



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ ΣΙΑΓΩΝΑΣ
ΥΠΟ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΕΛΥΝ ΣΑΚΚΑ

Επιβλέπων: Β.Γ. ΒΑΔΑΛΟΥΚΑ , Λέκτορας Ε.Μ.Π

Μέλη: Γ.Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ , Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Δ. ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ , Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στον Τομέα Μηχανικής του Ε.Μ. Πολυτεχνείου. Η υπόδειξη του θέματος έγινε από την Λέκτορα Β. Γ. Βαδαλούκα και η πραγματοποίηση του πειράματος έγινε και με τη βοήθεια του Αναπληρωτή Καθηγητή Γ. Α. Παπαδόπουλο, τους οποίους εκτιμώ βαθύτατα και τους ευχαριστώ για την ευκαιρία που μου έδωσαν να ασχοληθώ με έναν καινούριο τομέα έρευνας καθώς και να γνωρίσω μια πολύ ενδιαφέρουσα πειραματική διαδικασία που βασίζεται στην οπτική μέθοδο των καυστικών.

Ευχαριστώ επίσης όλους όσους με βοήθησαν να αποκτήσω τις απαραίτητες γνώσεις ώστε να διεκπεραιώσω την εργασία αυτή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	ΣΦΑΛΜΑ! ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΟΡΙΣΤΕΙ ΣΕΛΙΔΟΔΕΙΚΤΗΣ.
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</u>	
1.1 Γενικά	9
1.2 Κατάγματα προσώπου	9
1.3 Κατάγματα της κάτω γνάθου	Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.
1.4 Στοιχεία ανατομικής κάτω γνάθου	10
1.5 Μύες που κινούν την κάτω γνάθο και έχουν σχέση με τα κατάγματα του οστού αυτού	10
1.6 διαίρεση των καταγμάτων γενικώς	10
1.7 Αιτιολογία των καταγμάτων της κάτω γνάθου	12
1.8 Συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου	14
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ</u>	
2.1 Γενικά	18
2.2 Σχέσεις Τάσεων και Παραμορφώσεων στην Ελαστική Περιοχή	18
2.3 Η Επίπεδη Εντατική Κατάσταση	23
2.4 Η Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση	27
2.5 Η Γενικευμένη Επίπεδη Εντατική Κατάσταση	25
2.6 Μιγαδική Τασική Συνάρτηση	27
2.7 Κύριες τάσεις	33
2.8 Πολικές Συντεταγμένες	36
2.9 Συγκέντρωση τάσεων	36
2.10 Λεπτή πλάκα με κυκλική οπή	37
2.11 Ανάκλαση και Διάθλαση Ελαστικών Κυμάτων σε Ελεύθερη Επιφάνεια	44
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Η ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ</u>	
3.1 Γενικά	46
3.2 Επίδραση της Φόρτισης στον Οπτικό Δρόμο των Ανακλώμενων ή των Διερχόμενων Ακτινών	55
3.3 Η Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών	50
3.4 Εφαρμογή της Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά	52
3.5 Εφαρμογή της Μεθόδου των Καυστικών σε Οπή	55

3.6 Μεγέθυνση-Προσανατολισμός των Καυστικών	64
---	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	70
--	-----------

4.1 Γενικά	70
------------------	----

4.2 Παράμετροι πειράματος	70
---------------------------------	----

4.3 Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης	72
---	----

4.4 Αποτελέσματα	75
------------------------	----

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....ΣΦΑΛΜΑ! ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΟΡΙΣΤΕΙ ΣΕΛΙΔΟΔΕΙΚΤΗΣ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....ΣΦΑΛΜΑ! ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΟΡΙΣΤΕΙ ΣΕΛΙΔΟΔΕΙΚΤΗΣ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ ΣΙΑΓΩΝΑΣ ΥΠΟ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Στην εργασία αυτή μελετάται πειραματικά η διάδοση κύματος σε προσομοίωμα κάτω γνάθου. Συγκεκριμένα παρακολουθείται η πορεία του μετώπου τασικού παλμού, η ταχύτητά του, η πυκνότητα των τάσεων που αναπτύσσονται σε δοκίμιο από Plexiglas που προσομοιάζει κάτω γνάθο σε φυσική κλίμακα.

Η επιλογή προς μελέτη της κάτω γνάθου έγινε καθώς είναι το πλέον προέχον και εκτεθειμένο οστό του προσώπου. Για αυτό το λόγο είναι και συχνό φαινόμενο η ύπαρξη πολλαπλών καταγμάτων στην κάτω γνάθο του προσώπου.

Η πειραματική ανάλυση γίνεται με την βοήθεια της οπτικής μεθόδου των καυστικών. Σε κάθε δοκίμιο γίνεται λεπτή διάτρηση μικρών οπών, που αποτελούν ροζέτα τάσεων. Σύμφωνα με την θεωρία των καυστικών, όταν δέσμη μονοχρωματικού φωτός προσπέσει στο δοκίμιο, στην ζώνη γύρω από την οπή θα αποκλίνει, λόγω της αλλαγής του δείκτη διάθλασης και του πάχους του υλικού κατά την φόρτιση του, με αποτέλεσμα σε επίπεδο αναφοράς παράλληλο με το δοκίμιο να δημιουργείται μια ισχυρά φωτιζόμενη καμπύλη, η καυστική. Το σχήμα και οι διαστάσεις της καυστικής εξαρτώνται από την κατανομή τάσεων και ο προσανατολισμός της μας δίνει την διεύθυνση των κυρίων τάσεων. Έτσι είναι δυνατή η παρακολούθηση του μετώπου του τασικού παλμού και της διαφοράς των κυρίων τάσεων, κατά την διέλευση του.

Η δημιουργία τασικού παλμού επιτυγχάνεται από την κρούση του δοκιμίου με βλήμα αεροβόλου και για την αποτύπωση των φαινομένων χρησιμοποιείται μια Cranz-Schardin μηχανή ταχείας φωτογράφισης.

Η εργασία προσπαθεί να συμβάλει στην μελέτη του προβλήματος των καταγμάτων της κάτω γνάθου του προσώπου καθώς και στον πειραματικό έλεγχο των αναλυτικών μελετών με την βοήθεια πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύσσονται στην κατεύθυνση αυτή.

Τα περιεχόμενα κεφάλαια στην εργασία είναι τα εξής :

Κεφάλαιο 1 Κατάγματα προσώπου, όπου γίνεται μια εισαγωγή στα κατάγματα της κάτω γνάθου, στα ανατομικά στοιχεία της κάτω γνάθου , στους μύες που κινούν την κάτω γνάθο και έχουν σχέση με τα κατάγματα του οστού αυτού. Επίσης στο κεφάλαιο αυτό αναφέρεται μια διαίρεση των καταγμάτων γενικώς, η αιτιολογία και συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθο

Κεφάλαιο 2, Εισαγωγή στην Θεωρία του Τασικού Πεδίου, όπου αναφέρονται στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας, οι γενικές εξισώσεις στατικής ισότροπου ελαστικού μέσου καθώς και η επίλυση του προβλήματος της σπής υπό τάση.

Κεφάλαιο 3. Η Οπτική Μέθοδος των Καυστικών, όπου παρουσιάζεται η βασική θεωρία της μεθόδου και η εφαρμογή της στο πρόβλημα της σπής.

Κεφάλαιο 4. Πειραματική Διαδικασία, όπου γίνεται περιγραφή του δοκιμίου, της πειραματικής διάταξης, η αναλυτική παρουσίαση του πειράματος και ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Τέλος αναφέρονται τα συμπεράσματα και η ενδεικτική βιβλιογραφία

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εμβιομηχανική είναι ένας κλάδος της Βιολογίας και της Τεχνολογίας. Η ονομασία "Εμβιομηχανική" σχετίζεται ετυμολογικά με την λέξη "Μηχανική" και αναφέρεται στην εφαρμογή των αντιλήψεων και θεωριών του μηχανικού προκειμένου να γίνει προσομοίωση σε βασικά βιολογικά συστήματα. Η Εμβιομηχανική ασχολείται με τη μελέτη των δυνάμεων που ασκούνται σε βιολογικά συστήματα και πιο συγκεκριμένα στον άνθρωπο καθώς και με την κίνηση του σε διάφορες δραστηριότητες. Η Εμβιομηχανική επίσης προσομοιώνει το ανθρώπινο σώμα, τα μέλη, τα όργανά του και τη λειτουργία τους και η Χειρουργική αξιοποιεί τις δυνατότητες της προσομοίωσης ενθέτοντας μηχανικά "ανταλλακτικά" στο σώμα. [1]

Ειδικότερα στο θέμα της γναθοχειρουργικής έχουν γίνει μελέτες κυρίως σε επίπεδο αναλυτικής προσομοίωσης με πεπερασμένα στοιχεία και ενδεικτικά ανφέρονται μερικές εργασίες. [2,3,4,5].

Η εργασία προσπαθεί να συμβάλει στην μελέτη του προβλήματος των καταγμάτων της κάτω γνάθου που προκαλούνται από τα τροχαία ατυχήματα που χαρακτηρίστηκαν μάλιστα σαν "Τρίτη αίτια θανάτου" μετά τα κακοήθη νεοπλασμάτα και τα καρδιακά νοσήματα. Το πιο θανατηφόρο μέσο σήμερα δηλαδή το αυτοκίνητο, ευθύνεται, για ένα μεγάλο ποσοστό καταγμάτων των γνάθων. Για το λόγο αυτό άρχισε η συστηματική μελέτη τους από όλες τις πλευρές. Για την αντιμετώπισή τους, πήρε τελείως ιδιαίτερη σημασία η τραυματολογία στη Γναθοχειρουργική. Σπάνια ο τραυματίας από τροχαίο ατύχημα να μην έχει, όταν φέρει κατάγματα, και κάταγμα της γναθοπροσωπικής χώρας.

Εν τούτοις, εκτός από τα κατάγματα που οφείλονται σε τροχαία ατυχήματα, από αιτιολογική άποψη αναγνωρίζονται και πολλοί άλλοι παράγοντες σαν αίτιες καταγμάτων. Έτσι και οι σχετικές περιπτώσεις κάθε φορά καταγράφονται, ερευνώνται όσον αφορά το μηχανισμό που τα προκάλεσε, τη συχνότητα, το βαθμό της βίας που εξασκήθηκε, το φύλο και την ηλικία του καταγματία. Επίσης μελετάται το κάταγμα που συμβαίνει σε γνάθους με δόντια ή χωρίς δόντια (νωδές), ο τύπος του κατάγματος, οι αδύνατες θέσεις στα οστά, οι παρεκτοπίσεις των σπασμένων τμημάτων κ.α.

Εφόσον όμως συμβούν τα κατάγματα, μεμονωμένα ή συνδυασμένα με κατάγματα άλλων οστών, μελετώνται συστηματικά πολλά και διάφορα προβλήματα, που παρουσιάζονται και έχουν σχέση με αυτά όπως είναι οι πρώτες βοήθειες για την αντιμετώπιση καθεμίας περιπτώσεως, η μεταφορά του καταγματία σε τραυματολογικό κέντρο, η ανάνηψη του από πιθανή καταπληξία (SHOCK), ή αντιμετώπιση της

αιμορραγίας, ή ανακούφιση από τον πόνο κ.ά. Για αυτό το εξωτερικό ιατρείο στο οποίο μεταφέρεται ο καταγματίας πρέπει να είναι εξοπλισμένο ακριβώς για τέτοιες καταστάσεις

Αλλά και έπειτα από τη διάγνωση των καταγμάτων αυτών παρουσιάζονται πολλά προβλήματα . Γι' αυτό και οι σχετικές γνώσεις και μελέτες συνεχώς επεκτείνονται για την καλύτερη θεραπευτική αντιμετώπιση του τραυματία, με τις κατάλληλες μεθόδους, ανάλογα με κάθε περίπτωση.

Από όσα σκιαγραφήθηκαν παραπάνω με αδρές γραμμές, αντιλαμβάνεται, ο καθένας τη σπουδαιότητα του κεφαλαίου των καταγμάτων των γνάθων και πόσο αξιόλογη είναι η θέση που πρέπει να κατέχει το κεφάλαιο αυτό στη Γναθοχειρουργική. Επομένως δεν είναι υπερβολή να λεχθεί ότι το θέμα αυτό χρειάζεται πλήρη μελέτη όχι μόνο από τους Γναθοχειρουργούς αλλά και από εκείνους που ασκούν τη Γενική Οδοντιατρική και ότι είναι επιτακτική η ανάγκη της δημιουργίας Γναθοχειρουργικών Κέντρων στα Γενικά Νοσοκομεία.[6]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούν τα κατάγματα της κάτω γνάθου του προσώπου, τα ανατομικά στοιχεία της κάτω γνάθου και οι μύες που κινούν την κάτω γνάθο και έχουν σχέση με τα κατάγματα του οστού αυτού. Επίσης επειδή η διαίρεση των καταγμάτων δεν είναι εύκολη υπόθεση λόγω της ύπαρξης πολλαπλών καταγμάτων σε περισσότερα από ένα οστά γίνεται μια γενικότερη διαίρεση των καταγμάτων τέλος αναφέρονται οι αιτίες και η συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου

1.2 Κατάγματα του προσώπου

Η ταξινόμηση των καταγμάτων του προσώπου δεν είναι εύκολη. Στην καθημερινή κλινική πράξη είναι σύνηθες φαινόμενο η παρουσία πολλαπλών καταγμάτων που αφορούν σε περισσότερα από ένα οστά και επομένως οι συνδυασμοί τους δύσκολα ταξινομούνται σε μια συγκεκριμένη κατηγορία. Το πρόσωπο μπορεί να χωριστεί σε κάτω, μέσο και άνω τριτημόριο.



Σχημα 1 : Όρια άνω, μέσου και κάτω τριτημόριο. Αναπαράσταση από ΕΛ. Γ. Βαϊρακτάρης - N.Schwenzer- F.W.Neukam [7]

1.3 Κατάγματα της κάτω γνάθου

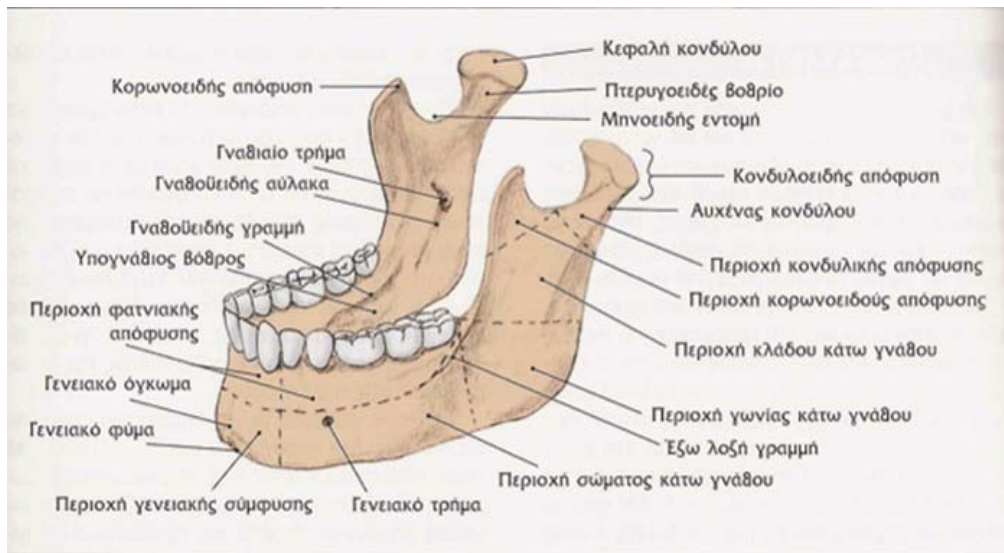
Η κάτω γνάθος είναι ένα από εκείνα τα οστά που πολύ συχνά παθαίνουν κατάγματα. Αυτό οφείλεται στη θέση της, ότι δηλαδή προεξέχει, στην ανατομική της ιδιομορφία, στα δόντια που φέρει, στη λειτουργία της, που είναι αρκετά διαφοροποιημένη και η οποία την εκθέτει σε ιδιαίτερες κακώσεις και παθήσεις.

Το οστό αυτό παθαίνει κακώσεις από εξωτερική βία, άλλοτε άμεση και άλλοτε έμμεση, ή ακόμα και από την ταχεία ή βραδεία επέκταση ενδοστικών νεοπλασματικών εξεργασιών ή από έκδηλη ή συμπτωματική πρόοδο οξειών ή χρόνιων φλεγμονών

Η μελέτη όμως των καταγμάτων της κάτω γνάθου δεν περιορίζεται μονάχα στις βλάβες που τυχόν παθαίνει, περιλαμβάνει επίσης και μερικά στοιχεία, τα όποια συμμετέχουν σε όλο το οδοντογναθικό σύστημα, δηλαδή τους μασητήριους μυς, που διαδραματίζουν ρόλο στις παρεκτοπίσεις, που παθαίνουν κάθε φορά τα οστικά τμήματα του κατάγματος, καθώς και τη λειτουργία της κροταφογναθικής διαρθρώσεως

1.4 Στοιχεία Ανατομικής Κάτω Γνάθου

Η κάτω γνάθος, το μεγαλύτερο και ισχυρότερο από τα οστά του προσώπου, έχει τους κάτω οδόντες καθώς δε συντάσσεται από τη μια και την άλλη πλευρά με το κροταφικό οστό με την κροταφογναθική διάρθρωση, χρησιμεύει ,με τις κινήσεις της, για τη λειτουργία της μασήσεως.



Σχήμα 2 : Στοιχεία Ανατομικής Κάτω Γνάθου. Αναπαράσταση από ΕΛ. Γ. Βαΐρακτάρης - N.Schwenzer- F.W. Neukam[7]

Η κάτω γνάθος έχει το σχήμα πετάλου αλόγου και αν εξετασθεί από περιγραφική άποψη παρουσιάζει ένα τμήμα τοξοειδές, που φέρεται οριζόντια, το σώμα. Από το σώμα εξορμώνται προς τα επάνω, σχηματίζοντας σχεδόν γωνία οι δύο κλάδοι της γνάθου (δεξιός και αριστερός), οι οποίοι καταλήγουν σε δύο αποφύσεις, την κονδυλοειδή και την κορωνοειδή, και τη μηννοειδή εντομή, που βρίσκεται ανάμεσα σ' αυτές τις δυο αποφύσεις.

Η κάτω γνάθος εξωτερικά μεν αποτελείται από μια αρκετά χοντρή και ανθεκτική στιβάδα από συμπαγή οστέινη ουσία και στο βάθος από πυκνή σπογγώδη ουσία.

Η *κορωνοειδής απόφυση* της γνάθου αποτελείται κυρίως από συμπαγή ουσία και ελάχιστη σπογγώδη.

Αντίθετα, η *κονδυλοειδής απόφυση* της γνάθου επικαλύπτεται από μια λεπτότατη στιβάδα από συμπαγή ουσία, αποτελείται δε κυρίως από σπογγώδη ουσία, της οποίας οι δοκίδες είναι *ισχυρότερες κατά κάθετη γραμμή*.

Το *σώμα* της κάτω γνάθου ενισχύεται από ένα ισχυρό σύστημα αντηρίδων οι οποίες επεκτείνονται στην περιοχή των κλάδων. Και προς τα έξω μεν της

επιφάνειας της, προς τα πίσω και προς το έξω μέρος του γενειακού τμήματος, φέρεται η *έξω λοξή γραμμή*, η οποία αρχίζει από το πρόσθιο χείλος της Κάτω

γνάθου, προχωρεί λοξά προς τα κάτω και εμπρός και τελειώνει στο κάτω χείλος του σώματος κοντά στο γενειακό φύμα, χρησιμεύοντας για την πρόσφυση των μυών

Η μέσα επιφάνεια του οστού είναι λεπτότερη από το έξω πέταλο, αποτελείται όμως από τη συμπαγή και πυκνή μοίρα του οστού. Η μοίρα αυτή χρησιμεύει για την πρόσφυση των μυών που κατασπών την κάτω γνάθο, οι οποίοι προσφύονται στη μέσα και πρόσθια επιφάνεια της κάτω γνάθου.

Προς τη μέσα επιφάνεια και προς τα πλάγια βρίσκεται ή έσω λοξή ή γναθουοειδής γραμμή, ή οποία αρχίζει από τη μια και την άλλη πλευρά κάτω από τη γενειακή άκανθα, φέρεται λοξά προς τα πάνω και πίσω και γίνεται υψηλότερη και εκτείνεται έως πίσω από το τρίτο γομφίο χρησιμεύοντας για την έκφυση του γναθουοειδούς μυός.

Η ενίσχυση της κάτω γνάθου γίνεται κυρίως από το ισχυρό συμπαγές οστό στο κάτω χείλος του σώματος της, του οποίου το τμήμα που προβάλλει περισσότερο ενισχύεται από το γενειακό όγκωμα.

1.5 Μύες που κινούν την κάτω γνάθο και έχουν σχέση με τα κατάγματα του οστού αυτού

Οι μύες που κινούν το οστό της κάτω γνάθου και σε περίπτωση καταγμάτων της παίζουν σπουδαιότατο ρόλο είναι οι *μασητήριοι μύες* και οι μύες που βρίσκονται πάνω από το *υοειδές οστό*.

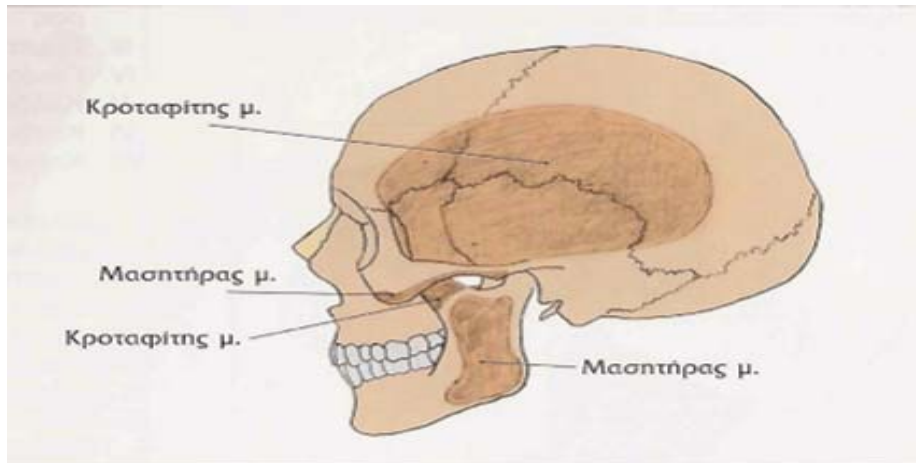
Οι *μασητήριοι μύες* είναι τέσσερις: ο *μασητήρας*, ο *κροταφίτης*, ο *έσω* και ο *έξω πτερυγοειδής*.

Η ενέργεια που εκτελεί ο *μασητήρας μυς* είναι η ανάσπαση δηλαδή η έλξη προς τα επάνω της κάτω γνάθου και το σφίξιμο των δοντιών σε θέση κεντρικής συγκλίσεως.

Ο *κροταφίτης μυς*, με τη σύσπαση της πρόσθιας μοίρας του, εκτελεί την ίδια ενέργεια που κάνει και ο *μασητήρας*, ανασπά δηλαδή την άνω γνάθο, ενώ με τη σύσπαση της οπίσθιας μοίρας του ή κάτω γνάθος, που μετακινήθηκε προς τα εμπρός, επαναφέρεται στην κανονική θέση της. Ο *μυς* αυτός ανταγωνίζεται την ενέργεια που εκτελεί ο *έξω πτερυγοειδής*.

Ο *έξω πτερυγοειδής* έχει διπλή ενέργεια, δηλαδή ενεργεί και προς τις δύο πλευρές. Έτσι από τη μια φέρει την κάτω γνάθο προς τα εμπρός και συγχρόνως την κινεί προς τα πλάγια και μάλιστα προς το αντίθετο πλάγιο.

Ο *έσω πτερυγοειδής μυς* έχει την ίδια ενέργεια με το *μασητήρα*, ανασπά δηλαδή την κάτω γνάθο.



Σχήμα 3 : Έκταση πρόσφυσης των μασητήριων μυών στην εξωτερική επιφάνεια της κάτω γνάθου και του κρανίου. Αναπαράσταση από ΕΛ. Γ. Βαΐρακτάρης - N.Schwenzer- F.W. Neukam [7]

Οι μύες που βρίσκονται κάτω από το υοειδές οστό είναι και αυτοί τέσσερις: Ο διγαστορας της κάτω γνάθου, ο βελονούοιδής, ο γναθοϋοειδής και ο γενειουοειδής.

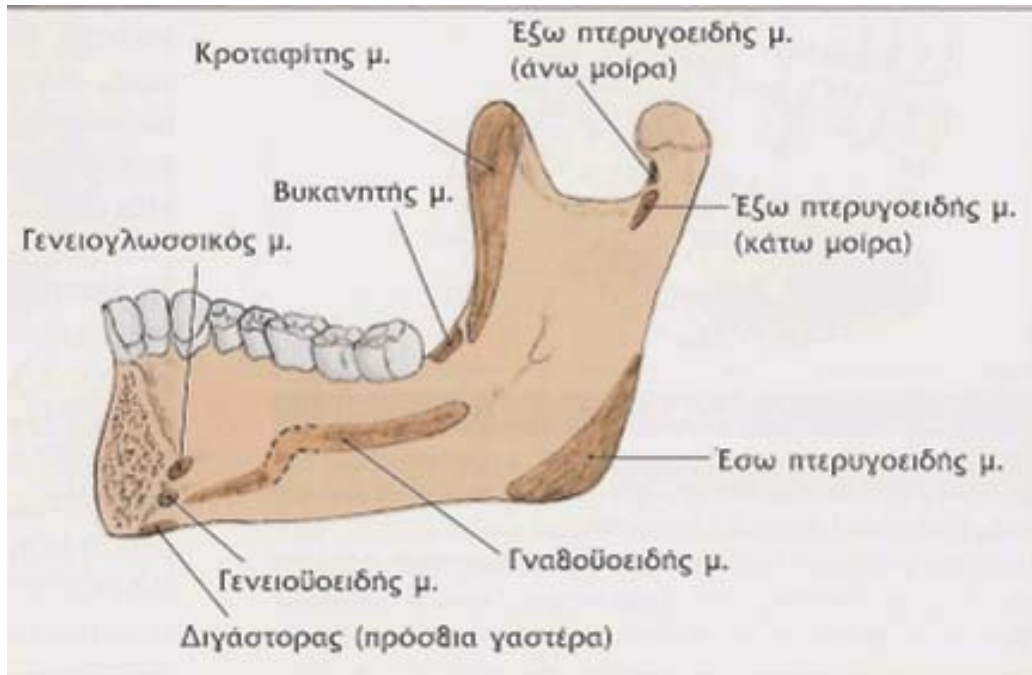
Ο διγαστορας της κάτω γνάθου με τη σύσπαση της πρόσθιας γαστέρας του ακινητοποιεί το υοειδές οστό και τραβά την κάτω προς τα πίσω και κάτω. Όταν δε ακινητοποιηθεί η κάτω γνάθος, η πρόσθια γαστέρα του μύος αΐτοί τραβά το υοειδές οστό προς τα πίσω και πάνω. Επίσης όταν ακινητοποιείται ή κάτω γνάθος οι δύο γαστέρες τραβούν το υοειδές οστό κατακόρυφα.

Ο βελονοειδής μυς με τη σύσπαση του τραβά το υοειδές οστό προς τα επάνω και πίσω.

Ο γενειουοειδής μυς έχει ως ενέργεια την κατάσπαση της κάτω γνάθου ή την έλξη του υοειδούς οστού προς τα εμπρός και πάνω.

Ο γναθοϋοειδής μυς αποτελεί ένα μυώδες πέταλο, σε σχήμα τρίγωνο που χωρίζει τη στοματική κοιλότητα από τον τράχηλο, εκτείνεται από την έσω λοξή γραμμή μέχρι το υοειδές οστό και η ενέργεια του είναι κυρίως η κατάσπαση της κάτω γνάθου.

Η κίνηση της κάτω γνάθου γίνεται κυρίως από τους μασητήριους μύες (ανασπώντες) και τους άνωθεν και τους υοειδούς (κατασπώντες)



Σχήμα 4: Περιοχή πρόσφυσης των μυών στην εσωτερική επιφάνεια της κάτω γνάθου. Αναπαράσταση από Ελ. Γ. Βαίρακτάρης - N.Schwenzer- F.W. Neukam [7]

1.6 Διαίρεση των καταγμάτων γενικώς

Κάταγμα ενός οστού λέγεται η λύση της συνέχειας του (τέλεια ή ατελής).

Τα κατάγματα διακρίνονται:

- Ανάλογα με το βαθμό λύσεως της συνέχειας, του οστού, σε τέλεια όταν η λύση αυτή είναι πλήρης και σε ατελή όταν η λύση της συνέχειας του οστού είναι μερική (δεν είναι πλήρης).
- Ανάλογα με τη λύση ή μη της συνέχειας των μαλακών μορίων σε απλά (κλειστά) όταν στο κάταγμα συμμετέχει μονάχα ο οστίτης ιστός (το οστό δηλαδή) και ή

γραμμή (ή επιφάνεια) του κατάγματος δεν επικοινωνεί με το περιβάλλον. Και σε επιπεπλεγμένα (ανοιχτά) ,όταν ή γραμμή (επιφάνεια) του κατάγματος,με τη λύση της συνέχειας των μαλακών μορίων, επικοινωνεί με το εξωτερικό περιβάλλον.

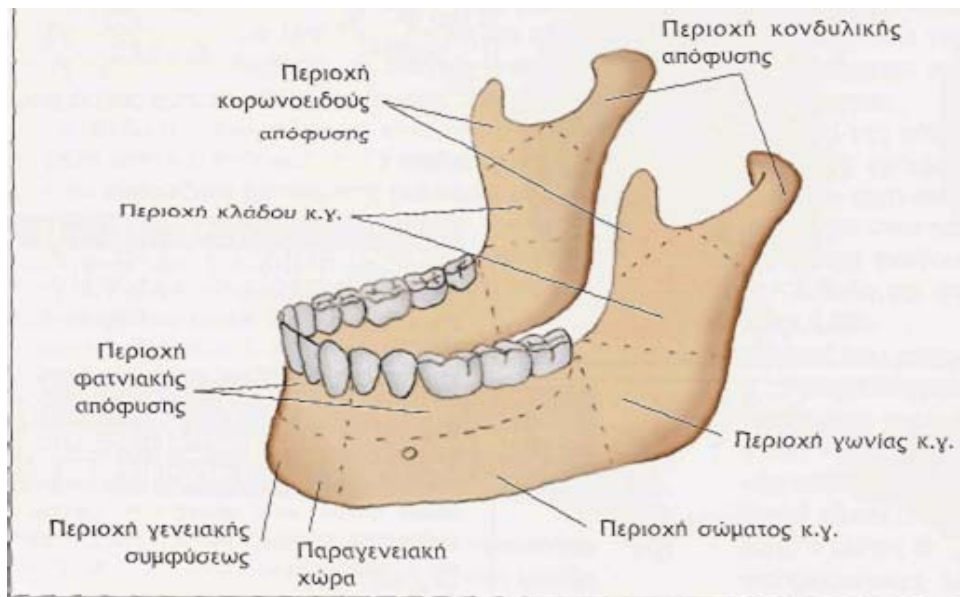
- Ανάλογα με αριθμό τους σε μονήρη (μεμονωμένα) ,όταν υπάρχει ένα κάταγμα μονάχα, και σε πολλαπλά ,όταν υπάρχουν περισσότερα από ένα κάταγμα.
- Ανάλογα με τη φορά, δηλαδή την κατεύθυνση τους, τα κατάγματα διαιρούνται σε λοξά, εγκάρσια, επιμήκη και συντριπτικά.
- Ανάλογα με το σημείο όπου εξασκείται η βία,διαιρούνται σε άμεσα, όταν το κάταγμα γίνει σε σημείο όπου δρα η βία, και έμμεσα, όταν το κάταγμα συμβεί μακριά από το σημείο αυτό.
- Ανάλογα με την κατάσταση του οστού που θραύεται τα κατάγματα διαιρούνται σε βίαια όταν γίνονται, σε υγιές οστό με την επίδραση εξωτερικής βίας που έχει αρκετή ένταση και σε παθολογικά γίνονται σε οστό που πάσχει, η δε αίτία που τα προκαλεί είναι κάποια εξεργασία μέσα στο οστό (ενδοοστική)

1.6.1 ταξινόμηση των καταγμάτων της κάτω γνάθου

Οι συχνότερες ταξινομήσεις στις οποίες κατατάσσονται Τα κατάγματα της κάτω γνάθου είναι οι έξης:

- ανάλογα με τη φορά (κατεύθυνση) που έχει το κάταγμα και τον ευνοϊκό ή όχι χαρακτήρα του θεραπευτικού αποτελέσματος
- ανάλογα με τη σοβαρότητα του κατάγματος
- ανάλογα με τον τύπο του κατάγματος
- κατάγματα ανάλογα με την παρουσία ή έλλειψη δοντιών στις γνάθους

1.6.2 διαίρεση των καταγμάτων της κάτω γνάθου ανάλογα με την εντόπιση τους στις διάφορες θέσεις του οστού αυτού



Σχήμα 5: Διαίρεση των καταγμάτων της κάτω γνάθου ανάλογα με την εντόπιση τους στις διάφορες θέσεις του οστού αυτού. Αναπαράσταση από ΕΛ. Γ. Βαϊρακτάρης - N.Schwenzer- F.W. Neukam [7]

- *Κατάγματα της γενειακής χώρας* η οποία περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο κάθετες γραμμές που περνούν από τους κυνόδοντες της μιας και της άλλης πλευράς.
- *Κατάγματα του σώματος της κάτω γνάθου*, περιοχής δηλαδή που βρίσκεται ανάμεσα στην κυνοδοντική χώρα και μία νοητή γραμμή που συμπίπτει με το πρόσθιο χείλος του μασητήρα μυός, και περιλαμβάνει γομφίους και προγομφίους.
- *Κατάγματα της γωνιάς της κάτω γνάθου.* Η χώρα αυτή συνήθως χαρακτηρίζεται ως περιοχή που αφορίζεται από το πρόσθιο χείλος του μασητήρα μυός και μιας λοξής γραμμής, που φέρεται από τη χώρα του τρίτου γομφίου ως το οπίσθιο χείλος του κλάδου.
- *Κατάγματα του κλάδου της κάτω γνάθου*, περιοχής που βρίσκεται ανάμεσα στη λοξή γραμμή που αναφέραμε παραπάνω και μιας νοητής εγκάρσιας γραμμής που περνά από τη μηννοειδή εντομή.
- *Κατάγματα της κορωνοειδούς αποφύσεως* Η χώρα αυτή περιλαμβάνει την κορωνοειδή απόφυση.

- *Κατάγματα της κονδυλοειδούς αποφύσεως* Στα κατάγματα αυτά περιλαμβάνεται ή κονδυλοειδής απόφυση.
- *Κατάγματα των φατνιακών αποφύσεων* μιας περιοχής δηλαδή πού περιλαμβάνει το επάνω τμήμα του σώματος της γνάθου, μέσα στην οποία εγγομφούνται τα δόντια.

Κατάγματα είναι δυνατόν να μη συμβούν αποκλειστικά στις περιοχές πού αναφέραμε παραπάνω. Σε πολλές περιπτώσεις τα κατάγματα επέρχονται σε μια από τις περιοχές και εκτείνονται, λίγο πολύ, και σε μια γειτονική. Ένα κύριο κάταγμα, που συμβαίνει στη χώρα της γωνίας της κάτω γνάθου και επεκτείνεται στο σώμα της, περιγράφεται ως "κάταγμα της γωνίας με επέκταση". Ένα κάταγμα της φατνιακής αποφύσεως μπορεί να άφορα την περιοχή της γενειακής χώρας του σώματος ή συνδυασμό των δύο αυτών χωρών.

Εξάλλου κατάγματα της κάτω γνάθου συμβαίνουν καμιά φορά κατά τη χώρα της γωνίας από ένα πλάγιο, κατά τη χώρα του σώματος κατά το άλλο πλάγιο ή ακόμα, και κατά την κονδυλοειδή απόφυση της κάτω γνάθου κατά την άλλη πλευρά. υποκονδυλικό κάταγμα και άπα τις δύο πλευρές μπορεί να συνυπάρχει με λοξό κάταγμα κατά τη γενειακή χώρα (άμεσο-έμμεσο κάταγμα).

Τα κατάγματα αυτά, καθώς και διάφοροι άλλοι συνδυασμοί καταγμάτων, χαρακτηρίζονται ως "πολλαπλά κατάγματα".

1.7 Αιτιολογία και συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου

- Η άμεση βία (άμεσο κάταγμα). Ένα χτύπημα στη γνάθο μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα τη λύση της συνέχειας του οστού, στο σημείο που θα καταφερθεί το χτύπημα.

.-Έμμεση βία (έμμεσο κάταγμα). Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί ένα χτύπημα που καταφέρεται από τη μια πλευρά της γνάθου να προκαλέσει κάταγμα στο αντίθετο ημιμόριο της γνάθου. Έμμεση βία είναι το αίτιο των περισσότερων καταγμάτων του αυχένα του κονδύλου. Ένα πλήγμα της γενειακής χώρας μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα κάταγμα και των δυο αυχένων της κάτω γνάθου. Κατάγματα της

κονδυλοειδούς αποφύσεως μπορούν να προέλθουν από πλήγμα στη γενεϊακή χώρα με συμμετοχή και αυτής (άμεσο-έμμεσο κατάγμα).

1.8 Συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου

Τα κατάγματα της κάτω γνάθου σε σχέση με τα κατάγματα των άλλων οστών του σκελετού, αποτελούν μεγάλη αναλογία, η οποία διαρκώς γίνεται μεγαλύτερη .

Από τα κατάγματα του σπλαχνικού κρανίου η κάτω γνάθος, από την άποψη της συχνότητας, έρχεται σε δεύτερη θέση, αμέσως υστέρα από τα κατάγματα των ρινικών οστών. Αν αφαιρέσουμε τα τελευταία αυτά, τότε τα κατάγματα της κάτω γνάθου αποτελούν τα τρία τέταρτα όλων των άλλων καταγμάτων των οστών του σπλαχνικού κρανίου.

Ιδιαίτερα πρέπει να τονισθεί η μεγάλη συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου σε ενήλικους κατά τα αυτοκινητιστικά δυστυχήματα, με συνύπαρξη και άλλων καταγμάτων των Οστών του σπλαχνικού κρανίου.

Σε σχέση με τα κατάγματα της άνω γνάθου, τα κατάγματα της κάτω εμφανίζουν μια αναλογία, η οποία κυμαίνεται από 1:2 έως 1:3.

Ίδια κατάγματα της κάτω γνάθου συμβαίνουν συχνότερα σε άτομα ηλικίας μεταξύ 20 και 30 χρονών..

Ως προς τα φύλο, σχεδόν σε ποσοστό 75% τα κατάγματα αυτά αφορούν τους άντρες, η διαφορά δε αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι άντρες εκθέτονται πιο συχνά στον κίνδυνο βίαιων τραυματισμών.

Ανάλογα με τις περιοχές της κάτω γνάθου στις οποίες συμβαίνουν τα κατάγματα αναφέρεται και διαφορετική συχνότητα :

Η γενεϊακή χώρα, η οποία περιλαμβάνει το τμήμα της κάτω γνάθου από τον ένα ως τον άλλο κυνόδοντα, παρουσιάζει συχνότητα καταγμάτων που κυμαίνεται από 8% ως 14%.

Τα κατάγματα που επέρχονται κατά το σημείο της γενεϊακής συμφύσεως συμβαίνουν σε συχνότητα μικρότερη από 1%

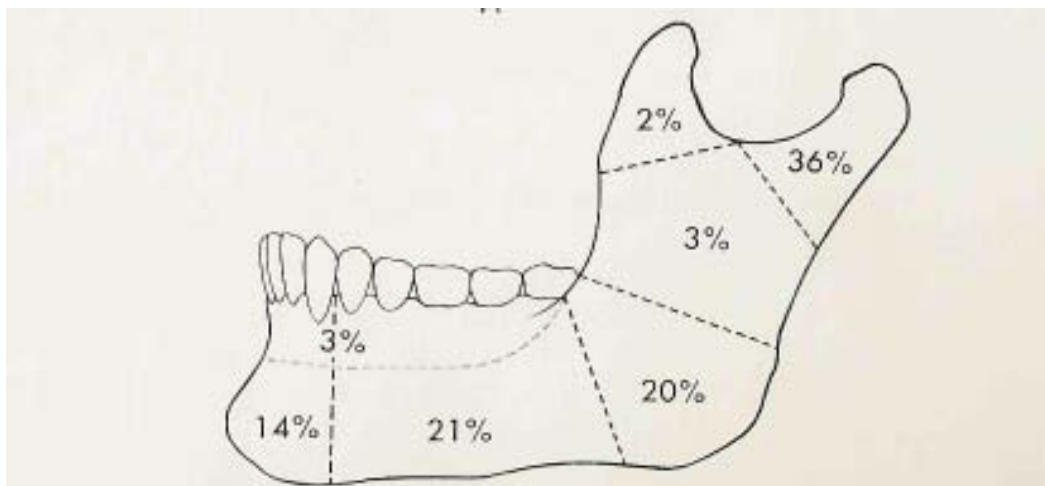
Το σώμα της κάτω γνάθου, που περιλαμβάνεται μεταξύ της γραμμής του κυνόδοντα και της γραμμής που συμπίπτει με το πρόσθιο χείλος του μασητήρα μυός εμφανίζει συχνότητα που κυμαίνεται από 21% ως 36%..

η περιοχή της γωνίας της κάτω γνάθου είναι το τμήμα που βρίσκεται κάτω από το μασητήρα μυ στο τμήμα δε αυτό ή συχνότητα των καταγμάτων κυμαίνεται από 20%-31%.

Ο κλάδος της κάτω γνάθου με τις αποφύσεις του, δηλαδή τον κόνδυλο και την κορωνοειδή απόφυση εμφανίζουν την ακόλουθη συχνότητα: ο κλάδος από 3% έως 6%, ή κονδυλοειδής απόφυση από 18%-31%, η κορωνοειδής απόφυση 1%-2%.

Η συχνότητα των καταγμάτων που επέρχονται κατά τις φατνιακές αποφύσεις φθάνει περίπου το 3%. Το ποσοστό αυτό ασφαλώς μεγαλύτερο, αν λάβαμε υπόψη μας ότι τα κατάγματα αυτά αντιμετωπίζονται από εκείνους που ασκούν γενική οδοντιατρική καθώς και ο από τους γναθοχειρουργούς ιδιωτικώς και όχι σε Γναθοχειρουργικά κέντρα και για το λόγο αυτό λείπουν τα σχετικά στατιστικά δεδομένα.

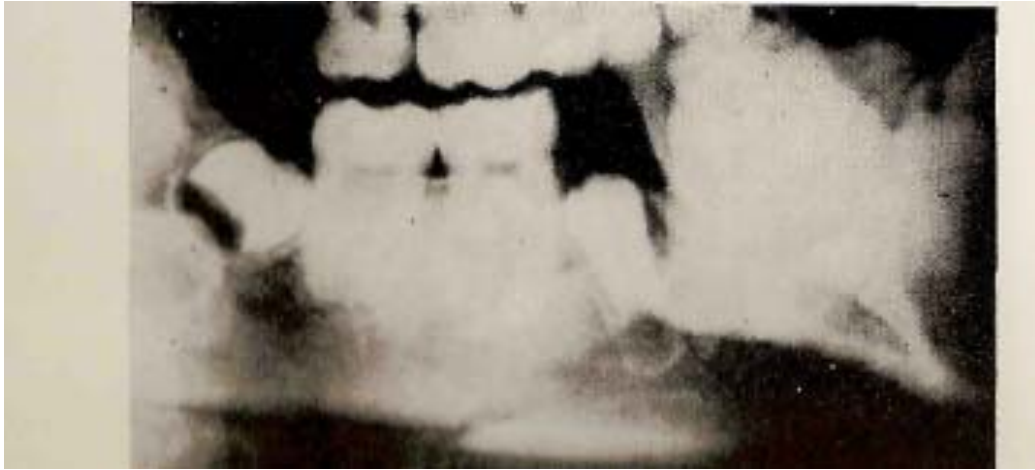
Στην παρακάτω εικόνα παρατηρούμε τη συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου κατά περιοχές.



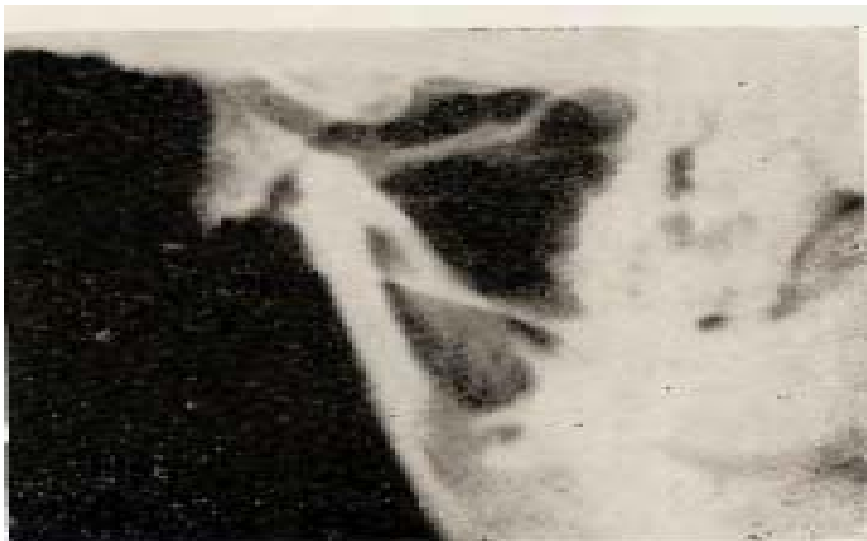
Σχήμα 6 : Συχνότητα των καταγμάτων της κάτω γνάθου. Αναπαράσταση από Γ.Ν. ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ (1975) [8]



Σχήμα 7 : Κατακόρυφο κάταγμα του σώματος της κάτω γνάθου (πλάγιο εξωστοματικό ακτινογράφημα). Αναπαράσταση από Γ.Ν. ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ (1975) [8]



Σχήμα 8 :Λοξό κάταγμα του σώματος της κάτω γνάθου (πλάγιο εξωστοματικό ακτινογράφημα). Αναπαράσταση από Γ.Ν. ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ (1975) [8]



Σχήμα 9:Κάταγμα της κονδυλοειδούς αποφύσεως μετά παρεκτοπίσεως αυτής (προσθιοπίσθιον εξωστοματικό ακτινογράφημα). Αναπαράσταση από Γ.Ν. ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ (1975) [8]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

2.1 Γενικά

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στην κλασσική θεωρία της ελαστικότητας, για κατασκευές που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης, ή της ρηγμάτωσης των υλικών, γίνεται με αναγωγή του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, που χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα, τα φορτία που εφαρμόζονται προκαλούν μικρές παραμορφώσεις, έτσι ώστε τα μόρια του υλικού που βρίσκονται πλησίον των συνόρων να παραμένουν και πάλι πλησίον μετά την φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες να ανάγονται στα απαραμόρφωτα σύνορα του σώματος.

Μετά όμως από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου, εμφανίζονται ρωγμές, που αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος μετατόπισης. Η προϋπάρχουσα εντατική κατάσταση στις θέσεις των ρωγμών δεν υπάρχει πια, τα δε σύνορα έχουν αλλάξει. Έτσι ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος, γιατί ανάλογα με το πρόβλημα απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες που οδηγούν στον καθορισμό των συνόρων [9].

2.2 Σχέσεις Τάσεων και Παραμορφώσεων στην Ελαστική Περιοχή

Γραμμικά και ελαστικά είναι τα υλικά όπου, οι αναπτυσσόμενες παραμορφώσεις είναι ελαστικές και υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων. Η γραμμικότητα μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται από αυτές, εκφράζει τον γενικευμένο νόμο του Hooke, που για την περίπτωση ισότροπου και ομογενούς πολυκρυσταλλικού υλικού γράφεται:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G, \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, ν ο λόγος Poisson και G το μέτρο διατμήσεως ή μέτρο ακαμψίας σε διάτμηση του υλικού. Είναι $G = E/2(1+\nu)$

Οι σχέσεις (2.1) αντιστρεφόμενες δίνουν :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx})],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]$$

(2.2)

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

Αναφέρεται ότι μεταξύ διατμητικών παραμορφώσεων ε_{ij} και γ_{xy} ($i \neq j$) για μικρές γωνίες κλίσεως είναι

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} \quad , \\ \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ενώ οι σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

όπου u, v, w οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα.

2.3 Η Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Στην περίπτωση λεπτής πλάκας που καταπονείται από δυνάμεις που ενεργούν επί του συνόρου της παράλληλα προς το επίπεδο της πλάκας και κατανεμημένες κατά το πάχος της και αν υποθεθεί ότι το μέσο επίπεδο της συμπίπτει με το επίπεδο Οxy του θεωρημένου συστήματος αξόνων Οxyz , τότε οι συνιστώσες των τάσεων σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} είναι **[10]**

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.5)$$

και χωρίς μεγάλο σφάλμα , καθ' όλο το πάχος της.

Η εντατική κατάσταση της λεπτής πλάκας καλείται επίπεδη εντατική κατάσταση. Όταν το πάχος της πλάκας είναι πάρα πολύ μικρό, δηλαδή όταν η πλάκα γίνει λεπτή μεμβράνη, τότε επιτυγχάνεται ιδανική περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης. Οι μη μηδενικές συνιστώσες των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} θεωρούμε ότι παραμένουν πρακτικά σταθερές σε όλο το πάχος της πλάκας.

Οι σχέσεις μεταξύ των επιβαλλόμενων τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων από τις σχέσεις (2.1) με την προϋπόθεση της (2.5):

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \quad (2.6)$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

ενώ από (2.2) προκύπτει :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx})$$

(2.7)

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

2.4 Η Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση

Η περίπτωση όπου το πάχος του σώματος είναι πολύ μεγάλο αντιμετωπίζεται όπως και στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης δηλαδή η αναπτυσσόμενη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι επίπεδη. Επιπλέον οι παράμετροι δε μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση z, οπότε οι μετατοπίσεις κατά τους άλλους άξονες είναι μόνο συνάρτηση των x και y. Δηλαδή:

$$u=u(x,y), v=v(x,y), w=0$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x,y), \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x,y), \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x,y),$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Με βάση τις σχέσεις (2.1) αν θέσουμε $\varepsilon_{zz} = 0$ τότε θα έχουμε $\sigma_{zz} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

Οπότε οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων θα γίνουν:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

και αντίστοιχα

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}]$$

(2.10)

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Παρατηρούμε ότι η λύση του προβλήματος επιπέδου παραμορφωσιακής όπως και επιπέδου εντατικής κατάστασης, απαιτεί τον προσδιορισμό τριών μόνο συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} . Συγκρίνοντας αυτά τα δυο προβλήματα βλέπουμε ότι στην επίπεδη εντατική κατάσταση επιτρέπονται οι παραμορφώσεις κατά τον άξονα z ενώ $\sigma_{zz}=0$, ενώ αντιθέτως στην επίπεδη παραμορφωσιακή η αντίστοιχη σ_{zz} δεν επιτρέπει παραμορφώσεις

στην ίδια κατεύθυνση. Κάνοντας αναφορά στην θεωρία των καυστικών (Κεφ.3) παρατηρούμε ότι η μεταβολή της οπτικής πορείας του δρόμου των ακτινών (Παρ.3.2) εξαρτάται από την μεταβολή του πάχους του δοκιμίου λόγω φόρτισης. Επίσης στην πειραματική διαδικασία το δοκίμιο που χρησιμοποιείται έχει πάχος 3mm, δηλαδή αντιστοιχεί σε παρά πολύ λεπτή πλάκα. Συνεπώς από τα δυο αυτά τελευταία στοιχεία συμπεραίνεται ότι το πεδίο που αντιστοιχεί στο δοκίμιο του πειράματος είναι το επίπεδο αυτό.

2.5 Η Γενικευμένη Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις της επίπεδης εντατικής κατάστασης, πρέπει το πάχος της πλάκας να είναι πάρα πολύ μικρό, κάτι που πραγματικά δεν συμβαίνει. Έτσι καταφεύγουμε σε μια άλλη επίπεδη εντατική κατάσταση, την γενικευμένη επίπεδη εντατική κατάσταση.

Σ' αυτήν παραδεχόμαστε πάλι ότι $\sigma_{zz} = 0$, σε όλο το πάχος της λεπτής πλάκας $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ μόνο επί των επιπέδων συνόρων της. Προσδιορίζουμε δε τις μέσες τιμές των συνιστωσών που παραμένουν δηλαδή $\overline{\sigma_{xx}}$, $\overline{\sigma_{yy}}$, $\overline{\tau_{xy}}$

Αν στην τρίτη των (1.3) θέσουμε $\sigma_{zz} = 0$ θα έχουμε

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

οι (1.1) γίνονται :

$$\overline{\sigma_{xx}} = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \lambda' \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]$$

$$\overline{\sigma_{yy}} = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \lambda' \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]$$

(2.11)

$$\overline{\tau_{xy}} = \mu \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right]$$

$$\text{όπου } \lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

Το πρόβλημα λοιπόν αντιμετωπίζεται όπως και στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης με την διαφορά ότι η σταθερά λ θα αντικαθίσταται από τη νέα τιμή λ' .

Σε αντίστοιχο πρόβλημα επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης, αντικαθιστούμε τον λόγο ν του Poisson με τη νέα τιμή

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{και} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

2.6 Μιγαδική Τασική Συνάρτηση

Για την επίλυση του επιπέδου εντατικού προβλήματος απαιτείται προσδιορισμός των συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} που ικανοποιούν τις εξής σχέσεις ισορροπίας.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

(2.12)

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

και την εξίσωση συμβιβαστού συναρτήσει των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , που για απουσία μαζικών δυνάμεων είναι:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2.13)$$

Για να επιλύσουμε τις εξισώσεις αυτές εισάγουμε μια συνάρτηση $F(x,y)$, που καλείται τασική συνάρτηση Airy, τέτοια ώστε

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{zz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

Οι εξισώσεις (2.12) ικανοποιούνται από τις (2.14), θα πρέπει επίσης να ικανοποιείται και η 2.13, δηλαδή θα πρέπει

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2.15)$$

άρα η λύση του προβλήματος της επίπεδης εντατικής κατάστασης με αμελητέες

καθολικές δυνάμεις, ανάγεται στην λύση της (2.15), που είναι μια διαρμονική εξίσωση.

Η συνάρτηση $F(x,y)$ που ικανοποιεί την (2.15) μπορεί να παρασταθεί σαν γραμμικός συνδυασμός δυο αναλυτικών συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$ δια των σχέσεων :

$$F = \operatorname{Re} \left[\bar{z}\phi(z) + \chi(z) \right] \quad (2.16)$$

$$\text{ή} \quad 2F = \bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad (2.17)$$

από τις σχέσεις 2.14 και 2.17 έχουμε για το εντατικό και παραμορφωσιακό πεδίο του επίπεδου προβλήματος :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \phi'(z) \quad (2.18)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\tau_{xy}i = 2 \left[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \right] \quad (2.19)$$

$$2\mu(u+iv) = k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (2.20)$$

όπου $\psi(z) = \frac{\partial X(z)}{\partial z}$, $k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu}$, για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση

και $k = \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + 2\mu}$ για επίπεδη εντατική με $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$, όπου λ, μ οι σταθερές του Lamé.

Το αυθαίρετο του καθορισμού των συναρτήσεων $\varphi(z)$ και $\chi(z)$ εφ' όσον

$$\varphi(0)=0, \operatorname{Im}\varphi'(0)=0, \psi(0)=0 \quad (2.21)$$

όταν δίνονται οι τάσεις $\varphi(0)=0$, όταν δίνονται οι παραμορφώσεις από σχέσεις 2.18

και 2.19 προκύπτει τελικά

$$\sigma_{xx} = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) - \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]$$

$$\sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) - \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (2.22)$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]$$

2.7 Κύριες τάσεις

Το άνυσμα της τάσης σ_n σε ένα σημείο P, εξαρτάται από τον προσανατολισμό θεωρούμε ότι διέρχεται από το σημείο αυτό. Αν διαλέξουμε ένα επίπεδο, που η διεύθυνση του μοναδιαίου του διανύσματος η , (η κάθετο στο επίπεδο), συμπίπτει με την διεύθυνση του σ_n , τότε στο επίπεδο αυτό δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις και το επίπεδο θα λέγεται κύριο επίπεδο.

Η διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος η , λέγεται κύρια διεύθυνση και η ορθή τάση που αναπτύσσεται στο επίπεδο αυτό λέγεται κύρια τάση. Για να

είναι η ση και το η παράλληλες πρέπει $\sigma_n = \sigma$ και καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα.

$$(\sigma_{xx} - \sigma)\eta_x + \sigma_{xy}\eta_y + \sigma_{xz}\eta_z = 0$$

$$\sigma_{yx}\eta_x + (\sigma_{yy} - \sigma)\eta_y + \sigma_{yz}\eta_z = 0 \quad (2.23)$$

$$\sigma_{zx}\eta_x + \sigma_{zy}\eta_y + (\sigma_{zz} - \sigma)\eta_z = 0$$

Για να έχει λύση η (2.23) διάφορο της $\eta_x = \eta_y = \eta_z = 0$ πρέπει

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

Αναπτυσσόμενη η 2.24 δίνει εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς σ , οι ρίζες της οποίας είναι οι κύριες τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Η 2.24 αποτελεί την χαρακτηριστική εξίσωση του συμμετρικού τανυστή τάσεων, οι δε ρίζες της τρίτου βαθμού εξίσωσης είναι οι ιδιοτιμές του.

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση, οι κύριες τάσεις βρίσκονται **[11]** από την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

Από αυτήν έχουμε

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}, \sigma_3 = 0 \quad (2.26)$$

Επίσης

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (2.27)$$

όπου θ_0 είναι η γωνία που πρέπει να στραφεί το O_{xy} για να συμπίσει με το μέσο σύστημα των κυρίων αξόνων. Από την 2.27 προκύπτουν δυο τιμές της θ_0 που διαφέρουν κατά 90° . Αυτό δείχνει ότι τα κύρια επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Η μεγαλύτερη κύρια τάση σ_1 σχηματίζει την μικρότερη γωνία με την αλγεβρικά μεγαλύτερη των σ_{xx}, σ_{yy} . Η max διατμητική τ_{max} εμφανίζεται έως 45° ως προς το κύριο σύστημα

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.28)$$

Αναφερόμενοι σε επίπεδη κατάσταση, τροχιές κυρίων τάσεων καλούμε δυο δίκτυα καμπυλών, ένα που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη κύρια τάση σ_1 και ένα άλλο που αντιστοιχεί στην σ_2 , τέτοια ώστε κάθε σημείο επί της καμπύλης να έχει εφαπτόμενη την αντίστοιχη κύρια τάση. Τα δίκτυα αυτά, λόγω της καθετότητας των σ_1 και σ_2 σε κάθε σημείο τέμνοντα κάθετα.

2.8 Πολικές Συντεταγμένες

Πολλά εντατικά προβλήματα διευκολύνονται αν εκφραστούν σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) .

$$x = r \cos \theta, r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

και εξ αυτών

$$y = r \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων δίνονται από το μητρώο

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

γιατί λόγω επιπεδότητας μηδενίζονται οι συνιστώσες κατά z

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.31)$$

ο μετασχηματισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες [11] γίνεται σύμφωνα με την σχέση :

$$\Sigma' = R \Sigma R^T \quad (2.32)$$

όπου Σ' , Σ ο τανυστής των τάσεων στα δυο συστήματα και R το μητρώο στροφής :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

οπότε οι συνιστώσες της τάσης θα είναι:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.34)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

και ανάλογα προκύπτουν οι αντίστροφες τους.

Οι εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο πρόβλημα , σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \text{—}$$

—

(2.35)

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων μετατοπίσεων είναι

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (2.36)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$$

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων δεν αλλοιώνονται. Η τασική συνάρτηση $F(x,y)$ σε πολικές συντεταγμένες r, θ γίνεται $F(r, \theta)$. Μετασχηματίζοντας τις μερικές παραγώγους, προκύπτει

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \nabla^2 F \quad (2.37)$$

όποτε η διαρμονική εξίσωση γράφεται:

$$\nabla^2 (\nabla^2 F) = \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.38)$$

και οι τάσεις δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (2.39)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις ισοροπίας (2.34) και συμβιβαστού

$$\nabla^2 (\sigma'_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (2.40)$$

2.9 Συγκέντρωση τάσεων

Αν έχουμε ομοιόμορφη διατομή κατασκευής ή δοκιμίου , θεωρούμε και ομοιόμορφο διανομή των καθέτων τάσεων στις διατομές αυτές . Ακόμη αν η διατομή αλλάζει βαθμιαία , κάνουμε κατάλληλες προσεγγίσεις.

Αν όμως υπάρχει μια γεωμετρική ανωμαλία, όπου η διατομή μεταβάλλεται απότομα, έχουμε ανακατανομή των τάσεων και οι διανομές που προκύπτουν δεν είναι πια ομοιόμορφες.

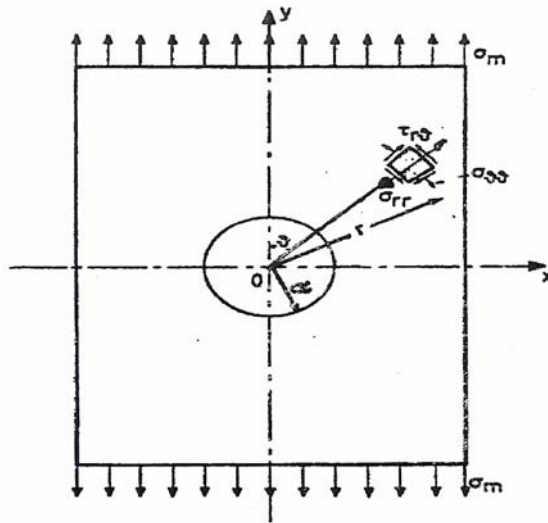
Η τιμή της μέγιστης τάσης , που μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη της μέσης τιμής εξαρτάται από τη γεωμετρία της κατασκευής ή του δοκιμίου. Η υπέρβαση της επιτρεπόμενης στα σημεία της μέγιστης τάσης, είναι αιτία δημιουργίας πυρήνων τοπικών παραμορφώσεων ή ρωγμών, κατά τις στατικές και δυναμικές φορτίσεις αντίστοιχα.

Συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων ορίζουμε των λόγο της μέγιστης τάσης προς την μέση τάση, που υπολογίζεται για την περίπτωση που η τάση είναι

ομοιόμορφα κατανεμημένη στη διατομή που εξετάζουμε. Αλλιώς αναλύονται οι τάσεις και απαιτείται πλήρης γνώση των γεωμετρικών στοιχείων, των οριακών συνθηκών και του τρόπου φόρτισης.

2.10 Λεπτή πλάκα με κυκλική οπή

Έστω πάρα πολύ λεπτή πλάκα , με μια μικρή κυκλική οπή στο κέντρο, ακτίνας a φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανεμημένο εφελκυστικό φορτίο. Το φορτίο σε διατομές μακριά της οπής, εξομοιώνεται με εφελκυστική τάση σ_0 (Σχ.2.1)



Σχήμα 2.1 : Πλάκα με οπή φορτιζόμενη με ομοιόμορφα κατανεμημένο εφελκυστικό φορτίο

Αν οι διαστάσεις της πλάκας είναι πολύ μεγάλες , σχετικά με την οπή ισχύει η ακριβής θεωρία του Kirsch [12] που δίνει την διανομή τάσεων σε πολικές συντεταγμένες .

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_m}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos^2 \theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_m}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (2.41)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma_m}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin \theta$$

Στην περίμετρο της οπής θα έχουμε

$$\sigma_{rr}=0 \quad , \quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_m(1-2\cos 2\theta) \quad , \quad \sigma_{r\theta}=0 \quad (2.42)$$

Η κατανομή της τάσεως $\sigma_{\theta\theta}$ φαίνεται στο σχ.2.2

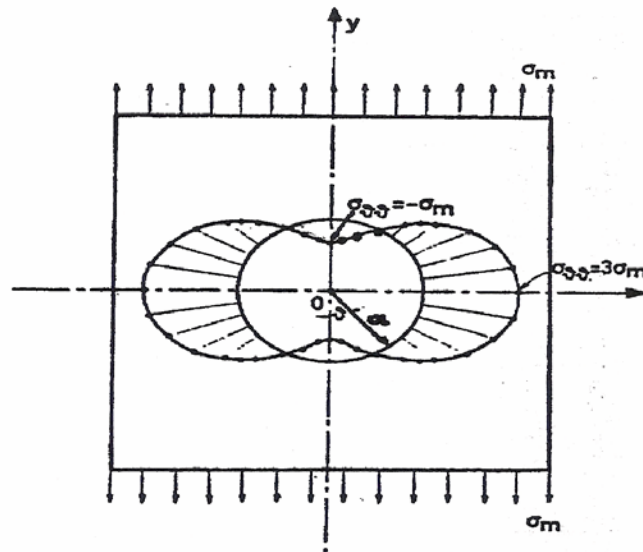
Από το σχήμα διακρίνουμε ότι η τιμή της μέγιστης εφελκυστικής τάσης είναι

$$\sigma_{\theta\theta\max} = 3\sigma_m \text{ και εμφανίζεται στα σημεία } \theta = \pm 90^\circ, \text{ ενώ για } \theta = \pm 30^\circ \text{ και } \theta = \pm 150^\circ$$

η τάση $\sigma_{\theta\theta}$ μηδενίζεται. Επίσης σε μια περιοχή αναπτύσσεται θλιπτική τάση

με μέγιστη τιμή $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_m$ για τα σημεία $\theta = 0^\circ$ και $\theta = 180^\circ$. Επιπλέον $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_m$

για $\theta = \pm 45^\circ$ και $\theta = \pm 135^\circ$.



Σχήμα 2.2: Κατανομή της τάσεως $\sigma_{\theta\theta}$ σε πλάκα με οπή

Στην εγκάρσια διατομή της πλάκας που είναι κάθετη στην διεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου και είναι η ελάχιστη διατομή, είναι $\theta = \pm 90^\circ$ και από τις (2.4) έχουμε :

$$\sigma_{rr} = \frac{3\sigma_m}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_m}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \quad (2.43)$$

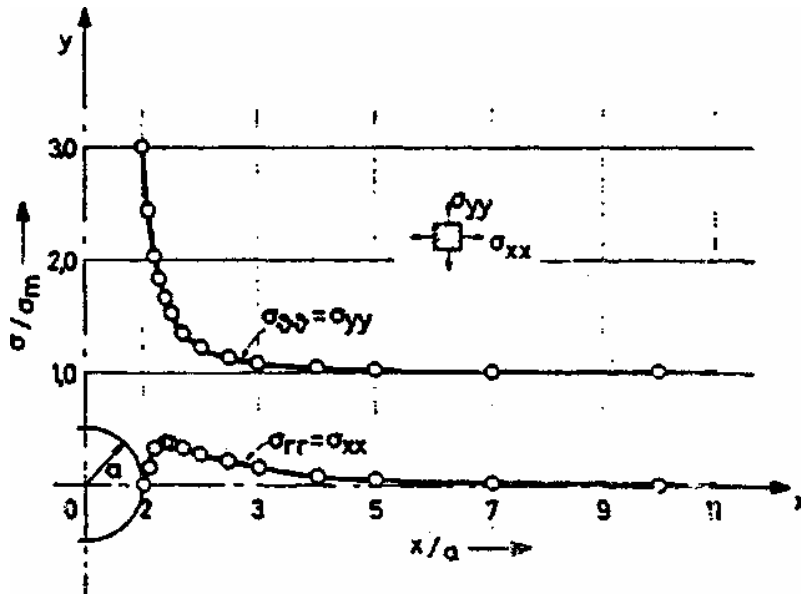
$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Από τις (2.42) έχουμε ότι η μέγιστη τάση είναι $\sigma_{\theta\theta\max} = 3\sigma_m$ και βρίσκεται στην τομή της ελάχιστης διατομής και του συνόρου της κυκλικής οπής.

Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεως όπως ορίστηκε στην Παρ.2.9 είναι:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{\theta\theta\max}}{\sigma_m} = 3$$

Στο Σχ.2.3 δίνονται οι διατομές των συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} επί της ελάχιστης διατομής .Ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων υπολογίζεται ως προς την μέση τιμή και κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1.5 και 3.



Έχει βρεθεί ότι ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων μπορεί να καθοριστεί με μεγάλη ακρίβεια από τον εμπειρικό τύπο :

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = \frac{3B-1}{B+0.3}$$

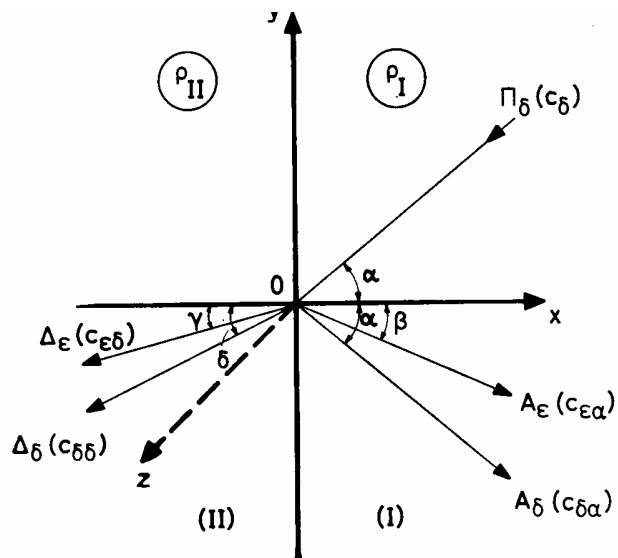
όπου B είναι ο λόγος του εύρους w της λωρίδας, ως προς την διάμετρο της οπής $B = w/2a$.

Γενικά όμως αν το εύρος της πλάκας είναι τέσσερις φορές η διάμετρος της οπής το λάθος που έχουμε υπολογίζοντας την $\sigma_{\theta\theta \max}$ από τις σχέσεις (2.40) δεν ξεπερνά το 6% [11].

Τα παραπάνω ισχύουν και για θλιβόμενη λωρίδα, με απλή αλλαγή του σημείου των τάσεων αρκεί να μην έχουμε και λυγισμό της.

2.11 Ανάκλαση και Διάθλαση Ελαστικών Κυμάτων σε Ελεύθερη Επιφάνεια

Όταν ένα επίπεδο διάμηκες κύμα ανακλάται σε μια ελεύθερη επιφάνεια, οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται, αν θεωρήσουμε ως ανακλώμενο ένα διάμηκες κύμα. Αντίθετα ικανοποιούνται αν θεωρήσουμε ότι επιπρόσθετα ανακλάται και ένα εγκάρσιο κύμα.



Σχ.2.3 Ανάκλαση και διάθλαση προσπίπτοντος διαμήκους κύματος, σε διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων

Γενικά όταν ένα επίπεδο διάμηκες κύμα προσπέσει στην διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων τότε θα δημιουργηθούν τέσσερα κύματα Σχ. 2.3 , δύο από ανάκλαση, ένα διάμηκες και ένα εγκάρσιο και δύο από διάθλαση, ένα διάμηκες και ένα εγκάρσιο

$$\frac{\sin \alpha}{c_{\delta}} = \frac{\sin \alpha}{c_{\delta\alpha}} = \frac{\sin \beta}{c_{\epsilon\alpha}} = \frac{\sin \gamma}{c_{\epsilon\delta}} = \frac{\sin \delta}{c_{\delta\delta}}$$

ανακλώμενο διαμήκες, έχει το αυτό πλάτος με το προσπίπτον αλλά αντίθετο πρόσημο. Αν το προσπίπτον κάθετα σε επιφάνεια είναι θλιπτικό, τότε το ανακλώμενο διάμηκες είναι εφελκυστικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

3.1 Γενικά

Η οπτική μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών αναπτύχθηκε από τον Καθ. Π.Σ. Θεοχάρη [13,14] για την μελέτη της επικρατούσας ιδιομορφίας των τάσεων, στο άκρο της ρωγμής. Η πρώτη εφαρμογή αυτής φαίνεται να έχει γίνει από Manogg [15], ο οποίος χρησιμοποίησε διερχόμενο φως για την μελέτη της διάδοσης ρωγμής σε Plexiglas.

Η πειραματική αυτή μέθοδος βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων στο άκρο μιας ρωγμής ή οπής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων, σε οπτική ιδιομορφία, που προέρχεται σε ιδιόμορφη στον χώρο καμπύλη, που καλείται **καυστική**, των ακτινών φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη περιοχή κοντά στο άκρο της ρωγμής ή οπής. Η καυστική αυτή λαμβάνεται πάνω σε πέτασμα και αφού βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την στο άκρο της ρωγμής περιοχή, επιτρέπει την μελέτη της.

Η μέθοδος των καυστικών κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής τάσεων κοντά στην ιδιομορφία. Το μέγεθος και το σχήμα της καυστικής εξαρτώνται από τις μηχανικές και οπτικές ιδιότητες των υλικών στην περιοχή της ιδιομορφίας και από την απόσταση πλάκας-πετάσματος. Ειδικά για την περίπτωση της καυστικής που δημιουργείται στο σύνορο μιας οπής, η διεύθυνση και οι διαστάσεις της καυστικής, που εξαρτώνται από τον προσανατολισμό των κυρίων τάσεων, μας δείχνουν απευθείας την διεύθυνση των κυρίων τάσεων, σε αντίθεση με την κλασσική μέθοδο της φωτοελαστικότητας όπου οι κύριες διευθύνσεις καθορίζονται μέσω ισοκλινών. Επίσης δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού της τιμής της διαφοράς των κυρίων τάσεων.

Τέλος η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε υλικά διαφανή και μη, σε στατικά και δυναμικά προβλήματα [9,10].

3.2 Επίδραση της Φόρτισης στον Οπτικό Δρόμο των Ανακλώμενων ή των Διερχόμενων Ακτινών

Έστω φωτεινή ακτίνα ABDE, μονοχρωματικού φωτός, προσπίπτει κάθετα στο επίπεδο δοκίμιο, με παράλληλες παράπλευρες επίπεδες επιφάνειες και διπλοθλαστικό υλικό του Σχ.3.1

.

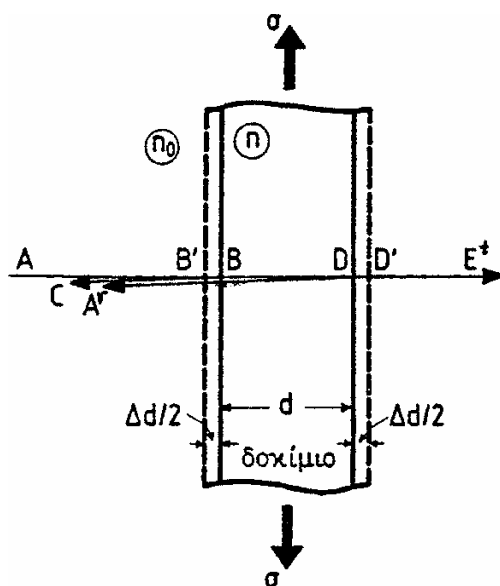
Το επίπεδο βρίσκεται σε επίπεδη εντατική κατάσταση (Παρ. 2.4) ενώ η φωτεινή ακτίνα είναι πολωμένη κατά την διεύθυνση των κυρίων τάσεων.

Η ακτίνα κατά την πρόσπτωση της στο δοκίμιο ακολουθεί μια σειρά από ανακλάσεις και διαθλάσεις στην μπρος και πίσω επιφάνεια του δοκιμίου με αποτέλεσμα μια απειρία ακτινών να εξέρχεται από αυτό, με μειωμένη όμως την ένταση της όσο προχωρά η διαδικασία. Συνεπώς οι ακτίνες με αξιόλογη φωτεινή ένταση είναι η E^t , που έχει υποστεί δύο διαθλάσεις, η C που ανακλάται στην μπρος επιφάνεια και η A^r που ανακλάται από την πίσω επιφάνεια και έχει υποστεί δύο διαθλάσεις και μία ανάκλαση.

Λόγω της φόρτισης το δοκίμιο έχει υποστεί μεταβολή του πάχους Δd καθώς και του δείκτη διαθλάσεως του υλικού n_0 σε $n_{1,2}$ κατά τις διευθύνσεις των κυρίως τάσεων $\sigma_{1,2}$ αντίστοιχα. Η μεταβολή του οπτικού δρόμου των ακτινών A^r και E^t κατά τους κύριους άξονες 1,2 δίνεται από τους τύπους [16]

$$\Delta S_{r,1,2} = 2 \left[(n_{1,2} - n)d + (n_{1,2} - \frac{n_0}{2})\Delta d \right] \quad (3.1)$$

$$\Delta S_{t,1,2} = (n_{1,2} - n)d + (n_{1,2} - n_0)\Delta d$$



Σχήμα 3.1 : Κάθετη πρόσπτωση ακτίνας σε επίπεδο δοκίμιο

ενώ αντίστοιχα για αυτές τις δύο ακτίνες οι μεταβολές του δείκτη διαθλάσεως κατά την διεύθυνση κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 στο επίπεδο τασικό πρόβλημα δίνονται από τις σχέσεις [17] :

$$\Delta n_1 = b_1 \varepsilon_1 + b_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (3.3)$$

$$\Delta n_2 = b_1 \varepsilon_2 + b_2 (\varepsilon_3 + \varepsilon_1) \quad (3.4)$$

όπου b_1, b_2 σταθερές και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες παραμορφώσεις με $\Delta \eta_{12} = \eta_{12} - \eta$ (3.5)

Οι σχέσεις αυτές εκφράζουν τον φωτοτασεοπτικό νόμο των Newmann-Maxwell.

Εισάγοντας στις παραπάνω σχέσεις τον γενικευμένο νόμο του Hooke προκύπτουν οι συνθήκες Favre για την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια και την διερχόμενη ακτίνα αντίστοιχα :

$$\Delta S_{r_{1,2}} = 2dc_r [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (3.6)$$

$$\Delta S_{t_{1,2}} = dc_t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (3.7)$$

όπου c_r, c_t είναι τασεοπτικές σταθερές και ξ_r, ξ_t συντελεστές οπτικής ανισοτροπίας

με

$$c_{r,t} = \frac{a_{r,t} + \beta_{r,t}}{2}, \quad \xi_{r,t} = \frac{a_{r,t} - \beta_{r,t}}{a_{r,t} + \beta_{r,t}} \quad (3.8)$$

και

$$a_r = \frac{1}{E} \left[b_1 - 2\nu b_2 - \nu \left(n - \frac{n_0}{2} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$\beta_r = \frac{1}{E} \left[b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu \left(n - \frac{n_0}{2} \right) \right] \quad (3.10)$$

$$a_i = \frac{1}{E} [b_1 - 2\nu b_2 - \nu(n - \eta_0)] \quad (3.11)$$

$$\beta_i = \frac{1}{E} [b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(n - \eta_0)] \quad (3.12)$$

Το συμπέρασμα που βγαίνει από τις σχέσεις (3.6) και (3.7) είναι ότι η μεταβολή του οπτικού δρόμου κατά την φόρτιση ενός διπλοθλαστικού υλικού είναι συνάρτηση ενός ισότροπου μέρους, που εξαρτάται από το άθροισμα των κυρίων τάσεων, και ενός ανισότροπου μέρους, που εξαρτάται από την διαφορά τους.

Στην περίπτωση οπτικού ισότροπου υλικού, όπως το Plexiglas, είναι $b_1 = b_2 = b$ και $\xi = 0$ και γι' αυτό

$$\Delta S_{r_1} = \Delta S_{r_2} = 2dc_r(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.13)$$

$$\Delta S_{t_1} = \Delta S_{t_2} = dc_t(\sigma_1 + \sigma_2)$$

(3.14)

3.3 Η Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών

Οι φωτεινές ακτίνες που ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου σχηματίζουν κυματικά μέτωπα :

$$S(x,y,z) = \text{σταθ.} \quad (3.15)$$

Εάν $S(x, y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντίστοιχης φωτεινής ακτίνας μεταξύ δυο επίπεδων παράλληλων στο μέσο επίπεδο της φορτισμένης πλάκας με οπή, σύμφωνα με την θεωρία της εικονικής ισχύει η σχέση :

$$S(x,y,z) = z - s(x,y) = \text{σταθ.} \quad (3.16)$$

Έστω ένα επίπεδο αναφοράς σε απόσταση z_0 από το μέσο επίπεδο της πλάκας και παράλληλο σε αυτό. Τότε το διάνυσμα w δίνει την απόκλιση των ανακλώμενων ακτινών στο επίπεδο με :

$$w = z_0 \text{grad } S(x,y,z) \quad (3.17)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.16), η (3.17) μετατρέπεται σε :

$$w = -z_0 \text{grad } s(x,y,z) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (3.18)$$

όπου i, j, k μοναδιαία διανύσματα καρτεσιανού συστήματος, συνδεδεμένου με την πλάκα, με $s(x,y)$ να είναι ο οπτικός δρόμος δια του δοκιμίου στο τυχόν σημείο P αυτού (Σχ. 3.2).

Δεδομένου, ότι τα κυματικά μέτωπα των προσπίπτουσών φωτεινών ακτινών στο μέσο επίπεδο της πλάκας, είναι παράλληλα σε αυτό, ισχύει

$$s(x,y) = s_0 + \Delta s_{r,t}(x,y) \quad (3.19)$$

όπου s_0 σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο και συνεπώς :

$$w = -z_0 \text{grad } \Delta s_{r,t}(x,y) \quad (3.20)$$

Οι αιχμές του διανύσματος w καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z=z_0$ περιβάλλουσα (καυστική), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες..

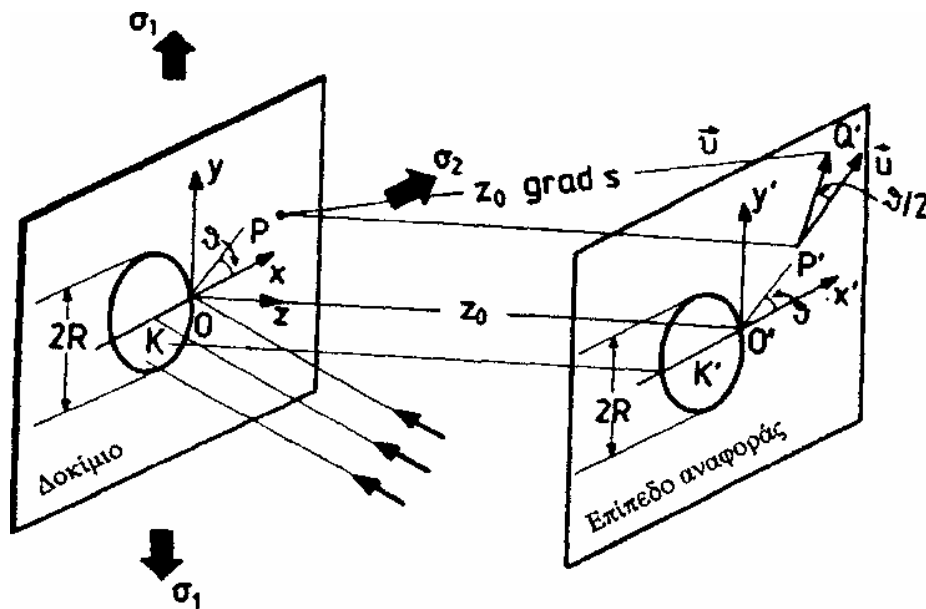
Αντικαθιστώντας στην (3.20) τον όρο $\Delta s_{r,t}$ την μεταβολή δηλαδή του οπτικού δρόμου λόγω φορτίσεως, για οπτικώς ισότροπα υλικά από τις σχέσεις (3.13) και (3.14) έχουμε :

$$w = \varepsilon_0 z_0 \text{grad}_{r,t} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.21)$$

όπου $\varepsilon = 1$ για την πρώτη διερχόμενη ακτίνα (t) και $\varepsilon = 2$ για την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια ακτίνα (r)

Θέτοντας $C_{r,t} = -\epsilon_0 z_0 \text{grad}_{r,t}$ προκύπτει:

$$w = C_{r,t} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.22)$$



Σχήμα 3.2 : Γεωμετρία της δημιουργίας καυστικής σε πλάκα με οπή

3.4 Εφαρμογή της Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά

Για την επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος με την μέθοδο των μιγαδικών (2.18) το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από την σχέση :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\Phi(z) \quad (3.23)$$

όπου $\Phi(z)$ η αναλυτική μορφή της συνάρτησης z . Έστω $\Phi(z)$ της μορφής :

$$\Phi(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (3.24)$$

με $u(x,y)$ και $u(x,y)$ να ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.25)$$

και την αρμονική εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.26)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.22) που δίνει απόκλιση φωτός για οπτικώς ισότροπα υλικά έχουμε από (3.23) και (3.24):

$$w = 4C_{r,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (3.27)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η σχέση αυτή γράφεται:

$$w = 4C_{r,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} i \right) \quad (3.28)$$

Το διάνυσμα w εκφράζει την σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ ενός τυχαίου σημείου P της πλάκας και της εικόνας του στο επίπεδο αναφοράς, που βρίσκεται σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Η απόκλιση αυτή σε σχέση με το σύστημα αξόνων $O'x'y'z'$ του πετάσματος (Σχ.3.2) εκφράζεται ως $W=z + w$. Για το μιγαδικό επίπεδο είναι

$$W = z + w = x + yi + 4C_{r,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} i \right) \quad (3.29)$$

πάνω στο πέτασμα αναφοράς γράφεται:

$$W = X' + iY' \quad (3.30)$$

από όπου προκύπτει

$$X' = x + 4C_{r,t} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y' = y + 4C_{r,t} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.31)$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ανακλώμενων ή διερχόμενων ακτινών. Οι ακτίνες αυτές στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω από την ρωγμή αποκλίνουν κατά διάφορα ποσά που εξαρτώνται από την μεταβολή του πάχους και του δείκτη διαθλάσεως του υλικού. Οι ακτίνες συγκεντρώνονται σε μια οριακή καμπύλη που φωτίζεται ισχυρά και σχηματίζει μία **καυστική**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει ιδιόμορφη (singular) καμπύλη για το μέγεθος W . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας (singularity) πληρούνται με τον μηδενισμό της Ιακωβιανής διακρίνουσας :

$$J = \frac{\partial(X', Y')}{\partial(x, y)} = 0$$

ή

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X'}{\partial x} & \frac{\partial X'}{\partial y} \\ \frac{\partial Y'}{\partial x} & \frac{\partial Y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

(3.33)

Η ανάπτυξη της ορίζουσας λόγω 3.26 και 3.30 μετά από επίλυση δίνει

$$1 + 16C_{r,t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.33)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\Phi(z)$ δυο φορές παίρνοντας το μέτρο έχουμε

$$|\Phi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.34)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.34) στην (3.33) έχουμε :

$$|4C_{r,t} \Phi''(z)| = 1 \quad (3.35)$$

η οποία εκφράζει την εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής. Αφού ισχύει:

$$\overline{\Phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.36)$$

τότε η (3.29) γίνεται:

$$W = z + 4C_{r,t} \overline{\Phi'(z)} \quad (3.37)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση της καυστικής με την $\Phi(z)$ να ικανοποιεί την σχέση (3.23)

3.5 Εφαρμογή της Μεθόδου των Καυστικών σε Οπή

Έστω μια λεπτή, άπειρη πλάκα που περιέχει μία κεντρική κυκλική οπή και υποβάλλεται σε διαξονική εντατική κατάσταση σ_1 και σ_2 σε πολύ μεγάλη απόσταση. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες Oxy συμπίπτουν με το επίπεδο της πλάκας, το O με το κέντρο της οπής και με τους άξονες Ox , Oy , να

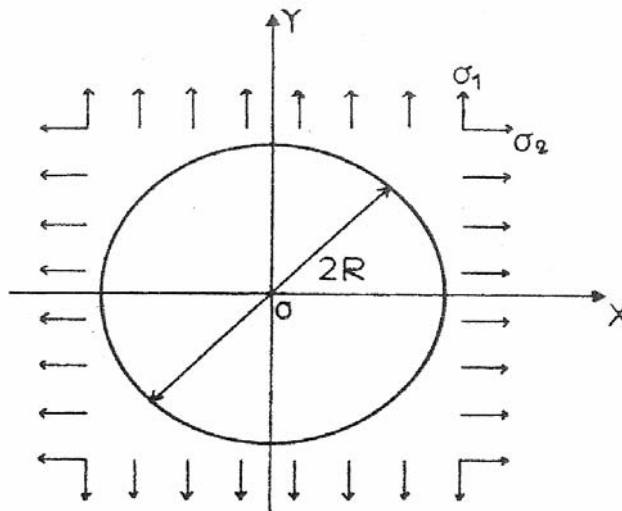
ταυτίζονται με τις διευθύνσεις των κυρίων

ν τάσεων σ_1 και σ_2 , Σχ. 3.3.

Εάν η ακτίνα της οπής είναι R , έχουμε για την περίπτωση της τρυπημένης πλάκας από την θεωρία του Muskhelishvili[20], τις εξής εκφράσεις

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)$$
$$\Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

(3.38)



Σχήμα 3.3 : Το πεδίο των κύριων τάσεων κοντά στην οπή πλάκας υπό συνθήκες γενικευμένης επίπεδης έντασης

Η συνάρτηση $\Phi(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$ δίδεται από :

$$\Phi(z) = \Gamma + R^2 \Gamma' / z^2$$

ή από (3.38):

$$\Phi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) + R^2 \left[(\sigma_1 - \sigma_2) / 2z^2 \right] \quad (3.39)$$

Διαφοροποιώντας την συνάρτηση $\Phi(z)$ ως προς z έχουμε :

$$d\Phi / dz = R^2 \left[(\sigma_1 - \sigma_2) / z^3 \right] \quad (3.40)$$

$$d\bar{\Phi}/dz = R^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)/z^{-3}] \quad (3.41)$$

$$d^2\Phi/dz^2 = 3R^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)/z^4] \quad (3.42)$$

Εισάγοντας στην εξίσωση (3.35) την σχέση (3.39) για την κατανομή της τάσης στην γειτονεία μιας ρωγμής, θα έχουμε την εξίσωση της αρχικής καμπύλης για την οπή :

$$\left| 4C(d^2\Phi/dz^2) \right| = \left| 12C_{r,t}R^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)/z^4] \right| = 1 \quad (3.43)$$

η οποία όταν λυθεί ως προς r

$$r = r_0 = (12C_{r,t}R^2 |\sigma_1 - \sigma_2|)^{\frac{1}{4}} \quad (3.44)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η αρχική καμπύλη είναι κύκλος της οποίας η ακτίνα r_0 εξαρτάται από την σταθερά $C_{r,t}$, την ακτίνα της οπής R και την διαφορά των κυρίων τάσεων $|\sigma_1 - \sigma_2|$

Η εξίσωση της αντίστοιχης επικυκλοειδούς δίνεται από (3.37) με :

$$W = z + 4C_{r,t}R^2(\sigma_1 - \sigma_2)/z^{-3} \quad (3.45)$$

ή εκφράζοντας το z πολική μορφή :

$$W = re^{i\theta} + 4C_{r,t}R^2(\sigma_1 - \sigma_2)r^{-3}e^{i3\theta} \quad (3.46)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι $W = X + iY$ και λάβουμε υπόψη την εξίσωση (3.44) τότε προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της επικυκλοειδούς (καυστικής) με παράμετρο την γωνία θ . Αυτές οι εξισώσεις είναι:

$$X = r_0 \left(\cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \right) \quad (3.47)$$

$$Y = r_0 \left(\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta \right)$$

Οι εξισώσεις της επικυκλοειδούς σε πολικές συντεταγμένες ρ και ϕ δίνονται από

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{r_0}{3} \sqrt{10 + 6 \cos 2\theta} \quad (3.48)$$

$$\phi = \cot^{-1} \left[\frac{(3 \cos \theta + \cos 3\theta)}{(3 \sin \theta + \sin 3\theta)} \right]$$

η οποία με επίλυση γίνεται :

$$\tan^2 \phi = \frac{[16 - (3\rho/r_0)^2][2 + (3\rho/r_0)^2]}{[(3\rho/r_0) - 4]^3}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται ότι η επικυκλοειδής είναι μία συνεχής, πεπερασμένη και περιοδική καμπύλη με περίοδο 2π και συμμετρική ως προς τους άξονες Ox , Oy [19], Επίσης από τις σχέσεις (3.48) εξάγεται ότι η πολική ακτίνα

ρ γίνεται :

$$\rho_{\max} = \frac{4}{3} r_0 \quad \text{για } \theta=0 \quad \text{ή} \quad \pi \quad (3.49)$$

$$\rho_{\min} = \frac{2}{3} r_0 \quad \text{για } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{3\pi}{2}$$

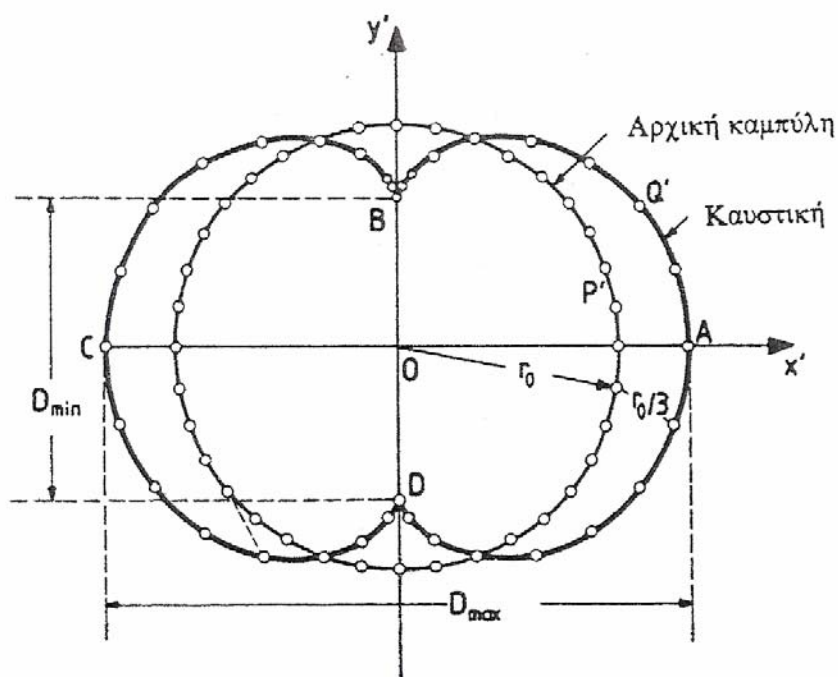
$$\rho_{\max} = 2\rho_{\min}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις (3.47) μπορούν να γραφτούν συντόμως ως :

(3.50)

$$W = r_0 \left(e^{i\theta} + \frac{1}{3} e^{i3\theta} \right)$$

δείχνοντας ότι κάθε σημείο της επικυκλοειδούς μπορεί να σχεδιαστεί αν από κάθε σημείο της περιφέρειας της αρχικής καμπύλης, που αντιστοιχεί σε γωνία θ , φέρουμε ωρολογιακά διάνυσμα $(r_0/3)$ που υποτείνει γωνία 3θ με τον $O'x'$ άξονα. Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχ.3.4.



Σχήμα 3.4 : Μορφή και σχετική θέση της αρχικής καμπύλης και της αντίστοιχης επικυκλοειδούς, γύρω από μικρή οπή, σε γενικευμένο επίπεδο εντατικό πεδίο

Οι προηγούμενες σχέσεις για την αρχική καμπύλη και την επικυκλοειδή ισχύουν για μια παράλληλη δέσμη φωτός που προσπίπτει πάνω στην πλάκα. Αν αυτό δεν ισχύει πρέπει να συμπεριληφθεί ο συντελεστής μεγέθυνσης λ_i , που ορίζεται ως :

$$\lambda_i = \frac{z_0 + z_i}{z_i}$$

όπου z_0 η απόσταση του μέσου επιπέδου της πλάκας και του επιπέδου αναφοράς, στο οποίο σχηματίζεται η επικυκλοειδής, και z_i η απόσταση του μέσου επιπέδου της πλάκας και του σημείου εστίασης της φωτεινής δέσμης.

Για τον υπολογισμό της διαφοράς των κυρίων τάσεων έχουμε από (3.49) και (3.44) :

$$D_{\max} = \frac{8}{3} (12C_{r,t} \lambda_i^3 R^2 |\sigma_1 - \sigma_2|)^{1/4} \quad (3.51)$$

από όπου :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \left(\frac{3}{4} \lambda_i \right)^3 \left(\frac{D_{\max}}{4\sqrt{R}} \right)^4 \left(\frac{1}{C_{r,t}} \right) \quad (3.52)$$

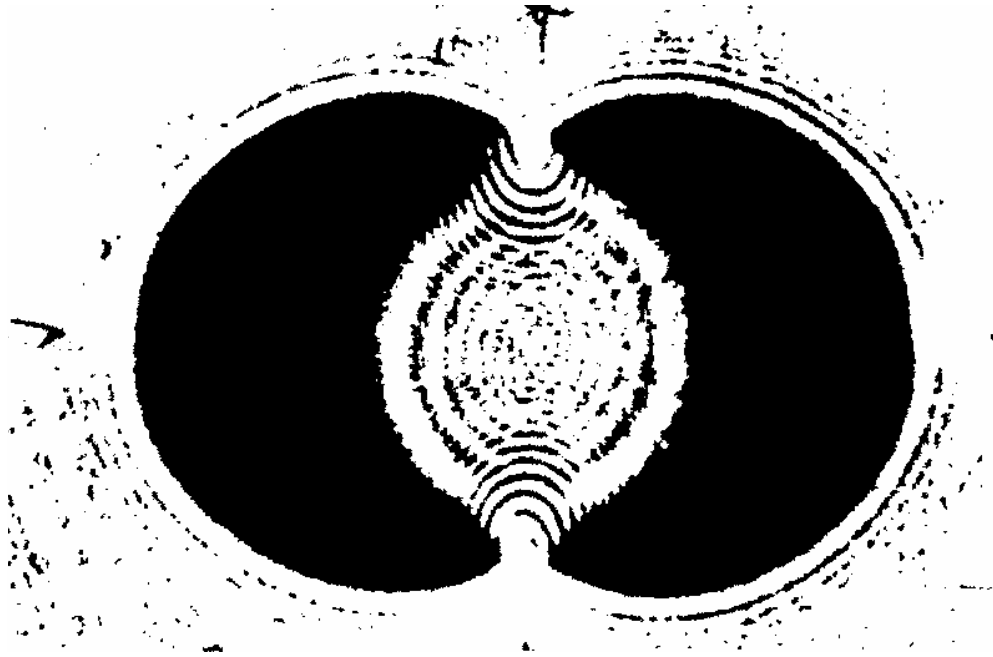
Το $\sigma_1 - \sigma_2$ ισούται με $2t_{\max}$

Συνεπώς μπορούμε να βρούμε την τιμή της διαφοράς, μετρώντας την μέγιστη διάμετρο της επικυκλειδούς και γνωρίζοντας τα μηχανικά και οπτικά χαρακτηριστικά του δοκιμίου που καθορίζουν την σταθερά $C_{r,t}$, με :

$$C_r = -z_0 d c_r \quad \text{για διερχόμενες ακτίνες} \quad (3.53)$$

$C_t = 2z_0 d c_t$ για ανακλώμενες ακτίνες καθώς και την οπτική διάταξη που καθορίζει τον συντελεστή μεγεθύνσεως λ_i

Στο Σχ. 3.5 παρουσιάζεται η χαρακτηριστική φωτογραφία καυστικής που έχει σχηματιστεί από διερχόμενη φωτεινή δέσμη γύρω από οπή.



Σχήμα3.5

3.6 Μεγέθυνση-Προσανατολισμός των Καυστικών

Για την πειραματική διάταξη των καυστικών απαιτείται μια πηγή μονοχρωματικού φωτός, φακοί ή κάτοπτρα που θα συγκλίνουν ή θα αποκλίνουν την φωτεινή δέσμη, πετάσματα αναφοράς πάνω στα οποία θα προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές καθώς και η φωτογραφική μηχανή. Τα δοκίμια πρέπει να είναι είτε διαφανή (για καυστικές διελεύσεως ή ανάκλασης από μπροστά ή την πίσω επιφάνεια), είτε να έχουν καταστεί κατοπτρικά.

Όπως αναφέραμε Παρ. 3.5 η φωτεινή δέσμη όταν δεν είναι παράλληλη αλλά συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα τότε πρέπει να λάβουμε υπόψη τον συντελεστή μεγεθύνσεως λ_i της οπτικής διατάξεως :

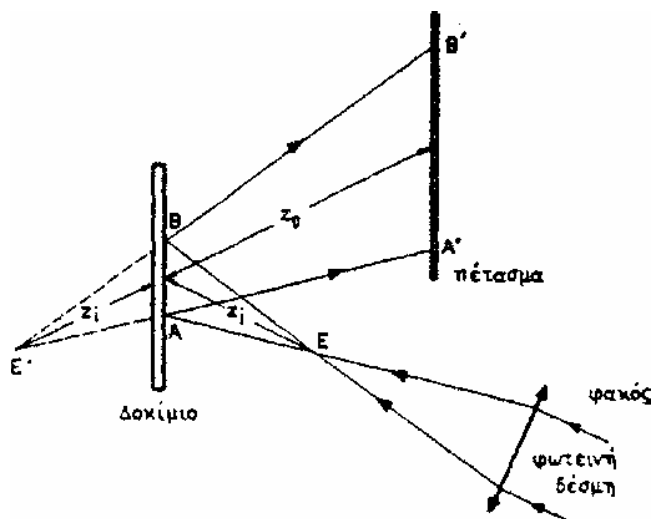
$$\lambda_i = \frac{z_0 + z_i}{z_i} \quad (3.54)$$

όπου z_0 η απόσταση του επιπέδου αναφοράς από το δοκίμιο και z_i η απόσταση της εστίας φωτεινής δέσμης από το δοκίμιο. Για παράλληλη δέσμη ο συντελεστής είναι ίσος με 1.

Η μεγέθυνση λ_i μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Δεχόμαστε **[19]** ότι το z_0 είναι πάντα θετικό και z_i θετικό για αποκλίνουσα δέσμη και αρνητικό για συγκλίνουσα (εστία πίσω από το δοκίμιο).

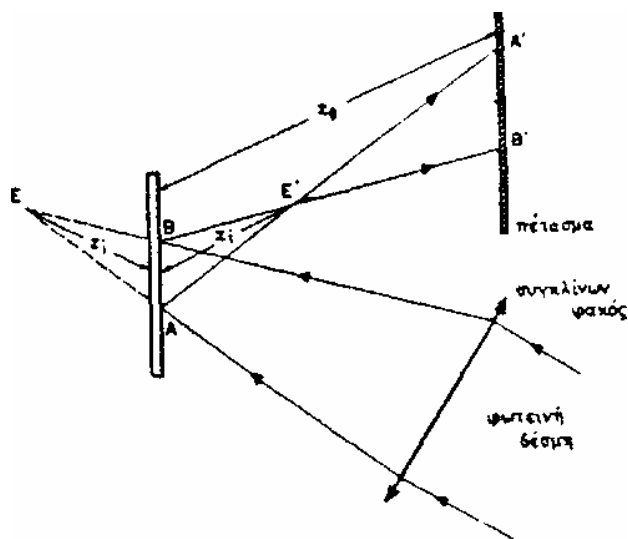
Για την διάταξη του Σχ. 3.6 με αποκλίνουσα δέσμη έχουμε $z_0 > 0$ και $z_i > 0$ οπότε :

$$\lambda_i = \frac{z_0 + z_i}{z_i} > 0, \quad \text{θετική} \quad \text{μεγέθυνση}$$



Σχήμα 3.6 Πειραματική διάταξη αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης

Για την διάταξη του Σχ. 3.7 με συγκλίνουσα δέσμη έχουμε $z_o > 0$ και $z_o > |z_i|$, άρα αρνητική μεγέθυνση



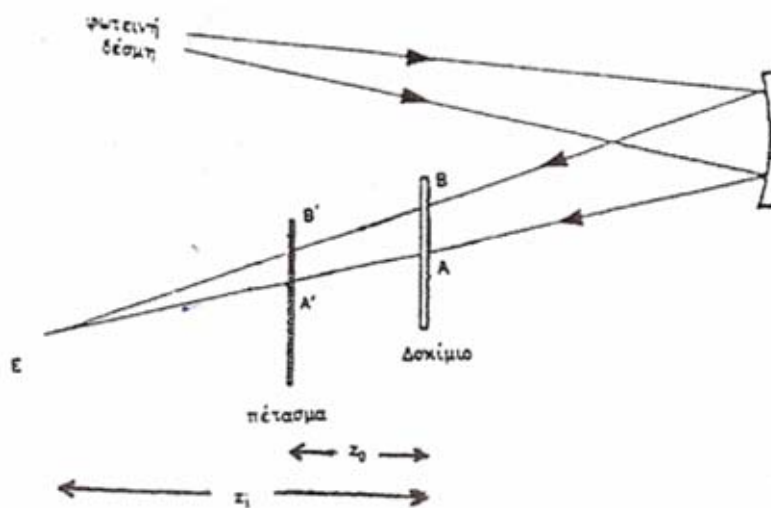
$$\lambda_i = \frac{z_0 + (-z_i)}{(-z_i)} < 0$$

Σχήμα 3.7 : Πειραματική διάταξη συγκλίνουσας φωτεινής δέσμης

Για την διάταξη του Σχ. 3.8 με συγκλίνουσα δέσμη έχουμε $z_0 > 0$ και $z_0 < |z_i|$, $z_0 > |z_i|$,

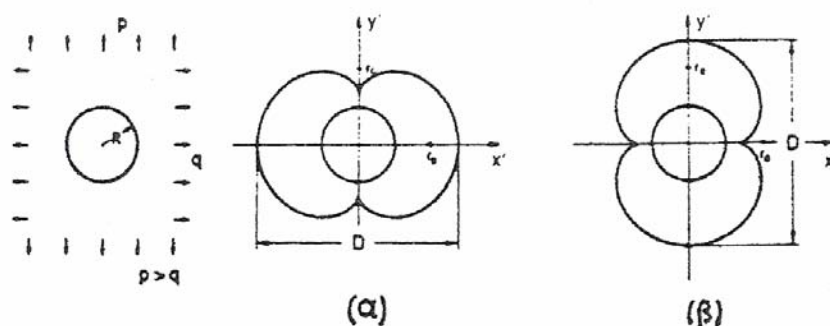
οπότε, μεγέθυνση θετική

$$\lambda_i = \frac{z_0 + (-z_i)}{(-z_i)} > 0$$



Σχήμα 3.8 : Πειραματική διάταξη διερχόμενης φωτεινής δέσμης

Όσον αφορά τον προσανατολισμό της καυστικής που δημιουργείται σε μία πλάκα με οπή, παρατηρούμε ότι για την περίπτωση εφελκυστικού φορτίου που εξασκείται κατακόρυφα ή που η κατακόρυφη τιμή του είναι μεγαλύτερη από την οριζόντια σε περίπτωση διαξονικής φόρτισης, η καυστική προσανατολίζεται όπως στο Σχ. 3.9(α) για θετική μεγέθυνση, ενώ για αρνητική μεγέθυνση, προσανατολίζεται όπως στο Σχ 3.9(β), στρέφεται δηλαδή κατά 90 .



Σχήμα 3.9 : Καυστική οπής από κατακόρυφο εφελκυστικό φορτίο (α) : $\lambda_i > 0$

(β) : $\lambda_i < 0$

Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στην Παρ. 3.4 η απόκλιση του φωτός αναφερόμενη στην αρχή O' του O_{xy} του πετάσματος, δίνεται από την $W = z + w$.

Στην περίπτωση που η φωτεινή δέσμη δεν είναι παράλληλη η σχέση τροποποιείται [20] σε :

$$W = \frac{z}{\lambda_i} + w \quad (3.55)$$

οπότε η (3.46) γίνεται:

$$W = \frac{r e^{i\theta}}{\lambda_i} + 4C_{r,t} R^2 (\sigma_1 - \sigma_2) r^{-3} e^{i3\theta} \quad (3.56)$$

και η (3. 50) :

$$W = \frac{r_0}{\lambda_i} \left(e^{i\theta} + \frac{\lambda_i}{3} e^{i3\theta} \right) \quad (3.57)$$

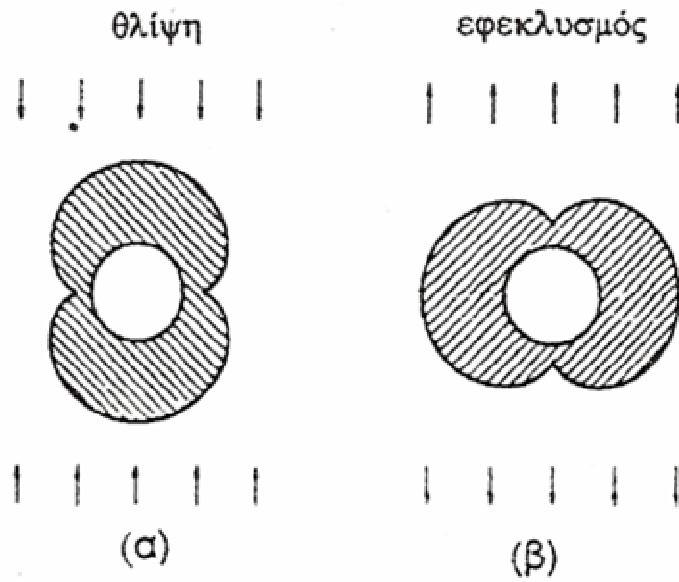
από όπου προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής :

$$X = \frac{r_0}{\lambda_i} \left(\cos \theta + \frac{\lambda_i}{3} \cos 3\theta \right) \quad (3.58)$$

$$Y = \frac{r_0}{\lambda_i} \left(\sin \theta + \frac{\lambda_i}{3} \sin 3\theta \right)$$

Σύμφωνα με την (3.58), η επικυκλοειδής που σχηματίζεται στην περίπτωση που το λ_i είναι αρνητικό, είναι γωνιακά μετατοπισμένη κατά 90 ωρολογιακά, σε σχέση με την επικυκλοειδή που σχηματίζεται όταν λ_i είναι θετικό, γεγονός που μπορεί να αποδειχθεί και πειραματικά **[10]** .

Από την εξίσωση 3.56 παρατηρούμε ότι στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου που εξασκείται οριζόντια, ή που οριζόντια τιμή του είναι μεγαλύτερη, στην περίπτωση διαξονικής φορτίσεως, η καυστική θα έχει γωνιακή μετατόπιση κατά 90° σε σχέση με την περίπτωση κατακόρυφης εξάσκησης του εφελκυστικού φορτίου. Από την ίδια εξίσωση προκύπτουν ανάλογα συμπεράσματα για την περίπτωση θλιπτικών φορτίων. Στο Σχ. 3.10 φαίνεται ένα παράδειγμα για κατακόρυφα εφελκυστικά ή θλιπτικά φορτία για $\lambda_i > 0$.



Σχήμα 3.10 : Καυστική οπής από διερχόμενη φωτεινή δέσμη με $\lambda_r > 0$. (α) Κατακόρυφο θλιπτικό φορτίο, (β) Κατακόρυφο εφεκυστικό φορτίο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

4.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο τρόπος του πειράματος καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση αυτού. Συγκεκριμένα γίνεται αναφορά των παραμέτρων, περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας, ανάλυση των φωτογραφικών στιγμιότυπων του δοκιμίου καθώς και παρουσίαση δεδομένων που αφορούν τη διάδοση του μετώπου του τασικού παλμού, διευθύνσεις και τροχιές κυρίων τάσεων, υπολογισμός διαφοράς κυρίων τάσεων και χρονικής μεταβολής τους.

4.2 Παράμετροι πειράματος

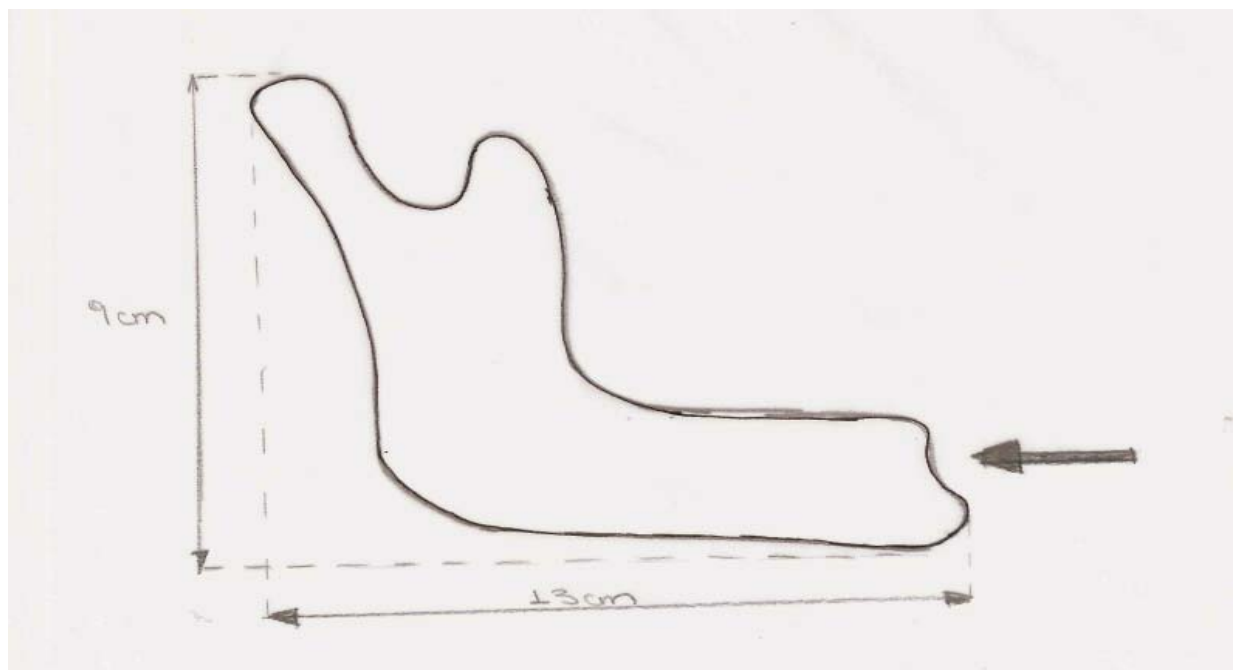
Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του δοκιμίου ήταν Plexiglas πάχους $d=0.003m$. Οι τασεοπτικές σταθερές του Plexiglas όπως έχουν υπολογιστεί πειραματικά για δυναμικές τιμές φαίνονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1. Τασεοπτικές σταθερές του Plexiglas

ν^d	E^d (at)	c_t^d (cm^2 / kp)	c_r^d (cm^2 / kp)
0.34	43000	-0.74×10^{-5}	-1.13×10^{-5}

Το πείραμα αφορά κρούση δοκιμίου . Το δοκίμιο αποτελεί το κάτω τριτημόριο του προσώπου δηλαδή τη κάτω γνάθο. Η τυπική μορφή και διάσταση του δοκιμίου παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1. Στο σχήμα φαίνεται επίσης και η διεύθυνση του εισερχόμενου παλμού καθώς επίσης και το σημείο πρόσκρουσης της σφαίρας. Το σημείο πρόσκρουσης είναι η περιοχή της γενειακής συμφύσεως.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος διάδοσης του παλμού και οι τοπικές επιπτώσεις αυτού στην περιοχή της κορωνοειδούς απόφυσης και στην περιοχή του σώματος της κάτω γνάθου που είναι συνήθως οι πιο επικίνδυνες περιοχές για συγκέντρωση τάσεων με ποσοστά 36% και 21% αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1 Η μορφή και οι διαστάσεις του δοκιμίου και η διεύθυνση του εισερχόμενου παλμού

Αναφέρεται ότι για τον σχηματισμό των καυστικών επί οπών έγινε διάτρηση στο δοκίμιο. Στο σχήμα του δοκιμίου φαίνεται η χαρακτηριστική θέση κάθε οπής. Η διάμετρος κάθε μιας είναι 0.5×10^{-3} m, ενώ η απόσταση μεταξύ δυο γειτονικών κέντρων των οπών είναι 10×10^{-3} m. Πρέπει να τονιστεί ότι δεν υπάρχει σημαντική αλληλοεπίδραση του τασικού πεδίου μεταξύ των οπών και του κυρίως τασικού πεδίου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι αναφέρονται στην παράγραφο 2.10 οι αποστάσεις γειτονικών οπών είναι 10 φορές μεγαλύτερες από τις διαμέτρους ενώ ο συντελεστής συγκεντρώσεων τάσεων παίρνει την τιμή $k=2.8$ πολύ κοντά στο 3, γεγονός που κρίνεται ικανοποιητικό[21]

4.3 Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης

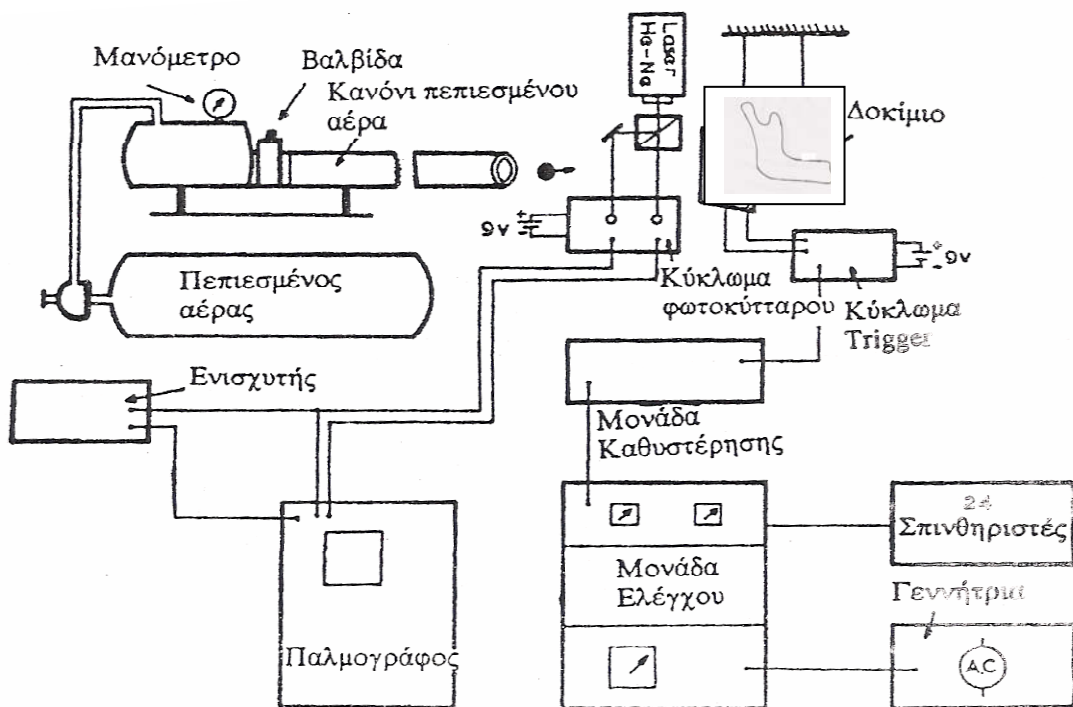
Για να δημιουργηθεί τασικός παλμός το κάθε δοκίμιο εκρούσθη στα σημεία εισόδου του παλμού με μεταλλικές σφαίρες διαμέτρου 0.010 m που βάλλονταν από κανόνι πεπιεσμένου αέρα. Το κάθε δοκίμιο ήταν τοποθετημένο έτσι ώστε η σφαίρα να κινείται στο επίπεδο του πάχους του. Στο κανόνι υπάρχει ηλεκτρομαγνητική βαλβίδα, με χρόνο λειτουργίας πολύ μικρό, που συντελεί στο να υπάρχει σταθερή επιτάχυνση του βλήματος εντός του κανονιού ώστε αυτό να εξέρχεται με σταθερή ταχύτητα για δεδομένη πίεση. Η πίεση ρυθμίζεται από το μανόμετρο και κρατήθηκε σταθερή για όλα τα πειράματα στα 3 bar περίπου.

Η ταχύτητα του βλήματος προσδιορίζεται από σύστημα Laser HeNe, κύκλωμα φωτοκύτταρου και παλμογράφου. Καθώς η σφαίρα διακόπτει διαδοχικά τις δύο παράλληλες ακτίνες Laser αποστάσεως $d=0.030$ m, δύο παλμοί εμφανίζονται στον παλμογράφο όπου μπορεί να μετρηθεί η μεταξύ χρονική τους απόσταση [22] η οποία ήταν 10m/sec.

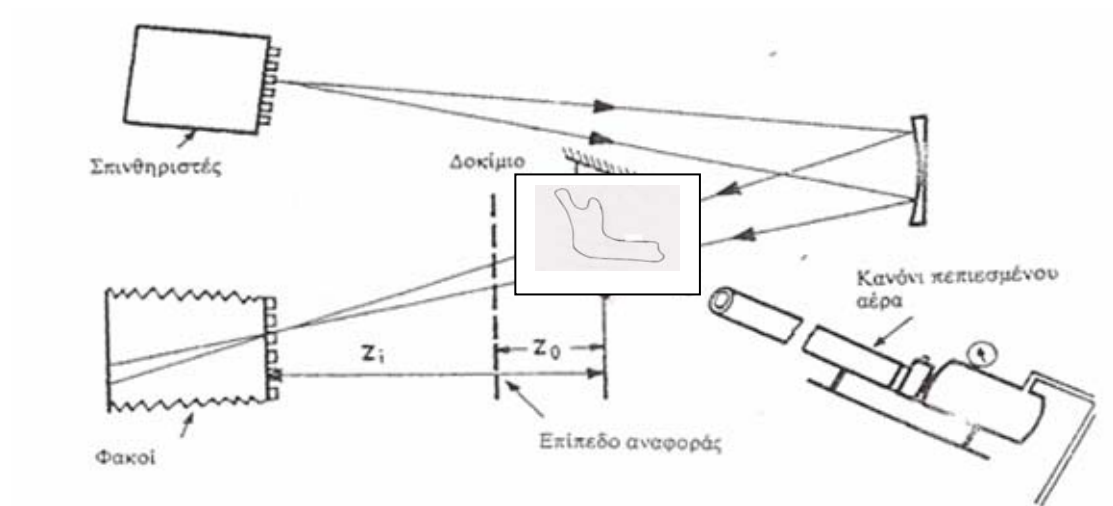
Για την φωτογραφική αποτύπωση της διάδοσης του τασικού παλμού επί του δοκίμιου χρησιμοποιήθηκε μηχανή υψηλής ταχύτητας Cranz-Schardin, 24 σπινθηριστών και μέγιστης συχνότητας 10^6 φωτογραφιών / sec. Το σύστημα της μηχανής Cranz-Schardin συνδέεται με κύκλωμα Trigger που καθορίζει την έναρξη της λειτουργίας του. Το κύκλωμα κλείνει όταν δύο καλώδια που είναι τοποθετημένα λίγο μπροστά από το σημείο πρόσκρουσης της σφαίρας με το δοκίμιο, ενωθούν με την βοήθεια της σφαίρας. Η πορεία της σφαίρας καθορίζεται από ειδικό όργανο ώστε να γίνει ευθυγράμμιση του κανονιού, του σημείου τομής των καλωδίων και του σημείου πρόσκρουσης της σφαίρας στο δοκίμιο.

Για τον συντονισμό του πειράματος απαιτείται η παρουσία τριών ατόμων. Το διάγραμμα της πειραματικής διάταξης φαίνεται στο σχήμα 4.2 [23].

Η συχνότητα λειτουργίας καθ' ενός των 24 σπινθηριστών της Cranz-Schardin ρυθμίζεται από την μονάδα προγραμματισμού της. Για το πείραμα ορίστηκε οι φωτογραφίες να απέχουν χρονικά μεταξύ τους 8 msec .



Σχήμα 4.2 Διάγραμμα πειραματικής διατάξεως



Σχήμα 4.3 Διάγραμμα της οπτικής διάταξης

Μια φωτεινή δέσμη ξεκινάει από τον σπινθηριστή και ανακλάται από το σφαιρικό κάτοπτρο διαμέτρου 0.500 m και εστιακής απόστασης 3.5 m. Στην συνέχεια το κάτοπτρο εστιάζει την ακτίνα σε έναν από τους 24 φωτογραφικούς φακούς αφού πρώτα διαπεράσει το δοκίμιο. Αφού συντονιστούν οι τέσσερις γωνιακοί σπινθηριστές με τους τέσσερις γωνιακούς φακούς λαμβάνονται οι 24 φωτογραφίες σε ένα TRI-XPAN ευαίσθητο φιλμ, για κάθε ένα πείραμα. Το οπτικό μέρος του πειράματος φαίνεται στο Σχ. 4.3. Για να ολοκληρωθεί το πείραμα τοποθετήθηκε επίπεδο αναφοράς που απέχει από το δοκίμιο απόσταση $Z_0=0.800$ m πάνω στο οποίο εστιάζεται η κάμερα, ενώ το σημείο εστίασης της φωτεινής δέσμης απέχει από το

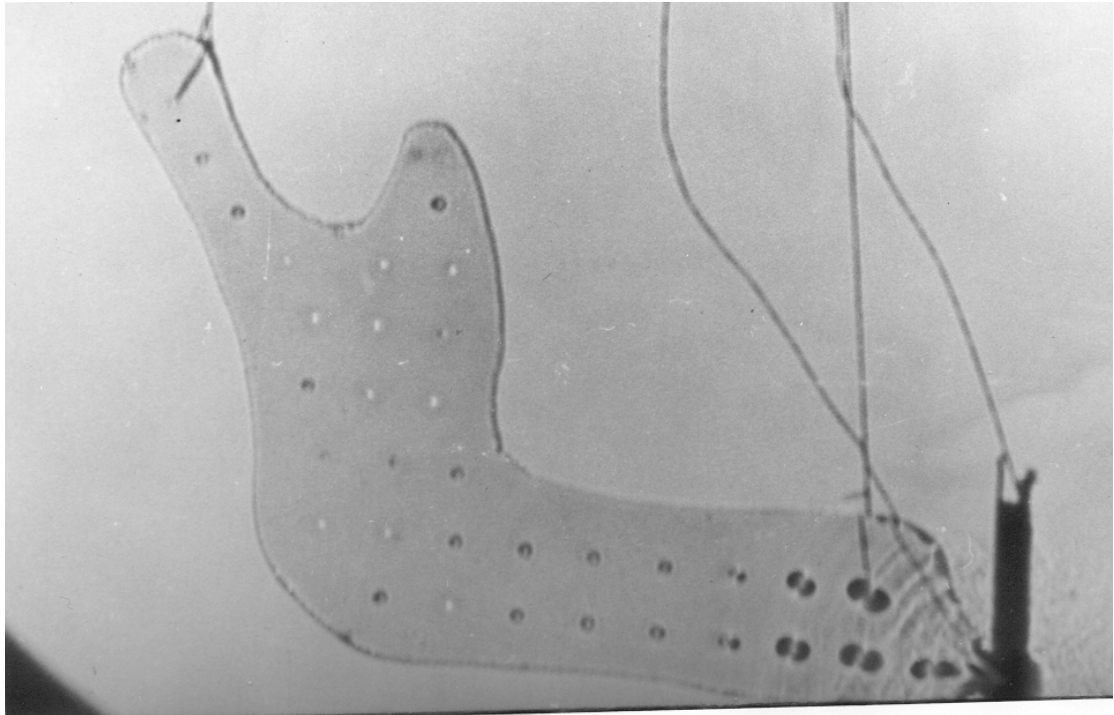
δοκίμιο απόσταση $Z_i=3.810\text{m}$. Η διαδρομή μέσα στην κάμερα ήταν $c=0.640\text{ m}$. Τα δεδομένα του πειράματος δείχνουν ότι πρόκειται για περίπτωση διερχόμενης φωτεινής δέσμης με συγκλίνουσα δέσμη άρα και θετικής μμεγεθύνσεως της οπτικής διατάξεως λ_i . Με όσα αναφέρονται στην παράγραφο 3.6 προκύπτει $\lambda_i = 0.79$

4.4 Αποτελέσματα

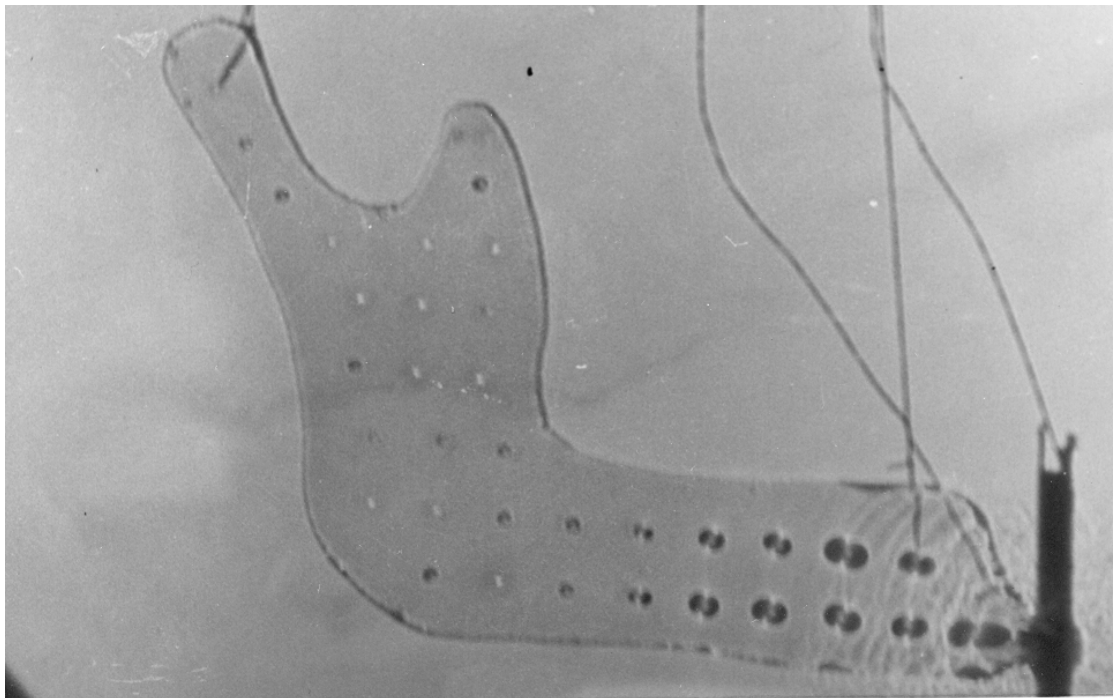
4.4.1 Περιγραφική ανάλυση των φωτογραφικών στιγμιότυπων

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να γίνει περιγραφή της διάδοσης του τασικού παλμού στο δοκίμιο του πειράματος που είναι όπως αναφέραμε προηγουμένως η κάτω γνάθος του προσώπου, να μελετηθεί η διεύθυνση της καθώς και οι μεταβολές της στην περιοχή της κονδυλικής απόφυσης, στην περιοχή της κορωνοειδούς απόφυσης, στην περιοχή κλάδου της κάτω γνάθου, στη περιοχή γωνίας της κάτω γνάθου, στη περιοχή σώματος της κάτω γνάθου, στη περιοχή φατνιακής απόφυσης και στην περιοχή γενειακής συμφύσεως και να περιγραφούν και να αναλυθούν τα φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά την διάδοση αυτή.

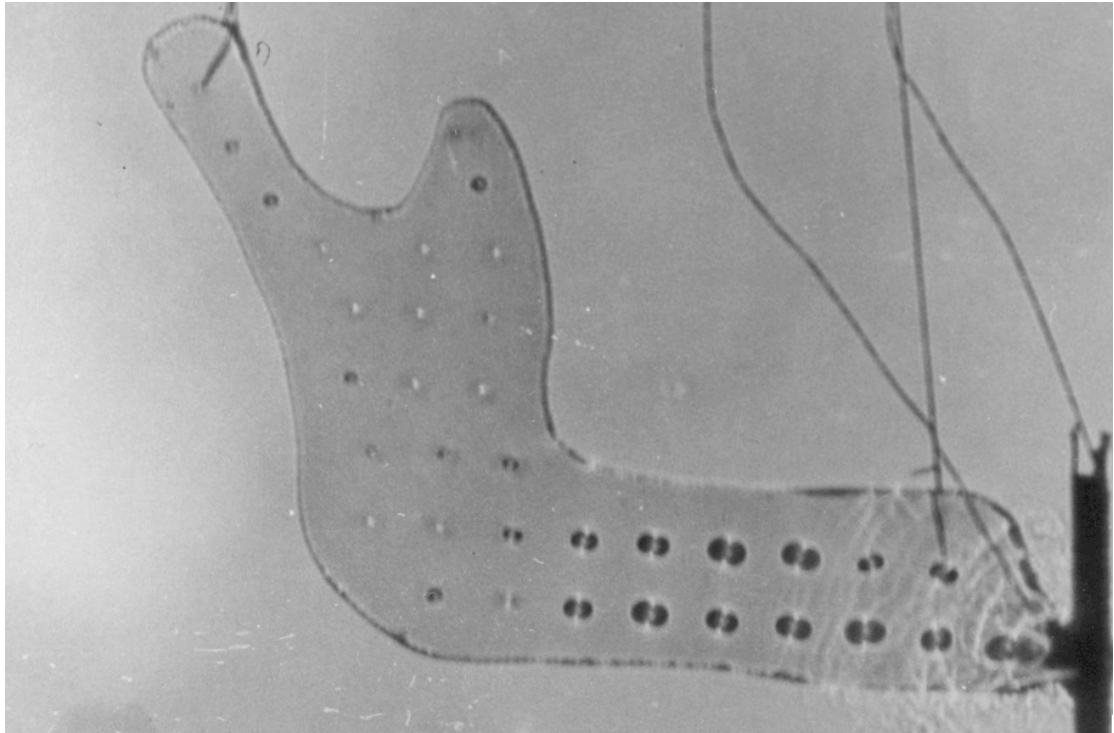
Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται τα στιγμιότυπα των φωτογραφιών του πειράματος. Σε κάθε φωτογραφία σημειώνονται οι αντίστοιχοι χρόνοι που τραβήχτηκαν καθώς και η σειρά τους στο φωτογραφικό φιλμ. Η διεύθυνση του τασικού παλμού προσδιορίζεται από το μέτωπο του παλμού και είναι κάθετο σε αυτό.



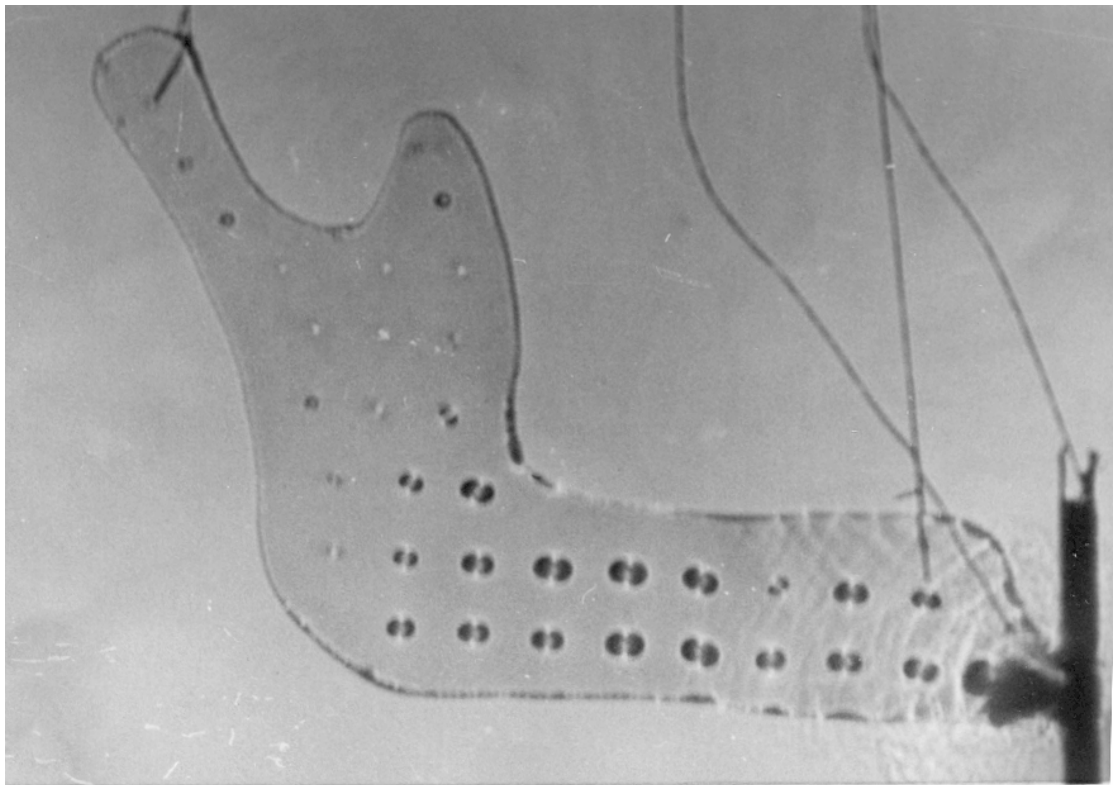
Σχήμα 4.4 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 0 μsec



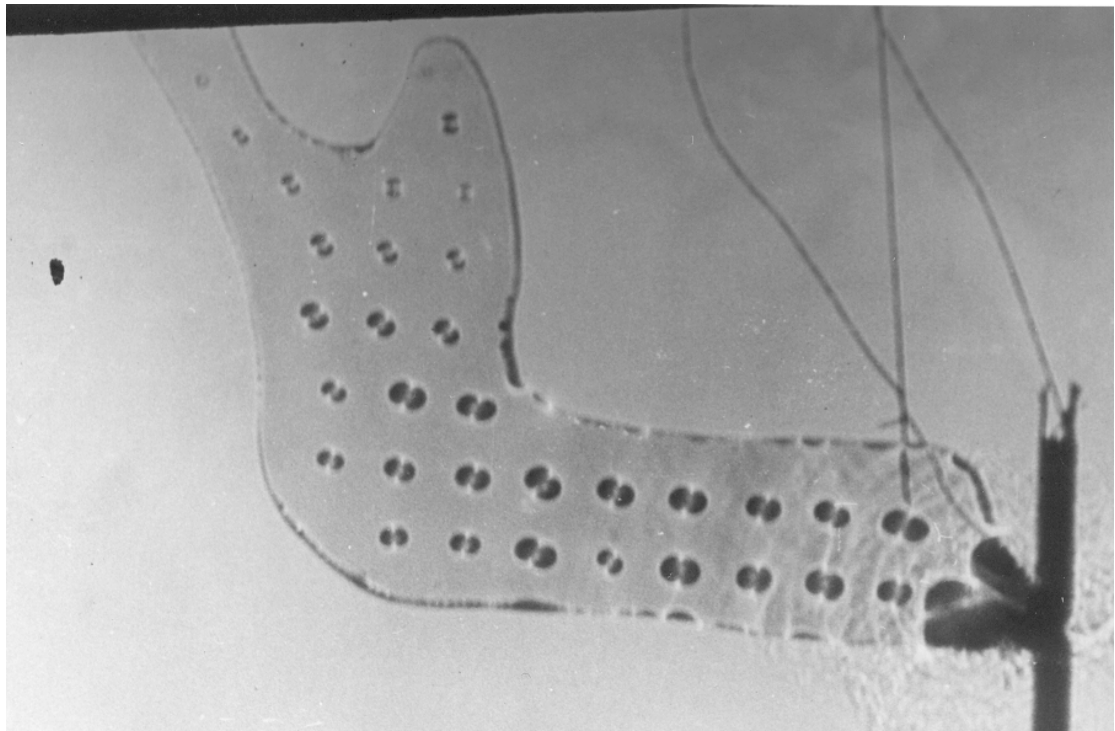
Σχήμα 4.5 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 8 μsec



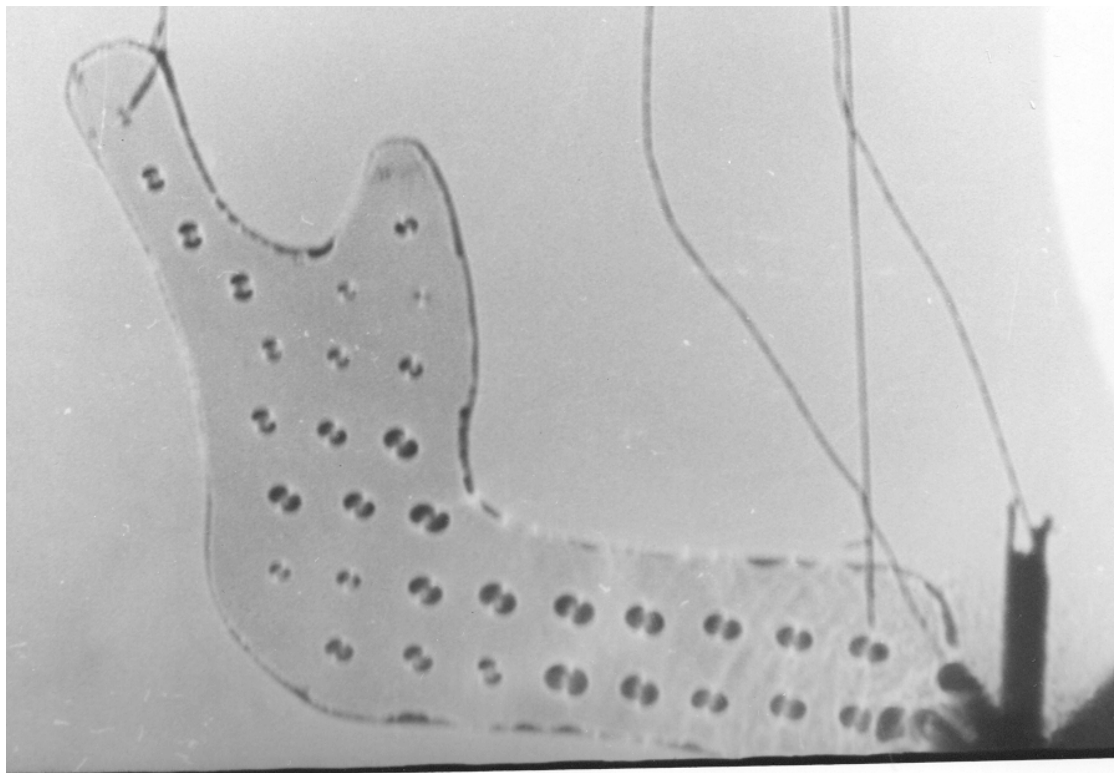
Σχήμα 4.6 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 16 μsec



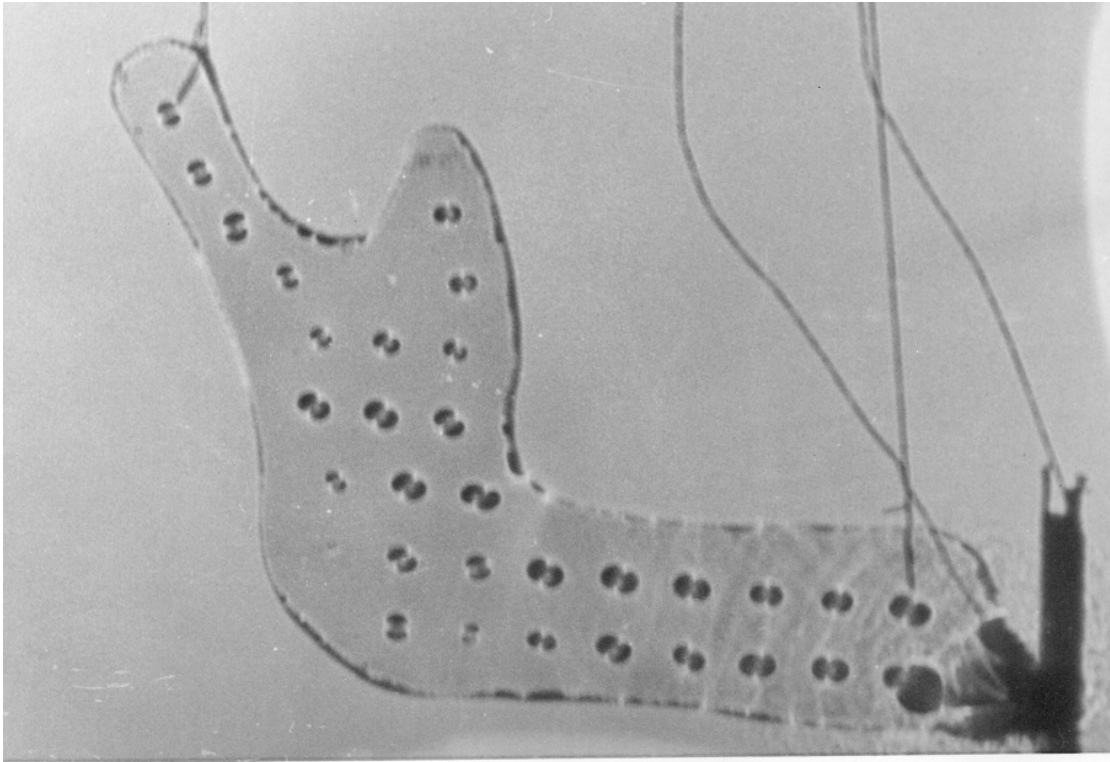
Σχήμα 4.7 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 24 μsec



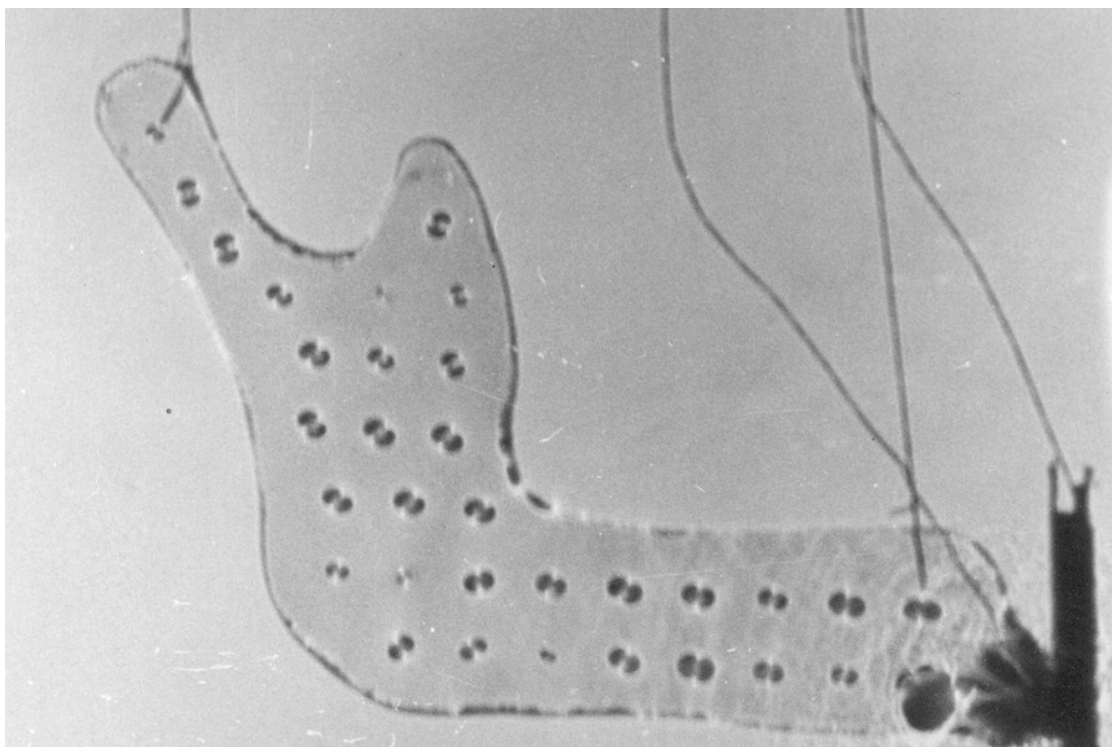
Σχήμα 4.8 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 40 μsec



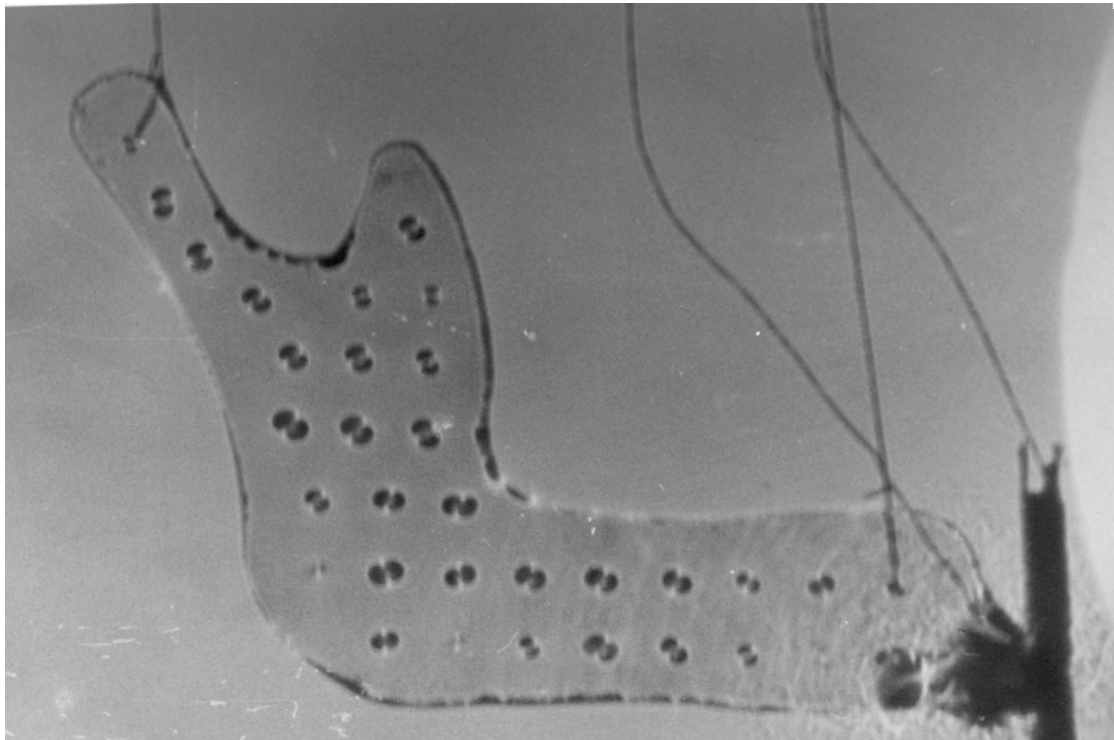
Σχήμα 4.9 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 48 μsec



Σχήμα 4.10 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 56 μsec



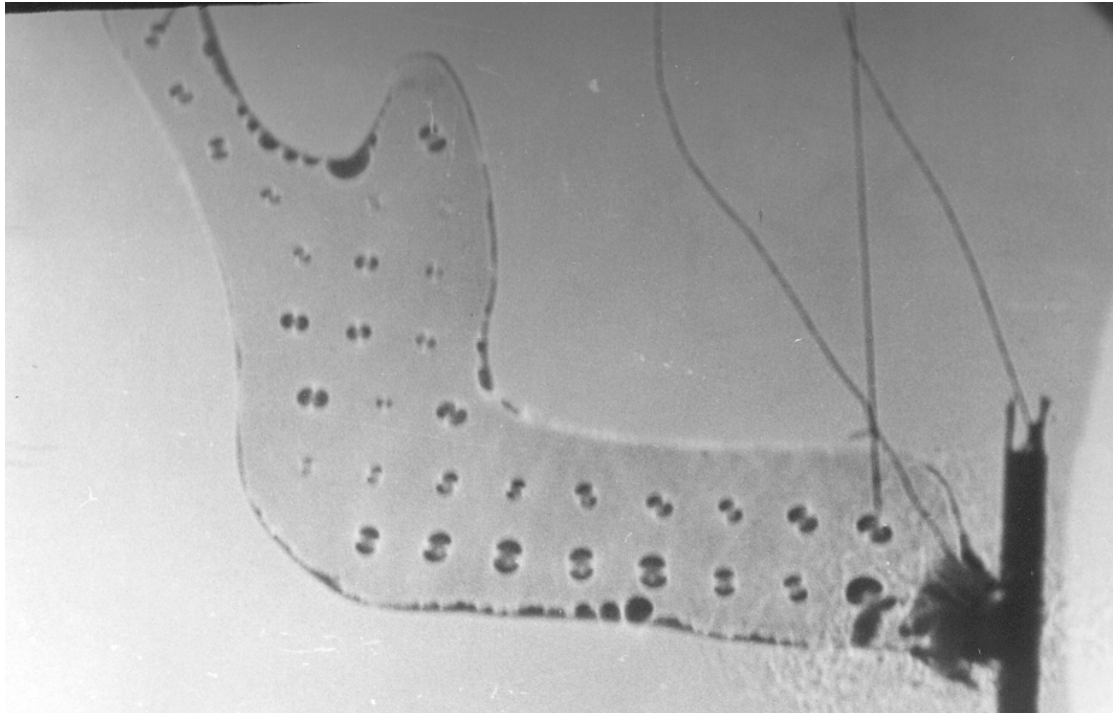
Σχήμα 4.11 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 64 μsec



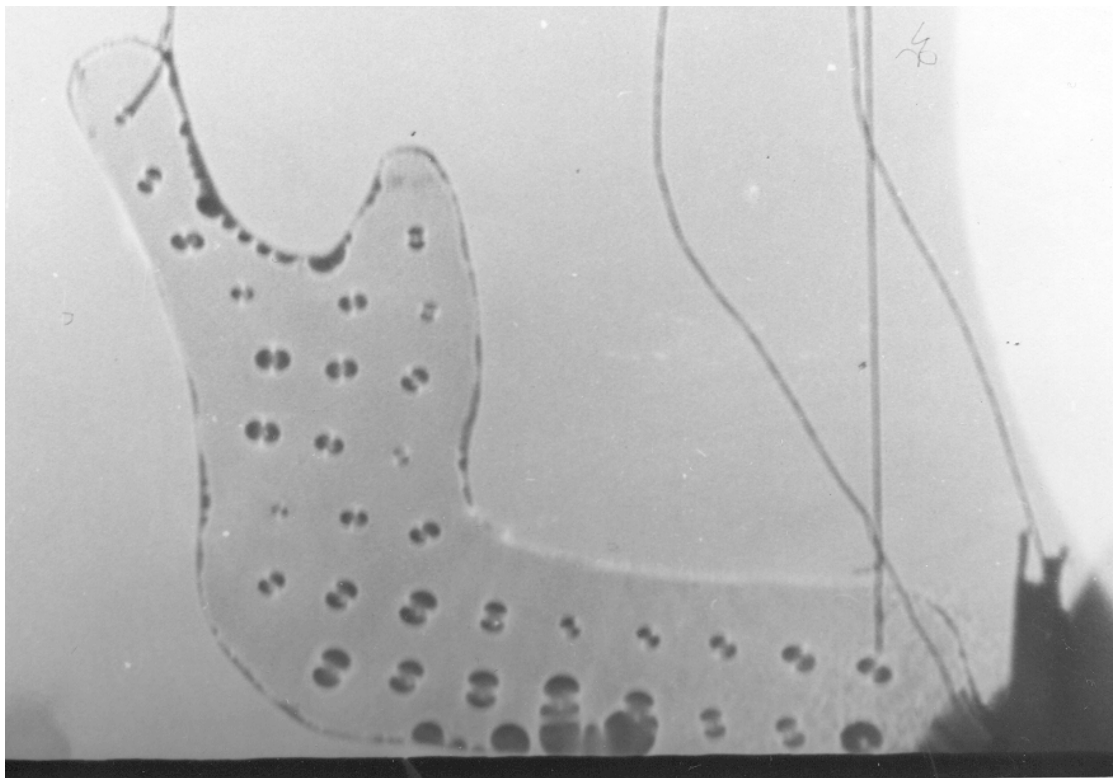
Σχήμα 4.12 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 72μsec



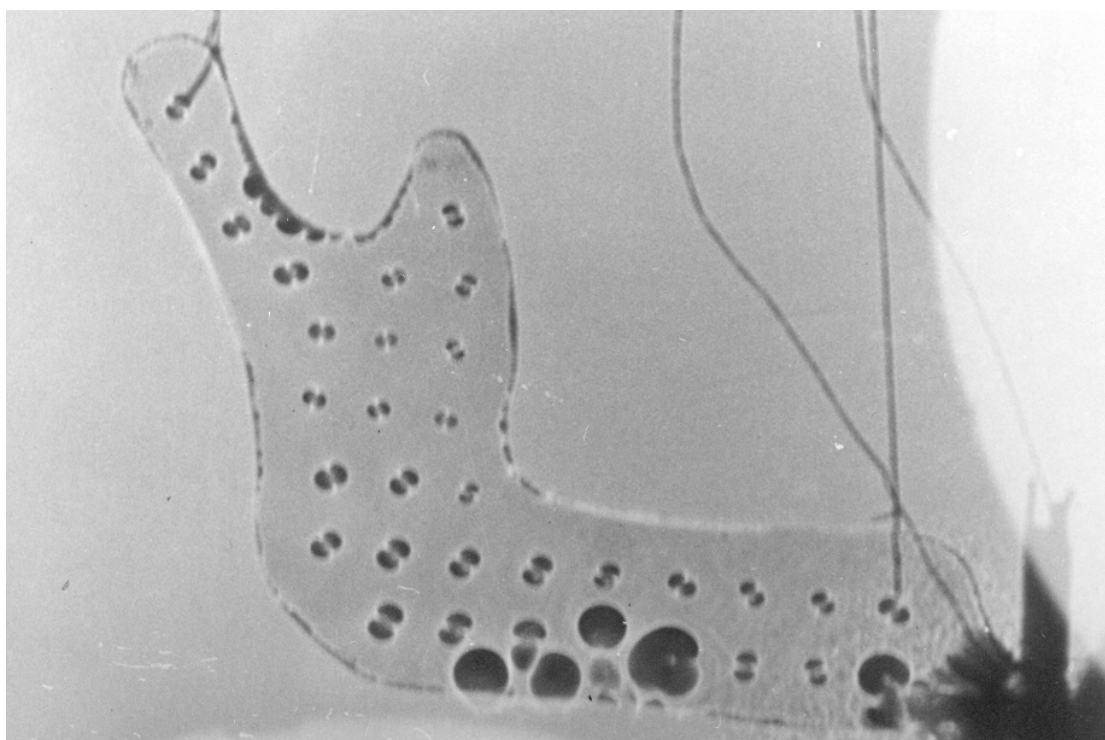
Σχήμα 4.13 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 80 μsec



Σχήμα 4.14 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 88 μsec



Σχήμα 4.15 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 96 μsec



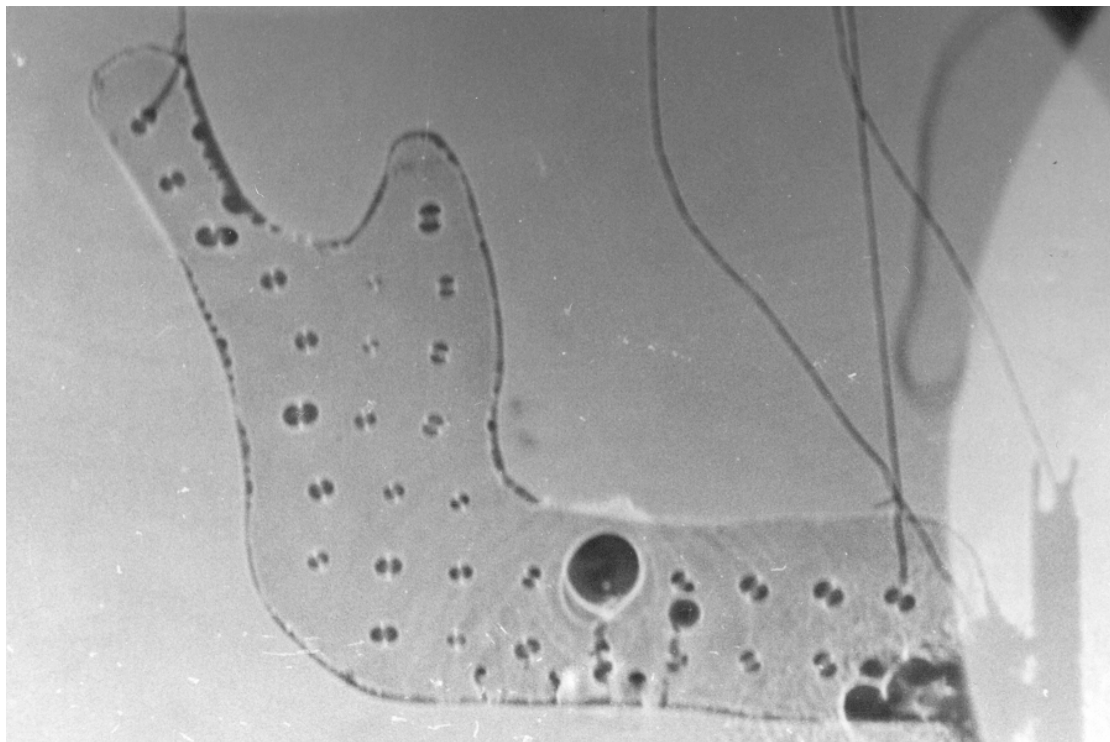
Σχήμα 4.16 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 104 μsec



Σχήμα 4.17 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 112 μsec



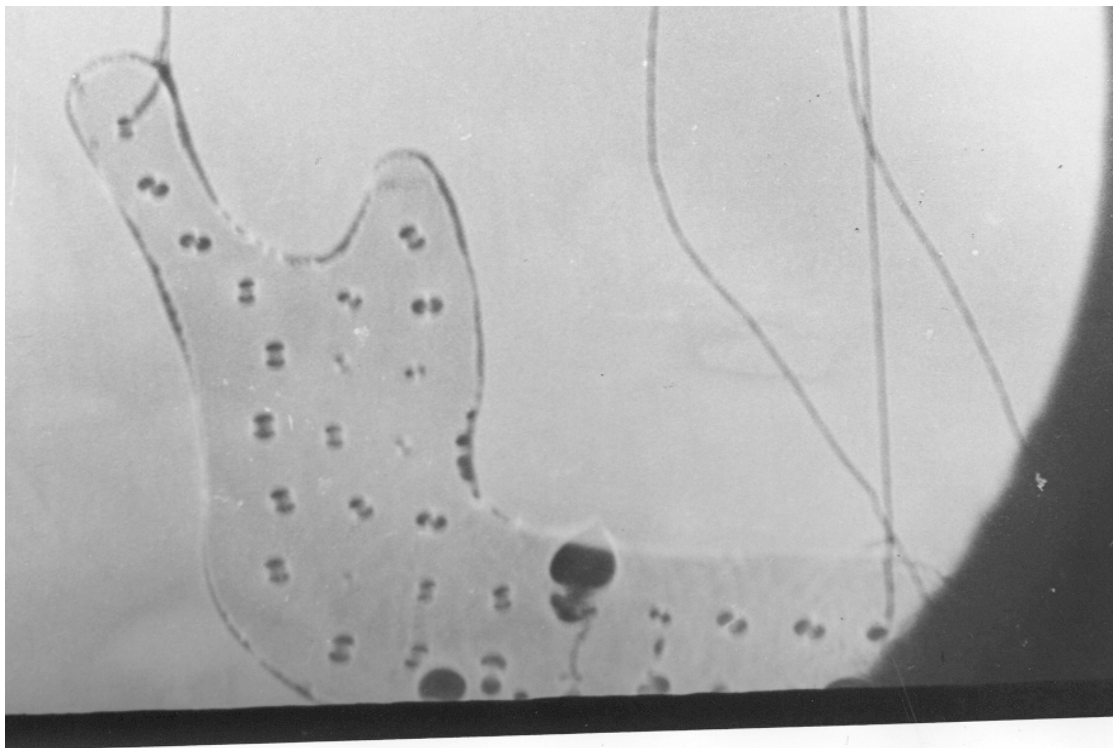
Σχήμα 4.18 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 120 μsec



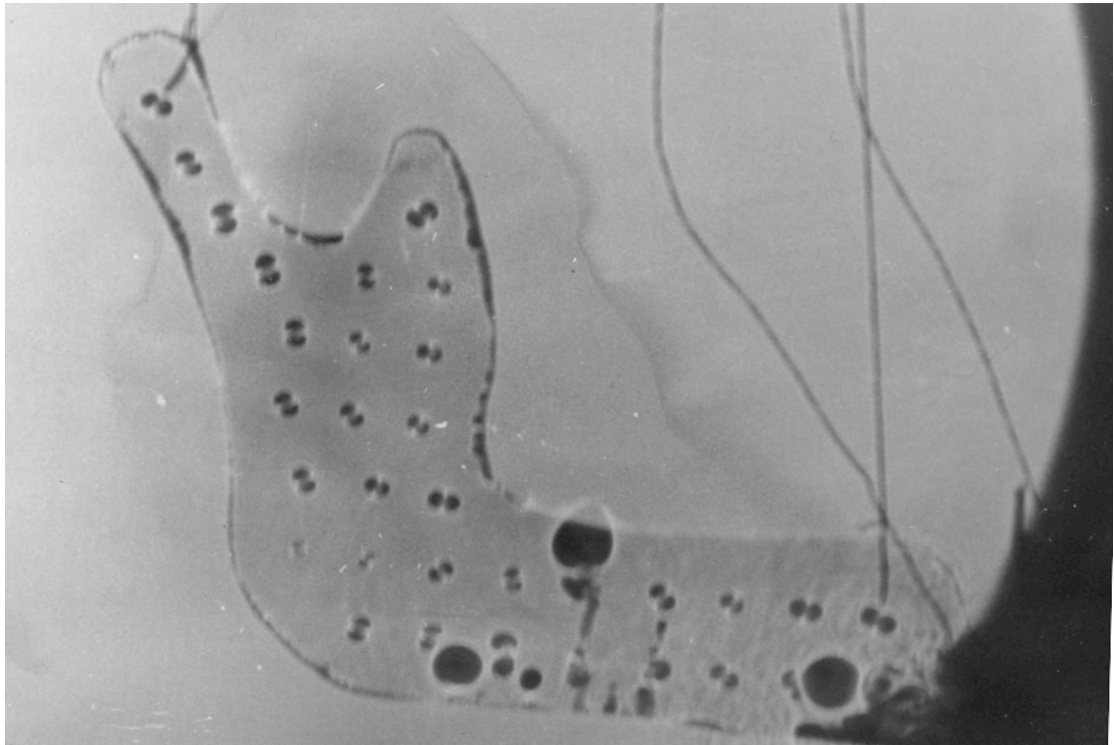
Σχήμα 4.19 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 128 μsec



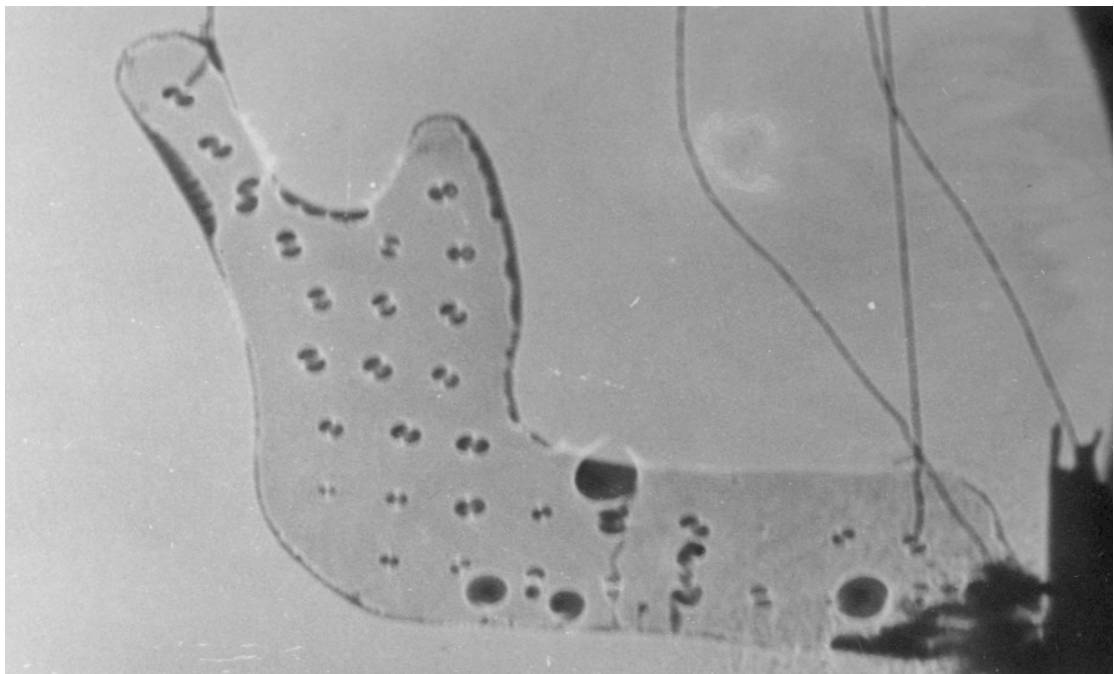
Σχήμα 4.20 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 136 μsec



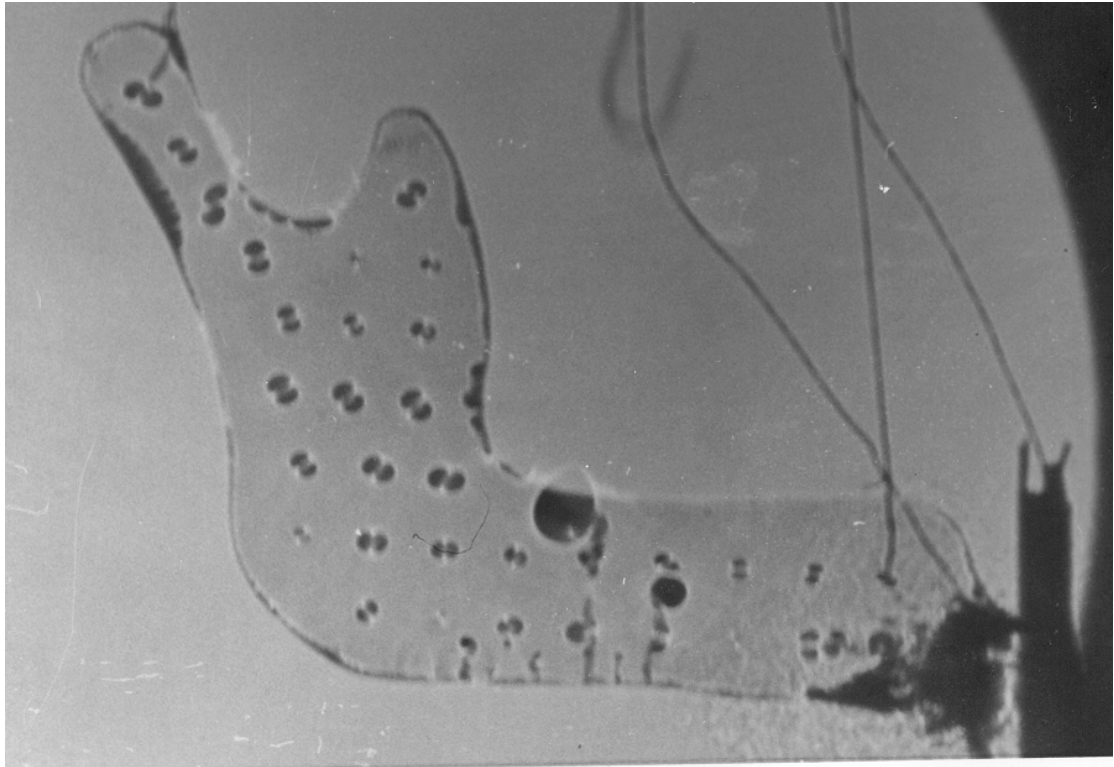
Σχήμα 4.21 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 144 μsec



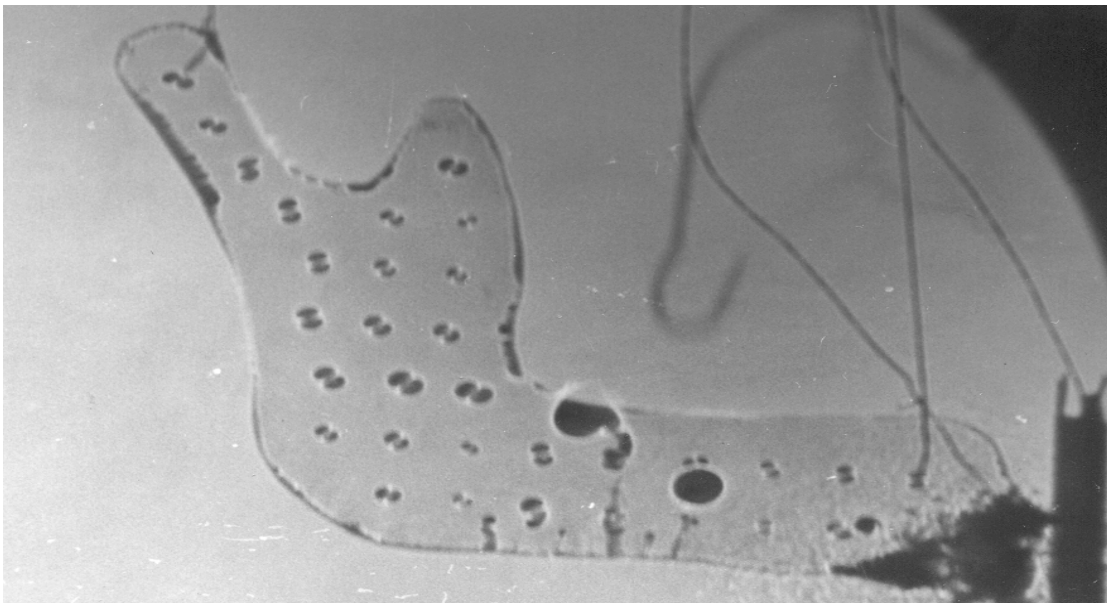
Σχήμα 4.22 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 152 μsec



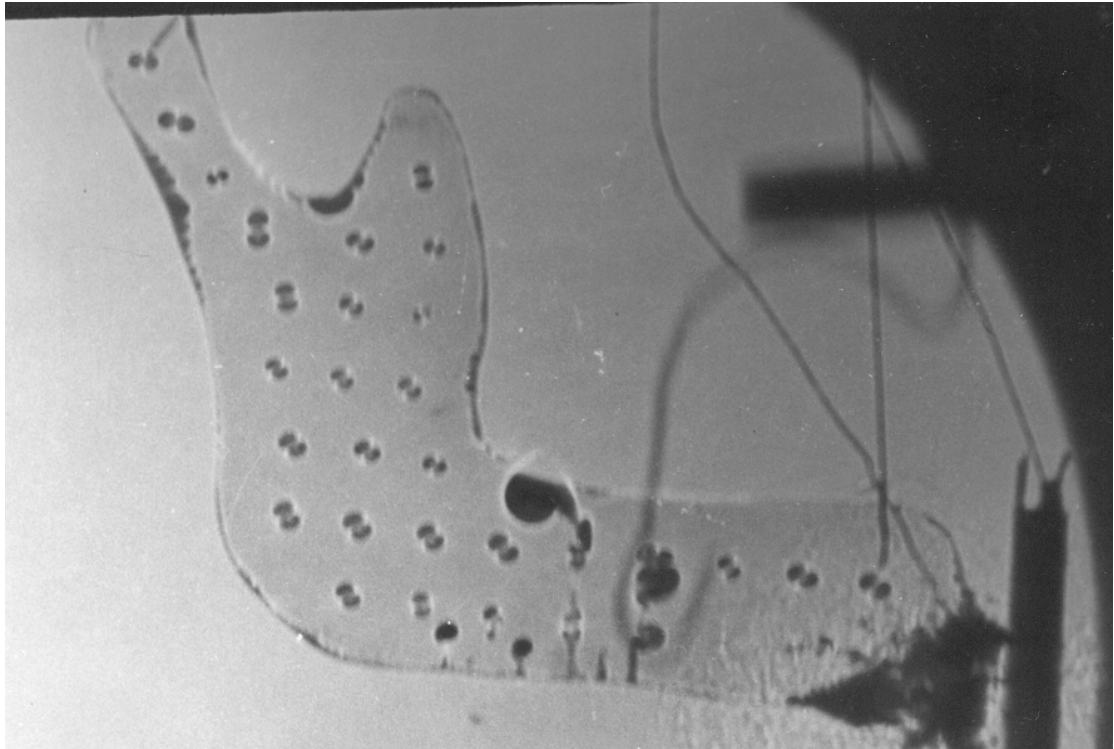
Σχήμα 4.23 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 160 μsec



Σχήμα 4.24 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 168 μsec



Σχήμα 4.25 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 176 μsec



Σχήμα 4.26 Στιγμιότυπο διάδοσης του τασικού παλμού για το δοκίμιο στα 184 μsec

Στα φωτογραφικά στιγμιότυπα του σχήματος 4.6 και 4.7 βλέπουμε τη διάδοση του θλιπτικού παλμού και στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.8 παρατηρούμε ότι ο παλμός έχει καταλάβει όλο το σώμα της γνάθου.

Στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.9 (48μsec) παρατηρούμε ότι έχει αρχίσει η ανάκλαση του τασικού παλμού στην περιοχή *κορωνοειδούς απόφυσης*. Αυτό φαίνεται από την στροφή της καυστικής κατά 90 μοίρες που μπορούμε να δούμε συγκρίνοντας τα φωτογραφικά στιγμιότυπα του σχήματος 4.8 με το φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.9 στην περιοχή αυτή. Στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.10 παρατηρούμε ότι η ανάκλαση του παλμού συνεχίζεται καθώς και η ύπαρξη εφελκυστικού παλμού και το μέτωπο του ξεκινάει να κατευθύνεται προς τη δεύτερη οπή της κορωνοειδούς απόφυσης.

Στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.8 παρατηρούμε ότι έχει αρχίσει η ανάκλαση του τασικού παλμού στην περιοχή της *κάτω γωνίας της κάτω γνάθου*. Ο παλμός μετά την ανάκλαση, από θλιπτικός γίνεται εφελκυστικός, όπως φαίνεται στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.10 (56 μsec) καθώς κινείται πλέον κατά την αντίθετη από την αρχική του κατεύθυνση προκαλώντας στροφή κατά 90 μοίρες. Στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.11 (64 μsec) παρατηρούμε ότι η διάδοση του εφελκυστικού παλμού συνεχίζεται και στη δεύτερη οπή στην περιοχή της κάτω γωνίας της κάτω γνάθου.

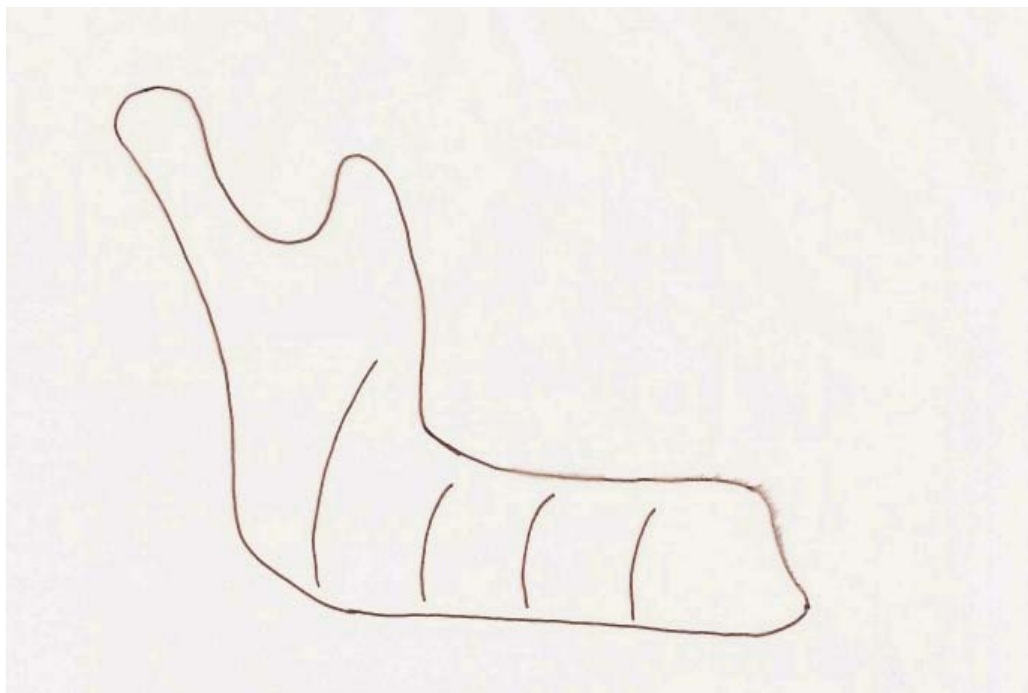
Στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.13 (80 μsec) στην περιοχή του *σώματος της κάτω γνάθου* παρατηρούμε την εμφάνιση μαύρων κηλίδων στο κάτω μέρος. Οι μαύρες κηλίδες γίνονται πιο έντονες στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.14 (88 μsec). Αυτό σημαίνει ότι αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις. Η περιοχή του σώματος της κάτω γνάθου παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια των χρονικών στιγμών 80 μsec και 88 μsec είναι σε εφελκυσμό και κατά συνέπεια είναι πιθανό να ακολουθήσει θραύση. Πράγματι κατά τη διάρκεια των χρονικών στιγμών 96 μsec και 104 μsec οι μαύρες κηλίδες γίνονται πιο έντονες και κατά της διάρκεια της χρονικής στιγμής 112μsec εξελίσσονται σε ρωγμές όπως φαίνεται στα φωτογραφικά στιγμιότυπα των σχημάτων 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 που έχουμε πλήρη θραύση. Παρατηρούμε ότι έχουμε πλήρη θραύση στην περιοχή του σώματος της κάτω γνάθου που όπως είχε αναφερθεί στην παράγραφο 1.8 και φαίνεται στο σχήμα 6 (κεφάλαιο 1) η πιθανότητα θραύσης στην περιοχή αυτή είναι 21%.

Στο φωτογραφικό στιγμιότυπο του σχήματος 4.12 (72 μsec) και στο φωτογραφικό

στιγμιότυπο του σχήματος 4.13 (80 μsec) παρατηρούμε ότι στην περιοχή της *κονδυλικής απόφυσης* έχει αρχίσει η ανάκλαση του τασικού παλμού. Ο παλμός μετά την ανάκλαση, από θλιπτικός γίνεται εφελκυστικός στα 88 μsec καθώς κινείται πλέον κατά την αντίθετη από την αρχική του κατεύθυνση προκαλώντας στροφή κατά 90 μοίρες. Η ανάκλαση του παλμού συνεχίζεται και κατά τη διάρκεια των χρονικών στιγμών 96 μsec , 104 μsec , 112 μsec και 120 μsec . Το γεγονός ότι η περιοχή της *κονδυλικής απόφυσης* βρίσκεται σε εφελκυσμό φαίνεται και από τη μαύρη σκιά που υπάρχει στο δεξιό μέρος της περιοχής της *κονδυλικής απόφυσης*. Στην πραγματικότητα η περιοχή της *κονδυλικής απόφυσης* είναι η περιοχή με το υψηλότερο ποσοστό καταγμάτων. Στο πείραμα όμως δεν έγινε θραύση παρόλο που όπως αναφέραμε προηγουμένως η περιοχή είναι σε εφελκυσμό γεγονός που ίσως να οφείλεται στο ότι δεν έγινε καλή προσομοίωση της στήριξης (άρθρωση) αλλά ανάρτηση του δοκιμίου.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι αρχικές θλιπτικές τάσεις στη γνάθο δεν επιτρέπουν να σχηματιστούν ρωγμές κάτι που συμβαίνει όταν οι συνθήκες αλλάξουν. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η δυναμική διάδοση της ρωγμής γίνεται όταν επικρατούν εφελκυστικές τάσεις ενώ σταματούν στις θλιπτικές.

4.4.2 Διεύθυνση του μετώπου του κύματος



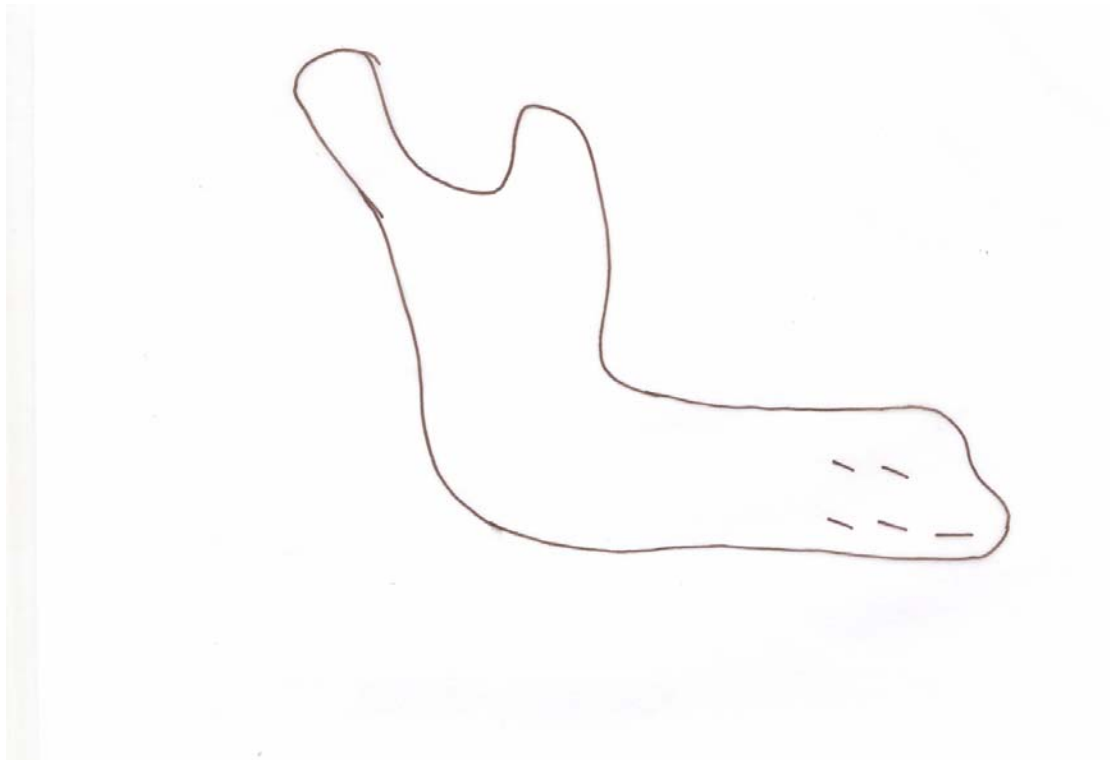
Σχήμα 4.27 Διεύθυνση μετώπου κύματος

Από τα διαδοχικά μέτωπα του κύματος που φαίνονται στην εικόνα υπολογίζουμε το μέσο όρο της απόστασης μεταξύ δυο διαδοχικών μετωπών. Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μετωπών είναι 8 μ sec. εάν διαιρέσουμε την απόσταση με το χρόνο και θεωρώντας σταθερά την ταχύτητα διάδοσης μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα διάδοσης μεταξύ δυο διαδοχικών μετωπών. Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας:

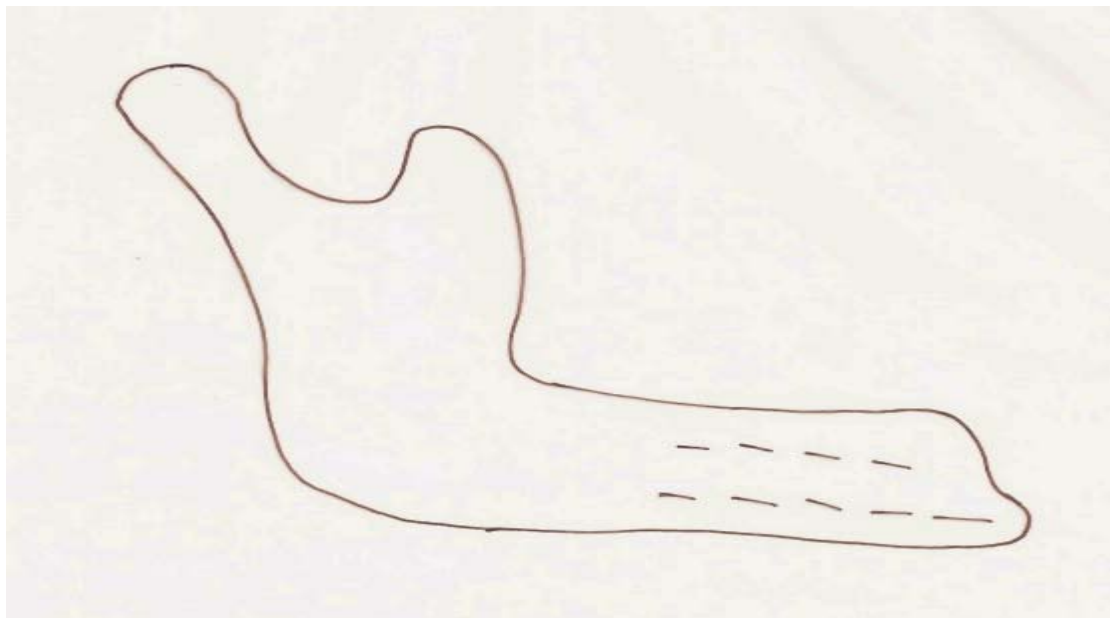
Μέσος όρος απόστασης (cm)	Χρόνος (μ sec)	Ταχύτητα (m/sec)
1,8	8	2250
2,1	8	2625
1,9	8	2375

4.4.3 Διεύθυνση κυρίων τάσεων

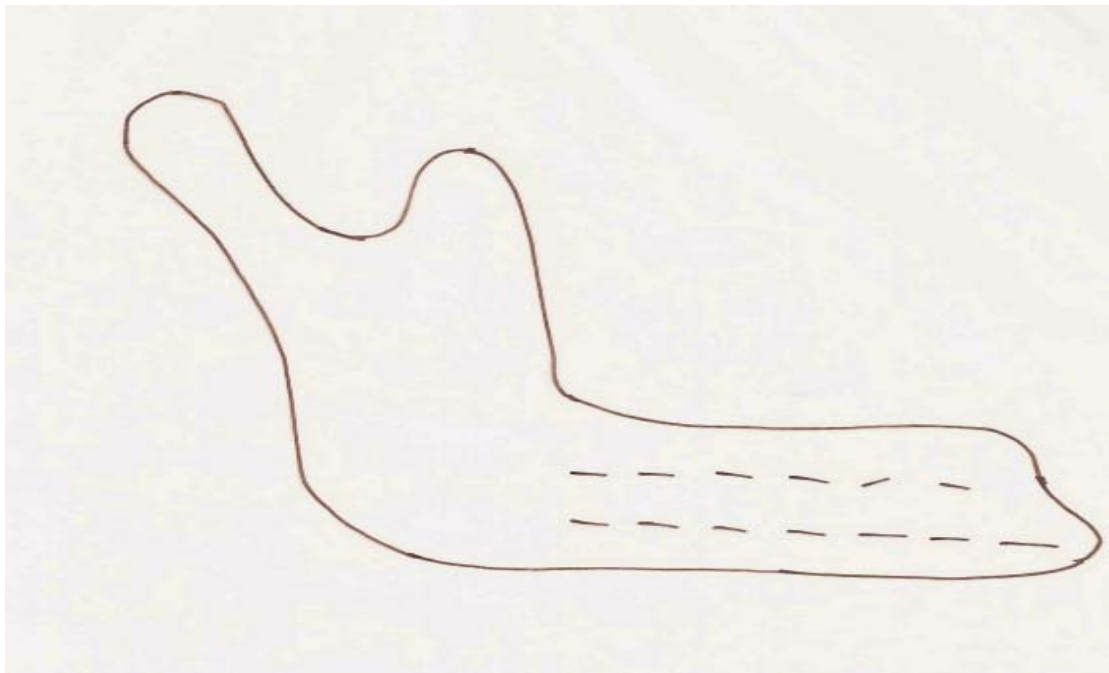
Η διεύθυνση των κυρίων τάσεων προκύπτει από τον προσανατολισμό της καυστικής. Συγκεκριμένα η μέγιστη και η ελάχιστη διάμετρος της καυστικής μας δίνουν το κύριο σύστημα. Επίσης μπορούμε να πούμε ότι το θλιπτικό κύμα σ_y συμπίπτει με τον κύριο άξονα , δηλαδή $\sigma_y = \sigma_2$ ή $\sigma_x = \sigma_1 = 0$ μόνο για τα πρώτα στάδια διάδοσης του κύματος. Άρα η διεύθυνση του παλμού συμπίπτει με την κύρια τάση μόνο για τα πρώτα στάδια διάδοσης του κύματος.



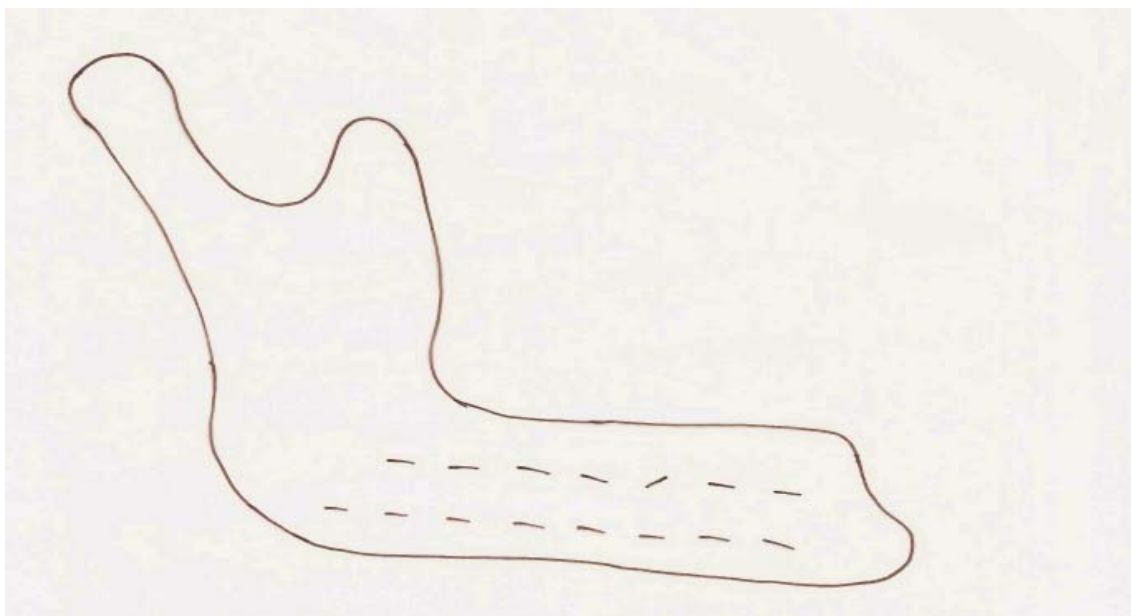
Σχήμα 4. 28 Στιγμιότυπο διάδοσης των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο στα 8 μsec



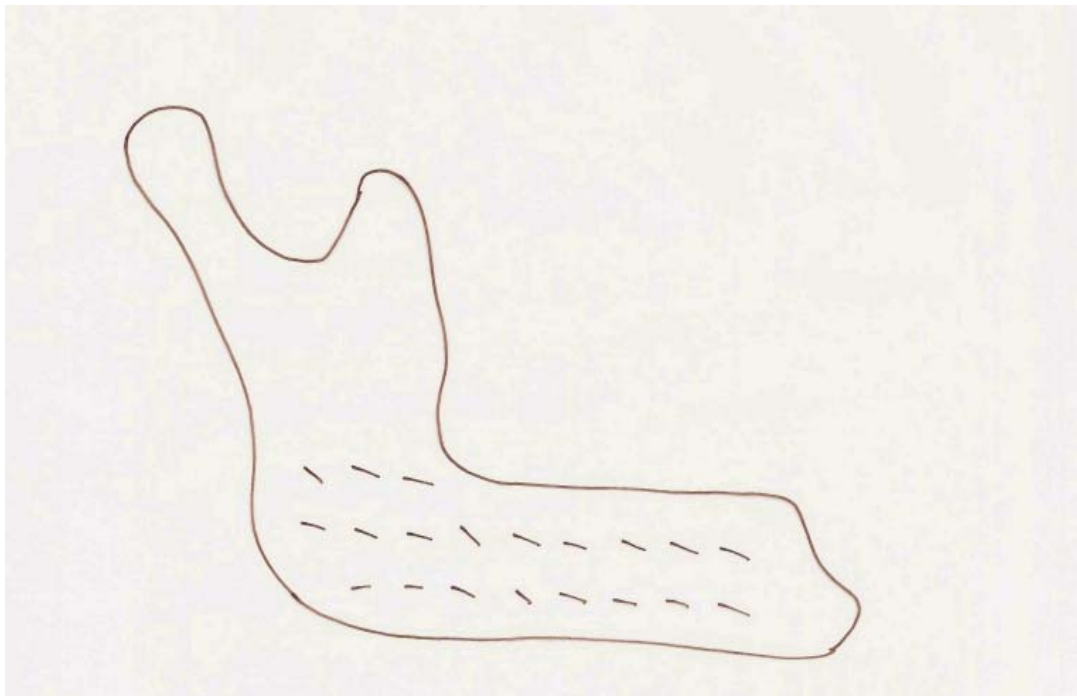
Σχήμα 4.29 Στιγμιότυπο διάδοσης των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο στα 16 μsec



Σχήμα 4.30 Στιγμιότυπο διάδοσης των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο στα 24 μsec



Σχήμα 4.31 Στιγμιότυπο διάδοσης των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο στα 32 μsec



Σχήμα 4.32 Στιγμιότυπο διάδοσης των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο στα 48 μsec

Παρατηρούμε ότι η κύρια τάση παρουσιάζει αρχικά μια κλίση (σχήμα 4.28) που στη συνέχεια μηδενίζεται και γίνεται σχεδόν παράλληλη με τον διαμήκη άξονα της γνάθου (σχήματα 4.29, 4.30 και 4.31) και κατόπιν αποκλίνει εκ νέου κατά μικρή γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα 4.32.

4.4.4 Μέγιστες διατμητικές τάσεις

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση 3.52 μπορούμε μετρώντας την μέγιστη διάμετρο της καυστικής να υπολογίσουμε την τιμή της διαφοράς των κυρίων τάσεων που μας δείχνει ουσιαστικά την μέγιστη διατμητική τάση σε γωνία 45 μοιρών ως προς τον κύριο σύστημα. Μόνο για τα πρώτα στάδια διάδοσης του κύματος μπορούμε να πούμε ότι το θλιπτικό κύμα σ_y συμπίπτει με τον κύριο άξονα , δηλαδή $\sigma_y = \sigma_2$ ή $\sigma_x = \sigma_1 = 0$.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \left(\frac{3}{4\lambda_i} \right)^3 \left(\frac{D_{\max}}{4\sqrt{R}} \right)^4 \left(\frac{1}{C_{r,f}} \right)$$

και άρα $t_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Οι παράμετροι του τύπου είναι:

A) σ_1, σ_2 οι κύριες τάσεις

B) D_{\max} η μέγιστη διάμετρος της καυστικής

Γ) R η διάμετρος της σποπής, όπου $R=0.0005$ m

Δ) λ_i ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διατάξεως όπου $\lambda_i=0.79$ και

E) C_t (για ανακλώμενες ακτίνες) μια σταθερά που δίνεται από τον τύπο

$C_t = 2z_0dc_t$ και αντικαθιστώντας τις τιμές $z_0=800 \times 10^{-3}$ m, $d=3 \times 10^{-3}$ m και

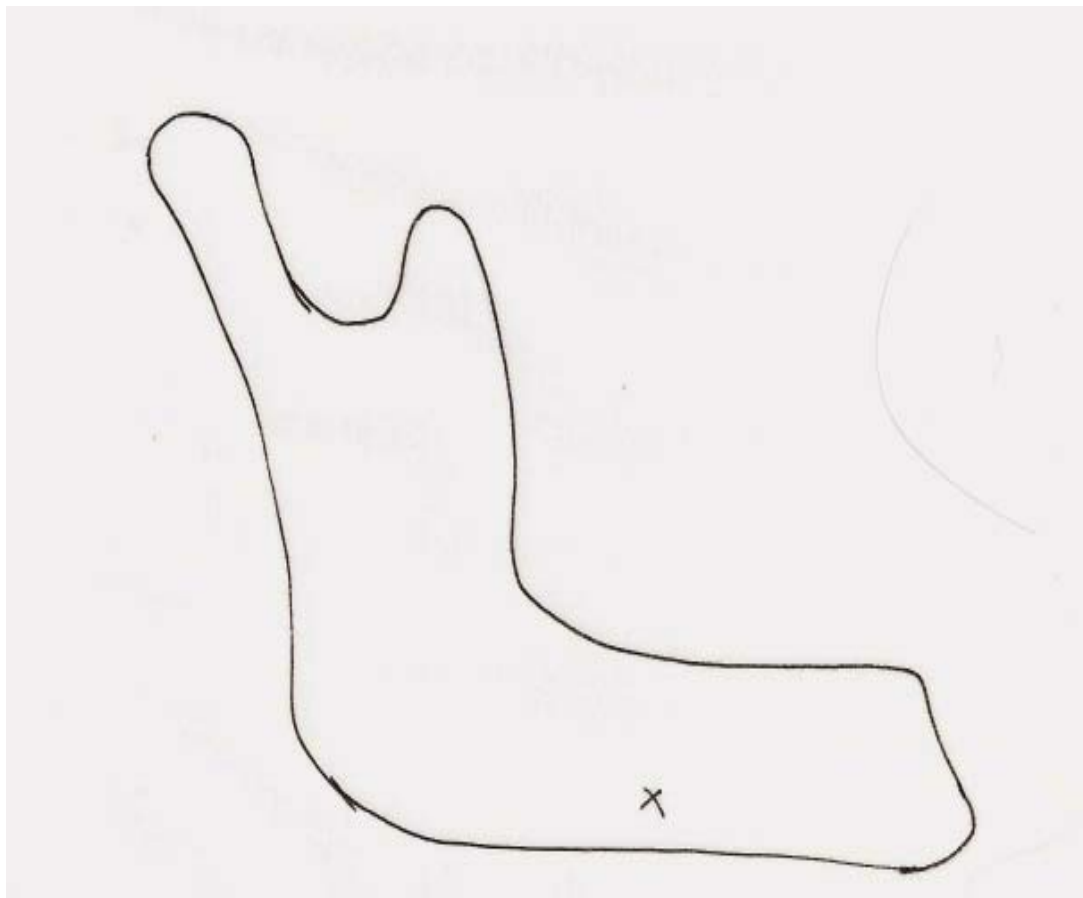
$c_t=-0.74 \times 10^{-10}$ m²/Nt έχει τιμή $C_t=-1776 \times 10^{-16}$ m⁴/Nt

Με απλοποίηση του τύπου τοποθετώντας τις παραπάνω τιμές έχουμε:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = D_{\max}^4 \times 75.2 \times 10^{15} \text{ Nt} / \text{m}^2$$

Για να δούμε την μεταβολή των μέγιστων διαμηθικών τάσεων συναρτήσει του χρόνου διάδοσης του τασικού παλμού επιλέξαμε την πέμπτη σπή του κάτω μέρους του δοκιμίου.

Στο σχήμα 4.33 μπορούμε να δούμε αυτό το σημείο

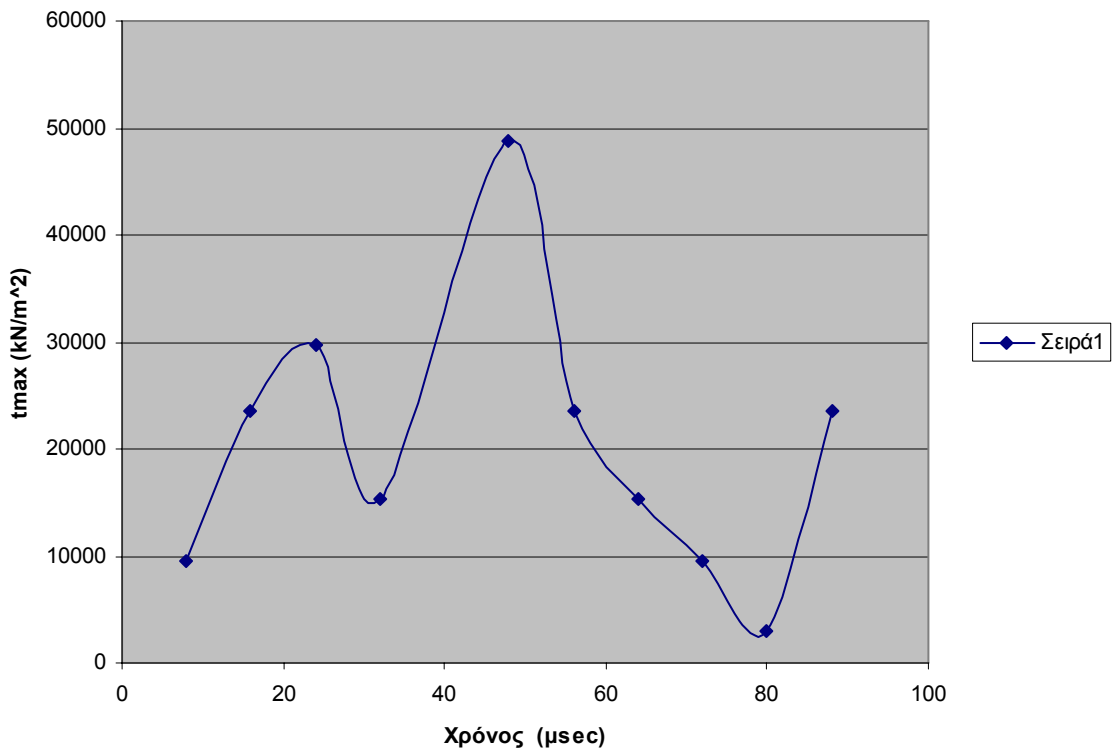


Σχήμα 4.33 Σημείο μέτρησης της μέγιστης διατμητικής τάσης

Ακολουθεί ο παρακάτω πίνακας

Χρόνος (μsec)	tmax (kN/m ²)
8	9625,6
16	23500
24	29668,21
32	15418,35
48	48729,6
56	23500
64	15418,35
72	9625,6
80	3045,6
88	23500

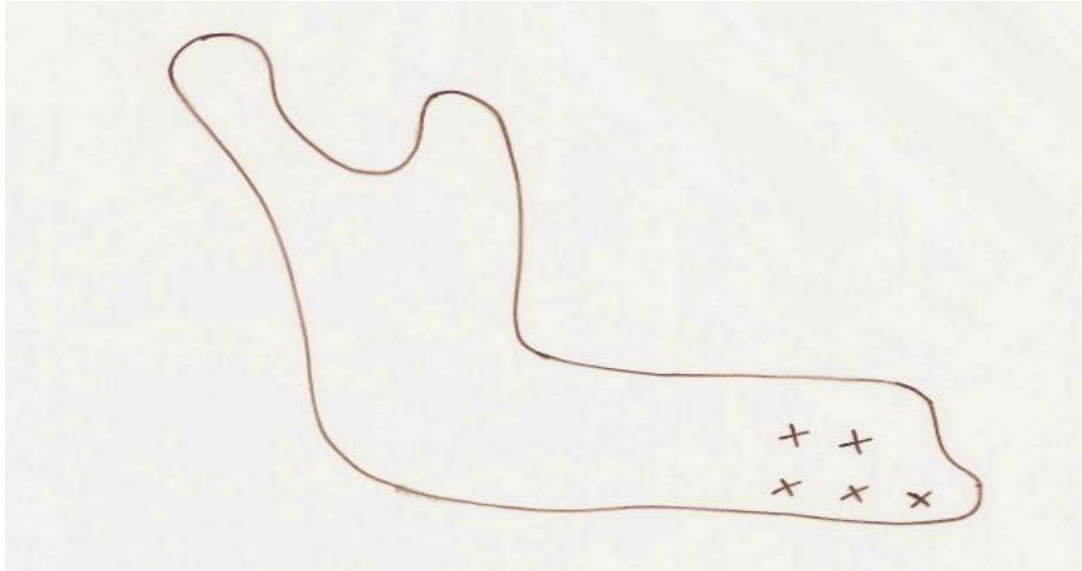
Μεταβολή της μέγιστης διατμητικής τάσης συναρτήσει του χρόνου διάδοσης του τασικού παλμού



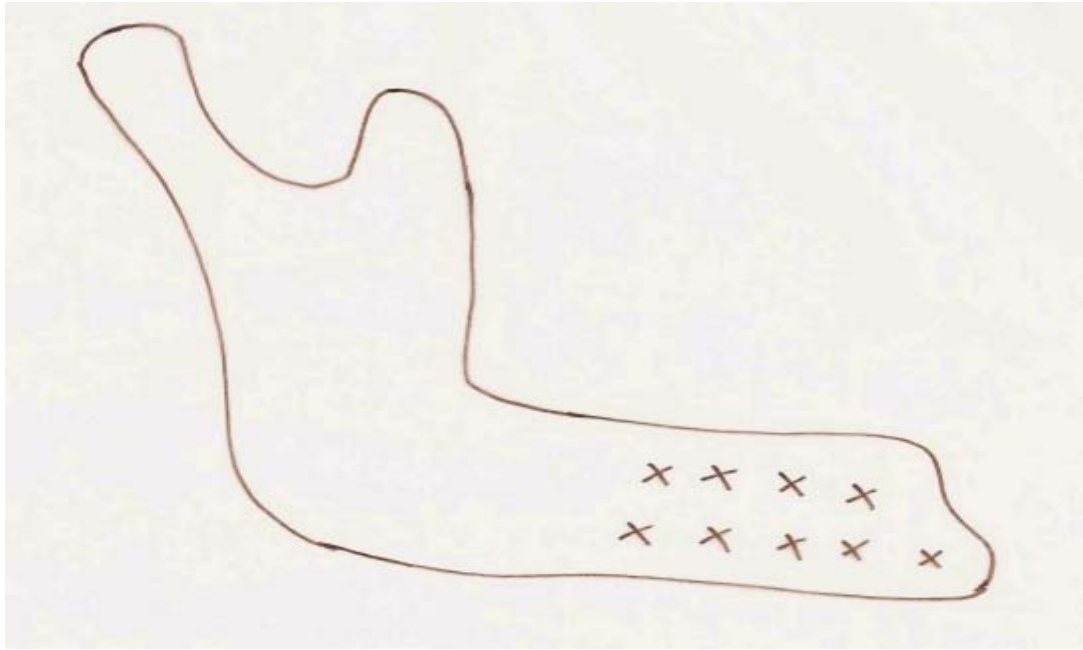
4.4.5 Διεύθυνση διατμητικών τάσεων

Η χάραξη των παρακάτω διαγραμμάτων που δείχνουν τις διευθύνσεις των διατμητικών τάσεων έχει γίνει ως εξής : από τα διαγράμματα των κυρίων τάσεων της παραγράφου 4.4.3 φέρνουμε σύστημα αξόνων που σχηματίζει γωνία 45 μοιρών ως

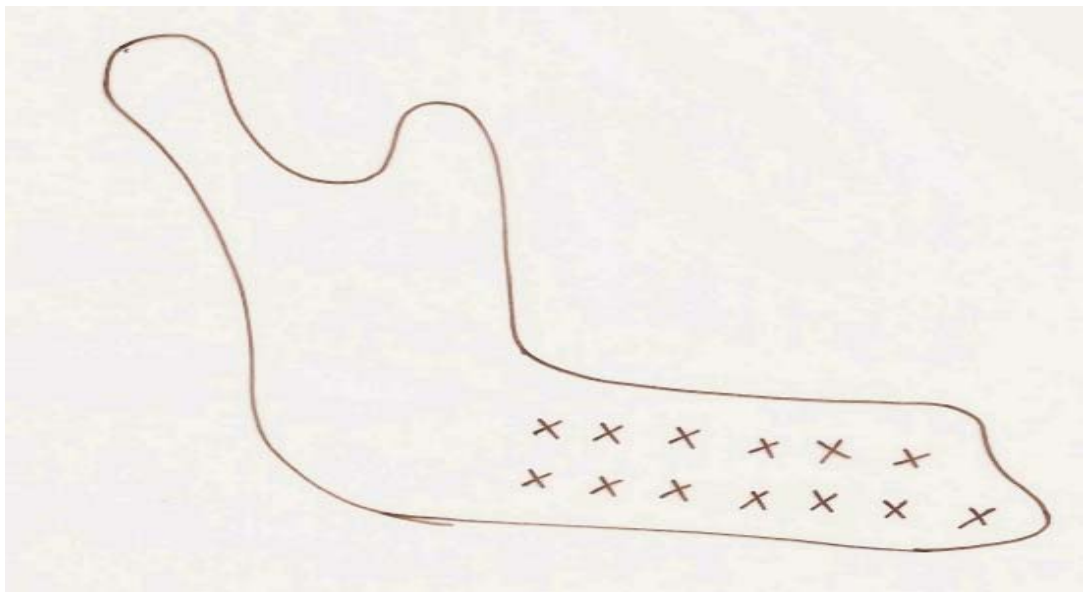
προς την κύρια τάση.



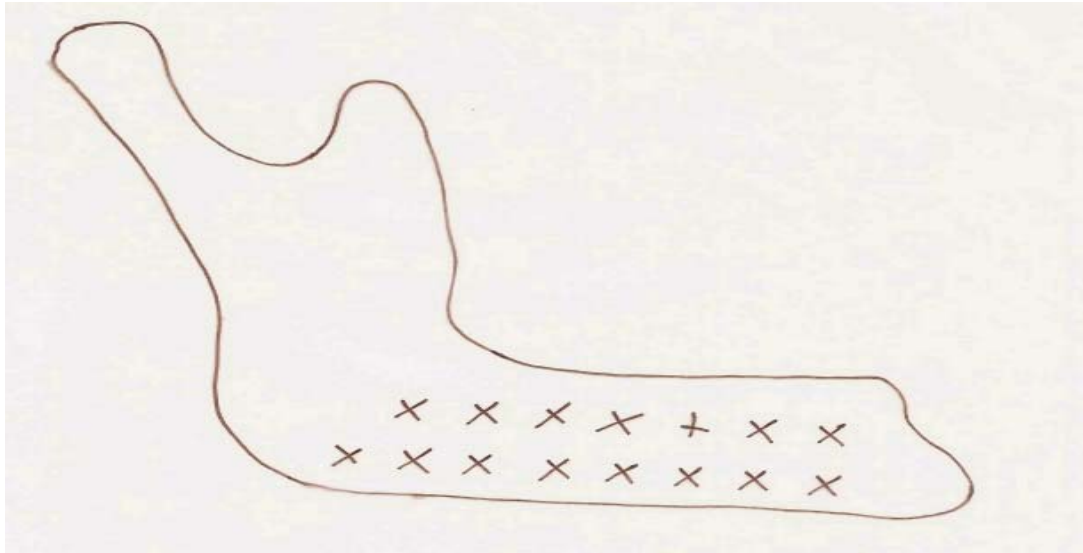
Σχήμα 4.34 Στιγμιότυπο διάδοσης των διατμητικών τάσεων για το δοκίμιο στα 8 msec



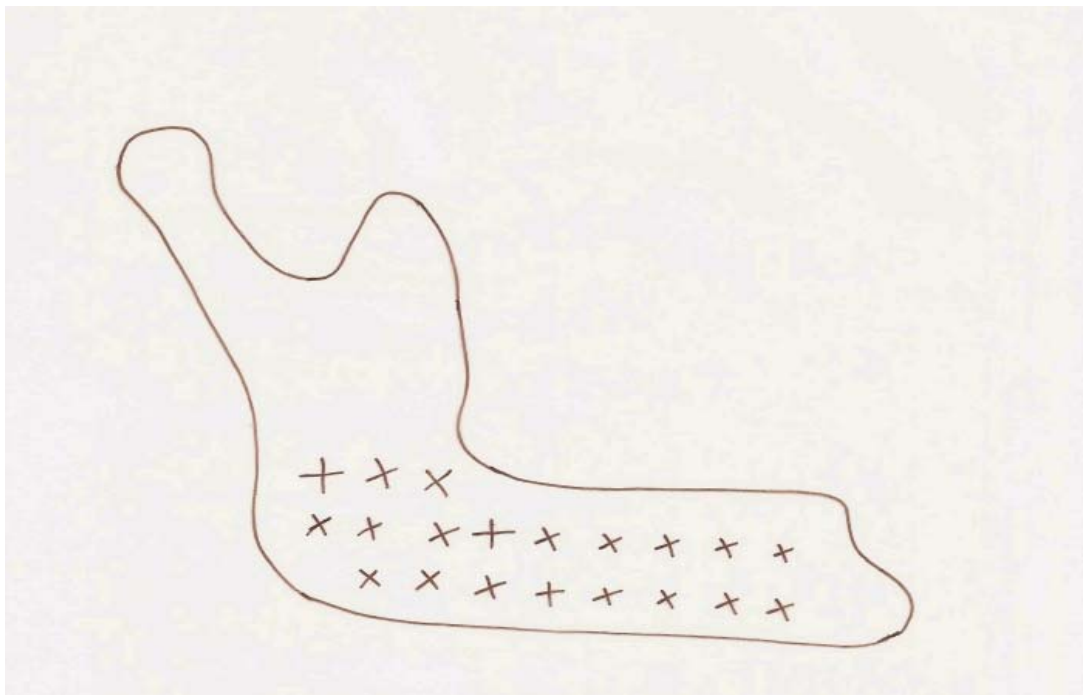
Σχήμα 4.35 Στιγμιότυπο διάδοσης των διατμητικών τάσεων για το δοκίμιο στα 16 μsec



Σχήμα 4.36 Στιγμιότυπο διάδοσης των διατμητικών τάσεων για το δοκίμιο στα 24 μsec



Σχήμα 4.37 Στιγμιότυπο διάδοσης των διατμητικών τάσεων για το δοκίμιο στα 32 μsec

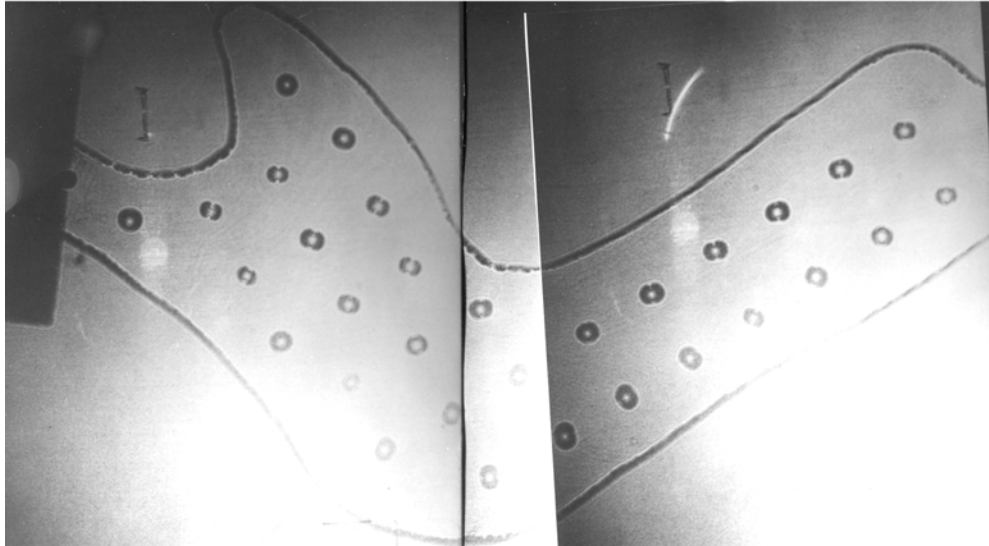


Σχήμα 4.38 Στιγμιότυπο διάδοσης των διατμητικών τάσεων για το δοκίμιο στα 48 μsec

Οι παρατηρήσεις της παραγράφου 4.4.3 ισχύουν και εδώ. Δηλαδή ενώ αρχικά οι διατμητικές τάσεις παρουσιάζουν κλίση 22 μοιρών ως προς τον οριζόντιο άξονα (σχήμα 4.34) στη συνέχεια αποκλίνουν 41 μοίρες (σχήματα 4.35, 4.36, 4.37) ενώ στο σχήμα 4.38 η κλίση τους είναι 68 μοίρες ως προς τον οριζόντιο άξονα. Η κλίση που έχουν στο σχήμα 4.38 δείχνει έντονη διάτμηση σε διεύθυνση που προσεγγίζει τις 90 μοίρες ως προς τον διαμήκη άξονα της γνάθου. Άρα υπάρχει το ενδεχόμενο θραύσης από διάτμηση.

4.4.6 Στατική Καταπόνηση

Στο δοκίμιο του πειράματος μας εφαρμόστηκε στατική καταπόνηση σε φορτίο 8,5 κρ. Από το σχήμα 4.39 βλέπουμε ότι υπάρχει συγκέντρωση τάσεων στην περιοχή του σώματος της κάτω γνάθου ,της κορωνοειδούς απόφυσης και της κονδυλικής απόφυσης. Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει μικρή συγκέντρωση τάσεων στην περιοχή της γωνίας της κάτω γνάθου. Αναφέρουμε ακόμα ότι το σχήμα δεν αντιστοιχεί γενικά σε κάποια φάση της δυναμικής συμπεριφοράς.



Σχήμα 4.39 Στιγμιότυπο στατικής καταπόνησης δοκιμίου

Συμπεράσματα

Η διπλωματική εργασία έγινε στο πλαίσιο διερεύνησης της διάδοσης του κύματος σε προσομοίωμα κάτω γνάθου. Η επιλογή προς μελέτη της κάτω γνάθου έγινε καθώς είναι ένα από τα οστά του προσώπου που είναι εκτεθειμένο και κατά συνέπεια υφίσταται πολλαπλά κατάγματα. Επίσης έγινε αναφορά στη θεωρία της οπτικής μεθόδου των καυστικών στην οποία στηρίζεται η πειραματική διαδικασία.

Πρέπει να αναφερθεί ότι οι πιο καταπονημένες περιοχές είναι η περιοχή της κονδυλικής απόφυσης και η περιοχή του σώματος της κάτω γνάθου. Οι περιοχές αυτές είναι και οι περιοχές που σύμφωνα με τα στατιστικά εμφανίζουν και τα υψηλότερα ποσοστά θραύσεων. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι απαιτείται παραπέρα έρευνα τόσο πειραματική όσο και αναλυτική (πεπερασμένα στοιχεία) που θα προσεγγίσει καλύτερα το πρόβλημα κυρίως για αντικειμενικότερη στήριξη , δηλαδή να υπάρχει καλύτερη προσομοίωση της άρθρωσης.

Όσον αφορά τη μορφή του τασικού παλμού, η οποία δείχνει άμεσα τον προσανατολισμό και τη διαφορά των κυρίων τάσεων, αναφέρουμε ότι κατά την είσοδο του παλμού στο δοκίμιο η μορφή του παλμού ήταν θλιπτική, ενώ μετά την ανάκλαση η μορφή του παλμού έγινε εφελκυστική προκαλώντας ένα ανάστροφο εντατικό πεδίο και ευνοώντας συγχρόνως την δημιουργία ρωγμών.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι η παρούσα εργασία αποτελεί μια αρχική προσπάθεια δημιουργία μιας βάσης συμπερασμάτων για τις περιοχές της κάτω γνάθου που μπορούν να υποστούν θραύση. Μέσω της μεθόδου των καυστικών και της πειραματικής διαδικασίας είναι δυνατή η συνεχής παρακολούθηση (διαδοχικά στιγμιότυπα) της διάδοσης του τασικού παλμού, των απότομων μεταβολών του τασικού πεδίου και των αντίστοιχων τοπικών παραμορφώσεων που επιφέρουν .

Βιβλιογραφία

1. **Wikia Science:** ‘ Biomechanics’ Η πρώτη ερασιτεχνική - Εγκυκλοπαιδική Διαδικτυακή Πύλη στο ελληνόγλωσσο Internet, el.science.wikia.com/wiki/Εμβιομηχανική
2. **Προβατίδης Χριστόφορος, Κούλη, Παναγιώτα Ι., Τσαγγάρης Σωκράτης, Αναγνωστάκης Μάριος**, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών. Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών και Αυτομάτου Ελέγχου. Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών [http : ‘Εμβιομηχανική μελέτη ελαστικά εδρασμένων φυσικών οδόντων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων’](http://www.emm.mech.ntua.gr) 8 Απριλίου 2008
3. **Christopher C. Peck, Alan G. Hannam** : Human jaw and muscle modelling Archives of Oral Biology, Volume 52, Issue 4, April 2007, Pages 300-304
4. **J.H. Koolstra, T.M.G.J. van Eijden** : Combined finite- element and rigid body analysis of human jaw joint dynamics Journal of Biomechanics, Volume 38, Issue 12, December 2005, Pages 2431-2439
5. **Christopher G. Provatidis** : An analytical model for stress analysis of a tooth in translation International Journal of Engineering Science, Volume 39, Issue 12, August 2001, Pages 1361-1381
6. **Γ.Ν. Παπαντωνοπούλου** : ‘ Μαθήματα γναθοχειρουργικής’, ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ Κ.ΠΑΡΙΣΙΑΝΟΣ ΝΑΥΑΡΙΝΟΥ 20- ΑΘΗΝΑ 1980

7. **ΕΛ. Γ. Βαίρακτάρης - N.Schwenzer- F.W. Neukam:** 'Γναθοπροσωπική Χειρουργική: τραύμα, κρανιοπροσωπικές δυσπλασίες' , ΙΑΤΡΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Π.Χ.ΠΑΣΧΑΛΙΔΗΣ

8. **Γ.Ν. Παπαντωνοπούλου** : 'Σημειώσεις Γναθοχειρουργικής' ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ Κ.ΠΑΡΙΣΙΑΝΟΣ- ΑΘΗΝΑ 1975

9. **Γ.Α. Παπαδόπουλος** "Πειραματική μηχανική των θραύσεων- Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων' ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ

10. **Β.Γ.Βαδαλούκα** 'Πειραματική Μελέτη Διάδοσης Ελαστικών Κυμάτων σε Σύστημα Εδάφους-Θεμελίωσης', ΕΜΠ, Αθήνα 1996,σελ 1-40

11. **Θεοχάρη, Π.Σ.**, 'Σχέσεις τάσεων και παραμορφώσεων', Αντοχή των Υλικών, Μηχανική Τομ 2, Εκδ. ΕΜΠ, Αθήναι 1976, σελ 83-104, 119-123

12. **G. Kirch, Zeitsch. Ver. Deutch. Ing.** ,42, ρ.147, 1898.

13. **Theocaris, P.S.**, 'Local yielding around a crack tip in Plexiglas' , J. Appl Mech. , vol. 37, 1970, pp.409-415

14. **P.S. Theocaris**, 'Determination of Crack Opening Displacement by the Method of Caustics', Journal of Strain Analysis, Vo19, No3, 1974, pp. 197-205

15. **P. Manogg, Glastechnische Ber.** 39,323 (1966)

16. **Born, M., and Wolf, A.**, 'Principles of Caustics', Pergamon Press, 4th Edition, London, 1970, pp.. 41-47, 110-113

17. **Favre, H.**, 'Sur une Nouvelle Méthode d'Optique de Détermination des Tensions Intérieures', Revue d' OPTique Théorique et instrumentale, Vol.8, 1929, pp. 5-8

18. **Muskhelishvili, N.I.**, 'Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition., Noordhoff, Groningen, 1963

19. **P.S. Theocaris**, 'Optical Stress Rosette Based on Caustics', Applied Optics , Vol. 12, 1973, pp,380-387

20. **F. Kalthoff**, 'Shadow Optical Method of Caustics', Chapter 9, Handbook on Experimental Mechanics, Edited by Albert S, Kobayashi,

21. **Τσαμασφύρος - Γ. Παπανικολάου**, 'Μηχανική Παραμορφωσίμων στερεών Γ, Αθήνα, 1985, σελ 94-97,219 -241.

22. **P.S. Theocaris, and F.Katsamanis**, 'Response of Cracks to Impact of Caustics', Engineering Fracture Mechanics, 1978, vol 10, pp.197-210