Ἐν δὲ τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν αἱ ταχύτητες u, v, w καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ Q καὶ τοῦ ϑ εἶναι πολὺ μικραὶ ποσότητες, δύναται νὰ τεθῇ:

13) $$dQ = \alpha^2 d\vartheta,$$

ὅπου α σταθερὰ θετικὴ ποσότης. Ἐὰν δὲ τεθῇ καὶ

14) $$\vartheta = \vartheta_0(1+\sigma),$$

ὅπου ϑ_0 σταθερά τις μικρὸν διαφέρουσα τῶν τιμῶν τῆς ϑ καὶ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν μόνον ὅροι κατωτάτης τάξεως, προκύπτει ἐκ μὲν τῶν ἐξισώσεων 11), 13) καὶ 14)

15) $$S = \alpha^2\sigma,$$

ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων 12) καὶ τῆς:

$$0 = \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z}$$

προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις:

16) $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha^2\sigma = 0$$

17) $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Ἐντεῦθεν δὲ προκύπτει διὰ φ ἡ ἐξίσωσις:

18) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις φ ᾖναι ἀνεξάρτητος τῶν x καὶ y, ἡ ἐξίσωσις 18) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

19) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

ἧς τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα εἶναι:

20) $$\varphi = f_1(z-\alpha t) + f_2(z+\alpha t),$$

ὅπου f_1 καὶ f_2 οἱαιδήποτε συναρτήσεις τῶν ἐν αὐταῖς $z - \alpha t$ καὶ $z + \alpha t$.

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΒΑΡΩΝ ΕΚ ΡΟΠΩΝ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

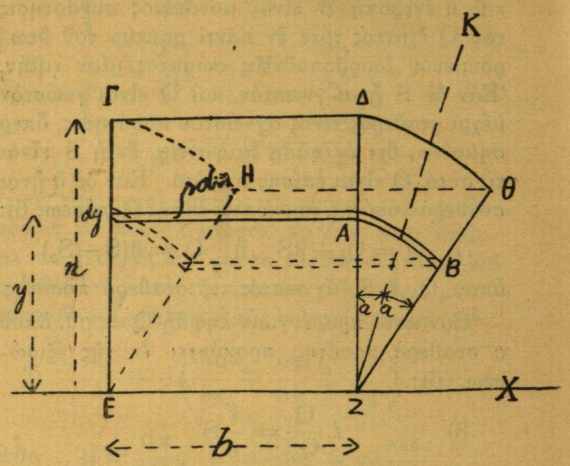
Δίδομεν εἰς τοὺς ἑπομένους μέθοδον πρὸς προσδιορισμὸν κεντροβαρῶν ἐκ περιστροφῆς στερεῶν συναρτήσει τῶν ῥοπῶν ἀδρανείας.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἰσχύει διὰ πᾶν ἐκ περιστροφῆς στερεὸν οἱαδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ περιστρεφομένη καὶ τὸ στερεὸν παράγουσα ἐπιφάνεια ὡς καὶ οἱαδήποτε ἂν ᾖ ὁ ἄξων καὶ ἡ γωνία περιστροφῆς.

Ἰσχύει δὲ καὶ διὰ κεντροβαρῆ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς.

Τὴν μέθοδον ταύτην δὲν ἠδυνήθημεν ἡμεῖς τοὐλάχιστον νὰ ἀνεύρωμεν ἐν τῇ φιλολογίᾳ.

Ἔστω τὸ ἁπλοῦν ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ περιστρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα x (ἰδὲ σχ. 1) κατὰ γωνίαν 2α καὶ σχηματίσαν ΓΔΗΘΕΖ ὄγκον V.



Σχῆμα 1.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ εἰς ἀπόστασιν y διεγραμμισμένον στοιχεῖον ἐπιφανείας df, βλέπομεν ὅτι τοῦτο κατὰ τὴν περιστροφὴν διαγράφει στοιχειώδη ὄγκον dV παριστῶντα κυλινδρικὸν τμῆμα μὲ τόξον

$$AB = y \text{ τοξ } 2\alpha$$

Εὐκόλως δὲ συνάγομεν ὅτι:

$dF = b\,dy$ καὶ κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ Γουλδίνου

$dV = dF\,y$ τοξ 2α.

Ἑπομένως $$V = \text{τοξ } 2\alpha \int_0^h y\,dF = \text{τοξ } 2\alpha M$$

ἔνθα M ἡ στατικὴ ῥοπὴ τοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x ἴση, ὡς γνωστόν, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κεντροβαροῦς αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν x.

Οὕτω λοιπὸν προσδιωρίσαμεν τὸν ὄγκον V τοῦ ἐκ περιστροφῆς στερεοῦ συναρτήσει τῆς στατικῆς ῥοπῆς M τοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ κεντροβαροῦς τοῦ στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας ἔχοντος ἴχνος ZK ἔχομεν ἀνάγκην ἀποστάσεως τοῦ κεντροβαροῦς στερεοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος x.

Καλῶ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν y_k, θὰ ἔχωμεν τότε θέτοντες, ὡς συνήθως τὴν στατικὴν ῥοπὴν τοῦ ὅλου ὄγκου V ὡς ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν στατικῶν ῥοπῶν τῶν στοιχειωδῶν ὄγκων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ θεωροῦντες, ὅτι ὁ θεωρηθεὶς στοιχειώδης ὄγκος dV (ὁ διαγραφόμενος ὑπὸ τοῦ στοιχείου ἐπιφανείας dF) ἔχει τὸ αὐτὸ κεντροβαρές, ὅπερ καὶ τὸ τόξον AB, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$Vy_k = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}\int_0^h y\,dV = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}\,\tau o\xi\,2\alpha\int_0^h y^2 dF$$

Ἐπειδὴ δὲ ὡς γνωστὸν τὸ $\int_0^h y^2 dF$ παριστᾷ τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας J τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΕΖ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x διὰ τοῦτο ἔχομεν:

$$Vy_k = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}\,\tau o\xi\,2\alpha J$$

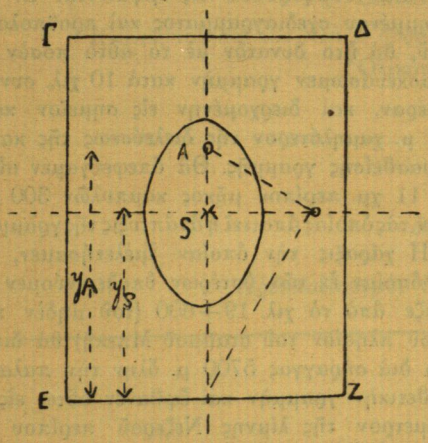
Καὶ ἑπομένως διαιροῦντες διὰ V τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ θεωροῦντες ὅτι

$$V = \tau o\xi\,2\alpha M$$

ἔχομεν:

$$y_k = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}\,\frac{J}{M}\quad (T)$$

Τύπος γενικὸς ἰσχύων διὰ κεντροβαρῆς παντὸς εἴδους στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς ἢ καὶ ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.



Σχῆμα 2.

Ὁ τύπος (T) δύναται νὰ μετασχηματισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς. Ὡς γνωστὸν ὑπάρχει

$$J = Fi^2$$

ἔνθα i = ἀκτῖνι περιφορᾶς = ἡμιάξονι κεντρικῆς ἐλλείψεως ἀδρανείας (ἰδὲ σχ. 2). Πρὸς δὲ

$$M = Fy_s$$

ὅθεν

$$\frac{J}{M} = \frac{i^2}{y_s} = y_a$$

ἔνθα y_a = τῇ ἀποστάσει τοῦ ἀντιπόλου A ἀπὸ τοῦ ἄξονος x λαμβανομένου ὡς ἀντιπολικῆς τοῦ σημείου A σχετικῶς πρὸς τὴν κεντρικὴν ἔλλειψιν ἀδρανείας λαμβανομένην ὡς διατακτικὴν καμπύλην.

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν

$$\frac{J}{M} = y_a \qquad \text{εἰς τὸν τύπον (T)}$$

εὑρίσκομεν:

$$y_k = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}\,y_a \quad (T')$$

Καὶ ὁ μὲν τύπος (T) σημαίνει ἐν λέξεσιν ὅτι:

«Ἡ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπόστασις y_k τοῦ κεντροβαροῦς στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας διὰ τῆς στατικῆς ῥοπῆς τῆς περιστρεφομένης ἐπιφανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς ἐπὶ τὸ πηλίκον $\frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}$, ἔνθα α = ἡμισείᾳ γωνίᾳ περιστροφῆς».

Ὁ δὲ τύπος (T') σημαίνει ἐν λέξεσιν ὅτι:

«Ἡ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπόστασις y_k τοῦ κεντροβαροῦς στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται τῇ ἀπσστάσει y_a τοῦ ἀντιπόλου A τοῦ ἄξονος περιστροφῆς (λαμβανομένου ὡς ἀντιπολικῆς σχετικῶς πρὸς τὴν κεντρικὴν ἔλλειψιν ἀδρανείας) ἐπὶ τὸ πηλίκον $\frac{\eta\mu\,\alpha}{\tau o\xi\,\alpha}$, ἔνθα α = ἡμισείᾳ γωνίᾳ περιστροφῆς».

Δυνάμεθα δὲ ἀναλόγως τῶν περιστάσεων νὰ μεταχειριζώμεθα ὁτὲ μὲν τὸν ἕνα, ὁτὲ δὲ τὸν ἕτερον τῶν ὡς ἄνω τύπων.

ΑΡ. Φ. ΚΟΥΣΙΔΗΣ

Ο ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΟΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ ΛΑΡΙΣΣΗΣ

ΥΠΟΔΕΙΚΝΥΟΜΕΝΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΧΑΡΑΞΙΝ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

Ὁ Σιδηρόδρομος Πειραιῶς-Λαρίσσης ἐπερατώθη πρὸ τριῶν ἐτῶν, καὶ ἐτέθη εἰς κοινὴν χρῆσιν, μετὰ πολλὰς περιπετείας, ἅς, ὡς γνωστὰς τοῖς πᾶσι, κρίνομεν περιττὸν νὰ ἐξιστορίσωμεν, περιοριζόμενοι εἰς τὸν ἔλεγχον τῆς χαράξεως τῆς γραμμῆς, τὸν ὁποῖον ἐν πολλοῖς εὑρίσκομεν πλημμελῆ, ἐπὶ καταφανεῖ ζημίᾳ τῶν συμφερόντων τοῦ Δημοσίου.