Αφού η  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  είναι αναλυτική πάνω στη συμπαγή σφαίρα  $B_x$  μπορούμε να την παραγωγίσουμε και εντός του αθροίσματος και άρα η  $\frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})}$  είναι αναλυτική πάνω στη σφαίρα  $B_x$  με

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^n \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad \text{όπου } h_j = x_j - x_j^{(0)}$$

και  $j = 1, 2, 3$ .

Επίσης  $u \in C^2(\partial B_x)$  και  $\frac{\partial u}{\partial n} \in C^1(\partial B_x)$  τουλάχιστον και άρα από την ολοκληρωτική αναπαράσταση προκύπτει  $u(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\bar{x} - \bar{x}_0)^n$

$$\text{με } c_n = \frac{1}{n!} \int_{\partial B_x} \left( \Phi(\bar{x}_0, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}_0, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} \right) ds(\bar{y})$$

Δηλαδή η  $u$  είναι ολοκλήρωμα αναλυτικών συναρτήσεων σε συμπαγές σύνολο και επομένως είναι αναλυτική.

□

Από εδώ και στο εξής λέγοντας ότι η  $u$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz πάντα θα εννοούμε ότι η  $u$  είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και επομένως αναλυτική στο πεδίο ορισμού της.

### Πόρισμα

Αν μια λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz μηδενίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.2 λόγω της αναλυτικότητάς της η  $u$  θα πρέπει να μηδενίζεται παντού.

### Ορισμός

Μία λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz της οποίας το πεδίο ορισμού της περιέχει το εξωτερικό κάποιας σφαίρας καλείται ακτινοβόλος αν ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (2.7)$$

όπου  $r = |\vec{x}|$  και το όριο υποτίθεται ότι υπάρχει ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις  $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ .

### Θεώρημα 2.3

Έστω ότι το φραγμένο σύνολο  $D$  είναι ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου τάξης  $C^2$  και  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του χωρίου  $D$ . Αν  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$  είναι μια ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$ , στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , η οποία έχει κάθετη παράγωγο πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , υπό την έννοια ότι το όριο

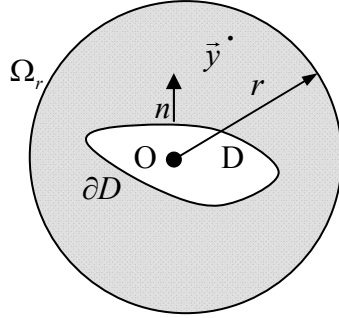
$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow +0} n(\vec{x}) \cdot \nabla u(\vec{x} + hn(\vec{x})), \quad \vec{x} \in \partial D$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο  $\partial D$ , τότε έχουμε τον τύπο του Green:

$$u(\vec{x}) = \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n(\vec{y})} - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} \Phi(\vec{x}, \vec{y}) \right\} ds(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (2.8)$$

### Απόδειξη

Έστω  $\Omega_r$  μία σφαίρα ακτίνας  $r$  με κέντρο την αρχή έτσι ώστε να περιέχει το  $D$  και το χωρίο  $D_r = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} : |\vec{y}| < r\}$ .



**Σχήμα 2.2** Σχηματική αναπαράσταση των χωρίων του θεωρήματος 2.3.

Πρώτα θα δείξουμε ότι:

$$\int_{\Omega_r} |u|^2 ds = O(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

δηλαδή ότι το ολοκλήρωμα είναι φραγμένο. Αρχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - ik \right|^2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + ik\bar{u} \right) \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 + ik\bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} - ik u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2 \operatorname{Im} \left( ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \end{aligned}$$

Από τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld έχουμε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2 \operatorname{Im} \left( ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right) ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds = 0 \quad (2.10)$$

Εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα του Green για την συνάρτηση  $u$  πάνω στο χωρίο  $D_r$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{D_r} (u \Delta \bar{u} + \nabla u \cdot \nabla \bar{u}) d\bar{y} &= \int_{\partial D \cup \Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \Leftrightarrow \\ \int_{D_r} u \Delta \bar{u} d\bar{y} + \int_{D_r} |\nabla u|^2 d\bar{y} &= - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds + \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \end{aligned}$$

Επειδή όμως  $\Delta u + k^2 u = 0$ , στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , έπεται ότι  $\Delta \bar{u} + k^2 \bar{u} = 0$ , στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ . Άρα  $\Delta \bar{u} = -k^2 \bar{u}$  στο  $D_r$  και από την τελευταία ισότητα συνεπάγεται:

$$\begin{aligned}
 -k^2 \int_{D_r} |u|^2 d\bar{y} + \int_{D_r} |\nabla u|^2 d\bar{y} &= - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds + \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \Leftrightarrow \\
 \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds &= \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds - k^2 \int_{D_r} |u|^2 d\bar{y} + \int_{D_r} |\nabla u|^2 d\bar{y}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds &\stackrel{(2.10)}{=} - \lim_{r \rightarrow \infty} \left( 2k \operatorname{Im} \left( \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) \right) \\
 \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds &\stackrel{(2.11)}{=} -2k \operatorname{Im} \left( \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

(η τελευταία συνεπαγωγή προκύπτει επιλέγοντας μόνο το φανταστικό μέρος της σχέσης (2.11)).

Τώρα στη σχέση (2.12) βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος είναι θετικό διότι κάθε όρος είναι θετικός. Επειδή το άθροισμα τους είναι πεπερασμένο όριο καθώς το  $r \rightarrow \infty$ , πρέπει να είναι και φραγμένο. Άρα όντως ισχύει ότι  $\int_{\Omega_r} |u|^2 ds = O(1)$ ,  $r \rightarrow \infty$ .

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_r} \left( u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} + iku(\bar{y})\Phi(\bar{x}, \bar{y}) - iku(\bar{y})\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) ds(\bar{y}) \\
 = I_1 - I_2
 \end{aligned}$$

$$\text{όπου ορίζουμε } I_1 = \int_{\Omega_r} \left( u(\bar{y}) \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - ik\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right) ds(\bar{y})$$

$$\text{και } I_2 = \int_{\Omega_r} \left( \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \left( \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - iku(\bar{y}) \right) \right) ds(\bar{y})$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz<sup>3</sup> έχουμε:

<sup>3</sup> Για κάθε  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$  ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwarz:  $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| |\bar{y}|$ . Η ισότητα ισχύει όταν  $\bar{y} = \rho \bar{x}$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Επίσης πιο γενικά η ανισότητα Cauchy-Schwarz έχει την μορφή:

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j w_j \right|^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \right), \quad (z_j, w_j \in \mathbb{C}).$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\Omega_r} \left( u(\bar{y}) \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - ik\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right) ds(\bar{y}) = \left( \sqrt{\int_{\Omega_r} \left( u(\bar{y}) \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - ik\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right) ds(\bar{y})} \right)^2 \\
 &= \left( \sqrt{\int_{\Omega_r} u(\bar{y}) ds(\bar{y})} \right) \sqrt{\int_{\Omega_r} \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - ik\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) ds(\bar{y})} \Rightarrow \\
 I_1 &\leq \left( \int_{\Omega_r} |u(\bar{y})|^2 ds(\bar{y}) \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - ik\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 ds(\bar{y}) \right)^{1/2} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

και

$$I_2 \leq \left( \int_{\Omega_r} |\Phi(\bar{x}, \bar{y})|^2 ds(\bar{y}) \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} - iku(\bar{y}) \right|^2 ds(\bar{y}) \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

Η θεμελιώδης λύση  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  της εξίσωσης Helmholtz ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - ik\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \bar{y} \in \Omega_r, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

$$\text{οπότε } \Phi(\bar{x}, \bar{y}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

Από τις σχέσεις (2.10), (2.13) και (2.15) έχουμε ότι  $I_1 = O\left(\frac{1}{r}\right)$  καθώς  $r \rightarrow \infty$  και από τις σχέσεις (2.14), (2.16) και τη συνθήκη ακτινοβολίας για τη συνάρτηση  $u$ , έχουμε ότι  $I_2 = O\left(\frac{1}{r}\right)$  καθώς  $r \rightarrow \infty$ . Έτσι τελικά  $I_1, I_2 = O\left(\frac{1}{r}\right)$  καθώς  $r \rightarrow \infty$ . Οπότε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left( u(\bar{y}) \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n(\bar{y})} - \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial n} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \right) ds(\bar{y}) = \lim_{r \rightarrow \infty} (I_1 - I_2) = 0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αν επικαλεστούμε το θεώρημα 2.1 στο φραγμένο χωρίο  $D_r = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} : |\bar{y}| < r\}$  και παίρνοντας το όριο καθώς  $r \rightarrow \infty$  έχουμε το ζητούμενο.

□

Από το θεώρημα 2.3 συμπεραίνουμε ότι κάθε ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz αυτόματα ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας απείρου του Sommerfeld:

$$u(\bar{x}) = O\left(\frac{1}{|\bar{x}|}\right), \quad |\bar{x}| \rightarrow \infty \quad (2.17)$$



ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις  $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  και η ισχύς της συνθήκης του Sommerfeld είναι αναλλοίωτη, (αμετάβλητη) ως προς μετασχηματισμούς μεταφοράς και στροφής της αρχής του συστήματος συντεταγμένων.

Ο Wilcox πρώτος διατύπωσε ότι η σχέση (2.8), (τύπος του Green) μπορεί να παράγεται χωρίς την πρόσθετη σχέση (2.17) της συνθήκης απείρου. Η απόδειξη του θεωρήματος (2.3) έχει οδηγήσει στην απόδειξη του Wilcox. Επίσης φαίνεται ότι μια ισοδύναμη σχέση της ακτινοβολίας είναι η  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds = 0$  όταν ισχύει το θεώρημα 2.3, η οποία αν και είναι ασθενέστερη μπορεί να αντικαταστήσει την σχέση (2.7). Φυσικά και στην περίπτωση αυτή εξακολουθεί να ισχύει η σχέση (2.7).

### Ορισμός

Λύσεις της εξίσωσης Helmholtz οι οποίες ορίζονται σε όλο τον  $\mathbb{R}^3$  καλούνται *ακέραιες λύσεις*. Αν μια ακέραια λύση της εξίσωσης Helmholtz ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του απείρου, τότε αυτή μηδενίζεται παντού. Αυτό απορρέει από το 2<sup>ο</sup> θεώρημα του Green, σχέση (2.3) και τον τύπο του Green, σχέση (2.8).

Τώρα είμαστε σε θέση να εισάγουμε την έννοια του *μακρινού πεδίου*, (πεδίο απείρου)  $u_\infty$ , ή *πλάτος σκέδασης* το οποίο παίζει κεντρικό ρόλο στην θεωρία του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης.

### Θεώρημα 2.4

Κάθε ακτινοβόλος λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz, έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός σφαιρικού εξερχόμενου κύματος:

$$u(\vec{x}) = \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \right\} \text{ καθώς } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις  $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ , όπου η συνάρτηση  $u_\infty$  ορίζεται πάνω στην μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$  και είναι γνωστή ως το *πλάτος σκέδασης* της  $u$ . Για το πεδίο αυτό ισχύει η αναπαράσταση:

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot \vec{y}}}{\partial n(\vec{y})} - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} e^{-ik\hat{x} \cdot \vec{y}} \right\} ds(\vec{y}), \quad \hat{x} \in \Omega \quad (2.19)$$

### Απόδειξη

Για  $\vec{y}$  σταθερό ισχύει:

$$\begin{aligned}
 |\vec{x} - \vec{y}| &= \sqrt{|\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2} \stackrel{\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}{=} |\vec{x}| \left( 1 - 2\frac{\hat{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} + \frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2} \right)^{1/2} \\
 &= |\vec{x}| \left[ 1 - \left( 2\frac{\hat{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} - \frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2} \right) \right]^{1/2} = |\vec{x}| \left[ 1 - \frac{\hat{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) \right] \\
 &= |\vec{x}| - \hat{x} \cdot \vec{y} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \quad \text{καθώς } |\vec{x}| \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Επίσης από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^{-1} = \left[ |\vec{x}| \left( 1 - \frac{\hat{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) \right) \right]^{-1} = |\vec{x}|^{-1} \left( 1 - \frac{\hat{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) \right)^{-1} \quad \text{καθώς } |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz δίνεται από τη σχέση  $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ ,  $\vec{x} \neq \vec{y}$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  και έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω η θεμελιώδης λύση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{4\pi} |\vec{x}|^{-1} \left( 1 - \frac{\hat{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|^2} \right) \right)^{-1} \cdot e^{ik(|\vec{x}-\vec{y}|)} \Rightarrow \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( e^{-ik(\hat{x} \cdot \vec{y})} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \right) \quad \text{καθώς } |\vec{x}| \rightarrow \infty. \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n(\vec{y})} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( \frac{\partial(e^{-ik(\hat{x} \cdot \vec{y})})}{\partial n(\vec{y})} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \right) \quad \text{καθώς } |\vec{x}| \rightarrow \infty. \tag{2.21}$$

Οπότε από το θεώρημα 2.3 προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}) &= \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n(\vec{y})} - \Phi(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} \right\} ds(\vec{y}) \\
 &= \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( \frac{\partial(e^{-ik(\hat{x} \cdot \vec{y})})}{\partial n(\vec{y})} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \right) - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( e^{-ik(\hat{x} \cdot \vec{y})} + O\left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \right) \right\} ds(\vec{y})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \left( \frac{\partial(e^{-ik(\hat{x}\cdot\vec{y})})}{\partial n(\vec{y})} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \right) - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} \left( e^{-ik(\hat{x}\cdot\vec{y})} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \right) \right\} ds(\vec{y}) \right) \\
 &= \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial(e^{-ik(\hat{x}\cdot\vec{y})})}{\partial n(\vec{y})} - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} e^{-ik(\hat{x}\cdot\vec{y})} \right\} ds(\vec{y}) + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \right) \\
 &= \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left( u_\infty(\vec{x}) + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \right) \quad \text{καθώς } |\vec{x}| \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } u_\infty(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial(e^{-ik(\hat{x}\cdot\vec{y})})}{\partial n(\vec{y})} - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} e^{-ik(\hat{x}\cdot\vec{y})} \right\} ds(\vec{y}), \quad \hat{x} \in \Omega$$

είναι το πεδίο στο άπειρο, (πλάτος σκέδασης).

□

Σκοπός των αντιστρόφων προβλημάτων είναι η ανάκτηση λύσεων της εξίσωσης Helmholtz οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας από τη γνώση του πεδίου  $u_\infty$ . Με όρους απεικόνισης  $F : u \mapsto u_\infty$ , η λύση  $u$  μεταφέρεται στο πλάτος σκέδασης. Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση  $Fu = u_\infty$  για ένα δεδομένο πεδίο  $u_\infty$ . Με σκοπό να διασφαλιστεί η μοναδικότητα της λύσης  $u$  από το πεδίο στο άπειρο  $u_\infty$  και για να γίνει κατανοητό η μη καλή τοποθέτηση της εξίσωσης  $Fu = u_\infty$ , χρειάζεται να αναπτυχθούν μερικές πτυχές της θεωρίας των σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων. Η απεικόνιση  $F$  είναι εξαιρετικά ομαλοποιητική επειδή το  $u_\infty$  είναι αναλυτική συνάρτηση πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$ .

## 2.3 Σφαιρικές Αρμονικές

### Ορισμός

Με τον όρο *σφαιρική αρμονική τάξης  $n$*  εννοούμε τον περιορισμό ενός ομογενούς αρμονικού πολυωνύμου βαθμού  $n$  πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$ .

### Θεώρημα 2.5

Υπάρχουν ακριβώς  $2n + 1$  γραμμικώς ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές τάξης  $n$ .

### Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν ακριβώς  $2n + 1$  γραμμικώς ανεξάρτητα ομογενή αρμονικά πολυώνυμα βαθμού  $n$ . Ορίζουμε τα πολυώνυμα  $n$  βαθμού ως εξής:

$$H_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^n a_{n-k}(x_1, x_2)x_3^k$$

όπου τα  $a_k$  είναι ομογενή πολυώνυμα  $k$ -βαθμού εξαρτώμενα από τις μεταβλητές  $x_1, x_2$ . Τα  $H_n$  είναι αρμονικά αν  $\Delta H_n = 0$ . Έτσι με υπολογισμούς καταλήγουμε ότι το  $H_n$  είναι αρμονικό αν και μόνο αν οι συντελεστές ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$a_{n-k} = -\frac{\Delta a_{n-k+2}}{k(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Επομένως, για την ομογένεια των  $H_n$  διαλέγοντας τους δύο συντελεστές  $a_n$  και  $a_{n-1}$  όπως φαίνεται παρακάτω ορίζονται μοναδικά τα  $H_n$ .

$$\begin{aligned} a_n(x_1, x_2) &= x_1^{n-j} x_2^j \quad \text{και} \quad a_{n-1}(x_1, x_2) = 0, & j &= 0, 1, \dots, n \\ a_n(x_1, x_2) &= 0 \quad \text{και} \quad a_{n-1}(x_1, x_2) = x_1^{n-j-1} x_2^j, & j &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Στην πρώτη περίπτωση λαμβάνουμε  $n+1$  το πλήθος ομογενή αρμονικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  και στη δεύτερη περίπτωση  $n$  το πλήθος. Έτσι τελικά έχουμε σύνολο  $2n+1$  γραμμικώς ανεξάρτητα ομογενή αρμονικά πολυώνυμα βαθμού  $n$ .

□

Το θεώρημα αυτό μας βοηθάει να ορίσουμε την μορφή όλων των σφαιρικών αρμονικών κάθε βαθμού σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Περαιτέρω, είναι πιο βολικό και πιο κατάλληλο να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες για την αναπαράσταση των σφαιρικών αρμονικών. Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$  είναι φανερό ότι τα πολυώνυμα θα έχουν την μορφή:

$$H_n = r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

και είναι ομογενή και αρμονικά αν  $\Delta H_n = 0$ , η οποία καταλήγει στην σχέση:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0 \quad (2.22)$$

Από το θεώρημα του Green (2.3) εφαρμόζοντάς το πάνω σε δύο αρμονικά πολυώνυμα  $H_n$  και  $H_{n'}$ , έχουμε:

$$0 = \int_{\Omega} \left\{ \bar{H}_{n'} \frac{\partial H_n}{\partial r} - H_n \frac{\partial \bar{H}_{n'}}{\partial r} \right\} ds = (n - n') \int_{\Omega} Y_n \bar{Y}_{n'} ds$$

και επομένως η σχέση ορθογωνιότητας που ικανοποιούν είναι η ακόλουθη:

$$\int_{\Omega} Y_n \bar{Y}_{n'} ds = 0 \quad \text{αν} \quad n \neq n' \quad (2.23)$$

Πρώτα θα εισάγουμε τη μορφή των σφαιρικών αρμονικών που εξαρτώνται μόνο από τη γωνία  $\theta$ . Έστω δύο σημεία  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  με  $r = |\vec{x}| < |\vec{y}| = 1$ ,  $\theta$  τη μεταξύ τους γωνία και  $t = \cos\theta$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} \quad (2.24)$$

η οποία για σταθερό  $\vec{y}$  είναι μια λύση της εξίσωσης Laplace ως προς  $\vec{x}$ . Επομένως για σταθερό  $t = \cos\theta$  με  $-1 \leq t \leq 1$  το δεξιό μέλος της σχέσης (2.24) είναι μια αναλυτική συνάρτηση του  $r$  και το ανάπτυγμά της σε σειρά Taylor είναι:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)r^n \quad (2.25)$$

όπου  $P_n$  είναι τα πολυώνυμα Legendre<sup>4</sup>.

Η συνάρτηση στο αριστερό μέλος είναι γνωστή ως γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre. Για κάθε  $0 < r_0 < 1$  η σειρά Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - r \exp(\pm i\theta)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} r^n e^{\pm in\theta} \quad (2.26)$$

και όλες οι παράγωγοι ως προς  $r$  και  $\theta$ , είναι απολύτως και ομοιόμορφα συγκλίνουσες για κάθε  $0 \leq r \leq r_0$  και  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Επομένως πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (2.26) για τα πρόσημα συν και πλην, βλέπουμε ότι η σειρά (2.25) και όλες οι παράγωγους της ως προς  $r$  και  $\theta$  είναι απολύτως και ομοιόμορφα συγκλίνουσες για όλα τα  $0 \leq r \leq r_0$  και  $-1 \leq t = \cos\theta \leq 1$ . Θέτοντας  $\theta = 0$  στην σχέση (2.26) είναι φανερό ότι έχουμε το μέγιστο της σειράς για κάθε  $\theta$ . Επομένως το μέγιστο της σειράς (2.25) δίνεται από μια γεωμετρική σειρά από όπου προκύπτει ότι:

$$|P_n(t)| \leq 1 \quad \text{για} \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \text{και} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Αυτό συμβαίνει διότι για  $\theta = 0$ , όπου παίρνουμε το μέγιστο της σειράς (2.26), έχουμε  $t = \cos 0 = 1$  και επομένως:

<sup>4</sup> Τα πολυώνυμα Legendre ορίζονται με τη σχέση:

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 1}{n!} \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right\}.$$

Μπορούν επίσης να εκφραστούν και μέσω του τύπου του Rodrigues:  $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2tr+r^2}} &< \frac{1}{\sqrt{1-2t+r^2}} = \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \\ \text{όμως } \frac{1}{\sqrt{1-2tr+r^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)r^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (P_n(t)-1)r^n < 0$$

από όπου για  $r \geq 0$  προκύπτει η σχέση (2.27).

Αν παραγωγίσουμε την (2.24) ως προς  $r$ , την πολλαπλασιάσουμε με  $1-2tr+r^2$ , εισάγουμε την (2.25) στο αριστερό μέλος της προκύπτουσας σχέσης, τότε εξισώνοντας τις δυνάμεις του  $r$  θα προκύψει η αναδρομική σχέση που ικανοποιούν τα πολυώνυμα Legendre  $P_n$ :

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Από τη σχέση (2.25) εύκολα φαίνεται ότι  $P_0(t) = 1$  και  $P_1(t) = t$ . Από την αναδρομική σχέση φαίνεται ότι τα πολυώνυμα Legendre είναι όντως πολυώνυμα βαθμού  $n$  και αν το  $n$  είναι άρτιος το πολυώνυμο είναι άρτια συνάρτηση ενώ αν είναι περιττός το πολυώνυμο είναι περιττή συνάρτηση.

Για σταθερό  $\bar{y}$  η συνάρτηση (2.24) είναι αρμονική. Παραγωγίζοντας κάθε όρο της σχέσης (2.25) λαμβάνουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + n(n+1)P_n(\cos \theta) \right\} \cdot r^{n-2} = 0.$$

Εξισώνοντας τις δυνάμεις ως προς  $r$  προκύπτει ότι τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση:

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

η οποία καλείται *διαφορική εξίσωση Legendre*.<sup>5</sup> Επομένως τα ομογενή πολυώνυμα  $r^n P_n(\cos \theta)$  βαθμού  $n$  είναι αρμονικά. Άρα τα  $P_n(\cos \theta)$  αναπαριστούν σφαιρικές αρμονικές τάξης  $n$ . Η σχέση ορθογωνιότητας (2.23) υποδηλώνει ότι τα  $P_n$  ικανοποιούν τη σχέση:

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_{n'}(t)dt = 0, \quad \text{αν } n \neq n'.$$

Εφόσον έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση, μπορούμε να ολοκληρώσουμε το τετράγωνο της συνάρτησης (2.25) όρο προς όρο και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση ορθογωνιότητας μετά από πράξεις να καταλήξουμε στην σχέση:

<sup>5</sup> Η διαφορική εξίσωση Legendre:  $(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$ ,  $y = y(t)$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$  έχει γενική λύση την  $y = c_1 P_n(t) + c_2 Q_n(t)$ , όπου τα  $P_n$  είναι τα πολυώνυμα Legendre και τα  $Q_n$  οι συναρτήσεις Legendre. Οι  $Q_n$  δεν είναι πεπερασμένες για  $t = \pm 1$ .

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

όπου το  $\delta_{nm}$  είναι το δέλτα του Kronecker. Εφόσον ισχύει ότι  $\text{span}\{P_0, P_1, \dots, P_n\} = \text{span}\{1, t, \dots, t^n\}$  τότε τα πολυώνυμα Legendre  $P_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , σχηματίζουν ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα στο χώρο  $L^2[-1, 1]$ .

Τώρα αναζητούμε σφαιρικές αρμονικές που έχουν εξάρτηση και ως προς τη γωνία  $\varphi$ . Αναζητούμε σφαιρικές αρμονικές της μορφής:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = f(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.22) δηλ. στη σχέση που πρέπει να ικανοποιείται για να ισχύει  $\Delta H_n = 0$  καταλήγουμε στην *προσαρτημένη διαφορική εξίσωση Legendre*<sup>6</sup> που ικανοποιεί η εξίσωση  $f$ .

$$(1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right\} f(t) = 0 \quad (2.31)$$

Παραγωγίζοντας  $m$  φορές την διαφορική εξίσωση Legendre, σχέση (2.29), η συνάρτηση  $g(t) = \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} = P_n^{(m)}$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$(1-t^2)g''(t) - 2(m+1)tg'(t) + (n-m)(n+m+1)g(t) = 0$$

από την οποία μπορούμε να συνάγουμε τον τύπο των *προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre*

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (2.32)$$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω  $f \equiv P_n^m$  και επομένως  $Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta)e^{im\varphi}$ . Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι σφαιρική αρμονική πρέπει να αποδείξουμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις  $r^n Y_n^m(\theta, \varphi) = r^n P_n^m(\cos \theta)e^{im\varphi}$  είναι ομογενή πολυώνυμα

---

<sup>6</sup> Η προσαρτημένη διαφορική εξίσωση Legendre:  $(1-t^2)y'' - 2ty' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] y = 0$  έχει

γενική λύση την  $y = c_1 P_n^m(t) + c_2 Q_n^m(t)$ , όπου τα  $P_n^m$  και  $Q_n^m$  είναι οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δεύτερου* είδους αντίστοιχα. Αν  $m > n$  τότε  $P_n^m = 0$ . Οι συναρτήσεις  $Q_n^m$  δεν είναι πεπερασμένες για  $t = \pm 1$ .

βαθμού  $n$ . Από την αναδρομική σχέση (2.28) για τα  $P_n$  και τον ορισμό (2.32) για τα  $P_n^m$  πρώτα παρατηρούμε ότι:

$$P_n^m(\cos \theta) = (\sin^m \theta) \cdot u_n^m(\cos \theta)$$

όπου  $u_n^m(\cos \theta) = \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $(n - m)$  και είναι άρτιο αν το  $(n - m)$  είναι άρτιο και περιττό αν το  $(n - m)$  είναι περιττό. Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$r^m (\sin^m \theta) e^{im\varphi} = (x_1 + ix_2)^m$$

από όπου παίρνουμε:

$$r^n Y_n^m(\theta, \varphi) = (x_1 + ix_2)^m r^{n-m} u_n^m(\cos \theta).$$

Αν το  $(n - m)$  είναι άρτιο το πολυώνυμο  $u_n^m$  επιδέχεται συνημιτονικό ανάπτυγμα και γράφεται:

$$r^{n-m} u_n^m(\cos \theta) = r^{n-m} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} a_k \cos^{2k} \theta = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} a_k x_3^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}(n-m)-k}$$

το οποίο είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $(n - m)$ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και αν  $(n - m)$  είναι περιττός καταλήγουμε στο ότι το  $r^n Y_n^m(\theta, \varphi)$  είναι ομογενή πολυώνυμο και επομένως τα  $Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$  είναι σφαιρικές αρμονικές.

### **Θεώρημα 2.6**

Οι σφαιρικές αρμονικές

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.33)$$

για  $m = -n, \dots, n$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$  αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο χώρο  $L^2(\Omega)$ .

### **Απόδειξη**

Λόγω της σχέσης (2.23) και της ορθογωνιότητας των  $e^{im\varphi}$  οι σφαιρικές αρμονικές όπως δίνονται από τη σχέση (2.33) είναι ορθογώνιες. Για  $m > 0$  έχουμε:

$$A_n^m = \int_0^\pi [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta$$

από όπου για  $t = \cos \theta$  και  $g_n^m(t) = (1-t^2)^m \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$  η παραπάνω σχέση γίνεται:



$$A_n^m = \int_{-1}^1 (1-t^2)^m \left[ \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \right]^2 dt = \int_{-1}^1 P_n(t) \frac{d^m g_n^m(t)}{dt^m} dt.$$

Άρα η παράσταση  $\frac{d^m g_n^m(t)}{dt^m} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} a_n t^n + \dots$  είναι ένα πολυώνυμο  $n$  βαθμού και τα  $a_n$  είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου  $P_n(t) = a_n t^n + \dots$ . Επομένως από την ορθογωνιότητα της σχέσης (2.30) των πολυωνύμων Legendre παίρνουμε:

$$\frac{(n-m)!}{(n+m)!} A_n^m = \int_{-1}^1 a_n t^n P_n(t) dt = \int_{-1}^1 [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

και άρα οι  $Y_n^m$  είναι ορθοκανονικό σύνολο.

Για σταθερό  $m$  τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre  $P_n^m$  για  $n = m, m+1, \dots$  είναι ορθογώνια και αποτελούν πλήρες σύστημα στο χώρο  $L^2[-1, 1]$ , επομένως έχουμε  $\text{span}\{P_m^m, \dots, P_{m+n}^m\} = (1-t^2)^{m/2} \text{span}\{1, \dots, t^n\}$ .

Γράφοντας  $Y = \text{span}\{Y_n^m : m = -n, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  απομένει να δείξουμε ότι το  $Y$  είναι πυκνό στο χώρο  $L^2(\Omega)$ . Για αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το  $Y$  είναι πυκνό στον  $C(\Omega)$  γιατί αυτό με τη σειρά του είναι πυκνό στον  $L^2(\Omega)$  με νόρμα  $L^2$ .

Έστω  $g \in C(\Omega)$ . Για σταθερό  $\theta$  από την ισότητα του Parseval έχουμε:

$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} |g_m(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} |g(\theta, \varphi)|^2 d\varphi \quad (2.34)$$

όπου  $g_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi$  οι συντελεστές του αναπτύγματος της  $g$  ως προς  $\varphi$  σε σειρά Fourier. Επειδή οι  $g_m$  και το δεξί μέλος της σχέσης (2.34) είναι συνεχείς ως προς  $\theta$ , από το θεώρημα του Dini η σύγκλιση της σχέσης (2.34) είναι ομοιόμορφη ως προς  $\theta$ . Επομένως δοθέντος ενός  $\varepsilon > 0$  υπάρχει ένα  $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε:

$$\int_0^{2\pi} \left| g(\theta, \varphi) - \sum_{m=-M}^M g_m(\theta) e^{im\varphi} \right|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} |g(\theta, \varphi)|^2 d\varphi - 2\pi \sum_{m=-M}^M |g_m(\theta)|^2 < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

για όλα τα  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Ο πεπερασμένος αριθμός των συναρτήσεων  $g_m$ ,  $m = -M, \dots, M$  μπορούν ταυτόχρονα να προσεγγιστούν από τις προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre  $P_n^m$ , για παράδειγμα υπάρχει  $N = N(\varepsilon)$  και συντελεστές  $a_n^m$  τέτοιοι ώστε:

$$\int_0^{\pi} \left| g_m(\theta) - \sum_{n=|m|}^N a_n^m P_n^{|m|}(\cos \theta) \right|^2 \sin \theta d\theta < \frac{\varepsilon}{8\pi(2M+1)^2}$$

για όλα τα  $m = -M, \dots, M$ . Επομένως συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες με τη βοήθεια τις ανισότητας του Schwarz βρίσκουμε ότι:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| g(\theta, \varphi) - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N a_n^m P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \right|^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta < \varepsilon.$$

Επομένως το  $Y$  είναι πυκνό στο  $C(\Omega)$  με νόρμα  $L^2$  και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη αφού το  $C(\Omega)$  είναι πυκνό στο χώρο  $L^2(\Omega)$ .

□

### **Θεώρημα 2.7**

Έστω  $Y_n^m$ ,  $m = -n, \dots, n$  είναι ένα σύστημα  $2n + 1$  ορθοκανονικών σφαιρικών αρμονικών τάξης  $n$ . Τότε για όλα τα  $\hat{x}, \hat{y} \in \Omega$  ισχύει ότι:

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \theta) \quad (2.35)$$

όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\hat{x}, \hat{y} \in \Omega$ .

### **Απόδειξη**

Θέτουμε το αριστερό μέλος της σχέσης (2.35) ίσο με  $Y(\hat{x}, \hat{y})$  και αρχικά θα δείξουμε ότι το  $Y$  εξαρτάται μόνο από τη γωνία  $\theta$ . Κάθε ορθογώνιος πίνακα  $Q$  στον  $\mathbb{R}^3$  μετασχηματίζει ομογενή αρμονικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  πάλι σε ομογενή αρμονικά πολυώνυμα βαθμού  $n$ . Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$Y_n^m(Q\hat{x}) = \sum_{k=-n}^n a_{mk} Y_n^k(\hat{x}), \quad m = -n, \dots, n.$$

Αφού ο  $Q$  και τα  $Y_n^m$  είναι ορθογώνια, έχουμε:

$$\int_{\Omega} Y_n^m(Q\hat{x}) \overline{Y_n^{m'}(Q\hat{x})} \, ds = \int_{\Omega} Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^{m'}(\hat{x})} \, ds = \delta_{mm'}.$$

Από αυτό φαίνεται ότι ο πίνακας  $A = (a_{mk})$  είναι επίσης ορθογώνιος και λαμβάνουμε:

$$Y(Q\hat{x}, Q\hat{y}) = \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n a_{mk} Y_n^k(\hat{x}) \sum_{l=-n}^n \overline{a_{ml} Y_n^l(\hat{y})} = \sum_{k=-n}^n Y_n^k(\hat{x}) \overline{Y_n^k(\hat{y})} = Y(\hat{x}, \hat{y})$$

όπου  $Y(\hat{x}, \hat{y}) = f(\cos \theta)$  διότι όπου και να πάρουμε τα  $\hat{x}, \hat{y}$  έχουμε εξάρτηση μόνο από τη μεταξύ τους γωνία  $\theta$ . Για σταθερό  $\hat{y}$  η συνάρτηση  $Y(\hat{x}, \hat{y})$  είναι σφαιρική αρμονική η οποία εξαρτάται μόνο από τη γωνία  $\theta$ . Εισάγοντας σφαιρικές συνταταγμένες βλέπουμε ότι  $f = a_n P_n$  με κάποια σταθερά  $a_n$ . Επομένως, έχουμε:

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} = a_n P_n(\cos \theta).$$

Για  $\hat{x} = \hat{y}$  και λαμβάνοντας ότι  $P_n(1) = 1$  καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$a_n = \sum_{m=-n}^n |Y_n^m(\hat{x})|^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Επομένως τα  $Y_n^m$  είναι κανονικοποιημένα, ολοκληρώνοντας πάνω στη μοναδιαία σφαίρα την τελευταία σχέση προκύπτει  $4\pi a_n = 2n + 1$  και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \theta) \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \Omega$$

□

## 2.4 Σφαιρικές Συναρτήσεις Bessel

Συνεχίζουμε τη μελέτη μας με τις σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις εισάγοντας τις βασικές ιδιότητες των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel.

Αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης Helmholtz της μορφής:

$$u(\hat{x}) = f(k|\hat{x}|)Y_n(\hat{x})$$

όπου το  $Y_n(\hat{x})$  είναι μια σφαιρική αρμονική τάξης  $n$ . Η διαφορική εξίσωση (2.22) για τις σφαιρικές αρμονικές, οδηγεί στο ότι η  $u$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz εφόσον η  $f$  είναι μια λύση της διαφορικής Bessel:

$$t^2 f''(t) + 2tf'(t) + [t^2 - n(n+1)]f(t) = 0 \quad (2.36)$$

Σημειώνουμε ότι για κάθε λύση  $f$  της διαφορικής εξίσωσης Bessel, η συνάρτηση  $g(t) = \sqrt{t}f(t)$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel με ημιακέραια τάξη  $n + 1/2$  και αντίστροφα. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel για  $n = 0, 1, 2, \dots$  είναι οι παρακάτω:

$$j_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{n+2p}}{2^p p! 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+2p+1)}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

$$y_n(t) = -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p-n-1}}{2^p p! (-2n+1)(-2n+3) \cdot \dots \cdot (-2n+2p+1)}, \quad t \in (0, \infty) \quad (2.38)$$

Οι λύσεις  $j_n$  είναι αναλυτικές για όλα τα  $t \in \mathbb{R}$  ενώ οι  $y_n$  για τα  $t \in (0, \infty)$ . Οι συναρτήσεις  $j_n$  καλούνται *σφαιρικές συναρτήσεις Bessel* και οι  $y_n$  *σφαιρικές συναρτήσεις Neumann τάξης  $n$* . Οι συναρτήσεις Neumann δεν έχουν πεπερασμένο όριο στο 0. Αντίστοιχα από το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων Bessel και Neumann προκύπτουν οι *σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους τάξης  $n$* .

$$\begin{aligned} h_n^{(1)} = j_n + iy_n & : \text{ σφαιρικές συνάρτησεις Hankel } 1^{ov} \text{ είδους} \\ h_n^{(2)} = j_n - iy_n & : \text{ σφαιρικές συνάρτησεις Hankel } 2^{ov} \text{ είδους} \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.37), (2.38) εξισώνοντας τις δυνάμεις του  $t$  επαληθεύεται ότι και οι δύο  $f_n = j_n$  και  $f_n = y_n$  ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$f_{n+1} + f_{n-1} = \frac{2n+1}{t} f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

καθώς επίσης και τις παρακάτω σχέσεις:

$$f_{n+1}(t) = -t^n \frac{d}{dt} \{t^{-n} f_n(t)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

$$t^{n+1} f_{n-1}(t) = \frac{d}{dt} \{t^{n+1} f_n(t)\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

Επίσης από τη σχέση (2.36) η ορίζουσα Wronski:  $W(j_n(t), y_n(t)) = j_n(t)y_n'(t) - y_n(t)j_n'(t)$  ικανοποιεί την σχέση  $W' + \frac{2}{t}W = 0$  όπου για κάποια σταθερά  $C$  θα ισχύει:  $W(j_n(t), y_n(t)) = C/t^2$ . Η σταθερά υπολογίζεται παίρνοντας το όριο για  $t \rightarrow 0$ , όπου βρίσκουμε:

$$j_n(t)y_n'(t) - j_n'(t)y_n(t) = \frac{1}{t^2}. \quad (2.42)$$

Από την τις σχέσεις (2.37) και (2.38) είναι φανερό ότι ισχύουν:

$$j_n(t) = \frac{t^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.43)$$

ομοίωμορφα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και

$$h_n^{(1)}(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{it^{n+1}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.44)$$

ομοιόμορφα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του  $(0, \infty)$ . Από τον τύπο του Stirling  $n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1 + o(1))$ ,  $n \rightarrow \infty$  προκύπτει ότι:

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty$$

από την (2.44) λαμβάνουμε:

$$h_n^{(1)}(t) = O\left(\frac{2n}{et}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.45)$$

ομοιόμορφα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του  $(0, \infty)$ .

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann μπορούν να εκφραστούν με όρους τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Θέτοντας  $n = 0$  στις σχέσεις (2.37) και (2.38) έχουμε ότι:

$$j_0(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad y_0(t) = -\frac{\cos t}{t}$$

και συνεπώς

$$h_0^{(1,2)}(t) = \frac{e^{\pm it}}{\pm it} \quad (2.46)$$

Επομένως από επαγωγή, από τις σχέσεις (2.46) και (2.40) οι σφαιρικές Hankel συναρτήσεις έχουν τη μορφή:

$$h_n^{(1)}(t) = (-i)^n \frac{e^{it}}{it} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^n \frac{a_{pn}}{t^p} \right\}, \quad h_n^{(2)}(t) = i^n \frac{e^{-it}}{-it} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^n \frac{\bar{a}_{pn}}{t^p} \right\}$$

με μιγαδικούς συντελεστές  $a_{1n}, \dots, a_{nn}$ . Από αυτό λαμβάνουμε την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel για μεγάλα ορίσματα:

$$h_n^{(1,2)}(t) = \frac{1}{t} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$h_n^{(1,2)'}(t) = \frac{1}{t} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.47)$$

Παίρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των σχέσεων (2.47) έχουμε τις σχέσεις της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel και Neumann.

Για λύσεις της εξίσωσης Helmholtz σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο αναφέρεται σε σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις.

**Θεώρημα 2.8**

Έστω  $Y_n$  η σφαιρική αρμονική  $n$  τάξης. Τότε η  $u_n(\vec{x}) = j_n(k|\vec{x}|)Y_n(\hat{x})$  είναι μια ακέραια λύση της εξίσωσης Helmholtz και η  $v_n(\vec{x}) = h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)Y_n(\hat{x})$  είναι μια ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

**Απόδειξη**

Εφόσον μπορούμε να γράψουμε το  $j_n(kr) = k^n r^n w_n(r^2)$  με μια αναλυτική συνάρτηση  $w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και εφόσον το  $r^n Y_n(\hat{x})$  είναι ένα ομογενές πολυώνυμο των  $x_1, x_2, x_3$  το γινόμενο  $j_n(kr)Y_n(\hat{x})$  είναι ομαλό στο 0 και επομένως η  $u_n$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz και στην αρχή. Η  $v_n$  ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας και προκύπτει από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel 1<sup>ov</sup> είδους της σχέσης (2.47). □

**Θεώρημα 2.9**

Έστω  $Y_n^m$ ,  $m = -n, \dots, n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  είναι ένα σύνολο ορθοκανονικών σφαιρικών αρμονικών. Τότε για  $|\vec{x}| > |\vec{y}|$  ισχύει:

$$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} = ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)Y_n^m(\hat{x})j_n(k|\vec{y}|)\overline{Y_n^m(\hat{y})} \quad (2.48)$$

όπου  $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$  και  $\hat{y} = \vec{y}/|\vec{y}|$ . Η σειρά και η πρώτη παράγωγος της όρο προς όρο ως  $|\vec{x}|$  και  $|\vec{y}|$  είναι απολύτως και ομοιόμορφα συγκλίνουσες στο συμπαγές υποσύνολο του  $|\vec{x}| > |\vec{y}|$ .

**Απόδειξη**

Από το 2<sup>ο</sup> θεώρημα του Green (2.3) εφαρμοζόμενο στη  $u_n^m(\vec{z}) = j_n(k|\vec{z}|)Y_n^m(\hat{z})$  με  $\hat{z} = \vec{z}/|\vec{z}|$  και στη  $\Phi(\vec{x}, \vec{z})$  έχουμε:

$$\int_{|\vec{z}|=r} \left\{ u_n^m(\vec{z}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{z})}{\partial n(\vec{z})} - \frac{\partial u_n^m(\vec{z})}{\partial n} \Phi(\vec{x}, \vec{z}) \right\} ds(\vec{z}) = 0, \quad |\vec{x}| > r$$

και από τον τύπο του Green (2.8), εφαρμοζόμενο στην ακτινοβόλο λύση  $v_n^m(\vec{z}) = h_n^{(1)}(k|\vec{z}|)Y_n^m(\hat{z})$ , έχουμε:

$$\int_{|\vec{z}|=r} \left\{ v_n^m(\vec{z}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{z})}{\partial n(\vec{z})} - \frac{\partial v_n^m(\vec{z})}{\partial n} \Phi(\vec{x}, \vec{z}) \right\} ds(\vec{z}) = v_n^m(\vec{x}), \quad |\vec{x}| > r.$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, στο  $|\vec{z}| = r$  έχουμε:

$$u_n^m(\vec{z}) = j_n(kr)Y_n^m(\hat{z}), \quad \frac{\partial u_n^m(\vec{z})}{\partial n} = kj_n'(kr)Y_n^m(\hat{z})$$

και

$$v_n^m(\vec{z}) = h_n^{(1)}(kr)Y_n^m(\hat{z}), \quad \frac{\partial v_n^m(\vec{z})}{\partial n} = kh_n^{(1)'}(kr)Y_n^m(\hat{z}).$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.42) βλέπουμε ότι:

$$\frac{1}{ikr^2} \int_{|\vec{z}|=r} Y_n^m(\hat{z})\Phi(\vec{x}, \vec{z})ds(\vec{z}) = j_n(kr)h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)Y_n^m(\hat{x}), \quad |\vec{x}| > r$$

και παίρνοντας πάνω στη μοναδιαία σφαίρα λαμβάνουμε:

$$\int_{\Omega} Y_n^m(\hat{z})\Phi(\vec{x}, r\hat{z})ds(\hat{z}) = ikj_n(kr)h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)Y_n^m(\hat{x}), \quad |\vec{x}| > r \quad (2.49)$$

Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.6 και λάβουμε υπόψη το ορθογώνιο ανάπτυγμα

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \int_{\Omega} Y_n^m(\hat{z})\Phi(\vec{x}, r\hat{z})ds(\hat{z})\overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

και την (2.49) τότε η σειρά (2.48) ισχύει

για συγκεκριμένο  $\vec{x}$  με  $|\vec{x}| > r$  και ως προς  $\vec{y}$  με την  $L^2$  έννοια στην σφαίρα  $|\vec{y}| = r$  για αυθαίρετο  $r$ . Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το θεώρημα 2.7 για τις σφαιρικές αρμονικές και τις σχέσεις (2.27), (2.43) και (2.44) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{m=-n}^n \left| h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)Y_n^m(\hat{x})j_n(k|\vec{y}|)\overline{Y_n^m(\hat{y})} \right|$$

$$\leq \frac{2n+1}{4\pi} \left| h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)j_n(k|\vec{y}|) \right| = O\left(\frac{|\vec{y}|^n}{|\vec{x}|^n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

ομοίωμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $|\vec{x}| > |\vec{y}|$ . Επομένως η σειρά (2.48) συγκλίνει απολύτως και ομοίωμορφα. Η απολύτως και ομοίωμορφη σύγκλιση των παραγώγων της σειράς (2.48) μπορεί να εξαχθεί ανάλογα με την βοήθεια των παραγώγων των  $j_n'$  και  $h_n^{(1)'}$  και τη σχέση (2.40)

□

Παίρνοντας το όριο  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  στη σχέση (2.49) και με τη χρήση των (2.20) και (2.48) καταλήγουμε στον τύπο των Funk – Hecke:

$$\int_{\Omega} e^{-ikr\hat{x}\cdot\hat{z}} Y_n(\hat{z})ds(\hat{z}) = \frac{4\pi}{i^n} j_n(kr)Y_n(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \Omega, \quad r > 0$$

με  $Y_n$  μια σφαιρική αρμονική τάξης  $n$ . Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$\int_{\Omega} e^{-ik \cdot \hat{x} \cdot \hat{z}} Y_n(\hat{z}) ds(\hat{z}) = \frac{4\pi}{i^n} j_n(k|\vec{x}|) Y_n(\hat{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.50)$$

Από την παραπάνω σχέση και το θεώρημα 2.7 μπορούμε να εκλάβουμε το ανάπτυγμα των Jacobi – Anger:

$$e^{ik \cdot \vec{x} \cdot \hat{d}} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k|\vec{x}|) P_n(\cos \theta), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.51)$$

όπου  $\hat{d}$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα,  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των  $\vec{x}$  και  $\hat{d}$  και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.5 Πλάτος Σκέδασης

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ένα προς ένα αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ μίας λύσης της εξίσωσης Helmholtz η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, και του πλάτους σκέδασής της.

### Λήμμα Rellich

Έστω ένα φραγμένο σύνολο  $D$  το οποίο είναι το ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω ότι  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$  είναι μία λύση της εξίσωσης Helmholtz η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|=r} |u(\vec{x})|^2 ds = 0. \quad (2.52)$$

Τότε  $u = 0$  στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

### Απόδειξη

Για αρκετά μεγάλο  $|\vec{x}|$ , από το θεώρημα 2.6 έχουμε το ανάπτυγμα Fourier για τη  $u$ .

$$u(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m(|\vec{x}|) Y_n^m(\hat{x})$$

με  $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$ . Οι συντελεστές  $a_n^m$  δίνονται από τη σχέση:

$$a_n^m(r) = \int_{\Omega} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x}).$$

Από την ισότητα του Parseval η  $u$  ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_{|\vec{x}|=r} |u(\vec{x})|^2 ds = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_n^m(r)|^2.$$



Από όπου από την σχέση 2.52 προκύπτει ότι:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0 \quad (2.53)$$

για όλα τα  $n$  και  $m$ .

Εφόσον  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$  μπορούμε να παραγωγίσουμε μέσα από το ολοκλήρωμα και να ολοκληρώσουμε κατά όρους χρησιμοποιώντας την  $\Delta u + k^2 u = 0$  και την διαφορική εξίσωση (2.22) και τελικά να προκύψει ότι οι συντελεστές  $a_n^m$  είναι λύσεις της σφαιρικής διαφορικής εξίσωσης Bessel.

$$\frac{d^2 a_n^m}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n^m}{dr} + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) a_n^m = 0 ,$$

με λύση την  $a_n^m(r) = a_n^m h_n^{(1)}(kr) + \beta_n^m h_n^{(2)}(kr)$  όπου τα  $a_n^m$  και  $\beta_n^m$  είναι σταθερές. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.53) και χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της σχέσης (2.47) των σφαιρικών Hankel εξισώσεων παίρνουμε  $a_n^m = \beta_n^m = 0$  για όλα τα  $n$  και  $m$ . Επομένως,  $u = 0$  έξω από μια αρκετά μεγάλη σφαίρα και επομένως  $u = 0$  στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ . Λόγω αναλυτικότητας της  $u$  έπεται ότι  $u = 0$  στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

□

Η φυσική σημασία του λήμματος είναι ότι εάν η ενέργεια στο άπειρο είναι μηδέν τότε είναι μηδέν σε όλο το χώρο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ . Το λήμμα Rellich εξασφαλίζει την μοναδικότητα για λύσεις στο εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών από το ακόλουθο θεώρημα.

### **Θεώρημα 2.10**

Έστω ότι το  $D$  είναι ένα χωρίο όπως περιγράφεται στο λήμμα του Rellich και  $\partial D$  είναι το σύνορο τάξης  $C^2$  με  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του  $D$  κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του, όπου και υποθέτουμε ότι  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$  είναι μία λύση που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας με κυματάρημο  $k > 0$  και έχει κάθετη παράγωγο με την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και ισχύει ότι:

$$\text{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \geq 0$$

τότε  $u = 0$  στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

### **Απόδειξη**

Από την ταυτότητα της σχέσης (2.10) και την υπόθεση του θεωρήματος, συμπεραίνουμε ότι η (2.52) ικανοποιείται. Επομένως από το από το λήμμα Rellich έχουμε ότι  $u = 0$  στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

□

Επίσης το λήμμα Rellich αποδεικνύει την ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των ακτινικών κυμάτων και του πλάτους σκέδασής τους.

### **Θεώρημα 2.11**

Έστω ένα χωρίο  $D$  όπως αυτό του λήμματος Rellich και έστω  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$  μια ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz για την οποία το πλάτος σκέδασης μηδενίζεται. Τότε η  $u = 0$  σε όλο τον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

### **Απόδειξη**

Από τη σχέση 2.18 παίρνουμε:

$$\int_{|\bar{x}|=r} |u(\bar{x})|^2 ds = \int_{\Omega} |u_{\infty}(\hat{x})|^2 ds + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

η υπόθεση ότι  $u_{\infty} = 0$  πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$  και άρα ικανοποιείται η σχέση (2.53) και επομένως από το λήμμα Rellich  $u = 0$  σε όλο τον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

□

### **Θεώρημα 2.12**

Έστω  $u$  είναι μια ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό  $|\bar{x}| > R > 0$  κάποιας σφαίρας. Τότε το  $u$  έχει μια έκφραση ως προς τη σφαιρική κυματική συνάρτηση της μορφής:

$$u(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m h_n^{(1)}(k|\bar{x}|) Y_n^m(\hat{x}) \quad (2.54)$$

η οποία συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο  $|\bar{x}| > R$ . Αν η σειρά (2.54) συγκλίνει με την  $L^2$  έννοια πάνω στη σφαίρα  $|\bar{x}| = R$  τότε συγκλίνει επίσης απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο  $|\bar{x}| > R$  και η  $u$  αποτελεί μια ακτινοβόλο λύση της εξίσωσης Helmholtz για  $|\bar{x}| > R$ .

### **Απόδειξη**

Για μία ακτινοβόλο λύση της εξίσωσης Helmholtz, εισάγουμε τη σχέση (2.48) στον τύπο του Green (2.8), εφαρμοζόμενο στη συνοριακή επιφάνεια  $|\bar{y}| = \tilde{R}$  με  $R < \tilde{R} < |\bar{x}|$ , ολοκληρώνοντας όρο προς όρο και λαμβάνουμε την έκφραση (2.54).

Αν η σειρά (2.54) συγκλίνει με την  $L^2$  έννοια στην σφαίρα  $|\bar{x}| = R$ , από την ισότητα του Parseval έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |h_n^{(1)}(kR)|^2 |a_n^m|^2 < \infty$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwarz, την ασυμπτωτική συμπεριφορά του  $h_n^{(1)}$  (σχέση (2.44)) και τη σχέση (2.35) για  $R < R_1 < |\vec{x}| \leq R_2$  και για  $N \in \mathbb{N}$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n |h_n^{(1)}(k|\vec{x}|) a_n^m Y_n^m(\hat{x}) \right]^2 \\ & \leq \sum_{n=0}^N \left| \frac{h_n^{(1)}(k|\vec{x}|)}{h_n^{(1)}(kR)} \right|^2 \sum_{m=-n}^n |Y_n^m(\hat{x})|^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n |h_n^{(1)}(kR)|^2 |a_n^m|^2 \\ & \leq C \sum_{n=0}^N (2n+1) \left( \frac{R}{|\vec{x}|} \right)^{2n} \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά  $C$  εξαρτώμενη από τα  $R$ ,  $R_1$  και  $R_2$ . Από αυτό συμπεραίνουμε απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (2.54) σε κάθε συμπαγές υποσύνολο  $|\vec{x}| > R$ . Όμοια μπορεί να φανεί ότι η παράγωγος του κάθε όρου ως προς  $|\vec{x}|$  είναι απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο  $|\vec{x}| > R$ . Για να εξασφαλίσουμε ότι η  $u$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, θα δείξουμε ότι ο τύπος του Green είναι έγκυρος για τη  $u$ . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.9, την ορθογωνιότητα των  $Y_n^m$  και την σχέση (2.42) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{|\vec{y}|=\tilde{R}} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n(\vec{y})} - \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n} \Phi(\vec{x}, \vec{y}) \right\} ds(\vec{y}) \\ & = ik\tilde{R}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m h_n^{(1)}(k|\vec{x}|) Y_n^m(\hat{x}) kW(h_n^{(1)}(k\tilde{R}), j_n(k\tilde{R})) \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m h_n^{(1)}(k|\vec{x}|) Y_n^m(\hat{x}) \\ & = u(\vec{x}) \quad \text{για } |\vec{x}| > \tilde{R} > R \end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή είναι φανερό ότι το  $u$  είναι μια ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz. □

Αν το  $R$  είναι η ακτίνα της μικρότερης κλειστής σφαίρας με κέντρο την αρχή, η οποία περιέχει το φραγμένο χωρίο  $D$ , τότε κάθε  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$  που είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, δέχεται την αναπαράσταση που δίνεται από τη σχέση (2.54) η οποία συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $|\vec{x}| > R$ .

**Θεώρημα 2.13**

Το πλάτος σκέδασης μιας λύσης της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας και επιδέχεται την έκφραση (2.54), δίνεται από την ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά:

$$u_\infty = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} \sum_{m=-n}^n a_n^m Y_n^m \quad (2.55)$$

και οι συντελεστές της έκφρασης αυτής ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2n}{ker} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |a_n^m|^2 < \infty \quad (2.56)$$

για όλα τα  $r > R$ .

**Απόδειξη**

Δεν μπορούμε να περάσουμε το όριο  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  στη σχέση (2.54) χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά (2.47) επειδή η τελευταία δεν είναι ομοιόμορφη στο  $n$ . Εφόσον η  $u$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, το πλάτος σκέδασης είναι μία αναλυτική συνάρτηση και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά τύπου Fourier:

$$u_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m Y_n^m$$

με συντελεστές  $b_n^m = \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x})$ .

Από την άλλη μεριά οι συντελεστές της σχέσης (2.54) δίνονται από την έκφραση:

$$a_n^m h_n^{(1)}(kr) = \int_{\Omega} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x}).$$

Επομένως με τη βοήθεια της (2.47) βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} b_n^m &= \int_{\Omega} \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-ikr} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-ikr} \int_{\Omega} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x}) \\ &= \frac{a_n^m}{ki^{n+1}} \end{aligned}$$

και η έκφραση (2.55) είναι έγκυρη με την  $L^2$  έννοια.

Η εξίσωση του Parseval για την έκφραση (2.54) δίνει:

$$r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_n^m|^2 |h_n^{(1)}(kr)|^2 = \int_{|\vec{x}|=r} |u(\vec{x})|^2 ds(\vec{x}).$$

Από την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά των Hankel συναρτήσεων, σχέση (2.45), έχουμε ότι ισχύει η σχέση (2.56). Από την ανισότητα Schwarz μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (2.55) ισχύει ομοιόμορφα πάνω στη σφαίρα  $\Omega$ .

□

### **Θεώρημα 2.14**

Έστω ότι οι συντελεστές Fourier  $b_n^m$  του πλάτους σκέδασης  $u_{\infty} \in L^2(\Omega)$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2n}{keR} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |b_n^m|^2 < \infty \text{ για κάποιο } R > 0. \quad (2.57)$$

Τότε η

$$u(\vec{x}) = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \sum_{m=-n}^n b_n^m h_n^{(1)}(k|\vec{x}|) Y_n^m(\hat{x}), \quad \text{για } |\vec{x}| > R \quad (2.58)$$

είναι μία ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz με πλάτος σκέδασης  $u_{\infty}$ .

### **Απόδειξη**

Από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της σχέσης (2.45), η (2.57) υπονοεί ότι η σειρά (2.58) συγκλίνει με την  $L^2$  έννοια πάνω στη σφαίρα  $|\vec{x}| = R$ . Επομένως από το θεώρημα 2.12, η  $u$  είναι μία ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz. Το γεγονός ότι το πλάτος σκέδασης συμπίπτει με το δεδομένο  $u_{\infty}$  έγκειται από το θεώρημα 2.13.

□

Τα τελευταία δύο θεωρήματα δείχνουν ότι το πρόβλημα που δίνεται από τη σχέση:

$$Fu = u_{\infty} \quad (2.59)$$

με  $F$  ένα γραμμικό τελεστή που απεικονίζει μια ακτινοβόλο λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz στο πλάτος σκέδασης της, είναι μη καλά τοποθετημένο. Κατά Hadamard ένα πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο αν υπάρχει λύση, εάν η λύση είναι μοναδική και εάν η λύση εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα του προβλήματος. Αν δεν ικανοποιούνται μία από τις συνθήκες αυτές το πρόβλημα είναι μη καλά τοποθετημένο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση στην εξίσωση (2.59) από το θεώρημα 2.11 εξασφαλίζουμε μοναδικότητα της λύσης. Ωστόσο εφόσον από το θεώρημα 2.13 η ύπαρξη της λύσης απαιτεί να ικανοποιείται η σχέση (2.58) για δεδομένο  $u_{\infty} \in L^2(\Omega)$ , μία λύση της (2.59) γενικά δεν υπάρχει. Επιπλέον αν η λύση τελικά υπάρχει δεν θα εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από το πλάτος σκέδασης  $u_{\infty}$  με καμία

νόρμα. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι για λύσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας  $u_n(\vec{x}) = \frac{1}{n} h_n^{(1)}(k|\vec{x}|) Y_n(\hat{x})$ , όπου  $Y_n$  είναι μία κανονικοποιημένη σφαιρική αρμονική τάξης  $n$  το πλάτος σκέδασης δίνεται από τη σχέση  $u_{n,\infty}(\vec{x}) = \frac{1}{ki^{n+1}n} Y_n$ . Επομένως έχουμε σύγκλιση  $u_{n,\infty} \rightarrow 0$  καθώς το  $n \rightarrow \infty$  με την  $L^2$  νόρμα πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$  ενώ λόγω της σύγκλισης των Hankel συναρτήσεων, σχέση (2.45) για μεγάλη τάξη  $n$ , η  $u_n$  δεν θα συγκλίνει με καμία νόρμα.

### 3. Κυματοδηγοί

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά κυμάτων, που δεν διαδίδονται στον ελεύθερο χώρο αλλά η διάδοσή τους περιορίζεται κατά μία ή περισσότερες διευθύνσεις, (οδηγούμενα κύματα).

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρατεθεί η απαραίτητη θεωρία που διέπει την διάδοση ακουστικών κυμάτων σε κυματοδηγούς χωρίς την παρουσία εμποδίου, (σκεδαστή). Σε αντίθεση με τα προηγούμενα κεφάλαια που αναφέρονται σε ανοιχτό μη οριοθετημένο μέσο διάδοσης στο κεφάλαιο αυτό το μέσο διάδοσης ορίζεται από μια ελεύθερη επιφάνεια και ένα σκληρό αδιαπέραστο πυθμένα, (κυματοδηγός). Θα λυθεί το ευθύ πρόβλημα σημειακής πηγής που βρίσκεται σε κυματοδηγό και εκπέμπει χρονικά αρμονικά ηχητικά κύματα με τρεις διαφορετικούς τρόπους και θα βρεθεί η συνάρτηση Green για το πρόβλημα αυτό.

Η υποβρύχια ακουστική, δηλαδή η επιστήμη που ασχολείται με την διάδοση του ήχου στο νερό έχει αναπτυχθεί τα τελευταία 40 χρόνια ανταποκρινόμενη στις πρακτικές ανάγκες. Η θεωρία είναι τόσο καλά αναπτυγμένη ώστε εξασφαλίζει μια γενική κατανόηση και μία λεπτομερή περιγραφή του πως ο ήχος ταξιδεύει στο νερό και των μηχανισμών που επηρεάζουν αυτόν. Η θεωρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν ποσοτικοί υπολογισμοί του παραγόμενου πεδίου του ήχου από μια πηγή. Ωστόσο υπάρχουν δυσκολίες που περιορίζουν την ακρίβεια τέτοιων υπολογισμών. Η πρώτη είναι η έλλειψη αρκετής πληροφορίας σχετικά με την ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα σαν μια συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Η δεύτερη είναι η αναλυτική και υπολογιστική δυσκολία στην εύρεση του πεδίου του ήχου με όρους των ιδιοτήτων της θάλασσας. Οι μαθηματικές μέθοδοι που έχουν επινοηθεί για να ξεπεράσουν την τελευταία δυσκολία είναι το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

Η ανάλυση της υποβρύχιας διάδοσης του ήχου βασίζεται στις φυσικές αρχές της θεωρητικής ακουστικής. Οι αρχές αυτές οδηγούν στο πρόβλημα της κυματικής εξίσωσης για την ακουστική πίεση, μαζί με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια και στον πυθμένα της θάλασσας καθώς και των αρχικών συνθηκών. Οι ιδιότητες του νερού που λαμβάνουν μέρος στην διατύπωση αυτή είναι η ταχύτητα του ήχου στο νερό  $c(x,y,z,t)$ , το βάθος  $h(x,y)$ , η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta(x,y,t)$  και η ταχύτητα του νερού  $\vec{u}(x,y,z,t)$ . Η απορρόφηση που προέρχεται από την απώλεια λόγω ιξώδους, την θερμική αγωγιμότητα, τις χημικές αντιδράσεις, την σκέδαση από σωματίδια κτλ. συνήθως αντιπροσωπεύονται από ένα συντελεστή απορρόφησης ο οποίος εξαρτάται από την θέση και την συχνότητα. Στην ανάλυση των χρονικών αρμονικών πεδίων συνδυάζεται με την ταχύτητα του ήχου και παράγεται ένας μιγαδικός δείκτης διάθλασης. Η απορρόφηση από τον πυθμένα συνήθως αντιπροσωπεύεται από έναν διαπερατό πυθμένα ή μερικές φορές από έναν συντελεστή ανάκλασης πυθμένα.

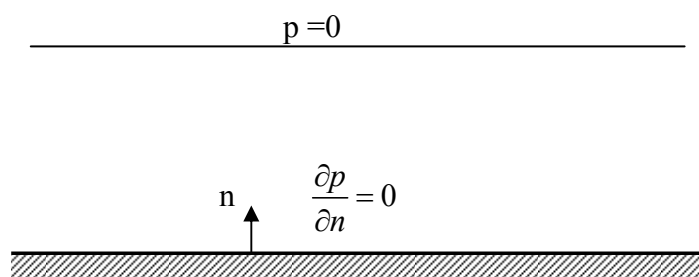
Οι περισσότερες θεωρητικές αναλύσεις αγνοούν την ανύψωση της επιφάνειας, την ταχύτητα του νερού και την απορρόφηση από το υγρό και τον πυθμένα. Μερικές από αυτές τις επιπτώσεις λαμβάνονται υπόψη μετέπειτα με έναν ειδικό τρόπο. Στην εργασία αυτή θα αγνοηθούν τέτοιες διαδικασίες.

Αρχικά η θεωρία σχετίζεται με την διάδοση σε ένα μέσο, (νερό) με σταθερές ιδιότητες ή σταδιακά μεταβαλλόμενες. Ωστόσο με την ανάπτυξη των πειραματικών τεχνικών έχει βρεθεί ότι το πεδίο του ήχου υφίσταται εκτεταμένες και ταχείες διακυμάνσεις. Οι διακυμάνσεις αυτές προκαλούνται από διακυμάνσεις των ιδιοτήτων

της θάλασσας. Για να αναλύσουμε αυτές πρέπει να θεωρήσουμε ότι η θάλασσα είναι ένα τυχαίο μέσο και το πρόβλημα της διάδοσης του ήχου να θεωρηθεί σε ένα τυχαίο μέσο. Η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής δεν είναι αρκετά ανεπτυγμένη όσο σε ένα ντετερμινιστικό μέσο.

### 3.1 Κυματική Διάδοση σε ένα Ντετερμινιστικό Μέσο

Στην παρούσα εργασία ο κυματοδηγός είναι το θαλάσσιο περιβάλλον ο οποίος μοντελοποιείται από πάνω, από μία ελεύθερη επίπεδη επιφάνεια στην οποία η πίεση  $p=0$  και από κάτω από έναν οριζόντιο επίπεδο πυθμένα στον οποίο η κάθετη παράγωγος  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .



**Σχήμα 3.1** Κυματοδηγός με επίπεδα σύνορα και τις αντίστοιχες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα.

Θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση των χρονικών αρμονικών σημειακών πηγών σε έναν ομογενή ωκεανό χωρίς σύνορα. Το αποτέλεσμα του πεδίου του ήχου είναι ένα σφαιρικό κύμα. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο ωκεανός ορίζεται από πάνω από μια οριζόντια επίπεδη ελεύθερη επιφάνεια στην οποία η πίεση μηδενίζεται. Τότε η πίεση  $p$  είναι το άθροισμα δύο σφαιρικών κυμάτων όπου το ένα προέρχεται από την πηγή και το άλλο από το είδωλο της πηγής στην επίπεδη επιφάνεια πολλαπλασιασμένη με το συντελεστή ανάκλασης  $R = -1$ . Η συμβολή μεταξύ των δύο αυτών κυμάτων οδηγεί σε μια ταλάντωση του μεγέθους  $p$  το οποίο μερικές φορές αναφέρεται σαν Lloyd mirror effect.

Στην περίπτωση που ο ωκεανός ορίζεται από πάνω από μια οριζόντια επίπεδη ελεύθερη επιφάνεια στην οποία η πίεση  $p = 0$  και από κάτω από έναν οριζόντιο επίπεδο πυθμένα στον οποίο η κάθετη παράγωγος  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ , η πίεση  $p$  είναι το άθροισμα ενός απείρου αριθμού σφαιρικών κυμάτων από την πηγή και ενός απείρου συνόλου ειδώλων αυτής (πηγής) στα δύο επίπεδα.



Η μέθοδος των ειδώλων, (image method) στην κατασκευή της  $p$ , που οδηγεί στο παραπάνω αποτέλεσμα δεν γενικεύεται στην περίπτωση ενός μη ομογενούς ωκεανού ούτε στην περίπτωση μη επιπέδων συνόρων. Περαιτέρω σε οριζόντιες αποστάσεις από την πηγή που είναι μεγάλες συγκρινόμενες με το βάθος  $h$ , πολλά από τα σφαιρικά κύματα έχουν σχεδόν την ίδια φάση ή το χρόνο έλευσης. Αυτό κάνει δύσκολο τον υπολογισμό του  $p$  επειδή τα διαδοχικά κύματα σχεδόν ακυρώνουν το ένα το άλλο.

Τα μειονεκτήματα της μεθόδου των ειδώλων μπορούν να ξεπεραστούν εν μέρει με τη μέθοδο των κανονικών ιδιομορφών (normal modes) η οποία εισήχθη από τον C. L. Pekeris. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε οριζόντιο στρωματοποιημένο ωκεανό σταθερού βάθους. Οδηγεί σε μια αναπαράσταση της πίεσης  $p$  σαν το άθροισμα ενός απείρου αριθμού κανονικών ιδιομορφών. Μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός από αυτούς είναι διαδιδόμενος ενώ οι υπόλοιποι εξαφανίζονται. Επομένως σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή μόνο οι διαδιδόμενες ιδιομορφές είναι σημαντικές και έτσι η πίεση αντιπροσωπεύεται από ένα πεπερασμένο άθροισμα.

Η μέθοδος των κανονικών ιδιομορφών περιορίζεται σε οριζόντιους στρωματοποιημένους ωκεανούς σταθερού βάθους. Περαιτέρω σε αποστάσεις από την πηγή που δεν είναι μεγάλες σε σύγκριση με το βάθος, τα αποσβενύμενα, (evanescent) κύματα δεν είναι αμελητέα και πολλά από αυτά πρέπει να ληφθούν υπόψη στον υπολογισμό της πίεσης  $p$ .

Η τελευταία δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί με την μέθοδο μετασχηματισμού Hankel, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τον L. Brekovskikh και άλλους. Αυτή παράγει μία αναπαράσταση της πίεσης  $p$  σαν ένα ολοκλήρωμα που περιέχει Bessel συναρτήσεις και λύσεις της κανονικής ιδιομορφής εξίσωσης, (normal mode equation). Παρόλο που το ολοκλήρωμα είναι βολικό για τον υπολογισμό σε μικρά εύρη, δεν είναι βολικό σε μεγάλα εύρη και η αναπαράσταση των κανονικών ιδιομορφών είναι πιο χρήσιμη.

Μια τρίτη αναπαράσταση της πίεσης  $p$  σε ένα οριζόντιο στρωματοποιημένο ωκεανό σταθερού βάθους δίνεται με τη μέθοδο της πολλαπλής σκέδασης, (multiple scattering). Η μέθοδος αυτή είναι μια γενίκευση της μεθόδου των ειδώλων από την περίπτωση ενός ομογενούς ωκεανού σε έναν οριζόντιο στρωματοποιημένο. Στη μέθοδο αυτή η πίεση  $p$  αναπαρίσταται σαν το άθροισμα των εξής κυμάτων: ένα κύμα προερχόμενο απευθείας από την πηγή, ένα άλλο που αντιπροσωπεύει τη σκέδαση του προσπίπτοντος ευθέους, (της πηγής) κύματος από το μέσο πάνω από την πηγή, ένα τρίτο που προέρχεται από τη σκέδαση του ευθέους κύματος από το μέσο που είναι κάτω από την πηγή και άλλα από τα αλληπάλληλα πολλαπλά σκεδάζοντα κύματα. Η σκέδαση περιλαμβάνει και την ανάκλαση από τα σύνορα και τη διάθλαση από το μη ομογενές μέσο. Στην περίπτωση του ομογενούς ωκεανού η διάθλαση δεν υπάρχει και η σκέδαση προέρχεται μόνο από την ανάκλαση. Στην περίπτωση αυτή η πολλαπλή αναπαράσταση σκέδασης μεταπίπτει σε αυτήν ακριβώς που δίνεται από την μέθοδο των ειδώλων.

Εφόσον και οι τρεις αναπαραστάσεις της πίεσης  $p$  που περιγράφονται πιο πάνω είναι όλες ακριβείς θα πρέπει να παράγουν την ίδια τιμή για την πίεση  $p$ . Περαιτέρω κάθε αναπαράσταση μπορεί να μετατραπεί από την μία αναπαράσταση στις άλλες δύο. Επιπρόσθετα κάθε αναπαράσταση μπορεί να απλοποιηθεί από μια μετατροπή σε μια ασυμπτωτική μορφή η οποία είναι έγκυρη όταν το ακουστικό μήκος κύματος είναι μικρό συγκρινόμενο με την απόσταση πάνω από την οποία η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται αισθητά. Οι ασυμπτωτικές μορφές μπορούν να μετατραπούν η μία στην άλλη.

Η ασυμπτωτική μορφή της αναπαράστασης της πολλαπλής σκέδασης έχει μια ερμηνεία σε όρους ακτίνων της γεωμετρικής ακουστικής. Η ασυμπτωτική μορφή ενός  $n$  φορές σκεδαζόμενου κύματος είναι ακριβώς το γεωμετρικό ακουστικό πεδίο μιας ακτίνας η οποία έχει ανακλαστεί και/ή διαθλαστεί  $n$  φορές. Επομένως η ασυμπτωτική μορφή καλείται αναπαράσταση ακτίνων. Η αναπαράσταση ακτίνων έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τις άλλες αναπαραστάσεις. Το πρώτο είναι ότι εξασφαλίζει μία γεωμετρική και φυσική εικόνα του πώς λαμβάνει χώρα η διάδοση και δείχνει προς τα πού ταξιδεύει ο ήχος. Το δεύτερο είναι ότι η αναπαράσταση των ακτίνων μπορεί να παραχθεί άμεσα χωρίς τον περιορισμό του οριζόντιου στρωματοποιημένου ωκεανού σταθερού βάθους. Επομένως η αναπαράσταση ακτίνων μπορεί να ληφθεί για ένα γενικό ωκεανό τόσο με οριζόντια όσο και με κατακόρυφη μεταβολή της ταχύτητας του ήχου καθώς και με μεταβολή του βάθους.

Στη θεωρητική μελέτη του πεδίου του ήχου που παράγεται από μια πηγή σε έναν ωκεανό ένα μοντέλο έχει αναπτυχθεί πολύ λεπτομερώς. Το μοντέλο αυτό είναι της σημειακής πηγής σε έναν οριζόντιο στρωματοποιημένο ωκεανό σταθερού βάθους και η ανάπτυξη του οφείλεται στο ότι αντιπροσωπεύει περίπου μία πραγματική πηγή σε ένα πραγματικό ωκεανό, επειδή οι πραγματικές πηγές είναι συχνά μικρές και επειδή οι πραγματικοί ωκεανοί είναι σχεδόν οριζόντιοι στρωματοποιημένοι. Επίσης η μέθοδος αυτή μπορεί να αναλυθεί με γνωστές τεχνικές των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Σαν συνέπεια, το μοντέλο αυτό είναι η βάση για όλες τις μελέτες στην ωκεάνια ακουστική.

### 3.2 Διατύπωση και Θεμελιώδεις Εξισώσεις

Η ταχύτητα  $\vec{u}$ , η πίεση  $p$ , η πυκνότητα  $\rho$  και η εντροπία  $s$  σε ένα μη θερμικό αγωγίμο ρευστό με μικρό ιξώδες ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \varepsilon \vec{f}, \quad (3.1)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.2)$$

$$s_t + \vec{u} \cdot \nabla s = 0, \quad (3.3)$$

$$p = p(\rho, s). \quad (3.4)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι η εξίσωση της ορμής, η εξίσωση διατήρησης της μάζας ή εξίσωση συνέχειας, της αδιαβατικής υπόθεσης και της εξίσωσης της κατάστασης αντίστοιχα. Στην (3.1) το  $\vec{g}$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και το  $\varepsilon \vec{f}$  είναι μια εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου, η οποία αντιπροσωπεύει την ακουστική πηγή. Η παράμετρος  $\varepsilon$  είναι ένα μέτρο της ισχύος της πηγής.

Ας υποθέσουμε ότι το υγρό ορίζεται από πάνω από μία ελεύθερη επιφάνεια  $z = \eta(x, y, t)$  και από κάτω από μια σκληρή επιφάνεια  $z = -h(x, y)$ . Έστω ότι  $p_0$  είναι η σταθερή πίεση πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια. Τότε η συνέχεια της πίεσης κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας και η κινηματική συνθήκη στην επιφάνεια αυτή παράγουν τις ακόλουθες σχέσεις:

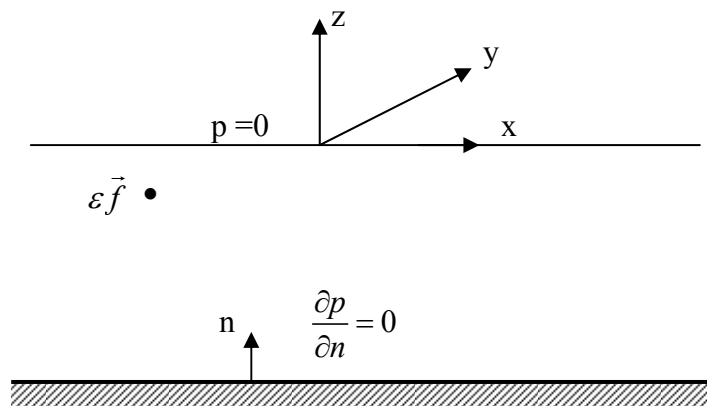
$$p[x, y, \eta(x, y, t), t] = p_0, \quad \text{στο } z = \eta(x, y, t) \quad (3.5)$$

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w, \quad \text{στο } z = \eta(x, y, t). \quad (3.6)$$

Η σκληρότητα του πυθμένα απαιτεί την κάθετη παράγωγο της ταχύτητας  $\vec{u}$  να είναι μηδέν στον πυθμένα, δηλαδή:

$$w + uh_x + vh_y = 0, \quad \text{στο } z = -h(x, y). \quad (3.7)$$

Όπου  $\vec{u} = (u, v, w)$  και  $\vec{x} = (x, y, z)$  με θετική φορά στον άξονα  $z$  προς τα πάνω.



**Σχήμα 3.2** Κυματοδηγός με επίπεδα σύνορα και τις αντίστοιχες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα, όπως απαιτούν οι σχέσεις (3.1) – (3.7).

Όταν το  $\varepsilon = 0$ , μία λύση του συστήματος (3.1) – (3.7) είναι  $\vec{u} = 0$  και  $\eta = 0$  με  $p$ ,  $\rho$  και  $s$  να εξαρτώνται μόνο από το  $z$ . Αυτές οι τρεις συναρτήσεις  $p(z)$ ,  $\rho(z)$  και  $s(z)$  σχετίζονται από την σχέση (3.4) και τη  $z$  συνιστώσα της σχέσης (3.1), η οποία παράγει την υδροστατική εξίσωση:

$$p_z = -\rho g \quad (3.8)$$

Επιπρόσθετα η σχέση (3.5) παράγει  $p(0) = p_0$ . Επομένως μία από τις τρεις συναρτήσεις ή μια επιπρόσθετη σχέση μεταξύ αυτών, μπορεί να οριστεί. Τότε η (3.4) και η (3.8) είναι οι εναπομένουσες δύο συναρτήσεις. Θα καλέσουμε την λύση αυτή **βασική κατάσταση**.

Τώρα θα θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη λύση του συστήματος (3.1) – (3.7), η οποία εξαρτάται φυσικά (από φυσικής άποψης), από την παράμετρο  $\varepsilon$  της σχέσης

(3.1). Υποθέτουμε ότι όταν  $\varepsilon = 0$ , η λύση καταλήγει στην βασική κατάσταση όπως περιγράφεται πιο πάνω. Διαφορίζοντας τις σχέσεις (3.1) – (3.7) ως προς  $\varepsilon$  στο σημείο  $\varepsilon = 0$ , λαμβάνουμε τις ακουστικές εξισώσεις που είναι:

$$\dot{\vec{u}}_t = -\frac{1}{\rho} \nabla \dot{p} + \frac{1}{\rho^2} \dot{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \dot{\vec{f}} \quad (3.9)$$

$$\dot{\rho}_t + \nabla \cdot (\rho \dot{\vec{u}}) = 0 \quad (3.10)$$

$$\dot{s}_t + \dot{\vec{u}} \cdot \nabla s = 0 \quad (3.11)$$

$$\dot{p} = p_\rho \dot{\rho} + p_s \dot{s} \quad (3.12)$$

$$\dot{p} + \eta p_z = 0, \quad \text{στο } z = 0 \quad (3.13)$$

$$\dot{\eta}_t = \dot{w}, \quad \text{στο } z = 0 \quad (3.14)$$

$$\dot{w} + u \dot{h}_x + v \dot{h}_y = 0, \quad \text{στο } z = -h(x, y). \quad (3.15)$$

Όπου  $\dot{\vec{u}}, \dot{p}$  κτλ. δηλώνουν τις παραγώγους ως προς  $\varepsilon$  στο σημείο  $\varepsilon = 0$ , ενώ τα  $p, \rho, s$  κτλ. δηλώνουν τη βασική κατάσταση. Θα καλούμε τα  $\dot{\vec{u}}, \dot{p}$  κτλ. ακουστικές ποσότητες.

Είναι βολικό να λάβουμε μία μόνο εξίσωση και συνοριακές συνθήκες για την  $p$  απαλείφοντας τις άλλες ακουστικές ποσότητες από αυτές τις εξισώσεις. Για να γίνει αυτό διαφορίζουμε την σχέση (3.10) και (3.11) ως προς  $t$ , σημειώνοντας ότι η βασική κατάσταση είναι ανεξάρτητη του  $t$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.9) για να απαλείψουμε το  $\dot{\vec{u}}_t$  και την (3.8) για το  $p_z$  και λαμβάνουμε:

$$\dot{\rho}_t - \Delta \dot{p} - g \dot{\rho}_z = -\nabla \cdot \dot{\vec{f}} \quad (3.16)$$

$$\dot{s}_t - \frac{1}{\rho} (\dot{p}_z + g \dot{\rho}) s_z = -\frac{1}{\rho} s_z \dot{f}_3. \quad (3.17)$$

Τώρα διαφορίζουμε την (3.12) δύο φορές ως προς  $t$  και χρησιμοποιούμε την (3.16) και (3.17) στην προκύπτουσα εξίσωση και παίρνουμε:

$$\dot{p}_t - p_\rho \Delta \dot{p} = -p_\rho \nabla \cdot \dot{\vec{f}} + \frac{1}{\rho} p_s s_z (\dot{p}_z + g \dot{\rho} - \dot{f}_3) + g p_\rho \dot{p}_z. \quad (3.18)$$

Στην ωκεάνια ακουστική, όλοι οι όροι στο δεξί μέλος της (3.18) εκτός από τον πρώτο όρο είναι συνήθως αμελητέοι συγκρινόμενοι με τους άλλους όρους. Όταν αυτό συμβαίνει η (3.18) μπορεί να αντικατασταθεί από την κυματική εξίσωση για το  $\dot{p}$ .

$$\Delta \dot{p} - \frac{1}{c^2} \dot{p}_{tt} = \nabla \cdot \vec{f} \quad (3.19)$$

Όπου  $c^2 = p_\rho$  είναι η ταχύτητα του ήχου, η οποία εξαρτάται μόνο από την  $z$  συνιστώσα επειδή η βασική κατάσταση εξαρτάται μόνο από το  $z$ .

Στη συνοριακή συνθήκη (3.13) ο όρος  $\dot{\eta} p_z$  είναι ίσος με  $-\rho g \dot{\eta}$  από την σχέση (3.8) και ο όρος αυτός είναι συνήθως αμελητέος συγκρινόμενος με το  $\dot{p}$ . Τότε η (3.13) γίνεται:

$$\dot{p} = 0, \quad \text{στο } z = 0. \quad (3.20)$$

Τέλος διαφορίζουμε την συνοριακή συνθήκη του πυθμένα (3.15) ως προς  $t$  και χρησιμοποιούμε την (3.9) για να απαλείψουμε το  $\dot{u}_t$ . Όπως πριν υποθέτουμε ότι ο όρος  $\frac{1}{\rho^2} \dot{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} \dot{\rho} \vec{g}$  είναι αμελητέος και επίσης  $\vec{f} = 0$  στον πυθμένα. Τότε η (3.17) παράγει την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{p}_z + \dot{p}_x h_x + \dot{p}_y h_y = 0, \quad \text{στο } z = -h(x, y). \quad (3.21)$$

Η κυματική εξίσωση (3.19), μαζί με τις δύο συνοριακές συνθήκες (3.20) και (3.21), συν τον προσδιορισμό των αρχικών τιμών των  $\dot{p}$  και  $\dot{p}_t$ , συνιστούν ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για το  $\dot{p}(\vec{x}, t)$ . Μόλις το  $\dot{p}$  βρεθεί οι άλλες ακουστικές ποσότητες μπορούν να βρεθούν από τις (3.9) – (3.11) και (3.14), με την προϋπόθεση ότι οι αρχικές τιμές είναι γνωστές. Για να βρεθεί το  $\dot{p}$  είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε την ταχύτητα του ήχου  $c(z)$ , το βάθος του πυθμένα  $h(x, y)$  την κατανομή  $\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}, t)$  και επιπρόσθετα τις αρχικές τιμές του  $\dot{p}$  και  $\dot{p}_t$ . Θα υποθέσουμε ότι αυτές οι ποσότητες είναι γνωστές και θα θεωρήσουμε τις μεθόδους επίλυσης του προβλήματος για το  $\dot{p}$ .

### 3.3 Χρονικά Αρμονικά Κύματα

Τα πιο σημαντικά ακουστικά πεδία είναι τα χρονικά αρμονικά στα οποία το  $\dot{p}$  είναι της μορφής:

$$\dot{p}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} p(\vec{x}). \quad (3.22)$$

Από εδώ και στο εξής είναι κατανοητό ότι το  $\dot{p}$  ή όποια άλλη πραγματική ποσότητα είναι το πραγματικό μέρος μιας μιγαδικής έκφρασης, όπως αυτό της σχέσης (3.22). Το μιγαδικό πλάτος της πίεσης  $p(\vec{x})$  θα αναφέρεται σαν πίεση για συντομία. Δεν θα πρέπει να συγχέεται με την πίεση της παραγράφου 3.2, η οποία δηλώνεται με το ίδιο γράμμα, αλλά δεν θα εμφανιστεί ξανά. Στην περίπτωση που η (3.22) ικανοποιεί την (3.19), το  $\nabla \cdot \vec{f}$  πρέπει να είναι στη μορφή:

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} q(\vec{x}). \quad (3.23)$$

Όταν η (3.22) και η (3.23) ισχύουν, τότε η (3.19) – (3.21) γίνονται:

$$\Delta p + k^2 n^2(z)p = q(\vec{x}), \quad (3.24)$$

$$p = 0 \quad \text{στο} \quad z = 0, \quad (3.25)$$

$$p_z + p_x h_x + p_y h_y = 0, \quad \text{στο} \quad z = -h(x, y). \quad (3.26)$$

Στη (3.24) έχουμε εισάγει τον κυματάρημο  $k = \omega/c_0$  και το δείκτη διάθλασης  $n = c_0/c(z)$ , όπου το  $c_0$  είναι μία τυπική τιμή της ταχύτητας του ήχου. Η εξίσωση (3.24) είναι η εξίσωση Helmholtz.

Το πρόβλημα των συνοριακών τιμών (3.24) – (3.26) δεν καθορίζει το  $p$  μοναδικά. Αυτό συμβαίνει επειδή το ομογενές πρόβλημα, που λαμβάνεται θέτοντας  $q(\vec{x})=0$ , έχει και λύσεις οι οποίες αντιπροσωπεύουν κύματα που έρχονται από το άπειρο. Επομένως κάποια επιπρόσθετη συνθήκη πρέπει να επιβληθεί ώστε να εξαλείψουμε αυτά τα κύματα και να καθορίσουμε μία μοναδική λύση. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί μέθοδοι για να γίνει αυτό.

Η πρώτη και η πιο φυσικά ελκυστική, είναι να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών με την πηγή να δίνεται από τη σχέση (3.23) και με  $\dot{p} = \dot{p}_t = 0$  για  $t = 0$ . Το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση  $\dot{p}(\vec{x}, t)$ , η οποία αναμένουμε να προσεγγίζει τη μορφή (3.22) καθώς το  $t \rightarrow \infty$ . Επομένως ορίζουμε το  $p(\vec{x})$  από τη σχέση:

$$p(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{i\omega t} \dot{p}(\vec{x}, t). \quad (3.27)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό το όριο υπάρχει και ικανοποιεί τις (3.24) – (3.26).

Η δεύτερη μέθοδος είναι να αντικαταστήσουμε το  $k$  με μια μιγαδική ποσότητα

$$k = \frac{\omega}{c_0} + ia, \quad \alpha > 0. \quad (3.28)$$

Η θετική σταθερά  $\alpha$  αντιπροσωπεύει την απορρόφηση και επομένως η επιθυμητή λύση των (3.24) – (3.26) θα φθίνει στο μηδέν σε άπειρη απόσταση από την πηγή. Ένα εισερχόμενο κύμα περαιτέρω θα είναι απείρως μεγάλο στο άπειρο στην κατεύθυνση από την οποία έρχεται. Επομένως η απαίτηση η λύση να φράσσεται στο άπειρο πρέπει να εξαφανίζει τα εισερχόμενα κύματα και να διαλέγει μία μοναδική λύση  $p(\vec{x}, a)$  η οποία εξαρτάται από το  $a$ . Έτσι καθώς το  $a$  τείνει στο μηδέν η λύση πρέπει να τείνει σε ένα όριο. Επομένως ορίζουμε τη λύση από τη σχέση:

$$p(\vec{x}) = \lim_{a \rightarrow 0} p(\vec{x}, a). \quad (3.29)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το  $p(\vec{x}, a)$  είναι μοναδικό και ότι το όριο αυτό υπάρχει και ικανοποιεί τις σχέσεις (3.24) – (3.26) με  $a = 0$ . Περαιτέρω είναι η ίδια λύση που δίνεται από την (3.27).

Η τρίτη μέθοδος πραγματεύεται απευθείας τις (3.24) – (3.26) κρατώντας τον κυματάρημο  $k$  πραγματικό. Πρέπει να επιβληθεί μια συνθήκη ακτινοβολίας η οποία να εξαλείφει τα εισερχόμενα κύματα και επομένως να κρατά μια μοναδική λύση. Η ακριβής μορφή της συνθήκης αυτής εξαρτάται από τον αριθμό της διάστασης του χώρου, το σχήμα και το βάθος του χωρίου κτλ. Στην περίπτωση μας εμπλέκει τις κανονικές ιδιομορφές, (normal modes) και τις ιδιοτιμές του προβλήματος, έτσι για να διατυπώσουμε αυτή πρέπει πρώτα να εισάγουμε αυτές τις ποσότητες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέθοδος αυτή επίσης παράγει μία μοναδική λύση  $p(\vec{x})$  η οποία είναι ίδια με αυτή που δίνεται από τις σχέσεις (3.27) και (3.29). Το γεγονός ότι το όριο στην (3.27) παράγει την ίδια λύση με τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας την συνθήκη ακτινοβολίας καλείται αρχή του οριακού πλάτους, (limiting amplitude principle) ενώ το γεγονός ότι η (3.29) παράγει την ίδια λύση καλείται αρχή της οριακής απορρόφησης, (limiting absorption principle). Επομένως κάθε μια από αυτές τις μεθόδους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η επιθυμητή λύση  $p(\vec{x})$ , την οποία θα καλούμε **ακτινοβόλο ή εξερχόμενη λύση**, (radiating or outgoing solution).

Υπάρχει πραγματική απορρόφηση της ταχύτητας του ήχου στον ωκεανό εξαιτίας του ιξώδους, της θερμικής απορρόφησης και της χημικής αντίδρασης, όλους από τους οποίους τους έχουμε αγνοήσει στη σχέση (3.24). Η απορρόφηση αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψη γράφοντας τον κυματάρημο  $k$  στην μορφή (3.28) με το  $a(\omega)$  να είναι μια συνάρτηση της συχνότητας καθοριζόμενη από τη σχέση διασποράς, (dissipative processes). Όταν η απορρόφηση ληφθεί υπόψη η σωστή λύση της  $p(\vec{x})$  λαμβάνεται από την απαίτηση να είναι φραγμένη στο άπειρο. Τότε η συνθήκη ακτινοβολίας δεν είναι απαραίτητη. Περαιτέρω η χρονικά εξαρτώμενη εξίσωση αντίστοιχη με την εξίσωση Helmholtz (3.24) με τον κυματάρημο  $k$  να δίνεται από την σχέση (3.28) δεν είναι η κυματική εξίσωση (3.19) αλλά μία πιο περίπλοκη εξίσωση ή σύστημα εξισώσεων.

Οι χρονικά αρμονικές λύσεις της εξίσωσης (3.22) μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ένα ολοκλήρωμα Fourier για να συνθέσουμε την λύση της (3.19) για μία πηγή με αυθαίρετη χρονική εξάρτηση. Έτσι υποθέτουμε ότι το  $\nabla \cdot \vec{f}$  έχει μία αναπαράσταση Fourier:

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}, t) = \int e^{-i\omega t} q(\vec{x}, \omega) d\omega . \quad (3.30)$$

Αν το  $p(\vec{x}, \omega)$  είναι μία εξερχόμενη λύση των (3.24) – (3.26) με την πηγή  $q(\vec{x}, \omega)$  η λύση των (3.19) – (3.21) είναι:

$$\dot{p}(\vec{x}, t) = \int e^{-i\omega t} p(\vec{x}, \omega) d\omega . \quad (3.31)$$

Περαιτέρω, η λύση για μία αυθαίρετη κατανομή  $q(\vec{x}, \omega)$  μπορεί να ληφθεί από την λύση για μία σημειακή πηγή αντιπροσωπευόμενη από μία συνάρτηση δέλτα. Επομένως θα θεωρήσουμε στη λύση της (3.24) το  $q(\vec{x}) = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ .

### 3.4 Ο Ομογενής Ωκεανός Σταθερού Βάθους

Το απλούστερο προφίλ της ταχύτητας του ήχου είναι το  $c(z) = c_0$ , όπου  $c_0$  είναι μία σταθερά. Στην περίπτωση αυτή  $n(z) = c_0/c(z) = 1$  και για μία σημειακή πηγή γίνεται:

$$\Delta p + k^2 p = -\delta(z - z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r} . \quad (3.32)$$

Όπου η θέση της πηγής  $\vec{x}_0$  είναι  $r = 0$ ,  $z = z_0$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η συνθήκη στην επιφάνεια είναι η σχέση (3.25):

$$p = 0 \quad \text{στο} \quad z = 0. \quad (3.33)$$

Θα υποθέσουμε ότι το βάθος είναι σταθερό,  $h = \text{const.}$  και έτσι η (3.26) γίνεται:

$$p_z = 0 \quad \text{στο} \quad z = -h. \quad (3.34)$$

Το πρόβλημα (3.32) – (3.34), με μια κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας καθορίζει την πίεση του ήχου εξαιτίας της χρονικής σημειακής αρμονικής πηγής σε έναν ομογενή ωκεανό σταθερού βάθους με μια ελεύθερη επιφάνεια και ένα σκληρό πυθμένα. Επειδή το πρόβλημα είναι ακτινικά συμμετρικό, η λύση  $p(r, z)$  είναι ανεξάρτητη της γωνιακής συντεταγμένης  $\theta$ .

Στη συνέχεια θα λυθεί το πρόβλημα (3.32) – (3.34) με τρεις διαφορετικούς τρόπους από τους οποίους λαμβάνονται τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις για την λύση.



### 3.5 Αναπαράσταση Κανονικών Ιδιομορφών, (Normal Mode Representation)

Η ομογενής μορφή της σχέσης (3.32) μπορεί να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών. Για να χρησιμοποιήσουμε αυτή την μέθοδο αναζητούμε λύσεις της μορφής  $\Phi(z)\Psi(r)$ . Αντικαθιστούμε στην ομογενή εξίσωση της σχέσης (3.32) και με χωρισμό μεταβλητών παίρνουμε:

$$\phi_{zz} + k^2\phi = k^2a^2\phi, \quad (3.35)$$

$$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r = -k^2a^2\psi. \quad (3.36)$$

Έχουμε γράψει τη σταθερά διαχωρισμού σαν  $ka$  για ευκολία. Η γενική λύση των δύο αυτών εξισώσεων είναι:

$$\phi(z) = A \sin[k\sqrt{(1-a^2)}z] + B \cos[k\sqrt{(1-a^2)}z], \quad (3.37)$$

$$\psi(r) = CH_0^{(1)}(kar) + DH_0^{(2)}(kar). \quad (3.38)$$

Όπου τα  $H_0^{(1)}$  και  $H_0^{(2)}$  οι συναρτήσεις Hankel μηδενικής τάξης  $1^{oo}$  και  $2^{oo}$  είδους αντίστοιχα.

Οι συνοριακές συνθήκες (3.33) και (3.34) όταν εφαρμοστούν στην λύση  $\Phi(z)\Psi(r)$ , παράγουν τις δύο εξισώσεις  $\Phi(0) = 0$  και  $\Phi_z(-h) = 0$ . Από την πρώτη συνθήκη παίρνουμε  $B = 0$ . Από τη δεύτερη συνθήκη όπου  $\cos[kh(1-a^2)^{1/2}] = 0$  παίρνουμε τις λύσεις  $a = a_n$  όπου:

$$a_n = \left[ 1 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4k^2 h^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Επομένως υπάρχουν άπειρες στο πλήθος λύσεις της μορφής (3.37) ικανοποιώντας την (3.33) και (3.34), την οποία θα γράφουμε  $\Phi_n(z)$  όπου:

$$\phi_n(z) = A_n \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

Όπου το  $A_n$  δεν έχει προσδιοριστεί ακόμη.

Για να καθορίσουμε μία από τις σταθερές της σχέσης (3.38) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη ακτινοβολίας. Η κατάλληλη μορφή της συνθήκης αυτής ώστε να διαλέξουμε ένα εξερχόμενο κύμα είναι:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r}(\psi_r - ika\psi) = 0. \quad (3.41)$$

Όταν η (3.38) αντικατασταθεί στην (3.41), παίρνουμε  $D = 0$ . Έτσι η εξερχόμενη λύση είναι ένα πολλαπλάσιο του  $H_0^{(1)}(kar)$ . Εφόσον η λύση  $\Phi_n\Psi$  περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά  $A_n$ , μπορούμε να θέσουμε  $C = 1$  χωρίς βλάβη της γενικότητας. Έτσι η παραγόμενη λύση η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και την συνθήκη ακτινοβολίας είναι  $A_n \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z]H_0^{(1)}(ka_n r)$ .

Κάθε μία από αυτές τις λύσεις καλείται **κανονική ιδιομορφή**, (normal mode), ή απλά ιδιομορφή, (mode) εν συντομία. Θεωρείται ότι έχουμε διάδοση όταν το  $a_n$  είναι θετικός πραγματικός ενώ δεν υπάρχει διάδοση, όταν το  $a_n$  είναι θετικός μιγαδικός, επειδή το  $H_0^{(1)}(ka_n r)$  φθίνει εκθετικά καθώς αυξάνει το  $r$ . Από την (3.39) φαίνεται ότι υπάρχουν μόνο  $M+1$  διαδιδόμενες ιδιομορφές, (propagating modes), όπου το  $M$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος από το  $\left(\frac{1}{\pi}kh - \frac{1}{2}\right)$  και άπειρες αποσβενύμενες ιδιομορφές, (evanescent modes).

Τώρα για να βρούμε το  $p$ , το αναπαριστούμε σαν άθροισμα των ιδιομορφών.

$$p(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z]H_0^{(1)}(ka_n r). \quad (3.42)$$

Αντικαθιστούμε την (3.42) στην (3.32), χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2 a_n^2\right)H_0^{(1)}(ka_n r) = \frac{4i\delta(r)}{2\pi r}. \quad (3.43)$$

Τότε η (3.32) γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z] = \frac{i}{4}\delta(z - z_0). \quad (3.44)$$

Για να βρούμε το  $A_n$  πολλαπλασιάζουμε την (3.44) με  $\sin[k\sqrt{(1-a_m^2)}z]$  και ολοκληρώνουμε από  $z = -h$  έως  $h = 0$ . Τότε λόγω ορθογωνιότητας λαμβάνουμε:

$$A_n = \frac{i}{2h} \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z_0]. \quad (3.45)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.45) στην (3.42) τελικά λαμβάνουμε την αναπαράσταση κανονικών ιδιομορφών της πίεσης  $p$ , η οποία είναι:

$$p(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2h} \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z_0] \sin[k\sqrt{(1-a_n^2)}z] H_0^{(1)}(ka_n r). \quad (3.46)$$

Η πίεση  $p$  μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την (3.46), ειδικά όταν το  $kr$  είναι μεγάλο. Στην περίπτωση αυτή οι αποσβενύμενες ιδιομορφές είναι αμελητέες και μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός διαδιδόμενων ιδιομορφών πρέπει να

χρησιμοποιηθεί. Επίσης από την (3.46) βλέπουμε ότι το  $p$  είναι συμμετρικό ως προς το  $z$  και  $z_0$ .

### 3.6 Αναπαράσταση Μετασχηματισμού Hankel, (Hankel Transform Representation)

Τώρα θα λύσουμε το πρόβλημα για την πίεση  $p$  με έναν διαφορετικό τρόπο λαμβάνοντας μια διαφορετική αναπαράσταση της λύσης. Ξεκινάμε από τον ορισμό του Hankel μετασχηματισμού  $\tilde{f}(s)$  μιας συνάρτησης  $f(r)$ .

$$\tilde{f}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(sr) f(r) r dr. \quad (3.47)$$

Όπου  $J_0$  είναι η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Hankel είναι:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(sr) \tilde{f}(s) s ds. \quad (3.48)$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε τις (3.32) – (3.34) με  $2\pi J_0(kar)r$  και ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη από  $r = 0$  έως  $r = +\infty$ . Για να γίνει αυτό γράφουμε  $p_{,rr} + \frac{1}{r} p_r = \frac{1}{r} (rp_r)_{,r}$  στην (3.32) και παίρνουμε το μετασχηματισμό του  $p(r, z)$  από το  $\tilde{p}(r, z)$ . Τότε λαμβάνουμε:

$$2\pi \int_0^{\infty} J_0(kar) (rp_r)_{,r} dr + \tilde{p}_{,zz}(ka, z) + k^2 \tilde{p}(ka, z) = -\delta(z - z_0), \quad (3.49)$$

$$\tilde{p}(ka, 0) = 0, \quad (3.50)$$

$$\tilde{p}_z(ka, -h) = 0. \quad (3.51)$$

Για να λύσουμε τις (3.49) – (3.51) απαιτούμε το  $p$  να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας (3.41) και διαλέγουμε το  $a$  ώστε να έχουμε ένα μικρό αρνητικό φανταστικό μέρος. Τότε το ολοκλήρωμα αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με  $-k^2 a^2 \tilde{p}(ka, z)$ . Επομένως η (3.49) γίνεται:

$$\tilde{p}_{,zz} + k^2(1 - a^2) \tilde{p} = -\delta(z - z_0). \quad (3.52)$$

Για να λύσουμε τις (3.50) – (3.52) για το  $\tilde{p}(ka, z)$  εισάγουμε δύο λύσεις της ομογενούς εξίσωσης της σχέσης (3.52). Η μία από αυτές η  $\tilde{p}_1$  απαιτείται να

ικανοποιεί την (3.50) και η άλλη η  $\tilde{p}_2$  να ικανοποιεί την (3.51). Επομένως μπορούμε να γράψουμε το  $\tilde{p}$  στην μορφή:

$$\tilde{p}(ka, z) = \tilde{p}_1(ka, z_>) \tilde{p}_2(ka, z_<) / W(ka). \quad (3.53)$$

Όπου  $z_> = \max(z, z_0)$ ,  $z_< = \min(z, z_0)$  και  $W(ka)$  η βρονσκιανή των  $\tilde{p}_1$  και  $\tilde{p}_2$ . Βρίσκουμε εύκολα  $\tilde{p}_1 = \sin[k\sqrt{(1-a^2)}z]$ ,  $\tilde{p}_2 = \cos[k\sqrt{(1-a^2)}(z+h)]$  και  $W(ka) = -k\sqrt{(1-a^2)} \cos[kh\sqrt{(1-a^2)}]$ .

Τελικά για να λάβουμε την  $p(r, z)$  αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές των  $\tilde{p}_1$ ,  $\tilde{p}_2$  και  $W$  στην (3.53) και χρησιμοποιούμε την (3.48). Έτσι λαμβάνουμε τελικά:

$$p(r, z) = -\frac{k}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kar) \frac{\sin[k\sqrt{(1-a^2)}z_>] \cos[k\sqrt{(1-a^2)}(z_<+h)]}{\sqrt{(1-a^2)} \cos[kh\sqrt{(1-a^2)}]} a da. \quad (3.54)$$

Αυτός είναι ο Hankel μετασχηματισμός αναπαράστασης για την  $p$ , από τον οποίο η  $p$  μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση.

### 3.7 Αναπαράσταση Ακτίνων και Μέθοδος Ειδώλων, (Ray Representation and Image Method)

Μια πολύ διαφωτιστική έκφραση για το  $p(r, z)$  είναι η αναπαράσταση ακτίνων. Για να λάβουμε την έκφραση αυτή γράφουμε την σχέση (3.32) στον τρισδιάστατο χώρο αγνοώντας τις συνοριακές συνθήκες (3.33) και (3.34). Η γενική σφαιρική

συμμετρική λύση της (3.32) είναι  $p_0(R) = \frac{Ae^{ikR}}{R} + \frac{Be^{-ikR}}{R}$  όπου  $A+B = 1/4\pi$  και

$R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$  που δηλώνει την απόσταση από την πηγή. Για να απαλείψουμε το εισερχόμενο κύμα  $\frac{Be^{-ikR}}{R}$  επιβάλλουμε την συνθήκη ακτινοβολίας:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R[p_0'(R) - ikp_0(R)] = 0. \quad (3.55)$$

Η συνθήκη παράγει  $B = 0$  και επομένως η εξερχόμενη σφαιρική συμμετρική λύση της (3.32) σε όλο το χώρο είναι:

$$p_0(R) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}. \quad (3.56)$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον εκθέτη στην (3.56) σαν το  $ik$  πολλαπλασιασμένο από την συνάρτηση φάσης  $R$ . Η φάση αυτή είναι ίση με μηδέν στην πηγή και αυξάνει με την απόσταση κατά μήκος μια ευθείας γραμμής από την πηγή στο σημείο του πεδίου. Καλούμε αυτήν την ευθεία γραμμή **ακτίνα**. Ο παράγοντας  $1/R$ , ο οποίος πολλαπλασιάζει τον εκθετικό παράγοντα, καλείται **πλάτος**. Ελαττώνεται αντίστροφα με το τετράγωνο της εγκάρσιας τομής, (cross-sectional), της περιοχής ενός σωλήνα ακτίνων, ενώ η περιοχή αυτή αυξάνει με το  $R^2$ . Σαν συνέπεια αυτό που προκύπτει από το τετράγωνο του πλάτους πολλαπλασιασμένο με την εγκάρσια τομή μιας περιοχής ενός σωλήνα ακτίνων είναι να παραμένει σταθερό κατά μήκος μιας ακτίνας. Η σταθερότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ότι η ενέργεια διατηρείται μέσα σε ένα σωλήνα ακτίνων. Αυτοί οι δύο παράγοντες σχετικά με τα σφαιρικά κύματα – γραμμική αύξηση της φάσης κατά μήκος μιας ακτίνας και η διατήρηση της ενέργειας μιας ακτίνας σε ένα σωλήνα – μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή της αναπαράστασης των ακτίνων άλλων κυμάτων.

Χρησιμοποιούμε τις υποθέσεις αυτές για να λύσουμε το πρόβλημα (3.32) – (3.34). Ξεκινάμε με το σφαιρικό κύμα  $p_0(R)$  που δίνεται από την (3.56) και η οποία ικανοποιεί την (3.32) αλλά όχι τις συνοριακές συνθήκες. Όταν οι ακτίνες που σχετίζονται με το  $p_0$  χτυπήσουν την ελεύθερη επιφάνεια  $z = 0$ , παράγονται ανακλώμενες ακτίνες που καθορίζονται από τον νόμο της ανάκλασης. Η φάση και το πλάτος κάθε μιας ανακλώμενης ακτίνας μπορεί να βρεθεί από τις προηγούμενες υποθέσεις, ξεκινώντας με τις τιμές της φάσης και του πλάτους της προσπίπτουσας ακτίνας στο σημείο της ανάκλασης. Επιπρόσθετα το ανακλώμενο πλάτος πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το συντελεστή ανάκλασης που είναι ίσος με  $-1$  έτσι ώστε το άθροισμα των προσπιπτόντων και ανακλώμενων κυμάτων να ικανοποιούν την συνθήκη  $p = 0$  στο  $z = 0$ . Επομένως όλες οι ανακλώμενες ακτίνες φαίνονται να προέρχονται από την εικόνα, (είδωλο) της πηγής στο  $r = 0, z = -z_0$ . Αυτή η κατασκευή οδηγεί σε ένα ανακλώμενο κύμα το οποίο είναι σφαιρικό και έχει τη μορφή  $-e^{ikR'}/4\pi R'$ . Όπου το  $R'$  είναι η απόσταση από το είδωλο της πηγής. (σχήμα 3.3).

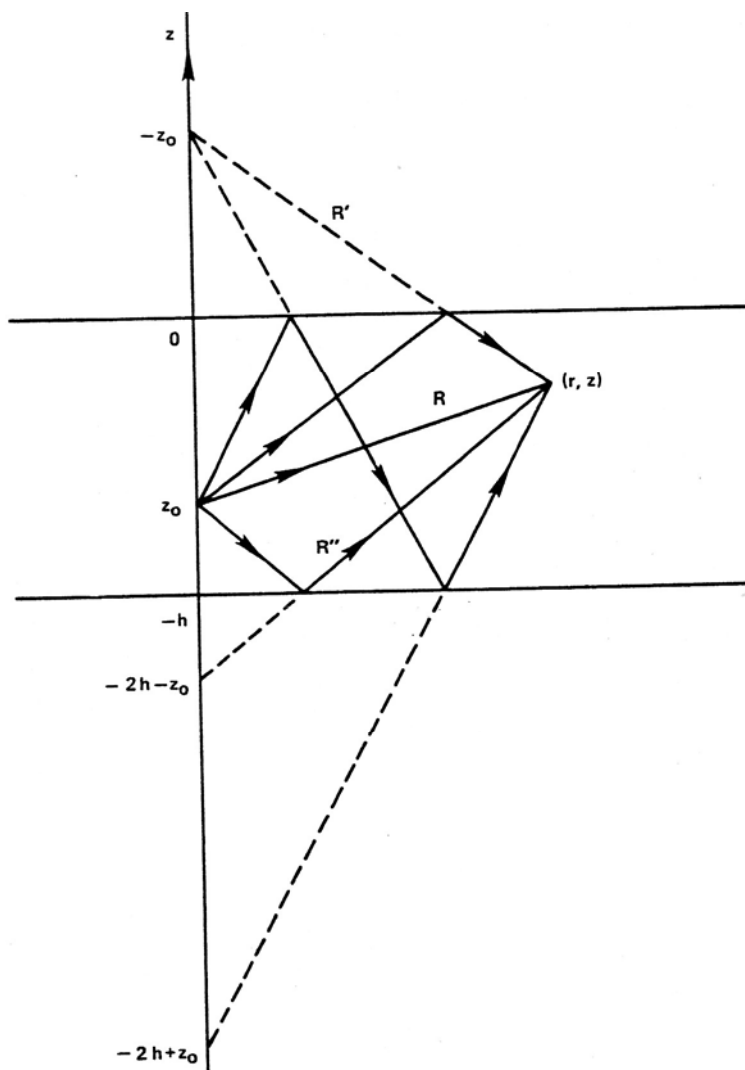
Παρόμοια κατασκευή εφαρμόζεται στις ακτίνες που ανακλώνται από τον πυθμένα. Ωστόσο ο συντελεστής ανάκλασης για την ανάκλαση του πυθμένα είναι  $+1$  επειδή τα προσπίπτοντα και ανακλώμενα κύματα πρέπει να συνδυαστούν για να ικανοποιούν  $p_z=0$  στο  $z = -h$ . Περαιτέρω η πηγή είδωλο βρίσκεται στη θέση  $z = -z_0 - 2h$ . Επομένως το ανακλώμενο κύμα από τον πυθμένα θα είναι  $-e^{ikR''}/4\pi R''$ , όπου το  $R''$  είναι η απόσταση της εικόνας της πηγής στον πυθμένα.

Πολλαπλή ανάκλαση της αρχικής ανακλώμενης ακτίνας δίνει σαν αποτέλεσμα μία άπειρη ακολουθία οικογενειών ακτίνων, η κάθε μία από αυτές φαίνεται να προέρχεται από ένα σημείο εικόνας, (είδωλο). Αυτά τα σημεία είναι στις θέσεις  $z = \pm z_0 + 2nh, n = 0, \pm 1, \dots$ . Κρατώντας τα ίχνη του αριθμού των ανακλάσεων από την κορυφή και τον πυθμένα βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για το ολικό πεδίο  $p$ , το οποίο είναι ένα άθροισμα των προσπιπτόντων κυμάτων συν τα μεμονωμένα και πολλαπλά ανακλώμενα κύματα.

$$p(r, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{e^{ik\sqrt{r^2+(z-z_0-2nh)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-z_0-2nh)^2}} - \frac{e^{ik\sqrt{r^2+(z+z_0-2nh)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+z_0-2nh)^2}} \right\}. \quad (3.57)$$

Αυτή είναι η αναπαράσταση καλείται αναπαράσταση ακτίνων της λύσης  $p$ .

Το αποτέλεσμα (3.57) μπορεί να προέλθει απευθείας θεωρώντας τη συμβολή των εικόνων της σημειακής πηγής στις επιφάνειες στην κορυφή και τον πυθμένα, χωρίς να θεωρήσουμε τις ακτίνες. Η μέθοδος αυτή, η οποία περιορίζεται σε επίπεδα σύνορα και ομογενή μέσα, καλείται **μέθοδος ειδώλων**. Η σχέση (3.57) αναφέρεται και σαν πολλαπλή αναπαράσταση ανάκλασης της  $p$ , επειδή κάθε όρος εκτός από το  $n = 0$ , αντιπροσωπεύει ένα κύμα το οποίο έχει ανακλαστεί κάποιες φορές από τα σύνορα της κορυφής και του πυθμένα.



**Σχήμα 3.3** Μία σημειακή πηγή που βρίσκεται στη θέση  $z = z_0$  εκπέμπει ακτίνες σε όλες τις διευθύνσεις. Οι τέσσερις ακτίνες που φαίνονται εδώ φτάνουν στο σημείο του πεδίου  $(r, z)$ . Αυτή με μήκος  $R$  είναι η προσπίπτουσα ακτίνα, αυτή με  $R'$  είναι η ανακλώμενη από την ελεύθερη επιφάνεια  $z = 0$  και φαίνεται ότι προέρχεται από μια πηγή που βρίσκεται στη θέση  $z = -z_0$ . Η τρίτη ακτίνα μήκος  $R''$  ανακλάται από την επιφάνεια του πυθμένα  $z = -h$  και φαίνεται ότι προέρχεται από μια πηγή που βρίσκεται στη θέση  $z = -2h - z_0$ . Η τέταρτη ανακλάται πρώτα από την κορυφή και ύστερα από τον πυθμένα και φαίνεται ότι προέρχεται από μια πηγή στη θέση  $z = -2h + z_0$ .

## 4. Ευθύ και Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης σε Κυματοδηγό

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρατεθεί όλη η απαραίτητη θεωρία που διέπει την σκέδαση ακουστικών κυμάτων από μαλακό εμπόδιο σε κυματοδηγό σε ομογενή μέσο διάδοσης στις δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια θα αναφερθεί η απλή δειγματική μέθοδος επίλυσης για το αντίστροφο πρόβλημα του αντίστοιχου προβλήματος.

### 4.1 Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης σε Κυματοδηγό

Ένα μοντέλο κυματοδηγού στις δύο διαστάσεις μπορεί να είναι μία διδιάστατη οριζόντια λωρίδα  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, h) \subset \mathbb{R}^2$  με ένα μαλακό σύνορο στο  $x_2=0$  και ένα σκληρό σύνορο στο  $x_2=h$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό φραγμένο και συνεκτικό εμπόδιο  $D$  με  $D \subset D_R := (-R, R) \times (0, h)$  τέτοιο ώστε το  $D_R \setminus D$  να είναι συνεκτικό. Έστω  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$  ο κυματάριθος. Το προσπίπτον πεδίο συμβολίζεται με  $u^i$  το σκεδαζόμενο με  $u^s$  και το ολικό με  $u$ . Τότε το ολικό πεδίο ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad \text{για } x = (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \bar{D}, \quad (4.1)$$

$$u = 0 \text{ στο } x_2=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \text{ στο } x_2 = h \quad (4.2)$$

$$u = 0, \text{ στο } \partial D \Rightarrow u^s = -u^i \text{ στο } \partial D. \quad (4.3)$$

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις θεωρούμε ότι στο σύνορο του σκεδαστή ικανοποιείται σχέση τύπου Dirichlet, δηλ. το ολικό πεδίο  $u$  είναι μηδέν στο σύνορο.

Θα μπορούσαμε να έχουμε συνθήκη τύπου Neumann, δηλ.  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , ή μία σχέση

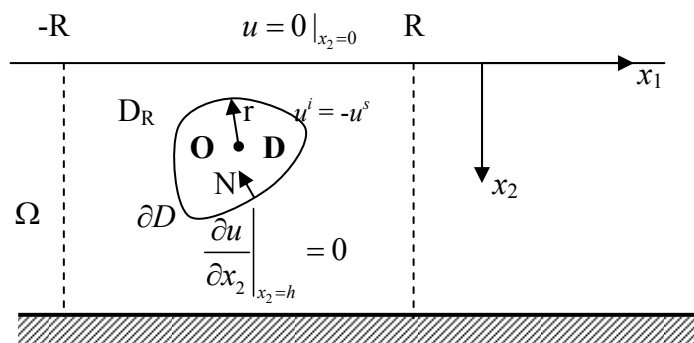
τύπου Robin δηλ.  $\frac{\partial u}{\partial n} + i\lambda u = 0$  ή μια σχέση διαπερατότητας.

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στο να προσδιοριστεί το σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s$  από τη γνώση του προσπίπτοντος πεδίου. Το σκεδαζόμενο πεδίο ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$\Delta u^s(x) + k^2 u^s(x) = 0, \quad \text{στο } D_R \setminus \bar{D} \quad (4.4)$$

$$u^s = 0 \text{ στο } x_2=0, \quad \frac{\partial u^s}{\partial x_2} = 0, \text{ στο } x_2 = h, \quad (4.5)$$

$$u^s = -u^i \text{ στο } \partial D. \quad (4.6)$$



**Σχήμα 4.1** Κυματοδηγός με επίπεδα σύνορα και τις αντίστοιχες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα καθώς επίσης και στο σκεδαστή D.

Αποδεικνύεται ότι το σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s$  έχει την παρακάτω μορφή:

$$u^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\pm} \sin(a_n x_2) e^{i\beta_n |x_1|}, \quad |x_1| \geq R. \quad (4.7)$$

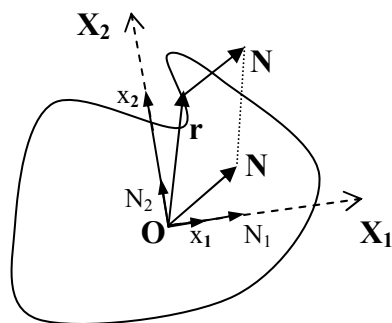
Όπου, έχουμε θέσει  $a_n = (2n - 1)\pi/(2h)$  και  $\beta_n = \sqrt{k^2 - a_n^2}$  με το υπόριζο κομμάτι να είναι τέτοιο ώστε  $\Re\beta_n \geq 0$  και  $\Im m\beta_n \geq 0$ . Η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα καθώς και όλες οι παράγωγοι αυτής σε συμπαγή σύνολα του  $(R, \infty) \times (0, h)$  με συντελεστές  $u_n^+$  και του  $(-\infty, -R) \times (0, h)$  με συντελεστές  $u_n^-$ .

Η **μοναδικότητα** στην περίπτωση που μελετάμε εξασφαλίζεται αν ικανοποιούνται οι παρακάτω περιορισμοί:

- το  $k \neq a_n, n = 1, 2, \dots$
- η λύση του προβλήματος πρέπει να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο  $D_R \setminus D$
- η γεωμετρική συνθήκη που πρέπει να επιβληθεί στο D, πρέπει να είναι τέτοια ώστε να υπάρχει ένα σημείο O μέσα στο D το οποίο να μπορεί να θεωρηθεί σαν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων και για κάθε σημείο  $\vec{r} = (x_1, x_2) \in \partial D$  να ισχύει  $x_2 N_2 \leq 0$ , όπου  $\vec{N} = (N_1, N_2)$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατευθυνόμενο στο εσωτερικό του



D. Στο σχήμα 4.2 φαίνεται ένα παράδειγμα γεωμετρίας σκεδαστή όπου δεν ισχύει η μοναδικότητα σύμφωνα με τα παραπάνω.



**Σχήμα 4.2** Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα το γινόμενο  $x_2 N_2 \geq 0$ , που σημαίνει πως η μοναδικότητα της λύσης για το εμπόδιο αυτό δεν εξασφαλίζεται. Γενικά σε χωρία της παραπάνω μορφής δηλ. χωρία που περιέχουν “πτυχώσεις” δεν ισχύει η μοναδικότητα της λύσης.

## 4.2 Το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης σε Κυματοδηγό

Το αντίστροφο πρόβλημα όπως έχει ειπωθεί συνίσταται στον προσδιορισμό της γεωμετρίας του σκεδαστή, (σχήμα) ή και στις φυσικές ιδιότητές του από τη γνώση του πλάτους σκέδασης στο άπειρο. Στην παρούσα εργασία θα γίνει προσπάθεια εύρεσης του σχήματος του σκεδαστή όχι από το μακρινό πεδίο σκέδασης αλλά από το **κοντινό πεδίο σκέδασης**, (near field) σε απόσταση όχι άπειρη από το σκεδαστή. Έχει αποδειχθεί σε προβλήματα αντίστροφης σκέδασης από περιοδικές κατασκευές ότι η γνώση του μακρινού πεδίου για όλες τις γωνίες του προσπίπτοντος πεδίου δεν είναι επαρκής για να καθοριστεί κατά μοναδικό τρόπο το εμπόδιο, [T. Arens et A. Kirsch]. Επομένως είναι αναγκαίο στις περιπτώσεις αυτές να χρησιμοποιηθεί το κοντινό πεδίο αντί του μακρινού για να ανακατασκευαστεί το σύνορο επιτυχώς. Για το λόγο αυτό κρίνεται καλύτερο να γίνει χρήση του κοντινού πεδίου σκέδασης.

Για την λύση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης θα χρειαστούμε την λύση της εξίσωσης Green στον κυματοδηγό χωρίς την παρουσία του εμποδίου. Σύμφωνα και με το κεφάλαιο 3 έχουμε:

$$G(x, y) = \frac{i}{2\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \sin(a_n x_2) \sin(a_n y_2) e^{i\beta_n |x_1 - y_1|}, \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y. \quad (4.8)$$

Όπου  $a_n = (2n - 1)\pi/(2h)$  και  $\beta_n = \sqrt{k^2 - a_n^2}$

Έστω  $\Gamma = (\{-R\} \times (0, h)) \cup (\{R\} \times (0, h))$  να δηλώνει τα κατακόρυφα μέρη  $|x_1| = R$ , μεταξύ  $x_2 = 0$  και  $x_2 = h$  όπου βρίσκονται οι δέκτες από όπου λαμβάνουμε το κοντινό πεδίο σκέδασης, (near field scattering) καθώς και οι πηγές που το παράγουν.

Για αριθμητική και αναλυτική θεώρηση μία ισοδύναμη και πιο βολική αναπαράσταση της συνάρτησης Green στο  $\Omega$  μπορεί να ληφθεί με τη μέθοδο των ειδώλων από όπου λαμβάνουμε:

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left\{ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y_n|) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y'_n|) \right\} \quad (4.9)$$

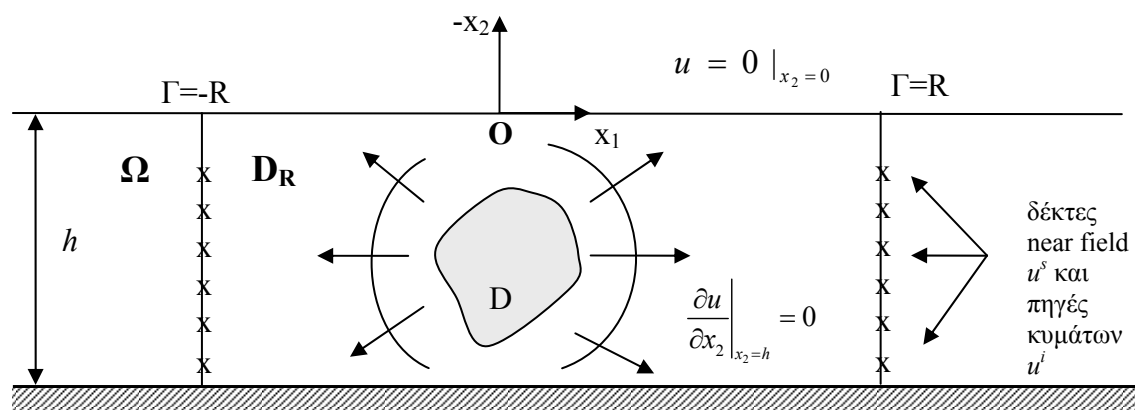
Όπου

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad y' = (y_1, -y_2) \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} y_n = (y_1, y_2) + (0, 1)2nh \\ y'_n = (y_1, -y_2) + (0, 1)2nh \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Το προσπίπτον πεδίο ικανοποιεί  $u^i(x) = G(x, y)$  για τις πηγές που βρίσκονται στο  $\Gamma$ . Το σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s$  εξαρτάται από το  $y$  (θέση πηγής) και γράφουμε  $u^s = u^s(\cdot, y)$ .

Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό του σχήματος του εμποδίου  $D$  από το πεδίο  $u^s(x, y)$  για όλα τα  $x, y \in \Gamma$ . Συλλέγουμε τα δεδομένα με τον τελεστή κοντινού πεδίου, (near field operator)  $N : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ .



**Σχήμα 4.3** Γεωμετρική αναπαράσταση σκεδαστή και κυματοδηγού καθώς επίσης και των θέσεων των πηγών των ακουστικών κυμάτων και των δεκτών του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s(x, y)$ .

Στο πρόβλημα θεωρούμε ότι οι πηγές των ακουστικών κυμάτων και οι δέκτες του σκεδαζόμενου πεδίου βρίσκονται στις ίδιες θέσεις της ευθείας  $\Gamma$  όπως ορίζεται πιο πάνω.

### 4.3 Η Απλή Δειγματική Μέθοδος του Αντιστρόφου Προβλήματος Σκέδασης

Έστω  $D$  ο σκεδαστής και  $D_R$  το χωρίο που ορίζεται ως  $D_R := (-R, R) \times (0, h)$ .

Στο σύνορο του σκεδαστή  $\partial D$  ικανοποιείται  $u = 0 \Rightarrow u^i + u^s = 0 \Rightarrow u^i = -u^s$ .

Σκοπός της μεθόδου που θα ακολουθήσουμε είναι για γνωστό  $u^s(x, y)$  να βρεθεί το σύνορο του άγνωστου εμποδίου  $D$ . Στο σύνορο  $\Gamma$  η κάθε πηγή αντιπροσωπεύεται από μία συνάρτηση Green  $G(\bullet, y)$ . Στις θέσεις παρατήρησης  $x_i$  επάγονται σκεδαζόμενα πεδία  $u^s(x_{FIX}, y_i)$  αντίστοιχα των πηγών  $y_i$ . Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα σκεδαζόμενων πεδίων παράγει πάλι σκεδαζόμενο πεδίο. Αν υποθέσουμε την επαλληλία των προσπιπτόντων πεδίων των πηγών στο σύνορο  $\Gamma$  τότε υπάρχει ένα αντίστοιχο σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s(x)$ . Δηλαδή αν:

$$u^i(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)g(y)dsy \quad (4.12)$$

$\Rightarrow$

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} u^s(x, y)g(y)dsy \quad , \quad y \in \Gamma \quad (4.13)$$

Υποθέτουμε ότι το πεδίο  $u^s(x)$  προσομοιάζει μια σημειακή πηγή που αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση  $G(\bullet, y_0)$ ,  $y_0 \in \Omega$ . Η πηγή αυτή που αντιστοιχεί στο  $u^s(x)$  είναι φανταστική, η συμπεριφορά όμως του πεδίου στο σύνορο του σκεδαστή προσομοιάζεται από σημειακή πηγή.

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω για κάποιο σταθερό σημείο  $y_0 \in \Omega$  αναζητούμε:

$$\int_{\Gamma} u^s(x, y)g(y, y_0)ds(y) \simeq G(x, y_0) \quad , \quad y \in \Gamma \quad (4.14)$$

Για δεδομένα  $u^s(x, y)$  και  $G(x, y_0)$  σκοπός είναι να βρεθεί μια συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε  $g = g(y, y_0) \in L^2(\Gamma)$  να αποτελεί λύση της εξίσωσης (4.14). Στη συνέχεια βρίσκοντας τη συνάρτηση  $g$  το σύνορο του σκεδαστή προσδιορίζεται από εκείνα τα σημεία όπου:

$$\lim_{y_0 \rightarrow \partial D} \left\| g(\cdot; y_0) \right\|_{L^2} \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

Αυτό συμβαίνει γιατί στο σημείο όπου το  $y_0 \rightarrow \partial D$  η συνάρτηση  $G$  απειρίζεται. Στο αριστερό μέλος της σχέσης (4.14) το  $u^s$  είναι πεπερασμένη ποσότητα και επομένως η μόνη ποσότητα που μπορεί να απειρισθεί είναι η συνάρτηση  $g$ .

Δηλαδή υπάρχει  $\varepsilon$  τέτοιο ώστε:

$$\left\| \int_{\Gamma} u^s(x; y) g(y; y_0) ds y - G(x; y_0) \right\| < \varepsilon \quad (4.16)$$

Στην πραγματικότητα η τιμή που βρίσκουμε είναι πολύ μεγάλη. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.4)–(4.6).

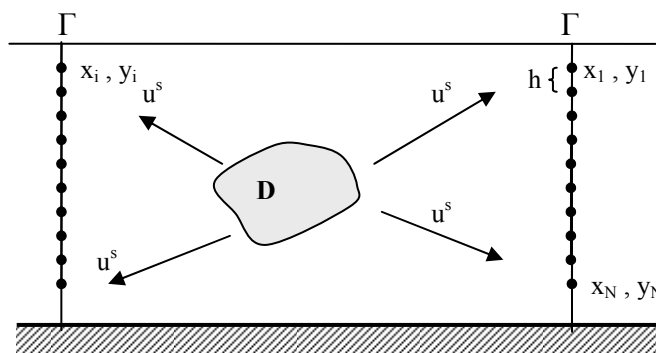
Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος τα δεδομένα  $u^s(x_i; y_j)$  δίνονται σαν ζεύγη  $(x_i; y_j)$  που ανήκουν σε ένα πίνακα  $\Gamma_N \times \Gamma_N$ , όπου  $N$  ο αριθμός των θέσεων παρατήρησης και των δεκτών που βρίσκονται στο  $\Gamma$ . Για μία θέση παρατήρησης  $x_{Fix}$  θα υπάρχουν δεδομένα  $u^s$  από όλες τις πηγές  $y_j$ , δηλ. θα ανήκουν σε ένα πίνακα  $(1 \times N)$ .

$\Gamma_N = \{x_n \in \Gamma | n = 1, 2, \dots, N\}$  για κάθε θετικό ακέραιο  $N$ .

Έστω  $g(y_j; y_0) = g_j = g(y_j)$  και  $f_i = G(x_i; y_0)$

Επίσης ορίζουμε το  $U = (U_{ij})_{N \times N}$  με  $U_{ij} = u^s(x_i; y_j) \cdot h$

Όπου  $h$  η διαμέριση :  $h = \frac{(x_N - x_1)}{N}$ ,  $1 \leq i \leq N$



**Σχήμα 4.4** Σχηματική περιγραφή των θέσεων παρατήρησης και των δεκτών του σκεδαζόμενου πεδίου  $u^s(x_i, y_j)$  στη γραμμή  $\Gamma$ .

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω το ολοκλήρωμα μεταπίπτει σε ένα πεπερασμένο άθροισμα ως εξής:

$$\sum_{j=1}^N u^s(x_i; y_j) g(y_j; y_0) h \approx G(x_i; y_0) \quad (4.17)$$

Επειδή στην παραπάνω παράσταση το  $h$  είναι σταθερό στην αριθμητική επίλυση δεν είναι απαραίτητο να εισέλθει. Συνεπώς η σχέση (4.17) γίνεται:

$$\sum_{j=1}^N u^s(x_i; y_j) g(y_j; y_0) \approx G(x_i; y_0) \quad (4.18)$$

$$\text{Έτσι το } f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T \text{ και } g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T \quad (4.19)$$

Από τη σχέση (4.20) και (4.21) προκύπτει:

$$Ug = f \quad (4.20)$$

Τα  $f$  και  $g$  είναι διανύσματα συναρτήσεις του  $y_0 \in \Omega$ .

Ο πίνακας  $U$  είναι μη καλά τοποθετημένος. Χρησιμοποιώντας την ομαλοποίηση Tikhonov λύνουμε το ομαλοποιημένο σύστημα

$$(aI + U^*U)g = U^*f \quad (4.21)$$

Όπου  $a$  είναι η παράμετρος κανονικοποίησης και  $U^*$  ο συζυγής του  $U$ .

Αφού βρούμε την  $g$  υπολογίζουμε την  $L_2$  norm  $\|g(\cdot; y_0)\|$  για κάθε  $y_0 \in \Omega$  και σχεδιάζουμε τις ισοϋψείς καμπύλες της  $1/\|g\|$ . Η επιλογή αυτή γίνεται για λόγους καθαρά οπτικής έτσι ώστε να προσεγγιστεί το σύνορο του σκεδαστή από το εσωτερικό του και τελικά η ανακατασκευή του να διαφαίνεται καλύτερα. Συνεπώς το σύνορο  $\partial D$  θα προσδιορίζεται από εκείνα τα σημεία στα οποία η ποσότητα  $1/\|g\|$  είναι ελάχιστη.

Συνοπτικά στην απλή δειγματική μέθοδο ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- 1). Μετράμε το σκεδαζόμενο πεδίο κατά μήκος μιας γραμμής που συμβολίζεται με  $\Gamma$  για κάθε πηγή ήχου που βρίσκεται στην ίδια γραμμή. Τα δεδομένα καταγράφονται σε ένα πίνακα  $N \times N$ .
- 2). Επιλέγουμε την περιοχή ανίχνευσης η οποία μπορεί να περιέχει το σκεδαστή  $D$ . Υπολογίζουμε τη συνάρτηση Green  $G(x_i; y_0)$  για  $N$  σημεία  $x_i \in \Gamma$  και  $y_0 \in \Omega$ .
- 3). Λύνουμε το ομαλοποιημένο γραμμικό σύστημα ως προς  $g(\cdot; y_0)$  για κάθε  $y_0 \in \Omega$ .

4). Υπολογίζουμε την  $L_2$  norm  $\|g(\cdot; y_0)\|$  για κάθε  $y_0 \in \Omega$ . Απεικονίζουμε γραφικά τις ισοϋψείς καμπύλες του  $1/\|g(\cdot; y_0)\|$  σαν μια συνάρτηση του  $y_0$  στο  $\Omega$ .

5). Το σχήμα του σκεδαστή υπολογίζεται από τις τιμές που το  $1/\|g(\cdot; y_0)\|$  είναι ελάχιστο.

#### 4.4 Ομαλοποίηση Μη Καλά Τοποθετημένων Γραμμικών Συστημάτων

Στο παρόν εδάφιο θα παρουσιαστεί η αριθμητική μέθοδος που θα εφαρμοστεί για την απλή δειγματική μέθοδο επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος που περιγράφεται πιο πάνω. Θα παρουσιαστεί συνοπτικά η αρχή της μεθόδου Tikhonov η οποία ομαλοποιεί το σύστημα και εξασφαλίζει σταθερότητα σε μικρές αλλαγές των τιμών των δεδομένων που μπορεί να προέρχονται από σφάλματα.

##### 4.4.1 Δείκτης Κατάστασης

###### Ορισμός

Έστω  $X, Y$  δύο χώροι με νόρμα και  $A: X \rightarrow Y$  ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με φραγμένο αντίστροφο  $A^{-1}: Y \rightarrow X$ . Ως δείκτης κατάστασης του  $A$  ορίζεται η ποσότητα

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (4.22)$$

Ο παραπάνω ορισμός εισάγει την έννοια του δείκτη κατάστασης για έναν ομαλό  $n \times n$  πίνακα  $A$ . Ο δείκτης κατάστασης εξαρτάται από την επιλεγμένη νόρμα και ισχύει ότι  $\text{cond}(A) \geq 1$  διότι  $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ . Στην περίπτωση που ο χώρος  $X$  όσο και ο χώρος  $Y$  είναι χώροι  $\ell_p$  για  $p = 1, 2, \infty$  ο δείκτης κατάστασης γράφεται  $\text{cond}_p(A)$ .

Για το σχετικό σφάλμα δύο λύσεων  $x$  και  $x^\delta$  των εξισώσεων  $Ax = y$  και  $A^\delta x^\delta = y^\delta$  αντίστοιχα ισχύει:

$$\frac{\|x^\delta - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|A^\delta - A\|}{\|A\|}} \left\{ \frac{\|y^\delta - y\|}{\|y\|} + \frac{\|A^\delta - A\|}{\|A\|} \right\} \quad (4.23)$$

Όπου  $A$  και  $A^\delta$  δύο τελεστές τέτοιοι ώστε:  $A: X \rightarrow Y$  ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με φραγμένο αντίστροφο  $A^{-1}: Y \rightarrow X$  και  $A^\delta: X \rightarrow Y$  ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε  $\|A^{-1}\| \|A^\delta - A\| < 1$  στους χώρους Banach  $X, Y$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο δείκτης κατάστασης μπορεί να υπηρετεί σαν μέτρο της ευστάθειας για γραμμικά συστήματα. Ένα γραμμικό σύστημα με μικρό δείκτη κατάστασης είναι ευσταθές ενώ μεγάλος αριθμός του δείκτη κατάστασης φανερώνει αστάθεια. Τα συστήματα που έχουν μικρό δείκτη κατάστασης καλούνται καλής κατάστασης, (well-conditioned) ενώ με μεγάλο κακής κατάστασης, (ill-conditioned). Σε ένα γραμμικό σύστημα καλής κατάστασης μικρές αλλαγές στα δεδομένα του συστήματος επιφέρουν σχετικά μικρές αλλαγές στις τιμές της λύσης του, ενώ σε ένα κακής κατάστασης μικρές αλλαγές επιφέρουν μεγάλες αλλαγές στις τιμές της λύσης.

Για έναν ερμητιανό πίνακα  $A$  με ευκλείδεια νόρμα ο δείκτης κατάστασης δίνεται από τη σχέση

$$\text{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$$

όπου  $\lambda_{\max}$  και  $\lambda_{\min}$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή αντίστοιχα του φάσματος των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$ .

#### 4.4.2 Ιδιάζουσα Παραγοντοποίηση (Singular Value Decomposition)

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μία εισαγωγή των βασικών ιδεών για την προσεγγιστική λύση ενός γραμμικού συστήματος μη καλής κατάστασης. Η προσπάθεια μας θα βασιστεί στην ανάλυση ιδιάζουσων τιμών ενός πίνακα  $A$ , ο οποίος δεν είναι απαραίτητο να είναι τετραγωνικός.

Για κάθε  $m \times n$  πίνακα  $A$ , ο οποίος αναπαριστά ένα τελεστή  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , ο  $n \times n$  πίνακας  $A^*A$  είναι ερμητιανός και θετικά ημιορισμένος. Επομένως οι ιδιοτιμές του  $A^*A$  είναι θετικές και μη αρνητικές.

#### Ορισμός

Οι μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες  $\mu$  των ιδιοτιμών  $\mu^2$  του πίνακα  $A^*A$  καλούνται ιδιάζουσες τιμές του πίνακα  $A$ .

Η απεικόνιση  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  δηλώνει το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{C}^n$ . Για ένα  $m \times n$  πίνακα  $A$  βαθμού  $r$ , το κενό σύνολο, (null space)  $N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$  έχει διάσταση  $\dim N(A) = n - r$ . Σημειώνουμε ότι αν  $A^*A\bar{u} = 0$  τότε ισχύει  $\|A\bar{u}\|_2 = \langle A\bar{u}, A\bar{u} \rangle = \langle \bar{u}, A^*A\bar{u} \rangle = 0$  και προκύπτει ότι  $N(A) = N(A^*A)$  και συνεπώς  $\dim N(A^*A) = n - r$ . Επομένως ο πίνακας  $A$  έχει ακριβώς  $r$  το πλήθος θετικές ιδιάζουσες τιμές  $\mu$ .

Για ένα  $m \times n$  πίνακα  $A$  βαθμού  $r$  υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$$

και ορθομοναδιαία διανύσματα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{C}^n$  και  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{C}^m$  τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\begin{aligned} A\vec{u}_j &= \mu_j \vec{v}_j, & j=1, 2, \dots, r \\ A^* \vec{v}_j &= \mu_j \vec{u}_j, & j=1, 2, \dots, r \\ A\vec{u}_j &= 0, & j=r+1, \dots, n \\ A^* \vec{v}_j &= 0, & j=r+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{4.24}$$

και για κάθε  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$  έχουμε την ιδιάζουσα παραγοντοποίηση

$$A\vec{x} = \sum_{j=1}^r \mu_j \langle \vec{x}, \vec{u}_j \rangle \vec{v}_j \tag{4.25}$$

Κάθε σύστημα  $(\mu_j, \vec{u}_j, \vec{v}_j)$  με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **ιδιάζων σύστημα** του πίνακα  $A$ .

Οι παραπάνω σχέσεις τις (4.25) μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$A = VDU^*$$

όπου,  $U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n]$ ,  $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m]$  είναι ορθογώνιοι  $n \times n$  και  $m \times m$  πίνακες αντίστοιχα και  $D$  είναι ένας  $m \times n$  διαγώνιος πίνακας με στοιχεία  $d_{jj} = \mu_j$  για  $j = 1, \dots, r$  και  $d_{jk} = 0$  διαφορετικά.

Το γραμμικό σύστημα  $A\vec{x} = \vec{y}$ , ενός  $m \times n$  πίνακα  $A$  βαθμού  $r$  με ιδιάζων σύστημα  $(\mu_j, \vec{u}_j, \vec{v}_j)$ .

$$A\vec{x} = \vec{y} \tag{4.26}$$

είναι επιλύσιμο αν και μόνο αν

$$\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0 \tag{4.27}$$

για κάθε  $\vec{z} \in \mathbb{C}^m$  με  $A^* \vec{z} = 0$ . Στην περίπτωση αυτή μία λύση του συστήματος (4.26) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\mu_j} \langle \vec{y}, \vec{v}_j \rangle \vec{u}_j \tag{4.28}$$



Εφόσον το  $N(A) = \text{span}\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ , το διάνυσμα  $\vec{x}_0$  που ορίζεται από τη (4.28) έχει την ιδιότητα  $\langle \vec{x}_0, \vec{x} \rangle = 0$  για όλα τα  $\vec{x} \in N(A)$ . Στην περίπτωση που η εξίσωση (4.26) έχει περισσότερες από μία λύσεις, η γενική λύση λαμβάνεται από το άθροισμα της (4.28) και μιας αυθαίρετης λύσης του ομογενούς συστήματος  $A\vec{x} = 0$ . Τότε από την σχέση

$$\|\vec{x}_0 + \vec{x}\|_2^2 = \|\vec{x}_0\|_2^2 + \|\vec{x}\|_2^2 + 2 \operatorname{Re}\langle \vec{x}_0, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}_0\|_2^2 + \|\vec{x}\|_2^2 > \|\vec{x}_0\|_2^2$$

παρατηρούμε ότι η (4.28) αναπαριστά την μοναδικά ορισμένη λύση της (4.26) με την ελάχιστη ευκλείδεια νόρμα.

Στην περίπτωση που η εξίσωση (4.26) δεν έχει λύση, αναπαριστούμε το διάνυσμα  $\vec{y}$  στη βάση  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ . Έστω το  $\vec{x}_0$  που δίνεται από την (4.28) και ένα τυχαίο  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ . Τότε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A\vec{x} - A\vec{x}_0, A\vec{x}_0 - \vec{y} \rangle = 0$$

Αφού  $A\vec{x} - A\vec{x}_0 \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  και  $A\vec{x}_0 - \vec{y} \in \text{span}\{\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_m\}$ , το οποίο από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\|A\vec{x} - \vec{y}\|_2^2 = \|A\vec{x} - A\vec{x}_0\|_2^2 + \|A\vec{x}_0 - \vec{y}\|_2^2,$$

επομένως και πάλι η ελάχιστη ευκλείδεια νόρμα επιτυγχάνεται όταν η λύση της εξίσωσης (4.26) δίνεται από το διάνυσμα  $\vec{x}_0$  της σχέσης (4.28).

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση που αναπαριστά η σχέση (4.30) ορίζει ένα τελεστή  $A^\dagger : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  από τη σχέση

$$A^\dagger \vec{y} := \sum_{j=1}^r \frac{1}{\mu_j} \langle \vec{y}, \vec{v}_j \rangle \vec{u}_j, \quad \vec{y} \in \mathbb{C}^m \quad (4.29)$$

ο οποίος προφανώς επιτρέπει μία αναπαράσταση με έναν πίνακα  $n \times m$ . Εξαιτίας των ιδιοτήτων του  $A^\dagger \vec{y}$  όπως αναφέρονται πιο πάνω, ο τελεστής αυτός ή ισοδύναμα ο πίνακας είναι γνωστός ως ψευδοαντίστροφος, (pseudo-inverse) ή Moore-Penrose αντίστροφος του πίνακα  $A$ . Ο πίνακας αυτός αναπαριστά την βέλτιστη λύση του συστήματος (4.26).

Για έναν ομαλό πίνακα  $A$ , εφόσον ισχύει ότι  $\|A\|_2 = \sqrt{\sigma(A^*A)}$ , έχουμε ότι ο δείκτης κατάστασης ως προς την  $\ell_2$  - νόρμα δίνεται από τη σχέση  $\operatorname{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$  με  $\lambda_{\max}, \lambda_{\min} \in \sigma(A^*A)$ . Επειδή όμως ο πίνακας  $A^*A$  έχει πραγματικές και μη αρνητικές ιδιοτιμές, από τον ορισμό των ιδιάζουσων τιμών έχουμε  $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$ .

Από τα παραπάνω φαίνεται η επιρροή μιας μικρής ιδιάζουσας τιμής στο δείκτη κατάστασης ενός πίνακα  $A$ . Αν για κάποιο  $\delta \in \mathbb{C}$  διαταράξουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης (4.26), θέτοντας  $\vec{y}^\delta = \vec{y} + \delta \vec{v}_j$  λαμβάνουμε μία αντίστοιχη

διαταραγμένη λύση  $\bar{x}^\delta = \bar{x} + \frac{\delta}{\mu_j} \bar{u}_j$ . Επομένως ο λόγος  $\frac{\|\bar{x}^\delta - \bar{x}\|_2}{\|\bar{y}^\delta - \bar{y}\|_2} = \frac{1}{\mu_j}$  γίνεται

μεγάλος εάν ο πίνακας  $A$  έχει μικρές ιδιάζουσες τιμές.

Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι ένα μη καλά τοποθετημένο γραμμικό σύστημα μπορεί να γίνει ευσταθές αποκόπτοντας η φιλτράροντας την επιρροή του παράγοντα  $\frac{1}{\mu_j}$  στη λύση (4.28). Η διαδικασία αυτή γίνεται με τη μέθοδο της

φασματικής αποκοπής, (spectral cutoff) κατά την οποία οι όροι της (4.28) που αντιστοιχούν σε μικρές ιδιάζουσες τιμές απλά αγνοούνται. Η διαδικασία αυτή απαιτεί μια στρατηγική για το πώς θα προσδιοριστεί το πλήθος των όρων που θα περιλαμβάνεται στο άθροισμα που δίνεται από τη σχέση (4.28). Μια αποτελεσματική στρατηγική είναι η αρχή της ασυμφωνίας, (discrepancy principle). Εάν το δεξί μέλος  $y$  ενός γραμμικού συστήματος είναι γνωστό με ένα εύρος σφάλματος  $\delta$  τότε είναι απόλυτα φυσιολογικό να απαιτήσουμε το  $A\bar{x} = \bar{y}$  να ικανοποιείται κάτω από το ίδιο σφάλμα. Θεωρώντας ένα  $\bar{y}^\delta$  τέτοιο ώστε  $\|\bar{y}^\delta - \bar{y}\|_2 \leq \delta$ , στη φασματική αποκοπή η λύση  $\bar{x} = A^\dagger \bar{y}$  του  $A\bar{x} = \bar{y}$  δίνεται προσεγγιστικά από την παρακάτω σχέση.

$$\bar{x}_p := \sum_{j=1}^p \frac{1}{\mu_j} \langle \bar{y}^\delta, \bar{v}_j \rangle \bar{u}_j \quad (4.30)$$

για κάποιο  $0 \leq p \leq r$ .

#### 4.4.3 Ομαλοποίηση Tikhonov

Η μέθοδος αυτή εξασφαλίζεται από τη σχέση (4.28) πολλαπλασιάζοντας τον όρο  $\frac{1}{\mu_j}$  με τον όρο αποκοπής  $\frac{\mu_j^2}{a + \mu_j^2}$  όπου  $a$  είναι μια μικρή θετική παράμετρος κανονικοποίησης. Για έναν  $m \times n$  πίνακα  $A$  με ιδιάζον σύστημα  $(\mu_j, \bar{u}_j, \bar{v}_j)$  και  $a > 0$ , για κάθε  $\bar{y} \in \mathbb{C}^m$  το γραμμικό σύστημα

$$a\bar{x}_a + A^* A \bar{x}_a = A^* \bar{y} \quad (4.31)$$

επιλύεται και η λύση του δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}_a = \sum_{j=1}^r \frac{\mu_j}{a + \mu_j^2} \langle \bar{y}, \bar{v}_j \rangle \bar{u}_j \quad (4.32)$$

Το ιδιάζον σύστημα του πίνακα  $aI + A^* A$  είναι το  $(a + \mu_j^2, \bar{u}_j, \bar{v}_j)$  για  $j = 1, \dots, n$ . Ενώ εύκολα προκύπτει ότι το όριο  $\lim_{a \rightarrow 0} (aI + A^* A)^{-1} A^* \bar{y} = A^\dagger \bar{y}$ .

Για κάθε  $\bar{y} \in \mathbb{C}^m$  υπάρχει μοναδικό διάνυσμα  $\bar{x}_a$  τέτοιο ώστε:

$$\|A\bar{x}_a - \bar{y}\|_2^2 + a\|\bar{x}_a\|_2^2 = \inf_{\bar{x} \in \mathbb{C}^n} \left\{ \|A\bar{x} - \bar{y}\|_2^2 + a\|\bar{x}\|_2^2 \right\} \quad (4.33)$$

Το ελάχιστο διάνυσμα  $\bar{x}_a$  δίνεται από τη μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος (4.31).

Η ερμηνεία της ομαλοποίησης Tikhonov, υποδεικνύει ότι το υπόλοιπο  $\|A\bar{x}_a - \bar{y}\|_2^2$  παραμένει μικρό και ομαλοποιεί το σύστημα (4.26), εμποδίζοντας το  $\bar{x}_a$  να γίνει μεγάλο μέσω του όρου  $a\|\bar{x}_a\|_2^2$ .

Οι ιδιοτιμές του ερμητιανού πίνακα  $aI + A^*A$  δίνονται από τη σχέση  $a + \mu_j^2$  για  $j = 1, 2, \dots, n$ . Επομένως ο δείκτης κατάστασης του ερμητιανού πίνακα δίνεται από το πηλίκο της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιοτιμή του, δηλαδή

$$\text{cond}_2(aI + A^*A) = \frac{a + \mu_1^2}{a + \mu_n^2} \leq \frac{2\mu_1^2}{a} \quad \text{αν } 0 < a < \mu_1^2 \quad (4.34)$$

Η ευστάθεια του γραμμικού συστήματος (4.31) απαιτεί η παράμετρος κανονικοποίησης  $a$  να είναι αρκετά μεγάλη ώστε έτσι ο δείκτης κατάστασης να είναι μικρός. Αλλά για να προσεγγίζεται καλά το  $A\bar{x} = \bar{y}$  από το  $a\bar{x}_a + A^*A\bar{x}_a = A^*\bar{y}$  θα πρέπει το  $a$  να είναι μικρό.

Δεδομένου ότι το δεξί μέλος του γραμμικού συστήματος (4.31) περιέχει κάποιο σφάλμα έτσι ώστε  $\|\bar{y}^\delta - \bar{y}\|_2 \leq \delta$ , η ομαλοποίηση Tikhonov προσεγγίζει τη λύση  $\bar{x} = A^\dagger \bar{y}$  του  $A\bar{x} = \bar{y}$  με μια λύση  $\bar{x}_a$  του κανονικοποιημένου συστήματος:

$$a\bar{x}_a + A^*A\bar{x}_a = A^*\bar{y}^\delta \quad (4.35)$$

Για το ολικό σφάλμα  $\bar{x}_a - \bar{x} = (aI + A^*A)^{-1}A^*(\bar{y}^\delta - \bar{y}) + (aI + A^*A)^{-1}A^*\bar{y} - A^\dagger \bar{y}$  με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει:

$$\|\bar{x}_a - \bar{x}\|_2 \leq \|(aI + A^*A)^{-1}A^*\|_2 \delta + \|(aI + A^*A)^{-1}A^*\bar{y} - A^\dagger \bar{y}\|_2 \quad (4.36)$$

Δηλ. αν το ολικό σφάλμα είναι  $E_{\text{total}}$  το σφάλμα των δεδομένων  $E_{\text{data}}$  και  $E_{\text{approx}}$  το σφάλμα της διαδικασίας προσέγγισης τότε θα ισχύει:

$$E_{\text{total}} \leq E_{\text{data}} + E_{\text{approx}}$$

Αν για έναν ερμητιανό πίνακα  $A$  ισχύει ότι  $\|A\|_2 = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$  και  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$  τότε

$$E_{data} = \|(aI + A^*A)^{-1}A^*\|_2 \delta \geq \frac{\mu_r}{a + \mu_r^2} \delta$$

Η σχέση αυτή αντανακλά το γεγονός ότι η επιρροή των εσφαλμένων δεδομένων, για σταθερό  $\delta$ , γίνεται μεγάλη καθώς η παράμετρος κανονικοποίησης  $a \rightarrow 0$  αν η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή  $\mu_r$  του πίνακα  $A$  είναι κοντά στο μηδέν.

Ο όρος που περιγράφει το προσεγγιστικό σφάλμα οφείλεται στην αντικατάσταση του γραμμικού συστήματος  $A\bar{x} = \bar{y}$  από την κανονικοποιημένη εξίσωση (4.35).

Από τη σχέση (4.34) είναι εμφανές ότι η ευστάθεια του συστήματος απαιτεί η παράμετρος  $a$  να παίρνει μεγάλες τιμές έτσι ώστε το  $E_{data}$ , να είναι μικρό ώστε η επιρροή του ολικού σφάλματος  $\|\bar{y}^\delta - \bar{y}\|_2$  να είναι μικρή. Αλλά για να διατηρηθεί το  $E_{approx}$  μικρό, χρειαζόμαστε το  $a$  να παίρνει μικρές τιμές.

Η επιλογή της παραμέτρου κανονικοποίησης  $a$  πρέπει να γίνει έτσι ώστε να συμβιβάσουμε την ακρίβεια και την ευστάθεια του συστήματος. Ένας αποτελεσματικός τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι με τη χρήση της ασυμφωνίας.

Αν για ένα  $m \times n$  πίνακα  $A$  με ιδιάζον σύστημα  $(\mu_j, \bar{u}_j, \bar{v}_j)$  τα διανύσματα  $\bar{y} \in A(\mathbb{C}^n)$  και  $\bar{y}^\delta \in \mathbb{C}^m$ , για κάποιο  $\delta > 0$  ικανοποιούν τη σχέση  $\|\bar{y}^\delta - \bar{y}\|_2 \leq \delta < \|\bar{y}^\delta\|_2$ , τότε υπάρχει μοναδικό  $a = a(\delta) > 0$  τέτοιο ώστε η μοναδική λύση  $\bar{x}_a$  του γραμμικού συστήματος (4.35) να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\|A\bar{x}_a - \bar{y}^\delta\|_2 = \delta \quad (4.37)$$

Η εφαρμογή της αρχής της ασυμφωνίας στη μέθοδο Tikhonov ομαλοποίησης έχει νόημα υπό την έννοια ότι

$$\bar{x}_a \rightarrow A^\dagger \bar{y} \text{ καθώς το } \delta \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

Στην πράξη δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε την παράμετρο κανονικοποίησης  $a$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση (4.37) ακριβώς. Συνήθως είναι αρκετό να επιλέξουμε ένα μετρίου μεγέθους  $a$  και με τη βοήθεια ενός σταθερού όρου  $\gamma$  να ελαττώσουμε το  $a$  μέχρι η ποσότητα  $F(a) = \|A\bar{x}_a - \bar{y}^\delta\|_2^2 - \delta^2$  να γίνει αρνητική.

## 5. Αριθμητική Επίλυση του Αντιστρόφου Προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η αριθμητική επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης στο διδιάστατο κυματοδηγό. Ο κώδικας του προγράμματος είναι γραμμένος σε γλώσσα Matlab και βασίστηκε σε ήδη υπάρχον πρόγραμμα όπου αντιμετώπιζε το αντίστροφο πρόβλημα με τη μέθοδο «factorization». Στο πρόγραμμα αυτό έγιναν αλλαγές και προσαρμόστηκε η «απλή δειγματική μέθοδος» για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος.

Για την ανακατασκευή του εμποδίου απαιτείται το αντίστοιχο κοντινό πεδίο σκέδασης, (near field) για κάθε περίπτωση σκεδαστή. Έτσι αρχικά επιλύεται το ευθύ πρόβλημα για να παραχθεί το σκεδαζόμενο πεδίο. Στην επίλυση του ευθέως προβλήματος έχει θεωρηθεί ότι στο σύνορο των σκεδαστών ικανοποιείται σχέση τύπου Dirichlet. Στη συνέχεια το πρόγραμμα που επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα παίρνει τις τιμές του κοντινού πεδίου σκέδασης που προκύπτουν από την επίλυση του ευθέως προβλήματος και ανακατασκευάζει το σκεδαστή.

Γίνονται ανακατασκευές γνωστών σχημάτων σκεδαστών στον κυματοδηγό και γίνεται παραμετρική μελέτη για διάφορες τιμές του κυματάριθμου, συντελεστών ομαλοποίησης, της θέσης των σκεδαστών στον κυματοδηγό αλλά και της θέσης των πηγών των ακουστικών κυμάτων.

Στα σχήματα που ακολουθούν ο πυθμένας βρίσκεται στη θέση  $y = 0$  και ισχύει συνθήκη τύπου Neumann και η ελεύθερη επιφάνεια στη θέση  $y = 10$  και ισχύει συνθήκη τύπου Dirichlet.

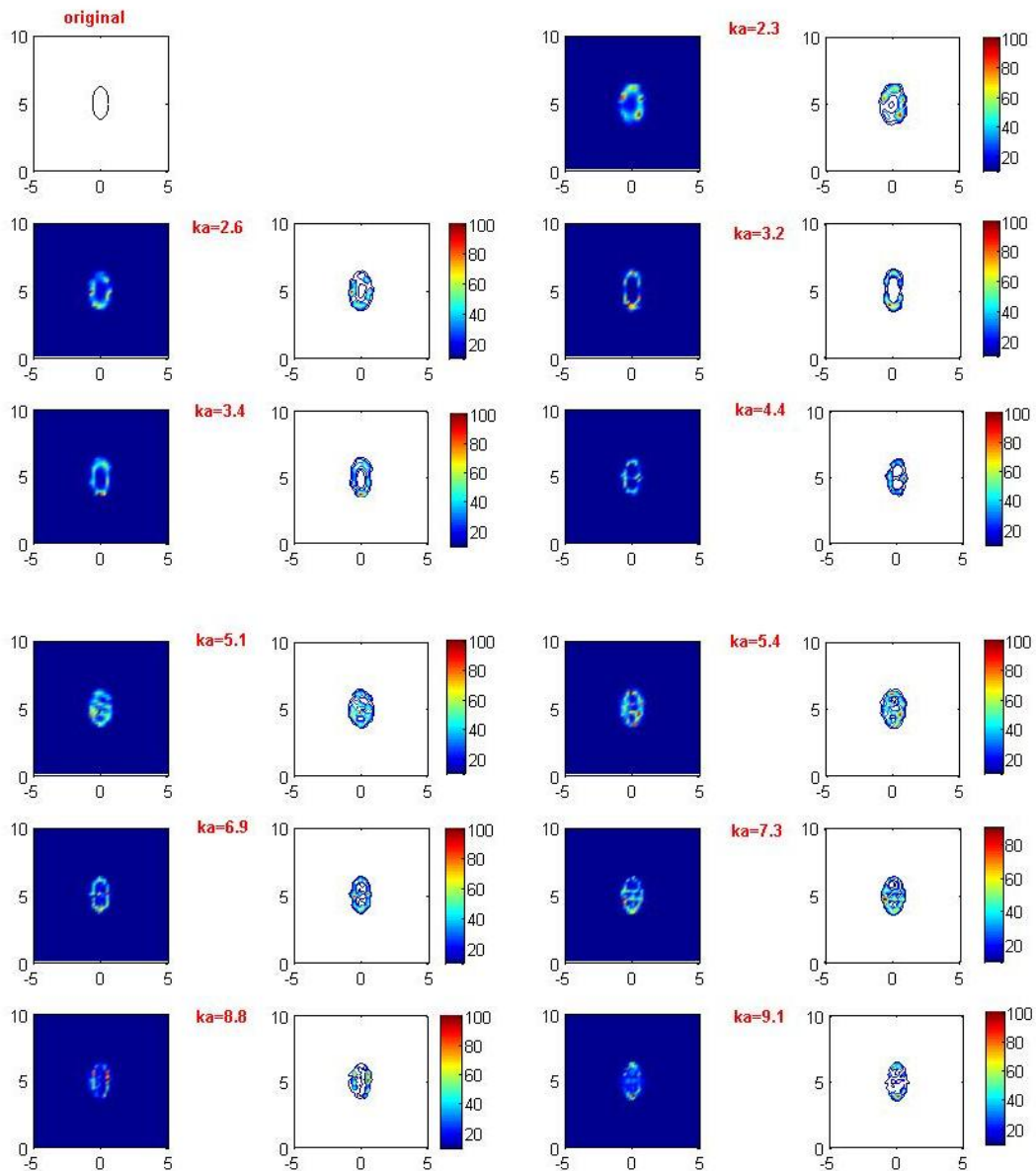
### 5.1 Ανακατασκευές για Διάφορες Τιμές του Κυματάριθμου $ka$

Αρχικά γίνεται παραμετρική μελέτη για διάφορες τιμές του κυματάριθμου  $ka$  κρατώντας τις άλλες παραμέτρους σταθερές. Η παράμετρος ομαλοποίησης για όλα τα σχήματα είναι  $10^{-12}$ .

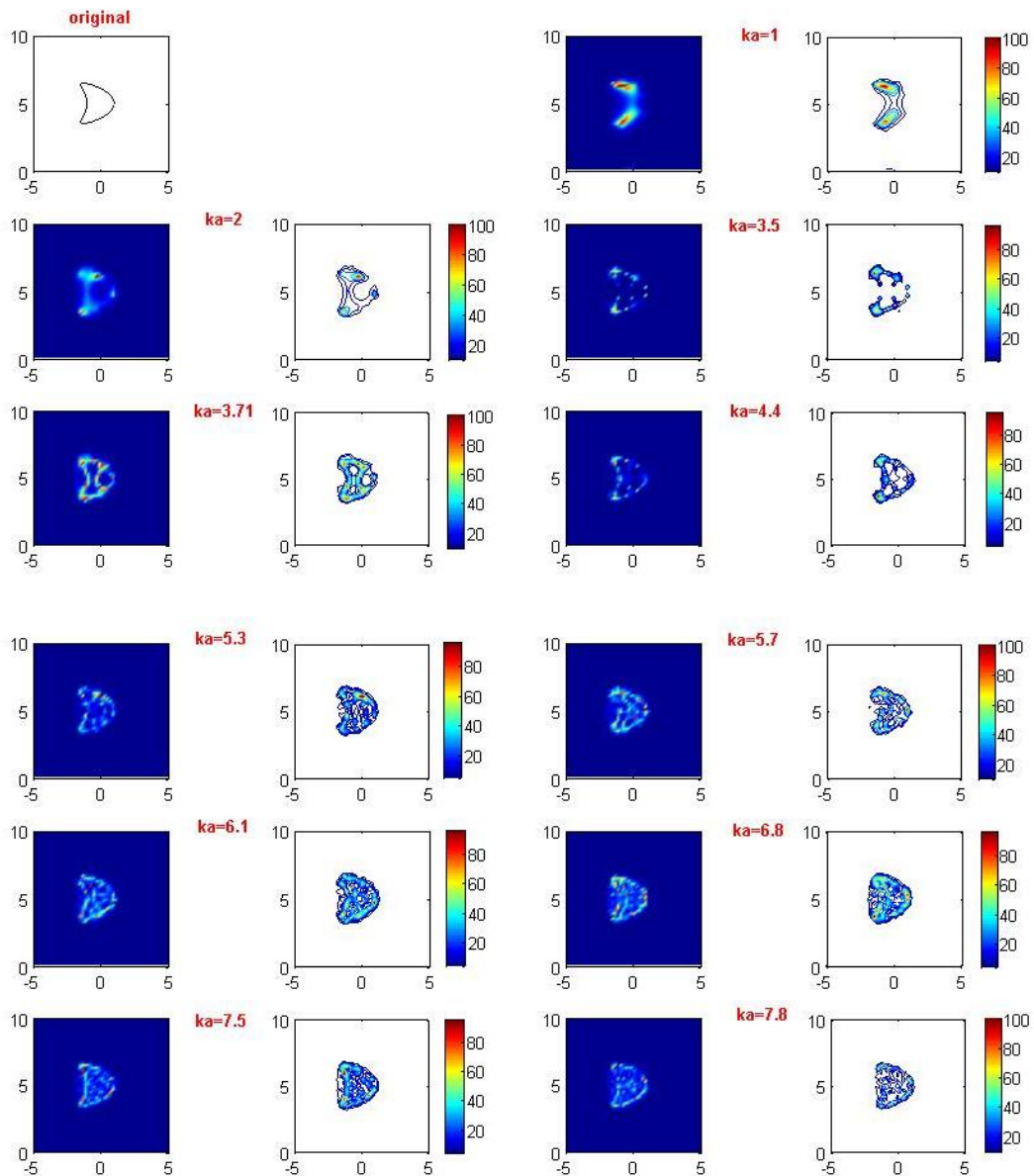
Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζονται ενδεικτικά σχήματα για την κάθε περίπτωση και τις τιμές των παραμέτρων που εξετάζονται. Για άλλες τιμές παραμέτρων οι ανακατασκευές ενδέχεται να μην είναι ικανοποιητικές. Εξαιτίας της ισχυρής εξάρτησης των σχημάτων από τον κυματάριθμο  $ka$  και των πολλών δυνατοτήτων αλλαγής των παραμέτρων είναι αδύνατο να καλυφθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Αρχικά προηγείται ανάλυση για πολλές τιμές παραμέτρων και στη συνέχεια επιλέγονται κάποια ενδεικτικά σχήματα.

Στο σχήμα 5.1 εμφανίζονται διάφορα γραφήματα ανακατασκευών σε σχέση με τον κυματάριθμο για την περίπτωση της έλλειψης με ημιάξονες 0.6 και 1.2. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για το συγκεκριμένο σχήμα είναι  $par =$

$[0.6 \ 1.2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Όπως προκύπτει από την αρχική ανάλυση και το παρακάτω σχήμα υπάρχουν αρκετές τιμές του κυματάριθμου για τις οποίες υπάρχει ικανοποιητική ανακατασκευή της έλλειψης και για μεγάλες τιμές του κυματάριθμου  $ka$ . Η πιο καλή ανακατασκευή επιτυγχάνεται για τιμή κυματάριθμου  $ka = 6.9$ .

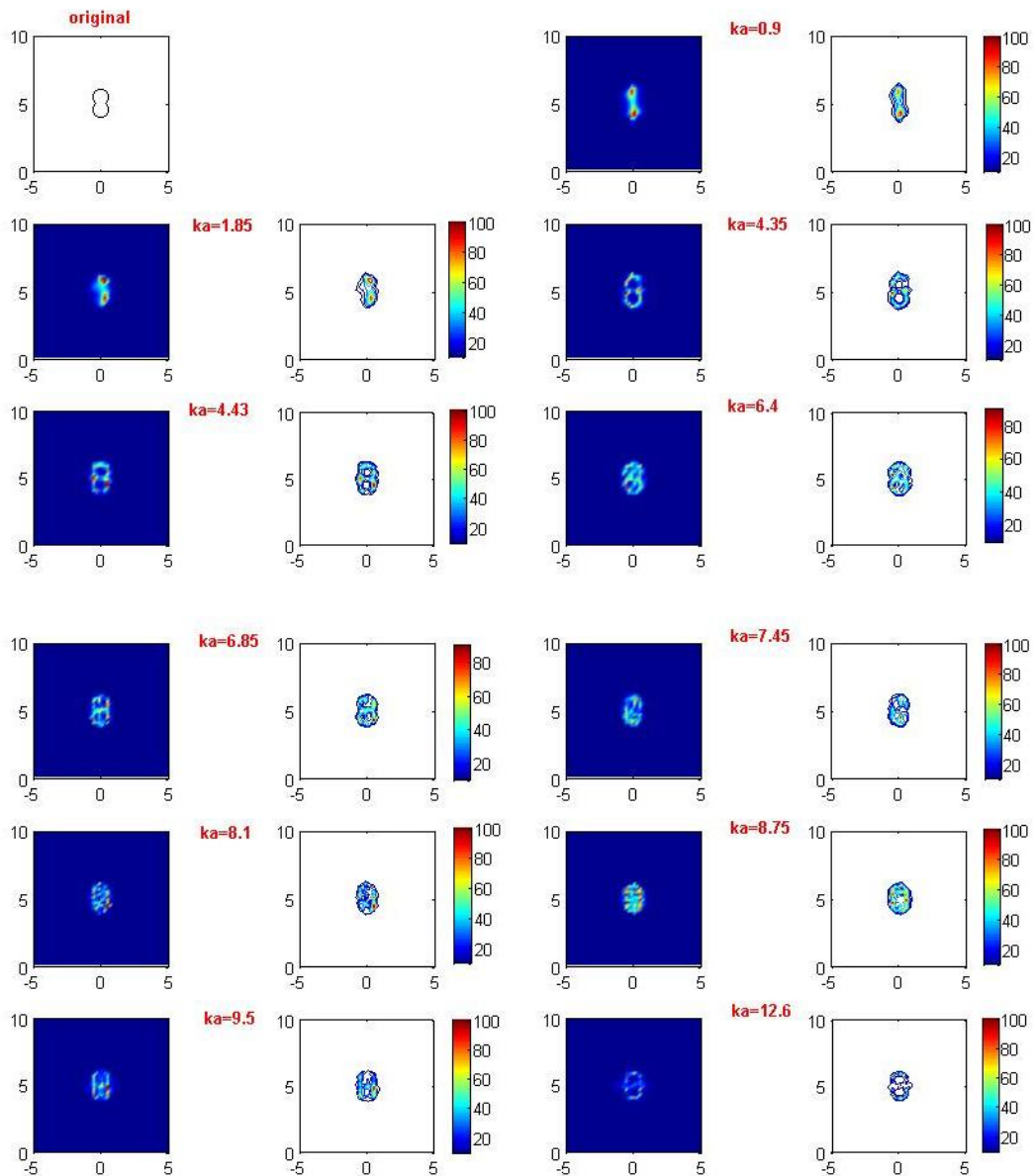


**Σχήμα 5.1** Ανακατασκευή έλλειψης σε σχέση με τον κυματάριθμο  $ka$  με ημιάξονες 0.6 και 1.2 και παράμετρο  $par = [0.6 \ 1.2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]$  και  $lab=1$ .



**Σχήμα 5.2** Ανακατασκευή χαρταετού σε σχέση με τον κυματάρημο  $ka$  με τιμή παραμέτρου  $par = [1.5 \ 0.65 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]$  και  $lab=3$ .

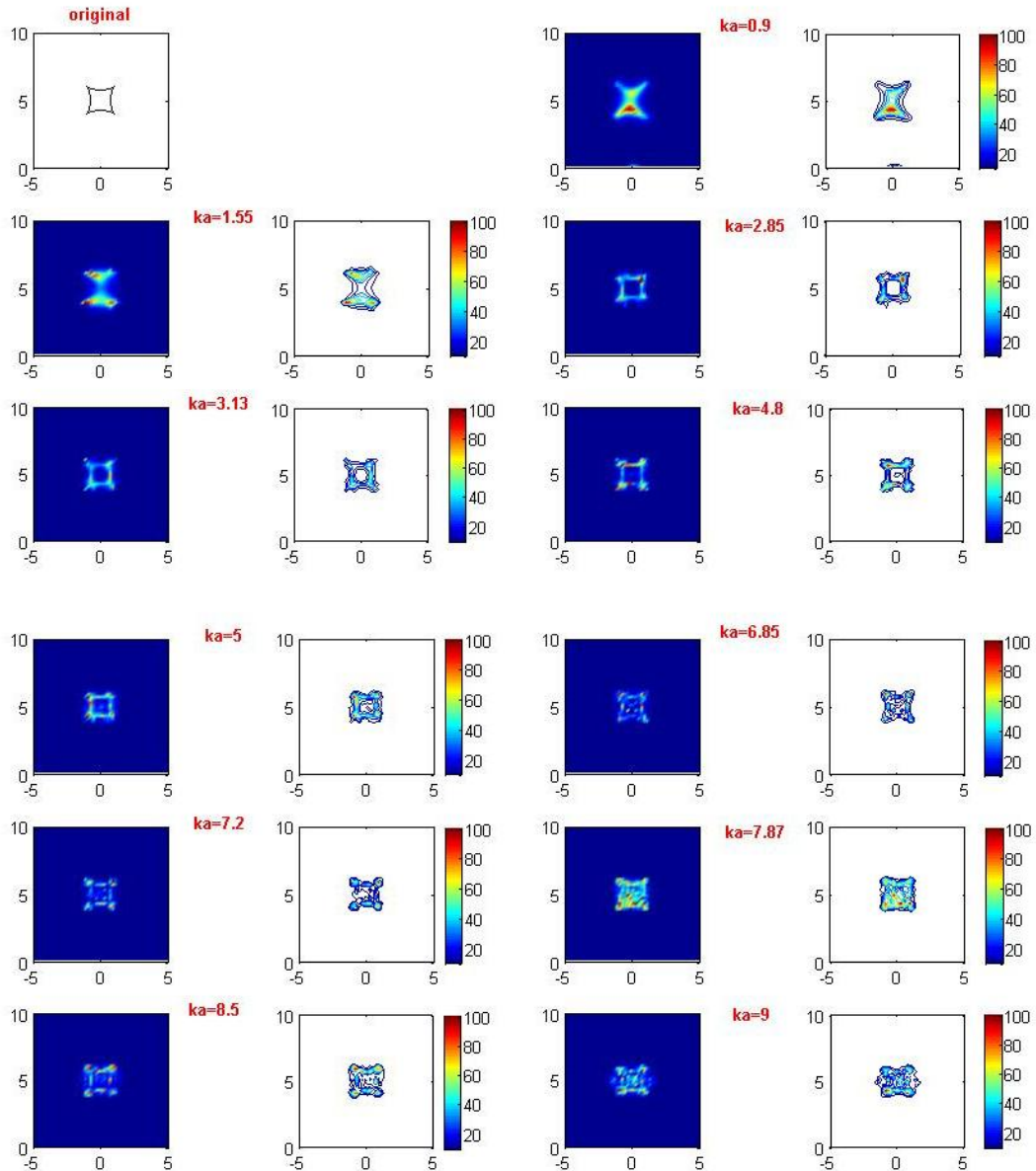
Από το παραπάνω σχήμα παρατηρείται ότι προκύπτουν καλές ανακατασκευές για το σχήμα του χαρταετού για πολλές τιμές του κυματάρημου  $ka$ . Για τιμή  $ka=1$  και μικρότερες αυτού οι ανακατασκευές δεν είναι καλές. Η καλύτερη ανακατασκευή προκύπτει για τιμή  $ka = 3.71$ .



**Σχήμα 5.3** Ανακατασκευή φιστικιού σε σχέση με τον κυματάρημο  $ka$  με τιμή παραμέτρου  $par = [0.15 \ 1.1 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]$  και  $lab=4$ .

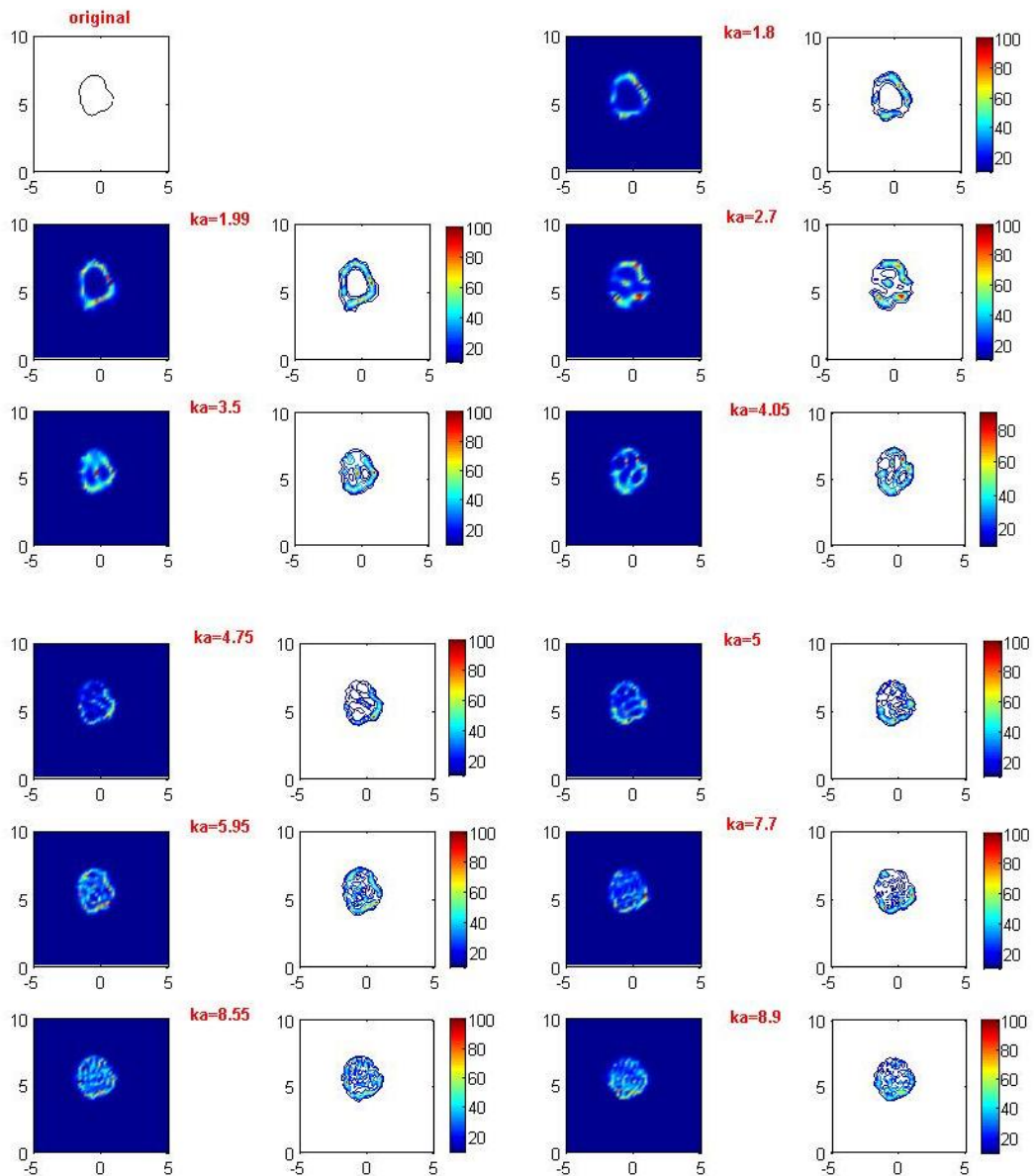
Όπως προκύπτει από το σχήμα 5.3 υπάρχουν αρκετές τιμές κυματάρημων για τους οποίους προκύπτει ικανοποιητική ανακατασκευή για το φιστίκι. Στο συγκεκριμένο σχήμα η απλή δειγματική μέθοδος δίνει καλά αποτελέσματα και για μικρές και για μεγάλες τιμές κυματάρημων. Η πιο καλή ανακατασκευή επιτυγχάνεται για τιμή  $ka = 4.35$ .





**Σχήμα 5.4** Ανακατασκευή hypercycloid σχήματος σε σχέση με τον κυματάρημο  $ka$  και τιμή παραμέτρου  $par = [1.5 \ 0 \ 0 \ 5 \ 45 \ 0 \ 0]$  και  $lab=5$ .

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα προκύπτουν καλές ανακατασκευές για μεγάλο εύρος τιμών της τιμής του κυματάρημου  $ka$ . Για μεγάλες τιμές κυματάρημου τα σχήματα δεν είναι ικανοποιητικά όπως φαίνεται για τις τιμές  $ka= 8.5$  και  $ka =9$ . Η απλή δειγματική μέθοδος φαίνεται ότι δίνει καλά αποτελέσματα και σε σχήματα σκεδαστών που περιέχουν γωνίες. Η καλύτερη ανακατασκευή επιτυγχάνεται για  $ka = 4.8$ .



**Σχήμα 5.5** Ανακατασκευή σχήματος σε σχέση με τον κυματάριθμο  $ka$  όπως προκύπτει με τιμές παραμέτρων  $par = [0.91 \ 0.7 \ -1 \ 5 \ 0 \ 0.35 \ 0.3]$  και  $lab=2$ .

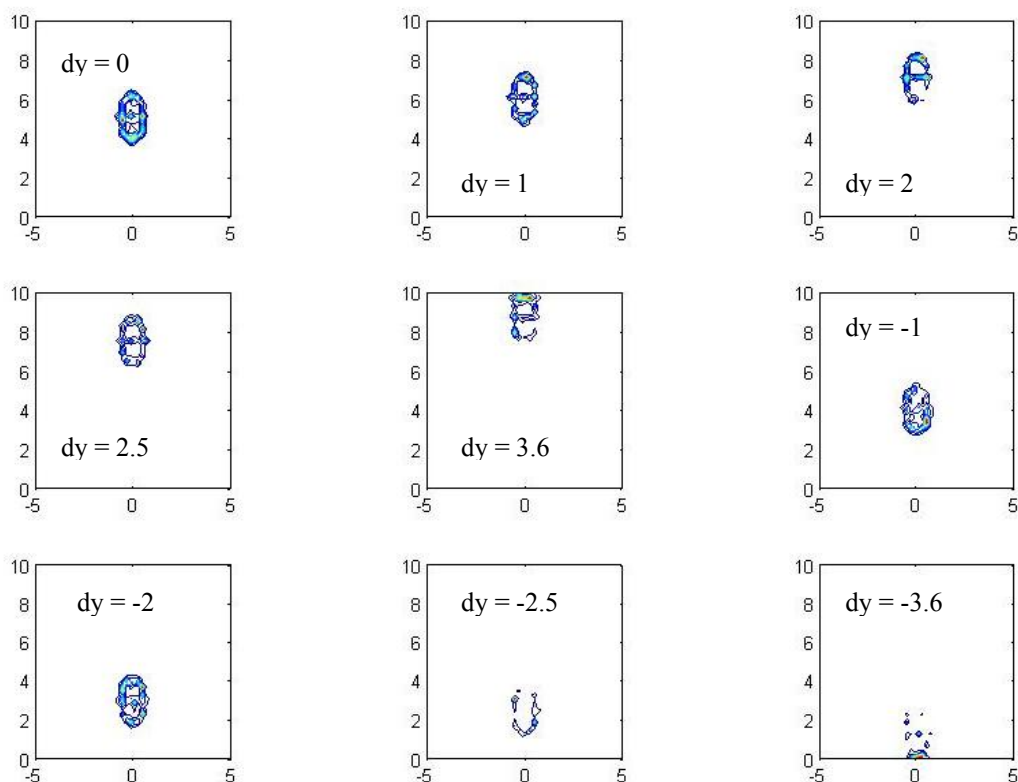
Από το σχήμα 5.5 προκύπτει ότι η καλύτερη ανακατασκευή επιτυγχάνεται για τιμή κυματάριθμου  $ka=1.99$ . Σύμφωνα και με τις δοκιμές που έχουν προηγηθεί γενικά για τιμές κυματάριθμου μεταξύ 1.8 και 2 οι ανακατασκευές είναι πολύ ικανοποιητικές. Επίσης παρατηρείται ότι και για μεγάλους κυματάριθμους υπάρχουν καλές ανακατασκευές αλλά από την τιμή  $ka=9$  και άνω οι ανακατασκευές αποκλίνουν αισθητά από το πραγματικό σχήμα.

## 5.2 Ανακατασκευές σε Στροφές και Μετατοπίσεις

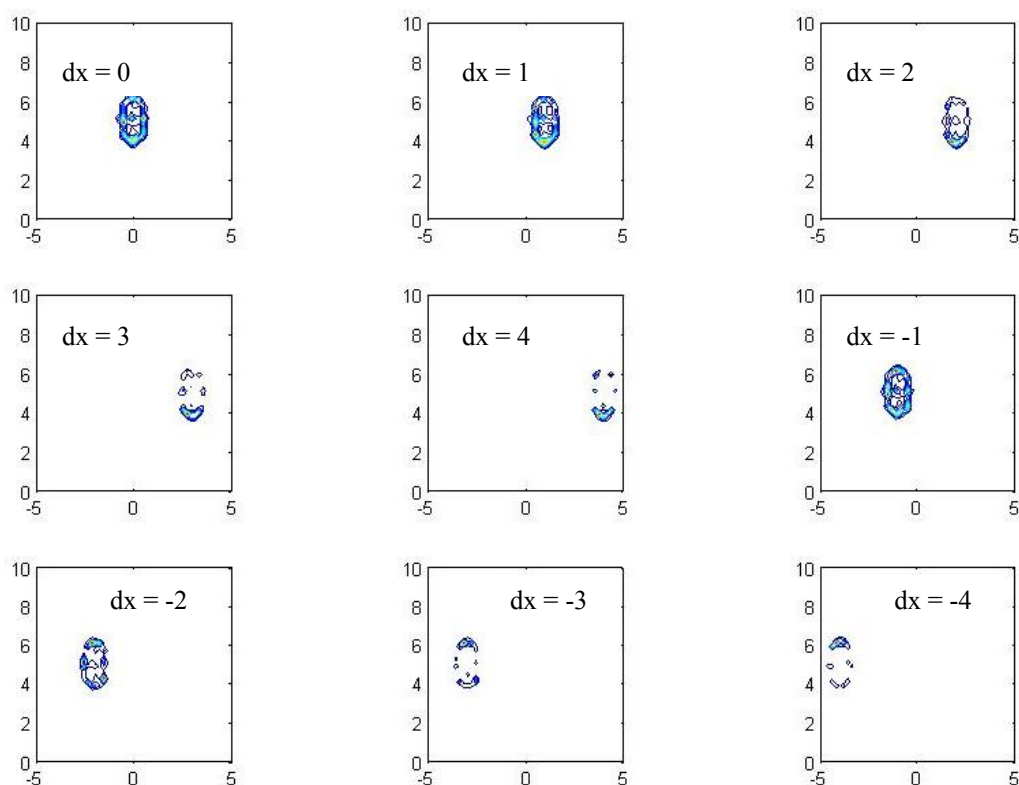
Στη συνέχεια μελετώνται ανακατασκευές σκεδαστών για διάφορες μετατοπίσεις ως προς τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα καθώς επίσης και στροφές αυτών. Σκοπός της εργασίας είναι η παρουσίαση κάποιων γενικών συμπερασμάτων και αποτελεσμάτων σε προβλήματα αντίστροφης σκέδασης. Για το λόγο αυτό παρόλο τη δυνατότητα του προγράμματος να κατασκευάζει πλήθος σκεδαστών με παραμέτρους οι οποίες καθορίζονται από εμάς επιλέγεται να εξεταστεί ο σκεδαστής σχήματος έλλειψης για τις μετατοπίσεις και ο «χαρταετός» και το «φιστίκι» στις στροφές .

### 5.2.1 Ανακατασκευές σε Οριζόντιες και Κατακόρυφες Μετατοπίσεις

Οι αρχικές παράμετροι της έλλειψης που μελετάται είναι  $par=[0.6 \ 1.2 \ dx \ dy \ 0 \ 0 \ 5]$ . Οι τιμές  $par(3)$  και  $par(4)$  συμβολίζονται με  $dx$  και  $dy$  αντίστοιχα για να δειχθεί ότι μεταβάλλονται. Στο σχήμα 5.6 απεικονίζονται κατακόρυφες μετατοπίσεις, στο σχήμα 5.7 οριζόντιες και στο 5.8 οριζόντιες και κατακόρυφες μαζί. Επιλέχθηκε το πρόγραμμα να τρέξει σε όλες τις περιπτώσεις για τιμή κυματάριθμου  $ka = 6.9$ . Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω για άλλη τιμή κυματάριθμου μπορεί να υπάρξουν διαφορές. Σκοπός των παρακάτω ανακατασκευών είναι να αναδειχθεί η διαφορά που υπάρχει στις ανακατασκευές όταν ο σκεδαστής μετατοπίζεται οριζόντια και κατακόρυφα.



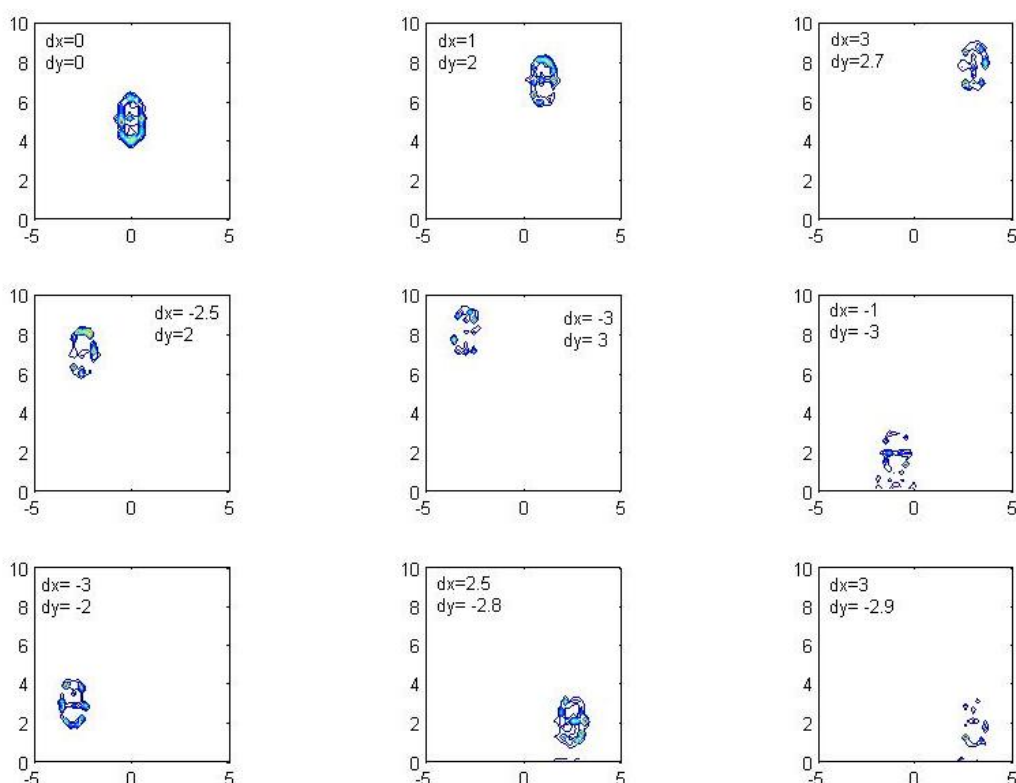
**Σχήμα 5.6** Μετατοπίσεις έλλειψης κατά τον κατακόρυφο άξονα. Το κέντρο της έλλειψης αρχικά ήταν στο σημείο (0, 5).



**Σχήμα 5.7** Μετατοπίσεις έλλειψης κατά τον οριζόντιο άξονα. Το κέντρο της έλλειψης αρχικά ήταν στο σημείο (0, 5).

Από το σχήμα 5.6 παρατηρείται ότι οι ανακατασκευές στις κατακόρυφες μετατοπίσεις είναι γενικά καλές. Όταν ο σκεδαστής πλησιάζει τα σύνορα τότε υπάρχουν αλλοιώσεις στα σχήματα. Στο πάνω σύνορο στην ελεύθερη επιφάνεια, ( $y = 10$ ) η ανακατασκευή είναι πολύ καλύτερη από ότι στον πυθμένα, ( $y = 0$ ). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στα δύο σύνορα έχουν επιβληθεί διαφορετικές συνοριακές συνθήκες, στην ελεύθερη επιφάνεια συνθήκη τύπου Dirichlet και στον πυθμένα τύπου Neumann.

Από το σχήμα (5.7) παρατηρείται ότι καθώς πλησιάζουμε στις θέσεις  $x = \pm 5$  δηλ. στις θέσεις των πηγών των ακουστικών κυμάτων υπάρχει αλλοίωση στις ανακατασκευές. Η καλύτερη μορφή ανακατασκευής επιτυγχάνεται όταν δεν υπάρχει μετατόπιση. Σε γενικές γραμμές όμως οι ανακατασκευές είναι ικανοποιητικές.



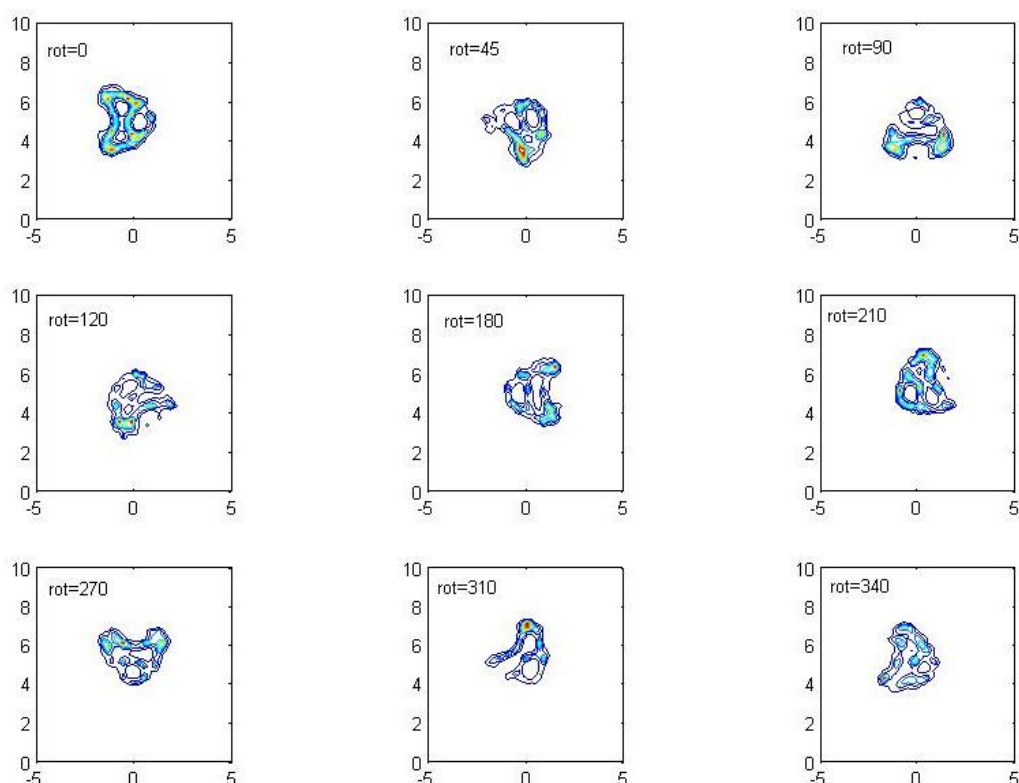
**Σχήμα 5.8** Μετατοπίσεις έλλειψης κατά τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Το κέντρο της έλλειψης αρχικά ήταν στο σημείο (0, 5).

Στο σχήμα 5.8 μετατοπίζουμε την έλλειψη ταυτόχρονα οριζόντια και κατακόρυφα. Από τα σχήματα 5.6 – 5.8 παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε τα σύνορα του κυματοδηγού οι ανακατασκευές αλλοιώνονται. Γενικότερα οι ανακατασκευές της έλλειψης όπως προκύπτουν είναι αρκετά ικανοποιητικές ακόμη και όταν αυτή εφάπτεται στα σύνορα του κυματοδηγού, ιδιαίτερα στην ελεύθερη επιφάνεια.

### 5.2.2 Ανακατασκευές Σκεδαστή σε Στροφές

Η μεταβλητή  $par(5)$  στρέφει τα σημεία  $x$  και  $y$  του σκεδαστή κατά  $par(5)$  μοίρες. Ο πίνακας στροφής στο διδιάστατο επίπεδο είναι  $R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ .

Αρχικά επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί το σχήμα του χαρταετού και να στραφεί γύρω από το κέντρο του το (0, 5). Ο κυματάριθος που χρησιμοποιούμε είναι  $ka = 3.71$ . Οι παράμετροι που χρησιμοποιούμε είναι  $par = [1.5 \ 0.65 \ 0 \ 5 \ rot \ 0 \ 0]$ . Εάν επιλεγθεί το κέντρο δηλ.  $(par(6), par(7)) \neq (0, 0)$  τότε θα προκληθεί μετατόπιση στο επίπεδο. Τέτοια περίπτωση εξετάζεται στο σχήμα 5.10.

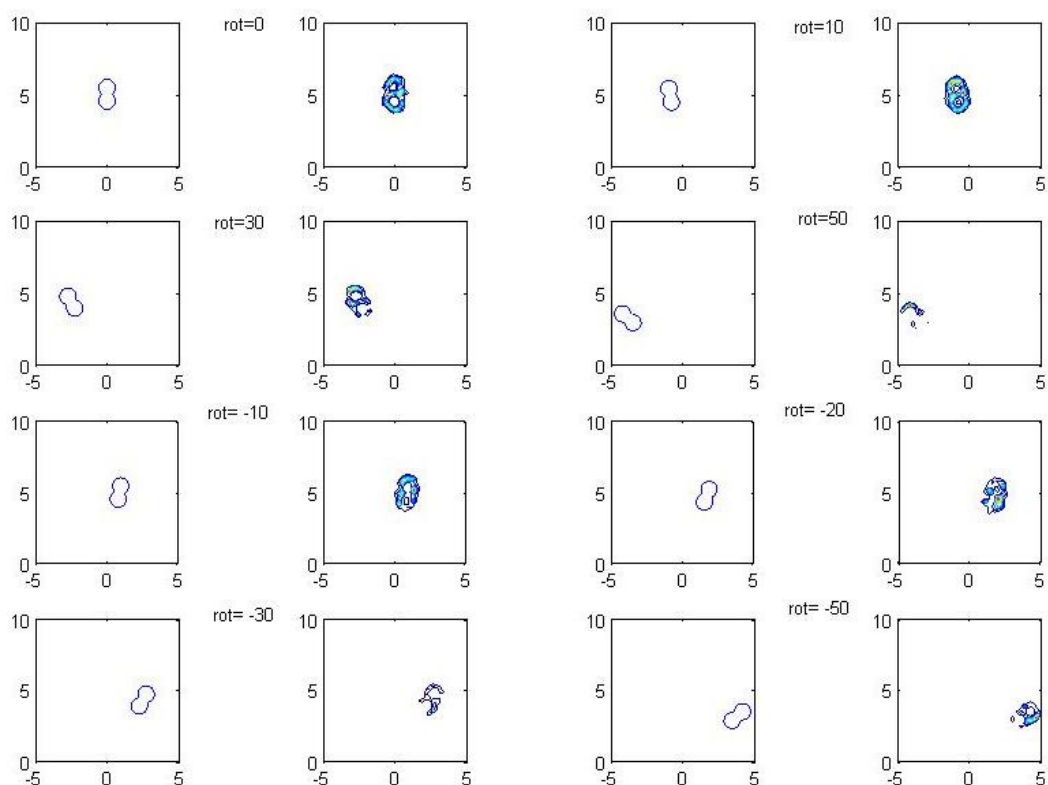


**Σχήμα 5.9** Ανακατασκευές «χαρταετού» σε στροφές γύρω από το κέντρο του (0, 5).

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρείται ότι γίνεται καλή ανακατασκευή των σκεδαστών σε στροφές. Υπάρχουν αλλοιώσεις κατά τη στρέψη αλλά το σχήμα είναι ευδιάκριτο.

Στο σχήμα 5.10 που ακολουθεί στρέφεται το «φιστίκι», το κέντρο του οποίου είναι το σημείο (0, 5) σε διάφορες γωνίες. Στη στρέψη αυτή προσέχουμε να μην μετατοπιστεί ο σκεδαστής εκτός του χωρίου του κυματοδηγού. Για το λόγο αυτό οι γωνίες στροφής όπως φαίνονται παρακάτω είναι περιορισμένες. Οι παράμετροι του φιστικιού είναι  $ka=4.35$  και  $par = [0.15 \ 1.1 \ 0 \ 0 \ rot \ 0 \ 5]$ . Στο σχήμα 5.9 αριστερά φαίνεται ο σκεδαστής όπως έχει στραφεί και στα δεξιά του η ανακατασκευή αυτού.

Από το σχήμα 5.10 παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο σχήμα ανακατασκευάζεται ικανοποιητικά για μικρές γωνίες στρέψης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά τη στρέψη υπάρχει και μετατόπιση του σκεδαστή πλησιάζοντας τα σύνορα του κυματοδηγού με αποτέλεσμα η ανακατασκευή να μην είναι καλή.



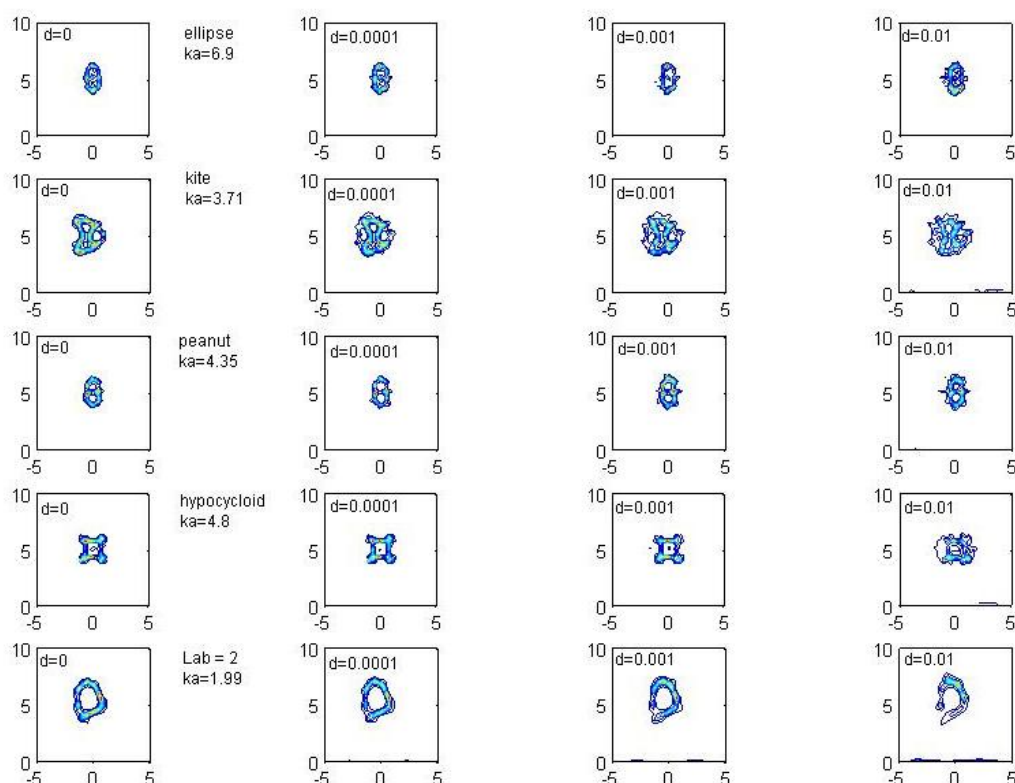
**Σχήμα 5.10** Μετατοπίσεις φιστικιού κατά τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Το κέντρο της έλλειψης αρχικά ήταν στο σημείο (0, 5).

### 5.3 Ανακατασκευές Σκεδαστή με Θόρυβο

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε θόρυβο στα δεδομένα μας δηλαδή θα θεωρήσουμε κάποιο σφάλμα για τον πίνακα του near field σκέδασης. Αυτό θα γίνει διαταράσσοντας τυχαία λίγο τις τιμές του πίνακα αυτού.

Σε όλους τους σκεδαστές το κέντρο τους βρίσκεται στο σημείο (0, 5) εκτός του σχήματος με παράμετρο  $lab = 2$  και οι κυματάρθρωμοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αυτοί για τους οποίους υπήρξε καλύτερη ανακατασκευή στα σχήματα 5.1 – 5.5.

Όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα ακόμη και με θόρυβο η «απλή δειγματική μέθοδος» είναι αρκετά αξιόπιστη και δίνει αρκετά καλές ανακατασκευές. Αν από την τιμή  $d = 0.001$  και πέρα εισάγουμε και άλλο θόρυβο τότε το σχήμα αλλοιώνεται αισθητά και οι ανακατασκευές δεν είναι ικανοποιητικές. Μετρήσεις όμως με τέτοιες τιμές θορύβου φανερώνουν μεγάλο σφάλμα και δεν ενδείκνυνται γενικά για χρήση. Τα γράμματα  $d$  πάνω από τις ανακατασκευές δηλώνουν τον θόρυβο. Για  $d = 0$  δεν υπάρχει θόρυβος, για  $d = 0.0001$  σημαίνει πως στα δεδομένα έχουν προστεθεί τυχαίες τιμές πολλαπλασιασμένες με  $0.0001$ . Αντίστοιχα και για το  $d = 0.001$  και το  $d = 0.01$ .

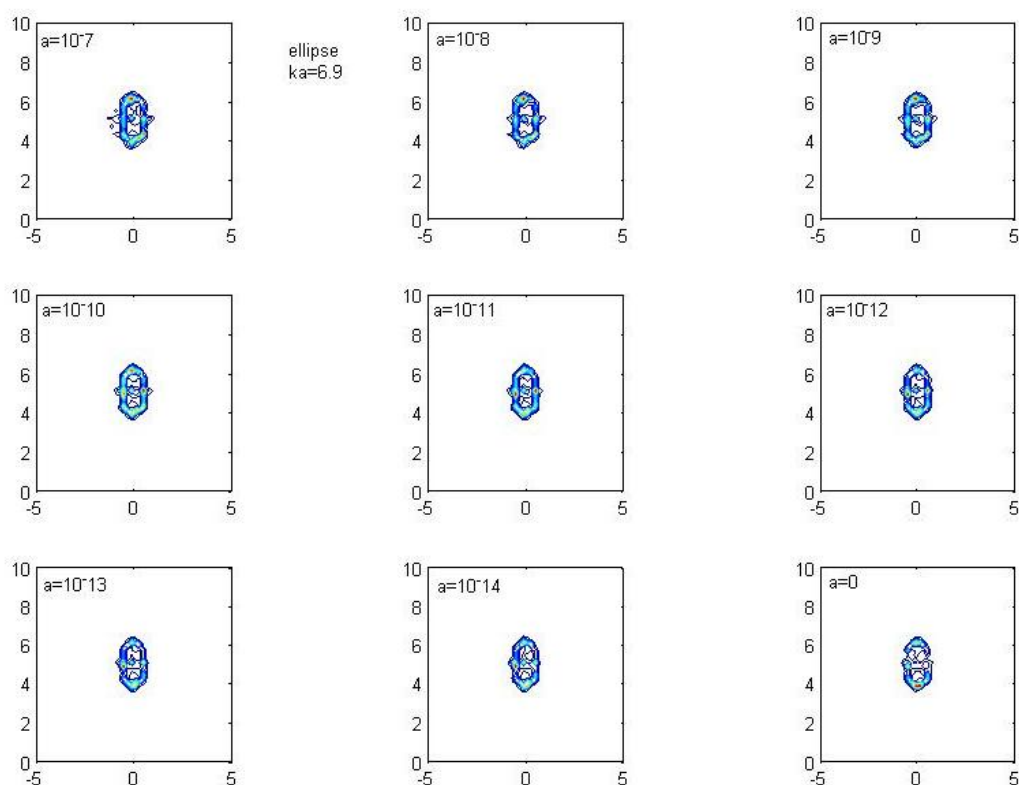


**Σχήμα 5.11** Ανακατασκευές σκεδαστών με θόρυβο.

### 5.4 Ανακατασκευές για Διάφορες Τιμές του Συντελεστή Ομαλοποίησης $\alpha$ .

Σε όλη την προηγούμενη ανάλυση ο συντελεστής ομαλοποίησης  $\alpha$  ήταν  $10^{-12}$ . Η τιμή αυτή επιλέχθηκε ώστε να ικανοποιεί όλες τις περιπτώσεις των σκεδαστών. Ο συντελεστής ομαλοποίησης εξαρτάται από το σχήμα του σκεδαστή. Για κάποια σχήματα τιμές μικρότερες του  $10^{-12}$  δίνουν καλύτερες ανακατασκευές όπως και για κάποια άλλα τιμές μεγαλύτερες δίνουν καλύτερα αποτελέσματα. Στα σχήματα που ακολουθούν περιέχονται ανακατασκευές σε σχέση με την τιμή ομαλοποίησης  $\alpha$ .

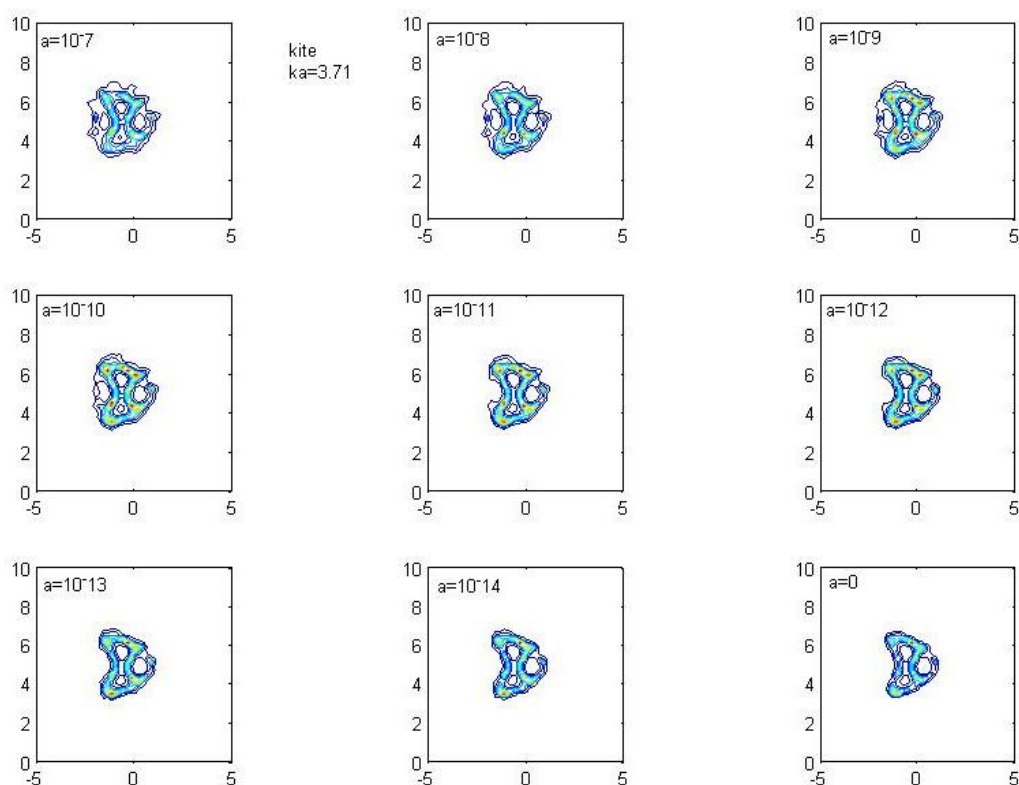




**Σχήμα 5.12** Ανακατασκευές έλλειψης σε σχέση με το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα για τιμές του συντελεστή ομαλοποίησης μικρότερες και μεγαλύτερες του  $10^{-11}$  οι ανακατασκευές αλλοιώνονται. Γενικά οι ανακατασκευές είναι πολύ ικανοποιητικές για όλες τις παραπάνω τιμές ακόμη και στις περιπτώσεις που ο συντελεστής ομαλοποίησης είναι  $10^{-7}$  και 0. Όταν η τιμή ομαλοποίησης είναι 0 τότε έχουμε προφανώς την μέθοδο της ιδιάζουσας παραγοντοποίησης.

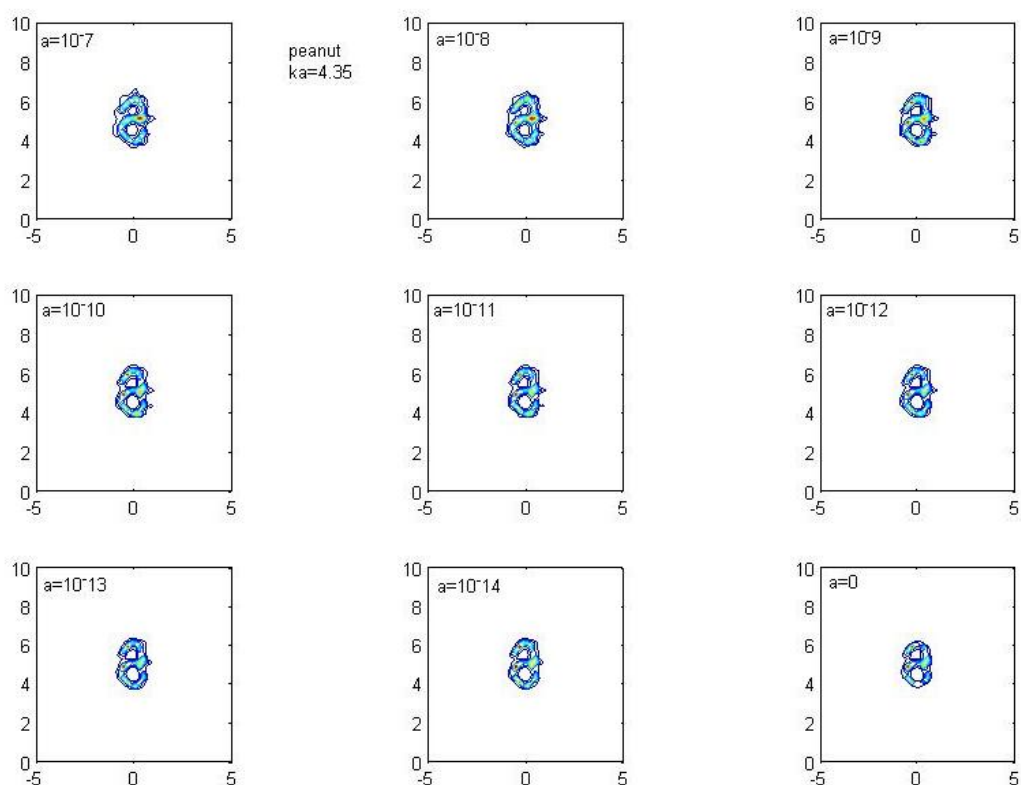
Στο σχήμα 5.13 που ακολουθεί παρουσιάζονται ανακατασκευές του «χαρταετού» σε συνάρτηση με το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .



**Σχήμα 5.13** Ανακατασκευές «χαρταετού» σε συνάρτηση με το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .

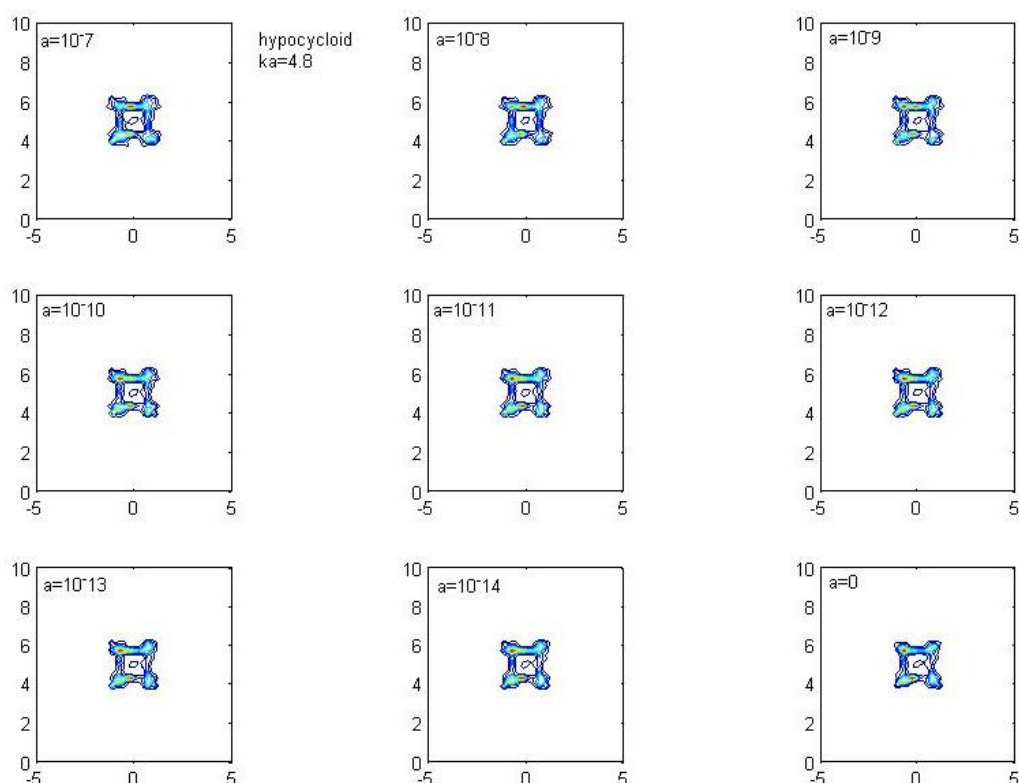
Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα καθώς η τιμή του συντελεστή ομαλοποίησης μικραίνει η ανακατασκευή γίνεται καλύτερη. Μάλιστα όταν η τιμή του συντελεστή ομαλοποίησης είναι  $0$  το σχήμα το περίγραμμα του σκεδαστή ταυτίζεται σχεδόν με το πρωτότυπο. Όταν η τιμή ομαλοποίησης είναι  $10^{-12}$  αποτυπώνονται καλύτερα οι τιμές των μεγάλων τιμών γύρω από το σύνορο που εμφανίζονται με έντονο χρώμα.

Από το σχήμα 5.14 που ακολουθεί παρατηρείται ότι οι ανακατασκευές του «φιστικιού» είναι ικανοποιητικές για όλες τις τιμές του συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ . Όσο μειώνεται ο συντελεστής ομαλοποίησης οι ανακατασκευές είναι καλύτερες. Η τιμή του συντελεστή  $a$  για τον οποίο επιτυγχάνεται καλύτερη ανακατασκευή είναι  $a = 0$ .



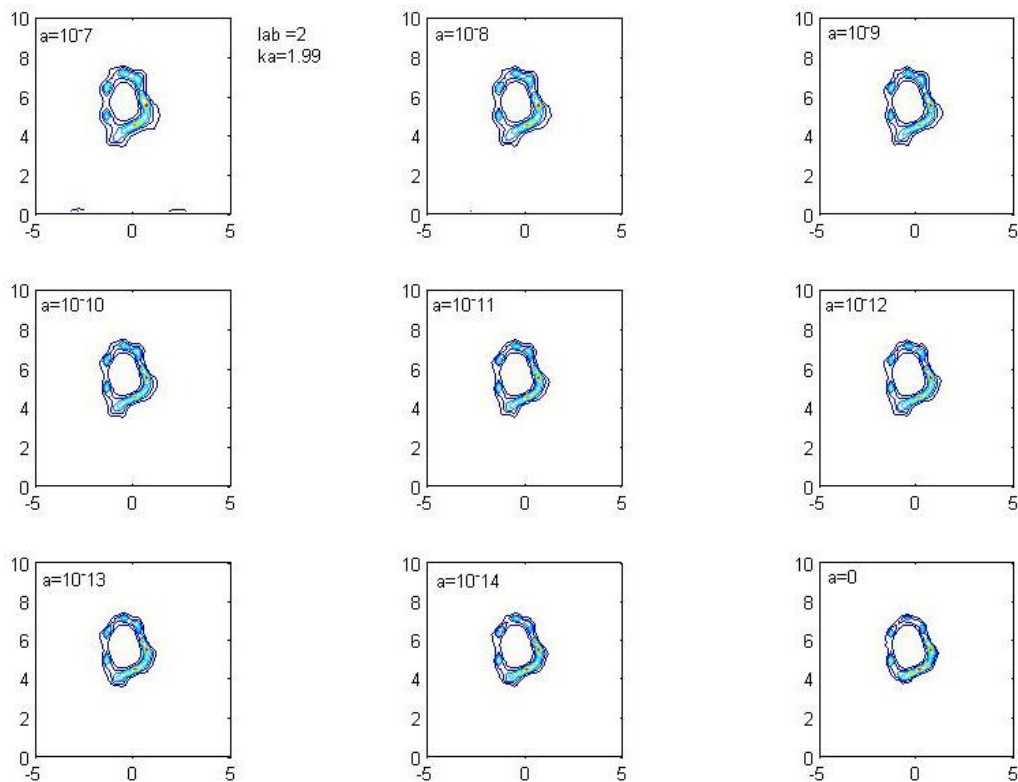
**Σχήμα 5.14** Ανακατασκευές «φιστικιού» σε συνάρτηση με το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .

Στο σχήμα 5.15 παρατηρείται ότι για όλες τις τιμές του συντελεστή ομαλοποίησης  $a$  οι ανακατασκευές είναι ικανοποιητικές και σχεδόν όλα τα σχήματα μοιάζουν να είναι ταυτόσημα. Ενδεχομένως για άλλες τιμές των παραμέτρων να υπάρχουν μεγάλες διαφορές μεταβάλλοντας το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ . Για το συγκεκριμένο σχήμα και τις συγκεκριμένες παραμέτρους, ( $\text{par} = [1.5 \ 0 \ 0 \ 5 \ 45 \ 0 \ 0]$ ,  $k_a = 4.8$ ) η μεταβολή της τιμής του συντελεστή ομαλοποίησης δεν επιφέρει μεγάλες αλλαγές στις ανακατασκευές.



**Σχήμα 5.15** Ανακατασκευές σχήματος «hypocycloid» σε συνάρτηση με το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .

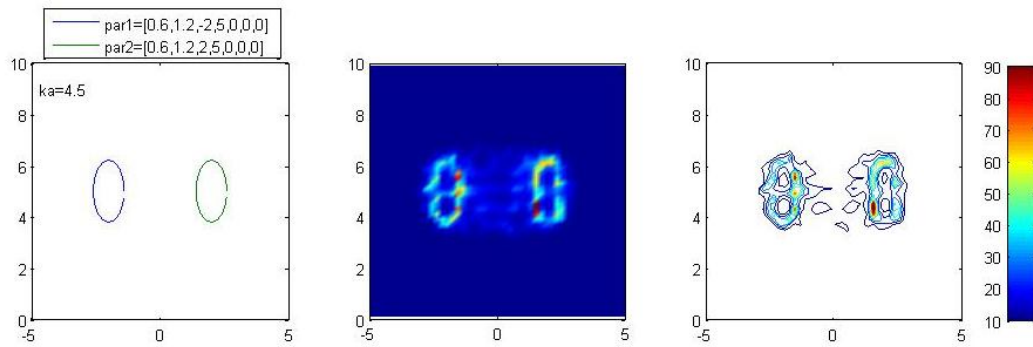
Στο σχήμα 5.16 παρουσιάζονται οι ανακατασκευές όπως προκύπτουν για το σχήμα με παραμέτρους  $lab = 2$ ,  $par = [0.91 \ 0.7 \ -1 \ 5 \ 0 \ 0.35 \ 0.3]$  και  $ka = 1.99$ . Από το παρακάτω σχήμα παρατηρείται ότι με τη μείωση του συντελεστή ομαλοποίησης οι ανακατασκευές που προκύπτουν γίνονται καλύτερες. Γενικά για όλες τις τιμές των συντελεστών οι ανακατασκευές είναι πολύ καλές. Όπως έχει ειπωθεί για άλλες τιμές των παραμέτρων ενδέχεται να υπάρχουν μεγάλες διαφορές μεταβάλλοντας το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .



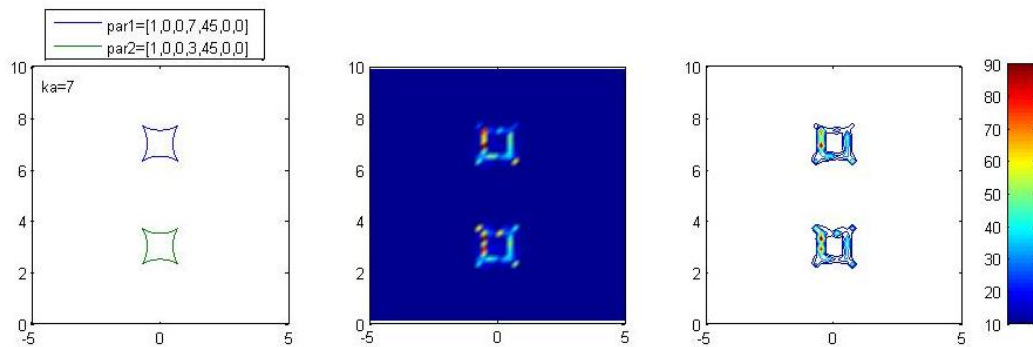
**Σχήμα 5.16** Ανακατασκευές σχήματος με παράμετρο  $lab=2$  και  $par = [0.91 \ 0.7 \ -1 \ 5 \ 0 \ 0.35 \ 0.3]$  σε συνάρτηση με το συντελεστή ομαλοποίησης  $a$ .

### 5.5 Ανακατασκευές Δύο Σκεδαστών στον Κυματοδηγό

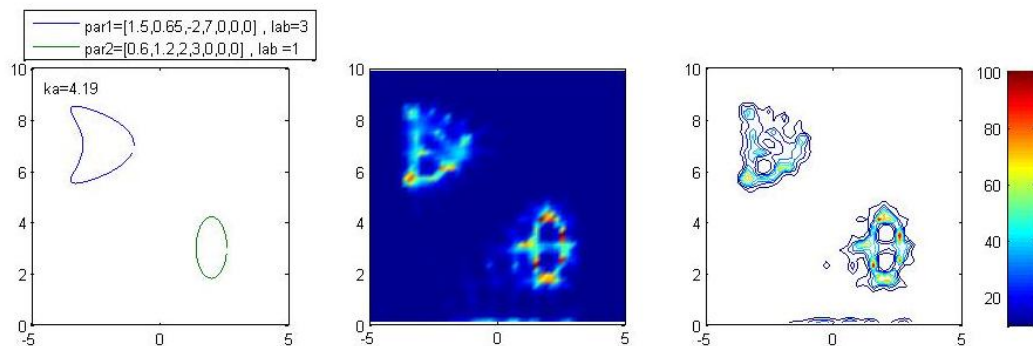
Στη συνέχεια γίνονται ανακατασκευές δύο σκεδαστών στον κυματοδηγό. Παρατηρείται από την αρχική ανάλυση και τα παρακάτω σχήματα ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες οι ανακατασκευές είναι πολύ καλές. Επίσης οι τιμές των κυματάριθμων για τους οποίους υπήρξε καλή ανακατασκευή διαφέρει από αυτούς που προέκυψε όταν στον κυματοδηγό ήταν ένα σχήμα. Στα ακόλουθα σχήματα παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά σχήματα στα οποία υπήρξαν καλές ανακατασκευές.



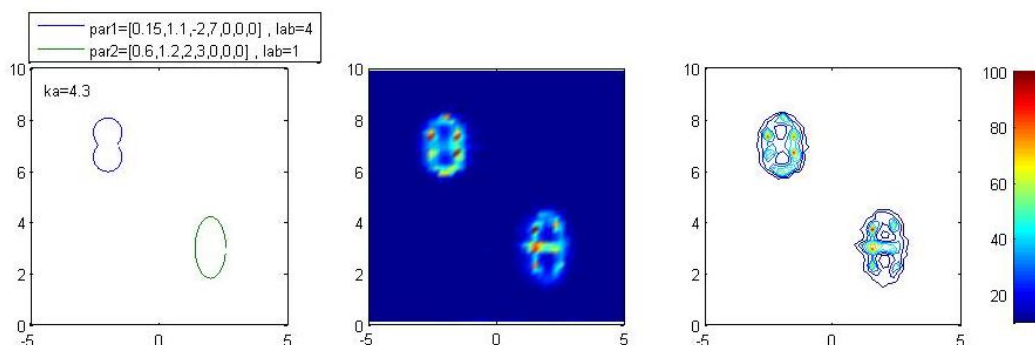
**Σχήμα 5.17** Ανακατασκευή δύο ελλείψεων στον κυματοδηγό. Η τιμή του κυματάριθμου είναι 4.5, η παράμετρος ομαλοποίησης  $10^{-12}$ . Οι παράμετροι  $par$  φαίνονται πάνω στο σχήμα.



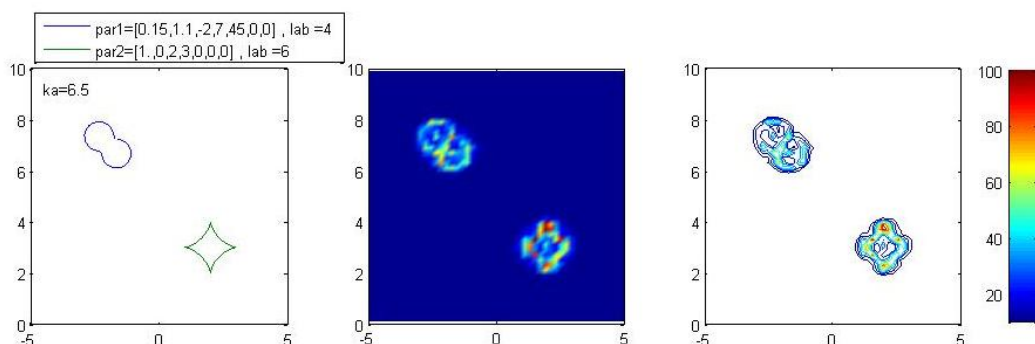
**Σχήμα 5.18** Ανακατασκευή δύο σχημάτων hyperbolic στον κυματοδηγό. Η τιμή του κυματάριθμου είναι 7, η παράμετρος ομαλοποίησης  $10^{-12}$ . Οι παράμετροι  $par$  φαίνονται πάνω στο σχήμα.



**Σχήμα 5.19** Ανακατασκευή δύο σχημάτων, «χαρταετού» και έλλειψης στον κυματοδηγό. Η τιμή του κυματάριθμου είναι 4.19, η παράμετρος ομαλοποίησης  $10^{-12}$  και οι παράμετροι  $par$  φαίνονται πάνω στο σχήμα.



**Σχήμα 5.20** Ανακατασκευή δύο σχημάτων, «φιστικιού» και έλλειψης στον κυματοδηγό. Η τιμή του κυματάριθμου είναι 4.3, η παράμετρος ομαλοποίησης  $10^{-12}$ . Οι παράμετροι par φαίνονται πάνω στο σχήμα.

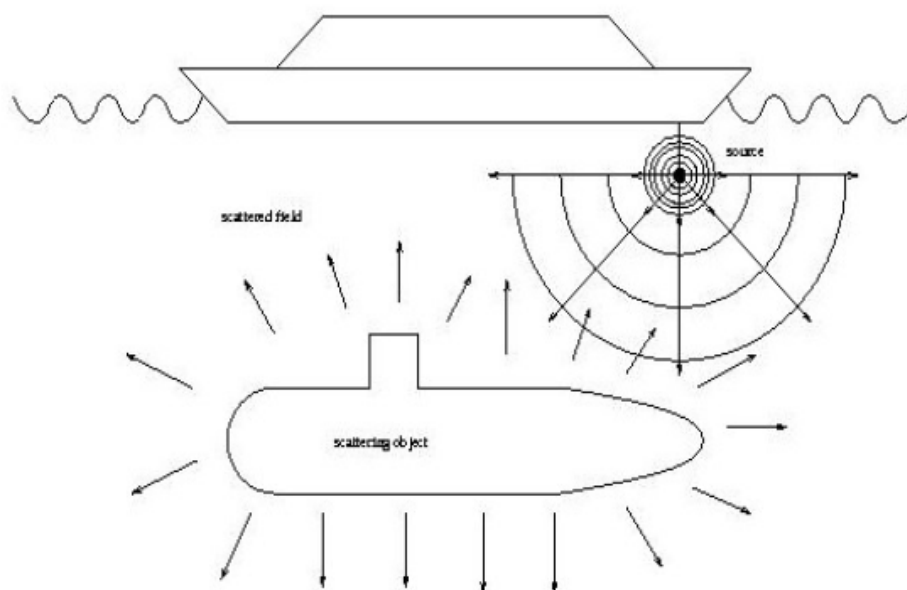


**Σχήμα 5.21** Ανακατασκευή δύο σχημάτων, «φιστικιού» και hypocycloid στον κυματοδηγό. Η τιμή του κυματάριθμου είναι 6.5, η παράμετρος ομαλοποίησης  $10^{-12}$ . Οι τιμές των παραμέτρων par φαίνονται πάνω στο σχήμα.

Γενικότερα φαίνεται ότι η «απλή δειγματική μέθοδος» δίνει καλά αποτελέσματα και για δύο σχήματα στον κυματοδηγό. Οι πιο δύσκολες περιπτώσεις για να επιτευχθεί καλή ανακατασκευή είναι όταν τα σχήματα βρίσκονται κοντά μεταξύ τους ή είναι το ένα πίσω από το άλλο όπως συμβαίνει στο σχήμα 5.17. Αυτό ίσως να οφείλεται στη μορφή του σκεδαζόμενου πεδίου ανάμεσα στους σκεδαστές με αποτέλεσμα να μην διακρίνονται τα σχήματα στις ανακατασκευές. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 5.17 που παρόλο που η ανακατασκευή είναι καλή εντούτοις μεταξύ των σκεδαστών διακρίνονται κάποιες διαταραχές.

## 5.6 Ανακατασκευές Σκεδαστών με τις Πηγές σε Οριζόντια Θέση

Από επιχειρησιακή σκοπιά και σε πρακτικές εφαρμογές όπως για παράδειγμα η ταυτοποίηση αντικειμένων από ένα πλοίο είναι σκόπιμο οι πηγές των ακουστικών κυμάτων και οι δέκτες να βρίσκονται σε οριζόντια θέση όπως φαίνεται στο σχήμα (5.22).

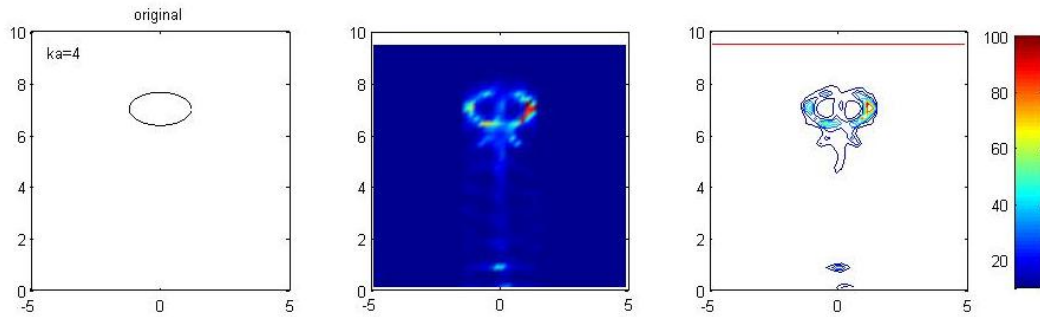


**Σχήμα 5.22** Τυπικό πρόβλημα σκέδασης στο θαλάσσιο περιβάλλον.

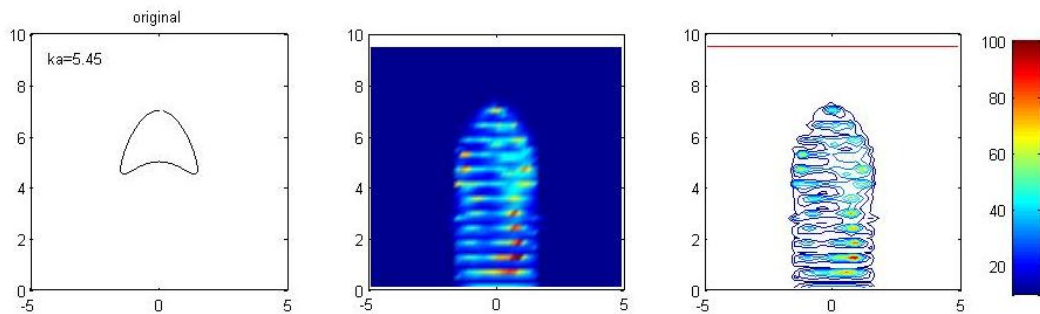
Η «απλή δειγματική μέθοδος» παρόλο που είναι υπολογιστικά γρήγορη και δεν απαιτεί γνώση της συνθήκης που ισχύει στο σύνορο του σκεδαστή, έχει ένα μειονέκτημα στο γεγονός ότι απαιτεί γνώση του σκεδαζόμενου πεδίου για πολλές διευθύνσεις πρόσπτωσης  $\theta$  και παρατήρησης  $\varphi$ . Έτσι κατά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής ξέρουμε ότι θα πρέπει να θυσιάσουμε στις προσδοκίες μας ακρίβεια και λεπτομέρεια στη λύση του προβλήματος, (Colton D. and Kirsch A., 1996). Στην περίπτωση που τοποθετήσουμε τις πηγές και τους δέκτες οριζόντια και μόνο προς τη μία πλευρά οι προσδοκίες μας θα πρέπει να είναι μικρότερες.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου με τις πηγές να βρίσκονται σε οριζόντια θέση οι ανακατασκευές δεν ήταν τόσο ικανοποιητικές όσο υπήρξαν με τις πηγές σε κατακόρυφη θέση. Στα παρακάτω σχήματα εμφανίζονται κάποια χαρακτηριστικά σχήματα στα οποία υπήρξαν ικανοποιητικές ανακατασκευές σκεδαστών.

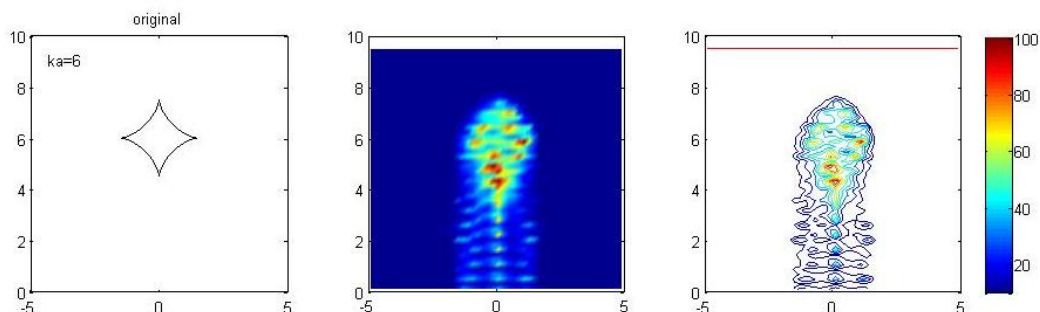




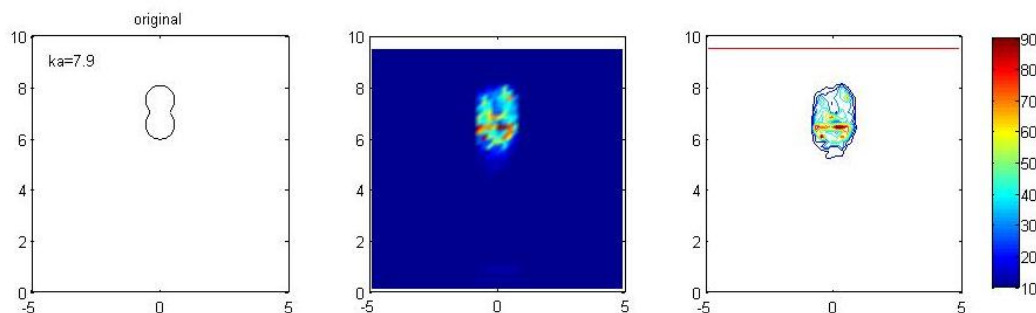
**Σχήμα 5.23** Ανακατασκευή έλλειψης με τις πηγές να βρίσκονται σε οριζόντια θέση μισό μέτρο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα με την κόκκινη γραμμή. Οι παράμετροι του παραπάνω σχήματος είναι  $ka=4$ ,  $par=[1.2 \ 0.64 \ 0 \ 7 \ 0 \ 0 \ 0]$  και  $lab=1$ . Η παράμετρος ομαλοποίησης είναι  $10^{-12}$ .



**Σχήμα 5.24** Ανακατασκευή «χαρταετού» με τις πηγές να βρίσκονται σε οριζόντια θέση μισό μέτρο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα με την κόκκινη γραμμή. Οι παράμετροι του παραπάνω σχήματος είναι  $ka=5.45$ ,  $par=[1.5 \ 0.65 \ 0 \ 6 \ 90 \ 0 \ 0]$  και  $lab=1$ . Η παράμετρος ομαλοποίησης είναι  $10^{-12}$ .



**Σχήμα 5.25** Ανακατασκευή hypocycloid σχήματος με τις πηγές να βρίσκονται σε οριζόντια θέση μισό μέτρο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα με την κόκκινη γραμμή. Οι παράμετροι του παραπάνω σχήματος είναι  $ka=6$ ,  $par=[1.5 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0]$  και  $lab=1$ . Η παράμετρος ομαλοποίησης είναι  $10^{-12}$ .



**Σχήμα 5.26** Ανακατασκευή φιστικιού με τις πηγές να βρίσκονται σε οριζόντια θέση μισό μέτρο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα με την κόκκινη γραμμή. Οι παράμετροι του παραπάνω σχήματος είναι  $ka=7.9$ ,  $par=[0.15 \ 1.1 \ 0 \ 7 \ 0 \ 0]$  και  $lab=4$ . Η παράμετρος ομαλοποίησης είναι  $10^{-12}$ .

Κατά τις ανακατασκευές σκεδαστών με τις πηγές να βρίσκονται σε οριζόντια θέση παρατηρήθηκε ότι καθώς οι σκεδαστές πλησίαζαν τον πυθμένα και τα σύνορα  $x = \pm 5$  δεν υπήρχε καθόλου ευδιάκριτη ανακατασκευή. Όπως ειπώθηκε και πιο πάνω ήταν αναμενόμενο να μην υπάρξουν ικανοποιητικές ανακατασκευές. Εξαιρούνται η έλλειψη και το «φιστίκι» όπου για τις συγκεκριμένες παραμέτρους επιτεύχθηκαν καλές ανακατασκευές και μάλιστα στην περίπτωση της έλλειψης η ανακατασκευή είναι σχεδόν τέλεια. Στις άλλες περιπτώσεις με υποθέσεις μπορούμε να καταλήξουμε στο σχήμα του σκεδαστή καθώς κατά το ήμισυ υπάρχει ευδιάκριτη ανακατασκευή αυτού ενώ το υπόλοιπο κομμάτι δεν ανταποκρίνεται στο πραγματικό σχήμα.

## 5.7 Συμπεράσματα

Κατά την λύση του αντιστρόφου προβλήματος μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα.

Η «απλή δειγματική μέθοδος» έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα στην ανακατασκευή σκεδαστών στα οποία στο σύνορό τους ίσχυε συνθήκη τύπου Dirichlet. Καλές ανακατασκευές επιτυγχάνονται για μεγάλο εύρος κυματαριθμών και οι τιμές αυτών για τους οποίους υλοποιούνται τα καλύτερα αποτελέσματα εξαρτώνται από το σχήμα των σκεδαστών.

Οι μετατοπίσεις και οι στροφές των σκεδαστών προς τα σύνορα του κυματοδηγού αλλοιώνει τις ανακατασκευές ενώ οι καλύτερες επιτυγχάνονται όταν ο σκεδαστής βρίσκεται στο κέντρο του κυματοδηγού. Η εισαγωγή θορύβου στα δεδομένα αλλοιώνει τις ανακατασκευές ενώ μικρές τιμές αυτού δεν επιφέρουν μεγάλες αλλαγές. Επίσης παρατηρείται η εξάρτηση των ανακατασκευών των σκεδαστών από το συντελεστή ομαλοποίησης ανάλογα με το σχήμα του σκεδαστή. Σε κάποιες περιπτώσεις μείωση της τιμής του συντελεστή ομαλοποίησης βελτιώνει τα

σχήματα ενώ σε κάποιες άλλες βελτίωση επιτυγχάνεται με αύξηση της τιμής του συντελεστή ομαλοποίησης.

Οι ανακατασκευές δύο σχημάτων σκεδαστών στον κυματοδηγό υπήρξαν ικανοποιητικές και οι τιμές των κυματαριθμών στις οποίες επιτεύχθηκαν καλές ανακατασκευές είναι διαφορετικές από τις τιμές των κυματαριθμών όπου υπήρχε ένας σκεδαστής στον κυματοδηγό. Επίσης με την αλλαγή των θέσεων των πηγών αναδείχθηκε η αδυναμία της «απλής δειγματικής μεθόδου» να προσδιορίσει το σύνορο του σκεδαστή όταν υπάρχει έλλειψη πληροφορίας γύρω από το σκεδαστή. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται πως αν υπάρχει πληροφορία μόνο από τη μία πλευρά του σκεδαστή ανακατασκευές ικανοποιητικές επιτυγχάνονται για απλά σχήματα με λεία σύνορα και για συγκεκριμένες παραμέτρους αυτών. Γενικότερα μπορούμε να εξάγουμε ότι η «απλή δειγματική μέθοδος» επέφερε καλύτερα αποτελέσματα από τα αναμενόμενα ενώ σε αρκετές περιπτώσεις λειτούργησε άψογα.

## Βιβλιογραφία

- [1] Arens T., and Kirsch A.: *The factorization method in inverse scattering from periodic structures*. Inverse problem 19, (2003) 1195-1211. Printed in UK.
- [2] Charalambopoulos A., Gintides D., Kiriaki K., and Kirsch A.: *The factorization method for an acoustic waveguide*. WSPC, 2005.
- [3] Colton D., and Kirch A.: *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*. Inverse problem 12, (1996) 383-393. Printed in UK.
- [4] Colton D., and Kress R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. 2<sup>nd</sup> ed. Springer – Verlag, Berlin 1998.
- [5] Keller Joseph B., and Papadakis John S.: *Wave propagation and underwater acoustics*. Lectures notes in physics vol. 70, Springer-Verlag, New York 1977.
- [6] Kress R.: *Numerical Analysis*. Springer-Verlag, 1998.
- [7] Ramm A. G., and Makrakis G. N.: *Scattering by obstacles in acoustic waveguides*. Spectral and scattering theory, Plenum publishers, New York, (ed A. G. Ramm), 89-110(1998).
- [8] Xu Y.: *A simple method for imaging an obstacle in a shallow water waveguide*.
- [9] Xu Y.: *Uniqueness and computational results for obstacle inverse scattering in a water waveguide*.
- [10] Spiegel Murray R.: *Ανάλυση Fourier*. Schaum’s outline series, Mc Graw – Hill, New York, ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1978.
- [11] Αθανασούλης Γ., και Μπελιμπασάκης Κ.: *Κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον*. Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Κυματικά Φαινόμενα στο Θαλάσσιο Περιβάλλον», στο διατμηματικό μεταπτυχιακό πρόγραμμα: «Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία και Επιστήμη». Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2003.

- [12] Λυγιδάκη Α.: *Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων και η αριθμητική του επίλυση*. Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [13] Τραχανάς Σ.: *Μερικές διαφορικές εξισώσεις, σειρές Fourier και προβλήματα συνοριακών τιμών*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004.