

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
& ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*ΕΛΕΓΧΟΣ
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ
ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ*

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Π. Ν. ΠΑΡΑΣΚΕΥΟΠΟΥΛΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Α. Σ. ΤΣΙΡΙΚΟΣ

ΑΘΗΝΑ 1994

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
ΚΕΦ.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
ΚΕΦ.2 ΑΚΡΙΒΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ	
2.1 Εισαγωγή	11
2.2 Προκαταρτικές έννοιες	13
2.3 Ορισμός του προβλήματος	16
2.4 Βασικά θεωρήματα και επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο	17
2.4.1 Σχεδιαστικές εξισώσεις	19
2.4.2 Ικανές και αναγκαίες συνθήκες	26
2.4.3 Χαρακτηρισμός του νόμου ελέγχου	27
2.5 Συμπεράσματα	29
ΚΕΦ.3 ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΕΣΤΡΑΜΜΕΝΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ ΠΟΥ ΟΔΗΓΕΙΤΑΙ ΑΠΟ DC ΚΙΝΗΤΗΡΑ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ	
3.1 Εισαγωγή	31

3.2	Εξαγωγή του μοντέλου του αντεστραμμένου εκκρεμούς που οδηγείται από DC κινητήρα	33
3.2.1	Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα	33
3.2.2	Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης	35
3.3	Καθορισμός των στόχων ελέγχου για το σύστημα ελέγχου ταλάντωσης του αντεστραμμένου εκκρεμούς	37
3.4	Επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	38
3.4.1	Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών	38
3.4.2	Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου	39
3.4.3	Επιλογή του γραμμικού προτύπου για το σύστημα ελέγχου του εκκρεμούς	40
3.4.4	Έλεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών	42
3.4.5	Εύρεση του νόμου ελέγχου	50
3.4.6	Ειδική λύση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	52
3.5	Δομή του κλειστού συστήματος	53
3.6	Υλοποίηση του νόμου ελέγχου	54
3.7	Ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς	56
3.8	Συμπεράσματα	57

ΚΕΦ.4 ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΕ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

4.1	Εισαγωγή	60
4.2	Εξαγωγή του μοντέλου του DC/AC μετατροπέα	61
4.2.1	Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα	62

	Σελίδα
4.2.2 Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης	62
4.3 Καθορισμός των στόχων ελέγχου για το σύστημα του DC/AC μετατροπέα	64
4.4 Επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	66
4.4.1 Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών	66
4.4.2 Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου	67
4.4.3 Επιλογή του γραμμικού προτύπου	67
4.4.4 Έλεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών	69
4.4.5 Εύρεση του νόμου ελέγχου	77
4.4.6 Ειδική λύση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	81
4.5 Δομή του κλειστού συστήματος	82
4.6 Υλοποίηση του νόμου ελέγχου	83
4.7 Ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς	85
4.8 Συμπεράσματα	87
ΚΕΦ.5 ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΣΤΑΚΤΙΚΗΣ ΣΤΗΛΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ	
5.1 Εισαγωγή	89
5.1.1 Επεξηγηματικές έννοιες χημείας που αφορούν στη διαδικασία της απόσταξης	90
5.1.2 Περιγραφή της διαδικασίας της απόσταξης	92
5.2 Εξαγωγή του μοντέλου του συστήματος	95
5.2.1 Υποθέσεις	95
5.2.2 Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης	97

5.2.3	Απλοποίηση του μοντέλου	103
5.3	Καθορισμός των στόχων ελέγχου για το σύστημα της Αποστακτικής Στήλης	105
5.4	Επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	106
5.4.1	Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών	106
5.4.2	Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου	107
5.4.3	Επιλογή του γραμμικού προτύπου	107
5.4.4	Ελεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών	109
5.4.5	Εύρεση του νόμου ελέγχου	124
5.4.6	Ειδική λύση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	129
5.5	Δομή του κλειστού συστήματος	130
5.6	Υλοποίηση του νόμου ελέγχου	134
5.7	Ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς	136
5.8	Συμπεράσματα	138

ΚΕΦ.6 ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

6.1	Εισαγωγή	140
6.2	Εξαγωγή του μοντέλου του συστήματος	141
6.2.1	Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα	141
6.2.2	Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης	145
6.3	Καθορισμός των στόχων ελέγχου για το σύστημα ελέγχου της Επαγωγικής Μηχανής	150
6.4	Επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος	

	Σελίδα
σε γραμμικό πρότυπο	151
6.4.1 Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών	151
6.4.2 Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου	152
6.4.3 Επιλογή του γραμμικού προτύπου	153
6.4.4 Έλεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών	155
6.4.5 Εύρεση του νόμου ελέγχου	177
6.4.6 Ειδική λύση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος σε γραμμικό πρότυπο	182
6.5 Δομή του κλειστού συστήματος	184
6.6 Υλοποίηση του νόμου ελέγχου	186
6.7 Ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς	188
6.8 Συμπεράσματα	190
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	192
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	194
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	196

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με το πρόβλημα ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων με την τεχνική του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο. Η μελέτη που ακολουθεί αφορά στον έλεγχο:

- i) Αντεστραμμένου Εκκρεμούς, ελεγχόμενου από DC Κινητήρα,
- ii) Μετατροπέα Συνεχούς σε Εναλλασσόμενο ρεύμα,
- iii) Αποστακτικής Στήλης και
- iv) Επαγωγικής Μηχανής.

Η εργασία αυτή, δομείται ως εξής:

Στο εισαγωγικό **Κεφάλαιο 1** γίνεται ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας και παρουσίαση της συμβολής της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα που αφορούν στο Ακριβές Ταιριασμα μη γραμμικών συστημάτων σε Γραμμικό πρότυπο.

Στο **Κεφάλαιο 3** εφαρμόζεται η τεχνική του Ακριβούς ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο σε ένα μοντέλο Αντεστραμμένου Εκκρεμούς που οδηγείται από DC Κινητήρα.

Στο **Κεφάλαιο 4** εφαρμόζεται η τεχνική του Ακριβούς ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο σε ένα μοντέλο DC/AC Μετατροπέα.

Στο **Κεφάλαιο 5** εφαρμόζεται η τεχνική του Ακριβούς ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο σε ένα μοντέλο που αφορά στη διαδικασία της Απόσταξης.

Στο **Κεφάλαιο 6** εφαρμόζεται η τεχνική του Ακριβούς ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο σε ένα μοντέλο Επαγωγικής Μηχανής.

Στο **Παράρτημα Α** παρουσιάζεται η βιβλιοθήκη συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκε για τους απαιτούμενους υπολογισμούς των Κεφαλαίων 3, 4, 5, και 6. Οι συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν από το λογισμικό πακέτο MATHEMATIKA VER.2.1. και αφορούν πράξεις και τελεστές της διανυσματικής άλγεβρας.

Στο **Παράρτημα Β** περιλαμβάνεται το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο από το χώρο της διαφορικής γεωμετρίας, που απαιτείται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, **κ. Π. Ν. Παρασκευόπουλο**, για την επιστημονική καθοδήγηση και την ανθρώπινη συμπαράσταση που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, να τον ευχαριστήσω για την επιστημονική πρόκληση που μου μετέδωσε, εισαγάγωντάς με στο γνωστικό πεδίο του Αυτομάτου Ελέγχου.

Ιδιαίτερα, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου στον υποψήφιο διδάκτορα **κ. Αθανάσιο Τσιρίκο** για την ανεκτίμητη και ουσιαστική προσφορά του στην περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τη φιλική και ανθρώπινη συμπεριφορά του σε συνδιασμό με την επιστημονική βοήθεια που μου πρόσφερε μέσα από τις ανεξάντλητες γνώσεις του στον τομέα του Αυτομάτου Ελέγχου.

Δεν θα μπορούσα να παραλήψω τις ευχαριστίες μου στους συμφοιτητές μου **Δημήτρη Καλόφωνο** και **Ξενοφόντα Κουτσούκο** για την προσφορά τους, μέσα από τη φιλική συνεργασία μας, στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τη **Μητέρα** μου της οποίας η συμπαράσταση στέκεται μοναδική και ανεπανάληπτη σ' όλη μου τη ζωή. Τέλος, εκφράζω τις πιο θερμές μου ευχαριστίες στο **Θεό**. χωρίς τη βοήθεια του οποίου, θα ήταν αδύνατο να βρεθώ στην παρούσα θέση.

Ενα μεγάλο ευχαριστώ, σε **όλους** τους ανθρώπους που μου έμαθαν ότι το επιθυμητό είναι πάντα κατορθωτό και ότι η πρόοδος του ανθρώπου πηγάζει από την **Ανάγκη** για γνώση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί συμβολή στο πεδίο του ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων. Αντιμετωπίζονται προβλήματα ελέγχου πρακτικών μη γραμμικών συστημάτων. Ειδικότερα, αντιμετωπίζονται προβλήματα όπως: Ο έλεγχος της ταλάντωσης Αντεστραμμένου Εκκρεμούς, ο έλεγχος DC/AC Μετατροπέα, ο έλεγχος της διαδικασίας Απόσταξης και τέλος, ο έλεγχος μιας Επαγωγικής Μηχανής. Στην παρούσα διπλωματική εργασία τα προβλήματα των προαναφερθέντων μη γραμμικών συστημάτων, αντιμετωπίζονται με την τεχνική του Ακριβούς Ταιριάσματος μη Γραμμικών Συστημάτων σε Γραμμικό Πρότυπο.

Ο μη γραμμικός έλεγχος συστημάτων που περιγράφονται στο χώρο κατάστασης από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι μεν ένα δύσκολο πρόβλημα, αλλά απαραίτητος, εφόσον οι λειτουργίες όλων των συστημάτων που συναντάμε στην πράξη, είναι υψηλά μη γραμμικές διαδικασίες. Η παγκόσμια βιβλιογραφία Αυτομάτου Ελέγχου έχει ασχοληθεί με το πρόβλημα ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων, χρησιμοποιώντας τεχνικές όπως, αποσύζευξης εισόδων - εξόδων, ταιριάσματος σε πρότυπο και αποκοπής διαταραχών, προκειμένου να ικανοποιηθούν κάποιες επιθυμητές προδιαγραφές, που θα θέλαμε να παρουσιάζει το μη γραμμικό σύστημα.

Η επιλογή της τεχνικής του Ακριβούς Ταιριάσματος του μη γραμμικού

συστήματος σε Γραμμικό Πρότυπο, βασίστηκε στο γεγονός ότι μέσω αυτής της τεχνικής το ανοικτό μη γραμμικό σύστημα οδηγείται σε ένα κλειστό σύστημα τοι οποίου η περιγραφή εισόδων - εξόδων (συνάρτηση μεταφοράς), "ταιριάζει" με την περιγραφή εισόδων - εξόδων ενός γραμμικού κατάλληλα επιλεγμένου προτύπου πετυχαίνοντας ταυτόχρονα, όπου είναι επιθυμητό, την αποσύζευξη του κλειστοί συστήματος. Η μέθοδος τοι Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, χρησιμοποιείται ευρέως στη βιβλιογραφία του Αυτομάτου Ελέγχου, για τον έλεγχο διαφόρων κατηγοριών συστημάτων, όπως γραμμικά συστήματα, συστήματα με χρονικές καθυστερήσεις, μη γραμμικά συστήματα, κ.λπ. [4], [5],[13], [14], και [17]-[19].

Πρόσφατα, έχει αναπτυχθεί μια νέα μέθοδος του Ακριβούς Ταιριάσματος μη γραμμικών συστημάτων σε Γραμμικό Πρότυπο με ανατροφοδότηση κατάστασης η οποία παρουσιάζεται στη διδακτορική διατριβή [19]. Η μέθοδος αυτή υπερτερεί έναντι των μέχρι σήμερα γνωστών μεθόδων στο ότι ανάγει τη λύση του προβλήματος τοι ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο, στην επίλυση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Με βάση την επιλυσιμότητα του συστήματος αυτού, διατυπώνονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε το πρόβλημα τοι Ακριβούς Ταιριάσματος του μη γραμμικού συστήματος αυτού σε Γραμμικό Πρότυπο, να έχει λύση, ενώ ταυτόχρονα, χαρακτηρίζεται η γενική λύση του νόμου ανατροφοδότησης, ο οποίος επιτυγχάνει το Ακριβές Ταιριασμα σε Γραμμικό Πρότυπο.

Η μέθοδος που έχει αναπτυχθεί [19], επετάχθηκε, ώστε να επιλύσει το πρόβλημα της ακριβούς γραμμικοποίησης και του χαρακτηρισμού της κλάσης των γραμμικών συστημάτων μιας εισόδου - μιας εξόδου, τα οποία είναι "ισοδύναμα" με το αρχικό μη γραμμικό σύστημα (feedback equivalence) και παρουσιάζεται στην εργασία [23].

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε, μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε το πρόβλημα του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, με παραμετρικά κάποια στοιχεία του προτύπου, όπως για παράδειγμα οι συντελεστές του χαρακτηριστικού

πολυωνύμου του κλειστού συστήματος. Επιλογή των παραμέτρων του προτύπου, μας δίνει τη δυνατότητα να ικανοποιήσουμε κι άλλες προδιαγραφές του κλειστού συστήματος, όπως για παράδειγμα την ευστάθεια. Εφόσον το κλειστό σύστημα είναι γραμμικό, μπορούμε περαιτέρω να εφαρμόσουμε γνωστές τεχνικές ελέγχου από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων, όπως για παράδειγμα να προσδιορίσουμε τον κατάλληλο νόμο ελέγχου που θα επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη διδακτορική διατριβή [19] και αφορούν στο Ακριβές Ταίριασμα μη γραμμικών συστημάτων σε Γραμμικό Πρότυπο. Συγκεκριμένα, τα πιο πάνω αποτελέσματα εφαρμόζονται σε τέσσερα πρακτικά συστήματα τα οποία περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις κατάστασης. Τα μη γραμμικά συστήματα αυτά, είναι:

- *Αντεστραμμένο Εκκρεμές, ελεγχόμενο από DC Κινητήρα,*
- *Μετατροπέας από Συνεχές σε Εναλλασσόμενο ρεύμα,*
- *Αποστακτική Στήλη και*
- *Επαγωγική Μηχανή.*

Στα προαναφερθέντα πρακτικά συστήματα, καθορίστηκε η στρατηγική ελέγχου, η οποία μπορεί να επιτευχθεί με την τεχνική του Ακριβούς Ταίριασματος σε Γραμμικό Πρότυπο και να οδηγήσει στην ικανοποίηση των στόχων ελέγχου. Η εφαρμογή της τεχνικής του Ακριβούς Ταίριασματος σε Γραμμικό Πρότυπο, οδηγεί σε γραμμικά συστήματα και, όπου είναι επιθυμητό, αποσυζευγμένα. Ειδικότερα, η μελέτη του προβλήματος του Ακριβούς Ταίριασματος σε Γραμμικό Πρότυπο για τα τέσσερα μη γραμμικά συστήματα, απέδειξε ότι:

Το Ακριβές Ταίριασμα σε Γραμμικό Πρότυπο, μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης, είναι δυνατό και για τα τέσσερα πρακτικά μη γραμμικά συστήματα.

Η εφαρμογή αυτής της τεχνικής οδήγησε στο να γίνουν τα ακόλουθα:

1. Προσδιορίστηκε η γενική λύση του νόμου ανατροφοδότησης.
2. Προσδιορίστηκε η δομή του κλειστού συστήματος και έγινε μελέτη των δομικών ιδιοτήτων του.
3. Χαρακτηρίστηκε το υποσύνολο των λύσεων του νόμου ανατροφοδότησης το οποίο οδηγεί σε ευσταθές κλειστό σύστημα για τα πρακτικά συστήματα ελέγχου ταλάντωσης του Αντεστραμμένου Εκκρεμούς που οδηγείται από DC Κινητήρα και ελέγχου του DC/AC Μετατροπέα.
4. Προσδιορίστηκε ο κατάλληλος νόμος ελέγχου ώστε οι έξοδοι των συστημάτων να παρακολουθούν ασυμπτωτικά επιθυμητές τροχιές.

Σημειώνεται ότι για την εφαρμογή της τεχνικής του Ακριβούς Ταίριασματος των μη γραμμικών συστημάτων σε Γραμμικό Πρότυπο, χρησιμοποιήθηκε σχετική βιβλιοθήκη μαθηματικών συναρτήσεων, που έχουν υλοποιηθεί μέσω του λογισμικού πακέτου MATHEMATIKA VER.2.1. Ένα βασικό πλεονέκτημα της παρούσης διπλωματικής εργασίας είναι ότι μελετά τα μη γραμμικά συστήματα με συμβολική μορφή, χωρίς να απαιτούνται αριθμητικά δεδομένα. Με τον τρόπο αυτό, αντιμετωπίζεται η γενικότερη δυνατή περίπτωση και συνεπώς τα αποτελέσματα μπορούν να προσαρμοστούν και να εφαρμοστούν σε μεγάλη ποικιλία επιλογής των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το σύστημα.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η συμβολή της παρούσης διπλωματικής εργασίας συνίσταται στην εφαρμογή των θεωρητικών αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στη διδακτορική διατριβή [19], αναφορικά με το Ακριβές Ταίριασμα μιας κλάσης μη γραμμικών συστημάτων σε Γραμμικό Πρότυπο. Συγκεκριμένα, τα θεωρητικά αποτελέσματα εφαρμόζονται σε τέσσερα πρακτικά συστήματα:

- 1) *Αντεστραμμένο Εκκρεμές, ελεγχόμενο από DC Κινητήρα,*
- 2) *Μετατροπέας από Συνεχές σε Εναλλασσόμενο ρεύμα,*
- 3) *Αποστακτική Στήλη και*
- 4) *Επαγωγική Μηχανή.*

Η εφαρμογή της τεχνικής του Ακριβούς Ταίριασματος του συστήματος ελέγχου ταλάντωσης του Αντεστραμμένου Εκκρεμούς που οδηγείται από DC κινητήρα, σε Γραμμικό Πρότυπο, οδηγεί στο "ταίριασμα" του μη γραμμικού συστήματος του εκκρεμούς σε γραμμικό πρότυπο, ενώ για τα συστήματα ελέγχου του DC/AC Μετατροπέα, της Αποστακτικής Στήλης και της Επαγωγικής Μηχανής, οδηγεί στο ταίριασμα της απόκρισής τους με την απόκριση αντίστοιχων γραμμικών προτύπων, τα οποία έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να είναι αποσυζευγμένα.

Ειδικότερα, μέσω της μελέτης αυτών των τεσσάρων μη γραμμικών συστημάτων:

- Αποδεικνύεται ότι το Ακριβές Ταιρίασμα σε Γραμμικό Πρότυπο, μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης, είναι δυνατό και για τα τέσσερα πρακτικά μη γραμμικά συστήματα.
- Προσδιορίζεται η γενική λύση του νόμου ανατροφοδότησης.
- Προσδιορίζεται η δομή του κλειστού συστήματος και γίνεται μελέτη των δομικών ιδιοτήτων του.
- Χαρακτηρίζεται το υποσύνολο των λύσεων του νόμου ανατροφοδότησης το οποίο οδηγεί σε ευσταθές κλειστό σύστημα για τα πρακτικά συστήματα ελέγχου του Αντεστραμμένου εκκρεμμύς και του DC/AC Μετατροπέα.
- Προσδιορίζεται ο κατάλληλος νόμος ελέγχου ώστε οι έξοδοι των συστημάτων να παρακολουθούν ασυμπτωτικά ευσταθείς τροχιές.

Για τα πρακτικά συστήματα με τα οποία ασχολούμαστε στην παρούσα διπλωματική εργασία, με εφαρμογή της τεχνικής του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, καταλήξαμε σε αποτελέσματα που συμπίπτουν με αυτά της διεθνούς βιβλιογραφίας Αυτομάτου Ελέγχου σε μη γραμμικά συστήματα, και τα οποία τελευταία, έχουν εξαχθεί με εφαρμογή άλλων τεχνικών ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων, όπως η αποσύζευξη εισόδων - εξόδων, και η "διάσπαση" που ακολουθείται από γραμμικοποίηση.

Η τεχνική ελέγχου που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Η απόκριση του κλειστού συστήματος "ταιριάζει" με την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος.
2. Αναγάγει τη λύση του Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο στην επίλυση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, οι οποίες, για τα συγκεκριμένα πρακτικά συστήματα, είναι εύκολο να λυθούν.
3. Επιλογή των παραμέτρων του Προτύπου, μας δίνει τη δυνατότητα να ικανοποιήσουμε τις επιθυμητές προδιαγραφές για το σύστημα.
4. Αντιμετωπίζει τη γενικότερη περίπτωση των τεσσάρων πρακτικών συστημάτων, αφού αποφεύχθηκε η αποτίμηση των παραμέτρων σε αριθμητικά δεδομένα και μελετήθηκαν τα μοντέλα των συστημάτων με τη συμβολική τους μορφή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΚΡΙΒΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν Κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η θεωρία για την επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος μη γραμμικών συστημάτων σε γραμμικό πρότυπο. Η μεθοδολογία, η οποία περιγράφεται στο παρόν Κεφάλαιο, παρουσιάζεται στη διδακτορική διατριφή [19] και θα εφαρμοστεί στα επόμενα Κεφάλαια σε μοντέλα πρακτικών συστημάτων.

Το πρόβλημα του ακριβούς ταιριάσματος συστημάτων σε πρότυπο είναι ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα σχεδίασης Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου. Το βασικό κίνητρο για το ακριβές ταιρίασμα ενός συστήματος σε πρότυπο είναι το γεγονός ότι με αυτό το τρόπο καταφέρνουμε να προσδώσουμε στο σύστημά μας τις ιδιότητες και προδιαγραφές τις οποίες έχει κάποιο επιθυμητό πρότυπο. Το πρόβλημα του ακριβούς ταιριάσματος σε πρότυπο έχει απασχολήσει, τις δύο τελευταίες δεκαετίες, πληθώρα ερευνητών και έχει μελετηθεί τόσο για γραμμικά όσο και για μη γραμμικά συστήματα. Η ερευνητική προσπάθεια επικεντρώνεται στα ακόλουθα βασικά σημεία:

α) Εύρεση των ικανών και αναγκαίων συνθηκών επιλυσιμότητας του ακριβούς ταίριασματος σε πρότυπο με ανατροφοδότηση.

β) Προσδιορισμός του νόμου ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει το ακριβές ταίριασμα σε πρότυπο.

Όσον αφορά στα μη γραμμικά συστήματα, το πρόβλημα του ακριβούς ταίριασματος σε πρότυπο, με ανατροφοδότηση, έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών με αποτέλεσμα να υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων στο αντικείμενο αυτό [3]-[14]. Συγκεκριμένα, η επίλυση του προβλήματος αυτού συνίσταται στον προσδιορισμό ενός στατικού ή δυναμικού νόμου ελέγχου που θα ταιριάζει τη συμπεριφορά του συστήματος σε ένα πρότυπο είτε αυτό είναι γραμμικό, είτε είναι μη γραμμικό. Η περίπτωση του μη γραμμικού προτύπου έχει μελετηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [4], [13] και [14]. Η περίπτωση του γραμμικού προτύπου, η οποία προφανώς έχει και τη μεγαλύτερη πρακτική σημασία, έχει μελετηθεί κατά κόρο στη βιβλιογραφία. Η περίπτωση αυτή απαντάται με τις δύο ακόλουθες μορφές:

1. Το γραμμικό πρότυπο έχει συγκεκριμένη περιγραφή [2] και [5].
2. Για το πρότυπο απαιτείται μόνον η γραμμικότητα της περιγραφής εισόδων εξόδων, [3] και [6]-[12].

Περαιτέρω, αναφέρουμε ότι οι αλγόριθμοι επίλυσης του προβλήματος του ακριβούς ταίριασματος μη γραμμικών συστημάτων σε γραμμικό πρότυπο αποτελούν σημαντικό εργαλείο για τον προσαρμοστικό έλεγχο των μη γραμμικών συστημάτων, [15] και [16].

Η τεχνική επίλυσης του προβλήματος του ακριβούς ταίριασματος μιας κλάσης μη γραμμικών συστημάτων (με ορισμένο το διανυσματικό σχετικό βαθμό [2]) σε γραμμικό πρότυπο που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο αυτό αφορά στην περίπτωση που το γραμμικό πρότυπο έχει συγκεκριμένη περιγραφή. Συγκεκριμένα, η επιλυσιμότητα του

προβλήματος ανάγεται στην επιλυσιμότητα ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Με βάση το σύστημα αυτό εξάγονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Περαιτέρω, χαρακτηρίζεται το σύνολο των στατικών νόμων ανατροφοδότησης που επιτυγχάνουν το ακριβές ταίριασμα του μη γραμμικού συστήματος στο γραμμικό πρότυπο.

2.2. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται στο χώρο κατάστασης

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

και

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

(2.2-1)

όπου η είσοδος $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ είναι C^∞ αναλυτική διανυσματική συνάρτηση, η έξοδος $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, η κατάσταση \mathbf{x} αναπτύσσεται πάνω σε ένα n -διάστατο, αναλυτικό πεδίο (manifold) \mathbf{M} , η $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ και κάθε στήλη του πίνακα \mathbf{G} , που συμβολίζεται με \mathbf{g}_i , είναι η τοπική αναπαράσταση των συντεταγμένων ενός C^∞ (αναλυτικού) διανυσματικού χώρου στο πεδίο \mathbf{M} . Τέλος, \mathbf{h} είναι μια C^∞ αναλυτική απεικόνιση από το \mathbf{M} στο \mathbb{R}^p . Επομένως, αν \mathbf{M} , $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$, \mathbf{f} , \mathbf{g}_i και \mathbf{h} είναι C^∞ αναλυτικά διανύσματα, το σύστημα (2.2-1) ονομάζεται λείο (αναλυτικό). Η εργασία [19] ασχολείται μόνο με αυτήν την κατηγορία των συστημάτων.

Ορίζουμε τη διαφορίση ως προς μια C^∞ διανυσματική συνάρτηση $\tau(\mathbf{x})$ στο \mathbf{M} , χρησιμοποιώντας το σύμβολο της Lie διαφορίσης ως εξής

$$L_\tau \triangleq \sum_{i=1}^n \tau_i(\mathbf{x}) \partial / \partial x_i = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right] \tau(\mathbf{x}) \quad (2.2-2)$$

όπου $\partial/\partial x_i$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του x_i . Επίσης, έστω $\sigma(\mathbf{x})$ είναι μια C^∞ διανυσματική συνάρτηση στο \mathcal{M} . Οι διαδοχικοί τελεστές Lie bracket των τ και σ ορίζονται ως εξής

$$L_{[\tau,\sigma]}(\mathbf{x}) \triangleq [\tau,\sigma](\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\tau(\mathbf{x}) - \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x})$$

(2.2-3)

ή

$$\text{ad}_\tau^0 \sigma(\mathbf{x}) \triangleq \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{και} \quad \text{ad}_\tau^k \sigma(\mathbf{x}) \triangleq [\tau, \text{ad}_\tau^{k-1} \sigma](\mathbf{x})$$

για $k=1,2,\dots$

Εστω $\phi(\mathbf{x})$ μια συνάρτηση στο \mathcal{M} . Τότε, $L_\tau(\phi)$ δηλώνει τη Lie παράγωγο της $\phi(\mathbf{x})$ που ορίζεται

$$L_\tau(\phi) \triangleq \langle d\phi(\mathbf{x}), \tau(\mathbf{x}) \rangle$$

(2.2-4)

όπου $d\phi(\mathbf{x})$ δηλώνει το gradient (κλίση) της συνάρτησης $\phi(\mathbf{x})$ που ορίζεται

$$d\phi(\mathbf{x}) \triangleq \left[\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$$

(2.2-5)

και το εσωτερικό γινόμενο $\langle d\phi(\mathbf{x}), \tau(\mathbf{x}) \rangle$ ορίζεται

$$\langle d\phi(\mathbf{x}), \tau(\mathbf{x}) \rangle \triangleq d\phi(\mathbf{x})\tau(\mathbf{x})$$

(2.2-6)

Τέλος, η Lie παράγωγος της $d\phi$ ορίζεται

$$L_\tau(d\phi) \triangleq d(L_\tau \phi)$$

(2.2-7)

Τώρα θα εισαγάγουμε κάποιους ορισμούς οι οποίοι θα φανούν χρήσιμοι στην παρουσίαση των θεωρητικών αποτελεσμάτων της εργασίας [19].

Ορισμός 2.1.1. (Involutive distribution) Μια κατανομή Δ λέγεται περίπλοκη (involutive) αν για κάθε $\tau, \sigma \in \Delta$ ισχύει ότι $[\tau, \sigma] \in \Delta$

Ορισμός 2.1.2. (Involutive closure) Θεωρούμε μια κατανομή Δ η οποία δεν είναι involutive. Ξεκινώντας από την κατανομή Δ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κατανομή η οποία να είναι involutive. Ετσι, involutive closure της κατανομής Δ ονομάζεται η μικρότερη κατανομή η οποία περιέχει τη Δ και είναι involutive. Αυτή η involutive κατανομή συμβολίζεται με $\text{inv}(\Delta)$. Στην εργασία [19], ο συμβολισμός $\text{inv}[\Pi(\mathbf{x})]$, όπου $\Pi(\mathbf{x})$ είναι πίνακας που παίρνει τιμές στο \mathbb{M} , δηλώνει τη μικρότερη involutive κατανομή που περιέχει την κατανομή που παράγεται από τις στήλες του $\Pi(\mathbf{x})$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η βάση του $\text{inv}[\Pi(\mathbf{x})]$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$\mathbf{x}_{i_k, \dots, i_1}(\mathbf{x}) = \left[\pi_{i_k}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_{i_{k-1}, \dots, i_1}(\mathbf{x}) \right], \quad k > 1$$

και

$$\mathbf{x}_{i_1}(\mathbf{x}) = \pi_{i_1}(\mathbf{x})$$

με $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, όπου με $\pi_1(\mathbf{x}), \dots, \pi_n(\mathbf{x})$ συμβολίζουμε τις στήλες του $\Pi(\mathbf{x})$.

Ορίζουμε $\mathcal{J}_\rho \triangleq \{1, 2, \dots, \rho\}$, όπου ρ είναι ένας θετικός αριθμός και $\mathcal{J}_\infty \triangleq \{0, 1, \dots, \infty\}$. Η απεικόνιση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.2-1) δίνεται από τη συναρτησιακή ανάπτυξη Fliess (Fliess functional expansion [2])

$$y(x_0, u, t) = h(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_k=0}^m L_{g_{i_0}} \dots L_{g_{i_k}} h(x_0) \int_0^t d\xi_{i_k} \dots d\xi_{i_0} \quad (2.2-8)$$

όπου το επαναληπτικό ολοκλήρωμα $\int_0^t d\xi_{i_k} \dots d\xi_{i_0}$ δίνεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$\xi_0(t) = t, \quad \xi_i(t) = \int_0^t u_i(\tau) d\tau$$

και (2.2-9)

$$\int_0^t d\xi_{i_k} \dots d\xi_{i_0} = \int_0^t d\xi_{i_k}(\tau) \int_0^{\tau} d\xi_{i_{k-1}} \dots d\xi_{i_0}$$

για $i \in \mathbb{J}_m, i_k \in \{0, \mathbb{J}_m\}$ και $k \in \mathbb{J}_\infty$.

2.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε το μη γραμμικό αναλυτικό σύστημα (2.2-1). Στόχος μας είναι να βρεθεί ένας νόμος ελέγχου της ακόλουθης μορφής

$$u = a(x) + B(x)w \quad (2.3-1)$$

όπου $w \in \mathbb{R}^m$ και $|B(x)| \neq 0, \forall x \in \mathbb{M}$, ο οποίος, όταν εφαρμοστεί στο αρχικό σύστημα (2.2-1) να οδηγήσει σε ένα μη γραμμικό κλειστό σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = \bar{g}_0(x) + \bar{G}(x)w, \quad x(0) = x_0$$

και (2.3-2)

$$y = h(x)$$

όπου $\bar{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) := \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})$, του οποίου η έξοδος θα "ταιριάζει" στην έξοδο του πιο κάτω γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου συστήματος

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_M \mathbf{z} + \mathbf{B}_M \mathbf{w} \quad , \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

και

(2.3-3)

$$\mathbf{y}_M = \mathbf{C}_M \mathbf{z}$$

όπου $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{y}_M \in \mathbb{R}^p$.

Με τον όρο "ταίριασμα", εννοούμε ότι η διαφορά

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}, t) - \mathbf{y}_M(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}, t) = \text{Ανεξάρτητη της Εισόδου } \mathbf{w}$$

για κάθε ζεύγος αρχικών συνθηκών $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0\}$, [2], [5] και [14]. Ο ορισμός αυτός μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής

$$L_{g_j} \dots L_{g_{j_1}} L_{g_{j_2}} \dots L_{g_{j_k}} h_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} (c_i)_{iM} \mathbf{A}_M^k (\mathbf{B}_j)_{jM} & \text{για } j_1 = j_2 = \dots = j_k = 0 \\ 0 & \text{για κάθε άλλο συνδυασμό} \\ & \text{του } j_1, j_2, \dots, j_k \in \{0, \mathbb{J}_m\} \end{cases} \quad (2.3-4a)$$

$$(2.3-4b)$$

για $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{M}$, $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{0, \mathbb{J}_m\}$, $k \in \{0, \mathbb{J}_\infty\}$, $i \in \mathbb{J}_p$ και $j \in \mathbb{J}_m$, όπου $(c_i)_{iM}$ είναι η i -στή γραμμή του πίνακα \mathbf{C} και $(\mathbf{B}_j)_{jM}$ είναι η j -στή στήλη του πίνακα \mathbf{B}_M .

2.4. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

Στο εδάφιο αυτό θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα που

συναντώνται αρκετά συχνά στη βιβλιογραφία και σχετίζονται με κάθε μη γραμμικό σύστημα της μορφής (2.1-1) και θα φανούν χρήσιμοι στη συνέχεια.

Ορισμός 2.4.1. Υποθέτουμε ότι για το σύστημα (2.1-1) υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί d_i , για κάθε $i \in \mathbb{J}_p$, που ορίζονται ως εξής

$$L_{g_j} L_{g_0}^k h_i(x) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{J}_m \text{ και } \forall k < d_i$$

και

$$L_{g_j} L_{g_0}^{d_i} h_i(x) \neq 0 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{J}_m \quad (2.4-1a)$$

$\forall x \in \mathbb{M}$, όπου $h_i(x)$ είναι το i -στο στοιχείο του $\mathbf{h}(x)$. Οι αριθμοί αυτοί, τα d_i , ονομάζονται *χαρακτηριστικοί αριθμοί (characteristic numbers)*. Ο αριθμός r_i , οριζόμενος ως $r_i = d_i + 1$, για $i \in \mathbb{J}_p$, ονομάζεται *σχετικός βαθμός (relative degree)* της i -οστής εξόδου [2].

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν $d_i = \infty$ για κάποια $i \in \mathbb{J}_p$, τότε χρησιμοποιώντας την συναρτησιακή ανάπτυξη Fliess, μπορεί να αποδειχθεί ότι έχουμε μηδενισμό της εξόδου για την i -στή έξοδο, δηλαδή η i -στή έξοδος δεν επηρεάζεται από την είσοδο. Η εργασία [19] ασχολείται με συστήματα της μορφής (2.1-1) για τα οποία οι χαρακτηριστικοί αριθμοί είναι πεπερασμένοι.

Οι χαρακτηριστικοί αριθμοί ενός γραμμικού χρονικά μη μεταβαλλόμενου συστήματος της μορφής (2.3-3) ορίζονται με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν του ορισμού 2.4.1..

Ορισμός 2.4.2. Υποθέτουμε ότι για το σύστημα (2.3-3) υπάρχουν μη ακέραιοι αριθμοί, $\forall i \in \mathbb{J}_p$, που ορίζονται ως εξής

$$(c_i)_M A_M^k B_M = 0, \quad \forall k < d_i$$

και

$$(c_i)_M A_M^{d_i} B_M \neq 0 \quad (2.4-1b)$$

Ας ορίσουμε με $(d_i)_{(A)}$, $(d_i)_{(KL)}$ και $(d_i)_{(M)}$ τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του ανοιχτού συστήματος (2.1-1), του κλειστού συστήματος (2.3-2) και του μοντέλου (2.3-3), αντίστοιχα. Από τις εξισώσεις (2.3-4) παρατηρούμε ότι μια αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε το πρόβλημα του ταίριασματος στο γραμμικό πρότυπο να έχει λύση, είναι

$$(d_i)_{(KL)} = (d_i)_{(M)} \quad (2.4-2)$$

Εφόσον ο επιθυμητός νόμος ελέγχου (2.3-1) θεωρείται μη ιδιόμορφος ($|B(x)| \neq 0, \forall x \in M$) και οι χαρακτηριστικοί αριθμοί παραμένουν αμετάβλητοι κάτω από τη μη ιδιόμορφη ανατροφοδότηση κατάστασης, η προηγούμενη αναγκαία συνθήκη (2.4-2) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$d_i = (d_i)_{(A)} = (d_i)_{(M)} \quad (2.4-3)$$

2.4.1. Σχεδιαστικές Εξισώσεις

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των χαρακτηριστικών αριθμών και τη συνθήκη (2.4-3) οδηγούμαστε σε ένα σύστημα εξισώσεων για τα άγνωστα $a(x)$ και $B(x)$, το οποίο δίνεται στο ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.4.1. Κάτω από τη συνθήκη (2.4-3), οι εξισώσεις (2.3-4), είναι δυνατόν να γραφούν στην ακόλουθη μορφή πινάκων

$$B_0^*(x)B(x) = M_0 \quad (2.4-4)$$

$$B_k^*(x) + \sum_{j=0}^{k-1} M_j d \left(L_{g_0}^{k-1-j} \phi \right) G(x) = M_k B^{-1}(x) \quad , \quad \text{για } 1 \leq k \leq 2n-1$$

όπου

$$\phi(x) := \left[B(x) \right]^{-1} a(x) \quad , \quad (2.4-5a)$$

$$\mathbf{M}_j := \begin{bmatrix} \mu_{1,d_1-j} \\ \vdots \\ \mu_{p,d_p-j} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (\mathbf{c}_1)_{\mathbf{M}} \mathbf{A}_{\mathbf{M}}^{d_1+j} \\ \vdots \\ (\mathbf{c}_p)_{\mathbf{M}} \mathbf{A}_{\mathbf{M}}^{d_p+j} \end{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{M}} \quad , \quad j \geq 0 \quad (2.4-5b)$$

και

$$\mathbf{B}_j^*(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} d(L_{\xi_0}^{d_1+j} h_1(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ d(L_{\xi_0}^{d_p+j} h_p(\mathbf{x})) \end{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \quad , \quad j \geq 0 \quad (2.4-5c)$$

Σημειώνεται ότι αν υπάρχουν $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ που να ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.4-3a), τότε θα ισχύουν και οι εξισώσεις (2.4-3b).

Στη συνέχεια οι εξισώσεις (2.4-4) του Λήμματος 2.4.1. μπορούν περαιτέρω να γραφούν σε συνοπτική μορφή πίνακα, όπως παρακάτω

$$\mathbf{M}\Lambda(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}^*(\mathbf{x}) \quad (2.4-6)$$

όπου

$$\mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{2n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \dots & \mathbf{M}_{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.4-7a)$$

$$\Lambda(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} -L_0(\mathbf{x}) & L_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{2n-1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & -L_0(\mathbf{x}) & \dots & L_{2n-2}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -L_0(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad , \quad (2.4-7b)$$

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) & \mathbf{B}_1^*(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{B}_{2n-1}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{B}_{2n-2}^*(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.4-7c)$$

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) \text{ και } \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) \triangleq d \left(\begin{matrix} L \\ g_0 \end{matrix} \right)^{k-1} \Phi \mathbf{G}(\mathbf{x}) \text{ για } 1 \leq k \leq 2n-1. \quad (2.4-7d)$$

Τώρα, ορίζουμε $\beta = \text{rank} \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x})$. Υποθέτουμε ότι το β είναι σταθερό για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Παρατηρούμε ότι από κατασκευή ο πίνακας $\Lambda(\mathbf{x})$ θα πρέπει να είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας εφόσον ψάχνουμε για κάποιον πίνακα $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ με $|\mathbf{B}(\mathbf{x})| \neq 0$. Κάτω από αυτή την παρατήρηση, η αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η (2.4-6) να έχει λύση για τον πίνακα $\Lambda(\mathbf{x})$, με $|\Lambda(\mathbf{x})| \neq 0$, είναι

$$2n\beta = \text{rank} \left[\mathbf{B}^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \left[\mathbf{M} \right] = \text{rank} \left[\mathbf{B}^*(\mathbf{x}) ; \mathbf{M} \right], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M} \quad (2.4-8)$$

Στην εργασία [19], το ενδιαφέρον εντοπίζεται αποκλειστικά και μόνο στην κλάση των μη γραμμικών συστημάτων όπου $\beta = m$ (Δηλαδή σ' αυτά τα συστήματα που έχουν κάποιο σχετικό διανυσματικό βαθμό (*vector relative degree* [2])). Σημειώνεται ότι τα μη γραμμικά συστήματα αυτής της κλάσης είναι αριστερά αντιστρέψιμα. Για αυτή την κλάση των μη γραμμικών συστημάτων ($\beta = m$) μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι η συνθήκη (2.4-8) είναι και ικανή ώστε η εξίσωση (2.4-6) να έχει λύση για $\Lambda(\mathbf{x})$, με $\Lambda(\mathbf{x})$ αντιστρέψιμο $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$, και επιπλέον η λύση έχει τη ζητούμενη μορφή (πίνακας Toeplitz). Περαιτέρω, μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση της (2.4-6) είναι μοναδική. Αυτή η μοναδική λύση της εξίσωσης (2.4-6) δίνεται στην Πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.4.1. Αν $\beta = m$ και ισχύει επιπλέον η συνθήκη (2.4-8) τότε θα υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας V_0 πραγματικών αριθμών

$$V_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ K_0 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } V_0 \in \mathbb{R}^{p \times p}, P_0 \in \mathbb{R}^{m \times p} \text{ και } K_0 \in \mathbb{R}^{(p-m) \times p}$$

ο οποίος αναδιατάσσει τις γραμμές των πινάκων M_0 και $B_0^*(x)$ ως εξής

$$V_0 M_0 = \begin{bmatrix} P_0 M_0 \\ K_0 M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 M_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$V_0 B_0^*(x) = \begin{bmatrix} P_0 B_0^*(x) \\ K_0 B_0^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 B_0^*(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $P_0 M_0$ και $P_0 B_0^*(x)$ είναι αντιστρέψιμοι $m \times m$ πίνακες για $\forall x \in \mathcal{M}$. Η ύπαρξη του αντιστρέψιμου πίνακα V_0 με τις πιο πάνω ιδιότητες εξασφαλίζεται από τη συνθήκη (2.4-8), η οποία γίνεται

$$2nm = \text{rank} \begin{bmatrix} B^*(x) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} B^*(x) \parallel M \end{bmatrix}, \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

Η συνθήκη αυτή υπονοεί ότι

$$m = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} B_0^*(x) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} M_0 \end{bmatrix} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} B_0^*(x) \parallel M_0 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

όπου $\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}$ ορίζεται στην εργασία [2], οπότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη του πίνακα V_0 με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τις εξισώσεις (2.4-6) με τον αντιστρέψιμο πίνακα V ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{V} = \text{Blockdiag} \left\{ \mathbf{V}_0 \right\} , \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2np \times 2np}$$

οι εξισώσεις (2.4-6) μπορούν ισοδύναμα να γραφούν στη μορφή

$$\left[\mathbf{P}_0 \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0 \quad (2.4-9a)$$

$$\left[\mathbf{P}_0 \mathbf{B}_k^*(\mathbf{x}) \right] + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_j \right] d \left(L_{g_0}^{k-1-j} \phi \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_k \right] \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) , \quad (2.4-9b)$$

$$\left[\mathbf{K}_0 \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_0 \mathbf{M}_0 \quad (2.4-9c)$$

$$\left[\mathbf{K}_0 \mathbf{B}_k^*(\mathbf{x}) \right] + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\mathbf{K}_0 \mathbf{M}_j \right] d \left(L_{g_0}^{k-1-j} \phi \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{K}_0 \mathbf{M}_k \right] \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) , \quad (2.4-9d)$$

για $1 \leq k \leq 2n-1$. Εφόσον ο πίνακας $\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, οι εξισώσεις (2.4-9a και b) μπορούν να λυθούν ως προς $d \left(L_{g_0}^k \phi \right) \mathbf{G}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$ και δίνουν

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{x}) \quad (2.4-10a)$$

και

$$d \left(L_{g_0}^{k-1} \phi \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) , \quad 1 \leq k \leq 2n-1 \quad (2.4-10b)$$

όπου

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0 \right]^{-1} \mathbf{P}_0 \left\{ \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right\} , \quad (2.4-11a)$$

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0 \right]^{-1} \mathbf{P}_0 \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_1^*(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.4-11b)$$

και

$$L_k(x) = \left[P_0 M_0 \right]^{-1} P_0 \left\{ M_k B^{-1}(x) - B_k^*(x) - \sum_{j=0}^{k-2} M_{j+1} L_{k-j-1}(x) \right\}, \quad (2.4-11c)$$

για $1 \leq k \leq 2n - 1$.

Είναι ευκολονόητο ότι κάτω κάτω από τις υποθέσεις (2.4-8) και $\beta = m$, η λύση για τους πίνακες $d \left(L_{g_0}^k \phi \right) G(x)$ και $B(x)$, που βρέθηκε παραπάνω, ικανοποιεί επίσης τις εξισώσεις (2.4-10c, d).

Εχουμε λοιπόν αναγάγει τη λύση των εξισώσεων (2.4-4) ως προς $\phi(x)$ και $B(x)$ στη λύση των εξισώσεων (2.4-10a και b) ως προς $\phi(x)$ και $B(x)$. Συγκεκριμένα, η (2.4-10a) είναι μια αλγεβρική εξίσωση, ενώ η (2.4-10b) είναι ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων $2n-1$ τάξης. Στο επόμενο Θεώρημα αποδεικνύεται ότι η λύση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων (2.4-10b) μπορεί να αναχθεί σε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, το οποίο μπορεί να επιλυθεί πιο εύκολα.

Θεώρημα 2.4.1. Κάτω από τις υποθέσεις $|B(x)| \neq 0, \forall x \in M, (d_i)_{(A)} = (d_i)_{(M)}$, για $i \in \mathbb{J}_p, \beta = m$ και ισχύουσας της συνθήκης (2.4-8), το άγνωστο ζεύγος $\{a(x), B(x)\}$ του κλειστού συστήματος (2.3-2) θα βρεθεί από τη λύση της ακόλουθης ομάδας εξισώσεων οι οποίες θα ονομάζονται *Σχεδιαστικές εξισώσεις ακριβούς ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο (Linear Exact Model Matching Design Equations)*

$$\begin{array}{l} B^{-1}(x) = L_0(x) \\ d(\phi) \left[Q(x) \right] = \left[Z(x) \right] \end{array} \quad (2.4-12)$$

όπου

$$Q(x) := \left[G(x) \parallel ad_{g_0} G(x) \parallel \dots \parallel ad_{g_0}^{2n-2} G(x) \right], \quad (2.4-13a)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) := \left[\mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) \mid \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) \mid \dots \mid \mathbf{Z}_{2n-1}(\mathbf{x}) \right], \quad (2.4-13b)$$

όπου

$$ad_{g_0}^k \mathbf{G}(\mathbf{x}) := \left[ad_{g_0}^k \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \mid \dots \mid ad_{g_0}^k \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right] \quad (2.4-14)$$

και $\mathbf{Z}_j(\mathbf{x})$, για $j \in \mathbb{J}_{2n-1}$, δίνονται συναρτήσεις των πρώτων $2n - 1$ μή μηδενικών Μαρκοβιανών παραμέτρων, \mathbf{M}_j , του γραμμικού μοντέλου, από τις ακόλουθες επαναληπτικές σχέσεις

$$\mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) := \mathbf{L}_1(\mathbf{x})$$

και

$$\mathbf{Z}_k(\mathbf{x}) := (-1)^{k-1} \left\{ \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{k-j-1} L_{g_0}^j \left\{ \mathbf{Z}_{k-j}(\mathbf{x}) \right\} \right\}, \quad 2 \leq k \leq 2n-1 \quad (2.4-15)$$

Απόδειξη (Θεωρήματος 2.4.2). Η πρώτη εξίσωση του θεωρήματος 2.4.1., έχει ειδη αποδειχτεί. Προκειμένου να αποδείξουμε τη δεύτερη εξίσωση του Θεωρήματος 2.4.1., θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.4.2. Οι ακόλουθες εξισώσεις

$$d \left(L_{g_0}^{k-1} \phi \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{k-j-1} L_{g_0}^{k-j-1} \left\{ d(\phi) ad_{g_0}^j \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right\}$$

ισχύουν για $k \geq 1$.

Συνδυάζοντας τη σχέση του Λήμματος 2.4.2. με την εξίσωση (2.4-10b) και λύνοντας τις απορρέουσες εξισώσεις ως προς $d(\phi) ad_{g_0}^{k-1} \mathbf{G}(\mathbf{x})$ προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$d \begin{pmatrix} \phi \end{pmatrix} a d_{g_0}^{k-1} G(x) = Z_k(x) \quad , \quad k \in J_{2n-1}$$

Τέλος, ομαδοποιώντας κατάλληλα τις πιο πάνω εξισώσεις, απορρέει εύκολα η δεύτερη των εξισώσεων (2.4-12) του Θεωρήματος 2.4.1. ■

Αξίζει να σημειωθεί ότι προκειμένου να καθοριστούν οι πίνακες $B(x)$ και $a(x)$, αρκεί να λυθούν οι Σχεδιαστικές εξισώσεις ακριβούς ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο (*Linear Exact Model Matching Equations*) (2.4-12) για $L_0(x)$ και $\phi(x)$. Απαξ και καθοριστούν οι πίνακες $L_0(x)$ και $\phi(x)$, οι πίνακες $B(x)$ and $a(x)$ μπορούν να καθοριστούν από την ακόλουθη σχέση

$$B(x) = L_0^{-1}(x) \tag{2.4-16a}$$

και

$$a(x) := B(x)\phi(x) = L_0^{-1}(x)\phi(x) \tag{2.4-16b}$$

2.4.2. Ικανές και Αναγκαίες συνθήκες

Βασιζόμενοι τώρα, στις Σχεδιαστικές Εξισώσεις Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο (2.4-12) θα βρούμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα του ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο. Αυτές οι συνθήκες βασίζονται στην επιλυσιμότητα των εξισώσεων (2.4-12) ως προς $B(x)$ και $\phi(x)$ και δίνονται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.2. Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη λύση του προβλήματος του ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο, μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής (2.3-1) για την κλάση των συστημάτων της μορφής (2.2-1), με $\text{rank} [B_0^*(x)] = m$, είναι

$$1) (d_i)_{(s)} = (d_i)_{(M)} \text{ for } i \in \mathbb{J}_p$$

$$2) \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{B}^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$$

$$3) \dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$$

όπου, $\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ δηλώνει το "involutive closure" της κατανομής που παράγεται από τις στήλες του $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2., χρησιμοποιήθηκε το πιο κάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.4.3. Η πρώτη τάξης μερική διαφορική εξίσωση

$$d(\phi) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{2.4-17}$$

έχει μια λύση για $\phi(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$, αν και μόνον αν

$$\dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$$

2.4.3. Χαρακτηρισμός του νόμου ελέγχου

Στη συνέχεια υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.1., θα κατασκευάσουμε τη γενική λύση των εξισώσεων (2.4-12). Η κατασκευή της γενικής λύσης των Σχεδιαστικών εξισώσεων του Ακριβούς Ταίριασματος σε Γραμμικό Πρότυπο (2.4-12) (*Linear Exact Model Matching Equations*), ως προς $\phi(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, διευκολύνεται με τη χρήση του πιο κάτω Λήμματος.

Λήμμα 2.4.4. Ισχύει η ακόλουθη συνθήκη

$$\text{inv} \left[G(x) \parallel ad_{g_0} G(x) \parallel \dots \parallel ad_{g_0}^{n-1} G(x) \right] = \text{inv} \left[G(x) \parallel ad_{g_0} G(x) \parallel \dots \parallel ad_{g_0}^{n-1} G(x) \parallel ad_{g_0}^n G(x) \parallel \dots \right] \quad (2.4-18)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.4.4., συμπεραίνουμε ότι αν ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2., τότε η γενική λύση της δεύτερης των εξισώσεων του Θεωρήματος 2.4.1. οδηγεί στη λύση της ακόλουθης εξίσωσης

$$d(\phi) \tilde{Q}(x) = \tilde{Z}(x) \quad (2.4-19)$$

οπου

$$\tilde{Q}(x) = \left[G(x) \parallel ad_{g_0} G(x) \parallel \dots \parallel ad_{g_0}^{n-1} G(x) \right] \quad (2.4-20a)$$

και

$$\tilde{Z}(x) = \left[Z_1(x) \parallel Z_2(x) \parallel \dots \parallel Z_n(x) \right] \quad (2.4-20b)$$

εφόσον για $k \geq n$, οι εξισώσεις του Θεωρήματος 2.4.2. είναι γραμμικά εξαρτημένες από τις πρώτες n εξισώσεις.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το Λήμμα 2.4.4. και το Θεώρημα 2.4.2. καταλήγουμε στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.3. Αν ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2., για την κλάση των μη γραμμικών συστημάτων της μορφής (2.2-1) με $\text{rank} \left[B_0^*(x) \right] = m$, τότε, η γενική λύση για το νόμο ελέγχου (2.3-1), η οποία επιλύει το πρόβλημα του ακριβούς ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο, υπολογίζεται λύνοντας, κατ' αρχήν τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς $B(x)$ και $\phi(x)$

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{x})$$

και

(2.4-21)

$$d\phi(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})$$

όπου οι πίνακες $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})$ και $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})$ δίνονται από τις σχέσεις (2.4-20a και b) αντίστοιχα.

Αφού υπολογίσουμε το $\phi(\mathbf{x})$ (2.4-21), τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ θα δίνονται τελικά από τις σχέσεις

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0^{-1}(\mathbf{x})$$

και

(2.4-22)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})$$

2.5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό αναπτύξαμε την τεχνική επίλυσης του προβλήματος του Ακριβούς Ταίριασματος μιας κλάσης Μη Γραμμικών Συστημάτων σε Γραμμικό Πρότυπο η οποία παρουσιάζεται στη διδακτορική διατριβή [19]. Το πρόβλημα αυτό ανάχθηκε στην επίλυση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που ονομάστηκαν *Σχεδιαστικές Εξισώσεις Ακριβούς Ταίριασματος σε Γραμμικό Πρότυπο*. Με βάση τις εξισώσεις αυτές προσδιορίστηκαν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το πρόβλημα του Ακριβούς Ταίριασματος σε Γραμμικό Πρότυπο να έχει λύση και ταυτόχρονα χαρακτηρίστηκε ο στατικός νόμος ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει το ταίριασμα στο γραμμικό πρότυπο. Σημειώνουμε βέβαια ότι η επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων αυτής της μορφής μπορεί να αποτελεί ένα πολύ δύσκολο

υπολογιστικά πρόβλημα. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε μπορεί να δώσει σαν ειδική περίπτωση τα αποτελέσματα του ταιριάσματος σε πρότυπο γραμμικών συστημάτων που παρουσιάζεται στις εργασίες [17] και [18].

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε έχει επεκταθεί για την επίλυση του προβλήματος της αποκοπής διαταραχών μη γραμμικών συστημάτων με ταυτόχρονη επίτευξη του ακριβούς ταιριάσματος σε γραμμικό πρότυπο [19]. Επίσης, η μεθοδολογία αυτή επεκτάθηκε ώστε να επιλύσει το πρόβλημα της γραμμικοποίησης εισόδου εξόδου μη γραμμικών συστημάτων μιας εισόδου μιας εξόδου [23].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΕΣΤΡΑΜΜΕΝΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ ΠΟΥ ΟΔΗΓΕΙΤΑΙ ΑΠΟ DC ΚΙΝΗΤΗΡΑ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

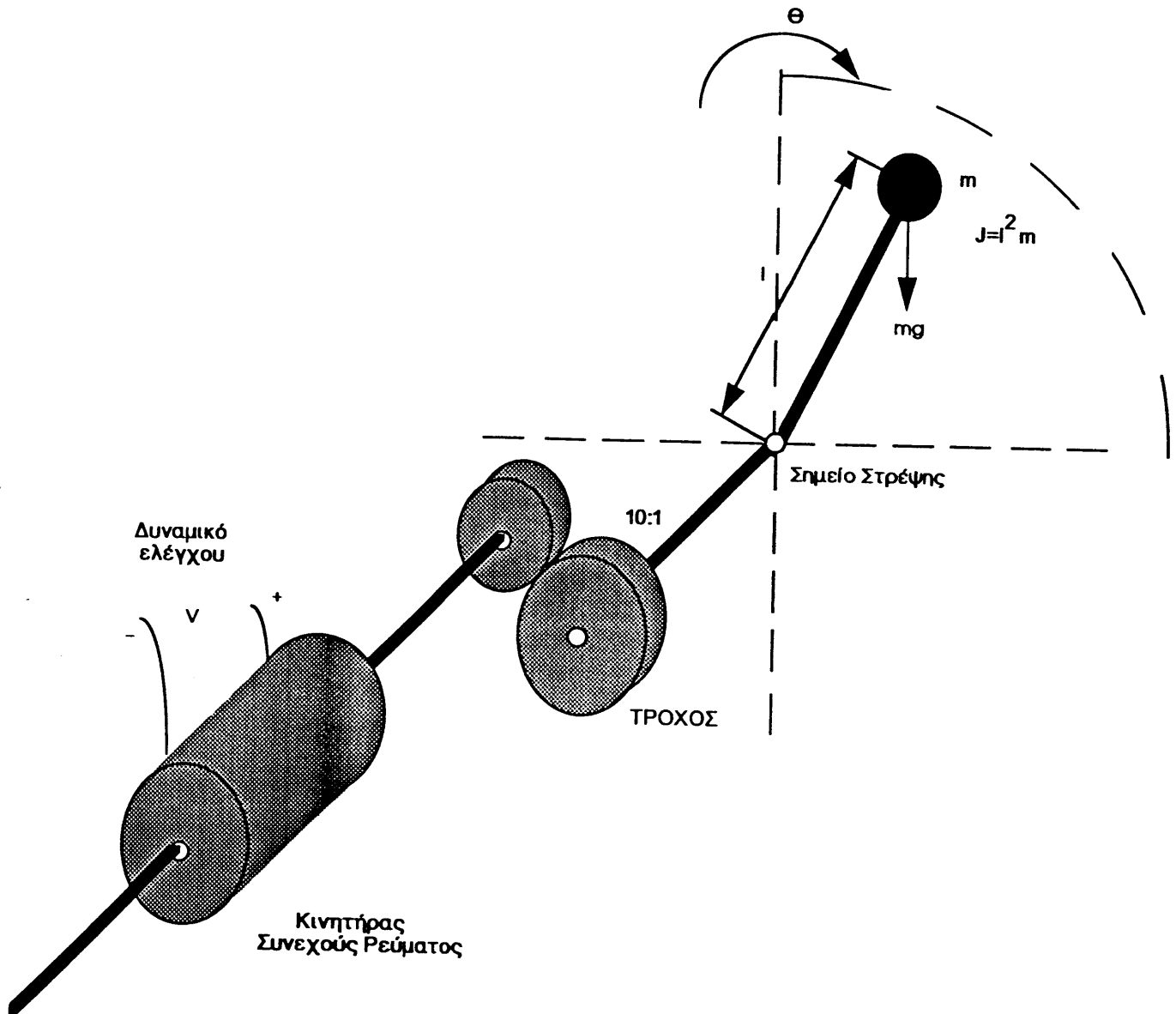
Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ένα αντεστραμμένο εκκρεμές του οποίου η τροφοδότηση κι ο έλεγχος γίνεται μέσω ενός κινητήρα συνεχούς ρεύματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1.

Βασικός στόχος ελέγχου του συστήματος αυτού είναι ο έλεγχος της γωνιακής ταχύτητας και της θέσης του Εκκρεμούς.

Μια διαδομένη τεχνική ελέγχου του Αντεστραμμένου Εκκρεμούς συνίσταται κατ' αρχήν στη γραμμικοποίηση του συστήματος μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης [24] και στη συνέχεια, εφαρμογή ενός γραμμικού νόμου ελέγχου (γνωστός από τη βιβλιογραφία) για την επίτευξη κάποιων προδιαγραφών, όπως για παράδειγμα η ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής [19], για την επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος του αντεστραμμένου εκκρεμούς σε ένα γραμμικό

πρότυπο. Στη συνέχεια, για το γραμμικοποιημένο σύστημα, σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου ο οποίος επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

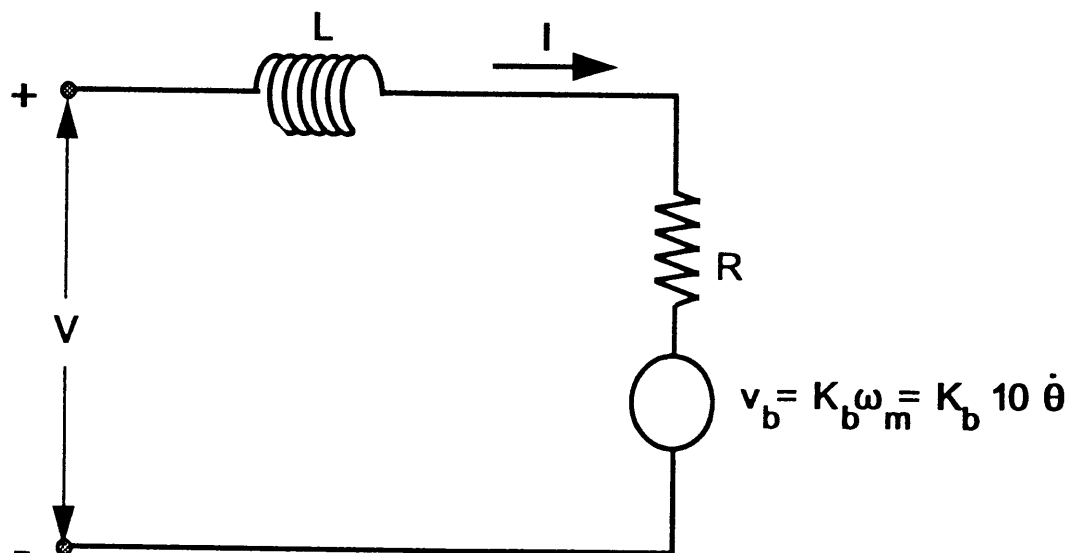


Σχημα 3.1.1. Αντεστραμμένο Εκκρεμές, ελεγχόμενο από DC Κινητήρα [24].

3.2. ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΑΝΤΕΣΤΡΑΜΜΕΝΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ ΠΟΥ ΟΔΗΓΕΙΤΑΙ ΑΠΟ DC ΚΙΝΗΤΗΡΑ

3.2.1. Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα

Υποθέτουμε ότι ο κινητήρας λειτουργεί με τον τρόπο που λειτουργεί μία γεννήτρια. Δηλαδή το ρεύμα αναπτύσσεται μέσω της περιστροφής του σπλισμού του ρότορα σε μαγνητικό πεδίο. Επίσης, υποθετικά αγνοούμε την αδράνεια του κινητήρα, εφόσον είναι αμεληταία σε σύγκριση με την αδράνεια του εκκρεμούς. Αυτός ο κινητήρας συνεχούς ρεύματος, μπορεί να αναπαρασταθεί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.2.



Σχήμα 3.1.2. Μοντέλο του DC κινητήρα ελεγχόμενο μέσω του σπλισμού του ρότορα.

(Armature-Controlled DC motor) [24].

Η ροπή στρέψης που αναπτύσσεται από τον κινητήρα είναι ανάλογη του ρεύματος που αναπτύσσεται σ' αυτόν και δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$T_m = K_m I, \quad (3.2-1)$$

εφόσον το ρεύμα που αναπτύσσεται στο ρότορα είναι σταθερό, όπου K_m είναι μια σταθερά.

Αν λάβουμε υπ' όψη μας ότι η αναλογία των μαγνητικών ροών μεταξύ του στάτορα και του ρότορα είναι 1/10. όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.1., η ροπή στρέψης που παράγεται στο εκκρεμές, δηλαδή στο ρότορα, θα δίνεται από τη σχέση

$$T_p = - 10T_m = - 10K_m I \quad (3.2-2)$$

Θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν αποσβέσεις στη μετάδοση μέσω των γραναζιών, το δυναμικό που παράγεται από τον κινητήρα συνεχούς ρεύματος (σχήμα 3.2), δίνεται από το νόμο τάσεων του Kirchoff ως εξής

$$V = LI^{(1)} + RI + K_b 10\theta^{(1)} \quad (3.2-3)$$

Η περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$T_p = - I^2 m \theta^{(2)} + I m g \sin \theta \quad (3.2-4)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα που προαναφέρθηκε είναι οι ακόλουθες:

$$\theta^{(1)} = \omega \quad (3.2-5)$$

$$\omega^{(1)} = \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{10K_m}{l^2} I \quad (3.2-6)$$

Η οποία τελευταία εξίσωση απορρέει από τη λύση των εξισώσεων (3.2-2), (3.2-4), (3.2-5), ως προς $\dot{\omega}$.

$$I^{(1)} = -\frac{10K_v}{L} \omega - \frac{R}{L} I + \frac{1}{L} V \quad (3.2-7)$$

Η οποία απορρέει από την εξίσωση (3.2-3).

3.2.2. Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης

Ορίζουμε ως μεταβλητές κατάστασης τις ακόλουθες: Τη γωνία απόκλισης του Αντεστραμμένου Εκκρεμούς από τον κατακόρυφο άξονα, την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Εκκρεμούς και το ρεύμα που αναπτύσσεται στον Κινητήρα, λόγω του δυναμικού εισόδου V

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \omega, \quad x_3 = I \quad (3.2-8)$$

Ως είσοδο του μοντέλου θεωρούμε το δυναμικό που ελέγχει τον κινητήρα συνεχούς τάσης

$$u = V \quad (3.2-9)$$

Ως έξοδο παίρνουμε τη γωνία απόκλισης του αντεστραμμένου εκκρεμούς από τον κατακόρυφο άξονα, η οποία είναι η μεταβλητή που επιθυμούμε να ελέγξουμε

$$h(x) = x_1 = \theta \quad (3.2-10)$$

Με συνδυασμό των εξισώσεων (3.2-1) - (3.2-7) και των (3.2-8) - (3.2-10), φτάνουμε στην ακόλουθη μορφή του συστήματος των εξισώσεων κατάστασης που περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς ο οποίος ελέγχεται από τον DC κινητήρα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2-11)$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

όπου:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{L} \sin(x_1) + 10 \frac{K_m}{l^2 m} x_3 \\ -\frac{10 K_b}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix},$$

και

$$h(\mathbf{x}) = x_1$$

Για ευκολία στην αναπαράσταση του μοντέλου, κάνουμε τον ακόλουθο επαναορισμό των σταθερών παραμέτρων

$$K_1 = \frac{g}{L}, \quad K_2 = \frac{10K_m}{l^2 m}, \quad K_3 = -\frac{10 K_b}{L}, \quad (3.2-12)$$

$$K_4 = -\frac{R}{L} \quad \text{και} \quad K_5 = \frac{1}{L}$$

όπου οι σταθερές K_i για $i = 1, 2, \dots, 5$ είναι προφανώς διάφορες του μηδενός εφόσον παριστάνουν φυσικές σταθερές.

Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (3.2-12) στο σύστημα (3.2-11), οι εξισώσεις κατάστασης που περιγράφουν το σύστημα παίρνουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

και

(3.2-13)

$$y = h(\mathbf{x})$$

όπου

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ K_1 \sin(x_1) + K_2 x_3 \\ K_3 x_2 + K_4 x_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_5 \end{bmatrix}.$$

$$u = V$$

και

$$h(\mathbf{x}) = x_1$$

3.3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΑΝΤΕΣΤΡΑΜΜΕΝΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

Από την ανάλυση του μοντέλου, είναι φανερό ότι το μοντέλο του κινητήρα συνεχούς ρεύματος ο οποίος ελέγχει την κίνηση του αναποδογυρισμένου εκκρεμούς

περιγράφει μια υψηλά μη γραμμική διαδικασία. Επομένως, η εύρεση της απόκρισης του συστήματος είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα. Από την πλευρά του Αυτομάτου Ελέγχου, είναι φανερό επίσης ότι είναι πολύ δύσκολο να σχεδιαστεί νόμος ελέγχου για τη ικανοποίηση των προδιαγραφών που θα θέλαμε να παρουσιάζει το σύστημα.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του ελέγχου της ταλάντωσης του εκκρεμούς μέσω του DC κινητήρα, είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να βρούμε νόμο ελέγχου βασισμένο στο μη γραμμικό σύστημα που να πετυχαίνει την παρακολούθηση μιας επιθυμητής τροχιάς για τη γωνία απόκλισης του αναποδογυρισμένου εκκρεμούς από τον κατακόρυφο άξονα. Στόχος μας δηλαδή είναι είτε ο έλεγχος της ταλάντωσης του εκκρεμούς, έτσι ώστε αυτή να είναι μια περιοδική ταλάντωση και η τιμή του πλάτους της ταλάντωσης να κυμαίνεται μεταξύ κάποιων ορίων, είτε να διατηρείται το εκκρεμές στην κατακόρυφη θέση.

Για τους προαναφερθέντες λόγους, είναι λογικό να αναζητήσουμε πρώτα την ύπαρξη ενός νόμου ελέγχου ο οποίος θα απλοποιεί το αρχικό μη γραμμικό σύστημα. Με τον όρο απλοποίηση εννοούμε τη δυνατότητα το κλειστό σύστημα που θα προκύψει να έχει μια γραμμική περιγραφή εισόδου - εξόδου. Αν αυτό είναι δυνατό, είναι φανερό ότι ο περαιτέρω έλεγχος του συστήματος απλοποιείται πάρα πολύ επειδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολύ γνωστές μεθόδους σχεδίασης από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων.

3.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

3.4.1. Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών

Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του συστήματος (3.2-13), που ορίζονται στις σχέσεις (2.4-1), είναι

$$L_g L_{g_0}^0 h(\mathbf{x}) = L_g x_1 = 0$$

$$L_g L_{g_0}^1 h(\mathbf{x}) = L_g L_{g_0} x_1 = L_g x_2 = 0$$

(3.4-1)

$$\begin{aligned} L_g L_{g_0}^2 h(\mathbf{x}) &= L_g L_{g_0} x_1 = L_g \left(k_1 \sin(x_1) + k_2 x_3 \right) = \\ &= \left[k_1 \cos(x_1), 0, k_2 \right] g(\mathbf{x}) = k_2 k_5 \neq 0 \end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι η πρώτη μη μηδενική Μαρκοβιανή παράμετρος του συστήματος (3.2-13) μιας εξόδου, είναι η $L_g L_{g_0}^2 h(\mathbf{x})$, και χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.4.1., συμπεραίνουμε ότι ο χαρακτηριστικός αριθμός του αρχικού ανοικτού συστήματος είναι

$$d_A = 2, \tag{3.4-2}$$

ο οποίος είναι πεπερασμένος.

Από τον ορισμό του πίνακα $\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x})$, που δίνεται στη σχέση (2.4-5c), βρίσκουμε ότι αυτός θα έχει την ακόλουθη μονοδιάστατη μορφή.

$$\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = L_g L_{g_0}^2 h(\mathbf{x}) = k_2 k_5 \tag{3.4-3}$$

3.4.2. Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου

Το αντεστραμμένο εκκρεμές περιγράφεται με ένα μοντέλο το οποίο ανήκει στην κλάση των συστημάτων που εξετάζει η θεωρία του Κεφαλαίου 2, εφόσον ισχύει

$$\beta = \text{rank} \left(\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right) = 1$$

και

(3.4-4)

$$m = 1$$

οπότε

$$\beta = \text{rank} \left(\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right) = m = 1$$

3.4.3. Επιλογή του γραμμικού προτύπου για το σύστημα ελέγχου του εκκρεμούς

Θεωρούμε το γραμμικό, χρονικά μη μεταβαλλόμενο σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_M \mathbf{z} + \mathbf{b}_M w \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

(3.4-5)

$$y_M = \mathbf{c}_M \mathbf{z}$$

όπου

$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_M = [\alpha \ 0 \ 0]$$

όπου $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του είναι της ακόλουθης μορφής

$$H_M(s) = \mathbf{c}_M (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_M)^{-1} \mathbf{b}_M = \frac{\alpha}{s^3 - f_3 s^2 - f_2 s - f_1} \quad (3.4-6)$$

Σημειώνεται ότι το πρότυπο που διαλέξαμε είναι ένα σύστημα 3ης τάξης με αυθαίρετους πόλους, εφόσον οι συντελεστές f_1, f_2, f_3 του χαρακτηριστικού του πολωνύμου είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί.

Τώρα, θα βρούμε τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του προτύπου,

χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.4.2, εφόσον έχουμε την περιγραφή του στο χώρο κατάστασης.

Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του προτύπου είναι

$$c_M A_M^0 b_M = c_M b_M = 0$$

$$c_M A_M^1 b_M = c_M A_M b_M = 0$$

$$c_M A_M^2 b_M = \alpha \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη μη μηδενική "Μαρκον" παράμετρος του προτύπου είναι η $c_M A_M^2 b_M$. Επομένως για το πρότυπο (3.4-5) μιας εισόδου - μιας εξόδου, ο χαρακτηριστικός αριθμός d_M , σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.2., είναι

$$d_M = 2 \tag{3.4-7}$$

Σημειώνεται ότι ο χαρακτηριστικός αριθμός d_M εξάγεται επίσης από τη συνάρτηση μεταφοράς, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο σχετικός βαθμός $r \triangleq d_M + 1$ απεικονίζει τη διαφορά του βαθμού του πολυωνύμου του αριθμητή από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή της $H_M(s)$.

Επομένως, ο μονοδιάστατος πίνακας M_0 , που δίνεται από τη σχέση (2.4-5b), είναι

$$M_0 = c_M A_M^2 b_M = \alpha \neq 0 \tag{3.4-8}$$

3.4.4. Ελεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών

- Συνθήκη 1

Από τη σύγκριση του χαρακτηριστικού αριθμού του αρχικού ανοικτού συστήματος d_A (3.4-2) με τον χαρακτηριστικό αριθμό του προτύπου d_M (3.4-7), παρατηρούμε ότι $d_A = d_M = 2$. Επομένως, επαληθεύεται η πρώτη των συνθηκών του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 2

Η δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2. για το συγκεκριμένο μοντέλο του αντεστραμμένου εκκρεμούς που ελέγχεται μέσω ενός κινητήρα συνεχούς ρεύματος, για το οποίο μοντέλο ισχύει $p = m$ (αριθμός εξόδων = αριθμός εισόδων), είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = m \quad (3.4-9)$$

Από τις σχέσεις (3.4-3) και (3.4-8), έχουμε αντίστοιχα:

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \left[k_2 k_5 \right] = 1 \quad (3.4-10)$$

$$\text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = \text{rank} \left[\alpha \right] = 1$$

Επομένως, επαληθεύεται και η δεύτερη των συνθηκών του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 3

Για να εξετάσουμε την ισχύ της τρίτης συνθήκης, αρκεί να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$ και μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{array} \right]$.

Μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$, υπολογίζεται βρίσκοντας κατ' αρχήν τις

γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του $Q(x)$, ο οποίος ορίζεται στην (2.4-13a) και έχει τη μορφή

$$Q(x) = \left[g(x) \parallel \text{ad}_{g_0} g(x) \parallel \text{ad}_{g_0}^2 g(x) \parallel \text{ad}_{g_0}^3 g(x) \parallel \text{ad}_{g_0}^4 g(x) \right] \quad (3.4-11)$$

Η τάξη του πίνακα αυτού είναι 3, εφόσον ισχύουν τα ακόλουθα:

Το διάνυσμα

$$\text{ad}_{g_0} g(x) = \left[g_0(x) \cdot g(x) \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 k_5 \\ -k_4 k_5 \end{bmatrix}, \quad (3.4-12)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο του $g(x)$ και το διάνυσμα

$$\text{ad}_{g_0}^2 g(x) = \left[g_0(x) \cdot \left[g_0(x) \cdot g(x) \right] \right] = \begin{bmatrix} k_2 k_5 \\ k_2 k_4 k_5 \\ -k_2 k_3 k_5 + k_4^2 k_5 \end{bmatrix} \quad (3.4-13)$$

είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο των $g(x)$ και $\text{ad}_{g_0} g(x)$.

Άρα,

$$\text{rank} [Q(x)] = \text{rank} \left[g(x) \parallel \text{ad}_{g_0} g(x) \parallel \text{ad}_{g_0}^2 g(x) \right] =$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_2 k_5 \\ 0 & -k_2 k_5 & k_2 k_4 k_5 \\ K_5 & -k_4 k_5 & -k_2 k_3 k_5 + k_4^2 k_5 \end{bmatrix} = 3 = n \quad (3.4-14)$$

Ο χώρος που παράγεται από τις στήλες $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ και $\text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x})$ είναι involutive εφόσον είναι προφανές ότι ισχύει

$$[\tau, \sigma] \in \text{span} \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\}$$

για $\tau, \sigma \in \text{span} \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\}$

Επομένως, ο χώρος $\text{inv} [\mathbf{Q}(\mathbf{x})]$, δίνεται από τη σχέση

$$\text{inv} [\mathbf{Q}(\mathbf{x})] = \text{span} \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.4-15)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4-14) και (3.4-15) έχουμε ότι

$$\dim \left\{ \text{inv} [\mathbf{Q}(\mathbf{x})] \right\} = 3 \quad (3.4-16)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, θα υπολογίσουμε κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, ο ορισμός του οποίου δίνεται στη σχέση (2.4-15) και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^3 \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^4 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_4(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_5(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.4-17)$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα που δίνεται στην (3.4-17) είναι οι ακόλουθες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{K}_5 \\ -\frac{k_2 k_5}{a} (f_3 - k_4) \end{bmatrix} \quad (3.4-18a)$$

$$\begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 k_5 \\ -k_4 k_5 \\ -\frac{k_2 k_5}{a} (f_2 + f_3 k_4 - k_1 \cos x_1 - k_2 k_3 - k_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.4-18b)$$

και

$$\begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 k_5 \\ k_2 k_4 k_5 \\ -k_2 k_3 k_5 + k_4^2 k_5 \\ \frac{k_2 k_5}{a} (f_1 - 2k_2 k_3 k_4 - k_4^3 + k_2 k_3 f_3 + k_4^2 f_3 + f_2 k_4 + k_1 x_2 \sin x_1 - k_1 k_4 \cos x_1 + k_1 f_3 \cos x_1) \end{bmatrix} \quad (3.4-18c)$$



όπου για τον υπολογισμό των $Z_i(x)$ για $i = 1, 2, 3$, υπολογίστηκαν πρώτα οι "Μαρκον" παράμετροι $B_i^*(x)$, $M_i(x)$ και στη συνέχεια τα $L_0(x)$, $L_i(x)$, $Z_i(x)$, για $i = 1, 2, 3$, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Από την επαναληπτική σχέση (2.4-5c), για τις πρώτες μη μηδενικές Μαρκοβιανές $B_i^*(x)$, υπολογίστηκαν οι πίνακες αυτοί για $i = 1, 2, 3$.

$$B_1^*(x) = L_g L_{g_1}^3 \tilde{h}(x) = L_g \left(k_1 x_2 \cos(x_1) + k_2 k_3 x_2 + k_2 k_4 x_3 \right) = k_2 k_4 k_5 \quad (3.4-19a)$$

$$B_2^*(x) = L_g L_{g_0}^4 h(x) = L_g \left(-k_1 x_2^2 \sin x_1 + (k_1 \sin x_1 + k_2 x_3)(k_1 \cos x_1 + k_2 k_3) + \right. \\ \left. - k_2 k_3 k_4 x_2 + k_2 k_4^2 x_3 \right) = k_2 k_5 (k_1 \cos x_1 + k_2 k_3 + k_4^2) \quad (3.4-19b)$$

$$B_3^*(x) = L_g L_{g_0}^5 \tilde{h}(x) = L_g \left(-k_1 x_2^3 \cos x_1 - k_1^2 x_2 \sin^2 x_1 + k_1^2 x_2 \cos^2 x_1 - k_1 k_2 x_2 x_3 \sin x_1 + \right. \\ \left. - k_1 k_2 k_3 x_2 \cos x_1 + (k_2 k_3 k_4 - 2k_1 x_2 \sin x_1)(k_1 \sin x_1 + k_2 x_3) + \right. \\ \left. - (k_3 x_2 + k_4 x_3)(k_1 k_2 \cos x_1 + k_2^2 k_3 + k_2 k_4^2) \right) \quad (3.4-19c)$$

Από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-5b) υπολογίστηκαν τα M_i για $i = 1, 2, 3$

$$M_1 = c_M A_M^3 b_M = \alpha f_3$$

$$M_2 = c_M A_M^4 b_M = \alpha (f_2 + f_3^2) \quad (3.4-20)$$

$$M_3 = c_M A_M^5 b_M = \alpha (f_1 + 2f_2 f_3 + f_3^3)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την επαναληπτική σχέση (2.4-11), βρήκαμε το $L_0(\mathbf{x})$, το οποίο έχει τη μορφή

$$L_0(\mathbf{x}) = M_0^{-1}B_0^*(\mathbf{x}) = \frac{k_2 k_5}{\alpha} \quad (3.4-21)$$

όπου θέσαμε στην (2.4-11) $P_0 = 1$.

Από τη σχέση (2.4-10a), βρήκαμε τον πίνακα $B^{-1}(\mathbf{x})$ του νόμου ανατροφοδότησης (2.3-1), ο οποίος έχει τη μορφή

$$B^{-1}(\mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}) = \frac{k_2 k_5}{\alpha} \quad (3.4-22)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.4-19) και (3.4-22) στις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-11), υπολογίσαμε τα $L_i(\mathbf{x})$, για $i = 1, 2, 3$, και πήραμε

$$L_1(\mathbf{x}) = M_0^{-1} \left(M_1 B^{-1}(\mathbf{x}) - B_1^*(\mathbf{x}) \right) = \frac{k_2 k_5}{\alpha} (f_3 - k_4) \quad (3.4-23a)$$

$$\begin{aligned} L_2(\mathbf{x}) &= M_0^{-1} \left(M_2 B^{-1}(\mathbf{x}) - B_2^*(\mathbf{x}) - M_1 L_1(\mathbf{x}) \right) = \\ &= \frac{k_2 k_5}{\alpha} (f_2 + f_3 k_4 - k_1 \cos x_1 - k_2 k_3 - k_4^2) \end{aligned} \quad (3.4-23b)$$

$$\begin{aligned} L_3(\mathbf{x}) &= M_0^{-1} \left(M_3 B^{-1}(\mathbf{x}) - B_3^*(\mathbf{x}) - M_1 L_2(\mathbf{x}) - M_2 L_1(\mathbf{x}) \right) = \\ &= \frac{k_2 k_5}{\alpha} (f_1 - k_2 k_3 k_4 - k_4^3 + k_2 k_3 f_3 + k_4^2 f_3 + f_2 k_4 + 3k_1 x_2 \sin x_1 - \\ &\quad - k_1 k_4 \cos x_1 + k_1 f_3 \cos x_1) \end{aligned} \quad (3.4-23c)$$

Τελικά, από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-15), βρήκαμε τα τρία πρώτα

στοιχεία του πίνακα $Z(x)$ που ορίζεται στη σχέση (2.4-13b), τα οποία έχουν τη μορφή

$$Z_1(x) = L_1(x) = -\frac{k_2 k_5}{\alpha}(f_3 - k_4) \quad (3.4-24a)$$

$$Z_2(x) = -L_2(x) + L_{g_0} Z_1(x) = -\frac{k_2 k_5}{\alpha}(f_2 + f_3 k_4 - k_1 \cos x_1 - k_2 k_3 - k_4^2) \quad (3.4-24b)$$

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= L_3(x) + 2L_{g_0} Z_2(x) - L_{g_0}^2 Z_1(x) = \\ &= \frac{k_2 k_5}{\alpha}(f_1 - 2k_2 k_3 k_4 - k_4^3 + k_2 k_3 f_3 + k_4^2 f_3 + f_2 k_4 + k_1 x_2 \sin x_1 - \\ &\quad - k_1 k_4 \cos x_1 + k_1 f_3 \cos x_1) \end{aligned} \quad (3.4-24c)$$

Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα

$$\text{span} \left\{ \begin{array}{c} Q(x) \\ Z(x) \end{array} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} g(x) \\ Z_1(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} a d_{g_0} g(x) \\ Z_2(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} a d_{g_0}^2 g(x) \\ Z_3(x) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (3.4-25)$$

όπου $\text{span}\{\Lambda(x)\}$ είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα $\Lambda(x)$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες

$$\left[\begin{array}{c} g(x) \\ Z_1(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} a d_{g_0} g(x) \\ Z_2(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} a d_{g_0}^2 g(x) \\ Z_3(x) \end{array} \right]$$

είναι involutive, εφόσον

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \sigma \end{bmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\}$$

για κάθε

$$\tau, \sigma \in \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\}$$

Συνεπώς, θα έχουμε

$$\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \text{span} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) \end{array} \right] \quad (3.4-26)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (3.4-26) και το γεγονός ότι οι στήλες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι

$$\dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = 3 \quad (3.4-27)$$

Τελικά από τις σχέσεις (3.4-16) και (3.4-27) συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη 3 του Θεωρήματος 2.4.2. ισχύει.

Επομένως το πρόβλημα του ταιριάσματος του μη γραμμικού συστήματος (3.2-13) στο γραμμικό πρότυπο (3.4-5) έχει λύση.

3.4.5. Ευρεση του νόμου ελέγχου

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.3., η λύση του προβλήματος ανάγεται στη λύση των ακόλουθων εξισώσεων.

$$B^{-1}(x) = L_0(x) \quad (3.4-28a)$$

$$d\phi(x)\tilde{Q}(x) = \tilde{Z}(x) \quad (3.4-28b)$$

όπου οι πίνακες $\tilde{Q}(x)$ και $\tilde{Z}(x)$ που ορίζονται στις (2.4-20a) και (2.4-20b) αντίστοιχα, έχουν υπολογιστεί στην παράγραφο 3.4.4. και είναι

$$\tilde{Q}(x) = \begin{bmatrix} g(x) & \vdots & \text{ad}_{g_0} g(x) & \vdots & \text{ad}_{g_0}^2 g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_2 k_5 \\ 0 & -k_2 k_5 & k_2 k_4 k_5 \\ k_5 & k_4 k_5 & k_2 k_3 k_5 + k_4^2 k_5 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(x) = \begin{bmatrix} Z_1 & \vdots & Z_2 & \vdots & Z_3 \end{bmatrix} = \frac{k_2 k_5}{\alpha} \left[(f_3 - k_4) \vdots -f_2 - f_3 k_4 + k_1 \cos x_1 + k_2 k_3 + \right. \\ \left. + k_4^2 \vdots f_1 - 2k_2 k_3 k_4 - k_4^3 + k_2 k_3 f_3 + k_4^2 f_3 + f_2 k_4 + k_1 x_2 \sin x_1 - k_1 k_4 \cos x_1 \right. \\ \left. + k_1 f_3 \cos x_1 \right] \end{aligned}$$

Η εξίσωση (3.4-28a), επιλυόμενη ως προς $B(x)$, δίνει

$$B(x) = L_0^{-1}(x) \quad (3.4-29)$$

Ο πίνακας $\tilde{Q}(x)$ είναι τετραγωνικός. Επομένως, η εξίσωση (3.4-28b) έχει

μοναδική λύση ως προς $d\phi(\mathbf{x})$, που δίνεται από τη σχέση

$$d\phi(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.4-30)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{k_3}{k_5} & -\frac{k_4}{k_2 k_5} & \frac{1}{k_5} \\ \frac{k_4}{k_2 k_5} & -\frac{1}{k_2 k_5} & 0 \\ \frac{i}{k_2 k_5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από την (3.4-30), έχουμε

$$d\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} k_1 x_2 \sin x_1 + k_1 f_3 \cos x_1 + f_1 + f_3^2 - f_3^3 \vdots f_2 - k_1 \cos x_1 - k_2 k_3 \vdots \\ k_2 k_3 - k_2 k_4 \end{bmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας το διαφορικό $d\phi$ ως προς \mathbf{x} , θα έχουμε

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \left[\int_{x_1=c_1}^{x_1(x_2=c_2, x_3=c_3)} (k_1 x_2 \sin x_1 + k_1 f_3 \cos x_1 + f_1 + f_3^2 - f_3^3) dx_1 - \int_{x_2=c_2}^{x_2(x_1=x_1, x_3=c_3)} (f_2 - k_1 \cos x_1 - k_2 k_3) dx_2 + \int_{x_3=c_3}^{x_3(x_1=x_1, x_2=x_2)} (k_2 k_3 - k_2 k_4) dx_3 \right]$$

ή

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \left(k_1 f_3 \sin x_1 + f_1 x_1 + f_3 x_1 - f_3 x_1 - k_1 x_2 \cos x_1 - k_2 k_3 x_2 + f_2 x_2 + k_2 f_3 x_3 - k_2 k_4 x_3 \right) \quad (3.4-31)$$

όπου θέσαμε τα κάτω όρια ολοκλήρωσης $c_i = 0$ για $i = 1, 2, 3$, εφόσον το σημείο $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ δεν είναι ιδιόμορφο.

Τα $a(x)$ και $B(x)$ του νόμου ελέγχου της μορφής

$$u = a(x) + B(x)w$$

δίνονται, το $B(x)$ από την (3.4-29), το $a(x)$ υπολογίζεται με αντικατάσταση του του $\phi(x)$ στην (2.4-22). Επομένως, το ζευγάρι $[a(x), B(x)]$, θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 B(x) &= L_0^{-1}(x) = \frac{\alpha}{k_2 k_5} \\
 a(x) &= B(x)\phi(x) = \frac{1}{k_2 k_5} \left(k_1 f_3 \sin x_1 + f_1 x_1 + f_3 x_1 - f_3 x_1 - \right. \\
 &\quad \left. k_1 x_2 \cos x_1 - k_2 k_3 x_2 + f_2 x_2 + k_2 f_3 x_3 - k_2 k_4 x_3 \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.4-32}$$

3.4.6. Ειδική λύση του προβλήματος του Ακριβούς Ταιριάσματος του συστήματος σε Γραμμικό Πρότυπο

Θεωρώντας το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα της μορφής (3.4-5), θέτουμε $f_i = 0$ για $i = 1, 2, 3$, οπότε οι πίνακες κατάστασης, εισόδου και εξόδου του προτύπου, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\tilde{A}_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c}_M = [1 \ 0 \ 0]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του νέου Γραμμικού Προτύπου είναι η ακόλουθη.

$$H_M(s) = \tilde{c}_M (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}_M = \frac{1}{s^3} \quad (3.4-33)$$

Επομένως, ο νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει το Ακριβές Ταιριασμα στο πρότυπο της μορφής (3.4-5) με $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, με τη βοήθεια των σχέσεων (3.4-29) της παραγράφου 3.4.5., λαμβάνει την ειδική μορφή

$$\hat{B}(x) = \frac{\alpha}{k_2 k_5} \quad (3.4-34)$$

$$\hat{a}(x) = -\frac{k_1}{k_2 k_5} x_2 \cos x_1 - \frac{k_3}{k_5} x_2 - \frac{k_4}{k_5} x_3$$

Σημειώνεται ότι η μορφή των $\{a(x), B(x)\}$ που οδηγούν στο πρότυπο (3.4-33) παράγεται και από τη Θεωρία της γραμμικοποίησης του συστήματος (3.2-13), χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του [Isidori].

3.5. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το πρότυπο είναι ένα γραμμικό σύστημα 3ης τάξης, ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, εφόσον ο πίνακας του ελέγξιμου

$$S \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{b}_M \\ A\tilde{b}_M \\ A^2\tilde{b}_M \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας του παρατηρήσιμου

$$R \triangleq \begin{bmatrix} c_M \\ c_M A_M \\ c_M A_M^2 \end{bmatrix}$$

είναι επίσης αντιστρέψιμος. Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι το πρότυπο είναι ελάχιστης τάξης και μάλιστα ίδιας τάξης με το ανοικτό μη γραμμικό σύστημα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχουν μη παρατηρήσιμες καταστάσεις στο κλειστό σύστημα. Έτσι, υπάρχει ένας 1-1 και αντιστρέψιμος μετασχηματισμός $x = F(z)$, που μπορεί να μας οδηγήσει από το κλειστό μη γραμμικό σύστημα στο γραμμικό πρότυπο.

Είναι σημαντικό επίσης να παρατηρήσουμε ότι εφόσον ο πίνακας A_M είναι σε κανονική μορφή φάσης, με τα f_1, f_2, f_3 , να είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, μπορούμε με κατάλληλη επιλογή των f_1, f_2, f_3 να τοποθετήσουμε αυθαίρετα τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος. Είναι προφανές λοιπόν ότι μπορούμε να ευσταθειοποιήσουμε το κλειστό σύστημα.

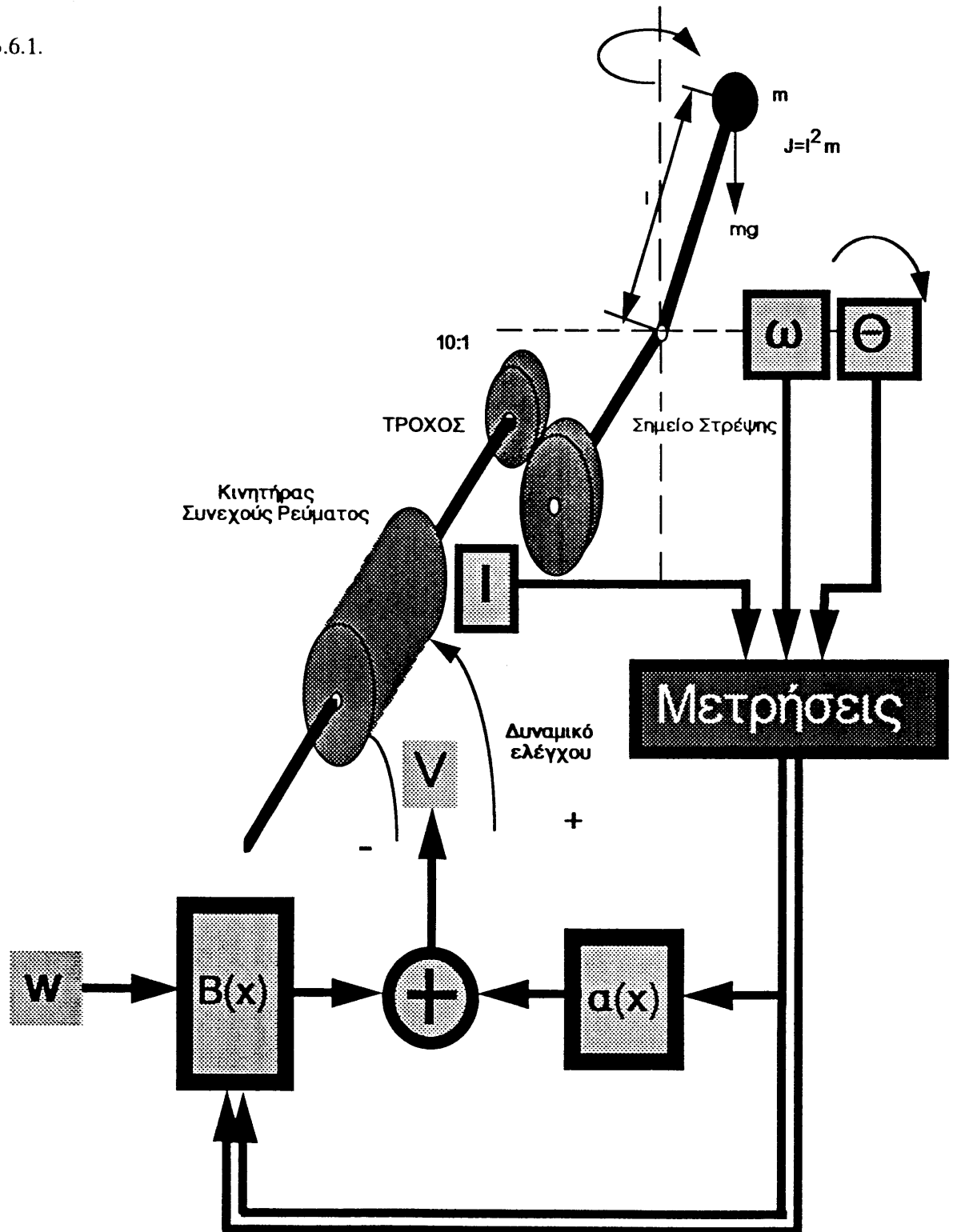
3.6. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Για την υλοποίηση του μη γραμμικού νόμου ελέγχου της μορφής

$$u = a(x) + B(x)w$$

όπου τα $a(x)$ και $B(x)$ δίνονται από τη σχέση (3.4-22), απαιτείται η μέτρηση του διανύσματος κατάστασης x ($x_1 = \theta, x_2 = \omega, x_3 = I$). Η γωνιακή ταχύτητα ω , μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια μια ταχομετρικής γεννήτριας και η θέση θ μπορεί να μετρηθεί με έναν μετρητή θέσης (codeur). Οι μη γραμμικές συναρτήσεις $a(x)$ και $B(x)$ μπορούν να υλοποιηθούν με έναν μικροεπεξεργαστή. Η σχηματική αναπαράσταση της υλοποίησης του νόμου ελέγχου του αντεστραμμένου εκκρεμούς δίνεται στο σχήμα

3.6.1.



Σχήμα 3.6.1. Υλοποίηση του νόμου ελέγχου που επιτυγχάνει το ταιριασμα της συμπεριφοράς του Αντεστραμμένου Εκκρεμούς, το οποίο οδηγείται από ένα DC κινητήρα, στη συμπεριφορά ενός Γραμμικού Προτύπου [24].

3.7. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ

Η απεικόνιση εισόδων – εξόδων του αρχικού μη γραμμικού συστήματος, μετά την εφαρμογή του νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης (2.3-1)

$$u = a(x) + B(x)w$$

έχει την ακόλουθη μορφή

$$y^{(3)} - f_3 y^{(2)} - f_2 y^{(1)} - f_1 y = aw \quad (3.7-1)$$

Εφόσον η περιγραφή εισόδων – εξόδων είναι γραμμική, είναι εύκολος ο σχεδιασμός ενός επιπλέον ρυθμιστή για την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

Ας υποθέσουμε ότι είναι επιθυμητό η έξοδος του συστήματος να παρακολουθεί την προκαθορισμένη τροχιά $y_d(t)$. Τότε, αν εφαρμόσουμε στο κλειστό σύστημα (3.2-13) τον ακόλουθο νόμο ελέγχου

$$w = \frac{1}{a} (y_d^{(3)} - f_3 y_d^{(2)} - f_2 y_d^{(1)} - f_1 y_d)$$

το κλειστό σύστημα που προκύπτει περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y^{(3)} - f_3 y^{(2)} - f_2 y^{(1)} - f_1 y = y_d^{(3)} - f_3 y_d^{(2)} - f_2 y_d^{(1)} - f_1 y_d$$

Η πιο πάνω σχέση μπορεί ισοδύναμα να γραφεί

$$e^{(3)} - f_3 e^{(2)} - f_2 e^{(1)} - f_1 e = 0 \quad (3.7-2)$$

όπου $e \triangleq y - y_d$ ορίζεται το σφάλμα ανάμεσα στην y και y_d . Δηλαδή το e εκφράζει την απόκλιση της απόκρισης y του κλειστού συστήματος, από την επιθυμητή τροχιά y_d . Η διαφορική εξίσωση (3.7-2) απεικονίζει την εξέλιξη του σφάλματος με το χρόνο. Η ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς επιτυγχάνεται όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - y_d(t) \right) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Αυτή η απαίτηση είναι δυνατόν να επιτευχθεί αν διαλέξουμε τα f_1, f_2, f_3 , έτσι ώστε η λύση για το $e(t)$ να είναι ευσταθής. Πράγματι, διαλέγοντας

$$f_3 < 0, \quad f_1 < 0 \quad \text{και} \quad f_2 f_3 + f_1 < 0 \quad \text{ή} \quad f_1 < 0, \quad f_2 < 0 \quad \text{και} \quad f_2 > \frac{1}{f_3}$$

χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας του Routh [20], [22] τότε η εξίσωση (3.7-2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Η πιο κάτω επιλογή των f_1, f_2, f_3 , οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθές σφάλμα για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $e(0) = y(0) - y_d(0)$ του σφάλματος.

3.8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό, μελετήθηκε ο έλεγχος της ταλάντωσης ενός αντεστραμμένου εκκρεμούς το οποίο οδηγείται από DC κινητήρα, το οποίο σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου περιγράφεται από τις μη γραμμικές εξισώσεις κατάστασης που δίνονται στη σχέση (3.2-11). Ο έλεγχος αυτός επιτεύχθηκε, μέσω της τεχνικής του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο.

Για το μη γραμμικό μοντέλο που περιγράφει την ταλάντωση ενός

αντεστραμμένου εκκρεμούς η οποία ελέγχεται από έναν DC κινητήρα, προσδιορίστηκε ο μη γραμμικός νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης

$$u = a(x) + B(x)w$$

ο οποίος δίνεται από τις σχέσεις (3.4-32) και οδηγεί σε ένα σύστημα του οποίου η περιγραφή εισόδων - εξόδων "ταιριάζει" με την γραμμική περιγραφή εισόδων - εξόδων του Γραμμικού Προτύπου (3.4-5).

Συγκεκριμένα, για το σύστημα αυτό:

- α) Καθορίστηκαν οι στόχοι ελέγχου,
- β) Επιλέχθηκε το Γραμμικό Πρότυπο,
- γ) Αποδείχθηκε ότι το Ακριβές Ταιρίασμα σε Γραμμικό Πρότυπο είναι πάντα εφικτό, με ανατροφοδότηση του διανύσματος κατάστασης,
- δ) Προσδιορίστηκε η γενική λύση του μη γραμμικού νόμου ανατροφοδότησης.
- ε) Προσδιορίστηκε η δομή του κλειστού συστήματος,
- στ) Μελετήθηκαν οι δομικές ιδιότητες της ελεγχσιμότητας, της παρατηρησιμότητας και της ευστάθειας του κλειστού συστήματος και
- ζ) Προσδιορίστηκε ο νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς της εξόδου για το κλειστό γραμμικό σύστημα.

Στην εργασία [24] επιτυγχάνεται η γραμμικοποίηση του συστήματος του ελέγχου ταλάντωσης του Αντεστραμμένου Εκκρεμούς, εφαρμόζοντας κάποιο μετασχηματισμό στο διάνυσμα κατάστασης του αρχικού συστήματος, έτσι ώστε το σύστημα να οδηγείται σε μια πιο απλή μορφή και στη συνέχεια υπολογίζεται ο νόμος ανατροφοδότησης που οδηγεί σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για το διάνυσμα

κατάστασης x (State Linearization).

Στο παρόν Κεφάλαιο, εφαρμόζοντας την τεχνική του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, το κλειστό σύστημα καθίσταται ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συμπίπτει μ' αυτή του Γραμμικού Προτύπου που επιλέξαμε (3.4-5). Η γενική λύση που προσδιορίστηκε σ' αυτό το Κεφάλαιο, παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των παραμέτρων του νόμου ελέγχου, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ένα γραμμικό και ευσταθές σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΕ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

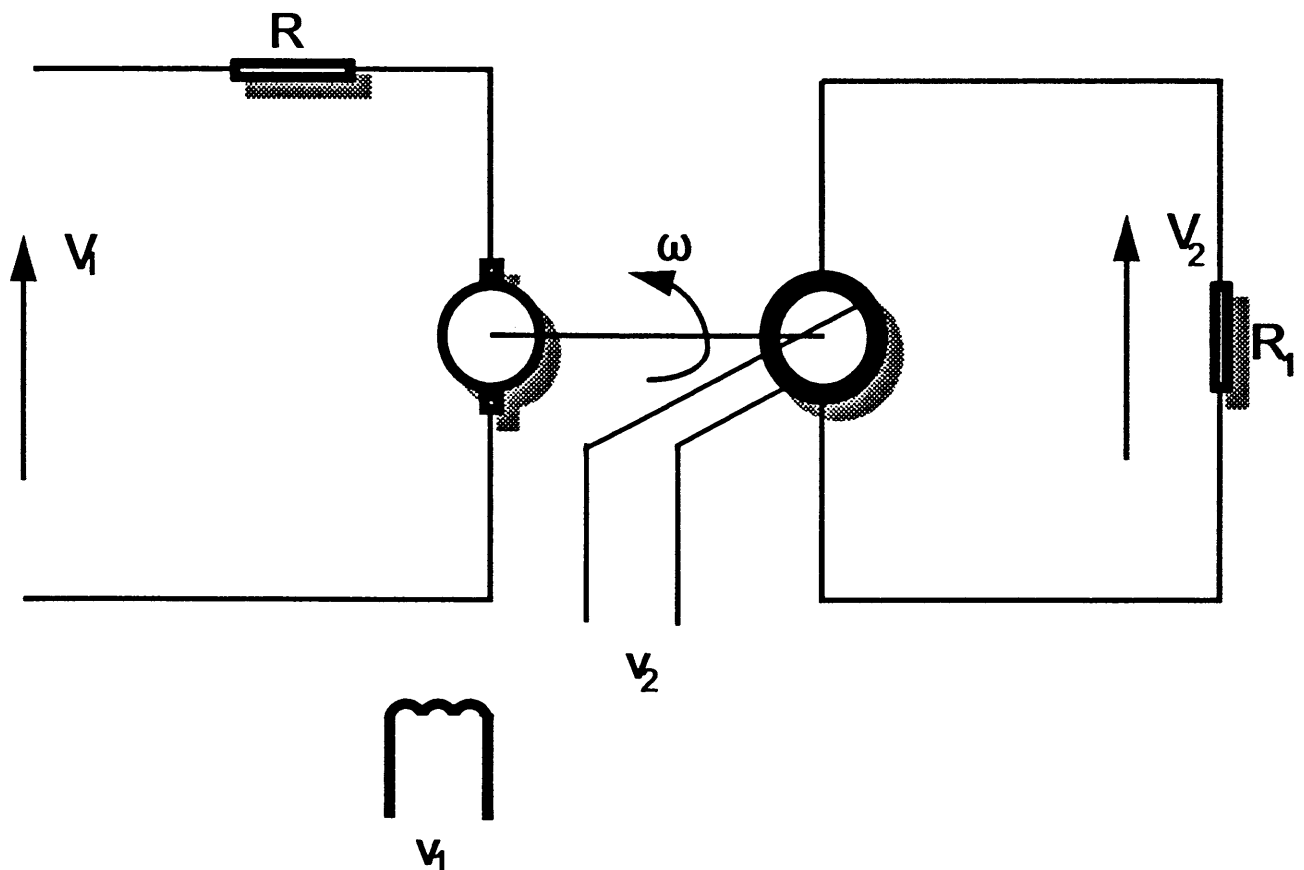
Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε έναν μετατροπέα από συνεχές σε εναλλασσόμενο ρεύμα (DC/AC converter) [25]. Μια σχηματική αναπαράσταση του μετατροπέα DC/AC, δίνεται στο σχήμα 4.1.1.

Ο έλεγχος του μετατροπέα DC/AC, αφορά κατά πρώτο λόγο στον έλεγχο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του ρότορα, και κατά δεύτερο λόγο στον έλεγχο της εναλλασσόμενης τάσης εξόδου, για τις οποίες επιθυμούμε να κυμαίνονται μεταξύ κάποιων προδιαγραφόμενων ορίων.

Μια διαδεδομένη τεχνική ελέγχου του DC/AC μετατροπέα συνίσταται στην αποσύζευξη εισόδων - εξόδων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, εφαρμόζουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής [19], για την επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος του μετατροπέα, από συνεχή σε εναλλασσόμενη τάση, σε ένα γραμμικό πρότυπο. Ταυτόχρονα με την γραμμικοποίηση του συστήματος, επιτυγχάνουμε και την αποσύζευξη εισόδων - εξόδων.

4.2. ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ DC/AC ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΑ

Θεωρούμε το σύστημα του DC/AC μετατροπέα του Σχήματος 4.1.1. Ως εισόδους του συστήματος Αυτόματου Ελέγχου, παίρνουμε, όπως διακρίνεται και στο Σχήμα, τη συνεχή τάση εισόδου V_1 και την τάση στα άκρα του στάτορα v_2 . Αναφέρουμε ότι θεωρούμε τις κανονικοποιημένες αντιστάσεις R και R_1 ίσες μεταξύ τους. Ως εξόδους του συστήματος Αυτόματου Ελέγχου παίρνουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ρότορα ω , και την εναλλασσόμενη τάση V_2 [25], [26].



Σχήμα 4.1.1. Σχηματική αναπαράσταση του DC/AC μετατροπέα

4.2.1. Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα του DC/AC μετατροπέα, σύμφωνα με την εργασία [25], είναι οι ακόλουθες

$$\frac{d\omega}{dt} = 5v_1 \left(V_1 - v_1\omega \right) - \frac{V_2^2}{\omega}$$

και

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{V_2}{\omega} \left(\frac{d\omega}{dt} \right) - 2V_2 + 2\omega v_2 \quad (4.2-1)$$

Οι πιθανές εισοδοι του συστήματος είναι οι v_1 , v_2 και V_1 , ενώ οι εξοδοι είναι οι ω και V_2 . Οι εισοδοι του συστήματος διαλέγονται έτσι ώστε να έχουν κάποια φυσική σημασία καθώς επίσης το αναγόμενο σύστημα να είναι αναλυτικό. Διαλέγουμε λοιπόν σαν εισόδους τις v_2 και V_1 και ταυτόχρονα θέτουμε $v_1 = 1$. Με την τελευταία παραδοχή το σύστημα των εξισώσεων (4.2-1) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{d\omega}{dt} = 5 \left(V_1 - \omega \right) - \frac{V_2^2}{\omega}$$

και

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{V_2^3}{\omega^2} - 7V_2 + \frac{5}{\omega} V_2 V_1 + 2\omega v_2 \quad (4.2-2)$$

4.2.2. Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης

Θεωρούμε ως μεταβλητές κατάστασης, την γωνιακή ταχύτητα ω , και την εναλλασσόμενη τάση εξόδου, V_2 , του συστήματος

$$x_1 = \omega$$

και (4.2-3)

$$x_2 = V_2$$

Όπως προαναφέραμε, ως εξόδους θεωρούμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ρότορα και την εναλλασσόμενη τάση εξόδου οι οποίες συμπίπτουν με τις μεταβλητές κατάστασης, δηλαδή οι έξοδοι του συστήματος y_1 και y_2 δίνονται από τις πιο κάτω σχέσεις

$$y_1 = x_1 = \omega$$

και (4.2-4)

$$y_2 = x_2 = V_2$$

Σαν εισόδους u_1 και u_2 του συστήματος του DC/AC μετατροπέα θεωρούμε τις τάσεις V_1 και v_2 αντίστοιχα, δηλαδή

$$u_1 = V_1$$

(4.2-5)

$$u_2 = v_2$$

Επομένως, οι διαφορικές εξισώσεις (4.2-2) που περιγράφουν το σύστημα του DC/AC μετατροπέα, μπορεί να αναπαρασταθεί στο χώρο κατάστασης με δύο εισόδους, δύο καταστάσεις και δύο εξόδους. Η περιγραφή του μετατροπέα από συνεχές σε εναλλασσόμενο ρεύμα, στο χώρο κατάστασης δίνεται από το μη γραμμικό σύστημα που ακολουθεί

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

και (4.2-6)

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

όπου το $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Το σύνολο \mathcal{U} ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{U} = \left\{ \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } x_1 \neq 0 \right\}$$

Σημειώνεται ότι το $x_1 = 0$ αντιστοιχεί σε μηδενική γωνιακή ταχύτητα του ρότορα. Οι παράμετροι $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ της (4.2-6) δίνονται από τις πιο κάτω σχέσεις

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x_2^2}{x_1} & 5x_1 \\ \frac{x_2^3}{x_1^2} & 7x_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ \vdots \ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \frac{5x_2}{x_1} & 2x_1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΟΥ DC/AC ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΑ

Από την ανάλυση του μοντέλου, είναι φανερό ότι η μετατροπή της συνεχούς σε εναλλασσόμενη τάση αφορά μια υψηλά μη γραμμική διαδικασία. Επομένως, η εύρεση

της απόκρισης του συστήματος είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα. Από την πλευρά του Αυτομάτου Ελέγχου, είναι φανερό επίσης ότι είναι πολύ δύσκολο να σχεδιαστεί νόμος ελέγχου για τη ικανοποίηση των προδιαγραφών που θα θέλαμε να παρουσιάζει το σύστημα.

Ως εισόδους του συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου θεωρούμε την συνεχή τάση εισόδου του ρότορα και την λαμβανόμενη από το στάτορα τάση λόγω περιστροφής του ρότορα. Στόχος είναι ο έλεγχος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του ρότορα και της εναλλασσόμενης τάσης εξόδου του στάτορα, έτσι ώστε αυτές να βρίσκονται μέσα σε κάποια προδιαγεγραμμένα όρια. Είναι λοιπόν δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να βρούμε νόμο ελέγχου βασισμένο στο μη γραμμικό σύστημα που να πετυχαίνει την παρακολούθηση μιας επιθυμητής τροχιάς για την εναλλασσόμενη τάση εξόδου, που θα παραχθεί από το μετασχηματισμό της συνεχούς τάσης, και για τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ρότορα.

Για τους προαναφερθέντες λόγους, είναι λογικό να αναζητήσουμε πρώτα την ύπαρξη ενός νόμου ελέγχου ο οποίος θα απλοποιεί το αρχικό μη γραμμικό σύστημα. Με τον όρο απλοποίηση εννοούμε τη δυνατότητα το κλειστό σύστημα που θα προκύψει να έχει μια γραμμική περιγραφή εισόδου - εξόδου. Αν αυτό είναι δυνατό, είναι φανερό ότι ο περαιτέρω έλεγχος του συστήματος απλοποιείται πάρα πολύ επειδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολύ γνωστές μεθόδους σχεδίασης από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων.

Μια επιπλέον λογική απαίτηση για το πρότυπο, είναι να το θεωρήσουμε όχι μόνο γραμμικό αλλά και ταυτόχρονα αποσυζευγμένο. Η απαίτηση για αποσυζευγμένο πρότυπο οδηγεί στη δυνατότητα ελέγχου της κάθε εξόδου από μια και μόνη είσοδο.

4.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

4.4.1. Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών

Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του συστήματος (4.2-6), για $i = 1, 2$, είναι

$$L_{g_1} L_{g_0}^0 h_1(x) = L_{g_1} h_1(x) = L_{g_1} x_1 = 5$$

$$L_{g_1} L_{g_0}^0 h_2(x) = L_{g_1} h_2(x) = L_{g_1} x_2 = \frac{5 x_2}{x_1}$$

(4.4-1)

$$L_{g_2} L_{g_0}^0 h_1(x) = L_{g_1} h_1(x) = L_{g_1} x_1 = 0$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^0 h_2(x) = L_{g_1} h_2(x) = L_{g_1} x_2 = 2 x_1 \neq 0, \text{ για } \forall x \in \mathbb{U}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (2.4-1), οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του ανοικτού μη γραμμικού συστήματος (4.2-6) είναι

$$\left(d_1 \right)_A = 0$$

και

$$\left(d_2 \right)_A = 0$$

(4.4-2)

Παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του συστήματος είναι πεπερασμένοι.

Από τον ορισμό του πίνακα $B_0^*(x)$, όπως αυτός δίνεται στη σχέση (2.4-5c), βρίσκουμε ότι θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_G h_1(\mathbf{x}) \\ L_G h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \frac{5x_2}{x_1} & 2x_1 \end{bmatrix} \quad (4.4-3)$$

4.4.2. Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου

Ο DC/AC μετατροπέας περιγράφεται με ένα μοντέλο το οποίο ανήκει στην κλάση των συστημάτων που εξετάζει η θεωρία του Κεφαλαίου 2, εφόσον ισχύει

$$\beta = \text{rank} \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = 2, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

και

$$(4.4-4)$$

$$m = 2$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.4-4) συμπεραίνουμε ότι

$$\text{rank} \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = m = 2$$

4.4.3. Επιλογή του γραμμικού προτύπου

Θεωρούμε τώρα το γραμμικό, χρονικά μη μεταβαλλόμενο σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τις εξισώσεις που ακολουθούν

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_M \mathbf{z} + \mathbf{B}_M \mathbf{w}$$

$$(4.4-5)$$

$$\mathbf{y}_M = \mathbf{C}_M \mathbf{z}$$

όπου

$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha, \beta \in \{\mathbb{R} - \{0\}\}$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση μεταφοράς του προτύπου έχει τη μορφή

$$H_M(s) = \mathbf{C}_M (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_M)^{-1} \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{s + p_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{s + p_2} \end{bmatrix} \quad (4.4-6)$$

Το πρότυπο που διαλέξαμε είναι ένα σύστημα 2ης τάξης με αυθαίρετους πόλους στα σημεία $-p_1$ και $-p_2$.

Τώρα, θα βρούμε τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του προτύπου, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.4.2., εφόσον έχουμε την περιγραφή του προτύπου στο χώρο κατάστασης. Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του προτύπου (4.4-5) είναι

$$(\mathbf{c}_1)_M \mathbf{A}_M^0 \mathbf{B}_M = (\mathbf{c}_1)_M \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (4.4-7a)$$

$$(\mathbf{c}_2)_M \mathbf{A}_M^0 \mathbf{B}_M = (\mathbf{c}_2)_M \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (4.4-7b)$$

Από τις εξισώσεις (4.4-7a) και (4.4-7b) συμπεραίνουμε αντίστοιχα ότι

$$(\mathbf{d}_1)_M = 0$$

και

$$(\mathbf{d}_2)_M = 0$$

(4.4-8)

Επομένως, ο πίνακας \mathbf{M}_0 που δίνεται στη σχέση (2.4-5b), θα είναι

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{C}_M \mathbf{A}_M^0 \mathbf{B}_M = \mathbf{C}_M \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (4.4-9)$$

4.4.4. Ελεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών

- Συνθήκη 1

Από τη σύγκριση των χαρακτηριστικών αριθμών του ανοικτού αρχικού συστήματος $(d_i)_A$ με τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του προτύπου $(d_i)_M$, παρατηρούμε ότι

$$(d_i)_A = (d_i)_M = 0, \text{ για } i = 1, 2, \text{ και } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \quad (4.4-10)$$

Επομένως επαληθεύεται η πρώτη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 2

Η δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2., για το συγκεκριμένο μοντέλο του DC/AC μετατροπέα για το οποίο ισχύει $p = m$ (Αριθμός εξόδων = Αριθμός εισόδων), είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = m$$

Από τις σχέσεις (4.4-3) και (4.4-9), έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5x_2 & 2x_1 \\ \frac{1}{x_1} & \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

και

(4.4-11)

$$\text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = 2$$

Επομένως, επαληθεύεται και η δεύτερη των συνθηκών του Θεωρήματος (2.4-2).

- Συνθήκη 3

Για να εξετάσουμε την ισχύ της τρίτης συνθήκης, αρκεί να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$ και μια βάση του χώρου $\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$.

Μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$ υπολογίζεται, βρίσκοντας κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, ο οποίος ορίζεται στην (2.4-13a) και έχει τη μορφή

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right]$$

Για το λόγο αυτό, παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ είναι

$$\text{rank} \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \frac{5x_2}{x_1} & 2x_1 \end{bmatrix} = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \quad (4.4-12)$$

εφόσον η στήλη $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τη στήλη $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ είναι ένας πίνακας διαστάσεων 2×6 , και τη σχέση (4.4-12), συμπεραίνουμε ότι

$$\text{rank} [\mathbf{Q}(\mathbf{x})] = \text{rank} [\mathbf{G}(\mathbf{x})] = \text{rank} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \frac{5x_2}{x_1} & 2x_1 \end{bmatrix} = n = 2 \quad (4.4-13)$$

Ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ είναι "involutive" εφόσον είναι προφανές ότι ισχύει

$$[\tau, \sigma] \in \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}$$

για $\tau, \sigma \in \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\}$.

Επομένως, μια βάση του $\text{inv}[\mathbf{Q}(\mathbf{x})]$, δίνεται από τη σχέση

$$\text{inv}[\mathbf{Q}(\mathbf{x})] = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\} \quad (4.4-14)$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (4.4-13) και (4.4-14) έχουμε ότι

$$\dim\{\text{inv}[\mathbf{Q}(\mathbf{x})]\} = 2 \quad (4.4-15)$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, θα υπολογίσουμε κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, ο ορισμός του οποίου δίνεται στη σχέση (2.4-15) και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{21}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{22}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{31}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{32}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.4-16)$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα που δίνεται στην (4.4-16) είναι οι ακόλουθες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{5x_2}{x_1} \\ \frac{1}{\alpha} \left[(25 - 5p_1) + 5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{\beta} \left[5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 + (35 - 5p_2) \frac{x_2}{x_1} \right] \end{bmatrix} \quad (4.4-17a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 \\ \frac{4}{\alpha} x_2 \\ \frac{1}{\beta} \left(6 \frac{x_2^2}{x_1} + (14 - 2p_2)x_1 \right) \end{bmatrix} \quad (4.4-17b)$$

όπου, για τον υπολογισμό των $\mathbf{Z}_{ij}(\mathbf{x})$ για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2$ υπολογίστηκαν πρώτα οι "Μαγκον" παράμετροι $\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x})$, \mathbf{M}_i και στη συνέχεια τα $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$ και $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})$, για $i = 1, 2, 3$.

Από την επαναληπτική σχέση (2.4-5c) για τις μη μηδενικές "Markov" παραμέτρους $\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x})$, υπολογίστηκαν οι πίνακες $\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x})$, για $i = 1, 2$.

$$\mathbf{B}_1^* = L_G L_{g_0}^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{g_0} h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.4-18a)$$

όπου:

$$\begin{aligned} L_{g_1} L_{g_0} h_1(\mathbf{x}) &= L_{g_1} \left(-5x_1 - \frac{x_2^2}{x_1} \right) = \\ &= \left[-5 + \frac{x_2^2}{x_1^2}, -\frac{1}{x_1} 2x_2 \right] g_1 = -25 - 5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{g_2} L_{g_0} h_1(\mathbf{x}) &= L_{g_2} \left(-5x_1 - \frac{x_2^2}{x_1} \right) = \\ &= \left[-5 + \frac{x_2^2}{x_1^2}, -\frac{1}{x_1} 2x_2 \right] g_2 = -4x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{g_1} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}) &= L_{g_1} \left(-\frac{x_2^3}{x_1^2} - 7x_2 \right) = \\ &= \left[\frac{2x_2^3}{x_1^3}, -\frac{3x_2^2}{x_1^2} - 7 \right] g_1 = -5 \frac{x_2^3}{x_1^3} - 35 \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}) &= L_{g_2} \left(-\frac{x_2^3}{x_1^2} - 7x_2 \right) = \\ &= \left[\frac{2x_2^3}{x_1^3}, -\frac{3x_2^2}{x_1^2} - 7 \right] g_2 = -6 \frac{x_2^2}{x_1} - 14x_1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_2^* = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{g_0}^2 h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^2 h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.4-18b)$$

όπου

$$L_{g_1} L_{g_0}^2 h_1(\mathbf{x}) = 15 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^4 + 70 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + 125$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^2 h_1(\mathbf{x}) = 24 \frac{x_2^3}{x_1^2} + 56x_2$$

$$L_{g_1} L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x}) = 5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^5 + 90 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 + 245 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x}) = 10 \frac{x_2^4}{x_1^3} + 108 \frac{x_2^2}{x_1} + 98x_1$$

Από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-5b) υπολογίστηκαν τα M_i .

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}_M \mathbf{A}_M \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} -\alpha p_1 & 0 \\ 0 & -\beta p_2 \end{bmatrix} \quad (4.4-19a)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{C}_M \mathbf{A}_M^2 \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \alpha p_1^2 & 0 \\ 0 & \beta p_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.4-19b)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-11),
υπολογίσαμε τις παραμέτρους $L_i(\mathbf{x})$, για $i = 0, 1$, θέτοντας στις (2.4-11) $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{\alpha} & 0 \\ \frac{5}{\beta} \frac{x_2}{x_1} & \frac{5}{\beta} x_1 \end{bmatrix} \quad (4.4-20)$$

Από τη σχέση (2.4-10a) βρέθηκε ο πίνακας $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$ του νόμου ανατροφοδότησης (2.3-1), ο οποίος έχει τη μορφή

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{\alpha} & 0 \\ \frac{5}{\beta} \frac{x_2}{x_1} & \frac{5}{\beta} x_1 \end{bmatrix} \quad (4.4-21)$$

Επομένως, εφαρμογή των (2.4-11), δίνει

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{M}_0^{-1} \left[\mathbf{M}_1 \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_1^*(\mathbf{x}) \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \left[5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + (25 - 5p_1) \right] & \frac{4}{\alpha} x_2 \\ \frac{1}{\beta} \left[5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 + (35 - 5p_2) \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right] & \frac{1}{\beta} \left[6 \frac{x_2^2}{x_1} + (14 - 2p_2) \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4-22)$$

Τελικά, από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-15), βρήκαμε τον υποπίνακα \mathbf{Z}_1 του πίνακα $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ της σχέσης (2.4-13b), ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) & \vdots & \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \left[5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + (25 - 5p_1) \right] & \frac{4}{\alpha} x_2 \\ \frac{1}{\beta} \left[5 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 + (35 - 5p_2) \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right] & \frac{1}{\beta} \left[6 \frac{x_2^2}{x_1} + (14 - 2p_2) \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4-23)$$

Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα

$$\text{span} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{array} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (4.4-24)$$

όπου $\text{span}\{\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\}$ είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right]$$

είναι involutive εφόσον

$$\left[\tau, \sigma \right] \in \text{span} \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \right\}$$

για

$$\forall \tau, \sigma \in \text{span} \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \right\}$$

Συνεπώς, θα έχουμε

$$\text{inv} \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{array} \right] = \text{span} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \quad (4.4-25)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (4.4-25) και το γεγονός ότι οι στήλες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι

$$\dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = 2 \quad (4.4-26)$$

Τελικά, από τις σχέσεις (4.4-15) και (4.4-26) συμπεραίνουμε ότι ισχύει και η τρίτη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2.

Επομένως, το πρόβλημα του ταιριάσματος του μη γραμμικού συστήματος (4.2-6) στο γραμμικό πρότυπο (4.4-5) έχει λύση.

4.4.5. Εύρεση του νόμου ελέγχου

Εφόσον ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2. για το μη γραμμικό σύστημα του AC/DC μετατροπέα της μορφής (4.2-6) και το γραμμικό πρότυπο της μορφής (4.4-5), η γενική λύση για το νόμο ελέγχου (2.3-1), η οποία θα δώσει τη λύση στο πρόβλημα του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, υπολογίζεται σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.3. και τη βοήθεια των σχέσεων (2.4-22) ως εξής.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0^{-1}(\mathbf{x})$$

και

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$$

όπου το $\phi(\mathbf{x})$ θα βρεθεί με τη βοήθεια της δεύτερης των σχέσεων της (2.4-21), όπου για τη συγκεκριμένη εφαρμογή οι πίνακες $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})$ και $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})$ σύμφωνα με τη σχέση (2.4-20) είναι της ακόλουθης μορφής.

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right]$$

και

(4.4-27)

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{Z}_{21}(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{Z}_{22}(\mathbf{x}) \right]$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\text{span} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right] = \text{span} \left[\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \right] = \text{span} \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right]$$

και ότι η συνθήκη 3 του Θεωρήματος 2.4.2. ισχύει, προκύπτει ότι η σχέση (2.4-21) την οποία ικανοποιεί το $\phi(\mathbf{x})$, είναι ισοδύναμη με την παρακάτω εξίσωση

$$d\phi(\mathbf{x})\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})$$

όπου

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right]$$

και

(4.4-28)

$$\hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \right]$$

Παρατηρούμε ότι ο $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})$ εφόσον είναι διαστάσεων 2×2 , και αντιστρέψιμος

∀ $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, τότε η σχέση (2.4-28) για την εύρεση του $\Phi(\mathbf{x})$, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$d\Phi(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})^{-1} \quad (4.4-29)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{Q}}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{x_2}{2x_1^2} & \frac{1}{2x_1} \end{bmatrix} \quad (4.4-30)$$

και ο πίνακας $\hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}_1(\mathbf{x})$ δίνεται από τη σχέση (4.4-23). Επομένως, η σχέση (4.4-29) δίνει

$$d\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \left[\left(5 - p_1 \right) - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right] & \frac{2}{\alpha} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \\ -\frac{2}{\beta} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 & \frac{1}{\beta} \left[3 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + \left(7 - p_2 \right) \right] \end{bmatrix} \quad (4.4-31)$$

Ολοκληρώνοντας τα διαφορικά $d\phi_1$ και $d\phi_2$ ως προς \mathbf{x} , θα έχουμε

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \left[\int_{x_1=c_1}^{x_1(x_2=c_2)} \left[\left(5 - p_1 \right) - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right] dx_1 + 2 \int_{x_2=c_2}^{x_2(x_1=x_1)} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) dx_2 \right] \quad (4.4-32)$$

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \left[-2 \int_{x_1=c_1}^{x_1(x_2=c_2)} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 dx_1 + \int_{x_2=c_2}^{x_2(x_1=x_1)} \left[3 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 + \left(7 - p_2 \right) \right] dx_2 \right]$$

Κάνοντας τις πράξεις ολοκλήρωσης στην (4.4-32) καταλήγουμε στο πιο κάτω

αποτέλεσμα

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \left[(5 - p_1)x_1 + 2 \frac{x_2^2}{x_1} - (5 - p_1)c_1 \right]$$

(4.4-33)

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \left[(7 - p_2)x_2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{x_2^3}{x_1^2} \right]$$

όπου $c_1 \neq 0$ και έχουμε θέσει $c_2 = 0$, εφόσον το σημείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (c_1, 0)$ δεν είναι ιδιόμορφο σημείο για τις συναρτήσεις $\phi_1(\mathbf{x})$ και $\phi_2(\mathbf{x})$.

Οι σχέσεις (2.4-22) που προσδιορίζουν τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ του νόμου ελέγχου

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

μας δίνουν

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0^{-1}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{5} & 0 \\ -\frac{\alpha}{5} \frac{x_2}{x_1^2} & \frac{\beta}{5} \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) &= \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \left[(5 - p_1)x_1 + 2 \frac{x_2}{x_1} - (5 - p_1)c_1 \right] \\ \frac{1}{5} \left[(2 + p_1 - p_2) \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3} - (5 - p_1)c_1 \frac{x_2}{x_1^2} \right] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4.4-34)

4.4.6. Ειδική λύση του προβλήματος του ακριβούς Ταιριάσματος του συστήματος σε Γραμμικό Πρότυπο

Θεωρώντας το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα της μορφής (3.4-5), θέτουμε $p_i = 0$ για $i = 1, 2$, οπότε οι πίνακες κατάστασης, εισόδου και εξόδου, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\tilde{\mathbf{A}}_M = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{B}_M = \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4-35)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του νέου Γραμμικού Προτύπου είναι η ακόλουθη

$$H_M(s) = C_M(sI - \tilde{A})^{-1}B_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος Ακριβούς ταιριάσματος σε πρότυπο της μορφής (4.4-5) με $p_1 = p_2 = 0$, με τη βοήθεια των σχέσεων (4.4-34) της παραγράφου 4.4.5., λαμβάνει την τελική μορφή

$$B(x) = L_0^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{\alpha}{5} \frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{5} \frac{1}{x_1} \end{bmatrix}$$

$$a(x) = B(x)\phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{2}{5} \frac{x_2}{x_1} - c_1 \\ \frac{2}{5} \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{5} \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{5} \frac{x_2^3}{x_1^3} - c_1 \frac{x_2}{x_1^2} \end{bmatrix}$$

(4.4-36)

4.5. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το πρότυπο είναι ένα γραμμικό σύστημα 2ης τάξης, ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. εφόσον ο πίνακας του ελέγχιμου

$$S \triangleq \begin{bmatrix} B_M & \vdots & AB_M \end{bmatrix}$$

είναι πλήρους τάξης και ο πίνακας του παρατηρήσιμου

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_M \\ \mathbf{C}_M \mathbf{A}_M \end{bmatrix}$$

είναι επίσης πλήρους τάξης. Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι το πρότυπο είναι ελάχιστης τάξης και μάλιστα ίδιας τάξης με το ανοικτό μη γραμμικό σύστημα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχουν μη παρατηρήσιμες καταστάσεις στο κλειστό σύστημα. Έτσι, υπάρχει ένας 1-1 και αντιστρέψιμος μετασχηματισμός $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$, που μπορεί να μας οδηγήσει από το κλειστό μη γραμμικό σύστημα στο γραμμικό πρότυπο.

Είναι σημαντικό επίσης να παρατηρήσουμε ότι εφόσον ο πίνακας \mathbf{A}_M είναι σε διαγώνια μορφή, με τα p_1, p_2 να είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, μπορούμε με κατάλληλη επιλογή των p_1, p_2 να τοποθετήσουμε αυθαίρετα τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος. Είναι προφανές λοιπόν ότι μπορούμε να ευσταθειοποιήσουμε το κλειστό σύστημα.

4.6. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Για την υλοποίηση του μη γραμμικού νόμου ελέγχου της μορφής

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

όπου τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ δίνονται από τη σχέση (4.4-36), απαιτείται η μέτρηση του διανύσματος κατάστασης \mathbf{x} ($x_1 = \omega, x_2 = V_2$). Η γωνιακή ταχύτητα ω μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια μιας ταχομετρικής γεννήτριας και η τάση V_2 με τη βοήθεια ενός παλμογράφου. Οι μη γραμμικές συναρτήσεις $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ μπορούν να υλοποιηθούν με τη βοήθεια ενός μικροεπεξεργαστή.

4.7. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ

Η απεικόνιση εισόδων - εξόδων του αρχικού μη γραμμικού συστήματος, μετά την εφαρμογή του νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής (2.3-1)

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (4.7-1)$$

Εφόσον η περιγραφή εισόδων - εξόδων είναι γραμμική, είναι εύκολος ο σχεδιασμός ενός επιπλέον ρυθμιστή για την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

Ας υποθέσουμε ότι είναι επιθυμητό η έξοδος του συστήματος να παρακολουθεί την προκαθορισμένη τροχιά

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} (y_1)_d \\ (y_2)_d \end{bmatrix}$$

Τότε, αν εφαρμόσουμε στο κλειστό σύστημα (4.2-6) τον ακόλουθο γραμμικό νόμο ελέγχου

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1)_d^{(1)} \\ (y_2)_d^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1)_d \\ (y_2)_d \end{bmatrix}$$

θα έχουμε

$$y_1^{(1)} + p_1 y_1 = (y_1)_d^{(1)} + p_1 (y_1)_d$$

$$y_2^{(1)} + p_2 y_2 = (y_2)_d^{(1)} + p_2 (y_2)_d$$

Οι πιο πάνω σχέσεις μπορούν ισοδύναμα να γραφούν

$$\begin{bmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7-2)$$

όπου

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 - (y_1)_d \\ y_2 - (y_2)_d \end{bmatrix}$$

ορίζεται το σφάλμα ανάμεσα στις εξόδους του συστήματος y και τις επιθυμητές τροχιές y_d . Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (4.7-2) απεικονίζει την εξέλιξη του σφάλματος με το χρόνο. Η ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς επιτυγχάνεται όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - y_d(t) \right) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Αυτή η απαίτηση είναι δυνατόν να επιτευχθεί αν διαλέξουμε τα p_1, p_2 , έτσι ώστε η λύση για το $e(t)$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας του Routh, συμπεραίνουμε ότι για

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0,$$

η εξίσωση (4.7-2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Η πιο πάνω επιλογή των p_1, p_2 οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθές σφάλμα για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $e(0) = y(0) - y_d(0)$ του σφάλματος.

4.8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό, μελετήθηκε και επιτεύχθηκε ο έλεγχος ενός μετατροπέα από συνεχές σε εναλλασσόμενο ρεύμα, το οποίο σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου περιγράφεται από μη γραμμικές εξισώσεις κατάστασης (4.2-6), μέσω της τεχνικής του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο.

Για το μη γραμμικό μοντέλο που περιγράφει τη μετατροπή από συνεχές σε εναλλασσόμενο ρεύμα, προσδιορίστηκε ο μη γραμμικός νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης (4.4-34) ο οποίος οδηγεί σε ένα αποσυζευγμένο σύστημα του οποίου η περιγραφή εισόδων - εξόδων προσομοιάζεται με την γραμμική περιγραφή εισόδων - εξόδων του Γραμμικού Προτύπου (4.4-5).

Συγκεκριμένα, για το σύστημα αυτό:

- α) Προσδιορίστηκε ο χώρος κατάστασης (4.4.2.),
- β) Καθορίστηκαν οι στόχοι ελέγχου (4.3.),
- γ) Επιλέχτηκε το Γραμμικό Πρότυπο,
- δ) Αποδείχθηκε ότι το Ακριβές Ταιριασμα σε Γραμμικό Πρότυπο είναι πάντα εφικτό, με ανατροφοδότηση του διανύσματος κατάστασης (4.4.4.),
- ε) Προσδιορίστηκε η γενική λύση του μη γραμμικού νόμου ανατροφοδότησης (4.4-34),
- στ) Προσδιορίστηκε η δομή του κλειστού συστήματος (4.5.),
- ζ) Μελετήθηκαν οι δομικές ιδιότητες της ελεγχιμότητας, της παρατηρησιμότητας και της ευστάθειας του κλειστού συστήματος και
- η) Προσδιορίστηκε ο νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς της εξόδου (4.7.).

Στην εργασία [] επιτυγχάνεται η γραμμικοποίηση του συστήματος του DC/AC μετατροπέα, χρησιμοποιώντας την τεχνική της αποσύζευξης.

Στο παρόν Κεφάλαιο, εφαρμόζοντας την τεχνική του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, το κλειστό σύστημα καθίσταται ένα γραμμικό σύστημα και μάλιστα αποσυζευγμένο. Η γενική λύση που προσδιορίστηκε σ' αυτό το κεφάλαιο, παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των παραμέτρων του νόμου ελέγχου, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ένα αποσυζευγμένο, γραμμικό και ευσταθές σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΚΤΙΚΗΣ ΣΤΗΛΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αποστακτική στήλη είναι από τα πιο διαδεδομένα και σημαντικά εργαλεία που έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία των χημικών διεργασιών.

Η διαδικασία της απόσταξης χρησιμοποιείται προκειμένου να διαχωριστούν κάποια προϊόντα που τροφοδοτούν τη στήλη, ή να καθαριστεί και να απομονωθεί το τελικό προϊόν απόσταξης. Δηλαδή, στόχος ελέγχου του συστήματος αυτού είναι ο έλεγχος της σύστασης ή της ποσότητας των προϊόντων απόσταξης.

Ενας διαδεδομένος τρόπος ελέγχου της διαδικασίας της απόσταξης, συνίσταται [28], στην αποσύζευξη εισόδων - εξόδων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής [19], για την επίλυση του προβλήματος του ακριβούς ταιριάσματος του συστήματος της αποστακτικής στήλης σε ένα γραμμικό πρότυπο και σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει το τέλειο ταιρίασμα στο γραμμικό πρότυπο. Στη συνέχεια, για το γραμμικοποιημένο σύστημα σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου ο οποίος επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

5.1.1. Επεξηγηματικές έννοιες χημείας που αφορούν στη διαδικασία της απόσταξης.

[27]

Εστω ένα μίγμα το οποίο αποτελείται από n τον αριθμό συστατικά (πολυσύστατο μίγμα), ένα εκ των οποίων είναι το συστατικό i . Σχετική πτητικότητα του συστατικού i αναφορικά προς το συστατικό k (συστατικό αναφοράς), ορίζεται το κλάσμα:

$$\alpha_{ik} = \frac{y_i/x_i}{y_k/x_k}, \quad (5.1-1)$$

όπου x_i (x_k) είναι το κλάσμα των moles του συστατικού i (k), που βρίσκονται στην υγρή φάση, ενώ y_i (y_k) είναι το κλάσμα των moles του συστατικού i (k), που βρίσκονται στην αέρια φάση.

Η συγκέντρωση του παραπάνω μίγματος σε moles δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$H_{\text{υγρού}} = \sum_{j=1}^n H_{j,\text{υγρού}} \quad \text{moles μίγματος που βρίσκονται σε υγρή φάση}$$

και

$$H_{\text{αερίου}} = \sum_{j=1}^n H_{j,\text{αερίου}} \quad \text{moles μίγματος που βρίσκονται σε αέρια φάση.} \quad (5.1-2)$$

Τώρα, γίνεται κατανοητό ότι το κλάσμα των moles του συστατικού j (είτε αυτών που βρίσκονται στην υγρή φάση ή αυτών που βρίσκονται στην αέρια φάση), δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$x_j = \frac{H_{j,\text{υγρού}}}{H_{\text{υγρού}}} \quad \text{και} \quad y_j = \frac{H_{j,\text{αερίου}}}{H_{\text{αερίου}}} \quad (5.1-3)$$

Λόγω των παραπάνω σχέσεων, είναι προφανής η ισχύς των ακόλουθων:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{\sum_{j=1}^n H_{j, \text{υγρού}}}{H_{\text{υγρού}}} = 1 \quad (5.1-4)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{\sum_{j=1}^n H_{j, \text{αερίου}}}{H_{\text{αερίου}}} = 1$$

Θεωρούμε τώρα ένα μίγμα δύο συστατικών ($n = 2$). Σε αναλογία με τα προηγούμενα, αναφορικά προς αυτό το δισύστατο αυτό μίγμα, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1 \quad (5.1-5)$$

$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 - y_1$$

Οπότε, η σχετική πτητικότητα του συστατικού 1 (το οποίο στο μέλλον θα το θεωρήσουμε ως το περισσότερο πτητικό σε σύγκριση με το συστατικό 2), θα είναι:

$$\alpha_{12} \equiv \alpha = \frac{y_1/x_1}{y_2/x_2} = \frac{y_1/x_1}{(1 - y_1)/(1 - x_1)}$$

ή

$$\alpha = \frac{y_1}{(1-y_1)} \frac{(1-x_1)}{x_1} \quad (5.1-6)$$

οπότε, το κλάσμα των moles του περισσότερο πτητικού συστατικού που βρίσκονται στην αέρια φάση, συναρτήσει του κλάσματος των moles του ίδιου συστατικού, που βρίσκονται στην υγρή φάση, και της σχετικής πτητικότητας αυτού του συστατικού, θα δίνεται από τη σχέση

$$y_1 = \frac{\alpha x_1}{1 + (\alpha - 1)x_1} \quad (5.1-7)$$

Απαλείφοντας το δείκτη 1, εφόσον στο μέλλον θα αναφερώμαστε μόνο στο περισσότερο πτητικό συστατικό, η σχέση (5.1-7) παίρνει τη μορφή της πιο κάτω σχέσης

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)x} \quad (5.1-8)$$

5.1.2. Περιγραφή της διαδικασίας της απόσταξης [27], [28], [30]

Οι περισσότερες αποστακτικές στήλες στην πραγματικότητα τροφοδοτούνται με πολυσύστατα προϊόντα. Προσεγγιστικά, δεχόμαστε ότι σε πολλές αποστακτικές στήλες, η τροφοδότηση πραγματοποιείται με δισύστατα ή ψευτοδισύστατα μίγματα. Παρόλα αυτά, στο παράδειγμά μας θα κάνουμε πολλές επιπλέον υποθέσεις και θα θεωρήσουμε κάποιες ιδανικές περιπτώσεις, οι οποίες αρκετά συχνά αποδεικνύονται απλές και έγκυρες αλλά συχνά επίσης, αποδεικνύονται απλά μη ικανοποιητικές προσεγγίσεις.

Στο σχήμα 5.1. φαίνεται μια αρκετά απλή αναπαράσταση της διαδικασίας της απόσταξης, η οποία αναλύεται παρακάτω:

Ατμός y_n , παροχής V_n που παράγεται στο λέβητα, (επίπεδο n), ανεβαίνει μέσω της στήλης κι έρχεται σε επαφή με το υγρό x_1 παροχής L_1 που κατεβαίνει από τον ψυχτήρα (επίπεδο 1). Κατά τη διάρκεια της επαφής, ο ατμός χάνει μέρος από το λιγότερο πτητικό συστατικό του, το οποίο πηγαίνει στην υγρή φάση. Αντίθετα, το υγρό χάνει μέρος από το περισσότερο πτητικό συστατικό του το οποίο πηγαίνει στην αέρια φάση.

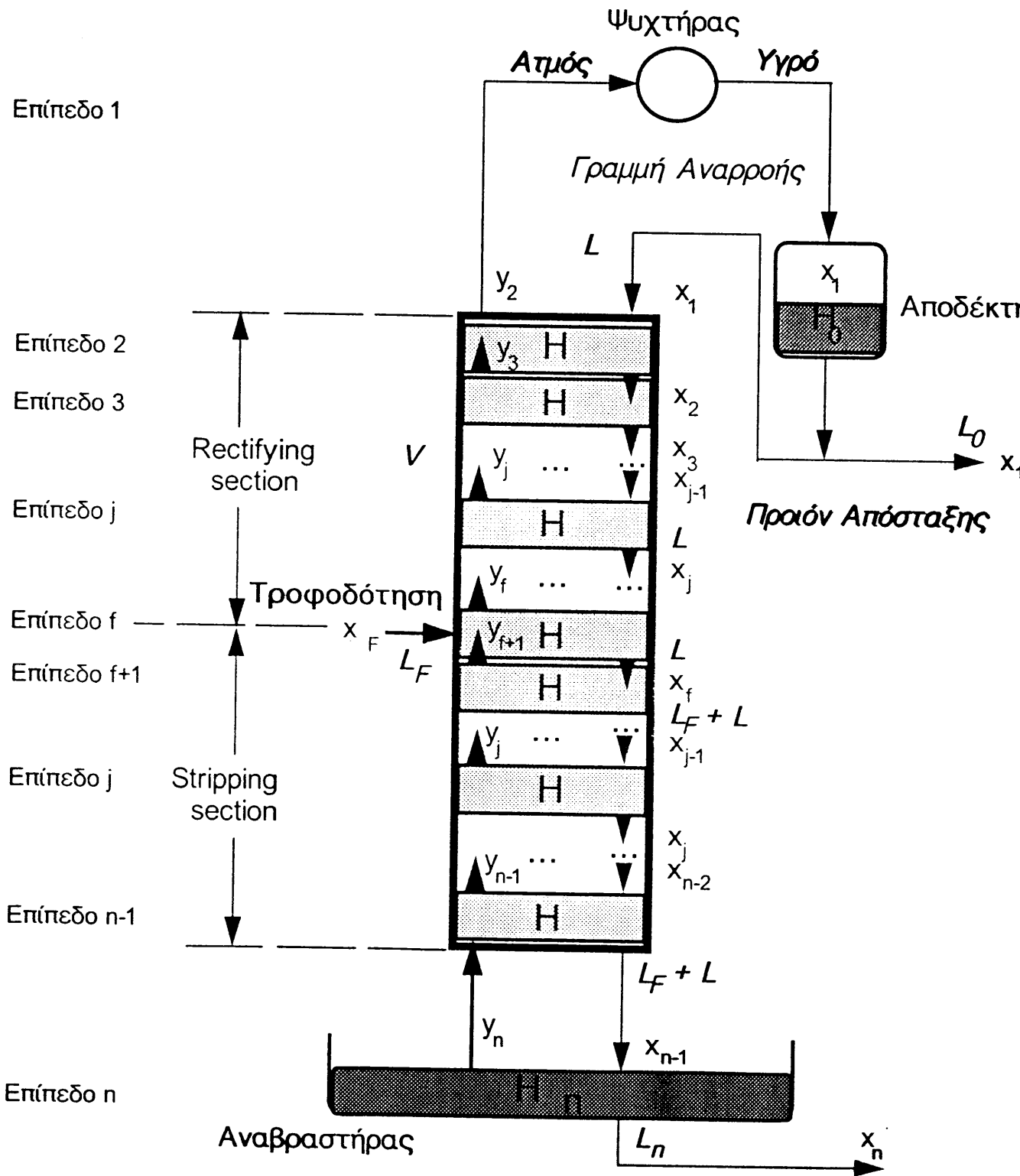
Ετσι, καθώς ο ατμός φτάνει στην κορυφή της στήλης, έχει χάσει το μεγαλύτερο

μέρος από το λιγότερο πτητικό συστατικό του και καθώς το υγρό φτάνει στον πυθμένα, έχει χάσει το μεγαλύτερο μέρος από το ελαφρύ συστατικό του.

Αν τα συστατικά 1 και 2 είναι το βαρύ και το ελαφρύ συστατικό αντίστοιχα, τότε το υλικό x_n (που απορρέει από τη ροή L_n), μπορεί να είναι καθαρό το συστατικό 1 και το υλικό x_1 (το οποίο παράγεται μέσω της ροής L_0), μπορεί να είναι καθαρό το συστατικό 2, αρκεί να είναι ικανοποιητικό το ύψος της αποστακτικής στήλης.

Η σχετική πτητικότητα $\alpha_{12} = \frac{y_1/x_1}{y_2/x_2}$, είναι η παράμετρος που καθορίζει το

απαιτούμενο ύψος. Θεωρώντας ότι οι δύο φάσεις είναι σε ισορροπία η μία με την άλλη, για την εκτίμηση της σχετικής πτητικότητας α_{12} , χρειάζονται οι πληροφορίες: Τάσεις ατμών και συντελεστές ενεργότητας των δύο συστατικών. Η επόμενη παράγραφος αναφέρεται στη μοντελοποίηση ενός συστήματος το οποίο βρίσκεται αρκετά κοντά στην πραγματικότητα. Γίνεται επίσης αναφορά στις προσεγγίσεις και υποθέσεις που λαμβάνουμε υπ' όψη μας για τη δημιουργία ενός απλοποιημένου μοντέλου, προκειμένου να αναγάγουμε το πρόβλημα σε ένα απλό πρόβλημα έτσι ώστε η βασική δομή των εξισώσεων κατάστασης που απορρέουν να μπορεί εύκολα να αναγνωρισθεί.



Σχημα 5.1. Αναπαράσταση της διαδικασίας της Απόσταξης [28], [30]

5.2. ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

5.2.1. Υποθέσεις

ΥΠΟΘΕΣΗ Α

Η αποστακτική στήλη δύο συστατικών έχει σταθερή σχετική πτητικότητα σε κάθε δίσκο. Κάθε δίσκος είναι ιδανικός, δηλαδή εξολοκλήρου δραστικός. Ο ατμός υπεράνω κάθε δίσκου είναι σε πλήρη ισορροπία με το υγρό που βρίσκεται μέσα στο δίσκο. Η σχέση ισορροπίας μεταξύ ατμού - υγρού δίνεται από τη γραμμικοποιημένη συνάρτηση:

$$M_j = \frac{y_j}{x_j} = \frac{\alpha_j}{1 + (\alpha - 1)x_j} \quad (5.2-1)$$

όπου:

x_j , y_j : Σύσταση υγρού, αερίου αντίστοιχα του δίσκου j (Κλάσμα moles του περισσότερο πτητικού συστατικού).

α_j : Σχετική πτητικότητα του δίσκου j (επίπεδο j).

ΥΠΟΘΕΣΗ Β

Στο δίσκο f η τροφοδότηση γίνεται με το υγρό x_f (moles) να βρίσκεται στο σημείο φυσαλίδας του, δηλαδή να είναι κορεσμένο. Η τροφοδότηση αυτής της συγκεκριμένης συγκέντρωσης του υγρού γίνεται με ροή L_f (moles / sec).

ΥΠΟΘΕΣΗ Γ

Ο ατμός που απομακρύνεται από τον πρώτο δίσκο (y_2), ψύχεται ολικά στον συμπυκνωτήρα.

ΥΠΟΘΕΣΗ Δ

Η συνολική συγκέντρωση σε moles κάθε δίσκου, του συμπυκνωτήρα και του αναβραστήρα (reboiler), είναι σταθερή, δηλαδή δεν μεταβάλλεται με το χρόνο και επικρατεί ομοιογένεια, δηλαδή τα συστατικά του μίγματος είναι τέλεια αναμεμειγμένα. ($H_j = \text{constant}$, για $j = 0, 1, 2, \dots, n$)

ΥΠΟΘΕΣΗ Ε

Η συγκέντρωση των moles κάθε δίσκου συνολικά είναι συγκέντρωση υγρού, εφόσον η συγκέντρωση του αερίου θεωρείται αμεληταία. Γενικότερα, όπως είναι γνωστό από τη θεωρία, η πυκνότητα των αερίων είναι πολύ μικρότερη από την πυκνότητα των υγρών σε χαμηλές πιέσεις.

ΥΠΟΘΕΣΗ ΣΤ

Κάθε χρόνος καθυστέρησης, (dead time) στη νοητή γραμμή ατμού από τον πρώτο δίσκο (επίπεδο 2) προς τον συμπυκνωτήρα και στη νοητή γραμμή αναρροής, μπορεί να αγνοηθεί. Ο ατμός y_2 υγροποιείται ολικά στον συμπυκνωτήρα και πέφτει στον αποδέκτη ο οποίος αποτελείται από x_1 moles υγρού, το οποίο είναι επίσης κορεσμένο.

ΥΠΟΘΕΣΗ Ζ

Κάτω από την υπόθεση σταθερής κατάστασης (Mc Cabe - Thiele diagram), που αναφέρθηκε στην υπόθεση Δ, έπεται ότι οι ροές ατμών και υγρών κατά τα μήκη των τμημάτων ανακαθαιρέσης και κάθαρσης (rectifying & stripping sections), είναι ίδιος, κατ' αντιστοιχία μα όχι κατ' ανάγκη σταθερός.

Συμβολικά, θα είναι: $V = V_j$, $j = 2, 3, \dots, n$. (5.2-2)

$$L = L_j$$
, $j = 1, 2, \dots, f-1$,

και

(5.2-3)

$$L + L_f = L_j$$
, $j = f, f + 1, \dots, n - 1$.

ΥΠΟΘΕΣΗ Η

Αν και σε πολλά συστήματα η δυναμική απόκριση του αναβραστήρα είναι πολύ γρηγορότερη απ' αυτή της στήλης, αγνοούμε την πρώτη.

ΥΠΟΘΕΣΗ Θ

Συνέχεια των υποθέσεων Δ αποτελεί η υπόθεση ότι κάθε δίσκος αποτελείται από τον ίδιο αριθμό moles. Δηλαδή: $H = H_j$ για $j = 2, 3, \dots, n - 1$.

5.2.2. Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης

Με γνώμονα το σχήμα 5.1. και τις υποθέσεις της παραγράφου 5.2.1. παραθέτονται στη συνέχεια οι εξισώσεις που αφορούν στη συνολική ισορροπία των δύο φάσεων σε κάθε επίπεδο, και στην ισορροπία των συστατικών που συνυπάρχουν σε κάθε δίσκο:

ΕΠΙΠΕΔΟ 1 : Ψυχτήρας, Αποδέκτης, Νοητή Γραμμή Αναρροής.

Συνολική ισορροπία μάζας:

$$\frac{dH_0}{dt} = 0 \Rightarrow V_2 - L_1 - L_0 = 0 \Rightarrow V - L - L_0 = 0 \Rightarrow V = L + L_0 \quad (5.2-4)$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H_0 x_1) &= V_2 y_2 - L_0 x_1 - L x_1 \Rightarrow H_0 \frac{dx_1}{dt} = V_2 y_2 - x_1 (L_1 + L_0) \Rightarrow \\ H_0 \frac{dx_1}{dt} &= V_2 y_2 - x_1 V \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{V}{H_0} (y_2 - x_1) \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{V}{H_0} (M_2 x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (5.2-5)$$

ΕΠΙΠΕΔΟ 2: Δίσκος 1^{ος}

Συνολική ισορροπία μάζας:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow L_1 - L_2 + V_3 - V_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 \equiv L \\ V_2 = V_3 \equiv V \end{cases} \quad (5.2-6)$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Hx_2) &= L_1x_1 - L_2x_2 + V_3y_3 - V_2y_2 \Rightarrow \\ \dot{x}_2 &= \frac{L}{H}(x_1 - x_2) + \frac{V}{H}(M_3x_3 - M_2x_2) \end{aligned} \quad (5.2-7)$$

ΕΠΙΠΕΔΟ j : Τυχαίος δίσκος πριν την τροφοδότηση στο επίπεδο f
(Rectifying section).

Συνολική ισορροπία μάζας: Ομοίως με τα προηγούμενα:

$$L_j = L_{j-1} \quad (5.2-8)$$

$$V_j = V_{j+1}$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\frac{d}{dt}(Hx_j) = Lx_{j-1} - Lx_j + Vy_{j+1} - Vy_j \Rightarrow$$

$$x_j = \frac{L}{H}(x_{j-1} - x_j) + \frac{V}{H}(M_{j+1}x_{j+1} - M_jx_j) \quad (5.2-9)$$

ΕΠΙΠΕΔΟ f: Δίσκος τροφοδότησης.

Συνολική ισορροπία μάζας:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow L_{f-1} - L_f + L_F = 0 \Rightarrow L_f = L_{f-1} + L_F \quad (5.2-10)$$

Ομοίως:

$$V_{f+1} = V_f$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Hx_f) &= Lx_{f-1} - (L + L_F)x_f + V(y_{f+1} - y_f) + L_Fx_F \Rightarrow \\ \dot{x}_f &= \frac{L}{H}(x_{f-1} - x_f) + \frac{V}{H}(M_{f+1}x_{f+1} - M_fx_f) - \frac{L_f}{H}x_f + \frac{L_f}{H}x_F \end{aligned} \quad (5.2-11)$$

ΕΠΙΠΕΔΟ j: Τυχαιός δίσκος μετά την τροφοδότηση στο επίπεδο f.

(Stripping section)

Συνολική ισορροπία μάζας:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow L_{j-1} - L_j + V_{j+1} - V_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_j = L_{j+1} \equiv L + L_F \\ V_{j+1} = V_j \equiv V \end{cases} \quad (5.2-12)$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\frac{d}{dt}(Hx_j) = (L + L_f)x_{j-1} - (L + L_f)x_j + V(y_{j+1} - y_j) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_j = \frac{L}{H}(x_{j-1} - x_j) + \frac{V}{H}(M_{j+1}x_{j+1} - M_jx_j) + \frac{L_F}{H}(x_{j-1} - x_j) \quad (5.2-13)$$

ΕΠΙΠΕΔΟ n-1: Τελευταίος δίσκος

Συνολική ισορροπία μάζας: Ομοίως με τα προηγούμενα:

$$L_{n-1} = L_{n-2} \equiv L + L_F \quad (5.2-14)$$

$$V_n = V_{n-1} \equiv V$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Hx_{n-1}) &= (L + L_F)x_{n-2} - (L + L_F)x_{n-1} + Vy_n - Vy_{n-1} \Rightarrow \\ \dot{x}_{n-1} &= \frac{L}{H}(x_{n-2} - x_{n-1}) + \frac{V}{H}(M_n x_n - M_{n-1} x_{n-1}) + \frac{L_F}{H}(x_{n-2} - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.2-15)$$

ΕΠΙΠΕΔΟ n : Αναβραστήρας (Boiler)

Συνολική ισορροπία μάζας:

$$\frac{d(H_n)}{dt} = 0 \Rightarrow L_{n-1} - L_n - V_n = 0 \Rightarrow (L + L_F) - L_n - V_n = 0 \Rightarrow$$

$$L_n = L + L_F - V \quad (5.2-16)$$

Ενεργειακή ισορροπία συστατικών:

$$\frac{d}{dt}(H_n x_n) = (L + L_F)x_{n-1} - L_n x_n - Vy_n \Rightarrow$$

$$H_n \dot{x}_n = (L + L_F)x_{n-1} - (L + L_F - V)x_n - Vy_n \Rightarrow$$

$$\dot{x}_n = \frac{L}{H_n}(x_{n-1} - x_n) + \frac{V}{H_n}(x_n - M_n x_n) + \frac{L_F}{H_n}(x_{n-1} - x_n) \quad (5.2-17)$$

Διαλέγοντας σαν καταστάσεις του συστήματος τα $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{f-1}, x_f, x_{f+1}, \dots, x_j, \dots, x_n$ και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις (5.2-4) έως (5.2-17) που αφορούν στις δυναμικές καταστάσεις των επιπέδων 1 έως n αναγόμεστε στο ακόλουθο σύστημα των εξισώσεων κατάστασης:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 \mathbf{d}_i(\mathbf{x})\mathbf{w}_i \quad (5.2-18)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

όπου:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1 - x_2) \\ \vdots \\ (x_{j-1} - x_j) \\ \vdots \\ (x_{f-1} - x_f) \\ \vdots \\ (x_{j-1} - x_j) \\ \vdots \\ \frac{H}{H_n} (x_{n-1} - x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{H}{H_0} (M_2 x_2 - x_1) \\ (M_3 x_3 - M_2 x_2) \\ \vdots \\ (M_{j+1} x_{j+1} - M_j x_j) \\ \vdots \\ (M_{f+1} x_{f+1} - M_f x_f) \\ \vdots \\ (M_{j+1} x_{j+1} - M_j x_j) \\ \vdots \\ \frac{H}{H_n} (x_n - M_n x_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -x_f \\ x_f - x_{f-1} \\ \vdots \\ x_{j-1} - x_j \\ \vdots \\ \frac{H}{H_n}(x_{n-1} - x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα εξόδου θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

εφόσον επιθυμούμε τον έλεγχο της γραμμομοριακής συγκέντρωσης των ακόλουθων δύο προϊόντων. Του προϊόντος που απομακρύνεται από το συμπυκνωτήρα (condenser) x_0 με ρυθμό L_0 , δηλαδή του προϊόντος της απόσταξης, και του προϊόντος βάσης (liquid bottoms product) το οποίο απομακρύνεται από τον αναβραστήρα (reboiler) x_n , με ρυθμό L_n .

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι η γραμμομοριακή συγκέντρωση του ατμού y_2 που απομακρύνεται από τον πρώτο δίσκο της αποστακτικής στήλης είναι δυναμικά ίση με τη συγκέντρωση του υγρού που απομακρύνεται από τον συμπυκνωτήρα μόνο μόνο στην σταθερή κατάσταση. Στη συνέχεια, αυτή τη συγκέντρωση του υγρού x_0 που είναι είσοδος στον κορυφαίο δίσκο της αποστακτικής στήλης x_1 ($x_0 = x_1$), τη λαμβάνουμε ως έξοδο του συστήματος, δηλαδή η γραμμομοριακή συγκέντρωση x_1 είναι το προϊόν

διύλισης. Αντί να πάρουμε σαν έξοδο το x_1 , λαμβάνουμε ως έξοδο το x_2 , εφόσον το x_2 σχετίζεται άμεσα από το x_1 κι έτσι, ο έλεγχος του x_2 οδηγεί στον έλεγχο του x_1 .

Τα διανύσματα εισόδου και διαταραχών δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{L}{H} \\ \frac{V}{H} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{L_F}{H} \\ \frac{L_F x_F}{H} \end{bmatrix}$$

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με τη μελέτη του ισοδύναμου συστήματος με αυτό της μορφής της (5.2-18), ελείπει διαταραχών (nominal system) Θεωρούμε δηλαδή ότι η επίδραση των διαταραχών στο σύστημα είναι αμεληταία. Επομένως το σύστημα (5.2-18) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

και

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

ή

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i$$

και

για $i = 1, 2$

(5.2-19)

$$y_i(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{x})$$

Το ανοικτό σύστημα των εξισώσεων κατάστασης (2.2-1), στη συγκεκριμένη μας εφαρμογή ισχύει για $m = 2$ και $\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

5.2.3. Απλοποίηση του μοντέλου της αποστακτικής στήλης

Όπως φαίνεται από το σχήμα 1.1, αν θεωρήσουμε ότι $n = 4$, δηλαδή λάβουμε υπ

όψη μας μόνο τα επίπεδα 1, 2, f, n, του σχήματος 5.1. θα συνεχίσει να είναι έγκυρο το μοντέλο μας.

Η επιλογή του μοντέλου της αποστακτικής στήλης με 2 δίσκους γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας για να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος της σχεδίασης του νόμου ελέγχου. Αυτό συμβαίνει διότι η πειραματική αποστακτική στήλη μας θα περιλαμβάνει τον ψυκτήρα, τον αποδέκτη, τη νοητή γραμμή αναρροής και τον αναβραστήρα, καθώς επίσης τον πρώτο δίσκο της αποστακτικής στήλης (επίπεδο 2) και τον δίσκο στον οποίο γίνεται η τροφοδότηση του υλικού προς απόσταξη. Δηλαδή, περιλαμβάνει όλα τα βασικά εργαλεία που απαιτούνται για τη λειτουργία της αποστακτικής στήλης.

Επομένως, το τελικό μοντέλο προς ανάλυση έχει τη μορφή των εξισώσεων κατάστασης της σχέσης (5.2-19).

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i \quad \text{για } i = 1, 2.$$

(5.2-20)

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

όπου:

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{H}{H_0}(M_2 x_2 - x_1) \\ M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ M_4 x_4 - M_3 x_3 \\ -\frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix},$$

η έξοδος

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

και η είσοδος

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{L}{H} \\ \frac{V}{H} \end{bmatrix}$$

5.3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

Από την ανάλυση του μοντέλου, είναι φανερό ότι η διαδικασία της απόσταξης αφορά μια υψηλά μη γραμμική διαδικασία. Από την πλευρά του Αυτομάτου Ελέγχου, είναι φανερό ότι είναι πολύ δύσκολο να σχεδιαστεί νόμος ελέγχου για τη ικανοποίηση των προδιαγραφών που θα θέλαμε να παρουσιάζει το σύστημα.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα της αποστακτικής στήλης είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να βρούμε νόμο ελέγχου βασισμένο στο μη γραμμικό σύστημα που να πετυχαίνει την παραγωγή της συγκεκριμένης επιθυμητής σύστασης των δύο προϊόντων εξόδου: Της γραμμομοριακής συγκέντρωσης του προϊόντος της απόσταξης x_1 (moles) και της γραμμομοριακής συγκέντρωσης του προϊόντος βάσης x_n (moles). Στόχος μας δηλαδή είναι η βελτίωση της καθαρότητας του προϊόντος απόσταξης με ταυτόχρονη μείωση της συγκέντρωσης του προϊόντος βάσης.

Για τους προαναφερθέντες λόγους, είναι λογικό να αναζητήσουμε πρώτα την ύπαρξη ενός νόμου ελέγχου ο οποίος θα απλοποιεί το αρχικό μη γραμμικό σύστημα. Με τον όρο απλοποίηση εννοούμε τη δυνατότητα το κλειστό σύστημα που θα προκύψει να έχει μια γραμμική περιγραφή εισόδου - εξόδου. Αν αυτό είναι δυνατό, είναι φανερό ότι ο περαιτέρω έλεγχος του συστήματος απλοποιείται πάρα πολύ επειδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολύ γνωστές μεθόδους σχεδίασης από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων.

Μια επιπλέον λογική απαίτηση για το πρότυπο, είναι να το θεωρήσουμε όχι μόνο γραμμικό αλλά και ταυτόχρονα αποσυζευγμένο. Η απαίτηση για αποσυζευγμένο πρότυπο πηγάζει από την ανάγκη για έλεγχο των εξόδων, ανεξάρτητα της μιας από την άλλη.

5.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

5.4.1. Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών

Οι πρώτες "Markov" παράμετροι του συστήματος (5.2-20), που δίνονται από τις σχέσεις (2.4-1), είναι

$$L_{g_1} L_{g_0}^0 h_1(x) = L_{g_1} x_2 = x_1 - x_2 \neq 0$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^0 h_1(x) = L_{g_2} x_2 = M_3 x_3 - M_2 x_2 \neq 0$$

(5.4-1)

$$L_{g_1} L_{g_0}^0 h_2(x) = L_{g_1} x_4 = \frac{H}{H_n} (x_3 - x_4) \neq 0$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^0 h_2(x) = L_{g_2} x_4 = \frac{H}{H_n} (x_4 - M_4 x_4) \neq 0$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η υπόθεση A.

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.1., οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του αρχικού ανοικτού συστήματος είναι

$$\left(d_1 \right)_A = 0,$$

και

$$\left(d_2 \right)_A = 0,$$

(5.4-2)

Παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί είναι πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί.

Από τον ορισμό του πίνακα $\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x})$, που δίνεται στη σχέση (2.4-5c), βρίσκουμε ότι αυτός θα έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) & \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} \quad (5.4-3)$$

5.4.2. Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου που περιγράφει το εκκρεμές

Η αποστακτική στήλη περιγράφεται με ένα μοντέλο το οποίο ανήκει στην κλάση των συστημάτων που εξετάζει η θεωρία του Κεφαλαίου 2, εφόσον ισχύει

$$\beta = \text{rank} \left(\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right) = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

και

$$m = 2$$

(5.4-4)

οπότε ισχύει ότι

$$\text{rank} \left(\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right) = m = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

όπου $\mathcal{U} = \mathbb{R}^4 - \left\{ \mathbf{x} : \left| \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right| = 0 \right\}$. Αποδεικνύεται στην εργασία [] ότι ο χώρος \mathcal{U} είναι ο χώρος κατάστασης του συστήματος.

5.4.3. Επιλογή του γραμμικού προτύπου για το σύστημα της Αποστακτικής Στήλης

Θεωρούμε το γραμμικό, χρονικά μη μεταβαλλόμενο σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\dot{z} = A_M z + B_M w \quad (5.4-5)$$

$$y_M = C_M z$$

όπου

$$A_M = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

όπου $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του είναι της ακόλουθης μορφής

$$H_M(s) = C_M (sI - A_M)^{-1} B_M = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{s + p_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{s + p_2} \end{bmatrix} \quad (5.4-6)$$

Το πρότυπο που διαλέξαμε είναι ένα σύστημα 2ης τάξης με αυθαίρετους πόλους, εφόσον οι συντελεστές p_1, p_2 , του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι αυθαίρετοι αριθμοί.

Τώρα, θα βρούμε τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του προτύπου, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.4.2, εφόσον έχουμε την περιγραφή του στο χώρο κατάστασης.

Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του προτύπου (5.4-5) είναι

$$\begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix}_M A_M^0 B_M = \begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix}_M B_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4-7a)$$

$$\begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix}_M A_M^0 B_M = \begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix}_M B_M = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (5.4-7b)$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη μὴ μηδενική "Μαρκον" παράμετρος του προτύπου είναι η $C_M A_M^0 B_M$. Επομένως για το πρότυπο (5.4-5) δύο εισόδων - δύο εξόδων, οι χαρακτηριστικοί αριθμοί $(d_i)_M$, για $i = 1, 2$, σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.2., είναι

$$(d_1)_M = 0$$

και

$$(d_2)_M = 0$$

(5.4-8)

Επομένως, ο πίνακας M_0 , που δίνεται από τη σχέση (2.4-5b), είναι

$$M_0 = C_M A_M^0 B_M = C_M B_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (5.4-9)$$

5.4.4. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες

- Συνθήκη 1

Από τη σύγκριση των χαρακτηριστικών αριθμών $(d_i)_A$ του αρχικού ανοικτού συστήματος (5.4-2) με τους χαρακτηριστικούς αριθμούς $(d_i)_M$ του προτύπου (5.4-8), παρατηρούμε ότι

$$(d_i)_A = (d_i)_M = 0, \text{ για } i = 1, 2, \forall x \in \mathcal{U}$$

Επομένως, επαληθεύεται η πρώτη των συνθηκών του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 2

Η δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2. για το συγκεκριμένο μοντέλο της αποστακτικής στήλης, για το οποίο ισχύει $p = m$ (αριθμός εξόδων = αριθμός εισόδων), είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = m = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \quad (5.4-10)$$

Από τις σχέσεις (5.4-4) και (5.4-9), έχουμε αντίστοιχα

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) & \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \quad (5.4-11)$$

$$\text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = 2$$

Επομένως, επαληθεύεται και η δεύτερη των συνθηκών του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 3

Για να εξετάσουμε την ισχύ της τρίτης συνθήκης, αρκεί να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$ και μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\begin{matrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right]$.

Μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$, υπολογίζεται βρίσκοντας κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, ο οποίος ορίζεται στην (2.4-13a) και έχει τη μορφή

$$Q(x) = \left[g(x) \parallel \text{ad}_{g_0} G(x) \parallel \text{ad}_{g_0}^2 G(x) \parallel \text{ad}_{g_0}^3 G(x) \parallel \dots \parallel \text{ad}_{g_0}^6 G(x) \right] \quad (5.4-12a)$$

Παρατηρώντας ότι $\text{ad}_{g_0}^i G(x) = 0$, για $i > 0$, εφόσον $g_0(x) = 0$, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$Q(x) = \left[g_1(x) \parallel g_2(x) \parallel 0 \parallel 0 \parallel \dots \parallel 0 \right] \quad (5.4-12b)$$

Η τάξη του πίνακα αυτού είναι 2, $\forall x \in \mathbb{U}$, εφόσον ισχύει ότι: Το διάνυσμα

$$g_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{H}{H_0}(M_2 x_2 - x_1) \\ M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο του $g_1(x)$, όπου

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \\ \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) \end{bmatrix}$$

Αρα

$$\text{rank} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & \frac{H}{H_0}(M_2 x_2 - x_1) \\ x_1 - x_2 & M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ x_1 - x_2 & M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) & \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \quad (5.4-13)$$

Ο χώρος που παράγεται από τις στήλες $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, και $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ δεν είναι involutive εφόσον

$$\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \notin \text{span} \left\{ \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \right\}$$

όπου

$$\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{H}{H_0} M_2 (x_1 - x_2) \\ \dots \\ M_3 x_2 - M_2 x_1 - \frac{H}{H_0} (M_2 x_2 - x_1) \\ \dots \\ M_2 x_2 - M_3 x_3 - M_3 x_2 + M_4 x_4 + \frac{H}{H_n} M_4 (x_3 - x_4) \\ \dots \\ \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 (1 - M_4) x_3 - \frac{H}{H_n} (M_4 x_4 - M_3 x_3) \end{bmatrix} \quad (5.4-14)$$

Επομένως, για να υπολογίσουμε το $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$, θα πρέπει να κατασκευάσουμε τα διανυσματικά πεδία που παράγονται από τα $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ και $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, μέσω της πράξης του $\left[\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]$. Για το λόγο αυτό, υπολογίζουμε και το διανυσματικό πεδίο $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right]$, το οποίο έχει τη μορφή

$$\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \right] = \left[\begin{array}{l} \frac{H}{H_0} M_2 (x_1 - x_2) \\ \dots \\ M_3 x_1 - M_2 x_1 + \frac{H}{H_0} (x_1 - 2M_2 x_1 + M_2 x_2) \\ \dots \\ 2M_2 x_1 - M_3 x_1 - 2M_3 x_2 + M_4 x_4 + \frac{H}{H_0} (M_2 x_2 - x_1) + \\ + \frac{H}{H_n} (M_4 x_2 + M_4 x_3 - 2M_4 x_4) + \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 (M_4 x_4 - M_4 x_3) \\ \dots \\ \frac{H}{H_n} (2M_3 x_2 - M_2 x_2 - M_4 x_4) + \left(\frac{H}{H_n} \right)^3 (x_3 - M_4 x_3) + \\ + \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 (x_2 - x_3 - M_4 x_2 + M_4 x_4 - M_4 x_3 + M_3 x_3) \end{array} \right] \quad (5.4-15)$$

Το διανυσματικό πεδίο $\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \right]$, είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ και $\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right]$.

Οπότε, ο πίνακας $\hat{Q}(\mathbf{x})$, που ορίζεται ως εξής

$$\hat{Q}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \quad \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \quad \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \right] \end{array} \right] \quad (5.4-16)$$

του οποίου οι στήλες $\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right]$, και $\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \right]$, έχουν δοθεί στις σχέσεις (5.4-14) και (5.4-15), αντίστοιχα, είναι πλήρους τάξης, δηλ.

$$\text{rank}\hat{Q}(x) = 4, \quad \forall x \in U \quad (5.4-17)$$

Είναι προφανές τότε ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του $\hat{Q}(x)$ είναι involutive. Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι το involutive closure της κατανομής που παράγεται από τις στήλες του $Q(x)$, θα είναι

$$\begin{aligned} \text{inv}[Q(x)] &= \text{span}[\hat{Q}(x)] = \\ &= \text{span} \left[\begin{array}{c|c|c|c} g_1(x) & g_2(x) & [g_1(x), g_2(x)] & [g_1(x), [g_1(x), g_2(x)]] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.4-18)$$

Από τις σχέσεις (5.4-17) και (5.4-18), θα έχουμε ότι

$$\dim\{\text{inv}[Q(x)]\} = \dim\{\text{span}[\hat{Q}(x)]\} = 4 \quad (5.4-19)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \begin{bmatrix} Q(x) \\ Z(x) \end{bmatrix}$, θα υπολογίσουμε κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} Q(x) \\ Z(x) \end{bmatrix}$, ο ορισμός του οποίου δίνεται στη σχέση (2.4-15) και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} Q(x) \\ Z(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(x) & \text{ad}_{g_0} G(x) & \text{ad}_{g_0}^2 G(x) & \dots & \text{ad}_{g_0}^6 g(x) \\ Z_1(x) & Z_2(x) & Z_3(x) & \dots & Z_6(x) \end{bmatrix} \quad (5.4-20)$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα που δίνεται στην (5.4-20) είναι οι ακόλουθες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) \\ \hline -\frac{P_1}{\alpha}(x_1 - x_2) \\ -\frac{P_2}{\beta} - \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) \end{bmatrix} \quad (5.4-21a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H}{H_0}(M_2 x_2 - x_1) \\ M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ M_3 x_3 - M_2 x_2 \\ \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \\ \hline -\frac{P_1}{\alpha}(M_3 x_3 - M_2 x_2) \\ -\frac{P_2}{\beta} - \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} \quad (5.4-21b)$$

όπου για τον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) = [\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \vdots \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x})]$, υπολογίστηκαν οι "Μαρκον" παράμετροι $\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{M}_i(\mathbf{x})$ και στη συνέχεια τα $\mathbf{L}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})$, για $i = 1, 2, \dots$ όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Από την επαναληπτική σχέση (2.4-5c), για τις Μαρκοβιανές $\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x})$, υπολογίστηκαν οι πίνακες αυτοί ως εξής

$$\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{για } i > 0 \quad (5.4-22)$$

εφόσον $\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-5b) υπολογίστηκαν τα M_i για
 $i = 1, 2, 3, 4$.

$$M_1 = C_M A_M^1 B_M = \begin{bmatrix} -p_1 \alpha & 0 \\ 0 & -p_2 \beta \end{bmatrix} \quad (5.4-23a)$$

$$M_2 = C_M A_M^2 B_M = \begin{bmatrix} p_1^2 \alpha & 0 \\ 0 & p_2^2 \beta \end{bmatrix} \quad (5.4-23b)$$

$$M_3 = C_M A_M^3 B_M = \begin{bmatrix} -p_1^3 \alpha & 0 \\ 0 & -p_2^3 \beta \end{bmatrix} \quad (5.4-23c)$$

$$M_4 = C_M A_M^4 B_M = \begin{bmatrix} p_1^4 \alpha & 0 \\ 0 & p_2^4 \beta \end{bmatrix} \quad (5.4-23d)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-11), και τις
σχέσεις (5.4-3) και (5.4-9) υπολογίσαμε τα $L_i(x)$ για $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
θέτοντας $P_0 = I$.

$$L_0(x) = M_0^{-1} B_0^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} (x_1 - x_2) & \frac{1}{\alpha} (M_3 x_3 - M_2 x_2) \\ \frac{1}{\beta} \frac{H}{H_n} (x_3 - x_4) & \frac{1}{\beta} \frac{H}{H_n} (x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} \quad (5.4-24)$$

Από τη σχέση (2.4-10a), βρήκαμε τον πίνακα $B^{-1}(x)$ του νόμου ανατροφοδότησης
(2.3-1), ο οποίος έχει τη μορφή

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(x_1 - x_2) & \frac{1}{\alpha}(M_3 x_3 - M_2 x_2) \\ \frac{1}{\beta} \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) & \frac{1}{\beta} \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} \quad (5.4-25)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{M}_0^{-1} \left(\mathbf{M}_1 \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_1^*(\mathbf{x}) \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{P_1}{\alpha}(x_1 - x_2) & \frac{P_1}{\alpha}(M_3 x_3 - M_2 x_2) \\ \frac{P_2}{\beta} \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) & \frac{P_2}{\beta} \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4-26a)$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_0^{-1} \left(\mathbf{M}_2 \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_1 \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2^*(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0} \quad (5.4-26b)$$

...

$$\mathbf{L}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad , \text{ για } i \geq 2 \quad (5.4-26c)$$

Τελικά, από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-15), βρήκαμε τους υποπίνακες \mathbf{Z}_i του πίνακα $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ της σχέσης (2.4-13b), που έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) & \vdots & \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{P_1}{\alpha}(x_1 - x_2) & \frac{P_1}{\alpha}(M_3 x_3 - M_2 x_2) \\ \frac{P_2}{\beta} \frac{H}{H_n}(x_3 - x_4) & \frac{P_2}{\beta} \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4 x_4) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4-27a)$$

$$\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{για } i > 1 \quad (5.4-27b)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.4-12b), (5.4-20) και (5.4-27b), καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα

$$\text{span} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{array} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (5.4-28)$$

όπου $\text{span}\{\Lambda(\mathbf{x})\}$ είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα $\Lambda(\mathbf{x})$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right]$$

δεν είναι involutive εφόσον ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \end{array} \right] \notin \text{span} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \quad (5.4-29)$$

όπου

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \\ \hline L_{\mathbf{g}_1} \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{g}_2} \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \frac{H}{H_0} M_2 (x_1 - x_2) \\ M_3 x_2 - M_2 x_1 - \frac{H}{H_0} (M_2 x_2 - x_1) \\ M_2 x_2 - M_3 x_3 - M_3 x_2 + M_4 x_4 + \frac{H}{H_n} M_4 (x_3 - x_4) \\ \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 (1 - M_4) x_3 - \frac{H}{H_n} (M_4 x_4 - M_3 x_3) \\ \frac{P_1}{\alpha} (M_2 x_1 - M_3 x_2) + \frac{H}{H_0} \frac{P_1}{\alpha} (M_2 x_2 - x_1) \\ \frac{H}{H_n} \frac{P_2}{\beta} (M_4 x_4 - M_3 x_3) - \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 \frac{P_2}{\beta} (1 - M_4) x_3 \end{array} \right] \quad (5.4-30)
 \end{aligned}$$

Η σχέση (5.4-30), προέκυψε από τον ακόλουθο ορισμό [19]

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{22}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \triangleq \\
 & \triangleq \left[\begin{array}{c} d_x \left(\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right) \vdots d_\xi \left(\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right] - \\
 & - \left[\begin{array}{c} d_x \left(\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right) \vdots d_\xi \left(\begin{array}{c} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \quad (5.4-31)
 \end{aligned}$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ είναι διαστάσεως 4 και τα διανύσματα $\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x})$ είναι διαστάσεως 2. Το ξ είναι μια βοηθητική μεταβλητή διαστάσεως 2 με $\xi \neq \mathbf{x}$.

Επομένως, λόγω του ορισμού (5.4-31) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right] \\ \hline \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \right] \end{array} , \begin{array}{c} \left[\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \\ \hline \left[\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right] = \\
 & = \left[\begin{array}{c} d_x \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right) \quad \vdots \quad 0 \\ \left[\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right] \\ \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} d_x \left(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right) \quad \vdots \quad 0 \\ \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \\ \left[\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \right] \end{array} \right] \\
 & = \left[\begin{array}{c} d_x \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - d_x \left(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \left[\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \end{array} \right] = \\
 & = \left[\begin{array}{c} d_x \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \left[\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} d_x \left(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \left[\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \end{array} \right] = \\
 & = \left[\begin{array}{c} \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \right] \\ \hline L_{\mathbf{g}_1} \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{g}_2} \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \tag{5.4-32}
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι τα $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x})$ είναι συναρτήσεις του \mathbf{x} μόνο κι όχι του ξ .

Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το $\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, θα πρέπει να κατασκευάσουμε τα διανυσματικά πεδία που παράγονται μέσω της πράξης του $\begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ από τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \text{ τα οποία έχουν υπολογιστεί στις σχέσεις (5.4-21).}$$

Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.4-32), υπολογίζουμε το

$$\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

και έχουμε

$$\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{H}{H_0} M_2 (x_2 - x_1) \\
 & M_3 x_1 - M_2 x_1 + \frac{H}{H_0} (x_1 - 2M_2 x_1 + M_2 x_2) \\
 & 2M_2 x_1 - M_3 x_1 - 2M_3 x_2 + M_4 x_4 + \frac{H}{H_0} (M_2 x_2 - x_1) + \\
 & + \frac{H}{H_n} (M_4 x_2 + M_4 x_3 - 2M_4 x_4) + \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 (M_4 x_4 - M_4 x_3) \\
 = & \frac{H}{H_n} (2M_3 x_2 - M_2 x_2 - M_4 x_4) + \left(\frac{H}{H_n} \right)^3 (x_3 - M_4 x_3) + \\
 & + \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 (x_2 - x_3 - M_4 x_2 + M_4 x_4 - M_4 x_3 + M_3 x_3) \\
 & \frac{P_1}{\alpha} (M_2 x_1 - M_3 x_1) + \frac{H}{H_0} \frac{P_1}{\alpha} (2M_2 x_1 - M_2 x_2 - x_1) \\
 & \frac{H}{H_n} \frac{P_2}{\beta} (M_2 x_2 + M_4 x_4 - 2M_3 x_2) + \\
 & \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 \frac{P_2}{\beta} (-x_2 + x_3 + M_4 x_2 - M_3 x_3 - M_4 x_3 + M_4 x_4) + \\
 & + \left(\frac{H}{H_n} \right)^3 \frac{P_2}{\beta} (M_4 x_3 - x_3)
 \end{aligned} \tag{5.4-33}$$

Για τον πίνακα $\begin{bmatrix} \hat{Q}(x) \\ \hat{Z}(x) \end{bmatrix}$, ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} & \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{array} \right] \\ \vdots & & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}_{12}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (5.4-34)$$

έχουμε ότι

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 4 \quad (5.4-35)$$

Επίσης, ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ είναι involutive.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση (5.4-35), έχουμε

$$\text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.4-36)$$

Αρα,

$$\dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \text{span} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = 4 \quad (5.4-37)$$

Τελικά, συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.4-19) και (5.4-37), θα έχουμε ότι

$$\dim \left\{ \text{inv} \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \right\} = \dim \left\{ \text{inv} \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{array} \right] \right\} = 4 \quad (5.4-38)$$

Επομένως, η συνθήκη 3 του Θεωρήματος 2.4.2. ισχύει. Αρα, το πρόβλημα του ταιριάσματος του μη γραμμικού συστήματος (5.2-20) στο γραμμικό πρότυπο (5.4-5) έχει λύση.

5.4.5. Εύρεση του νόμου ελέγχου

Εφόσον ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2. για το μη γραμμικό σύστημα της αποστακτικής στήλης της μορφής (5.2-20) και το γραμμικό πρότυπο της μορφής (5.4-5), η γενική λύση για το νόμο ελέγχου (2.3-1), η οποία θα δώσει τη λύση στο πρόβλημα του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, υπολογίζεται με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4-16) ως εξής

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0^{-1}(\mathbf{x})$$

και

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})$$

όπου το $d\phi(\mathbf{x})$ υπολογίζεται από τη λύση του ακόλουθου συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, που δίνονται στο Θεώρημα 2.4.1., και έχουν τη μορφή

$$d\phi \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right] = \mathbf{Z}(\mathbf{x})$$

Η προηγούμενη εξίσωση μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως εξής

$$d\phi \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(x) \\ \vdots \\ Z_{12}(x) \end{bmatrix} \quad (5.4-39)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (5.4-27b) και (5.4-12b).

Περαιτέρω, κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.4.2., υπάρχει $\phi(x)$ που ικανοποιεί την εξίσωση (5.4-39), οπότε θα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$L_{g_1} \phi(x) = Z_{11}(x) \quad (5.4-40a)$$

και

$$L_{g_2} \phi(x) = Z_{12}(x) \quad (5.4-40b)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.4-40), μπορούμε να γράψουμε τα $L_{[g_1(x), g_2(x)]} \phi(x)$ και $L_{[g_1(x), [g_1(x), g_2(x)]]} \phi(x)$ αντίστοιχα, στις ακόλουθες μορφές

$$\begin{aligned} L_{[g_1(x), g_2(x)]} \phi(x) &= L_{g_1(x)} L_{g_2(x)} \phi(x) - L_{g_2(x)} L_{g_1(x)} \phi(x) = \\ &= L_{g_1(x)} Z_{12}(x) - L_{g_2(x)} Z_{11}(x) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{p_1}{\alpha} (M_2 x_1 - M_3 x_2) + \frac{H}{H_0} \frac{p_1}{\alpha} (M_2 x_2 - x_1) \\ \frac{H}{H_n} \frac{p_2}{\beta} (M_4 x_4 - M_3 x_3) - \left(\frac{H}{H_n} \right)^2 \frac{p_2}{\beta} (1 - M_4) x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4-41)$$

και

$$L_{[g_1(x), [g_1(x), g_2(x)]]} \phi(x) =$$

$$\begin{aligned}
 &= L_{g_1} \left(L_{g_1(x)} Z_{12}(x) - L_{g_2(x)} Z_{11}(x) \right) - L_{[g_1(x), g_2(x)]} Z_{11}(x) = \\
 &= L_{g_1}^2 Z_{12}(x) - L_{g_1} L_{g_2} Z_{11}(x) - L_{[g_1, g_2]} Z_{11}(x) = \\
 &= \left[\begin{aligned}
 &\frac{P_1}{\alpha} (M_2 x_1 - M_3 x_2) + \frac{H}{H_0} \frac{P_1}{\alpha} (2M_2 x_1 - M_2 x_2 - x_1) \\
 &\frac{H}{H_n} \frac{P_2}{\beta} (M_2 x_2 + M_4 x_4 - 2M_3 x_2) + \\
 &\left(\frac{H}{H_n} \right)^2 \frac{P_2}{\beta} (-x_2 + x_3 + M_4 x_2 - M_3 x_3 - M_4 x_3 + M_4 x_4) + \\
 &+ \left(\frac{H}{H_n} \right)^3 \frac{P_2}{\beta} (M_4 x_3 - x_3)
 \end{aligned} \right] \tag{5.4-43}
 \end{aligned}$$

οπότε, η εξίσωση (5.4-39) μαζί με τις (5.4-41 και (5.4-42) τις οποίες ικανοποιεί το $d\phi(x)$, λαμβάνει τη μορφή

$$d\phi(x) \hat{Q}(x) = \hat{Z}(x) \tag{5.4-43}$$

όπου

$$\hat{Q}(x) = \left[\begin{array}{c} g_1(x) \vdots g_2(x) \vdots [g_1(x), g_2(x)] \vdots [g_1(x), [g_1(x) \vdots g_2(x)]] \end{array} \right]$$

και

$$\hat{Z}(x) = \left[\begin{array}{c} Z_{11}(x) \vdots Z_{12}(x) \vdots L_{g_1} Z_{12}(x) - L_{g_2} Z_{11}(x) \vdots \end{array} \right]$$

$$\vdots L_{g_1}^2 Z_{12}(x) - L_{g_1} L_{g_2} Z_{11}(x) - L_{[g_1, g_2]} Z_{11}(x) \Big]$$

όπου οι στήλες $[g_1(x), g_2(x)]$ και $[g_1(x), [g_1(x) \vdots g_2(x)]]$ του πίνακα $\hat{Q}(x)$ δίνονται στις σχέσεις (5.4-14) και (5.4-15) αντίστοιχα, ενώ οι τέσσερις στήλες του πίνακα $\hat{Z}(x)$ έχουν υπολογιστεί στις σχέσεις (5.4-27a), (5.4-41) και (5.4-42).

Προφανώς, ο πίνακας $d\phi(x)$ στην (5.4-43) είναι διαστάσεων 2×4 . Λύνοντας λοιπόν το σύστημα (5.4-43), ως προς $d\phi(x)$, βρίσκουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$d\phi(x) = \begin{bmatrix} d\phi_1(x) \\ \dots \\ d\phi_2(x) \end{bmatrix} = \hat{Z}(x)\hat{Q}^{-1}(x) = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{p_1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_2}{\beta} \end{bmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας τα διαφορικά $d\phi_1(x)$ και $d\phi_2(x)$ ως προς x , θα έχουμε αντίστοιχα

$$\phi_1(x) = - \int_{x_2=0}^{x_2} \left(\frac{p_1}{\alpha} \right) dx_2 = \frac{p_1}{\alpha} x_2 \quad (5.4-44a)$$

$$\phi_2(x) = - \int_{x_4=0}^{x_4} \left(\frac{p_1}{\alpha} \right) dx_4 = \frac{p_2}{\beta} x_4 \quad (5.4-44b)$$

Από τις σχέσεις (5.4-44a) και (5.4-44b) συμπεραίνουμε ότι

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{p_1}{\alpha} x_2 \\ \frac{p_2}{\beta} x_4 \end{bmatrix} \quad (5.4-45)$$

Από τη σχέση (5.4-25) βρίσκουμε τον πίνακα $\mathbf{B}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \alpha \frac{H}{H_n} (x_4 - M_4 x_4) & \beta (M_2 x_2 - M_3 x_3) \\ \alpha \frac{H}{H_n} (x_4 - x_3) & \beta (x_1 - x_2) \end{bmatrix} \quad (5.4-46)$$

όπου

$$n(\mathbf{x}) = \frac{H}{H_n} \left[(x_1 - x_2)(x_4 - M_4 x_4) - (x_3 - x_4)(M_3 x_3 - M_2 x_2) \right]$$

Τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ του νόμου ελέγχου

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

δίνονται, το μεν $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ από την (5.4-46), το δε $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ υπολογίζεται με αντικατάσταση του $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$, στην (2.4-16), οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \alpha \frac{H}{H_n} (x_4 - M_4 x_4) & \beta (M_2 x_2 - M_3 x_3) \\ \alpha \frac{H}{H_n} (x_4 - x_3) & \beta (x_1 - x_2) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{n(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \frac{H}{H_n} p_1 (x_4 - M_4 x_4) x_2 + p_2 (M_2 x_2 - M_3 x_3) x_4 \\ -\frac{H}{H_n} p_1 (x_4 - x_3) x_2 + p_2 (x_1 - x_2) x_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.4-47}$$

όπου

$$n(\mathbf{x}) = \frac{H}{H_n} \left[(x_1 - x_2)(x_4 - M_4 x_4) - (x_3 - x_4)(M_3 x_3 - M_2 x_2) \right]$$

5.4.6. Ειδική λύση του προβλήματος Ακριβούς Ταιριάσματος του συστήματος σε Γραμμικό Πρότυπο

Θεωρώντας το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα της μορφής (5.4-5), θέτουμε $p_i = 0$ για $i = 1, 2$, οπότε οι πίνακες κατάστασης, εισόδου και εξόδου, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\tilde{\mathbf{A}}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_M = \mathbf{I}_2, \quad \tilde{\mathbf{C}}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του νέου Γραμμικού Προτύπου είναι η ακόλουθη.

$$H_M(s) = \tilde{C}_M(sI - \tilde{A}_M)^{-1}B_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (5.4-48)$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος εύρεσης νόμου ελέγχου με σκοπό το Ακριβές Ταιρίασμα στο Πρότυπο της μορφής (5.4-48) με $p_1 = p_2 = 0$, με τη βοήθεια των σχέσεων (5.4-47) της παραγράφου 5.4.5., λαμβάνει την ειδική μορφή

$$B(x) = \frac{1}{n(x)} \begin{bmatrix} \frac{H}{H_n}(x_4 - M_4x_4) & (M_2x_2 - M_3x_3) \\ \frac{H}{H_n}(x_4 - x_3) & (x_1 - x_2) \end{bmatrix} \quad (5.4-49)$$

$$a(x) = 0$$

όπου

$$n(x) = \frac{H}{H_n} \left[(x_1 - x_2)(x_4 - M_4x_4) - (x_3 - x_4)(M_3x_3 - M_2x_2) \right]$$

5.5. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το πρότυπο είναι ένα γραμμικό σύστημα 2ης τάξης, ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. εφόσον ο πίνακας του ελέγξιμου

$$S \triangleq \begin{bmatrix} B_M & \vdots & AB_M \end{bmatrix} \quad (5.5-1)$$

είναι πλήρους τάξης και ο πίνακας του παρατηρήσιμου

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_M \\ \mathbf{C}_M \mathbf{A}_M \end{bmatrix} \quad (5.5-2)$$

είναι επίσης πλήρους τάξης. Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι το πρότυπο είναι ελάχιστης τάξης.

Το αρχικό ανοικτό μη γραμμικό σύστημα, άρα και το κλειστό, επίσης μη γραμμικό σύστημα, είναι 4ης τάξης, οπότε συμπεραίνουμε ότι δύο καταστάσεις του κλειστού συστήματος είναι μη παρατηρήσιμες. Το γεγονός αυτό θα σχολιάσουμε στη συνέχεια.

Το κλειστό σύστημα της αποστακτικής στήλης, σύμφωνα με τη σχέση (2.3-2), έχει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{g}}_0(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{w} \quad (5.5-3)$$

$$\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})$$

όπου

$$\bar{\mathbf{g}}_0(\bar{\mathbf{x}}) = - \begin{bmatrix} g_{01\text{closed}} \\ p_1 x_2 \\ g_{03\text{closed}} \\ p_2 x_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} g_{11\text{closed}} & g_{12\text{closed}} \\ \alpha & 0 \\ g_{31\text{closed}} & g_{32\text{closed}} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

και

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

όπου

$$g_{01}closed = \{((x_1 - m_2*x_2)*(h*p_1*x_2*x_3 - h_n*p_2*x_1*x_4 - h*p_1*x_2*x_4 + h_n*p_2*x_2*x_4))/ (h_o*(m_2*x_2*x_3 - m_3*x_3^2 + x_1*x_4 - m_4*x_1*x_4 - x_2*x_4 - m_2*x_2*x_4 + m_4*x_2*x_4 + m_3*x_3*x_4))\}$$

$$g_{03}closed = \{(-(h*m_3*p_1*x_2*x_3^2) - h*p_1*x_2^2*x_4 + h*m_4*p_1*x_2^2*x_4 - h_n*m_2*p_2*x_2^2*x_4 + h_n*m_3*p_2*x_1*x_3*x_4 + h*p_1*x_2*x_3*x_4 + h*m_3*p_1*x_2*x_3*x_4 + h_n*m_2*p_2*x_2*x_3*x_4 - h_n*m_3*p_2*x_3^2*x_4 - h_n*m_4*p_2*x_1*x_4^2 - h*m_4*p_1*x_2*x_4^2 + h_n*m_4*p_2*x_2*x_4^2)/ (h*(-(m_2*x_2*x_3) + m_3*x_3^2 - x_1*x_4 + m_4*x_1*x_4 + x_2*x_4 + m_2*x_2*x_4 - m_4*x_2*x_4 - m_3*x_3*x_4))\}$$

$$g_{11}closed = (a*h*(-x_1 + m_2*x_2)*(-x_3 + x_4))/ (h_o*(m_2*x_2*x_3 - m_3*x_3^2 + x_1*x_4 - m_4*x_1*x_4 - x_2*x_4 - m_2*x_2*x_4 + m_4*x_2*x_4 + m_3*x_3*x_4))$$

$$g_{31}closed = (a*(-(m_3*x_3^2) - x_2*x_4 + m_4*x_2*x_4 + x_3*x_4 + m_3*x_3*x_4 - m_4*x_4^2))/ (-(m_2*x_2*x_3) + m_3*x_3^2 - x_1*x_4 + m_4*x_1*x_4 + x_2*x_4 + m_2*x_2*x_4 - m_4*x_2*x_4 - m_3*x_3*x_4)$$

$$g_{12}closed = (b*h_n*(x_1 - x_2)*(-x_1 + m_2*x_2))/ (h_o*(m_2*x_2*x_3 - m_3*x_3^2 + x_1*x_4 - m_4*x_1*x_4 - x_2*x_4 - m_2*x_2*x_4 + m_4*x_2*x_4 + m_3*x_3*x_4))$$

$$g_{32}closed = (b*h_n*(m_2*x_2^2 - m_3*x_1*x_3 - m_2*x_2*x_3 + m_3*x_3^2 + m_4*x_1*x_4 - m_4*x_2*x_4))/ (h*(m_2*x_2*x_3 - m_3*x_3^2 + x_1*x_4 - m_4*x_1*x_4 - x_2*x_4 - m_2*x_2*x_4 + m_4*x_2*x_4 + m_3*x_3*x_4))$$

Στη συνέχεια, στο κλειστό σύστημα εφαρμόζοντας τον 1 - 1 και αντιστρέψιμο μετασχηματισμό, $\forall x \in \mathcal{U}$, της μορφής

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_1 \\ z_4 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (5.5-4)$$

καταλήγουμε σε ένα σύστημα της ακόλουθης μορφής

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (5.5-6a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.5-6b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{g}_{01}(\mathbf{z}) \\ \bar{g}_{01}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(\mathbf{z}) & \bar{g}_{12}(\mathbf{z}) \\ \bar{g}_{31}(\mathbf{z}) & \bar{g}_{32}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (5.5-6c)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (5.5-6a) και (5.5-6b) είναι οι εξισώσεις του προτύπου μας, ενώ οι εξισώσεις (5.5-6c) είναι οι διαφορικές εξισώσεις τις οποίες ικανοποιούν οι μη παραμετρικές καταστάσεις z_3 και z_4 του συστήματος της αποστακτικής στήλης.

Όσον αφορά τις εξισώσεις (5.5-6a) και (5.5-6b), παρατηρούμε ότι η κατάλληλη επιλογή των p_1 , p_2 , α και β μας οδηγούν σε ασυμπτωτικά ευσταθείς εξόδους. Βέβαια, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για να είναι το κλειστό σύστημα BIBS ευσταθές, θα πρέπει οι μη παρατηρήσιμες καταστάσεις z_3 και z_4 να είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Η μελέτη της ευστάθειας των καταστάσεων z_3 και z_4 είναι

ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα το οποίο δεν εξετάζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

5.6. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

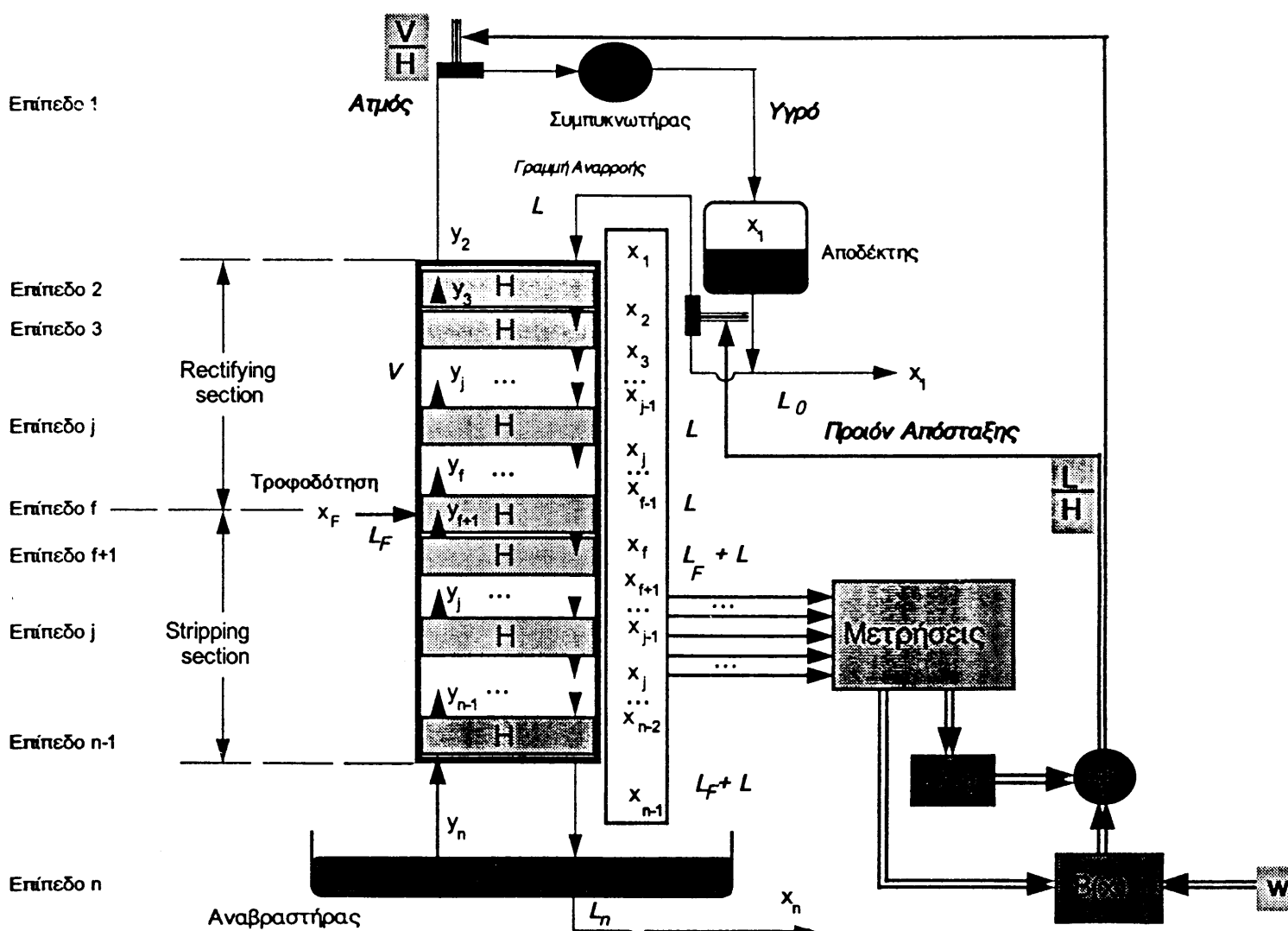
Για την υλοποίηση του μη γραμμικού νόμου ελέγχου της μορφής

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

όπου τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ δίνονται από τη σχέση (5.4-47), απαιτείται η μέτρηση του διανύσματος κατάστασης \mathbf{x} ($x_1, \dots, x_{f-1}, x_f, \dots, x_n$) που είναι το κλάσμα των moles του υγρού που εισάγεται σε κάθε δίσκο της Αποστακτικής Στήλης, αντίστοιχα.

Η μέτρηση των καταστάσεων x_1, x_2, \dots, x_n , δεν μπορεί να γίνει με άμεσο τρόπο. Στην πραγματικότητα, μετράμε τη θερμοκρασία του συστατικού που βρίσκεται στον αντίστοιχο δίσκο και στη συνέχεια εκτιμώνται τα x_1, x_2, \dots, x_n , χρησιμοποιώντας πειραματικές καμπύλες της σύστασης, σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας [31].

Η σχηματική αναπαράσταση της υλοποίησης του νόμου ελέγχου για τα προϊόντα απόσταξης κατά τη διαδικασία της διύλησης, δίνεται στο Σχήμα 5.6.1.



Σχήμα 5.6.1 Υλοποίηση του νόμου ελέγχου που επιτυγχάνει τη γραμμικοποίηση του συστήματος της Αποστακτικής Στήλης.

5.7. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ

Η απεικόνιση εισόδων – εξόδων του αρχικού μη γραμμικού συστήματος, μετά την εφαρμογή του νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής (2.3-1),

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (5.7-1)$$

Εφόσον η περιγραφή εισόδων – εξόδων είναι γραμμική, είναι εύκολος ο σχεδιασμός ενός επιπλέον ρυθμιστή για την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

Ας υποθέσουμε ότι είναι επιθυμητό η έξοδος του συστήματος να παρακολουθεί την προκαθορισμένη τροχιά

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} (y_1)_d \\ (y_2)_d \end{bmatrix}$$

Τότε, αν εφαρμόσουμε στο κλειστό σύστημα (5.2-20) τον ακόλουθο νόμο ελέγχου

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} (y_1)_d^{(1)} \\ (y_2)_d^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1)_d \\ (y_2)_d \end{bmatrix} \right]$$

θα έχουμε

$$y_1^{(1)} + p_1 y_1 = (y_1)_d^{(1)} + p_1 (y_1)_d$$

$$y_2^{(1)} + p_2 y_2 = (y_2)_d^{(1)} + p_2 (y_2)_d$$

Οι πιο πάνω σχέσεις μπορούν ισοδύναμα να γραφούν

$$\begin{bmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7-2)$$

όπου

$$e \triangleq \begin{bmatrix} y_1 - (y_1)_d \\ y_2 - (y_2)_d \end{bmatrix}$$

ορίζεται το σφάλμα ανάμεσα στις y και y_d διαφορικές εξισώσεις. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (5.7-2) απεικονίζει την εξέλιξη του σφάλματος με το χρόνο.

Η ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς επιτυγχάνεται όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - y_d(t) \right) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Αυτή η απαίτηση είναι δυνατόν να επιτευχθεί αν διαλέξουμε τα p_1 και p_2 , έτσι ώστε η λύση για το $e(t)$ να είναι ευσταθής. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας Routh προκύπτει ότι η επιλογή

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0,$$

οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή λύση ως προς $e(t)$ της εξίσωσης (5.7-2). Η πιο κάτω επιλογή των p_1 και p_2 , οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθές σφάλμα για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $e(0) = y(0) - y_d(0)$ του σφάλματος.

5.8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό, μελετήθηκε και επιτεύχθηκε ο έλεγχος της διαδικασίας της απόσταξης, η οποία διαδικασία όντας υψηλά μη γραμμική, περιγράφεται από το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων κατάστασης της μορφής (5.2-20). Ο έλεγχος επιτυγχάνεται μέσω της τεχνικής του Ακριβούς Ταιριάσματος του συστήματος της Αποστακτικής στήλης σε Γραμμικό Πρότυπο.

Για το μη γραμμικό μοντέλο που περιγράφει τη διαδικασία της Απόσταξης, προσδιορίστηκε ο μη γραμμικός νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης (5.4-47) ο οποίος οδηγεί σε ένα αποσιζευγμένο σύστημα του οποίου η περιγραφή εισόδων - εξόδων "ταιριάζει" με την γραμμική περιγραφή εισόδων - εξόδων του Γραμμικού Προτύπου (5.4-5).

Συγκεκριμένα, για το σύστημα αυτό:

- α) Προσδιορίστηκε ο χώρος κατάστασης.
- β) Καθορίστηκαν οι στόχοι ελέγχου,
- γ) Επιλέχθηκε το γραμμικό πρότυπο,
- δ) Αποδείχθηκε ότι το Ακριβές Ταίριασμα σε Γραμμικό Πρότυπο είναι πάντα εφικτό, με ανατροφοδότηση του διανύσματος κατάστασης,
- ε) Προσδιορίστηκε η γενική λύση του μη γραμμικού νόμου ανατροφοδότησης (2.3-1) η οποία παρουσιάζεται στις σχέσεις (5.4-47)
- στ) Προσδιορίστηκε η δομή του κλειστού συστήματος,
- ζ) Μελετήθηκαν οι δομικές ιδιότητες της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας του κλειστού συστήματος και σχολιάστηκε η ευστάθεια,
- η) Προσδιορίστηκε ο νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει την ασυμπωτική παρακολούθηση τροχιάς της εξόδου για το υποσύνολο του κλειστού συστήματος το οποίο παραμένει παρατηρήσιμο και ευσταθές.

Στην εργασία [28] επιτυγχάνεται η γραμμικοποίηση του συστήματος της Αποστακτικής στήλης, χρησιμοποιώντας την τεχνική της αποσυζευξης.

Στο παρόν Κεφάλαιο, εφαρμόζοντας την τεχνική του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, το κλειστό σύστημα καθίσταται γραμμικό σύστημα και μάλιστα αποσυζευγμένο.

Η γενική λύση που προσδιορίστηκε σ' αυτό το κεφάλαιο, παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των παραμέτρων του νόμου ελέγχου, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ένα αποσυζευγμένο και γραμμικό σύστημα. Οσον αφορά το πρόβλημα της ευστάθειας, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι η κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του Γραμμικού Προτύπου, μας οδηγούν σε ασυμπωτικά ευσταθείς εξόδους. Σημειώνεται ότι αν αυτές οι μη παρατηρήσιμες καταστάσεις είναι ασυμπωτικά ευσταθείς, τότε το κλειστό σύστημα θα είναι **BIBS** ευσταθές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

6.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί ο έλεγχος μιας επαγωγικής μηχανής με τρία τυλίγματα στο ρότορα και τρία τυλίγματα στο στάτορα, της οποίας το μοντέλο αναπαράστανεται με ένα ισοδύναμο μετασχηματισμένο που αποτελείται από δύο τυλίγματα στο ρότορα και δύο τυλίγματα στο στάτορα [32].

Ο έλεγχος της επαγωγικής μηχανής, αφορά, κατά πρώτο λόγο στον έλεγχο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του ρότορα ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς τον πακτωμένο στάτορα, η οποία επιθυμούμε να κυμαίνεται μεταξύ κάποιων προδιαγεγραφόμενων ορίων και κατά δεύτερο λόγο, αφορά στον έλεγχο του αθροίσματος των τετραγώνων των μαγνητικών ροών των δύο τυλιγμάτων του σταθερού στάτορα ο οποίος έλεγχος αφορά στον έλεγχο της ενεργειακής κατάστασης του συστήματος.

Η στρατηγική ελέγχου που χρησιμοποιείται στην εργασία [32] αφορά στην αποζύζευξη εισόδων - εξόδων, επιτυγχάνοντας στη συνέχεια και γραμμικοποίηση του

συστήματος. Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής [19], για την επίλυση του προβλήματος του Ακριβούς Ταιριάσματος του μη γραμμικού συστήματος της Επαγωγικής Μηχανής σε Γραμμικό Πρότυπο. Ταυτόχρονα με το Ακριβές Ταιριασμα στο Γραμμικό Πρότυπο, επιτυγχάνουμε και την αποζύξευξη εισόδων - εξόδων.

6.2. ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Μια επαγωγική μηχανή αποτελείται από τρία τυλίγματα στο ρότορα και τρία τυλίγματα στο στάτορα. Οι Krause και Thomas [28], έχουν εισαγάγει ένα ισοδύναμο μοντέλο αναπαράστασης της επαγωγικής μηχανής μέσω ενός μετασχηματισμού των τριών τυλιγμάτων σε δύο, δηλαδή δύο τυλίγματα στο ρότορα και δύο στο στάτορα.

6.2.1. Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα

Η δυναμική κατάσταση του ισοδύναμου μοντέλου της επαγωγικής μηχανής που αποτελείται αποτελείται από δύο τυλίγματα στο στάτορα και δύο τυλίγματα στο ρότορα, περιγράφεται ως ακολούθως

$$R_{s\ sa} i_{sa} + \frac{d\psi_{sa}}{dt} = u_{sa}$$

$$R_{s\ sb} i_{sb} + \frac{d\psi_{sb}}{dt} = u_{sb}$$

$$R_{r\ rd'} i_{rd'} + \frac{d\psi_{rd'}}{dt} = 0$$

$$R_{r\ rq'} i_{rq'} + \frac{d\psi_{rq'}}{dt} = 0$$

(6.2-1)

όπου R , i , ψ , u_s υποδηλώνουν την εμφανιζόμενη αντίσταση, το ρεύμα, τη ροή, το δυναμικό του στάτορα. Οι δείκτες s και r υποδεικνύουν το στάτορα και το ρότορα αντίστοιχα. Το διάνυσμα (a,b) , αναφέρεται στο πλαίσιο ενός σταθερού στάτορα, ενώ το διάνυσμα (d',q') αναφέρεται σε πλαίσιο κινούμενο ως προς το αρχικό, με ταχύτητα $n_p \omega$. Ο αριθμός των ζευγών των πόλων της επαγωγικής μηχανής είναι n_p , ενώ ω είναι η ταχύτητα του ρότορα.

Θεωρούμε ως δ μια γωνία τέτοια ώστε:

$$\frac{d\delta}{dt} = n_p \omega, \quad \delta(0) = 0 \quad (6.2-2)$$

Ακολουθεί ένας μετασχηματισμός των διανυσμάτων από το σταθερό σύστημα συντεταγμένων στα διανύσματα του συστήματος συντεταγμένων που περιστρέφεται μαζί με το ρότορα και περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} i_{rd'} \\ i_{rq'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \end{bmatrix} \quad (6.2-3)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{rd'} \\ \psi_{rq'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό (6.2-3), και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6.2-1) και (6.2-2) παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$R_s i_{sa} + \frac{d\psi_{sa}}{dt} = u_{sa}$$

$$R_s i_{sb} + \frac{d\psi_{sb}}{dt} = u_{sb}$$

(6.2-4)

$$R_r i_{ra} + \frac{d\psi_{ra}}{dt} + n_p \omega \psi_{rb} = 0$$

$$R_r i_{rb} + \frac{d\psi_{rb}}{dt} + n_p \omega \psi_{ra} = 0$$

Κάτω από τις υποθέσεις της γραμμικότητας των μαγνητικών κυκλωμάτων και των ίσων αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων, αγνοώντας επίσης τις απώλειες σιδήρου, οι μαγνητικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\psi_{sa} = L_s i_{sa} + M i_{ra}$$

$$\psi_{sb} = L_s i_{sb} + M i_{rb}$$

$$\psi_{ra} = M i_{sa} + L_r i_{ra}$$

$$\psi_{rb} = M i_{sb} + L_r i_{rb}$$

(6.2-5)

όπου L_s , L_r είναι οι αυτεπαγωγές και M είναι η αμοιβαία επαγωγή. Όπως θα φανεί στη συνέχεια η υπόθεση της γραμμικότητας θα ενισχυθεί από την εφαρμογή ελέγχου η οποία θα διατηρήσει την απόλυτη τιμή της ροής του ρότορα κάτω από την ονομαστική της τιμή. Ο σκοπός της εισαγωγής των μετασχηματισμών (6.2-3) είναι να κατασταθούν οι εξισώσεις (6.2-5) ανεξάρτητες από τη γωνία δ . Στην πραγματικότητα οι ροές και τα ρεύματα στο σύστημα (6.2-3) σχετίζονται με τη γωνία δ μέσω αυτεπαγωγών και αμοιβαίων επαγωγών.

Απαλοιφώντας τις μεταβλητές i_{ra} , i_{rb} και ψ_{sa} , ψ_{sb} στην (6.2-4) και χρησιμοποιώντας την (6.2-5) παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}
 R_s i_{sa} + \frac{M}{L_r} \frac{d\psi_{ra}}{dt} + \left(L_s \frac{M^2}{L_r} \right) \frac{di_{sa}}{dt} &= u_{sa} \\
 R_s i_{sb} + \frac{M}{L_r} \frac{d\psi_{rb}}{dt} + \left(L_s \frac{M^2}{L_r} \right) \frac{di_{sb}}{dt} &= u_{sb} \\
 \frac{R_r}{L_r} \psi_{ra} - \frac{R_r}{L_r} M i_{sa} + \frac{d\psi_{ra}}{dt} + n_p \omega \psi_{rb} &= 0 \\
 \frac{R_r}{L_r} \psi_{rb} - \frac{R_r}{L_r} M i_{sb} + \frac{d\psi_{rb}}{dt} + n_p \omega \psi_{ra} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.2-6}$$

Η ροπή στρέψης που παράγεται από τη μηχανή εκφράζεται συναρτήσει των ροών του ρότορα και των ρευμάτων του στάτορα, ως εξής

$$T = \frac{n_p M}{L_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa})
 \tag{6.2-7}$$

Επομένως, η δυναμική του ρότορα εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p M}{J L_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa}) - \frac{T_L}{J}
 \tag{6.2-8}$$

όπου η μεταβλητή J εκφράζει τη ροπή αδράνειας του ρότορα και οποιουδήποτε εργαλείου που έρχεται σε επαφή με αυτόν, ενώ η μεταβλητή T_L είναι η ροπή στρέψης του φορτίου.

6.2.2. Εξαγωγή των εξισώσεων κατάστασης

Προσθέτοντας την εξίσωση (6.2-8) στις ηλεκτρομαγνητικές δυναμικές εξισώσεις (6.2-6) και ανακατατάσσοντας τις εξισώσεις σε μορφή εξισώσεων κατάστασης, η συνολική δυναμική κατάσταση της επαγωγικής μηχανής, κάτω από τις προαναφερόμενες υποθέσεις, περιγράφεται από το ακόλουθο πέμπτης τάξης μοντέλο

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{n_p M}{J L_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa}) - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\psi_{ra}}{dt} &= -\frac{R_r}{L_r} \psi_{ra} - n_p \omega \psi_{rb} + \frac{R_r}{L_r} M i_{sa} \\ \frac{d\psi_{rb}}{dt} &= -\frac{R_r}{L_r} \psi_{rb} - n_p \omega \psi_{ra} + \frac{R_r}{L_r} M i_{sb} \\ \frac{di_{sa}}{dt} &= \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{ra} + \omega \psi_{rb} \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sa} - \left(\frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s^2 L_r} \right) i_{sa} \\ \frac{di_{sb}}{dt} &= \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{rb} - \omega \psi_{ra} \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} + \frac{1}{L_s} u_{sb} - \left(\frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{sb} \end{aligned} \quad (6.2-9)$$

όπου η μεταβλητή σ ορίζεται ως εξής

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r} \quad (6.2-10)$$

Εφόσον στο μέλλον θα χρησιμοποιούμε ως μεταβλητές κατάστασης τις μεταβλητές (i_{sa}, i_{sb}) και (ψ_{ra}, ψ_{rb}) , καταργούμε, για ευκολία τους δείκτες r και s . Στη συνέχεια, ορίζουμε τα πιο κάτω :

Θεωρούμε ως διάνυσμα κατάστασης το

$$\mathbf{x} = (\omega, \psi_a, \psi_b, i_a, i_b)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

Επίσης, θεωρούμε ως διάνυσμα εισόδου το

$$\mathbf{u} = (u_a, u_b)^T$$

όπου u_a και u_b είναι τα δυναμικά εισόδου στα δύο τυλίγματα του πακτωμένου
στάτορα.

Τέλος, ορίζουμε τις παραμέτρους

$$\alpha = (R_r/L_r), \beta = (M/\sigma L_s L_r),$$

$$\gamma = (M^2 R_r / \sigma L_s L_r^2) + (R_s / \sigma L_s), \quad (6.2-11)$$

και

$$\mu = (n_p M / J L_r)$$

Οπότε, το σύστημα (6.2-9) μπορεί να γραφεί σε συνεπτυγμένη μορφή, ως εξής

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + u_a \mathbf{g}_a + u_b \mathbf{g}_b$$

(6.2-12)

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

όπου:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \mu(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_L}{J} \\ -\alpha\psi_a - n_p \omega\psi_b + \alpha M_a \\ n_p \omega\psi_a - \alpha\psi_b + \alpha M i_b \\ \alpha\beta\psi_a + n_p \beta\omega\psi_b - \gamma i_a \\ -n_p \beta\omega\psi_a + \alpha\beta\psi_b - \gamma i_b \end{bmatrix}$$

$$g_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} \end{bmatrix}$$

Οι έξοδοι, οι οποίες θα ελεγχθούν είναι οι:

$$y_1(x) = h_1(x) = \omega$$

(6.2-13)

$$y_2(x) = h_2(x) = \psi_a^2 + \psi_b^2$$

δηλαδή, η μία έξοδος είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ρότορα και η άλλη είναι το άθροισμα των τετραγώνων των μαγνητικών ροών του στάτορα.

Μεταβάλουμε τώρα το σύστημα συντεταγμένων, κάνοντας την ακόλουθη αλλαγή των μεταβλητών κατάστασης:

$$x_1 = \omega$$

$$x_2 = \mu(\psi_a i_b - \psi_b i_a) - \frac{T_{LN}}{J}$$

$$x_3 = \psi_a^2 + \psi_b^2 \quad (6.2-14)$$

$$x_4 = -2\alpha(\psi_a^2 + \psi_b^2) + 2\alpha M(\psi_a i_a + \psi_b i_b)$$

$$x_5 = \arctan\left(\frac{\psi_b}{\psi_a}\right)$$

ο οποίος μετασχηματισμός ισχύει για $x_3 > 0$ και $-90^\circ < x_5 < 90^\circ$. Στη συνέχεια, ο χώρος κατάστασης του συστήματος θα αναφέρεται ως \mathcal{U} , όπου

$$\mathcal{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3), \text{ τέτοια ώστε : } x_3 > 0 \text{ και } -90^\circ < x_5 < 90^\circ \right\}$$

Για απλοποίηση των υπολογισμών κάνουμε τους ακόλουθους επαναορισμούς

$$\alpha_0 = \frac{T_L}{J}, \quad \alpha_1 = -(\alpha + \gamma)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\mu}{2\alpha M}, \quad \alpha_3 = -\mu\left(\beta + \frac{1}{M}\right)$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha M}{\mu}, \quad \alpha_5 = 2\alpha^2 \beta M - 2\alpha\gamma \quad (6.2-15)$$

$$\alpha_6 = 2\alpha_4^2, \quad \alpha_7 = \alpha_6 \alpha_0^2$$

$$\alpha_8 = \frac{\mu}{\sigma L_s}, \quad \alpha_9 = \frac{2\alpha M}{\sigma L_s}$$

Το σύστημα των εξισώσεων κατάστασης, τελικά γράφεται ως εξής:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$$

(6.2-16)

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

όπου:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_4 + \alpha_3 x_1 x_3 + \alpha_1 \alpha_0 \\ x_4 \\ 2\alpha_4 \alpha_0 x_1 + \alpha_5 x_3 + \alpha_1 x_4 + 2\alpha_4 x_1 x_2 + \frac{1}{x_3} \left(-\frac{1}{2} x_4^2 + \alpha_6 x_2^2 + \alpha_7 + 2\alpha_6 \alpha_0 x_2 \right) \\ x_1 + \alpha_4 \frac{x_2}{x_3} + \alpha_4 \alpha_0 \frac{1}{x_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ \vdots \ \mathbf{g}_2(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_8 \sqrt{x_3} \sin(x_5) & \alpha_8 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \\ 0 & 0 \\ \alpha_9 \sqrt{x_3} \cos(x_5) & \alpha_9 \sqrt{x_3} \sin(x_5) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

6.3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΗΣ

Από την μελέτη και ανάλυση του μοντέλου που προηγήθηκε, είναι φανερό ότι η λειτουργία μιας Επαγωγικής Μηχανής αφορά μια υψηλά μη γραμμική διαδικασία. Επομένως, η εύρεση της απόκρισης του συστήματος είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα, πολύ περισσότερο δύσκολο πρόβλημα αποτελεί η παρακολούθηση αυτής. Από τη μεριά του Αυτομάτου Ελέγχου, είναι επίσης φανερό ότι είναι δύσκολη η σχεδίαση ενός νόμου ελέγχου ο οποίος, εφαρμοζόμενος στο σύστημα θα ικανοποιεί τις προδιαγραφές του.

Ως εισόδους του συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου θεωρούμε τα δυναμικά των δύο τυλιγμάτων του πακτωμένου στάτορα. Στόχος είναι, αφ' ενός ο έλεγχος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του ρότορα, αναφορικά ως προς τον σταθερό στάτορα έτσι ώστε αυτή να έχει κάποια επιθυμητή τιμή ανάμεσα σε κάποια όρια, αφετέρου ο έλεγχος της παραγόμενης από το στάτορα ηλεκτρικής ενέργειας, δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των μαγνητικών ροών των δύο τυλιγμάτων που αποτελούν το στάτορα. Είναι λοιπόν δύσκολο, αν όχι αδύνατο να βρούμε νόμο ελέγχου που να πετυχαίνει την παρακολούθηση μιας επιθυμητής τροχιάς για τις δύο προαναφερθείσες εξόδους του μη γραμμικού συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου, της Επαγωγικής Μηχανής.

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι λογικό να αναζητήσουμε κατ' αρχήν την ύπαρξη ενός νόμου ελέγχου ο οποίος θα απλοποιεί το αρχικό μη γραμμικό σύστημα. Με τον όρο απλοποίηση εννοούμε, το κλειστό σύστημα που θα προκύψει να έχει μια γραμμική περιγραφή εισόδων - εξόδων εφόσον αυτό θα "ταιριάζει" με ένα Γραμμικό Πρότυπο που θα επιλέξουμε. Αν αυτό είναι δυνατόν, είναι φανερό ότι ο περαιτέρω έλεγχος του συστήματος είναι πολύ εύκολος διότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολύ γνωστές μεθόδους σχεδίασης από τη Θεωρία των γραμμικών συστημάτων.

Μια επιπλέον λογική απαίτηση για το πρότυπο είναι να το θεωρήσουμε όχι μόνο γραμμικό, αλλά και ταυτόχρονα αποσυζευγμένο. Η απαίτηση για αποσυζευγμένο Πρότυπο οδηγεί στη δυνατότητα ελέγχου της κάθε εξόδου από μια και μόνη είσοδο.

6.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

6.4.1. Εύρεση των χαρακτηριστικών αριθμών

Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του συστήματος (6.2-16), για $i = 1, 2$, είναι

$$L_{g_1} L_{g_0}^0 h_1(x) = L_{g_1} h_1(x) = L_{g_1} x_1 = 0$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^0 h_1(x) = L_{g_2} h_1(x) = L_{g_2} x_1 = 0$$

(6.4-1a)

$$L_{g_1} L_{g_0}^0 h_2(x) = L_{g_1} h_2(x) = L_{g_1} x_3 = 0$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^0 h_2(x) = L_{g_2} h_2(x) = L_{g_2} x_3 = 0$$

$$L_{g_1} L_{g_0}^1 h_1(x) = L_{g_1} L_{g_0} x_1 = -\alpha_8 \sqrt{x_3} \sin(x_5)$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^1 h_1(x) = L_{g_2} L_{g_0} x_1 = \alpha_8 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \neq 0, \forall x \in \mathbb{U}$$

(6.4-1b)

$$L_{g_1} L_{g_0}^1 h_2(x) = L_{g_1} L_{g_0} x_3 = \alpha_9 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \neq 0, \forall x \in \mathbb{U}$$

$$L_{g_2} L_{g_0}^1 h_2(x) = L_{g_2} L_{g_0} x_3 = \alpha_9 \sqrt{x_3} \sin(x_5)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (2.4-1), οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του ανοικτού μη γραμμικού συστήματος (6.2-16) είναι

$$\left(d_1 \right)_A = 1$$

και

$$\left(d_2 \right)_A = 1$$

(6.4-2)

Παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του συστήματος είναι πεπερασμένοι.

Από τον ορισμό του πίνακα $B_0^*(x)$, όπως αυτός δίνεται στη σχέση (2.4-5c), βρίσκουμε ότι θα έχει τη μορφή

$$B_0^*(x) = \begin{bmatrix} L_G h_1(x) \\ L_G h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_8 \sqrt{x_3} \sin(x_5) & \alpha_8 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \\ \alpha_9 \sqrt{x_3} \cos(x_5) & \alpha_9 \sqrt{x_3} \sin(x_5) \end{bmatrix} \quad (6.4-3)$$

4.4.2. Καθορισμός της κλάσης του μοντέλου

Η επαγωγική μηχανή περιγράφεται με ένα μοντέλο το οποίο ανήκει στην κλάση των συστημάτων που εξετάζει η θεωρία του Κεφαλαίου 2, εφόσον ισχύει

$$\beta = \text{rank} B_0^*(x) = 2, \quad \forall x \in U$$

και

$$m = 2$$

(6.4-4)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.4-4) παρατηρούμε ότι

$$\text{rank} \mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) = m = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

6.4.3. Επιλογή του γραμμικού προτύπου

Θεωρούμε τώρα το γραμμικό, χρονικά μη μεταβαλλόμενο σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με τις εξισώσεις που ακολουθούν

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_M \mathbf{z} + \mathbf{B}_M \mathbf{w} \tag{6.4-5}$$

$$\mathbf{y}_M = \mathbf{C}_M \mathbf{z}$$

όπου

$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_3 & -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -p_4 & -p_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix},$$

όπου $a, b \in \{\mathbb{R} - \{0\}\}$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση μεταφοράς του προτύπου έχει τη μορφή

$$H_M(s) = C_M (sI - A_M)^{-1} B_M = \begin{bmatrix} \frac{a}{s^2 + p_1 s + p_3} & 0 \\ 0 & \frac{b}{s^2 + p_2 s + p_4} \end{bmatrix} \quad (6.4-6)$$

Το πρότυπο που διαλέξαμε είναι ένα σύστημα 4ης τάξης με αυθαίρετους πόλους, εφόσον οι συντελεστές p_1, p_3 και p_2, p_4 των πολωνύμων $s^2 + p_1 s + p_3$ και $s^2 + p_2 s + p_4$, αντίστοιχα, είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί.

Τώρα, θα βρούμε τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του προτύπου χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.4.2., εφόσον έχουμε την περιγραφή του προτύπου στο χώρο κατάστασης. Οι πρώτες "Μαρκον" παράμετροι του προτύπου (6.4-5) είναι

$$(c_1)_M A_M^0 B_M = (c_1)_M B_M = 0 \quad (6.4-7a)$$

$$(c_2)_M A_M^0 B_M = (c_2)_M B_M = 0$$

$$(c_1)_M A_M^1 B_M = (c_1)_M A_M B_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (6.4-7b)$$

$$(c_2)_M A_M^1 B_M = (c_2)_M A_M B_M = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} \neq 0$$

Από τις εξισώσεις (6.4-7) συμπεραίνουμε ότι

$$(d_1)_M = 1$$

και

$$(d_2)_M = 1$$

(6.4-8)

Επομένως, ο πίνακας M_0 που δίνεται στη σχέση (2.4-5b), θα είναι

$$M_0 = C_M A_M^{-1} B_M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (6.4-9)$$

6.4.4. Ελεγχος των ικανών και αναγκαίων συνθηκών

- Συνθήκη 1

Από τη σύγκριση των χαρακτηριστικών αριθμών του ανοικτού συστήματος $(d_i)_A$ με τους χαρακτηριστικούς αριθμούς του προτύπου $(d_i)_M$, παρατηρούμε ότι

$$(d_i)_A = (d_i)_M = 1, \text{ για } i = 1, 2, \text{ και } \forall x \in U \quad (6.4-10)$$

Επομένως επαληθεύεται η πρώτη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 2

Η δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.2., για το συγκεκριμένο μοντέλο της επαγωγικής μηχανής για το οποίο ισχύει $p = m$ (Αριθμός εξόδων = Αριθμός εισόδων), είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

$$\text{rank} [B_0^*(x)] = \text{rank} [M_0] = m$$

Από τις σχέσεις (6.4-3) και (6.4-9), έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_0^*(\mathbf{x}) \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} -\alpha_8 \sqrt{x_3} \sin(x_5) & \alpha_8 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \\ \alpha_9 \sqrt{x_3} \cos(x_5) & \alpha_9 \sqrt{x_3} \sin(x_5) \end{bmatrix} = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$$

και

$$\text{rank} \left[\mathbf{M}_0 \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = 2$$

(6.4-11)

Επομένως, επαληθεύεται και η δεύτερη των συνθηκών του Θεωρήματος 2.4.2.

- Συνθήκη 3

Για να εξετάσουμε την ισχύ της τρίτης συνθήκης, αρκεί να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$ και μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{array} \right]$.

Μια βάση του χώρου $\text{inv} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right]$ υπολογίζεται, βρίσκοντας κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, ο οποίος ορίζεται στην (2.4-13a) και για το συγκεκριμένο σύστημα της επαγωγικής μηχανής, έχει τη μορφή

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}) \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^3 \mathbf{G}(\mathbf{x}) \parallel \dots \parallel \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^8 \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right] \quad (6.4-12)$$

Η τάξη του πίνακα $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ είναι 5, εφόσον ισχύουν τα ακόλουθα:

Το διάνυσμα

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_8 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \\ 0 \\ \alpha_9 \sqrt{x_3} \sin(x_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο από το διάνυσμα $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, όπου

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_8 \sqrt{x_3} \sin(x_5) \\ 0 \\ \alpha_9 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα

$$\text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{31} \\ \mathbf{g}_{32} \\ \mathbf{g}_{33} \\ \mathbf{g}_{34} \\ \mathbf{g}_{35} \end{bmatrix} \quad (6.4-13)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο των διανυσμάτων που είναι οι στήλες του πίνακα

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_8 \sqrt{x_3} \sin(x_5) & \alpha_8 \sqrt{x_3} \cos(x_5) \\ 0 & 0 \\ \alpha_9 \sqrt{x_3} \cos(x_5) & \alpha_9 \sqrt{x_3} \sin(x_5) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4-14)$$

όπου τα στοιχεία g_{31} , g_{32} , g_{33} , g_{34} , g_{35} , έχουν υπολογιστεί με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου MATHEMATICA και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

$$g_{31} = a_8 x_3^{(1/2)} \sin[x_5]$$

$$g_{32} = -(2^*a_0^*a_4^*a_8^*\cos[x_5] + 2^*a_4^*a_8^*x_2^*\cos[x_5] + 2^*a_8^*x_1^*x_3^*\cos[x_5] + 2^*a_2^*a_9^*x_1^*x_3^*\cos[x_5] - 2^*a_1^*a_8^*x_3^*\sin[x_5] + a_8^*x_4^*\sin[x_5]) / (2^*x_3^{(1/2)})$$

$$g_{33} = -(a_9^*x_3^{(1/2)}*\cos[x_5])$$

$$g_{34} = -(2^*a_1^*a_9^*x_3^*\cos[x_5] + a_9^*x_4^*\cos[x_5] - 4^*a_0^*a_6^*a_8^*\sin[x_5] + 2^*a_0^*a_4^*a_9^*\sin[x_5] - 4^*a_6^*a_8^*x_2^*\sin[x_5] + 2^*a_4^*a_9^*x_2^*\sin[x_5] - 4^*a_4^*a_8^*x_1^*x_3^*\sin[x_5] + 2^*a_9^*x_1^*x_3^*\sin[x_5]) / (2^*x_3^{(1/2)})$$

$$g_{35} = (a_4^*a_8^*\sin[x_5]) / x_3^{(1/2)}$$

Σημειώνουμε ότι η προγραμματιστική διαδικασία παραγωγής των συναρτήσεων που αφορούν στα Lie Brackets παρουσιάζεται στο παράρτημα, στο τέλος της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Το διάνυσμα

$$\text{ad}_{g_0} g_2(x) = \begin{bmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \\ g_{45} \end{bmatrix} \quad (6.4-15)$$

είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο των διανυσμάτων $g_1(x)$, $g_2(x)$ και $\text{ad}_{g_0} g_1(x)$,

όπου

$$g_{41} = -(a_8 \cdot x^{3^{1/2}} \cdot \text{Cos}[x_5])$$

$$g_{42} = (-2 \cdot a_1 \cdot a_8 \cdot x^3 \cdot \text{Cos}[x_5] + a_8 \cdot x^4 \cdot \text{Cos}[x_5] - 2 \cdot a_0 \cdot a_4 \cdot a_8 \cdot \text{Sin}[x_5] - 2 \cdot a_4 \cdot a_8 \cdot x^2 \cdot \text{Sin}[x_5] - 2 \cdot a_8 \cdot x_1 \cdot x^3 \cdot \text{Sin}[x_5] - 2 \cdot a_2 \cdot a_9 \cdot x_1 \cdot x^3 \cdot \text{Sin}[x_5]) / (2 \cdot x^{3^{1/2}})$$

$$g_{43} = -(a_9 \cdot x^{3^{1/2}} \cdot \text{Sin}[x_5])$$

$$g_{44} = (-2 \cdot a_0 \cdot a_6 \cdot a_8 \cdot \text{Cos}[x_5] + a_0 \cdot a_4 \cdot a_9 \cdot \text{Cos}[x_5] - 2 \cdot a_6 \cdot a_8 \cdot x^2 \cdot \text{Cos}[x_5] + a_4 \cdot a_9 \cdot x^2 \cdot \text{Cos}[x_5] - 2 \cdot a_4 \cdot a_8 \cdot x_1 \cdot x^3 \cdot \text{Cos}[x_5] + a_9 \cdot x_1 \cdot x^3 \cdot \text{Cos}[x_5] - a_1 \cdot a_9 \cdot x^3 \cdot \text{Sin}[x_5] - 0.5 \cdot a_9 \cdot x^4 \cdot \text{Sin}[x_5]) / x^{3^{1/2}}$$

$$g_{45} = -((a_4 \cdot a_8 \cdot \text{Cos}[x_5]) / x^{3^{1/2}})$$

Τέλος, το διάνυσμα

$$\text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) = \begin{bmatrix} g_{51} \\ g_{52} \\ g_{53} \\ g_{54} \\ g_{55} \end{bmatrix} \quad (6.4-16)$$

είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο από τα διανύσματα $g_1(x)$, $g_2(x)$, $ad_{g_0} g_1(x)$, και $ad_{g_0} g_2(x)$, όπου τα στοιχεία του, g_{5i} ($i = 1, 2, \dots, 5$), παρουσιάζονται στη συνέχεια

$$g_{51} = (2*a_0*a_4*a_8*\text{Cos}[x5] + 2*a_4*a_8*x2*\text{Cos}[x5] + 2*a_8*x1*x3*\text{Cos}[x5] + a_2*a_9*x1*x3*\text{Cos}[x5] - a_1*a_8*x3*\text{Sin}[x5] + a_8*x4*\text{Sin}[x5])/x3^{1/2}$$

$$g_{52} = (2*a_0*a_1*a_4*a_8*x3*\text{Cos}[x5] + 2*a_1*a_4*a_8*x2*x3*\text{Cos}[x5] + 4*a_1*a_8*x1*x3^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_3*a_4*a_8*x1*x3^2*\text{Cos}[x5] + 4*a_1*a_2*a_9*x1*x3^2*\text{Cos}[x5] + 2*a_3*a_9*x1*x3^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_8*x2*x3^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_2*a_9*x2*x3^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_8*x1*x3*x4*\text{Cos}[x5] - 2*a_2*a_4*a_8*x1*x3*x4*\text{Cos}[x5] + 2*a_0^2*a_4^2*a_8*\text{Sin}[x5] - a_7*a_8*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_4^2*a_8*x2*\text{Sin}[x5] - 2*a_0*a_6*a_8*x2*\text{Sin}[x5] + 2*a_4^2*a_8*x2^2*\text{Sin}[x5] - a_6*a_8*x2^2*\text{Sin}[x5] + 2*a_0*a_4*a_8*x1*x3*\text{Sin}[x5] - 4*a_0*a_2*a_6*a_8*x1*x3*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_2*a_4*a_9*x1*x3*\text{Sin}[x5] + 2*a_4*a_8*x1*x2*x3*\text{Sin}[x5] - 4*a_2*a_6*a_8*x1*x2*x3*\text{Sin}[x5] + 4*a_2*a_4*a_9*x1*x2*x3*\text{Sin}[x5] - 2*a_1^2*a_8*x3^2*\text{Sin}[x5] - a_5*a_8*x3^2*\text{Sin}[x5] + 2*a_8*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_2*a_4*a_8*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] + 4*a_2*a_9*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 2*a_3*a_8*x3^3*\text{Sin}[x5] + a_1*a_8*x3*x4*\text{Sin}[x5] - 2*a_2*a_8*x3^2*x4*\text{Sin}[x5])/ (2*x3^{3/2})$$

$$g_{53} = (a_1*a_9*x3*\text{Cos}[x5] - 2*a_0*a_6*a_8*\text{Sin}[x5] + 2*a_0*a_4*a_9*\text{Sin}[x5] - 2*a_6*a_8*x2*\text{Sin}[x5] + 2*a_4*a_9*x2*\text{Sin}[x5] - 2*a_4*a_8*x1*x3*\text{Sin}[x5] + 2*a_9*x1*x3*\text{Sin}[x5])/x3^{1/2}$$

$$g_{54} = (8*a_0^2*a_4*a_6*a_8*\text{Cos}[x5] - 2*a_0^2*a_4^2*a_9*\text{Cos}[x5] - 3*a_7*a_9*\text{Cos}[x5] + 16*a_0*a_4*a_6*a_8*x2*\text{Cos}[x5] - 4*a_0*a_4^2*a_9*x2*\text{Cos}[x5] - 6*a_0*a_6*a_9*x2*\text{Cos}[x5] + 8*a_4*a_6*a_8*x2^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_4^2*a_9*x2^2*\text{Cos}[x5] - 3*a_6*a_9*x2^2*\text{Cos}[x5] + 8*a_0*a_4^2*a_8*x1*x3*\text{Cos}[x5] + 8*a_0*a_6*a_8*x1*x3*\text{Cos}[x5] - 6*a_0*a_4*a_9*x1*x3*\text{Cos}[x5] + 4*a_0*a_2*a_6*a_9*x1*x3*\text{Cos}[x5] + 8*a_4^2*a_8*x1*x2*x3*\text{Cos}[x5] + 8*a_6*a_8*x1*x2*x3*\text{Cos}[x5] - 6*a_4*a_9*x1*x2*x3*\text{Cos}[x5] + 4*a_2*a_6*a_9*x1*x2*x3*\text{Cos}[x5] + 2*a_1^2*a_9*x3^2*\text{Cos}[x5] + a_5*a_9*x3^2*\text{Cos}[x5] + 8*a_4*a_8*x1^2*x3^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_9*x1^2*x3^2*\text{Cos}[x5] + 4*a_2*a_4*a_9*x1^2*x3^2*\text{Cos}[x5] + a_1*a_9*x3*x4*\text{Cos}[x5] - 4*a_0*a_1*a_6*a_8*x3*\text{Sin}[x5] + 2*a_0*a_1*a_4*a_9*x3*\text{Sin}[x5] - 4*a_1*a_6*a_8*x2*x3*\text{Sin}[x5] + 2*a_1*a_4*a_9*x2*x3*\text{Sin}[x5] - 4*a_0*a_4*a_8*x3^2*\text{Sin}[x5] - 8*a_1*a_4*a_8*x1*x3^2*\text{Sin}[x5] + 4*a_3*a_6*a_8*x1*x3^2*\text{Sin}[x5] + 4*a_1*a_9*x1*x3^2*\text{Sin}[x5] - 2*a_3*a_4*a_9*x1*x3^2*\text{Sin}[x5] - 2*a_9*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_0*a_6*a_8*x4*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_4*a_9*x4*\text{Sin}[x5] - 4*a_6*a_8*x2*x4*\text{Sin}[x5] + 4*a_4*a_9*x2*x4*\text{Sin}[x5] + 4*a_2*a_6*a_8*x1*x3*x4*\text{Sin}[x5] + 2*a_9*x1*x3*x4*\text{Sin}[x5] - 2*a_2*a_4*a_9*x1*x3*x4*\text{Sin}[x5])/ (2*x3^{3/2})$$

$$g_{55} = (2*a_0*a_4^2*a_8*\text{Cos}[x5] - a_0*a_4*a_9*\text{Cos}[x5] + 2*a_4^2*a_8*x2*\text{Cos}[x5] - a_4*a_9*x2*\text{Cos}[x5] + 2*a_4*a_8*x1*x3*\text{Cos}[x5] + a_2*a_4*a_9*x1*x3*\text{Cos}[x5] - a_1*a_4*a_8*x3*\text{Sin}[x5] - a_8*x3^2*\text{Sin}[x5])/x3^{3/2}$$

Άρα,

$$\text{rank}Q(x) = \text{rank} \left[g_1(x), g_2(x), \text{ad}_{g_0} g_1(x), \text{ad}_{g_0} g_2(x), \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \right] = 5 = n \quad (6.4-17)$$

Ο χώρος που παράγεται από τις στήλες $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\text{ad}_{g_0} g_1(x)$, $\text{ad}_{g_0} g_2(x)$ και $\text{ad}_{g_0}^2 g_1(x)$ είναι involutive, εφόσον είναι προφανές ότι ισχύει

$$[\tau, \sigma] \in \text{span} \left\{ g_1(x), g_2(x), \text{ad}_{g_0} g_1(x), \text{ad}_{g_0} g_2(x), \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \right\}$$

για $\tau, \sigma \in \text{span} \left\{ g_1(x), g_2(x), \text{ad}_{g_0} g_1(x), \text{ad}_{g_0} g_2(x), \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \right\}$.

Επομένως, ο χώρος $\text{inv} [Q(x)]$, δίνεται από τη σχέση

$$\text{inv} [Q(x)] = \text{span} \left\{ g_1(x), g_2(x), \text{ad}_{g_0} g_1(x), \text{ad}_{g_0} g_2(x), \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \right\} \quad (6.4-18)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.4-13) και (6.4-14) έχουμε ότι

$$\dim \left\{ \text{inv} [Q(x)] \right\} = 5 \quad (6.4-19)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου $\text{inv} \begin{bmatrix} Q(x) \\ Z(x) \end{bmatrix}$, θα υπολογίσουμε κατ' αρχήν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} Q(x) \\ Z(x) \end{bmatrix}$, ο ορισμός του οποίου δίνεται στη σχέση (2.4-15) και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{G}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}) & \dots & \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^8 \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_3(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{Z}_9(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.4-20)$$

όπου

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{Z}_2(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{Z}_9(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} z_{11}(\mathbf{x}) & z_{12}(\mathbf{x}) & z_{13}(\mathbf{x}) & z_{14}(\mathbf{x}) & \dots & z_{17}(\mathbf{x}) & z_{18}(\mathbf{x}) \\ z_{21}(\mathbf{x}) & z_{22}(\mathbf{x}) & z_{23}(\mathbf{x}) & z_{24}(\mathbf{x}) & \dots & z_{27}(\mathbf{x}) & z_{28}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4-21)$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, είναι οι ακόλουθες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ z_{11}(\mathbf{x}) \\ z_{21}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ z_{12}(\mathbf{x}) \\ z_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ z_{13}(\mathbf{x}) \\ z_{23}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ z_{14}(\mathbf{x}) \\ z_{24}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ z_{15}(\mathbf{x}) \\ z_{25}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.4-22)$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, $\text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ και $\text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ είναι γνωστά από προηγούμενους υπολογισμούς και όπου, για τον υπολογισμό των υποπινάκων $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})$ για $i = 1, 2$, και 3 , και κατ' επέκταση των στοιχείων z_{ij} για $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, των $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, 3$), υπολογίστηκαν πρώτα οι "Μαρκον" παράμετροι $\mathbf{B}_i^*(\mathbf{x})$, \mathbf{M}_i και στη συνέχεια τα $\mathbf{L}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$ και $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})$ για $i = 1, 2, 3$.

Από την επαναληπτική σχέση (2.4-5c), για τις "Μαρκον" παραμέτρους $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$, υπολογίστηκαν οι πίνακες αυτοί για $i = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{B}_1^*(\mathbf{x}) = L_G L_{g_0}^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{g_0}^2 h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^2 h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{b1star11} & \text{b1star12} \\ \text{b1star12} & \text{b1srar22} \end{bmatrix} \quad (6.4- 2 3a)$$

$$\mathbf{B}_2^*(\mathbf{x}) = L_G L_{g_0}^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{g_0}^3 h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^3 h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_{g_0}^3 h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^3 h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{b2star11} & \text{b2star12} \\ \text{b2star12} & \text{b2srar22} \end{bmatrix} \quad (6.4- 2 3b)$$

και

$$\mathbf{B}_3^*(\mathbf{x}) = L_G L_{g_0}^4 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{g_0}^4 h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^4 h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_{g_0}^4 h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_{g_0}^4 h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{b3star11} & \text{b3star12} \\ \text{b3star12} & \text{b3srar22} \end{bmatrix} \quad (6.4- 2 3c)$$

όπου

$$\text{b1star11} = \text{a2}^* \text{a9}^* \text{x1}^* \text{x3}^{(1/2)} * \text{Cos}[\text{x5}] - \text{a1}^* \text{a8}^* \text{x3}^{(1/2)} * \text{Sin}[\text{x5}]$$

$$\text{b1star12} = \text{a1}^* \text{a8}^* \text{x3}^{(1/2)} * \text{Cos}[\text{x5}] + \text{a2}^* \text{a9}^* \text{x1}^* \text{x3}^{(1/2)} * \text{Sin}[\text{x5}]$$

$$b1star21 = (a1*a9*x3*Cos[x5] + a9*x4*Cos[x5] - 2*a0*a6*a8*Sin[x5] - 2*a6*a8*x2*Sin[x5] - 2*a4*a8*x1*x3*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b1star22 = (2*a0*a6*a8*Cos[x5] + 2*a6*a8*x2*Cos[x5] + 2*a4*a8*x1*x3*Cos[x5] + a1*a9*x3*Sin[x5] + a9*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b2star11 = (2*a1*a2*a9*x1*x3*Cos[x5] + a3*a9*x1*x3*Cos[x5] + a2*a9*x2*x3*Cos[x5] + a2*a9*x1*x4*Cos[x5] - 2*a0*a2*a6*a8*x1*Sin[x5] - 2*a2*a6*a8*x1*x2*Sin[x5] - a1^2*a8*x3*Sin[x5] - 2*a2*a4*a8*x1^2*x3*Sin[x5] - a3*a8*x3^2*Sin[x5] - a2*a8*x3*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b2star12 = (2*a0*a2*a6*a8*x1*Cos[x5] + 2*a2*a6*a8*x1*x2*Cos[x5] + a1^2*a8*x3*Cos[x5] + 2*a2*a4*a8*x1^2*x3*Cos[x5] + a3*a8*x3^2*Cos[x5] + a2*a8*x3*x4*Cos[x5] + 2*a1*a2*a9*x1*x3*Sin[x5] + a3*a9*x1*x3*Sin[x5] + a2*a9*x2*x3*Sin[x5] + a2*a9*x1*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b2star21 = (2*a0*a4*a9*x1*Cos[x5] + 2*a0*a2*a6*a9*x1*Cos[x5] + 2*a4*a9*x1*x2*Cos[x5] + 2*a2*a6*a9*x1*x2*Cos[x5] + a1^2*a9*x3*Cos[x5] + 2*a5*a9*x3*Cos[x5] + 2*a2*a4*a9*x1^2*x3*Cos[x5] + 3*a1*a9*x4*Cos[x5] - 6*a0*a1*a6*a8*Sin[x5] - 6*a1*a6*a8*x2*Sin[x5] - 2*a0*a4*a8*x3*Sin[x5] - 4*a1*a4*a8*x1*x3*Sin[x5] - 2*a3*a6*a8*x1*x3*Sin[x5] - 4*a4*a8*x2*x3*Sin[x5] - 2*a4*a8*x1*x4*Sin[x5] - 2*a2*a6*a8*x1*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b2star22 = (6*a0*a1*a6*a8*Cos[x5] + 6*a1*a6*a8*x2*Cos[x5] + 2*a0*a4*a8*x3*Cos[x5] + 4*a1*a4*a8*x1*x3*Cos[x5] + 2*a3*a6*a8*x1*x3*Cos[x5] + 4*a4*a8*x2*x3*Cos[x5] + 2*a4*a8*x1*x4*Cos[x5] + 2*a2*a6*a8*x1*x4*Cos[x5] + 2*a0*a4*a9*x1*Sin[x5] + 2*a0*a2*a6*a9*x1*Sin[x5] + 2*a4*a9*x1*x2*Sin[x5] + 2*a2*a6*a9*x1*x2*Sin[x5] + a1^2*a9*x3*Sin[x5] + 2*a5*a9*x3*Sin[x5] + 2*a2*a4*a9*x1^2*x3*Sin[x5] + 3*a1*a9*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b3star11 = (2*a1*a2*a9*x1*x3*Cos[x5] + a3*a9*x1*x3*Cos[x5] + a2*a9*x2*x3*Cos[x5] + a2*a9*x1*x4*Cos[x5] - 2*a0*a2*a6*a8*x1*Sin[x5] - 2*a2*a6*a8*x1*x2*Sin[x5] - a1^2*a8*x3*Sin[x5] - 2*a2*a4*a8*x1^2*x3*Sin[x5] - a3*a8*x3^2*Sin[x5] - a2*a8*x3*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b3star12 = (2*a0*a2*a6*a8*x1*Cos[x5] + 2*a2*a6*a8*x1*x2*Cos[x5] + a1^2*a8*x3*Cos[x5] + 2*a2*a4*a8*x1^2*x3*Cos[x5] + a3*a8*x3^2*Cos[x5] + a2*a8*x3*x4*Cos[x5] + 2*a1*a2*a9*x1*x3*Sin[x5] + a3*a9*x1*x3*Sin[x5] + a2*a9*x2*x3*Sin[x5] + a2*a9*x1*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$b3star21 = (2*a0*a4*a9*x1*Cos[x5] + 2*a0*a2*a6*a9*x1*Cos[x5] + 2*a4*a9*x1*x2*Cos[x5] + 2*a2*a6*a9*x1*x2*Cos[x5] + a1^2*a9*x3*Cos[x5] + 2*a5*a9*x3*Cos[x5] + 2*a2*a4*a9*x1^2*x3*Cos[x5] + 3*a1*a9*x4*Cos[x5] - 6*a0*a1*a6*a8*Sin[x5] - 6*a1*a6*a8*x2*Sin[x5] - 2*a0*a4*a8*x3*Sin[x5] - 4*a1*a4*a8*x1*x3*Sin[x5] - 2*a3*a6*a8*x1*x3*Sin[x5] - 4*a4*a8*x2*x3*Sin[x5] - 2*a4*a8*x1*x4*Sin[x5] - 2*a2*a6*a8*x1*x4*Sin[x5])/x3^(1/2)$$

$$\begin{aligned}
 b3star22 = & (6*a0*a1*a6*a8*\text{Cos}[x5] + 6*a1*a6*a8*x2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2*a0*a4*a8*x3*\text{Cos}[x5] + 4*a1*a4*a8*x1*x3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2*a3*a6*a8*x1*x3*\text{Cos}[x5] + 4*a4*a8*x2*x3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2*a4*a8*x1*x4*\text{Cos}[x5] + 2*a2*a6*a8*x1*x4*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2*a0*a4*a9*x1*\text{Sin}[x5] + 2*a0*a2*a6*a9*x1*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a4*a9*x1*x2*\text{Sin}[x5] + 2*a2*a6*a9*x1*x2*\text{Sin}[x5] + a1^2*a9*x3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a5*a9*x3*\text{Sin}[x5] + 2*a2*a4*a9*x1^2*x3*\text{Sin}[x5] + 3*a1*a9*x4*\text{Sin}[x5])/ \\
 & x3^{(1/2)}
 \end{aligned}$$

Από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-5b), υπολογίστηκαν οι πίνακες M_1 ,
όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια

$$M_1(x) = CA^2B = \begin{bmatrix} -ap_1 & 0 \\ 0 & -bp_2 \end{bmatrix}, \quad (6.4-24a)$$

$$M_2(x) = CA^3B = \begin{bmatrix} ap_1^2 - ap_3 & 0 \\ 0 & bp_2^2 - bp_4 \end{bmatrix} \quad (6.4-24b)$$

και

$$M_3(x) = CA^4B = \begin{bmatrix} -(ap_1^3) + 2ap_1p_3 & 0 \\ 0 & -(bp_2^3) + 2bp_2p_4 \end{bmatrix} \quad (6.4-24c)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-11),

υπολογίσαμε τις παραμέτρους $L_i(x)$, για $i = 0, 1, 2, 3$, θέτοντας $P_0 = I$, όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια

$$L_0(x) = M_0^{-1}B_0^*(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_8}{a} \sqrt{x_3} \sin x_5 & \frac{\alpha_8}{a} \sqrt{x_3} \cos x_5 \\ \frac{\alpha_9}{b} \sqrt{x_3} \cos x_5 & \frac{\alpha_9}{b} \sqrt{x_3} \sin x_5 \end{bmatrix} \quad (6.4-25)$$

Από τη σχέση (2.4-10a), βρέθηκε ο πίνακας $B^{-1}(x)$, του νόμου ανατροφοδότησης (2.3-1), ο οποίος έχει τη μορφή

$$B^{-1}(x) = L_0(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_8}{a} \sqrt{x_3} \sin x_5 & \frac{\alpha_8}{a} \sqrt{x_3} \cos x_5 \\ \frac{\alpha_9}{b} \sqrt{x_3} \cos x_5 & \frac{\alpha_9}{b} \sqrt{x_3} \sin x_5 \end{bmatrix} \quad (6.4-26)$$

Επίσης, οι πίνακες

$$L_1(x) = L1 = \begin{bmatrix} 111 & 112 \\ 121 & 122 \end{bmatrix} = \left\{ \left\{ 111, 112 \right\}, \left\{ 121, 122 \right\} \right\} \quad (6.4-26a)$$

$$L_2(x) = L2 = \begin{bmatrix} 113 & 114 \\ 123 & 124 \end{bmatrix} = \left\{ \left\{ 113, 114 \right\}, \left\{ 123, 124 \right\} \right\} \quad (6.4-26b)$$

$$L_3(x) = L3 = \begin{bmatrix} 115 & 116 \\ 125 & 126 \end{bmatrix} = \left\{ \left\{ 115, 116 \right\}, \left\{ 125, 126 \right\} \right\} \quad (6.4-26c)$$

δίνονται στην ακόλουθη μορφή

$$L1 = \{ \{ -(x3^{1/2}) \cdot (a2 \cdot a9 \cdot x1 \cdot \text{Cos}[x5] - a1 \cdot a8 \cdot \text{Sin}[x5] - a8 \cdot p1 \cdot \text{Sin}[x5]) / a), \\ -(x3^{1/2}) \cdot (a1 \cdot a8 \cdot \text{Cos}[x5] + a8 \cdot p1 \cdot \text{Cos}[x5] + a2 \cdot a9 \cdot x1 \cdot \text{Sin}[x5]) / a), \\ \{ -(a1 \cdot a9 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + a9 \cdot p2 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + a9 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] - \\ 2 \cdot a0 \cdot a6 \cdot a8 \cdot \text{Sin}[x5] - 2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot \text{Sin}[x5] - 2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5]) / \\ (b \cdot x3^{1/2}), -(2 \cdot a0 \cdot a6 \cdot a8 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + a1 \cdot a9 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a9 \cdot p2 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ a9 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5]) / (b \cdot x3^{1/2}) \} \}$$

$$L2 = \{ \{ (-2 \cdot a1 \cdot a2 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] - a3 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] - \\ a2 \cdot a9 \cdot p1 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] - a2 \cdot a9 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] - a2 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \text{Sin}[x5] + 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ a1 \cdot a2 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a1 \cdot a8 \cdot p1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a8 \cdot p3 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a3 \cdot a8 \cdot x3 \cdot a2 \cdot \text{Sin}[x5] + a2 \cdot a8 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5] \\) / (a \cdot x3^{1/2}), -(2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + a1 \cdot a2 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ a1 \cdot a8 \cdot p1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + a8 \cdot p3 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + a3 \cdot a8 \cdot x3 \cdot a2 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ a2 \cdot a8 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a1 \cdot a2 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ a3 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a2 \cdot a9 \cdot p1 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ a2 \cdot a9 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a2 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5]) / (a \cdot x3^{1/2}) \}, \\ \{ -(2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ a1 \cdot a2 \cdot a9 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a5 \cdot a9 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + a1 \cdot a9 \cdot p2 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ a9 \cdot p4 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 3 \cdot a1 \cdot a9 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] + a9 \cdot p2 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] - 6 \cdot a0 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8 \cdot \text{Sin}[x5] - \\ 2 \cdot a0 \cdot a6 \cdot a8 \cdot p2 \cdot \text{Sin}[x5] - 6 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot \text{Sin}[x5] - \\ 2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot p2 \cdot x2 \cdot \text{Sin}[x5] - 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] - \\ 4 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] - 2 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] - \\ 2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot p2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] - 4 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] - \\ 2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5] - 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5]) / (b \cdot x3^{1/2}), \\ \{ (6 \cdot a0 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a6 \cdot a8 \cdot p2 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 6 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot p2 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + 4 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot p2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 4 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot \text{Sin}[x5] + 2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \text{Sin}[x5] + a1 \cdot a2 \cdot a9 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + 2 \cdot a5 \cdot a9 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ a1 \cdot a9 \cdot p2 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + a9 \cdot p4 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x3 \cdot \text{Sin}[x5] + 3 \cdot a1 \cdot a9 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5] + a9 \cdot p2 \cdot x4 \cdot \text{Sin}[x5]) / \\ (b \cdot x3^{1/2}) \} \}$$

$$L3 = \{ \{ -(2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot a2 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot a2 \cdot \text{Cos}[x5] + \\ 2 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] + 2 \cdot a2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x2 \cdot \text{Cos}[x5] +$$

$$\begin{aligned}
 & a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^3 \text{Cos}[x5] + 3 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_1^2 a_3^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_5^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_1^2 a_2^2 a_9^2 p^1 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + a_3^2 a_9^2 p^1 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & a_2^2 a_9^2 p^3 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_4^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 4 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + 2 a_3^2 a_9^2 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & a_2^2 a_9^2 p^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_3^2 a_9^2 x^1 x^3 x^2 \text{Cos}[x5] + \\
 & 4 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^1 x^4 \text{Cos}[x5] + a_3^2 a_9^2 x^1 x^4 \text{Cos}[x5] + \\
 & a_2^2 a_9^2 p^1 x^1 x^4 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_9^2 x^2 x^4 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_2^2 a_9^2 x^1 x^3 x^4 \text{Cos}[x5] - 2 a_2^2 a_7^2 a_8^2 \text{Sin}[x5] - \\
 & 8 a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^1 \text{Sin}[x5] - 2 a_0^2 a_3^2 a_6^2 a_8^2 x^1 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 p^1 x^1 \text{Sin}[x5] - 8 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^2 \text{Sin}[x5] - \\
 & 8 a_1^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 \text{Sin}[x5] - 2 a_3^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 p^1 x^1 x^2 \text{Sin}[x5] - 6 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^2 x^2 \text{Sin}[x5] - \\
 & a_1^2 a_3^2 a_8^2 x^3 \text{Sin}[x5] - a_1^2 a_2^2 a_8^2 p^1 x^3 \text{Sin}[x5] - a_1^2 a_8^2 p^3 x^3 \text{Sin}[x5] - \\
 & 6 a_0^2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] - 6 a_1^2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_3^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] - 2 a_2^2 a_3^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 p^1 x^1 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] - 12 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_1^2 a_3^2 a_8^2 x^3 x^2 \text{Sin}[x5] - 2 a_2^2 a_5^2 a_8^2 x^3 x^2 \text{Sin}[x5] - \\
 & a_3^2 a_8^2 p^1 x^3 x^2 \text{Sin}[x5] - 2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^4 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_2^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 x^4 \text{Sin}[x5] - 4 a_1^2 a_2^2 a_8^2 x^3 x^4 \text{Sin}[x5] - \\
 & 2 a_3^2 a_8^2 x^3 x^4 \text{Sin}[x5] - a_2^2 a_8^2 p^1 x^3 x^4 \text{Sin}[x5] - a_2^2 a_8^2 x^4 x^2 \text{Sin}[x5] \\
 &) / (a^2 x^3^{(1/2)}), - (2 a_2^2 a_7^2 a_8^2 \text{Cos}[x5] + \\
 & 8 a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^1 \text{Cos}[x5] + 2 a_0^2 a_3^2 a_6^2 a_8^2 x^1 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 p^1 x^1 \text{Cos}[x5] + 8 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^2 \text{Cos}[x5] + \\
 & 8 a_1^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 \text{Cos}[x5] + 2 a_3^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 p^1 x^1 x^2 \text{Cos}[x5] + 6 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^2 x^2 \text{Cos}[x5] + \\
 & a_1^2 a_3^2 a_8^2 x^3 \text{Cos}[x5] + a_1^2 a_2^2 a_8^2 p^1 x^3 \text{Cos}[x5] + a_1^2 a_8^2 p^3 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 6 a_0^2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] + 6 a_1^2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_3^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_3^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 p^1 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + 12 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_1^2 a_3^2 a_8^2 x^3 x^2 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_5^2 a_8^2 x^3 x^2 \text{Cos}[x5] + \\
 & a_3^2 a_8^2 p^1 x^3 x^2 \text{Cos}[x5] + 2 a_2^2 a_4^2 a_8^2 x^1 x^2 x^4 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_2^2 a_6^2 a_8^2 x^1 x^2 x^4 \text{Cos}[x5] + 4 a_1^2 a_2^2 a_8^2 x^3 x^4 \text{Cos}[x5] + \\
 & 2 a_3^2 a_8^2 x^3 x^4 \text{Cos}[x5] + a_2^2 a_8^2 p^1 x^3 x^4 \text{Cos}[x5] + \\
 & a_2^2 a_8^2 x^4 x^2 \text{Cos}[x5] + 2 a_0^2 a_2^2 a_4^2 a_9^2 x^1 x^2 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 x^1 x^2 \text{Sin}[x5] + 2 a_2^2 a_4^2 a_9^2 x^1 x^2 x^2 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 x^1 x^2 x^2 \text{Sin}[x5] + a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^3 \text{Sin}[x5] + \\
 & 3 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] + 2 a_1^2 a_3^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_5^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] + 2 a_1^2 a_2^2 a_9^2 p^1 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] + \\
 & a_3^2 a_9^2 p^1 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] + a_2^2 a_9^2 p^3 x^1 x^3 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_2^2 a_4^2 a_9^2 x^1 x^3 x^3 \text{Sin}[x5] + 4 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_3^2 a_9^2 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] + a_2^2 a_9^2 p^1 x^2 x^3 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_3^2 a_9^2 x^1 x^3 x^2 \text{Sin}[x5] + 4 a_1^2 a_2^2 a_9^2 x^1 x^4 \text{Sin}[x5] + \\
 & a_3^2 a_9^2 x^1 x^4 \text{Sin}[x5] + a_2^2 a_9^2 p^1 x^1 x^4 \text{Sin}[x5] + \\
 & 2 a_2^2 a_9^2 x^2 x^4 \text{Sin}[x5] + 2 a_2^2 a_2^2 a_9^2 x^1 x^3 x^4 \text{Sin}[x5]) / (a^2 x^3^{(1/2)}), \\
 & ((2 a_0^2 a_2^2 a_1^2 a_6^2 a_9^2 \text{Cos}[x5] - 2 a_1^2 a_7^2 a_9^2 \text{Cos}[x5] - \\
 & 10 a_0^2 a_1^2 a_4^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] - 10 a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] - \\
 & 2 a_0^2 a_4^2 a_9^2 p^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] - 2 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 p^2 x^1 x^3 \text{Cos}[x5] - \\
 & 2 a_0^2 a_4^2 a_9^2 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - 2 a_0^2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - \\
 & 10 a_1^2 a_4^2 a_9^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - 10 a_1^2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - \\
 & 2 a_4^2 a_9^2 p^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - 2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 p^2 x^1 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - \\
 & 2 a_4^2 a_9^2 x^2 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - 2 a_2^2 a_6^2 a_9^2 x^2 x^2 x^3 \text{Cos}[x5] - \\
 & a_1^2 a_3^2 a_9^2 x^3 x^2 \text{Cos}[x5] - 6 a_1^2 a_5^2 a_9^2 x^3 x^2 \text{Cos}[x5] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a1^2 \cdot a9^2 \cdot x^3 \cdot \cos^2[x5] - 2 \cdot a5 \cdot a9^2 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - \\
 & a1 \cdot a9^4 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 6 \cdot a1 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1^2 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - 4 \cdot a3 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1^2 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 4 \cdot a2 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1^2 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9^2 \cdot x1^2 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 8 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot x^3 \cdot \cos[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \cos[x5] + \\
 & 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x4 \cdot \cos[x5] + 2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot x4 \cdot \cos[x5] + \\
 & 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1 \cdot x2 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - 7 \cdot a1^2 \cdot a9 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - \\
 & 2 \cdot a5 \cdot a9 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - 3 \cdot a1 \cdot a9^2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - \\
 & a9^2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - 6 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a9 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - \\
 & 4 \cdot a2^2 \cdot a6 \cdot a9 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] + 4 \cdot a0^2 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \sin[x5] + \\
 & 4 \cdot a0^2 \cdot a2 \cdot a6^2 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \sin[x5] + 2 \cdot a4 \cdot a7 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a7 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \sin[x5] + 12 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 12 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6^2 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \sin[x5] + 6 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 6 \cdot a2 \cdot a6^2 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2^2 \cdot \sin[x5] + 14 \cdot a0 \cdot a1^2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 4 \cdot a0 \cdot a5 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + 6 \cdot a0 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a0 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + 8 \cdot a0 \cdot a4^2 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 12 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + 14 \cdot a1^2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2^2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 4 \cdot a5 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2^2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + 6 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + 8 \cdot a4^2 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 12 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \sin[x5] + 10 \cdot a0 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a0 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 6 \cdot a1^2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 6 \cdot a4 \cdot a5 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 8 \cdot a1 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 2 \cdot a2 \cdot a5 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 4 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 2 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 4 \cdot a2 \cdot a4^2 \cdot a8 \cdot x1^3 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 16 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 4 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + \\
 & 4 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x2 \cdot x3^2 \cdot \sin[x5] + 8 \cdot a3 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^3 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + \\
 & 10 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + 10 \cdot a1 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + \\
 & 2 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + \\
 & 4 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + 4 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \sin[x5] + \\
 & 8 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot x4 \cdot \sin[x5] - a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x4^2 \cdot \sin[x5] - \\
 & a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x4^2 \cdot \sin[x5] / (b \cdot x3^{(3/2)}), \\
 & (-4 \cdot a0^2 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \cos[x5] - 4 \cdot a0^2 \cdot a2 \cdot a6^2 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \cos[x5] - \\
 & 2 \cdot a4 \cdot a7 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a7 \cdot a8 \cdot x1 \cdot \cos[x5] - \\
 & 12 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \cos[x5] - 12 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6^2 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 6 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2^2 \cdot \cos[x5] - 6 \cdot a2 \cdot a6^2 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x2^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 14 \cdot a0 \cdot a1^2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - 4 \cdot a0 \cdot a5 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 6 \cdot a0 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a0 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 8 \cdot a0 \cdot a4^2 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - 12 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 14 \cdot a1^2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - 4 \cdot a5 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 6 \cdot a1 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 8 \cdot a4^2 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - 12 \cdot a2 \cdot a4 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1^2 \cdot x2 \cdot x3 \cdot \cos[x5] - \\
 & 10 \cdot a0 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a0 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 6 \cdot a1^2 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 6 \cdot a4 \cdot a5 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 8 \cdot a1 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 2 \cdot a2 \cdot a5 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 4 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 2 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 4 \cdot a2 \cdot a4^2 \cdot a8 \cdot x1^3 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 16 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 4 \cdot a3 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x2 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - 4 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x2 \cdot x3^2 \cdot \cos[x5] - \\
 & 8 \cdot a3 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3^3 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a0 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - \\
 & 2 \cdot a0 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - 10 \cdot a1 \cdot a4 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - \\
 & 10 \cdot a1 \cdot a2 \cdot a6 \cdot a8 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] - 2 \cdot a4 \cdot a8^2 \cdot x1 \cdot x3 \cdot x4 \cdot \cos[x5] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2^*a2^*a6^*a8^*p2^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] - 4^*a4^*a8^*x2^*x3^*x4^*Cos[x5] - \\
 & 4^*a2^*a6^*a8^*x2^*x3^*x4^*Cos[x5] - 8^*a2^*a4^*a8^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] + \\
 & a4^*a8^*x1^*x4^*Cos[x5] + a2^*a6^*a8^*x1^*x4^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a0^*a1^*a6^*a9^*Sin[x5] - 2^*a1^*a7^*a9^*Sin[x5] - \\
 & 10^*a0^*a1^*a4^*a9^*x1^*x3^*Sin[x5] - 10^*a0^*a1^*a2^*a6^*a9^*x1^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a0^*a4^*a9^*p2^*x1^*x3^*Sin[x5] - 2^*a0^*a2^*a6^*a9^*p2^*x1^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a0^*a4^*a9^*x2^*x3^*Sin[x5] - 2^*a0^*a2^*a6^*a9^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 10^*a1^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 10^*a1^*a2^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a4^*a9^*p2^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 2^*a2^*a6^*a9^*p2^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a4^*a9^*x2^*x3^*Sin[x5] - 2^*a2^*a6^*a9^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & a1^*a3^*a9^*x3^*Sin[x5] - 6^*a1^*a5^*a9^*x3^*Sin[x5] - \\
 & a1^*a2^*a9^*p2^*x3^*Sin[x5] - 2^*a5^*a9^*p2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & a1^*a9^*p4^*x3^*Sin[x5] - 2^*a0^*a2^*a4^*a9^*x1^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 6^*a1^*a2^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 4^*a3^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a2^*a3^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 2^*a2^*a4^*a9^*p2^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 8^*a2^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] + 2^*a0^*a4^*a9^*x1^*x4^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a0^*a2^*a6^*a9^*x1^*x4^*Sin[x5] + 2^*a4^*a9^*x1^*x2^*x4^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a2^*a6^*a9^*x1^*x2^*x4^*Sin[x5] - 7^*a1^*a2^*a9^*x3^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a5^*a9^*x3^*x4^*Sin[x5] - 3^*a1^*a9^*p2^*x3^*x4^*Sin[x5] - \\
 & a9^*p4^*x3^*x4^*Sin[x5] - 6^*a2^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a2^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^*x4^*Sin[x5]/(b^*x3^(3/2))
 \end{aligned}$$

Τελικά, από τις επαναληπτικές σχέσεις (2.4-15), βρήκαμε τους υποπίνακες $Z_i(x)$ για $i = 1, 2, 3$, του πίνακα $Z(x)$ της σχέσης (2.4-13b), όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια

$$Z_1(x) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.4-28a)$$

όπου

$$z_{11} = -(p_1^*x_1)/a + (p_1^*x_2)/a$$

$$z_{12} = -((h^*p_2^*x_3)/(b^*h_n)) + (h^*p_2^*x_4)/(b^*h_n)$$

$$z_{21} = (m_2^*p_1^*x_2)/a - (m_3^*p_1^*x_3)/a$$

$$z_{22} = -((h^*p_2^*x_4)/(b^*h_n)) + (h^*m_4^*p_2^*x_4)/(b^*h_n)$$

$$Z_2(x) = \begin{bmatrix} z_{13} & z_{14} \\ z_{23} & z_{24} \end{bmatrix}, \quad (6.4-28b)$$

όπου

$$\begin{aligned} z_{13} = & (2*a_0*a_1*a_4*a_8*\text{Cos}[x_5] + 2*a_0*a_4*a_8*p_1*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_1*a_4*a_8*x_2*\text{Cos}[x_5] + 2*a_4*a_8*p_1*x_2*\text{Cos}[x_5] + 2*a_1*a_8*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_1*a_2*a_9*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + 2*a_3*a_9*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_8*p_1*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + 2*a_2*a_9*p_1*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + a_2*a_9*x_1*x_4*\text{Cos}[x_5] - \\ & 4*a_0*a_2*a_6*a_8*x_1*\text{Sin}[x_5] + 2*a_0*a_2*a_4*a_9*x_1*\text{Sin}[x_5] - \\ & 4*a_2*a_6*a_8*x_1*x_2*\text{Sin}[x_5] + 2*a_2*a_4*a_9*x_1*x_2*\text{Sin}[x_5] - \\ & 2*a_1^2*a_8*x_3*\text{Sin}[x_5] - 2*a_1*a_8*p_1*x_3*\text{Sin}[x_5] - 2*a_8*p_3*x_3*\text{Sin}[x_5] - \\ & 4*a_2*a_4*a_8*x_1^2*x_3*\text{Sin}[x_5] + 2*a_2*a_9*x_1^2*x_3*\text{Sin}[x_5] - \\ & 2*a_3*a_8*x_3^2*\text{Sin}[x_5] + a_1*a_8*x_4*\text{Sin}[x_5] + a_8*p_1*x_4*\text{Sin}[x_5] - \\ & 2*a_2*a_8*x_3*x_4*\text{Sin}[x_5])/(2*a*x_3^{(1/2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{14} = & (4*a_0*a_2*a_6*a_8*x_1*\text{Cos}[x_5] - 2*a_0*a_2*a_4*a_9*x_1*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_2*a_6*a_8*x_1*x_2*\text{Cos}[x_5] - 2*a_2*a_4*a_9*x_1*x_2*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_1^2*a_8*x_3*\text{Cos}[x_5] + 2*a_1*a_8*p_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + 2*a_8*p_3*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_2*a_4*a_8*x_1^2*x_3*\text{Cos}[x_5] - 2*a_2*a_9*x_1^2*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_3*a_8*x_3^2*\text{Cos}[x_5] - a_1*a_8*x_4*\text{Cos}[x_5] - a_8*p_1*x_4*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_2*a_8*x_3*x_4*\text{Cos}[x_5] + 2*a_0*a_1*a_4*a_8*\text{Sin}[x_5] + 2*a_0*a_4*a_8*p_1*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_1*a_4*a_8*x_2*\text{Sin}[x_5] + 2*a_4*a_8*p_1*x_2*\text{Sin}[x_5] + 2*a_1*a_8*x_1*x_3*\text{Sin}[x_5] + \\ & 4*a_1*a_2*a_9*x_1*x_3*\text{Sin}[x_5] + 2*a_3*a_9*x_1*x_3*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_8*p_1*x_1*x_3*\text{Sin}[x_5] + 2*a_2*a_9*p_1*x_1*x_3*\text{Sin}[x_5] + a_2*a_9*x_1*x_4*\text{Sin}[x_5])/ \\ & (2*a*x_3^{(1/2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{23} = & (4*a_0^2*a_4*a_6*a_8*\text{Cos}[x_5] - 2*a_7*a_9*\text{Cos}[x_5] + 8*a_0*a_4*a_6*a_8*x_2*\text{Cos}[x_5] - \\ & 4*a_0*a_6*a_9*x_2*\text{Cos}[x_5] + 4*a_4*a_6*a_8*x_2^2*\text{Cos}[x_5] - 2*a_6*a_9*x_2^2*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_0*a_4^2*a_8*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + 4*a_0*a_6*a_8*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_0*a_2*a_6*a_9*x_1*x_3*\text{Cos}[x_5] + 4*a_4^2*a_8*x_1*x_2*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_6*a_8*x_1*x_2*x_3*\text{Cos}[x_5] + 4*a_2*a_6*a_9*x_1*x_2*x_3*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_1^2*a_9*x_3^2*\text{Cos}[x_5] + 2*a_5*a_9*x_3^2*\text{Cos}[x_5] + \\ & 2*a_1*a_9*p_2*x_3^2*\text{Cos}[x_5] + 2*a_9*p_4*x_3^2*\text{Cos}[x_5] + \\ & 4*a_4*a_8*x_1^2*x_3^2*\text{Cos}[x_5] + 4*a_2*a_4*a_9*x_1^2*x_3^2*\text{Cos}[x_5] + \\ & 3*a_1*a_9*x_3*x_4*\text{Cos}[x_5] + a_9*p_2*x_3*x_4*\text{Cos}[x_5] - 8*a_0*a_1*a_6*a_8*x_3*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_0*a_1*a_4*a_9*x_3*\text{Sin}[x_5] - 4*a_0*a_6*a_8*p_2*x_3*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_0*a_4*a_9*p_2*x_3*\text{Sin}[x_5] - 8*a_1*a_6*a_8*x_2*x_3*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_1*a_4*a_9*x_2*x_3*\text{Sin}[x_5] - 4*a_6*a_8*p_2*x_2*x_3*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_4*a_9*p_2*x_2*x_3*\text{Sin}[x_5] - 4*a_0*a_4*a_8*x_3^2*\text{Sin}[x_5] - \\ & 8*a_1*a_4*a_8*x_1*x_3^2*\text{Sin}[x_5] + 2*a_1*a_9*x_1*x_3^2*\text{Sin}[x_5] - \\ & 4*a_4*a_8*p_2*x_1*x_3^2*\text{Sin}[x_5] + 2*a_9*p_2*x_1*x_3^2*\text{Sin}[x_5] - \\ & 4*a_4*a_8*x_2*x_3^2*\text{Sin}[x_5] - 2*a_0*a_6*a_8*x_4*\text{Sin}[x_5] + \\ & 2*a_0*a_4*a_9*x_4*\text{Sin}[x_5] - 2*a_6*a_8*x_2*x_4*\text{Sin}[x_5] + 2*a_4*a_9*x_2*x_4*\text{Sin}[x_5] - \\ & 2*a_4*a_8*x_1*x_3*x_4*\text{Sin}[x_5] + 2*a_9*x_1*x_3*x_4*\text{Sin}[x_5])/(2*b*x_3^{(3/2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{24} = & (8*a_0*a_1*a_6*a_8*x^3*\text{Cos}[x5] - 2*a_0*a_1*a_4*a_9*x^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4*a_0*a_6*a_8*p^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 2*a_0*a_4*a_9*p^2*x^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 8*a_1*a_6*a_8*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 2*a_1*a_4*a_9*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4*a_6*a_8*p^2*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 2*a_4*a_9*p^2*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4*a_0*a_4*a_8*x^3^2*\text{Cos}[x5] + 8*a_1*a_4*a_8*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 2*a_1*a_9*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] + 4*a_4*a_8*p^2*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 2*a_9*p^2*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] + 4*a_4*a_8*x^2*x^3^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2*a_0*a_6*a_8*x^4*\text{Cos}[x5] - 2*a_0*a_4*a_9*x^4*\text{Cos}[x5] + 2*a_6*a_8*x^2*x^4*\text{Cos}[x5] - \\
 & 2*a_4*a_9*x^2*x^4*\text{Cos}[x5] + 2*a_4*a_8*x^1*x^3*x^4*\text{Cos}[x5] - \\
 & 2*a_9*x^1*x^3*x^4*\text{Cos}[x5] + 4*a_0^2*a_4*a_6*a_8*\text{Sin}[x5] - 2*a_7*a_9*\text{Sin}[x5] + \\
 & 8*a_0*a_4*a_6*a_8*x^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_0*a_6*a_9*x^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_4*a_6*a_8*x^2^2*\text{Sin}[x5] - 2*a_6*a_9*x^2^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_0*a_4^2*a_8*x^1*x^3*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_6*a_8*x^1*x^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_0*a_2*a_6*a_9*x^1*x^3*\text{Sin}[x5] + 4*a_4^2*a_8*x^1*x^2*x^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_6*a_8*x^1*x^2*x^3*\text{Sin}[x5] + 4*a_2*a_6*a_9*x^1*x^2*x^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a_1^2*a_9*x^3^2*\text{Sin}[x5] + 2*a_5*a_9*x^3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a_1*a_9*p^2*x^3^2*\text{Sin}[x5] + 2*a_9*p^4*x^3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_4*a_8*x^1^2*x^3^2*\text{Sin}[x5] + 4*a_2*a_4*a_9*x^1^2*x^3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 3*a_1*a_9*x^3*x^4*\text{Sin}[x5] + a_9*p^2*x^3*x^4*\text{Sin}[x5]) / (2*b*x^3^(3/2))
 \end{aligned}$$

και

$$Z_3(x) = \begin{bmatrix} z_{15}(x) & z_{16}(x) \\ z_{25}(x) & z_{26}(x) \end{bmatrix}, \quad (6.4-28c)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 z_{15} = & (-8*a_0^2*a_2*a_4*a_6*a_8*x^1*\text{Cos}[x5] + 2*a_0^2*a_2*a_4^2*a_9*x^1*\text{Cos}[x5] + \\
 & 3*a_2*a_7*a_9*x^1*\text{Cos}[x5] - 16*a_0*a_2*a_4*a_6*a_8*x^1*x^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4*a_0*a_2*a_4^2*a_9*x^1*x^2*\text{Cos}[x5] + 6*a_0*a_2*a_6*a_9*x^1*x^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8*a_2*a_4*a_6*a_8*x^1*x^2^2*\text{Cos}[x5] + 2*a_2*a_4^2*a_9*x^1*x^2^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 3*a_2*a_6*a_9*x^1*x^2^2*\text{Cos}[x5] - 2*a_0*a_1^2*a_4*a_8*x^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 2*a_0*a_1*a_4*a_8*p^1*x^3*\text{Cos}[x5] - 4*a_0*a_4*a_8*p^3*x^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8*a_0*a_2*a_4^2*a_8*x^1^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 8*a_0*a_2*a_6*a_8*x^1^2*x^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 6*a_0*a_2*a_4*a_9*x^1^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 4*a_0*a_2^2*a_6*a_9*x^1^2*x^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 2*a_1^2*a_4*a_8*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 2*a_1*a_4*a_8*p^1*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4*a_4*a_8*p^3*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 8*a_2*a_4^2*a_8*x^1^2*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8*a_2*a_6*a_8*x^1^2*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] + 6*a_2*a_4*a_9*x^1^2*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4*a_2^2*a_6*a_9*x^1^2*x^2*x^3*\text{Cos}[x5] - 4*a_0*a_3*a_4*a_8*x^3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4*a_1^2*a_8*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] + 2*a_1*a_3*a_4*a_8*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 6*a_1^2*a_2*a_9*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] - 4*a_1*a_3*a_9*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & a_2*a_5*a_9*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] - 4*a_1*a_8*p^1*x^1*x^3^2*\text{Cos}[x5] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2^*a3^*a4^*a8^*p1^*x1^*x3^2^*Cos[x5] - 4^*a1^*a2^*a9^*p1^*x1^*x3^2^*Cos[x5] - \\
 & 2^*a3^*a9^*p1^*x1^*x3^2^*Cos[x5] - 4^*a8^*p3^*x1^*x3^2^*Cos[x5] - \\
 & 2^*a2^*a9^*p3^*x1^*x3^2^*Cos[x5] - 8^*a2^*a4^*a8^*x1^3^*x3^2^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a2^*a9^*x1^3^*x3^2^*Cos[x5] - 4^*a2^2^*a4^*a9^*x1^3^*x3^2^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a1^*a8^*x2^*x3^2^*Cos[x5] - 4^*a3^*a4^*a8^*x2^*x3^2^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a1^*a2^*a9^*x2^*x3^2^*Cos[x5] + 2^*a8^*p1^*x2^*x3^2^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a2^*a9^*p1^*x2^*x3^2^*Cos[x5] - 4^*a3^*a8^*x1^*x3^3^*Cos[x5] - \\
 & 2^*a2^*a3^*a9^*x1^*x3^3^*Cos[x5] - 4^*a0^*a2^*a4^*a8^*x3^*x4^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a1^*a8^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] + 2^*a1^*a2^*a4^*a8^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] - \\
 & a1^*a2^*a9^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] + 2^*a8^*p1^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a2^*a4^*a8^*p1^*x1^*x3^*x4^*Cos[x5] - 4^*a2^*a4^*a8^*x2^*x3^*x4^*Cos[x5] - \\
 & 4^*a2^*a8^*x1^*x3^2^*x4^*Cos[x5] - 2^*a2^2^*a9^*x1^*x3^2^*x4^*Cos[x5] - \\
 & 2^*a0^2^*a1^*a4^2^*a8^*Sin[x5] + a1^*a7^*a8^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a0^2^*a4^2^*a8^*p1^*Sin[x5] + a7^*a8^*p1^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a0^*a1^*a4^2^*a8^*x2^*Sin[x5] + 2^*a0^*a1^*a6^*a8^*x2^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a0^*a4^2^*a8^*p1^*x2^*Sin[x5] + 2^*a0^*a6^*a8^*p1^*x2^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a1^*a4^2^*a8^*x2^2^*Sin[x5] + a1^*a6^*a8^*x2^2^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a4^2^*a8^*p1^*x2^2^*Sin[x5] + a6^*a8^*p1^*x2^2^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a0^*a1^*a4^*a8^*x1^*x3^*Sin[x5] + 8^*a0^*a1^*a2^*a6^*a8^*x1^*x3^*Sin[x5] + \\
 & 4^*a0^*a3^*a6^*a8^*x1^*x3^*Sin[x5] - 6^*a0^*a1^*a2^*a4^*a9^*x1^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a0^*a3^*a4^*a9^*x1^*x3^*Sin[x5] - 2^*a0^*a4^*a8^*p1^*x1^*x3^*Sin[x5] + \\
 & 4^*a0^*a2^*a6^*a8^*p1^*x1^*x3^*Sin[x5] - 4^*a0^*a2^*a4^*a9^*p1^*x1^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a1^*a4^*a8^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] + 8^*a1^*a2^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] + \\
 & 4^*a3^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 6^*a1^*a2^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a3^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 2^*a4^*a8^*p1^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] + \\
 & 4^*a2^*a6^*a8^*p1^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] - 4^*a2^*a4^*a9^*p1^*x1^*x2^*x3^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a1^3^*a8^*x3^2^*Sin[x5] + a1^*a5^*a8^*x3^2^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a1^2^*a8^*p1^*x3^2^*Sin[x5] + a5^*a8^*p1^*x3^2^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a1^*a8^*p3^*x3^2^*Sin[x5] + 4^*a0^*a2^*a4^*a8^*x1^*x3^2^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a1^*a8^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] + 12^*a1^*a2^*a4^*a8^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] + \\
 & 4^*a3^*a4^*a8^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] - 4^*a2^*a3^*a6^*a8^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] - \\
 & 8^*a1^*a2^*a9^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] - 4^*a3^*a9^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a2^*a3^*a4^*a9^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] - 2^*a8^*p1^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] + \\
 & 4^*a2^*a4^*a8^*p1^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] - 4^*a2^*a9^*p1^*x1^2^*x3^2^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a2^*a9^*x1^*x2^*x3^2^*Sin[x5] + 4^*a1^*a3^*a8^*x3^3^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a3^*a8^*p1^*x3^3^*Sin[x5] + 4^*a0^*a2^*a6^*a8^*x1^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a0^*a2^*a4^*a9^*x1^*x4^*Sin[x5] + 4^*a2^*a6^*a8^*x1^*x2^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a2^*a4^*a9^*x1^*x2^*x4^*Sin[x5] - a1^2^*a8^*x3^*x4^*Sin[x5] - \\
 & a1^*a8^*p1^*x3^*x4^*Sin[x5] - 2^*a8^*p3^*x3^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 4^*a2^2^*a6^*a8^*x1^2^*x3^*x4^*Sin[x5] - 2^*a2^*a9^*x1^2^*x3^*x4^*Sin[x5] + \\
 & 2^*a2^2^*a4^*a9^*x1^2^*x3^*x4^*Sin[x5] + 4^*a1^*a2^*a8^*x3^2^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a3^*a8^*x3^2^*x4^*Sin[x5] + 2^*a2^*a8^*p1^*x3^2^*x4^*Sin[x5] - \\
 & 2^*a2^*a8^*x3^*x4^2^*Sin[x5])/(2^*a^*x3^(3/2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z25 = & (-12^*a0^2^*a1^*a4^*a6^*a8^*x3^*Cos[x5] + 2^*a0^2^*a1^*a4^2^*a9^*x3^*Cos[x5] + \\
 & 5^*a1^*a7^*a9^*x3^*Cos[x5] - 8^*a0^2^*a4^*a6^*a8^*p2^*x3^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a0^2^*a4^2^*a9^*p2^*x3^*Cos[x5] + 3^*a7^*a9^*p2^*x3^*Cos[x5] - \\
 & 24^*a0^*a1^*a4^*a6^*a8^*x2^*x3^*Cos[x5] + 4^*a0^*a1^*a4^2^*a9^*x2^*x3^*Cos[x5] + \\
 & 10^*a0^*a1^*a6^*a9^*x2^*x3^*Cos[x5] - 16^*a0^*a4^*a6^*a8^*p2^*x2^*x3^*Cos[x5] + \\
 & 4^*a0^*a4^2^*a9^*p2^*x2^*x3^*Cos[x5] + 6^*a0^*a6^*a9^*p2^*x2^*x3^*Cos[x5] - \\
 & 12^*a1^*a4^*a6^*a8^*x2^2^*x3^*Cos[x5] + 2^*a1^*a4^2^*a9^*x2^2^*x3^*Cos[x5] + \\
 & 5^*a1^*a6^*a9^*x2^2^*x3^*Cos[x5] - 8^*a4^*a6^*a8^*p2^*x2^2^*x3^*Cos[x5] + \\
 & 2^*a4^2^*a9^*p2^*x2^2^*x3^*Cos[x5] + 3^*a6^*a9^*p2^*x2^2^*x3^*Cos[x5] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 8^*a0^2*a4^2*a8^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 12^*a0^*a1^*a4^2*a8^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 16^*a0^*a1^*a6^*a8^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] + 4^*a0^*a3^*a4^*a6^*a8^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 6^*a0^*a1^*a4^*a9^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 12^*a0^*a1^*a2^*a6^*a9^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a0^*a3^*a6^*a9^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 8^*a0^*a4^2*a8^*p2^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8^*a0^*a6^*a8^*p2^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] + 6^*a0^*a4^*a9^*p2^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a0^*a2^*a6^*a9^*p2^*x1^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 16^*a0^*a4^2*a8^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4^*a0^*a6^*a8^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] + 4^*a0^*a2^*a6^*a9^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 12^*a1^*a4^2*a8^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 16^*a1^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4^*a3^*a4^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] + 6^*a1^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 12^*a1^*a2^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 4^*a3^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8^*a4^2*a8^*p2^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 8^*a6^*a8^*p2^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 6^*a4^*a9^*p2^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - 4^*a2^*a6^*a9^*p2^*x1^*x2^*x3^2*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8^*a4^2*a8^*x2^2*x3^2*\text{Cos}[x5] + 4^*a6^*a8^*x2^2*x3^2*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4^*a2^*a6^*a9^*x2^2*x3^2*\text{Cos}[x5] - 2^*a1^3*a9^*x3^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 3^*a1^*a5^*a9^*x3^3*\text{Cos}[x5] - 2^*a1^2*a9^*p2^*x3^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & a5^*a9^*p2^*x3^3*\text{Cos}[x5] - 2^*a1^*a9^*p4^*x3^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8^*a0^*a4^*a8^*x1^*x3^3*\text{Cos}[x5] - 4^*a0^*a2^*a4^*a9^*x1^*x3^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 16^*a1^*a4^*a8^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] + 4^*a3^*a4^2*a8^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2^*a1^*a9^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] - 12^*a1^*a2^*a4^*a9^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a3^*a4^*a9^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] - 8^*a4^*a8^*p2^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2^*a9^*p2^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] - 4^*a2^*a4^*a9^*p2^*x1^2*x3^3*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a4^*a8^*x1^*x2^*x3^3*\text{Cos}[x5] - 8^*a0^2*a4^*a6^*a8^*x4^*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2^*a0^2*a4^2*a9^*x4^*\text{Cos}[x5] + 3^*a7^*a9^*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & 16^*a0^*a4^*a6^*a8^*x2^*x4^*\text{Cos}[x5] + 4^*a0^*a4^2*a9^*x2^*x4^*\text{Cos}[x5] + \\
 & 6^*a0^*a6^*a9^*x2^*x4^*\text{Cos}[x5] - 8^*a4^*a6^*a8^*x2^2*x4^*\text{Cos}[x5] + \\
 & 2^*a4^2*a9^*x2^2*x4^*\text{Cos}[x5] + 3^*a6^*a9^*x2^2*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & 8^*a0^*a4^2*a8^*x1^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] - 4^*a0^*a6^*a8^*x1^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4^*a0^*a2^*a4^*a6^*a8^*x1^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] + 6^*a0^*a4^*a9^*x1^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a0^*a2^*a6^*a9^*x1^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] - 8^*a4^2*a8^*x1^*x2^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] + 4^*a2^*a4^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] + \\
 & 6^*a4^*a9^*x1^*x2^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] - 4^*a2^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & 3^*a1^2*a9^*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] - a5^*a9^*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & a1^*a9^*p2^*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] - 4^*a4^*a8^*x1^2*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] + \\
 & 4^*a2^*a4^2*a8^*x1^2*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] + 2^*a9^*x1^2*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] - \\
 & 4^*a2^*a4^*a9^*x1^2*x3^2*x4^*\text{Cos}[x5] - 4^*a0^3*a4^2*a6^*a8^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2^*a0^*a6^*a7^*a8^*\text{Sin}[x5] + 4^*a0^*a4^*a7^*a9^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 12^*a0^2*a4^2*a6^*a8^*x2^*\text{Sin}[x5] - 4^*a0^2*a6^2*a8^*x2^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2^*a6^*a7^*a8^*x2^*\text{Sin}[x5] + 8^*a0^2*a4^*a6^*a9^*x2^*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4^*a4^*a7^*a9^*x2^*\text{Sin}[x5] - 12^*a0^*a4^2*a6^*a8^*x2^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 6^*a0^*a6^2*a8^*x2^2*\text{Sin}[x5] + 12^*a0^*a4^*a6^*a9^*x2^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4^*a4^2*a6^*a8^*x2^3*\text{Sin}[x5] - 2^*a6^2*a8^*x2^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4^*a4^*a6^*a9^*x2^3*\text{Sin}[x5] - 4^*a0^2*a4^3*a8^*x1^*x3^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4^*a0^2*a4^*a6^*a8^*x1^*x3^*\text{Sin}[x5] + 8^*a0^2*a2^*a6^2*a8^*x1^*x3^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2^*a4^*a7^*a8^*x1^*x3^*\text{Sin}[x5] - 8^*a0^2*a2^*a4^*a6^*a9^*x1^*x3^*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4^*a7^*a9^*x1^*x3^*\text{Sin}[x5] - 8^*a0^*a4^3*a8^*x1^*x2^*x3^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 12^*a0^*a4^*a6^*a8^*x1^*x2^*x3^*\text{Sin}[x5] + 16^*a0^*a2^*a6^2*a8^*x1^*x2^*x3^*\text{Sin}[x5] + \\
 & 8^*a0^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^*\text{Sin}[x5] - 16^*a0^*a2^*a4^*a6^*a9^*x1^*x2^*x3^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4^*a4^3*a8^*x1^*x2^2*x3^*\text{Sin}[x5] - 6^*a4^*a6^*a8^*x1^*x2^2*x3^*\text{Sin}[x5] + \\
 & 8^*a2^*a6^2*a8^*x1^*x2^2*x3^*\text{Sin}[x5] + 4^*a6^*a9^*x1^*x2^2*x3^*\text{Sin}[x5] - \\
 & 8^*a2^*a4^*a6^*a9^*x1^*x2^2*x3^*\text{Sin}[x5] + 8^*a0^*a1^2*a6^*a8^*x3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 6^*a0^*a5^*a6^*a8^*x3^2*\text{Sin}[x5] - 2^*a0^*a1^2*a4^*a9^*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4^*a0^*a4^*a5^*a9^*x3^2*\text{Sin}[x5] + 4^*a0^*a1^*a6^*a8^*p2^*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2^*a0^*a1^*a4^*a9^*p2^*x3^2*\text{Sin}[x5] + 4^*a0^*a6^*a8^*p4^*x3^2*\text{Sin}[x5] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4*a_0*a_4*a_9*p^4*x^3^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_0*a_4^2*a_8*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_0*a_6*a_8*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] + 16*a_0*a_2*a_4*a_6*a_8*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 8*a_0*a_2*a_4^2*a_9*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 8*a_0*a_2*a_6*a_9*x1^2*x3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 8*a_1^2*a_6*a_8*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] + 6*a_5*a_6*a_8*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2*a_1^2*a_4*a_9*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_4*a_5*a_9*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_1*a_6*a_8*p^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 2*a_1*a_4*a_9*p^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_6*a_8*p^4*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_4*a_9*p^4*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_4^2*a_8*x1^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 4*a_6*a_8*x1^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 16*a_2*a_4*a_6*a_8*x1^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 8*a_2*a_4^2*a_9*x1^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] - 8*a_2*a_6*a_9*x1^2*x2*x3^2*\text{Sin}[x5] + \\
 & 8*a_0*a_1*a_4*a_8*x3^3*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_3*a_6*a_8*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_0*a_4*a_8*p^2*x3^3*\text{Sin}[x5] + 12*a_1^2*a_4*a_8*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 6*a_4*a_5*a_8*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - 4*a_1*a_3*a_6*a_8*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_1^2*a_9*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] + 2*a_1*a_3*a_4*a_9*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_5*a_9*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] + 8*a_1*a_4*a_8*p^2*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_3*a_6*a_8*p^2*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - 4*a_1*a_9*p^2*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a_3*a_4*a_9*p^2*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] + 4*a_4*a_8*p^4*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_9*p^4*x1*x3^3*\text{Sin}[x5] - 4*a_4*a_8*x1^3*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 8*a_2*a_4^2*a_8*x1^3*x3^3*\text{Sin}[x5] - 8*a_2*a_4*a_9*x1^3*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_1*a_4*a_8*x2*x3^3*\text{Sin}[x5] + 4*a_3*a_6*a_8*x2*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a_1*a_9*x2*x3^3*\text{Sin}[x5] + 2*a_9*p^2*x2*x3^3*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_3*a_4*a_8*x1*x3^4*\text{Sin}[x5] + 6*a_0*a_1*a_6*a_8*x3*x4*\text{Sin}[x5] - \\
 & 6*a_0*a_1*a_4*a_9*x3*x4*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_6*a_8*p^2*x3*x4*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_0*a_4*a_9*p^2*x3*x4*\text{Sin}[x5] + 6*a_1*a_6*a_8*x2*x3*x4*\text{Sin}[x5] - \\
 & 6*a_1*a_4*a_9*x2*x3*x4*\text{Sin}[x5] + 4*a_6*a_8*p^2*x2*x3*x4*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_4*a_9*p^2*x2*x3*x4*\text{Sin}[x5] + 4*a_0*a_2*a_6*a_8*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + \\
 & 6*a_1*a_4*a_8*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] - 4*a_1*a_2*a_6*a_8*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_3*a_6*a_8*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] - 6*a_1*a_9*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a_1*a_2*a_4*a_9*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + 2*a_3*a_4*a_9*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_2*a_6*a_8*p^2*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] - 2*a_9*p^2*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + \\
 & 2*a_2*a_4*a_9*p^2*x1*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] - 4*a_4*a_8*x2*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_2*a_6*a_8*x2*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + 2*a_9*x2*x3^2*x4*\text{Sin}[x5] + \\
 & 4*a_2*a_4*a_8*x1*x3^3*x4*\text{Sin}[x5] + 2*a_0*a_6*a_8*x4^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2*a_0*a_4*a_9*x4^2*\text{Sin}[x5] + 2*a_6*a_8*x2*x4^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 2*a_4*a_9*x2*x4^2*\text{Sin}[x5] - 2*a_4*a_8*x1*x3*x4^2*\text{Sin}[x5] - \\
 & 4*a_2*a_6*a_8*x1*x3*x4^2*\text{Sin}[x5] + 2*a_2*a_4*a_9*x1*x3*x4^2*\text{Sin}[x5] / \\
 & (2*b*x3^(5/2))
 \end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα

$$\text{span} \left\{ \begin{array}{c} Q(x) \\ Z(x) \end{array} \right\} = \text{span} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} g_1(x) & g_2(x) & \text{ad}_{g_0} g_1(x) & \text{ad}_{g_0} g_2(x) & \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \\ \hline z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \end{array} \right)$$

όπου $\text{span}\{\Lambda(x)\}$ είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα $\Lambda(x)$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_2(x) \\ z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{g_0} g_1(x) \\ z_{13} \\ z_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{g_0} g_2(x) \\ z_{14} \\ z_{24} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \\ z_{15} \\ z_{25} \end{bmatrix}$$

είναι involutive, εφόσον

$$[\tau, \sigma] \in \text{span} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \text{ad}_{g_0} g_1(x) & \text{ad}_{g_0} g_2(x) & \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \end{bmatrix}$$

για κάθε

$$\tau, \sigma \in \text{span} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \text{ad}_{g_0} g_1(x) & \text{ad}_{g_0} g_2(x) & \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, θα έχουμε

$$\text{inv} \begin{bmatrix} Q(x) \\ Z(x) \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \text{ad}_{g_0} g_1(x) & \text{ad}_{g_0} g_2(x) & \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \end{bmatrix}$$

(6.4-30)

Χρησιμοποιώντας τώρα την προηγούμενη σχέση και το γεγονός ότι οι στήλες

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline z_{13} \\ z_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \hline z_{14} \\ z_{24} \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \hline z_{15} \\ z_{25} \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι

$$\dim \left\{ \text{inv} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \hline \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} = 5 \quad (6.4-31)$$

Τελικά, από τις σχέσεις (6.4-19) και (6.4-31), συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη 3 του Θεωρήματος 2.4.2., ισχύει.

Επομένως, το πρόβλημα του Ακριβούς Ταιριάσματος του μη γραμμικού συστήματος (6.2-16) σε Γραμμικό Πρότυπο της μορφής (6.4-5), έχει λύση.

6.4.5. Εύρεση του νόμου ελέγχου

Εφόσον ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2., η λύση του προβλήματος του Ακριβούς ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο για την Επαγωγική Μηχανή που περιγράφεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (6.2-16), ανάγεται στη λύση των ακόλουθων εξισώσεων

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{x}) \quad (6.4-32a)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \quad (6.4-32b)$$

όπου το $d\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ υπολογίζεται από τη λύση του συστήματος μερικών διαφορικών

εξισώσεων πρώτης τάξης, που δίνονται στο Θεώρημα 2.4.1. και έχουν τη μορφή

$$d\phi[Q(x)] = Z(x)$$

Η προηγούμενη εξίσωση, εφόσον ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2., μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως εξής

$$d\phi[\hat{Q}(x)] = \hat{Z}(x), \quad (6.4-33)$$

όπου

$$\hat{Q}(x) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} g_1(x) & g_2(x) & \text{ad}_{g_0} g_1(x) & \text{ad}_{g_0} g_2(x) & \text{ad}_{g_0}^2 g_1(x) \end{array} \right]$$

και

$$\hat{Z}(x) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ \hline z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \end{array} \right]$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\hat{Q}(x)$ είναι τετραγωνικός, οπότε είναι και αντιστρέψιμος. Οπότε, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα (6.4-33) ως προς $d\phi(x)$ ως εξής

$$d\phi(x) = \hat{Z}(x) [\hat{Q}(x)]^{-1}.$$

ή

$$d\phi(x) = \left[\begin{array}{c} d\phi_1(x) \\ d\phi_2(x) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -\frac{1}{a}(p_3 + \alpha_3 x_3 + \alpha_2 x_4) & -\frac{1}{a}(\alpha_1 + p_1) \\ \hline -\frac{2\alpha_4}{b}(\alpha_0 + x_2) & -\frac{2}{b} \left(\alpha_4 x_1 + \frac{1}{x_3}(\alpha_0 \alpha_6 + \alpha_6 x_2) \right) \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_3}{a}x_1 & \frac{\alpha_2}{a}x_1 & 0 \\ \frac{1}{bx_3^2}(\alpha_7 + 2\alpha_0\alpha_6x_2 + \alpha_6x_2^2 - \alpha_5x_3^2 - p_4x_3^2 + 0.5x_4^2) & \frac{1}{bx_3}(\alpha_1x_3 + p_2x_3 + x_4) & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4-34)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (6.4-34) ως προς x , θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) = & -\frac{1}{a} \left[\int_{x_1=0}^{x_1(x_j=0, j \neq 1, 3, x_3=c_3)} (p_3 + \alpha_3x_3 + \alpha_2x_4) dx_1 + \int_{x_2=0}^{x_2(x_j=0, j=2,4,5, x_3=c_3)} (\alpha_1 + p_1) dx_2 + \right. \\ & \left. + \int_{x_3=c_3}^{x_3(x_j=0, j>3)} (\alpha_3x_1) dx_3 + \int_{x_4=0}^{x_4(x_5=0)} (\alpha_2x_1) dx_4 + \int_{x_5=0}^{x_5} 0 dx_5 \right] = \\ & = -\frac{1}{a} (p_3x_1 + \alpha_1x_2 + p_1x_2 + \alpha_3x_1x_3 + \alpha_2x_1x_4) \end{aligned} \quad (6.4-35a)$$

και

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) = & -\frac{1}{b} \left[\int_{x_1=0}^{x_1(x_j=0, j \neq 1, 3, x_3=c_3)} (2\alpha_4(\alpha_0 + x_2)) dx_1 + \int_{x_2=0}^{x_2(x_j=0, j=2,4,5, x_3=c_3)} 2 \left(\alpha_4x_1 + \frac{1}{x_3}(\alpha_0\alpha_6 + \alpha_6x_2) \right) dx_2 + \right. \\ & \left. + \int_{x_3=c_3}^{x_3(x_j=0, j>3)} \left(-\frac{1}{x_3^2}(\alpha_7 + 2\alpha_0\alpha_6x_2 + \alpha_6x_2^2 - \alpha_5x_3^2 - p_4x_3^2 + 0.5x_4^2) \right) dx_3 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_4=0}^{x_4(x_5=0)} \left[\frac{1}{x_3} (\alpha_1 x_3 + p_2 x_3 + x_4) \right] dx_4 + \int_{x_5=0}^{x_5} 0 dx_5 = \\
 & = -\frac{1}{b} \left[2a_0 a_4 x_1 + (\alpha_5 + p_4) x_3 + 2a_4 x_1 x_2 + (a_1 + p_2) x_4 + \frac{1}{2} \frac{x_4^2}{x_3} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{x_3} (a_7 + 2a_0 a_6 x_2 + a_6 x_2^2) - c_3 (\alpha_5 + p_4) - \frac{a_7}{c_3} \right] \quad (6.4-35b)
 \end{aligned}$$

όπου η σταθερά c_3 εκφράζει μια πραγματική σταθερά, διάφορη του μηδενός.

Από τη σχέση (6.4-26), βρίσκουμε τον πίνακα $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, ο οποίος θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\alpha_8} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \sin x_5 & \frac{b}{\alpha_9} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \cos x_5 \\ \frac{a}{\alpha_8} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \cos x_5 & \frac{b}{\alpha_9} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \sin x_5 \end{bmatrix} \quad (6.4-36)$$

Τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ του νόμου ελέγχου της μορφής $\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ δίνονται, το μεν $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ από την (6.4-36), το δε $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ υπολογίζεται με αντικατάσταση του του $\phi(\mathbf{x})$ στην (2.4-32b) και παρουσιάζονται στη συνέχεια

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\alpha_8} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \sin x_5 & \frac{b}{\alpha_9} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \cos x_5 \\ \frac{a}{\alpha_8} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \cos x_5 & \frac{b}{\alpha_9} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \sin x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & \left[-2a_0 a_4 x_1 + (\alpha_5 + p_4)(c_3 - x_3) - 2a_4 x_1 x_2 + (a_1 + p_2) x_4 - \frac{1}{2} \frac{x_4^2}{x_3} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{x_3} \left(a_7 + 2a_0 a_6 x_2 + a_6 x_2^2 \right) - (a_1 + p_2) x_3 x_4 + \frac{a_7}{c_3} \right] \left(\cos x_5 / a_9 \sqrt{x_3} \right) + \\ & \left. + \left(p_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + p_1 x_2 + \alpha_3 x_1 x_3 + \alpha_2 x_1 x_4 \right) \left(\sin x_5 / a_8 \sqrt{x_3} \right) \right] \\ = & \left[\begin{aligned} & \left[-2a_0 a_4 x_1 + (\alpha_5 + p_4)(c_3 - x_3) - 2a_4 x_1 x_2 + (a_1 + p_2) x_4 - \frac{1}{2} \frac{x_4^2}{x_3} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{x_3} \left(a_7 + 2a_0 a_6 x_2 + a_6 x_2^2 \right) - (a_1 + p_2) x_3 x_4 + \frac{a_7}{c_3} \right] \left(\sin x_5 / a_9 \sqrt{x_3} \right) - \\ & \left. - \left(p_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + p_1 x_2 + \alpha_3 x_1 x_3 + \alpha_2 x_1 x_4 \right) \left(\cos x_5 / a_8 \sqrt{x_3} \right) \right] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

6.4.6. Ειδική Λύση του προβλήματος του Ακριβούς Ταιριάσματος του συστήματος σε Γραμμικό Πρότυπο

Θεωρώντας το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα της μορφής (6.4-6), θέτουμε $p_i = 0$ για $i = 1, 2, 3, 4$, οπότε οι πίνακες κατάστασης, εισόδου και εξόδου, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\tilde{\mathbf{A}}_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του νέου Γραμμικού Προτύπου είναι η ακόλουθη.

$$\mathbf{H}_M(s) = \tilde{\mathbf{C}}_M (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_M)^{-1} \mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \quad (6.4-38)$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος εύρεσης νόμου ελέγχου με σκοπό το Ακριβές Ταιριασμα στο Πρότυπο της μορφής (6.4-38) με $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$, με τη βοήθεια των σχέσεων (6.4-37) της παραγράφου 6.4.5., λαμβάνει την ειδική μορφή

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\alpha_8} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \sin x_5 & \frac{b}{\alpha_9} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \cos x_5 \\ \frac{a}{\alpha_8} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \cos x_5 & \frac{b}{\alpha_9} \frac{\sqrt{x_3}}{x_3} \sin x_5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x})$$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \left[-2a_0 a_4 x_1 + \alpha_5 (c_3 - x_3) - 2a_4 x_1 x_2 + a_1 x_4 - \frac{1}{2} \frac{x_4^2}{x_3} + \right. \\ \left. - \frac{1}{x_3} \left(a_7 + 2a_0 a_6 x_2 + a_6 x_2^2 \right) - a_1 x_3 x_4 + \frac{a_7}{c_3} \right] \left(\cos x_5 / a_9 \sqrt{x_3} \right) + \\ \left. + \left(\alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_1 x_3 + \alpha_2 x_1 x_4 \right) \left(\sin x_5 / a_8 \sqrt{x_3} \right) \right] \\ \dots \\ \left[-2a_0 a_4 x_1 + \alpha_5 (c_3 - x_3) - 2a_4 x_1 x_2 + a_1 x_4 - \frac{1}{2} \frac{x_4^2}{x_3} + \right. \\ \left. - \frac{1}{x_3} \left(a_7 + 2a_0 a_6 x_2 + a_6 x_2^2 \right) - a_1 x_3 x_4 + \frac{a_7}{c_3} \right] \left(\sin x_5 / a_9 \sqrt{x_3} \right) - \\ \left. - \left(\alpha_1 x_2 + p_1 x_2 + \alpha_3 x_1 x_3 + \alpha_2 x_1 x_4 \right) \left(\cos x_5 / a_8 \sqrt{x_3} \right) \right] \end{bmatrix}$$

6.5. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το πρότυπο είναι ένα γραμμικό σύστημα 4ης τάξης, ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, εφόσον ο πίνακας του ελέγξιμου

$$S \triangleq \left[B_M \quad A_M B_M \quad A_M^2 B_M \quad A_M^3 B_M \right] \quad (6.5-1)$$

είναι πλήρους τάξης και ο πίνακας του παρατηρήσιμου

$$R \triangleq \begin{bmatrix} C_M \\ C_M A_M \\ C_M A_M^2 \\ C_M A_M^3 \end{bmatrix} \quad (6.5-2)$$

είναι επίσης πλήρους τάξης. Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι το πρότυπο είναι ελάχιστης τάξης.

Το αρχικό ανοικτό μη γραμμικό σύστημα, άρα και το κλειστό, επίσης μη γραμμικό σύστημα, είναι 5ης τάξης, οπότε συμπεραίνουμε ότι μια κατάσταση του κλειστού συστήματος είναι μη παρατηρήσιμη. Το γεγονός αυτό θα σχολιάσουμε στη συνέχεια.

Το κλειστό σύστημα της Επαγωγικής Μηχανής, σύμφωνα με τη σχέση (2.3-2), έχει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\bar{x}} = \bar{g}_0(\bar{x}) + \bar{G}(\bar{x})w \quad (6.5-3)$$

$$y(\bar{x}) = h(\bar{x})$$

όπου

$$\bar{g}_0(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha_1 \alpha_0 - p_3 x_1 - p_1 x_2 \\ x_4 \\ \frac{\alpha_7}{c_3} + \alpha_5 c_3 + p_4 c_3 - p_2 x_4 - p_4 x_3 \\ x_1 + \alpha_4 \frac{x_2}{x_3} + \alpha_4 \alpha_0 \frac{1}{x_3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Το κλειστό σύστημα της σχέσης (6.5-3), μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_3 & -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -p_4 & -p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \alpha_0 \\ 0 \\ \frac{\alpha_7}{c_3} + \alpha_5 c_3 + p_4 c_3 \end{bmatrix}, \quad (6.5-4a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (6.4-5b)$$

και

$$\dot{x}_5 = x_1 + \alpha_4 \frac{x_2}{x_3} + \alpha_4 \alpha_0 \frac{1}{x_3} \quad (6.4-5c)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (6.4-5a) και (6.4-5b) είναι οι εξισώσεις του προτύπου μας, ενώ η εξίσωση (6.4-5c) είναι η διαφορική εξίσωση την οποία ικανοποιεί η μη παρατηρήσιμη κατάσταση x_5 του συστήματος της Επαγωγικής Μηχανής.

Όσον αφορά τις εξισώσεις (5.5-6a) και (5.5-6b), παρατηρούμε ότι η κατάλληλη επιλογή των p_1, p_2, p_3, p_4, a και b μας οδηγούν σε ασυμπτωτικά ευσταθείς εξόδους. Βέβαια, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για να είναι το κλειστό σύστημα BIBS ευσταθές, θα πρέπει η μη παρατηρήσιμη κατάσταση x_5 να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Η μελέτη της ευστάθειας της κατάστασης x_5 είναι ένα δύσκολο πρόβλημα το οποίο δεν εξετάζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

6.6. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

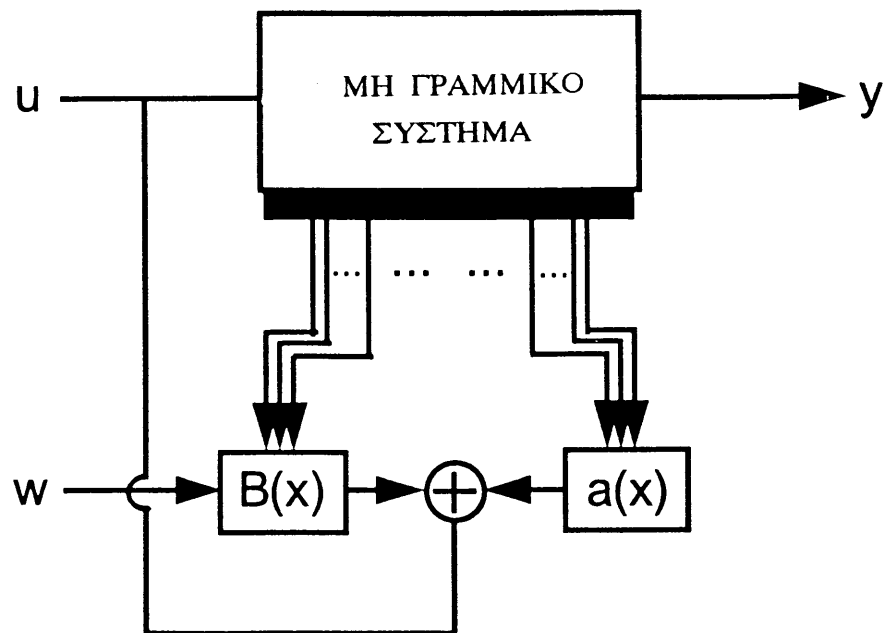
Για την υλοποίηση του μη γραμμικού νόμου ελέγχου της μορφής

$$u = a(x) + B(x)w$$

όπου τα $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ δίνονται από τη σχέση (5.4-37), απαιτείται η μέτρηση του διανύσματος κατάστασης \mathbf{x} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = ($\omega, \psi_a, \psi_b, i_a, i_b$).

Η γωνιακή ταχύτητα ω , μετριέται με τη βοήθεια μιας ταχογεννήτριας, ενώ τα ρεύματα i_a, i_b με τη βοήθεια ενός πολυμέτρου. Η μέτρηση των μαγνητικών ροών ψ_a, ψ_b , είναι ανέφικτη. Παρ' όλα αυτά, στην εργασία [32] αναφέρεται η ύπαρξη διαφόρων ασυμπτωτικά ευσταθών παρατηρητών μαγνητικής ροής που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία [37]. Η αρχή λειτουργίας του παρατηρητή αυτού βασίζεται σε μετρήσεις της ταχύτητας του ρότορα και των ρευμάτων του στάτορα.

Η σχηματική αναπαράσταση της υλοποίησης του νόμου ελέγχου για τα προϊόντα απόσταξης κατά τη διαδικασία της διύλησης, δίνεται στο Σχήμα 6.6.1.



Σχήμα 6.6.1. Υλοποίηση του νόμου ελέγχου που επιτυγχάνει την προσαρμογή σε πρότυπο για το σύστημα ελέγχου της Επαγωγικής Μηχανής.

6.7. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ

Η απεικόνιση εισόδων – εξόδων του αρχικού μη γραμμικού συστήματος, μετά την εφαρμογή του νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής (2.3-1),

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}$$

έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (5.7-1)$$

Εφόσον η περιγραφή εισόδων – εξόδων είναι γραμμική, είναι εύκολος ο σχεδιασμός ενός επιπλέον ρυθμιστή για την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς.

Ας υποθέσουμε ότι είναι επιθυμητό η έξοδος του συστήματος να παρακολουθεί την προκαθορισμένη τροχιά

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} \left(y_1 \right)_d \\ \left(y_2 \right)_d \end{bmatrix}$$

Τότε, αν εφαρμόσουμε στο κλειστό σύστημα (5.2-20) τον ακόλουθο νόμο ελέγχου

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} (y_1)_d^{(2)} \\ (y_2)_d^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1)_d^{(1)} \\ (y_2)_d^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1)_d \\ (y_2)_d \end{bmatrix} \right]$$

θα έχουμε

$$y_1^{(2)} + p_1 y_1^{(1)} + p_3 y_1 = (y_1)_d^{(2)} + p_1 (y_1)_d^{(1)} + p_3 (y_1)_d$$

$$y_2^{(2)} + p_2 y_2^{(1)} + p_4 y_2 = (y_2)_d^{(2)} + p_2 (y_2)_d^{(1)} + p_4 (y_2)_d$$

Οι πιο πάνω σχέσεις μπορούν ισοδύναμα να γραφούν

$$\begin{bmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7-2)$$

όπου

$$e \triangleq \begin{bmatrix} y_1 - (y_1)_d \\ y_2 - (y_2)_d \end{bmatrix}$$

ορίζεται το σφάλμα ανάμεσα στις y και y_d διαφορικές εξισώσεις. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (5.7-2) απεικονίζει την εξέλιξη του σφάλματος με το χρόνο.

Η ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς επιτυγχάνεται όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - y_d(t) \right) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Αυτή η απαίτηση είναι δυνατόν να επιτευχθεί αν διαλέξουμε τα p_1 και p_2 , έτσι ώστε η λύση για το $e(t)$ να είναι ευσταθής. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας Routh προκύπτει ότι η επιλογή

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_4 > 0,$$

οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή λύση ως προς $e(t)$ της εξίσωσης (5.7-2). Η πιο κάτω επιλογή των p_1, p_2, p_3 και p_4 , οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθές σφάλμα για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $e(0) = y(0) - y_d(0)$ του σφάλματος.

6.8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό, μελετήθηκε και επιτεύχθηκε ο έλεγχος της Επαγωγικής Μηχανής, η λειτουργία της οποίας, όντας υψηλά μη γραμμική, περιγράφεται από το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων κατάστασης της μορφής (6.2-16). Ο έλεγχος επιτυγχάνεται μέσω της τεχνικής του Ακριβούς Ταιριάσματος του συστήματος της Επαγωγικής Μηχανής σε Γραμμικό Πρότυπο.

Για το μη γραμμικό μοντέλο που περιγράφει τη λειτουργία της Επαγωγικής Μηχανής, προσδιορίστηκε ο μη γραμμικός νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης (6.4-37) ο οποίος οδηγεί σε ένα αποσυζευγμένο σύστημα του οποίου η περιγραφή εισόδων - εξόδων προσομοιάζεται με την γραμμική περιγραφή εισόδων - εξόδων του Γραμμικού Προτύπου (6.4-5).

Συγκεκριμένα, για το σύστημα αυτό:

- α) Προσδιορίστηκε ο χώρος κατάστασης του συστήματος,
- β) Καθορίστηκαν οι στόχοι ελέγχου,
- γ) Αποδείχθηκε ότι το Ακριβές Ταιρίασμα σε Γραμμικό Πρότυπο είναι πάντα εφικτό, με ανατροφοδότηση του διανύσματος κατάστασης,
- δ) Προσδιορίστηκε η γενική λύση του μη γραμμικού νόμου ανατροφοδότησης,
- ε) Προσδιορίστηκε η δομή του κλειστού συστήματος,
- στ) Μελετήθηκαν οι δομικές ιδιότητες της ελεγχιμότητας, της παρατηρησιμότητας και της ευστάθειας του κλειστού συστήματος και
- ζ) Προσδιορίστηκε ο νόμος ελέγχου που επιτυγχάνει την ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς της εξόδου για το υποσύνολο του κλειστού συστήματος το οποίο παραμένει παρατηρήσιμο και ευσταθές.

Στις εργασίες [32], [33], [34], [35], [36], [37], επιτυγχάνεται η γραμμικοποίηση του συστήματος της Επαγωγικής Μηχανής, χρησιμοποιώντας την τεχνική της αποσύζευξης.

Στο παρόν Κεφάλαιο, εφαρμόζοντας την τεχνική του Ακριβούς Ταιριάσματος σε Γραμμικό Πρότυπο, το κλειστό σύστημα καθίσταται γραμμικό σύστημα και μάλιστα αποσυζευγμένο.

Η γενική λύση που προσδιορίστηκε σ' αυτό το κεφάλαιο, παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των παραμέτρων του νόμου ελέγχου, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ένα αποσυζευγμένο και γραμμικό σύστημα. Οσον αφορά το πρόβλημα της ευστάθειας, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι η κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του Γραμμικού Προτύπου, μας οδηγούν σε ασυμπτωτικά ευσταθείς εξόδους για ένα υποσύνολο του κλειστού συστήματος μόνο, εφόσον υπάρχουν μη παρατηρήσιμες καταστάσεις. Αν αυτή η μη παρατηρήσιμη κατάσταση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, τότε το κλειστό σύστημα θα είναι BIBS ευσταθές. Αυτή η μελέτη δεν έγινε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Προκειμένου να ελεγχθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4.2. και να εξαχθεί η λύση για το νόμο ανατροφοδότησης του διανύσματος κατάστασης που θα πετύχει το Ακριβές Ταίριασμα στα Γραμμικά Πρότυπα που επιλέχθηκαν για κάθε ένα από τα πρακτικά μη γραμμικά συστήματα των Κεφαλαίων 3 έως 6, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο MATHEMATICA. Η βιβλιοθήκη των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι ακόλουθες:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{matrixA} = \{\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\}, \dots, \{a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}\}\}$$

Οριζούσα του Πίνακα A

$\text{det}[\text{matrixA}]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\text{Transpose}[A]$

A^{-1}	Inverse[matrixA]
$[g_1(x), g_2(x)]$	Lieproduct[g1,g2,{x1,x2,...,xn}]
$L_{g_0} x_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Lie[x1,g0,{x1,x2,...,xn}]
$L_{g_0} L_{g_1}^i x_1(x_1, x_2, x_n)$	Lie[Lieiterated[x1, g0,i,{x1,x2,...,xn}],g1,{x1,x2,...,x_n}]
Απλοποίηση - Παραγοντοποίηση	Simplify[%] Expand[%]
$[a_{11}, \dots, a_{1n}]$	Takerows[matrixA,1]
$[a_{11}, \dots, a_{m1}]$	Takecolumns[matrixA,1]
Λύση συστήματος n εξισώσεων με αγνώστους τα x_1, x_2, \dots, x_n , ως προς x_1	Solve[fx == gx, x1] x1 = x1/.% x1 = x1[[1]]

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Δίνεται παρακάτω ο ορισμός της "γραμμικής" εξάρτησης μη-γραμμικών διανυσματικών πεδίων ορισμένων σε ένα C^∞ αναλυτικό περιβλημα M .

Ορισμός Β.1. Εστω τα διανυσματικά πεδία $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_m(x)$ όπου x κατάσταση που αναπτύσσεται σε ένα n -διάστατο C^∞ αναλυτικό περιβλημα M . Θα λέμε ότι τα διανυσματικά πεδία $v_i(x)$, $i=1,2, \dots, m$ είναι "γραμμικά" εξαρτημένα αν και μόνο αν υπάρχουν μη-γραμμικές συναρτήσεις $a_i(x)$, $i=1,2, \dots, m$ ορισμένες στο M έτσι ώστε να ισχύει

$$a_1(x)v_1(x) + a_2(x)v_2(x) + \dots + a_m(x)v_m(x) = 0$$

και ένας τουλάχιστον μη-γραμμικός συντελεστής $a_i(x) \neq 0$, $\forall x \in M$, $i=1,2, \dots, m$

Ακολουθεί μία μέθοδος λύσης μερικώς διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που προέρχεται από τη μέθοδο gradient που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης Lyapunov [22].

Εστω $V(x)$ μια C^∞ αναλυτική συνάρτηση στο M . Αν μας είναι γνωστή η συνάρτηση ∇V , τότε η V υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
 V = \int_c^x (\nabla V)^T dx &= \int_{c_1}^{x_1, (x_i = c_i, i > 1)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \right] dx_1 + \int_{c_2}^{x_2, (x_1 = x_1, x_i = c_i, i > 2)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_2} \right] dx_2 \\
 &+ \dots + \int_{c_n}^{x_n, (x_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n-1)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_n} \right] dx_n
 \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ είναι το gradient (κλίση) της συνάρτησης V .

Για να είναι η βαθμωτή συνάρτηση V μοναδική, δηλαδή ανεξάρτητη από το δρόμο ολοκλήρωσης της V , θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$\nabla \times \nabla V = 0$$

όπου $\nabla \times$ σημαίνει την πράξη curl.

Σημειώνεται ότι ο μηδενισμός του στροβιλισμού των συναρτήσεων $\text{grad}V$ που εξάγονται σαν λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων στην παρούσα διπλωματική εργασία, εξασφαλίζεται μέσω των ικανών και αναγκαίων συνθηκών του Θεωρήματος 2.4.2.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. W.Boothby, **An Introduction to differentiable Manifolds and Riemannian Geometry**, Academic, 1975.
- [2]. A.Isidori, **Nonlinear control Systems: An Introduction**, 2nd eds. Springer-Verlag, 1989.
- [3]. D.Cheng, T.J.Tarn and A.Isidori, "Global external linearization of nonlinear systems via feedback", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 802-811, 1985.
- [4]. M.Di Benedetto and A.Isidori, "The matching of nonlinear models via dynamic state feedback", *SIAM J. Contr. and Optimiz.*, Vol. 24, pp. 1063-1075, 1986.
- [5]. A.Isidori, "The matching of a prescribed linear input-output behaviour in a nonlinear system", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 258-265, 1985.
- [6]. A.Isidori and A.Ruberti, "On the synthesis of linear input-output response for nonlinear systems", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 4, pp. 17-22, 1984.
- [7]. B.Jakubczyk, "Feedback linearization of discrete time systems", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 9, pp. 441-446, 1987.
- [8]. H.Lee and S.Marcus, "On input-output linearization of discrete time nonlinear systems", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 8, pp. 249-259, 1987.

- [9]. J.Wang and W.Rugh, "Feedback linearization families for nonlinear systems", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-32, pp. 935-940, 1987.
- [10]. B.Charlet, J.Levine and R.Marino, "On dynamic feedback linearization", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 13, pp. 143-151, 1989.
- [11]. W.Kang and A.Krener, "Extended Quadratic Controller Normal Form and Dynamic State Feedback Linearization of Nonlinear Systems", *SIAM J. Contr. and Optimiz.*, Vol. 30, pp. 1319-1337, 1992.
- [12]. R.Gardner and W.Shadwick, "The GS Algorithm for Exact Linearization to Brunovsky Normal Form", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-37, pp. 224-230, 1992.
- [13]. H.Huijberts, "A nonregular solution to the nonlinear dynamic disturbance decoupling problem with an application to a complete solution of the nonlinear model matching problem", *SIAM J. Contr. and Optimiz.*, Vol. 30, pp. 350-366, 1992.
- [14]. M.Di Benedetto, "Nonlinear Strong Model Matching", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-35, pp. 1351-1355, 1990.
- [15]. S.Sastry and A.Isidori, "Adaptive Control of Linearizable Systems", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-34, pp. 1123-1131, 1989.
- [16]. I.Kanellakopoulos, P.Kokotovic and A.Morse, "Systematic Design of Adaptive Controllers for feedback Linearizable Systems", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-36, pp. 1241-1253, 1992.
- [17]. P.Paraskevopoulos, F.Koumboulis and D.Anastasakis, "Exact model matching of generalized state space systems", *J. Optim. Th. and Appl.*, Vol. 76, pp. 57-85, 1993.
- [18]. K.Arvanitis and P.Paraskevopoulos, "Uniform exact model matching for a class of linear time varying analytic systems", *Syst. Contr. Lett.*, Vol.

- 19, pp. 313-323, 1992.
- [19]. A.S.Tsirikos, "New techniques for the analysis and design of bilinear and nonlinear systems", NTUA, PhD Thesis, Under completion.
- [20]. Σπ. Τζαφέστα, **Ρομποτική: Ανάλυση · Ελεγχος · Προγραμματισμός**, Ε.Μ.Π., 1986
- [21]. Ε. Ν. Πρωτονοτάριου και Κ. Βουρνά, **Ηλεκτροτεχνικές Εφαρμογές**, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1990.
- [22]. Π. Ν. Παρασκευόπουλος, **Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο**, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1991.
- [23]. Δ.Ν.Καλόφωνος, "Γραμμικοποίηση εισόδου - εξόδου μη γραμμικών συστημάτων μιας εισόδου - μιας εξόδου", Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, 1994.
- [24]. Stanislaw H.Zak and C.A. Maccarley, "State - feedback control of non - linear systems", *Int. J. Control*, Vol. 43, No 5, pp. 1497-1514, 1986.
- [25]. K.M.Passino, "Disturbance rejection in nonlinear systems: Examples", *IEEE Proceedings*, Vol. 136, No 6, Nov. 1989.
- [26]. M.Vidyasagar, "New directions of research in nonlinear system theory", *IEEE Proceedings*, Vol. 74, 1986.
- [27]. Δ.Τάσσιου, **Από τις Σημειώσεις Θερμοδυναμικής Χημικού Μηχανικού II**, (Applied Chem. Eng. Thermodynamics), Αθήνα 1989.
- [28]. R.Castro, Jaim.Alvarez and Joaq.Alvarez, "Nonlinear Disturbance Decoupling Control of a Binary Distillation Column", *Automatica*, Vol. 26, No 3, pp. 567-572, 1979.
- [29]. T.Takamatsu, I.Hashimoto and Y.Nakai, "A geometric Approach to multivariable control system design of a distillation column", *Automatica*, Vol. 15, pp. 387-402, 1979.
- [30]. W.Luyben, **Advanced Process Control**, Mc Graw-Hill, 1971.
- [31]. G.Stephanopoulos, **Chemical Process Control: An Introduction to**

Theory and Practice, Prentice Hall, 1984.

- [32]. R.Marino, S.Peresada and P.Valigi, "Adaptive Input-Output Linearizing Control of Induction Motors", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 38, No 2, pp. 208-221, Feb. 1993.
- [33]. M.Ilic-Spong, R.Marino, S.M.Peresada and D.G.Taylor, "Feedback Linearizing Control of Switched Reluctance Motors", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.32, No 5, pp. 371-379, May 1987.
- [34]. A.De Luca and G.Ulivi, "Design of an exact nonlinear Controller for Induction Motors", *IEEE Trans. on Aut. Control*, Vol. 34, No 12, pp. 1302-1307, 1989.
- [35]. R.Marino, "An Example of a nonlinear Regulator", *IEEE Transactions on Aut. Control*, Vol. 29, No 3, pp. 276-279, 1984.
- [36]. D. Kim, I. Ha and M. Ko, "Control of induction motors via feedback linearization with input-output decoupling", *Internat. J. Contr.*, Vol. 51, No. 4, pp. 863-883, 1990.
- [37]. G.C.Verghese and S.R.Sanders, "Observers for flux estimation in induction machines", *IEEE Trans. Indust. Elect.*, Vol. 35, No 1, pp. 85-94, 1988.