Εἰς ταύτας δέον νὰ προσθέσωμεν καὶ τὴν κατάθεσιν λόγῳ γάμου· ταύτην ἀδυνατοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν ἐπακριβῶς καὶ παραδεχόμεθα ὡς ἀνερχομένην ἐν συνόλῳ εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀνωτέρω ποσοῦ ἤτοι εἰς

$$6.990.242 \frac{A}{6106}.$$

Τὰ τρία ἀνωτέρω ποσὰ ἀθροιζόμενα μᾶς δίδουν $236.519.611 \frac{A}{6106}$.

Ταῦτα ἀνατοκιζόμενα ἐπὶ ἕτερα 39 ἔτη ὅτε θὰ ἐκλείψῃ καὶ τὸ τελευταῖον τῶν Α ἀτόμων μᾶς δίδουν

$$236.519\,611 \frac{A}{6106} \times 6.7 = 1.584.681.393 \frac{A}{6106}$$

Καὶ ἤδη ἂς ὑπολογίσωμεν τὰς δαπάνας. Ἂς ὀνομάσωμεν φ. τὸ ποσοστὸν τοῦ μισθοῦ τῶν 6 τελευταίων ἐτῶν τὸ δυνάμενον νὰ χορηγηθῇ, ὡς σύνταξις, ἵνα ἐξισωθῶσιν αἱ δαπάναι πρὸς τὰ ἔξοδα. Ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὴν σύνταξιν ταύτην ἐπὶ τοὺς ἐπιζῶντας 66, 67, 68... 104 ἐτῶν καὶ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἐπὶ 38 ἔτη διὰ τοὺς ἐπιζῶντας ἡλικίας 66 ἐτῶν, ἐπὶ 37 ἔτη διὰ τοὺς ἡλικίας 67 ἐτῶν, ἐπὶ 36 ἔτη διὰ τοὺς ἡλικίας 68 ἐτῶν... καὶ οὕτω καθεξῆς κατὰ τὸν πίνακα (δ) καὶ ἀθροίζοντες τὰ ποσὰ ταῦτα ἔχομεν ὡς δαπάνας

$$\frac{\varphi A}{6106} \times 12 \times 450 \times 175\,529 =$$

$$\frac{\varphi A}{6106} \times 947.802.000$$

ἐξισοῦντες τὰς δαπάνας πρὸς τὰ ἔσοδα ἔχομεν

$$\varphi = \frac{1.584.681\,393}{947\,802.000} = 1\,67.$$

Τὸ ποσοστὸν τοῦτο περιλαμβάνει καὶ τὰς συντάξεις τῶν οἰκογενειῶν, καὶ ὡς ἐξεθέσαμεν προηγουμένως, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ποσοστοῦ φ′ τοῦ ἀναφερομένου ἀποκλειστικῶς εἰς τὸν ὑπάλληλον δέον νὰ λάβωμεν τὰ

$$\frac{60}{100} \text{ τοῦ } \varphi\cdot \quad \text{ἤτοι}$$

$$\varphi' = 1.67 \times \frac{60}{100} = 1$$

ἤτοι ἡ σύνταξις δέον νὰ ἦναι ἴση πρὸς τὸν τελευταῖον μισθόν, ἐνῷ παρὰ τοῦ δημοσίου ἀπονέμονται τὰ $\frac{70}{100}$.

Ἀλλὰ συμβαίνει ἐνταῦθα καί τι ἄλλο· θεωρεῖται γενικῶς ὅτι τὸ δημόσιον εὐνοεῖ τοὺς καθηγητὰς τοὺς ὑπηρετήσαντας 40 ἔτη, ἀπονέμον αὐτοῖς ὁλόκληρον τὸν μισθόν. Οἱ ὑπολογισμοὶ ἐπαναλαμβανόμενοι εἰς τὴν περίστασιν ταύτην, καθ' ἣν ὁ καθηγητὴς ἀποχωρεῖ εἰς ἡλικίαν 70 ἐτῶν, δίδουν

$$\varphi = 3.38$$

$$\text{καὶ } \varphi' = 2.02$$

ἤτοι ὁ καθηγητὴς ὁ ἀποχωρῶν εἰς ἡλικίαν 70 ἐτῶν μετὰ 40 ἐτῶν ὑπηρεσίαν, ἐδικαιοῦτο νὰ λάβῃ σύνταξιν ἴσην μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μισθοῦ του !

Καθηγηταὶ γυμνασίου.

Τούτους θεωροῦμεν ὑπηρετοῦντας 5 ἔτη ὡς ἑλληνοδιδασκάλους γ′ τάξεως ἀπὸ ἡλικίας 23—27 ἐτῶν, ἄλλα πέντε ἔτη ὡς καθηγητὰς μὲ μισθὸν 250 δρ. καὶ 28 ἔτη μὲ μισθὸν 300 δρ., καὶ ἀποχωροῦντας οὕτω εἰς ἡλικίαν 60 ἐτῶν.

Οἱ αὐτοὶ ὡς ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ θὰ μᾶς δώσουν ὑπὸ τὰς ἄνω συνθήκας·

$$\varphi = 1.41$$

$$\varphi' = 0.84$$

ἤτοι ἐδικαιοῦντο νὰ λάβουν ὡς σύνταξιν $\frac{84}{100}$ τοῦ τελευταίου μισθοῦ των, ἐνῷ λαμβάνουν παρὰ τοῦ δημοσίου τὰ $\frac{75}{100}$.

(Ἕπεται συνέχεια.)

Φ. ΝΕΓΡΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΩΝ ΕΠΙ ΠΟΛΛΩΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΟΚΩΝ

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου.)

16. — Προτιθέμεθα ἤδη νὰ χαράξωμεν ἐν τῷ διαστύλῳ Κ—1.Κ τὰς δύο περιειλιγμένας τῶν καμπύλων τῶν παριστωσῶν τὰς μεγίστας μεγίστας καμπτούσας ῥοπὰς θετικὰς Μ′ καὶ ἀρνητικὰς Μ″.

Θὰ παραλείψωμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος τὴν ῥοπήν, ἥτις ὀφείλεται εἰς τὴν ἰδίαν ἐπιφόρτωσιν τοῦ διαστύλου τούτου.

Θεωροῦντες δὲ τὰ σχήμ. 5 καὶ 11 παρατηροῦμεν:

1ον. Ὅτι δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος (Κ—1).F τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ ἀριστεροῦ ὑποστηρίγματος καὶ τῆς πρώτης ἑστίας ($0<x<\alpha$) ἡ ἐπιφόρτωσις ποντὸς διαστύλου, οὗ ὁ αὔξων ἀριθμὸς εἶνε $\mu=K-2\beta-1$ ἢ $\mu=K+2\beta$, δίδει κάμπτουσαν ῥοπὴν ἀρνητικήν.

Τοὐναντίον ἡ ῥοπὴ εἶνε θετική, ἐὰν ἔχωμεν

$$\mu=K-2\beta \quad \text{ἢ} \quad \mu=K+2\beta+1.$$

2ον. Ἐν τῷ μεταξὺ τῶν ἑστιῶν τμήματι $FF'(\alpha<x<\alpha')$ ἡ ῥοπὴ εἶνε ἀρνητικὴ διὰ

$$\mu=K-2\beta-1 \quad \text{ἢ} \quad \mu=K+2\beta+1$$

καὶ θετικὴ διὰ

$$\mu=K-2\beta \quad \text{καὶ} \quad \mu=K+2\beta.$$

3ον. Τέλος ἐν τῷ τελευταίῳ τμήματι F K πέραν τῆς δευτέρας ἑστίας ἡ ῥοπὴ εἶνε ἀρνητικὴ διὰ

$$\mu=K-2\beta \quad \text{καὶ} \quad \mu=K+2\beta+1$$

καὶ θετικὴ διὰ

$$\mu=K+2\beta \quad \text{καὶ} \quad \mu=K-2\beta-1.$$

Κατὰ συνέπειαν αἱ διατάξεις τῆς ἐπιφορτώσεως, αἵτινες ἄγουσιν εἰς τὰς μεγίστας τιμὰς τῶν καμπτουσῶν, θετικῆς M' καὶ ἀρνητικῆς M'', ἀνταποκρίνονται διὰ τὰ τρία τμήματα τοῦ διαστύλου εἰς τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις, ἐν αἷς διεκρίναμεν διὰ τόνου τὰ γράμματα τὰ δηλοῦντα τὰς ῥοπὰς ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ ὑποστηρίγματος K, ἐξισώσεις λαμβανομένας ἐκ τῆς (2) τῆς παραγράφου 8. Οὕτως ἡ πρώτη τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων εὑρίσκεται ἐκ τῆς (2) ταύτης παρατηρουμένου ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος K—1 τοῦ σχ. 11 μεγίστη θετικὴ κάμπτουσα ῥοπὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διάθεσιν Γ *διὰ τὸ ὑποστήριγμα τοῦτο*, διάθεσιν, ἥτις διὰ τὸ ὑποστήριγμα K εἶνε ἡ $B'-H'$.

Θετικαὶ ῥοπαί.

Τμήματα:

$K-1.F \qquad 0\le x\le \alpha$

$$M'=\Gamma\left(1-\frac{x}{l}\right)+(B'-H')\frac{x}{l}$$

$FF' \qquad \alpha\le x\le \alpha'$

$$M'=(\Delta-Z)\left(1-\frac{x}{l}\right)+(E'-H')\frac{x}{l}$$

$F K \qquad \alpha'\le x\le l$

$$M'=(B-Z)\left(1-\frac{x}{l}\right)+\Gamma'\frac{x}{l}.$$

Ἀρνητικαὶ ῥοπαί.

Τμήματα:

$K-1.F \qquad 0\le x\le \alpha$

$$M''=(B-Z)\left(1-\frac{x}{l}\right)+\Gamma'\frac{x}{l}$$

$FF' \qquad \alpha\le x\le \alpha'$

$$M''=E\left(1-\frac{x}{l}\right)+\Delta'\frac{x}{l}$$

$F'K \qquad \alpha'\le x\le l$

$$M''=\Gamma\left(1-\frac{x}{l}\right)+(B'-H')\frac{x}{l}.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστῶσι (σχ. 12) τέσσαρας εὐθείας $M'N'P''\Pi''$, $M''N''P'\Pi'$, $N'P'$ καὶ $N''P''$· αἱ γραμμαὶ αἱ παριστῶσαι τὰς μεγίστας καμπτούσας ῥοπάς, θετικὴν M' καὶ ἀρνητικὴν M'' εἰσὶν αἱ τεθλασμέναι γραμμαὶ $M'N'P'\Pi'$ καὶ $M''N''P''\Pi''$, ὧν αἱ κορυφαὶ εἶσιν ἐπὶ τῶν κατακορύφων τῶν ἑστιῶν F καὶ F′.

17. — Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ σχεδιαγράμματος δὲν ὑπολείπεται πλέον ἄλλο ἢ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ ὅρια ταῦτα τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν, τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς μᾶλλον δυσμενεῖς διατάξεις τῶν ἐπιφορτώσεων τῶν λοιπῶν διαστύλων, τὰς μεγίστας καμπτούσας ῥοπάς, θετικὰς ἢ ἀρνητικάς, τὰς ὀφειλομένας εἰς τὰς δυσμενεστέρας μερικὰς ἐπιφορτώσεις αὐτοῦ τούτου τοῦ διαστύλου K—1.K. Ἀλλ' ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐδώσαμεν τὰς ἐν τῇ πράξει χρησιμοποιουμένας ἀναλυτικὰς ἐκφράσεις τῶν ῥοπῶν τούτων, ἃς ἀντιγράφομεν κατωτέρω σημειοῦντες τὰς ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων ῥοπὰς διὰ τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα παρεδέχθημεν. Οὕτως ἀντὶ τῶν γραμμάτων $M_{\mu-1}$ καὶ M_μ, τῶν τύπων τούτων ἐτέθησαν τὰ γράμματα Z καὶ H′ τοῦ πίνακος τῆς παραγράφου 14.

Γνωστὸν ὅτι ἔχομεν πάντοτε:

$$M=Z\left(1-\frac{x}{l}\right)+H'\frac{x}{l}+\frac{1}{2}px(l-x)= \\ =M'+M''.$$

Θετικαὶ ῥοπαί.

$K-1.F \qquad 0<x<\alpha$

$$M'=Z\left(1-\frac{x}{l}\right)+H'\frac{x}{l}+\frac{1}{2}px(l-x)- \\ -Z\frac{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^2}{1-\frac{\alpha+\alpha'-l}{2\alpha'-l}\cdot\frac{x}{\alpha}}$$

$FF' \qquad \alpha<x<\alpha'$

$$M'=Z\left(1-\frac{x}{l}\right)+H'\frac{x}{l}+\frac{1}{2}px(l-x)$$

$\mathrm{F'.K} \qquad \alpha' < x < l$

$$M' = Z\left(1-\frac{x}{l}\right) + H'\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x) - H'\frac{\left(1-\frac{l-x}{l-\alpha'}\right)^2}{1-\frac{l-\alpha-\alpha'}{l-2\alpha}\cdot\frac{l-x}{l-\alpha'}}$$

Ἀρνητικαὶ ῥοπαί.

$\mathrm{K-1.F} \qquad 0 < x < \alpha$

$$M'' = Z\frac{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^2}{1-\frac{\alpha+\alpha'-l}{2\alpha'-l}\cdot\frac{x}{l}}$$

$\mathrm{F.F'} \qquad \alpha < x < \alpha'$

$$M'' = 0$$

$\mathrm{F'.K} \qquad \alpha' < x < l'$

$$M'' = H'\frac{\left(1-\frac{l-x}{l-\alpha'}\right)^2}{1-\frac{l-\alpha-\alpha'}{l-2\alpha}\cdot\frac{l-x}{l-\alpha'}}.$$

Ἐὰν ἤδη προσθέσωμεν τὰς ἐκφράσεις ταύτας εἰς τὰς ἀνταποκρινομένας τῆς παραγράφου 16, θὰ λάβωμεν τοὺς τύπους, οἵτινες παριστῶσι τὰς ὁλικὰς μεγίστας καμπτούσας ῥοπάς, θετικὴν M' καὶ ἀρνητικὴν M'', τὰς παραγομένας καθ' οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ διαστύλου ὑπὸ τῶν δυσμενεστέρων συμπληρωματικῶν διατάξεων τῆς ἐπιφορτώσεως.

Οἱ τύποι οὗτοί εἰσι διὰ τὰ τρία τμήματα K—1 . F, F.F′ καὶ F′.K τοῦ διαστύλου:

Θετικαὶ κάμπτουσαι ῥοπαί.

$\mathrm{K-1.F} \qquad 0 < x < \alpha$

$$M' = (\Gamma+Z)\left(1-\frac{x}{l}\right) + B'\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x) - Z'\frac{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^2}{1-\frac{\alpha+\alpha'-l}{2\alpha'-l}\cdot\frac{x}{\alpha}}$$

$\mathrm{F.F'} \qquad \alpha < x < \alpha'$

$$M' = \Delta\left(1-\frac{x}{l}\right) + E'\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x)$$

$\mathrm{F'.K} \qquad \alpha' < x < l$

$$M' = B\left(1-\frac{x}{l}\right) + (\Gamma'+H')\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x) - H'\frac{\left(1-\frac{l-x}{l-\alpha'}\right)^2}{1-\frac{l-\alpha-\alpha'}{l-2\alpha}\cdot\frac{l\quad x}{l-\alpha'}}$$

Ἀρνητικαὶ κάμπτουσαι ῥοπαί.

$\mathrm{K-1.F} \qquad 0 < x < \alpha$

$$M'' = (B-Z)\left(1-\frac{x}{l}\right) + \Gamma\frac{x}{l} + Z\frac{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^2}{1-\frac{\alpha+\alpha'-l}{2\alpha'-l}\cdot\frac{x}{\alpha}}$$

$\mathrm{F.F'} \qquad \alpha < x < \alpha'$

$$M'' = E\left(1-\frac{x}{l}\right) + \Delta'\frac{x}{l}$$

$\mathrm{F'.K} \qquad \alpha' < x < l$

$$M'' = \Gamma\left(1-\frac{x}{l}\right) + (B'-H')\frac{x}{l} + H'\frac{\left(1-\frac{t-x}{l-\alpha'}\right)^2}{1-\frac{l-\alpha-\alpha'}{l-2\alpha}\cdot\frac{l-x}{l-\alpha'}}.$$

Αἱ περιειλιγμέναι τῶν ῥοπῶν ἐχαράχθησαν ἐπὶ τοῦ σχ. 14, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐπὶ πλέον ἐσημειώθη κάτωθι ἡ παραβολὴ τῆς πλήρους ἐπιφορτώσεως, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶνε:

$$M = A\left(1-\frac{x}{l}\right) + A'\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x).$$

Ὑπομιμνήσκομзν ὅτι δι' οἱανδήποτε τομὴν ἡ τιμὴ τοῦ M ἰσοῦται πρὸς $M'+M''$ τουτέστι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὁρίων τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν. Οἱ προηγούμενοι τύποι ἐπαληθεύουσι τὴν παρατήρησιν ταύτην, διότι ἔχομεν:

$$A = B+\Gamma = \Delta+E \quad \text{καὶ} \quad A' = B'+\Gamma' = \Delta'+E'.$$

18. — Ἐν τῷ ὑπολογισμῷ τῶν συνεχῶν δοκῶν γενικῶς δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψει τὰ σημεῖα τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν, ἀλλὰ μόνον τὰ μεγέθη αὐτῶν, διότι παραδεχόμεθα τὸ αὐτὸ ὅριον ἀσφαλείας κατὰ τὴν ἔκτασιν καὶ τὴν συμπίεσιν καὶ συνεπῶς ἀλλαγὴ τοῦ σημείου τῆς καμπτούσης ῥοπῆς ἄνευ ἀλλοιώσεως τοῦ μεγέθους αὐτῆς οὐδεμίαν μεταβολὴν ἐπιφέρει ἐπὶ τῆς κατὰ πλάτος τομῆς.

Δὲν φαίνεται τότε ἀναγκαία ἡ πλήρης χάραξις τῶν δύο καμπύλων, αἵτινες παριστῶσι τὰ M' καὶ τὰ M'', ἀλλὰ μόνον τῶν τμημάτων τῶν γραμμῶν τούτων, ἅτινα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς ἐν ἀπολύτῳ τιμῇ μεγίστας τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν. Σχεδὸν δὲ πάντοτε αἱ ῥοπαὶ ὑποστηρίγματος τῆς πλήρους ἐπιφορτώσεως A καὶ A′ εἶνε ἀρνητικαὶ καὶ τὰ σημεῖα συναντήσεως O καὶ O′ τῆς παραβολῆς μετὰ τῆς κλειούσης αὐτὴν εὐθείας εἶνε πραγματικὰ καὶ ἐγγὺς τῶν δύο ἑστιῶν F καὶ F′. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἀρνητικῆς καμπτούσης ῥοπῆς M″ εἶνε ἀνωτέρα τῆς θετικῆς καμπτούσης ῥοπῆς M′ ἐν τοῖς δύο τμήμασι K—1.O καὶ O′.K, ἐν οἷς ἡ M εἶνε ἀρνητική· ἐν τῷ τμήματι ὅμως OO′, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ M ἔχει τὸ σημεῖον +, ἡ θετικὴ ῥοπὴ M′ εἶνε μείζων τῆς M″.

Περιοριζόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν χάραξιν τῆς καμπύλης τῆς παριστώσης τὴν M′ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν ἑστιῶν τμήματι FF′ ($\alpha < x < \alpha'$) καὶ τῶν καμπύλων τῶν παριστωσῶν τὴν M″ εἰς τὰ τμήματα K—1.F καὶ F′.K. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ κατακόρυφοι τῶν σημείων O καὶ O′ συμπίπτωσι μὲ τὰς τῶν ἑστιῶν, τὸ σχεδιάγραμμα εἶνε πλῆρες. Ἀλλὰ τοῦτο οὐδέποτε σχεδὸν συμβαίνει, δέον δ' ἔτι νὰ χαράξωμεν δύο τόξα ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ τμήματα OF καὶ O′F. Κατασκευάζομεν τὰ τμήματα ταῦτα παρατηροῦντες, ὅτι ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἤδη κεχαραγμένων καμπύλων εἶνε ἴση πρὸς τὴν ἀνταποκρινομένην τιμὴν τῆς M, συνεπείᾳ τῆς σχέσεως

$$M' + M'' = M.$$

Ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ σχήματος 15 παριστανομένῳ παραδείγματι, τὸ O εἶνε ἐντεῦθεν τοῦ F. Ἀντικαθιστῶμεν ἑπομένως τὸ τόξον ΒΠ τῆς καμπύλης τῶν M″ διὰ τοῦ τόξου ΒΡ τῆς καμπύλης τῶν M′, ἧς αἱ κατακόρυφοι ἀπὸ τῆς πρώτης ἰσοῦνται πρὸς τὰς τεταγμένας τοῦ τόξου ΟΡ′ τῆς παραβολῆς τῶν M. Ὁμοίως τὸ F′ κεῖται ἐκεῖθεν τοῦ O′, ἀντικαθιστῶμεν δὲ τὸ τόξον ΝΣ τῆς καμπύλης τῶν M′ διὰ τοῦ τόξου ΝΤ τῆς καμπύλης τῶν M″, ἧς αἱ κατακόρυφοι ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς ΝΣ ἰσοῦνται πρὸς τὰς τεταγμένας τοῦ τόξου Ο′Τ′ τῆς καμπύλης τῶν M.

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ σημεῖον τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν δὲν ἔχει ἐπιρροήν, οὐδὲν συμφέρον ἔχομεν νὰ διακρίνωμεν τὰ τμήματα, ἐν οἷς τὸ M εἶνε θετικὸν ἐκείνων, ἐν οἷς εἶνε ἀρνητικόν. Διὰ τοῦτο ἀναστρέφομεν τὴν παραβολὴν τῶν M μεταξὺ τῶν σημείων O καὶ O′, οὕτω δ' ἐλαττοῦμεν τὸ ὕψος τοῦ σχεδιαγράμματος καὶ ἔχομεν μίαν καὶ μόνην ὁριζοντίαν κλείουσαν, ἧς κάτωθεν ἄγομεν τὰ M καὶ ἧς ἄνωθεν ἄγομεν τὰς μεγίστας τιμὰς τοῦ M′ ἢ τοῦ M″ ἄνευ διακρίσεως σημείου.

Εἰς τὰ παρόχθια διάστυλα, ἐν οἷς τὸ A εἶνε μηδὲν ἡ πρώτη ἑστία συμπίπτει μετὰ τοῦ ἐσχάτου ὑποστηρίγματος $\alpha = 0$. Ἑπομένως οἱ τύποι, ὧν γίνεται χρῆσις, περιορίζονται εἰς τρεῖς:

$$0 < x < l \qquad M = A'\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x)$$

$$0 < x < \alpha' \qquad M' = E\frac{x}{l} + \frac{1}{2}px(l-x)$$

$$\alpha' < x < l \qquad M'' = (B' - H')\frac{x}{l} + H'\frac{\left(1 - \frac{l-x}{l-\alpha'}\right)^2}{1 - \frac{l-x}{l}}$$

Ἐν τῷ τμήματι τῷ περιλαμβανομένῳ μεταξὺ τῆς ἑστίας F′ καὶ τοῦ σημείου τῆς συναρτήσεως O′ τῆς παραβολῆς τῶν M (σχ. 16) μετὰ τῆς ὁριζοντίας κλειούσης, χαράττομεν συμπληρωματικὸν τόξον, οὗ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶν προηγουμένως κατασκευασθεισῶν καμπύλων παρέχονται ὑπὸ τῶν ἀνταποκρινομένων τεταγμένων τῆς παραβολῆς τῶν M. Τὰ σχήματα 17 καὶ 18 παρέχουσι παραδείγματα τοῦ διαγράμματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἄγει ἡ μέθοδος αὕτη.

19. *Σχεδιάγραμμα τῶν τμητικῶν τάσεων.*— Εὑρίσκομεν τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τῆς τμητικῆς τάσεως δι' ὡρισμένην διάθεσιν τῆς ἐπιφορτώσεως λαμβάνοντες τὴν παράγωγον τῆς ἐκφράσεως τῆς καμπτούσης ῥοπῆς.

Διὰ τὴν πλήρη ἐπιφόρτωσιν εὑρίσκομεν

$$T = -\frac{A}{l} + \frac{A'}{l} + \frac{1}{2}p(l-2x) \qquad (1)$$

Ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ θεωρούμενον διάστυλον οὐδεμίαν ἐπιφόρτωσιν φέρει, αἱ ἔσχαται τιμαὶ τῶν τμητικῶν τάσεων T′ καὶ T″ ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς διατάξεις τῆς ἐπιφορτώσεως τῶν ἄλλων διαστύλων, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τῶν δύο ὑποστηριγμάτων καμπτουσῶν ῥοπῶν εἶνε μεγίστη. Εὐκόλως δὲ βλέπομεν (πρβλ. σχ. 15) ὅτι τὰ ὅρια τῶν τιμῶν, περὶ ὧν ὁ λόγος, δίδονται δι' οἱανδήποτε τομὴν τοῦ θεωρουμένου διαστύλου ὑπὸ τῶν ἑπομένων σχέσεων:

$$T' = \frac{1}{l}(-B + Z + \Gamma')$$

$$T'' = \frac{1}{l}(-\Gamma + B' + H')$$

Τὰς ἐκφράσεις ταύτας δέον νὰ συμπληρώσωμεν προσθέτοντες εἰς αὐτὰς τὰς μεγίστας ἀπολύτως τμητικὰς τάσεις, θετικὴν καὶ ἀρνητικήν, αἵτινες παράγονται ἐν τῇ θεωρουμένῃ κατὰ πλάτος τομῇ ὑπὸ τῶν δυσμενεστέρων διαθέσεων τῆς ἐπιφορτώσεως αὐτοῦ τούτου τοῦ διαστύλου.

Ὁ ἀκριβὴς ὑπολογισμὸς τῶν τμητικῶν τούτων τάσεων εἶνε πολύπλοκος καὶ ἐπίπονος, ἄγει δ' εἰς τύπους ὀλίγον εὐχρήστους. Ἐν τῇ πράξει γίνεται χρῆσις τῶν ἑπομένων τύπων, οἵτινες δὲν εἶνε μὲν ἐντελῶς ἀκριβεῖς, ἀλλὰ δίδουσιν ἀποτελέσματα ἱκανῶς ἐγγὺς τῆς ἀληθείας:

$$(2) \qquad T' = \frac{1}{l}(-B + \Gamma') + \frac{Zx}{l^2} + \\ + \frac{H'(l-x)}{l^2} + \frac{1}{1}p\frac{(l-x)^2}{l}.$$

$$(3) \qquad T'' = \frac{1}{l}(-\Gamma + B') - \frac{Zx}{l^2} - \\ - \frac{H(l-x)}{l^2} - \frac{1}{2}p\frac{x^2}{l}.$$

Τὸ διάγραμμα τῶν παριστῶν τὰ ὅρια τῶν τμητικῶν τάσεων χαράσσεται ὁμοίως ὡς τὸ τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν.

Ἄνωθι τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων ἄγεται κεκλιμένη εὐθεῖα ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν σχέσιν (1) [πλήρης ἐπιφόρτωσις] καὶ δύο παραβολαὶ ἀντιστοιχοῦσαι ἐναλλὰξ εἰς τὴν μεγίστην ἀπολύτως τμητικὴν τάσιν θετικὴν T′ (2) καὶ ἀρνητικὴν T′′ (3). Συνδυάζοντες τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν μεταβλητὴν ἐπιφόρτωσιν καὶ τὴν γραμμὴν T, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μόνιμον φόρτωσιν, λαμβάνομεν δύο παραβολὰς παριστώσας τὰ ὅρια τῶν τμητικῶν τάσεων, θετικῆς καὶ ἀρνητικῆς, τῶν ὀφειλομένων εἰς τὸν συνδιασμὸν τῆς μονίμου φορτώσεως καὶ τῆς ἐπιφορτώσεως.

Αἱ δύο αὗται καμπύλαι τέμνουσι τὴν ὁριζοντίαν κλείουσαν εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M′, τὰ ὁποῖα οὕτω περιορίζουσι τὸ *κεντρικὸν τμῆμα* τοῦ διαστύλου, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ τμητικὴ τάσις εἶνε ἐπιδεκτικὴ ἀλλαγῆς σημείου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐπιφορτώσεως. Ἀριστερᾷ καὶ δεξιᾷ τῶν σημείων τούτων ἔχομεν τὰ *παράπλευρα τμήματα* τοῦ διαστύλου, ἐν οἷς ἡ τμητικὴ τάσις μεταβάλλεται μεταξὺ δύο ἀκραίων ὁρίων ἐχόντων τὸ αὐτὸ σημεῖον (+ ἐγγὺς τοῦ ἀριστεροῦ ὑποστηρίγματος, — ἐγγὺς τοῦ δεξιοῦ).

Ἐκ τῶν ὑπὸ τὴν AB τμημάτων τῶν καμπύλων διατηροῦμεν τὸ ἔχον τὰς μείζονας ἀπολύτως τεταγμένας, μεταφέρομεν δὲ τοῦτο ὑπὲρ τὴν AB περιστρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς τὴν διὰ διακεκομμένων γραμμῶν ἐμφαινομένην θέσιν.

20. *Ἀντιδράσεις τῶν ὑποστηριγμάτων.* — Αὗται ἰσοῦνται τῇ διαφορᾷ τῶν ἑκατέρωθεν ἑκάστου ὑποστηρίγματος ἀναπτυσσομένων τμητικῶν τάσεων, ἤτοι τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπολύτων αὐτῶν τιμῶν.

21. *Περίπτωσις δοκοῦ πεπακτωμένης ἐπί τινος τῶν ὑποστηριγμάτων της.* — Ἐὰν ἡ δοκὸς εἶνε πεπακτωμένη ἐπί τινος τῶν ἐνδιαμέσων αὐτῆς ὑποστηριγμάτων, τότε, ἐπειδὴ ἡ πάκτωσις ὑποτίθεται τελεία, τὸ ἐντεῦθεν τοῦ σημείου τῆς πακτώσεως τμῆμα τῆς δοκοῦ δὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς κάμψεως τοῦ ἐκεῖθεν τμήματος καὶ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἕκαστον τῶν τμημάτωε κεχωρισμένως.

Ἐὰν δὲ ἡ δοκὸς εἶνε πεπακτωμένη ἐπί τινος τῶν ἀκραίων αὐτῆς ὑποστηριγμάτων, τὸ ὑποστήριγμα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ δύο ἁπλῶν ὑποστηριγμάτων ἐφ' ὧν ἡ δοκὸς εἶνε τεθειμένη καὶ ὧν ἡ ἀπόστασις εἶνε ἐλαχίστη καὶ ὡς ἀποτελοῦν ἑπομένως ἓν ἐπὶ πλέον διάστυλον. Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τοὺς τύπους (3) καὶ (4) τῆς παραγράφου 6 τὸ l_1 ἢ τὸ l_ν διὰ τοῦ 0 εὑρίσκομεν $\beta_1 = \frac{1}{2}$ εἴτε $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Καὶ ἐὰν μὲν $\beta_1 = \frac{1}{2}$, ἡ ἀριστερὰ ἑστία τοῦ *πραγματικοῦ* πρώτου διαστύλου εὑρίσκεται οὐχὶ πλέον ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ὑποστηρίγματος, ὡς τοῦτο θὰ συνέβαινεν ἐὰν ἡ δοκὸς ἦσο ἁπλῶς ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος τούτου τεθειμένη, ἀλλ' εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μήκους τοῦ πραγματικοῦ τούτου διαστύλου. Ἐὰν δὲ $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, ἡ δεξιὰ ἑστία τοῦ πραγματικοῦ τελευταίου διαστύλου τῆς δοκοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ διαστύλου τούτου ἀπὸ τοῦ τελευταίου ὑποστηρίγματος τῆς δοκοῦ.

Οὕτως ἐὰν ἡ δοκὸς εἶνε πεπακτωμένη ἐπὶ τοῦ ἀκραίου ἀριστεροῦ αὐτῆς ὑποστηρίγματος, ἡ πρὸς ὑπολογισμὸν αὐτῆς μέθοδος κατ' οὐδὲν διαφέρει τῆς ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις ἐκτεθείσης, ἐξαιρέσει τοῦ ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς τῶν β ἀντὶ νὰ εἶνε 0 ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2}$.

22. *Ὑπολογισμὸς τῶν συμμετρικῶν δοκῶν.* — Ὀνομάζονται *συμμετρικαὶ δοκοὶ* ἐκεῖναι, ὧν τὰ ἀκραῖα διάστυλα ἔχουσι τὸ αὐτὸ μῆκος l' καὶ ὧν τὰ ἐνδιάμεσα διάστυλα ἔχουσιν ὁμοίως τὸ αὐτὸ μῆκος l, διάφορον τοῦ l'. Σχεδὸν πάντοτε αἱ ἐπὶ πολλῶν ὑποστηριγμάτων γέφυραι κατασκευάζονται κατὰ τὸν τύπον τοῦτον. Ἐκ τῆς διπλῆς δὲ ταύτης συνθήκης

$$l_1 = l_\nu$$

καὶ $$l_2 = l_3 = \ldots\ldots = l_{\nu-2} = l_{\nu-1},$$

προκύπτουσι σπουδαῖαι ἁπλοποιήσεις ἐν τοῖς τύποις, οἵτινες χρησιμεύουσιν εἰς τὴν χάραξιν τῶν σχεδιαγραμμάτων τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν καὶ τῶν τμητικῶν τάσεων.

Νομίζομεν ἀνωφελὲς νὰ ἐκταθῶμεν ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, τῆς προηγουμένως ἐκτεθείσης μεθόδου μὴ μεταβαλλομένης ἀλλὰ μόνον ἁπλοποιουμένης.

Ἐν τοῖς πλείστοις τῶν ἐγχειριδίων τῆς γεφυροποιητικῆς, εὑρίσκει τις ἀριθμητικοὺς πίνακας παρέχοντας ἀμέσως τὰς τιμὰς τῶν ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων καμπτουσῶν ῥοπῶν ἢ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἐξισώσεων τῶν παριστωσῶν τὰ M, M′ καὶ M″ διὰ σειρὰν συνήθων τιμῶν τοῦ λόγου $\frac{l'}{l}$. Εἶνε δυνατὴ τότε ἡ χάραξις τῶν σχεδιαγραμμάτων ἄνευ προηγουμένου ὑπολογισμοῦ.

Διὰ λόγους ἐν τούτοις καλῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ μετάλλου καὶ οἰκονομίας, οὓς δὲν θὰ ἀναπτύξωμεν ἐνταῦθα, συμφέρει ὁ λόγος $\frac{l'}{l}$ νὰ μὴ ἀπομακρύνηται πολὺ τῆς τιμῆς $\frac{4}{5}$.

23. *Δοκοὶ μεταβλητῆς τομῆς.* — Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑπετέθη ὅτι ἡ τομὴ τῆς δοκοῦ εἶνε σταθερά. Δὲν ἔχει ὅμως οὕτως ἐν τῇ πράξει. Παραδέχονται ἐν τούτοις πάντοτε τὸν τύπον τῆς συμμετρικῆς δοκοῦ σταθεροῦ ὕψους. Τὰ σχεδιαγράμματα τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν καὶ τῶν τμητικῶν τάσεων χαράττονται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ὡς ἐὰν ἡ δοκὸς ἦτο σταθερᾶς τομῆς, ἀλλὰ μετὰ ταῦτα κανονίζονται τὰ πάχη τῶν πελμάτων οὕτως, ὥστε τὸ μέγιστον ἔργον συμπιέσεως ἢ ἐκτάσεως, ἀνταποκρινόμενον εἰς τὸ ὅριον τῆς καμπτούσης ῥοπῆς τὸ παρεχόμενον ὑπὸ τοῦ σχεδιαγράμματος διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς δυσμενεστέρας ἐπιφορτώσεως νὰ ἐξικνῆται ἐν ἑκάστῃ τομῇ μέχρι τοῦ συμπεφωνημένου ὁρίου ἀσφαλείας χωρὶς νὰ ὑπερβαίνῃ αὐτό.

Αἱ διαστάσεις δοκοῦ μεταβλητῆς τομῆς προσδιορίζονται οὕτως ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἐπιτευχθέντων διὰ δοκὸν σταθερᾶς τομῆς. Τῷ ὄντι ἐν τῇ συμμετρικῇ δοκῷ σταθεροῦ ὕψους ἡ διαδοχὴ τῶν ῥοπῶν ἀδρανείας εἶνε τοιαύτη, ὥστε τὸ ἀκριβὲς διάγραμμα τὸ βασιζόμενον ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ σχήματος τοῦ ἔργου διαφέρει ἐλάχιστα τοῦ διαγράμματος τὸ ὁποῖον κατασκευάζομεν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει σταθερᾶς τομῆς. Τὸ διαπραττόμενον λάθος, ἀσήμαντον πρακτικῶς, εἶνε τοσούτῳ μικρότερον, ὅσῳ ὁ λόγος τοῦ ἀνοίγματος ἑνὸς παροχθίου διαστύλου πρὸς τὸ ἄνοιγμα ἑνὸς ἐνδιαμέσου τοιούτου εἶνε ἐγγύτερος πρὸς $\frac{4}{5}$. Ἀλλὰ θὰ ἐξετίθετό τις εἰς τὴν διάπραξιν σπουδαίου λάθους, ἐὰν ἐφήρμοζε τὰ ἀνωτέρω εἰς δοκὸν μὴ συμμετρικὴν ἢ εἰς δοκὸν μεταβλητοῦ ὕψους συμμετρικὴν ἢ μή.

Γ. Β. ΓΡΑΒΑΡΗΣ

ΠΟΙΚΙΛΑ

Αἱ μέγισται ποσότητες τῶν ἐκμεταλλευσίμων ὀρυκτῶν ἐν Εὐρώπῃ. — Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει τὸ ζήτημα περὶ τοῦ ποῖαι εἶναι αἱ μέγιστοι ποσότητες τῶν διαφόρων μεταλλευμάτων, αἵτινες ἀνεκαλύφθησαν καὶ ἐβεβαιώθησαν μέχρι τοῦδε ἐν Εὐρώπῃ καὶ ποία ἡ σχέσις αὐτῶν πρὸς τὰς ποσότητας, τὰς ὁποίας ἐγκλείουν ἄλλαι ἤπειροι. Ὀλίγοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους δανειζόμεθα ἐκ τοῦ τελευταίως ἐκδοθέντος ἔργου τῶν Beyschlag, Krusch καὶ Vogt (*Die Lagerstätten der nutzbaren Mineralien und Gesteine*), θὰ δώσουν ἰδέαν τινὰ περὶ τοῦ θέματος τούτου. Σήμερον θὰ γείνῃ λόγος περὶ τῶν μεταλλευμάτων τοῦ σιδήρου.

Τὰ μεγαλοπρεπέστερα καὶ πλουσιώτερα σιδηροῦχα κοιτάσματα ἐν Εὐρώπῃ εἶναι τὰ τῶν Kiirunavaara καὶ Luossavaara εἰς τὴν βόρειον Σουηδίαν, πλησίον τοῦ 68^0 παραλλήλου κύκλου. Τὸ μετάλλευμα εἶναι ἐνταῦθα πλουσιώτατον εἰς σίδηρον, περιέχει 63 - 64 %, εἶναι ἐπίσης πλούσιον εἰς φωσφόρον καὶ σχηματίζει παμμέγεθες φλεβοειδὲς κοίτασμα· τὸ κοίτασμα τοῦτο περιέχει εἰς βάθος μέχρι τῆς στάθμης τῆς θαλάσσης 232 - 292 ἑκατομμύρ. τόννους περίπου· κάτωθεν τοῦ σημείου τούτου ἕκαστον μέτρον ἐκμεταλλευόμενον θὰ δίδῃ 1,4 ἑκατομμ. τόννους, οὕτως ὥστε, ἐὰν δεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἐκμετάλλευσις θὰ φθάσῃ μέχρι βάθους 300 μ., ἔπεται ὅτι ἡ ὑπάρχουσα ποσότης ἐν γένει ὑπερβαίνει τὰ 700 ἑκατομμ. τόννους.

Αἱ μαγνητομετρικαὶ ὅμως μετρήσεις, αἵτινες