Ἐκ τῶν ἐξισώσεων 6) καὶ 7) προκύπτει

$$\frac{\zeta}{\tau}=\frac{\varkappa z-\varkappa\omega t}{-\varkappa\omega z+\varkappa t},\qquad \frac{z}{t}=\frac{\varkappa\zeta+\varkappa\omega\tau}{\varkappa\omega\zeta+\varkappa\tau}$$

ἢ

$$17)\qquad Z=\frac{\varkappa z_1-\varkappa'}{\varkappa' z_1+\varkappa},\qquad z_1=\frac{\varkappa Z+\varkappa'}{\varkappa' Z+\varkappa}$$

ὅπου ἀντὶ $\frac{\zeta}{\tau}$, $\frac{z}{t}$, κω, ἐτέθη χάριν συντομίας Z, z_1, κ'. Ἡ δὲ σύστασις τῶν τύπων 17) εἶναι προφανῶς ὁμοία. Οἱ συντελεσταὶ τῶν τύπων τούτων εἶναι πραγματικοὶ ἀποτελοῦντες συστήματα συνεχῆ ἢ ἀσυνεχῆ (groupes continus ou discontinus).

Τὰ ὁλοκληρώματα ἄρα

$$\zeta=\varkappa(z-\omega t)$$
$$\tau=\varkappa(-\omega z+t)$$

τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων *εἰς μερικὰς παραγώγους*:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\omega^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\frac{\tau}{\omega}}{\partial t^2}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\frac{\tau}{\omega}}{\partial z^2}$$

κέκτηνται τὸν χαρακτῆρα τῶν συστημάτων τῶν συντελεστῶν (groupes), ὡς καὶ τὰ ὁλοκληρώματα ὡρισμένου εἴδους *γραμμικῶν* διαφορικῶν ἐξισώσεων (fonctions fuchsiennes κατὰ Poincaré).

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΩΝ ΕΠΙ ΠΟΛΛΩΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΟΚΩΝ

1.—Ἡ γενικὴ θεωρία τῆς κάμψεως τῶν δοκῶν ἐπιτρέπει ἐν ἀνάγκῃ τὴν ἐπίλυσιν ἁπάντων τῶν ζητημάτων, ἅτινα ἀφορῶσι τὴν ἰσορροπίαν καὶ κάμψιν εὐθείας δοκοῦ στηριζομένης ἐπὶ πολλῶν ὑποστηριγμάτων.

Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι εὐθεῖαν δοκὸν τεθειμένην ἐπὶ ν+1 ὑποστηριγμάτων αἰσθητῶς ἰσοϋψῶν, ἤτοι συγκειμένων ἐκ ν διαστύλων, ἐφ' ἑκάστου διαστύλου τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ βάρος ἐξ ἴσου ἐπὶ παραδείγματι διανεμημένον. Αἱ ἀντιδράσεις τῶν ὑποστηριγμάτων, αἵτινες εἶνε ἄγνωστοι, εἰσὶ τὸν ἀριθμὸν ν+1. Μοιράζομεν τὴν δοκὸν εἰς τόσα τεμάχια, ὅσα διάστυλα ὑπάρχουσιν, ἔχομεν δ' οὕτω δι' ἕκαστον τούτων διαφορικὴν ἐξίσωσιν ὁρίζουσαν τὸ σχῆμα τῆς οὐδετέρας ἰνὸς μετὰ τὸν μετασχηματισμόν, ἡ δ' ὁλοκλήρωσις τῶν ν τούτων διαφορικῶν ἐξισώσεων, αἵτινες εἶνε τῆς δευτέρας τάξεως, εἰσάγει 2ν αὐθαιρέτους σταθεράς, αἵτινες δέον νὰ προσδιορισθῶσιν. Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων εἶνε ὅθεν:

Ἀντιδράσεις.....	ν+1
Αὐθαίρετοι σταθεραὶ.	2ν
Ἐν ὅλῳ	3ν+1

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν 3ν+1 τούτων ἀγνώστων ἔχομεν 3ν+1 ἐξισώσεις.

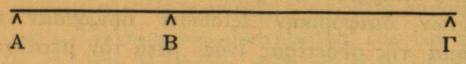
Τῷ ὄντι, ἐν ἑκάστῳ διαστύλῳ ἡ οὐδετέρα ἶς ὀφείλει νὰ διέρχηται μετὰ τὸν σχηματισμὸν διὰ τῶν δύο ὑποστηριγμάτων, ἅτινα περιορίζουσι τὸ διάστυλον. Ὁ διπλοῦς οὗτος ὅρος, ὃν ἕκαστον διάστυλον ὀφείλει νὰ πληροῖ, δίδει δύο ἐξισώσεις ἀνὰ διάστυλον, ἤτοι 2ν ἐξισώσεις δι' ὅλην τὴν δοκόν. Ἐπὶ πλέον δύο διαδοχικὰ διάστυλα ἔχουσι κοινὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὑποστηρίγματος, ὅρος ἐξ οὗ προκύπτουσιν ἕτεραι ν—1 ἐξισώσεις. Ἔχομεν ἀκόμη τὰς δύο ἐξισώσεις, ἃς δίδει ἡ στατικὴ καὶ αἵτινες ἐκφράζουσιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιδράσεων τῶν ὑποστηριγμάτων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐπὶ τῆς δοκοῦ βαρῶν καὶ ὅτι ὑπάρχει ἰσότης μεταξὺ τῶν ῥοπῶν τῶν δύο τούτων ὁμάδων δυνάμεων. Ἔχομεν οὕτω

Διὰ τὰ γνωστὰ σημεῖα τοῦ οὐδετέρου ἄξονος.....	2ν	ἐξισώσεις
Διὰ τὴν συνεπαφὴν ἐπὶ τοῦ ἐνδιαμέσου ὑποστηρίγμ.	ν—1	»
Διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων	2	»
Ἐν ὅλῳ	3ν+1	ἐξισώσεις

Τὸ πρόβλημα ὅθεν εἶνε ὡρισμένον. Ἀλλ' ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος ἄγει εἰς ὑπολογισμοὺς ἐκτάκτως κοπιώδεις. Ἐπὶ παραδείγματι διὰ δοκὸν μετὰ 8 διαστύλων, ἀριθμὸν ὅστις οὐδὲν ἔχει τὸ ἐξαιρετικόν, πρέπει νὰ λύσῃ τις 25 ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων.

Γινώσκομεν ὅμως πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ζητημάτων τούτων, ἅτινα ἀπαντῶσι συχνότατα ἐν τῇ πράξει τῶν μεγάλων ἔργων, μέθοδον κατὰ πολὺ ταχυτέραν στηριζομένην ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν ῥοπῶν, εὑρεθέντος κατὰ τὸ 1855 ὑπὸ τοῦ μηχανικοῦ Bertot, ἀναπτυχθεῖσαν δ' ὑπὸ τοῦ Clapeyron.

2. *Θεώρημα τῶν τριῶν ῥοπῶν.*— Θεωρήσωμεν (σχ. 1) τρία οἱαδήποτε διαδοχικὰ ὑποστη-



Σχῆμα 1.

ρίγματα Α, Β καὶ Γ εὐθείας δοκοῦ στηριζομένης ἐπὶ πολλῶν ἰσοϋψῶν ὑποστηριγμάτων καὶ καλέσωμεν:

l, l' τὰ ἀνοίγματα ΑΒ καὶ ΒΓ, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ πρώτου ὑποστηρίγματος καὶ τοῦ δευτέρου ἀφ' ἑνὸς καὶ μεταξὺ τοῦ δευτέρου ὑποστηρίγματος καὶ τοῦ τρίτου ἀφ' ἑτέρου,

Μ, Μ' καὶ Μ'' τὰς τιμὰς τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων Α, Β καὶ Γ,

p καὶ p' τὰ βάρη κατὰ μονάδα μήκους, τὰ ὁποῖα ὑποτίθενται ὁμοιομόρφως διανενεμημένα ἐν τοῖς διαστύλοις ΑΒ καὶ ΒΓ.

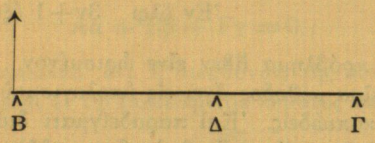
Αἱ ῥοπαὶ Μ, Μ', Μ'' συνδέονται διὰ τῆς γραμμικῆς σχέσεως:

$$lM + 2(l+l')M' + l'M'' + \frac{1}{4}pl^3 + \frac{1}{4}p'l'^3 = 0.$$

Τὸ θεώρημα τοῦτο δίδει τόσας ἐξισώσεις, ὅσαι χρειάζονται πρὸς προσδιορισμὸν ἐν ἑκάστῃ μερικῇ περιπτώσει τῶν τιμῶν τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων, ἀναλόγως τῆς ἐπὶ τῆς διανομῆς τῶν βαρῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων διαστύλων γενομένης ὑποθέσεως.

Παρατηρητέον δ' ὅτι τὰ μήκη l καὶ l' εἰσέρχονται μόνα εἰς τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων ῥοπῶν Μ, Μ' καὶ Μ''.

3.— Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου θὰ θεωρήσωμεν οἱονδήποτε ἄνοιγμα ΒΓ (σχ. 2) περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ὑποστη-



Σχῆμα 2.

ριγμάτων Β καὶ Γ. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις καὶ αἱ ἀντιδράσεις τῶν ὑποστηριγμάτων εἶνε κατακόρυφοι. Ἀφοῦ τάμωμεν τὴν δοκὸν ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος Β, θ' ἀποκαταστήσωμεν τὴν ἰσορροπίαν ἐφαρμόζοντες εἰς τὴν δοκὸν ἐν τῇ τομῇ Β ζεῦγος ἴσον πρὸς τὴν κάμπτουσαν ῥοπὴν Μ', ἥτις ὑπῆρχε πρὸ τῆς τμήσεως. Καλέσωμεν Β τὸ τμῆμα τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ὑποστηρίγματος Β, τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνοίγματος ΒΓ, τέλος δὲ παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος μ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν δεδομένων ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἵτινες ἐνεργοῦσιν ἐπὶ τῆς δοκοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου Β μέχρι σημείου τινὸς Δ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς τετμημένης αὐτοῦ x μετρουμένης ἐπὶ τοῦ οὐδετέρου ἄξονος τῆς δοκοῦ ΒΓ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ὡς ἀρχῆς· ἡ μ εἶνε οὕτω γνωστὴ συνάρτησις τῆς x.

Ἡ κατὰ τὸ σημεῖον Δ κάμπτουσα ῥοπὴ τῆς δοκοῦ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M' + \mu + Bx.$$

Ἔστω φ' ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει κατὰ τὸ Β μετὰ τοῦ ὁρίζοντος ὁ μετεσχηματισμένος οὐδέτερος ἄξων. Ἔχομεν ὁλοκληροῦντες ἅπαξ τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ ὑποθέτοντες I σταθερὸν

$$EI\left(\frac{dy}{dx} - \varepsilon\varphi\varphi'\right) = M'x + \int_0^x \mu dx + \frac{1}{2}Bx^2.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^x \mu dx$ εἶνε νέα συνάρτησις τοῦ x ἣν παριστῶντες διὰ ρ, ἔχομεν:

$$EI(y - x\varepsilon\varphi\varphi') = \frac{1}{2}M'x^2 + \int_0^x \rho dx + \frac{1}{6}Bx^3.$$

Ἐν ταῖς ἐξισώσεσι ταύταις θὰ θέσωμεν $x = l'$ καὶ θὰ καλέσωμεν N, Π καὶ Σ τὰς τιμάς, ἃς λαμβάνουσι διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς μεταβλητῆς αἱ συναρτήσεις μ, $\rho = \int_0^x \mu dx$ καὶ $\int_0^x \rho dx$. Διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν $x = l'$ ἔχομεν $y = h'$ καὶ $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M''$, Μ'' δηλοῦντος τὴν κατὰ τὸ σημεῖον Γ κάμπτουσαν ῥοπὴν καὶ h' τὸ ὕψος τοῦ σημείου τούτου ὑπεράνω τοῦ σημείου Β. Ἔστω ἔτι φ'' ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει ὁ μετεσχηματισμένος οὐδέτερος ἄξων μετὰ τοῦ ὁρίζοντος κατὰ τὸ σημεῖον Γ, οὕτω δὲ διὰ $x = l'$ ἔχομεν $\frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi\varphi''$. Προκύπτουσιν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις:

$$M'' = M' + N + Bl'$$

$$EI(\varepsilon\varphi\varphi'' - \varepsilon\varphi\varphi') = M'l' + \Pi + \frac{1}{2}Bl'^2$$

$$EIh' - EIl'\varepsilon\varphi\varphi' = \frac{1}{2}M'l'^2 + \Sigma + \frac{1}{6}Bl'^3.$$

Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὴν Β μεταξὺ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῆς τρίτης, εἶτα δὲ μεταξὺ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης, λαμβάνομεν

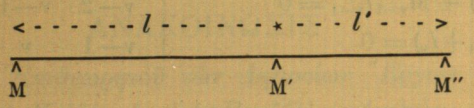
$$(1)\quad M''\frac{l'^2}{6} + EIl'^2 \varepsilon\varphi\varphi' = -\frac{1}{3}M'l'^2 + \frac{1}{6}Nl'^2 - \Sigma + EIh',$$

$$(2)\quad EI\frac{l'}{3}\varepsilon\varphi\varphi'' + \frac{3}{2}EIl'\varepsilon\varphi\varphi' = -\frac{1}{6}M'l'^2 + \frac{1}{3}\Pi l' - \Sigma + EIh'.$$

Αἱ μὲν ποσότητες N, Π καὶ Σ, αἵτινες ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, εἰσὶ γνωσταί. Τοὐναντίον ὅμως αἱ M′, M″, εφ φ′ καὶ εφ φ″ εἰσὶν ἄγνωστοι καὶ αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις δεικνύουσιν ὅτι αἱ M″ καὶ εφ φ″ *εἶνε γνωσταὶ γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν* M′ *καὶ* εφ φ′, οἱαδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ διανομὴ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

Αἱ γωνίαι φ′ καὶ φ″ εἶνε πάντοτε ἐλάχισται, δύνανται δὲ νὰ ληφθῶσιν ἀντὶ τῶν ἐφαπτομένων των.

4. — Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ λεχθέντα εἰς δύο συνεχῆ ἀνοίγματα ΑΒ καὶ ΒΓ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τριῶν διαδοχικῶν ὑποστηριγμάτων Α, Β καὶ Γ, ἐφ' ὧν



Σχῆμα 3.

αἱ κάμπτουσαι ῥοπαὶ εἶνε M, M′ καὶ M″. Καλοῦμεν φ′ τὴν μετὰ τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν τοῦ οὐδετέρου ἄξονος ἐπὶ τοῦ ἐνδιαμέσου ὑποστηρίγματος Β. Ὡς εἴδομεν, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ M διὰ γραμμικῆς συναρτήσεως τῶν M′ καὶ φ′, διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβωμεν τὰ ἀνοίγματα κατ' ἀντίστροφον τάξιν, ἡ δ' αὐτὴ γωνία φ′ ἐπανευρίσκεται μὲ ἀντίθετον σημεῖον εἰς τὰ δύο ἀνοίγματα, ἅτινα περατοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Β, διότι ταῦτα ἔχουσι κοινὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος τούτου. Μεταξὺ τῶν δύο προκυπτουσῶν ἐξισώσεων θ' ἀπαλείψωμεν τὸ φ′ καὶ ἡ τελικὴ ἐξίσωσις θὰ εἶνε γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν M, M′ καὶ M″.

Ἡ οὕτως εὑρισκομένη γραμμικὴ σχέσις εἶνε γενικὴ δι' οἱανδήποτε διανομὴν τῶν δυνάμεων καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὑπάρχουσι μικραὶ διαφοραὶ ὕψους μεταξὺ τῶν διαφόρων ὑποστηριγμάτων. Ἀλλ' ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ περιορισθῶμεν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν σχεδὸν μόνην ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ἀπαντῶσαν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ βάρος εἶνε ὁμοιομόρφως διανενεμημένον ἐν ἑκάστῳ ἀνοίγματι ἀνὰ p μονάδας βάρους κατὰ μονάδα μήκους ἐν τῷ ἀνοίγματι ΑΒ καὶ p′ ἐν τῷ ἀνοίγματι ΒΓ καὶ καθ' ἣν τὰ ὑποστηρίγματα εἶνε ἰσοϋψῆ.

Θὰ ἔχωμεν

$$\mu = -\frac{1}{2}p'x^2, \quad p = \int_0^x \mu dx = -\frac{1}{6}p'x^3$$

$$\text{καὶ} \quad \int_0^x p dx = -\frac{1}{24}p\,x^4.$$

Καὶ συνεπῶς

$$N = -\frac{1}{2}p'l'^2 \qquad \Pi = -\frac{1}{6}p'l'^3$$

$$\Sigma = -\frac{1}{24}p'l^4.$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$M'' = -2M' - \frac{6EI}{l'}\varphi' - \frac{1}{4}p'l'^2,$$

τοῦ h′ ὄντος καθ' ὑπόθεσιν ἴσου τῷ μηδενί.

Διὰ τὸ πρῶτον ἄνοιγμα δέον ν' ἀλλάξωμεν τὸ φ′ εἰς —φ′, διότι, ἵνα ἐκφράσωμεν τὸ M συναρτήσει τοῦ M′, λαμβάνομεν τὰ ὑποστηρίγματα ἐν ὀπισθοχωρητικῇ τάξει, ἀντὶ δὲ τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει μετὰ τοῦ ὁρίζοντος ἡ ἐφαπτομένη τοῦ οὐδετέρου ἄξονος ἐν τῷ ἀνοίγματι ΒΓ, δέον νὰ λάβωμεν τὴν γωνίαν, ἣν μετὰ τοῦ ὁρίζοντος σχηματίζει ἡ προέκτασις τῆς ἐφαπτομένης ταύτης καὶ ἥτις εἶνε ἴση πρὸς τὴν πρώτην μετ' ἀντιθέτου σημείου. Θὰ ἔχωμεν οὕτω τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν

$$M = -2M' + \frac{6EI}{l}\varphi' - \frac{1}{4}pl^2.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ l' καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ l καὶ προσθέσωμεν, ἡ γωνία φ′ ἀπαλείφεται καὶ ἔχομεν

$$Ml + 2M'(l + l') + M''l' + \frac{1}{4}pl^3 + \frac{1}{4}p'l'^3 = 0,$$

καὶ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν ῥοπῶν, οἷον ἐξηνέγκομεν αὐτὸ ἐν τῇ § 2, ἀπεδείχθη.

5. *Ὑπολογισμὸς τῶν καμπτουσῶν ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων ῥοπῶν, αἵτινες παράγονται ὑπὸ τῆς πλήρους ὁμοιομόρφου ἐπιφορτώσεως ἑνὸς*

μόνου διαστύλου. — Ὑποθέσωμεν ὅτι εὐθεῖά τις δοκὸς στηριζομένη ἐπὶ $\nu+1$ ἰσοϋψῶν ὑποστηριγμάτων εὑρίσκεται πεφορτωμένη ἐπὶ μόνου καὶ ὁλοκλήρου τοῦ μιοστοῦ αὐτῆς ἀνοίγματος διὰ βάρους ὁμοιομόρφως διανενεμημένου ἀνὰ p_μ μονάδας βάρους κατὰ μονάδα μήκους.

Ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν τριῶν ῥοπῶν εἰς τὰ ἀνοίγματα τῆς δοκοῦ λαμβανόμενα διαδοχικῶς ἀνὰ δύο.

Τὸ ὑπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς δοκοῦ ὑποστήριγμα, ἐφ' οὗ ἡ δοκὸς ὑποτίθεται ἁπλῶς τεθειμένη, φέρει τὸν δείκτην 0, τὸ ἑπόμενον τὸν δείκτην 1 καὶ οὕτω καθεξῆς. Αἱ ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων τούτων ἀνταποκρινόμεναι κάμπτουσαι ῥοπαὶ παρίστανται διὰ M_0, M_1 κτλ.

Τῶν δ' ἀκραίων ὑποστηριγμάτων ὄντων ἁπλῶν (ἄνευ πακτώσεως) θέλομεν ἔχῃ $M_0=0$ καὶ $M_\nu=0$.

Σχηματίζομεν οὕτω τὸν ἑπόμενον πίνακα:

Αὔξων ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων	Ἐξισώσεις	*Αὔξων ἀριθμὸς τῶν δύο ἀνοιγμάτων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν ἐξίσωσιν*
1	$2M_1(l_1+l_2)+M_2l_2=0$	1 2
2	$M_1l_2+2M_2(l_2+l_3)+M_3l_3=0$	2 3
. . .	. . . . .	. . . . .
$\mu-2$	$M_{\mu-3}l_{\mu-2}+2M_{\mu-2}(l_{\mu-2}+l_{\mu-1})+M_{\mu-1}l_{\mu-1}=0$	$\mu-2$ $\mu-1$
$\mu-1$	$M_{\mu-2}l_{\mu-1}+2M_{\mu-1}(l_{\mu-1}+l_\mu)+M_\mu l_\mu=-\frac{1}{4}p_\mu l_\mu^3$	$\mu-1$ μ
μ	$M_{\mu-1}l_\mu+2M_\mu(l_\mu+l_{\mu+1})+M_{\mu+1}l_{\mu+1}=-\frac{1}{4}p_\mu l_\mu^3$	μ $\mu+1$
$\mu+1$	$M_\mu l_{\mu+1}+2M_{\mu+1}(l_{\mu+1}+l_{\mu+2})+M_{\mu+2}l_{\mu+2}=0$	$\mu+1$ $\mu+2$
. . .	. . . . .	. . . . .
$\nu-2$	$M_{\nu-3}l_{\nu-2}+2M_{\nu-2}(l_{\nu-2}+l_{\nu-1})+M_{\nu-1}l_{\nu-1}=0$	$\nu-2$ $\nu-1$
$\nu-1$	$M_{\nu-2}l_{\nu-1}+2M_{\nu-1}(l_{\nu-1}+l_\nu)=0$	$\nu-1$ ν

6. — Τὰς ἐξισώσεις τοῦ ἀνωτέρω πίνακος θέλομεν ἐπιλύσει ὡς πρὸς τὰς καμπτούσας ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων ῥοπὰς μεταχειριζόμενοι τὴν μέθοδον τοῦ Bezout, γνωστὴν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας.

Πρὸς τοῦτο θεωρήσωμεν δύο σειράς, ἑκάστην ἐκ ν ἀριθμῶν, ἀπὸ v_1 μέχρι v_ν καὶ ἀπὸ w_1 μέχρι w_ν, ἐπαληθευούσας τὰ ἑπόμενα συστήματα συγχρόνων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐν αἷς εἰσέρχονται τὰ μήκη l τῶν διαδοχικῶν ἀνοιγμάτων:

$$(1)\quad \begin{cases} v_1=1 \\ 2v_1(l_1+l_2)+v_2l_2=0 \\ v_1l_2+2v_2(l_2+l_3)+v_3l_3=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_{\mu-2}l_{\mu-1}+2v_{\mu-1}(l_{\mu-1}+l_\mu)+v_\mu l_\mu=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_{\nu-2}l_{\nu-1}+2v_{\nu-1}(l_{\nu-1}+l_\nu)+v_\nu l_\nu=0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} w_1=1 \\ 2w_1(l_\nu+l_{\nu-1})+w\,l_{\nu-1}=0 \\ w_1l_{\nu-1}+2w_2(l_{\nu-1}+l_{\nu-2})+w_3l_{\nu-2}=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ w_{\nu-\mu}l_\mu+2w_{\nu-\mu+1}(l_\mu+l_{\mu-1})+ \\ \qquad w_{\nu-\mu+1}l_{\mu+1}=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ w_{\nu-2}l_2+2w_{\nu-1}(l_2+l_1)+2w_\nu l_1=0 \end{cases}$$

Ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἑκάστου συστήματος λύομεν ἁπάσας τὰς λοιπὰς καὶ ὑπολογίζομεν οὕτω τοὺς ὅρους τῶν δύο ἀριθμητικῶν σειρῶν.

(Ἕπεται συνέχεια.)

Γ. Β. ΓΡΑΒΑΡΗΣ

Τύποις Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ἐν Ἀθήναις.