



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ
ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΤΩΝ ΚΟΚΚΩΔΩΝ
ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Αθανασάκος

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ: Β.Κυτόπουλος
Επ.Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αιμ.Σιδερίδης
Λέκτωρ Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2008

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1.1 Ιστορική εξέλιξη των συνθέτων υλικών.....	Σελ.8
1.2 Η εξέλιξη των πολυμερών.....	Σελ.10
1.3 Γενικός ορισμός σύνθετου υλικού.....	Σελ.11
1.4 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών.....	Σελ.12
1.5 Ινώδη σύνθετα υλικά (Fiber reinforced composites).....	Σελ.12
1.6 Παρασκευή των ινωδών σύνθετων υλικών.....	Σελ.15
1.7 Αρχική μορφή των υλικών.....	Σελ.15
1.8 Ποιοτικός έλεγχος.....	Σελ.16
1.9 Πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών.....	Σελ.16
1.10 Βασικά χαρακτηριστικά των εποξειδικών ρητινών.....	Σελ.18
1.11 Οι βασικές εφαρμογές στις εποξειδικές ρητίνες.....	Σελ.19
1.12 Πρόσθετα υλικά στα πολυμερή.....	Σελ.20
1.12.1 Τεχνολογικές απαιτήσεις για τα πρόσθετα υλικά.....	Σελ.21
1.12.2 Μέθοδοι ενσωμάτωσης των πρόσθετων υλικών στα πολυμερή.....	Σελ.22
1.12.3 Πλαστικοποιητές για τις εποξειδικές ρητίνες.....	Σελ.22
1.13 Μεταβολές στην θερμοκρασία της υαλώδους κατάστασης (Tg).....	Σελ.23

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

2.1 Κοκκώδη σύνθετα υλικά.....	Σελ.26
2.1.1 Μέτρο ελαστικότητας.....	Σελ.26
2.1.2 Τάση θραύσης.....	Σελ.30
2.1.3 Παραμόρφωση θραύσης.....	Σελ.31
2.2 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή.....	Σελ.31
2.3 Η ενδιάμεση φάση στα σύνθετα υλικά (INTERPHASE).....	Σελ.32
2.4 Η απόσβεση ρεολογικών μοντέλων.....	Σελ.34
2.5 Ορισμοί των σταθερών που περιγράφουν την απόσβεση.....	Σελ.36
2.6 Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας και μιγαδική συμβατότητα.....	Σελ.38
2.7 Αρχή της αντιστοιχίας.....	Σελ.40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕΣΩ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

3.1 Μέτρο ελαστικότητας κοκκώδους υλικού.....	Σελ.42
3.1.1 Επιλογή απλουστευτικού μοντέλου μελέτης.....	Σελ.42

3.1.2 Θεωρητική ανάλυση.....	Σελ.48
3.2 Υλικά και πειραματική μελέτη.....	Σελ.58
3.3 Αποτελέσματα.....	Σελ.59

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.1.1 Δυναμικές μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών.....	Σελ.63
4.1.2 Δυναμικά μέτρα ελαστικότητας του σύνθετου υλικού.....	Σελ.63
4.1.3 Υπολογισμός των δυναμικών μέτρων ελαστικότητας	Σελ.65
4.2 Θεωρητικές σχέσεις άλλων ερευνητών.....	Σελ.87
4.3 Υλικά και πειραματική μελέτη.....	Σελ.90
4.4 Αποτελέσματα.....	Σελ.91
Συμπεράσματα.....	Σελ.94
Βιβλιογραφία.....	Σελ.95

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή αναφέρεται στις μηχανικές ιδιότητες των κοκκωδών συνθέτων υλικών. Έχει εκπονηθεί από τον Σεπτέμβριο του 2007 μέχρι τον Ιούλιο του 2008 στον Τομέα Μηχανικής του ΕΜΠ. Η μηχανική των συνθέτων υλικών αποτελεί σήμερα έναν μεγάλο κλάδο της Μηχανικής ο οποίος συνεχώς διευρύνεται και αναπτύσσεται. Στην εργασία αυτή εξετάζονται οι στατικές και δυναμικές ελαστικές σταθερές κοκκωδών συνθέτων υλικών με τη βοήθεια ενός τριφασικού μοντέλου το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν τις δυο κύριες φάσεις, το έγκλεισμα και την μήτρα, αλλά και μια τρίτη η οποία προκύπτει από την επίδραση γειτονικών εγκλεισμάτων βάσει κατανομής αυτών στον χώρο. Τα αποτελέσματα από αυτό το μοντέλο συγκρίνονται με αυτά τα οποία ελήφθησαν από θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών καθώς και με πειραματικά αποτελέσματα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες την παρούσα εργασία κ.Αιμ.Σιδερίδη και κ.Β.Κυτόπουλο. Τόσο η πολύτιμη επιστημονική τους βοήθεια, όσο και οι χρήσιμες συμβουλές τους, έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της διπλωματικής μου εργασίας αφενός αλλά και στην αποκόμιση γνώσεων στο ερευνητικό πεδίο των συνθέτων υλικών αφετέρου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα από τα σύγχρονα πεδία εφαρμογής της Μηχανικής είναι ως γνωστόν η μελέτη των συνθέτων υλικών τα οποία ευρίσκονται σε συνεχή εξέλιξη την τελευταία τριαντακονταετία. Σε αυτήν την κατηγορία υλικών ανήκουν τα κοκκώδη και τα ινώδη υλικά, των οποίων ιδιότητες όπως η αντοχή, οι στατικές ελαστικές σταθερές, οι δυναμικές ελαστικές σταθερές και οι συντελεστές θερμικής διαστολής επηρεάζονται πλην άλλων και από την πρόσφυση του εγκλείσματος και της μήτρας όπως επίσης και από την επίδραση των γειτονικών εγκλεισμάτων.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της μεταβολής της μηχανικής συμπεριφοράς της εποξειδικής ρητίνης όταν αυτή περιέχει εγκλείσματα. Σε όλα τα πεδία της μελέτης η ρητίνη είναι διγλυκιδιο-αιθέρας της διφαινόλης Α (DGEBA), σκληρυμένη με τριεθυλενοτετραμίνη και είναι ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου σε διάφορες περιεκτικότητες.

Η όλη μελέτη χωρίζεται στα εξής μέρη: Το κεφάλαιο 1 αναφέρεται στα βασικά χαρακτηριστικά των πολυμερών, τις ιδιότητες, τις εφαρμογές και στις γενικές έννοιες-ορισμούς εποξειδικών ρητινών. Επίσης αναφέρεται στην παρουσία των προσθέτων υλικών στα πολυμερή και στις τεχνολογικές απαιτήσεις τους.

Το κεφάλαιο 2 αναφέρεται λεπτομερώς στην μελέτη του συνθέτου και στην δημιουργία φάσεων, επεξηγώντας τις απαραίτητες έννοιες. Επιπλέον παρουσιάζει τις μηχανικές ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών ενισχυμένων με εγκλείσματα σιδήρου με βάση τους θεωρητικούς τύπους διαφόρων ερευνητών.

Το κεφάλαιο 3 περιγράφει το θεωρητικό μοντέλο το οποίο αναπτύχθηκε σε αυτήν την εργασία και το οποίο περιέχει τις δυο κύριες φάσεις, το εγκλείσμα και την μήτρα, αλλά και μια τρίτη η οποία προκύπτει από την επίδραση γειτονικών εγκλεισμάτων βάσει κατανομής αυτών στον χώρο. Θεωρώντας κάποια διάταξη των εγκλεισμάτων στο χώρο δημιουργήθηκε ένα τριφασικό μοντέλο (μήτρα, εγκλείσμα, μήτρα) από τρεις ομόκεντρες σφαίρες. Χρησιμοποιώντας την θεωρία ελαστικότητας υπολογίσθηκαν οι ελαστικές σταθερές του σύνθετου υλικού. Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν από αυτό το θεωρητικό μοντέλο συγκρίθηκαν με αυτά που υπολογίσθηκαν από τους θεωρητικούς τύπους άλλων ερευνητών καθώς και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από πειράματα εφελκυσμού σε σύνθετο υλικό από εποξειδική ρητίνη ενισχυμένης με κόκκους σιδήρου σε διάφορες περιεκτικότητες.

Οι δυναμικές μηχανικές ιδιότητες των συνθέτων υλικών, όπου η μεταβολή της συχνότητας είναι ένας σημαντικός παράγοντας, αποτελούν το αντικείμενο του κεφαλαίου 4. Περιγράφεται το θεωρητικό μοντέλο και η εξαγωγή των θεωρητικών εκφράσεων που δίνουν το μέτρο αποθήκευσης (storage modulus) E'_c και το μέτρο απώλειας (loss modulus) E''_c με την εφαρμογή της αρχής της αντιστοιχίας (correspondance principle) που λαμβάνει υπ' όψιν την μεταβολή της συχνότητας. Τα αποτελέσματα τα οποία βρέθηκαν και πάλι συγκρίθηκαν με αυτά που υπολογίσθηκαν από τους θεωρητικούς τύπους άλλων ερευνητών καθώς και με τα πειραματικά αποτελέσματα που βρέθηκαν από πειράματα ταλαντώσεων στο σύνθετο υλικό εποξειδικής ρητίνης-κόκκων σιδήρου σε διάφορες περιεκτικότητες. Οι αποκλίσεις οι οποίες παρατηρήθηκαν στην μεταβολή του E'_c με την περιεκτικότητα σε κόκκους, σε σχέση με τις θεωρίες άλλων ερευνητών

απότελουν μια ισχυρή ένδειξη ύπαρξης δεσμού μεταξύ κόκκων σιδήρου και εποξειδικής ρητίνης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Οι ταχέως αναπτυσσόμενες εφαρμογές των συνθέτων υλικών στα τελευταία έτη, δημιούργησαν μεγάλη αισιοδοξία για το μέλλον της τεχνολογίας τους. Αν και σύνθετα υλικά κατασκευασμένα από άνθρωπο προυπήρχαν εδώ και χιλιάδες έτη, η υψηλή τεχνολογία τους εξελίχθηκε στην αεροδιαστημική βιομηχανία μόνον τα τελευταία εικοσιπέντε έτη. Οι δεξαμενές και τα μεγάλα δοχεία τα οποία κατασκευάζονται με την μέθοδο περιτυλίξεως ινών υάλου υπήρξαν η πρώτη εφαρμογή χρήσεως των μοντέρνων σύνθετων υλικών.

Στην συνέχεια, στην δεκαετία του '60 ήρθαν οι ίνες βορίου οι οποίες συντέλεσαν στη δημιουργία προγραμμάτων για την προώθηση της κατασκευής αεροσκαφών από σύνθετα υλικά για την αεροπορία των Η.Π.Α. Ο οριζόντιος σταθεροποιητής (stabilizer) των αεροσκαφών F-111 υπήρξε το πρώτο τεμάχιο αεροσκάφους που κατασκευάστηκε από σύνθετο υλικό.

Η παραγωγή σταθεροποιητών από σύνθετα υλικά για τα αεροσκάφη F-14 στην αρχή της δεκαετίας του '70 ήταν ένα άλλο σημαντικό βήμα. Ακολούθησε ο σταθεροποιητής των F-15 και το πηδάλιο και ο σταθεροποιητής για τα F-16. Στην αρχή της δεκαετίας του '80 το νεοκατασκευασθέν Boeing 767 περιείχε σχεδόν δύο τόννους συνθέτου υλικού στις δοκούς δαπέδου και σε όλες τις επιφάνειες ελέγχου. Το γιγαντιαίο Σοβιετικό μεταγωγικό Antonov 124, έχει συνολικά 5500Kg συνθέτου υλικού από τα οποία τα 2500Kg περιέχουν ίνες γραφίτου. Το πτερύγιο των Airbus A310-300 κατασκευασμένο όλο από σύνθετο υλικό, είναι μια εντυπωσιακή κατασκευή παρά την απλότητα του. Σχεδόν όλα τα εμφανιζόμενα αεροσκάφη κάνουν εκτεταμένη χρήση των σύνθετων υλικών. Παραδείγματα είναι το αεροσκάφος Rafale της Dassault-Brequet, το Lavi της Ισραηλινής αεροπορικής βιομηχανίας, το JAS-39 Gripen της Σουηδικής Saab-Scania και το μαχητικό αεροσκάφος (European Fighter Aircraft) της Βρετανίας, Γερμανίας, Ιταλίας και Ισπανίας.

Το 1986, το Voyager, ένα άλλο αεροπλάνο κατασκευασμένο εξ'ολοκλήρου από σύνθετα υλικά δημιούργησε ένα παγκόσμιο ρεκόρ ταξιδεύοντας άνευ στάσεως. Το αεροπλάνο ήταν πολύ ελαφρύ και παρουσίαζε καταπληκτική ελαστικότητα και ανθεκτικότητα έναντι των καταιγίδων που συνάντησε. Σύνθετα υλικά υψηλής αντοχής από ίνες γραφίτου χρησιμοποιούνται επίσης για την κατασκευή των διπλών πηδάλιων μιας νέας επαναστατικού τύπου θαλαμηγού μήκους 12 μέτρων, η οποία όπως και το Voyager καθιέρωσαν τη χρήση υλικών υψηλής τεχνολογίας σε καθημερινής χρήσεως κατασκευές.

Τα σύνθετα υλικά και η εξέλιξη του τρόπου επεξεργασίας τους αποτέλεσαν έναν από τους βασικούς παράγοντες για την ανάπτυξη της σύγχρονης τεχνολογίας. Ίνες γραφίτου και 'aramid' έγιναν εμπορεύσιμες στην αρχή της δεκαετίας του '70. Οι εποξειδικές ρητίνες διατίθενται για πολλές χρήσεις.

Εκτός της αεροπορικής βιομηχανίας, τα υψηλής τεχνολογίας σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές και σε άλλους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Ναυτικά σκάφη, κουπιά, ποδήλατα, παντός είδους αθλητικά είδη (ρακέτες τένις, κοντάρια γκόλφ κλπ.) και σχεδόν κάθε εξάρτημα όπου το βάρος, η ακαμψία και η αντοχή παίζουν σημαντικό ρόλο στην λειτουργικότητα του, είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά. Εκατοντάδες τόννοι σύνθετων υλικών με ίνες άνθρακος χρησιμοποιήθηκαν ως πρώτη ύλη, από το 1993, για την κατασκευή ρακετών του τένις με αποτέλεσμα ρακέτες και σύνθετα υλικά να θεωρούνται έννοιες ταυτόσημες. Το 1985 στην διάσκεψη της Εταιρείας Μηχανικών, που έλαβε χώρα στο Detroit των Η.Π.Α., εκφράστηκε η άποψη ότι η χρήση των σύνθετων υλικών στην βιομηχανία αυτοκινήτων θα είναι τόσο μεγάλη όσο και των ηλεκτρονικών συστημάτων. Για όλα αυτά είναι χρήσιμο να κάνουμε μια ιστορική αναδρομή και να παρακολουθήσουμε την σταδιακή εξέλιξη των υλικών αυτών δια μέσου των αιώνων, η οποία παρουσίασε μια αλματώδη πρόοδο κατά την διάρκεια των τελευταίων 25 ετών.

Η έννοια του σύνθετου υλικού κατ' αρχήν μπορεί να δοθεί διαισθητικώς ως εξής : 'Ένα υλικό χαρακτηρίζεται ως σύνθετο, εξεταζόμενο μακροσκοπικώς, όταν σχηματίζεται από το συνδυασμό δυο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διάφορες των αρχικών υλικών που το δημιουργήσαν'. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων των επί μέρους υλικών που το αποτελούν ή και εντελώς διάφορες ιδιότητες από αυτά.

Με τη βοήθεια αυτού του ορισμού θα αναφέρουμε την σταδιακή εξέλιξη των υλικών αυτών και τη χρήση τους από τον άνθρωπο δια μέσου των αιώνων.

Από τη Βίβλο φαίνεται ότι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος 'κόντρα πλακέ' όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου έχουν τη δυνατότητα να συνδυαστούν καταλλήλως ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στην στρέβλωση, οι οποίες προκαλούνται από την υγρασία. Επίσης, στην Αίγυπτο και στη Μεσοποταμία εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου 'δεμένο' με άσφαλτο. Οι Ασύριοι κατασκεύασαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Το Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά τα οποία έχουν μεγάλους λόγους αντοχής/βάρος και ακαμψία/βάρος χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές όπου το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα όπως π.χ. αεροσκάφη.

Αυτό είναι, εν ολίγοις φυσικά, το ιστορικό των σύνθετων υλικών. Είναι εμφανές με όσα αναφέραμε παραπάνω ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα χρόνια της υπάρξεως του στη γη είχε ενστικτωδώς αντιληφθεί την έννοια του σύνθετου υλικού, δηλαδή είχε 'διαισθανθεί' ότι ο συνδυασμός δυο ή περισσότερων υλικών, από μακροσκοπική άποψη έδινε τη δυνατότητα κατασκευής ενός τρίτου, σύνθετου, το οποίο ικανοποιούσε ορισμένες 'ποιοτικές απαιτήσεις' της κατασκευής στην οποία επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί.

Η ταχύτητα με την οποία εξελίσσονται τα σύνθετα υλικά δεν παρουσιάζεται η ίδια δια μέσου της ιστορίας τους. Μέχρι και τον 19ο αιώνα η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19ου αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κλπ. , ούτε από άποψη ποιότητας ούτε από μεθόδους κατασκευής. Η πραγματική εκρηκτική εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώνεται τον 20ο αιώνα και

μάλιστα τα τελευταία 30-35 έτη, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Αυτό είναι συνέπεια μιας άλλης εκρηκτικής εξελίξεως της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων, των πολυμερών[1].

1.2 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

Το μόριο ενός πολυμερούς είναι ένα μόριο μεγάλου μεγέθους (μακρομόριο) το οποίο αποτελείται από επαναλαμβανόμενες δομικές μονάδες. Αυτές είναι απλά χημικά παράγωγα τα οποία προέρχονται από τα αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά με άνοιγμα διπλού δεσμού.

Τα γιγαντιαία μόρια ή πολυμερή συνθέτουν το υλικό όλων των ζωντανών οργανισμών. Τα κύτταρα τόσο των ζωικών όσο και των φυτικών ιστών με το πρωτόπλασμα και τον πυρήνα τους αποτελούνται από τέτοια μόρια. Ωστόσο η μοριακή δομή των πολυμερών και η επίδραση της δομής αυτής επί των ιδιοτήτων των υλικών ήταν άγνωστες ως πριν από λίγες δεκαετίες.

Μόλις αποκαλύφθηκε ότι τα πολυμερή είναι μακριές και με τάξη οργανωμένες αλυσίδες μικροτέρων μορίων, ο άνθρωπος κατόρθωσε να δημιουργήσει κατά βούληση, μέσα στα εργαστήρια, όχι μόνο πολυμερή πανομοιότυπα με τα ήδη γνωστά των ζώντων οργανισμών, κάτι που άλλοτε ήταν εντελώς αδύνατο, αλλά επιπλέον και πρωτότυπα πολυμερή τα οποία δεν συναντιούνται στην φύση. Τα τελευταία είναι και τα πλέον ενδιαφέροντα από την πλευρά των συνθέτων υλικών. Το αποτέλεσμα των επιτευγμάτων αυτών ήταν η δημιουργία πλήθους νέων βιομηχανιών, μεγάλης σπουδαιότητας σήμερα, οι οποίες παράγουν μια τρομακτική ποικιλία από πλαστικές ύλες, σύνθετες υφαντικές ύλες και συνθετικό ελαστικό.

Είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ένα πολυμερές ικανοποιεί τον ορισμό του συνθέτου υλικού ο οποίος δόθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, σε μικροσκοπική όμως κλίμακα, στην κλίμακα του μορίου, διότι αποτελείται από δομικές μονάδες προερχόμενες από αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά τα οποία συνήθως έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από τις δικές τους. Ακόμη, με την πρόσφατη πρόοδο υπάρχει η δυνατότητα να προσχεδιάζεται ένα πολυμερές ούτως ώστε να ικανοποιεί συγκεκριμένες ποιοτικές απαιτήσεις, 'απαιτήσεις σχεδιάσεως', όπως ακριβώς και ένα μακροσκοπικά σύνθετο υλικό. Έτσι, σήμερα ο χημικός των πολυμερών είναι στην πραγματικότητα ένας μοριακός αρχιτέκτονας ο οποίος χρησιμοποιεί τις χημικές γνώσεις του για να παράγει 'μόρια κατά παραγγελία'. Με μια σειρά από βασικά μόρια ως πρώτη ύλη είναι δυνατόν να παράγει ουσίες οι οποίες είναι εύκαμπτες ή άκαμπτες, πυρίμαχες ή επιδεκτικές τήξεως, ελαστικές ή κολλώδεις κ.ο.κ. , για να πετύχει δε, τις επιθυμητές ιδιότητες υπολογίζει σχεδόν πάντοτε τρεις βασικούς παράγοντες :

- α. Την χημική σύνθεση των δομικών μονάδων (μονομερών)
- β. Τις δυνατές μορφές των αλυσίδων των μορίων των πολυμερών οι οποίες μπορεί να σχηματιστούν.
- γ. Τον βαθμό ευθυγραμμίσεως των αλυσίδων αυτών μέσα στο τελικό προϊόν.

Ένα από τα καλύτερα παραδείγματα είναι το νάυλον το οποίο δημιουργείται από τον συμπολυμερισμό του αδιπικού οξέος και της εξαμεθυλενοδιαμίνης. Το μόριο του

νάυλον το έχει επινοήσει και κατασκευάσει ο άνθρωπος για να καλύψει ειδικές ανάγκες του. Έχει ιδιότητες τις οποίες δε διαθέτει κανένα άλλο μόριο στη φύση.

Είναι το πρώτο πλήρες συνθετικό νήμα, μπορεί να ελκυστεί και να επιμηκυνθεί μέχρι 700%, με καλή επανάκτηση, είναι ισχυρότερο από τη φυσική ή τεχνητή μετάξα (ραιγιόν) και η κλωστή του μπορεί να κατασκευαστεί πολύ λεπτότερη από τις ίνες φυσικής μετάξας.

1.3 ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Σύνθετο υλικό ορίζεται εκείνο το υλικό το οποίο αποτελείται από δυο ή περισσότερα υλικά συνδεδεμένα μακροσκοπικά ή μικροσκοπικά, έτσι ώστε να προκύπτει ένα πολυφασικό σύστημα - το σύνθετο υλικό - με φυσικές ιδιότητες διαφορετικές από τις φυσικές ιδιότητες των αρχικών υλικών, τα οποία δύνανται όμως σε πολλές περιπτώσεις να διατηρούν αρκετές από τις αρχικές τους φυσικές ιδιότητες. Δηλαδή κατά την κατασκευή ενός σύνθετου υλικού, μερικές φορές, συμβαίνει χημική αντίδραση μεταξύ των συνιστωσών υλικών, έτσι ώστε η μια φάση να διαφέρει από τα αρχικά υλικά.

Ο όρος 'φάση' χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει ένα οποιοδήποτε ομογενές τμήμα του σύνθετου υλικού.

Ένα ή περισσότερα υλικά μέσα στο σύνθετο υλικό είναι δυνατόν να αποτελούν αντιστοίχως, μία ή περισσότερες συνεχείς φάσεις οι οποίες λέγονται μήτρες, ενώ τα υπόλοιπα υλικά τα οποία είναι δυνατόν να είναι και αυτά ένα ή περισσότερα, θα αποτελούν αντιστοίχως, μία ή περισσότερες ασυνεχείς ή διάχυτες φάσεις οι οποίες λέγονται εγκλείσματα.

Στα σύνθετα υλικά επίσης, παρατηρείται μια περιοχή μεταξύ των ορίων των δυο φάσεων η οποία εμφανίζει φυσικές ιδιότητες διαφορετικές των αρχικών υλικών. Η περιοχή αυτή ονομάζεται ενδιάμεσος φάση.

Είναι προφανές ότι, η κατάταξη ενός σύνθετου υλικού στην οικογένεια των σύνθετων υλικών, είναι κάτι το αυθαίρετο, και εξαρτάται κυρίως από την αντικειμενικότητα του καθενός. Έτσι, θα γίνει προσπάθεια να γίνουν γενικεύσεις οι οποίες να ισχύουν για σύνθετα υλικά διαφόρων τύπων, με διάφορες μεταξύ τους φυσικές ιδιότητες και γεωμετρικές δομές. Εξ'άλλου, εφ'όσον ο ορισμός, ο οποίος έχει δοθεί, δεν επιτρέπει να χαραχθεί μια διαχωριστική γραμμή μεταξύ των μονολιθικών και των σύνθετων υλικών, σε πολλές περιπτώσεις γίνεται μια αυθαίρετη διάκριση μεταξύ του τι είναι και τι δεν είναι ένα σύνθετο υλικό.

Κατά τη χρήση ενός σύνθετου υλικού η μήτρα και το έγκλεισμα αναλαμβάνουν διαφορετικά καθήκοντα. Η μήτρα είναι το συνδετικό υλικό το οποίο συνδέει, προστατεύει και υποστηρίζει την ασυνεχή φάση, το έγκλεισμα. Επίσης, παίζει σπουδαίο ρόλο επειδή μεταφέρει τις τάσεις μέσα στο σύνθετο υλικό. Το έγκλεισμα συνεισφέρει στην αντοχή και την ακαμψία του σύνθετου υλικού. Η συνεργασία αυτή, της μήτρας και του εγκλείσματος δίνει στο σύνθετο υλικό ιδιότητες οι οποίες σε πάρα πολλές εφαρμογές το καθιστούν ανώτερο και καταλληλότερο από τα κοινά υλικά.

1.4 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Κατά τον πλέον γενικό τρόπο, τα σύνθετα υλικά δύνανται να ταξινομηθούν αναλόγως με τις ιδιότητες της μήτρας ή του εγκλείσματος. Έτσι ως προς την μήτρα διακρίνονται σε :

- α. Σύνθετα υλικά με μεταλλική μήτρα
- β. Σύνθετα υλικά με μη μεταλλική μήτρα.

ενώ ως προς το εγκλείσμα σε :

- α. Σύνθετα υλικά με εγκλείσμα υπό μορφή κόκκων (κοκκώδη σύνθετα υλικά).
- β. Σύνθετα υλικά με εγκλείσμα υπό μορφή φύλλων.
- γ. Σύνθετα υλικά με εγκλείσμα υπό μορφή ινών (ινώδη σύνθετα υλικά).

1.5 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ (FIBER REINFORCED COMPOSITES)

Τα ινώδη σύνθετα υλικά όπως αναφερθήκαμε και προηγουμένως αποτελούνται από εγκλείσμα υπό μορφή ινών μέσα σε μια μήτρα, η οποία δύναται να είναι ένα οποιοδήποτε υλικό από την μεγάλη ποικιλία που χρησιμοποιείται.

Μια ίνα χαρακτηρίζεται από τον πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου που έχει. Ίνες διαφόρων υλικών έχουν βρεθεί να είναι πλέον άκαμπτες και ανθεκτικές από τα αντίστοιχα υλικά στη συνήθη μορφή τους. Για παράδειγμα, τα συνηθισμένα φύλλα υάλου θραύονται σε τάσεις μόνο μερικών δεκάδων MN/m^2 , ενώ ίνες υάλου δύνανται να έχουν αντοχή η οποία ανέρχεται από 2.76GN/m^2 έως 4.83GN/m^2 όταν αυτές διατίθενται στο εμπόριο, με όριο και μέχρι 6.89GN/m^2 όταν αυτές έχουν παρασκευαστεί στο εργαστήριο. Αυτό προφανώς δείχνει ότι η γεωμετρία μιας ίνας είναι αποφασιστικής σημασίας για τον υπολογισμό της αντοχής της ίνας και θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη στις σχετικές εφαρμογές. Το παράδοξο μιας ίνας η οποία έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές τις οποίες έχει το υλικό όταν δεν είναι διαμορφωμένο σε μορφή ίνας οφείλεται στην πλέον τέλεια δομή της ίνας. Έτσι, εντός της ίνας οι κρύσταλλοι του υλικού είναι ευθυγραμμισμένοι κατά τον διαμήκη άξονα της ίνας, επιπλέον υπάρχουν λιγότερες εσωτερικές ατέλειες στην ίνα εν σχέσει με αυτές οι οποίες υπάρχουν στο ίδιο υλικό το οποίο έχει άλλη τυχαία διαμόρφωση.

Οι ίνες δύνανται να διακριθούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία [fibers] περιλαμβάνει ίνες με πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου και με διάμετρο της τάξεως του μεγέθους των κρυστάλλων. Στον πίνακα 1.1 δίνεται η αντοχή και η ακαμψία διαφόρων ινών από τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται γι' αυτό το σκοπό

Υλικό ίνας	Πυκνότης ρ (kN/m ³)	Εφελκυστική Αντοχή S (GN/m ²)	Λόγος S/ρ Αντοχής/πυκν. (km)	Εφελκυστικό Μέτρο ελ/τος E(GN/m ²)	Λόγος E/ρ Ακαμψίας/πυκν. (Mm)
Αργίλιο	26.3	0.62	24	73	2.8
Τιτάνιο	46.1	1.9	41	115	2.5
Χάλυβας	76.6	4.1	54	207	2.7
E-γυαλί	25.0	3.4	136	72	2.9
S-γυαλί	24.4	4.8	197	86	3.5
Άνθρακας	13.8	1.7	123	190	14.0
Βηρύλλιο	18.2	1.7	93	300	16.0
Βόριο	25.2	3.4	137	400	16.0
Γραφίτης	13.8	1.7	123	250	18.0

Πίνακας 1.1 Ιδιότητες των ινών της πρώτης κατηγορίας (fibers)

Σημειώνεται επίσης η πυκνότητα κάθε υλικού και οι λόγοι ακαμψίας/πυκνότητας και αντοχής/πυκνότητας, οι οποίοι είναι ενδεικτικοί της αποτελεσματικότητας της ίνας κυρίως σε κατασκευές ευαίσθητες στο θέμα βάρους όπως π.χ. αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Η δεύτερη κατηγορία [whiskers] περιλαμβάνει ίνες οι οποίες κυρίως έχουν διαμέτρους της αυτής τάξεως με τις πρώτες ύλες δηλαδή της τάξεως μεγέθους των κρυστάλλων, έχουν όμως πολύ μικρότερο μήκος σε σχέση με τις πρώτες παρ'όλο που ο λόγος μήκους/διαμέτρου τους δύναται να φθάσει σε μερικές εκατοντάδες. Οι ίνες αυτές λαμβάνονται με αποκρυστάλλωση σε πολύ μικρότερη κλίμακα εν σχέσει με τις πρώτες και χαρακτηριστικό τους είναι η σχεδόν τέλεια ευθυγράμμιση των κρυστάλλων τους.

Ως συνέπεια αυτού του γεγονότος παρουσιάζουν πολύ ανώτερες ιδιότητες από αυτές τις οποίες παρουσιάζουν οι τυχαίες διαμορφώσεις των αντίστοιχων υλικών. Για παράδειγμα, υλικά όπως ο χάλυβας έχουν αντοχή 20GN/m² η οποία υπολογίζεται από την κρυσταλλική τους δομή, ενώ ο κοινός δομικός χάλυβας έχει στην πράξη αντοχή η οποία κυμαίνεται μεταξύ 0.52GN/m² και 0.69GN/m².

Η ασυμφωνία αυτή οφείλεται στις ατέλειες (ασυνέχειες-dislocation) τις οποίες παρουσιάζει η κρυσταλλική δομή του χάλυβος και εξ'ατίας των οποίων η ροή του χάλυβος λαμβάνει χώρα σε τάσεις μικρότερες των θεωρητικών. Η δεύτερη κατηγορία ινών [whiskers] έχει το χαρακτηριστικό ότι οι ασυνέχειες αυτές περιορίζονται στο ελάχιστο. Έτσι η αντοχή τους αν και δε φθάνει την θεωρητική, υπερβαίνει κατά πολύ την αντοχή του αντίστοιχου υλικού το οποίο έχει τυχαία διαμόρφωση. Για παράδειγμα, η αντοχή αυτή για τον χάλυβα δύναται να φθάσει μέχρι τα 136N/m². Παραδείγματα αυτής κατηγορίας των ινών δίνονται στον πίνακα 1.2.

Υλικό ίνας	Πυκνότης ρ (kN/m ³)	Θεωρητική αντοχή S_T (GN/m ²)	Πειραματική Αντοχή S_E (GN/m ²)	Λόγος S/ρ Αντοχής/πυκν.(Km)	Εφελκυστικό μέτρο ελ/τος E (GN/m ²)	Λόγος E/ρ Ακαμψίας/πυκν. (Mm)
Χαλκός	87.4	12	3.0	34	124	1.4
Νικέλιο	87.9	21	3.9	44	215	2.4
Χάλυβας	76.8	20	13.0	170	200	2.6
B ₄ C	24.7	45	6.7	270	450	18.0
S1C	31.2	83	11.0	350	840	27.0
AlO	38.8	41	19.0	490	410	11.0
C	16.3	98	21.0	1300	980	60.0

Πίνακας 1.2 Ιδιότητες των ινών της δεύτερης κατηγορίας (whiskers)

Μία άλλη ταξινόμηση των ινών θα ήταν εάν τις χωρίζαμε σε δυο κατηγορίες.

α. Ανόργανες ίνες.

β. Οργανικές ίνες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ίνες υάλου, άνθρακος, γραφίτου, βορίου, κλπ. , ενώ στην δεύτερη οι προσφάτως κατασκευασθείσες και υπό εξέλιξη ευρισκόμενες ίνες Kevlar.

Οι ίνες όμως είναι πρακτικά άχρηστες εάν δεν είναι δεμένες μέσα σε μια μήτρα υπό μορφή σύνθετου υλικού. Η μήτρα αυτή χρησιμεύει για την προστασία των ινών, για την συγκράτησή τους, για την μεταφορά των τάσεων κλπ. Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως μήτρες έχουν συνήθως σημαντικά μικρότερη πυκνότητα, αντοχή και ακαμψία από τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως ίνες.

Η πλέον συνήθης εμπορική μορφή ενός ινώδους υλικού είναι η μορφή φύλλου ή στρώσεως (στρώματος). Η στρώση αυτή δύναται να είναι επίπεδη ή μερικές φορές και καμπύλη επιφάνεια. Οι ίνες μέσα στη στρώση δύνανται να είναι διατεταγμένες κατά διάφορες μορφές, δηλαδή να έχουν όλες την ίδια διεύθυνση ή να υπάρχουν διάφορες ομάδες ινών με διαφορετικές κατευθύνσεις, πλεγμένες μεταξύ τους. Όλα αυτά εξαρτώνται από τις 'απαιτήσεις' για τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Επίσης είναι δυνατόν πολλές φορές οι ίνες και η μήτρα να διατίθενται χωριστά στο εμπόριο.

Ένα πρόβλημα στην κατασκευή των σύνθετων υλικών υπό μορφή στρώσεων, δηλαδή των πολυστρωμάτων [laminates] είναι η ύπαρξη διατμητικών τάσεων μεταξύ των φύλλων (στρωμάτων). Οι διατμητικές τάσεις δημιουργούνται από το γεγονός ότι κάθε στρώμα τείνει να παραμορφωθεί ανεξαρτήτως από τα γειτονικά του. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε στρώμα έχει διαφορετικές ιδιότητες αφού αυτές εξαρτώνται από τον προσανατολισμό των ινών του. Αυτές οι διατμητικές τάσεις είναι πολύ μεγάλες στα άκρα ενός πολυστρώματος και δύνανται να προκαλέσουν αποκόλληση των στρωμάτων. Επίσης δύνανται να δημιουργήσουν και οι ορθές τάσεις, οι οποίες αναπτύσσονται μεταξύ των στρωμάτων.

1.6 ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σε αντίθεση με τα κοινά υλικά υπάρχει μια πολύ στενή σχέση μεταξύ της κατασκευής ενός σύνθετου υλικού και της τελικής του χρήσεως. Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα η κατασκευή του σύνθετου υλικού αποτελεί ένα τμήμα της κατασκευής του εξαρτήματος στο οποίο χρησιμοποιείται το σύνθετο υλικό. Εδώ περιοριζόμαστε να αναφέρουμε ότι οι ίνες και η μήτρα συνδέονται μεταξύ τους για να δώσουν ένα στρώμα ινώδους υλικού. Δυο κυρίως στάδια διακρίνουμε σε αυτή την τελική διαδικασία : Στο πρώτο οι ίνες διατάσσονται έτσι ώστε να λάβουν την τελική μορφή την οποία θα έχουν μέσα στο στρώμα. Στο δεύτερο το υλικό της μήτρας εκχύνεται σε υγρή κατάσταση, μετά πολυμερίζεται (όταν υπάρχει πλαστική μήτρα) και ξηραίνεται ούτως ώστε να δημιουργήσει ένα σταθερό δεσμό μεταξύ των ινών. Ο πολυμερισμός μπορεί να γίνει μόνος του ή να υποβοηθείται με άσκηση πίεσεως ή με θέρμανση.

1.7 ΑΡΧΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα υλικά των ινών και της μήτρας διατίθενται στο εμπόριο ξεχωριστά το καθένα ή ενωμένα υπό μορφή στρώματος. Οι ίνες μπορούν να βρεθούν είτε μεμονωμένες είτε πολλές μαζί υπό μορφή μη στριμμένων δεσμών (σαν δεμάτια στάχινα). Αυτές μπορεί να είναι προσανατολισμένες κατά την αυτή διεύθυνση ή και κατά διαφορετικές διευθύνσεις υπό μορφή υφάνσεως. Συνήθως κυκλοφορούν στο εμπόριο διαβρεγμένες με ρητινώδες υλικό όπως πολυεστερική ρητίνη η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί μετά και ως μήτρα. Αυτή η διαδικασία αναφέρεται ως προεμποτισμός [preimpregnation] και αυτή η μορφή των προεμποτισμένων ινών καλείται 'prepreg'. Για παράδειγμα, ίνες μιας διευθύνσεως μέσα σε εποξειδική ρητίνη διατίθενται υπό τη μορφή ταινίας [prepreg tape], όπου οι ίνες βρίσκονται κατά μήκος της ταινίας. Ομοίως, διατίθενται προεμποτισμένα πλέγματα στα οποία οι ίνες υφαίνονται και μετά εμποτίζονται με ρητίνη. Υπάρχουν και άλλες παραλλαγές στις δυο αυτές βασικές μορφές της ίνας και μήτρας.

Το προαναφερθέν προεμποτιζόμενο στρώμα [prepreg] αποτελεί το 'ακατέργαστο υλικό' για μερικές από τις μεθόδους παρασκευής των ινωδών σύνθετων υλικών. Σ' αυτό συνδυάζονται οι με μερικό πολυμερισμό θερμοσκληρυνόμενες ρητίνες με τις ίνες υψηλής αντοχής (βόριο, γραφίτη, κλπ). Η παρασκευή του συνθέτου υλικού ακολουθεί την εξής διαδικασία :

Στρώματα 'prepreg' τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο υπό μορφή τεμαχίου εντός κατάλληλων τύπων (καλουπιών) έως ότου σχηματιστεί το επιθυμητό πάχος. Μετά γίνεται πολυμερισμός της ρητίνης κάτω από κατάλληλες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσεως με αποτέλεσμα το 'δέσιμο' των ινών σε ένα συμπαγές ανομοιογενές υλικό. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας το πάχος του 'prepreg' ελαττώνεται κατά 25% λόγω της ροής της ρητίνης.

Στα πλέον εξελιγμένα σύνθετα υλικά το πάχος είναι κρίσιμος παράγων. Η περιεκτικότητα ινών και οι μηχανικές ιδιότητες εξαρτώνται άμεσα από το τελικό πάχος του υλικού.

Υπάρχουν πέντε βασικές μέθοδοι παρασκευής σύνθετων υλικών :

- α. Η αυτόκλαστη (autoclave) μέθοδος.
 - β. Η μέθοδος της υπό συμπίεση προσαρμοσμένης μεταλλικής μήτρας (press mounted matched metal die).
 - γ. Η μέθοδος της περιτυλίξεως νήματος (filament winding).
 - δ. Η μέθοδος της επιστρώσεως σε ταινία (tapelaying).
 - ε. Η μέθοδος της εξωθήσεως με έλξη (pultrusion).
- Όπως φαίνεται και από τον πίνακα 1.3 κάθε μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς της. Το ποια μέθοδος είναι καλύτερη εξαρτάται από την διαμόρφωση των υπό κατασκευή τεμαχίων και τις απαιτήσεις της παραγωγής.

1.8 ΠΟΙΟΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Η φύση των σύνθετων υλικών υποχρεώνει τον παρασκευαστή να είναι ενήμερος επί ορισμένων ατελειών τους οι οποίες λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της παρασκευής του σύνθετου υλικού. Τέτοιες ατέλειες συνδέονται στενά με την επίτευξη της προβλεπόμενης αντοχής και ακαμψίας του υλικού.

Μερικές από τις συνηθισμένες ατέλειες οι οποίες πρέπει να ελέγχονται και οι οποίες σχετίζονται με την απόδοση του σύνθετου υλικού είναι οι εξής:

1. Ενδιάμεσα κενά τα οποία οφείλονται στην παγίδευση αέρος, αποκόλληση στρωμάτων, έλλειψη ρητίνης κλπ.
2. Ατελής πολυμερισμός της ρητίνης.
3. Υπερβολική ύπαρξη ρητίνης μεταξύ των στρωμάτων.
4. Κενά μήτρας και πόρωση.
5. Κατεστραμμένες ίνες.
6. Λάθος διεύθυνση ινών στις στρώσεις.
7. Εγκλείσματα από ξένα σώματα.
8. Μεταβολή στο πάχος.
9. Μη αποδεκτές συνδέσεις στα στρώματα.
10. Ρυτίδες-ζαρώματα και εξογκώματα τα οποία δημιουργούνται από περιτύλιξη ινών και ευθυγράμμιση στρώσεων.

Η εκτίμηση της φύσεως των ατελειών αυτών γίνεται δια της αμέσου παρατήρησης κατά την παρασκευή των ινωδών σύνθετων

1.9 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Οι ιδιότητες κάθε υλικού συμβατικού ή σύνθετου οι οποίες είναι σημαντικές από δομικής απόψεως μπορούν να διακριθούν σε μηχανικές και μη. Μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι η ακαμψία, η αντοχή, η ολκιμότητα, η σκληρότητα και η συμπεριφορά του υλικού σε κόπωση, ερπυσμό και χαλάρωση. Οι μη μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού περιλαμβάνουν κυρίως την πυκνότητα, την θερμική συμπεριφορά και την αντίσταση σε διάβρωση του υλικού.

Μέθοδος	Προϊόντα παραγωγής	Διαμόρφωση υλικού	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Αυτόκλαστη [Autoclave]	Πολυστρώματα [Laminates]	Επίπεδα και περίπλοκα περιγράμματα Πολυστρώματα με μεταβλητό πάχος Συνδεδεμένες κυψελοειδείς κατασκευές	Προσανατολισμένες ίνες Ομοιόμορφη πίεση Συμπολυμερισμός κolloειδών και προεμποτισμένων ρητίνων Βιομηχανική εμπειρία	Μέγεθος αυτοκλάστου συσκευής Χαρακτηριστικά αυτοκλάστου Ρυθμός θερμάνσεως, ρυθμός πίεσεως, όρια θερμοκρασίας και πίεσεως
Η υπό συμπίεση προσηρμοσμένη μεταλλική μήτρα [matched metal die]	Πολυστρώματα υψηλής παραγωγής με ελεγχόμενες διαστάσεις και με ελάχιστη δευτερεύουσα κατεργασία σε εργαλειομηχανές	Πολυστρώματα περίπλοκων σχημάτων	Προσανατολισμένα στρώματα (οι ίνες δύνανται να προσανατολισθούν κατά βούληση) Κομμένες ίνες δυνατότητα υψηλής παραγωγής	Ακριβά εργαλεία Απαιτείται επίστρωση προσχηματισμού με το χέρι Ακριβά εργαλεία Απαιτείται ακριβής πλήρωση του τύπου(καλούπι) Χαμηλότερη αντοχή από την αυτόκλαστη μέθοδο
Η περιτύλιξη νήματος [Filament winding]	Πολυστρώματα περιτυλιγμένα σε κυλινδρικούς άξονες	Κατασκευή επιφανειών εκ περιστροφής	Ταχεία κάλυψις των επιφανειών Ομοιομορφία στις τάσεις ινών	Δυσκολία στη διατήρηση του προσανατολισμού των ινών σε τεμάχια μεταβλητού περιγράμματος
Η επίστρωσης σε ταινία [tape laying]	Πολυστρώματα υψηλής παραγωγής	Επίπεδα, απλού περιγράμματος τεμάχια σταθερού ή μεταβλητού πάχους	Χαμηλό κόστος εργασίας, επιστρώσεως Χαμηλός συντελεστής παραμένοντος ακατέργαστου υλικού	Περιορισμένη δυνατότητα περίπλοκων περιγραμμάτων Υψηλό εργατικό κόστος λειτουργίας
Η εξώθηση με έλξη [Pultrusion]	Υλικά δομικών εφαρμογών	Γωνίες, δίαυλοι, ράβδοι σταθεράς διατομής	Αυτοματοποιημένη συνεχής διαδικασία επίστρωσης	Περιορίζεται σε κατασκευές σταθερής διατομής

Τα σύνθετα υλικά έχουν πλεονεκτήματα ότι συνήθως διαθέτουν τις καλύτερες ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελούνται, ενώ επιπλέον διαθέτουν και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διαθέτετε. Έτσι οι γενικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών οι οποίες τα καθιστούν ανώτερα από τα συμβατικά μπορεί να είναι οι εξής :

1. Αντοχή.
2. Ακαμψία.
3. Αντίσταση σε διάβρωση.
4. Αντίσταση σε παντός είδους φθορά κατά τη χρήση τους.
5. Κόστος.
6. Βάρος.
7. Συμπεριφορά σε κόπωση.
8. Θερμική μόνωση.
9. Θερμική αγωγιμότητα.
10. Ακουστική μόνωση.

Είναι όμως προφανές ότι ένα σύνθετο υλικό δεν διαθέτει όλες τις παραπάνω ιδιότητες ταυτοχρόνως, αφού δεν υπάρχει ποτέ τέτοια απαίτηση στην πράξη και αφού ορισμένες από τις ιδιότητες είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους (π.χ. θερμική μόνωση, θερμική αγωγιμότητα). Κάθε σύνθετο υλικό κατασκευάζεται έτσι ώστε να διαθέτει μερικές από αυτές τις ιδιότητες.

Από την άποψη των ινωδών σύνθετων υλικών οι ιδιότητες οι οποίες τα καθιστούν πολύ σημαντικά είναι η ακαμψία, η αντοχή, το βάρος και το κόστος τους.

Ένας από τους πλέον κοινούς τρόπους οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να εκφραστεί η αποτελεσματικότητα ενός υλικού είναι οι λόγοι ακαμψία/πυκνότητα και αντοχή/πυκνότητα. Μια τέτοια έκφραση παρόλα αυτά δεν περιλαμβάνει καμία πληροφορία σχετικά με το κόστος της επιτεύξεως ενός τέτοιου λόγου. Επειδή όμως το κόστος επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί από μόνο του ως κριτήριο και έτσι οι προαναφερθέντες λόγοι αποτελούν σπουδαία κριτήρια, μαζί με το κόστος, για τον προσδιορισμό της αποτελεσματικότητας των ινωδών σύνθετων υλικών. Στους πίνακες 1.1 και 1.2 έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι οι λόγοι αντοχή/πυκνότητα και ακαμψία/πυκνότητα φθάνουν σε πάρα πολύ υψηλές τιμές για ίνες διαφόρων υλικών. Τα ινώδη σύνθετα υλικά τώρα τα οποία έχουν ως έγκλεισμα τέτοιες ίνες παρουσιάζουν ανάλογα πλεονεκτήματα, έχουν δηλαδή τους δυο αυτούς λόγους σημαντικά μεγαλύτερους από τους αντίστοιχους λόγους των κοινών υλικών. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η πλέον σημαντική ιδιότητα των ινωδών υλικών. Επίσης τα υλικά αυτά απαιτούν απλή τοποθέτηση τις περισσότερες φορές εκεί που χρησιμοποιούνται. Συνέπεια αυτής της απλής τοποθέτησεως είναι η μεγάλη ταχύτητα κατασκευής η οποία γίνεται ακόμα μεγαλύτερη όταν τα υλικά έχουν ως μήτρα ρητίνη η οποία μπορεί να πολυμερισθεί στον τόπο κατασκευής.

Ο λόγος κόστους/πυκνότητας ενός υλικού εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως π.χ. από την πείρα η οποία έχει αποκτηθεί επί μιας μεθόδου κατασκευής του υλικού, από την τεχνολογία της μεθόδου κατασκευής κλπ. Εκτός από αυτά ο λόγος αυτός δύναται από μόνος του να αποτελέσει κριτήριο για την αποτελεσματικότητα ενός υλικού από απόψεως κόστους, επειδή πρέπει να ληφθούν υπ' όψη και τα απόβλητα κατά την

χρησιμοποίηση του υλικού. Απόβλητα είναι το μέρος του υλικού το οποίο περισσεύει μετά από την κατεργασία για την διαμόρφωση του τελικού προϊόντος. Για τα περισσότερα κοινά υλικά το ποσοστό των αποβλήτων αποτελεί ένα πολύ σημαντικό ποσοστό του τελικού προϊόντος και παρά την δυνατότητα ανακυκλώσεως και χρησιμοποίησεως εκ νέου, η ωφελιμότητα αυτής της ανακυκλώσεως αντισταθμίζεται πολλές φορές από το κόστος αυτής επειδή τα απόβλητα δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν στην μορφή την οποία βρίσκονται και χρειάζονται κάποια κατεργασία.

Τα ινώδη σύνθετα υλικά εν τούτοις παρά την δυσκολία ανακυκλώσεως των αποβλήτων τους, παρουσιάζουν πολύ μειωμένο ποσοστό αποβλήτων επειδή δύνανται να διαμορφωθούν όσο το δυνατόν πλησιέστερα στην τελική τους μορφή. Ένα απλό παράδειγμα επί του θέματος των αποβλήτων είναι το εξής : Οι δοκοί και γενικότερα πολλά στοιχεία των πλαισίων των αεροσκάφων διαμορφώνονται με μεγάλες οπές για λόγους ελαττώσεως βάρους. Όταν λοιπόν το πλαίσιο κατασκευάζεται από συμβατικό υλικό π.χ. κράματα του αλουμινίου, οι οπές αυτές έχουν ως συνέπεια την δημιουργία αποβλήτων τα οποία έχουν τη δυνατότητα να φθάσουν μέχρι 600% (κατά βάρος) . Εν τούτοις, εάν είναι δυνατό το πλαίσιο αυτό να κατασκευασθεί από ινώδη σύνθετα υλικά, το ποσοστό των αποβλήτων μπορεί να πέσει μέχρι 10% εξ' αιτίας των προαναφερθέντων λόγων. Το γεγονός αυτό δεν είναι θεωρητικό αλλά έχει επιτευχθεί στην πράξη σε πολλές περιπτώσεις κατασκευής τμημάτων πλαισίων αεροσκαφών και δείχνει φανερά την ανωτερότητα των ινώδων σύνθετων υλικών σε σχέση με τα συμβατικά υλικά σε ορισμένες περιπτώσεις.

Συνοπτικά μπορεί να λεχθεί ότι ο λόγος κόστος/πυκνότητα πολλών κοινών υλικών δύναται σε πολλές περιπτώσεις να είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο των ινώδων υλικών. Το γεγονός όμως ότι τα συμβατικά υλικά γενικώς παρουσιάζουν μεγάλο ποσοστό αποβλήτων, αυξάνει την ποσότητα των υλικών αυτών η οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί για μια συγκεκριμένη κατασκευή και κατά συνέπεια το συνολικό κόστος της κατασκευής. Με κριτήριο, τώρα, το συνολικό κόστος μπορεί να λεχθεί ότι τα ινώδη υλικά έχουν αποδειχθεί σε πολλές περιπτώσεις περισσότερο αποτελεσματικά από τα συμβατικά.

1.10 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες του DGEBA είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί.

Μελετώντας την δομή των εποξειδικών ρητινών με κάποιο πρόσθετο όπως σκληρυντής, πλαστικοποιητής με την βοήθεια ηλεκτρονικών μικροσκοπίων, παρατηρούμε ότι οι ρητίνες αποτελούνται από σχεδόν μικρού μεγέθους μακρομόρια - τρισδιάστατα διακλαδωμένα δίκτυα ή συσσωματώματα, μέτριου μοριακού βάρους, τοποθετημένα σε ένα πλαίσιο από μόρια μικρού μοριακού βάρους.

Βασικό χαρακτηριστικό της αντίδρασης πολυμερισμού είναι η αύξηση της θερμοκρασίας που πραγματοποιείται στο μίγμα της ρητίνης με τα διάφορα πρόσθετα. Με την έκλυση θερμότητας η αντίδραση πολυμερισμού χαρακτηρίζεται εξώθερμη. Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρέχουν σκληρή και αμετάβλητη αντίσταση τριβής και πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σχέση τις υγρές ρητίνες είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση και το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Οι κυριότερες ιδιότητες των υγρών εποξειδικών ρητινών είναι οι παρακάτω:

- Χαμηλή υδροσκοπικότητα, καλή διαστατική σταθερότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση ύδατος, οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες, όπως και τα μίγματά τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές), με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους.
- Η επεξεργασία των ρητινών είναι εύκολη και γρήγορη για θερμοκρασίες από 5° C μέχρι 150° C και εξαρτάται από την εκλογή του πρόσθετου.
- Υψηλές μηχανικές ιδιότητες που μπορεί να οφείλονται στη μικρή συστολή τους, έτσι μειώνεται η παρουσία τάσεων.
- Άριστη ηλεκτρική μόνωση.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης. (Στην σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί). Αυτή η ιδιότητα αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα για τις πολλές εφαρμογές.
- Ποικιλία εφαρμογών. Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής. (Ανάμειξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων).
- Καλή χημική αντίσταση που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι εποξειδικές ρητίνες έχουν πολύ υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό και κατά την διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.

1.11 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών αναφέρονται αμέσως πιο κάτω:

- Στην κατασκευή κτιρίων και αυτοκινητοδρόμων και γενικά σε κατασκευές όπου υπάρχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση.
- Σαν βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος.
- Σαν συγκολλητικά σε δομικά μέρη της ατράκτου αεροσκαφών.
- Σαν συγκολλητικό πλαστικών και μεταλλικών κομματιών σε βάρκες και αυτοκίνητα, ώστε να υπάρχει τέλεια στεγανότητα.
- Σαν φυλλώδεις ρητίνες για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.
- Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν βασικό συστατικό την ρητίνη και είναι πολύ χρήσιμα για την συντήρηση και την κατασκευή τελειωμάτων, όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής ή τελειώματα αεροσκαφών. Επίσης χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις

δεξαμενών, επαλείψεις πτυσσόμενων αγωγών και για επαλείψεις σε πλάκες από σκυρόδεμα.

- Στην κατασκευή τριχών για πινέλα.
- Συστήματα έποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σαν μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.
- Τυπικές εφαρμογές χυτών έποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, μήτρων καθώς και ηλεκτρικών μονωτικών ειδών.
- Μειονέκτημα των έποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος.

Επίσης ειδικές χρήσεις για εποξειδικές ρητίνες, 100 % χωρίς διαλύτες, για τη συγκόλληση με ενέσεις μικρορωγμών και μικρών κενών σε σκυρόδεμα. Έχοντας κατάλληλη σύνθεση μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο σε συνθήκες χαμηλής θερμοκρασίας όσο και μεγάλης υγρασίας.

Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες και στερεοποιούνται ακόμη και κάτω από την επιφάνεια ύδατος!!! Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα, ξύλα κτλ.

Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν χάνουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δεν γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (WETCOME) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

- Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγρομόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς κ.α. χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, αμιαντοτσιμέντου, ασφάλτου κ.α.
- Για την σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.
- Για την προστασία κτιρίων από την διάβρωση και τη διείδυση υγρασίας.
- Για την υγρομόνωση υπογείων χώρων και παταριών, δαπέδων πριν από την επίστρωσή τους με πλακάκια, μοκέτα κ.α. Επίσης για την υγρομόνωση πισινών και δεξαμενών.

1.12 ΠΡΟΣΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΜΕΡΗ

Έχει διαπιστωθεί από τα πρώτα βήματα της ανάπτυξης της βιομηχανίας των πολυμερών ότι η ενσωμάτωση πρόσθετων στοιχείων στα πολυμερή παρέχει πολύ χρήσιμα υλικά. Ο Goodyear ανακάλυψε ότι η προσθήκη θείου σε πρώτη ύλη ελαστικού έδωσε προϊόντα με πολύ βελτιωμένες ιδιότητες.

Ο όρος πρόσθετα υλικά αναφέρεται σε εκείνα τα υλικά που διασπείρονται μέσα στο πολυμερές χωρίς να προκαλέσουν σημαντική αλλαγή στη δομή του. Για το λόγο αυτό εξαιρούνται οι καταλύτες, τα μέσα σκλήρυνσης που χρησιμοποιούνται στα θερμοσκληρυνόμενα συστήματα.

Τα πρόσθετα υλικά ταξινομούνται ανάλογα με την λειτουργία τους και όχι με κάποια χημική βάση και είναι:

- α) πρόσθετα που τροποποιούν τις μηχανικές ιδιότητες
 - ι) πλαστικοποιητές, ιι) εγκλείσματα, ιιι) μέσα δυσκαμψίας
- β) πρόσθετα που τροποποιούν τις ιδιότητες επιφανείας
- γ) πρόσθετα για την μείωση του κόστους
 - ι) διαλύτες, ιι) κοκκώδη εγκλείσματα
- δ) πρόσθετα που βοηθούν την διεργασία παραγωγής
 - ι) σταθεροποιητές, ιι) λιπαντικά, ιιι) θιξοτροπικά μέσα
- ε) τροποποιητές οπτικών ιδιοτήτων κ.α.

1.12.1-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΣΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

ι) Αναμειξιμότητα και κινητικότητα των πρόσθετων υλικών.

Η βασικότερη απαίτησή μας είναι η σωστή επιλογή του πρόσθετου υλικού για την ανάλογη περίπτωση. Στην προσπάθειά μας όμως να βελτιώσουμε κάποια ιδιότητα τότε, μπορεί να υποβαθμιστούν κάποιες άλλες ιδιότητες. Γι' αυτό την τελική επιλογή του πρόσθετου υλικού την επηρεάζει και η συνολική λειτουργία του.

Η σωστή διαδικασία ενσωμάτωσης του προσθέτου στην μήτρα του πολυμερούς επηρεάζει άμεσα την αποτελεσματικότητά του.

Η πλήρης αναμειξιμότητα και κινητικότητα ή η ικανότητα διάχυσης των μορίων του προσθέτου μέσα στην μήτρα, είναι επιθυμητές όταν η λειτουργία του δεν είναι σε μοριακό επίπεδο.

Μερική αναμειξιμότητα χρειάζεται όταν ασκείται στην ενδιάμεση φάση ισχυρή έλξη μεταξύ πολυμερούς και προσθέτου. Αυτό γίνεται κατορθωτό όταν οι φυσικές ιδιότητες στην ενδιάμεση φάση μεταβάλλονται σταδιακά από εκείνες του πολυμερούς σε εκείνες του πρόσθετου, ακόμα και αν μια τέτοια αλλαγή γίνεται σε πολύ μικρή απόσταση, δηλ. μοριακών στρωμάτων.

ιι) Μετανάστευση και κατανάλωση των πρόσθετων υλικών.

Το πρόσθετο δεν μπορεί να εξαερώνεται από τη μήτρα στη διάρκεια της διεργασίας, ούτε να εκρέει στην επιφάνεια της μήτρας. Αυτό σημαίνει ότι το πρόσθετο υλικό πρέπει να έχει μια χαμηλή τάση ατμών σε μεγάλες θερμοκρασίες και δεν πρέπει να καθιζάνει ή να κρυσταλλοποιείται έξω από την μήτρα του πολυμερούς, αφήνοντας έτσι ένα λεπτό φιλμ από κατάλοιπα. Επίσης το πρόσθετο δεν πρέπει να εκχυλίζεται από υγρά με τα οποία πιθανόν το πολυμερές θα έρθει σε επαφή.

Το φαινόμενο της εκχύλισης εξαρτάται από την κινητική της διάχυσης. Οι παράμετροι που εξαρτάται είναι η αναμειξιμότητα του πολυμερούς-προσθέτου, μέγεθος των μορίων του προσθέτου, φυσικοχημικές επιδράσεις μεταξύ προσθέτου και πολυμερούς, κ.α. Άρα ανόργανα και αδιάλυτα πρόσθετα, όπως χρωστικές ουσίες, εγκλείσματα, κ.λ.π. δεν εμφανίζουν το φαινόμενο της εκχύλισης, ενώ πρόσθετα όπως πλαστικοποιητές μικρού μοριακού βάρους, μπορούν να εκρεύσουν στην επιφάνεια και

ταυτόχρονα να αποτελέσουν μέσο μετανάστευσης και άλλων προσμίξεων .όπως οι σταθεροποιητές.

Θα εμφανιζόταν σημαντική ρύπανση, αν συνέβαιναν τα παραπάνω ή άλλα προϊόντα που έρχονται σε επαφή με το πολυμερές. Τότε το πολυμερές θα έχανε τις ιδιότητες που είχε λόγω της παρουσίας του πρόσθετου υλικού.

iii) Τοξικότητα των πρόσθετων υλικών.

Το πρόσθετο υλικό, τόσο κατά τη διάρκεια ανάμειξης όσο και στη διάρκεια της κατανάλωσης δεν πρέπει να αποτελεί κίνδυνο για την υγεία. Ειδικότερα πρέπει να προσέξουμε, όταν το πολυμερές πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την συσκευασία τροφίμων ή για την κατασκευή παιχνιδιών.

1.12.2-ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΣΤΑ ΠΟΛΥΜΕΡΗ

Επειδή τα πρόσθετα υλικά επιδρούν στην μικροδομή της εποξειδικής ρητίνης και τροποποιούν τις μηχανικές ιδιότητές της, μπορούμε να τα κατατάξουμε συνήθως σε δυο κατηγορίες:

i) το πολυμερές είναι αναμίξιμο με το πρόσθετο, οπότε προκύπτει μονοφασικό σύστημα και οι αλυσίδες του πολυμερούς περιβάλλονται από τα μόρια του προσθέτου. Στην κατηγορία αυτή είναι οι πλαστικοποιητές. Το σημαντικότερο αποτέλεσμα από την παρουσία του προσθέτου, είναι η μετατόπιση της μεταβατικής φάσης (από την υαλώδη κατάσταση στην φάση του ελαστομερούς) σε μικρότερη θερμοκρασία.

ii) το πολυμερές είναι ασυμβίβαστο με το πρόσθετο, δηλ. είναι μη αναμίξιμο. Το σύστημα που προκύπτει είναι διφασικό και τα μίγματα που προκύπτουν καλούνται σύνθετα υλικά.

Τα σύνθετα υλικά έχουν μεγάλη σημασία όταν το πρόσθετο είναι μεταλλικό έγκλεισμα. Συνήθως τα εγκλείσματα είναι πιο σκληρά από την μήτρα και οι ιδιότητες του συστήματος βρίσκονται κάπου ανάμεσα στις ιδιότητες των δυο συστατικών.

Τα πρόσθετα υλικά που ενσωματώνονται στη μήτρα του υλικού, εξαρτώνται από τις παρακάτω παραμέτρους:

1. από τη φυσική μορφή του συστήματος που πρόκειται να παραχθεί.
2. από τον βαθμό διασποράς ή διαλυτότητας του πρόσθετου στο τελικό μίγμα.
3. από τη φυσική μορφή και τα χαρακτηριστικά τήξης του πολυμερούς.
4. από τη φυσική μορφή και τη συγκέντρωση του προσθέτου.

1.12.3 ΠΛΑΣΤΙΚΟΠΟΙΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

Στην τεχνολογία των εποξειδικών ρητινών, ο όρος πλαστικοποιητής μπορεί να σημαίνει:

1. **συστατικό μεγάλου μοριακού βάρους που αντιδρά**, έστω και σε μικρή έκταση με την ρητίνη στη διάρκεια της σκλήρυνσης, με αποτέλεσμα να προκαλεί ευκαμψία αυξάνοντας την απόσταση μεταξύ των σημείων διασταύρωσης.
2. **αδρανές συστατικό μεγάλου μοριακού βάρους**, το οποίο προστίθεται στη ρητίνη για να προκαλέσει μηχανική πλαστικοποίηση.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι πλαστικοποιητών που χρησιμοποιούνται στην τεχνολογία. Συνήθως χρησιμοποιούνται εστέρες και εστεροποιημένες ρητίνες μεγάλου μοριακού βάρους, τύπου DGEBA. Συνήθως έχουν δράση πλαστικοποιητή μόνο, αλλά σε μερικές περιπτώσεις αντιδρούν με το σύστημα μέσω δραστικών υδροξυλίων.

Ένα υλικό που χρησιμοποιείται ευρύτατα σαν πλαστικοποιητής, είναι ο διβουτυλικός φθαλικός εστέρας, που εκτός από μέσο πλαστικοποίησης, ενεργεί και σαν διαλύτης. Χαρακτηριστικό των πλαστικοποιημένων υλικών είναι οι υποβαθμισμένες μηχανικές και ηλεκτρικές τους ιδιότητες, η μικρή αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια, ιδιαίτερα σε διαλύτες, καθώς και σε μεγάλες θερμοκρασίες.

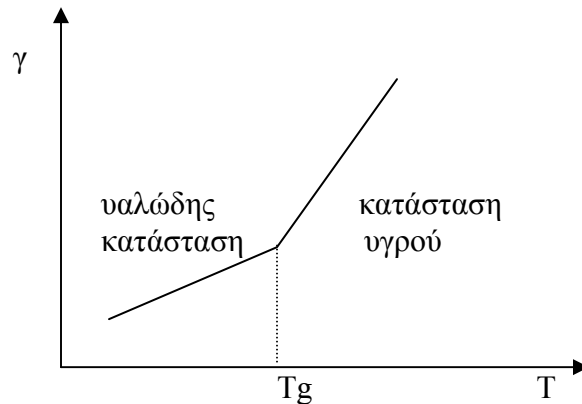
Οι εποξειδικές ρητίνες δεν είναι εύκαμπτα υλικά και ακόμα και με την προσθήκη μεγάλων συγκεντρώσεων πλαστικοποιητή δεν αποκτούν ιδιότητες που να προσεγγίζουν ιδιότητες συνηθισμένων ελαστομερών. Ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο προστίθενται οι πλαστικοποιητές, είναι η ελάττωση του έμφυτου εύθραυστου των εποξειδικών ρητινών. Το αποτέλεσμα της προσθήκης του πλαστικοποιητή είναι η αύξηση της δυνατότητας παραμόρφωσης και γι' αυτόν τον λόγο πολλά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

1.13 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΣΤΗΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΤΗΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ (T_g)

Η εμφάνιση θερμικών μεταπτώσεων ασκεί μια έντονη επίδραση στις μηχανικές ιδιότητες των πολυμερών. Ανάμεσα στις βασικές ιδιότητες που πρέπει να έχει υπ' όψη του ο σχεδιαστής ενός προϊόντος είναι και οι θερμικές μεταπτώσεις και ιδιαίτερα το σημείο της υαλώδους μεταπτώσεως.

Σε θερμοκρασίες κατώτερες από το T_g το υλικό είναι σκληρό, δεν παραμορφώνεται εύκολα και ακολουθεί την ελαστική συμπεριφορά κατά Hooke. Σε θερμοκρασίες ανώτερες από το T_g το άμορφο πολυμερές συμπεριφέρεται σαν ένα μαλακό ιξωδοελαστικό υλικό.

Τα άμορφα πολυμερή περνούν από την υαλώδη κατάσταση σε μια άλλη περιοχή όπου εμφανίζουν ιδιότητες ελαστομερών. Αυτό συμβαίνει σε μια θερμοκρασιακή περιοχή που λέγεται θερμοκρασία υαλώδους κατάστασης T_g (glass transition temperature). Έτσι με τη μέτρηση του ειδικού όγκου για διάφορες θερμοκρασίες, σε μια διεργασία ψύξης του υλικού, προκύπτει μια ομαλή μεταβολή στην τιμή του ειδικού όγκου και στη συνέχεια μια μεταβολή στη κλίση της καμπύλης. Το σημείο στο οποίο παρατηρείται η αλλαγή κλίσης χαρακτηρίζεται σαν σημείο υαλώδους κατάστασης T_g, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



(Σχ. 1.6.1)

Έχουν παρατηρηθεί από την ανάλυση της συμπεριφοράς του υλικού τα ακόλουθα:

1. η θερμοκρασία T_g είναι η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία είναι επιτρεπτή η χρησιμοποίηση ενός υλικού, όταν οι απαιτήσεις της εφαρμογής επιβάλλουν ιξωδοελαστική συμπεριφορά.
2. η θερμοκρασία T_g είναι η μέγιστη που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί, όταν οι απαιτήσεις της εφαρμογής επιβάλλουν την χρησιμοποίηση των υλικών που δεν παρουσιάζουν μόνιμη παραμόρφωση.

Η μέθοδος όμως αυτή παρουσιάζει δυσκολίες στη πράξη και για το λόγο αυτό έχουν επικρατήσει άλλες μέθοδοι, όπως η θερμιδομετρία, όπου κατά την μέτρηση της ειδικής θερμότητας εμφανίζεται ασυνέχεια στην περιοχή της θερμοκρασίας T_g .

Αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στην τήξη των κρυστάλλων, δεν υπάρχει μεταβολή όγκου όταν το πολυμερές αλλάζει από γυαλί σε υγρό. Επίσης δεν υπάρχει λανθάνουσα θερμότητα, ανάλογα με τη λανθάνουσα θερμότητα τήξης. Στην πραγματικότητα δεν γίνονται απότομες αλλαγές στις θερμοδυναμικές παραμέτρους στη θερμοκρασία T_g , αντίστοιχες με εκείνες που συμβαίνουν σε μια μεταβολή πρώτης τάξης.

Μερικές ιδιότητες σχετικές με τη διαστολή του όγκου για τα υλικά αυτά, δείχνουν μια ομοιόμορφη συμπεριφορά στη περιοχή της T_g . Έχει διαπιστωθεί ότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής για τα πολυμερή είναι μεγαλύτερος για θερμοκρασίες μεγαλύτερες της T_g . Αν και το μέγεθος αυτής της διαφοράς, διαφέρει από πολυμερές σε πολυμερές, τότε ο συντελεστής θερμικής διαστολής στην υαλώδη κατάσταση (α_g) είναι περίπου το μισό της αντίστοιχης τιμής για την υγρή κατάσταση (α_l). Από το σχήμα (1.6.1) φαίνεται ότι με αυτόν τον τρόπο μπορεί να καθοριστεί με μεγάλη ακρίβεια η μεταβατική κατάσταση υαλώδους κατάστασης T_g . Για οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα του πολυμερούς σχετική με τη θερμική διαστολή, θα έχει ανάλογη μεταβολή στην T_g .

Από τις μεθόδους προσδιορισμού της T_g που αναφέρθηκαν παρατηρούμε μια σημαντική δυσκολία. Αυτό συμβαίνει γιατί το αποτέλεσμα είναι συνάρτηση κάποιων παραμέτρων, όπως η ταχύτητα θέρμανσης ή ψύξης του πολυμερούς στη διάρκεια της μέτρησης. Άρα για ένα υλικό που ψύχεται αργά, η T_g βρίσκεται σε μικρότερη θερμοκρασία απ' ό,τι σε

ένα υλικό που ψύχεται γρήγορα. Αυτό αποτελεί ένα γενικό κανόνα, η μεγαλύτερη ταχύτητα στο πείραμα θα δώσει και μεγαλύτερη τιμή στη θερμοκρασία της T_g .

Οι διάφορες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της T_g στα πολυμερή είναι στατικές και δυναμικές. Οι δυναμικές μέθοδοι περιλαμβάνουν και απορρόφηση μηχανικής ενέργειας. Διαπιστώθηκε ότι η T_g συνδέεται με τις κινήσεις των ακραίων τμημάτων των αλυσίδων του πολυμερούς, αλλά και με την κίνηση των ενδιάμεσων ενεργών τμημάτων κάθε αλυσίδας.

Δυο βασικά προβλήματα δημιουργούνται με τη συσχέτιση αυτής της μεταβατικής θερμοκρασίας υαλώδους κατάστασης με τις μοριακές κινήσεις. Το ένα αφορά τη φύση αυτών των μοριακών κινήσεων και το άλλο αφορά την ενεργοποίηση των κινήσεων αυτών σε μια στενή περιοχή, καθώς η θερμοκρασία αυξάνει.

Θα πρέπει αυτές οι κινήσεις να σχετίζονται με μια εναλλαγή των διαφόρων θέσεων που έχουν τα κομμάτια των αλυσίδων ανάμεσα στα σημεία διασταυρώσεων. Η εναλλαγή αυτή γίνεται με περιστροφή γύρω από τις συνδέσεις των αλυσίδων μεταξύ τους και οφείλεται στην κίνηση Brown. Δεν έχει γίνει ακόμα δυνατή, με τις δυναμικές μεθόδους η μελέτη της συχνότητας των περιστροφών που αναπτύσσονται στην περιοχή της μεταβατικής υαλώδους κατάστασης.

Το γεγονός ότι η ανεξαρτητοποίηση αυτής της περιστροφής των τμημάτων των αλυσίδων γίνεται σε μια στενή θερμοκρασιακή περιοχή, μπορεί να εξηγηθεί ικανοποιητικά με την έννοια του ελεύθερου όγκου. Ο ελεύθερος όγκος αντιπροσωπεύει το χώρο όπου τα μόρια μιας άμορφης φάσης είναι ικανά να κινούνται με ελευθερία αντίστοιχη των μορίων ενός αερίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

2.1. ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

2.1.1. ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Τα σφαιρικά εγκλείσματα είναι συνήθως αρκετά μεγάλα, ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους, ακόμα και για μεγάλες περιεκτικότητες, είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τις τιμές της τετραγωνικής ρίζας της απόστασης μεταξύ των άκρων των μακρομορίων του πολυμερούς. Επιπλέον τα σωματίδια είναι τόσο απομακρυσμένα μεταξύ τους, που δεν μπορούν να συνδέονται μαζί μέσω μιας απλής αλυσίδας πολυμερούς. Για τα σύνθετα αυτά, όπου το πάχος του στρώματος του πολυμερούς μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος, η επίδραση του οριακού στρώματος στις διάφορες ιδιότητες μπορεί να αμεληθεί.

Με βάση αυτήν την υπόθεση έχουν προταθεί κατά καιρούς πολλές εξισώσεις που να περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά σύνθετων υλικών με σφαιρικά εγκλείσματα. Πρώτος που ασχολήθηκε με το θέμα ήταν ο Einstein[2], όταν το 1906 έκανε παρατηρήσεις στο ιξώδες αιωρήματος στερεών σφαιρών διεσπαρμένων σε κάποιο Νευτώνειο υγρό και κατέληξε στην εξίσωση,

$$E_c = E_m (1 + 2.5U_f) \quad (2.1)$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας. Οι δείκτες c και m αναφέρονται στο σύνθετο και στη μήτρα αντίστοιχα ενώ με U_f συμβολίζεται η κατ'όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για μικρές περιεκτικότητες σε έγκλεισμα και για περιπτώσεις τέλει συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας. Με τον όρο 'τέλεια συνοχή', όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, εννοούμε ότι δεν υπάρχει σχετική κίνηση μήτρας-σωματιδίων, κατά τη διάρκεια φόρτισης μέχρι κάποιου ορίου, πάνω από το οποίο σπάει ο δεσμός μήτρας σωματιδίου.

Επιπλέον προϋπόθεση για την Εξ.(2.1), είναι ότι το έγκλεισμα είναι υλικό σκληρότερο από τη μήτρα. Χαρακτηριστικό συμπέρασμα είναι ότι ο όγκος του εγκλείσματος είναι η σημαντική παράμετρος και όχι το βάρος του και ακόμα ότι το μέγεθος των σωματιδίων δεν επηρεάζει την ενισχυτική τους δράση.

Οι Guth και Smallwood έδωσαν συνέχεια στο θέμα εισάγοντας την εξίσωση,

$$E_c = E_m (1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2) \quad (2.2)$$

και αργότερα ο Kerner με τη σχέση

$$\frac{E_c}{E_m} = \left[\frac{\frac{U_f G_f}{(7-5\nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1-\nu_m)}}{\frac{U_f G_m}{(7-5\nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1-\nu_m)}} \right] \quad (2.3)$$

όπου G το μέτρο διάτμησης και ν ο λόγος Poisson. Ο δείκτης f στην Εξ.(2.3) αναφέρεται στο έγκλεισμα.

Για εγκλείσματα πιο σκληρά από τη μήτρα η Εξ.(2.3) απλοποιείται ως εξής,

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{U_f}{U_m} \left[\frac{15(1-\nu_m)}{8-10\nu_m} \right] \quad (2.4)$$

Πρακτικά δεν ισχύει η προϋπόθεση τέλει συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη παράγραφο. Τότε η πραγματική ενισχυτική δράση του εγκλείσματος είναι μικρότερη απ' αυτή που υπολογίζεται. Θεωρητικά και σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να ελαττώσει, παρά να αυξήσει το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου.

Ο Einstein επεξεργάστηκε τη θεωρία της εσωτερικής τριβής σφαιρών που ακυρούνται μέσα σε ρευστό, ώστε να μην εξασκεί δυνάμεις συνοχής στις σφαίρες.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει,

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + U_f \quad (2.5)$$

Εάν τα σωματίδια είναι φουσαλίδες αέρα, ή βρίσκονται μέσα σε κενά, τότε η Εξ.(2.4) του Kerner γράφεται,

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_m} + \frac{U_f}{U_m} \left[\frac{15(1-\nu_m)}{7-5\nu_m} \right] \quad (2.6)$$

Στην περίπτωση που ο δεσμός εγκλείσματος-μήτρας είναι ασθενής, αυτός σπάει όταν εφαρμόσουμε κάποιο φορτίο. Τότε η μήτρα παραμορφώνεται περισσότερο από το έγκλεισμα με αποτέλεσμα το σχηματισμό κοιλότητων γύρω από το έγκλεισμα. Οι Sato και Furukawa[6] διατύπωσαν την ακόλουθη γι' αυτήν την περίπτωση, σχέση,

$$E_c = E_m \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{1-Y} \right] \left[1 - \frac{Y^3 T}{3} \left(\frac{1+Y-Y^2}{1-Y+Y^2} \right) \right] - \frac{Y^2 T}{3(1-Y)} \left(\frac{1+Y-Y^2}{1-Y+Y^2} \right) \right\} \quad (2.7)$$

όπου $Y=U^{1/3}$ και T ο παράγοντας συνοχής που παίρνει την τιμή μηδέν, όταν υπάρχει τέλεια συνοχή και τιμή ίση με τη μονάδα όταν δεν υπάρχει συνοχή.

Μια βασική παραδοχή για τις παραπάνω θεωρίες είναι ότι τα εγκλείσματα δεν σχηματίζουν συσσωματώματα και τούτο διότι τα συσσωματώματα δημιουργούν κοιλότητες αέρα και έτσι ο φαινόμενος όγκος του εγκλείσματος είναι μεγαλύτερος του πραγματικού του. Για την περίπτωση της ενάρξεως συσσωματωμάτων ο Mooney[7] διατύπωσε την ακόλουθη εξίσωση,

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp \left[\frac{2.5U_f}{1-SU_f} \right] \quad (2.8)$$

όπου S ορίζεται από τη σχέση,

$$S = (\text{φαινόμενος όγκος εγκλείσματος}) / (\text{πραγματικός όγκος εγκλείσματος}) \quad (2.9)$$

Η ελάχιστη τιμή του S είναι η μονάδα συνήθως όμως κυμαίνεται μεταξύ 1.2 και 2 σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις.

Μια άλλη θεωρία που προτάθηκε από τους Eilers και Van Dyck[8] περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\frac{E_c}{E_m} = \left[1 + \frac{KU_f}{1 - SU_f} \right] \quad (2.10)$$

όπου K και S είναι σταθερές, με τιμές συνήθως 1.25 και 1.20 αντίστοιχα. Η επίδραση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα στο μέτρο ελαστικότητας εκφράζεται επίσης από μια εμπειρική σχέση που προτάθηκε από τον Bills,[9]

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp \left[\frac{AU_f}{(1 - BU_f)} \right] \quad (2.11)$$

όπου A,B σταθερές που υπολογίζονται πειραματικά.

Το A παίρνει την τιμή 2.5, ενώ το B δίνεται από τη σχέση,

$$B = -6.4 \cdot 10^{-3} T + 2.51 \quad (2.12)$$

όπου T η θερμοκρασία του πειράματος.

Η εξίσωση (2.11) μπορεί να γραφτεί στη μορφή,

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \left[\frac{2.5U_f}{(1 - BU_f)} \right] + \left(\frac{1}{2!} \right) \left[\frac{2.5U_f}{(1 - BU_f)} \right]^2 + \dots \quad (2.13)$$

που είναι αντίστοιχη με την εξίσωση των Guth και Smallwood.

Μια ακόμη ημιεμπειρική εξίσωση που περιγράφει το μέτρο ελαστικότητας κοκκώδων σύνθετων υλικών έχει προταθεί από το Narkis,[10]

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{1}{\kappa(1 - U_f^{1/3})} \quad (2.14)$$

όπου κ είναι μια εμπειρική παράμετρος, σχετική με τη συγκέντρωση τάσεων και κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1.4 έως 1.7.

Ο Takahashi[11] διατύπωσε μια σειρά θεωριών για σύνθετα υλικά με σφαιρικά εγκλείσματα. Έτσι για την περίπτωση της τέλει πρόσφυσης έδωσε την εξίσωση,

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + (1 - \nu_m) \left[\frac{E_f(1 - 2\nu_m) - E_m(1 - \nu_f) + 10(1 + \nu_m)E_f(1 + \nu_m) - E_m(1 + \nu_f)}{E_f(1 + \nu_m) + 2E_m(1 - 2\nu_f) + 2E_f(4 - 5\nu_m)(1 + \nu_m) + E_m(7 - 5\nu_m)(1 + \nu_f)} \right] U_f \quad (2.15)$$

και για την περίπτωση ολίσθησης την εξίσωση,

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + (1 - \nu_m) \left[\frac{E_f(1 - 2\nu_m) - E_m(1 - \nu_f) + 10(1 + \nu_m)E_f(1 + \nu_m)(7 + 5\nu_m) -}{E_f(1 + \nu_m) + 2E_m(1 - 2\nu_f) + E_f(1 + \nu_m)(17 - 19\nu_m)(7 + 5\nu_f) +} \right. \\ \left. \frac{-4E_m(1 + \nu_f)(7 - 4\nu_f)U_f}{+4E_m(7 - 5\nu_m)(1 + \nu_f)(7 - 4\nu_f)} \right] U_f \quad (2.16)$$

Οι Halpin και Tsai[12] δίνουν την παρακάτω σχέση για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας των συνθέτων υλικών, ενισχυμένων με συνεχείς ίνες,

$$E_T = E_m \frac{1 + \xi n U_f}{1 - n U_f} \quad (2.17a)$$

με

$$n = \frac{E_f - E_m}{E_f + \xi E_m} \quad (2.17b)$$

και

$$\xi = 1 + 40U_f^{10} \quad (2.17c)$$

Τέλος, ένα κάτω όριο για το μέτρο ελαστικότητας των συνθέτων υλικών δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$\frac{1}{E_c} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (2.18)$$

Στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχει γίνει μελέτη πάνω στο βαθμό πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος. Με βάση τον ορισμό της ενδιάμεσης φάσης, που έχει μελετηθεί, προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο για την περίπτωση των κοκκώδων εγκλεισμάτων[13],

$$E_c = E_f U_f \kappa + E_m U_m + E_i U_i \quad (2.19)$$

όπου ο δείκτης i αναφέρεται στην ενδιάμεση φάση και κ είναι μια παράμετρος που περιγράφει το βαθμό σύνδεσης μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσης φάσης.

Καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος έγινε σε μελέτη του καθηγητή κ. Π.Σ. Θεοχάρη[14] όπου προτείνεται μια σειρά μοντέλων, στα οποία θεωρείται ότι αναπτύσσεται μια τρίτη ψευδο-φάση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων στη διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας. Στα σχ.2.1.α, 2.1.β φαίνονται το διφασικό και το τριφασικό μοντέλο αντίστοιχα ενός τυπικού κοκκώδους υλικού, σύμφωνα με τη θεωρία του Hashin όπως έχουμε ήδη προαναφέρει. Με βάση αυτό προκύπτει ακριβής κατανομή τάσεων και παραμορφώσεων μεταξύ των διάφορων φάσεων.

Επιπλέον προτείνονται δυο μαθηματικές εκφράσεις για το μέτρο ελαστικότητας $E_i(r)$ ενδιάμεσης φάσης που είναι συνάρτηση του μέτρου ελαστικότητας της μήτρας E_m , του μέτρου ελαστικότητας του εγκλείσματος E_f και κάποιου τρίτου όρου εξαρτώμενου από το E_m και συγκρίσιμου με το E_f .

$$E_i(r) = E_m + E_f \left[\frac{r_f}{r} \right]^{n1} - E_m \left[\frac{r_f}{r} \right]^{n2} \quad (2.20a)$$

όπου $n1$, $n2$ είναι παράμετροι σχετικοί με την ποιότητα της πρόσφυσης. Η δεύτερη έκφραση περιέχει δυο όρους και είναι

$$E_i(r) = E_f \left[\frac{r_f}{r} \right]^{2n} + \left\{ E_m - E_f \left[\frac{r_f}{r_i} \right]^{2n} \right\} \frac{r - r_f}{r_i - r_f} \quad (2.20\beta)$$

όπου ομοίως ο εκθέτης $2n$ είναι χαρακτηριστική παράμετρος που εκφράζει την ποιότητα της πρόσφυσης.

Και οι δυο παραπάνω εκφράσεις δίνουν εξαιρετικά αποτελέσματα, αλλά η δεύτερη πλεονεκτεί σε σχέση με την πρώτη λόγω της μεγαλύτερης σταθερότητας και αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της.

Για την περιγραφή των βισκοελαστικών ιδιοτήτων ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από δυο φάσεις ο Takayanagi[19] εισήγαγε ένα μηχανικό μοντέλο που λαμβάνει υπ' όψιν τον τρόπο ανάμειξης των δυο αυτών φάσεων. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο το μέτρο ελαστικότητας E_c ενός σύνθετου υλικού δίνεται από την σχέση :

$$\frac{1}{E_c} = \left(\frac{\Phi}{(1-k)E_m + kE_f} \frac{1-\Phi}{E_m} \right) \quad (2.21)$$

όπου k και Φ είναι παράμετροι που εκφράζουν τον τρόπο ανάμειξης των δυο φάσεων. Από τις δυο παραμέτρους μόνο η μια είναι ανεξάρτητη ενώ η άλλη πρέπει να υπολογισθεί από τη σχέση $k\Phi=U_f$.

Οι παράμετροι k και Φ συνδέονται με την κατ' όγκον περικτικότητα του εγκλείσματος με τις εκφράσεις

$$k = (2 + 3U_f) / 5, \Phi = 5U_f / (2 + 3U_f)$$

οι οποίες προκύπτουν από την συνθήκη ότι η εξίσωση Kerner [5] και η προηγούμενη εξίσωση ισχύουν ταυτόχρονα.

2.1.2 ΤΑΣΗ ΘΡΑΥΣΗΣ

Τα τελευταία χρόνια μεγάλος αριθμός ερευνητών ασχολήθηκε με την αντοχή συστημάτων πολυμερών ενισχυμένων με εγκλείσματα. Μεταξύ άλλων, οι Leidner[15] και Woodhams και Piggott και Leidner [16] πρότειναν μια εξίσωση της μορφής,

$$\sigma_{f,c} = a - b_f \quad (2.22)$$

όπου $\sigma_{f,c}$ η αντοχή σε εφελκυσμό του συνθέτου, a και b σταθερές. Οι Nicolais και Mashelkar[17] πρότειναν μια άλλη ημιεμπειρική εξίσωση της μορφής,

$$\sigma_{f,c} = \sigma_{f,m} - bu_f^\phi \quad (2.23)$$

όπου $\phi < 1$, $\sigma_{f,m}$ η αντοχή σε εφελκυσμό της μήτρας και η σταθερά b παίρνει θετικές τιμές.

Η εξίσωση (2.23) παρουσιάζει καλή προσέγγιση στις πειραματικές τιμές, αλλά επειδή είναι εμπειρική δεν αντιπροσωπεύει κάποιο πραγματικό μηχανισμό αστοχίας.

Ο Schrage[18] πρότεινε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από εξίσωση διαφορετικής μορφής από τις δυο προηγούμενες,

$$\sigma_{f,c} = \sigma_{f,m} \exp(-ru_f) \quad (2.24)$$

όπου η σταθερά r βρέθηκε πειραματικά ίση με 2.66. Το μειονέκτημα αυτού του μεγέθους είναι ότι είναι ακριβές για περιορισμένη περιοχή εγκλεισμάτων.

Η εξίσωση (2.24) είναι αντίστοιχη με εκείνη που προτάθηκε από τον Passmore[19] για την περίπτωση πορώδων συστημάτων,

$$\sigma_{f,c} = \sigma_{f,0} \exp(-aP) \quad (2.25)$$

όπου $\sigma_{f,0}$ η αντοχή της μήτρας χωρίς πόρους, a σταθερά και P η κατ' όγκον περιεκτικότητα σε πόρους.

2.1.3 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΘΡΑΥΣΗΣ

Οι θεωρίες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία σχετικά με την παραμόρφωση θραύσης κοκκωδών συνθέτων υλικών είναι περίπου ανάλογες και οι μικρές διαφορές τους οφείλονται στα διαφορετικά μοντέλα πάνω στα οποία βασίζονται.

Ο Smith[21] πρότεινε τον τύπο,

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - 1.105U_f^{1/3}) \quad (2.26)$$

όπου ε_c και ε_m η παραμόρφωση θραύσης του συνθέτου και της μήτρας αντίστοιχα.

Μια αντίστοιχη εξίσωση πρότεινε ο Bueche[22] χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο από κυβικά σωματίδια σε κυβική διάταξη,

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - U_f^{1/3}) \quad (2.27)$$

Θεωρώντας την επίδραση των ακινητοποιημένων μορίων στην ενδιάμεση φάση ο Ziegel[23] τροποποίησε την εξίσωση (2.27) ως εξής :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m [1 - U_f (1 + (\Delta r / R))^3] \quad (2.28)$$

όπου Δr είναι η αύξηση της ακτίνας R των σωματιδίων, λόγω της παρουσίας της ενδιάμεσης φάσης.

Για πολλά πολυμερή συστήματα πρακτικού ενδιαφέροντος το μέγεθος $[1 + (\Delta r / R)]^3$ βρέθηκε ίσο με 1.75.

Με βάση αυτή την τιμή η εξίσωση (2.28) μπορεί να γραφτεί,

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} = 1 + 1.75U_f + (1.75U_f)^2 + \dots \quad (2.29)$$

Η εξίσωση (2.29) αν και βγαίνει γεωμετρικά έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση παραμόρφωσης από τους Mullins και Tobin που προέρχεται από θερμοδυναμικές θεωρήσεις του Guth.

Οι εξισώσεις που προαναφέρθηκαν βασίζονται περισσότερο στο πείραμα και λιγότερο στη θεωρία και συνοψίζουν τη συμπεριφορά τάσεων-παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά με κοκκώδες έγκλεισμα. Περιγράφουν ακόμα τη συμμετοχή διαφόρων παραγόντων, όπως κατ'όγκον περιεκτικότητα εγκλείσματος, μέγεθος σωματιδίων, συσσωματώματα, μέτρο πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος στη μηχανική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών.

2.2 Ο ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΠΟΛΥΜΕΡΗ

Η ενσωμάτωση μέσα στη μήτρα του πολυμερούς πολύ λεπτών σωματιδίων ή ινώδων υλικών, ανόργανης ή οργανικής φύσης συνοδεύεται με αλλαγή των φυσικοχημικών, μηχανικών, θερμικών, ηλεκτρικών και άλλων ιδιοτήτων του υλικού, αν και η βασικότερη επιδίωξη είναι η βελτίωση των φυσικοχημικών ιδιοτήτων. Ανάλογα με την αποτελεσματικότητα τους τα εγκλείσματα διακρίνονται σε ενεργά, δηλαδή προκαλούν ενίσχυση και αδρανή, δηλαδή δεν βελτιώνουν τις ιδιότητες του υλικού, αλλά προκαλούν μόνο αλλαγή χρωματισμού, μείωση του κόστους κλπ.

Αναφορικά με τα ενεργά εγκλείσματα μπορούμε να διακρίνουμε τη δραστηριότητα τους σε δομική, κινητική και θερμοδυναμική. Με τον όρο ‘δομική δραστηριότητα’, εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει τη δομή του πολυμερούς, έτσι με την ενσωμάτωση των εγκλεισμάτων στη μήτρα παρατηρούνται αλλαγές στο μεγεθός, στο σχήμα και στην κατανομή των δομικών μονάδων. Με τον όρο ‘κινητική δραστηριότητα’, εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει διάφορες θερμοδυναμικές παραμέτρους του συνθέτου υλικού.

Η ενίσχυση του υλικού λόγω των εγκλεισμάτων μπορεί να συσχετιστεί με την ενέργεια w θραύσης του πολυμερούς, όπως μετρείται από το εμβαδόν της επιφανείας κάτω από την καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων,

$$w = \int_{L_0}^{L_b} \sigma \cdot \partial L \quad (2.30)$$

όπου L_b το μήκος του δοκιμίου στη θραύση, L_0 το αρχικό μήκος του και σ η επιβαλλόμενη τάση.

Η αύξηση της ενέργειας θραύσης ανά μονάδα όγκου, με την παρουσία των εγκλεισμάτων, μπορεί να θεωρηθεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή στην ελαστική κατάσταση. Έτσι, τα εγκλείσματα που αυξάνουν την ενέργεια θραύσης θεωρούνται ενεργά, ενώ εκείνα που δεν την αυξάνουν θεωρούνται αδρανή. Το μέγεθος της αύξησης ή ελάττωσης εξαρτάται από την φύση του εγκλείσματος.

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων είναι η επίδραση τους στην αντοχή των συνθέτων υλικών. Αυτή η αντοχή επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, λόγω της αλληλεπίδρασης μήτρας και εγκλεισμάτων. Και αυτό διότι η διαφοροποιούμενη δομή της ενδιάμεσης φάσης είναι σημαντικός παράγοντας που καθορίζει τις φυσικοχημικές και μηχανικές ιδιότητες του συνθέτου υλικού. Παρ’όλα αυτά μπορούμε να φτάσουμε στη γενική διαπίστωση ότι συνήθως η μηχανική αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει ανάλογα με την περιεκτικότητα και τη λεπτότητα του εγκλείσματος. Το θεωρητικό όριο της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα καθορίζεται από το ποσό του εγκλείσματος που κάνει πιθανή την ύπαρξη κάποιας ενδιάμεσης φάσης ή ενδιάμεσου στρώματος μεταξύ των σωματιδίων.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού σκελετού σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους. Παράλληλα η αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, όπως προαναφέρθηκε με ‘optimum’ περιεκτικότητα εκείνη που προκαλεί κορεσμό των κέντρων προσρόφησης μακρομορίων πάνω στην επιφάνεια του εγκλείσματος.[24]

2.3 Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ ΣΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ (INTERPHASE)

Η φύση του σύνθετου υλικού συνιστά ένα πολυφασικό σύστημα. Με απλοποιητική παραδοχή *ας* θεωρήσουμε μόνο τις δυο φάσεις που αντιπροσωπεύουν η μήτρα και το έγκλεισμα. Όπως είναι γνωστό, οι φυσικές ιδιότητες αυτού του συστήματος, είναι άμεσα εξαρτώμενες από τις γεωμετρικές, τοπολογικές και φυσικές ιδιότητες της διάχυτης φάσης.

Η πρόσφυση των δυο φάσεων θεωρείται τέλεια στα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών. Αυτή η άποψη όμως δεν μπορεί να είναι σωστή, δεδομένου ότι τέλεια πρόσφυση σημαίνει συνέχεια τάσεων και μετατοπίσεων, σαν να είναι το σύνθετο υλικό μονοφασικό.

Έτσι γύρω από κάθε έγκλεισμα δημιουργείται μια περιοχή που χαρακτηρίζεται από συγκεντρώσεις τάσεων, τάσεις λόγω θερμοσυστολής καθώς και μικρορωγμές.

Η αλληλεπίδραση επίσης των επιφανειών επαφής εγκλείσματος-μήτρας, είναι πολύ πολύπλοκη. Η ύπαρξη της διάχυτης φάσης επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά της πλαστικής μήτρας, εφόσον περιορίζει τις κινήσεις των μικρομορίων της. Έτσι κάτω από μικροσκοπιο παρατηρούνται ατέλειες στην επαφή μεταξύ των επιφανειών μήτρας-εγκλείσματος (ή καθόλου επαφή), που έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία πολύ έντονης συγκέντρωσης τάσεων στα σημεία των ατελειών. Αυτή η συγκέντρωση τάσεων έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία μικρορωγμών όταν το υλικό φορτίζεται μηχανικά ή θερμικά. Οι μικρορωγμές δε αυτές, τις περισσότερες φορές αποτελούν την αιτία έναρξης της θραύσης ενός συνθέτου υλικού.

Όλα τα παραπάνω καθώς και πολλά άλλα οδήγησαν τους ερευνητές στην παραδοχή της ύπαρξης μιας τρίτης φάσης μέσα στο σύνθετο υλικό, της ενδιάμεσης φάσης, η οποία αποτελεί μια ζώνη ανομοιογένειας και ανωμαλιών που περιβάλλει το έγκλεισμα. Για να συμπεριληφθεί στα θεωρητικά μοντέλα και να γίνει δυνατή η μελέτη της επίδρασης της στη μηχανική και θερμική συμπεριφορά του συνθέτου υλικού, υποθέτουμε ότι είναι ομογενής ή ότι τα ανομοιογενή χαρακτηριστικά της (όπως π.χ. η πυκνότητα), μεταβάλλονται βάσει μιας γνωστής σχέσης καθώς προχωρούμε από το σύνορο του εγκλείσματος στο σύνορο της μήτρας. Έτσι οι ερευνητές Hashin-Rosen[25,26], συλλαμβάνοντας την ιδέα που αντιπροσωπεύει το σύνθετο υλικό, θεώρησαν ότι αποτελείται από σύνολο στοιχείων που το κάθε ένα αποτελείται από δυο ομόκεντρες σφαίρες (σχ.2.1.α) από τις οποίες η εσωτερική είναι το έγκλεισμα και η εξωτερική η μήτρα. Κάθε στοιχείο θεωρείται σαν αντιπροσωπευτικός όγκος του συνθέτου συστήματος, γιατί η κατ'όγκον περιεκτικότητα του εγκλείσματος σ' αυτό, είναι ίση με εκείνη του συνθέτου υλικού και οι κατά μέσο όρο ιδιότητες του, συμπίπτουν με τις ιδιότητες του συνθέτου συστήματος.

Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών και των συντελεστών θερμικής διαστολής των συνθέτων υλικών με μήτρα πολυμερούς. Από το πείραμα προέκυψε ότι ο φαινόμενος συντελεστής θερμικής διαστολής του συνθέτου, εξαρτάται έντονα από τη διαφορά των σχετικών συντελεστών θερμικής διαστολής των δυο φάσεων.

Η προσέγγιση που έγινε στη συνέχεια από τους ερευνητές, συνίσταται στην παραδοχή μοντέλου που τα αντιπροσωπευτικά στοιχεία όγκου, αποτελούνται από 3 φάσεις (σχ.2.1.β), δηλαδή 3 ομόκεντρες σφαίρες. Αυτές χαρακτηρίζονται από το κέντρο προς τα έξω, ως έγκλεισμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα.

EXISTING MODE

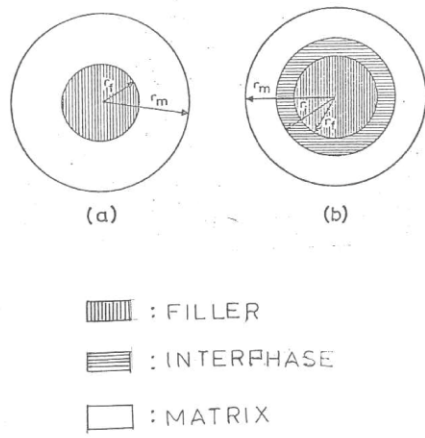


Fig. 1

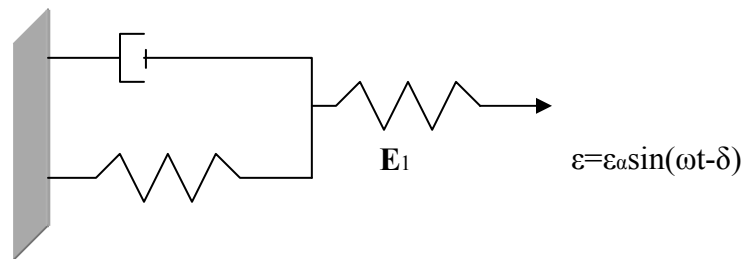
2.4 Η ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΡΕΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Υλικά που υποβάλλονται σε ανακυκλωμένη φόρτιση απορροφούν ενέργεια. Μέρος της ενέργειας αυτής, μπορεί να αποθηκευτεί μέσα στο υλικό, ενώ άλλο μέρος της αποβάλλεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας. Αυτή η απώλεια ενέργειας, που συνήθως είναι δύσκολο να μετρηθεί, ονομάζεται «απόσβεση» ή «εσωτερική τριβή» και είναι η αιτία έτσι ώστε να είναι αδύνατη η αέναη κίνηση των σωμάτων. Η απόσβεση προκαλείται από ένα μεγάλο εύρος μηχανισμών, οι οποίοι εξαρτώνται από το υλικό, την θερμοκρασία και την συχνότητα της ανακυκλωμένης φόρτισης.

Οποιοσδήποτε φυσικός μηχανισμός που προκαλεί ερπυσμό μπορεί να προκαλέσει απόσβεση, όμως άλλοι μηχανισμοί που ενεργούν σε πεδία χαμηλών τάσεων δεν σχετίζονται με μακροσκοπικά φαινόμενα ερπυσμού. Οι μικρές ανηγμένες παραμορφώσεις που σχετίζονται με φαινόμενα απόσβεσης σε τόσο χαμηλές τάσεις ονομάζονται ανηγμένες ανελαστικές παραμορφώσεις, ενώ αντίστοιχα η απόσβεση σε χαμηλές τάσεις ονομάζεται ανελαστική απόσβεση. Το φαινόμενο της απόσβεσης μπορεί να εκδηλωθεί και ως αποτέλεσμα πλαστικής παραμόρφωσης.

Η ικανότητα απόσβεσης των υλικών έχει πρακτική σημασία, καθώς ο βαθμός απόσβεσης ενός υλικού επηρεάζει την συμπεριφορά του υλικού αυτού υπό ανακυκλωμένη φόρτιση. Πιο συγκεκριμένα, μεγαλύτερος βαθμός απόσβεσης ενός υλικού, έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη μικρότερων τάσεων όταν υποβληθεί σε εξαναγκασμένη ταλάντωση κοντά στην συχνότητα συντονισμού και επίσης μεγαλύτερη απόσβεση της ελεύθερης ταλάντωσης. Η ικανότητα επομένως απόσβεσης, παίζει καθοριστικό ρόλο στην επιλογή των υλικών σε εφαρμογές που είναι ευαίσθητες στην ταλάντωση, όπως είναι για παράδειγμα τα πτερύγια ενός στροβίλου.

Στην συνέχεια εξετάζεται ένα μοντέλο το οποίο αποτελείται από ένα αποσβεστήρα και από δύο γραμμικά ελατήρια και το οποίο εμφανίζει συμπεριφορά παρόμοια με την απόσβεση σε χαμηλές τάσεις (ανελαστική συμπεριφορά). Το μοντέλο αυτό είναι ένα ρεολογικό μοντέλο και απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.2: Ρεολογικό μοντέλο

Οι τάσεις που εφαρμόζονται παρουσιάζουν ημιτονοειδή μεταβολή σε συνάρτηση με τον χρόνο, η οποία εκφράζεται από την σχέση:

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t) \quad (2.31)$$

Όπου σ_a είναι το πλάτος της τάσης και ω είναι γωνιακή συχνότητα της φόρτιση. Το διάγραμμα των ανηγμένων παραμορφώσεων του μοντέλου είναι επίσης ημιτονοειδές, αλλά με μια διαφορά φάσης από την τάση, η οποία ορίζεται από την γωνία τάσης δ . Η ανηγμένη παραμόρφωση σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από την σχέση:

$$\varepsilon = \varepsilon_a \sin(\omega t - \delta) \quad (2.32)$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις μιας έλλειψης. Έτσι το διάγραμμα των ορθών τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων αποτελεί έναν ελλειπτικό βρόχο υστέρησης. Η επιφάνεια που εγκλείεται μέσα στο βρόχο υστέρησης είναι η ενέργεια που δαπανάται σε κάθε ολοκληρωμένο κύκλο αποφόρτισης - επαναφόρτισης και ανά μονάδα όγκου υλικού. Αυτή η ενέργεια ονομάζεται μοναδιαία ενέργεια απόσβεσης Δu . Υπολογίζοντας, την εγκλειόμενη επιφάνεια του ελλειπτικού βρόχου παίρνουμε μια έκφραση για την ενέργεια Δu :

$$\Delta u = \pi \sigma_a \varepsilon_a \sin \delta \quad (2.33)$$

Αν απεικονίσουμε τόσο το δ (γωνία φάσης) όσο και το Δu συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας ω , παρατηρούμε ότι εμφανίζουν maximum για την ίδια τιμή της ω . Για το συγκεκριμένο μοντέλο που παρουσιάστηκε παραπάνω, έχει υπολογιστεί ότι η ενέργεια Δu γίνεται μέγιστη για $\omega = \omega_d = E_2/n_2$. Η ποσότητα $(\varepsilon_a \sin \delta)$ είναι η ανηγμένη παραμόρφωση που προκύπτει από την εξίσωση (2.33) για $\sigma = 0$. Επομένως είναι ουσιαστικά το ημιπλάτος του ελλειπτικού βρόχου υστέρησης και αποτελεί ένα μέτρο της μη γραμμικότητας της ανηγμένης παραμόρφωσης. Αυτή η ποσότητα η οποία αναφέρεται και ως παραμένουσα παραμόρφωση, είναι προσεγγιστικά ανάλογη με το πλάτος της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης $\varepsilon_{pa} = \Delta \varepsilon_p / 2$. Εφόσον η ποσότητα $(\varepsilon_a \sin \delta)$ είναι ανάλογη με την ενέργεια Δu , τότε είναι προσεγγιστικά ανάλογη και με την συχνότητα.

Σε συχνότητες υψηλότερες σε σχέση με την συχνότητα ω_d , ο αποσβεστήρας είναι ουσιαστικά άκαμπτος. Η παραμόρφωση, επομένως, εμποδίζεται στο ελατήριο E_2 (από τον άκαμπτο αποσβεστήρα) και αναλαμβάνεται σχεδόν εξ' ολοκλήρου από το ελατήριο E_1 . Άρα η απόκριση είναι ουσιαστικά γραμμική συνάρτηση του μέτρου ελαστικότητας E_1 . Αντίθετα, σε συχνότητες χαμηλές σε σχέση με την συχνότητα ω_d , υπάρχει αρκετός χρόνος ελεύθερης ταλάντωσης του αποσβεστήρα και έτσι έχει μικρή συμμετοχή. Ο ελλειπτικός βρόχος εκφυλίζεται σε ευθεία γραμμή, όμως σε αυτή την περίπτωση το κάτω μέτρο ελαστικότητας E_e αντιστοιχεί στα ελατήρια E_1 και E_2 σε σειρά. Έτσι, το μέτρο ελαστικότητας, το οποίο συμβολίζεται με E^* , μεταβάλλεται με την συχνότητα και αυξάνεται με την τιμή E_e σε χαμηλές συχνότητες. Η μετάβαση μεταξύ αυτών των δύο τιμών λαμβάνει χώρα στην περιοχή της μέγιστης τιμής της απώλειας ενέργειας Δu .

Για ένα οποιοδήποτε ρεολογικό μοντέλο, που αποτελείται από γραμμικά ελατήρια και αποσβεστήρες, δηλαδή για ένα οποιοδήποτε βισκοελαστικό μοντέλο, το οποίο υποβάλλεται σε ανακυκλωμένη φόρτιση όπως παραπάνω, σχηματίζεται ελλειπτικός βρόχος υστέρησης και το προκύπτον διάγραμμα ανηγμένων παραμορφώσεων ε_a είναι ανάλογο του πλάτους των ορθών τάσεων σ_a . Επιπλέον, η διαφορά φάσης δ δεν εξαρτάται από το σ_a αλλά μόνο από την γωνιακή συχνότητα ω . Άρα, οι ελλειπτικοί

βρόχοι υστέρησης για διάφορες τιμές του σ_a και για δεδομένη συχνότητα, έχουν όλοι τις ίδιες αναλογίες διαστάσεων και διαφέρουν μόνο κατά μέγεθος.

Από την εξίσωση (2.33) συμπεραίνουμε ότι η μοναδιαία ενέργεια απόσβεσης Δu μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Delta u = J \sigma_a^2 \quad (2.34)$$

Όπου J είναι μια σταθερά για ένα δεδομένο μοντέλο και για συγκεκριμένη συχνότητα. Πιο περίπλοκα ρεολογικά μοντέλα, χρήσιμα για την απόσβεση, περιλαμβάνουν συνδυασμούς εν σειρά διάφορων μεταβατικών στοιχείων ερπυσμού σε διαφορετικές σταθερές. Ένα τέτοιο μοντέλο, εμφανίζει διάφορες αιχμές σε μια απεικόνιση του δ ή του Δu συναρτήσεως του ω . Πολλές φορές χρησιμοποιούνται στοιχεία με πιο περίπλοκη, μ γραμμική συμπεριφορά.

2.5 ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΤΗΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Πλήθος ορισμών χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την ικανότητα απόσβεσης ενός οποιουδήποτε μοντέλου ή υλικού. Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται συνοπτικά οι ορισμοί αυτοί. Η μοναδιαία ενέργεια απόσβεσης Δu , η οποία δηλώνεται και ως D , έχει ήδη οριστεί παραπάνω, όπως και η γωνία φάσης δ και η παραμένουσα παραμόρφωση $\varepsilon_a \sin \delta$. Ο δείκτης απωλειών Q^{-1} ορίζεται ως εξής:

$$Q^{-1} = \tan \delta \quad (2.35)$$

Η μεταβλητή Q ονομάζεται συντελεστής ποιότητας. Επίσης ο λόγος του πλάτους των ορθών τάσεων σ_a προς το εύρος των ανηγμένων παραμορφώσεων ε_a ονομάζεται δυναμικό μέτρο ή απόλυτο μέτρο E^* :

$$E^* = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \quad (2.36)$$

Ένα άλλο μέτρο ακαμψίας που χρησιμοποιείται συχνά είναι το μέτρο αποθήκευσης E' :

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_a} = \frac{\sigma_a \cos \delta}{\varepsilon_a} = E^* \cos \delta \quad (2.37)$$

Πρόκειται για την κλίση μιας γραμμής που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και φτάνει σε εκείνο το σημείο του ελλειπτικού βρόχου υστέρησης όπου έχουμε την μέγιστη παραμόρφωση και τάση $\sigma = \sigma_a \sin \delta$. Αυτό το μέτρο αποθήκευσης E' χρησιμοποιείται για να οριστεί η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης για την μέγιστη παραμόρφωση. Η ποσότητα αυτή είναι ίση με:

$$u_e = \frac{1}{2} \sigma' \varepsilon_a = \frac{\sigma_a \varepsilon_a \cos \delta}{2} \quad (2.38)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.61) και (2.62), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο δείκτης απωλειών Q^{-1} είναι ανάλογος του Δu και αντιστρόφως ανάλογος του u_e :

$$Q^{-1} = \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{\frac{\Delta u}{\pi \sigma_a \varepsilon_a}}{\frac{2u_e}{\sigma_a \varepsilon_a}} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{\Delta u}{2\pi u_e} \quad (2.39)$$

Ένας επιπλέον ορισμός που χρησιμοποιείται συχνά είναι η λογαριθμική απόσβεση $\Delta t = \pi Q^{-1}$. Αν η απόσβεση είναι μικρή, τότε $Q^{-1} = 0,1$ ή και μικρότερο και επομένως κάποιες εξισώσεις που εμπλέκονται σε αυτούς τους ορισμούς απλοποιούνται, όπως φαίνεται και στην τελευταία στήλη του Πίνακα 2.1.

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΟΡΙΣΜΟΣ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΙΚΡΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ
δ	Γωνία φάσης (rad)	Διαφορά φάσης των ε, σ	δ
$\varepsilon_a \sin \delta$	Παραμένουσα Παραμόρφωση	ε για $\sigma = 0$	$\varepsilon_a \delta$
E^*	Δυναμικό ή Απόλυτο μέτρο	$E^* = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a}$	$E^* = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a}$
Δu ή D	Μοναδιαία Ενέργεια Απόσβεσης	$\Delta u = \pi \sigma_a \varepsilon_a \sin \delta$	$\Delta u = \frac{\pi \sigma_a^2 \delta}{E^*}$
u_e	Ελαστική Ενέργεια Παραμόρφωσης	$u_e = \frac{\sigma_a \varepsilon_a \cos \delta}{2}$	$u_e = \frac{\sigma_a^2}{2E^*}$
Q^{-1}	Συντελεστής Απωλειών	$Q^{-1} = \tan \delta = \frac{\Delta u}{2\pi u_e}$	$Q^{-1} = \delta$

Q	Δείκτης Ποιότητας	$Q = \frac{2\pi u_e}{\Delta u}$	$Q = \frac{1}{\delta}$
E'	Μέτρο Αποθήκευσης	$E' = E^* \cos \delta$	$E' = E^*$
Δ_t	Λογαριθμική Απόσβεση	$\Delta_t = \frac{\Delta u}{2u_e} = \pi Q^{-1}$	$\Delta t = \pi \delta$

Πίνακας 2.1: Ορισμός βασικών σταθερών που περιγράφουν την απόσβεση.

2.6: ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑ

Μια εναλλακτική πειραματική διαδικασία για τον προσδιορισμό του ερπυσμού και της χαλάρωσης, είναι να υποβάλουμε το δοκίμιο σε μια εναλλασσόμενη παραμόρφωση ενώ ταυτόχρονα μετράμε την τάση. Για γραμμική βισκοελαστική συμπεριφορά, όταν επιτευχθεί ισορροπία δυνάμεων, τόσο οι ορθές τάσεις όσο και οι ανηγμένες παραμορφώσεις θα μεταβάλλονται ημιτονοειδώς, ενώ θα υπάρχει και μια διαφορά φάσης των ανηγμένων παραμορφώσεων ως προς τις τάσεις. Έτσι, όπως είδαμε και παραπάνω, καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\varepsilon = \varepsilon_a \sin(\omega t - \delta)$$

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t)$$

Η εναλλακτικά:

$$\varepsilon = \varepsilon_a \sin \omega t$$

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t + \delta)$$

Λύνοντας την σχέση τάσεων καταλήγουμε:

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t + \delta) = \sigma_a \sin \omega t \cos \delta + \sigma_a \cos \omega t \sin \delta$$

Παρατηρούμε ότι η τάση αποτελείται από δύο όρους:

Το μέγεθος $\sigma_a \cos \delta$ σε φάση με την ανηγμένη παραμόρφωση.

Το μέγεθος $\sigma_a \sin \delta$ με διαφορά φάσης 90° ως προς την ανηγμένη παραμόρφωση.

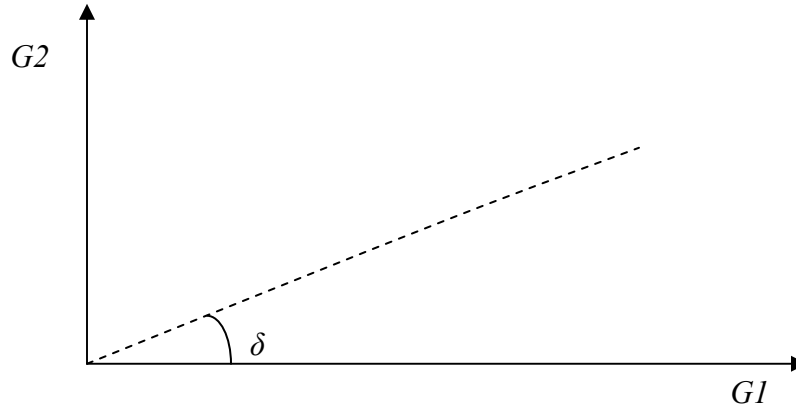
Η σχέση λοιπόν, μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων μπορεί να οριστεί από μια ποσότητα G_1 σε φάση με την παραμόρφωση και μια ποσότητα G_2 με διαφορά φάσης 90° ως προς την παραμόρφωση. Δηλαδή, έχουμε τελικά την μορφή:

$$\sigma = \varepsilon_a \sin \omega t G_1 + \varepsilon_a \cos \omega t G_2$$

Όπου

$$G_1 = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \cos \delta \quad \text{και} \quad G_2 = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \sin \delta$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δείχνουν μια μιγαδική έκφραση του μέτρου, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 2.3

Αν γράψουμε:

$$\varepsilon = \varepsilon_a e^{i\omega t} \quad \text{και} \quad \sigma = \sigma_a e^{i(\omega t + \delta)}$$

Τότε:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = G^* = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} e^{i\delta} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} (\cos \delta + i \sin \delta) = G_1 + iG_2$$

Το πραγματικό μέρος της εξίσωσης, G_1 , το οποίο βρίσκεται σε φάση με την ανηγμένη παραμόρφωση, αποτελεί το «μέτρο αποθήκευσης», διότι αντιπροσωπεύει την ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο δοκίμιο εξ' αιτίας της εφαρμοζόμενης παραμόρφωσης. Το φανταστικό μέρος της εξίσωσης, G_2 , το οποίο βρίσκεται σε διαφορετική φάση με την παραμόρφωση, εκφράζει την απώλεια ενέργειας και ονομάζεται «μέτρο απωλειών». Αυτό φαίνεται αν υπολογίσουμε την ενέργεια που δαπανάται σε κάθε πλήρη κύκλο, ΔE :

$$\Delta E = \int \sigma d\varepsilon = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\sigma d\varepsilon}{dt} dt$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση του σ , ε , προκύπτει:

$$\Delta E = \omega \varepsilon_0^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (G_1 \sin \omega t \cos \omega t + G_2 \cos^2 \omega t) dt \Rightarrow$$

$$\Delta E = \pi G_2 \varepsilon_0^2$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις το G_2 είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με το G_1 . Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι το $|G^*|$ είναι περίπου ίσο με το G_1 . Το $|G^*|$ συχνά αναφέρεται αόριστα και ως μέτρο G . Είναι σύνηθες η δυναμική συμπεριφορά να

ορίζεται από το μέτρο $G = G_1$ και την γωνία φάσης δ ή πιο συχνά, $\tan \delta = G_2/G_1$. Όταν το μέτρο απωλειών G_2 είναι πολύ μικρό, τότε έχουμε μια πολύ καλή προσέγγιση της γωνίας φάσης $\tan \delta = \delta$.

Έως εδώ, έχουμε αγνοήσει την επιρροή της συχνότητας ή του χρόνου. Για τη περίπτωση αυτή υπάρχει μια πλήρης αναλογία με την χαλάρωση λόγω ερπυσμού και τάσης και καθίστανται αναγκαίο να οριστούν τα G_1 , G_2 συναρτήσει της συχνότητας να θέλουμε να καθορίσουμε ολοκληρωμένα την βισκοελαστική συμπεριφορά.

2.7 ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

Η συμπεριφορά ενός βισκοελαστικού υλικού, όταν αυτό υποβάλλεται σε ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη φόρτιση, περιγράφεται από τα μιγαδικά μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης $E^*(\omega)$ και $G^*(\omega)$ αντίστοιχα, όπου $\omega = 2\pi f$ είναι η γωνιακή συχνότητα. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$E^* = E'(\omega) + iE''(\omega),$$

$$G^* = G'(\omega) + iG''(\omega)$$

Όπου $E'(\omega)$, $G'(\omega)$ είναι τα μέτρα αποθήκευσης, ενώ $E''(\omega)$ και $G''(\omega)$ είναι τα μέτρα απωλειών του σύνθετου υλικού. Οι αντίστοιχες εκφράσεις για τους συντελεστές απωλειών είναι:

$$\tan \delta_E = \frac{E''}{E'}$$

$$\tan \delta_G = \frac{G''}{G'}$$

Όπου δ_E και δ_G είναι οι γωνίες διαφοράς φάσης μεταξύ των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων, σε εφελκυσμό και σε διάτμηση αντίστοιχα.

Η διαδικασία αυτή που είναι γνωστή ως «Αρχή της Αντιστοιχίας», έχει αναπτυχθεί από τον Hashin. Με την βοήθεια της σχέσης αυτής μπορεί να προσδιοριστεί το ενεργό μιγαδικό μέτρο ελαστικότητας των βισκοελαστικών σύνθετων υλικών, επί τη βάση των αναλυτικών εκφράσεων που έχουν αναπτυχθεί για το ενεργό στατικό μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών.

Για ισότροπα, βισκοελαστικά υλικά, μπορεί να ορισθεί ένας μιγαδικός λόγος Poisson:

$$\nu^* = \nu'(\omega) - i\nu''(\omega)$$

Επί τη βάση της σχέσης μεταξύ των μέτρων ελαστικότητας και διάτμησης:

$$E^* = 2G^*(1 + \nu^*)$$

Όταν ένα βισκοελαστικό υλικό υποβάλλεται σε μια ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη παραμόρφωση, η σχέση μεταξύ των μιγαδικών τάσεων και των μιγαδικών ανηγμένων παραμορφώσεων είναι τυπικά η ίδια με αυτήν που ισχύει και για ένα ελαστικό υλικό, όμως σε αυτή την περίπτωση τα μέτρα είναι μιγαδικές συναρτήσεις, οι οποίες μεταβάλλονται με την συχνότητα. Άρα, οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση που

ισχύει μεταξύ των στατικών μέτρων ελαστικότητας ή διάτμησης, η οποία και έχει προκύψει από την εφαρμογή των καταστατικών εξισώσεων, θα ισχύει επίσης και για τα μιγαδικά μέτρα ενός βισκοελαστικού μοντέλου της ίδιας γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΟΚΚΩΔΗ ΥΛΙΚΑ

3.1 ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΟΚΚΩΔΟΥΣ ΥΛΙΚΟΥ

3.1.1 ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΠΛΟΥΣΤΕΥΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕΛΕΤΗΣ

Η θεωρητική ανάπτυξη του μοντέλου που ακολουθεί βασίζεται στις εξής παραδοχές :

- Το έγκλεισμα αποτελείται από κόκκους που έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα.
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.

Πρώτο βήμα είναι η θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται τα σφαιρικά εγκλείσματα μέσα στη μάζα της μήτρας. Θεωρούμε λοιπόν ότι αυτά καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός κύβου ακμής l και το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του συνθέτου υλικού. (βλέπε Σχήμα 3.1α)

Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό δομικό μοντέλο σε ένα 'ισοδύναμο' σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε τη σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Θεωρούμε λοιπόν έναν τυχαίο κύβο ακμής l και έναν ομόκεντρο με αυτό κύβο ακμής $2l$. Ο κύβος αυτός ακμής $2l$ επίσης επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ' όλη τη μάζα του συνθέτου υλικού και τον ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό κύτταρο του υλικού. (βλέπε Σχήμα 3.1β)

Τον κύβο ακμής $2l$ θα τον ανάγουμε σε ένα τριφασικό μοντέλο αποτελούμενο από τρεις ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a , b , c αντίστοιχα ($a < b < c$). (βλέπε Σχήμα 3.1γ)

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη και η τρίτη φάση, που τις αποτελούν η σφαίρα ακτίνας a και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c , αντίστοιχα, αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b , αντιπροσωπεύει το σύνολο των σφαιρικών εγκλεισμάτων, δηλαδή το υλικό ενίσχυσης.

Για ένα οποιοδήποτε κοκκώδες υλικό γνωρίζουμε την κατ'όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρικών εγκλεισμάτων, όπως και την ακτίνα τους r_f .

Για τον κύβο ακμής $2l$ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 8 σφαιρικών εγκλεισμάτων προς τον όγκο του κύβου, δηλαδή:

$$U_f = \frac{8 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{(2l)^3} \Rightarrow l = r_f \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3U_f}} \quad (3.1.1)$$

Ο όγκος του κύβου $2l$ στο σφαιρικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας c , ισχύει λοιπόν:

$$(2l)^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 \Rightarrow c = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \quad (3.2.1)$$

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτίνων a, b που θα γίνει ως εξής: Θεωρούμε τον κύβο ακμής l . Η διαγώνιος του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρίας, έχει μήκος $l\sqrt{3}$. Αν ονομάσουμε w την απόσταση από το κέντρο του κύβου έως μια εκ των κορυφών του, η απόσταση αυτή ισούται με το μισό της διαγωνίου και αντιπροσωπεύει ταυτόχρονα την απόσταση των κέντρων των σφαιρών από το κέντρο του κύβου.

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2} l \quad (3.3.1)$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a, b κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή (βλέπε Σχήμα 3.1δ), η δεύτερη φάση 'απλώνεται' κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει :

$$\frac{4}{3} \pi (b^3 - w^3) = \frac{4}{3} \pi (w^3 - a^3) \Rightarrow b^3 + a^3 = 2w^3 \quad (3.4.1)$$

Ο όγκος της δεύτερης φάσης ισούται, όπως είπαμε, με τον όγκο των 8 σφαιρικών εγκλεισμάτων, δηλαδή:

$$\frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3) = 8 \frac{4}{3} \pi r_f^3 \Rightarrow b^3 - a^3 = 8r_f^3 \quad (3.5.1)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.4.1), (3.5.1) προκύπτουν οι εκφράσεις των a, b ως εξής:

$$a = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3} \quad (3.6.1)$$

$$b = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3} \quad (3.7.1)$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a, b, c συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f, r_f .

Μια εναλλακτική θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται τα σφαιρικά εγκλείσματα μέσα στη μάζα της μήτρας αναλύεται στη συνέχεια. Θεωρούμε λοιπόν ότι αυτά καταλαμβάνουν τα βαρύκεντρα των εδρών ενός κύβου ακμής l και το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του συνθέτου υλικού. (βλέπε Σχήμα 3.2α)

Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό δομικό μοντέλο σε ένα 'ισοδύναμο' σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε τη σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή. Θεωρούμε λοιπόν έναν τυχαίο κύβο ακμής l και έναν ομόκεντρο με αυτό κύβο ακμής $2l$. Ο κύβος αυτός ακμής $2l$ επίσης επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ' ολη τη μάζα του σύνθετου υλικού και τον ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό κύτταρο του υλικού. (βλέπε Σχήμα 3.2β)

Τον κύβο ακμής $2l$ θα τον ανάγουμε σε ένα τριφασικό μοντέλο αποτελούμενο από τρεις ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a, b, c αντίστοιχα ($a < b < c$). (βλέπε Σχήμα 3.1γ)

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη και η τρίτη, που τις αποτελούν η σφαίρα ακτίνας a και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c , αντίστοιχα, αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b , αντιπροσωπεύει το σύνολο των σφαιρικών εγκλεισμάτων, δηλαδή το υλικό ενίσχυσης. Για ένα οποιοδήποτε κοκκώδες υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρικών εγκλεισμάτων, όπως και την ακτίνα τους r_f .

Για τον κύβο ακμής $2l$ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 6 σφαιρικών εγκλεισμάτων προς τον όγκο του κύβου, δηλαδή:

$$U_f = \frac{6 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{(2l)^3} \Rightarrow l = r_f \sqrt[3]{\frac{\pi}{U_f}} \quad (3.1.2)$$

Ο όγκος του κύβου $2l$ στο σφαιρικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας c , ισχύει λοιπόν:

$$(2l)^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 \Rightarrow c = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \quad (3.2.2)$$

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτινών a, b που θα γίνει ως εξής: Θεωρούμε τον κύβο ακμής l . Η διαγώνιος του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρίας, έχει μήκος w . Αν ονομάσουμε w την απόσταση από το κέντρο του κύβου έως μια εκ των κορυφών του, η απόσταση αυτή ισούται με το μισό της διαγωνίου και αντιπροσωπεύει ταυτόχρονα την απόσταση των κέντρων των σφαιρών από το κέντρο του κύβου

$$w = \frac{l}{2} \quad (3.3.2)$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a, b κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή (βλέπε Σχήμα 3.1δ), η δεύτερη φάση ‘απλώνεται’ κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει :

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - w^3) = \frac{4}{3}\pi(w^3 - a^3) \Rightarrow b^3 + a^3 = 2w^3 \quad (3.4.2)$$

Ο όγκος της δεύτερης φάσης ισούται, όπως είπαμε, με τον όγκο των 6 σφαιρικών εγκλεισμάτων, δηλαδή:

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 6\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow b^3 - a^3 = 6r_f^3 \quad (3.5.2)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.4.2), (3.5.2) προκύπτουν οι εκφράσεις των a, b ως εξής:

$$a = \sqrt[3]{w^3 + 3r_f^3} \quad (3.6.2)$$

$$b = \sqrt[3]{w^3 - 3r_f^3} \quad (3.7.2)$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a, b, c συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f, r_f

Μια δεύτερη εναλλακτική θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται τα σφαιρικά εγκλείσματα μέσα στη μάζα της μήτρας αναλύεται στη συνέχεια. Θεωρούμε λοιπόν ότι αυτά καταλαμβάνουν τα μέσα των ακμών ενός κύβου ακμής l και το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του συνθέτου υλικού. (βλέπε Σχήμα 3.3α)

Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό δομικό μοντέλο σε ένα ‘ισοδύναμο’ σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε τη σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Θεωρούμε λοιπόν έναν τυχαίο κύβο ακμής l και έναν ομόκεντρο με αυτό κύβο ακμής $2l$. Ο κύβος αυτός ακμής $2l$ επίσης επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ’ολη τη μάζα του σύνθετου υλικού και τον ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό κύτταρο του υλικού. (βλέπε Σχήμα 3.3β)

Τον κύβο ακμής 2l θα τον ανάγουμε σε ένα τριφασικό μοντέλο αποτελούμενο από τρεις ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a, b, c αντίστοιχα ($a < b < c$). (βλέπε Σχήμα 3.1γ)

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη και η τρίτη, που τις αποτελούν η σφαίρα ακτίνας a και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c, αντίστοιχα, αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b, αντιπροσωπεύει το σύνολο των σφαιρικών εγκλεισμάτων, δηλαδή το υλικό ενίσχυσης. Για ένα οποιοδήποτε κοκκώδες υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρικών εγκλεισμάτων, όπως και την ακτίνα τους r_f .

Για τον κύβο ακμής 2l η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 12 σφαιρικών εγκλεισμάτων προς τον όγκο του κύβου, δηλαδή:

$$U_f = \frac{12 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{(2l)^3} \Rightarrow l = r_f \sqrt[3]{\frac{2\pi}{U_f}} \quad (3.1.3)$$

Ο όγκος του κύβου 2l στο σφαιρικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας c, ισχύει λοιπόν:

$$(2l)^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 \Rightarrow c = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \quad (3.2.3)$$

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτινών a, b που θα γίνει ως εξής:

Θεωρούμε τον κύβο ακμής l. Η διαγώνιος του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρίας, έχει μήκος $l\sqrt{2}$. Αν ονομάσουμε w την απόσταση από το κέντρο του κύβου έως μια εκ των κορυφών του, η απόσταση αυτή ισούται με το μισό της διαγωνίου και αντιπροσωπεύει ταυτόχρονα την απόσταση των κέντρων των σφαιρών από το κέντρο του κύβου

$$w = \frac{l\sqrt{2}}{2} \quad (3.3.3)$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a, b κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w. Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή (βλέπε Σχήμα 3.1δ), η δεύτερη φάση 'απλώνεται' κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει :

$$\frac{4}{3} \pi (b^3 - w^3) = \frac{4}{3} \pi (w^3 - a^3) \Rightarrow b^3 + a^3 = 2w^3 \quad (3.4.3)$$

Ο όγκος της δεύτερης φάσης ισούται, όπως είπαμε, με τον όγκο των 12σφαιρικών εγκλεισμάτων, δηλαδή:

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 12\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow b^3 - a^3 = 12r_f^3 \quad (3.5.3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.4.3), (3.5.3) προκύπτουν οι εκφράσεις των a , b ως εξής:

$$a = \sqrt[3]{w^3 + 6r_f^3} \quad (3.6.3)$$

$$b = \sqrt[3]{w^3 - 6r_f^3} \quad (3.7.3)$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a , b , c συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f , r_f

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a , b κατανέμεται ισοπαχικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση ‘απλώνεται’ κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει : $b-w=w-a$ δηλαδή $b=2w-a$ (3.4.4)

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow b^3 - a^3 = 8r_f^3 \quad (3.5.1)$$

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 6\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow b^3 - a^3 = 6r_f^3 \quad (3.5.2)$$

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 12\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow b^3 - a^3 = 12r_f^3 \quad (3.5.3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων της σχέσης (3.4.4) με τις (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) αντίστοιχα προκύπτουν οι εκφράσεις των a , b για κάθενα από τα θεωρητικά μοντέλα.

$$a^3 - 3w\alpha^2 + 6w^2\alpha - 4w^3 + 4r_f^3 = 0$$

$$a^3 - 3w\alpha^2 + 6w^2\alpha - 4w^3 + 3r_f^3 = 0$$

$$a^3 - 3w\alpha^2 + 6w^2\alpha - 4w^3 + 6r_f^3 = 0$$

Η επίλυση των τριωνύμων δίνει τιμές για το a για κάθε θεωρητικό μοντέλο. Εν συνεχεία από την εξίσωση (3.4.4) βρίσκουμε το b .

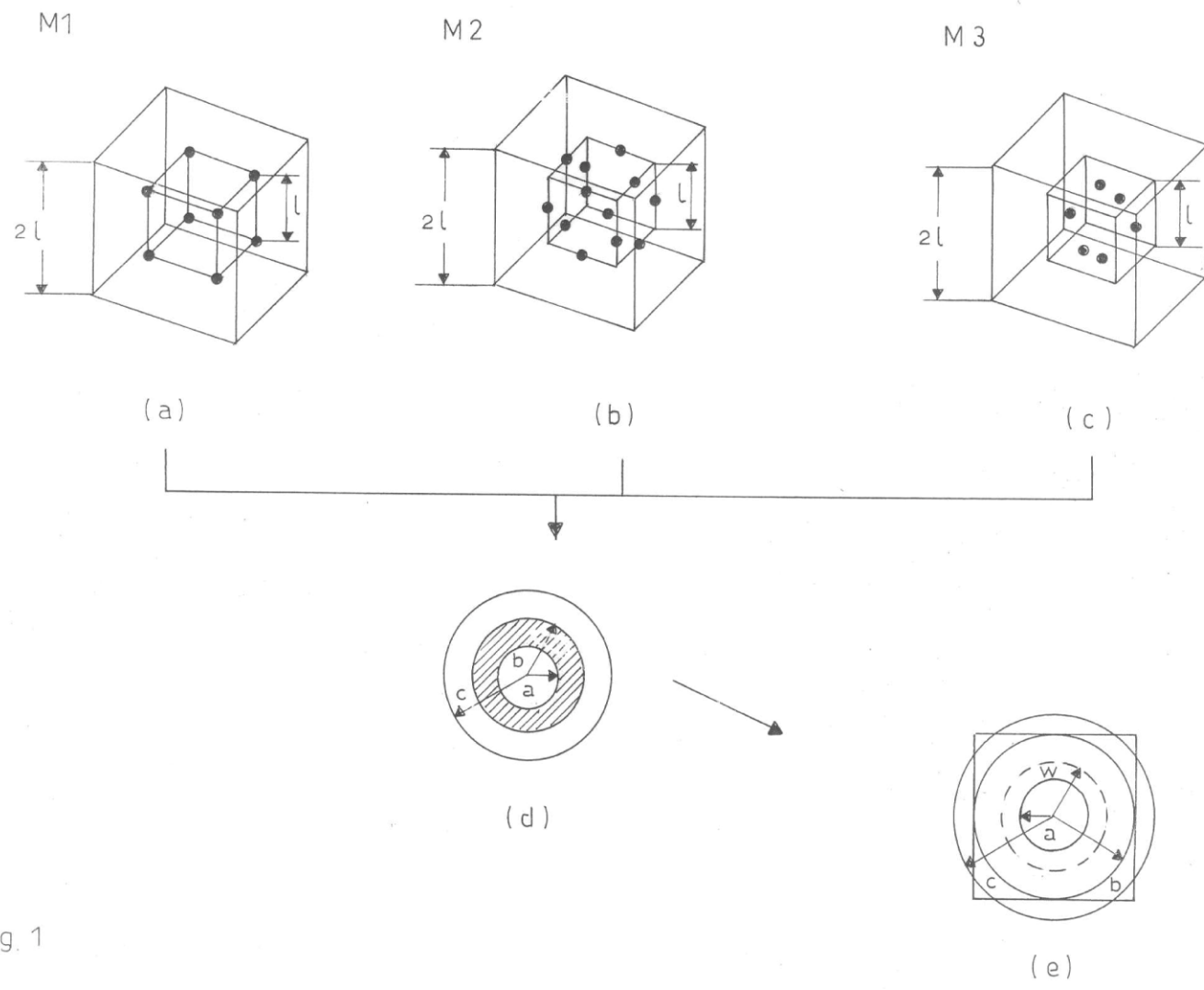


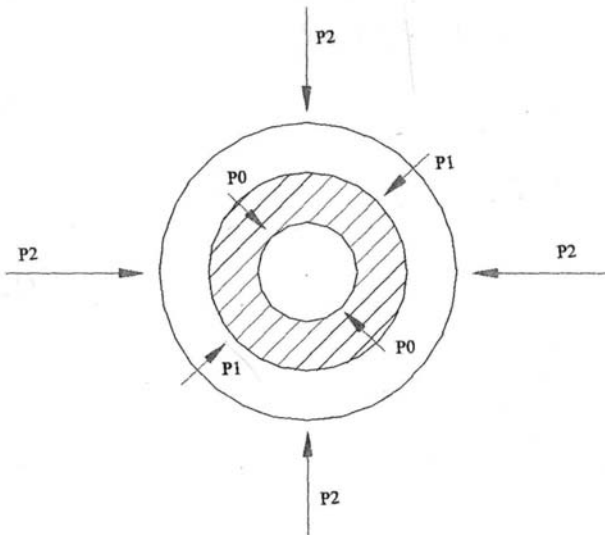
Fig. 1

3.1.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρώτο μέγεθος το οποίο θα υπολογίσουμε είναι το μέτρο ελαστικότητας E_c ενός κοκκώδους υλικού.

Θεωρούμε λοιπόν το τριφασικό σφαιρικό μοντέλο, όπως αυτό έχει προκύψει από την ανάλυση που προηγήθηκε στην ενότητα 3.1.1.

Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας c , ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση P_2 . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 2^{ης}, 3^{ης} φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια πίεση, που την καλούμε P_1 . Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ 1^{ης} και 2^{ης} φάσης στο σύνορο τους θα ασκείται μια πίεση έστω P_0 . (βλέπε Σχήμα.3.5)



Σχ.3.5

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε την τασική συνάρτηση Φ που περιγράφει το πρόβλημα μας, εκφρασμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες. Η γενική μορφή της τασικής είναι:

$$\Phi = \frac{C_1}{r} + C_2 r^2$$

όπου C_1 , C_2 σταθερές.

Η κάθε μία από τις τρεις φάσεις έχει τη δική της τασική συνάρτηση που τη χαρακτηρίζει, έτσι έχουμε αντίστοιχα:

$$\Phi_1 = \frac{A}{r} + Br^2, \quad \Phi_2 = \frac{C}{r} + Dr^2, \quad \Phi_3 = \frac{H}{r} + Fr^2$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό της τασικής συνάρτησης στη θέση $r=0$ θα πρέπει και η σταθερά A να ισούται με μηδέν, έτσι $A=0$ και η Φ_1 γίνεται:

$$\Phi_1 = Br^2$$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

Από τις τασικές συναρτήσεις προκύπτουν οι μετατοπίσεις κάθε φάσης από τη σχέση:

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

όπου G το μέτρο διάτμησης.

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις ϕ και θ είναι μηδενικές, δηλαδή $u_\phi = u_\theta = 0$. Υπολογίζουμε λοιπόν μόνο τις ακτινικές μετατοπίσεις u_r , οι οποίες είναι:

$$u_{r,1} = \frac{Br}{G_1} \quad (3.8)$$

$$u_{r,2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2} \quad (3.9)$$

$$u_{r,3} = \frac{-\frac{H}{r^2} + 2Fr}{2G_3} \quad (3.10)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις για κάθε φάση από τις γενικές σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $u_\phi = u_\theta = 0$ και τη σχέση :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

όπου ν ο λόγος POISSON, προκύπτουν οι εξής εκφράσεις για τις παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{\phi,1} = 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D\right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{\phi,2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D\right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \left(\frac{2H}{r^3} + 2F\right) \frac{1+\nu_3}{E_3} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{\phi,3} = \left(-\frac{H}{r^3} + 2F\right) \frac{1+\nu_3}{E_3} \quad (3.15)$$

ΤΑΣΕΙΣ

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των τάσεων με τη βοήθεια των σχέσεων τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = \sigma_{\phi,1} = \frac{2(1+\nu_1)}{1-2\nu_2} B \quad (3.16)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D \quad (3.17)$$

$$\sigma_{\theta,2} = \sigma_{\phi,2} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D \quad (3.18)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{2H}{r^3} + \frac{2(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} F \quad (3.19)$$

$$\sigma_{\theta,3} = \sigma_{\phi,3} = -\frac{H}{r^3} + \frac{2(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} F \quad (3.20)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις είναι οι εξής:

Για $r=a$: $\sigma_{r,1}=\sigma_{r,2}=-P_0$

Για $r=b$: $\sigma_{r,2}=\sigma_{r,3}=-P_1$

Για $r=c$: $\sigma_{r,3}=-P_2$

Οι σχέσεις (3.16, 3.17, 3.19) παίρνουν αντίστοιχα τις τιμές:

$$(3.16) \Rightarrow \frac{2(1+\nu_1)}{1-2\nu_2} B = -P_0 \quad (3.21)$$

$$(3.17) \Rightarrow (\text{για } r=a) \frac{2C}{a^3} + \frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D = -P_0 \quad (3.22)$$

$$(3.17) \Rightarrow (\text{για } r=b) \frac{2C}{b^3} + \frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D = -P_1 \quad (3.23)$$

$$(3.19) \Rightarrow (\text{για } r=b) \frac{2H}{b^3} + \frac{2(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} F = -P_1 \quad (3.24)$$

$$(3.19) \Rightarrow (\text{για } r=c) \frac{2H}{c^3} + \frac{2(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} F = -P_2 \quad (3.25)$$

Από τη λύση της εξίσωσης (3.21) προκύπτει η τιμή της σταθεράς B. Οι εξισώσεις (3.22)-(3.23) και (3.24)-(3.25) αποτελούν αντίστοιχα δυο συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους από την λύση των οποίων προκύπτουν οι τιμές των σταθερών C-D και H-F αντίστοιχα. Οι τιμές που προκύπτουν είναι:

$$B = -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)}$$

$$C = \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$D = \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)}$$

$$H = \frac{(P_2 - P_1)b^3c^3}{2(c^3 - b^3)}$$

$$F = \frac{(b^3P_1 - c^3P_2)(1-2\nu_3)}{2(c^3 - b^3)(1+\nu_3)}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των σταθερών στις εξισώσεις (3.8), (3.9), (3.10) και προκύπτει:

$$u_{r,1} = -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1} r \quad (3.25)$$

$$u_{r,2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^2} + \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} r \quad (3.26)$$

$$u_{r,3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^2} + \frac{(b^3P_1 - c^3P_2)(1-2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} r \quad (3.27)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Για $r=a$: $u_{r,1} = u_{r,2}$

Για $r=b$: $u_{r,2} = u_{r,3}$

(3.25) = (3.26) \Rightarrow (για $r=a$)

$$\begin{aligned} -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1}a &= -\frac{(P_1-P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} + \frac{(a^3P_0-b^3P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a \Rightarrow \\ -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1}a &= -P_1 \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} + P_0 \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} + \\ + P_0 \frac{a^3(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a - P_1 \frac{b^3(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a &\Rightarrow \\ -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1}a - P_0 \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} - P_0 \frac{a^3(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a &= -P_1 \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} \\ - P_1 \frac{b^3(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a &\Rightarrow \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με τον όρο $2E_1E_2(b^3-a^3)a^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_0 [(1-2\nu_1) \alpha^3 2E_2 (b^3-\alpha^3) + E_1 a^3b^3 (1+\nu_2) + \alpha^6 (1-2\nu_2) 2E_1] &= P_1 [\alpha^3b^3 (1+\nu_2) E_1 + b^3(1-2\nu_2)2E_1\alpha^3] \\ \Rightarrow P_1 [\alpha^3b^3 E_1 + \alpha^3b^3 E_1\nu_2 + 2E_1\alpha^3 b^3 - 4 E_1 \alpha^3b^3 \nu_2] &= P_0 [2 (b^3-\alpha^3) (1-2\nu_1) E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2\alpha^3(1-2\nu_2)]E_1] \alpha^3 \\ \Rightarrow P_1 [3\alpha^3b^3 E_1 - 3 \alpha^3b^3 E_1\nu_2] &= P_0 [2 (b^3-\alpha^3) (1-2\nu_1) E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2\alpha^3(1-2\nu_2)]E_1] \alpha^3 \\ \Rightarrow P_1 [3b^3 (1-\nu_2) E_1] \alpha^3 &= P_0 [2 (b^3-\alpha^3) (1-2\nu_1) E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2\alpha^3(1-2\nu_2)]E_1] \alpha^3 \\ \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} &= \frac{[3b^3 (1-\nu_2) E_1]}{\{2 (b^3-\alpha^3) (1-2\nu_1)E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2\alpha^3(1-2\nu_2)]E_1\} \alpha^3} \quad (3.28) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } \mu = \frac{P_0}{P_1} \quad \text{και η σχέση (3.28) γίνεται} \quad P_0 = \mu P_1 \quad (3.29)$$

(2.26) = (2.27) \Rightarrow (για $r=b$)

$$-\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{b^2} + \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} b = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{b^2} +$$

$$+ \frac{(b^3P_1 - c^3P_2)(1-2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} b$$

Πολλαπλασιάζουμε με b^2

$$-P_1 \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} + P_0 \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} + P_0 \frac{a^3(1-2\nu_2)b^3}{(b^3 - a^3)E_2} - P_1 \frac{b^3(1-2\nu_2)b^3}{(b^3 - a^3)E_2} =$$

$$-P_2 \frac{b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} + P_1 \frac{b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} + P_1 \frac{b^3(1-2\nu_3)b^3}{(c^3 - b^3)E_3} - P_2 \frac{c^3(1-2\nu_3)b^3}{(c^3 - b^3)E_3}$$

$$\Rightarrow P_0 \left\{ \frac{2a^3(1-2\nu_2)b^3}{2(b^3 - a^3)E_2} + \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \right\} + P_2 \left\{ \frac{b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} + \frac{2c^3(1-2\nu_3)b^3}{2(c^3 - b^3)E_3} \right\} =$$

$$P_1 \left\{ \frac{a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} + \frac{2b^6(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} + \frac{2b^6(1-2\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} + \frac{b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \left\{ \frac{3a^3b^3(1-\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \right\} + P_2 \left\{ \frac{3b^3c^3(1-\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \right\} = P_1 \left\{ \frac{a^3b^3(1+\nu_2) + 2b^6(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^3c^3(1+\nu_3) + 2b^6(1-2\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \right\}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $[(b^3 - a^3) \cdot (c^3 - b^3) \cdot E_2 \cdot E_3]$

$$P_0 \{3a^3b^3(1-\nu_2)(c^3 - b^3)E_3\} + P_2 \{3b^3c^3(1-\nu_3)(b^3 - a^3)E_2\} = P_1 \{[\alpha^3b^3(1+\nu_2) + 2b^6(1-2\nu_2)](c^3 - b^3)E_3 + (b^3 - a^3)E_2[b^3c^3(1+\nu_3) + 2b^6(1-2\nu_3)]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \{3a^3(1-\nu_2)(c^3 - b^3)E_3\} + P_2 \{3c^3(1-\nu_3)(b^3 - a^3)E_2\} = P_1 \{[\alpha^3(1+\nu_2) + 2b^3(1-2\nu_2)](c^3 - b^3)E_3 + [c^3(1+\nu_3) + 2b^3(1-2\nu_3)](b^3 - a^3)E_2\} \quad (3.30)$$

$$P_2 \{3c^3(1-\nu_3)(b^3 - a^3)E_2\} = P_1 \{[\alpha^3(1+\nu_2) + 2b^3(1-2\nu_2)](c^3 - b^3)E_3 + [c^3(1+\nu_3) + 2b^3(1-2\nu_3)](b^3 - a^3)E_2 - 3\mu\alpha^3(1-\nu_2)(c^3 - b^3)E_3\} \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow P_1 = \lambda P_2 \quad (3.32)$$

Από (3.29) και (3.32) $\Rightarrow P_0 = \mu\lambda P_2$ και θέτοντας $\kappa = \mu \cdot \lambda$ έχουμε ότι

$$P_0 = \kappa P_2 \quad (3.33)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις τιμές των σταθερών που υπολογίσαμε στις εξισώσεις (3.16)-(3.20) των τάσεων και (3.11)-(3.15) των παραμορφώσεων οι οποίες γίνονται:

$$\sigma_{r,1} = -P_0, \quad \sigma_{\theta,1} = -P_0, \quad \sigma_{\phi,1} = -P_0 \quad (3.34)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \quad (3.35)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{\phi,2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3c^3}{(c^3 - b^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3} \quad (3.37)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3}{2(c^3 - b^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{\phi,3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3}{2(c^3 - b^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3} \quad (3.38)$$

και

$$\varepsilon_{r,1} = -\frac{P_0(1 - 2\nu_1)}{E_1} \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = -\frac{P_0(1 - 2\nu_1)}{E_1} \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{\phi,1} = -\frac{P_0(1 - 2\nu_1)}{E_1} \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1 + \nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{\phi,2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1 + \nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3} \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3} \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_{\phi,3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3} \quad (3.43)$$

Για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας E_c του συνθέτου υλικού, θεωρούμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των τριών φάσεων από τις οποίες αποτελείτε, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\nu_c} \frac{P_2^2}{k_c} \partial \nu_c &= \frac{1}{2} \int_{\nu_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\phi,1} \varepsilon_{\phi,1}) \partial \nu_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\nu_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\phi,2} \varepsilon_{\phi,2}) \partial \nu_2 + \frac{1}{2} \int_{\nu_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\phi,3} \varepsilon_{\phi,3}) \partial \nu_3 \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^c \frac{P_2^2}{k_c} 4\pi r^2 \partial r &= \frac{1}{2} \int_0^a (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\phi,1} \varepsilon_{\phi,1}) 4\pi r^2 \partial r + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\phi,2} \varepsilon_{\phi,2}) 4\pi r^2 \partial r + \frac{1}{2} \int_b^c (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\phi,3} \varepsilon_{\phi,3}) 4\pi r^2 \partial r \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P_2^2 4\pi c^3}{3k_c} &= \int_0^a \left\{ \frac{3P_0^2(1-2\nu_1)}{E_1} \right\} 4\pi r^2 \partial r + \\ &+ \int_a^b \left\{ \left[\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right] \left[\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right] \right. \\ &+ 2 \left[-\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right] \left[-\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right] \right\} 4\pi r^2 \partial r + \\ &\int_b^c \left\{ \left[\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{(c^3 - b^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3} \right] \left[\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3(1+\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1-2\nu_3}{E_3} \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3} \right] + 2 \left[-\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3} \right] \right. \\ &\left. \left[-\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{1-2\nu_3}{E_3} \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3} \right] \right\} 4\pi r^2 \partial r \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P_2^2 4\pi c^3}{3k_c} &= \frac{3P_0^2(1-2\nu_1)}{E_1} 4\pi \frac{\alpha^3}{3} + \int_a^b \left\{ \left[\frac{(P_1 - P_0)^2 (a^3 b^3)^2 (1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2 r^6} + \right. \right. \\ &+ \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (a^3 P_0 - b^3 P_1)}{(b^3 - a^3)^2 r^3} + \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (a^3 P_0 - b^3 P_1)(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2 r^3} + \\ &+ \frac{(1-2\nu_2)(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \left. \right] + 2 \left[\frac{(P_1 - P_0)^2 (a^3 b^3)^2 (1+\nu_2)}{4(b^3 - a^3)^2 E_2 r^6} - \right. \\ &\left. - \frac{(1-2\nu_2)(a^3 P_0 - b^3 P_1)(P_1 - P_0)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)^2 E_2 r^3} - \frac{(1+\nu_2)(a^3 P_0 - b^3 P_1)(P_1 - P_0)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)^2 E_2 r^3} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-P_1 b^3 + P_0 a^3)^2 (1 - 2\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \} 4\pi r^2 \partial r + \int_b^c \left\{ \left[\frac{(P_2 - P_1)^2 (b^3 c^3)^2 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 r^6 E_3} + \right. \right. \\
& + \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{(P_2 - P_1) b^3 c^3 (b^3 P_1 - c^3 P_2)}{(c^3 - b^3) r^3} + \frac{(P_2 - P_1) b^3 c^3 (b^3 P_1 - c^3 P_2) (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3 r^3} + \\
& + \left. \frac{(1 - 2\nu_3) (b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \right] + 2 \left[\frac{(P_2 - P_1)^2 (b^3 c^3)^2 (1 + \nu_3)}{4(c^3 - b^3)^2 E_3 r^6} - \right. \\
& - \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2) (P_2 - P_1) b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)^2 r^3} - \frac{(1 + \nu_3) (b^3 P_1 - c^3 P_2) (P_2 - P_1) b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)^2 E_3 r^3} + \\
& \left. \left. + \frac{(1 - 2\nu_3) (b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \right] \right\} 4\pi r^2 \partial r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \frac{P_2^2 4\pi c^3}{3k_c} = \frac{P_0^2 (1 - 2\nu_1)}{E_1} 4\pi a^3 + \int_a^b \left\{ \frac{3}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 (a^3 b^3)^2 (1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2 r^6} + \right. \\
& + 3 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2 (1 - 2\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \} 4\pi r^2 \partial r + \int_b^c \left\{ \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)^2 (b^3 c^3)^2 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3 r^6} + \right. \\
& \left. + 3 \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2 (1 - 2\nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \right\} 4\pi r^2 \partial r
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε το $K_c = \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)}$ το μέτρο διόγκωσης του σύνθετου υλικού. Η σχέση

(3.44) μετασχηματίζεται λοιπόν:

$$\begin{aligned}
& \frac{P_2^2 c^3}{3} \frac{3(1 - 2\nu_c)}{E_c} = \frac{P_0^2 (1 - 2\nu_1)}{E_1} a^3 + \frac{3}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 (a^3 b^3)^2 (1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \int_a^b \frac{1}{r^4} \partial r \\
& + 3 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2 (1 - 2\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)^2 (b^3 c^3)^2 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \int_b^c \frac{1}{r^4} \partial r + \\
& + 3 \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2 (1 - 2\nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \left(\frac{c^3 - b^3}{3} \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{P_2^2 (1 - 2\nu_c) c^3}{E_c} = \frac{P_0^2 (1 - 2\nu_1)}{E_1} a^3 + \frac{3}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 (a^3 b^3)^2 (1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3b^3} \right) + \\
& + 3 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2 (1 - 2\nu_2) (b^3 - a^3)}{3(b^3 - a^3)^2 E_2} + \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)^2 (b^3 c^3)^2 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \left(\frac{1}{3b^3} - \frac{1}{3c^3} \right) + \\
& + \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2) (1 - 2\nu_3)}{(c^3 - b^3) E_3} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{2P_2^2(1-2\nu_c)c^3}{E_c} &= \frac{2P_0^2(1-2\nu_1)}{E_1}a^3 + \frac{(P_1-P_0)^2 a^3 b^3 (1+\nu_2)}{(b^3-a^3) E_2} + \\
&+ \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2 2(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3) E_2} + \frac{(P_2-P_1)^2 b^3 c^3 (1+\nu_3)}{(c^3-b^3) E_3} + \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2) 2(1-2\nu_3)}{(c^3-b^3)}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Με βάση τη θεωρία του μοντέλου που έχουμε επιλέξει, οι κατ'όγκον περιεκτικότητες των τριών φάσεων προκύπτουν ως εξής:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}{\frac{4}{3}\pi c^3} = \frac{\alpha^3}{c^3} \tag{3.47}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi\alpha^3}{\frac{4}{3}\pi c^3} = \frac{b^3 - \alpha^3}{c^3} \tag{3.48}$$

$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi c^3 - \frac{4}{3}\pi b^3}{\frac{4}{3}\pi c^3} = \frac{c^3 - b^3}{c^3} \tag{3.49}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (3.32), (3.33) απ'όπου προκύπτει ότι $\lambda = \frac{P_1}{P_2}$

και $\kappa = \frac{P_0}{P_2}$, τις σχέσεις (3.47), (3.48), (3.49) και κατόπιν διαιρέσεως και των δυο μελών της (3.46) με $P_2 c^3$, καταλήγουμε στην εξής τελική σχέση για το E_c :

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= 2\kappa^2 U_1 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left\{ \frac{U_1(1-U_3)(\lambda-\kappa)^2(1+\nu_2)}{U_2} + \right. \\
&+ \left. \frac{2[U_1\kappa - (1-U_3)\lambda]^2(1-2\nu_2)}{U_2} \right\} + \frac{1}{E_3} \left\{ \frac{(1-U_3)(1-\lambda)^2(1+\nu_3)}{U_3} + \right. \\
&+ \left. \frac{2[(1-U_3)\lambda - 1]^2(1-2\nu_3)}{U_3} \right\}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Παρατήρηση

Ο λόγος Poisson ν_c του σύνθετου υλικού προκύπτει από το νόμο των φάσεων και δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2} + \frac{U_3}{\nu_3} \quad (3.51)$$

3.2 ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Τα υλικά τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί για αυτή τη μελέτη είναι σύνθετα υλικά τα οποία κατασκευάστηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Η μήτρα των συνθέτων υλικών είναι εποξειδική ρητίνη του τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384 και με ιξώδες 15000cP, στους 25°C, πολυμεριζόμενη εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη. Εξ'άλλου, χρησιμοποιήθηκε μέγεθος κόκκου σκόνης σιδήρου 0.15mm, με ειδικό όγκο 38-41cm³, 100gr και με φαινομένη πυκνότητα 2.4-2.6 gr/cm³. Οι ιδιότητες των υλικών τα οποία χρησιμοποιήθηκαν είναι όπως φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Ιδιότητα	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lame	λ μ	N/m ² N/m ²	112x10 ⁹ 81 x10 ⁹	3.34 x10 ⁹ 1.30 x10 ⁹
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N/m ²	210 x10 ⁹	3.53 x10 ⁹
Μέτρο Διογκώσεως	K	N/m ²	167 x10 ⁹	4.21 x10 ⁹
Λόγος Poisson	ν	-	0.29	0.36
Πυκνότης	ρ	Kg/m ³	7800	1190
Συντελεστής θερμικής διαστολής	α	°C ⁻¹	15.0x10 ⁻⁶	65.26x10 ⁻⁶

Οι μηχανικές ιδιότητες της μήτρας E και ν μετρήθηκαν κατά τη διάρκεια πειράματος ερπυσμού στους 20°C και σε χρόνο 15sec από την αρχή του πειράματος.

Όσον αφορά την παρασκευή των δοκιμίων, θερμαίνουμε το προπολυμερές στους 30°C περίπου για να ελαττωθεί η εσωτερική τριβή του και στην συνέχεια προσθέτουμε τις κατάλληλες ποσότητες αμίνης και μετάλλου. Ανακατώνουμε το μίγμα, στην συνέχεια το τοποθετούμε σε θάλαμο κενού, έτσι ώστε να ελευθερωθούν όλες οι φυσαλίδες αέρα τις οποίες περιέχει το μίγμα.

Στην συνέχεια γίνεται απόχυση του μίγματος σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλούπι από plexiglass, διαστάσεων $250 \times 250 \times 50\text{mm}$, το οποίο σφραγίζεται με ένα σκέπασμα από plexiglass, ούτως ώστε να είναι δυνατή η εκ νέου ανάδευση του μίγματος για να έχουμε τελικά ένα όσο το δυνατόν ομογενές προϊόν. Το μίγμα έμεινε μέσα στο καλούπι και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος επί 24 ώρες. Στην συνέχεια, το στερεό πλέον σύνθετο υλικό, υποβλήθηκε σε θερμική κατεργασία διάρκειας 7 ημερών ως εξής :

Τοποθετήθηκε σε φούρνο, προγραμματισμένο, έτσι ώστε η θερμοκρασία να αυξάνει κατά 5°C/h , εν συνεχεία να παραμένει σταθερά στους 100°C και τέλος να ελαττώνεται κατά 1°C/h ως την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται πλήρης πολυμερισμός της μήτρας, σε διάστημα που το σύνθετο υλικό να μην παρουσιάζει έντονη βισκοελαστική συμπεριφορά. Δοκίμια με διατομή $6 \times 3 \text{ mm}^3$ και μήκους μετρήσεως 45mm χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα εφελκυσμού που έγιναν σε μηχανή Instron σε συνθήκες περιβάλλοντος με ταχύτητα 0.1cm/min . Τρια δοκίμια για κάθε μια από τις πέντε περιεκτικότητες $U_f=0.05-0.25$ χρησιμοποιήθηκαν.

3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

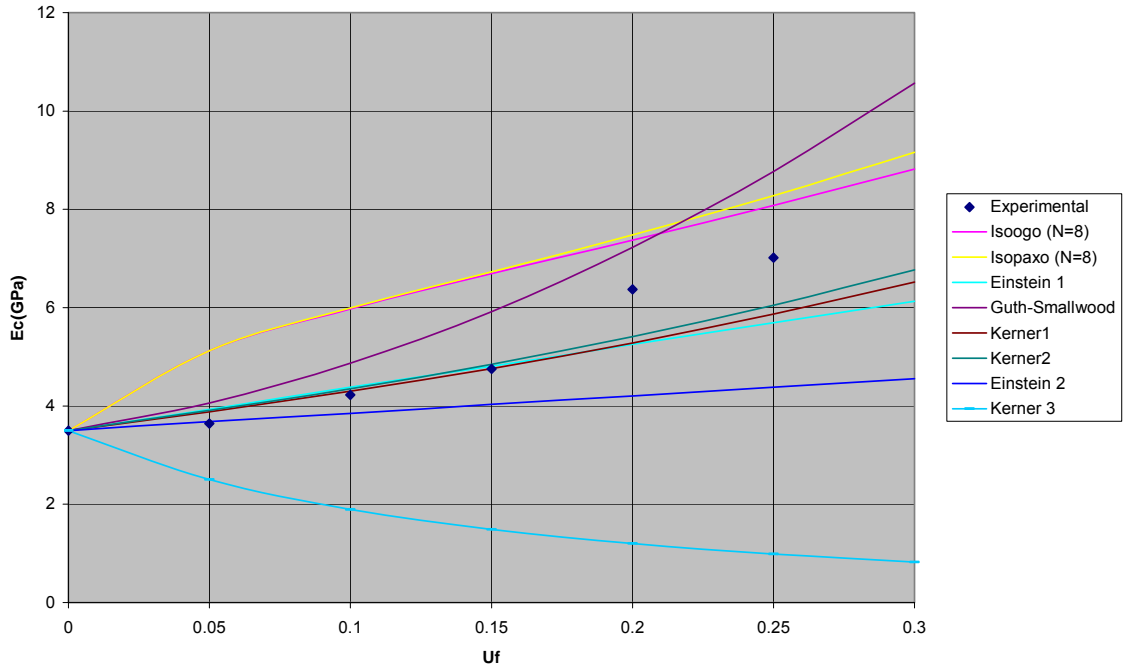
Η απόκλιση των θεωρητικών προβλέψεων για το E_c από τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα(φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Τα θεωρητικά μοντέλα προβλέπουν τέλεια γεωμετρικά σχήματα (σφαίρα, κύλινδρος κλπ) ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία.

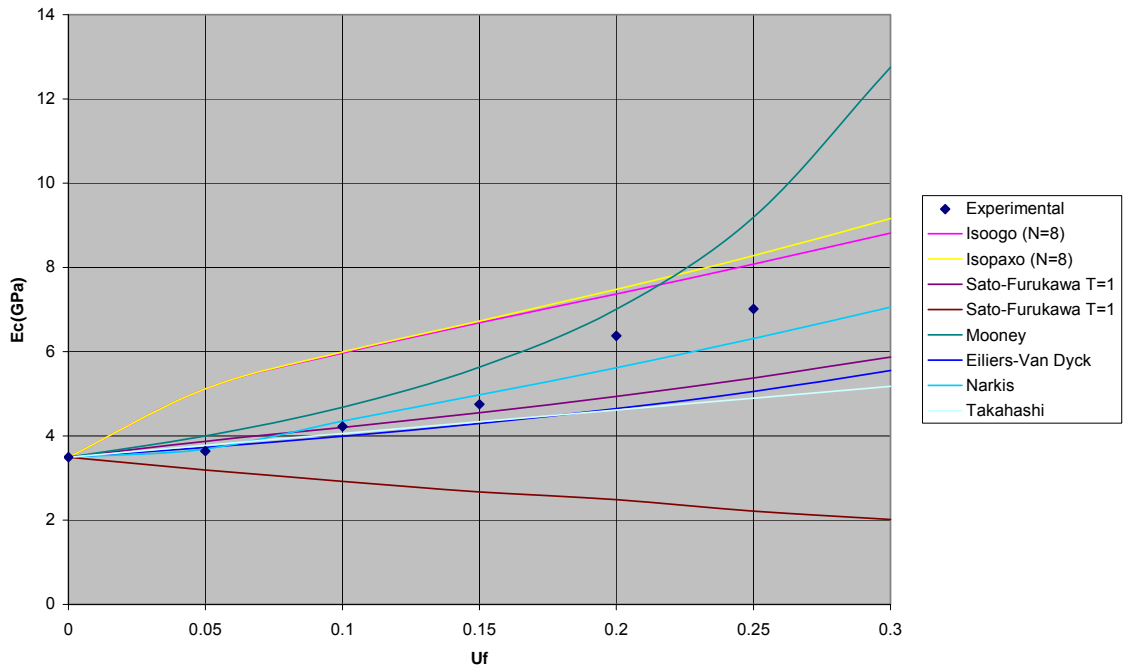
Παρατηρούμε στα διαγράμματα 1-1 έως 3-2 ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων τόσο αυξάνει και το μέτρο ελαστικότητας E_c του θεωρητικού μοντέλου. Τα ισόπαχα μοντέλα δίδουν λίγο μεγαλύτερες τιμές για το E_c από τα ισοογκικά. Το θεωρητικό μοντέλο με τις έξι σφαίρες στα βαρύκεντρα των εδρών προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα. Παρατηρούμε ότι όλες οι θεωρητικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας, πλην των Kerner 3, Sato-Furukawa $T=1$, αυξάνουν όσο αυξάνει η περιεκτικότητα U_f . Το ίδιο συμβαίνει και με τις πειραματικές τιμές. Ο Mooney και ο

Guth-Smallwood δίνουν τιμές πολύ μεγαλύτερες από τις πειραματικές όσο αυξάνει η περιεκτικότητα. Όλοι οι άλλοι ερευνητές δεν εμφανίζουν αποκλίσεις στις τιμές τους και τα διαγράμματα τους σχεδόν ταυτίζονται. Το θεωρητικό μοντέλο με τις οκτώ σφαίρες στις κορυφές του κύβου δίνει τιμές μεγαλύτερες από τις πειραματικές. Το θεωρητικό μοντέλο με τις δώδεκα σφαίρες στα μέσα των πλευρών του κύβου δίνει τιμές μεγαλύτερες από τις πειραματικές μέχρι περιεκτικότητα 15%, μετά οι τιμές του είναι ελάχιστα μικρότερες από τις πειραματικές, συνεπώς σε μεγαλύτερες περιεκτικότητες το μοντέλο αυτό έχει μεγαλύτερη αξιοπιστία. Το θεωρητικό μοντέλο με τις έξι σφαίρες στα βαρύκεντρα των εδρών έως 15% περιεκτικότητα σε έγκλεισμα δίνει τις ίδιες τιμές με το πειραματικό, για μεγαλύτερη περιεκτικότητα οι πειραματικές τιμές είναι λίγο μεγαλύτερες. Αυτό το μοντέλο έχει μεγαλύτερη αξιοπιστία στις χαμηλές περιεκτικότητες μέχρι 20%.

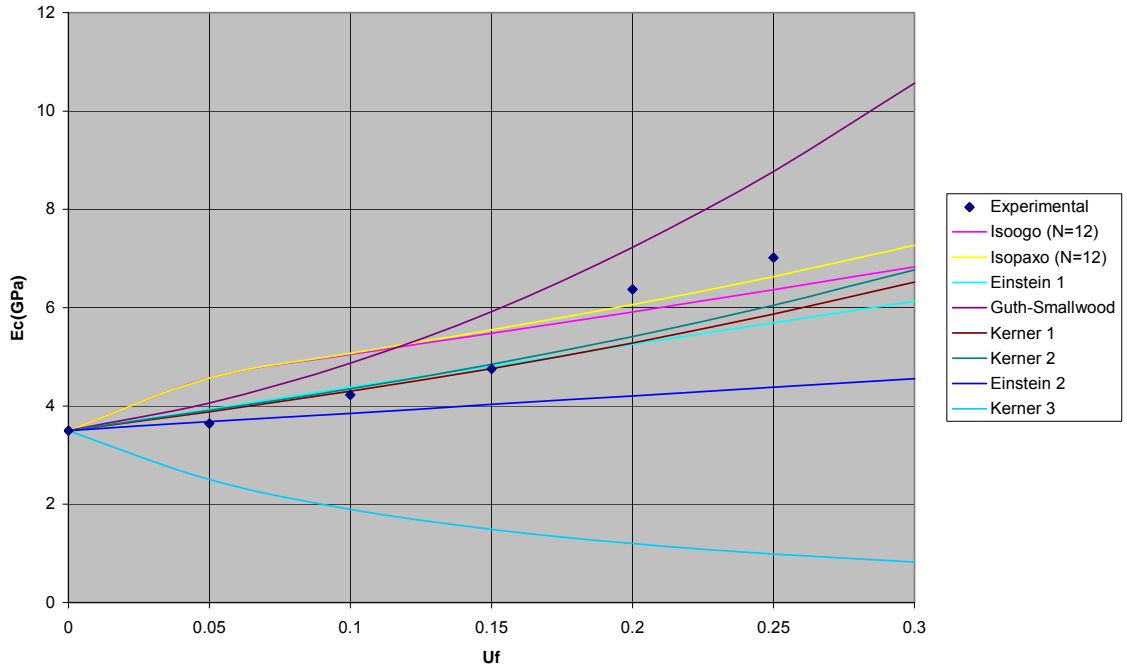
ELASTIC MODULUS



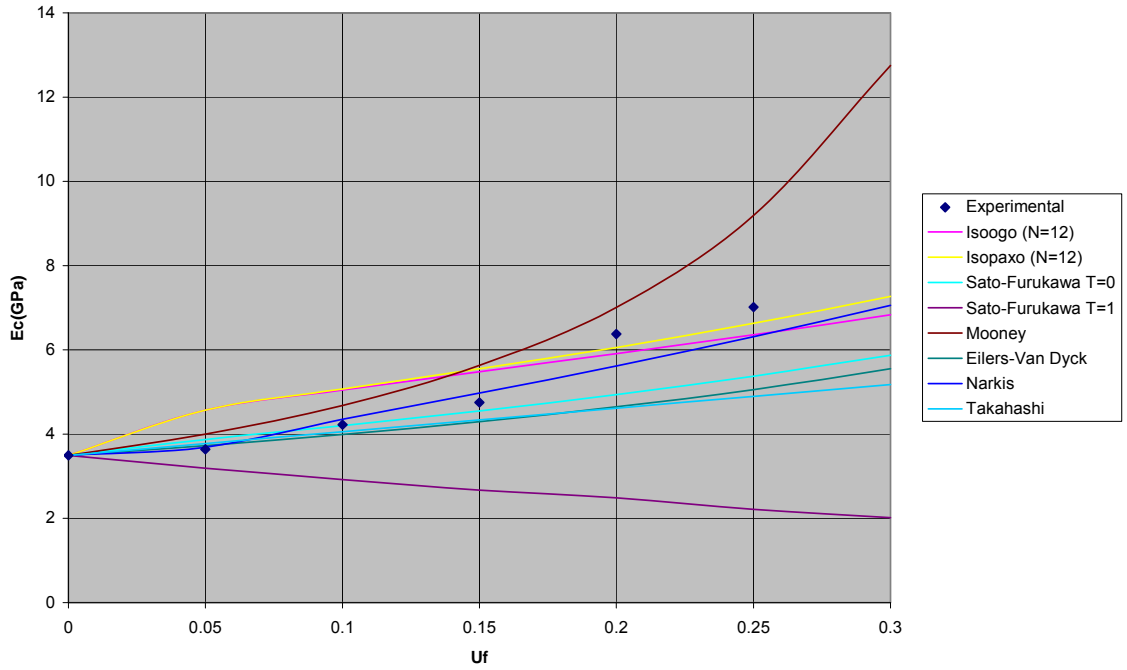
ELASTIC MODULUS



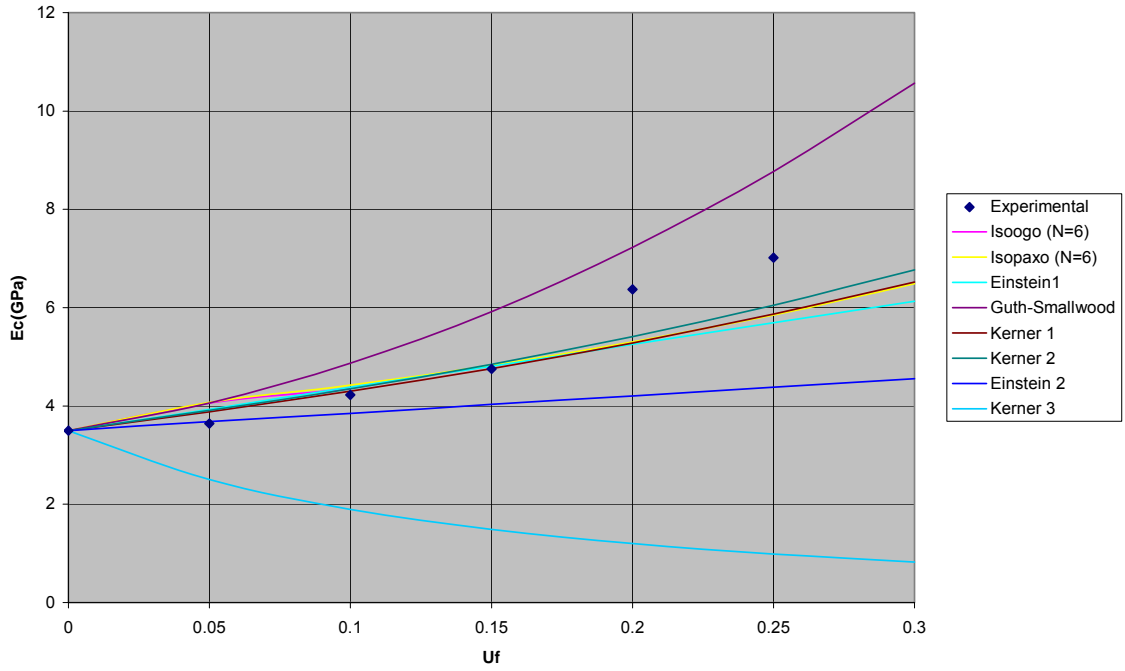
ELASTIC MODULUS



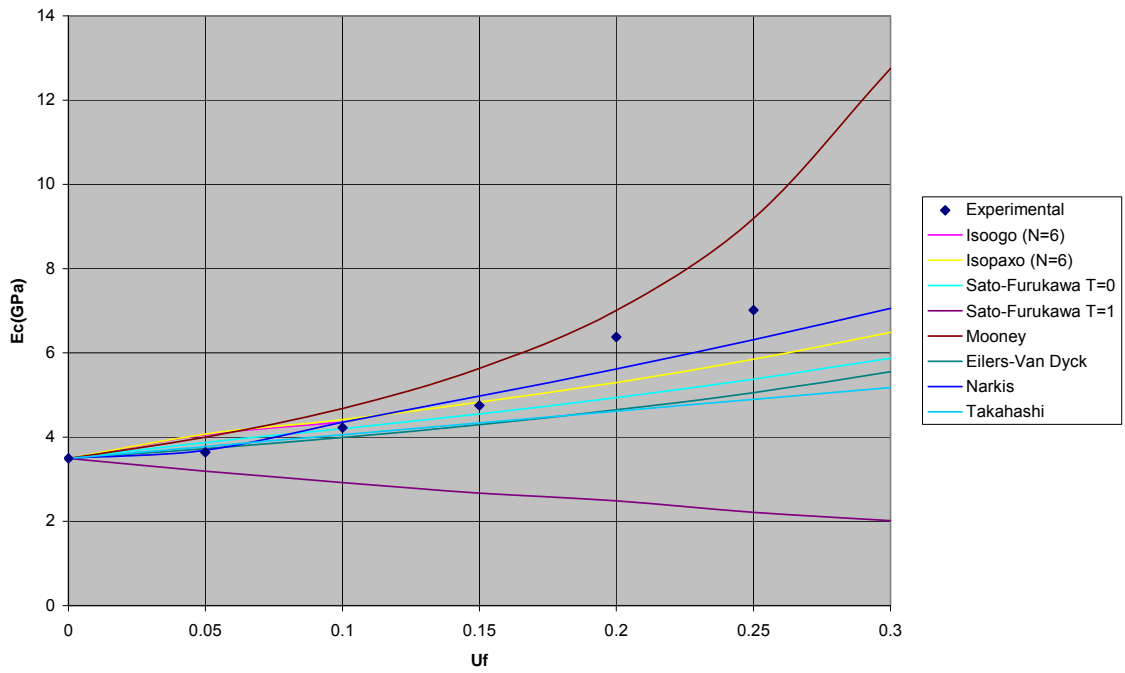
ELASTIC MODULUS



ELASTIC MODULUS



ELASTIC MODULUS



Πίνακας 3.1

Στατικό μέτρο ελαστικότητας

Θεωρητικές τιμές

ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ 1 (N=8)

(8 εγκλείσματα στις κορυφές των ακμών)

ισόογκο

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	5.12	5.97	6.69	7.37	8.08	8.82

ισόπαχο

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	5.12	5.99	6.73	7.48	8.28	9.16

ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ 2 (N=12)

(12 εγκλείσματα στα μέσα των ακμών)

ισόογκο

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	4.57	5.05	5.48	5.91	6.36	6.83

ισόπαχο

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	4.57	5.07	5.55	6.06	6.63	7.27

ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ 3 (N=6)

(6 εγκλείσματα στα βαρύκεντρα των εδρών του)

ισόογκο

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	5.12	5.97				

ισόπαχο

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	4.07	4.42	4.83	5.3	5.85	6.49

Πίνακας 3.2

Στατικό μέτρο ελαστικότητας

Πειραματικές τιμές

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$E_c(\text{GPa})$	3.6393	4.2235	4.7540	6.3726	7.0157

Πίνακας 3.3

Από εξισώσεις διάφορων ερευνητών

EINSTEIN 1(Εξ.2.1)

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	3.93	4.38	4.81	5.25	5.69	6.13

GUTH-SMALLWOOD(Εξ.2.2)

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	4.06	4.87	5.92	7.23	8.77	10.57

KERNER 1(Εξ.2.3)

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	3.88	4.30	4.76	5.28	5.87	6.52

KERNER 2(Εξ.2.4)

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	3.91	4.35	4.85	5.41	6.05	6.77

EINSTEIN 2(Εξ.2.5)

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	3.68	3.85	4.03	4.20	4.38	4.55

KERNER 3(Εξ. 2.6)

U_f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$E_c(\text{GPa})$	2.50	1.89	1.49	1.20	0.99	0.82

SATO-FURUKAWA (Eξ.2.7 και T=0)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	3.87	4.20	4.55	4.94	5.38	5.87

SATO-FURUKAWA (Eξ.2.7 και T=1)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	3.19	2.92	2.67	2.49	2.22	2.02

MOONEY (Eξ.2.8 και S=1.4)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	4.00	4.68	5.63	7.01	9.19	12.75

EILERS-VAN DYCK (Eξ.2.10 κ=1.25, s=1.20)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	3.73	3.99	4.30	4.65	5.06	5.55

BILLS (Eξ. 2.11 A=2.5, T=20°C, B=2.38)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	4.03	4.86	6.27	9.09	16.41	48.46

NARKIS (Eξ.2.14 με κ=1.5)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	3.69	4.35	4.98	5.62	6.31	7.06

TAKAHASHI (Eξ.2.15)

U _f	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
E _c (GPa)	3.78	4.06	4.34	4.62	4.9	5.18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.1.1 ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Οι χρονικά εξαρτημένες μηχανικές ιδιότητες των πολυμερών με ενίσχυση εγκλεισμάτων είναι διαφορετικές από εκείνες των μη ενισχυμένων. Τρεις είναι οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν κυρίως αυτές τις ιδιότητες :

- (α) Οι ιδιότητες του επιφανειακού στρώματος του πολυμερούς.
- (β) Ο σχηματισμός προσθέτων δεσμών πολυμερούς-επιφάνειας.
- (γ) Η παρουσία των εγκλεισμάτων.

Ειδικά για τις εποξειδικές ρητίνες οι οποίες χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για μήτρα σύνθετων υλικών, έχει γίνει αρκετή έρευνα [1] πάνω στη δυναμική μηχανική συμπεριφορά τους, όταν είναι ενισχυμένες με εγκλείσματα ή ίνες. Οι Dally και Broutman έκαναν έρευνα για την κόπωση αυτών των υλικών για συχνότητα μέχρι 40Hz. Ο Plunkett διερεύνησε τις πειραματικές μεθόδους για την μέτρηση του συντελεστή απόσβεσης και υπέδειξε κάποιες προφυλάξεις οι οποίες πρέπει να λαμβάνονται όταν γίνονται μετρήσεις. Ο Murayama ανέπτυξε μια νέα μέθοδο για την μέτρηση των δυναμικών μηχανικών ιδιοτήτων σε κάμψη, των συνθέτων υλικών για διάφορες θερμοκρασίες. Επίσης, διάφοροι ερευνητές αναφέρουν αποτελέσματα για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας και τον συντελεστή απόσβεσης ύστερα από πειράματα ταλαντώσεων που έγιναν σε δοκούς και ράβδους. Οι Schultz και Tsai αναφέρουν καλά αποτελέσματα για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας, αλλά μόνον ποιοτική συμφωνία για τον συντελεστή απόσβεσης και μια ανώμαλη εξάρτηση από την συχνότητα.

4.1.2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Πειράματα όπου επιβάλλεται στο υλικό μια κυμαινόμενη τάση ή παραμόρφωση, αποτελούν μια σημαντική ομάδα πειραμάτων για τη μελέτη της βισκοελαστικής συμπεριφοράς των πολυμερικών σύνθετων υλικών.

Ας θεωρήσουμε ένα ελαστικό και ένα ιξώδες υλικό τα οποία δέχονται μια ημιτονοειδή παραμόρφωση

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

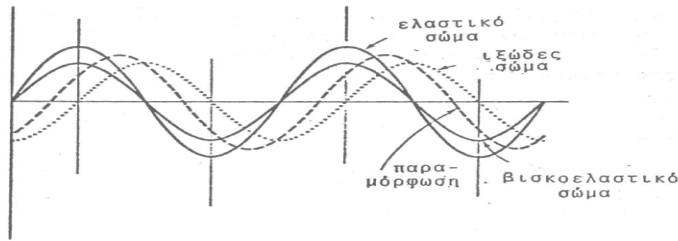
όπου ε_0 η μέγιστη τιμή και ω η γωνιακή συχνότητα η οποία συνδέεται με την συχνότητα σε κύκλους/sec f με την σχέση $\omega = 2\pi f$. Για το ελαστικό σώμα η τάση είναι :

$$\sigma = E\varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι η τάση και η παραμόρφωση θα είναι σε φάση. Για το ιξώδες σώμα η τάση θα είναι:

$$\sigma = \eta \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t)$$

δηλαδή η τάση θα έχει 90° διαφορά φάσης από την παραμόρφωση. Για ένα βισκοελαστικό υλικό επομένως θα υπάρχει μια διαφορά φάσης δ μεταξύ 0° και 90° . Στο σχήμα (4.1) φαίνονται οι τρεις αυτές περιπτώσεις.



Σχ. 4. 1

Συνήθως εξυπηρετεί η έκφραση της τάσης και της παραμόρφωσης σε μιγαδική μορφή :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\sigma^* = \sigma_0 [\cos(\omega t - \delta) + i \sin(\omega t - \delta)] = \sigma_0 e^{i(\omega t - \delta)}$$

όπου $\varepsilon_0 = |\varepsilon^*|$ και $\sigma_0 = |\sigma^*|$.

Στην περίπτωση αυτή το μέτρο είναι μιγαδικό και συμβολίζεται με E^* όπου :

$$E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta$$

ή σε συνοπτική μορφή

$$E^* = E' + iE''$$

όπου

$$E' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \cos \delta \quad \text{και} \quad E'' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \sin \delta$$

Το E' είναι σε φάση με τα πραγματικά μέρη των ε^* και σ^* και έτσι συνδέεται με την ελαστικότητα και την αποθήκευση ενέργειας. Συνήθως το E' , ονομάζεται μέτρο αποθήκευσης (storage modulus), είναι ισοδύναμο με το ελαστικό μέτρο το οποίο καθορίζεται από τα πειράματα ερπυσμού και χαλάρωσης για γραμμική βισκοελαστική συμπεριφορά και αναφέρεται ως το δυναμικό μέτρο. Το E'' έχει διαφορά φάσης 90° από

τα πραγματικά μέρη των ε^* και σ^* . Συνήθως το E'' ονομάζεται μέτρο απώλειας (loss modulus), είναι ανάλογο με το ιξώδες σώμα και σχετίζεται με την σκέδαση ενέργειας σε αυτό.

Μια άλλη σημαντική παράμετρος είναι το $\tan\delta$ που ορίζεται ως :

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'}$$

Το μέγεθος αυτό είναι ανάλογο με την ενέργεια η οποία χάνεται σε κάθε κύκλο προς την μέγιστη ενέργεια η οποία αποθηκεύεται στην ίδια χρονική διάρκεια.

Κατ'αναλογία με το μέτρο ελαστικότητας E^* , μπορεί να εισαχθούν και τα μιγαδικά G^* και ν^* για το μέτρο διάτμησης και τον λόγο του Poisson αντίστοιχα :

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$$

$$\nu^*(\omega) = \nu'(\omega) - i\nu''(\omega)$$

και με την σχέση

$$G^*(\omega) = \frac{E^*(\omega)}{2(1 + \nu^*(\omega))}$$

ισχύουσα μεταξύ των ελαστικών σταθερών του σύνθετου υλικού.

Αυτή η διαδικασία του υπολογισμού των μιγαδικών μέτρων των βισκοελαστικών υλικών από τις εκφράσεις των ελαστικών σταθερών για τα ελαστικά υλικά ονομάζεται αρχή της αντιστοιχίας (correspondence principle) και έχει αναπτυχθεί από τον Hashin [28].

Στην παρούσα ανάλυση ακολουθώντας αυτήν την διαδικασία υπολογίζονται οι εκφράσεις για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας E'_c και E''_c εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας στην έκφραση του μέτρου ελαστικότητας E_c το οποίο υπολογίστηκε από το θεωρητικό μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπ'όψιν το τριφασικό μοντέλο.

Εάν αντικατασταθούν τα μιγαδικά μέτρα στην τελευταία σχέση μεταξύ του μέτρου ελαστικότητας $E^*(\omega)$ και μέτρου διάτμησης $G^*(\omega)$ και λόγου Poisson $\nu^*(\omega)$

έχουμε:

$$G'_m = \frac{E'_m(1 + \nu'_m) - E''_m\nu''_m}{2[(1 + \nu'_m)^2 + \nu''_m{}^2]}, \quad G''_m = \frac{E''_m(1 + \nu'_m) + E'_m\nu''_m}{2[(1 + \nu'_m)^2 + \nu''_m{}^2]}$$

Η λύση του συστήματος δίνει τις πιο κάτω εκφράσεις για το $\nu'(\omega)$ και $\nu''(\omega)$

$$\nu'_m = \frac{E'_m G'_m + E''_m G''_m - 2(G_m'^2 + G_m''^2)}{2(G_m'^2 + G_m''^2)}$$

$$\nu''_m = \frac{E'_m G''_m - E''_m G'_m}{2(G_m'^2 + G_m''^2)}$$

4.1.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ μ^*

Απο τη εξίσωση (3.28) έχουμε,

$$\mu = \frac{P_0}{P_1} = \frac{[3b^3 (1 - \nu_2) E_1]}{\{2(b^3 - \alpha^3)(1 - 2\nu_1)E_2 + [b^3(1 + \nu_2) + 2\alpha^3(1 - 2\nu_2)]E_1\}}$$

Διαιρούμε με c^3

$$\mu = \frac{3(1 - U_3) (1 - \nu_2) E_1}{\{2 U_2 (1 - 2\nu_1)E_2 + [(1 - U_3)(1 + \nu_2) + 2U_1(1 - 2\nu_2)]E_1\}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή της αντιστοιχίας και περνούμε απο τα στατικά στα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας,

$$\begin{aligned} \mu^* &= \frac{3(1 - U_3)(1 - \nu_2' + i\nu_2'')(E_1' + iE_1'')}{\{2 U_2 (1 - 2\nu_1' + 2i\nu_1'')(E_2' + iE_2'') + [(1 - U_3)(1 + \nu_2' - i\nu_2'') + 2U_1(1 - 2\nu_2' + 2\nu_2''i)](E_1' + iE_1'')\}} = \\ &= \frac{3(1 - U_3)[(1 - i_2')E_1' + (1 - \nu_2'')E_1''i + E_1'\nu_2''i - \nu_2'E_1'']}{\{2 U_2 [(1 - 2\nu_1')E_2' + (1 - 2\nu_1'')E_2''i + 2\nu_1'E_2'i - 2\nu_1''E_2''] + [(1 - U_3)(1 + \nu_2') - (1 - U_3)\nu_2''i](E_1' + E_1''i) + \\ &+ [2U_1(1 - 2\nu_2') + 4U_1\nu_2''i](E_1' + iE_1'')\}} = \\ &= \frac{3(1 - U_3)[(1 - \nu_2')E_1' - \nu_2''E_1''] + 3(1 - U_3)[(1 - \nu_2'')E_1'' + E_1'\nu_2''i]}{\{2 U_2 [(1 - 2\nu_1')E_2' - 2\nu_1''E_2''] + 2U_2[(1 - 2\nu_1'')E_2'' + 2\nu_1'E_2'i] + [(1 - U_3)(1 + \nu_2')E_1' + (1 - U_3)\nu_2''E_1''] + \\ &+ [E_1''(1 - U_3)(1 + \nu_2') - E_1'(1 - U_3)\nu_2''i] + [2U_1(1 - 2\nu_2')E_1' - 4U_1\nu_2''E_1''] + [E_1'4U_1\nu_2'' + 2U_1(1 - 2\nu_2')E_1'']i\}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Θέτουμε,

$$\Gamma = [2U_2(1 - 2\nu_1')E_2' - 4U_2\nu_1''E_2'' + (1 - U_3)(1 + \nu_2')E_1' + (1 - U_3)\nu_2''E_1'' + 2U_1(1 - 2\nu_2')E_1' - 4U_1\nu_2''E_1''] \quad (4.2)$$

$$\Delta = [2U_2(1 - 2\nu_1'')E_2'' + 4U_2\nu_1'E_2'i + (1 - U_3)(1 + \nu_2'')E_1'' - (1 - U_3)\nu_2'E_1' + 2U_1(1 - 2\nu_2'')E_1'' + 4U_1\nu_2'E_1'i] \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε} \quad \mu^* &= \frac{3(1 - U_3)[(1 - \nu_2')E_1' - \nu_2''E_1''] + 3(1 - U_3)[(1 - \nu_2'')E_1'' + E_1'\nu_2''i]}{\Gamma + \Delta i} = \\ &= \frac{\{3(1 - U_3)[(1 - \nu_2')E_1' - \nu_2''E_1''] + 3(1 - U_3)[(1 - \nu_2'')E_1'' + E_1'\nu_2''i]\}}{\Gamma^2 + \Delta^2} (\Gamma - \Delta i) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Gamma + 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Delta\} + \{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Gamma - 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Delta\}i}{\Gamma^2 + \Delta^2} \quad (4.4)$$

$$\text{Θέτουμε, } \mu' = \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Gamma + 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} \quad (4.5)$$

$$\mu'' = \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Gamma - 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} \quad (4.6)$$

$$\text{Τελικά, } \mu^* = \mu' + \mu''i \quad (4.7)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ λ^*

Απο την εξίσωση (3.32) έχουμε

$$\lambda = \frac{3c^3(1-\nu_3)(b^3 - a^3)E_2}{\{[\alpha^3(1+\nu_2) + 2b^3(1-2\nu_2)](c^3 - b^3)E_3 + [c^3(1+\nu_3) + 2b^3(1-2\nu_3)](b^3 - a^3)E_2 - 3\mu a^3(1-\nu_2)(c^3 - b^3)E_3\}}$$

(Διαιρούμε με $(c^3 * c^3) = c^6$)

$$= \frac{3U_2(1-\nu_3)E_2}{\{[U_1(1+\nu_2) + 2(1-U_3)(1-2\nu_2)]U_3E_3 + [(1+\nu_3) + 2(1-U_3)(1-2\nu_3)]U_2E_2 - 3\mu U_1(1-\nu_2)U_3E_3\}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή της αντιστοιχίας και περνούμε απο τα στατικά στα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \frac{3U_2(1-\nu_3^*)E_2^*}{\{[U_1(1+\nu_2^*)+2(1-U_3)(1-2\nu_2^*)]U_3E_3^*+[(1+\nu_3^*)+2(1-U_3)(1-2\nu_3^*)]U_2E_2^*-3\mu^*U_1(1-\nu_2^*)U_3E_3^*\}} = \\
&= \frac{3U_2(1-\nu_3')(E_2'+iE_2'')}{\{[U_1(1+\nu_2'-i\nu_2'')+2(1-U_3)(1-2\nu_2'+2i\nu_2'')]U_3(E_3'+iE_3'')+[(1+\nu_3'-i\nu_3'')+2(1-U_3)(1-2\nu_3'+} \\
&\quad +2i\nu_3'')]U_2(E_2'+iE_2'')-3(\mu'+\mu''i)U_1(1-\nu_2'+i\nu_2'')U_3(E_3'+iE_3'')\}} \\
\lambda^* &= \frac{3U_2[(1-\nu_3')E_2'+(1-\nu_3'')E_2''i+\nu_3'E_2'i-\nu_3''E_2'']}{\{[U_1(1+\nu_2')-U_1\nu_2''i+2(1-U_3)(1-2\nu_2')+4(1-U_3)\nu_2''i]U_3(E_3'+iE_3'')+} \\
&\quad +[(1+\nu_3')-i\nu_3''+2(1-U_3)(1-2\nu_3')+4(1-U_3)\nu_3''i]U_2(E_2'+iE_2'')-} \\
&\quad -3U_1U_3[\mu'(1-\nu_2')+\mu'\nu_2''i+\mu''(1-\nu_2'')i-\mu''\nu_2'']E_3'(E_3'+iE_3'')\}} \\
\lambda^* &= \frac{3U_2[(1-\nu_3')E_2'-\nu_3''E_2''] + 3U_2[(1-\nu_3'')E_2''+\nu_3'E_2']i}{\{[[U_1(1+\nu_2')+2(1-U_3)(1-2\nu_2')] + [4(1-U_3)\nu_2''-U_1\nu_2'']i]U_3(E_3'+iE_3'')+} \\
&\quad +[[1+\nu_3')+2(1-U_3)(1-2\nu_3')] + [4(1-U_3)\nu_3''-\nu_3'']i]U_2(E_2'+iE_2'')-} \\
&\quad -3U_1U_3[[\mu'(1-\nu_2')-\mu''\nu_2''] + [\mu'\nu_2''+\mu''(1-\nu_2'')]i]E_3'(E_3'+iE_3'')\}} \\
\lambda^* &= \frac{3U_2[(1-\nu_3')E_2'-\nu_3''E_2''] + 3U_2[(1-\nu_3'')E_2''+\nu_3'E_2']i}{U_3\{[U_1(1+\nu_2')+2(1-U_3)(1-2\nu_2')]E_3'-[4(1-U_3)\nu_2''-U_1\nu_2'']E_3'+} \\
&\quad +[U_1(1+\nu_2')+2(1-U_3)(1-2\nu_2')]E_3'i+[4(1-U_3)\nu_2''-U_1\nu_2'']E_3'i\} +} \\
&\quad +U_2\{[(1+\nu_3')+2(1-U_3)(1-2\nu_3')]E_2'-[4(1-U_3)\nu_3''-\nu_3'']E_2''+} \\
&\quad +[(1+\nu_3')+2(1-U_3)(1-2\nu_3')]E_2''i+[4(1-U_3)\nu_3''-\nu_3'']E_2'i\}-} \\
&\quad -3U_1U_3\{[\mu'(1-\nu_2')-\mu''\nu_2'']E_3'-[\mu'\nu_2''+\mu''(1-\nu_2'')]E_3'+} \\
&\quad +[\mu'(1-\nu_2')-\mu''\nu_2'']E_3'i+[\mu'\nu_2''+\mu''(1-\nu_2'')]E_3'i\}}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Θέτουμε,

$$\begin{aligned}
A = & U_3 \{ [U_1(1 + \nu_2') + 2(1 - U_3)(1 - 2\nu_2')] E_3' - [4(1 - U_3)\nu_2'' - U_1\nu_2''] E_3'' \} + \\
& + U_2 \{ [(1 + \nu_3') + 2(1 - U_3)(1 - 2\nu_3')] E_2' - [4(1 - U_3)\nu_3'' - \nu_3''] E_2'' \} - \\
& - 3U_1U_3 \{ [\mu'(1 - \nu_2') - \mu''\nu_2''] E_3' - [\mu'\nu_2'' + \mu''(1 - \nu_2')] E_3'' \}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

και

$$\begin{aligned}
B = & U_3 \{ [U_1(1 + \nu_2') + 2(1 - U_3)(1 - 2\nu_2')] E_3'' + [4(1 - U_3)\nu_2'' - U_1\nu_2''] E_3' \} + \\
& + U_2 \{ [(1 + \nu_3') + 2(1 - U_3)(1 - 2\nu_3')] E_2'' + [4(1 - U_3)\nu_3'' - \nu_3''] E_2' \} - \\
& - 3U_1U_3 \{ [\mu'(1 - \nu_2') - \mu''\nu_2''] E_3'' + [\mu'\nu_2'' + \mu''(1 - \nu_2')] E_3' \}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\lambda^* = & \frac{3U_2[(1 - \nu_3')E_2' - \nu_3''E_2''] + 3U_2[(1 - \nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']i}{A + Bi} = \\
= & \frac{\{3U_2[(1 - \nu_3')E_2' - \nu_3''E_2''] + 3U_2[(1 - \nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']i\}(A - Bi)}{A^2 + B^2} = \\
= & \frac{\{3U_2[(1 - \nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']A + 3U_2[(1 - \nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']B\}}{A^2 + B^2} + \\
+ & \frac{\{3U_2[(1 - \nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']A - 3U_2[(1 - \nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']B\}}{A^2 + B^2} i
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Θέτουμε,

$$\lambda' = \frac{\{3U_2[(1 - \nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']A + 3U_2[(1 - \nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']B\}}{A^2 + B^2} \tag{4.12}$$

και

$$\lambda'' = \frac{\{3U_2[(1 - \nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']A - 3U_2[(1 - \nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']B\}}{A^2 + B^2} \tag{4.13}$$

$$\text{Τελικά,} \quad \lambda^* = \lambda' + \lambda''i \tag{4.14}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ κ^*

Απο την εξίσωση (3.33) έχουμε ότι $\kappa = \mu * \lambda$

Εφαρμόζουμε την αρχή της αντιστοιχίας και περνούμε απο τα στατικά στα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας,

$$\kappa^* = \mu^* \lambda^* = (\mu' + \mu''i)(\lambda' + \lambda''i) = \mu'\lambda' + \mu'\lambda''i + \mu''\lambda'i - \mu''\lambda'' =$$

$$= (\mu' \lambda' - \mu'' \lambda'') + (\mu' \lambda'' + \mu'' \lambda') i$$

$$\begin{aligned}
\kappa^* = & \left\{ \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Gamma + 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \right. \\
& * \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']A + 3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']B\}}{A^2 + B^2} - \\
& - \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Gamma - 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \\
& * \left. \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']A - 3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']B\}}{A^2 + B^2} \right\} + \\
& + \left\{ \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Gamma + 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \right. \\
& * \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']A - 3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']B\}}{A^2 + B^2} + \\
& + \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Gamma - 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \\
& * \left. \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']A + 3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']B\}}{A^2 + B^2} \right\} i
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}
\kappa' = & \left\{ \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Gamma + 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} \right. \\
& * \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']A + 3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']B\}}{A^2 + B^2} - \\
& - \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Gamma - 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \\
& * \left. \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']A - 3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']B\}}{A^2 + B^2} \right\}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\kappa'' = & \left\{ \frac{3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1' - \nu_2''E_1'']\Gamma + 3(1-U_3)[(1-\nu_2')E_1'' + E_1'\nu_2'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \right. \\
& * \frac{\{3U_2[(1-\nu_3')E_2'' + \nu_3''E_2']A - 3U_2[(1-\nu_3')E_2' - \nu_3''E_2'']B\}}{A^2 + B^2} \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{3(1-U_3)[(1-\nu'_2)E_1'' + E_1'\nu_2'']\Gamma - 3(1-U_3)[(1-\nu'_2)E_1' - \nu_2''E_1'']\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} \right\} * \\
& * \frac{\{3U_2[(1-\nu'_3)E_2' - \nu_3''E_2'']A + 3U_2[(1-\nu'_3)E_2'' + \nu_3'E_2']B\}}{A^2 + B^2} \} i
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\text{Τελικά, } \kappa^* = \kappa' + \kappa'' i \tag{4.18}$$

Απο την εξίσωση (3.50) έχουμε,

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= 2U_1 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1} \kappa^2 + \frac{1}{E_2} \left\{ \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} (\lambda - \kappa)^2 + \right. \\
& + \frac{2(1-2\nu_2)}{U_2} [U_1\kappa - (1-U_3)\lambda]^2 \left. \right\} + \frac{1}{E_3} \left\{ \frac{(1-U_3)(1+\nu_3)}{U_3} (1-\lambda)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{2(1-2\nu_3)}{U_3} [(1-U_3)\lambda - 1]^2 \right\} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= 2U_1 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1} \kappa^2 + \frac{1}{E_2} \left\{ \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} \lambda^2 - \right. \\
& - \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} 2\kappa\lambda + \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} \kappa^2 + \\
& + \frac{2(1-2\nu_2)U_1^2}{U_2} \kappa^2 + \frac{2(1-2\nu_2)(1-U_3)^2}{U_2} \lambda^2 - \\
& - \frac{4(1-2\nu_2)U_1(1-U_3)}{U_2} \kappa\lambda \left. \right\} + \frac{1}{E_3} \left\{ \frac{(1-U_3)(1+\nu_3)}{U_3} - \right. \\
& - \frac{2(1-U_3)(1+\nu_3)}{U_3} \lambda + \frac{(1-U_3)(1+\nu_3)}{U_3} \lambda^2 + \frac{2(1-2\nu_3)}{U_3} + \\
& \left. + \frac{2(1-2\nu_3)(1-U_3)^2}{U_3} \lambda^2 - \frac{4(1-2\nu_3)(1-U_3)}{U_3} \lambda \right\} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= \left\{ 2U_1 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1} + \frac{1}{E_2} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} + \frac{1}{E_2} \frac{2(1-2\nu_2)U_1^2}{U_2} \right\} \kappa^2 + \\
&+ \left\{ \frac{1}{E_2} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} + \frac{1}{E_2} \frac{2(1-2\nu_2)(1-U_3)^2}{U_2} + \frac{1}{E_3} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3)}{U_3} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{E_3} \frac{2(1-2\nu_3)(1-U_3)^2}{U_3} \right\} \lambda^2 - \left\{ \frac{1}{E_2} \frac{2U_1(1-U_3)(1+\nu_2)}{U_2} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{E_2} \frac{4(1-2\nu_2)U_1(1-U_3)}{U_2} \right\} \kappa \lambda - \left\{ \frac{1}{E_3} \frac{2(1-U_3)(1+\nu_3)}{U_3} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{E_3} \frac{4(1-2\nu_3)(1-U_3)}{U_3} \right\} \lambda + \left\{ \frac{1}{E_3} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3) + 2(1-2\nu_3)}{U_3} \right\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Εάν λάβουμε υπόψιν ότι οι φάσεις 1,3 είναι ίδιες τότε

$$E_1 = E_3 = E_m, \quad E_2 = E_f, \quad \nu_1 = \nu_3 = \nu_m, \quad \nu_2 = \nu_f$$

$$U_1 = U_{m,1}, \quad U_3 = U_{m,2}, \quad U_2 = U_f$$

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= \left\{ 2U_{m,1} \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} + \frac{1}{E_f} \frac{U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)}{U_f} + \frac{1}{E_f} \frac{2(1-2\nu_f)U_{m,1}^2}{U_f} \right\} \kappa^2 + \\
&+ \left\{ \frac{1}{E_f} \frac{U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)}{U_f} + \frac{1}{E_f} \frac{2(1-2\nu_f)(1-U_{m,2})^2}{U_f} + \frac{1}{E_m} \frac{(1-U_{m,2})(1+\nu_m)}{U_{m,2}} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{E_m} \frac{2(1-2\nu_m)(1-U_{m,2})^2}{U_{m,2}} \right\} \lambda^2 - \left\{ \frac{1}{E_f} \frac{2U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)}{U_f} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{E_f} \frac{4(1-2\nu_f)U_{m,1}(1-U_{m,2})}{U_f} \right\} \kappa \lambda - \left\{ \frac{1}{E_m} \frac{2(1-U_{m,2})(1+\nu_m)}{U_{m,2}} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{E_m} \frac{4(1-2\nu_m)(1-U_{m,2})}{U_{m,2}} \right\} \lambda + \left\{ \frac{1}{E_m} \frac{(1-U_{m,2})(1+\nu_m) + 2(1-2\nu_m)}{U_{m,2}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Αν εφαρμόσουμε την αρχή της αντιστοιχίας στην σχέση του μέτρου ελαστικότητας έχουμε,

$$\frac{2(1-2\nu_c^*)}{E_c^*} = \left\{ 2U_1 \frac{(1-2\nu_1^*)}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{E_2^*} \frac{2(1-2\nu_2^*)U_1^2}{U_2} \} (\kappa^*)^2 + \left\{ \frac{1}{E_2^*} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} + \frac{1}{E_2^*} \frac{2(1-2\nu_2^*)(1-U_3)^2}{U_2} + \right. \\
& + \frac{1}{E_3^*} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3^*)}{U_3} + \\
& + \frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-2\nu_3^*)(1-U_3)^2}{U_3} \} (\lambda^*)^2 - \left\{ \frac{1}{E_2^*} \frac{2U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} + \right. \\
& + \frac{1}{E_2^*} \frac{4(1-2\nu_2^*)U_1(1-U_3)}{U_2} \} \kappa^* \lambda^* - \left\{ \frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-U_3)(1+\nu_3^*)}{U_3} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{E_3^*} \frac{4(1-2\nu_3^*)(1-U_3)}{U_3} \right\} \lambda^* + \left\{ \frac{1}{E_3^*} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3^*) + 2(1-2\nu_3^*)}{U_3} \right\}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Στην παρούσα ενότητα θα υπολογίσουμε καθένα από τους δεκατρείς όρους της τελικής σχέσης που προέκυψε. Αυτούς τους δεκατρείς όρους θα τους γράψουμε στη μορφή $X+i\Psi$

Ο πρώτος όρος είναι $\frac{2(1-2\nu_c^*)}{E_c^*}$.

Αρχικά υπολογίζουμε το λόγο poisson σε δυναμική μορφή. Από την εξίσωση (3.51) εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας έχουμε,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu_c^*} &= \frac{U_1}{\nu_1^*} + \frac{U_2}{\nu_2^*} + \frac{U_3}{\nu_3^*} \Rightarrow \frac{1}{\nu_c^*} = \frac{U_1}{\nu_1' - i\nu_1''} + \frac{U_2}{\nu_2' - i\nu_2''} + \frac{U_3}{\nu_3' - i\nu_3''} = \\
&= \frac{U_1(\nu_1' + i\nu_1'')}{(\nu_1')^2 + (\nu_1'')^2} + \frac{U_2(\nu_2' + i\nu_2'')}{(\nu_2')^2 + (\nu_2'')^2} + \frac{U_3(\nu_3' + i\nu_3'')}{(\nu_3')^2 + (\nu_3'')^2} = \\
&= \frac{U_1(\nu_1' + i\nu_1'')[(\nu_2')^2 + (\nu_2'')^2][(\nu_3')^2 + (\nu_3'')^2]}{[(\nu_1')^2 + (\nu_1'')^2][(\nu_2')^2 + (\nu_2'')^2][(\nu_3')^2 + (\nu_3'')^2]} + \\
&+ \frac{U_2(\nu_2' + i\nu_2'')[(\nu_3')^2 + (\nu_3'')^2][(\nu_1')^2 + (\nu_1'')^2]}{[(\nu_2')^2 + (\nu_2'')^2][(\nu_3')^2 + (\nu_3'')^2][(\nu_1')^2 + (\nu_1'')^2]} + \\
&\frac{U_3(\nu_3' + i\nu_3'')[(\nu_1')^2 + (\nu_1'')^2][(\nu_2')^2 + (\nu_2'')^2]}{[(\nu_3')^2 + (\nu_3'')^2][(\nu_1')^2 + (\nu_1'')^2][(\nu_2')^2 + (\nu_2'')^2]} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_1 v_1' [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] + U_1 v_1'' [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] i}{[(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2]} + \\
&+ \frac{U_2 v_2' [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] + U_2 v_2'' [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] i}{[(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2]} + \\
&+ \frac{U_3 v_3' [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_1')^2 + (v_1'')^2] + U_3 v_3'' [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_1')^2 + (v_1'')^2] i}{[(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2]} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_c^* &= \frac{[(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2]}{\{U_1 [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_1' + U_2 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_2' + \\
&+ U_3 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] v_3'\} + \{U_1 [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_1'' + \\
&+ U_2 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_2'' + U_3 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] v_3''\} i} = \\
&= \frac{\{U_1 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_1' + \\
&+ \{U_1 [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_1' + U_2 [(v_3')^2 + (v_3'')^2] [(v_1')^2 + (v_1'')^2] v_2' + \\
&+ U_2 [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_2' + \\
&+ U_3 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] v_3'\}^2 + \\
&+ U_3 [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_3'\} - \\
&+ \{U_1 [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_1'' + U_2 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_2'' + \\
&- \{U_1 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_1'' + \\
&+ U_3 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] v_3''\}^2} \\
&+ U_2 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_2'' + \\
&+ U_3 [(v_1')^2 + (v_1'')^2] [(v_2')^2 + (v_2'')^2] [(v_3')^2 + (v_3'')^2] v_3''\} i \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_c^* = v_c' - i v_c''$$

(4.22)

Το πρώτο σκέλος της εξίσωσης αν κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού

$$E_c^* = E_c' + iE_c'' \text{ δίνει}$$

$$\begin{aligned} \frac{2(1-2\nu_c^*)}{E_c^*} &= 2 \frac{1-2(\nu_c' - i\nu_c'')}{E_c' + iE_c''} = \\ &= 2 \frac{[(1-2\nu_c')E_c' + 2\nu_c''E_c''] - [(1-2\nu_c')E_c'' - 2\nu_c''E_c']i}{(E_c')^2 + (E_c'')^2} = \\ &= 2 \frac{[(1-2\nu_c')E_c' + 2\nu_c''E_c'']}{(E_c')^2 + (E_c'')^2} - \frac{2[(1-2\nu_c')E_c'' - 2\nu_c''E_c']i}{(E_c')^2 + (E_c'')^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ο δεύτερος όρος είναι $2U_1 \frac{(1-2\nu_1^*)}{E_1^*} (\kappa^*)^2$

$$\text{Ισχύει ότι } (\kappa^*)^2 = (\kappa' + \kappa''i)^2 = (\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\kappa'\kappa''i$$

$$\begin{aligned} 2U_1 \frac{(1-2\nu_1^*)}{E_1^*} (\kappa^*)^2 &= \frac{2U_1[1-2(\nu_1' - i\nu_1'')]}{E_1' + iE_1''} (\kappa^*)^2 = \\ &= \frac{2U_1[1-2(\nu_1' - i\nu_1'')][(\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\kappa'\kappa''i]}{E_1' + iE_1''} = \\ &= \frac{2U_1\{(1-2\nu_1')(\kappa'^2 - \kappa''^2) + (1-2\nu_1'')2\kappa'\kappa''i + 2\nu_1''(\kappa'^2 - \kappa''^2)i - 4\nu_1''\kappa'\kappa''\}}{E_1' + iE_1''} = \\ &= \frac{2U_1\{[(1-2\nu_1')(\kappa'^2 - \kappa''^2) - 4\nu_1''\kappa'\kappa''] + [(1-2\nu_1'')2\kappa'\kappa'' + 2\nu_1''(\kappa'^2 - \kappa''^2)]i\}}{(E_1')^2 + (E_1'')^2} * \\ &* (E_1' - iE_1'') = \\ &= \frac{2U_1\{[(1-2\nu_1')(\kappa'^2 - \kappa''^2) - 4\nu_1''\kappa'\kappa'']E_1' + [(1-2\nu_1'')2\kappa'\kappa'' + 2(\kappa'^2 - \kappa''^2)\nu_1'']E_1''\}}{(E_1')^2 + (E_1'')^2} - \\ &- \frac{2U_1\{[(1-2\nu_1')(\kappa'^2 - \kappa''^2) - 4\nu_1''\kappa'\kappa'']E_1'' - [(1-2\nu_1'')2\kappa'\kappa'' + 2(\kappa'^2 - \kappa''^2)\nu_1'']E_1'\}i}{(E_1')^2 + (E_1'')^2} = \\ &= Z - Hi \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ο τρίτος όρος είναι $\frac{1}{E_2^*} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} (\kappa^*)^2$

Ισχύει ότι $(\kappa^*)^2 = (\kappa' + \kappa''i)^2 = (\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\kappa'\kappa''i$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_2^*} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} (\kappa^*)^2 = \\
& = \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2' - i\nu_2'')[(\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\kappa'\kappa''i]}{U_2 E_2^*} = \\
& = \frac{U_1(1-U_3)\{(1+\nu_2')(\kappa'^2 - \kappa''^2) + (1+\nu_2')2\kappa'\kappa''i - \nu_2''(\kappa'^2 - \kappa''^2)i + 2\nu_2''\kappa'\kappa''\}}{U_2(E_2' + iE_2'')} = \\
& = \frac{U_1(1-U_3)\{[(1+\nu_2')(\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\nu_2''\kappa'\kappa''] + [(1+\nu_2')2\kappa'\kappa'' - \nu_2''(\kappa'^2 - \kappa''^2)]i\}(E_2' - iE_2'')}{U_2(E_2' + iE_2'')(E_2' - iE_2'')} = \\
& = \frac{U_1(1-U_3)\{[(1+\nu_2')(\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\nu_2''\kappa'\kappa'']E_2' + [(1+\nu_2')2\kappa'\kappa'' - \nu_2''(\kappa'^2 - \kappa''^2)]E_2''\}}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} - \\
& - \frac{U_1(1-U_3)\{[(1+\nu_2')(\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\nu_2''\kappa'\kappa'']E_2'' - [(1+\nu_2')2\kappa'\kappa'' - \nu_2''(\kappa'^2 - \kappa''^2)]E_2'\}i}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} = \\
& = \Theta - Ii \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Ο τέταρτος όρος είναι $\frac{1}{E_2^*} \frac{2(1-2\nu_2^*)U_1^2}{U_2} (\kappa^*)^2$

Ισχύει ότι $(\kappa^*)^2 = (\kappa' + \kappa''i)^2 = (\kappa'^2 - \kappa''^2) + 2\kappa'\kappa''i$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_2^*} \frac{2(1-2\nu_2^*)U_1^2}{U_2} (\kappa^*)^2 = \\
& = \frac{2U_1^2\{(1-2\nu_2')(\kappa'^2 - \kappa''^2) - 4\nu_2''\kappa'\kappa''\}E_2' + [(1-2\nu_2')2\kappa'\kappa'' + 2\nu_2''(\kappa'^2 - \kappa''^2)]E_2''}{[(E_2')^2 + (E_2'')^2]U_2} - \\
& - \frac{2U_1^2\{(1-2\nu_2')(\kappa'^2 - \kappa''^2) - 4\nu_2''\kappa'\kappa''\}E_2'' - [(1-2\nu_2')2\kappa'\kappa'' + 2(\kappa'^2 - \kappa''^2)\nu_2'']E_2'}{[(E_2')^2 + (E_2'')^2]U_2} i \\
& = \mathbf{K} - \Lambda i \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Ο πέμπτος όρος είναι $\frac{1}{E_2^*} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} (\lambda^*)^2$

Ισχύει ότι $(\lambda^*)^2 = (\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\lambda'\lambda''i$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_2^*} \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} (\lambda^*)^2 = \\
& = \frac{U_1(1-U_3) \{ [(1+\nu_2')(\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\nu_2''\lambda'\lambda''] E_2' + [(1+\nu_2')2\lambda'\lambda'' - \nu_2''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_2'' \}}{U_2 [(E_2')^2 + (E_2'')^2]} - \\
& - \frac{U_1(1-U_3) \{ [(1+\nu_2')(\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\nu_2''\lambda'\lambda''] E_2'' - [(1+\nu_2')2\lambda'\lambda'' - \nu_2''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_2' \} i}{U_2 [(E_2')^2 + (E_2'')^2]} = \\
& = M - Ni \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Ο έκτος όρος είναι $\frac{1}{E_2^*} \frac{2(1-2\nu_2^*)(1-U_3)^2}{U_2} (\lambda^*)^2$

Ισχύει ότι $(\lambda^*)^2 = (\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\lambda'\lambda''i$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_2^*} \frac{2(1-2\nu_2^*)(1-U_3)^2}{U_2} (\lambda^*)^2 = \\
& = \frac{2(1-U_3)^2 \{ [(1-2\nu_2')(\lambda'^2 - \lambda''^2) - 4\nu_2''\lambda'\lambda''] E_2' + [(1-2\nu_2')2\lambda'\lambda'' + 2\nu_2''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_2'' \}}{[(E_2')^2 + (E_2'')^2] U_2} - \\
& - \frac{2(1-U_3)^2 \{ [(1-2\nu_2')(\lambda'^2 - \lambda''^2) - 4\nu_2''\lambda'\lambda''] E_2'' - [(1-2\nu_2')2\lambda'\lambda'' + 2\nu_2''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_2' \} i}{[(E_2')^2 + (E_2'')^2] U_2} = \\
& = \Xi - Oi \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Ο έβδομος όρος είναι $\frac{1}{E_3^*} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3^*)}{U_3} (\lambda^*)^2$

Ισχύει ότι $(\lambda^*)^2 = (\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\lambda'\lambda''i$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_3^*} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3^*)}{U_3} (\lambda^*)^2 = \\
& = \frac{(1-U_3) \{ [(1+\nu_3')(\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\nu_3''\lambda'\lambda''] E_3' + [(1+\nu_3')2\lambda'\lambda'' - \nu_3''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_3'' \}}{U_3 [(E_3')^2 + (E_3'')^2]} - \\
& - \frac{2(1-U_3)^2 \{ [(1-2\nu_2')(\lambda'^2 - \lambda''^2) - 4\nu_2''\lambda'\lambda''] E_2'' - [(1-2\nu_2')2\lambda'\lambda'' + 2\nu_2''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_2' \} i}{(E_2'^2 + E_2''^2) U_2} = \\
& = \Pi - Pi \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Ο όγδοος όρος είναι $\frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-2\nu_3^*)(1-U_3)^2}{U_3} (\lambda^*)^2$

Ισχύει ότι $(\lambda^*)^2 = (\lambda'^2 - \lambda''^2) + 2\lambda'\lambda''i$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-2\nu_3^*)(1-U_3)^2}{U_3} \} (\lambda^*)^2 = \\
& = \frac{2(1-U_3)^2 \{ [(1-2\nu_3')(\lambda'^2 - \lambda''^2) - 4\nu_3'' \lambda' \lambda''] E_3' + [(1-2\nu_3')2\lambda' \lambda'' + 2\nu_3''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_3'' \}}{[(E_3')^2 + (E_3'')^2] U_3} - \\
& \frac{2(1-U_3)^2 \{ [(1-2\nu_3')(\lambda'^2 - \lambda''^2) - 4\nu_3'' \lambda' \lambda''] E_3'' - [(1-2\nu_3')2\lambda' \lambda'' + 2\nu_3''(\lambda'^2 - \lambda''^2)] E_3' \} i}{[(E_3')^2 + (E_3'')^2] U_3} = \\
& = \Sigma - T i \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Ο ένατος όρος είναι $\frac{1}{E_2^*} \frac{2U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} \kappa^* \lambda^*$

Ισχύει ότι

$$\kappa^* \lambda^* = (\kappa' + \kappa'' i)(\lambda' + \lambda'' i) = (\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'') + (\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda') i$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_2^*} \frac{2U_1(1-U_3)(1+\nu_2^*)}{U_2} \kappa^* \lambda^* = \frac{1}{E_2^*} \frac{2U_1(1-U_3)(1+\nu_2' - i\nu_2'')}{U_2} \kappa^* \lambda^* = \\
& = \frac{2U_1(1-U_3) \{ [(1+\nu_2')(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'') + \nu_2''(\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda')] \} +}{U_2 [(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
& + \frac{[(1+\nu_2')(\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda') - \nu_2''(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'')]}{U_2} (E_2' - iE_2'') = \\
& = \frac{2U_1(1-U_3) \{ [(1+\nu_2')(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'') + \nu_2''(\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda')] \} E_2' -}{U_2 [(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
& - \frac{[(1+\nu_2')(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'') + \nu_2''(\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda')] E_2'' i +}{U_2} \\
& + \frac{[(1+\nu_2')(\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda') - \nu_2''(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'')] E_2' i +}{U_2} \\
& + \frac{[(1+\nu_2')(\kappa' \lambda'' + \kappa'' \lambda') - \nu_2''(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'')] E_2''}{U_2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2U_1(1-U_3)\{(1+\nu_2')(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') + \nu_2''(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')\}E_2' +}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&+ \frac{[(1+\nu_2')(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda') - \nu_2''(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')]E_2''}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&- \frac{2U_1(1-U_3)\{(1+\nu_2')(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') + \nu_2''(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')\}E_2'' -}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&- \frac{[(1+\nu_2')(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda') - \nu_2''(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')]E_2''}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]}i = Y - \Phi i
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ο δέκατος όρος είναι $\frac{1}{E_2^*} \frac{4(1-2\nu_2^*)U_1(1-U_3)}{U_2} \kappa^* \lambda^*$

Ισχύει ότι

$$\kappa^* \lambda^* = (\kappa' + \kappa''i)(\lambda' + \lambda''i) = (\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') + (\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')i$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E_2^*} \frac{4(1-2\nu_2^*)U_1(1-U_3)}{U_2} \kappa^* \lambda^* = \frac{1}{E_2^*} \frac{4(1-2\nu_2' + 2\nu_2''i)U_1(1-U_3)}{U_2} \kappa^* \lambda^* = \\
&= \frac{4U_1(1-U_3)\{(1-2\nu_2') + 2\nu_2''i\}[(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') + (\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')i]}{U_2 E_2^*} = \\
&= \frac{4U_1(1-U_3)\{(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') - 2\nu_2''(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')\}E_2' -}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&- \frac{[(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') - 2\nu_2''(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')]E_2''}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]}i + \\
&+ \frac{[(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda') + 2\nu_2''(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')]E_2' i}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} + \\
&+ \frac{[(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda') + 2\nu_2''(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')]E_2''}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} = \\
&= \frac{4U_1(1-U_3)\{(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') - 2\nu_2''(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')\}E_2' +}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&+ \frac{[(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda') + 2\nu_2''(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')]E_2''}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&- \frac{4U_1(1-U_3)\{(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'') - 2\nu_2''(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')\}E_2'' -}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]} \\
&- \frac{[(1-2\nu_2')(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda') + 2\nu_2''(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')]E_2''}{U_2[(E_2')^2 + (E_2'')^2]}i = X - \Psi i
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ο ενδέκατος όρος είναι $\frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-U_3)(1+\nu_3^*)}{U_3} \lambda^*$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-U_3)(1+\nu_3^*)}{U_3} \lambda^* &= \frac{1}{E_3^*} \frac{2(1-U_3)(1+\nu_3' - i\nu_3'')(\lambda' + i\lambda'')}{U_3} = \\
&= \frac{2(1-U_3) \{ [(1+\nu_3')\lambda' + \nu_3''\lambda''] + [(1+\nu_3')\lambda'' - \nu_3''\lambda'] i \}}{U_3 (E_3' + iE_3'')(E_3' - iE_3'')} (E_3' - iE_3'') = \\
&= \frac{2(1-U_3) \{ [(1+\nu_3')\lambda' + \nu_3''\lambda''] E_3' + [(1+\nu_3')\lambda'' - \nu_3''\lambda'] E_3'' \}}{U_3 [(E_3')^2 + (E_3'')^2]} - \\
&- \frac{2(1-U_3) \{ [(1+\nu_3')\lambda' + \nu_3''\lambda''] E_3'' - [(1+\nu_3')\lambda'' - \nu_3''\lambda'] E_3' \} i}{U_3 [(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \Omega_1 - \Omega_2 i
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Ο δωδέκατος όρος είναι $\frac{1}{E_3^*} \frac{4(1-2\nu_3^*)(1-U_3)}{U_3} \lambda^*$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_3^*} \frac{4(1-2\nu_3^*)(1-U_3)}{U_3} \lambda^* &= \frac{4(1-U_3) [(1-2\nu_3')\lambda' + (1-2\nu_3')\lambda'' i + 2\nu_3''\lambda' i - 2\nu_3''\lambda'']}{U_3 E_3^*} = \\
&= \frac{4(1-U_3) \{ [(1-2\nu_3')\lambda' - 2\nu_3''\lambda''] + [(1-2\nu_3')\lambda'' + 2\nu_3''\lambda'] i \}}{U_3 (E_3' + iE_3'')(E_3' - iE_3'')} (E_3' - iE_3'') = \\
&= \frac{4(1-U_3) \{ [(1-2\nu_3')\lambda' - 2\nu_3''\lambda''] E_3' + [(1-2\nu_3')\lambda'' + 2\nu_3''\lambda'] E_3'' \}}{U_3 [(E_3')^2 + (E_3'')^2]} - \\
&- \frac{4(1-U_3) \{ [(1-2\nu_3')\lambda' - 2\nu_3''\lambda''] E_3'' - [(1-2\nu_3')\lambda'' + 2\nu_3''\lambda'] E_3' \} i}{U_3 [(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \\
&= C - Di
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ο δέκατοτρίτος όρος είναι $\frac{1}{E_3^*} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3^*) + 2(1-2\nu_3^*)}{U_3}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_3^*} \frac{(1-U_3)(1+\nu_3^*) + 2(1-2\nu_3^*)}{U_3} &= \frac{(1-U_3) [(1+\nu_3') - i\nu_3''] + 2[1 - 2(\nu_3' - i\nu_3'')]}{U_3 E_3^*} = \\
&= \frac{\{ [(1-U_3)(1+\nu_3') + 2(1-2\nu_3')] - [(1-U_3)\nu_3'' - 4\nu_3''] i \}}{U_3 (E_3' + iE_3'')(E_3' - iE_3'')} (E_3' - iE_3'') =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\{[(1-U_3)(1+v'_3)+2(1-2v''_3)]E'_3 - [(1-U_3)(1+v'_3)+2(1-2v''_3)]iE''_3 - \\
&\quad U_3[(E'_3)^2 + (E''_3)^2] \\
&\quad - [(1-U_3)v''_3 - 4v''_3]E'_3 i - [(1-U_3)v''_3 - 4v''_3]E''_3\}}{U_3[(E'_3)^2 + (E''_3)^2]} = \\
&= \frac{[(1-U_3)(1+v'_3)+2(1-2v''_3)]E'_3 - [(1-U_3)v''_3 - 4v''_3]E''_3}{U_3[(E'_3)^2 + (E''_3)^2]} - \\
&\quad - \frac{[(1-U_3)(1+v'_3)+2(1-2v''_3)]E''_3 + [(1-U_3)v''_3 - 4v''_3]E'_3}{U_3[(E'_3)^2 + (E''_3)^2]} i = F - Qi \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (4.21) μαζεύοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των όρων,

$$\begin{aligned}
&2 \frac{[(1-2\nu'_c)E'_c + 2\nu''_c E''_c]}{(E'_c)^2 + (E''_c)^2} - \frac{2[(1-2\nu'_c)E''_c - 2\nu''_c E'_c]i}{(E'_c)^2 + (E''_c)^2} = \\
&= \{ Z - Hi + \Theta - Ii + K - Li + M - Ni + \Xi - Oi + \Pi - Pi + \Sigma - Ti - \\
&\quad - Y + \Phi i - X + \Psi i - \Omega_1 + \Omega_2 i - C + Di + F - Qi \} \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Ονομάζουμε το R πραγματικό μέρος του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (4.36) και W το φανταστικό.

$$\text{Επομένως, } R = [Z + \Theta + K + M + \Xi + \Pi + \Sigma - Y - X - \Omega_1 - C + F] \tag{4.37}$$

$$\text{και } W = [H + I + \Lambda + N + O + P + T - \Phi - \Psi - \Omega_2 - D + Q] \tag{4.38}$$

Οπότε,

$$2 \frac{[(1-2\nu'_c)E'_c + 2\nu''_c E''_c]}{(E'_c)^2 + (E''_c)^2} - \frac{2[(1-2\nu'_c)E''_c - 2\nu''_c E'_c]i}{(E'_c)^2 + (E''_c)^2} = R - Wi$$

Επομένως,

$$R = 2 \frac{[(1-2\nu'_c)E'_c + 2\nu''_c E''_c]}{(E'_c)^2 + (E''_c)^2} \tag{4.39} \quad \text{και} \quad W = \frac{2[(1-2\nu'_c)E''_c - 2\nu''_c E'_c]}{(E'_c)^2 + (E''_c)^2} \tag{4.40}$$

$$\frac{R}{W} = \frac{[(1-2\nu'_c)E'_c + 2\nu''_c E''_c]}{[(1-2\nu'_c)E''_c - 2\nu''_c E'_c]} \Rightarrow R(1-2\nu'_c)E''_c - R2\nu''_c E'_c = W(1-2\nu'_c)E'_c + W2\nu''_c E''_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E''_c = \frac{[W(1-2\nu'_c) + R2\nu''_c]E'_c}{R(1-2\nu'_c) - W2\nu''_c} \tag{4.41}$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση (4.41) στην εξίσωση (4.39)

$$\begin{aligned}
R\{E_c'^2 + [\frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''} E_c']^2\} &= 2[(1-2v_c')E_c' + 2v_c'' \frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''} E_c'] \Rightarrow \\
RE_c'^2 \{1 + [\frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''}]^2\} &= 2E_c' \{(1-2v_c') + 2v_c'' \frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''}\} \Rightarrow \\
\Rightarrow E_c' &= \frac{2\{(1-2v_c') + 2v_c'' \frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''}\}}{R\{1 + [\frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''}]^2\}} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

και

$$E_c'' = \frac{2\{(1-2v_c') + 2v_c'' \frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''}\}}{R\{1 + [\frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''}]^2\}} * \frac{W(1-2v_c') + R2v_c''}{R(1-2v_c') - W2v_c''} \quad (4.43)$$

Γνωρίζοντας ότι , $v_1'' = 0, v_2'' = 0, v_3'' = 0, v_1' = v_1, v_2' = v_2, v_3' = v_3$

Ισχύει,

$$\begin{aligned}
v_c' &= \frac{[U_1 v_1^3 v_2^4 v_3^4] + [U_2 v_1^4 v_2^3 v_3^4] + [U_3 v_1^4 v_2^4 v_3^3]}{\{[U_1 v_1 v_2^2 v_3^2] + [U_2 v_1^2 v_2 v_3^2] + [U_3 v_1^2 v_2^2 v_3]\}^2} = \\
&= \frac{(v_1 v_2 v_3)^2}{[U_1 v_1 v_2^2 v_3^2] + [U_2 v_1^2 v_2 v_3^2] + [U_3 v_1^2 v_2^2 v_3]} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

$$v_c'' = 0 \quad (4.45)$$

Εν συνεχεία απλοποιούμε τα πραγματικά μέρη της εξίσωσης (4.37)

$$R = [Z + \Theta + K + M + \Xi + \Pi + \Sigma - Y - X - \Omega_1 - C + F]$$

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{2U_1\{(1-2\nu_1)(\kappa'^2 - \kappa''^2)E_1' + (1-2\nu_1)2\kappa'\kappa''E_1''\}}{(E_1')^2 + (E_1'')^2} = \\
&= \frac{2U_{m,1}\{(1-2\nu_m)(\kappa'^2 - \kappa''^2)E_m' + (1-2\nu_m)2\kappa'\kappa''E_m''\}}{(E_m')^2 + (E_m'')^2}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\Theta = \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)(\kappa'^2 - \kappa''^2)}{U_2E_2} = \frac{U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)(\kappa'^2 - \kappa''^2)}{U_fE_f} \tag{4.47}$$

$$K = \frac{2U_1^2(1-2\nu_2)(\kappa'^2 - \kappa''^2)}{E_2U_2} = \frac{2U_{m,1}^2(1-2\nu_f)(\kappa'^2 - \kappa''^2)}{E_fU_f} \tag{4.48}$$

$$M = \frac{U_1(1-U_3)(1+\nu_2)(\lambda'^2 - \lambda''^2)}{U_2E_2} = \frac{U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)(\lambda'^2 - \lambda''^2)}{U_fE_f} \tag{4.49}$$

$$E = \frac{2(1-U_3)^2(1-2\nu_2)(\lambda'^2 - \lambda''^2)}{E_2U_2} = \frac{2(1-U_{m,2})^2(1-2\nu_f)(\lambda'^2 - \lambda''^2)}{E_fU_f} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{(1-U_3)\{(1+\nu_3)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_3' + [(1+\nu_3)2\lambda'\lambda''E_3'']\}}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \\
&= \frac{(1-U_{m,2})\{(1+\nu_m)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_m' + [(1+\nu_m)2\lambda'\lambda''E_m'']\}}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{2(1-U_3)^2\{(1-2\nu_3)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_3' + [(1-2\nu_3)2\lambda'\lambda''E_3'']\}}{[(E_3')^2 + (E_3'')^2]U_3} \\
&= \frac{2(1-U_{m,2})^2\{(1-2\nu_m)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_m' + [(1-2\nu_m)2\lambda'\lambda''E_m'']\}}{[(E_m')^2 + (E_m'')^2]U_{m,2}}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$Y = \frac{2U_1(1-U_3)(1+\nu_2)(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')}{U_2E_2} = \frac{2U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)(\kappa'\lambda' - \kappa''\lambda'')}{U_fE_f} \tag{4.53}$$

$$X = \frac{4U_1(1-U_3)(1-2\nu_2)(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'')}{U_2 E_2} = \frac{4U_{m,1}(1-U_{m,2})(1-2\nu_f)(\kappa' \lambda' - \kappa'' \lambda'')}{U_f E_f} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{2(1-U_3)[(1+\nu_3)\lambda' E_3' + (1+\nu_3)\lambda'' E_3'']}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \\ &= \frac{2(1-U_{m,2})[(1+\nu_m)\lambda' E_m' + (1+\nu_m)\lambda'' E_m'']}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{4(1-U_3)[(1-2\nu_3)\lambda' E_3' + (1-2\nu_3)\lambda'' E_3'']}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \\ &= \frac{4(1-U_{m,2})[(1-2\nu_m)\lambda' E_m' + (1-2\nu_m)\lambda'' E_m'']}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$F = \frac{[(1-U_3)(1+\nu_3) + 2(1-2\nu_3)]E_3'}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \frac{[(1-U_{m,2})(1+\nu_m) + 2(1-2\nu_m)]E_m'}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \quad (4.57)$$

Εν συνεχεία απλοποιούμε τα φανταστικά μέρη της εξίσωσης (4.38)

$$W = [H+I+\Lambda+N+O+P+T-\Phi-Y-\Omega_2-D+Q]$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{2U_1[(1-2\nu_1)(\kappa'^2 - \kappa''^2)E_1'' - (1-2\nu_1)2\kappa'\kappa''E_1']}{(E_1')^2 + (E_1'')^2} = \\ &= \frac{2U_{m,1}[(1-2\nu_m)(\kappa'^2 - \kappa''^2)E_m'' - (1-2\nu_m)2\kappa'\kappa''E_m']}{(E_m')^2 + (E_m'')^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$I = \frac{-U_1(1-U_3)(1+\nu_2)2\kappa'\kappa''}{U_2 E_2} = \frac{-U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)2\kappa'\kappa''}{U_f E_f} \quad (4.59)$$

$$\Lambda = \frac{-2U_1^2(1-2\nu_2)2\kappa'\kappa''}{E_2U_2} = \frac{-2U_{m,1}^2(1-2\nu_f)2\kappa'\kappa''}{E_fU_f} \quad (4.60)$$

$$N = \frac{-U_1(1-U_3)(1+\nu_2)2\lambda'\lambda''}{U_2E_2} = \frac{-U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)2\lambda'\lambda''}{U_fE_f} \quad (4.61)$$

$$O = \frac{-2(1-U_3)^2(1-2\nu_2)2\lambda'\lambda''}{E_2U_2} = \frac{-2(1-U_{m,2})^2(1-2\nu_f)2\lambda'\lambda''}{E_fU_f} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(1-U_3)\{(1+\nu_3)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_3'' - (1+\nu_3)2\lambda'\lambda''E_3'\}}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} \\ &= \frac{(1-U_{m,2})\{(1+\nu_m)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_m'' - (1+\nu_m)2\lambda'\lambda''E_m'\}}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{2(1-U_3)^2\{(1-2\nu_3)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_3'' - (1-2\nu_3)2\lambda'\lambda''E_3'\}}{[(E_3')^2 + (E_3'')^2]U_3} \\ &= \frac{2(1-U_{m,2})^2\{(1-2\nu_m)(\lambda'^2 - \lambda''^2)E_m'' - (1-2\nu_m)2\lambda'\lambda''E_m'\}}{[(E_m')^2 + (E_m'')^2]U_{m,2}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\Phi = \frac{-2U_1(1-U_3)(1+\nu_2)(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')}{U_2E_2} = \frac{-2U_{m,1}(1-U_{m,2})(1+\nu_f)(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')}{U_fE_f} \quad (4.65)$$

$$\Psi = \frac{-4U_1(1-U_3)(1-2\nu_2)(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')}{U_2E_2} = \frac{-4U_{m,1}(1-U_{m,2})(1-2\nu_f)(\kappa'\lambda'' + \kappa''\lambda')}{U_fE_f} \quad (4.66)$$

$$\Omega_2 = \frac{2(1-U_3)[(1+\nu_3)\lambda'E_3'' - (1+\nu_3)\lambda''E_3']}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \frac{2(1-U_{m,2})[(1+\nu_m)\lambda'E_m'' - (1+\nu_m)\lambda''E_m']}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{4(1-U_3)[(1-2\nu_3)\lambda'E_3'' - (1-2\nu_3)\lambda''E_3']}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \\
&= \frac{4(1-U_{m,2})[(1-2\nu_m)\lambda'E_m'' - (1-2\nu_m)\lambda''E_m']}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{[(1-U_3)(1+\nu_3) + 2(1-2\nu_3)]E_3''}{U_3[(E_3')^2 + (E_3'')^2]} = \frac{[(1-U_{m,2})(1+\nu_m) + 2(1-2\nu_m)]E_m''}{U_{m,2}[(E_m')^2 + (E_m'')^2]} \quad (4.69)$$

Μετά τις απλοποιήσεις οι τελικοί τύποι γίνονται

$$E_c' = \frac{R2(1-2\nu_c')}{R^2 + W^2} \quad (4.70) \quad E_c'' = \frac{W2(1-2\nu_c'')}{R^2 + W^2} \quad (4.71)$$

Απλοποίηση μ^*

$$\begin{aligned}
\Gamma &= [2U_2(1-2\nu_1)E_2 + (1-U_3)(1+\nu_2)E_1' + 2U_1(1-2\nu_2)E_1'] = \\
&= [2U_f(1-2\nu_m)E_f + (1-U_{m,2})(1+\nu_f)E_m' + 2U_{m,1}(1-2\nu_f)E_m'] \quad (4.72)
\end{aligned}$$

$$\Delta = [2U_1(1-2\nu_2)E_1'' + (1-U_3)(1+\nu_2)E_1''] = [2U_{m,1}(1-2\nu_f)E_m'' + (1-U_{m,2})(1+\nu_f)E_m''] \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}
\mu' &= \frac{[3(1-U_3)(1-\nu_2)E_1'\Gamma + 3(1-U_3)(1-\nu_2)E_1''\Delta]}{\Gamma^2 + \Delta^2} = \\
&= \frac{[3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E_m'\Gamma + 3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E_m''\Delta]}{\Gamma^2 + \Delta^2} \quad (4.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu'' &= \frac{[3(1-U_3)(1-\nu_2)E_1''\Gamma - 3(1-U_3)(1-\nu_2)E_1'\Delta]}{\Gamma^2 + \Delta^2} = \\
&= \frac{[3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E_m''\Gamma - 3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E_m'\Delta]}{\Gamma^2 + \Delta^2} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

$$\text{Τελικά,} \quad \mu^* = \mu' + \mu''i \quad (4.76)$$

Απλοποίηση λ^*

$$\begin{aligned}
A &= U_3[U_1(1+\nu_2) + 2(1-U_3)(1-2\nu_2)]E_3' + U_2[(1+\nu_3) + 2(1-U_3)(1-2\nu_3)]E_2 - \\
&- 3U_1U_3[\mu'(1-\nu_2)E_3' - \mu''(1-\nu_2)E_3''] =
\end{aligned}$$

$$= U_{m,2}[U_{m,1}(1+\nu_f) + 2(1-U_{m,2})(1-2\nu_f)]E'_m + U_f[(1+\nu_m) + 2(1-U_{m,2})(1-2\nu_m)]E_f - 3U_{m,1}U_{m,2}[\mu'(1-\nu_f)E'_m - \mu''(1-\nu_f)E''_m] \quad (4.77)$$

και

$$B = U_3[U_1(1+\nu_2) + 2(1-U_3)(1-2\nu_2)]E'_3 - 3U_1U_3[\mu'(1-\nu_2)E'_3 + \mu''(1-\nu_2)E''_3] = U_{m,2}[U_{m,1}(1+\nu_f) + 2(1-U_{m,2})(1-2\nu_f)]E''_m - 3U_{m,1}U_{m,2}[\mu'(1-\nu_f)E''_m + \mu''(1-\nu_f)E'_m] \quad (4.78)$$

$$\lambda' = \frac{3U_2(1-\nu_3)E_2A}{A^2 + B^2} = \frac{3U_f(1-\nu_m)E_fA}{A^2 + B^2} \quad (4.79)$$

και

$$\lambda'' = \frac{-3U_2(1-\nu_3)E_2B}{A^2 + B^2} = \frac{-3U_f(1-\nu_m)E_fB}{A^2 + B^2} \quad (4.80)$$

$$\text{Τελικά, } \lambda^* = \lambda' + \lambda''i \quad (4.81)$$

Απλοποίηση κ*

$$\begin{aligned} \kappa' &= \frac{3(1-U_3)(1-\nu_2)E'_1\Gamma + 3(1-U_3)(1-\nu_2)E''_1\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{3U_2(1-\nu_3)E_2A}{A^2 + B^2} - \\ &- \frac{3(1-U_3)(1-\nu_2)E'_1\Gamma - 3(1-U_3)(1-\nu_2)E''_1\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{-3U_2(1-\nu_3)E_2B}{A^2 + B^2} = \\ &= \frac{3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E'_m\Gamma + 3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E''_m\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{3U_f(1-\nu_m)E_fA}{A^2 + B^2} - \\ &- \frac{3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E''_m\Gamma - 3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E'_m\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{-3U_f(1-\nu_m)E_fB}{A^2 + B^2} \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \kappa'' &= \frac{3(1-U_3)(1-\nu_2)E'_1\Gamma + 3(1-U_3)(1-\nu_2)E''_1\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{-3U_2(1-\nu_3)E_2B}{A^2 + B^2} + \\ &+ \frac{3(1-U_3)(1-\nu_2)E''_1\Gamma - 3(1-U_3)(1-\nu_2)E'_1\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{3U_2(1-\nu_3)E_2A}{A^2 + B^2} \\ &= \frac{3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E'_m\Gamma + 3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E''_m\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{-3U_f(1-\nu_m)E_fB}{A^2 + B^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E_m''\Gamma - 3(1-U_{m,2})(1-\nu_f)E_m'\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} * \frac{3U_f(1-\nu_m)E_f A}{A^2 + B^2} \quad (4.83)$$

$$\text{Τελικά, } \kappa^* = \kappa' + \kappa''i \quad (4.84)$$

4.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΛΛΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ

Η μαθηματική διατύπωση ενός σύνθετου υλικού το οποίο αποτελείται από πολυμερική μήτρα στην οποία έχουν προστεθεί κόκκοι σιδήρου, παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες ακόμα και στις περιπτώσεις που και οι δυο φάσεις θεωρούνται ελαστικές.

Μολονότι πολλές γεωμετρικές, τοπολογικές, μηχανικές και φυσικές παράμετροι εμπλέκονται στην στατιστική εκτίμηση των μέσων ιδιοτήτων των κοκκωδών σύνθετων υλικών, το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου, που αποτελείται από ομόκεντρες σφαίρες περιγράφει επαρκώς την μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Τα διαφασικά μοντέλα θεωρούν λείες και μαθηματικά περιγραφόμενες διεπιφάνειες και τέλεια πρόσφυση μεταξύ φάσεων. Έτσι, αναλυτικές λύσεις βασιζόμενες στα 'variational principles' της μηχανικής παρέχουν πάνω και κάτω όρια προσέγγισης για τα μέτρα ελαστικότητας του σύνθετου υλικού. Αυτές οι λύσεις ισχύουν κύρια για χαμηλές περιεκτικότητες εγκλείσματος επειδή αγνοούν τις μηχανικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ γειτονικών εγκλεισμάτων όπως επίσης φυσικοχημικές επιδράσεις της μιας φάσης επί της άλλης. Επίσης, υπάρχουν και εμπειρικές εκφράσεις για τα μέτρα ελαστικότητας σε μορφή νόμου των φάσεων ή ακόμα εκφράσεις που προέκυψαν από προσπάθεια προσαρμογής πειραματικών αποτελεσμάτων σε θεωρητικές εκφράσεις μέσω κάποιων σταθερών.

Οι θεωρητικές εκφράσεις για το μέτρο ελαστικότητας που αναφέρονται στο κεφάλαιο 2 [Εξ. (2.1-2.21)] και οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την σύγκριση με τα αποτελέσματα του θεωρητικού μοντέλου που αναπτύχθηκε σε αυτήν την εργασία και των πειραματικών αποτελεσμάτων πράγμα το οποίο δίνει μια σαφή εικόνα για το αναπτυχθέν μοντέλο, θα χρησιμοποιηθούν σαν βάση για τον υπολογισμό των δυναμικών μέτρων ελαστικότητας εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας.

Έτσι η Εξ.(2.1) του Einstein γράφεται ως :

$$E_c^* = E_m^*(1 + 2.5U_f)$$

$$E_c' + iE_c'' = (E_m' + iE_m'')(1 + 2.5U_f)$$

Από όπου διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη, έχουμε :

$$E_c' = E_m'(1 + 2.5U_f) \text{ και } E_c'' = E_m''(1 + 2.5U_f) \quad (2.1)^*$$

Η Εξ.(2.2) των Guth-Smallwood γράφεται ως :

$$E_c^* = E_m^*(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2)$$

$$E_c' + iE_c'' = (E_m' + iE_m'')(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2)$$

Από όπου διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη, έχουμε :

$$\begin{aligned} E'_c &= E'_m(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2) \\ E''_c &= E''_m(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2) \end{aligned} \quad (2.2)^*$$

Η Εξ.(2.4) του Kerner γράφεται ως :

$$\begin{aligned} E'_c &= \left\{ 1 + \frac{U_f}{U_m} \left[\frac{15(1 - \nu_m^*)}{8 - 10\nu_m^*} \right] \right\} E_m^* \\ E'_c + iE''_c &= \left\{ 1 + \frac{U_f}{U_m} \left[\frac{15(1 - (\nu_m' + i\nu_m''))}{8 - 10(\nu_m' + i\nu_m'')} \right] \right\} (E'_m + iE''_m) \end{aligned}$$

Από όπου διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη, έχουμε :

$$\begin{aligned} E'_c &= \left\{ 1 + \frac{U_f}{U_m} \left[\frac{15(1 - \nu_m)}{8 - 10\nu_m} \right] \right\} E'_m \\ E''_c &= \left\{ 1 + \frac{U_f}{U_m} \left[\frac{15(1 - \nu_m)}{8 - 10\nu_m} \right] \right\} E''_m \end{aligned} \quad (2.4)^*$$

Η Εξ.(2.8) του Mooney γράφεται ως :

$$\begin{aligned} E'_c &= E'_m \exp \left[\frac{2.5U_f}{1 - SU_f} \right] \\ E'_c + iE''_c &= (E'_m + iE''_m) \exp \left[\frac{2.5U_f}{1 - SU_f} \right] \end{aligned}$$

Από όπου διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη, έχουμε :

$$E'_c = E'_m \exp \left[\frac{2.5U_f}{1 - SU_f} \right], \quad E''_c = E''_m \exp \left[\frac{2.5U_f}{1 - SU_f} \right] \quad (2.8)^*$$

Η Εξ. (2.7) των Sato-Furukawa γράφεται ως εξής :

$$\begin{aligned} E'_c &= TE'_m \\ E'_c + iE''_c &= T(E'_m + iE''_m) \end{aligned}$$

όπου

$$T = \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{1 - Y} \right] \left[1 - \frac{Y^3 T}{3} \left(\frac{1 + Y - Y^2}{1 - Y + Y^2} \right) \right] - \frac{Y^2 T}{3(1 - Y)} \left(\frac{1 + Y - Y^2}{1 - Y + Y^2} \right) \right\}$$

Διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη έχουμε

$$E'_c = TE'_m, \quad E''_c = TE''_m \quad (2.7)^*$$

Η Εξ.(2.18) του Voigt που αποτελεί το κάτω όριο για το μέτρο ελαστικότητας γράφεται ως :

$$E'_c = \frac{E'_f E_m^*}{E_m^* U_f + E_f^* U_m} \rightarrow E'_c + iE''_c = \frac{(E'_f + iE''_f)(E'_m + iE''_m)}{(E'_m + iE''_m)U_f + (E'_f + iE''_f)U_m}$$

Από όπου διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη, έχουμε :

$$E'_c = \frac{E'_f [E'_m (E'_m U_f + E'_f U_m) + E_m''^2 U_f]}{(E'_m U_f + E'_f U_m)^2 + (E_m'' U_f)^2}$$

$$E_c'' = \frac{E'_f [E_m'' (E'_m U_f + E'_f U_m) - E'_m E_m'' U_f]}{(E'_m U_f + E'_f U_m)^2 + (E_m'' U_f)^2} \quad (2.18)^*$$

Η Εξ.(2.21) του Takayanagi εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας γράφεται ως εξής :

$$\frac{1}{E_c^*} = \left(\frac{\Phi}{(1-k)E_m^* + kE_f^*} \frac{1-\Phi}{E_m^*} \right)$$

$$\frac{1}{E'_c + iE_c''} = \left(\frac{\Phi}{(-k)(E'_m + iE_m'') + k(E'_f + iE_f'')} \frac{1-\Phi}{E'_m + iE_m''} \right)$$

από όπου διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέλη, προκύπτει :

$$\frac{E'_c}{E_c'^2 + E_c''^2} = \frac{\Phi[(1-k)E'_m + kE'_f]}{[(1-k)E'_m + kE'_f]^2 + [(1-k)E_m'']^2} + \frac{(1-\Phi)E'_m}{E_m'^2 + E_m''^2}$$

$$\frac{E_c''}{E_c'^2 + E_c''^2} = \frac{\Phi(1-k)E_m''}{[(1-k)E'_m + kE'_f]^2 + [(1-k)E_m'']^2} + \frac{(1-\Phi)E_m''}{E_m'^2 + E_m''^2}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει

$$E'_c = \frac{P}{P^2 + Q^2}, \quad E_c'' = \frac{Q}{P^2 + Q^2} \quad (2.21)^*$$

όπου P και Q είναι τα δεξιά τμήματα των δυο προηγούμενων σχέσεων.

Στις προηγούμενες σχέσεις των δυναμικών μέτρων ελαστικότητας έχει θεωρηθεί ότι το έγκλεισμα που είναι κόκκοι σιδήρου είναι ελαστικό συνεπώς

$$E_f'' = 0 \quad \text{και} \quad E'_f \cong E_f$$

Επίσης για να γίνουν οι υπολογισμοί ευκολότερα μέσω απλουστευμένων εκφράσεων των E'_c και E_c'' λήφθηκε υπ'όψιν ότι για τα περισσότερα υλικά οι συντελεστές απωλειών (loss factors) σε εφελκυσμό και σε διάτμηση είναι περίπου ίσοι οπότε οι λόγοι του Poisson θεωρούνται πραγματικοί[29] και έτσι :

$$\nu_f^* = \nu_f' = \nu_f, \quad \nu_m^* = \nu_m' = \nu_m \quad \text{και} \quad \nu_c^* = \nu_c' = \nu_c$$

4.3 ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ήταν εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου, όμοια αντίστοιχα με τα υλικά που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.

Για την μελέτη της επίδρασης της κατ'όγκον περιεκτικότητας του εγκλείσματος επί των δυναμικών μέτρων ελαστικότητας χρησιμοποιήθηκαν 5 διαφορετικές περιεκτικότητες ($U_f=0, 0.05, 0.10, 0.15$ και 0.20).

Η συσκευή Dynastat χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση των δυναμικών μέτρων ελαστικότητας E'_c και E''_c . Μπορεί να εφαρμόσει ένα ημιτονοειδές φορτίο μέγιστου εύρους 100N σε ένα δοκίμιο μήκους 55mm και πλάτους 3.5mm.

Τα πειράματα έγιναν σε πεδίο συχνότητας (0.1-100Hz) και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος (20°-22°C). Τα αποτελέσματα φαίνονται στα διαγράμματα της παραγράφου 4.4 που ακολουθεί.

4.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η επίδραση της κατ'όγκον περιεκτικότητας στο μέτρο αποθήκευσης και το μέτρο απωλειών για διάφορες συχνότητες φαίνεται στα διαγράμματα (1-1 έως 6-4). Στα ίδια διαγράμματα παριστάνονται και οι καμπύλες που προέκυψαν από θεωρητικές εκφράσεις άλλων ερευνητών καθώς επίσης και οι πειραματικές τιμές που ελήφθησαν από τα πειράματα ταλαντώσεων που έγιναν στο κοκκώδες σύνθετο υλικό.

Από τα διαγράμματα διαπιστώνεται ότι τόσο το μέτρο αποθήκευσης όσο και το μέτρο απωλειών του θεωρητικού τριφασικού μοντέλου αυξάνουν με την αύξηση σε περιεκτικότητα του εγκλείσματος. Το ίδιο ισχύει για τα θεωρητικά μοντέλα των Mooney, Sato-Furukawa για $k=0$, Einstein, Guth-Smallwood, Kerner, Takayanagi, Voigt και για τις πειραματικές τιμές. Αντίθετα, μείωση παρατηρείται στο μοντέλο του Sato-Furukawa για $k=1$. Αυτές οι μεταβολές παρατηρούνται σε όλες τις συχνότητες που εξετάζουμε.

Οι τιμές του μέτρου αποθήκευσης και του μέτρου απωλειών των μοντέλων του Takayanagi, Sato-Furukawa για $k=0$, Kerner, Einstein βρίσκονται πολύ κοντά στο θεωρητικό τριφασικό μοντέλο. Αξιοπρόσεκτο είναι το ότι μέχρι 25% περιεκτικότητα ο Einstein και το θεωρητικό τριφασικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται. Αντίθετα παρουσιάζεται απόκλιση με τα μοντέλα του Sato-Furukawa για $k=1$, Mooney, Guth-Smallwood, Voigt με την αύξηση σε περιεκτικότητα του εγκλείσματος. Την μικρότερη

απόκλιση εμφανίζει το μοντέλο του Voigt. Οι τιμές που προκύπτουν από τους Mooney και Guth-Smallwood είναι κοντά στις τιμές του θεωρητικού τριφασικού μοντέλου μέχρι περιεκτικότητα 10%. Από 15% μέχρι 30% οι τιμές είναι αρκετά μεγαλύτερες και από τους άλλους ερευνητές. Ο Voigt μόνο για 5% προσεγγίζει το θεωρητικό μοντέλο. Τα συμπεράσματα είναι κοινά για όλες τις συχνότητες που εξετάζουμε.

Οι πειραματικές τιμές του μέτρου απωλειών και του μέτρου αποθήκευσης είναι πολύ κοντά στις τιμές του θεωρητικού μοντέλου για όλες τις συχνότητες. Είναι ελάχιστα μικρότερες για την ακρίβεια. Επομένως η σχέση των πειραματικών τιμών με τους άλλους ερευνητές ομοιάζει με αυτή των θεωρητικών τιμών. Μοναχά στην περίπτωση του μέτρου απωλειών για την συχνότητα των 0.1Hz και για τις περιεκτικότητες 15% και 20% οι πειραματικές τιμές είναι λίγο παραπάνω μικρότερες από τις θεωρητικές εν σχέσει πάντα με το ότι συμβαίνει στα υπόλοιπα διαγράμματα.

Παρατηρούμαι ότι οι θεωρητικές τιμές από την εξίσωση του Sato-Furukawa για $k=0$ είναι σε ικανοποιητική σύγκλιση με τις πειραματικές τιμές. Όμως αυτό δεν δύναται να αποδοθεί στην εγκυρότητα αυτού του μοντέλου αφού η θεωρητική του έκφραση είναι πολύ απλή επειδή δεν περιέχει πολλές παραμέτρους άρα δεν δύναται να είναι ακριβής.

Οι τιμές του μέτρου απωλειών και του μέτρου αποθήκευσης υπό την επίδραση της θερμοκρασίας φαίνεται στα διαγράμματα (13-1 έως 16-2) για διάφορες τιμές σε περιεκτικότητα του εγκλείσματος και για τις συχνότητες 0.1 Hz, 1 Hz, 10 Hz, 50Hz. Με την αύξηση της θερμοκρασίας ελαττώνεται το μέτρο αποθήκευσης, ενώ αυξάνει σημαντικά όσο αυξάνει η περιεκτικότητα του εγκλείσματος, εξαιτίας της μεγαλύτερης συνεισφοράς του ελαστικού μέτρου των σωματιδίων. Αυτό το φαινόμενο είναι περισσότερο έντονο στις χαμηλότερες θερμοκρασίες, όπου το σύνθετο βρίσκεται στην υαλώδη κατάσταση και η συμπεριφορά του είναι περισσότερο ελαστική. Στις υψηλότερες θερμοκρασίες το σύνθετο πλησιάζει την μεταβατική κατάσταση και γίνεται βισκοελαστικό. Γι' αυτό η επίδραση των σωματιδίων του σιδήρου γίνεται πιο μικρή. Για τον ίδιο λόγο στις χαμηλότερες θερμοκρασίες τα πειραματικά αποτελέσματα έχουν μικρότερη απόκλιση με αυτά της θεωρίας. Ωστόσο η διαφορά ανάμεσα στη θεωρία και στο πείραμα για το μέτρο αποθήκευσης αυξάνει σε υψηλότερες περιεκτικότητες. Ο κύριος λόγος για αυτό το φαινόμενο φαίνεται να είναι ότι το θεωρητικό μοντέλο δεν λαβαίνει υπόψη την αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών σωματιδίων. Επίσης, παρατηρούμε ότι η αύξηση της συχνότητας συνοδεύεται και με αύξηση του μέτρου αποθήκευσης. Αντίθετα, το μέτρο απωλειών αυξάνει με την αύξηση της θερμοκρασίας. Συγχρόνως, παρατηρείται ότι η αύξηση της συχνότητας προκαλεί αύξηση του μέτρου απωλειών. Τέλος, η αύξηση σε περιεκτικότητα του εγκλείσματος επηρεάζει σε μικρό βαθμό το μέτρο απωλειών αυξάνοντας το ελαφρώς. Φαίνεται ότι στις χαμηλότερες θερμοκρασίες υπάρχει καλύτερη προσέγγιση μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών τιμών.

Η επίδραση της συχνότητας στο μέτρο απωλειών και στο μέτρο αποθήκευσης του θεωρητικού μοντέλου για διάφορες περιεκτικότητες σε εγκλείσμα φαίνεται στα διαγράμματα (7-1 έως 12-4). Στα ίδια διαγράμματα τα πειραματικά αποτελέσματα συγκρίνονται με αποτελέσματα που προέκυψαν από θεωρίες διάφορων ερευνητών. Παρατηρούμε ότι το μέτρο αποθήκευσης αυξάνει καθώς αυξάνει η περιεκτικότητα του εγκλείσματος και η συχνότητα. Ανάλογο συμπέρασμα μπορεί να ειπωθεί και για το

μέτρο απωλειών. Η μόνη διαφορά είναι ότι το μέτρο απωλειών του σύνθετου υλικού αυξάνεται πιο απότομα με την αύξηση της συχνότητας.

Το μέτρο αποθήκευσης όσο και το μέτρο απωλειών των θεωρητικών τιμών, των πειραματικών τιμών και όλων των ερευνητών αυξάνουν με την αύξηση της συχνότητας. Το ίδιο παρατηρείται για όλες τις περιεκτικότητες σε έγκλεισμα (5% έως 30%). Οι τιμές για το μέτρο αποθήκευσης όσο και το μέτρο απωλειών των μοντέλων του Takayanagi, Sato-Furukawa για $k=0$, Kerner, Einstein βρίσκονται πολύ κοντά στο θεωρητικό μοντέλο. Οι τιμές για το μέτρο αποθήκευσης όσο και το μέτρο απωλειών των μοντέλων του Sato-Furukawa για $k=1$, Mooney, Guth-Smallwood, Voigt απέχουν από το θεωρητικό μοντέλο. Η απόκλιση των τιμών των ερευνητών Sato-Furukawa για $k=1$, Mooney, Guth-Smallwood, Voigt με τις θεωρητικές τιμές γίνεται όλο και πιο αισθητή καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερες περιεκτικότητες. Αντίθετα σε μικρότερες περιεκτικότητες εγκλείσματος οι τιμές αυτές είναι κοντά στο θεωρητικό μοντέλο καθώς αυξάνει η συχνότητα.

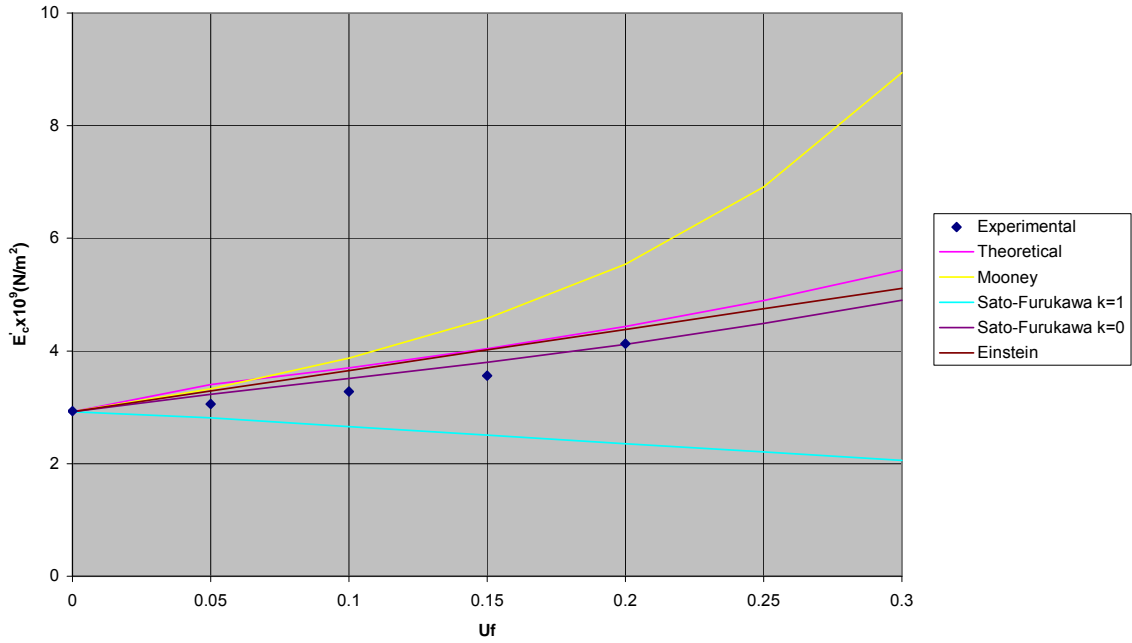
Οι πειραματικές τιμές του μέτρου απωλειών και του μέτρου αποθήκευσης είναι πολύ κοντά στις τιμές του θεωρητικού μοντέλου για όλες τις περιεκτικότητες από 0.05 έως 0.2. Είναι ελάχιστα μικρότερες για την ακρίβεια. Επομένως η σχέση των πειραματικών τιμών με τους άλλους ερευνητές ομοιάζει με αυτή των θεωρητικών τιμών. Παρατηρούμαι ότι για περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 10% οι πειραματικές τιμές του μέτρου αποθηκέυσεως παρουσιάζονται λίγο παραπάνω χαμηλότερες από τις θεωρητικές τιμές από τα άλλα διαγράμματα.

Όπως είναι γνωστό η παρουσία εγκλεισμάτων σε πολυμερές προξενεί τη δημιουργία μιας χωριστής περιοχής στη μήτρα, η οποία συνδέεται ισχυρά με τα εγκλείσματα, και χαρακτηρίζεται από χαμηλό βαθμό κινητικότητας σε σχέση με την υψηλότερης κινητικότητας περιοχή μέσα στο πολυμερές. Το φαινόμενο αυτό το οποίο είναι πολύ έντονο στα κοκκώδη υλικά μπορεί να υπάρξει και στα σύνθετα υλικά με διακεκομμένες ίνες τυχούσης διευθύνσεως οι οποίες χαρακτηρίζονται από το λόγο μήκους προς διάμετρο ($\frac{l}{D}$) ο οποίος είναι χαμηλός. Η ακραία περίπτωση αυτού είναι

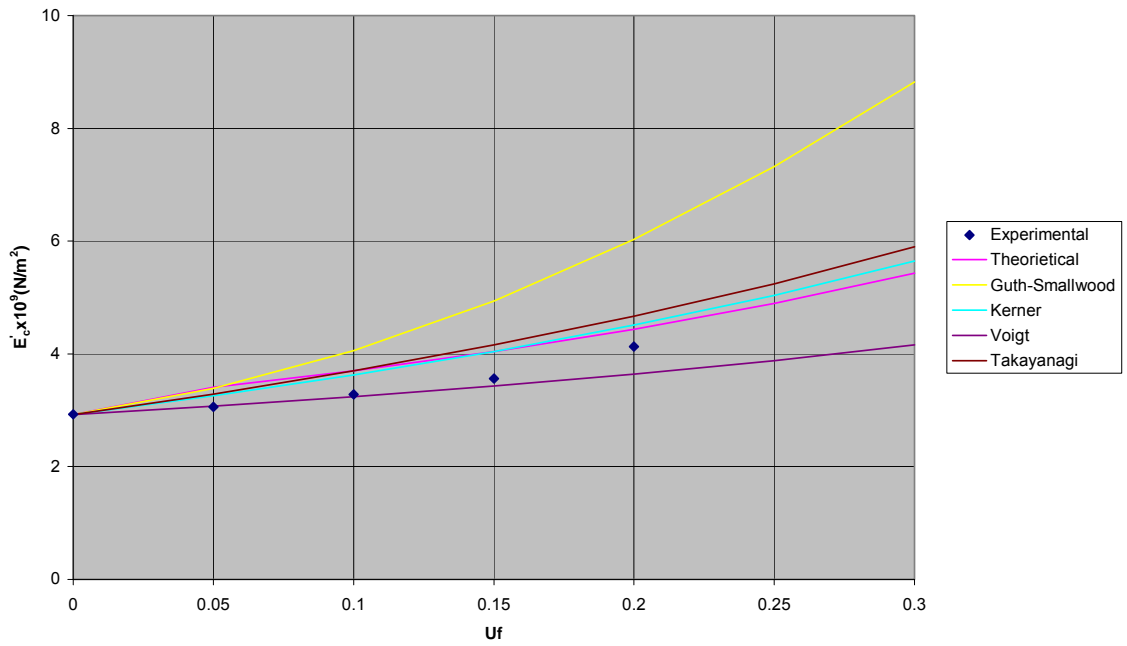
όταν $\frac{l}{D} = 1$ δηλαδή όταν το μήκος της ίνας ισούται με τη διάμετρο και η διακεκομμένη ίνα γίνεται ωσάν κόκκος.

Οι διαφορετικές μεταβολές των δυο δυναμικών μέτρων συναρτήσεως των προαναφερθεισών παραμέτρων οφείλονται και σε επιδράσεις εσωτερικής απόσβεσης και σπατάλης ενέργειας που επηρεάζονται από αυτές τις παραμέτρους. Ειδικά το μέτρο απωλειών επηρεάζεται αφού εκφράζει και την απόσβεση.

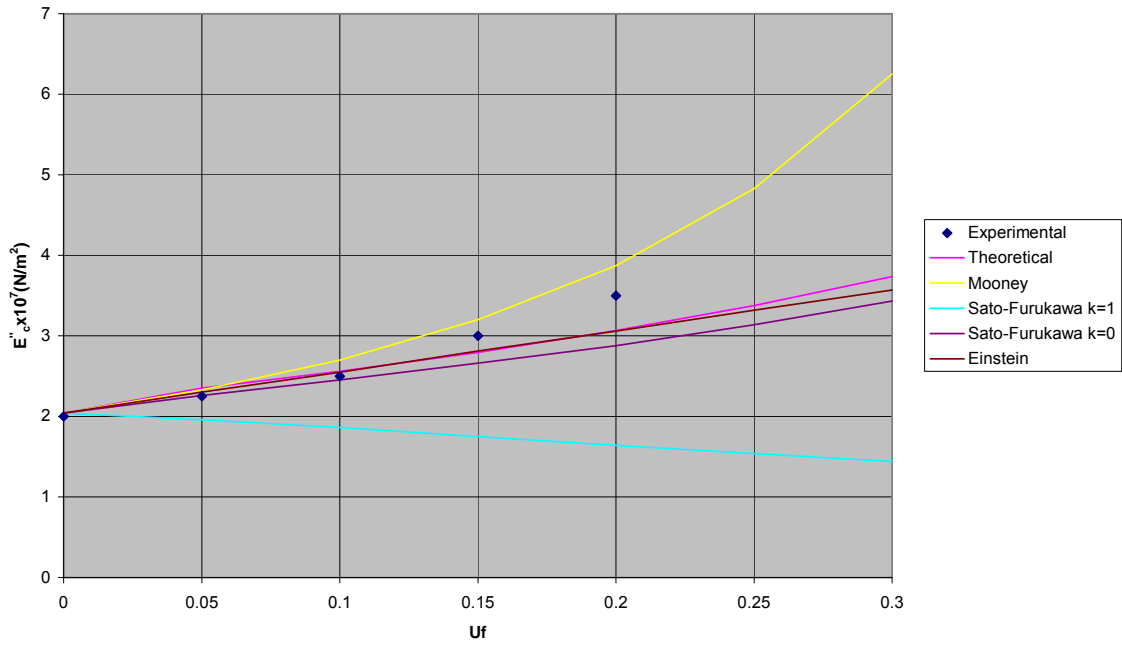
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=0.1Hz



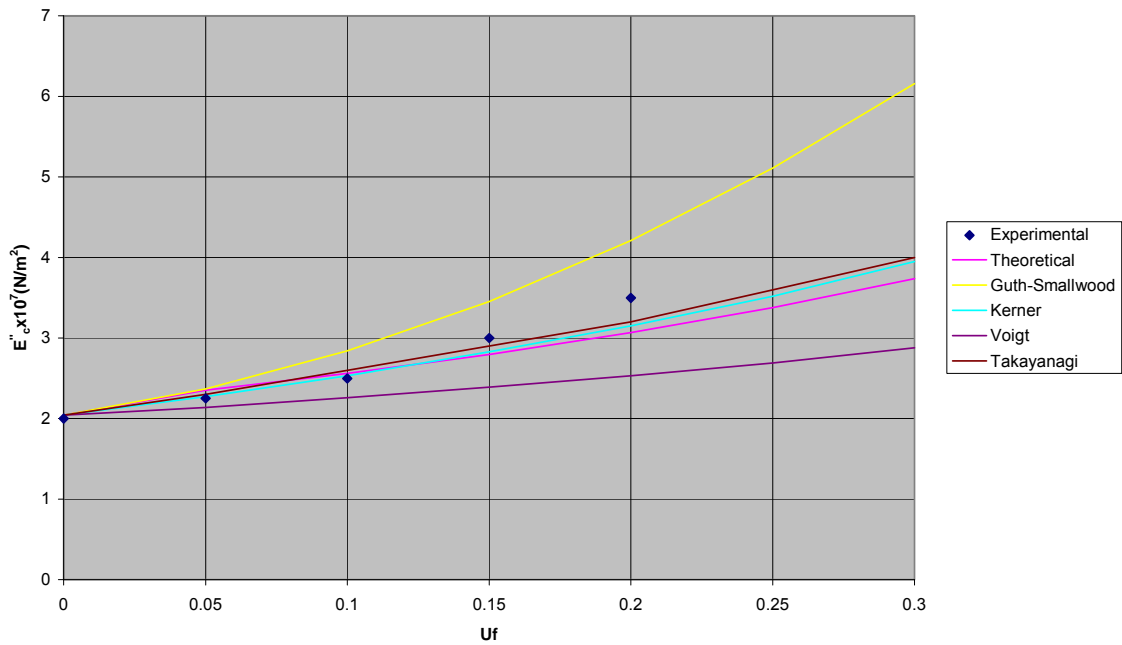
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=0.1Hz



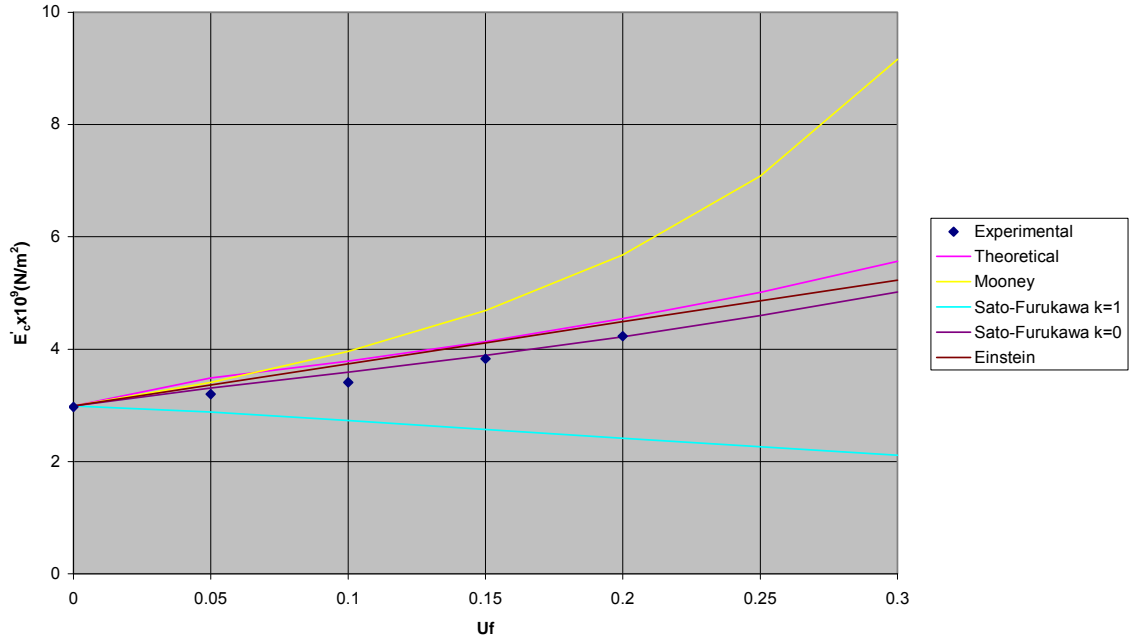
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=0.1Hz



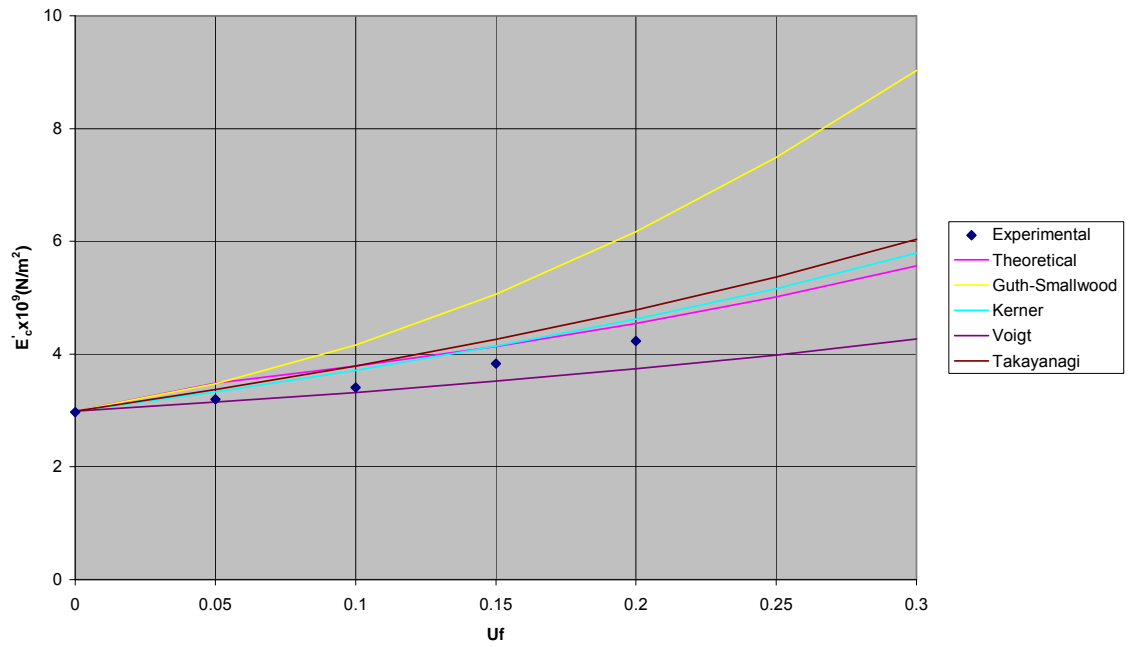
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=0.1Hz



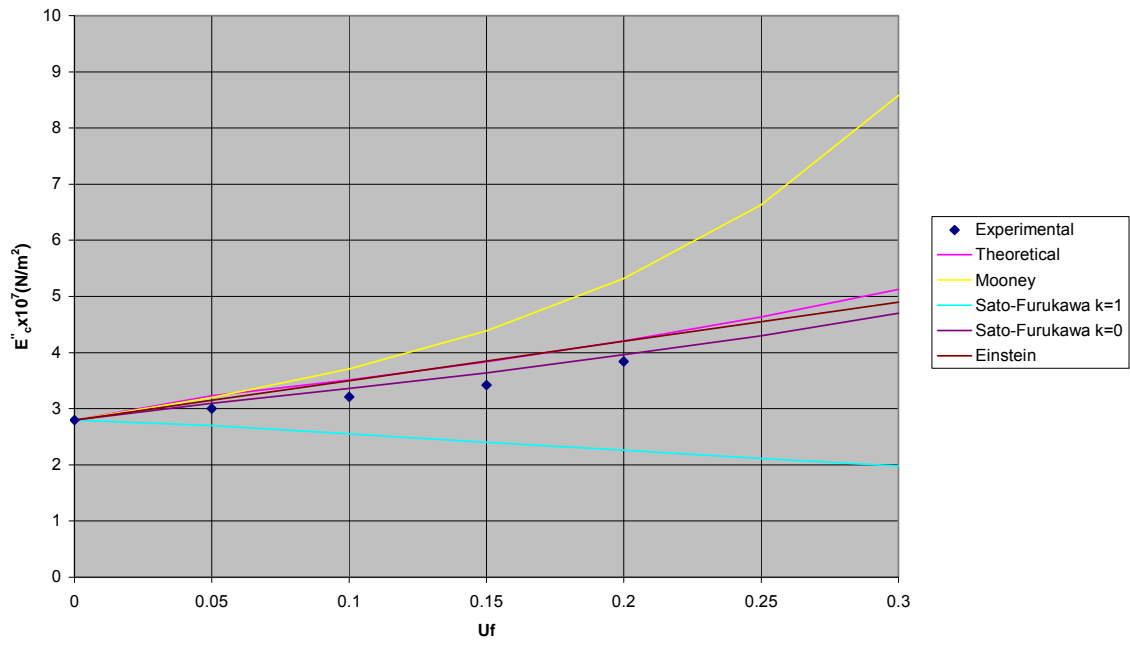
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=1.0Hz



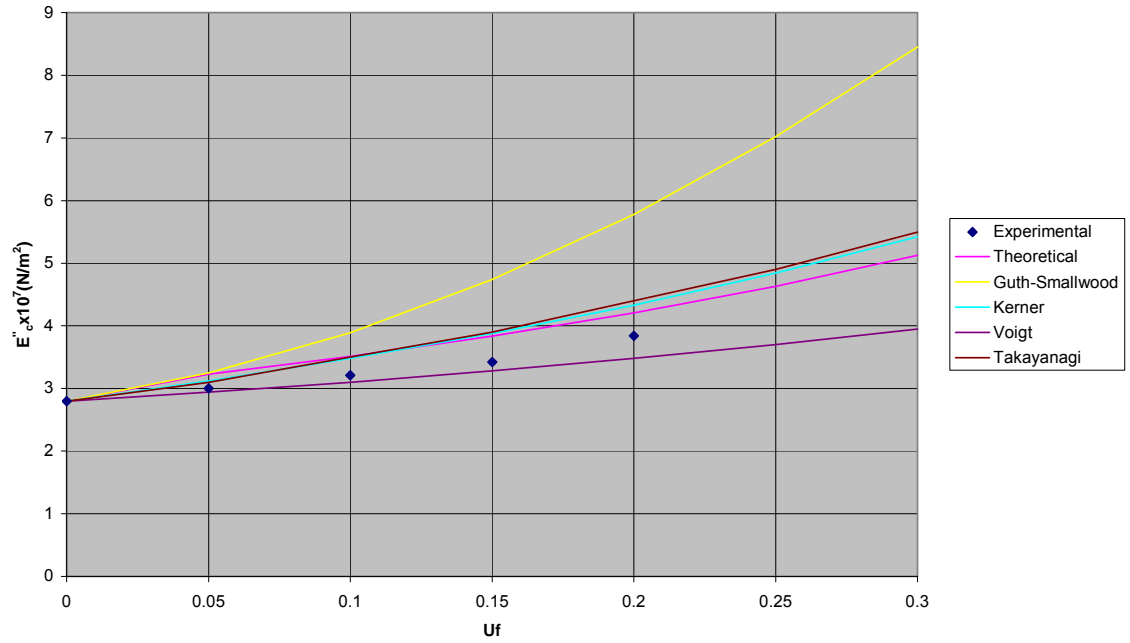
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=1.0Hz



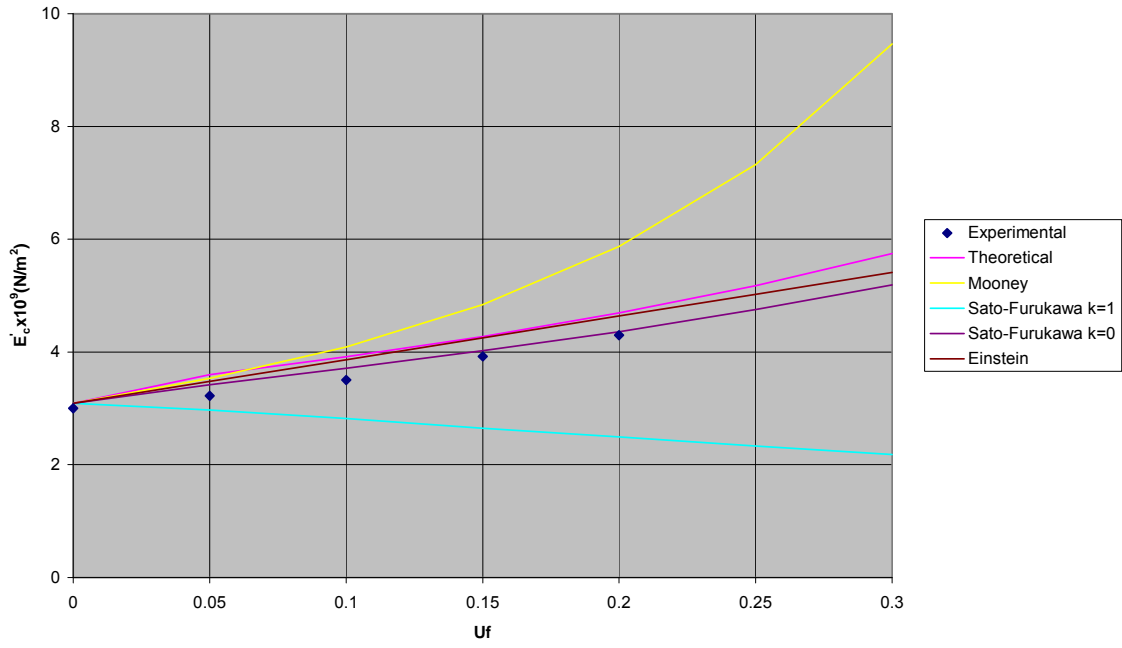
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=1.0Hz



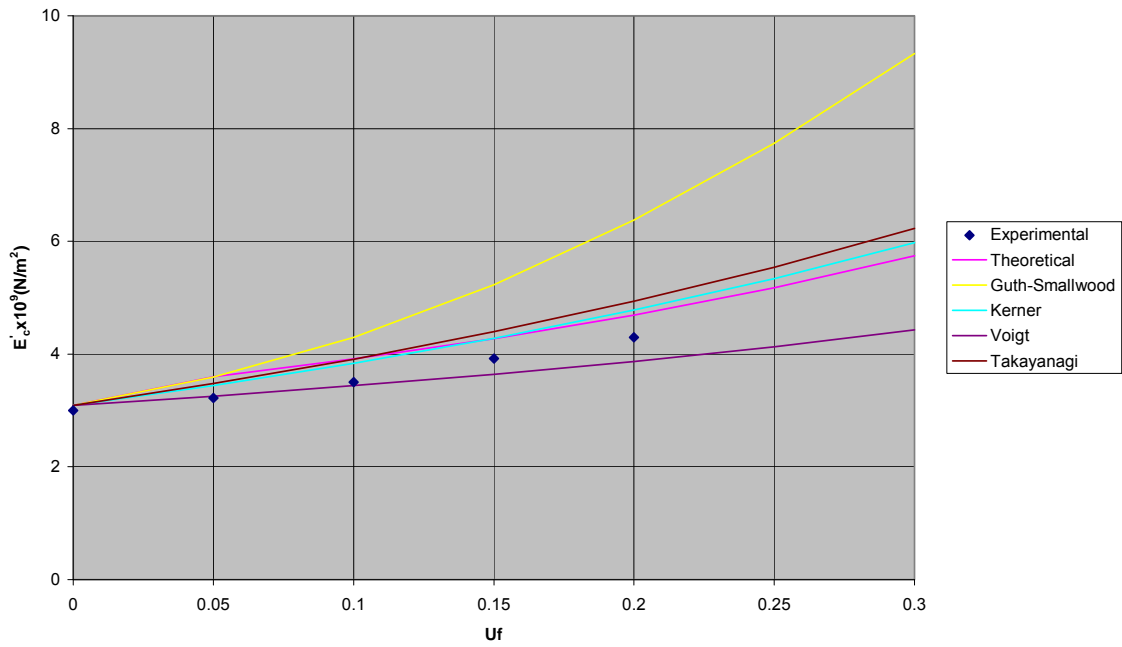
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=1.0Hz



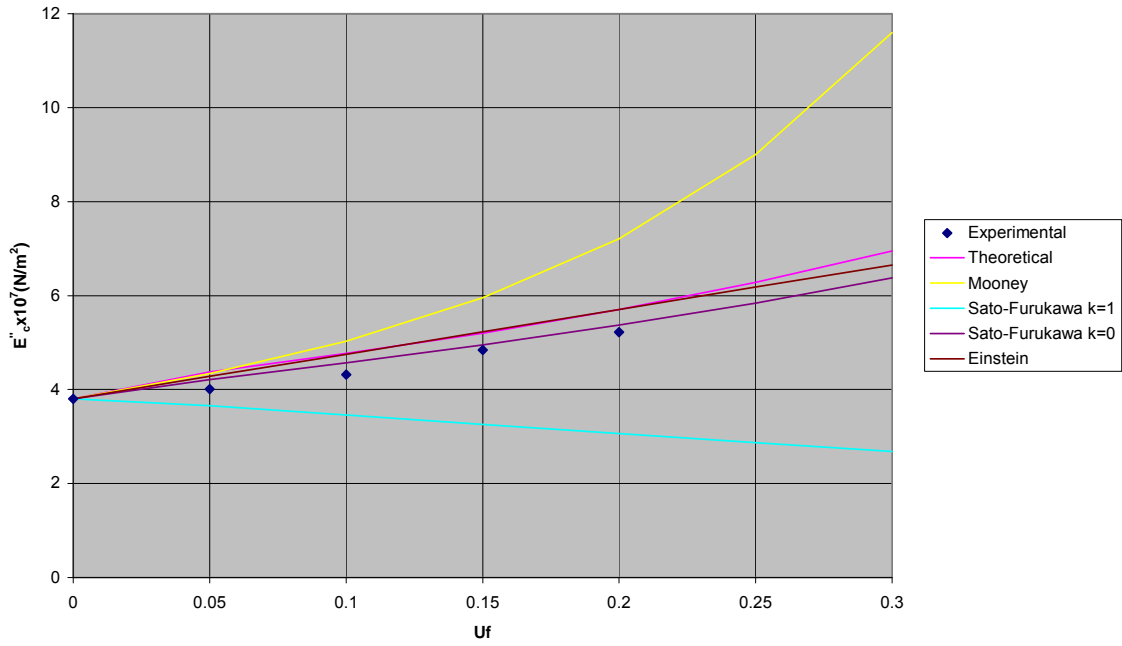
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=10.0Hz



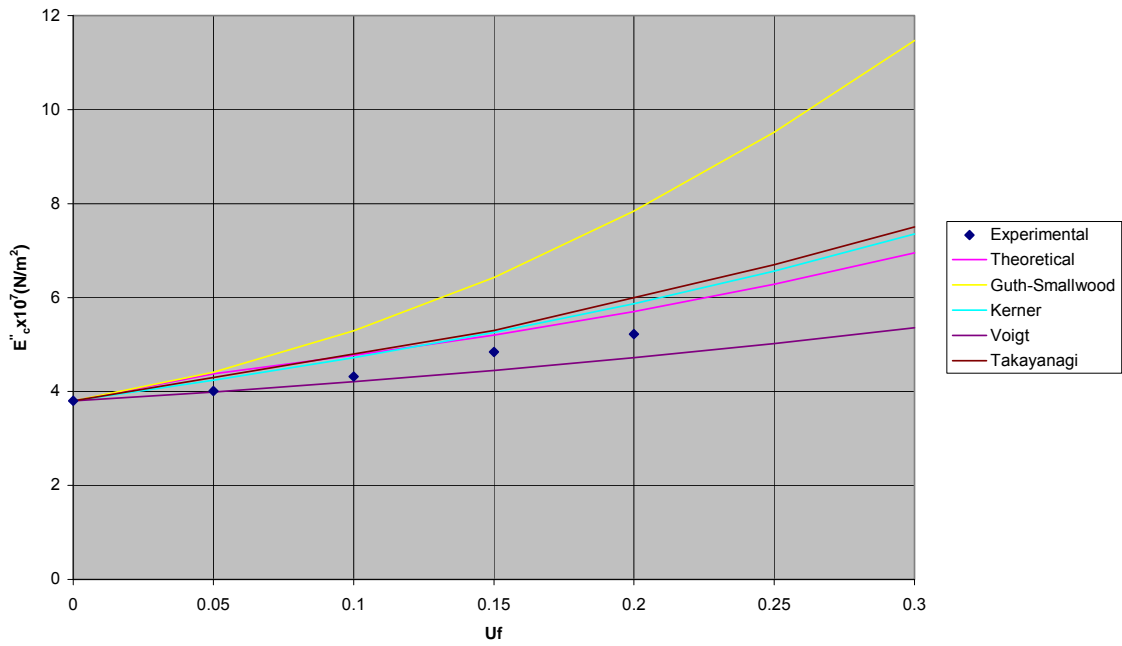
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=10.0Hz



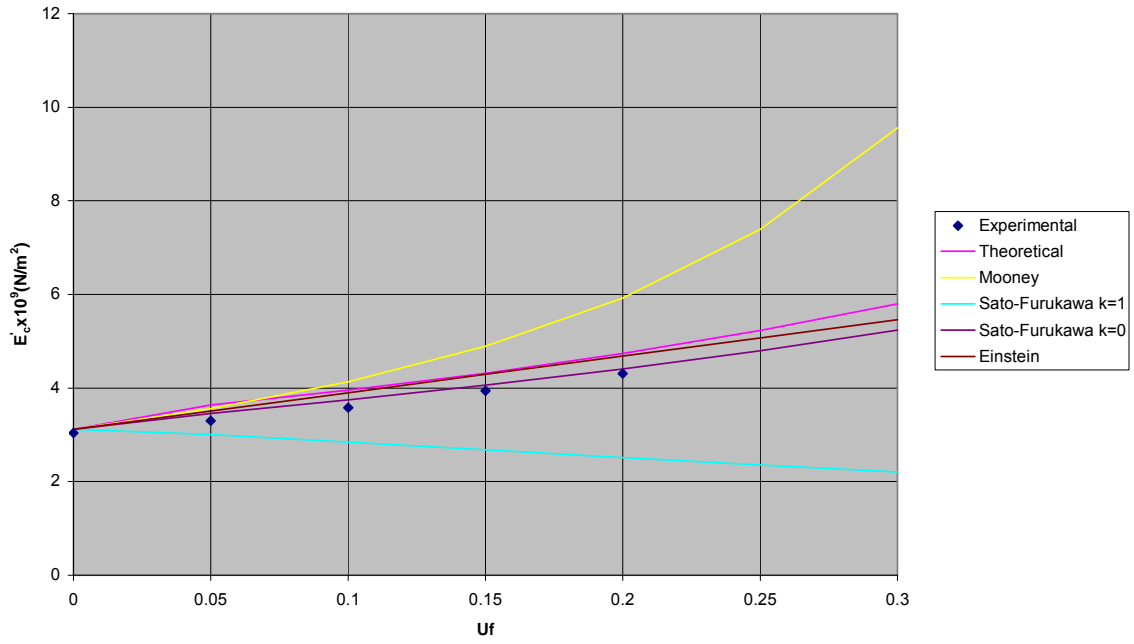
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=10.0Hz



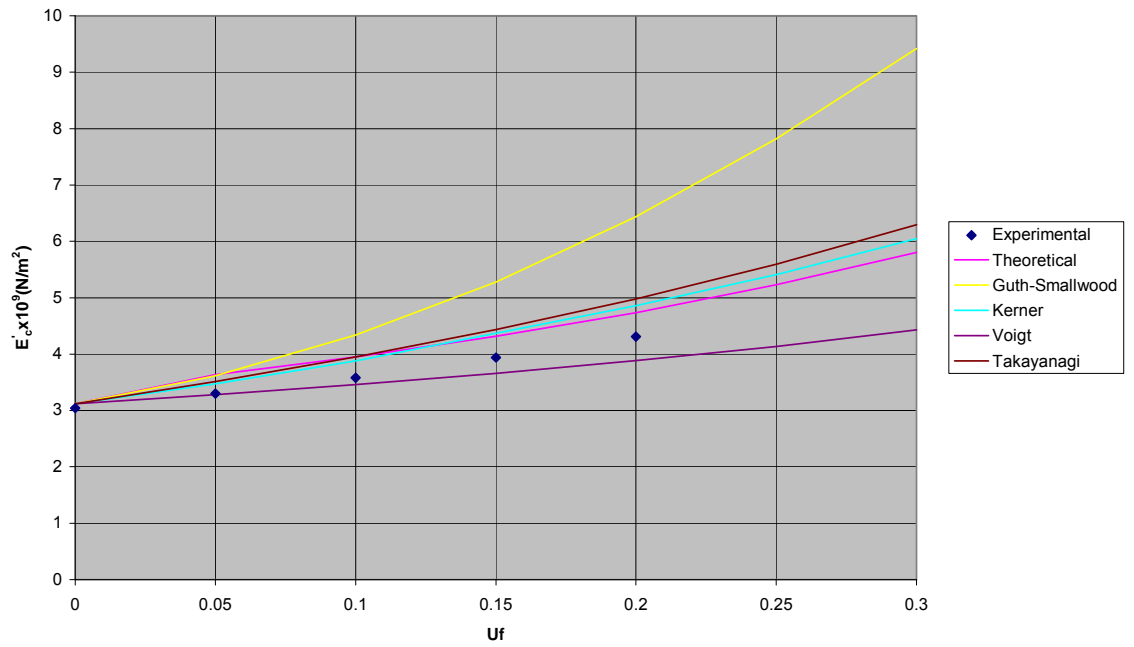
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=10.0Hz



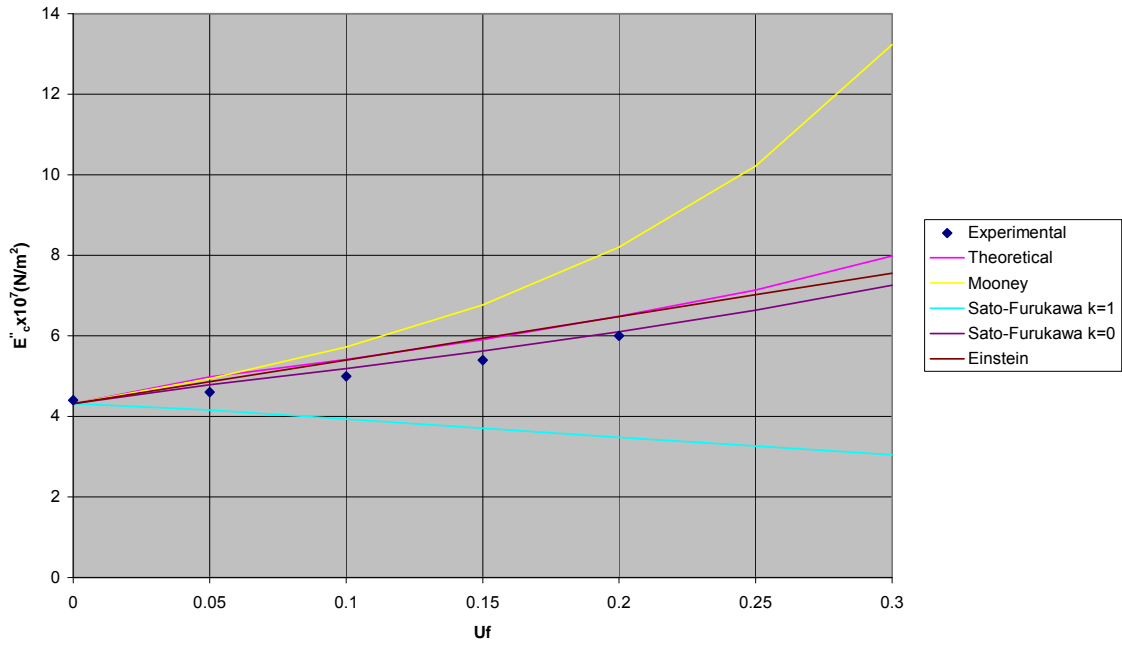
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=20Hz



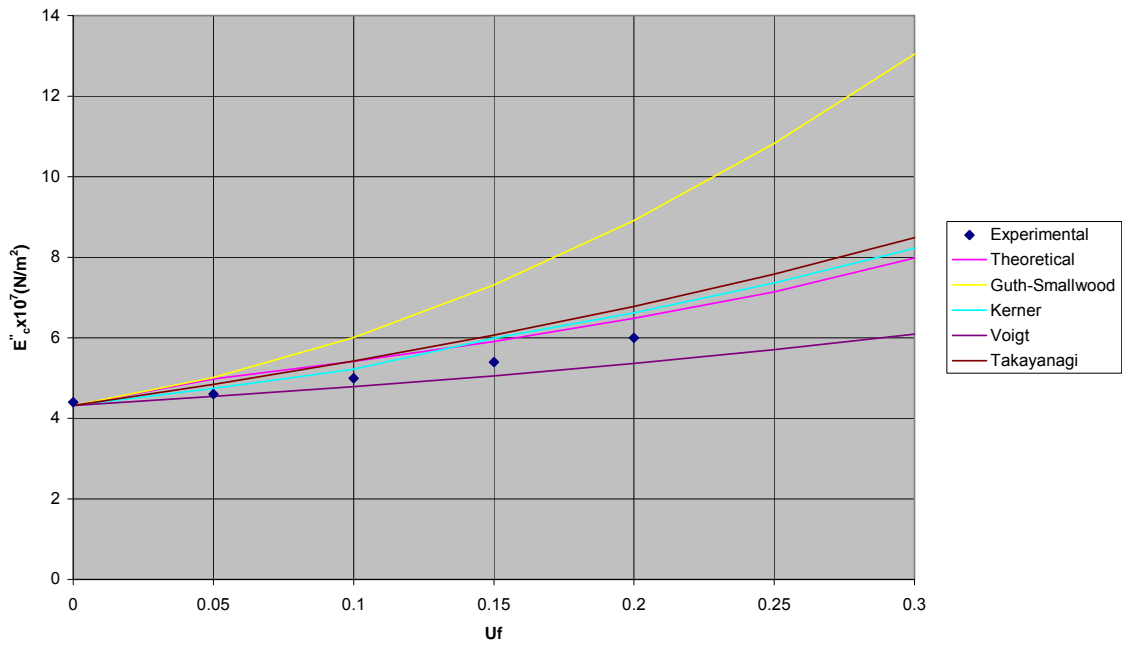
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=20Hz



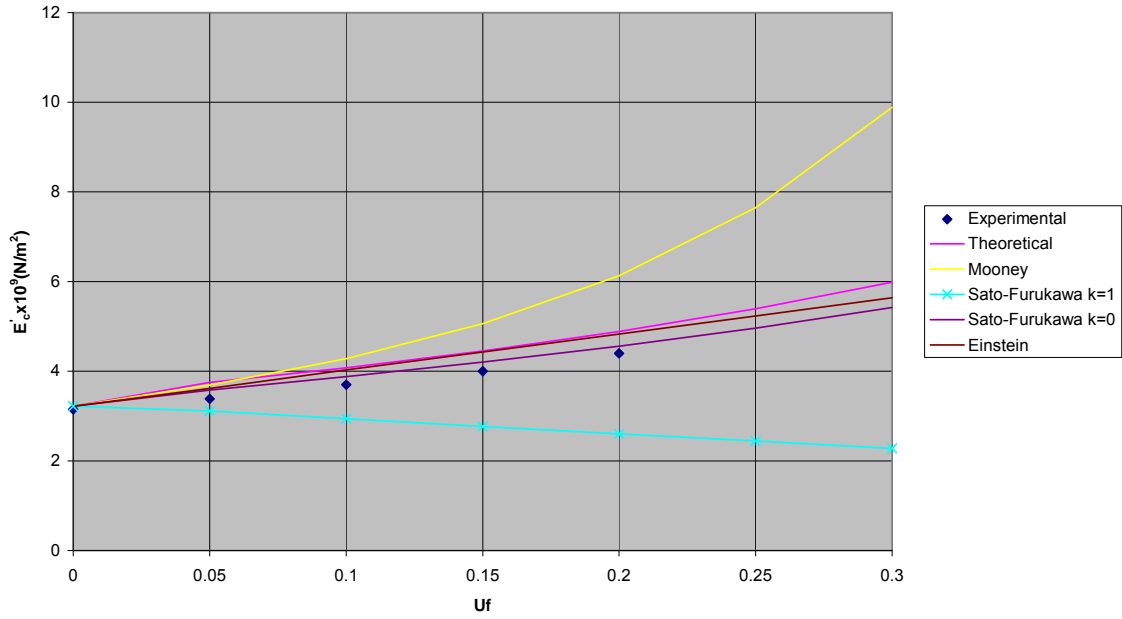
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=20Hz



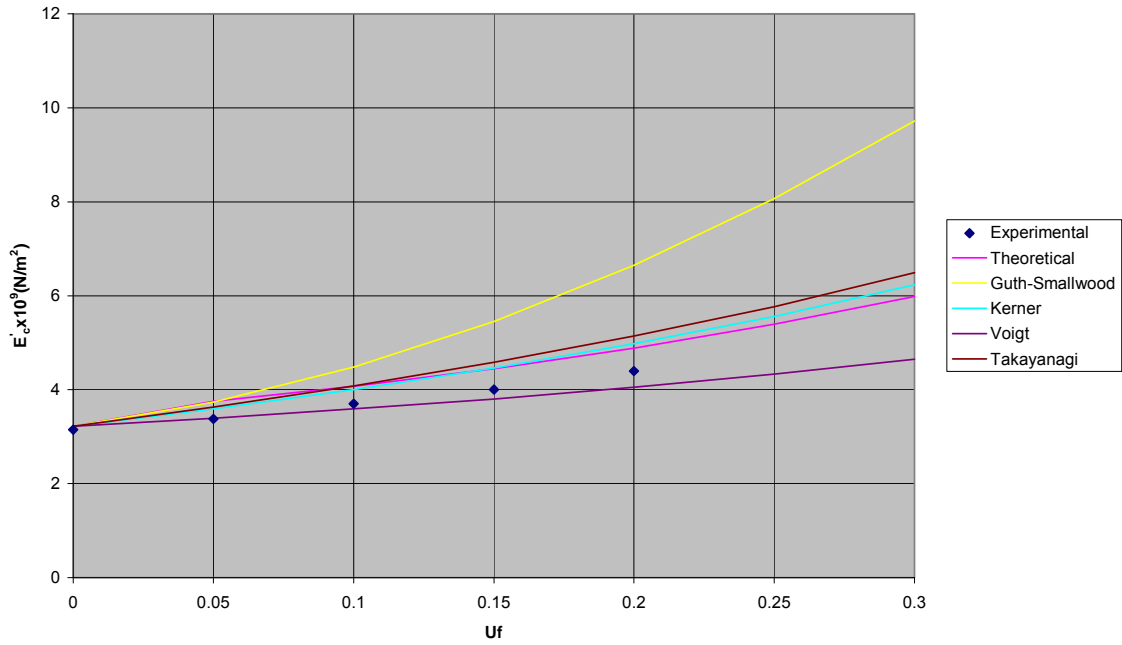
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=20Hz



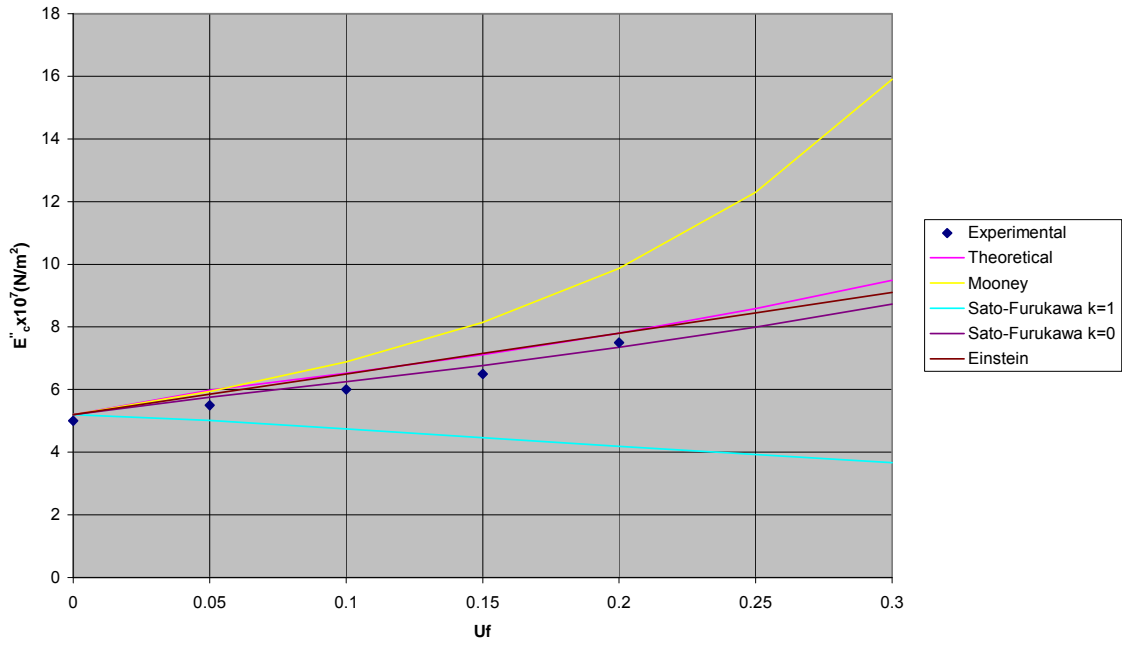
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=50.0Hz



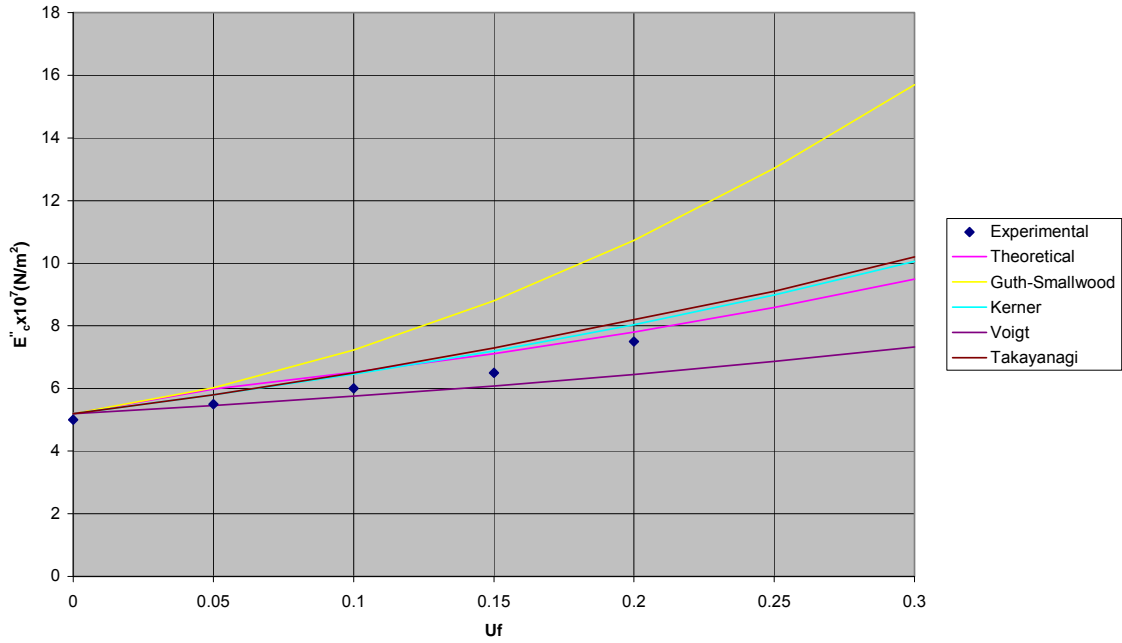
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=50.0Hz



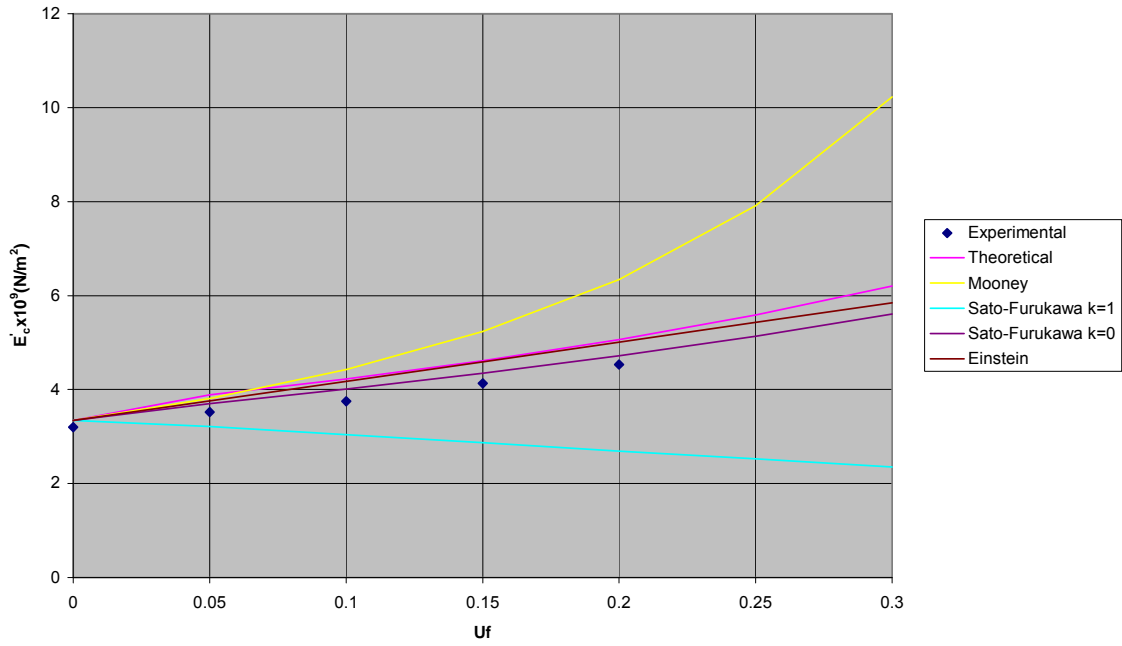
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=50.0Hz



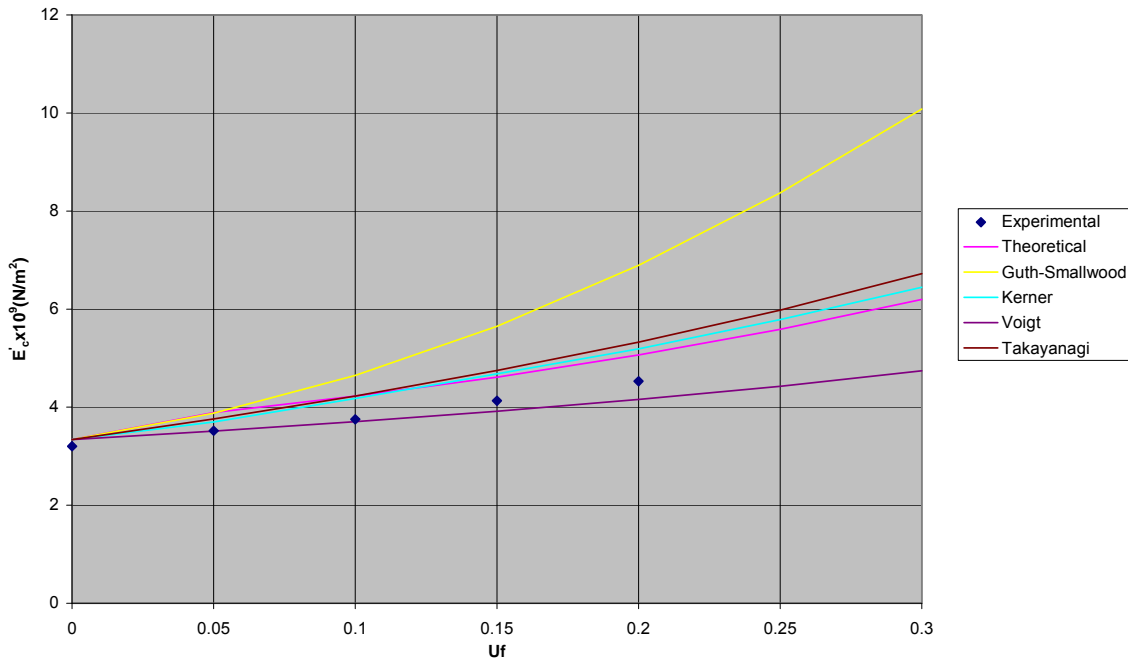
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=50.0Hz



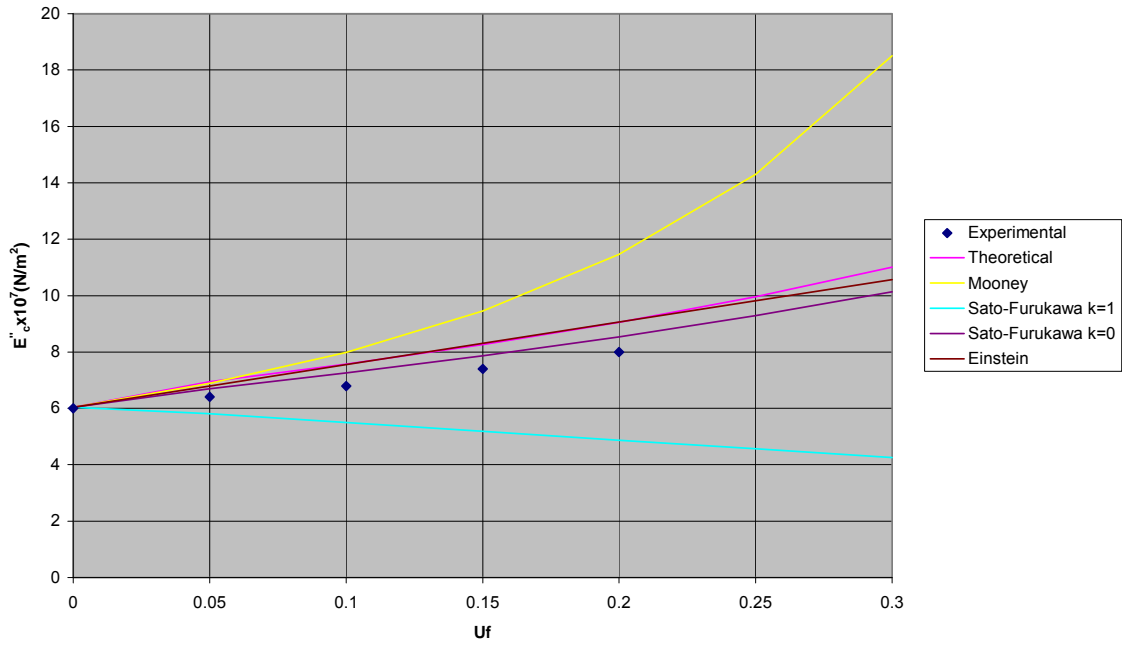
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=100Hz



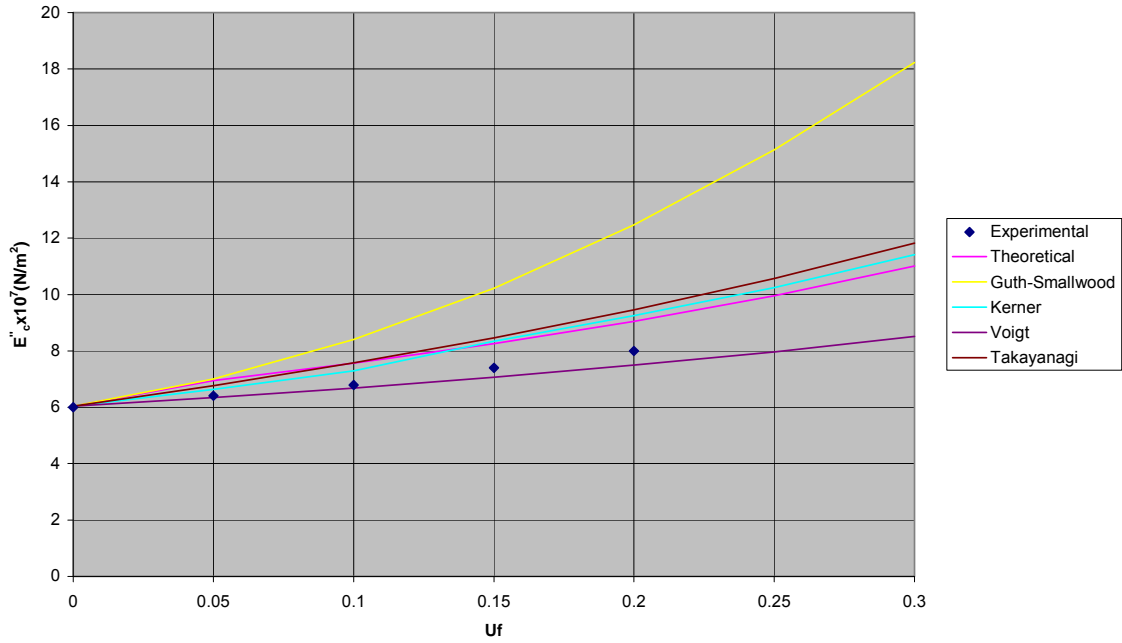
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=100Hz



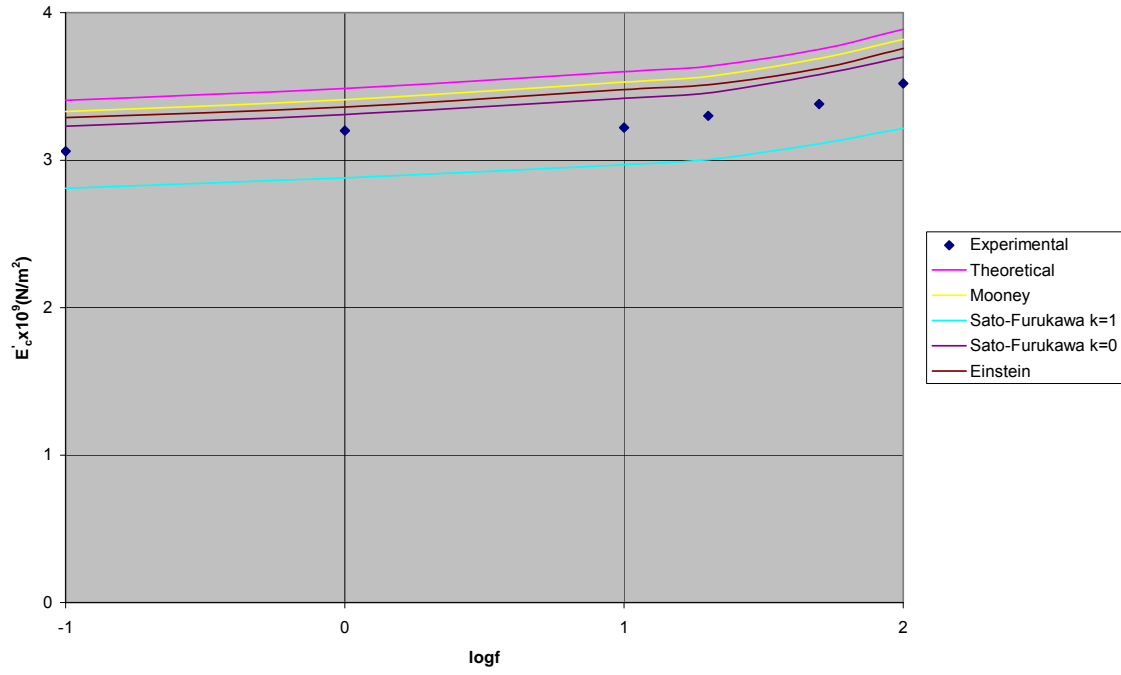
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=100Hz



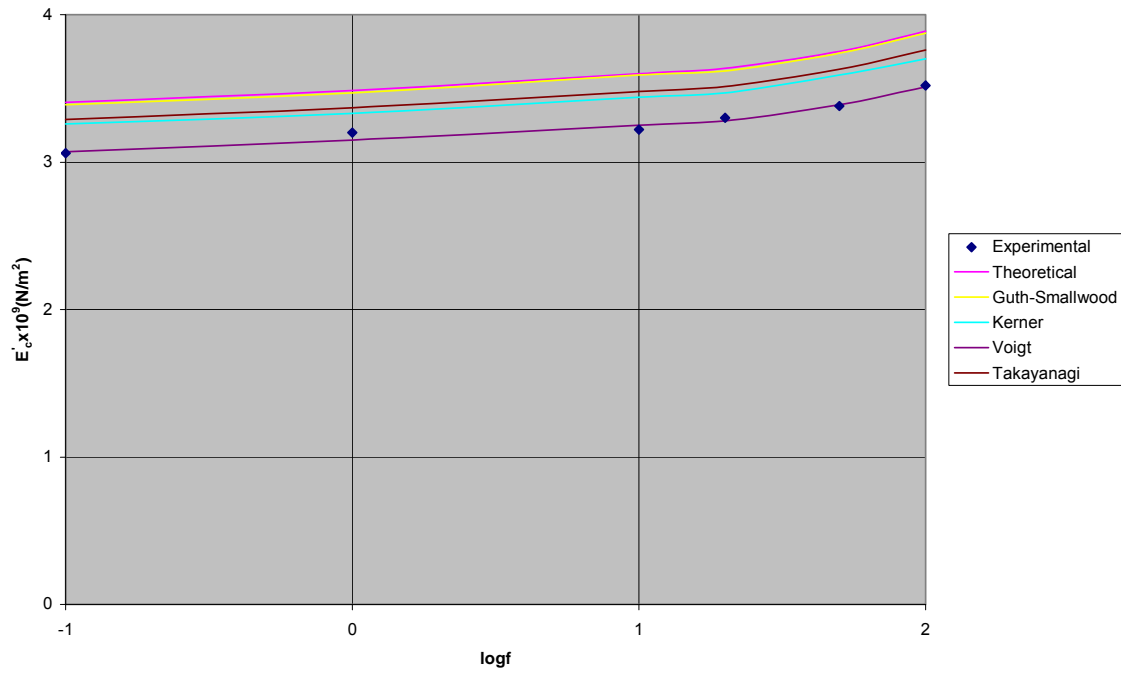
DYNAMIC ELASTIC MODULUS
f=100Hz



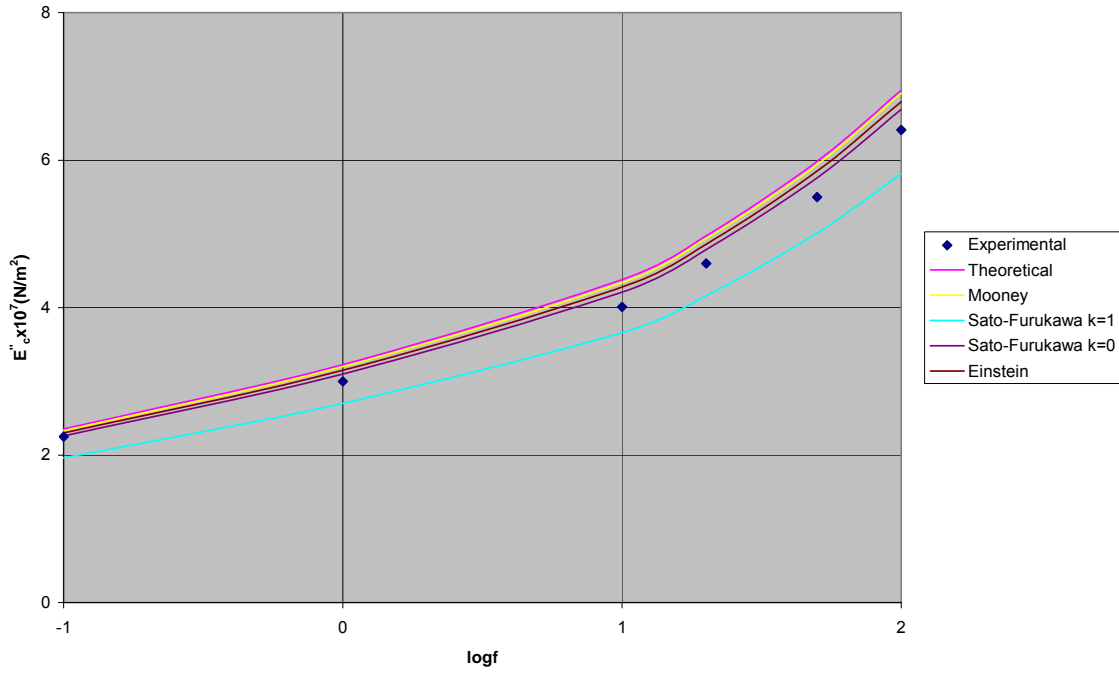
Uf=0.05



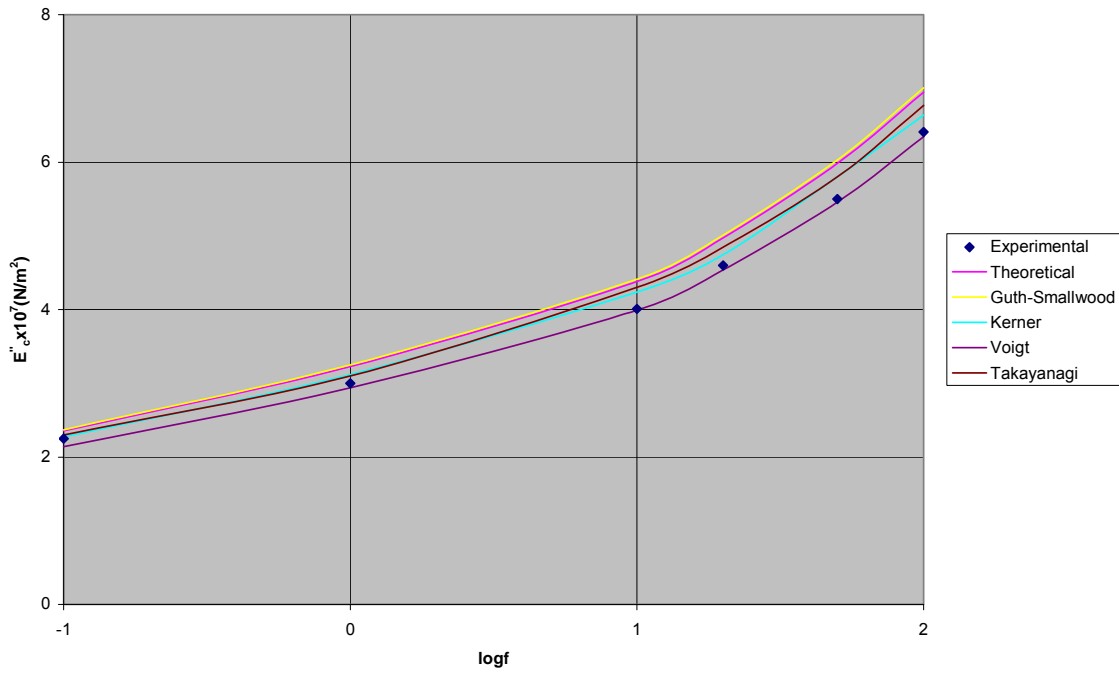
Uf=0.05



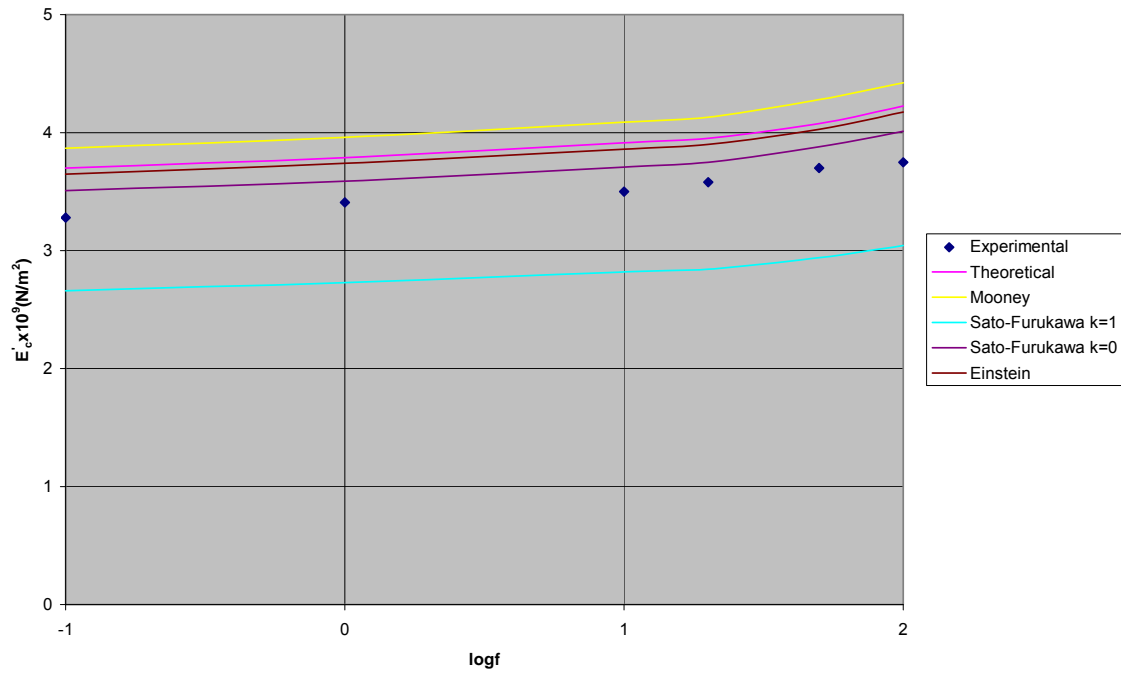
Uf=0.05



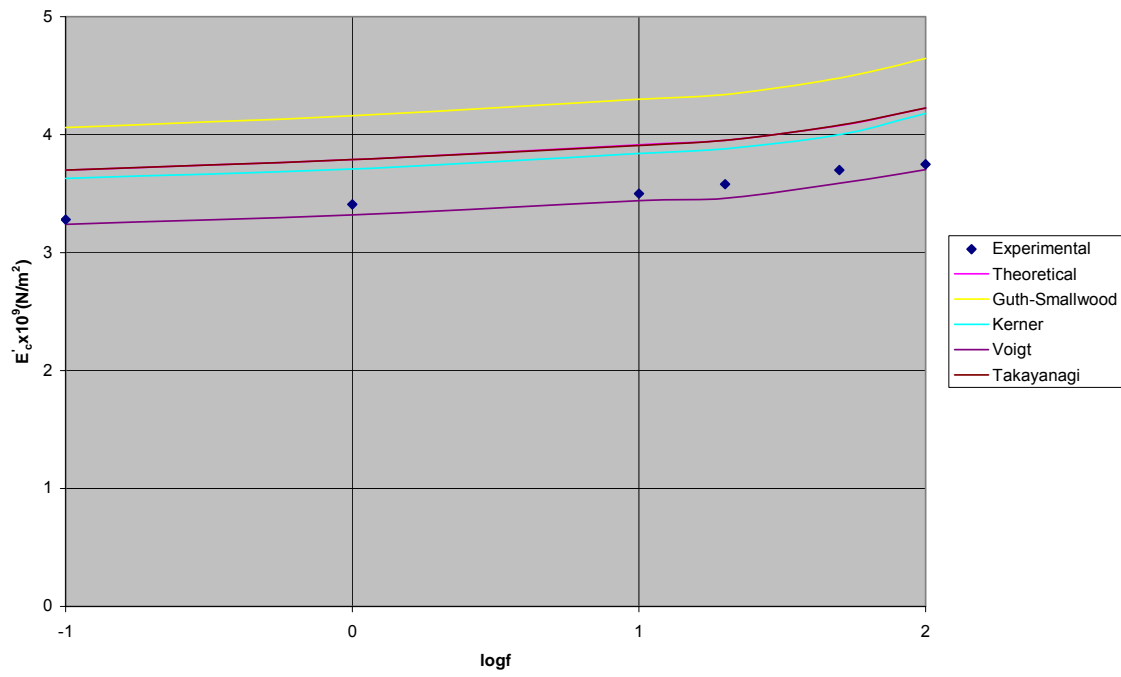
Uf=0.05



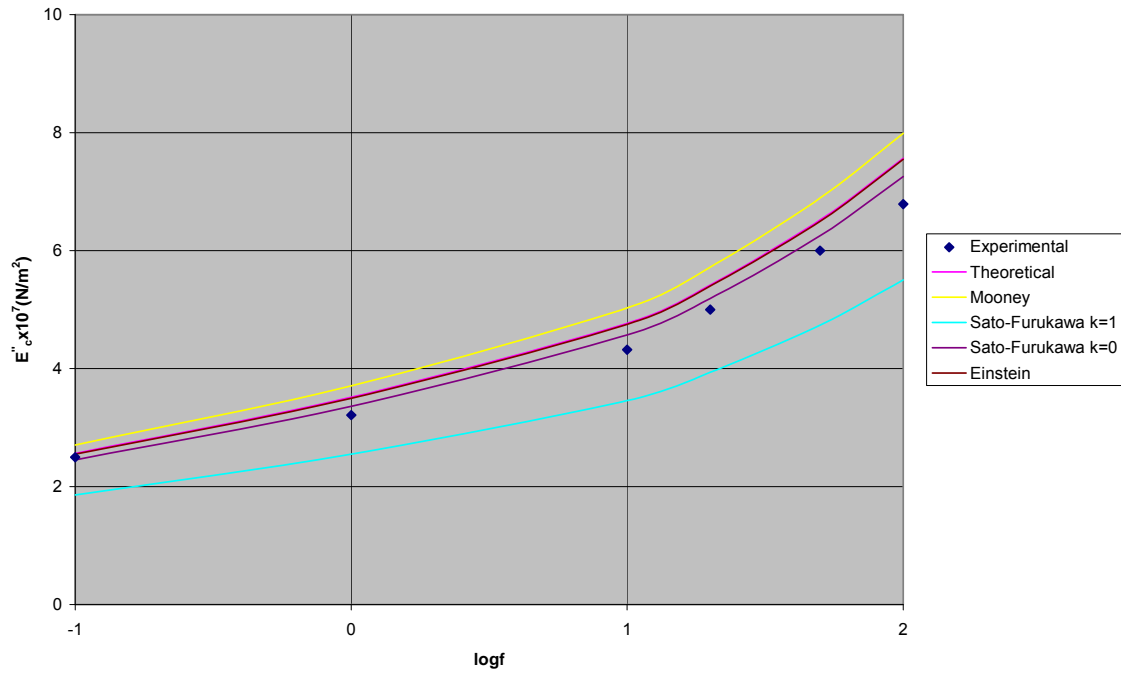
Uf=0.1



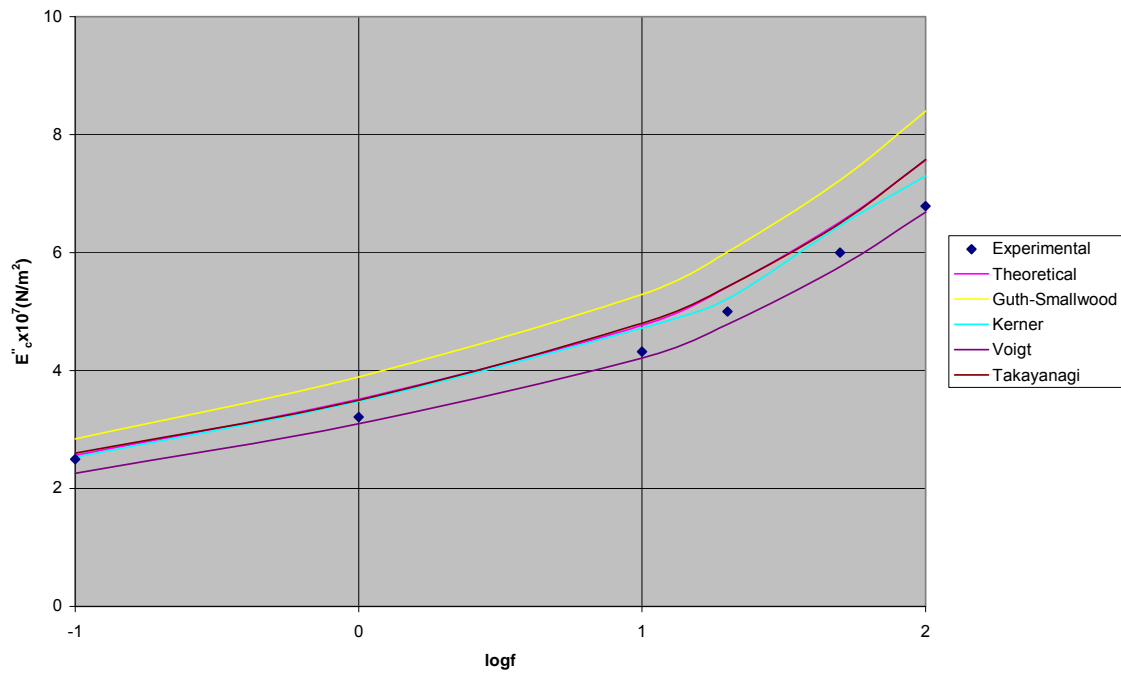
Uf=0.1



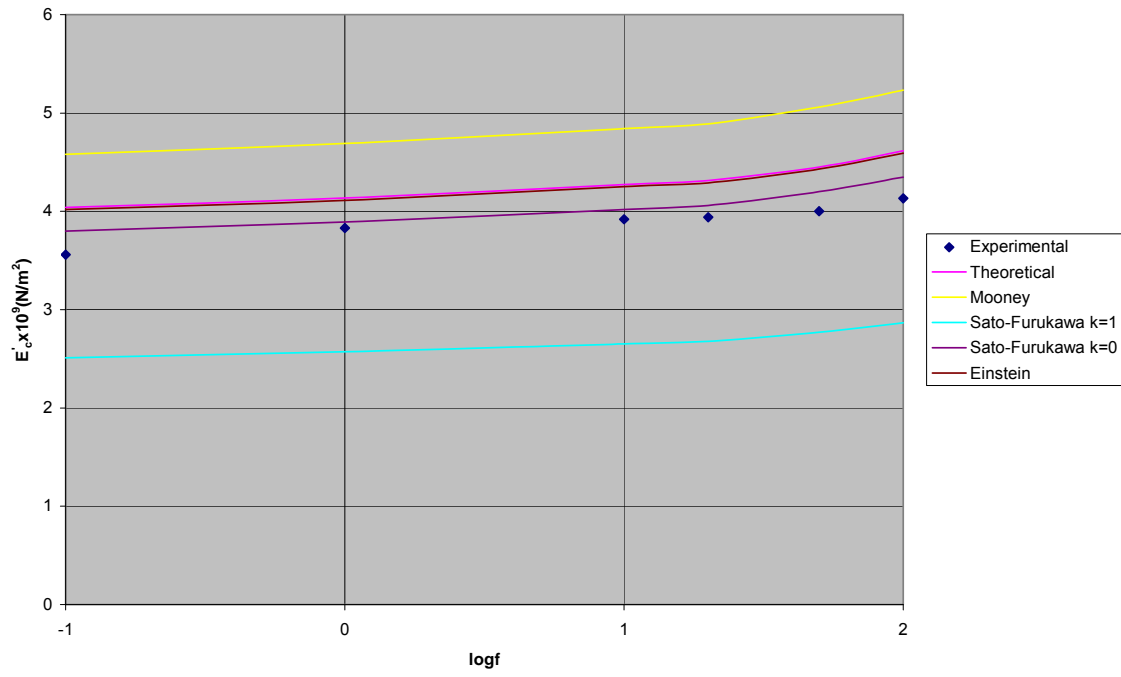
Uf=0.1



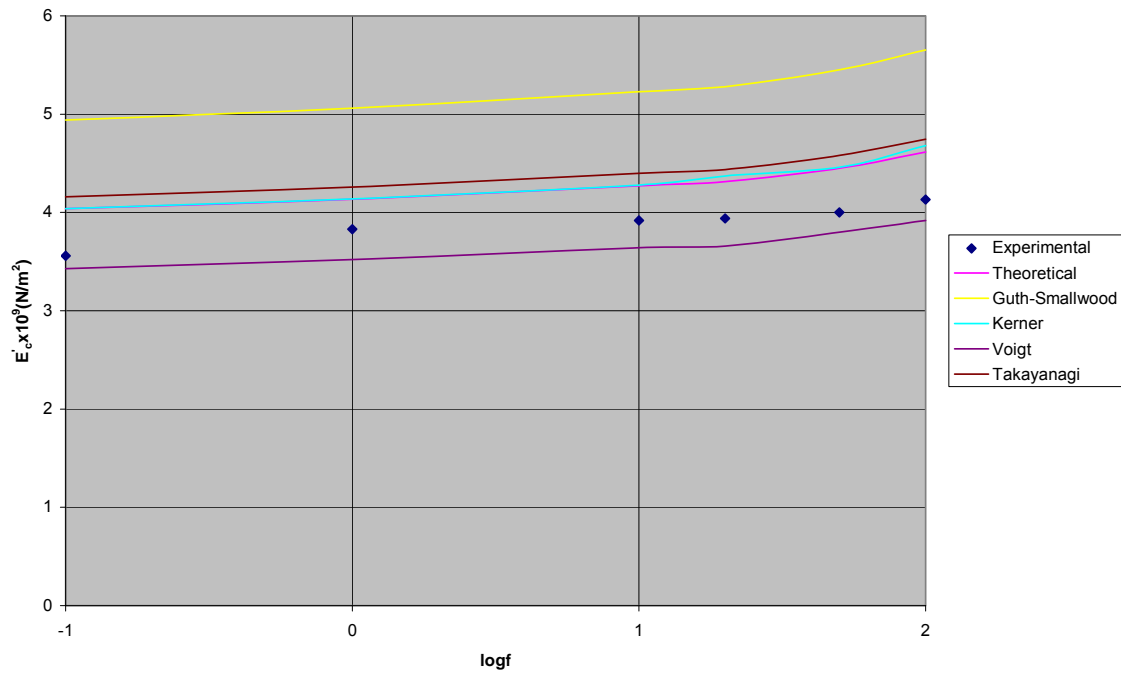
Uf=0.1



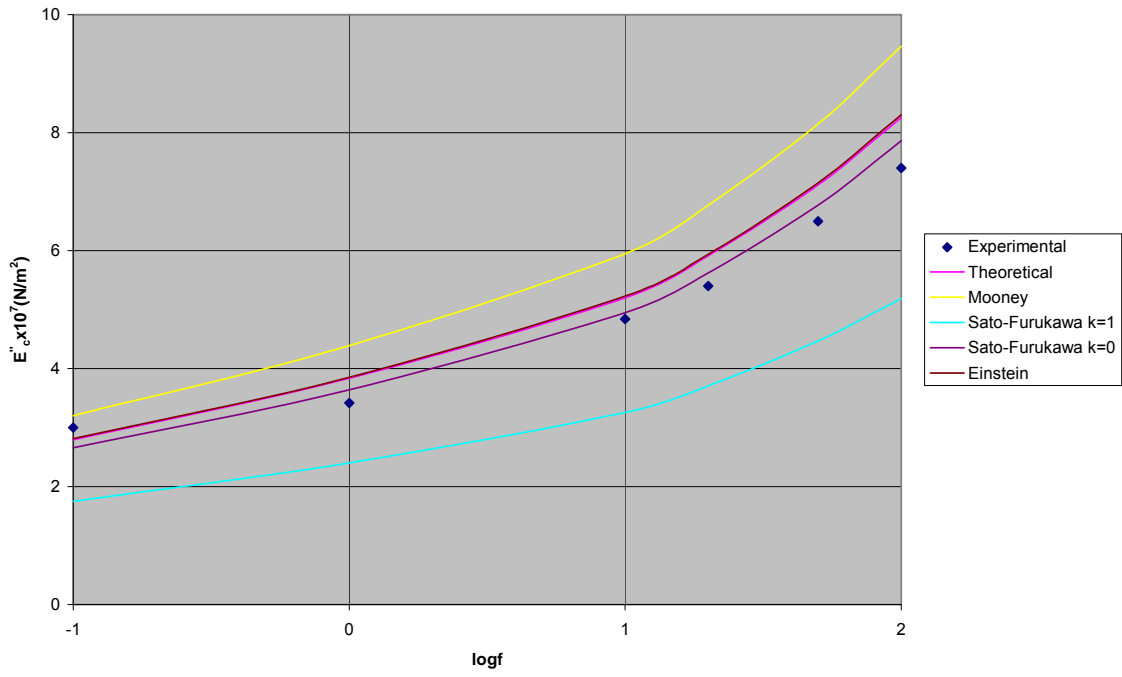
Uf=0.15



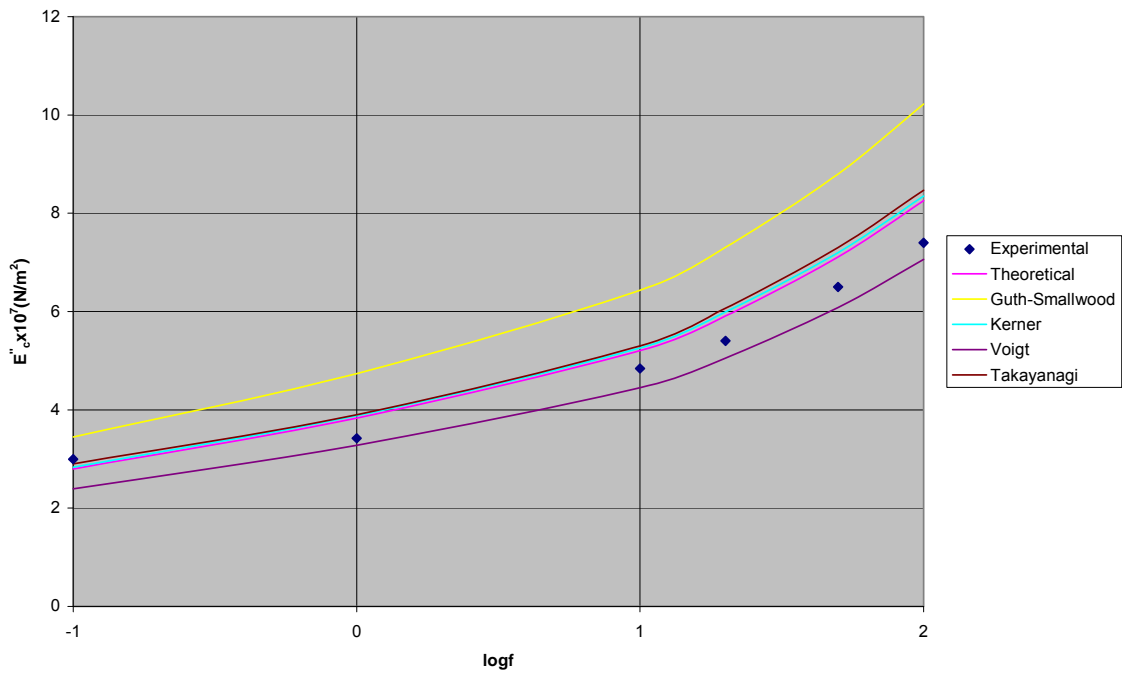
Uf=0.15



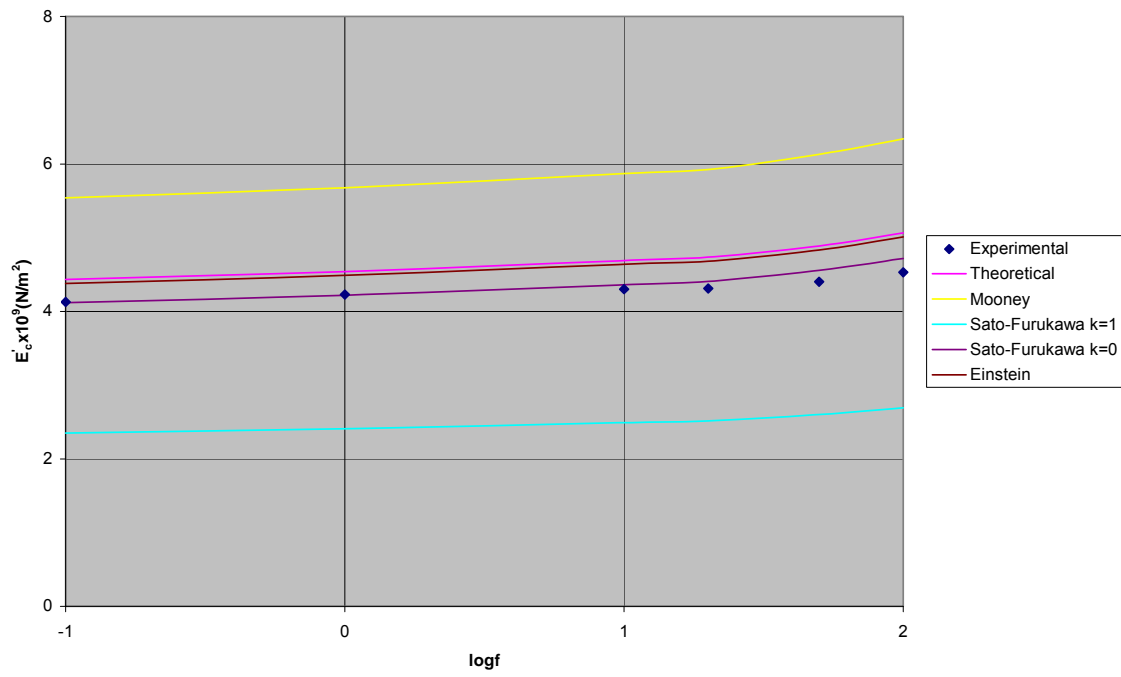
Uf=0.15



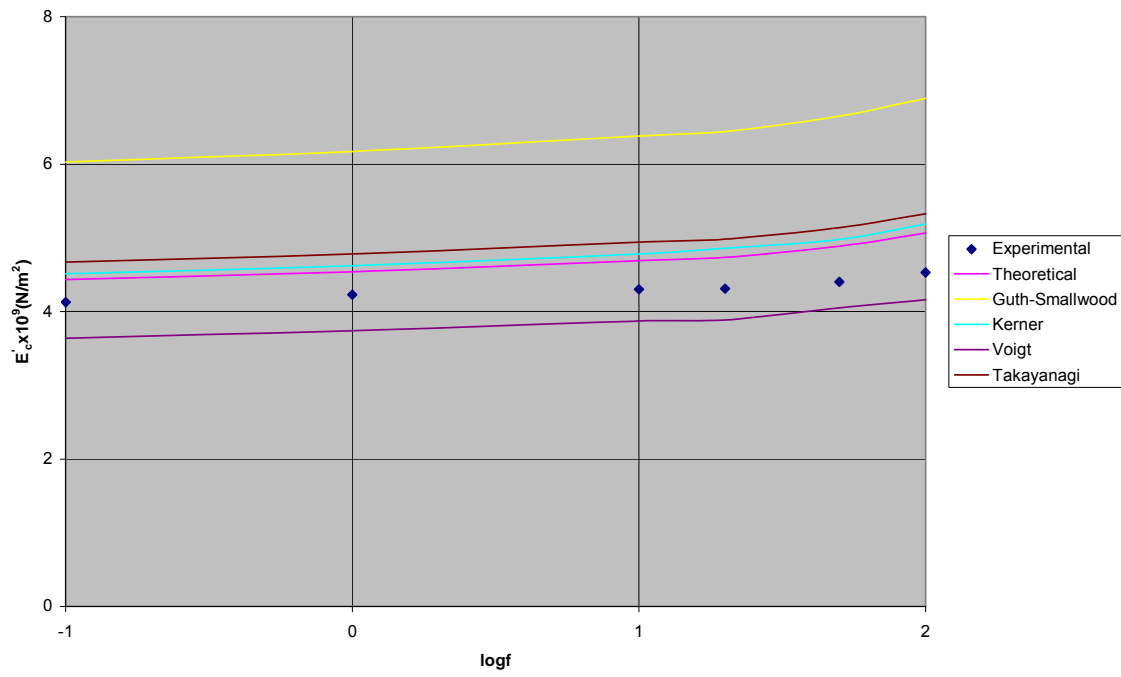
Uf=0.15



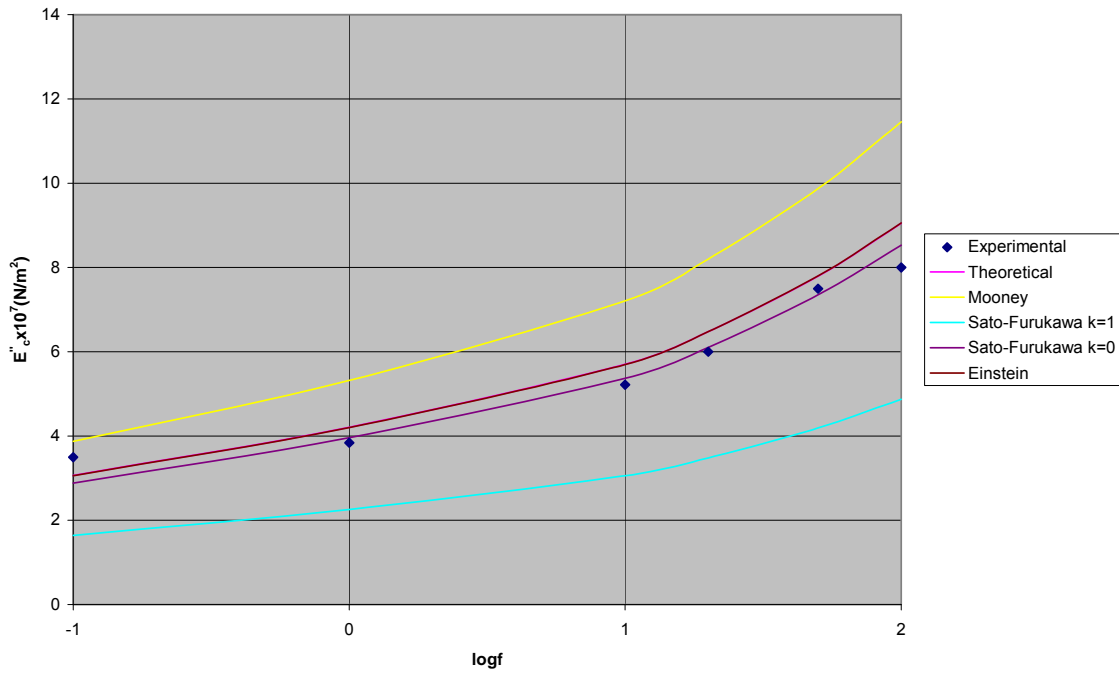
Uf=0.2



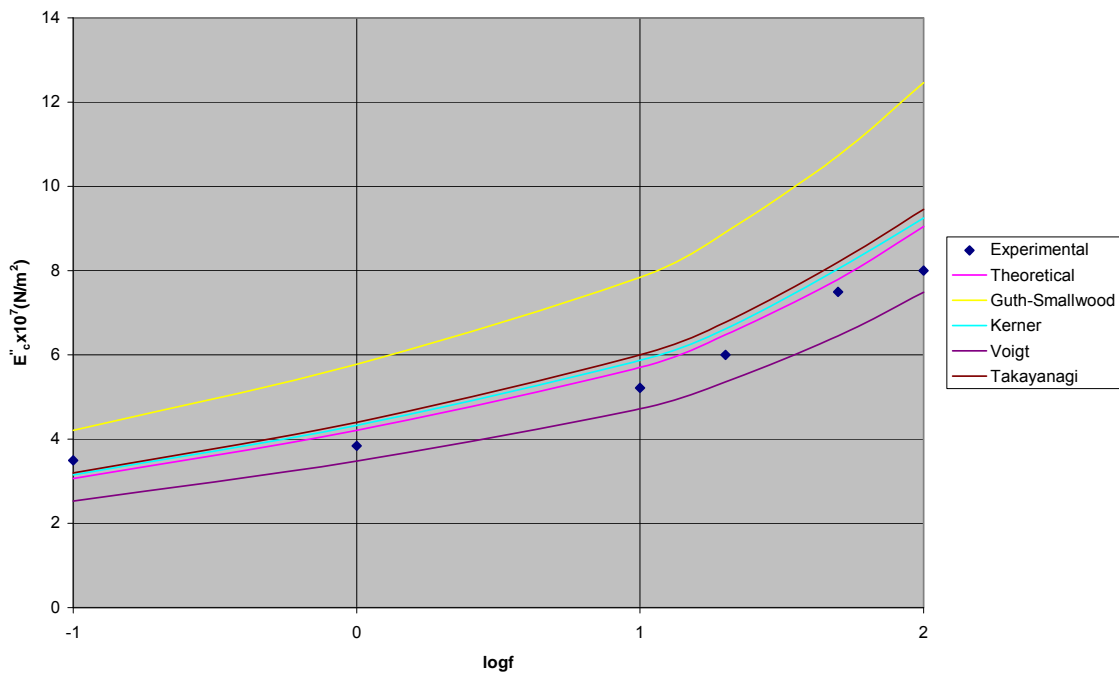
Uf=0.2



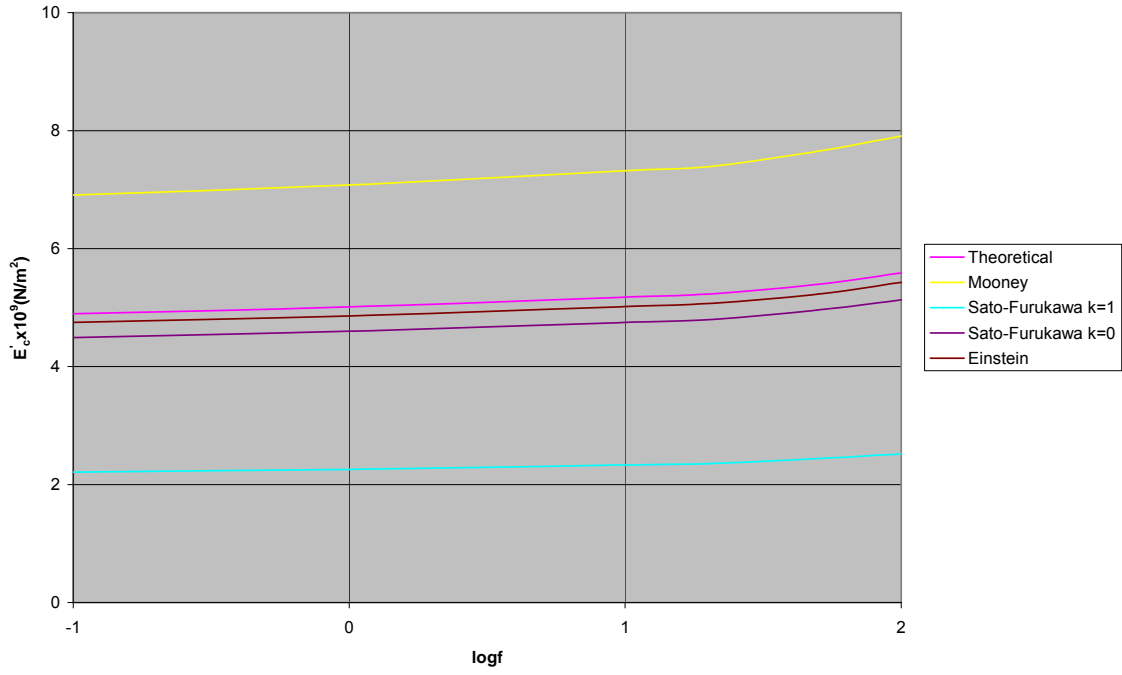
Uf=0.2



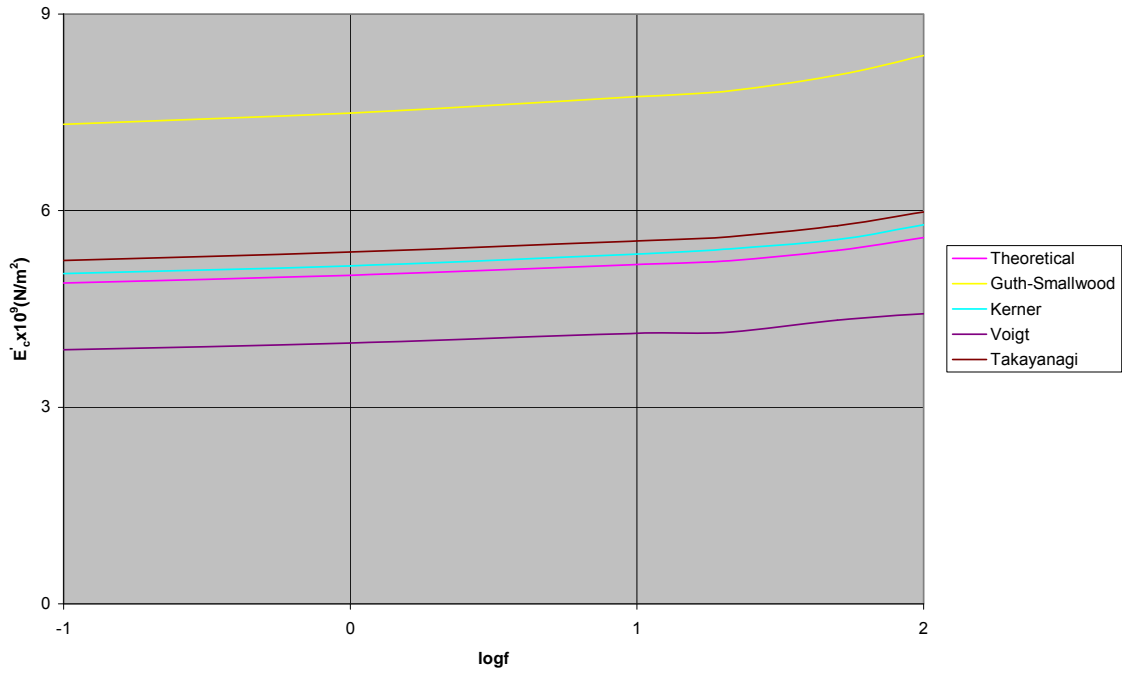
Uf=0.2



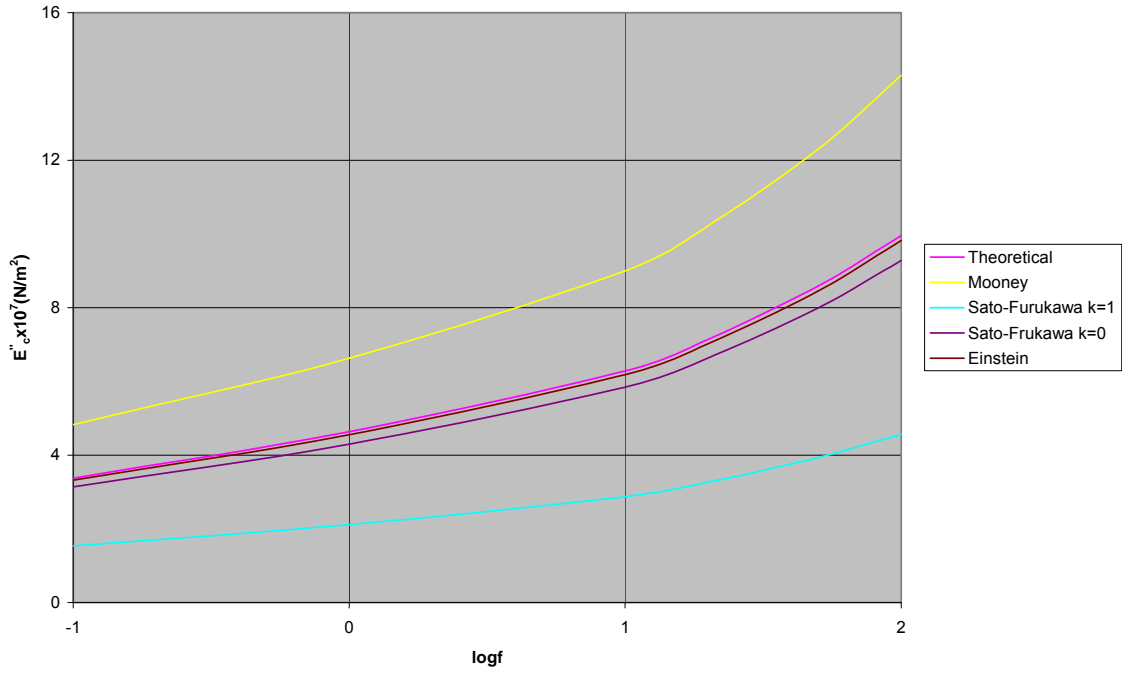
Uf=0.25



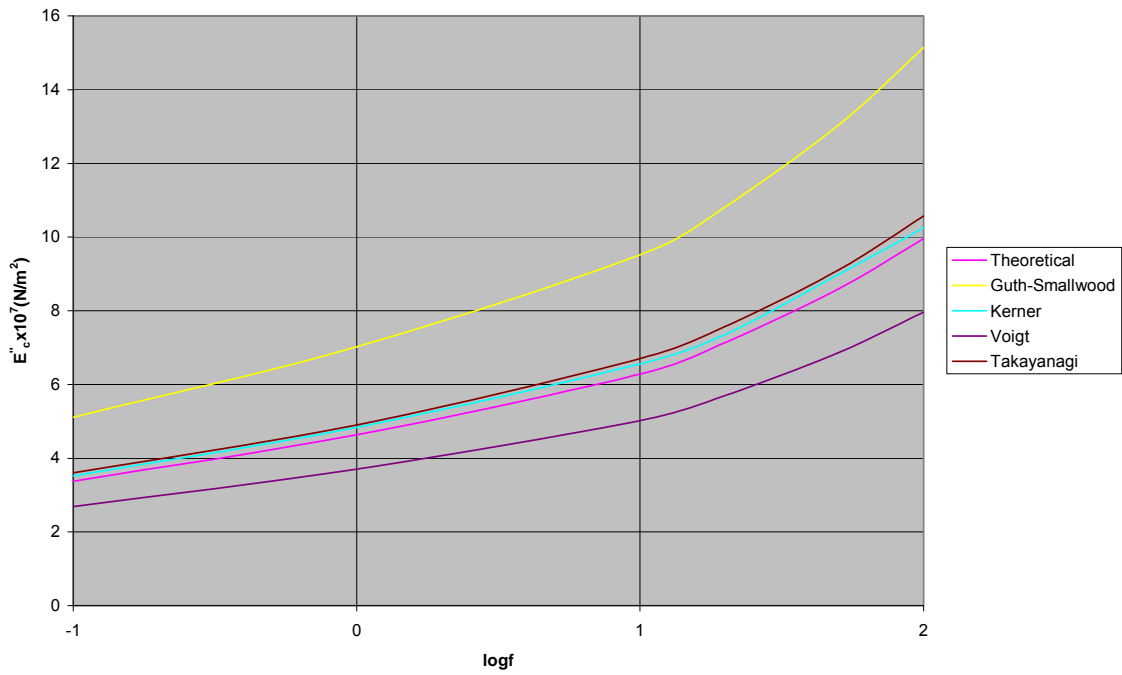
Uf=0.25



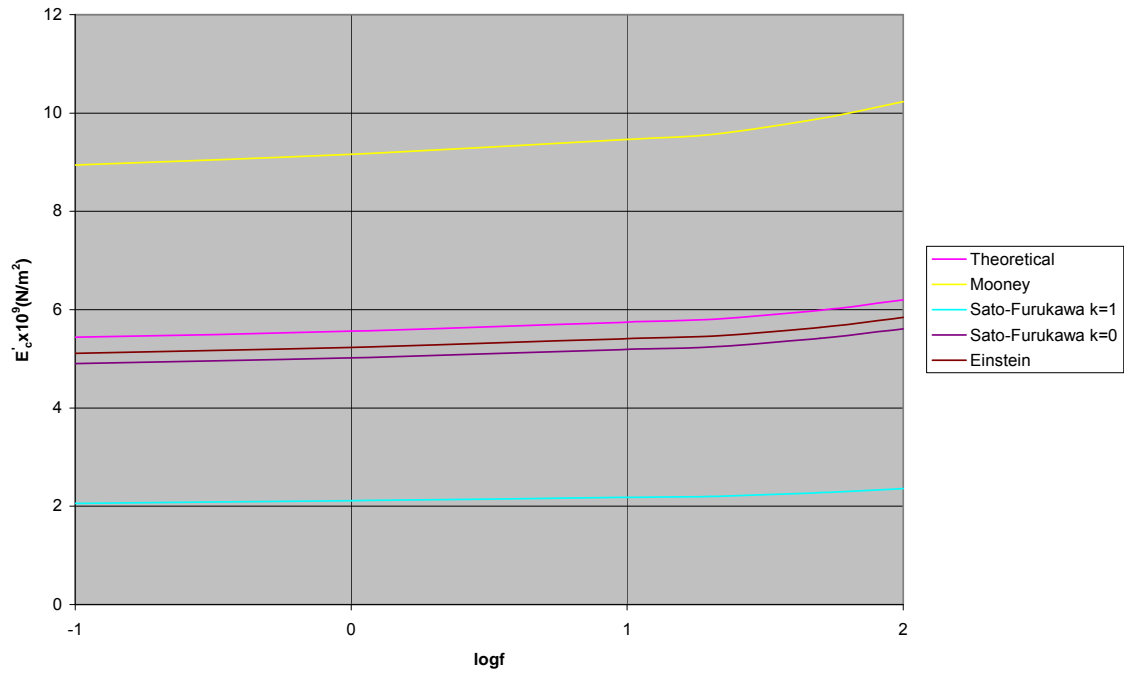
Uf=0.25



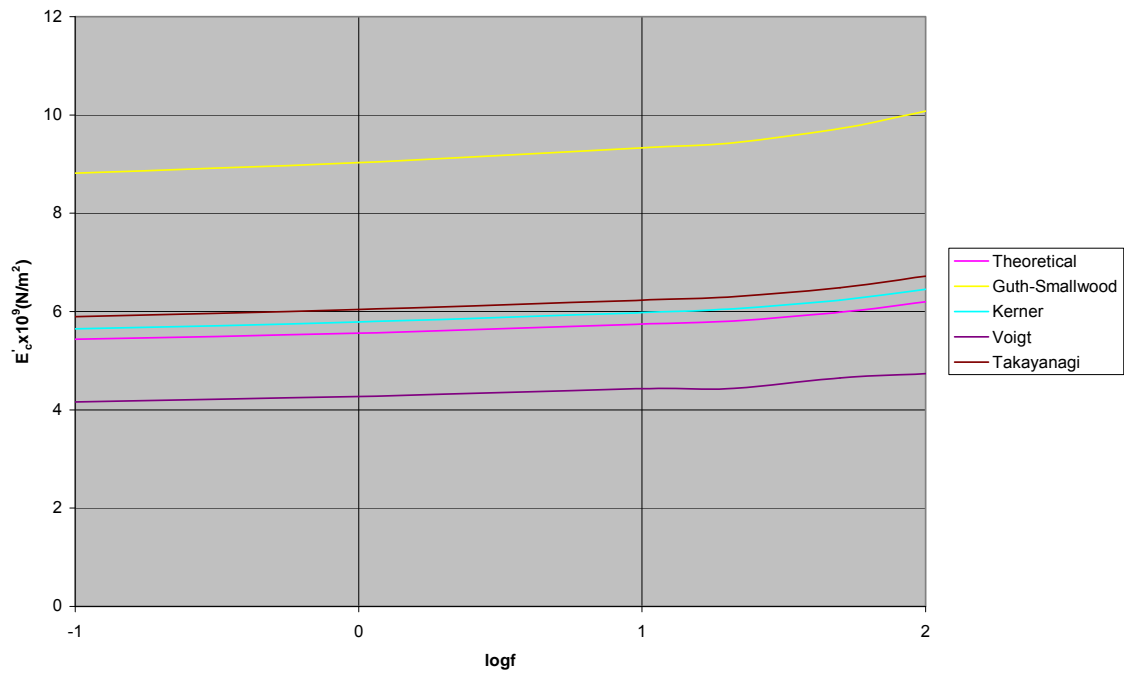
Uf=0.25



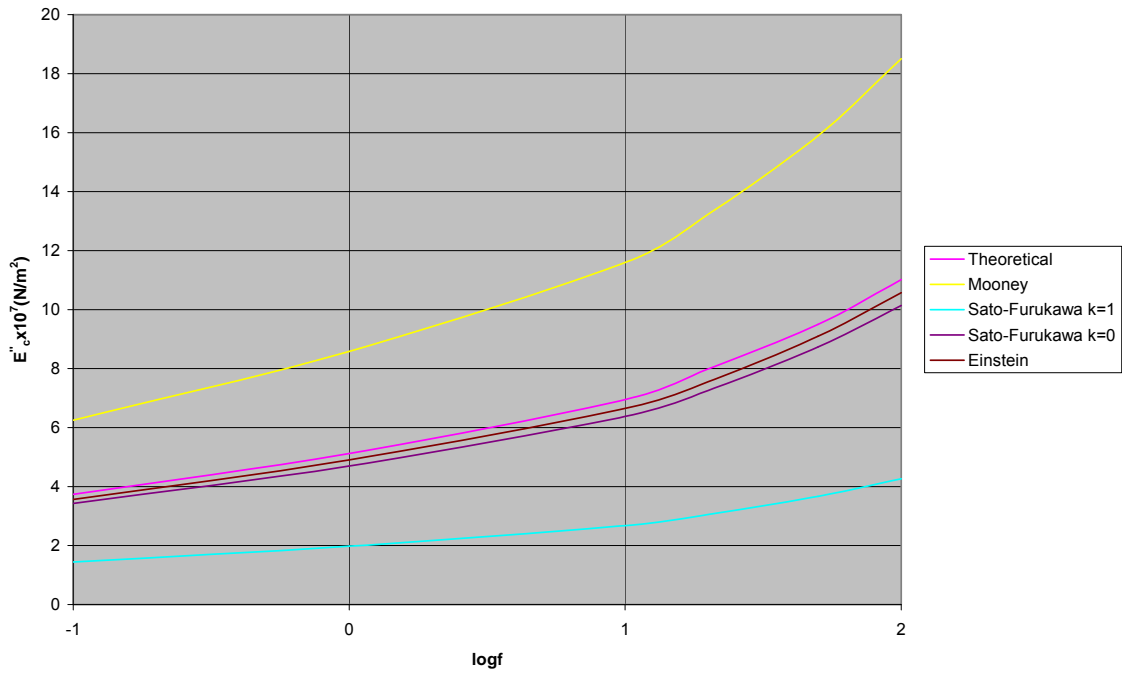
Uf=0.3



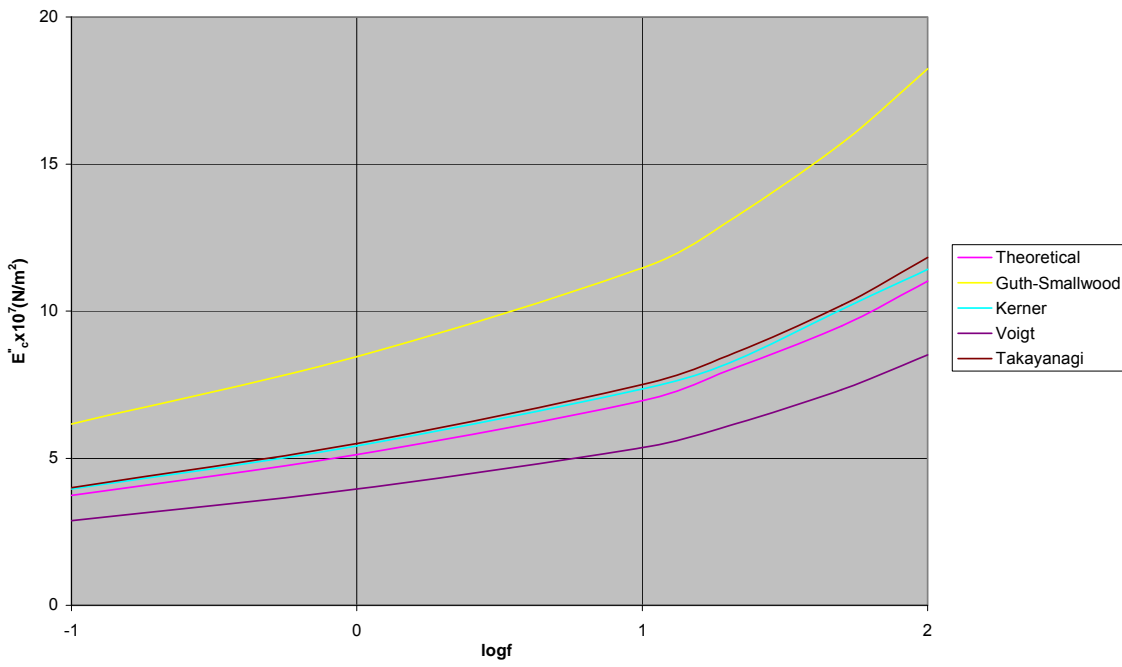
Uf=0.3



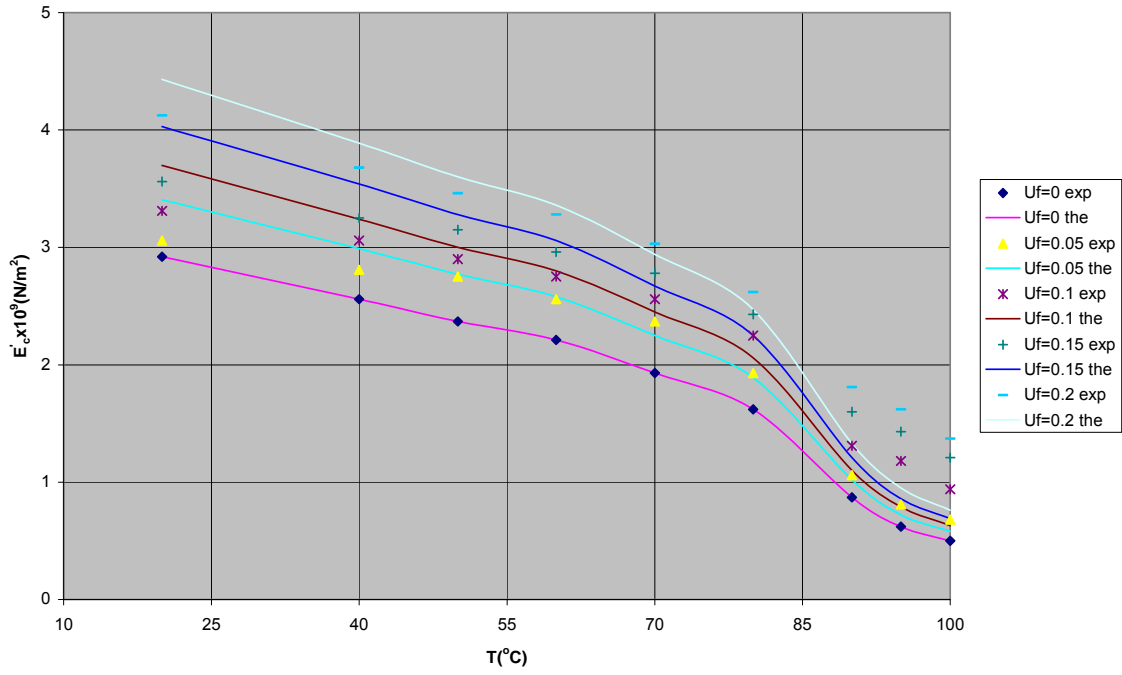
Uf=0.3



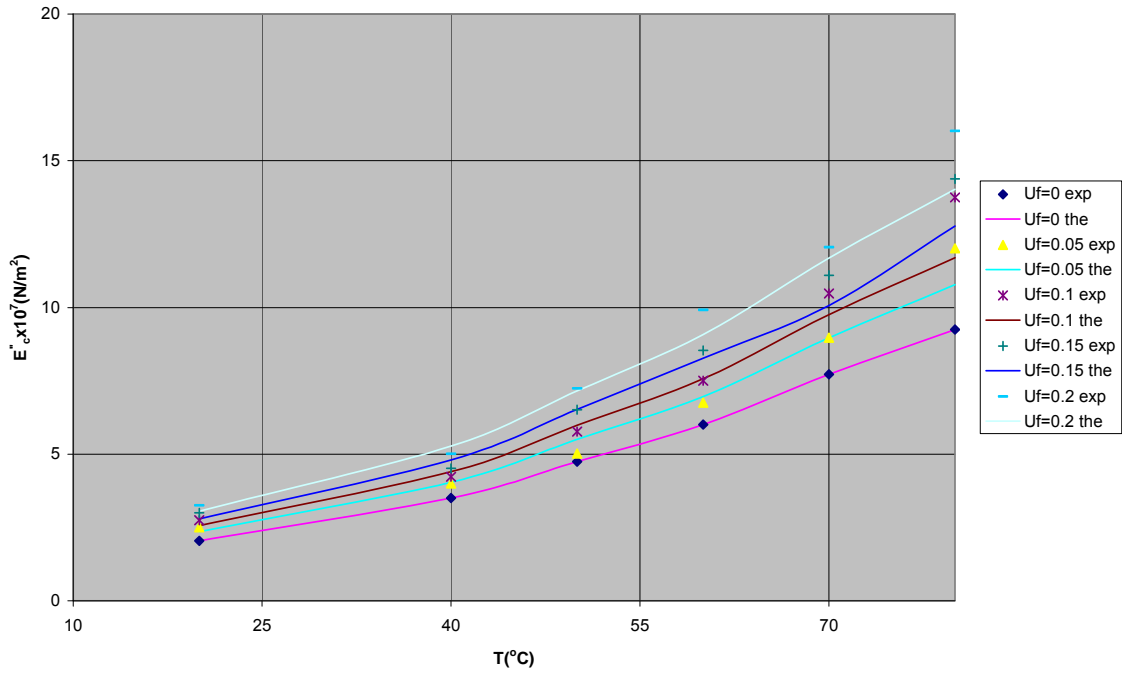
Uf=0.3



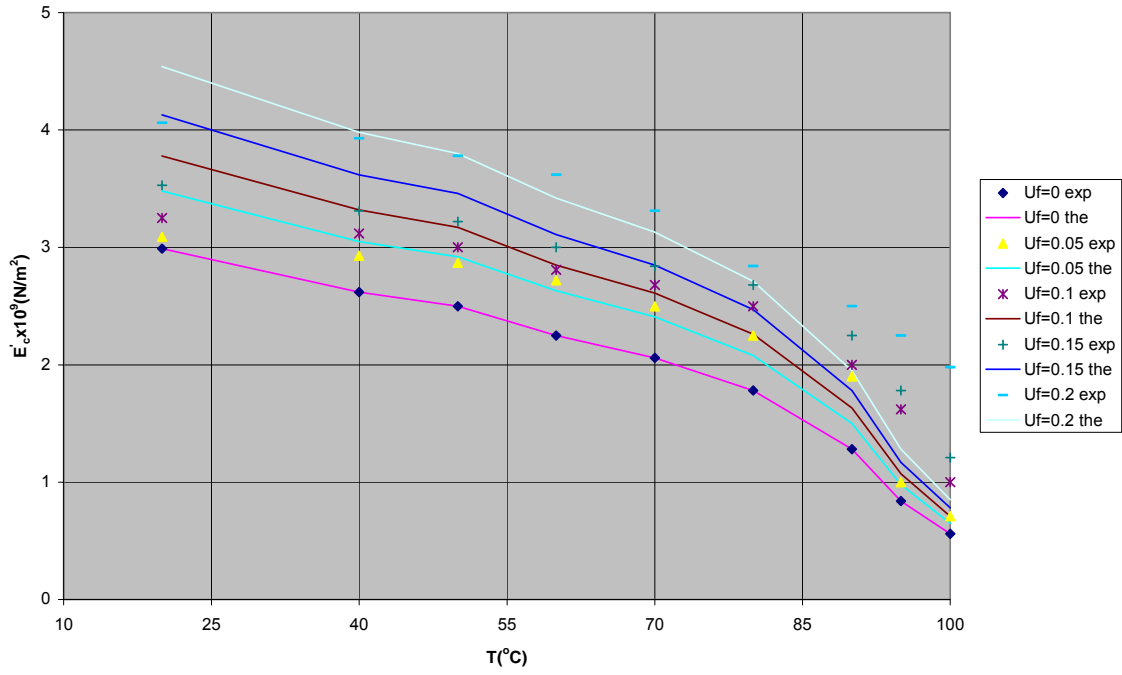
f=0.1Hz



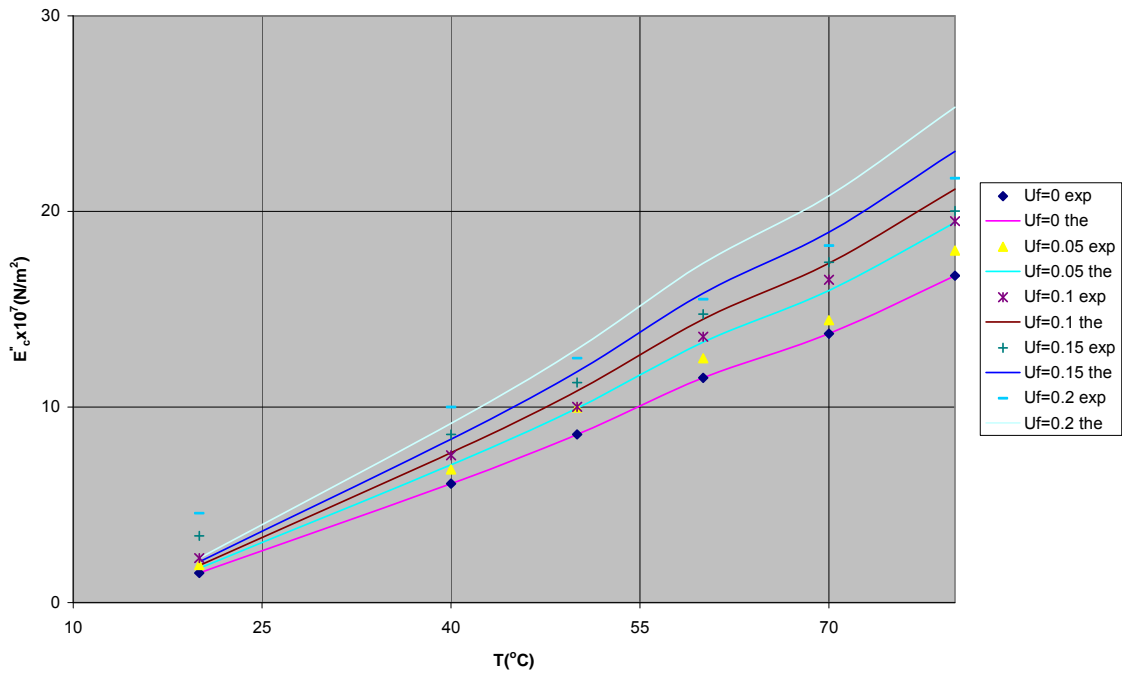
f=0.1Hz



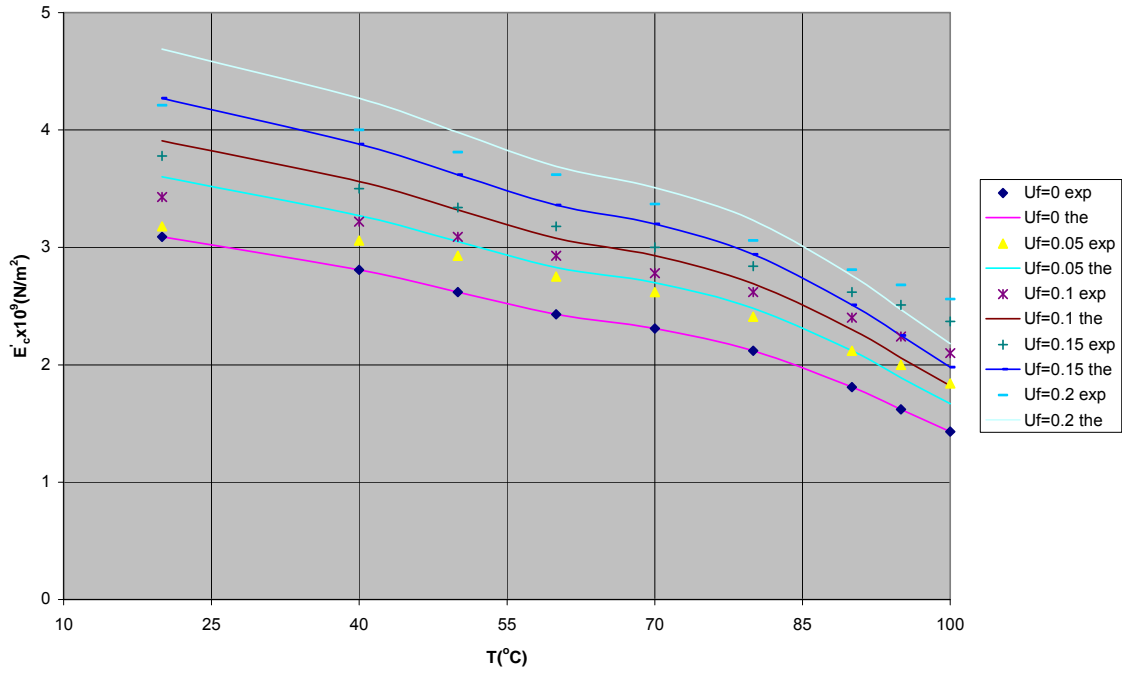
f=1.0Hz



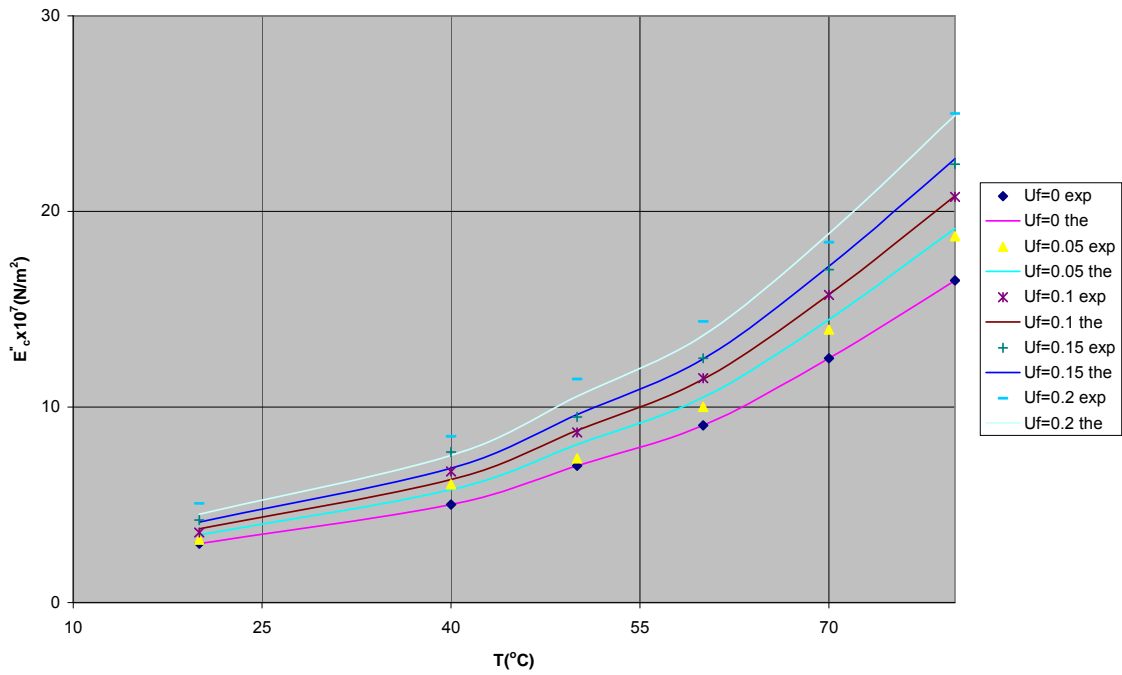
f=1.0Hz



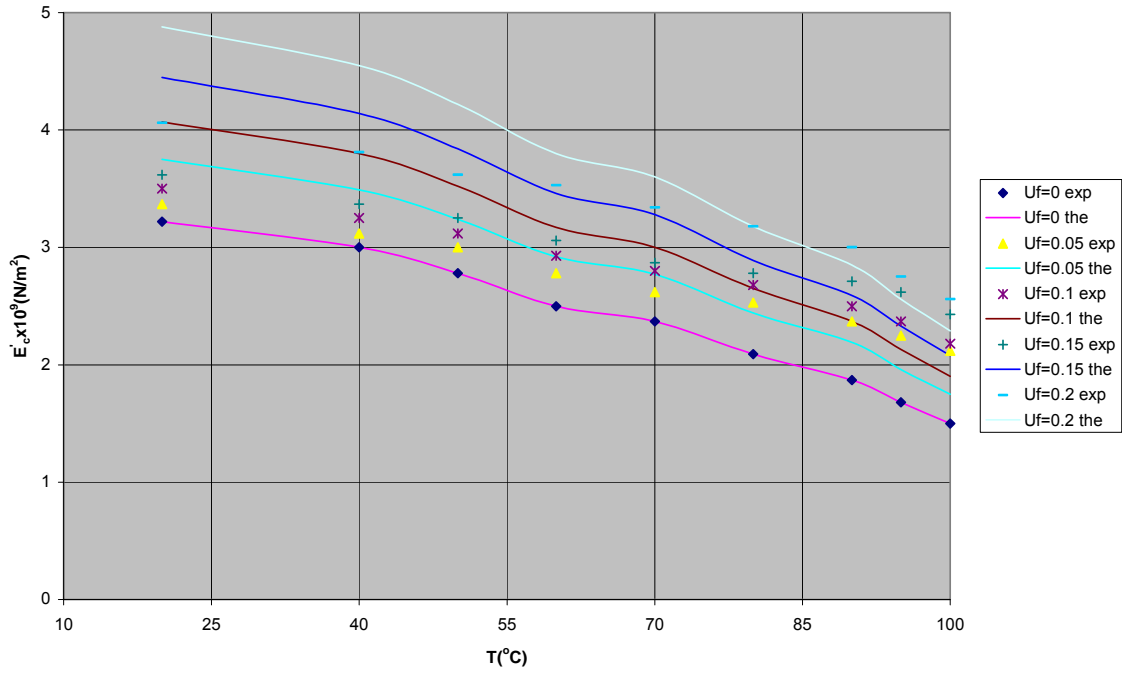
f=10.0Hz



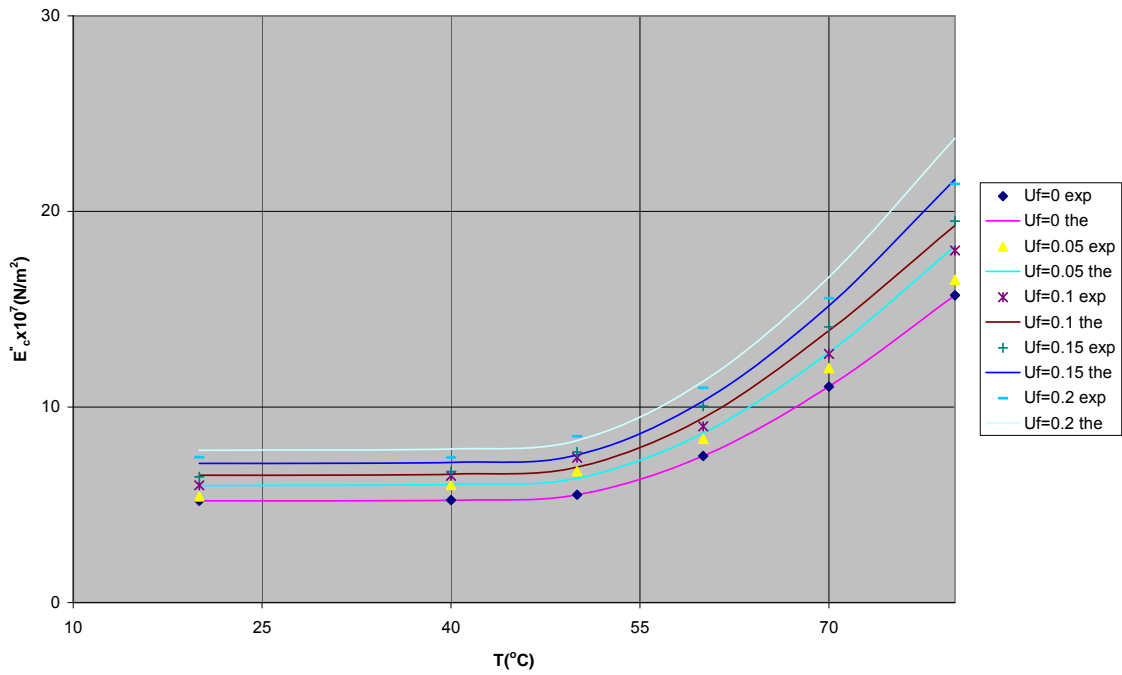
f=10.0Hz

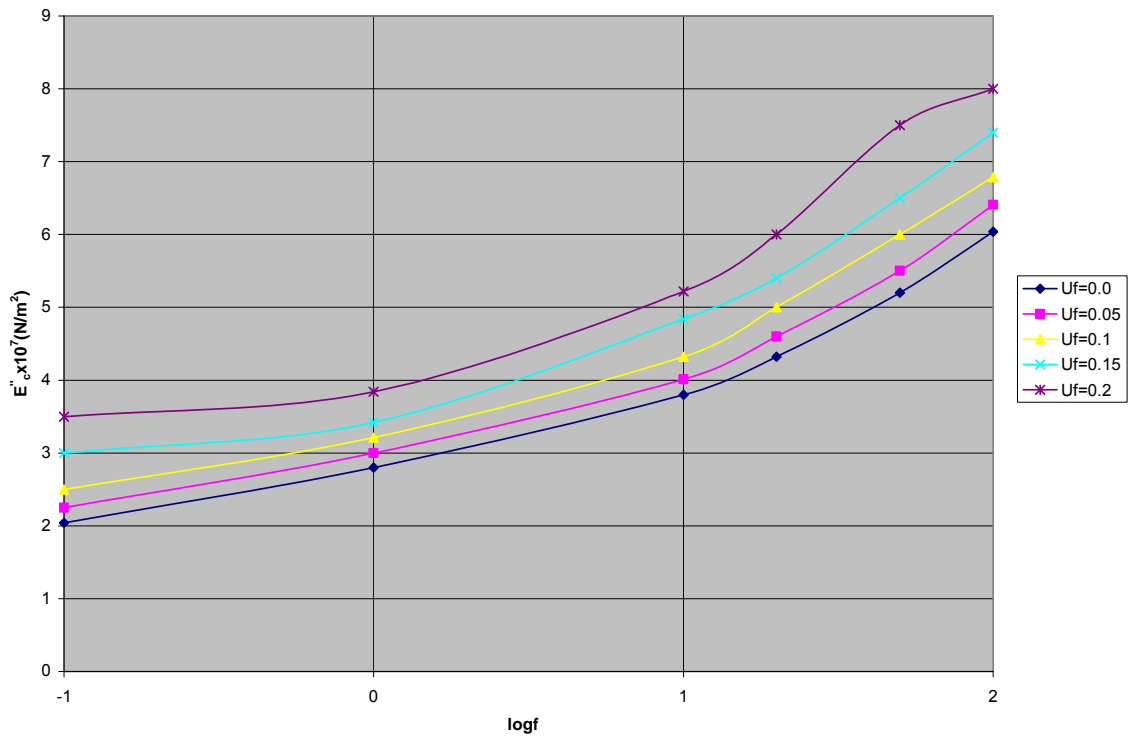
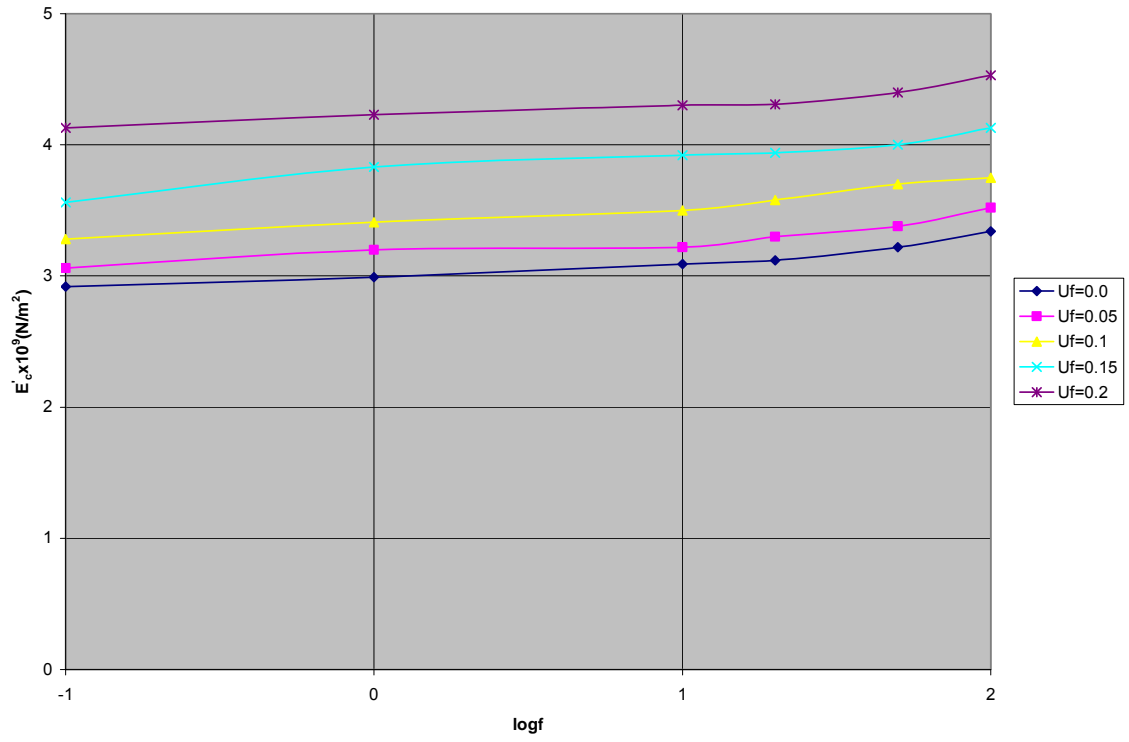


f=50.0Hz



f=50.0Hz





Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας

Πειραματικές τιμές για T=20°C

f=0.1Hz	U _f	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
	E' _c x10 ⁹ (N/m ²)	2.93	3.06	3.28	3.56	4.13
	E'' _c x10 ⁷ (N/m ²)	2	2.25	2.5	3	3.5

f=1.0Hz	U _f	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
	E' _c x10 ⁹ (N/m ²)	2.97	3.2	3.41	3.83	4.23
	E'' _c x10 ⁷ (N/m ²)	2.8	3.0	3.21	3.42	3.84

f=10.0Hz	U _f	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
	E' _c x10 ⁹ (N/m ²)	3	3.22	3.5	3.92	4.3
	E'' _c x10 ⁷ (N/m ²)	3.8	4.01	4.32	4.84	5.22

f=20.0Hz	U _f	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
	E' _c x10 ⁹ (N/m ²)	3.04	3.3	3.58	3.94	4.31
	E'' _c x10 ⁷ (N/m ²)	4.4	4.6	5.0	5.4	6.0

f=50.0Hz	U _f	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
	E' _c x10 ⁹ (N/m ²)	3.15	3.38	3.7	4.0	4.4
	E'' _c x10 ⁷ (N/m ²)	5.0	5.5	6.0	6.5	7.5

f=100Hz	U _f	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
	E' _c x10 ⁹ (N/m ²)	3.2	3.52	3.75	4.13	4.53
	E'' _c x10 ⁷ (N/m ²)	6.0	6.41	6.79	7.4	8.0

f=0.1Hz

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	2.93	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92
0.05	3.06	3.405	3.33	2.81	3.23	3.29	3.39	3.26	3.07	3.29
0.1	3.28	3.7	3.87	2.66	3.51	3.65	4.06	3.63	3.24	3.7
0.15	3.56	4.039	4.58	2.51	3.8	4.02	4.94	4.04	3.43	4.16
0.2	4.13	4.436	5.54	2.35	4.12	4.38	6.03	4.51	3.64	4.67
0.25		4.897	6.91	2.21	4.49	4.75	7.32	5.04	3.88	5.24
0.3		5.435	8.94	2.06	4.9	5.11	8.82	5.65	4.16	5.9

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

Uf	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
0	2	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04
0.05	2.25	2.353	2.33	1.96	2.26	2.3	2.37	2.27	2.14	2.3
0.1	2.5	2.561	2.7	1.86	2.45	2.55	2.84	2.53	2.26	2.6
0.15	3	2.795	3.2	1.75	2.66	2.81	3.45	2.83	2.39	2.9
0.2	3.5	3.065	3.87	1.64	2.88	3.06	4.21	3.15	2.53	3.2
0.25		3.377	4.83	1.54	3.14	3.32	5.11	3.52	2.69	3.6
0.3		3.736	6.25	1.44	3.43	3.57	6.16	3.95	2.88	4

f=1.0Hz

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

Uf	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
0	2.97	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99
0.05	3.2	3.486	3.41	2.88	3.31	3.36	3.47	3.33	3.15	3.37
0.1	3.41	3.788	3.96	2.73	3.59	3.74	4.16	3.71	3.32	3.79
0.15	3.83	4.135	4.69	2.57	3.89	4.11	5.06	4.14	3.52	4.26
0.2	4.23	4.541	5.68	2.41	4.22	4.49	6.17	4.62	3.74	4.78
0.25		5.013	7.08	2.26	4.6	4.86	7.49	5.16	3.98	5.37
0.3		5.563	9.16	2.11	5.02	5.23	9.03	5.79	4.27	6.04

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

Uf	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
0	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
0.05	3	3.228	3.2	2.7	3.1	3.15	3.25	3.12	2.94	3.1
0.1	3.21	3.514	3.71	2.55	3.36	3.5	3.89	3.48	3.1	3.5
0.15	3.42	3.835	4.39	2.4	3.64	3.85	4.74	3.88	3.28	3.9
0.2	3.84	4.205	5.32	2.26	3.96	4.2	5.78	4.33	3.48	4.4
0.25		4.632	6.63	2.11	4.3	4.55	7.02	4.84	3.7	4.9
0.3		5.125	8.58	1.98	4.7	4.9	8.45	5.42	3.95	5.5

f=10.0Hz

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

Uf	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
0	3	3.09	3.09	3.09	3.09	3.09	3.09	3.09	3.09	3.09
0.05	3.22	3.601	3.53	2.97	3.42	3.48	3.59	3.44	3.25	3.48
0.1	3.5	3.913	4.09	2.82	3.71	3.86	4.3	3.84	3.44	3.91
0.15	3.92	4.272	4.84	2.65	4.02	4.25	5.23	4.28	3.64	4.4
0.2	4.3	4.691	5.87	2.49	4.36	4.64	6.38	4.78	3.87	4.94
0.25		5.179	7.32	2.33	4.75	5.02	7.74	5.34	4.13	5.54
0.3		5.746	9.46	2.18	5.19	5.41	9.33	5.98	4.43	6.23

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

Uf	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
0	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8
0.05	4.01	4.378	4.34	3.66	4.21	4.28	4.41	4.24	3.99	4.3
0.1	4.32	4.767	5.03	3.46	4.57	4.75	5.29	4.72	4.21	4.8
0.15	4.84	5.202	5.95	3.26	4.95	5.23	6.43	5.26	4.45	5.3
0.2	5.22	5.703	7.21	3.06	5.37	5.7	7.84	5.87	4.72	6
0.25		6.281	9	2.87	5.84	6.18	9.52	6.56	5.02	6.7
0.3		6.948	11.6	2.68	6.38	6.65	11.47	7.35	5.36	7.5

f=20.0Hz

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	3.04	3.12	3.12	3.12	3.12	3.12	3.12	3.12	3.12	3.12
0.05	3.3	3.636	3.561	3.003	3.456	3.51	3.619	3.47	3.281	3.514
0.1	3.58	3.951	4.131	2.843	3.748	3.9	4.339	3.88	3.46	3.951
0.15	3.94	4.313	4.888	2.679	4.061	4.29	5.279	4.37	3.66	4.438
0.2	4.31	4.736	5.923	2.515	4.407	4.68	6.439	4.86	3.885	4.982
0.25		5.228	7.388	2.356	4.795	5.07	7.819	5.41	4.139	5.595
0.3		5.801	9.556	2.201	5.238	5.46	9.419	6.05	4.428	6.292

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	4.4	4.32	4.32	4.32	4.32	4.32	4.32	4.32	4.32	4.32
0.05	4.6	4.976	4.939	4.158	4.785	4.86	5.012	4.746	4.54	4.845
0.1	5	5.418	5.721	3.937	5.19	5.4	6.009	5.22	4.784	5.424
0.15	5.4	5.912	6.769	3.709	5.623	5.94	7.31	5.99	5.055	6.066
0.2	6	6.482	8.201	3.483	6.102	6.48	8.916	6.62	5.36	6.78
0.25		7.138	10.22	3.262	6.64	7.02	10.827	7.36	5.703	7.581
0.3		7.986	13.23	3.048	7.252	7.56	13.042	8.23	6.093	8.484

f=50.0Hz

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	3.15	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22
0.05	3.38	3.751	3.69	3.11	3.58	3.62	3.74	3.59	3.39	3.63
0.1	3.7	4.076	4.28	2.94	3.88	4.03	4.48	4	3.59	4.08
0.15	4	4.45	5.06	2.77	4.2	4.43	5.45	4.46	3.8	4.58
0.2	4.4	4.886	6.13	2.6	4.56	4.83	6.65	4.98	4.05	5.14
0.25		5.393	7.65	2.44	4.96	5.23	8.07	5.56	4.33	5.77
0.3		5.983	9.89	2.28	5.42	5.64	9.72	6.23	4.65	6.49

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	5	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2
0.05	5.5	5.986	5.94	5.01	5.76	5.85	6.03	5.8	5.46	5.8
0.1	6	6.518	6.89	4.74	6.25	6.5	7.23	6.46	5.76	6.5
0.15	6.5	7.112	8.15	4.47	6.77	7.15	8.8	7.2	6.08	7.3
0.2	7.5	7.796	9.87	4.19	7.35	7.8	10.73	8.04	6.45	8.2
0.25		8.585	12.3	3.93	7.99	8.45	13.03	8.98	6.86	9.1
0.3		9.494	15.9	3.67	8.73	9.1	15.7	10.06	7.33	10.2

f=100.0Hz

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	3.2	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34
0.05	3.52	3.889	3.812	3.215	3.699	3.757	3.875	3.7	3.512	3.761
0.1	3.75	4.227	4.423	3.044	4.012	4.175	4.645	4.18	3.704	4.227
0.15	4.13	4.614	5.233	2.868	4.347	4.592	5.652	4.68	3.918	4.746
0.2	4.53	5.066	6.34	2.693	4.718	5.009	6.893	5.19	4.158	5.327
0.25		5.591	7.909	2.522	5.134	5.427	8.37	5.786	4.429	5.981
0.3		6.202	10.23	2.356	5.607	5.845	10.083	6.45	4.739	6.723

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
Uf										
0	6	6.04	6.04	6.04	6.04	6.04	6.04	6.04	6.04	6.04
0.05	6.41	6.948	6.89	5.813	6.69	6.795	7.007	6.636	6.347	6.77
0.1	6.79	7.566	7.99	5.505	7.256	7.55	8.401	7.298	6.687	7.575
0.15	7.4	8.255	9.46	5.186	7.862	8.305	10.221	8.35	7.066	8.466
0.2	8	9.048	11.46	4.87	8.532	9.06	12.466	9.25	7.49	9.457
0.25		9.961	14.3	4.561	9.284	9.815	15.137	10.25	7.96	10.567
0.3		11.014	18.5	4.261	10.14	10.57	18.234	11.42	8.512	11.818

$$U_f=0.05$$

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	3.06	3.405	3.33	2.81	3.23	3.29	3.39	3.26	3.07	3.29
0	3.2	3.486	3.41	2.88	3.31	3.36	3.47	3.33	3.15	3.37
1	3.22	3.601	3.53	2.97	3.42	3.48	3.59	3.44	3.25	3.48
1.301	3.3	3.636	3.567	3.003	3.456	3.51	3.619	3.47	3.281	3.514
1.6989	3.38	3.751	3.69	3.11	3.58	3.62	3.74	3.59	3.39	3.63
2	3.52	3.889	3.819	3.215	3.699	3.757	3.875	3.7	3.512	3.761

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	2.25	2.353	2.33	1.96	2.26	2.3	2.37	2.27	2.14	2.3
0	3	3.228	3.2	2.7	3.1	3.15	3.25	3.12	2.94	3.1
1	4.01	4.378	4.34	3.66	4.21	4.28	4.41	4.24	3.99	4.3
1.301	4.6	4.976	4.939	4.158	4.785	4.86	5.012	4.746	4.54	4.845
1.6989	5.5	5.986	5.94	5.01	5.76	5.85	6.03	5.8	5.46	5.8
2	6.41	6.948	6.906	5.813	6.69	6.795	7.007	6.636	6.347	6.77

$$U_f=0.1$$

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	3.28	3.7	3.87	2.66	3.51	3.65	4.06	3.63	3.24	3.7
0	3.41	3.788	3.96	2.73	3.59	3.74	4.16	3.71	3.32	3.79
1	3.5	3.913	4.09	2.82	3.71	3.86	4.3	3.84	3.44	3.91
1.301	3.58	3.951	4.131	2.843	3.748	3.9	4.339	3.88	3.46	3.951
1.6989	3.7	4.076	4.28	2.94	3.88	4.03	4.48	4	3.59	4.08
2	3.75	4.227	4.423	3.044	4.012	4.175	4.645	4.18	3.704	4.227

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	2.5	2.561	2.7	1.86	2.45	2.55	2.84	2.53	2.26	2.6
0	3.21	3.514	3.71	2.55	3.36	3.5	3.89	3.48	3.1	3.5
1	4.32	4.767	5.03	3.46	4.57	4.75	5.29	4.72	4.21	4.8
1.301	5	5.418	5.721	3.937	5.19	5.4	6.009	5.22	4.784	5.424
1.6989	6	6.518	6.89	4.74	6.25	6.5	7.23	6.46	5.76	6.5
2	6.79	7.566	7.99	5.505	7.256	7.55	8.401	7.298	6.687	7.575

$$U_f=0.15$$

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	3.56	4.039	4.58	2.51	3.8	4.02	4.94	4.04	3.43	4.16
0	3.83	4.135	4.69	2.57	3.89	4.11	5.06	4.14	3.52	4.26
1	3.92	4.272	4.84	2.65	4.02	4.25	5.23	4.28	3.64	4.4
1.301	3.94	4.313	4.888	2.679	4.061	4.29	5.279	4.37	3.66	4.438
1.6989	4	4.45	5.06	2.77	4.2	4.43	5.45	4.46	3.8	4.58
2	4.13	4.614	5.233	2.868	4.347	4.592	5.652	4.68	3.918	4.746

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	3	2.795	3.2	1.75	2.66	2.81	3.45	2.83	2.39	2.9
0	3.42	3.835	4.39	2.4	3.64	3.85	4.74	3.88	3.28	3.9
1	4.84	5.202	5.95	3.26	4.95	5.23	6.43	5.26	4.45	5.3
1.301	5.4	5.912	6.769	3.709	5.623	5.94	7.31	5.99	5.055	6.066
1.6989	6.5	7.112	8.15	4.47	6.77	7.15	8.8	7.2	6.08	7.3
2	7.4	8.255	9.46	5.186	7.862	8.305	10.221	8.35	7.066	8.466

$$U_f=0.20$$

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	4.13	4.436	5.54	2.35	4.12	4.38	6.03	4.51	3.64	4.67
0	4.23	4.541	5.68	2.41	4.22	4.49	6.17	4.62	3.74	4.78
1	4.3	4.691	5.87	2.49	4.36	4.64	6.38	4.78	3.87	4.94
1.301	4.31	4.736	5.923	2.515	4.407	4.68	6.439	4.86	3.885	4.982
1.6989	4.4	4.886	6.13	2.6	4.56	4.83	6.65	4.98	4.05	5.14
2	4.53	5.066	6.34	2.693	4.718	5.009	6.893	5.19	4.158	5.327

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1	3.5	3.065	3.87	1.64	2.88	3.06	4.21	3.15	2.53	3.2
0	3.84	4.205	5.32	2.26	3.96	4.2	5.78	4.33	3.48	4.4
1	5.22	5.703	7.21	3.06	5.37	5.7	7.84	5.87	4.72	6
1.301	6	6.482	8.2	3.483	6.102	6.48	8.916	6.62	5.36	6.78
1.6989	7.5	7.796	9.87	4.19	7.35	7.8	10.73	8.04	6.45	8.2
2	8	9.048	11.46	4.87	8.532	9.06	12.466	9.25	7.49	9.457

$$U_f=0.25$$

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1		4.897	6.91	2.21	4.49	4.75	7.32	5.04	3.88	5.24
0		5.013	7.08	2.26	4.6	4.86	7.49	5.16	3.98	5.37
1		5.179	7.32	2.33	4.75	5.02	7.74	5.34	4.13	5.54
1.301		5.228	7.388	2.356	4.795	5.07	7.819	5.41	4.139	5.595
1.6989		5.393	7.65	2.44	4.96	5.23	8.07	5.56	4.33	5.77
2		5.591	7.909	2.522	5.134	5.427	8.37	5.786	4.429	5.981

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth- Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1		3.377	4.83	1.54	3.14	3.32	5.11	3.52	2.69	3.6
0		4.632	6.63	2.11	4.3	4.55	7.02	4.84	3.7	4.9
1		6.281	9	2.87	5.84	6.18	9.52	6.56	5.02	6.7
1.301		7.138	10.22	3.262	6.64	7.02	10.827	7.36	5.703	7.581
1.6989		8.585	12.3	3.93	7.99	8.45	13.03	8.98	6.86	9.1
2		9.961	14.3	4.561	9.284	9.815	15.137	10.25	7.96	10.567

$$U_f=0.30$$

ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1		5.435	8.94	2.06	4.9	5.11	8.82	5.65	4.16	5.9
0		5.563	9.16	2.11	5.02	5.23	9.03	5.79	4.27	6.04
1		5.746	9.46	2.18	5.19	5.41	9.33	5.98	4.43	6.23
1.301		5.801	9.556	2.201	5.238	5.46	9.419	6.05	4.428	6.292
1.6989		5.983	9.89	2.28	5.42	5.64	9.72	6.23	4.65	6.49
2		6.202	10.23	2.356	5.607	5.845	10.083	6.45	4.739	6.723

ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	Experimental	Theoretical	Mooney	Sato-Furukawa k=1	Sato-Furukawa k=0	Einstein	Guth-Smallwood	Kerner	Voigt	Takayanagi
f(Hz)										
-1		3.736	6.25	1.44	3.43	3.57	6.16	3.95	2.88	4
0		5.125	8.58	1.98	4.7	4.9	8.45	5.42	3.95	5.5
1		6.948	11.6	2.68	6.38	6.65	11.47	7.35	5.36	7.5
1.301		7.986	13.23	3.048	7.252	7.56	13.042	8.23	6.093	8.484
1.6989		9.494	15.9	3.67	8.73	9.1	15.7	10.06	7.33	10.2
2		11.014	18.5	4.261	10.14	10.57	18.234	11.42	8.512	11.818

f=0.1Hz

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	2.92	3.06	3.31	3.56	4.125
40	2.56	2.81	3.06	3.25	3.68
50	2.37	2.75	2.9	3.15	3.46
60	2.21	2.56	2.75	2.96	3.28
70	1.93	2.37	2.56	2.78	3.03
80	1.62	1.93	2.25	2.43	2.62
90	0.87	1.06	1.31	1.6	1.81
95	0.62	0.81	1.18	1.43	1.62
100	0.5	0.68	0.94	1.21	1.37

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	2.92	3.405	3.7	4.03	4.43
40	2.56	2.99	3.24	3.54	3.89
50	2.37	2.77	3	3.28	3.6
60	2.21	2.58	2.8	3.06	3.36
70	1.93	2.25	2.45	2.67	2.94
80	1.62	1.89	2.06	2.25	2.47
90	0.87	1.02	1.1	1.21	1.33
95	0.62	0.72	0.79	0.86	0.95
100	0.5	0.58	0.63	0.69	0.76

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	2.04	2.5	2.75	3	3.25
40	3.5	4	4.23	4.52	5.01
50	4.75	5.02	5.77	6.51	7.24
60	6.01	6.75	7.5	8.53	9.91
70	7.72	8.97	10.48	11.1	12.05
80	9.25	12.02	13.75	14.38	16.01

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	2.04	2.35	2.56	2.79	3.06
40	3.5	4.04	4.4	4.8	5.27
50	4.75	5.5	5.98	6.53	7.16
60	6.01	6.96	7.57	8.27	9.07
70	7.72	8.96	9.75	10.06	11.68
80	9.25	10.77	11.7	12.78	14.03

f=1.0Hz

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	2.99	3.09	3.25	3.53	4.06
40	2.62	2.93	3.12	3.31	3.93
50	2.5	2.87	3	3.22	3.78
60	2.25	2.72	2.81	3	3.62
70	2.06	2.5	2.68	2.84	3.31
80	1.78	2.25	2.5	2.68	2.84
90	1.28	1.9	2	2.25	2.5
95	0.84	1	1.62	1.78	2.25
100	0.56	0.71	1	1.21	1.98

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	2.99	3.48	3.78	4.13	4.54
40	2.62	3.05	3.32	3.62	3.98
50	2.5	2.92	3.17	3.46	3.8
60	2.25	2.63	2.85	3.11	3.42
70	2.06	2.41	2.61	2.85	3.13
80	1.78	2.08	2.26	2.47	2.71
90	1.28	1.5	1.63	1.78	1.95
95	0.84	0.98	1.07	1.17	1.28
100	0.56	0.65	0.71	0.78	0.85

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	1.52	1.93	2.28	3.42	4.56
40	6.09	6.81	7.53	8.6	10
50	8.6	9.98	10.02	11.25	12.5
60	11.5	12.5	13.6	14.75	15.5
70	13.75	14.44	16.5	17.4	18.25
80	16.72	18.01	19.5	20.02	21.7

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	1.52	1.75	1.9	2.08	2.28
40	6.09	7.04	7.66	8.36	9.17
50	8.6	9.95	10.82	11.81	12.96
60	11.5	13.32	14.5	15.82	17.36
70	13.75	15.96	17.35	18.94	20.79
80	16.72	19.44	21.14	23.08	25.33

f=10.0Hz

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	3.09	3.18	3.43	3.78	4.21
40	2.81	3.06	3.22	3.5	4
50	2.62	2.93	3.09	3.34	3.81
60	2.43	2.75	2.93	3.18	3.62
70	2.31	2.62	2.78	3	3.37
80	2.12	2.41	2.62	2.84	3.06
90	1.81	2.12	2.4	2.62	2.81
95	1.62	2	2.24	2.51	2.68
100	1.43	1.84	2.1	2.37	2.56

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E_c' \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}C$)					
20	3.09	3.6	3.91	4.27	4.69
40	2.81	3.27	3.56	3.88	4.27
50	2.62	3.05	3.32	3.62	3.98
60	2.43	2.83	3.08	3.36	3.69
70	2.31	2.7	2.93	3.2	3.51
80	2.12	2.48	2.69	2.94	3.23
90	1.81	2.12	2.3	2.51	2.76
95	1.62	1.89	2.06	2.25	2.47
100	1.43	1.67	1.82	1.98	2.18

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	3.01	3.22	3.58	4.22	5.07
40	5.01	6.04	6.71	7.71	8.49
50	7	7.38	8.71	9.5	11.43
60	9.07	10.01	11.48	12.5	14.37
70	12.5	13.96	15.74	17.02	18.42
80	16.48	18.73	20.74	22.41	25

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	3.01	3.46	3.77	4.12	4.51
40	5.01	5.78	6.29	6.87	7.53
50	7	8.09	8.8	9.61	10.54
60	9.07	10.49	11.42	12.46	13.67
70	12.5	14.48	15.75	17.19	18.86
80	16.48	19.12	20.79	22.7	24.91

f=50.0Hz

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	3.22	3.37	3.5	3.62	4.06
40	3	3.12	3.25	3.37	3.81
50	2.78	3	3.12	3.25	3.62
60	2.5	2.78	2.93	3.06	3.53
70	2.37	2.62	2.8	2.87	3.34
80	2.09	2.53	2.68	2.78	3.18
90	1.87	2.37	2.5	2.71	3
95	1.68	2.25	2.37	2.62	2.75
100	1.5	2.12	2.18	2.43	2.56

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ($E'_c \times 10^9 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	3.22	3.75	4.07	4.45	4.88
40	3	3.49	3.8	4.14	4.55
50	2.78	3.24	3.52	3.84	4.22
60	2.5	2.92	3.17	3.46	3.8
70	2.37	2.77	3	3.28	3.6
80	2.09	2.44	2.65	2.89	3.18
90	1.87	2.19	2.37	2.59	2.85
95	1.68	1.96	2.13	2.33	2.56
100	1.5	1.75	1.9	2.08	2.29

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E''_c \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f = 0$	$U_f = 0.05$	$U_f = 0.1$	$U_f = 0.15$	$U_f = 0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	5.2	5.42	6	6.42	7.42
40	5.24	6.01	6.48	6.71	7.41
50	5.51	6.72	7.41	7.71	8.5
60	7.5	8.38	9.01	10.04	10.97
70	11.04	12	12.71	14.1	15.56
80	15.71	16.5	18	19.5	21.4

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ($E_c'' \times 10^7 \text{N/m}^2$)

	$U_f=0$	$U_f=0.05$	$U_f=0.1$	$U_f=0.15$	$U_f=0.2$
Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)					
20	5.2	5.98	6.51	7.11	7.79
40	5.24	6.04	6.57	7.17	7.86
50	5.51	6.36	6.92	7.55	8.28
60	7.5	8.67	9.44	10.3	11.3
70	11.04	12.78	13.91	15.18	16.65
80	15.71	18.23	19.28	21.64	23.75

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα της επίδρασης των γειτονικών εγκλεισμάτων στις ελαστικές σταθερές ενός σύνθετου υλικού εξετάστηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία με τη βοήθεια ενός τριφασικού μοντέλου, το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν και την επίδραση των γειτονικών εγκλεισμάτων σαν μια άλλη φάση. Το μοντέλο αυτό προέκυψε με η θεώρηση της κυβικής διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο και με την βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας βρέθηκαν εκφράσεις για το στατικό μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού. Στην συνέχεια δια της χρήσης της αρχής της αντιστοιχίας βρέθηκαν τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας. Οι θεωρητικές τιμές που προέκυψαν από την θεωρητική ανάλυση συγκρίθηκαν με τις θεωρητικές τιμές άλλων ερευνητών και με τα πειραματικά αποτελέσματα που λήφθηκαν από στατικά πειράματα εφελκυσμού και από πειράματα ταλαντώσεων σε διαφορετικές συχνότητες και σε συνθήκες περιβάλλοντος, από δοκίμια που αποτελούνται από κόκκους σιδήρου και εποξειδική ρητίνη. Η σύγκριση δείχνει ότι το αναπτυχθέν μοντέλο προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματικότητα και ότι οι επιδράσεις των γειτονικών κόκκων δημιουργούν κάποιες αποκλίσεις.

Τα γενικά συμπεράσματα πάντως είναι ότι και το στατικό μέτρο ελαστικότητας και τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας αυξάνονται με την αύξηση της κατ' όγκον περιεκτικότητας. Η συχνότητα επηρεάζει τα δυναμικά μέτρα. Το μέτρο απωλειών επηρεάζεται σημαντικά ενώ το μέτρο αποθήκευσης σε μικρό βαθμό. Τα δυναμικά μέτρα E'_c και E''_c του σύνθετου υλικού επηρεάζονται κατά διαφορετικό τρόπο από τη θερμοκρασία..

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΑΙΜ.ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ , “Μελέτη των Μηχανικών Ιδιοτήτων των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών δια της ενδιάμεσου φάσεως”. Διδ. διατριβή.
2. A. Einstein, Ann. Phys., 19,289(1906); 34, 591 (1911)
3. E.Guth, J.Appl.Phys.,16,20(1945)
4. H.M.Smallwood, J.Appl.Phys.,15,758(1944)
5. E.H.Kerner, Proc.Phys.Soc.,69B,808(1956)
6. Y.Sato and J.Furukawa, Rubber Chem.Tech.,35,857(1962)
7. M.Mooney, J.Colloid Sci.,6,162(1951)
8. H.Eilers and Van Dyck, Kolloid Z.,97,313(1941)
9. K.Bills, K.Sweeny and F.Salcedo, J.Appl.Polym.Sci. , 12, 259(1960)
10. M.Narkis, Polym.Eng.Sci., 15, 316(1975)
11. K.Takahashi, M.Ikeda, K.Harakawa, K.Tanaka and T.Sakai, J.Polym.Sci.,Polym.Phys.Ed.,16,415(1978)
12. R.M.Jones, Mechanics of Composite Materials, Mc Graw-Hill, New York 1975
13. G.Spathis, E.Sideridis and P.S.Theocaris, Int.J.Adhesion and Adhesives,1,195(1981)
14. P.S.Theocaris, J.Reinforced Plastics and Comp.,3,204(1984)
15. J.Leidner and R.T.Woodhams, J.Appl.Pol.Sci.,18,1639(1974)
16. M.R.Piggott and J.Leidner, J.Appl.Pol.Sci.,18,1619(1974)
17. L.Nicolats and R.A.Mashelkar, J.Appl.Pol.Sci.,20,561(1976)
18. M.Schrager, J.Appl.Pol.Sci. , 22, 2379(1978)
19. M.Takayanagi, S.Vemura and S.Minami, J.Pol.Sci., C5, 113(1967)
20. E.M.Passmore, R.M.Spriggs and T.Vasilos, J.Amer.Ceram.Soc., 48, 1(1965)
21. T.L.Smith, Rubber Chem.Techn., 34,123(1961), Trans.Soc.Rheol., 3,113(1959)
22. F.Bueche, J.Appl.Pol.Sci. 4,107(1960)
23. K.D.Ziegel, H.K.Frensdorff and A.W.Fogiel, J. Appl.Pol.Sci.,13,867(1967)
24. Ε.Κοντού, Σχέση δομής και θερμομηχανικής συμπεριφοράς εποξειδικής ρητίνης τροποποιημένης με μηχανικά και χημικά πρόσθετα, 1, 43,(1985)
25. Z.Hashin, J. of Appl.Mechanics, 29, Trans.ASME, 84, Series E, 143(1962)
26. B.W.Rosen, American Soc. for Metals, Metals Park, Ohio, 37(1965)
27. A.Saada, Elasticity, Pergamon Unified Eng. Series, Pergamon New York 1974
28. Z.Hashin, Int.J.Solids Structures,6,539(1970)
29. J.H.C.Thomson, Trans.Roy.Soc.London, 231,339(1933)

