τῆς δραστικότητος αὐτῶν. Τέλος ἐπλησίασαν πρὸς κοινὰς θέρμας καὶ οὕτως ἐξηγητέα ἴσως ἡ μεγάλη ὁμοιότης τῆς στιφρᾶς σμύριδος μετὰ μετασωματογενῶν σιδηρομεταλλευμάτων.

Σ. Α. ΠΑΠΑΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

ΣΥΜΒΟΛΗ

εἰς τὴν θεωρίαν τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μετασχηματισμοῦ ἐν τῇ Ἠλεκτροδυναμικῇ κατὰ τὴν νέαν ἀρχὴν τῶν σχετικῶν κινήσεων.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀποδεικνύω πλὴν ἄλλων, ὅτι αἱ ἐξισώσεις γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ ἐν τῇ Ἠλεκτροδυναμικῇ κατὰ τὴν νέαν ἀρχὴν τῶν σχετικῶν κινήσεων (πβλ. σχετικὴν διατριβήν μου ἐν τῷ «Ἀρχιμήδει» Φεβρουαρ. 1910) δύνανται νὰ εὑρεθῶσι καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν δονήσεων ἐλαστικοῦ μέσου.

Αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν μορίων παντὸς ἐλαστικοῦ σώματος ἄνευ τινὸς ἐξωτερικῆς δυνάμεώς εἰσιν αἱ ἑπόμεναι (πβλ. H. Poincaré, Leçons sur la théorie de l'élasticité, 1892):

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\mu\Delta\xi&=\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\mu\Delta\eta&=\varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\mu\Delta\zeta&=\partial\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\end{aligned}\right.$$

ὅπου λ καὶ μ σταθεραὶ ποσότητες, ϱ ἡ πυκνότης καὶ

$$\vartheta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

$$\Delta\xi=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2},\ldots$$

Αἱ ἐξισώσεις 1) καθορίζουσι τὰ ξ, η, ζ, ἅτινα διὰ $t=0$ εἶναι δεδομέναι συναρτήσεις τῶν x, y, z ἐν τῷ ἐσωτερικῷ τοῦ σώματος, ὡς καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῶν πρὸς τὸν χρόνον t.

Ἡ κίνησις λέγεται, ὅτι γίνεται δι' ἐπιπέδων κυμάτων παραλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν xy, ὁπόταν τὰ ξ, η, ζ ἐξαρτῶνται μόνον ἐκ τοῦ z καὶ τοῦ t. Ἐν δὲ τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=0$$

καὶ αἱ ποσότητες ϑ, Δξ, Δη, Δζ ἀνάγονται εἰς

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z},\ \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}.$$

Κατὰ δὲ ταῦτα αἱ ἐξισώσεις 1) καθίστανται:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}&=\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\\ \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}&=\varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}&=\varrho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\end{aligned}\right.$$

ὧν τὰ γενικὰ ὁλοκληρώματα εἶναι τῆς μορφῆς:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \xi&=\sigma_1(z-\omega_1 t)+\varphi_1(z+\omega_1 t)\\ \eta&=\sigma_2(z-\omega_2 t)+\varphi_2(z+\omega_2 t)\\ \zeta&=\sigma_3(z-\omega_3 t)+\varphi_3(z+\omega_3 t)\end{aligned}\right.$$

ὅπου χάριν συντομίας ἐτέθη

$$\omega_1=\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}$$

καὶ αἱ συναρτήσεις σ καὶ φ εἰσὶν *οἱαιδήποτε.*

Τεθείσθω νῦν, ὅτι ὑπάρχει καὶ δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων τ (x, y, z, t) καθοριζόμενον (πβλ. «Ἀρχιμήδης» Φεβρουαρ. 1910) ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$4)\quad \frac{\partial^2\frac{\tau}{\omega}}{\partial t^2}=\frac{1}{\omega^2}\,\frac{\partial^2\frac{\tau}{\omega}}{\partial z^2}$$

καὶ θεωρήσωμεν τὴν μερικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} \xi&=x\\ \eta&=y\\ \zeta&=\varkappa(z-\omega t)\\ \tau&=\varkappa(-\omega z+t)\end{aligned}\right.$$

ἤτοι τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἐν τῇ ὁμαλῇ μεταβατικῇ κινήσει μόνον τὸ ζ καὶ τὸ τ μεταβάλλονται συναρτήσει τοῦ z καὶ τοῦ t. Φανερόν, ὅτι ὁ γραμμικὸς μετασχηματισμὸς 5) εἶναι ὀρθογώνιος, ὅταν $\varkappa^2-\varkappa^2\omega^2=1$, ἤτοι ὅταν

$$\varkappa=\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

ὅπου ἐν τῇ πραγματικότητι ἡ ὁμαλὴ ταχύτης ω τῆς διαδόσεως τοῦ κύματος ὀφείλει νὰ ἦναι σταθερά τις θετική ή άρνητική ποσότης τοιαύτη, ώστε $|\omega| < 1$, ήτοι ελάσσων της του φωτός ταχύτητος. Ἡ ποσότης τ καλεῖται *τοπικὸς* χρόνος τοῦ κινουμένου συστήματος. Διὰ τὴν κίνησιν τῆς Γῆς ἐν σχέσει πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων εἶναι περίπου $\omega = 0{,}0001$.

Ἐκ δὲ τῶν τύπων

$$6)\quad \begin{cases} \zeta = \varkappa(z-\omega t) \\ \tau = \varkappa(-\omega z+t) \end{cases}$$

προκύπτει

$$7)\quad \begin{cases} z = \varkappa(\zeta+\omega t) \\ t = \varkappa(\omega\zeta+t) \end{cases}$$

ὅθεν διὰ $\zeta = 0$ συνάγεται

$$8)\qquad t = \varkappa\tau \quad ἢ \quad \tau = t\sqrt{1-\omega^2}$$

ὥστε ὁ τοπικὸς χρόνος τ ἐν τῷ κινουμένῳ συστήματι εἶναι διάφορος τοῦ χρόνου t τοῦ μονίμου συστήματος.

Ὁπότε πρόκειται περὶ κυμάτων ἀντιστοιχούντων πρὸς περιοδικὰς δονήσεις, αἱ τιμαὶ τῶν ξ, η, ζ δίδονται ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν (λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν μόνον τῶν πραγματικῶν μερῶν):

$$9)\quad \begin{cases} \xi = Ae^{iP} \\ \eta = Be^{iP} \\ \zeta = \Gamma e^{iP} \end{cases}$$

ὅπου $P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \nu t$ καὶ Α, Β, Γ συναρτήσεις τῶν x, y, z.

Καὶ ἡ μὲν συνθήκη τῆς ἐγκαρσίας διαδόσεως τῶν κυμάτων εἶναι

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

ἢ

$$10)\qquad A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma = 0,$$

ἥτις σημαίνει, ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς δονήσεως εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύματος καὶ εἶναι

$$\omega_1^2\,\Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

ἢ

$$-\,\omega_1^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)Ae^{iP} = -\,\nu^2 Ae^{iP}$$

ὅθεν

$$11)\qquad \nu = \omega_1\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

ἡ δὲ συνθήκη τῆς προμήκους διαδόσεως τοῦ κύματος εἶναι, ὅτι

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

ὀφείλει νὰ ἦναι τέλειον διαφορικόν, ἤτοι ὀφείλει νὰ ἦναι

$$12)\qquad \frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{\Gamma}{\gamma}$$

ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς δονήσεως εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύματος καὶ εἶναι

$$13)\qquad \nu = \omega_2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Τεθείσθω, ὅτι

$$A = A_1 + iA_2$$
$$B = B_1 + iB_2$$
$$\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$$

καὶ ὅτι οἱ συντελεσταὶ α, β, γ εἶναι πραγματικοί· τότε εἶναι

$$e^{iP} = \text{συν}\,P + i\,\text{ημ}\,P$$

καὶ (διατηρουμένων μόνον τῶν πραγματικῶν μερῶν)

$$14)\quad \begin{cases} \xi = A_1\,\text{συν}\,P - A_2\,\text{ημ}\,P \\ \eta = B_1\,\text{συν}\,P - B_2\,\text{ημ}\,P \\ \zeta = \Gamma_1\,\text{συν}\,P - \Gamma_2\,\text{ημ}\,P \end{cases}$$

Ἡ δὲ ἀπαλοιφὴ τοῦ P ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἄγει εἰς τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ξ, η, ζ:

$$15)\quad \begin{cases} (B_1\xi-A_1\eta)^2+(B_2\xi-A_2\eta)^2=(A_1B_2-A_2B_1)^2 \\ (\Gamma_1\eta-B_1\zeta)^2+(\Gamma_2\eta-B_2\zeta)^2=(B_1\Gamma_2-B_2\Gamma_1)^2 \\ (A_1\zeta-\Gamma_1\xi)^2+(A_2\zeta-\Gamma_2\xi)^2=(A_1\Gamma_2-A_2\Gamma_1)^2 \end{cases}$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι δυνατὸν καὶ οἱ συντελεσταὶ α, β, γ νὰ ἦναι μιγάδες ἀριθμοί, καὶ ἑπομένως εἶναι διὰ $P = P' + iP''$

$$16)\quad \begin{cases} \xi = A_1e^{-P''}\,\text{συν}\,P' - A_2e^{-P''}\,\text{ημ}\,P' \\ \eta = B_1e^{-P''}\,\text{συν}\,P' - B_2e^{-P''}\,\text{ημ}\,P' \\ \zeta = \Gamma_1e^{-P''}\,\text{συν}\,P' - \Gamma_2e^{-P''}\,\text{ημ}\,P' \end{cases}$$

Ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων τούτων προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις 15) ἔχουσαι τὰ δεύτερα αὐτῶν μέλη πολλαπλασιασμένα ἐπὶ $e^{-2P''}$.

Ὁ γραμμικὸς μετασχηματισμὸς 5) κέκτηται τὴν ἰδιότητα τῶν συστημάτων τῶν συντελεστῶν (groupes).

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων 6) καὶ 7) προκύπτει

$$\frac{\zeta}{\tau} = \frac{\varkappa z - \varkappa \omega t}{-\varkappa \omega z + \varkappa t}, \quad \frac{z}{t} = \frac{\varkappa \zeta + \varkappa \omega \tau}{\varkappa \omega \zeta + \varkappa \tau}$$

ἢ

$$17) \quad Z = \frac{\varkappa z_1 - \varkappa'}{\varkappa' z_1 + \varkappa}, \quad z_1 = \frac{\varkappa Z + \varkappa'}{\varkappa' Z + \varkappa}$$

ὅπου ἀντὶ $\frac{\zeta}{\tau}$, $\frac{z}{t}$, $\varkappa\omega$, ἐτέθη χάριν συντομίας Z, z_1, $\varkappa'$. Ἡ δὲ σύστασις τῶν τύπων 17) εἶναι προφανῶς ὁμοία. Οἱ συντελεσταὶ τῶν τύπων τούτων εἶναι πραγματικοὶ ἀποτελοῦντες συστήματα συνεχῆ ἢ ἀσυνεχῆ (groupes continus ou discontinus).

Τὰ ὁλοκληρώματα ἄρα

$$\zeta = \varkappa (z - \omega t)$$
$$\tau = \varkappa (-\omega z + t)$$

τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων *εἰς μερικὰς παραγώγους*:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{\tau}{\omega}}{\partial t^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \frac{\tau}{\omega}}{\partial z^2}$$

κέκτηνται τὸν χαρακτῆρα τῶν συστημάτων τῶν συντελεστῶν (groupes), ὡς καὶ τὰ ὁλοκληρώματα ὡρισμένου εἴδους *γραμμικῶν* διαφορικῶν ἐξισώσεων (fonctions fuchsiennes κατὰ Poincaré).

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΩΝ ΕΠΙ ΠΟΛΛΩΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΟΚΩΝ

1.—Ἡ γενικὴ θεωρία τῆς κάμψεως τῶν δοκῶν ἐπιτρέπει ἐν ἀνάγκῃ τὴν ἐπίλυσιν ἁπάντων τῶν ζητημάτων, ἅτινα ἀφορῶσι τὴν ἰσορροπίαν καὶ κάμψιν εὐθείας δοκοῦ στηριζομένης ἐπὶ πολλῶν ὑποστηριγμάτων.

Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι εὐθεῖαν δοκὸν τεθειμένην ἐπὶ $\nu+1$ ὑποστηριγμάτων αἰσθητῶς ἰσοϋψῶν, ἤτοι συγκειμένων ἐκ ν διαστύλων, ἐφ' ἑκάστου διαστύλου τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ βάρος ἐξ ἴσου ἐπὶ παραδείγματι διανεμημένον. Αἱ ἀντιδράσεις τῶν ὑποστηριγμάτων, αἵτινες εἶνε ἄγνωστοι, εἰσὶ τὸν ἀριθμὸν $\nu+1$. Μοιράζομεν τὴν δοκὸν εἰς τόσα τεμάχια, ὅσα διάστυλα ὑπάρχουσιν, ἔχομεν δ' οὕτω δι' ἕκαστον τούτων διαφορικὴν ἐξίσωσιν ὁρίζουσαν τὸ σχῆμα τῆς οὐδετέρας ἰνὸς μετὰ τὸν μετασχηματισμόν, ἡ δ' ὁλοκλήρωσις τῶν ν τούτων διαφορικῶν ἐξισώσεων, αἵτινες εἶνε τῆς δευτέρας τάξεως, εἰσάγει 2ν αὐθαιρέτους σταθεράς, αἵτινες δέον νὰ προσδιορισθῶσιν. Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων εἶνε ὅθεν:

Ἀντιδράσεις.......	$\nu+1$
Αὐθαίρετοι σταθεραί.	2ν
Ἐν ὅλῳ	$3\nu+1$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν $3\nu+1$ τούτων ἀγνώστων ἔχομεν $3\nu+1$ ἐξισώσεις.

Τῷ ὄντι, ἐν ἑκάστῳ διαστύλῳ ἡ οὐδετέρα ἲς ὀφείλει νὰ διέρχηται μετὰ τὸν σχηματισμὸν διὰ τῶν δύο ὑποστηριγμάτων, ἅτινα περιορίζουσι τὸ διάστυλον. Ὁ διπλοῦς οὗτος ὅρος, ὃν ἕκαστον διάστυλον ὀφείλει νὰ πληροῖ, δίδει δύο ἐξισώσεις ἀνὰ διάστυλον, ἤτοι 2ν ἐξισώσεις δι' ὅλην τὴν δοκόν. Ἐπὶ πλέον δύο διαδοχικὰ διάστυλα ἔχουσι κοινὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὑποστηρίγματος, ὅρος ἐξ οὗ προκύπτουσιν ἕτεραι $\nu-1$ ἐξισώσεις. Ἔχομεν ἀκόμη τὰς δύο ἐξισώσεις, ἃς δίδει ἡ στατικὴ καὶ αἵτινες ἐκφράζουσιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιδράσεων τῶν ὑποστηριγμάτων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐπὶ τῆς δοκοῦ βαρῶν καὶ ὅτι ὑπάρχει ἰσότης μεταξὺ τῶν ῥοπῶν τῶν δύο τούτων ὁμάδων δυνάμεων. Ἔχομεν οὕτω

Διὰ τὰ γνωστὰ σημεῖα τοῦ οὐδετέρου ἄξονος......	2ν	ἐξισώσεις
Διὰ τὴν συνεπαφὴν ἐπὶ τοῦ ἐνδιαμέσου ὑποστηρίγμ.	$\nu-1$	»
Διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.....	2	»
Ἐν ὅλῳ	$3\nu+1$	ἐξισώσεις

Τὸ πρόβλημα ὅθεν εἶνε ὡρισμένον. Ἀλλ' ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος ἄγει εἰς ὑπολογισμοὺς ἐκτάκτως κοπιώδεις. Ἐπὶ παραδείγματι διὰ δοκὸν μετὰ 8 διαστύλων, ἀριθμὸν ὅστις οὐδὲν ἔχει τὸ ἐξαιρετικόν, πρέπει νὰ λύσῃ τις 25 ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων.

Γινώσκομεν ὅμως πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ζητημάτων τούτων, ἅτινα ἀπαντῶσι συχνότατα ἐν τῇ πράξει τῶν μεγάλων ἔργων, μέθοδον κατὰ πολὺ ταχυτέραν στηριζομένην ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν ῥοπῶν, εὑρεθέντος κατὰ τὸ 1855 ὑπὸ τοῦ μηχανικοῦ Bertot, ἀναπτυχθεῖσαν δ' ὑπὸ τοῦ Clapeyron.