τρίου, πλήσσει τὸν ἄνθρακα Κ, τὸ ἐλασμάτιον β τίθεται διὰ τοῦ κοχλίου cc εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὴν πλᾶκα R. Ἠλεκτρικόν τι ρεῦμα ἐκ στήλης ἧς ὁ εἷς πόλος εἶνε ἡ πλὰξ R καὶ ὁ ἕτερος τὸ πυθμένιον P, εἰς ἑκάστην ἐπαφὴν τοῦ ἐλασματίου β πρὸς τὸν κοχλίαν cc, ὁπλίζει τοὺς ἠλεκτρομαγνήτας τοῦ ἠλεκτρονόμου M, ὅστις ἀνοίγει τὸ κύκλωμα τῆς στήλης τοῦ χρονογράφου.

Βεβαιωθέντος ἤδη ὅτι τῇ βοηθείᾳ δεκτῶν ἥττον εὐαισθήτων ὡς π. χ. τὸ ἀνθρώπινον οὖς κολυμβητοῦ, τὰ ὄργανα Blake καὶ Koening, Millet Meulemester, ἀκόμη καὶ ἡ κίνησις τῶν κωπῶν λέμβου γίνεται ἀκουστή, ὡς ἐπίσης ἡ στροφὴ ἕλικος ἀτμοπλοίου κλπ. εἰς ἀπόστασιν πολλῶν μιλλίων, οὕτως ὥστε προτείνεται σήμερον ἡ παραδοχὴ τῶν ὑποβρυχίων δεκτῶν διὰ τὴν ἀνίχνευσιν τῆς παρουσίας τῶν ὑποβρυχίων πλοίων, δύναταί τις νὰ βεβαιωθῇ ὅτι ἡ πτῶσις τοῦ βλήματος πίπτοντος εἰς τὸ ὕδωρ μετὰ μεγάλης δρώσης δυνάμεως, θὰ γείνῃ αἰσθητὸν ὑπὸ τοῦ προτεινομένου δέκτου, κατὰ μείζονα λόγον ὄντος εὐαισθητοτέρου. Ἄλλως τε δύναταί τις νὰ προκαλέσῃ τὴν ἔκρηξιν τοῦ βλήματος ὅπερ ἐπὶ τούτῳ δέον νὰ ᾖ ἐφαπτόμενον διὰ πυροσωλῆνος εὐαισθήτου ὡς π. χ. ὁ πυροσωλὴν Desmarets. Δύναταί τις ἐπίσης νὰ μεταχειρισθῇ εἰδικῆς κατασκευῆς βλήματα ἔχοντα κοιλότητά τινα εἰς τὴν κεφαλήν, πλήρη χλωρικοῦ ἀσβεστίου ὅπερ ἀναφλέγεται ἅμα τῇ ἐπαφῇ του πρὸς τὸ ὕδωρ μεταδίδον τὸ πῦρ εἰς τὸν πυροσωλῆνα. Ἐπιβράδυνσίς τις κατὰ τὴν ἀνάφλεξιν οὐδεμίαν ἐπιρροὴν ἔχει ἐπὶ τοῦ x, τῶν χρόνων t_x καὶ t_y εἰσερχομένων μόνον διὰ τῆς διαφορᾶς των. Οἱ δέκται δέον νὰ βυθίζωνται εἰς βάθος 8 μ. συμφώνως πρὸς τὰ πειράματα τοῦ Millet.

Ὁ σταθμὸς ἐγκαθιδρύεται ἐπὶ τῆς ἀκτῆς ἢ ἔνδον, ὁ δὲ βοηθητικὸς σταθμὸς εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ 4000 μ. περίπου συνδεδεμένος μετ' αὐτοῦ διὰ ἠλεκτρικῆς συγκοινωνίας ἀπ' εὐθείας. Οἱ δέκται δὲν βυθίζονται εἰμὴ μόνον μετὰ τὴν ἔξοδον τοῦ βλήματος ἐκ τοῦ πυροβόλου καὶ πρὸ τῆς πτώσεώς του ἐν τῷ ὕδατι, ὅπως μὴ ἐπηρεάζηται ἡ λειτουργία των ἐκ τῆς βολῆς. Τὸ ἠχητικὸν κῦμα φθάνον εἰς τὸν ἕνα δέκτην ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονόμου καὶ διακόπτει τὸ ρεῦμα τοῦ χρονομέτρου, ὅταν δὲ φθάσῃ καὶ εἰς τὸν ἕτερον διακόπτει τὸ ρεῦμα τῶν σημειωτῶν, λαμβανομένης οὕτω τῆς διαφορᾶς τῶν χρόνων $t_x - t_y$. Εἶνε φανερὸν ὅτι ἡ χρῆσις πλειόνων σταθμῶν καὶ χρονογράφων παρέχει πλείονας τιμὰς τῶν x, ἐξ ὧν λαμβάνεται ἡ μέση.

Ἡ μέθοδος αὕτη παρέχει τὸ πλεονέκτημα ὅτι ἀπαλλάσσει τῆς μεταφορᾶς τῶν πυροβόλων εἰς πολύγωνον ξηρᾶς, ἐπιτρέπει δὲ τὴν σύνταξιν τῶν πινάκων βολῆς τῶν πυροβόλων βαλλόντων ἀπὸ τῶν μονίμων αὐτῶν ἐγκαταστάσεων ἔνδον, τῶν οὕτω συντασσομένων πινάκων θεωρουμένων ἀκριβεστέρων. Τὸ αὐτὸ ἐπιζητεῖται διὰ τῶν μεθόδων Neesen-Krupp καὶ Pulfrich στηριζομένων εἰς τὴν στερεοματομετρίαν (Mitteil. aus dem Geb. des Leewens XII 1910).

Π. ΡΕΔΙΑΔΗΣ
ὑποπλοίαρχος τοῦ Β. Ν.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΩΝ ΕΠΙ ΠΟΛΛΩΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΟΚΩΝ

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου.)

Θεωρήσωμεν δύο νέας σειρὰς ἐκ ν ἀριθμῶν, β_0 μέχρι $\beta_{\nu-1}$ καὶ γ_0 μέχρι $\gamma_{\nu-1}$, αἵτινες συνάγονται ἐκ τῶν πρώτων διὰ τῶν σχέσεων:

$$\beta_0=0,\quad \beta_1=\frac{-V_1}{V_2}\ldots\ \beta_{\mu-1}=\frac{-V_{\mu-1}}{V_\mu}\ldots\ \beta_{\nu-1}=\frac{-V_{\nu-1}}{V_\nu}$$

$$\gamma_0=0,\quad \gamma_1=\frac{-W_1}{W_2}\ldots\ \gamma_{\nu-\mu}=\frac{-W_{\nu-\mu}}{W_{\nu-\mu+1}}\ldots\ \gamma_{\nu-1}=\frac{-W_{\nu-1}}{W_\nu}$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν V καὶ W τὰς ἐκφράσεις τὰς ληφθείσας ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν σχέσεις ἐπιτρεπούσας τὸν ἄμεσον ὑπολογισμὸν τῶν ἀριθμῶν β καὶ γ.

$$(3)\quad \begin{cases} \beta_0=0 \\ \beta_1=\dfrac{1}{2+2\dfrac{l_1}{l_2}} \\ \beta_2=\dfrac{1}{2+\dfrac{l_2}{l_3}(2-\beta_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{\mu-1}=\dfrac{1}{2+\dfrac{l_{\mu-1}}{l_\mu}(2-\beta_{\mu-2})} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{\nu-1}=\dfrac{1}{2+\dfrac{l_{\nu-1}}{l_\nu}(2-\beta_{\nu-2})} \end{cases}$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\gamma_0 = 0\\
&\gamma_1 = \frac{1}{2+2\dfrac{l_\nu}{l_{\nu-1}}}\\
&\gamma_2 = \frac{1}{2+\dfrac{l_{\nu-1}}{l_{\nu-2}}(2-\gamma_1)}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\gamma_{\nu-\mu} = \frac{1}{2+\dfrac{l_{\mu+1}}{l_\mu}(2-\gamma_{\nu-\mu-1})}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\gamma_{\nu-1} = \frac{1}{2+\dfrac{l_2}{l_1}(2-\gamma_{\nu-2})}
\end{aligned}
\right.
$$

Αἱ μὲν δύο σειραὶ ν καὶ w, ὧν ἑκάστη ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, ἀποτελοῦνται ἐξ ὅρων ἐναλλὰξ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, τοῦ σημείου + ἀνταποκρινομένου εἰς τοὺς περιττοὺς δείκτας. Ἐν ἑκάστῃ σειρᾷ αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν αὐξάνουσι ταχύτερον τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου 1, 2, 2^2, ..., $2^{\nu-1}$.

Αἱ δὲ δύο σειραὶ β καὶ γ, ὧν ἑκάστη ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὸ 0, ἀποτελοῦνται ἐξ ὅρων ὅλων θετικῶν καὶ περιλαμβανομένων μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$.

Παραδεχόμεθα ὅτι οἱ ὅροι v_μ καὶ $w_{\nu-\mu}$ ἀνταποκρίνονται εἰς τὸ ὑποστήριγμα μ· εἶνε τὸ ν καὶ τὸ w τὰ σχετικὰ πρὸς τὸ ὑποστήριγμα τοῦτο.

Παραδεχόμεθα ἐπίσης ὅτι οἱ ὅροι

$$\beta_{\mu-1} = -\frac{v_{\mu-1}}{v_\mu} \quad \text{καὶ} \quad \gamma_{\nu-\mu} = -\frac{w_{\nu-\mu}}{w_{\nu-\mu+1}}$$

ἀνταποκρίνονται εἰς τὸ ἄνοιγμα μ κείμενον μεταξὺ τῶν ὑποστηριγμάτων μ—1 καὶ μ: εἶνε τὸ β καὶ τὸ γ τὰ σχετικὰ πρὸς τὸ διάστυλον τοῦτο.

7. — Συγκρίνοντες ἤδη τὰς ἐξισώσεις τοῦ πίνακος τῆς παραγράφου 5 πρὸς τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τῆς παραγράφου 6 βλέπομεν ὅτι ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς μ—2 πρώτας ἐξισώσεις τοῦ πίνακος ἐκείνου τὸ γράμμα M_1 διὰ v_1, τὸ M_2 διὰ v_2 .... τὸ $M_{\mu-2}$ διὰ $v_{\mu-2}$ καὶ τὸ $M_{\mu-1}$ διὰ $v_{\mu-1}$ ἐπαναπίπτομεν ἐν ταὐτότητι εἰς τὰς μ—2 πρώτας σχέσεις τῆς σειρᾶς (1). Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὰς ν—μ—1 τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ αὐτοῦ πίνακος (ἀπὸ μ+1 μέχρι ν—1) τὸ γράμμα M_μ διὰ $w_{\nu-\mu}$, $M_{\mu+1}$ διὰ $w_{\nu-\mu+1}$ .... $M_{\nu-2}$ διὰ w_2 καὶ $M_{\nu-1}$ διὰ w_1 ἐπαναπίπτομεν ἐν ταὐτότητι εἰς τὰς ν—μ—1 πρώτας σχέσεις τῆς σειρᾶς (2).

Ἐὰν ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ w, β καὶ γ ὑπελογίσθησαν ἐκ τῶν προτέρων, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$M_1 = v_1 M_1$$

$$M_2 = v_2 M_1 = \frac{v_2}{v_1} M_1 = -\frac{M_1}{\beta_1}$$

$$M_3 = v_3 M_1 = \frac{v_3}{v_2} M_2 = -\frac{M_2}{\beta_2}$$

. . . . . .

$$
(\alpha)\quad \left\{
\begin{aligned}
M_{\mu-2} &= v_{\mu-2} M_1 = \frac{v_{\mu-2}}{v_{\mu-3}} M_{\mu-1} = -\frac{M_{\mu-3}}{\beta}\\
M_{\mu-1} &= v_{\mu-1} M_1 = \frac{v_{\mu-1}}{v_{\mu-3}} M_{\mu-2} = -\frac{M_{\mu-2}}{\beta_{\mu-2}}
\end{aligned}
\right.
$$

. . . . . .

$$
(\beta)\quad \left\{
\begin{aligned}
M_\mu &= w_{\nu-\mu} M_{\nu-1} = \frac{w_{\nu-\mu}}{w_{\nu-\mu-1}} M_{\mu+1} = -\frac{M_{\mu+1}}{\gamma_{\nu-\mu-1}}\\
M_{\mu+1} &= w_{\nu-\mu-1} M_{\nu-1} = \frac{w_{\nu-\mu-1}}{w_{\nu-\mu-2}} M_{\mu+2} = -\frac{M_{\mu+2}}{\gamma_{\nu-\mu-2}}
\end{aligned}
\right.
$$

. . . . . .

$$M_{\nu-3} = w_3 M_{\nu-1} = \frac{w_3}{w_2} M_{\nu-2} = -\frac{M_{\nu-2}}{\gamma_2}$$

$$M_{\nu-2} = w_2 M_{\nu-1} = \frac{w_2}{w_1} M_{\nu-1} = -\frac{M_{\nu-1}}{\gamma_1}$$

$$M_{\nu-1} = w_1 M_{\nu-1}.$$

Ἐὰν ἤδη ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν $M_{\mu-2}$ καὶ $M_{\mu+1}$ τὰς ἐκφράσεις των συναρτήσει τῶν $M_{\mu-1}$ καὶ M_μ, αἵτινες εἶνε $-\beta_{\mu-2} M_{\mu-1}$ καὶ $-\gamma_{\nu-\mu-1} M_\mu$ εἰς τὰς ἐξισώσεις ὑπὸ αὔξοντα ἀριθμὸν μ—1 καὶ μ τοῦ πίνακος, αἱ ἐξισώσεις αὗται γίνονται:

$$(\mu-1)\quad M_{\mu-1}(-\beta_{\mu-2} l_{\mu-1} + 2l_{\mu-1} + 2l_\mu) + M_\mu l_\mu = -\frac{1}{4} p_\mu l_\mu^3$$

$$(\mu)\quad M_{\mu-1} l_\mu + M_\mu(2l_\mu + 2l_{\mu+1} - \gamma_{\nu-\mu-1} l_{\mu+1}) = -\frac{1}{4} p_\mu l_\mu^3$$

Ἀλλὰ θεωροῦντες τὰς σειρὰς (3) καὶ (4) παρατηροῦμεν ὅτι

$$-\beta_{\mu-2}\,l_{\mu-1}+2l_{\mu-1}+2l_{\mu}=\frac{l_{\mu}}{\beta_{\mu-1}}$$

$$2l_{\mu}+2l_{\mu+1}-\gamma_{\nu-\mu-1}\,l_{\mu+1}=\frac{l_{\mu}}{\gamma_{\nu-\mu}}.$$

Τοῦτο ἐπιτρέπει ἡμῖν ν' ἁπλοποιήσωμεν τὰς ἐξισώσεις (μ—1) καὶ (μ) γράφοντες αὐτὰς ὑπὸ τὴν ὁριστικὴν μορφὴν

$$M_{\mu-1}\frac{l_{\mu}}{\beta_{\mu-1}}+M_{\mu}\,l_{\mu}=-\frac{1}{4}\,p_{\mu}\,l_{\mu}^{4}$$

$$M_{\mu-1}\,l_{\mu}+M_{\mu}\frac{l_{\mu}}{\gamma_{\nu-\mu}}=-\frac{1}{4}\,p_{\mu}\,l_{\mu}^{3}.$$

Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν:

$$M_{\mu-1}=-\frac{1}{4}\,p_{\mu}\,l_{\mu}^{2}\,\frac{\beta_{\mu-1}(1-\gamma_{\nu-\mu})}{1-\beta_{\mu-1}\gamma_{\nu-\mu}}$$

$$M_{\mu}=-\frac{1}{4}\,p_{\mu}\,l_{\mu}^{2}\,\frac{\gamma_{\nu-\mu}(1-\beta_{\mu-1})}{1-\beta_{\mu-1}\gamma_{\nu-\mu}}.$$

Δυνάμεθα ὅμως ν' ἁπλοποιήσωμεν τοὺς τύπους τούτους παραλείποντες τοὺς δείκτας, δεδομένου ὄντος ὅτι $\beta_{\mu-1}$, $\gamma_{\nu-\mu}$, p_{μ} καὶ l_{μ} εἶνε τὰ β, γ, p καὶ l τὰ σχετικὰ πρὸς τὸ θεωρούμενον διάστυλον μ, περίστασις ἥτις καθιστᾷ πᾶσαν πλάνην ἀδύνατον.

$$M_{\mu-1}=-\frac{1}{4}\,p\,l^{2}\,\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma}$$

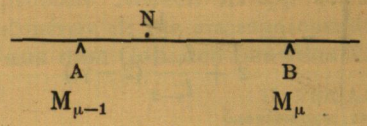
$$M_{\mu}=-\frac{1}{4}\,p\,l^{2}\,\frac{\gamma(1-\beta)}{1-\beta\gamma}.$$

Τῶν δὲ β καὶ γ ὄντων πάντοτε θετικῶν καὶ περιλαμβανομένων μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ῥοπαὶ $M_{\mu-1}$ καὶ M_{μ} ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων τοῦ πεφορτωμένου διαστύλου εἶνε ἀρνητικαί, οἱαδήποτε καὶ ἂν ὦσι τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Προσδιορίσαντες δ' οὕτω τὰς δύο ῥοπὰς τῶν ὑποστηριγμάτων $M_{\mu-1}$ καὶ M_{μ}, εὐκόλως ἐκ τούτων συνάγομεν ἁπάσας τὰς ἄλλας τῇ βοηθείᾳ τῶν ἑπομένων σχέσεων:

$M_{\mu-2}=-\beta_{\mu-2}M_{\mu-1}$	$M_{\mu+1}=-\gamma_{\nu-\mu-1}M_{\mu}$
$M_{\mu-3}=-\beta_{\mu-3}M_{\mu-2}$	$M_{\mu+2}=-\gamma_{\nu-\mu-2}M_{\mu+1}$
. . . . .	. . . . .
$M_{1}=-\beta_{1}M_{2}$	$M_{\nu-1}=-\gamma_{1}M_{\nu-2}$

8. *Κάμπτουσαι ῥοπαὶ παραγόμεναι ἐν τοῖς διαστύλοις ὑπὸ βάρους ὁμοιομόρφως διανενεμημένου ἐφ' ἑνὸς μόνου διαστύλου* μ. — Θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ πεφορτωμένον διάστυλον μ, διὰ τὸ ὁποῖον ὑπελογίσαμεν προηγουμένως τὰς ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων αὐτοῦ καμπτούσας ῥοπάς. Διὰ τομήν τινα N (σχ. 4)



Σχῆμα 4.

τῆς δοκοῦ ἀγομένην ἐν τῷ διαστύλῳ καὶ ἀπέχουσαν ἀπόστασιν x τοῦ ὑποστηρίγματος A ἡ κάμπτουσα ῥοπὴ εἶνε:

$$M=M_{\mu-1}+Ax-\frac{1}{2}\,px^{2},$$

A ὄντος τοῦ τμήματος τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ὑποστηρίγματος A τοῦ ἐφηρμοσμένου ἐπὶ τοῦ διαστύλου AB. Ἐὰν l εἶνε τὸ μῆκος τοῦ διαστύλου διὰ $x=l$ τὸ M γίνεται M_{μ} καὶ ἔχομεν

$$M_{\mu}=M_{\mu-1}+Al-\frac{1}{2}\,pl^{2}.$$

Ἀπαλείφοντες δὲ τὸ A μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν

$$Ml-M_{\mu}x=M_{\mu-1}(l-x)+\frac{1}{2}\,plx(l-x)$$

καὶ

$$M=\frac{M_{\mu-1}(l-x)+M_{\mu}x}{l}+\frac{1}{2}\,px(l-x). \qquad (1)$$

Δι' ἓν τῶν μὴ πεφορτωμένων διαστύλων, τὸ k, εὑρίσκομεν ὁμοίως, τοῦ p ἐπ' αὐτοῦ ὄντος 0,

$$M=\frac{M_{k-1}(l-x)+M_{k}x}{l} \qquad (2)$$

9. — Διερευνήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν (2). Αὕτη παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὰ ἄκρα τῶν τεταγμένων τῶν παριστωσῶν τὰς ῥοπὰς ὑποστηρίγματος M_{k-1} καὶ M_{k}. Ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὸν οὐδέτερον ἄξονα τῆς δοκοῦ εἰς σημεῖον F ἀπέχον τοῦ ὑποστηρίγματος k—1, ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ πεφορτωμένον διάστυλον κεῖται δεξιᾷ τοῦ διαστύλου k, ἀπόστασιν

$$\alpha=\frac{M_{k-1}\,xl}{M_{k-1}-M_{k}}=\frac{\beta}{1+\beta}\,l.$$

Τοῦ σημείου F ἡ θέσις εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ συμβόλου τοῦ M_{k} καὶ συνεπῶς τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ τοῦ πεφορτωμένου διαστύλου, ὡς ἐπίσης καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ p, ἐφ' ὅσον δὲ τὸ p μεταβάλλεται, ἡ παριστῶσα τὴν κάμπτουσαν

ῥοπὴν εὐθεῖα ἐν τῷ διαστύλῳ k στρέφεται περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον F.

Ἡ ῥοπὴ M_k εἶνε ἀρνητικὴ καὶ ἡ M_{k-1} θετικὴ ὅταν ὁ αὔξων ἀριθμὸς μ τοῦ πεφορτωμένου διαστύλου ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν k κατὰ περιττὸν ἀριθμόν:

$$M = k + 2\beta + 1.$$

Τὰ σύμβολα ὅμως ἀντιστρέφονται, ἐὰν ἡ διαφορὰ αὕτη εἶνε ἄρτιος ἀρεθμός:

$$\mu = k + 2\beta.$$

Τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο σημεῖον F, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη $\alpha = \frac{\beta}{1+\beta} l$, καλεῖται *πρώτη ἢ ἀριστερὰ ἑστία* τοῦ διαστύλου.

Τοῦ δ' ἀριθμητικοῦ συντελεστοῦ β περιλαμβανομένου πάντοτε μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$, ἡ τετμημένη α εἶνε κατ' ἀνάγκην μικροτέρα τοῦ $\frac{l}{3}$.

Ἐὰν δὲ τὸ πεφορτωμένον διάστυλον εἶνε ἀριστερᾷ τοῦ ὑποστηρίγματος k—1, ἔχομεν

$$M_k = -\gamma M_{k-1},$$

καὶ ἡ τὸ M παριστῶσα γραμμὴ εἶνε εὐθεῖα διερχομένη δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου F', *δευτέρας ἢ δεξιᾶς ἑστίας* τοῦ διαστύλου, ἥτις ἀπολαύει τῶν αὐτῶν ἰδιοτήτων, τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἑστία F, ὅταν τὸ πεφορτωμένον διάστυλον κεῖται ἀριστερᾷ τοῦ ὑποστηρίγματος k—1.

Ἡ τετμημένη τῆς ἑστίας ταύτης εἶνε

$$\alpha' = l\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right),$$

εἶνε δὲ πάντοτε μεγαλειτέρα τοῦ $\frac{2}{3} l$.

Τὸ M_{k-1} εἶνε ἀρνητικὸν καὶ τὸ M_k θετικόν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τοῦ πεφορτωμένου διαστύλου εἶνε κατώτερος τοῦ k κατὰ περιττὸν ἀριθμὸν

$$\mu = k - 2\beta - 1.$$

Τὰ δὲ σύμβολα ἀντιστρέφονται, ὅταν ἡ διαφορὰ αὕτη εἶνε ἄρτιος ἀριθμὸς

$$\mu = k - 2\beta.$$

Τὸ σχ. 5 (1) περιλαμβάνει τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα ἀποτελέσματα καὶ δεικνύει τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας, ἥτις παριστᾷ τὰς καμπτούσας ῥοπὰς ἐν ταῖς διαφόροις ὑποθέσεσιν, ἃς δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ὡς πρὸς τὴν τάξιν τοῦ πεφορτωμένου διαστύλου.

Ἐν τῷ πρώτῳ διαστύλῳ ἔχομεν $\beta_0 = 0$, ὅθεν $\alpha_1 = 0$. Ἡ πρώτη ἑστία συμπίπτει ἑπομένως μετὰ τοῦ ὑποστηρίγματος 0. Ἡ τετμημένη ὅμως τῆς δευτέρας ἑστίας α_1' ἔχει τὴν συνήθη ἔκφρασιν:

$$\alpha_1' = l_1\left(1 - \frac{\gamma_{\nu-1}}{1+\gamma_{\nu-1}}\right).$$

Ὁμοίως εἰς τὸ τελευταῖον διάστυλον ἡ τετμημένη τῆς πρώτης ἑστίας εἶνε

$$\alpha_\nu = l_\nu \frac{\beta_{\nu-1}}{1+\beta_{\nu-1}}.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ $\gamma_0 = 0$, ἔχομεν

$$\alpha_\nu' = l_\nu,$$

ἡ δὲ δευτέρα ἑστία συμπίπτει μετὰ τοῦ ἐσχάτου ὑποστηρίγματος.

10.—Ἐὰν ὑπελογίσθησαν προηγουμένως αἱ τετμημέναι α καὶ α' τῶν ἑστιῶν ἑκάστου διαστύλου, αἵτινες ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν ἀνοιγμάτων $l_1, l_2, \ldots\ldots$ τῶν διαδοχικῶν διαστύλων τῆς δοκοῦ καὶ ἐὰν ἀκολούθως προσδιωρίσθησαν αἱ κάμπτουσαι ῥοπαὶ ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων τοῦ πεφορτωμένου διαστύλου μ, εἶνε δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι γραφικῶς καὶ ἄνευ νέου ὑπολογισμοῦ αἱ ῥοπαὶ ἐφ' ὅλων τῶν ἄλλων ὑποστηριγμάτων, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ παριστῶσαι τὰ M τῶν μὴ πεφορτωμένων διαστύλων, χαραττομένων ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν ὑποστηριγμάτων $M_{\mu-1}$ καὶ M_μ δύο τεθλασμένων γραμμῶν, περατουμένων εἰς τὰ ἔσχατα ὑποστηρίγματα, ἐχουσῶν τὰς κορυφάς των εἰς τὸ ὕψος τῶν ἐνδιαμέσων ὑποστηριγμάτων καὶ διερχομένων διὰ τῶν πρώτων ἑστιῶν τῶν διαστύλων, ὧν ὁ αὔξων ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ μ, καὶ διὰ τῶν δευτέρων ἑστιῶν τῶν διαστύλων, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶνε μείζων τοῦ μ. Τὸ σχ. 6 δεικνύει τὴν κατασκευὴν ταύτην.

11.—Ἐπιστρέφοντες ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη παριστᾷ παραβολὴν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Γ', ὧν αἱ τετμημέναι c καὶ c' εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως M = 0. Εὐκόλως δὲ ἀναγνωρίζομεν, γινώσκοντες ὅτι τὰ β καὶ γ περιλαμβάνονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$, ὅτι τὰ c καὶ c' εἶνε πάντοτε πραγματικὰ καὶ θετικὰ καὶ ὅτι ἔχομεν κατ' ἀνάγκην

$$c < \frac{3}{4}\alpha \quad \text{καὶ} \quad l - c' > \frac{3(l-\alpha')}{4}$$

ἢ $\mu - 1$, $\Gamma < 3\Gamma F$ καὶ $\Gamma'\mu < 3\Gamma'F'$.

(1) Ἴδε πίνακα τεύχους Νοεμβρίου εἰς ὃν περιέχονται τὰ σχήματα 5—19.

Παρατηρητέον δ' ὅτι ἐν τῇ ἐξισώσει (1) τὸ M ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν, ὧν τὸ μὲν

$$\frac{1}{2}\,px(l-x)$$

εἶνε ἡ τιμή, ἣν θὰ εἶχεν ἡ κάμπτουσα ῥοπὴ κατὰ τὸ ὑπὸ τῆς τετμημένης x ὁριζόμενον σημεῖον, ἐὰν τὸ διάστυλον μ ἦτο ἀσύνδετον πρὸς τὰ ἑκατέρωθεν καὶ πεφορτωμένον δι' ὁμοιομόρφως διανενεμημένου βάρους· τὸ δὲ

$$\frac{M_{\mu-1}(l-x)+M_{\mu}x}{l}$$

παρίσταται διὰ τῶν τεταγμένων εὐθείας διερχομένης διὰ τῶν σημείων:

$x=0$ καὶ $M=M_{\mu-1}$ καὶ $x=l$ καὶ $M=M_{\mu}$.

Οὕτως ἡ καθ' οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ διαστύλου μ παραγομένη κάμπτουσα ῥοπὴ παρίσταται ὑπὸ τῆς ἀνταποκρινομένης τεταγμένης παραβολῆς, ἥτις εἶνε ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν παραβολὴν τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν ἁπλοῦ διαστύλου, ἀλλὰ μετακινηθεῖσαν οὕτως ὥστε, τοῦ ἄξονος αὐτῆς μένοντος πάντοτε κατακορύφου, ἡ παραβολὴ νὰ διέρχηται διὰ τῶν δύο πρὸ ὀλίγον ὁρισθέντων σημείων.

12. *Μέγισται κάμπτουσαι ῥοπαὶ παραγόμεναι ὑπὸ τῆς ἀτελοῦς ὁμοιομόρφου ἐπιφορτώσεως ἑνὸς μόνου διαστύλου.*

Ἡ θεωρία, καίτοι κατ' ἀρχὴν εὔκολος, ἄγει εἰς τύπους τοσούτῳ πολυπλόκους, ὥστε δὲν χρησιμοποιοῦνται ἐν τῇ πράξει.

Ὁ ἑπόμενος *ἐμπειρικὸς* κανών, εὔκολος τὴν χρῆσιν, δίδει πάντοτε ἀποτελέσματα κείμενα ἀρκούντως ἐγγὺς τῆς ἀληθείας, τοῦ διαπραττομένου λάθους ὄντος πάντοτε *ἐπὶ πλέον* καὶ πρακτικῶς ἀμελητέου.

Τῆς παραβολῆς ΑΣΒ τῆς ἀνταποκρινομένης εἰς τὸ πλῆρες ὁμοιόμορφον βάρος (σχ. 8) ἐχούσης ἐξίσωσιν

$$M=M_{\mu-1}\left(1-\frac{x}{l}\right)+M_{\mu}\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\,px(l-x),$$

αἱ ἀναλυτικαὶ ἐκφράσεις τῆς μεγίστης ἀρνητικῆς καμπτούσης ῥοπῆς M'' εἶνε:

Διὰ μὲν τὸ τμῆμα μ — 1 . F (καμπύλη AF)

$$0<x<\alpha \qquad M''=M_{\mu-1}\,\frac{\left(1-\dfrac{x}{\alpha}\right)^2}{1-\dfrac{\alpha+\alpha'-l}{2\alpha'-l}\cdot\dfrac{x}{\alpha}}$$

Διὰ δὲ τὸ τμῆμα FF'

$$\alpha'<x<\alpha \qquad M''=0.$$

Διὰ δὲ τὸ τμῆμα F'μ (καμπύλη F'B)

$$\alpha'<x<l$$

$$M''=M_{\mu}\,.\,\frac{\left(1-\dfrac{l-x}{l-\alpha'}\right)^2}{1-\dfrac{l-\alpha-\alpha'}{l-2\alpha}\cdot\dfrac{l-x'}{l-\alpha'}}.$$

Ἡ καμπύλη μ — 1fΣf'μ τῆς μεγίστης θετικῆς καμπτούσης ῥοπῆς M', ἥτις ἀναγκαίως ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν συμπληρωματικὴν ἐπιφόρτωσιν ἐκείνης, ἥτις παράγει τὸ M'', ἔχει ἐξίσωσιν

$$M'=M-M''.$$

13. *Σχεδιάγραμμα τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν, αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τοῦ ὁμοιομόρφως διανενεμημένου μονίμου βάρους.*

Ὑποθέτοντες τὸ μόνιμον βάρος ὁμοιομόρφως διανενεμημένον ἐν ἑκάστῳ διαστύλῳ, ὑπολογίζομεν εὐκόλως τὰς καμπτούσας ῥοπάς, ἃς παράγει ἐν τῇ ἐφ' ἑκάστου ὑποστηρίγματος ἀγομένῃ τομῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν διαστύλων θεωρηθὲν μεμονωμένως. Εἶτα ἀθροίζομεν τὰ δι' ἕκαστον ὑποστήριγμα ἐπιτυγχανόμενα ἀποτελέσματα καὶ χαράττομεν δι' ἕκαστον διάστυλον τὴν ἔχουσαν κατακόρυφον ἄξονα παραβολὴν τὴν σχετικὴν πρὸς τὸ ἴδιον αὐτοῦ βάρος ἄγοντες αὐτὴν διὰ τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν κατακορύφων τῶν ὑποστηριγμάτων εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ οὐδετέρου ἄξονος ἴσας πρὸς τὰς προηγουμένως ὑπολογισθείσας ὁλικὰς ῥοπὰς ὑποστηρίγματος.

Γενικῶς γίνεται δεκτὸν ὅτι τὸ κατὰ τρέχον μέτρον ὁμοιόμορφον μόνιμον βάρος εἶνε τὸ αὐτὸ εἰς ὅλα ἀδιακρίτως τὰ διάστυλα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δὲν εἶνε ἀνάγκη ἰδίου σχεδιαγράμματος διὰ τὸ βάρος τοῦτο, τὰ δὲ χρήσιμα εἰς τὴν πρᾶξιν στοιχεῖα ἐξάγονται ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν, οἵτινές εἰσι σχετικοὶ πρὸς τὴν ἐπιφόρτωσιν καὶ θέλουσιν ἐκτεθῇ κατωτέρω.

14. *Σχεδιαγράμματα τῶν μεγίστων καμπτουσῶν ῥοπῶν τῶν ὀφειλομένων εἰς ὁμοιόμορφον ἀλλ' ἀτελῆ ἐπιφόρτωσιν.*

Ἡ ἐπιφόρτωσις p κατὰ τρέχον μέτρον ὑποτίθεται ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ διάστυλα.

Θὰ ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἓν μόνον διάστυλον φέρει τὴν πλήρη αὐτοῦ ἐπιφόρτωσιν καὶ θὰ ὑπολογίσωμεν ἐν τῇ ὑποθέσει ταύτῃ τὰς ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων αὐτοῦ ῥοπάς. Ἐκ τούτων θὰ συναγάγωμεν κατόπιν δι' ἁπλοῦ ὑπολογισμοῦ ἢ διὰ στοιχειώδους γραφικῆς κα-

τασκευῆς τὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὑποστηριγμάτων τῆς δοκοῦ καμπτούσας ῥοπάς.

Τῆς ἐργασίας ταύτης γενομένης δι' ὅλα τὰ διάστυλα γνωρίζομεν δι' οἱονδήποτε ὑποστήριγμα Κ τὰς καμπτούσας ῥοπάς, τὰς ὁποίας παράγουσιν αἱ πλήρεις ἐπιφορτώσεις ἑκάστου διαστύλου θεωρουμένου κεχωρισμένως.

Παραστήσωμεν τὰς ῥοπὰς ταύτας κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον διὰ μηκῶν ἀγομένων (σχ. 9) ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ σημείου Κ καὶ διακρινομένων διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν διαστύλων, εἰς ἃ ἀνταποκρίνονται. Πρὸς μείζονα σαφήνειαν ἐχωρίσαμεν ἐπὶ τοῦ σχήματας τὰς ῥοπάς, αἵτινες ὀφείλονται εἰς τὰς ἐπιφορτώσεις τῶν διαστύλων τῶν κειμένων ἀριστερᾷ τοῦ ὑποστηρίγματος Κ, ἀπὸ τῶν ὀφειλομένων εἰς τὰς ἐπιφορτώσεις τῶν διαστύλων, ἅτινα κεῖνται δεξιᾷ.

Εἶνε ἤδη εὔκολον νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν κατὰ τὸ Κ παραγομένην κάμπτουσαν ῥοπὴν ὑπὸ τῶν βαρῶν ὡρισμένης σειρᾶς διαστύλων ἐνεργούντων συγχρόνως· ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἄθροισιν τῶν μερικῶν ῥοπῶν τῶν σχετικῶν πρὸς τὰ διάστυλα ταῦτα θεωρούμενα καθ' ἕκαστον, ἀφίνοντες κατὰ μέρος τὰς σχετικὰς πρὸς τὰ λοιπά, ἅτινα ὑποτίθενται πρὸς στιγμὴν μὴ φέροντα βάρος.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ θεωρήσωμεν τὰς ῥοπάς, αἵτινες ἀνταποκρίνονται εἰς ἑπτὰ ἰδιαιτέρας διαθέσεις τῆς ἐπιφορτώσεως, ἃς παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καὶ Η. Αἱ ῥοπαὶ αὗται ἀναφέρονται εἰς τὰς ὑπὸ τοῦ σχ. 10 δεικνυομένας περιπτώσεις, ἐν τῷ ὁποίῳ διεκρίναμεν διὰ πλήρους γραμμῆς τὰ πεφορτωμένα διάστυλα τῶν μὴ πεφορτωμένων.

Ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος οὐδεμίαν παρουσιάζει δυσκολίαν, καὶ μάλιστα ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ῥοπὴ Α ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πλήρη ἐπιφόρτωσιν, ἐνῷ αἱ ῥοπαὶ Β καὶ Γ ἀφ' ἑνός, Δ καὶ Ε ἀφ' ἑτέρου ἀνταποκρίνονται εἰς φορτώσεις συμπληρωματικάς. Ὅθεν αἱ σχέσεις

$$A = B + \Gamma = \Delta + E,$$

αἵτινες ἐπιτρέπουσι νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὰς Γ καὶ Ε, ὅταν ὑπελογίσαμεν τὰς Α, Β καὶ Δ. Ἔχομεν οὕτω τρεῖς μόνον ἀθροίσεις νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν Α, Β καὶ Δ, διότι αἱ ῥοπαὶ Ζ καὶ Η ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἐπιφόρτωσιν ἑνὸς μόνου διαστύλου εἶνε ἤδη γνωσταί.

15. — Τῆς ἐργασίας ταύτης περατωθείσης δι' ἕκαστον ὑποστήριγμα, χαράττομεν τὴν καμπύλην τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν, αἵτινες ἀναπτύσσονται ἐν τῇ δοκῷ ὑπὸ τῆς πλήρους ἐπιφορτώσεως, μεταχειριζόμενοι δι' ἕκαστον διάστυλον τὸν τύπον:

$$M = A\left(\frac{l-x}{l}\right) + A'\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x),$$

ἐν τῷ ὁποίῳ Α καὶ Α' εἰσὶν ἀμοιβαίως αἱ ῥοπαὶ ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ ὑποστηρίγματος καὶ ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ τοιούτου τοῦ θεωρουμένου διαστύλου.

Ἡ καμπύλη αὕτη εἶνε παραβολὴ μὲ κατακόρυφον ἄξονα, ἧς αἱ ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων τεταγμέναι εἶνε Α καὶ Α'. Σχεδὸν πάντοτε τὰ Α καὶ Α' εἶνε ἀρνητικὰ καὶ ἡ παραβολὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς δύο σημεῖα Ο καὶ Ο', εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κάμπτουσα ῥοπὴ εἶνε μηδὲν (σχ. 12).

Εἰς τὰ παρόχθια διάστυλα τὸ Α ἢ τὸ Α' εἶνε συνήθως μηδέν, ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ ἡ παραβολὴ διέρχεται διὰ τοῦ ἀκραίου ὑποστηρίγματος καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς ἓν ἔτι σημεῖον.

(Ἕπεται συνέχεια.)

Γ. Β. ΓΡΑΒΑΡΗΣ

ΠΟΙΚΙΛΑ

Ἠλεκτρομαγνητικὴ πέδη ἐπὶ τῶν τροχιῶν κυλίσεως ἐνεργοῦσα. — Κατὰ τὰ ἐκτιθέμενα ἐν τῷ El. Kraftbetr. u. Bahnen Bd. 7 1909 S. 426 ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων χρήσεως τῆς νεωτάτης καὶ ἐπὶ τῶν τροχιῶν κυλίσεως ἐνεργούσης ἠλεκτρομαγνητικῆς πέδης, ἡ γενικῶς γινομένη δεκτὴ παραδοχὴ ὅτι, ἀρκεῖ κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐκκινήσεως εἴτε τῆς στάσεως τῆς ἁμάξης νὰ ὑπολογίζῃ τις ἐπὶ τῇ βάσει τιμῆς τῆς τριβῆς $^1/_5$ μέχρις $^1/_7$, ἰσχύει μόνον διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ τροχοὶ δὲν ὑπέστησαν τελεῖαν σύσφιγξιν καὶ καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια τῆς τροχιᾶς δὲν εἶναι τελείως ὀλισθηρά. Ἡ τελευταία ὅμως συνθήκη δὲν πληροῦται πάντοτε, ἡ πρώτη δὲ μόνον μετὰ προσεκτικὴν καὶ εἰδήμονα δρᾶσιν ἐπὶ τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τροχοπεδῶν. Συνήθως καὶ κυρίως ἐν περιπτώσει στάσεως πρό τινος κινδύνου, συσφίγγονται ἀποτόμως αἱ τροχοπέδαι, καὶ οὕτω