ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΒΑΘΜΙΔΑ ΤΡΟΠΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΑΙ ΣΕ ΜΗ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ (ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ BECK)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΚΑΤΕΧΗ ΛΥΣΣΑΝΔΡΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΣΤΑΣ ΛΑΖΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Σε πολλές σύγχρονες πρακτικές εφαρμογές των Μίκρο-ηλεκρομηχανικών συστημάτων (MEMS) οι διαστάσεις των δομικών στοιχείων τους έχουν τάξη μεγέθους μικρού ενώ η τυπική τους δομή έχει τη μορφή δοκών, υποστυλωμάτων, πλακών και μεμβρανών τα οποία παραμορφώνονται ελαστικά. Η δυναμική ευστάθεια, ως προς το λυγισμό, είναι ένα πολύ σημαντικό στοιχείο στο σχεδιασμό για πολλά δομικά συστήματα και ιδιαίτερα για το λεπτό υποστύλωμα.
Ο λυγισμός των υποστυλωμάτων είναι ένα μηχανικό φαινόμενο όπου η ακαμψία του κατασκευαστικού στοιχείου μειώνεται με την εφαρμογή αξονικών θλιπτικών φορτίων. Σε ένα λεπτό υποστύλωμα , το οποίο φορτίζεται με θλιπτικά φορτία θα αναπτυχθούν πολύ μικρά βέλη κάμψης στην περιοχή των μικρών φορτίσεων, ενώ αν αυτά υπερβούν ένα κρίσιμο όριο (κρίσιμη φόρτιση) η κατασκευή παρουσιάζει μεγάλες εγκάρσιες παραμορφώσεις . Το αξονικό φορτίο που αντιστοιχεί στο όριο ευσταθούς ισορροπίας για ένα υποστύλωμα ονομάζεται κρίσιμο φορτίο και εξαρτάται από το μήκος και την ακαμψία του (EI) .

Η γνώση της συμπεριφοράς σε λυγισμό λεπτού υποστυλώματος έχει βοηθήσει στην αντιμετώπιση πραγματικών εφαρμογών στα μίκρο-ηλεκρομηχανικά συστήματα (MEMS) όπως είναι αισθητήρες ,μικροδιακόπτες , μικροκάτοπτρα και μικρο-επιταχυνσιόμετρα (Kenichi 2007, Seki 1997 ,Sinclair 2001, Zao 2006)

Για συγκεκριμένα υλικά ,όπως τα πολυμερή και μερικά μέταλλα , έχει διαπιστωθεί πειραματικά εξάρτηση της παραμόρφωσής τους από το μέγεθός τους σε μικροκλίμακα (Guo 2005 , Ma and Clarke 1995 , Mazza 1996 , Stelmashenko 1993 ,Stolken and Evans 1998)

Για παράδειγμα στο πείραμα της κάμψης μικροδοκών από εποξειδικό πολυμερές το 2002 (Yang) παρατηρήθηκε ότι η ακαμψία τους αυξήθηκε 2,4 φορές καθώς η διατομή τους μειωνόταν από 115 σε 20 nm ενώ η παραμόρφωση βρισκόταν στα όρια της γραμμικής ελαστικής περιοχής (Lam 2003). Στο πείραμα κάμψης που έγινε σε μονόπακτες μικροδοκούς από πολυπροπυλαίνιο το 2005 (McFarland) παρατηρήθηκε ότι οι μετρούμενες τιμές ακαμψίας ήταν τουλάχιστο 4 φορές μεγαλύτερες από ότι προέβλεπε η κλασική θεωρία ελαστικότητας ενώ η παραμόρφωση βρισκόταν ξανά στα όρια της ελαστικής περιοχής. (McFarland και Colton 2005)

Οι καταστατικές εξισώσεις των συμβατικών θεωριών ελαστικότητας που βασίζονται στην τροπή δεν περιλαμβάνουν όρο χαρακτηριστικού μήκους και δεν μπορούν να περιγράψουν τα φαινόμενα που παρατηρούνται σε πληθώρα πειραμάτων όπου τα μεγέθη των τεμαχίων είναι της τάξης των μικρών(μm) ή και ακόμα μικρότερα. Έτσι πρέπει να καταφύγουμε σε θεωρίες του συνεχούς μέσου βαθμίδας τροπής υψηλότερης τάξης οι οποίες λαμβάνουν υπόψη την επίδραση στης μικροδομής με την εισαγωγή επιπλέον παραμέτρων μήκους.

Οι θεωρίες των τάσεων του ζεύγους που έχουν εκπονηθεί από τους Koiter (1962) και Mindlin(1963) αντιπροσωπεύουν μία κατηγορία θεωριών βαθμίδας τροπής ανώτερης τάξης όπως αυτές διατυπώθηκαν από τους Mindlin (1964) , Mindlin και Tiersten(1962) και Toupin (1962). Για ισότροπα ελαστικά υλικά η κλασική θεωρία ελαστικότητας τάσεων ζεύγους περιέχει τέσσερις όρους(δύο κλασικούς και δύο επιπλέον). Έχει χρησιμοποιηθεί για την επιτυχή επίλυση διαφόρων στατικών και δυναμικών προβλημάτων γραμμικής ελαστικότητας με συνοριακές συνθήκες και οι εξαρτήσεις από τα μεγέθη εύκολα γίνονται αντιληπτές (Mindlin και Tiersten 1962 ,Zhou και Li 2001). Οι Fleck και Hutchinson αναδιαμόρφωσαν την θεωρία τροπής δεύτερης τάξης του Mindlin και τη μετονόμασαν θεωρία με βαθμίδα τροπής (Fleck και Hutchinson 1997 , Fleck 1994).

Η κλασική θεωρία ελαστικότητας δε μπορεί να περιγράψει τη μηχανική συμπεριφορά ελαστικών υλικών με μικροδομή επειδή συσχετίζεται με την έννοια της ομοιογένειας και της τοπικής σχέσης τάσεων τροπών. Επομένως αν έχουμε υλικά ανομοιογενή , με μικρορωγμές ή τοπικές παραμορφώσεις τότε η μικροδομή τους έχει μεγάλη επίδραση στην περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς του υλικού και οι τάσεις θα πρέπει να καθορίζονται όχι μόνο από την τροπή σε αυτό το σημείο αλλά και από τις τροπές σε γειτονικά σημεία . Υπάρχουν πολλές θεωρίες που περιγράφουν τη μη τοπική εξάρτηση της τάσης σε σχέση με την τροπή.

Ένα μοντέλο που περιγράφει τις επιπτώσεις της μικροδομής χρησιμοποιώντας θεωρίες βαθμίδας υψηλότερης τάξης είναι αυτό των Mindlin (1964) , Toupin (1965). Εδώ η τροπή των γειτονικών σημείων δίνεται από ένα ανάπτυγμα Taylor. Ένα άλλο μοντέλο που περιγράφει την εξάρτηση από τις μη τοπικές τάσεις έχει προταθεί από τον Kunin (1982) όπου χρησιμοποιεί ανάλυση Fourier και πρόσφατα από τους Fosdick και Mason et al (1996) , όπου η τάση εξαρτάται όχι μόνο από την αντίστοιχη τροπή αλλά κατά κάποιο τρόπο από ένα μέσο όρο της τροπής όλου του σώματος. Οι Altan και Aifantis (1997) περιγράφουν και τις δυο μεθόδους αναφέροντας και τις αντιστοιχίες τους . Ο Aifantis (2003) κάνοντας αξιολόγηση παρουσιάζει τα νέα δεδομένα σε μια ομάδα θεωριών βαθμίδας τροπής . Η Tsepoura et al (2002) παρουσιάζει και εφαρμόζει τη θεωρία ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής σε δοκούς. Επιπλέον αναλύσεις προβλημάτων κάμψης και ευστάθειας (λυγισμού) παρουσιάζονται από τους Papargyri - Beskou et al. (2003). Εκεί παρουσιάζεται η επίδραση της μικροδομής και της επιφανειακής ενέργειας στη δοκό με τη βοήθεια της θεωρίας βαθμιδοελαστικότητας .

Αυτό το ελαστικό μοντέλο υιοθετείται στην παρούσα εργασία για την ανάλυση ευστάθειας δοκού που θλίβεται με μη συντηρητική δύναμη. Συγκεκριμένα η δύναμη εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο του προβόλου και εφάπτεται συνεχώς της ελαστικής γραμμής. Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα είναι μη συντηρητικό και η στατική ανάλυση διχάλωσης (static bifurcation analysis) δεν είναι ικανή να περιγράψει τη στατική

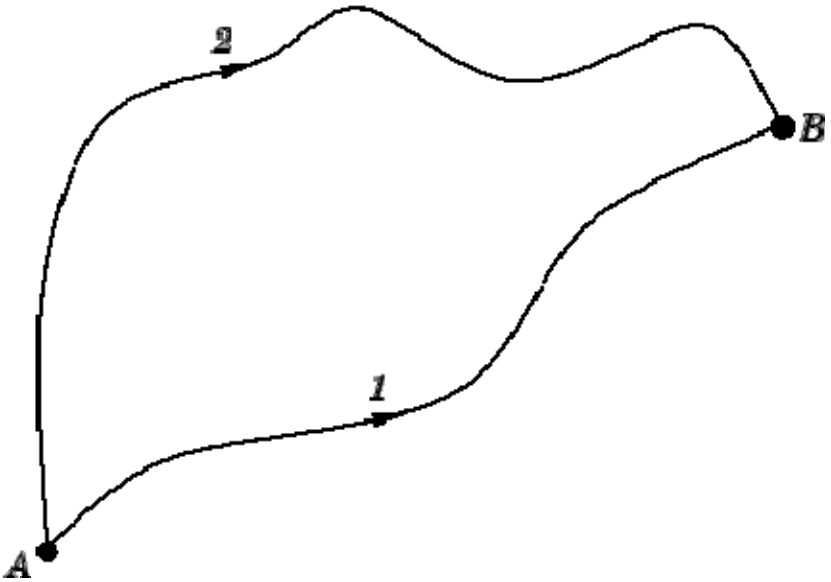
συμπεριφορά της δοκού . Έτσι πρέπει να χρησιμοποιηθεί δυναμική ανάλυση ευστάθειας . Το παρόν πρόβλημα αλλά και άλλα παρόμοια προβλήματα παρουσιάζουν αστάθεια υπό μορφή πτερυγισμού η οποία δεν εντοπίζεται στα συντηρητικά προβλήματα. Περιγραφή θεωριών ευστάθειας για μη συντηρητικά προβλήματα μπορούν να βρεθούν στο κλασικό βιβλίο του Bolotin (1963).

Στην παρούσα εργασία η χαρακτηριστική εξίσωση της ελαστικής γραμμής και οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών θα βρεθούν χρησιμοποιώντας μια απλοποιημένη θεωρία ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής όπως παρουσιάζεται στην εργασία Papargyri & Beskou et al. (2003).

Εμφανίζονται χαρακτηριστικά μήκη ανώτερων βαθμίδων τροπής που αντιστοιχούν στην ενέργεια όγκου και στην επιφανειακή ενέργεια . Επίσης θα συζητηθούν επιπλέον αλληλεπιδράσεις μεταξύ της κατανομής μάζας και της μετατροπής της θεωρίας της δοκού λόγω της εισαγωγής της βαθμίδας τροπής ελαστικότητας. Αριθμητικές εφαρμογές δείχνουν σημαντική επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους όγκου , ενώ οι όροι της επιφανειακής ενέργειας έχουν αμελητέα επίδραση

Πεδία Δυνάμεων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μη ομογενές δυναμικό πεδίο $f_{(r)}$ εντός του οποίου βρίσκεται αντικείμενο που κινείται σε καμπύλη τροχιά (τροχιά (1) του σχήματος (ΙΙ-1)) με αρχή το σημείο Α και τέλος το σημείο Β. Όπως είναι γνωστό το έργο W_1 που παράγει το δυναμικό πεδίο κατά τη μετακίνηση του σώματος δίνεται από ένα γραμμικό ολοκλήρωμα που εφαρμόζεται πάνω στην τροχιά .



Σχήμα ΙΙ-**1:** *Δύο διαφορετικές διαδρομές μεταξύ των σημείων Α και Β*

$$W_1 = \int_{A \to B\,\text{τροχιά}1} f \cdot dr. \qquad \text{(II-1)}$$

Αν υποθέσουμε ότι το ίδιο αντικείμενο κινείται πάλι με αρχή το σημείο Α και τέλος το σημείο Β αλλά σε διαφορετική τροχιά (τροχιά (2) του σχήματος (ΙΙ-1))Σε αυτή την περίπτωση το έργο W_2 που παράγει το δυναμικό πεδίο με το αντικείμενο δίνεται από το γραμμικό ολοκλήρωμα που εφαρμόζεται πάνω στη δεύτερη τροχιά. Δηλαδή

$$W_2 = \int_{A \to B\,\text{τροχιά}2} f \cdot dr. \qquad \text{(II-2)}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που μπορεί να υφίστανται σε σχέση με αυτά τα δύο έργα. Η πρώτη είναι τα μέτρα των γραμμικών ολοκληρωμάτων (ΙΙ-1) και (ΙΙ-2) να εξαρτώνται μόνο από τα όριά τους Α και Β και όχι από την εκάστοτε διαδρομή που ακολουθείται μεταξύ τους οπότε ισχύει ότι

$\mathbf{W_1=W_2}$

Η δεύτερη περίπτωση που μπορεί να υφίσταται είναι τα μέτρα των ολοκληρωμάτων (ΙΙ-1) και (ΙΙ-2) να εξαρτώνται όχι μόνο από την αρχική και την τελική θέση (Α και Β) αλλά και από την εκάστοτε διαδρομή που ακολουθείται οπότε και ισχύει $\mathbf{W_1 \neq W_2}$

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στα <u>Συντηρητικά Πεδία Δυνάμεων</u> ,ενώ η δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί στα <u>Μη Συντηρητικά Πεδία Δυνάμεων.</u> Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα ποια είναι η φυσική διαφορά μεταξύ των συντηρητικών και των μη συντηρητικών πεδίων. Η

απάντηση δίνεται αν αναλύσουμε ένα διαφοροποιημένο πρόβλημα σε σχέση με το προηγούμενο που αναφέρθηκε.

Ας υποτεθεί τώρα ότι το αντικείμενο κινείται μέσα στο πεδίο από τη θέση Α στη θέση Β ακολουθώντας την πρώτη διαδρομή και συνεχίζοντας την κίνησή του κινείται από τη θέση Β στη θέση Α ακολουθώντας τη δεύτερη διαδρομή .(Α→ 1 → Β → 2→ Α). Γνωρίζοντας ότι το πρόσημο του μέτρου ενός γραμμικού ολοκληρώματος αλλάζει όταν αντιστραφούν τα όριά του δηλαδή

$$\int_A^B f \cdot dr = -\int_B^A f \cdot dr \qquad \text{(II-3)}$$

θα υπολογιστεί το συνολικό έργο που παρήχθει μεταξύ του δυναμικού πεδίου και του σώματος όταν το δεύτερο ακολούθησε αυτή την κλειστή διαδρομή. Σημειώνεται ότι τα δύο γραμμικά ολοκληρώματα της σχέσης (ΙΙ-3) υπολογίζουν το έργο που παράγεται μεταξύ του σώματος και του πεδίου όταν το πρώτο ακολουθεί την ίδια διαδρομή με αντίθετη όμως κατεύθυνση σε κάθε περίπτωση.

Το έργο που παράγεται στην κλειστή αυτή διαδρομή είναι

$$\Delta W = W_1 - W_2 \qquad \text{(II-4)}$$

όπου τα W_1 και W_2 ορίζονται στις εξισώσεις (ΙΙ-1) και (ΙΙ-2) αντίστοιχα. Το αρνητικό πρόσημο στο W_2 δηλώνει ότι υπολογίζουμε το έργο που παρήχθη κατά τη διαδρομή από το σημείο Β στο σημείο Α , ακολουθείται δηλαδή αντίθετη διαδρομή από την αρχική. Στην περίπτωση λοιπόν που το δυναμικό πεδίο μέσα στο οποίο κινείται το

αντικείμενο είναι συντηρητικό ισχύει $W_1=W_2$ και άρα

$\Delta W=0$. (II-5)

Δηλαδή το συνολικό έργο που παράγεται μεταξύ ενός Συντηρητικού Δυναμικού Πεδίου και ενός σώματος που κινείται μέσα σε αυτό σε κλειστή διαδρομή είναι μηδενικό. Επίσης το ότι το συνολικό έργο είναι μηδενικό υποδεικνύει ότι ένα τέτοιο συντηρητικό πεδίο αποθηκεύει την ενέργεια που παράγεται κατά τη μετακίνηση ενός σώματος που κινείται από ένα σημείο (Α) σε ένα άλλο σημείο (Β) και την επιστρέφει στο ακέραιο όταν το αντικείμενο επιστρέψει στο αρχικό σημείο (Α) ανεξάρτητα από τη διαδρομή που θα ακολουθήσει αυτό κατά την επιστροφή.

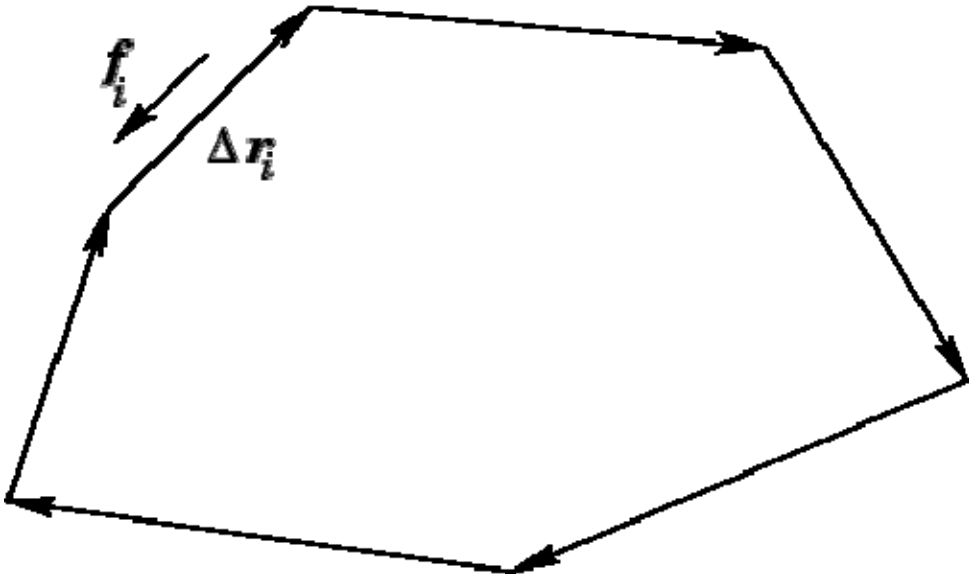
Αντίθετα στην περίπτωση ενός μη συντηρητικού πεδίου μέσα στο οποίο κινείται αντικείμενο σε κλειστή διαδρομή ισχύει

$\Delta W\neq 0$. (II-6)

Δηλαδή στην περίπτωση που έχουμε Μη Συντηρητικό Δυναμικό Πεδίο το συνολικό έργο που παράγεται μεταξύ του πεδίου και ενός σώματος που κινείται μέσα σε αυτό σε κλειστή διαδρομή είναι διάφορο του μηδενός .

Τυπικό παράδειγμα ενός συντηρητικού δυναμικού πεδίου είναι το πεδίο βαρύτητας , ενώ ένα παράδειγμα μη συντηρητικού δυναμικού πεδίου είναι το σύστημα ενός σώματος που ολισθαίνει σε επιφάνεια με μη μηδενικό συντελεστή τριβής. Ας υποτεθεί για λόγους απλότητας ότι

έχουμε ένα αντικείμενο που ολισθαίνει πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια με μη μηδενικό συντελεστή τριβής και ακολουθεί κλειστή διαδρομή η οποία αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα (ΙΙ-2)



Σχήμα ΙΙ-**2:** Κλειστή διαδρομή σε οριζόντια επιφάνεια με μη μηδενικό συντελεστή τριβής.

Έστω ότι τα Δr_i είναι τα διανύσματα θέσης των i τμημάτων της διαδρομής και ότι η δύναμη τριβής που ασκείται στο αντικείμενο σε κάθε τμήμα i της διαδρομής δίνεται από το διάνυσμα f_i. Είναι γνωστό ότι η φορά του διανύσματος της δύναμης τριβής f_i που ασκείται στο σώμα είναι πάντα αντίθετη στην κίνησή του. Επομένως το εσωτερικό γινόμενο των f_i με το Δr_i που μας δίνει το έργο στη συγκεκριμένη διαδρομή i είναι

$\mathbf{f}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = -|\mathbf{f}_i||\Delta \mathbf{r}_i|$ για κάθε i.

Με άλλα λόγια το συνολικό έργο που συναλλάσσει το μη συντηρητικό πεδίο με το σώμα στην κλειστή διαδρομή του σχήματος (ΙΙ-2) δίνεται από τη σχέση

$$\Delta W = \sum_i f_i \cdot \Delta r_i = -\sum_i |f_i||\Delta r_i| < 0$$

Αυτό το έργο είναι προφανώς αρνητικό και υποδεικνύει ότι οι δυνάμεις τριβής που δρουν πάνω στο αντικείμενο αφαιρούν συνεχώς ενέργεια από αυτό καθώς κινείται πάνω στην επιφάνεια. Έτσι η τριβή δημιουργεί ένα μη συντηρητικό πεδίο το οποίο μετατρέπει την ενέργεια που απορροφά σε θερμότητα (σύμφωνα με τα θερμοδυναμικά αξιώματα η ενέργεια που εκλύεται ως θερμότητα δεν μετατρέπεται στην αρχική της μορφή χωρίς να προσφερθεί εξωτερικό έργο) αντί να την αποθηκεύει.

Για τα συντηρητικά συστήματα οι δυνάμεις δίνονται από τη σχέση

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

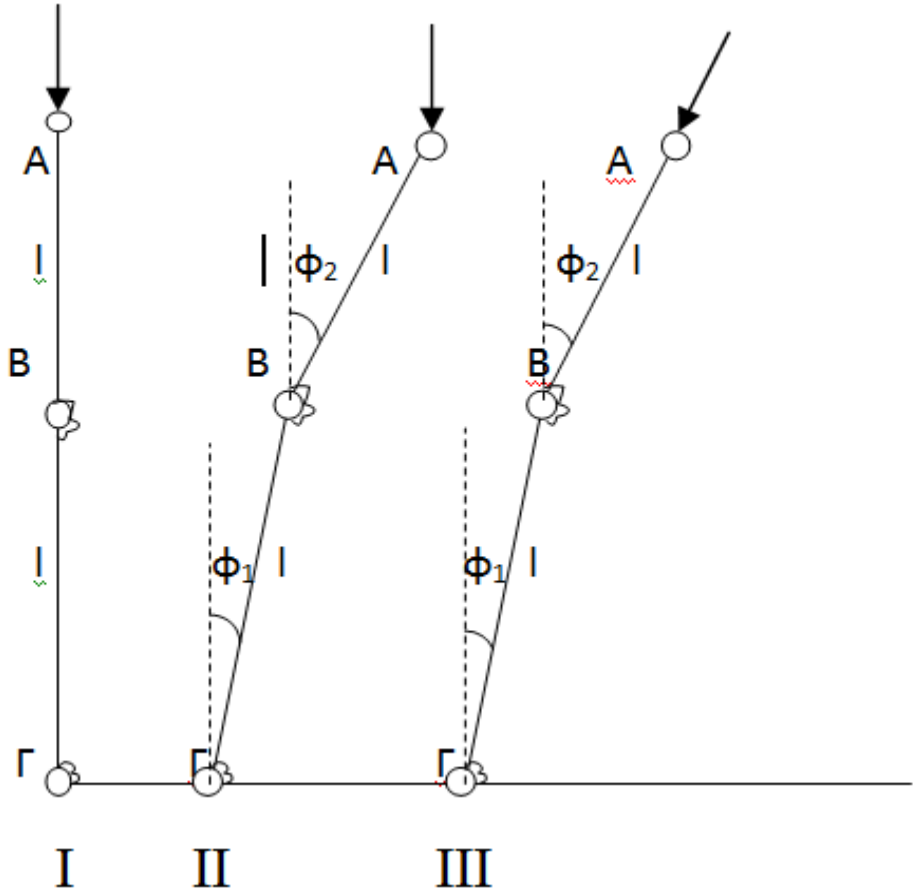
Όπου τα x_i είναι οι μεταβλητές και F_i οι αντίστοιχες δυνάμεις .

Επομένως πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$$

Εάν η σχέση $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ δεν ισχύει , τότε το πεδίο είναι μη συντηρητικό.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το ανεστραμμένο διπλό εκκρεμές στο σχήμα ΙΙ-**3** που ακολουθεί.



Σχήμα ΙΙ-**3:**Αρχική θέση (Ι) διπλού ανεστραμμένου εκκρεμούς και τα τελική θέση υπό συντηρητική (ΙΙ) και υπό μη συντηρητική φόρτιση (ΙΙΙ) αντίστοιχα.

Το διπλό ανεστραμμένο εκκρεμές του σχήματος ΙΙ-**3** βρίσκεται αρχικά σε θέση ηρεμίας(Ι). Καταλήγει στην τελική θέση υπό την επίδραση συντηρητικής και μη συντηρητικής δύναμης (περιπτώσεις ΙΙ και ΙΙΙ αντίστοιχα). Εξετάζεται αν το έργο της κάθε δύναμης εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθήθηκε.

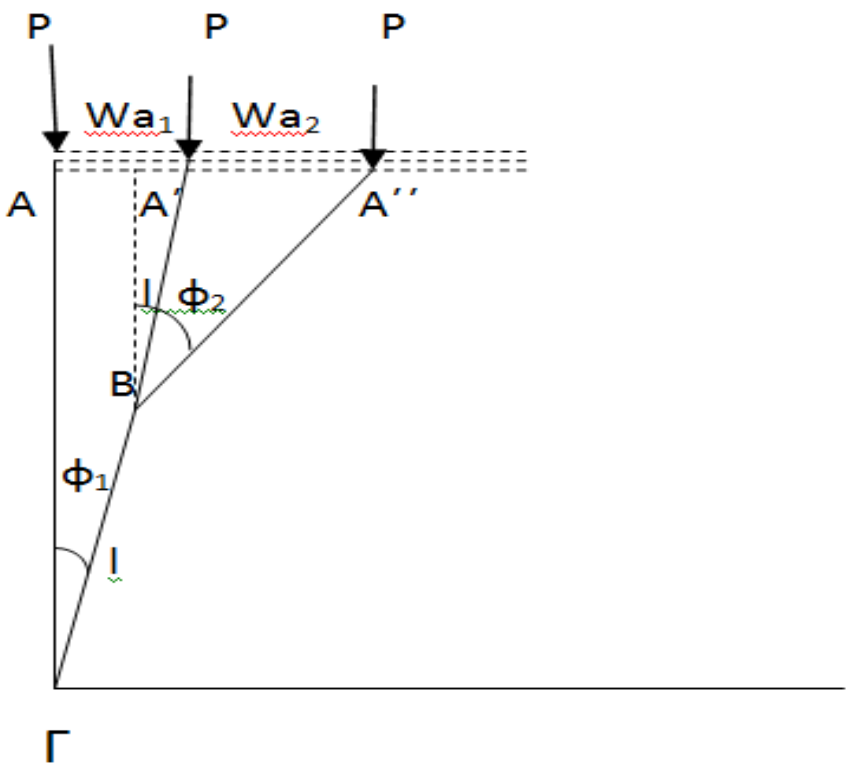
Ας θεωρήσουμε την περίπτωση της συντηρητικής φόρτισης. Από την αρχική θέση (I) το σύστημα πηγαίνει στην τελική (II) . Έστω ότι ακολουθείται η διαδρομή Α-Α΄-Α΄΄ όπως φαίνεται στο σχήμα II-**4a** . Η δύναμη P παράγει έργο ίσο με

$W_{a1} = P(2l - 2l\cos\varphi_1)$ και

$W_{a2} = P(2l\cos\varphi_1 - l\cos\varphi_1 - l\cos\varphi_2)$

Δηλαδή συνολικά

$W_a = Pl(2 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$



Σχήμα II-**4a**

Εάν πάλι μεταβληθεί πρώτα η γωνία φ_1 και ακολουθήσει η φ_2 , δηλαδή

αν ακολουθηθεί διαφορετική διαδρομή , όπως φαίνεται στο σχήμα ΙΙ-**4b** τότε ισχύει

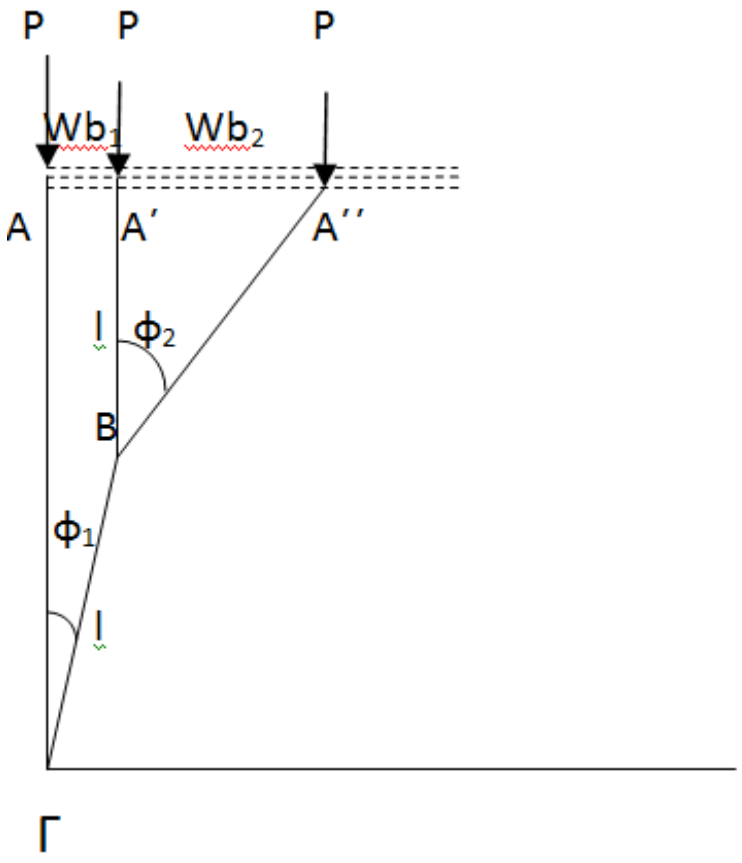
$$W_{b1} = P(2l - l - l\cos\varphi_1)$$

$$W_{b2} = P(l + l\cos\varphi_1 - l\cos\varphi_1 - l\cos\varphi_2)$$

Συνολικά

$$W_b = Pl(2 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

Εφόσον $W_a = W_b$ η δύναμη P είναι συντηρητική αφού το έργο που παράγει είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθεί.

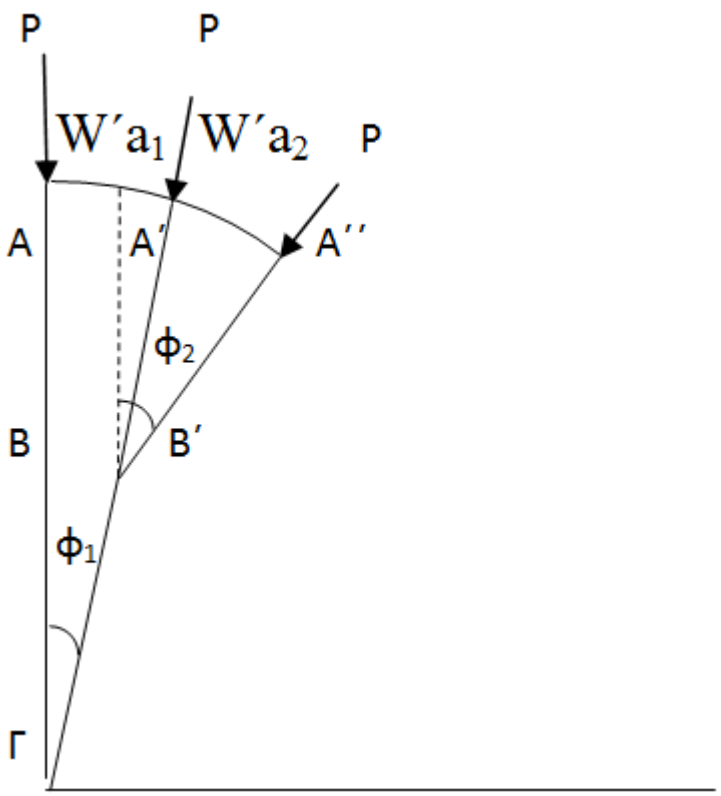


Σχήμα ΙΙ-**4b**

Αυτό δεν ισχύει όμως στην περίπτωση της μη συντηρητικής φόρτισης η οποία είναι εφαπτομενική στον άξονα της δεύτερης δοκού σε όλη τη διαδρομή που ακολουθείται όπως φαίνεται στο σχήμα **Σχήμα** II-**5a**.

Με αρχική θέση την (I) και τελική την (III) το έργο

της μη συντηρητικής δύναμης εξαρτάται από τη διαδρομή .



Σχήμα II-**5a**

Όπως φαίνεται καθαρά στο σχήμα II-**5a** αν ακολουθηθεί η διαδρομή που παρουσιάζεται σε αυτό (a) το συνολικό έργο είναι μηδενικό.

$W'_{a1} = W'_{a2} = 0$

$W'_a = 0$

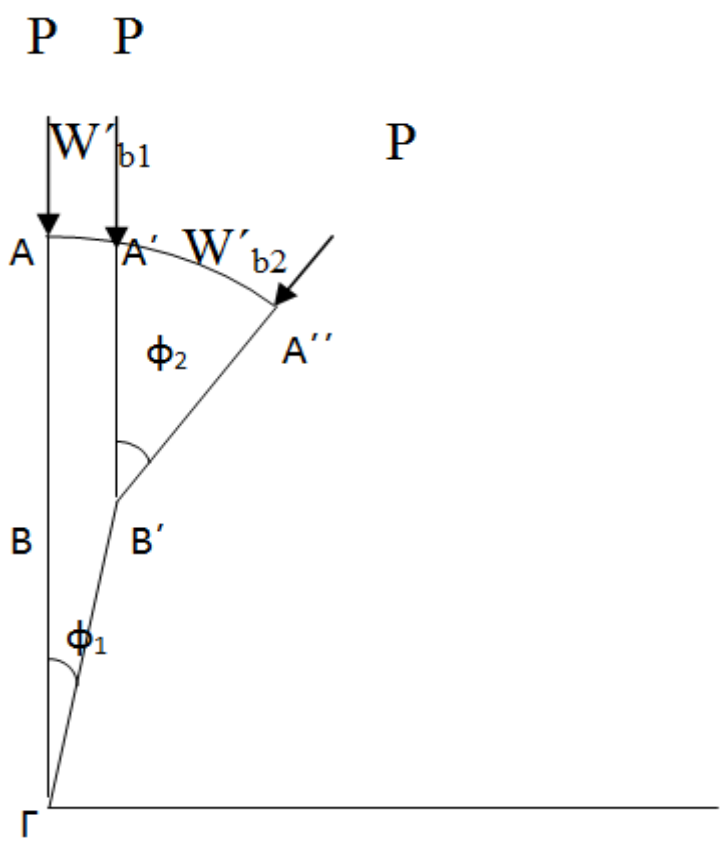
Αντίθετα στο σχήμα ΙΙ-**5b** όπου ακολουθείται διαφορετική διαδρομή (b) το έργο είναι μη μηδενικό στη διαδρομή ΑΑ΄. Δηλαδή

$W'_{b1}=P(2l-l-l\cos\varphi_1)=Pl(1-\cos\varphi_1)$

$W'_{b2}=0$ συνολικά δηλαδή

$W'_b=Pl(1-\cos\varphi_1)$

Άρα $W'_a \neq W'_b$



Σχήμα ΙΙ-**5b**

Αποδεικνύεται ότι το έργο των συντηρητικών δυνάμεων εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του συστήματος ενώ στην περίπτωση μη συντηρητικών δυνάμεων το έργο εξαρτάται και από

την εκάστοτε διαδρομή που ακολουθείται.

Εξέλιξη του προβλήματος ευστάθειας του ελαστικού μέσου

Η θεωρία της ευστάθειας του ελαστικού μέσου , που προήλθε από την επιστημονική εργασία του Euler , είναι πλέον ένας πολύ εξελιγμένος τομέας της Μηχανικής καθώς χρησιμοποιεί πολλές εξελιγμένες τεχνικές επίλυσης , μεγάλο αριθμό λυμένων προβλημάτων και πληθώρα σχετικών συγγραμμάτων.

Ένας από τους παράγοντες που συνέβαλε στη γρήγορη συσσώρευση γνώσης στον τομέα της ευστάθειας του ελαστικού μέσου είναι αναμφίβολα η ιδέα της συσχέτισης της ευστάθειας και του Κρίσιμου Φορτίου. Η θεωρία ευστάθειας του ελαστικού μέσου υποθέτει ότι για φορτία αρκετά μικρά η ισορροπία του ελαστικού συστήματος διατηρείται και αυτό συμβαίνει μέχρι τη διχάλωση (bifurcation) των εξισώσεων ισορροπίας. Εν συνεχεία η αρχική θέση ισορροπίας γίνεται ασταθής. Η κρίσιμη φόρτιση καθορίζεται ως το ελάχιστο μέτρο της δύναμης για το οποίο ισχύει ότι εκτός από την αρχική κατάσταση ισορροπίας μπορούν να υπάρξουν και άλλες καταστάσεις ισορροπίας οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά στην αρχική. Αυτή η ιδέα μπορεί να βρεθεί ακόμα και στις εργασίες του Euler ο οποίος όρισε την κρίσιμη φόρτιση ως τη : «δύναμη που είναι απαραίτητη για να προκληθεί η μικρότερη κλίση της θλιβόμενης δοκού». Αυτή η προσέγγιση της θεωρίας ευστάθειας του ελαστικού μέσου, ή όπως θα αναφέρεται από

εδώ και στο εξής Μέθοδος Euler, επέτρεψε στους ερευνητές να μετατρέψουν το πρόβλημα του ελέγχου της ευστάθειας του συστήματος μέσω των εξισώσεων ισορροπίας στο απλούστερο πρόβλημα του υπολογισμού της ελάχιστης χαρακτηριστικής τιμής συγκεκριμένων προβλημάτων συνοριακών συνθηκών.

Η χρησιμότητα της μεθόδου του Euler στην επίλυση προβλημάτων ευστάθειας του ελαστικού μέσου δε μπορεί να αμφισβητηθεί .
Η μέθοδος έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για επίλυση προβλημάτων ευστάθειας μη-ελαστικών μέσων. Όμως η μέθοδος δεν εφαρμόζεται σε όλα τα σχετικά προβλήματα. Το εύρος των εφαρμογών της μεθόδου μπορεί πλέον να καθοριστεί πλήρως παρότι στο παρελθόν υπήρξε μια σειρά λαθών και παρανοήσεων ως αποτέλεσμα της προσπάθειας εφαρμογής της μεθόδου σε μη συμβατά με αυτή προβλήματα . Τρείς παράγοντες λοιπόν θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη σε σχέση με τη χρήση της μεθόδου του Euler.

Ένας από αυτούς τους παράγοντες σχετίζεται κυρίως με τη διαμόρφωση της μη γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας για λεπτά ελαστικά κελύφη. Από τη δεκαετία του τριάντα ήταν γνωστή η συστηματική και πολύ σημαντική απόκλιση των τιμών του Κρίσιμου Φορτίου στην περίπτωση των λεπτών ελαστικών κελυφών όπως αυτές (οι τιμές) δίνονταν από την κλασική θεωρία ελαστικότητας και από τα πειραματικά αποτελέσματα. Βρέθηκε λοιπόν ότι για λεπτά κελύφη οι μικρές αποκλίσεις των

τιμών και η επίδραση των μη γραμμικών φαινομένων ήταν ιδιαίτερα σημαντικές και ότι οι τιμές των κρίσιμων φορτίσεων που αντιστοιχούσαν στα σημεία διχάλωσης των εξισώσεων ισορροπίας ήταν στην πραγματικότητα οι 'άνω' τιμές οι οποίες είναι δύσκολο να υπολογιστούν ακόμα και κάτω από τις καλύτερες πειραματικές συνθήκες.

Ο δεύτερος παράγοντας σχετίζεται με την ανάπτυξη της θεωρίας της πλαστικής ευστάθειας. Το 1946 ο Shanley υπέδειξε ότι η θεωρία του μειωμένου μέτρου ελαστικότητας αντιστοιχεί μόνο σε μια συγκεκριμένη υπόθεση που αφορά τη συμπεριφορά του φορτίου και ότι στην πλαστική περιοχή το Κρίσιμο Φορτίο θα πρέπει να καθορίζεται με διαφορετική μέθοδο από αυτή που χρησιμοποιείται στην ελαστική περιοχή.
Πιο πρόσφατες έρευνες ανέδειξαν χωρίς αμφιβολία το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η συμπεριφορά του φορτίου κατά τη διάρκεια της μεταβολής της ευσταθούς κατάστασης σε ασταθή καθώς και τη σημασία του χρονικού παράγοντα ο οποίος δε λαμβάνεται υπόψη στην κλασική θεωρία της ελαστικότητας.

Ο τρίτος παράγοντας ο οποίος επιβάλει σοβαρούς περιορισμούς στο εύρος των εφαρμογών της μεθόδου του Euler έγκειται στο εξής:
από το 1929 ο Nikolai, καθώς ερευνούσε ένα από τα προβλήματα ευστάθειας ελαστικής δοκού σε στρέψη , ανακάλυψε ότι η μέθοδος του Euler οδηγούσε σε παράδοξο αποτέλεσμα. Στο πρόβλημα που

ερευνούσε ανακάλυψε ότι δεν ίσχυαν γενικά οι εξισώσεις ισορροπίας όταν η δοκός βρισκόταν στην αρχική της (ευθύγραμμη) μη διαταραγμένη θέση καθώς και ότι, σύμφωνα με τις εξισώσεις , φαινόταν ότι η αρχική αυτή θέση θα παρέμενε ευσταθής για κάθε τιμή της ροπής στρέψης. Αυτό το αποτέλεσμα ,σωστά αξιολογούμενο, κατέδειξε ότι η μέθοδος του Euler ήταν ακατάλληλη για την επίλυση αυτού του προβλήματος και ότι αντ' αυτής θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί η πιο γενική μέθοδος των μικρών ταλαντώσεων. Ανακαλύφθηκε αργότερα ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα σημαντικό ρόλο διαδραμάτιζε το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων . Η μέθοδος του Euler μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σωστή επίλυση του προβλήματος αν οι εξωτερικές δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό (δηλαδή αν είναι συντηρητικές) ενώ , γενικά , δεν ισχύει όταν είναι μη συντηρητικές .

Η βασική μέθοδος διερεύνησης μη συντηρητικών προβλημάτων στη θεωρία της ελαστικής ευστάθειας είναι η Δυναμική Μέθοδος η οποία βασίζεται στην ανάλυση των ταλαντώσεων του συστήματος όταν αυτό βρίσκεται κοντά στα όρια της ευστάθειάς του. Αυτή η μέθοδος φέρνει τη θεωρία ευστάθειας του ελαστικού μέσου πιο κοντά στη γενική θεωρία ευστάθειας και τις εφαρμογές της στον Αυτόματο Έλεγχο , στη Μηχανική ιξώδους ρευστού και σε άλλα πεδία της Μηχανικής . Η μέθοδος του Euler η οποία απλουστεύει το πρόβλημα της ευστάθειας σε μία ανάλυση της διχάλωσης των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία υποπερίπτωση της δυναμικής μεθόδου.

Παραδείγματα μη συντηρητικών φορτίσεων είναι οι αεροδυναμικές και οι υδροδυναμικές φορτίσεις ,οι δυνάμεις που ασκούνται σε στοιχεία μηχανών και σε συνδέσμους Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται σε στοιχεία ηλεκτρικών μηχανών και στροβιλομηχανών . Η κλασική θεωρία ευστάθειας του ελαστικού μέσου εξελίχθηκε κυρίως ως αποτέλεσμα των απαιτήσεων των τομέων της βιομηχανίας ,των μεταφορών και του κατασκευαστικού κλάδου των Πολιτικών Μηχανικών. Τα παραδοσιακά φορτία της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας είναι δυνάμεις που έχουν δυναμικό που συνήθως οφείλεται στις βαρυτικές δυνάμεις . Όσο για τα μη συντηρητικά προβλήματα ευστάθειας ελαστικού μέσου οι εφαρμογές τους βρίσκονται σε σύγχρονες Μηχανολογικές , Αεροναυτικές (και πυραυλικές) εφαρμογές καθώς και στον κλάδο της Μικρο-Νανο τεχνολογίας.

Χαρακτηριστική περίπτωση αστοχίας κατασκευής κάτω από μη συντηρητικές φορτίσεις είναι η καταστροφή της γέφυρας Tacoma της Αμερικής το 1940. Η καταστροφή οφείλεται στο φαινόμενο του πτερυγισμού που δημιουργήθηκε από τον άνεμο.

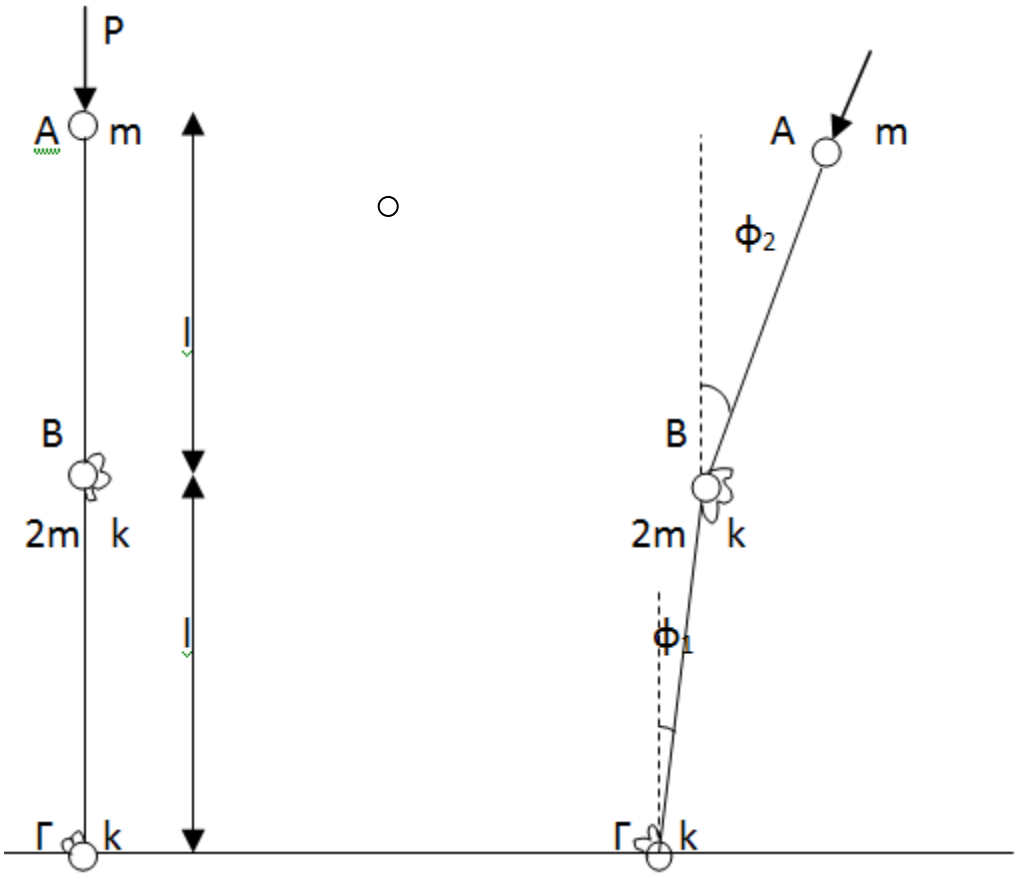
Μοντέλο προβόλου 2 βαθμών ελευθερίας υπό μη συντηρητική φόρτιση.

Περιγραφή

Το σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας του σχήματος (IV-1) αποτελείται από δύο ισομήκεις ράβδους θεωρούμενες στερεές και αβαρείς.
Οι ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους με περιστροφικό ελατήριο με σταθερά ελατηρίου k (θεωρείται γραμμικής συμπεριφοράς).
Η κάτω ράβδος (ΒΓ) στηρίζεται με όμοιο ελατήριο στην άρθρωση του συστήματος. Θεωρούμε συγκεντρωμένες μάζες m και 2m στις θέσεις Α και Β αντιστοίχως. Επίσης το σημείο Β φορτίζεται με δύναμη Ρ εφαπτομενική (ακολουθεί πάντα τη διεύθυνση) της ράβδου ΑΒ
Αυτό που ζητείται είναι η δύναμη Ρ για την οποία το σύστημα χάνει την ευστάθεια του.

Θα θεωρήσουμε μια μικρή διαταραχή η οποία θα προκαλέσει ταλαντώσεις μικρού εύρους περί την κατακόρυφο και θα διαμορφώσουμε τις εξισώσεις κίνησης με τη βοήθεια των εξισώσεων της Δυναμικής Euler-Lagrange. Εάν η κίνηση εξακολουθήσει να εντοπίζεται στην περιοχή της κατακόρυφου τότε το σύστημα είναι ευσταθές. Εάν η κίνηση, με την πάροδο του χρόνου, απομακρυνθεί από την κατακόρυφο, τότε το σύστημα είναι ασταθές. Η

κρίσιμη φόρτιση είναι εκείνη που ορίζει τη μετάβαση από την εντοπισμένη κίνηση (μικρές ταλαντώσεις) στην κίνηση με μεγάλες ταλαντώσεις.



Σχήμα IV-**1** : Πρόβολος 2 βαθμών ελευθερίας υπό μη συντηρητική φόρτιση σε αρχική και σε διαταραγμένη θέση

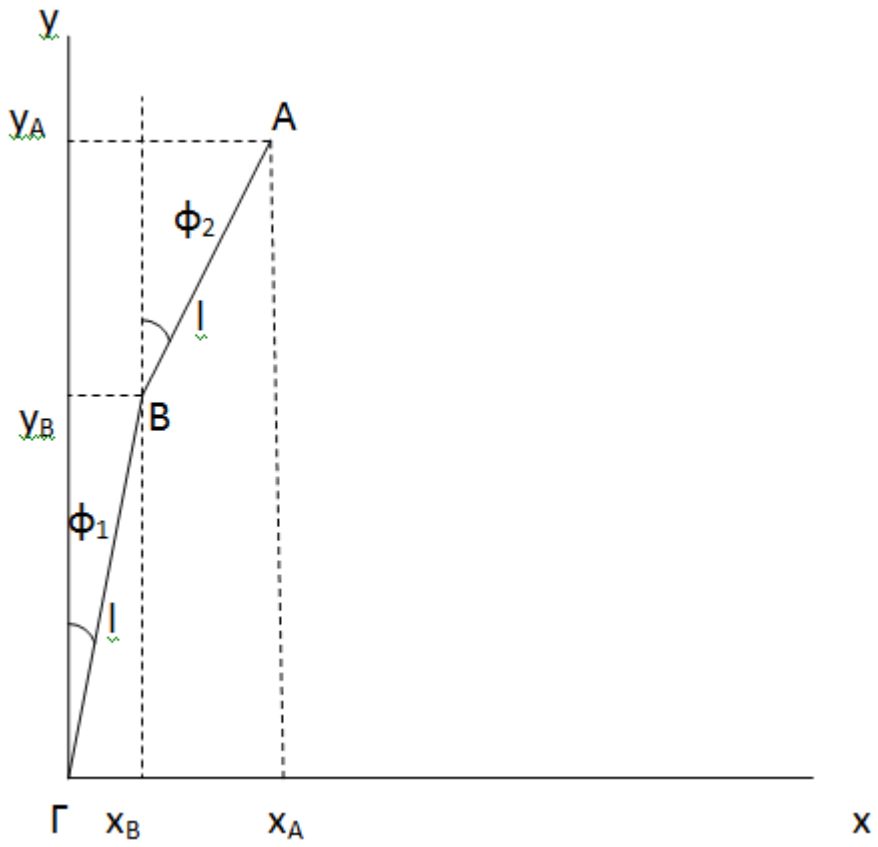
Οι ράβδοι του σχήματος έχουν μήκος l και αρχικά βρίσκονται στη θέση ισορροπίας. Με μικρή διαταραχή σχηματίζουν γωνίες φ_1 και φ_2 αντίστοιχα με την κατακόρυφο. Για το παρόν σύστημα η ενέργεια παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση

$$V = {}^{1}/_{2}\, k \cdot \varphi_1^2 + {}^{1}/_{2}\, k(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \Rightarrow$$

$$V = {}^{1}/_{2}\, k(2\varphi_1^2 + \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2) \qquad \text{(IV-1)}$$

Επιπλέον η κινητική ενέργεια προσδιορίζεται ως εξής:

Με τη βοήθεια του σχήματος IV-2 υπολογίζεται η θέση και η ταχύτητα των μαζών στα σημεία A και B.



Σχήμα IV- **2** : Πρόβολος 2 βαθμών ελευθερίας σε διαταραγμένη θέση

Το σημείο B έχει

τετμημένη $x_B = l\sin\varphi_1$, $\dot{x}_B = l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1$

ενώ η τεταγμένη του είναι

$y_B = l\cos\varphi_1$, $\dot{y}_B = -l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1$

Ισχύει λοιπόν ότι $\dot{x}_B^2 = l^2\cos^2\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2$

καθώς και $\dot{y}_B^2 = l^2\sin^2\varphi_1\dot{\varphi}_1{}^2$

οπότε η ταχύτητα του σημείου Β είναι

$$U_B^2 - \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 - l^2\dot{\varphi}_1{}^2 \qquad \text{(i)}$$

Ομοίως το σημείο Α έχει

τετμημένη $x_A = l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2$

$$\dot{x}_A = l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 + l\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2$$

ενώ η τεταγμένη του είναι

$$y_A = l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2$$

$$\dot{y}_A = -l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 - l\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2$$

Ισχύει λοιπόν ότι

$$\dot{x}_A^2 = l^2\cos^2\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + l^2\cos^2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_2^2 + 2l^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

καθώς και

$$\dot{y}_A^2 = l^2\sin^2\varphi_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\sin^2\varphi_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

οπότε η ταχύτητα του σημείου Α είναι

$$U_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = l^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

ή αλλιώς $U_A^2 = l^2[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$ (ii)

Επειδή οι γωνίες φ_1 και φ_2 είναι μικρές , η διαφορά τους $(\varphi_1 - \varphi_2)$ είναι επίσης μικρή. Επομένως $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \simeq 1$ και η (ii) γίνεται

$$U_A^2 = l^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) \qquad \text{(iii)}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$T = {}^1/_2\, 2mU_B^2 + {}^1/_2\, mU_A^2 \qquad \text{(iv)}$$

Με τις σχέσεις (i) , (iii) η σχέση (iv) γίνεται

$$T = {}^1/_2\, 2m(\dot{\varphi}_1 \cdot l)^2 + {}^1/_2\, m(\dot{\varphi}_1 l + \dot{\varphi}_2 l)^2$$

$$= {}^1/_2 \cdot 2ml^2\dot{\varphi}_1^2 + {}^1/_2\, ml^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2$$

$$T = {}^1/_2\, ml^2[3\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] \qquad \text{(IV-2)}$$

Η Λαγκρανζιανή δίνεται από την συνάρτηση

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}ml^2[3\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] - \tfrac{1}{2}k[2\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2] \qquad \text{(IV-3)}$$

<u>Εξισώσεις Euler-Lagrange</u>

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι οι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_K}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_K} = Q_K \text{ , } k= 1,2 \qquad \text{(IV-4)}$$

Όπου L η Λαγκρανζιανή συνάρτηση L=T-V με T την συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος και V την συνολική

δυναμική του ενέργεια.

Q_k είναι οι γενικευμένες φορτίσεις

Η κινητική ενέργεια είναι $E_{κιν} = ½ mv^2$ ενώ η δυναμική για περιστροφικό ελατήριο είναι $E_{δυν} = ½ kφ^2$

Ανακαλώντας τις εξισώσεις Lagrange-Euler της αναλυτικής δυναμικής για την εύρεση των γενικευμένων φορτίσεων $Q_κ$ ακολουθείται η εξής διαδικασία:

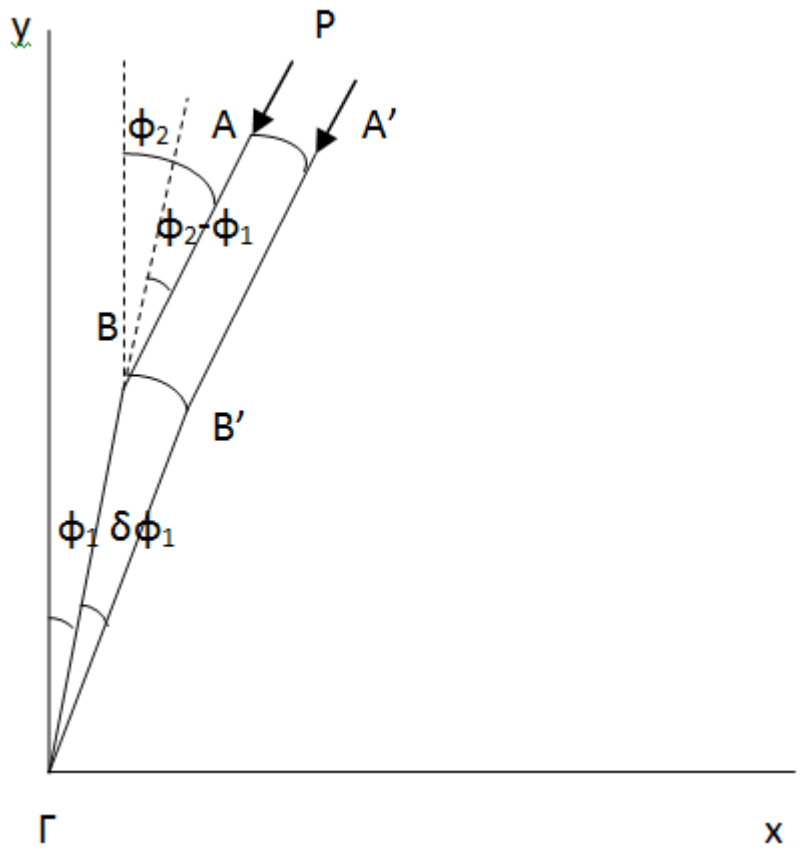
Για την εύρεση των γενικευμένων φορτίσεων $Q_κ$ γνωρίζουμε ότι η μεταβολή του έργου είναι

$$δE_i = Q_i \cdot δφ_i \quad . \qquad \text{(IV-5)}$$

Για μικρή μεταβολή της γωνίας $φ_2$ η δύναμη P δεν παράγει έργο γιατί είναι συνεχώς κάθετη στην τροχιά. Άρα η μεταβολή της ενέργειας σύμφωνα με την εξίσωση (IV-5) και για i=2 είναι $dE_2 = 0$. Επομένως η εξίσωση (IV-5) δίνει

$$Q_2 = 0 \qquad \text{(IV-6)}$$

Για τον προσδιορισμό της γενικευμένης φόρτισης Q_1 εργαζόμαστε ως εξής :



Σχήμα IV- **3** : Η μεταβολή της γωνίας φ_1 της ράβδου ΒΓ κατά $\delta\varphi_1$

Θεωρούμε μικρή μεταβολή $\delta\varphi_1$ της γωνίας φ_1 όπως φαίνεται στο σχήμα (IV-3). Η ράβδος στη θέση ΑΒ μετατοπίζεται στη θέση Α΄Β΄ η οποία είναι οριακά παράλληλη της αρχικής της. Όμως και οι τροχιές που ακολουθούν τα σημεία Α και Β (δηλαδή οι ΑΑ΄ και ΒΒ΄ αντίστοιχα) είναι παράλληλες και μπορεί να θεωρηθεί ότι κατά μέτρο είναι ίσες.

Το μήκος της τροχιάς της ΒΒ΄ είναι $l\delta\varphi_1$. Για να βρούμε τη μεταβολή της ενέργειας dE_1 χρειάζεται να υπολογιστεί η προβολή της δύναμης P επάνω στην τροχιά ΑΑ΄ καθώς και το μήκος αυτής της τροχιάς.

Η προβολή της P πάνω στην τροχιά ΑΑ΄ είναι ίση με

$$P\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

όπως φαίνεται από το σχήμα (IV- 3). Επίσης η τροχιά ΑΑ΄ έχει μέτρο όσο η τροχιά ΒΒ΄ και είναι ίσο με $l\delta\varphi_1$. Άρα η μεταβολή του έργου δE_1 είναι

$$\delta E1 = P\sin(\varphi_1 - \varphi_2)l\delta\varphi_1$$

το οποίο γίνεται για μικρές γωνίες φ_1 ,φ_2

$$\delta E1 = P(\varphi_1 - \varphi_2)l\delta\varphi_1 \qquad \text{(IV-7)}$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματός συνδυάζουμε τις εξισώσεις (IV-1) ,(IV-4) , (IV-6) και (IV-7) .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = Q_k$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2[3\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] - \frac{1}{2}k[2\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2]$$

$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Q_2 = 0$$

Επομένως για κ=1

$$3ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + \varphi_1(2k - Pl) + \varphi_2(Pl - c) = 0 \quad . \qquad \text{(IV-8)}$$

Ενώ για κ =2

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 - k\varphi_1 + k\varphi_2 = 0 \qquad \text{(IV-9)}$$

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος δίνονται από τις εξισώσεις (IV-8) και (IV-9) και αποτελούν ένα γραμμικό ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Σύμφωνα με τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων το σύστημα αυτό δέχεται λύσεις της μορφής :

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t} \qquad \text{(IV-10)}$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t} \qquad \text{(IV-11)}$$

Αντικαθιστώντας τις λύσεις στις εξισώσεις (IV-8) και (IV-9) και παράλληλα θέτοντας τις παραμέτρους φόρτισης p και ιδιοσυχνότητας μ με

$$\mu^2 = \omega^2 \frac{ml^2}{k} \quad \text{και}$$

$$p = \frac{Pl}{k}$$

προκύπτουν οι εξής σχέσεις :

$$A_1(3\mu^2 + p - 2) + A_2(\mu^2 - p + 1) = 0 \qquad \text{(IV-12)}$$

$$A_1(\mu^2 + 1) + A_2(\mu^2 - 1) = 0 \qquad \text{(IV-13)}$$

Οι εξισώσεις (IV-12) και (IV-13) αποτελούν ένα ομογενές σύστημα ως προς τις μεταβλητές A_1 και A_2. Για να έχει λύση το σύστημα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων να είναι ίση με μηδέν

Δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 3\mu^2 + p & 2 & \mu^2 & p + 1 \\ \mu^2 + 1 & & \mu^2 - 1 & \end{vmatrix} = 0$$

Από το οποίο προκύπτει η διτετράγωνη εξίσωση

$$2\mu^4 + (2p - 7)\mu^2 + 1 = 0 \qquad \text{(IV-14)}$$

Κάνοντας διερεύνηση της εξίσωσης βλέπουμε ότι για να έχει η εξίσωση αυτή πραγματικές ρίζες θα πρέπει η διακρίνουσα της Δ να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός .

Δηλαδή

$$\Delta = (2p - 7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \geq 0$$

Έτσι προκύπτει ότι οι τιμές του p για τις οποίες μηδενίζεται η διακρίνουσα είναι οι

$$p_1 = 4{,}914$$

$$p_2 = 2{,}086$$

Εντοπίζουμε κατόπιν τις τιμές που παίρνει το μ^2 για το εύρος τιμών του p και κατασκευάζουμε το παρακάτω σχήμα όπου φαίνεται το πρόσημο της διακρίνουσας σε σχέση με τις τιμές του p

$-\infty$		2,086		4,914	
	+	|	-	|	+

Βλέπουμε ότι

μ^2 πραγματικός και θετικός* για $p \leq 2{,}086$ (I)

μ^2 πραγματικός και αρνητικός * για $p \geq 4{,}194$ (II)

μ^2 μιγαδικός για $2{,}086 < p < 4{,}914$ (III)

*Από θεωρία τριωνύμου

Α) Στην πρώτη περίπτωση (Ι) οι τιμές που παίρνει η ιδιοσυχνότητα μ^2 είναι πραγματικές και θετικές. Επομένως η εξίσωση (IV-14) δίνει δύο θετικές ρίζες μ_1 και μ_2 οπότε έχουμε τις λύσεις

$\varphi_1 - A_1 e^{i\omega t}$ και $\varphi_2 - A_2 e^{i\omega t}$ και ισχύει ότι $\mu^2 - \omega^2 \cdot \frac{ml^2}{k}$

Με μια μικρή αριθμητική εφαρμογή έστω για p=2 έχω τις τιμές

μ_1=0,707

μ_2=1

Αυτό δείχνει ότι το διβάθμιο σύστημα , το οποίο θεωρήσαμε ότι αρχικά διεγείρεται ελαφρά ,εκτελεί αρμονική ταλάντωση αποτελούμενη από δύο αρμονικές ταλαντώσεις με αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες μ_1 και μ_2.

Αν το σύστημα κινείται με την πρώτη ιδιοσυχνότητα θα έχουμε τις εξής συναρτήσεις για τις γωνίες φ_1 και φ_2 :

$\varphi_1 = A_1 \cdot e^{0.707iT}$ και $\varphi_2 = A_2 \cdot e^{0.707iT}$ με $T = \frac{t}{\sqrt{ml^2/k}}$

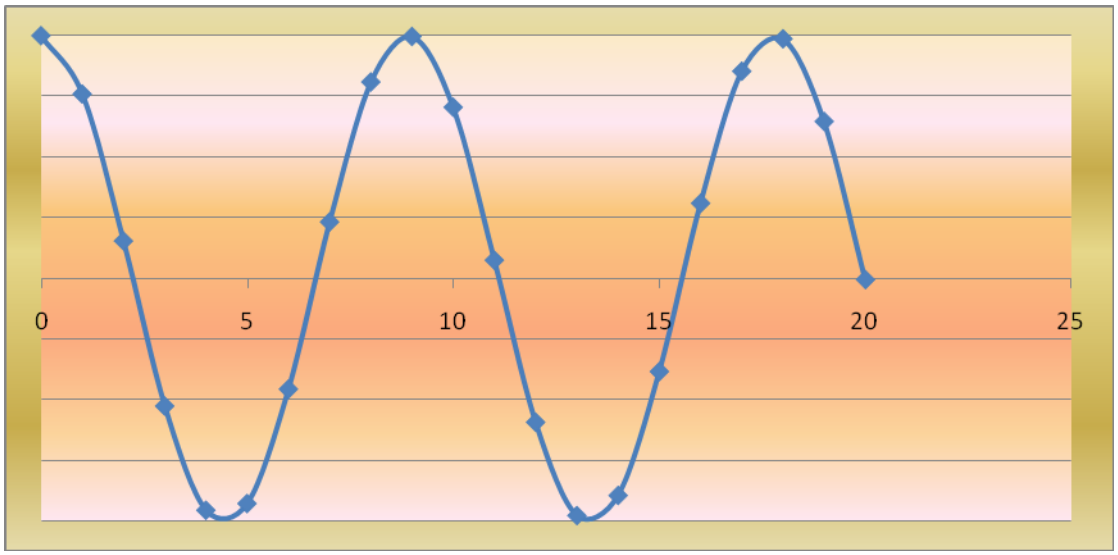
Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\varphi_1 = A_1 \cdot e^{i\mu T} \quad \text{και} \quad \varphi_2 = A_2 \cdot e^{i\mu T} \quad \text{με} \quad T = \frac{t}{\sqrt{\frac{ml^2}{k}}} \qquad \text{(IV-15)}$$

όπου το A_2 δίνεται από τη σχέση (IV-13) και είναι

$$A_2 = -A_1 \frac{(\mu^2 + 1)}{(\mu^2 - 1)}$$

Συμπερασματικά βλέπουμε ότι σύμφωνα με την εξίσωση (IV-15) το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση και επομένως η κατακόρυφος αρχική θέση ισορροπίας είναι ευσταθής . Το γράφημα της εξίσωσης (IV-15)δίνεται στο σχήμα IV-4.



Σχήμα IV-**4 :** Το γράφημα της εξίσωσης $\varphi_1 = A_1 \cdot e^{0,707iT}$. Το σύστημα εκτελεί καθαρή ταλάντωση και είναι ευσταθές.

Β) Στην περίπτωση (ΙΙ) η εξίσωση (IV-14) δίνει δύο αρνητικές ρίζες ως προς μ^2 που συνεπάγονται κίνηση συνεχώς αυξανόμενου εύρους.

Με ένα αριθμητικό παράδειγμα , έστω συντελεστής φόρτισης p=6 , έχουμε ότι

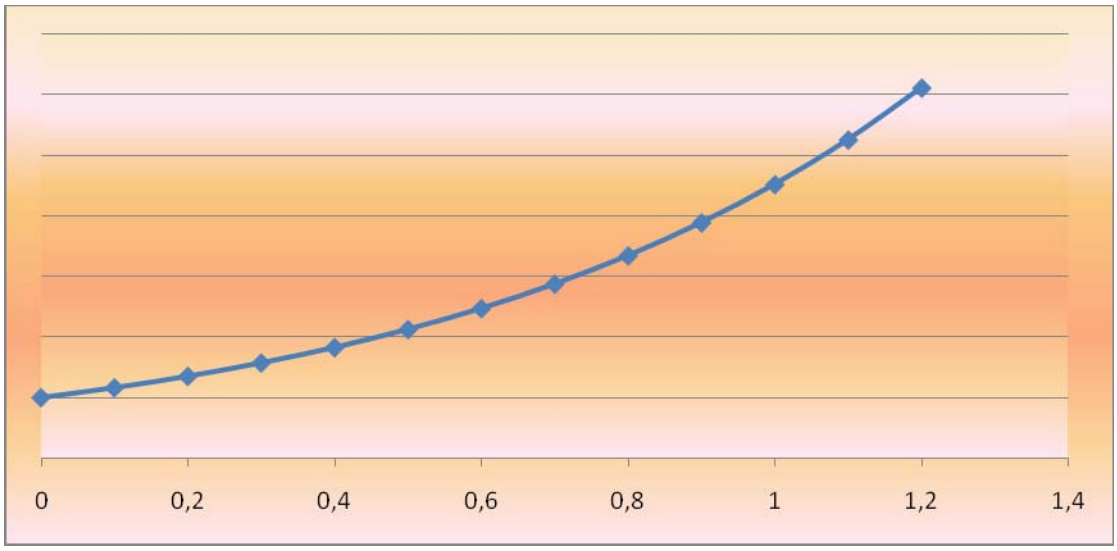
$\mu_1^2 = -2,28$

$\mu_2^2 = -0,22$

Άρα οι τιμές που παίρνουν οι αδιαστατοποιημένες ιδιοσυχνότητες μ είναι φανταστικές. Με $\mu_1 = 1,51i$ οι τιμές που παίρνει η γωνία φ_1 δίνονται από την εξίσωση

$$\varphi_1 = A_1 \cdot e^{1,51T} \quad , \qquad \text{(IV-16)}$$

Η εξίσωση της μεταβολής της γωνίας φ_1 ως προς το χρόνο δείχνει ότι το σύστημά θα εκτελέσει κίνηση συνεχώς αυξανόμενου εύρους και συνεπώς η αρχική διαταραχθείσα κατακόρυφος θέση του συστήματος είναι θέση <u>ασταθούς ισορροπίας</u>. Αυτή η περίπτωση χαρακτηρίζεται ως αστάθεια με αποκλίνουσα κίνηση και το γράφημά της δίνεται στο σχήμα IV-**5**.



Σχήμα IV-**5 :** Το γράφημα της εξίσωσης $\varphi_1 = A_1 \cdot e^{1,51T}$. Η γωνία αυξάνει εκθετικά με το χρόνο. Το σύστημα είναι ασταθές.

Γ) Όταν οι τιμές του μ^2 κυμαίνονται στα όρια της περίπτωσης (ΙΙΙ) η εξίσωση (IV-14) δίνει μιγαδικές λύσεις και οι λύσεις αυτές παριστούν απεριοδική κίνηση με συνεχώς αυξανόμενο εύρος. Αυτή η κίνηση είναι γνωστή ως πτερυγισμός.

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ότι το p έχει την τιμή 3,5 τότε οι τιμές που παίρνει το μ δίνονται από τη σχέση

$$\mu = \pm 0{,}595(1 \pm i)$$

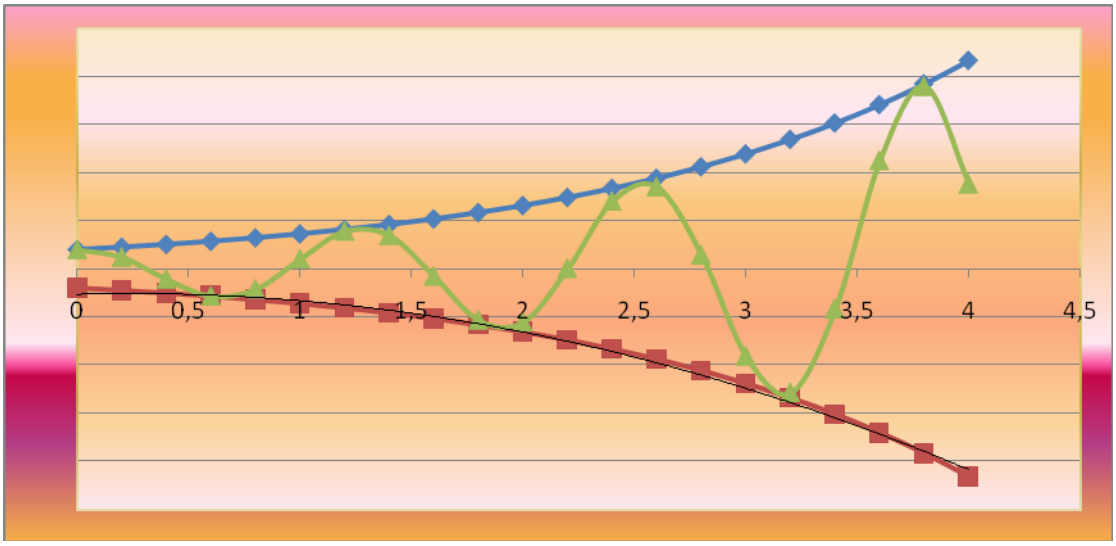
Για $\mu_1 = 0{,}595(1 - i)$ η εξίσωση (IV-10) δίνει τις τιμές της γωνίας φ_1 :

$$\varphi_1 = A_1 \cdot e^{0{,}595T} \cdot e^{0{,}595iT}$$

Η τελευταία εξίσωση παριστά κίνηση με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος λόγω του παράγοντα $e^{0{,}595T}$ και η γραφική της παράσταση παρουσιάζεται στο σχήμα IV-**6**. Επομένως η αρχική θέση ισορροπίας είναι ασταθής.

Το εφαπτομενικό (μη συντηρητικό) φορτίο στις περιπτώσεις Β και Γ συνεπώς προκαλεί κίνηση συνεχώς αυξανόμενου εύρους.

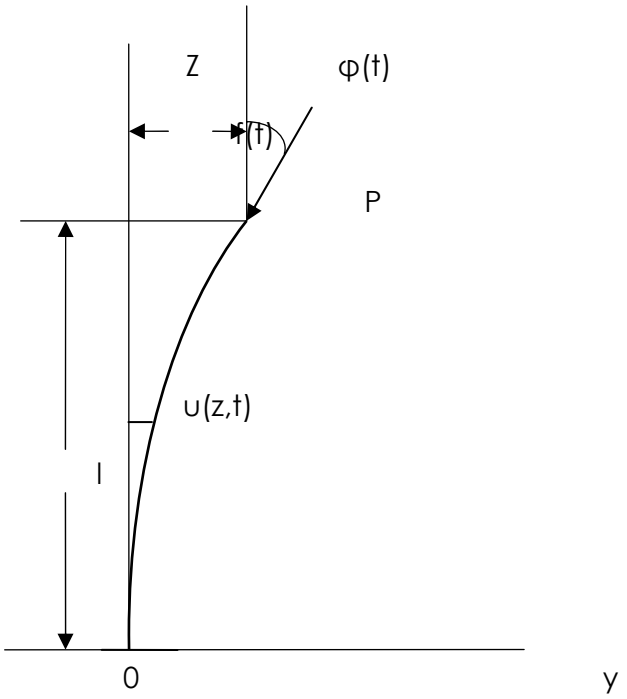
Στην περίπτωση Γ το όριο του φορτίου (p=2,086) που όταν ξεπεραστεί προκαλείται πτερυγισμός είναι το Κρίσιμο Φορτίο.



Σχήμα IV-**6 :** Η εξίσωση $\varphi_1 = A_1 \cdot e^{0,595T} \cdot e^{0,595iT}$. Το σύστημα εκτελεί ταλάντωση με συνεχώς αυξανόμενο εύρος (Πτερυγισμός) και είναι ασταθές.

Ευστάθεια δοκού που υπόκειται σε εφαπτομενική φόρτιση

Στο παρόν πρόβλημα θα μελετήσουμε την ευστάθεια ενός απλού μη συντηρητικού συστήματος που αποτελείται από λεπτή ελαστική ομογενή δοκό η οποία φορτίζεται με εφαπτομενική δύναμη (η οποία είναι μη συντηρητική) . Το σύστημα διεγείρεται ελαφρώς γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του και η ανάλυσή του γίνεται ως προς το y-z επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα (V-1).



Σχήμα V-1: Λεπτή ελαστική δοκός

Έστω λοιπόν ότι $U_{(z,t)}$ είναι η απομάκρυνση της ράβδου από την αρχική θέση ισορροπίας της σε ύψος z και χρόνο t. Το σύστημα διεγείρεται και θεωρούμε ότι το δέχεται αρκετά μικρές παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι η γωνία φ που σχηματίζει η ράβδος στο άνω (ελεύθερο) άκρο της με την κατακόρυφο αρχική θέση ισορροπίας είναι αρκετά μικρή. Ισχύει λοιπόν ότι

$\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, $\tan\varphi \approx \varphi$ (σε rad) και συνεπώς

$P_x = P \cdot \cos\varphi = P$ ενώ $P_y = P\sin\varphi = P \cdot \varphi$ (V-1)

Ακολουθώντας τις γνωστές παραδοχές για τη βασική θεωρία της Δοκού (παραδοχές Bernouli) βρίσκουμε ότι η διαφορική εξίσωση κίνησης της ελαστικής γραμμής της δοκού είναι η

$EIy'' = \Sigma M$ (V-2)

όπου ΣM είναι το άθροισμα των ροπών .

Η εξίσωση (V-2) γράφεται πιο αναλυτικά και με βοήθεια της σχέσης (V-1) ως εξής

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = P_x(f - u) - P_y(l - z) + L_J \qquad \text{(V-3)}$$

L_J ονομάζεται η αδρανειακή ροπή που οφείλεται στην κίνηση της ράβδου και ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 L_J}{\partial z^2} = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(V-4)}$$

Για καταστρωθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης της ράβδου εισάγεται η εξίσωση (V-4) στην εξίσωση (V-3) και διαφορίζουμε δύο φορές ως προς z. Έτσι έχουμε

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + P\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(V-5)}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης (V-5) χρειάζεται να προσδιοριστούν οι συνοριακές συνθήκες. Για το κάτω (πακτωμένο) άκρο έχουμε ότι η μετατόπισή του σημείου είναι μηδενική όπως και η κλίση της ράβδου. Δηλαδή:

$$z = 0 \quad => \quad u_{(0,t)} = 0 \qquad \text{(V-6)}$$

$$\frac{\partial u_{(0,t)}}{\partial z} = 0 \qquad \text{(V-7)}$$

Αντίστοιχα στο ελεύθερο άκρο γνωρίζουμε ότι η ροπή κάμψης και η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενικές οπότε ισχύουν οι εξής εξισώσεις:

$$z = l \quad => \quad \frac{\partial^2 u_{(l,t)}}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(V-8)}$$

$$\frac{\partial^3 u_{(l,t)}}{\partial z^3} = 0 \qquad \text{(V-9)}$$

Η εξίσωση (V-5) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία σύμφωνα με τη θεωρία διαφορικών εξισώσεων επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$u_{(z,t)} = U_{(z)} \cdot e^{i\Omega t} \qquad \text{(V-10)}$$

Εισάγοντας λοιπόν τη λύση (V-10) στην διαφορική εξίσωση (V-5) προκύπτει ότι

$$\frac{d^4U_{(z)}}{dz^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2U_{(z)}}{dz^2} - \frac{m\Omega^2}{EI}U_{(z)} = 0 \qquad \text{(V-11)}$$

Για περαιτέρω διευκόλυνση στη λύση εισάγουμε την αδιαστατοποιημένη μεταβλητή μήκους

$$\zeta = \frac{z}{l}$$

καθώς και το συντελεστή φόρτισης β και την ιδιοσυχνότητα ω που εκφράζονται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\beta = \frac{l^2 P}{EI}$$

$$\omega = l^2 \Omega \sqrt{\frac{m}{EI}}$$

Έτσι καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4U_{(\zeta)}}{d\zeta^4} + \beta\frac{d^2U_{(\zeta)}}{d\zeta^2} - \omega^2 U_{(\zeta)} = 0 \qquad \text{(V-12)}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία γραμμικών διαφορικών εξισώσεων η εξίσωση (V-12) επιδέχεται τη γενική λύση

$$U_{(\zeta)} = C_1 \sin(r_1\zeta) + C_2 \cos(r_1\zeta) + C_3 \sinh(r_2\zeta) + C_4 \cosh(r_2\zeta) \qquad \text{(V-13)}$$

Όπου τα r_1 και r_2 βρίσκονται από τη λύση της αντίστοιχης διτετράγωνης αλγεβρικής εξίσωσης.

Αναλυτικότερα η αντίστοιχη αλγεβρική της ομογενούς διαφορικής

εξίσωσης (V-12) είναι η

$$r^4 + \beta r^2 - \omega^2 = 0 \qquad \text{(V-14)}$$

Για να βρούμε τη λύση της διτετράγωνης αλγεβρικής θέτουμε

$r^2 = H$ (πάντα θετικό) και η εξίσωση (V-14) γίνεται

$$H^2 + \beta H - \omega^2 = 0 \qquad \text{(V-15)}$$

η οποία έχει ρίζες τις $H_{1,2}$ οι οποίες είναι

$$H_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\omega^2}}{2} \qquad \text{(V-16)}$$

Όμως το H ($H=r^2$) είναι πάντα θετικό και άρα επειδή το υπόριζο της εξίσωσης (V-16) είναι πάντα μεγαλύτερο από τον όρο β έχω τις ρίζες της εξίσωσης (V-14) να είναι:

$$r_1^2 = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2} + \frac{\beta}{2} \qquad \text{(V-17)}$$

$$r_2^2 = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2} - \frac{\beta}{2} \qquad \text{(V-18)}$$

Εν συνεχεία σχηματίζουμε τις συνοριακές συνθήκες από τους κάτωθι περιορισμούς :

Η μετατόπιση στο κάτω (πακτωμένο) άκρο της δοκού είναι μηδενική

$$\rightarrow \quad u_{(0,t)} = 0 \qquad \text{(α)}$$

Η κλίση στο πακτωμένο άκρο είναι μηδενική

$$\frac{\partial u_{(0,t)}}{\partial z} = 0 \qquad (\beta)$$

Η ροπή κάμψης στο ελεύθερο άκρο είναι μηδενική

$$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 u_{(l,t)}}{\partial z^2} = 0 \qquad (\gamma)$$

Η τέμνουσα στο ελεύθερο άκρο είναι μηδενική

$$\rightarrow \quad \frac{\partial^3 u_{(l,t)}}{\partial z^3} = 0 \qquad (\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (α) , (β) , (γ) , (δ) στην εξίσωση (V-13) τελικά έχουμε:

$$c_1(r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \sinh r_2) + c_2(r_1^2 \cos r_1 + r_2^2 \cosh r_2) = 0 \qquad \text{(V-19)}$$

$$-c_1(r_1^3 \cos r_1 + r_1 r_2^2 \cosh r_2) + c_2(r_1^3 \sin r_1 - r_2^3 \sinh r_2) = 0 \qquad \text{(V-20)}$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους για να έχει λύση το σύστημα θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων να ισούται με το μηδέν.

Δηλαδή να ισχύει

$$\begin{vmatrix} r_1^2 sinr_1 + r_1 r_2 sinhr_2 & r_1^2 cosr_1 + r_2^2 coshr_2 \\ -r_1^3 cosr_1 + r_1 r_2^2 coshr_2 & r_1^3 sinr_1 - r_2^3 sinhr_2 \end{vmatrix} = 0$$

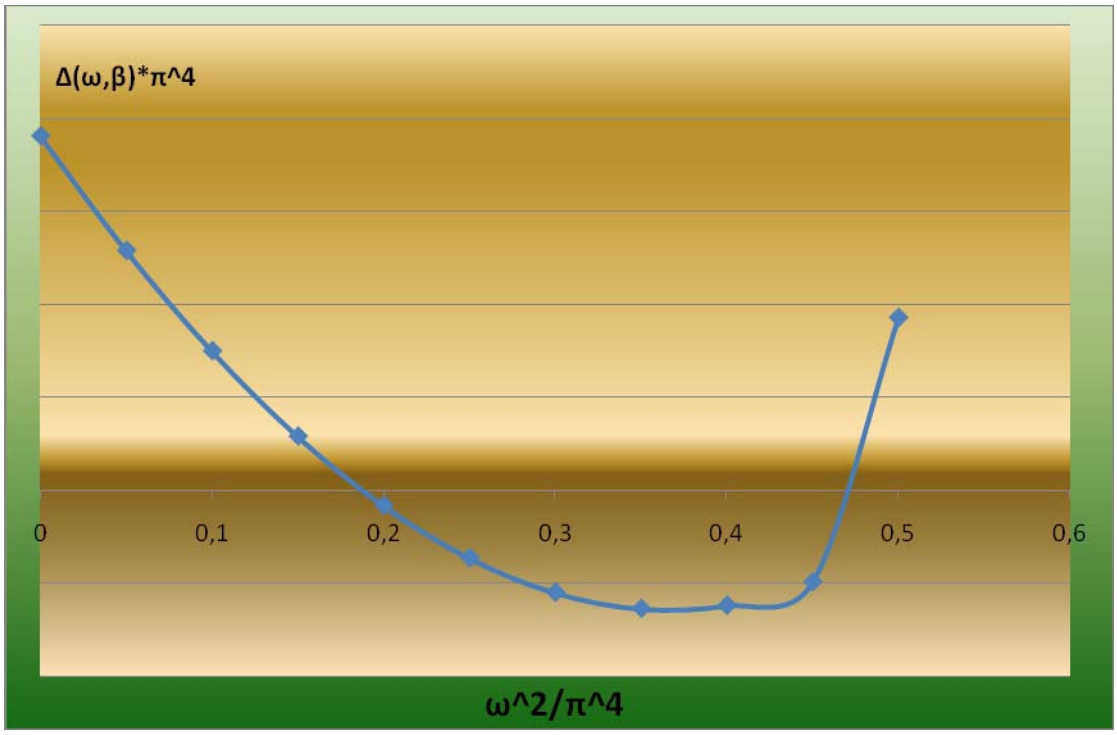
Αναπτύσσοντας την ορίζουσα δίνεται η σχέση

$$Det(r_1, r_2) = r_1^4 + r_2^4 + r_1 r_2 sinr_1 sinhr_2 (r_1^2 - r_2^2) + 2r_1^2 r_2^2 cosr_1 coshr_2 = 0 \quad \text{(V-21)}$$

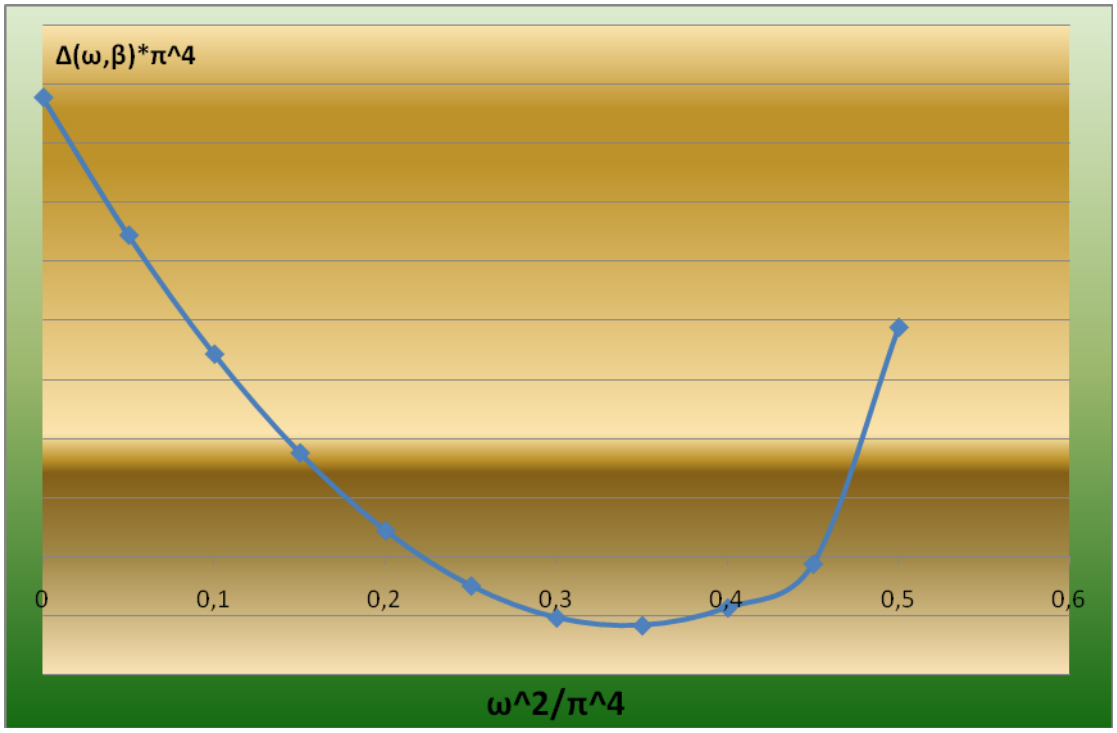
Όμως έχουμε ήδη συσχετίσει τις ρίζες r_1 και r_2 με το συντελεστή φόρτισης β και την ιδιοσυχνότητα ω οπότε συνδυάζοντας τις εξισώσεις (V-17) και (V-18) με την εξίσωση (V-21) καταλήγουμε στην εξής σχέση

$$\mathrm{Det}(\omega, \beta) = \beta^2 + 2\omega^2 + \beta \cdot \omega \cdot \mathrm{sinr_1 sinhr_2} + 2\omega^2 \mathrm{cosr_1 coshr_1} = 0 \quad \text{(V-22)}$$

Η σχέση (V-22) συνδέει το συντελεστή φόρτισης β με την ιδιοσυχνότητα ω. Για μηδενικό φορτίο P ο συντελεστής φόρτισης β είναι μηδενικός και οι ρίζες της εξίσωσης (V-22) αντιστοιχούν στις συχνότητες των φυσικών ταλαντώσεων που πραγματοποιεί μετά από μικρή διέγερση . Αν αυξηθεί το φορτίο τότε οι ρίζες αρχίζουν να πλησιάζουν όπως φαίνεται στα διαγράμματα (V-2) , (V-3) , (V-4) που αντιστοιχούν σε συντελεστή φορτίου β $1{,}8\ \pi^2$, $1{,}9\ \pi^2$ και $2\ \pi^2$ αντίστοιχα .

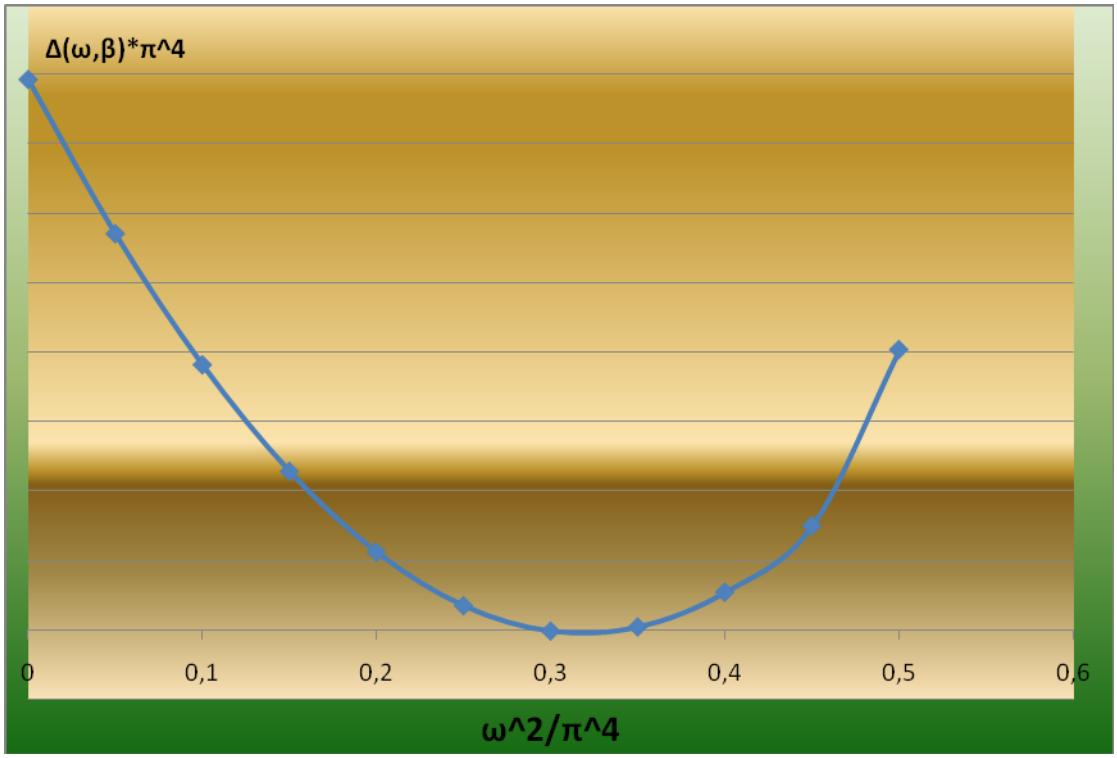


Διάγραμμα (V-2):Οι 2 ρίζες της εξίσωσης (V-22) για συντελεστή φόρτισης $\beta=1,8\pi^2$.



Διάγραμμα (V-3):Οι 2 ρίζες της εξίσωσης (V-22) για συντελεστή φόρτισης $\beta=1,9\ \pi^2$.

Καθώς πλησιάζουν οι ρίζες με αύξηση του συντελεστή φορτίου β σε μια τιμή β^* γίνονται πολλαπλές. Έτσι σύμφωνα με την εξίσωση (V-10) η τιμή του συντελεστή φορτίου β^* αντιστοιχεί στην Κρίσιμη Φόρτιση P^*.



Διάγραμμα (V-4):Η **διπλή** ρίζα της εξίσωσης (V-22) για συντελεστή φόρτισης $\beta=2\pi^2=\beta^*$ που αντιστοιχεί στην Κρίσιμη Φόρτιση P^*.

Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Beck η τιμή του συντελεστή φορτίου β^* που αντιστοιχεί στην κρίσιμη φόρτιση είναι

$\beta^*=20,05$

Ενώ σύμφωνα με τους Deinenko και Leonov

$\beta^{*}=2,002\pi^{2}=19,77$

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία η τιμή της Κρίσιμης Φόρτισης είναι

$$P^{*} = \frac{2\pi^{2} EI}{l^{2}}$$.

Εισαγωγή στην ανάλυση ελαστικών δοκών με βαθμίδα τροπής

Εξετάστηκαν λοιπόν δύο απλά προβλήματα λυγισμού καθώς ο τρόπος επίλυσης τους. Χρησιμοποιήθηκε η κλασική θεωρία ελαστικότητας και καταστρώθηκαν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Με τη εύρεση και των συνοριακών συνθηκών οι εξισώσεις επιλύθηκαν και κατόπιν βρέθηκε η Κρίσιμη Φόρτιση. Παραβλέφθηκε όμως ότι η επιρροή της μικροδομής του υλικού η οποία επηρεάζει σημαντικά πολλά από τα σύγχρονα αυτά προβλήματα.

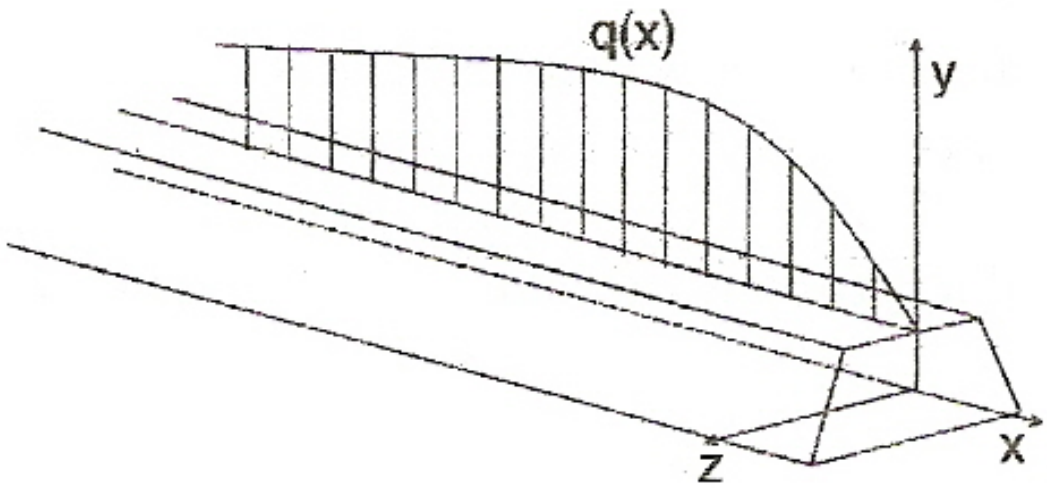
Στην πραγματικότητα η μηχανική συμπεριφορά των γραμμικών ελαστικών υλικών όπως είναι τα πολυμερή, τα πολυκρυσταλλικά και τα κοκκώδη υλικά επηρεάζεται από την μικροδομή τους και επομένως δεν μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από την κλασική θεωρία της ελαστικότητας.

Αυτό συμβαίνει γιατί η κλασική θεωρία ελαστικού μέσου υποθέτει την ομοιογένεια του υλικού και την τοπική εφαρμογή των τάσεων. Όταν όμως το υλικό έχει ατέλειες μικροδομής αυτές δημιουργούν μη ομοιογενή συμπεριφορά και στην ανάλυση των τάσεων πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι «γειτονικές» περιοχές του επιπέδου ανάλυσης. Άλλοι λόγοι για τους οποίους η χρήση της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας δεν ενδείκνυται αναφέρονται στο κεφάλαιο : «Εξέλιξη του προβλήματος ευστάθειας του ελαστικού μέσου».

Οι επιπτώσεις των ατελειών της μικροδομής του υλικού μπορούν να μελετηθούν μακροσκοπικά με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής. Με χρήση τέτοιων θεωριών επιλύονται σύγχρονα προβλήματα συνοριακών συνθηκών στατικής και δυναμικής ελαστικότητας καθώς εξαφανίζονται οι ασυνέχειες που παράγονται από τη χρήση των εξισώσεων κίνησης της κλασικής θεωρίας του ελαστικού μέσου , όπως επίσης και οι αρνητικές επιπτώσεις (εφαρμογής της θεωρίας) σε προβλήματα μικροκλίμακας. Παρακάτω θα εξετασθεί ένα παράδειγμα επίλυσης του προβλήματος της δοκού σε κάμψη με χρήση μιας απλής θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής με επιφανειακή ενέργεια.

Εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες δοκού σε κάμψη με χρήση βαθμίδας τροπής

Θεωρούμε ευθεία ελαστική δοκό με τραπεζοειδή διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα (VI-1) ,η οποία φορτίζεται με κατακόρυφο στατικό φορτίο κατανομής δύναμης q(x) . Η φόρτιση γίνεται κατά το xy επίπεδο. Η διατομή της βρίσκεται στο επίπεδο που σχηματίζουν οι άξονες yz και επίσης ο άξονας y είναι και άξονας συμμετρίας της δοκού.



Σχήμα VI-1: Γεωμετρία και κατανομή φορτίου δοκού σε κάμψη

Η ανάλυση θα γίνει χρησιμοποιώντας τη θεωρία της ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής με επιφανειακή ενέργεια όπως τη διατύπωσαν οι Vardoulakis και Sulem το 1995. Αυτή η θεωρία συνδυάζει τις γενικές αρχές , ιδέες και δομή των Mindlin(1964) και Casal(1972) σχετικά με την επιρροή της επιφανειακής ενέργεια στο πρόβλημα και σχετίζεται μόνο με τέσσερις ελαστικές σταθερές (Δύο κλασικές και δύο μη κλασικές).Σε αντίθεση με άλλες θεωρίες οι οποίες χρησιμοποιούν έως και δεκαοκτώ σταθερές ,όπως του Mindlin(1964), η παρούσα μας βοηθάει καθώς είναι πολύ πιο εύχρηστη λόγω της απλότητάς της.

Σύμφωνα με τον Mindlin (1964) η πυκνότητα ενέργειας τροπής του υλικού καθορίζεται από τη σχέση :

$$W = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn} + G\varepsilon_{mn}\varepsilon_{nm} + g^2\left\{\frac{1}{2}\lambda\kappa_{kmm}\kappa_{knn} + G\kappa_{kmn}\kappa_{knm}\right\}$$

$$+ l\left\{\frac{1}{2}\lambda(\kappa_{kmm}\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{mm}\kappa_{knn}) + G(\kappa_{kmm}\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{mn}\kappa_{knm})\right\}$$

(VI-1)

Με τις τροπές

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \qquad \text{(VI-2)}$$

Και τις υπερτροπές

$$k_{ijk} = k_{i\&j} = \partial_i \varepsilon_{jk} \quad . \qquad \text{(VI-3)}$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας τροπής (εξ. VI-1) εκφράζεται σε πιο συμπαγή μορφή με τη σχέση

$$W = W\left(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ijk}\right) \qquad \text{(VI-4)}$$

Οι τάσεις τ_{ij} και οι υπερτάσεις μ_{ijk} είναι οι καταστατικές τάσεις και δεν πρέπει να συγχέονται με το ισοζύγιο τάσεων. Βρίσκονται μέσω των νόμων διατήρησης της ορμής και της στροφορμής.

Χαρακτηρίζονται δε από τη σχέση

$$\partial W = \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \mu_{ijk}\delta\kappa_{ijk} \qquad \text{(VI-5)}$$

Επιπλέον οι καταστατικές τάσεις και υπερτάσεις ικανοποιούν την εξίσωση

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\right) = \mathbf{0}$$

Όπου **τ** και **μ** είναι οι τανυστές των τάσεων και των υπερτάσεων.

Δεχόμενοι την υπόθεση των Bernoulli-Euler οι Timoshenko και Goodier (1970) χρησιμοποίησαν τη σχέση $\varepsilon_\chi = ky$

Το k εκφράζει την καμπυλότητα κατά τον χ άξονα με

$$k = -\frac{d^2u}{dx^2}$$

όπου *u(x)* είναι η απόκλιση (βέλος κάμψης) της δοκού από τη θέση ισορροπίας της. Η ολική αξονική τάση σ_x που βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας στη δοκό δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_x = \tau_x - \frac{d\mu_x}{dx} \qquad \text{(VI-6)}$$

Επίσης οι τάσεις τ_x και υπερτάσεις μ_x καθορίζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση από τις εξής σχέσεις σύμφωνα με Papargyri et al (2003):

$$\tau_x = E\varepsilon_x + lE\varepsilon'_x$$
$$\mu_x = lE\varepsilon_x + g^2 E\varepsilon'_x \qquad \text{(VI-7)}$$

Όπου οι σταθερές l και g^2 αντιπροσωπεύουν χαρακτηριστικά μήκη που αναφέρονται στην επιφανειακή ενέργεια και την ογκομετρική ενέργεια ελαστικής τροπής αντίστοιχα και E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young. ε_x είναι η τροπή της δοκού κατά τον χ άξονα ενώ το ε'_x είναι η βαθμίδα της τροπής αυτής. Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης δοκού μήκους l δίνεται από την εξίσωση

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\left(u''\right)^2 + g^2\left(u'''\right)^2 + 2lu''u'''\right]dx \qquad \text{(VI-8)}$$

Για τα χαρακτηριστικά μήκη l και g^2 ισχύει ότι

$0 < l < g^2$.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας στη διατομή της δοκού έχουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων πρέπει να είναι μηδενική ενώ η συνισταμένη των ροπών πρέπει να είναι ίση με την εφαρμοζόμενη καμπτική ροπή. Έτσι έχουμε:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \qquad \text{(VI-9)}$$

$$\int_A \sigma_x y dA = -M \qquad \text{(VI-10)}$$

με $\frac{dM}{dx} = Q$ (VI-11)

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \qquad \text{(VI-12)}$$

Όπου Q είναι η τέμνουσα δύναμη στη δοκό και $q(x)$ η κατανεμημένη φόρτιση κατά τον χ άξονα πάνω σε αυτή.

Εξετάζοντας τη σχέση (VI-6) και σύμφωνα με την υπόθεση Bernoulli-Euler σύμφωνα με την οποία ισχύει ότι η τροπή ε_x δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_x = k \cdot y \qquad \text{(VI-13)}$$

,όπου k είναι η καμπυλότητα κατά τον x άξονα ,

οι εξισώσεις (VI-9) και (VI-10) παίρνουν τη μορφή

$$E\left(k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2}\right) \int_A y dA = 0 \qquad \text{(VI-14)}$$

$$E\left(k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2}\right) \int_A y^2 dA = -M \qquad \text{(VI-15)}$$

Εξετάζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας (VI-14) και (VI-15) παρατηρούμε ότι για να ικανοποιούνται και οι δύο πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_A y dA = 0$$

που σημαίνει ότι ο x άξονας είναι κεντροβαρικός και

$$k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \text{(VI-16)}$$

Όπου $I = \int_A y^2 dA$ είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον z άξονα.

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση των Bernoulli-Euler έχουμε ότι η καμπυλότητα συσχετίζεται με τη δεύτερη παράγωγο του βέλους κάμψης με την εξίσωση

$$\kappa = -\frac{d^2 u}{dx^2} \qquad \text{(VI-17)}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην εξίσωση (VI-16) την καμπυλότητα k από την εξίσωση (VI-17) και την τέμνουσα δύναμη Q και την παράγωγό της ως προς x από τις εξισώσεις (VI-11) και (VI-12) αντίστοιχα βρίσκουμε την εξίσωση της ελαστικής γραμμής δοκού σε κάμψη με χρήση βαθμίδας τροπής .

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = EI\left(u^{(4)} - g^2 u^{(6)}\right) = -q(x)$$

η οποία γράφεται απλούστερα

$$\boldsymbol{EI\left(u^{(4)} - g^2 u^{(6)}\right) + q(x) = 0} \qquad \text{(VI-18)}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\{Q_{(L)} - EI[u^{(3)}(L) - g^2 u^{(5)}(L)]\}\delta u_{(L)} - \{Q_{(0)} - EI[u^{(3)}(0) - g^2 u^{(5)}(0)]\}\delta u_{(0)} = 0 \qquad \text{(VI-19)}$$

$$\{M_{(L)} - EI[u^{(2)}(L) - g^2 u^{(4)}(L)]\}\delta u'_{(L)} - \{M_{(0)} - EI[u^{(2)}(0) - g^2 u^{(4)}(0)]\}\delta u'_{(0)} = 0$$

(VI-20)

$$\{m_{(L)} - EI[lu^{(2)}(L) + g^2u^{(3)}(L)]\}\delta u''(L) - \{m_{(0)} - EI[lu^{(2)}(0) + g^2u^3(0)]\}\delta u''(0) = 0 \quad \text{(VI-21)}$$

Οι μεταβλητές $\delta u_{(L)}$, $\delta u_{(0)}$, $\delta u'_{(L)}$, $\delta u'_{(0)}$, $\delta u''(L)$ και $\delta u''(0)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Συνεπάγεται λοιπόν ότι για να ικανοποιούνται οι εξισώσεις (VI-19), (VI-20) και (VI-21) πρέπει να ισχύει ότι :

$$\{Q_{(L)} - EI[u^{(3)}(L) - g^2u^{(5)}(L)]\}\delta u_{(L)} = 0$$

$$\{Q_{(0)} - EI[u^{(3)}(0) - g^2u^{(5)}(0)]\}\delta u_{(0)} = 0$$

$$\{M_{(L)} - EI[u^{(2)}(L) - g^2u^{(4)}(L)]\}\delta u'_{(L)} = 0$$

$$\{M_{(0)} - EI[u^{(2)}(0) - g^2u^{(4)}(o)]\}\delta u'_{(0)} = 0$$

$$\{m_{(L)} - EI[lu^{(2)}(L) + g^2u^{(3)}(L)]\}\delta u''(L) = 0$$

$$\{m_{(0)} - EI[lu^{(2)}(0) + g^2u^3(0)]\}\delta u''(0) = 0$$

Συνεπώς μπορούμε να βρούμε το βέλος κάμψης της δοκού αν γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά της και τη φόρτιση την οποία υφίσταται αν θεωρήσουμε γνωστές τις συνοριακές συνθήκες.

Επίσης παρατηρούμε ότι εάν ισχύουν οι κλασικές συνοριακές συνθήκες τότε είτε το βέλος κάμψης u , είτε οι τέμνουσες δυνάμεις

$$Q = EI(u^{(3)} - g^2u^{(5)})$$

και είτε η κλίση u΄ , είτε η καμπτική ροπή

$$M = EI(u^{(2)} - g^2 u^4)$$

θα πρέπει να είναι καθορισμένες.

Για την περίπτωση που έχουμε μη κλασικές συνοριακές συνθήκες ή επιπλέον συνθήκες , θα πρέπει να είναι καθορισμένες είτε η καμπυλότητα u΄΄ είτε οι υπερροπές

$$m = EI(lu^{(2)} + g^2 u^{(3)})$$

Έλεγχος ευστάθειας σε λυγισμό ελαστικής δοκού με βαθμίδα τροπής η οποία φορτίζεται με εφαπτομενική δύναμη (Πρόβλημα του Beck)

Γενικά: Προσδιορίζεται το κρίσιμο φορτίο σε λυγισμό για ελαστική δοκό με βαθμίδα τροπής η οποία φορτίζεται με εφαπτομενική δύναμη. Βρίσκεται η δυναμική εξίσωση ισορροπίας και οι οριακές συνθήκες που περιγράφουν το μοντέλο με βάση τις αρχές της απλής θεωρίας ελαστικότητας με επιφανειακή ενέργεια. Αριθμητικές εφαρμογές δείχνουν ότι παρόλο που ο όρος της επιφανειακής ενέργειας δεν έχει μεγάλη επίδραση το χαρακτηριστικό μήκος της δοκού λόγω της χρήσης της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδας είναι πολύ σημαντικό. Μάλιστα παρουσιάζεται αύξηση του Κρίσιμου Φορτίου. Τέλος παρουσιάζεται η αλληλεπίδραση της κατανομής της μάζας και της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής για την παρούσα δοκό.

1.Εισαγωγή

Για παρουσίαση και εφαρμογές της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής σε δοκούς μπορεί κανείς να ενημερωθεί από την εργασία (Tsepoura et al 2002).

Επιπλέον αναλύσεις προβλημάτων κάμψης και ευστάθειας παρουσιάζονται από τους Papargyri- Beskou (2003). Εκεί παρουσιάζεται η επίδραση της μικροδομής και της επιφανειακής ενέργειας στη δοκό μέσα από ανάλυση με θεωρία ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής ανώτερης τάξης.

Αυτό το ελαστικό μοντέλο τροποποιείται στην παρούσα εργασία για την ανάλυση ευστάθειας δοκού που θλίβεται με μη συντηρητική δύναμη. Συγκεκριμένα η δύναμη εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο του προβόλου και εφάπτεται συνεχώς της ελαστικής γραμμής. Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα είναι μη συντηρητικό και η στατική ανάλυση διχάλωσης (static bifurcation analysis) δεν είναι ικανή να περιγράψει την ευστάθεια της δοκού.

Έτσι πρέπει να χρησιμοποιηθεί δυναμική ανάλυση ευστάθειας.
Το παρόν πρόβλημα αλλά και άλλα παρόμοια προβλήματα παρουσιάζουν αστάθεια υπό μορφή πτερυγισμού η οποία δεν εντοπίζεται στα

συντηρητικά προβλήματα. Προβλήματα ευστάθειας κατασκευών που υποβάλλονται σε μη συντηρητικές φορτίσεις περιγράφονται στο κλασικό βιβλίο του Bolotin (1963).

Στην παρούσα εργασία η χαρακτηριστική εξίσωση της ελαστικής γραμμής και οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών δοκού η οποία θλίβεται με μη συντηρητική δύναμη θα διατυπωθούν χρησιμοποιώντας μια απλοποιημένη θεωρία ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής όπως παρουσιάζεται στην εργασία Papargyri- Beskou et al (2003).
Επίσης εμφανίζονται χαρακτηριστικά μήκη ανώτερων βαθμίδων τροπής που αντιστοιχούν στην ενέργεια όγκου και στη επιφανειακή ενέργεια .
Θα συζητηθούν επιπλέον αλληλεπιδράσεις μεταξύ της κατανομής μάζας και της μετατροπής της θεωρίας της δοκού λόγω της εισαγωγής της ελαστικότητας με βαθμίδας τροπής. Αριθμητικές εφαρμογές δείχνουν σημαντική επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους όγκου. Οι όροι της επιφανειακής ενέργειας έχουν αμελητέα επίδραση.

2.Το μαθηματικό μοντέλο.

Επαναδιατυπώνοντας για λόγους πληρότητας τις σχέσεις που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή στην ανάλυση δοκών με βαθμίδα έχουμε ότι σύμφωνα με τον Mindlin (1964) η πυκνότητα ενέργειας τροπής του υλικού καθορίζεται από τη σχέση :

$$W = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn} + G\varepsilon_{mn}\varepsilon_{nm} + g^2\left\{\frac{1}{2}\lambda\kappa_{kmm}\kappa_{knn} + G\kappa_{kmn}\kappa_{knm}\right\} + l\left\{\frac{1}{2}\lambda(\kappa_{kmm}\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{mm}\kappa_{knn}) + G(\kappa_{kmn}\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{mn}\kappa_{knm})\right\} \quad \text{(VII-1)}$$

Με τις τροπές

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) \quad \text{(VII-2)}$$

Και τις υπερτροπές

$$\kappa_{ijk} = \kappa_{ikj} = \partial_i \varepsilon_{jk} \quad . \quad \text{(VII-3)}$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας τροπής (εξ. VII-1) εκφράζεται σε πιο συμπαγή μορφή με τη σχέση

$$W = W\left(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ijk}\right) \qquad \text{(VII-4)}$$

Οι τάσεις τ_{ij} και οι υπερτάσεις μ_{ijk} είναι οι καταστατικές τάσεις και δεν πρέπει να συγχέονται με το ισοζύγιο τάσεων. Βρίσκονται μέσω των νόμων διατήρησης της ορμής και της στροφορμής.

Χαρακτηρίζονται δε από τη σχέση

$$\delta W = \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \mu_{ijk}\delta\kappa_{ijk} \qquad \text{(VII-5)}$$

Επιπλέον οι καταστατικές τάσεις και υπερτάσεις ικανοποιούν την εξίσωση

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\right) = \mathbf{0}$$

Όπου **τ** και **μ** είναι οι τανυστές των τάσεων και των υπερτάσεων.

Δεχόμενοι την υπόθεση των Bernoulli-Euler $\varepsilon_x = ky$, Timoshenko και Goodier (1970) χρησιμοποίησαν τη σχέση

$$k = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad ,$$

όπου k εκφράζει την καμπυλότητα κατά τον χ άξονα και

u(x) είναι η απόκλιση (βέλος κάμψης) της δοκού από τη θέση ισορροπίας της. Η ολική αξονική τάση σ_x που βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας στη δοκό δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_x = \tau_x - \frac{d\mu_x}{dx} \qquad \text{(VII-6)}$$

Επίσης οι τάσεις τ_x και υπερτάσεις μ_x καθορίζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση από τις εξής σχέσεις σύμφωνα με Papargyri et al (2003):

$$\begin{aligned} \tau_x &= E\varepsilon_x + lE\varepsilon'_x \\ \mu_x &= lE\varepsilon_x + g^2 E\varepsilon'_x \end{aligned} \qquad \text{(VII-7)}$$

Όπου οι σταθερές l και g^2 αντιπροσωπεύουν χαρακτηριστικά μήκη που αναφέρονται στην επιφανειακή ενέργεια και την ογκομετρική ενέργεια ελαστικής τροπής αντίστοιχα και E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young. Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης δοκού μήκους L δίνεται από την εξίσωση

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\left(u''\right)^2 + g^2\left(u'''\right)^2 + 2lu''u'''\right]dx \qquad \text{(VII-8)}$$

Για να ισχύουν οι συνθήκες ισορροπίας πρέπει

$$M = -EI\left(k - g^2\frac{d^2k}{dx^2}\right) \qquad \text{(VII-9)}$$

Όπου M είναι η καμπτική ροπή και I είναι η ροπή αδράνειας της δοκού.

$I = \int_A y^2 dA$ όπου A η διατομή της δοκού .

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις(όπως στο παράδειγμα κάμψης νωρίτερα στην εργασία) η εξίσωση (VII-9) γίνεται :

$$EI\left(u^{IV} - g^2 u^{VI}\right) + q\left(x\right) = 0 \qquad \text{(VII-10)}$$

όπου q(x) είναι το κατανεμημένο φορτίο.

Επίσης οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται ως εξής σύμφωνα με Papargyri et al (2003)

$$\left\{Q_{(L)} - EI\left[u^{(3)}(L) - g^2 u^{(5)}(L)\right]\right\}\delta u_{(L)} - \left\{Q_{(0)} - EI\left[u^{(3)}(0) - g^2 u^{(5)}(0)\right]\right\}\delta u_{(0)} = 0$$

$$\left\{M_{(L)} - EI\left[u^{(2)}(L) - g^2 u^{(4)}(L)\right]\right\}\delta u'_{(L)} - \left\{M_{(0)} - EI\left[u^{(2)}(0) - g^2 u^{(4)}(o)\right]\right\}\delta u'_{(0)} = 0$$

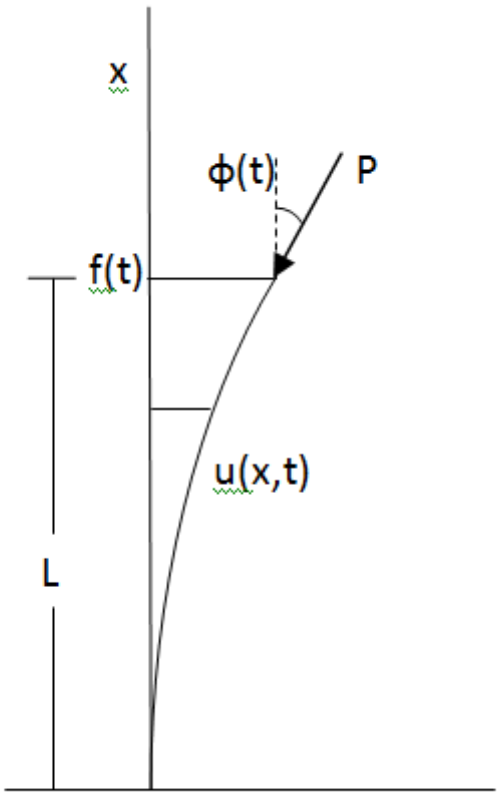
$$\left\{m_{(L)} - EI\left[lu^{(2)}(L) + g^2 u^{(3)}(L)\right]\right\}\delta u''(L) - \left\{m_{(0)} - EI\left[lu^{(2)}(0) + g^2 u^{3}(0)\right]\right\}\delta u''(0) = 0$$

(VII-11)

Όπου m είναι η υπερροπή που αντιστοιχεί στις υπερτροπές.

Ας υποθέσουμε ότι η ράβδος μας είναι πακτωμένη στο ένα άκρο ενώ στο ελεύθερο άκρο (για x=L) ασκείται θλιπτική εφαπτομενική δύναμη P .

(Σχ. VII-1)



Σχήμα VII-1. Γεωμετρία δοκού που φορτίζεται από εφαπτομενική δύναμη .

Διεγείροντας τη ράβδο θεωρούμε ότι πραγματοποιεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας της. Όπως ειπώθηκε η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο (x=0). Αν *u(x,t)* είναι μικρές μετατοπίσεις και f(t) είναι η απόσταση από τον χ άξονα του ακραίου (ελεύθερου) σημείου (x=L) και φ(t) η γωνία που σχηματίζεται τότε η ροπή για μικρές μετατοπίσεις της δοκού είναι (Bolotin 1963) :

$$M = P(f-u) - P\varphi(l-x) + L_J \qquad \text{(VII-12)}$$

Όπου L_J είναι η καμπτική ροπή λόγω αδράνειας (σύμφωνα με την αρχή του d'Alembert).

Με χρήση της εξίσωσης (VII-10) η (VII-12) γίνεται

$$EI\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - g^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right) + P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(VII-13)}$$

Όπου ρ είναι η μάζα της δοκού *ανηγμένη* στο μήκος της.

Οι συνοριακές συνθήκες είναι για το πακτωμένο άκρο σύμφωνα με τις εξισώσεις (VII-11)

$$\begin{aligned} &u(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \\ &m(0) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-14)}$$

Ενώ για το άλλο (ελεύθερο) άκρο είναι

M(L)=0 ,

Q(L)=0 ,

m(L)=0

Από τις εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών (VII-11) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} &u'''(L,t) - g^2 u^{V}(L,t) = 0 \\ &u''(L,t) - g^2 u^{IV}(L,t) = 0 \\ &lu''(L,t) + g^2 u'''(L,t) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-15)}$$

3. Κρίσιμο Φορτίο

Η εξίσωση ισορροπίας (VII-13) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από τη λύση

$$u(x,t) = U(x)e^{i\Omega t} \qquad \text{(VII-16)}$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση

$$h^2 \frac{d^6 U}{ds^6} - \frac{d^4 U}{ds^4} - p\frac{d^2 U}{ds^2} + \omega^2 U = 0 \qquad \text{(VII-17)}$$

Όπου έχουμε θέσει τις αδιαστατοποιημένες παραμέτρους

$$s = \frac{x}{L}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \omega = \Omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{EI}}, \quad h = \frac{g}{L} \qquad \text{(VII-18)}$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης (VII-17) έχει τη μορφή

$$U(s) = \sum_{i=1}^{6} A_i e^{r_i s}$$

(VII-19)

Όπου r_i είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$h^2 r^6 + r^4 - pr^2 - \omega^2 = 0 \qquad \text{(VII-20)}$$

Οι λύσεις $r_i, \quad i = 1,..,6$ εξαρτώνται από το συντελεστή φόρτισης p και τη συχνότητα ω.

Επίσης οι συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων (VII-11) για το πακτωμένο άκρο όπου s=0 δίνουν τις παρακάτω αλγεβρικές σχέσεις

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0 \\ &A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + A_4 r_4 + A_5 r_5 + A_6 r_6 = 0 \\ &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(l r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-21)}$$

Επιπλέον οι συνοριακές συνθήκες για το ελεύθερο άκρο δίνουν

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(r_i^3 - h^2 r_i^5 \right) e^{r_i} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(r_i^2 - h^2 r_i^4 \right) e^{r_i} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(l r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) e^{r_i} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-22)}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (VII-21, VII-22) είναι γραμμικό ομογενές σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους A_i. Για να έχει λύση θα πρέπει η ορίζουσα του 6X6 πίνακα που δημιουργούν οι συντελεστές των αγνώστων A_i να είναι ίση με το μηδέν. Αυτή η συνθήκη μας δίνει την εξίσωση που σχετίζει το φορτίο p με τη συχνότητα ω. Κάθε τιμή της

παραμέτρου φόρτισης p αντιστοιχεί σε δύο το πολύ τιμές του ω. Υπάρχει όμως και μια τιμή του P για την οποία οι δύο τιμές του ω ταυτίζονται. Σε αυτή τη περίπτωση η λύση (VII-16) παύει να ισχύει και έχουμε μια νέα μορφή της

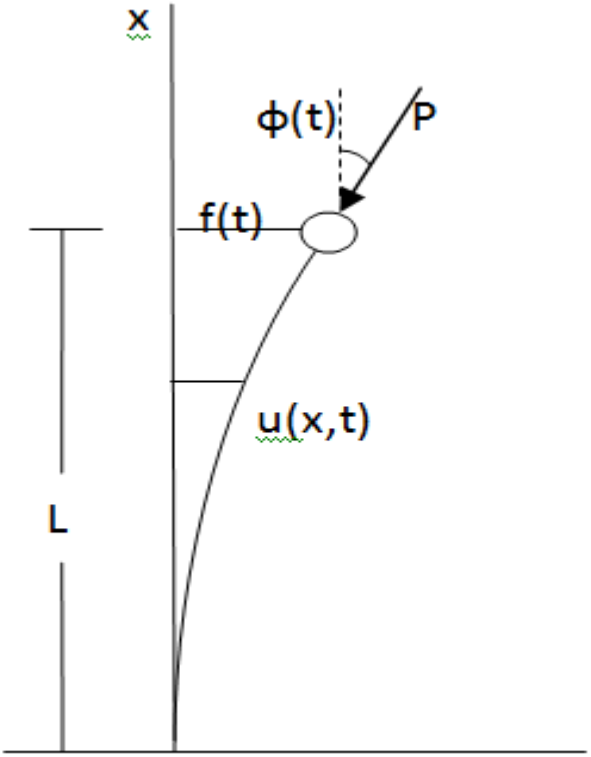
$$u(x,t) = U_1(x)e^{i\Omega t} + U_2(x)te^{i\Omega t} \qquad \text{(VII-23)}$$

Η λύση (VII-23) μας δίνει και ένα δεύτερο όρο ο οποίος αντιπροσωπεύει τον πτερυγισμό , δηλαδή ταλαντώσεις με ολοένα αυξανόμενο εύρος.

Επομένως το κρίσιμο φορτίο P είναι αυτό για το οποίο οι δύο ιδιοσυχνότητες ω συμπίπτουν. Ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου μπορεί να γίνει μόνο μέσω μεθόδων αριθμητικής επίλυσης. Η εφαρμογή που ακολουθεί δείχνει τη διαδικασία εύρεσης του κρίσιμου φορτίου.

4.Επίδραση της κατανομής της μάζας

Η κατανομή της μάζας επηρεάζει πολύ το κρίσιμο φορτίο της εφαπτομενικής δύναμης για το παρόν πρόβλημα ευστάθειας της ελαστικής δοκού με βαθμίδα τροπής. Ακολουθώντας την εργασία του Bolotin (1963) υπάρχει μάζα μ η οποία είναι συγκεντρωμένη στην ελεύθερη άκρη της δοκού και η μάζα της ίδιας της δοκού είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη και έχει πυκνότητα μάζας ρ (ανά μονάδα μήκους) όπως φαίνεται στο Σχήμα VII-3.



Σχήμα VII-3. Γεωμετρία δοκού που φορτίζεται από εφαπτομενική δύναμη με συγκεντρωμένη μάζα στο ελεύθερο άκρο.

Σε αυτή τη περίπτωση η δυναμική εξίσωση ισορροπίας της δοκού παραμένει ίδια με την εξίσωση (VII-13). Οι συνοριακές συνθήκες στο πακτωμένο άκρο παραμένουν επίσης ίδιες. Υπάρχουν όμως αλλαγές στις συνοριακές συνθήκες στο ελεύθερο άκρο. Οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών δεν είναι αυτές της εξίσωσης (VII-15) αλλά αντικαθίστανται από τις παρακάτω

$$\begin{aligned} &u'''(L,t) - g^2 u^{V}(L,t) = \frac{\mu}{EI}\frac{d^2u(L,t)}{dt^2} \\ &u''(L,t) - g^2 u^{IV}(L,t) = 0 \\ &lu''(L,t) + g^2 u'''(L,t) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-24)}$$

Έτσι οι εξισώσεις (VII-17 έως VII-21) παραμένουν ως έχουν

$$h^2\frac{d^6U}{ds^6} - \frac{d^4U}{ds^4} - p\frac{d^2U}{ds^2} + \omega^2 U = 0 \qquad \text{(VII-17)}$$

$$s = \frac{x}{L}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \omega = \Omega L^2\sqrt{\frac{\rho}{EI}}, \quad h = \frac{g}{L} \qquad \text{(VII-18)}$$

$$U(s) = \sum_{i=1}^{6} A_i e^{r_i s}$$

(VII-19)

$$h^2 r^6 + r^4 - pr^2 - \omega^2 = 0 \qquad \text{(VII-20)}$$

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0 \\ &A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + A_4 r_4 + A_5 r_5 + A_6 r_6 = 0 \\ &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(l r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-21)}$$

Υπάρχουν όμως και αλλαγές στην πρώτη από τις εξισώσεις (VII-22). Έτσι στο ελεύθερο άκρο οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(r_i^3 - h^2 r_i^5 + \gamma \omega^2 \right) e^{r_i} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(r_i^2 - h^2 r_i^4 \right) e^{r_i} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{6} A_i \left(l r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) e^{r_i} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-25)}$$

Όπου το γ είναι η κατανομή της μάζας του υλικού με

$$\gamma = \frac{\mu}{\rho L} \qquad \text{(VII-26)}$$

Η διαδικασία προσδιορισμού του κρίσιμου φορτίου της εφαπτομενικής δύναμης παραμένει η ίδια με το προηγούμενο μοντέλο το οποίο δεν είχε τη συγκεντρωμένη μάζα στο ελεύθερο άκρο της δοκού. Πράγματι το κρίσιμο φορτίο καθορίζεται με το μηδενισμό της ορίζουσας που προέρχεται από τις εξισώσεις οριακών συνθηκών (VII-21, VII-25).

Η μεταβολή του κρίσιμου φορτίου ως προς τις διάφορες αναλογίες της κατανομής μάζας δίνεται στο σχήμα VII-4 για διάφορα χαρακτηριστικά μήκη ογκομετρικής ενέργειας όπως θα δειχθεί στην αριθμητική εφαρμογή.

5.Αριθμητικές εφαρμογές – Συζήτηση

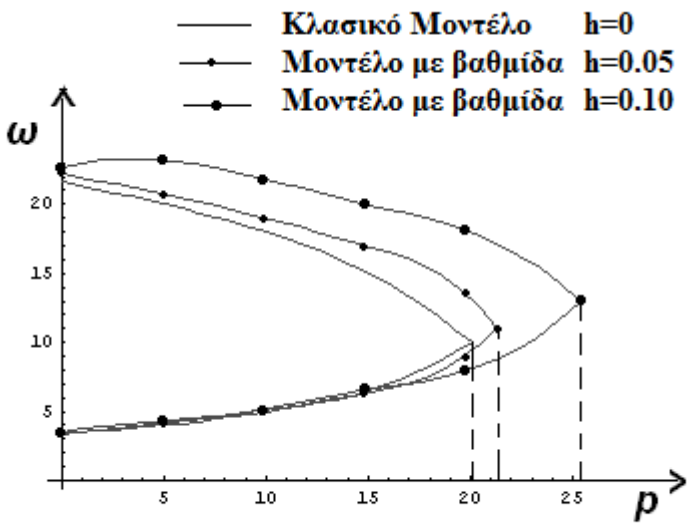
Η παρούσα εφαρμογή συμπληρώνει την προτεινόμενη διαδικασία και προσδιορίζει τις διαφορές μεταξύ της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και της προτεινόμενης θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής .

Η μεγάλη επιρροή του χαρακτηριστικού μήκους όγκου αναδεικνύεται , ενώ η εξάρτηση του κρίσιμου φορτίου από το επιφανειακό χαρακτηριστικό μήκος είναι αμελητέα.

Για την κλασική περίπτωση παράμετρος κρίσιμης φόρτισης είναι $p_c=2.031\pi^2=20.05$, *(Bolotin 1963, p.93).* Εντούτοις για το τροποποιημένο μοντέλο ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής το κρίσιμο φορτίο αυξάνεται σημαντικά. Δουλεύοντας με το Mathematica Algebra pack βρίσκουμε τις λύσεις του συστήματος (που δημιουργείται από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης) για αδιαστατοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος όγκου h=0,05 και χαρακτηριστικό μήκος επιφανειακής ενέργειας l=0,02 για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης p και της συχνότητας ω.

Σε κάθε τιμή της παραμέτρου φόρτισης p η οποία είναι μικρότερη της Κρίσιμης Φόρτισης αντιστοιχούν 2 τιμές της συχνότητας ω. Το κρίσιμο φορτίο βρίσκεται όταν οι δύο ιδιοσυχνότητες ταυτιστούν. Για μεγαλύτερες τιμές από το κρίσιμο φορτίο δεν υφίστανται πλέον μικρές ταλαντώσεις.

Στο σχήμα VII-2 φαίνονται οι διαφορές μεταξύ του κλασικού και του προτεινόμενου μοντέλου.



Σχήμα VII-2. Καμπύλη συσχέτισης ιδιοσυχνότητας και συντελεστή φορτίου. Ορισμός Κρίσιμου Φορτίου.

Για το τροποποιημένο μοντέλο βρέθηκε ότι η παράμετρος κρίσιμης φόρτισης είναι ίση με $p_c=2.157\pi^2$ και έτσι το κρίσιμο φορτίο είναι ίσο με

$$P_c = \frac{2.157\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{(VII-27)}$$

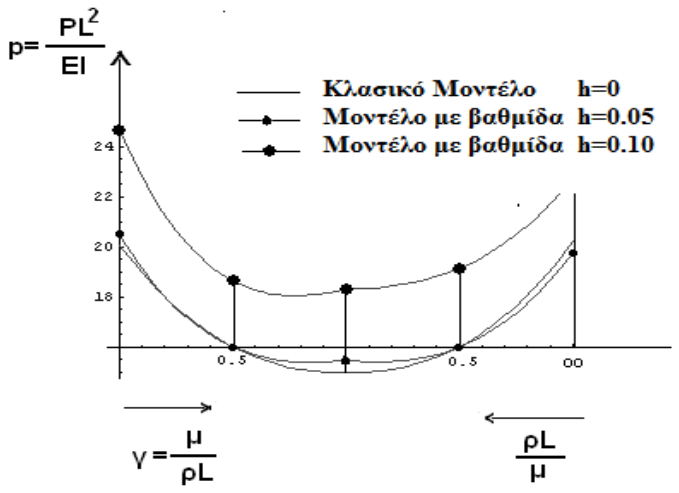
Η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί στην απόκριση του κλασικού μοντέλου ελαστικότητας ενώ οι καμπύλες με τις κουκίδες αντιστοιχούν στο

μοντέλο ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής. Ο μηδενισμός του επιφανειακού χαρακτηριστικού μήκους δεν αλλάζει πολύ τα αποτελέσματα. Έτσι η επιρροή του θεωρείται αμελητέα. Επιπλέον υπολογισμοί με μέτρο χαρακτηριστικού μήκους ενέργειας όγκου h=0,10 δείχνουν ότι η παράμετρος του κρίσιμου φορτίου είναι

$p_c=2.57\,\pi^2$.

Αυτό το μοντέλο υποδεικνύει μια πιο ασφαλή κατασκευή. Η δυναμική ευστάθεια του ίδιου μοντέλου με επιπλέον μάζα τοποθετημένη στο ελεύθερο άκρο της δοκού (όπως φαίνεται στο σχήμα VII-3) μελετήθηκε αριθμητικά για διάφορες περιπτώσεις κατανομής της μάζας.

Στο σχήμα VII-4 βλέπουμε τις μεταβολές του κρίσιμου φορτίου ως προς το δείκτη κατανομής της μάζας γ (συγκεντρωμένη μάζα προς ομοιογενώς κατανεμημένη μάζα). Θεωρούμε αδιαστατοποιημένα χαρακτηριστικά μήκη για διάφορες περιπτώσεις ελαστικών υλικών με βαθμίδα τροπής. Πράγματι τις κλασικές περιπτώσεις h=0 , h=0,05 , h=0,1 , τις έχουμε μελετήσει αριθμητικά και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα VII-4.



Σχήμα VII-4. Η μεταβολή του κρίσιμου φορτίου ως προς την κατανομή μάζας γ για διάφορες τιμές του χαρακτηριστικού μήκους ογκομετρικής ενέργειας h.

Είναι λοιπόν φανερό ότι η πιο ασφαλής δοκός είναι αυτή χωρίς συγκεντρωμένη μάζα στο ελεύθερο άκρο και αυτή που έχει το μεγαλύτερο χαρακτηριστικό μήκος όγκου. Το κρίσιμο φορτίο μειώνεται απότομα στην περίπτωση που το δείκτης κατανομής μάζας (συγκεντρωμένη προς κατανεμημένη) γ πλησιάζει το 0,5 και παραμένει χαμηλό έως ότου γ=1. Τότε το κρίσιμο φορτίο αρχίζει να αυξάνει καθώς αυξάνει ο δείκτης κατανομής γ με οριακή τιμή όταν αυτός τείνει στο άπειρο. Μάλιστα όταν η μάζα είναι συγκεντρωμένη μόνο στην άκρη της δοκού το κρίσιμο φορτίο είναι χαμηλότερο από την περίπτωση ομογενούς κατανομής του ίδιου υλικού.

6.Συμπεράσματα

Μελετήσαμε την ευστάθεια ελαστικής δοκού με βαθμίδα που θλίβεται από εφαπτομενική δύναμη (πρόβλημα του Beck) καθώς και την επιρροή του χαρακτηριστικού ενεργειακού μήκους όγκου σύμφωνα με το μοντέλο ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής. Επίσης εξετάστηκε η αλληλεπίδραση της κατανομής μάζας και της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής. Η παρούσα εργασία είναι η πρώτη που μελετά μη συντηρητικά προβλήματα μέσω θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα τροπής και ίσως να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για ανάλυση άλλων μη συντηρητικών προβλημάτων.

Έλεγχος ευστάθειας σε λυγισμό ελαστικής δοκού με βαθμίδα τροπής η οποία φορτίζεται με δύναμη που έχει σταθερό φορέα.

(Πρόβλημα του Rent)

Γενικά : Καθορίζεται το κρίσιμο φορτίο σε λυγισμό για ελαστική δοκό με βαθμίδα τροπής που φορτίζεται με δύναμη που ο φορέας της είναι σταθερός. Βρίσκεται η δυναμική εξίσωση ισορροπίας και οι οριακές συνθήκες που περιγράφουν το μοντέλο δοκού με συγκεντρωμένη μάζα στο ελεύθερο άκρο με βάση τις αρχές της απλής θεωρίας ελαστικότητας . Επίσης εξετάζεται η περίπτωση ομοιογενούς κατανομής της μάζας. Τέλος βλέπουμε την περίπτωση όπου εφαρμόζεται μια επιπλέον συντηρητική δύναμη στο ελεύθερο άκρο. Αριθμητικές εφαρμογές δείχνουν ότι παρόλο που ο όρος της επιφανειακής ενέργειας δεν έχει μεγάλη επίπτωση το χαρακτηριστικό μήκος όγκου της δοκού λόγω της χρήσης ελαστικής θεωρίας με βαθμίδα τροπής είναι πολύ σημαντικό. Μάλιστα παρουσιάζεται αύξηση του κρίσιμου φορτίου.

1. Το μαθηματικό μοντέλο

Όπως δείχθηκε στο πρόβλημα του Beck αλλά και στην εισαγωγή στην ανάλυση ελαστικών δοκών με βαθμίδα τροπής έχουμε τις σχέσεις (VI-1 έως VI-8) . Συνεχίζοντας από την εξίσωση της ολικής ενέργειας παραμόρφωσης

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\left(u''\right)^2 + g^2\left(u'''\right)^2 + 2lu''u'''\right]dx \qquad \text{(VIII-1)}$$

Έχουμε ότι για να ισχύουν οι συνθήκες ισορροπίας πρέπει να είναι

$$M = -EI\left(k - g^2\frac{d^2k}{dx^2}\right) \qquad \text{(VIII-2)}$$

Όπου M είναι η καμπτική ροπή και I είναι η ροπή αδράνειας

$I = \int_A y^2 dA$, όπου A η διατομή της δοκού.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις(όπως στο παράδειγμα κάμψης νωρίτερα στην εργασία) η εξίσωση (VIII-2) γίνεται :

$$EI\left(u^{IV} - g^2u^{VI}\right) + q\left(x\right) = 0 \qquad \text{(VIII-3)}$$

όπου q(x) είναι το κατανεμημένο φορτίο.

Επίσης οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται ως εξής σύμφωνα με Papargyri (2003),

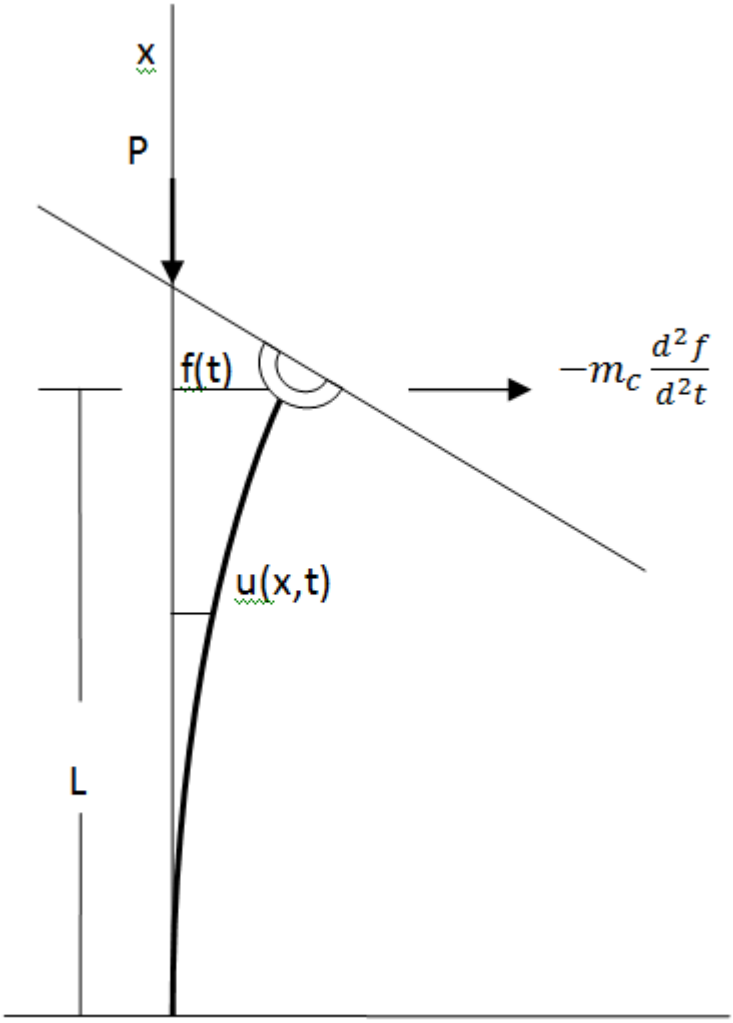
$$\left\{Q_{(L)} - EI\left[u^{(3)}(L) - g^2u^{(5)}(L)\right]\right\}\delta u_{(L)} - \left\{Q_{(0)} - EI\left[u^{(3)}(0) - g^2u^{(5)}(0)\right]\right\}\delta u_{(0)} = 0$$

$$\{M_{(L)} - EI[u^{(2)}(L) - g^2u^{(4)}(L)]\}\delta u'_{(L)} - \{M_{(0)} - EI[u^{(2)}(0) - g^2u^{(4)}(o)]\}\delta u'_{(0)} = 0$$

$$\{m_{(L)} - EI[lu^{(2)}(L) + g^2u^{(3)}(L)]\}\delta u''(L) - \{m_{(0)} - EI[lu^{(2)}(0) + g^2u^3(0)]\}\delta u''(0) = 0$$

(VIII-4)

Όπου m είναι η υπερροπή που αντιστοιχεί στις υπερτάσεις.



Σχήμα VIII-1. Η γεωμετρία της δοκού του Rent υπό την επίδραση δύναμης με σταθερή κατεύθυνση και συγκεντρωμένη μάζα.

Ας θεωρήσουμε ότι η δοκός βρίσκεται υπό φόρτιση δύναμης P στο ελεύθερο άκρο της όπως φαίνεται στο σχήμα VIII-1. Ο φορέας της δύναμης P είναι σταθερός ενώ η φόρτιση διολισθαίνει σε πλάκα που παραμένει εγκάρσια στην ελαστική γραμμή. Η δοκός εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας της. Είναι πακτωμένη στο ένα άκρο *(x=0)* , ενώ *u(x,t)* παριστά τις μικρές μετατοπίσεις της όπως στο πρόβλημα του Beck.

Επίσης $f(t)$ θεωρούμε τη μετατόπιση στο ελεύθερο άκρο ενώ m_c είναι η μάζα που συγκεντρώνεται στο ελεύθερο άκρο. Τότε η ροπή για μικρές ταλαντώσεις της δοκού είναι (Bolotin 1963 σελ.100)

$$M = Pu - m_c(L-x)\frac{d^2 f}{dt^2} \qquad \text{(VIII-5)}$$

Με χρήση της εξίσωσης (VIII-2) η εξίσωση (VIII-5) γίνεται

$$EI\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + Pu + m_c\,(L-x)\frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \qquad \text{(VIII-6)}$$

Όπου m_c είναι το μέτρο της συγκεντρωμένης μάζας. Επιπλέον οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών είναι σύμφωνα με τις εξισώσεις (VIII-4) για το πακτωμένο άκρο

$$u(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$m(0) = EI\left[lu^{(2)}(0) + g^2 u^{(3)}(0)\right] = 0 \qquad \text{(VIII-7)}$$

διότι $\delta u''(0) \neq 0$ αφού χρειάζεται ειδική κατασκευή για να ισχύει

$\delta u''(0) = 0$. Για το ελεύθερο άκρο η υπερροπή *m(L)* είναι μηδενική.

Επίσης ισχύει ότι *u(L,t)=f(t)* . Προκύπτει από τις εξισώσεις συνοριακών συνθηκών (VIII-4)

$$lu''(L,t) + g^2 u'''(L,t) = 0 \qquad \text{(VIII-8)}$$

2. Κρίσιμο φορτίο

Η εξίσωση (VIII-6) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από τη λύση

$$u(x,t) = U(x)e^{i\Omega t} \qquad f(t) = Fe^{i\Omega t} \qquad \text{(VIII-9)}$$

Έτσι από την εξίσωση ισορροπίας (VIII-6) προκύπτει η εξίσωση για την U

$$h^2\frac{d^4U}{ds^4} - \frac{d^2U}{ds^2} - pU = \omega^2 F(1-s) \qquad \text{(VIII-10)}$$

με τις παρακάτω αδιαστατοποιημένες παραμέτρους

$$s = \frac{x}{L}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \omega = \Omega L^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m_c}{EI}}, \quad h = \frac{g}{L}, \ \tilde{l} = \frac{l}{L}. \qquad \text{(VIII-11)}$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης (VIII-10) έχει τη μορφή

$$U(s) = \sum_{i=1}^{4} A_i e^{r_i s} + \frac{\omega^2 F(1-s)}{p}$$

(VIII-11)

όπου r_i είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$h^2 r^4 - r^2 - p = 0 \qquad . \qquad \text{(VIII-12)}$$

Οι ρίζες r_i , i=1,..,4, εξαρτώνται από την παράμετρο φόρτισης p και την ιδιοσυχνότητα ω. Επίσης οι συνοριακές συνθήκες (VIII-4) που αντιστοιχούν στο πακτωμένο άκρο *s=0* παράγουν τις παρακάτω αλγεβρικές σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{\omega^2 F}{p} = 0 \\
&A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + A_4 r_4 - \frac{\omega^2 F}{p} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{4} A_i \left(\tilde{l} r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(VIII-13)}
$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στο ελεύθερο άκρο δίνουν,

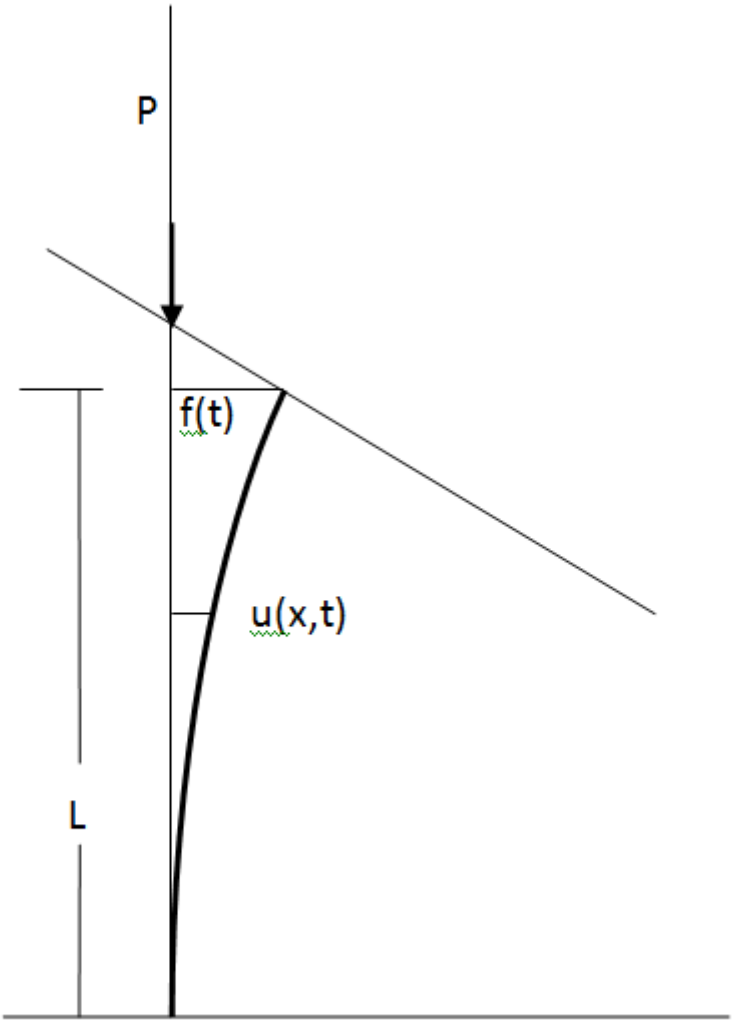
$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4} A_i e^{r_i} = F \\
&\sum_{i=1}^{4} A_i \left(\tilde{l} r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) e^{r_i} = 0
\end{aligned}
\qquad . \qquad \text{(VIII-14)}
$$

Με αντικατάσταση του F της σχέσης (VIII-14) στο σύστημα των εξισώσεων (VIII-13 a,b) οι εξισώσεις (VIII-13, VIII-14 b) σχηματίζουν ομογενές γραμμικό σύστημα με τέσσερις αγνώστους A_i και τέσσερις εξισώσεις. Για να έχει λύση το σύστημα θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των μεταβλητών να είναι μηδενική. Έτσι προκύπτει σχέση της παραμέτρου φόρτισης p με την ιδιοσυχνότητα ω. Βρίσκεται ότι κάθε τιμή της παραμέτρου p αντιστοιχεί σε μία το πολύ πραγματική ρίζα του ω. Υπάρχει όμως μια τιμή της παραμέτρου

φόρτισης p για την οποία το ω τείνει στο άπειρο και αυξάνοντας το φορτίο η συχνότητα παίρνει μιγαδικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση η απόκλιση εμπεριέχει δευτερεύοντες όρους και τείνει στο άπειρο. Επομένως αναμένεται δυναμική αστάθεια με απόκλιση. Γι' αυτό το λόγο το κρίσιμο φορτίο καθορίζεται όταν το ω πάψει να παίρνει πραγματικές τιμές. Η εύρεση του κρίσιμου φορτίου μπορεί να γίνει μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Η εφαρμογή που ακολουθεί δείχνει τη διαδικασία για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου.

3. Επιρροή της κατανομής της μάζας

Η κατανομή της μάζας επηρεάζει σημαντικά το κρίσιμο φορτίο στο παρόν πρόβλημα ευστάθειας ελαστικής δοκού με βαθμίδα τροπής υπό παράλληλο φορτίο. Η μάζα ρ ανά μέτρο της ράβδου είναι ομοιογενώς κατανεμημένη όπως φαίνεται στο σχήμα VIII-2.



Σχήμα VIII-2. Η γεωμετρία της δοκού του Rent υπό την επίδραση δύναμης με σταθερή κατεύθυνση και ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα.

Η ροπή για μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας είναι (Bolotin 1963,σελ.100)

$$M = Pu + L_J \qquad \text{(VIII-15)}$$

όπου L_j είναι η καμπτική ροπή λόγω αδράνειας σύμφωνα με την αρχή του d'Alembert. Μέσω της εξίσωσης (VIII-2) η εξίσωση (VIII-15) γίνεται

$$EI\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - g^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right) + P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(VIII-16)}$$

όπου ρ είναι η κατανομή μάζας ανά μέτρο της ράβδου. Οι συνοριακές συνθήκες για το πακτωμένο άκρο δίνουν σύμφωνα με την εξίσωση (VIII-4)

$$\begin{aligned} &u(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \\ &m(0) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VIII-17)}$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν το ελεύθερο άκρο και τα $M(L), V(L), m(l)$ που προέρχονται από τις εξισώσεις (VIII-4) γίνονται

$$\begin{aligned} &EI\left(u'''(L,t) - g^2 u^{V}(L,t)\right) = -Pu'(L,t) \\ &EI\left(u''(L,t) - g^2 u^{IV}(L,t)\right) = -Pu(L,t) \\ &\tilde{l}u''(L,t) + g^2 u'''(L,t) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VIII-18)}$$

Η εξίσωση(VIII-16) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από τη λύση

$$u(x,t) = U(x)e^{i\Omega t} \qquad \text{(VIII-19)}$$

Έτσι η εξίσωση (VIII-16) μας δίνει την εξίσωση της U

$$h^2\frac{d^6U}{ds^6} - \frac{d^4U}{ds^4} - p\frac{d^2U}{ds^2} + \omega^2 U = 0 \qquad \text{(VIII-20)}$$

με τις αδιαστατοποιημένες παραμέτρους

$$s = \frac{x}{L}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \omega = \Omega L^2\sqrt{\frac{\rho}{EI}}, \quad h = \frac{g}{L}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{L} \quad . \qquad \text{(VIII-21)}$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης (VIII-20) παίρνει τη μορφή

$$U(s) = \sum_{i=1}^{6} A_1 e^{r_i s}$$

(VIII-22)

Όπου τα r_i είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$h^2 r^6 - r^4 - pr^2 + \omega^2 = 0 \qquad \text{(VIII-23)}$$

Γίνεται φανερό ότι οι λύσεις $r_i, \quad i = 1,..,6$ εξαρτώνται από την παράμετρο φόρτισης p και τη συχνότητα ω. Επίσης οι συνοριακές συνθήκες (VIII-17) που αφορούν το πακτωμένο άκρο s=0 δίνουν τις εξής αλγεβρικές σχέσεις

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0$$
$$A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + A_4 r_4 + A_5 r_5 + A_6 r_6 = 0 \qquad \text{(VIII-24)}$$
$$\sum_{i=1}^{6} A_i \left(\tilde{l} r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) = 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες για το ελεύθερο άκρο δίνουν

$$\sum_{i=1}^{6} A_i \left(r_i^3 - h^2 r_i^5 + p r_i \right) e^{r_i} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{6} A_i \left(r_i^2 - h^2 r_i^4 + p \right) e^{r_i} = 0 \qquad \text{(VIII-25)}$$
$$\sum_{i=1}^{6} A_i \left(\tilde{l} r_i^2 + h^2 r_i^4 \right) e^{r_i} = 0$$

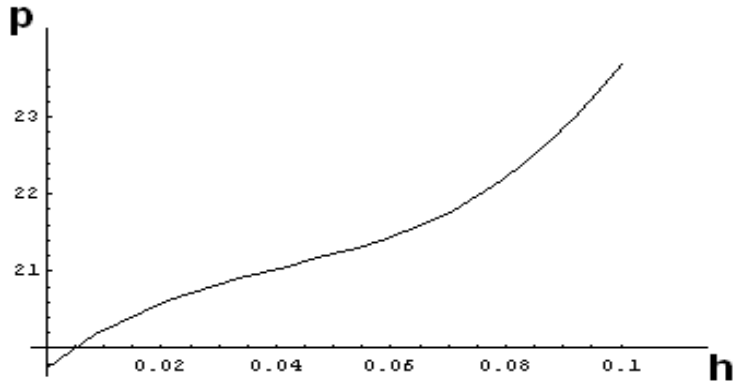
Το σύστημα των εξισώσεων (VIII-24 , VIII-25) είναι γραμμικό ομογενές σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους. Για να έχει λύση θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων να είναι ίση με το μηδέν. Αυτή η συνθήκη μας δίνει τη σχέση που συνδέει την παράμετρο φόρτισης p με την ιδιοσυχνότητα ω. Κάθε τιμή του p αντιστοιχεί σε δύο το πολύ τιμές του ω. Υπάρχει όμως μια τιμή του p για την οποία τα δύο ω ταυτίζονται. Σε αυτή την περίπτωση η λύση μας (VIII-22) παύει να ισχύει και η καινούρια της μορφή είναι

$$u(x,t) = U_1(x) e^{i\Omega t} + U_2(x) t e^{i\Omega t} \qquad \text{(VIII-26)}$$

Η λύση (VIII-26) περιέχει έναν δευτερεύοντα όρο ο οποίος εκφράζει τον πτερυγισμό που εμφανίζεται καθώς προκαλούνται ταλαντώσεις με ολοένα αυξανόμενο εύρος. Έτσι το κρίσιμο φορτίο βρίσκεται όταν οι δύο συχνότητες ω συμπίπτουν. Επίσης η εύρεση του κρίσιμου φορτίου μπορεί να γίνει μόνο μέσω αριθμητικής επίλυσης. Η αριθμητική εφαρμογή που παρουσιάζεται δείχνει τη διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου.

4. Αριθμητικά αποτελέσματα και Ανάλυση

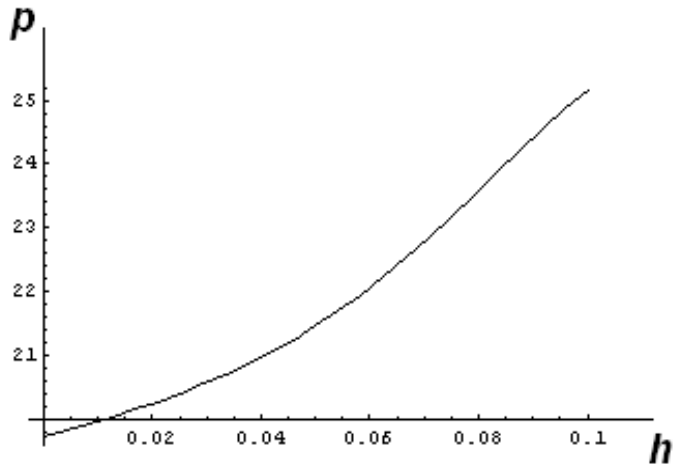
Σε αυτή την παράγραφο εφαρμόζουμε τη λύση για το πρόβλημα του Rent με συγκεντρωμένη μάζα στο ελεύθερο άκρο.



Σχήμα VIII-3. Η καμπύλη συσχέτισης της παραμέτρου κρίσιμου φορτίου p και του χαρακτηριστικού μήκους όγκου h στην περίπτωση συγκεντρωμένης μάζας.

Είναι γνωστό ότι για την κλασική περίπτωση του προβλήματος με h=0 η παράμετρος κρίσιμης φόρτισης $p = \frac{PL^2}{EI}$ είναι ίση με $2\pi^2$. Επίσης για διάφορες τιμές του h το κρίσιμο φορτίο αλλάζει ενώ αποδεικνύεται αριθμητικά με χρήση του Mathematica ότι η επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους $\tilde{l}$ είναι αμελητέα.

Αριθμητικές λύσεις βρέθηκαν μέσω του Mathematica για το πρόβλημα του Rent και στο σχήμα VIII-4 παρουσιάζεται η επίδραση του αδιαστατοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους όγκου h στο κρίσιμο φορτίο .Είναι φανερό ότι αύξηση του χαρακτηριστικού μήκους h συνεπάγεται αύξηση της παραμέτρου φόρτισης p και επομένως και του φορτίου P.



Σχήμα VIII-4. Η καμπύλη συσχέτισης της παραμέτρου κρίσιμου φορτίου p και του χαρακτηριστικού μήκους όγκου h στην περίπτωση ομοιόμορφα κατανεμημένης μάζας.

Επίσης η επίπτωση εφαρμογής της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα σε αυτά τα μη συντηρητικά προβλήματα είναι αρκετά σημαντική. Επιπλέον έρευνα στο πρόβλημα του Rent περιλαμβάνει

την αλληλεπίδραση της συγκεντρωμένης και της κατανεμημένης μάζας. Τέλος μπορεί να μελετηθεί η αλληλεπίδραση των συντηρητικών και των μη συντηρητικών φορτίων και η επίπτωσή τους στο κρίσιμο φορτίο.

Βιβλιογραφία

Aifantis, E. C., (2003), Update in a class of gradient theories, *Mechanics of Materials*, **35**: 259-280.

Altan, B.S. & Aifantis, E.C., (1997), On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.,* 8: 231-282.

Bazant,Z.P. & Cedolin L., (1991), *Stability of structures, elastic, inelastic, fracture and damage theories.* Oxford Univ. Press.

Beskou, S. P., Tsepoura, K. G. Polyzos, D., and Beskos, D. E., (2003), *Bending and stability analysis of gradient elastic beams.* International Journal of Solids and Structures, 40, 385-400

Bolotin,V.V., (1963), *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*, Pergamon Press, London.

Chase, J. G., and Yim, M., (1999), *Optimal Stabilization of Column Buckling*, Journal of Engineering Mechanics, 125, 987-993

Fleck, N. A., and Hutchinson, J. W., (1997), *Strain gradient plasticity, advances in applied mechanics,* 33, 296-358

Fosdick,R.L. & Mason, D.E.,(1996), Single phase minimizers for materials with non-local spatial dependence. Quart. Appl. Math.,**54**:161-195.

Guo, X. H., Fang, D. N., and Li, X. D., (2005), *Measurement of deformation of pure Ni foils by speckle patterninterferometry.* Mechanical in engineering 27, 21-25

Herrmann, G., (1967), Stability of equilibrium of elastic systems subjected to non-conservative forces., *Appl. Mech. Rev.,(ASME)*, **32**: 592.

Huseyin, K. ,& PlautR.H, (1974), Extremum properties of the generalized Rayleigh quotient associated with flutter instability, *Quart. Appl. Math.* **32**(2): 189-201.

Kenichi, K., Toshihiro, I., and Tadatomo, S., *Low Contact-Force Fritting Probe Card Using Buckling Microcantilevers.* (2003), pp. 1008

Kunin,L.A.,(1982), *Elastic material with microstructure I: one dimensional models.* Springer Series in Solid State Sciences, Vol.**44**, Berlin, etc.

Lam, D. C. C., Yang, F., Chong., A. C. M., Wang, J., and Tong, P., (2003), *Experiments and theory in strain gradient elasticity.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids 51, 1477-1508.

Lazopoulos, K. A., (2003), *Post-buckling problems for long elastic beams,* Acta Mechanica 164, 189-198

Ma, Q., and Clarke, D. R., (1995), *Size dependent hardness of silver single crystals,* Journal of Materials Research 10, 853-863

Mazza, Q., Abel, S., and Dual, J., (1996), *Experimental determination of mechanical properties of Ni and Ni-Fe microbars,* Microsystem Technologies 2, 197-202

McCarthy, M., Tiliakos, N., Modi, V., and Frechette, L. G., (2007), *Thermal buckling of eccentric microfabricated nickel beams as*

temperature regulated nonlinear actuators for flow control. Sensors and Actuators A: Physical 134, 37-46

McFarland, A. W., and Colton, J. S., (2005), *Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors.* Journal of Micromechanics and Microengineering 15, 1060-1067

Mindlin, R.D.,(1964), Microstructure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **10**: 51-57.

Mindlin, R. D., and Tiersten, H. F., (1962), *Effects of couple-stresses in linear elasticity.* Archive for Rational Mechanics and Analysis 11, 415-448

Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K.G., Polyzos, D. ,Beskos, D.E.,(2003), *Int. Jnl. Solids & Struct*., **40**:385-400.

Park, S. K., and Gao, X. L., (2006), *Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory.* Journal of Micromechanics and Microengineering 16, 2355-2359

Seki, T., Sakata, M., Nakagima, T., and Matsumoto, M., *Thermal buckling actuator for micro relays.* Solid State Sensors and Actuators, (1997). TRANSDUCERS '97 Chicago., 1997 International Conference on, 1997, pp. 1153-1156

Sinclair, M., 1D *and 2D scanning mirrors using thermal buckle-beam actuation.* Device and Progress Technologies for MEMS and Microelectronics II, Adelaide, Australia, 2001, pp. 307-314

Stelmashenko, N. A., Walls, M. G., Brown, L. M., and Milman, Y., V., (1993), *Microindentations on W and Mo oriented single crystals: An STM study.* Acta Metallurgica et Materialia 41, 2855-2865

Stolken, J. S., and Evans, A. G., (1998), *Microbend test method for measuring the plasticity length scale.* Acta Materialia 46, 5109-5115

Timoshenko,S.P. & Goodier, J.N., (1970), *Theory of elasticity*, 3rd ed., McGraw Hill Book Co, Inc., New York etc.

Toupin, R.A.,(1965), Theories of elasticity with couple stress, *Arch. Rat. Mech. Anal.* ,**17**: 85-112.

Toupin, R. A., (1962), *Elastic materials with couple-stresses.* Archive for Rational Mechanics and Analysis 11, 385-414

Troger, H. & Steindl , A., (1991), *Nonlinear stability and bifurcation theory.* Springer. Wien, New York etc.

Tsepoura, K.G., Papargyri-Beskou, S., Polyzos, D. ,Beskos, D.E., (2002), Static and dynamic analysis of gradient elastic bars in tension, *Arch. Appl. Mech.,* **72**: 483-497.

Yang, F., Chong, A. C., Lam, D. C. C., and Tong, P., (2002), *Couple stress based strain gradient theory for elasticity.* International Journal of Solids and Structures 39, 2731-2743

Zhao, J., Jia, J. y., Zhang, W. b., and Wang, H. x., (2006), *Nonlinear dynamic characteristics analysis and design of a MEMS inertial sensing device.* Nanotechnology and Precision Engineering 4, 314-319

ZHOU, S. J., and Li, Z. Q., (2001), *Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar.* Journal of Shandong university of technology 31, 401-407