

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΡΩΓΜΗΣ ΣΕ
ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΥΛΙΚΟ, ΚΑΥΣΤΙΚΕΣ – ΙΣΟΧΡΩΜΕΣ

ΟΝΟΜ/ΜΟ: ΓΛΥΚΟΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: κ. ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ
κ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

1.	ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	1
2.	ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ	20
3.	ΘΕΩΡΙΑ ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	26
4.	ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	34
5.	ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΠΑΧΩΝ	47
6.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	51
7.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΙΣΟΠΑΧΩΝ	57
8.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΙΣΟΧΡΩΜΩΝ	59
9.	ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	61
10.	ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΙΣΟΧΡΩΜΩΝ	67
11.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	78
12.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	79

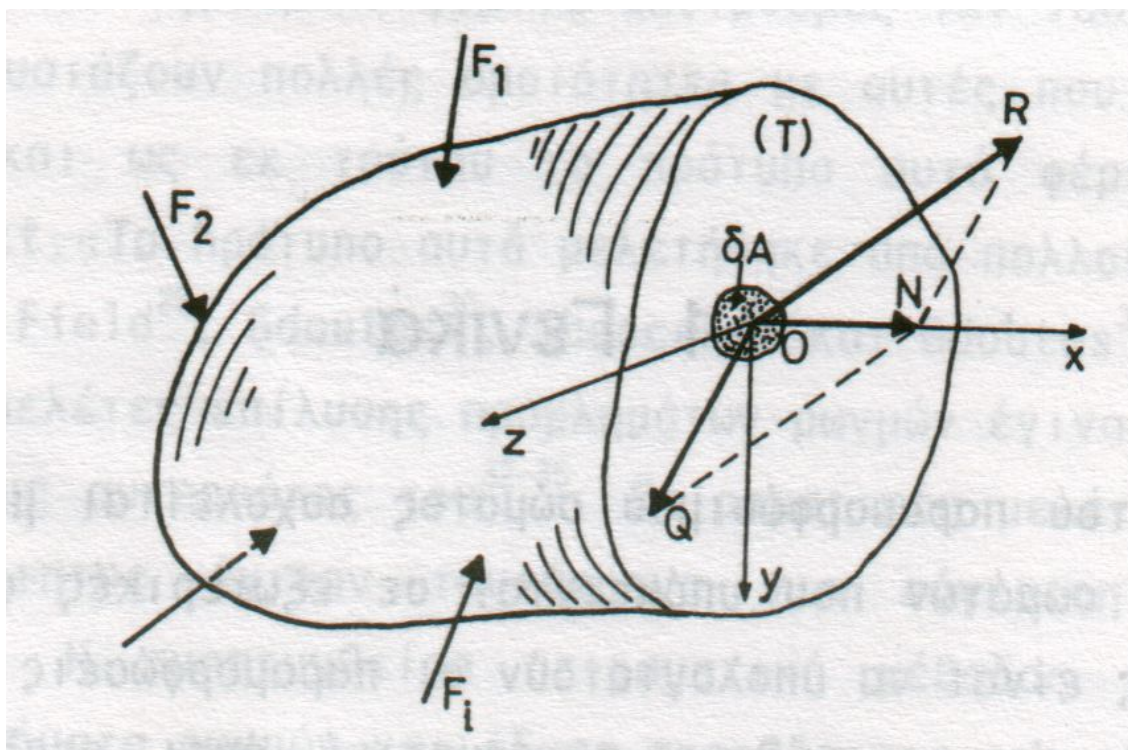
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Γενικά

Η Μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος ασχολείται με την μελέτη της συμπεριφοράς των σωμάτων που υπόκεινται σε εξωτερικές φορτίσεις. Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και οι τάσεις σε κάθε σημείο του σώματος. Όπως πειραματικά έχει αποδειχθεί, όταν τα εξωτερικά φορτία είναι μικρά τότε οι παραμορφώσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των εξωτερικών φορτίων. Η ιδιότητα αυτή των σωμάτων χαρακτηρίζεται ως **γραμμική ελαστικότητα**. Όταν τα εξωτερικά φορτία αυξηθούν τότε παύει η γραμμική εξάρτηση των παραμορφώσεων από τα εξωτερικά φορτία οπότε παρουσιάζονται μεγάλες παραμορφώσεις και ελαστοπλαστική και πλαστική συμπεριφορά των σωμάτων. Η ιδιότητα αυτή των σωμάτων στις μεγάλες παραμορφώσεις χαρακτηρίζεται ως **μη γραμμική ελαστικότητα** και **πλαστικότητα**.

Τάσεις

Έχουμε το παρακάτω σχήμα



Κάνοντας τομή (T) στο τρισδιάστατο σώμα, υπό γενική φόρτιση δια των δυνάμεων $F_i (i=1,2,\dots)$ για να ισορροπήσει το τμήμα αυτό εφαρμόζεται η δύναμη \mathbf{R} στην τομή (T). Η δύναμη \mathbf{R} αναλύεται στις \mathbf{N} και \mathbf{Q} . Θεωρώντας μια μικρή περιοχή δA και τις δυνάμεις δN και δQ τότε ορίζουμε ως **ορθή** και **διατμητική τάση**:

$$\text{ορθή τάση } \sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta N}{\delta A}$$

$$\text{διατμητική τάση } \tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta A}$$

Στην γενική περίπτωση της τρισδιάστατης κατάστασης σ' ένα σημείο M του σώματος ο **τανυστής των τάσεων**, θεωρώντας ότι το σημείο M αποτελείται από ένα κύβο διαστάσεων dx, dy, dz , είναι:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Οι αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων είναι:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Εξισώσεις Ισορροπίας

Θεωρούμε ένα στοιχείο διαστάσεων dx, dy, dz όπου οι συνιστώσες των τάσεων στις έδρες του στοιχείου αυξάνουν. Για να ισορροπεί το στοιχείο πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$ και $\Sigma F_z = 0$.

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$$

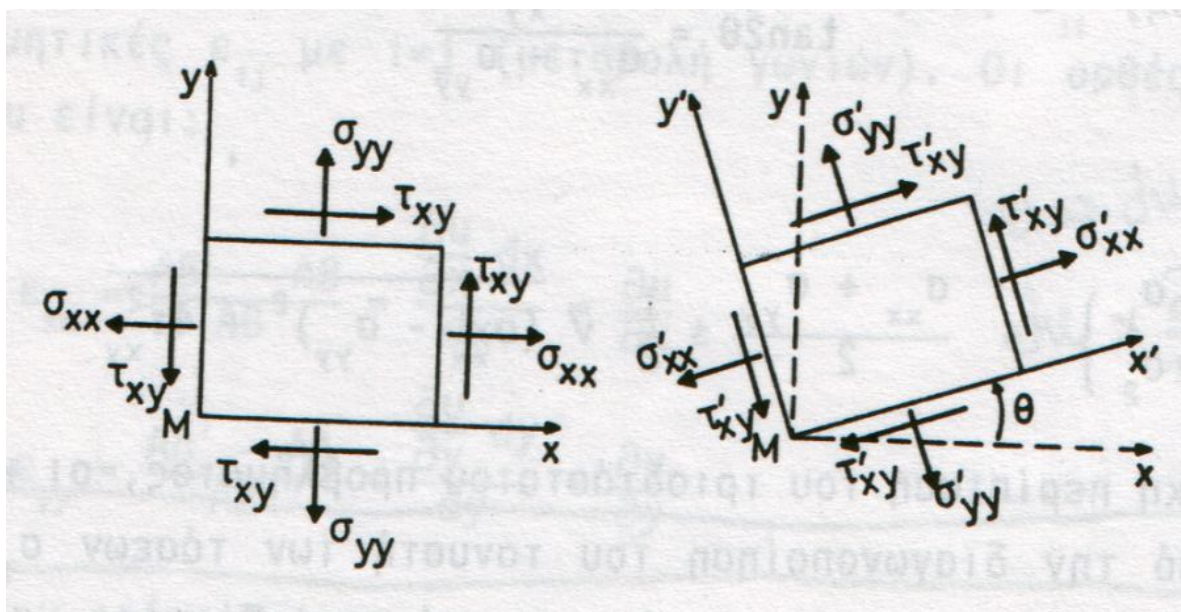
όπου F_x, F_y, F_z είναι οι καθολικές δυνάμεις.

Μετασχηματισμοί Τάσεων

Στην επίπεδη εντατική κατάσταση ο τανυστής των τάσεων γίνεται:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας το κάτωθι σχήμα έχουμε:



Εάν το αρχικό σύστημα Mxy στραφεί κατά γωνία θ γύρω από το σημείο M τότε οι συνιστώσες των τάσεων ως προς το σύστημα $Mx'y'$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις που προκύπτουν είτε από την στροφή του τανυστή των τάσεων, είτε γεωμετρικά από τον κύκλο του Mohr:

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Οι σχέσεις αυτές μπορεί να γραφούν και ως εξής:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$\sigma'_{yy} - \sigma'_{xx} + 2i\tau'_{xy} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy})e^{2i\theta}$$

Κύριες Τάσεις

Η γωνία θ παίρνει διάφορες τιμές. Για την τιμή της θ όπου η $\tau'_{xy} = 0$, οι τάσεις σ'_{xx} και σ'_{yy} παίρνουν ακρότατες τιμές (μέγιστη και ελάχιστη) και λέγονται **κύριες τάσεις**. Η γωνία θ όπου συμβαίνει αυτό είναι:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Στην γενική περίπτωση του τρισδιάστατου προβλήματος, οι κύριες τάσεις λαμβάνονται από την διαγωνοποίηση του τανυστή των τάσεων σ_{ij} . Οι κύριες τάσεις (ιδιοτιμές του τανυστή) προκύπτουν από την εξίσωση:

$$|\sigma_{ij} - \lambda I| = 0$$

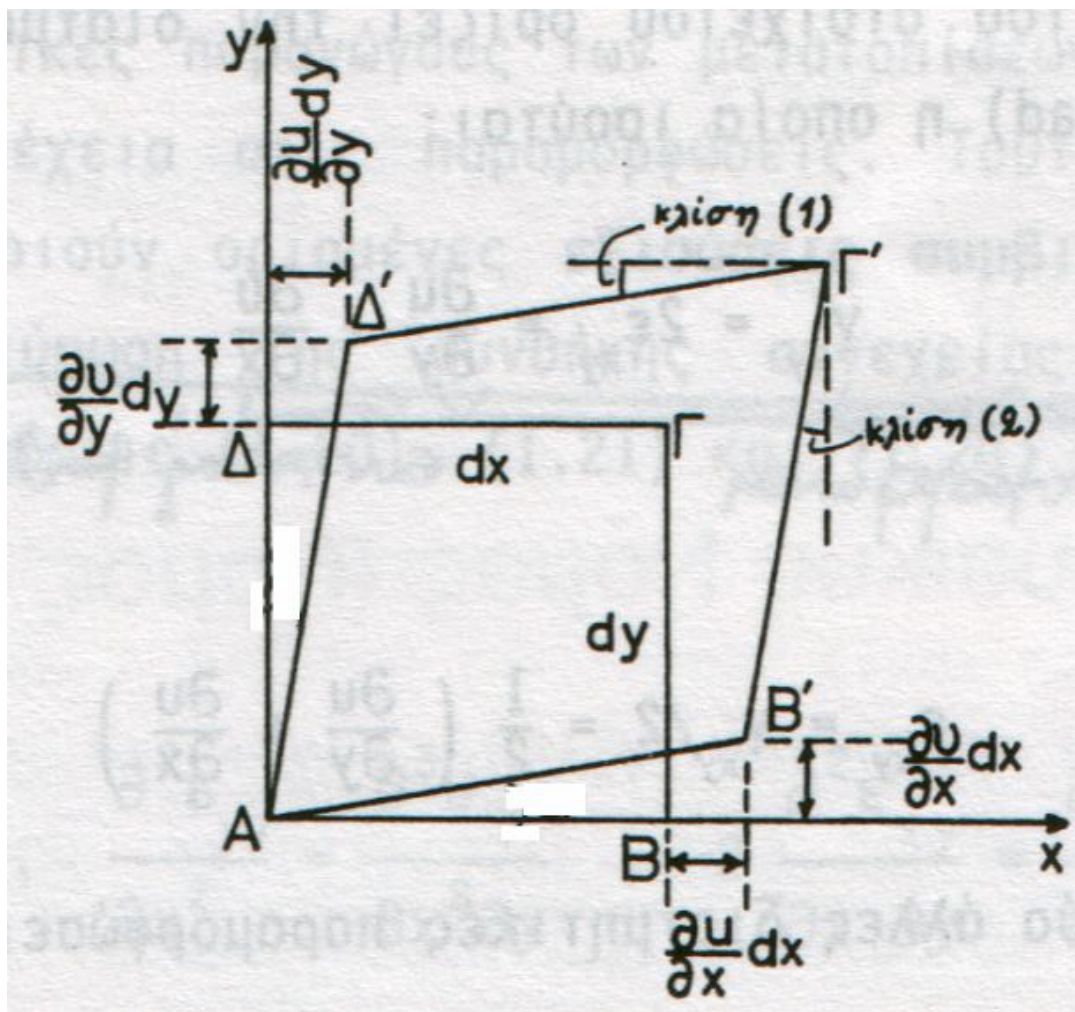
όπου λ οι ιδιοτιμές ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) και I ο μοναδιαίος πίνακας, ενώ οι διευθύνσεις (ιδιοανύσματα) των κυρίων τάσεων προκύπτουν από τα συστήματα:

$$(\sigma_{ij} - \lambda_i I)n = 0$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές και $n(n_1, n_2, n_3)$ τα ιδιοδιανύσματα.

Παραμορφώσεις

Μικρό ορθογώνιο στοιχείο $AB\Gamma\Delta$ (επίπεδη κατάσταση) μετά την παραμόρφωση μεταβάλλει μέγεθος και σχήμα όπως φαίνεται παρακάτω.



Οι παραμορφώσεις του στοιχείου είναι όρθες ε_{ii} (μεταβολή μήκους) και οι διατμητικές ε_{ij} με $i \neq j$ (μεταβολή γωνιών). Οι όρθες παραμορφώσεις των στοιχείων είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{A\Delta' - A\Delta}{A\Delta} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

και ως προς την τρίτη διάσταση z , ομοίως:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις υπολογίζονται από τις κλίσεις των πλευρών του παραμορφωμένου στοιχείου, έτσι καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

η συνολική μεταβολή της γωνίας του στοιχείου ορίζει την διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} .

Ο τανυστής των παραμορφώσεων είναι:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}/2 \\ \varepsilon_{yx} = \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2 \\ \varepsilon_{zx} = \gamma_{zx}/2 & \varepsilon_{zy} = \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

για την επίπεδη κατάσταση γίνεται:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2 \\ \varepsilon_{yx} = \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Εξισώσεις Συμβιβασμού των Παραμορφώσεων

Στην επίπεδη κατάσταση οι τρεις συνιστώσες των παραμορφώσεων ε_{ij} δίνονται από τις μερικές παραγώγους των μετατοπίσεων u, v έτσι ώστε να υπάρχει συνέχεια στις παραμορφώσεις. Τούτο συμβαίνει όταν οι παραμορφώσεις ικανοποιούν ορισμένες **εξισώσεις συμβιβασμού** που εκφράζουν την μαθηματική διατύπωση της συνθήκης συνέχειας του παραμορφωσίμου σώματος. Έτσι έχουμε την κάτωθι εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Στην γενική περίπτωση της τρισδιάστατης κατάστασης προκύπτουν ανάλογα οι εξισώσεις συμβιβασμού των παραμορφώσεων:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

και ακολούθως προκύπτουν άλλες τρεις εξισώσεις:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Τόσο ο τανυστής των τάσεων όσο και ο τανυστής των παραμορφώσεων είναι συμμετρικοί, δηλαδή ισχύει: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ για $i \neq j$.

Ο Φυσικός Νόμος (Νόμος Hooke)

Τα γραμμικά και ελαστικά υλικά, είναι τα υλικά στα οποία οι αναπτυσσόμενες παραμορφώσεις είναι ελαστικές και υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τάσεων και των αντιστοίχων παραμορφώσεων. Η γραμμικότητα μεταξύ των τάσεων και των αναπτυσσόμενων υπό αυτών παραμορφώσεων εκφράζει τον γενικευμένο νόμο του Hooke.

Για την περίπτωση ισότροπου και ομογενούς πολυκρυσταλλικού υλικού έχουμε τις κάτωθι απλοποιημένες σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, ν ο λόγος του Poisson και G το μέτρο διάτμησης ή μέτρο ακαμψίας σε διάτμηση του υλικού.

Εξ άλλου αντιστρέφοντας τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε τις παρακάτω:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx})]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad , \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Εάν οι τάσεις που ενεργούν επί ενός σώματος είναι παράλληλες προς ένα επίπεδο τότε τα προβλήματα της θεωρίας της ελαστικότητας απλοποιούνται σημαντικά. Στην περίπτωση της λεπτής πλάκας που καταπονείται δια δυνάμεων που ενεργούν επί του συνόρου της παράλληλα προς το επίπεδο της πλάκας και ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά το πάχος της και εάν υποθεθεί ότι το μέσο επίπεδο της συμπίπτει με το επίπεδο Oxy του θεωρουμένου συστήματος αξόνων Oxyz, τότε οι συνιστώσες των τάσεων σ_{zz} , τ_{xz} και τ_{yz} είναι:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

και στις δύο επιφάνειες της πλάκας και χωρίς μεγάλο σφάλμα, καθ' όλο το πάχος της.

Η εντατική αυτή κατάσταση της λεπτής πλάκας καλείται **επίπεδη εντατική κατάσταση (plane stress)**. Όταν το πάχος της πλάκας είναι πάρα πολύ μικρό, δηλαδή όταν η πλάκα γίνει λεπτή μεμβράνη, τότε επιτυγχάνεται ιδανική περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης.

Είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι στην επίπεδη εντατική κατάσταση οι μη μηδενικές συνιστώσες των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} παραμένουν πρακτικώς σταθερές καθ' όλο το πάχος της πλάκας.

Οι σχέσεις μεταξύ των επιβαλλομένων τάσεων και των αντιστοίχων παραμορφώσεων δια της περίπτωσης της επίπεδης εντατικής κατάστασης δίνονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}]$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

ενώ για τις τάσεις έχουμε:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}]$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση

Η περίπτωση, όπου το πάχος του σώματος είναι πολύ μεγάλο, αντιμετωπίζεται όπως και στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, δηλαδή η αναπτυσσόμενη παραμορφωσιακή κατάσταση στο υπό μελέτη σώμα είναι επίπεδη, εκ της οποίας και η ονομασία **επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain)**. Επί πλέον υποτίθεται ότι οι παράμετροι της παραμορφώσεως δεν μεταβάλλονται κατά την διεύθυνση του άξονα των z, τότε οι μετατοπίσεις u και v κατά τους άλλους άξονες είναι συναρτήσεις μόνον των x και y και η μετατόπιση w είναι ίση προς το μηδέν. Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x, y), \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x, y), \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Οι σχέσεις των παραμορφώσεων είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] = \frac{1-\nu^2}{E} [\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] = \frac{1-\nu^2}{E} [\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{xx}]$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2 \frac{1-\nu^2}{E} (1 + \frac{\nu}{1-\nu}) \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Ενώ για τις τάσεις έχουμε τις σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Προκύπτει ότι η λύση προβλήματος επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης περιορίζεται, όπως και στην περίπτωση του προβλήματος επίπεδης εντατικής κατάστασης, στον προσδιορισμό τριών μόνο συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} .

Γενικευμένη Επίπεδη Εντατική Κατάσταση (Τασική Συνάρτηση Airy)

Στην γενικευμένη επίπεδη εντατική κατάσταση τίθενται οι ίδιες υποθέσεις με τις τάσεις όπως στην επίπεδη εντατική κατάσταση, με την διαφορά ότι οι τάσεις δεν είναι τώρα συναρτήσεις της μεταβλητής z , δηλαδή είναι:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y) \quad , \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y) \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \quad , \quad \sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

Οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} υπολογίζονται από την τασική συνάρτηση $F_1 = F_1(x, y)$, η οποία καλείται **τασική συνάρτηση Airy**, από τις σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + V \quad , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + V \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}$$

Από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}]$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

προκύπτει η **εξίσωση Laplace**, η οποία είναι:

$$\nabla^4 F_1 = -(1-\nu) \nabla^2 V$$

όπου:

$$\nabla^2 V = \text{σταθερά}$$

και το ∇^2 είναι ο αρμονικός τελεστής Laplace, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ενώ το $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ είναι ο διαρμονικός τελεστής Laplace.

Μιγαδική Τασική Συνάρτηση

Για την επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος απαιτείται ο προσδιορισμός των συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} που ικανοποιούν τις κάτωθι εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

και την εξίσωση συμβιβαστού συναρτήσει των τάσεων, απουσία μαζικών δυνάμεων:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις επαληθεύονται, εφ' όσον οι τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και τ_{xy} προκύπτουν από την συνάρτηση F δια των σχέσεων:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Με αντικατάσταση έχουμε την κάτωθι σχέση:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Η σχέση αυτή είναι εξίσωση Laplace και πρέπει να ικανοποιείται από την συνάρτηση $F = F(x, y)$, που είναι μια διαρμονική συνάρτηση και ονομάζεται τασική συνάρτηση ή συνάρτηση του Airy. Κάθε συνάρτηση $F(x, y)$ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση δύναται να παρασταθεί με την βοήθεια δύο αναλυτικών συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\psi(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$ δια της σχέσεως:

$$F = \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)]$$

Από την σχέση αυτή καταλήγουμε στις εξής σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) - \operatorname{Re}[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$

$$\sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) + \operatorname{Re}[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$

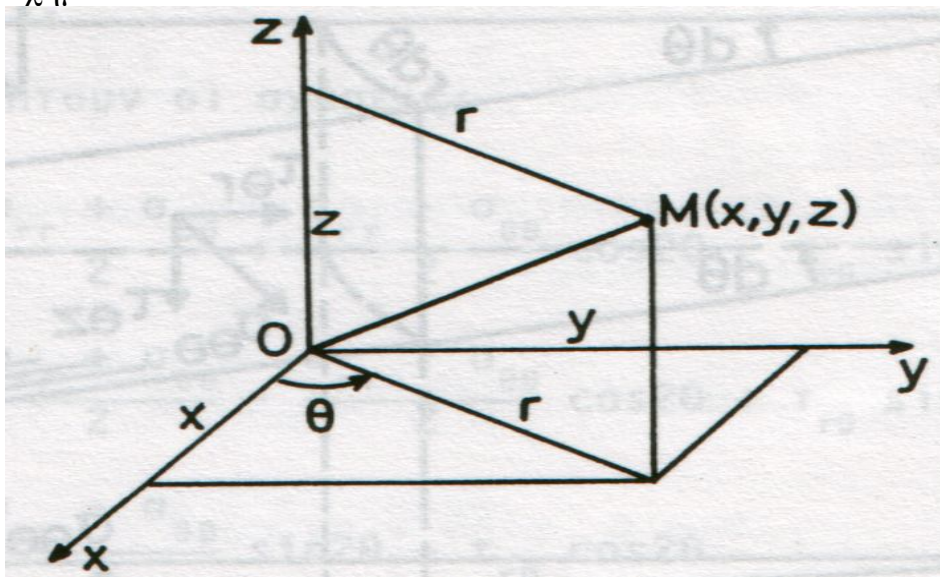
$$\tau_{xy} = \operatorname{Im}[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$

Ισχύουν τα εξής:

$$\Psi(z) = \frac{dx(z)}{dz}, \quad \Phi(z) = \phi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z)$$

Κυλινδρικές και Πολικές Συντεταγμένες

Η επίλυση ενός προβλήματος μηχανικής μπορεί να επιλυθεί ευκολότερα εάν χρησιμοποιηθούν **κυλινδρικές** ή **πολικές** συντεταγμένες. Έχουμε το παρακάτω σχήμα.



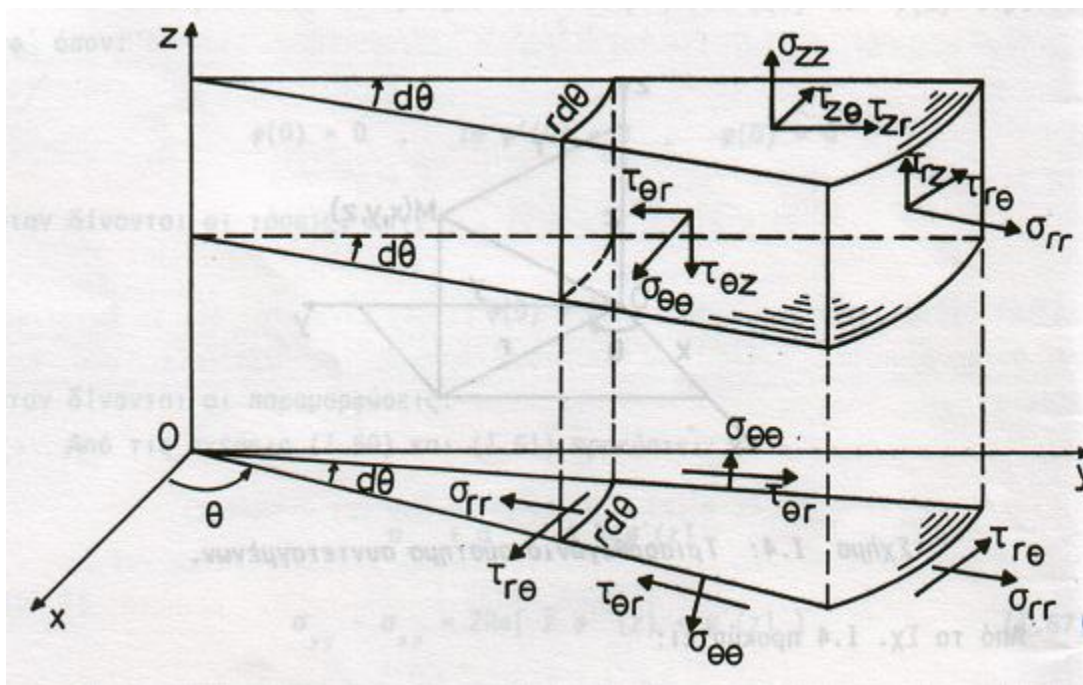
Το σύνολο των συντεταγμένων r, θ, z λέγονται **κυλινδρικές** συντεταγμένες, ενώ το r, θ στο επίπεδο αποτελούν τις **πολικές** συντεταγμένες.

Ισχύουν:

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι τάσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες πάνω σ' ένα στοιχείο του σώματος ως προς το σύστημα $Oxyz$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο ταυιστής των τάσεων σ_{ij} σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Για στροφή γύρω από τον άξονα z, οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες με τις τάσεις σε Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι ακόλουθες:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{rz} = \tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta$$

$$\tau_{\theta z} = -\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}$$

Αντιστρόφως έχουμε τις σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta$$

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta$$

$$\tau_{yz} = \tau_{rz} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}$$

Ανάλογα με τις τάσεις, οι σχέσεις στροφής για τις παραμορφώσεις είναι:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{xz} \cos \theta + \varepsilon_{yz} \sin \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z} = -\varepsilon_{xz} \sin \theta + \varepsilon_{yz} \cos \theta$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}$$

Αντιστρόφως προκύπτει:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}}{2} + \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}}{2} - \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{r\theta} \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{rz} \cos \theta - \varepsilon_{\theta z} \sin \theta$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{rz} \sin \theta + \varepsilon_{\theta z} \cos \theta$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}$$

Ο νόμος του Hooke στην περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων γράφεται:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{rr})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})]$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}$$

Πολικές συντεταγμένες

Στην περίπτωση των επιπέδων προβλημάτων χρησιμοποιούνται οι πολικές συντεταγμένες. Οι σχέσεις των τάσεων και των παραμορφώσεων προκύπτουν από τις αντίστοιχες σε κυλινδρικές συντεταγμένες εάν μηδενιστούν οι συνιστώσες κατά την διεύθυνση z, δηλαδή:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$$

Ετσι, οι εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο πρόβλημα, σε πολικές συντεταγμένες, είναι:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Αντίστοιχα ο νόμος του Hooke, γράφεται:

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}]$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta}$$

Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta}$$

Η τασική συνάρτηση Airy μπορεί να γραφτεί σε πολικές συντεταγμένες και γίνεται $F(r, \theta)$. Έτσι έχουμε την εξής εξίσωση:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Επομένως η διαρμονική εξίσωση γράφεται:

$$\nabla^4 F = \nabla^2 (\nabla^2 F) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Οι τάσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Εάν η F δίνεται συναρτήσει των αναλυτικών συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$, τότε οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{rr} = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) - \operatorname{Re} \{ [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] e^{2i\theta} \}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) + \operatorname{Re} \{ [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] e^{2i\theta} \}$$

$$\tau_{r\theta} = \operatorname{Im} \{ [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] e^{2i\theta} \}$$

ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ

Γενικά

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στην κλασική θεωρία της Ελαστικότητας, για καταστάσεις που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης ή της ρηγμάτωσης των υλικών, πραγματοποιείται δια της αναγωγής του προβλήματος σε προβλήματα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα κι η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα, τα εφαρμοσμένα φορτία προκαλούν μικρές παραμορφώσεις των συνόρων, έτσι ώστε τα μόρια του υλικού που ευρίσκοντο πλησίον των συνόρων, να παραμένουν και πάλι πλησίον μετά την φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες να ανάγονται στα απαραμόρφωτα σύνορα του σώματος.

Μετά από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου όμως, εμφανίζονται ρωγμές που αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος μετατοπίσεως. Η προϋπάρχουσα πλέον εντατική κατάσταση στις θέσεις των ρωγμών εξέλιπε, τα δε σύνορα άλλαξαν. Έτσι ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος διότι ανάλογα με το πρόβλημα απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες που οδηγούν στον καθορισμό των συνόρων.

Προς αποφυγή των ανυπερβλήτων δυσχερειών που παρουσιάζονται στην ως άνω γενικότερη περίπτωση της Μηχανικής των Θραύσεων, στην θεωρία των Ρωγμών περιοριζόμαστε στην επίλυση του ακόλουθου προβλήματος: “Εντός ενός σώματος που υπόκειται στην επίδραση εξωτερικών φορτίων, το μέγεθος των οποίων αυξάνει συνεχώς, δίνεται ορισμένο σύστημα ρωγμών. Ζητείται ο καθορισμός των επιφανειών των ρωγμών καθώς και της διανομής των τάσεων και παραμορφώσεων για κάθε βαθμίδα φόρτισης. Η αύξηση των φορτίων υποτίθεται ότι γίνεται ομαλώς, έτσι ώστε η επίδραση των δυναμικών φαινομένων να είναι αμελητέα”. Στην θεωρία της Ελαστικότητας το άνω πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: “Ζητείται η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ελαστικότητας εντός περιοχής περικλειομένης υπό συνόρου Σ , στην οποία υπάρχουν ρωγμές, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες”. Η διαφορά του προβλήματος αυτού των ρωγμών από τα συνήθη προβλήματα ελαστικότητας είναι ουσιώδης και τούτο διότι πρόκειται περί προβλήματος με άγνωστα σύνορα των οποίων ζητείται ο προσδιορισμός κατά την επίλυση.

Άλλη βασική δυσχέρεια του προβλήματος των ρωγμών είναι η εκλογή καταλλήλου προσομοιώματος, βάσει του οποίου θα γίνει η επίλυση. Δύο είναι τα απαιτούμενα προσομοιώματα. Το προσομοίωμα του υλικού σημείου επί της αρχής του οποίου θεμελιώνεται η Νευτώνειος δυναμική και το προσομοίωμα του συνεχούς μέσου επί της αρχής του οποίου βασίζεται η θεωρία της Ελαστικότητας. Η επίλυση των προβλημάτων ελαστικότητας με την αρχή του υλικού σημείου γίνεται δύσκολη λόγω μαθηματικών δυσχερειών. Η επίλυση όμως του προβλήματος της ρωγμής και κυρίως παρά το άκρο γίνεται βάσει της αρχής του υλικού

σημείου και τούτο διότι η δημιουργία και διάδοση μιας ρωγμής συνίσταται στον διαχωρισμό του ενός ατόμου από το άλλο σε ζεύγος γειτονικών ατόμων, ακολουθούμενο από παρόμοιο διαχωρισμό στο επόμενο ζεύγος, και ούτω καθεξής. Πέρα όμως του άκρου της ρωγμής που η μικρομοριακή φύση του υλικού δεν επιδρά σημαντικά επί του τασικού πεδίου, η επίλυση δύναται να γίνει με την αρχή του συνεχούς μέσου.

Προσεγγιστικά η ρωγμή μπορεί να θεωρηθεί σαν μια κοιλότητα εντός του σώματος της οποίας η απόσταση των απέναντι παρειών των χειλέων της είναι μικρή σχετικά με το μήκος της. Έχουμε απειρισμό των τάσεων παρά τα άκρα της ρωγμής και τα άκρα της ρωγμής είναι στρογγυλά με ακτίνα καμπυλότητας της τάξεως της μοριακής αποστάσεως, γεγονός απαράδεκτο στην μηχανική των συνεχών μέσων. Παρατηρείται ότι οι τάσεις στα άκρα των ρωγμών δύναται να είναι πεπερασμένες, εφ' όσον οι απέναντι παρειές της ρωγμής παρουσιάζουν στο υπ' όψη σημείο κοινή εφαπτομένη και δεν είναι ελεύθερες τάσεων. Σε τέτοια μορφή συνόρων της ρωγμής όμως αποδεικνύεται ότι η απελευθερούμενη ενέργεια δι' απειροστή μεταβολή των συνόρων της ρωγμής ισούται με μηδέν. Επομένως, μόνο τέτοιου είδους καμπύλες δύναται να αποτελέσουν τα σύνορα των εν ισορροπία ρωγμών. Εάν οι επιφάνειες της ρωγμής θεωρηθούν ελεύθερες τάσεων τότε για οποιαδήποτε μορφή συνόρων της ρωγμής οι τάσεις γίνονται άπειρες, οπότε δεν δύναται να υπάρχουν ρωγμές σε ισορροπία. Προς τούτο, για να οδηγηθούμε σε παραδεκτές λύσεις πρέπει να θεωρήσουμε μοριακές δυνάμεις συναφείας παρά το άκρο της ρωγμής.

Επίλυση του Προβλήματος των Ρωγμών με τις Τασικές Συναρτήσεις Westergaard

Τα διδιάστατα προβλήματα των ρωγμών μπορεί να επιλυθούν κατά τον Westergaard, εφ' όσον η τασική συνάρτηση Airy ορισθεί δια της σχέσεως:

$$F = \text{Re} \bar{Z} + y \text{Im} \bar{Z}$$

όπου Z αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$, και:

$$\bar{Z} = \frac{d\bar{Z}}{dz}, \quad Z = \frac{dZ}{dz}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = y \text{Re} Z' \quad , \quad Z' = \frac{dZ}{dz}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z'$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} Z$$

Η ίδια λύση προκύπτει εάν χρησιμοποιηθεί η λύση δια των μιγαδικών συναρτήσεων, αρκεί να ορισθούν οι αναλυτικές συναρτήσεις $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ δια των σχέσεων:

$$\Phi(z) = \phi'(z) = \frac{Z}{2}, \quad \Psi(z) = \psi'(z) = -\frac{zZ'}{2}$$

Από τις σχέσεις $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$ και $\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\tau_{xy}i = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$ προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} Z$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} = 2y \operatorname{Im} Z'$$

$$\tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'$$

όπου τελικά έχουμε:

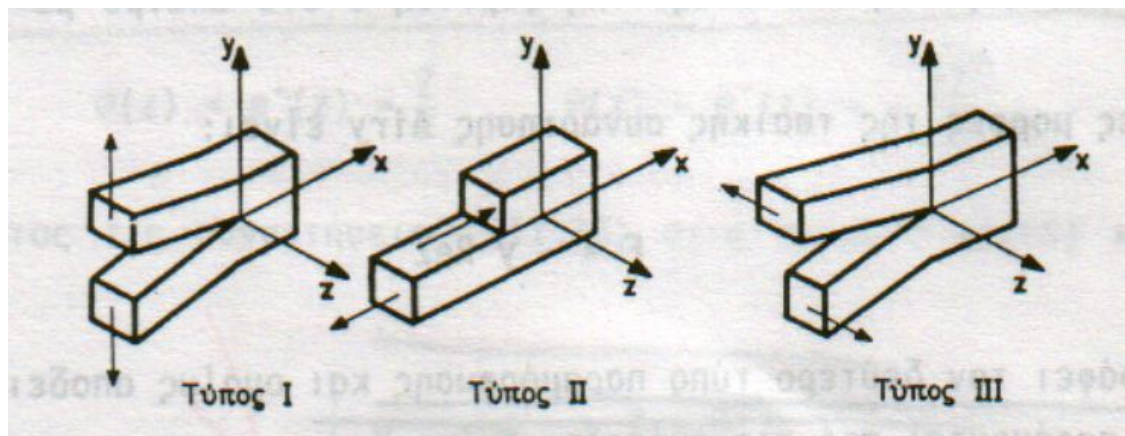
$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'$$

$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'$$

Οι τάσεις αυτές είναι οι ίδιες με αυτές που ευρέθησαν από την λύση με την συνάρτηση Z του Westergaard.

Τύποι Παραμορφώσεως

Υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακίνησης των χειλέων μιας ρωγμής. Οι τρεις αυτοί τρόποι παραμόρφωσης παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Έτσι, οποιαδήποτε μορφή παραμόρφωσης της ρωγμής μπορεί να προκύψει με επαλληλία των τριών αυτών τύπων παραμόρφωσης. Οι τύποι αυτοί παραμόρφωσης είναι: Εφελκυστικός τύπος I, Συνεπίπεδος διατμητικός τύπος II, Εγκάρσιος διατμητικός τύπος III.



Εφελκυστικός τύπος I

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης. Η τασική συνάρτηση Westergaard δια τον τύπο I δίνεται από την σχέση $Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$. Αναφέροντας την συνάρτηση αυτή σε σύστημα αξόνων δια του άκρου της ρωγμής, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $\zeta = z - a$ έχουμε $Z_I = \frac{\sigma(\zeta + a)}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2a}}$.

Αναπτύσσοντας την ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{\zeta + 2a}}$ της προηγούμενης σχέσης σε σειρά Taylor προκύπτει

$Z_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi \zeta}}$ και θέτοντας $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$ έχουμε την σχέση $Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \zeta}}$. Η σταθερά K_I είναι

χαρακτηριστική του τύπου I και ονομάζεται εφελκυστικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων (stress intensity factor). Με $\zeta = re^{i\theta}$ και αντικαθιστώντας στις σχέσεις $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \text{Re } Z - y \text{Im } Z'$,

$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \text{Re } Z + y \text{Im } Z'$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \text{Re } Z'$, παίρνουμε τις κάτωθι εξισώσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Ισχύει επίσης για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_I δίνεται από την σχέση:

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy}$$

Συνεπίπεδος διατμητικός τύπος II

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν η μια σχετικά προς την άλλη προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ιδίου επίπεδου. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο II δίνεται από την σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad , \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \quad , \quad \zeta = re^{i\theta}$$

όπου η σταθερά K_{II} είναι η χαρακτηριστική του τύπου II και ονομάζεται συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων.

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'$, $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'$,

$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z'$ του Westergaard έχουμε:

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_{II} δίνεται από την σχέση:

$$K_{II} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy}$$

Εγκάρσιος διατμητικός τύπος III

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν προς αντίθετες εγκάρσιες κατευθύνσεις υπό την επίδραση ίσων και αντιθέτων δυνάμεων, κάθετων προς το επίπεδο του σώματος. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο III δίνεται από την σχέση:

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \zeta}}$$

όπου η σταθερά K_{III} είναι η χαρακτηριστική του τύπου III και ονομάζεται μη συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων. Αντικαθιστώντας στις σχέσεις του Westergaard έχουμε:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

Η σχέση της K_{III} δίνεται από την σχέση:

$$K_{III} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{yz}$$

ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

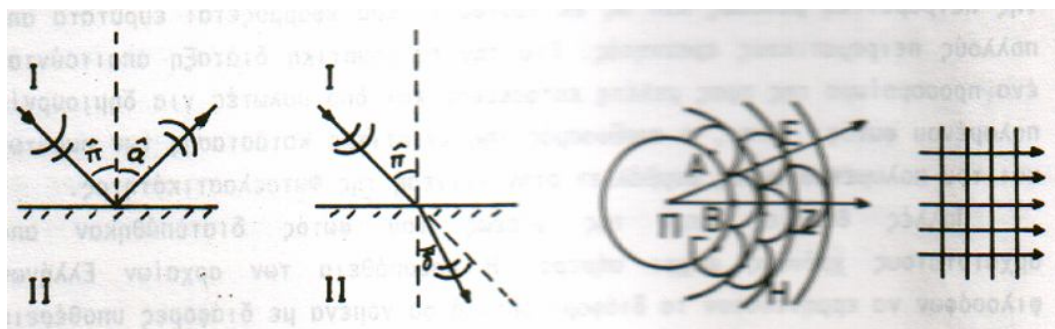
Γενικά

Η πειραματική μέθοδος της φωτοελαστικότητας είναι μια απλή πειραματική μέθοδος και ως εκ τούτου εφαρμόζεται σήμερα ευρύτατα από πολλούς πειραματικούς ερευνητές. Για την πειραματική διάταξη απαιτούνται ένα προσομοίωμα της προς μελέτη κατασκευής και δύο πολωτές για δημιουργία πολωμένου φωτός. Έτσι, ο συνδυασμός της εντατικής κατάστασης των σωμάτων και του πολωμένου φωτός συμβάλλει στην γέννηση της Φωτοελαστικότητας.

Στην Φωτοελαστικότητα χρησιμοποιούνται τα φαινόμενα της ανάκλασης, διάθλασης και πόλωσης του φωτός που ερμηνεύονται με την κυματική ή την ηλεκτρομαγνητική θεωρία περί φωτός. Για την ανάπτυξη της θεωρίας της Φωτοελαστικότητας λαμβάνεται υπ' όψη το "διάνυσμα του φωτός" που παριστάνει το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του κύματος του φωτός ή του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Βασικές Έννοιες της Θεωρίας του Φωτός

Κατά την σωματιδιακή θεωρία του φωτός, τα σωματίδια που εκπέμπουν από την φωτεινή πηγή κινούνται ευθύγραμμα εντός του μέσου έως ότου συναντήσουν την επιφάνεια ενός άλλου μέσου όπου ανακλώνται. Κατά την θεωρία του Νεύτωνα τα σωματίδια επί της επιφάνειας του δεύτερου μέσου αποθούνται οπότε διέρχονται δια της επιφάνειας οπότε παρατηρείται η διάθλαση των φωτεινών ακτίνων. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω σχήμα:



Κατά την ανάκλαση η γωνία προσπτώσεως $\hat{\pi}$ είναι ίση με την γωνία ανακλάσεως $\hat{\alpha}$ ($\hat{\pi} = \hat{\alpha}$), ενώ κατά την διάθλαση ισχύει:

$$\eta = \frac{\sin \hat{\pi}}{\sin \hat{\delta}} = \frac{c_1}{c_2}$$

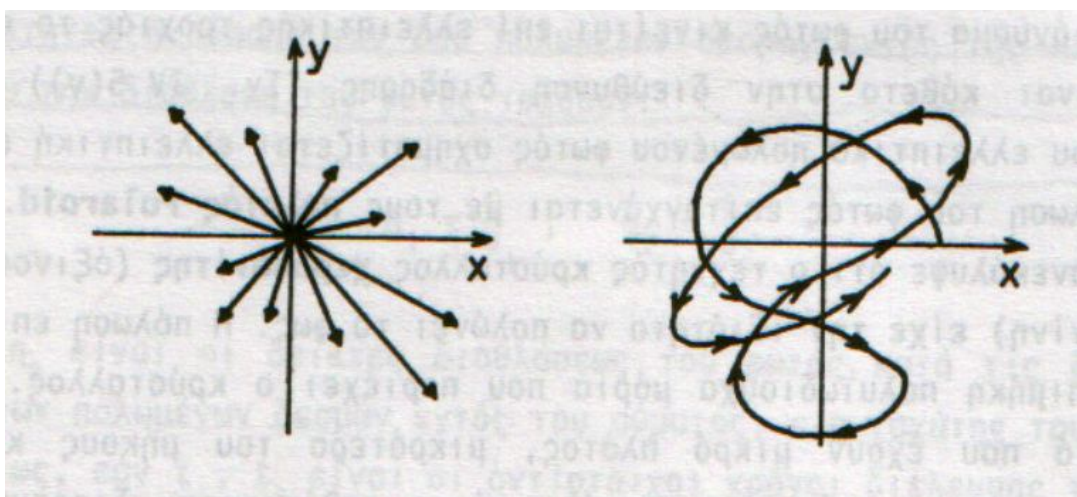
όπου n είναι ο δείκτης διαθλάσεως του φωτός, $\hat{\delta}$ η γωνία διαθλάσεως, c_1 η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (I) και c_2 η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (II).

Κατά την κυματική θεωρία του φωτός, από σημειακή πηγή Π εκπέμπεται ένα κύμα που γεννάται από τις δονήσεις των ατόμων της πηγής. Το κύμα διαδίδεται στον χώρο με ταχύτητα c , όπου c η ταχύτητα διαδόσεως του φωτός στο χώρο της πηγής. Το κύμα διαδιδόμενο προς όλες τις επιφάνειες σχηματίζει σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας $R=ct$. Όλα τα σημεία της σφαίρας ευρίσκονται σε φάση. Οι επιφάνειες αυτές αποτελούν τα μέτωπα του κύματος. Τα σημεία του πρώτου μετώπου καθίστανται νέες φωτεινές πηγές που σχηματίζουν νέα μέτωπα κύματος και η περιβάλλουσα των επί μέρους μετώπων σχηματίζει το νέο μέτωπο κύματος κατά την αρχή του Huygens. Τα σφαιρικά μέτωπα του κύματος πολύ μακριά της πηγής Π καθίστανται σχεδόν επίπεδα έτσι ώστε σε άπειρη απόσταση από την πηγή Π τα μέτωπα θεωρούνται επίπεδα κάθετα στις φωτεινές ακτίνες, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.

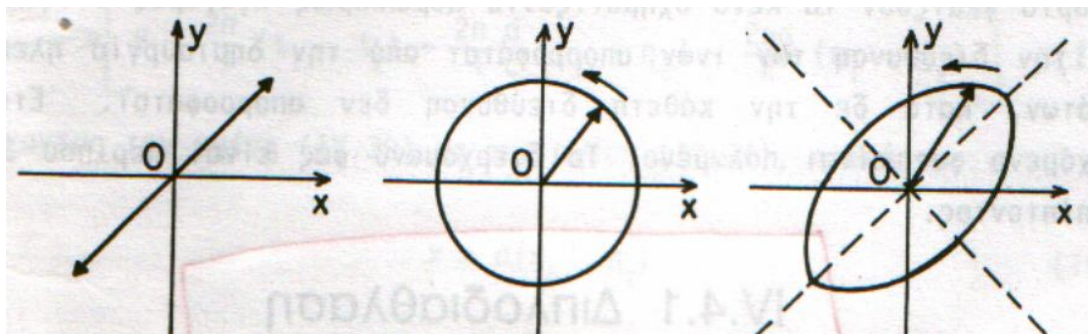
Σύμφωνα με την καυστική θεωρία του φωτός και την αρχή του Huygens, μπορεί εύκολα να εξηγηθεί η ανάκλαση και η διάθλαση του φωτός. Έτσι, όταν ένα μέτωπο κύματος φθάσει στην διαχωριστική επιφάνεια τότε τα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας καθίστανται δευτερεύουσες πηγές κυμάτων με αποτέλεσμα ένα νέο μέτωπο κύματος να γεννάται και αφ' ενός μιν να ανακλάται αφ' ετέρου δε να διαθλάται.

Πόλωση του Φωτός

Σύμφωνα με την κυματική θεωρία του φωτός, το κοινό φως αποτελείται από εγκάρσια κύματα διαφόρων συχνοτήτων και διευθύνσεων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εάν το κοινό φως πέσει σε μια υάλινη πλάκα με κατάλληλη γωνία πρόσπτωσης τότε το ανακλώμενο φως αποτελείται από εγκάρσια κύματα με επίπεδα ταλάντωσης παράλληλα μεταξύ τους κάθετα στην διάδοση του κύματος. Στην περίπτωση αυτή το φως καλείται **πολωμένο**. Το διάνυσμα του πολωμένου φωτός κινείται πάνω σε ορισμένη τροχιά, κάθετη στην διεύθυνση του κύματος. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω σχήμα.



Επίπεδο πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός ευρίσκεται πάνω σε ευθεία γραμμή κάθετη προς την διεύθυνση διάδοσης.

Κυκλικά πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός κινείται επί κυκλικής τροχιάς το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης. Επομένως κατά την διάδοση του κυκλικά πολωμένου φωτός σχηματίζεται κυκλική έλικα.

Ελλειπτικά πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός κινείται επί ελλειπτικής τροχιάς το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης. Κατά την διάδοση του ελλειπτικά πολωμένου φωτός σχηματίζεται ελλειπτική έλικα.

Διπλοδιάθλαση

Τα φυσικά σώματα, σε σχέση με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός εντός αυτών, διακρίνονται σε **οπτικώς ισότροπα** και **οπτικώς ανισότροπα** ή **διπλοθλαστικά**. Στα **οπτικώς ισότροπα** σώματα η ταχύτητα του φωτός εντός αυτών είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, ενώ στα **οπτικώς ανισότροπα** η ταχύτητα του φωτός εντός αυτών είναι διαφορετική και εξαρτάται από την διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός πάνω στα σώμα. Εντός των οπτικώς ανισοτρόπων σωμάτων το φως χωρίζεται σε δύο επιπέδως πολωμένες δέσμες, τα επίπεδα πόλωσης των οποίων είναι κάθετα μεταξύ τους, με ταχύτητες διάδοσης διαφορετικές. Εάν d είναι το πάχος της ανισότροπης πλάκας και v_1, v_2 οι ταχύτητες διάδοσης των δύο πολωμένων δεσμών εντός της πλάκας, τότε σύμφωνα με την διάθλαση του φωτός ισχύουν:

$$\eta_1 = \frac{c}{v_1} \quad , \quad \eta_2 = \frac{c}{v_2}$$

όπου η_1, η_2 είναι οι δείκτες διαθλάσεως του φωτός κατά τις διευθύνσεις διάδοσης των πολωμένων δεσμών εντός του σώματος, c η ταχύτητα διάδοσης στο κενό. Ομοίως, εάν t_1, t_2 είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι διέλευσης των ακτίνων δια του πάχους d του σώματος, προκύπτει:

$$v_1 = \frac{d}{t_1} \quad , \quad v_2 = \frac{d}{t_2}$$

Και από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\eta_1 = \frac{c}{d} t_1 \quad , \quad \eta_2 = \frac{c}{d} t_2$$

Πολωτές

α) **Επίπεδος πολωτής**, είναι το οπτικό στοιχείο που πολώνει το φως επίπεδα. Ο επίπεδος πολωτής χαρακτηρίζεται από τον άξονα πόλωσης δια του οποίου διέρχεται φως ενώ κατά την κάθετη διεύθυνση προς τον άξονα πόλωσης δεν διέρχεται φως. Έτσι, όταν το διάνυσμα του κοινού φωτός προσπέσει πάνω στο επίπεδο πολωτή, αναλύεται σε δύο συνιστώσες εκ των οποίων η κατά τον άξονα πόλωσης διέρχεται ενώ η κάθετη αποκόπτεται με αποτέλεσμα το φως που διέρχεται να αποτελείται από ένα διάνυσμα παράλληλο προς τον άξονα πόλωσης.

β) **Κυκλικός πολωτής**, είναι το οπτικό στοιχείο που πολώνει το φως κυκλικά. Ένα τέτοιο οπτικό στοιχείο είναι μια διπλοδιαθλαστική πλάκα τέτοιου πάχους ώστε η διαφορά φάσης β των κυμάνσεων να ισούται με $\frac{\pi}{2}$.

γ) **Ελλειπτικά πολωμένο φως**, επιτυγχάνεται από οπτικό στοιχείο που αποτελείται από ένα επίπεδο πολωτή και ένα κυκλικό πολωτή. Το φως που εξέρχεται είναι ελλειπτικά πολωμένο, δηλαδή το διερχόμενο διάνυσμα του φωτός διαγράφει ελλειπτική έλικα.

Φωτοτασεοπτικός Νόμος

Φυσική διπλοδιάθλαση παρουσιάζουν τα κρυσταλλικά σώματα, ενώ διπλοδιάθλαση είναι δυνατόν να παρουσιάσουν και τα ισότροπα σώματα μετά από εντατική ή παραμορφωσιακή κατάσταση. Κατά την ένταση ενός σώματος αναπτύσσονται οι κύριες τάσεις πάνω στα κύρια επίπεδα. Οι κύριες τάσεις μεταβάλουν την εσωτερική δομή του σώματος με αποτέλεσμα την μεταβολή της ισότροπης συμπεριφοράς του σώματος και επομένως παρουσιάζεται μεταβολή στον δείκτη διαθλάσεως (προκειμένου για διαφανή υλικά) κατά τις διευθύνσεις των κύριων τάσεων. Η μεταβολή αυτή του δείκτη διαθλάσεως έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση διπλοδιαθλαστικότητας στο σώμα εφ' όσον διαρκή η φόρτιση. Η διπλοδιάθλαση αυτή είναι ανάλογη της εντατικής καταστάσεως. Η αναλογία αυτή διατυπώνεται από τον **φωτοτασεοπτικό νόμο**.

Κατά τον φωτοτασεοπτικό νόμο, εφ' όσον το σώμα φορτίζεται στην ελαστική περιοχή, η εμφανιζόμενη διπλοδιάθλαση είναι ανάλογη της σε κάθε σημείο του σώματος διαφοράς των κυρίων τάσεων, δηλαδή:

$$\eta_1 - \eta_2 = c_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων, είναι:

$$\beta = \frac{2\pi d}{\lambda} (\eta_1 - \eta_2) = \frac{2\pi d}{\lambda} c_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2)$$

με d το πάχος του δοκιμίου και λ το μήκος κύματος.

Ο γεωμετρικός τύπος των σημείων που παρουσιάζουν την κάτωθι διαφορά των κυρίων τάσεων καλείται **κροσσός** και συμβολίζεται η τάξη του με N . Επομένως, όσο αυξάνεται η εντατική κατάσταση του σώματος αυξάνεται η διαφορά των κυρίων τάσεων με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται κροσσοί τάξης N . Επομένως έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$N = \frac{dc_\sigma}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{d}{f_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

όπου $f_\sigma = \lambda / c_\sigma$. Η σταθερά f_σ καλείται **φωτοελαστική σταθερά** του υλικού του σώματος και εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

Η φωτοελαστική σταθερά f_σ υπολογίζεται πειραματικά για κάθε σώμα και για κάθε ακτινοβολία μήκους κύματος (μονοχρωματικό φως). Η μέγιστη διατμητική τάση τ_{\max} , ισούται:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{Nf_{\sigma}}{2d}$$

δηλαδή οι φωτοελαστικοί κροσσοί είναι ο γεωμετρικός τύπος σημείων που έχουν την μέγιστη διατμητική τάση.

Πολωσισκόπιο

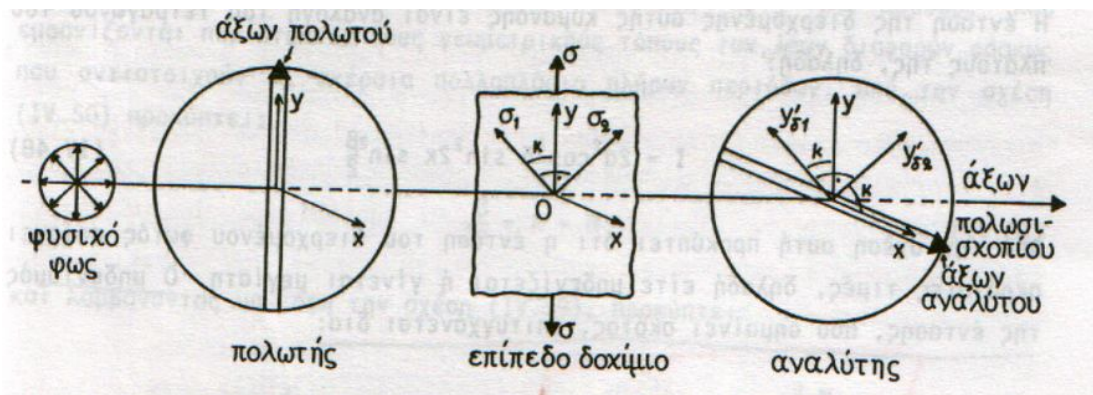
Όταν η φωτεινή ακτίνα προσπέσει κάθετα σε διαφανές σώμα ευρισκόμενο υπό ένταση αναλύεται σε δύο κυμάνσεις κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 με διαφορά φάσης β . Οι κυμάνσεις είναι γραμμικά πολωμένες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Επομένως, οι εξερχόμενες δια του σώματος κυμάνσεις δίνουν πληροφορίες ως προς τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων και τη διαφορά αυτών σε κάθε σημείο του σώματος. Οι πληροφορίες αυτές είναι δυνατόν να ληφθούν με το πολωσισκόπιο δια του οποίου το προσπίπτον φως επί του σώματος είναι επίπεδα ή κυκλικά πολωμένο για την καλύτερη λήψη των προηγούμενων πληροφοριών. Το πολωσισκόπιο αποτελείται από δύο πολωτάς και δύο πλάκες. Ανάλογα με την διάταξη των τεσσάρων αυτών οπτικών στοιχείων διακρίνεται το πολωσισκόπιο σε **επίπεδο πολωσισκόπιο και σε κυκλικό πολωσισκόπιο**.

Με το επίπεδο πολωσισκόπιο λαμβάνονται πληροφορίες για τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος, ενώ με το κυκλικό πολωσισκόπιο λαμβάνονται πληροφορίες για την διαφορά των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος. Έτσι σε κάθε σημείο του σώματος τα στοιχεία που λαμβάνονται με το πολωσισκόπιο είναι οι **τροχιές των κυρίων τάσεων και η διαφορά αυτών και από αυτά τα στοιχεία υπολογίζονται οι τάσεις σε κάθε σημείο του σώματος δηλαδή επιτυγχάνεται η πειραματική ανάλυση των τάσεων**.

Τροχιές κυρίων τάσεων είναι οι γραμμές σε κάθε σημείο των οποίων η εφαπτόμενη συμπίπτει με την διεύθυνση της κύριας τάσης.

Επίπεδο πολωσισκόπιο

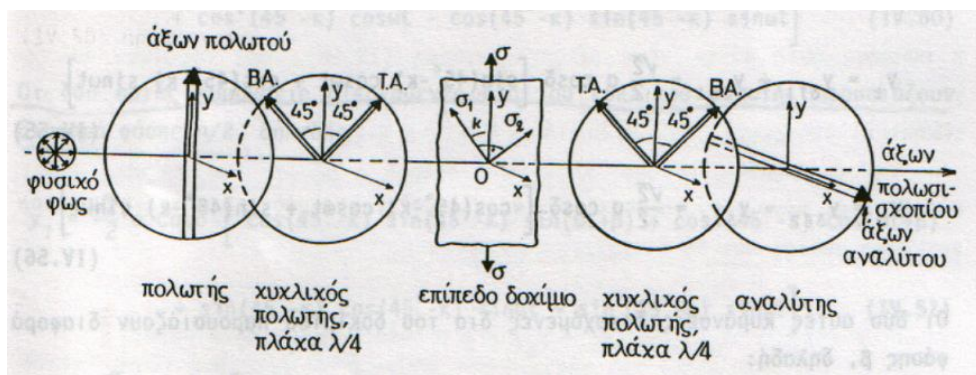
Το επίπεδο πολωσισκόπιο αποτελείται από δύο πολωτάς διατεταγμένους έτσι ώστε ο ένας πολωτής να πολώνει το φυσικό φως, οπότε καλείται **πολώτης**, ενώ ο άλλος τοποθετείται μετά το υπό ένταση σώμα και καλείται **αναλύτης**. Εάν τα επίπεδα πόλωσης του πολωτή και αναλύτη είναι παράλληλα τότε το πολωμένο φως από τον πολωτή διέρχεται δια του αναλύτη οπότε το επίπεδο πολωσισκόπιο καλείται **επίπεδο πολωσισκόπιο φωτεινού πεδίου**, ενώ εάν τα επίπεδα πόλωσης είναι κάθετα τότε το πολωμένο φως από τον πολωτή αποκόπτεται από τον αναλύτη οπότε το επίπεδο πολωσισκόπιο καλείται **επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου**. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου.



Στο δοκίμιο ορίζονται σκοτεινές γραμμές που αντιστοιχούν σε γεωμετρικό τόπο σημείων όπου οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων είναι παράλληλες προς τους άξονες του πολωτή και του αναλύτη. Οι σκοτεινές αυτές γραμμές καλούνται **ισοκλινείς** από το γεγονός ότι σε όλα αυτά τα σημεία οι κύριες τάσεις έχουν την αυτή κλίση ίση προς την κλίση των αξόνων του πολωτή και αναλύτη.

Κυκλικό πολωσισκόπιο

Με το κυκλικό πολωσισκόπιο λαμβάνεται το δίκτυο των ισοχρώμων και απαλείφεται το δίκτυο των ισοκλινών. Το κυκλικό πολωσισκόπιο αποτελείται από το επίπεδο πολωσισκόπιο παρεμβάλλοντας δύο κυκλικούς πολωτάς. Ο κυκλικός πολωτής χαρακτηρίζεται από δύο κάθετους άξονες, τον **ταχύ άξονα** (T. A.) και τον **βραδύ άξονα** (B. A.). Οι κυκλικό πολωτές τοποθετούνται έτσι ώστε οι δύο άξονες, T. A. και B. A. να σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα του πολωτή. Οι κυκλικό πολωτές τοποθετούνται έτσι ώστε ο T. A. του ενός να είναι παράλληλος προς τον B. A. του άλλου για να αλλοιωθεί το εξερχόμενο φως από τον αναλύτη. Σε αντίθετη περίπτωση δηλαδή εάν ο T. A. του ενός κυκλικό πολωτή είναι παράλληλος προς τον T. A. του άλλου, τότε το εξερχόμενο φως από τον αναλύτη στρέφεται κατά γωνία 90° . Στην πρώτη περίπτωση το κυκλικό πολωσισκόπιο είναι **σκοτεινού πεδίου** και στην δεύτερη είναι **φωτεινού πεδίου**. Το παρακάτω χαρακτηριστικό σχήμα είναι σκοτεινού πεδίου.



Από την διάταξη αυτή λαμβάνουμε κροσσούς που παρίστανται από τον γεωμετρικό τόπο ίσων τιμών της διαφοράς ($\sigma_1 - \sigma_2$) των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 . Οι κροσσοί αυτοί καλούνται **ισόχρωμες**. Οι ισόχρωμες δεν εξαρτώνται από την κλίση των αξόνων του πολωτή και αναλύτη, παραμένουν ακίνητες.

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

ΓΕΝΙΚΑ

Στα προβλήματα των ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και πλησίον της μικρής αυτής περιοχής οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες, το γεγονός αυτό καθιστά δύσκολη την επίλυση του προβλήματος με τις κλασσικές μεθόδους πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων, ενώ αντιθέτως, η μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος εσημείωσε σημαντική πρόοδο.

Η πειραματική αυτή μέθοδος καλείται **Οπτική Μέθοδος των Καυστικών** και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Με την πειραματική αυτή μέθοδο **η επικρατούσα ιδιομορφία (singularity) των τάσεων παρά το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία, η οποία μετρούι ενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία για την μελέτη της παρά το άκρο της ρωγμής περιοχής.** Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται απο την συγκέντρωση επί ιδιόμορφης στον χώρο καμπύλης, η οποία καλείται **καυστική**, των ακτίνων φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονουμένη παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η καυστική αυτή λαμβάνεται επάνω σε πέτασμα και αφού ευρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή επιτρέπει την μελέτη αυτής.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά διαφανή (μέθοδος διερχομένων καυστικών) και μη διαφανή (μέθοδος των ανακλωμένων καυστικών) και αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο μοναδική για την μελέτη των ρωγμών.

Μεταβολή της Εντασης Φωτεινής Ακτίνας Διερχομένης δια διαφανούς Μέσου

Θεωρούμε επίπεδο δοκίμιο με παράλληλες παράπλευρες επιφάνειες από διαφανές υλικό και ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτουσα καθέτως επί του δοκιμίου σε τυχόν σημείο P. Η ακτίνα κατά την πρόσπτωσή της επί του δοκιμίου αφ' ενός μεν ανακλάται αφ' ετέρου δε διαθλάται και ακολούθως διέρχεται δια του δοκιμίου. Η διαθλωμένη όμως ακτίνα ανακλάται στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου και ακολούθως δια διαθλάσεως εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια του δοκιμίου. Οι διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις της ακτίνος εξακολουθούν επ' άπειρον, έτσι ώστε μια απειρία ακτίνων εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια του δοκιμίου.

Η ένταση I της φωτεινής ακτίνας μειώνεται συνεχώς κατά τις διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις. Εάν με $r_{m,l}$ συμβολίσουμε τις εξερχόμενες ακτίνες από την εμπρός επιφάνεια του δοκιμίου και με $t_{m,l}$ τις εξερχόμενες ακτίνες από την πίσω επιφάνεια του δοκιμίου, όπου ο δείκτης m παριστάνει τον αριθμό των ανακλάσεων και ο δείκτης l τον αριθμό των διαθλάσεων, τότε έχουμε για τις εντάσεις των ακτίνων αυτών:

$$I_{r,t_{m,l}} = \beta^m (1-\beta)^l I \quad (1)$$

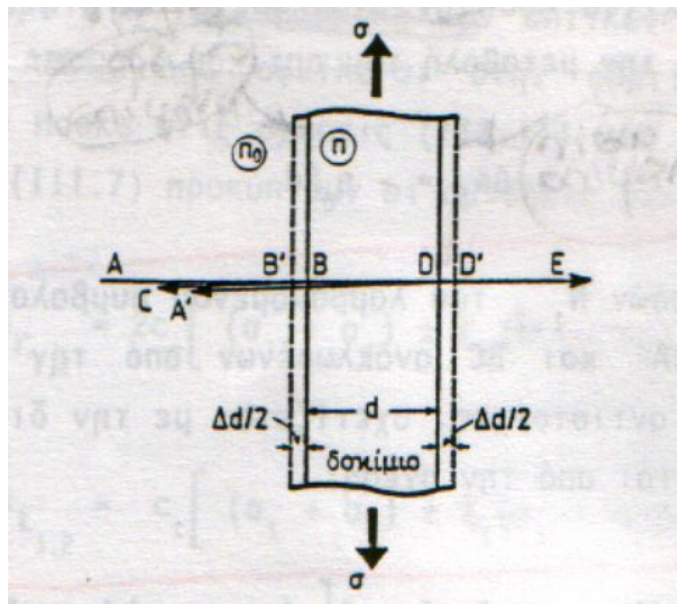
όπου ο λόγος β μείωσης της έντασης δίνεται από την σχέση:

$$\beta = \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2 \quad (2)$$

όπου η ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού του δοκιμίου.

Επίδραση της Φόρτισης επί του Οπτικού Δρόμου των Ανακλωμένων ή των Διερχομένων Ακτίνων

Θεωρούμε το κάτωθι σχήμα:



όπου d είναι το πάχος του δοκιμίου, η_0 ο δείκτης διαθλάσεως του περιβάλλοντος το δοκίμιο μέσου και η ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού του δοκιμίου όταν είναι αφόρτιστο.

Η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας ABDA' που οφείλεται στην φόρτιση είναι:

$$\Delta s_{\eta_{1,2}} = s_{L_{1,2}} - s_A = 2[(\eta_{1,2} - \eta)d + (\eta - \frac{\eta_o}{2}) \Delta d] \quad (3)$$

με $s_A = 2(AB)\eta_o + 2d\eta$

$$s_{L_{1,2}} = 2((AB) - \frac{\Delta d}{2})\eta_o + 2(d + \Delta d)\eta_{1,2}$$

$s_{L_{1,2}}$ ο οπτικός δρόμος μεταξύ των σημείων A και A'

$$\eta_{1,2} = \eta + \Delta\eta_{1,2}$$

$\eta_{1,2}$ ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού του φορτισμένου δοκιμίου

$\Delta\eta_{1,2}$ η μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως

ομοίως για την οπτική ακτίνα ABDE την διερχομένη δια του δοκιμίου λαμβάνουμε για τη μεταβολή του οπτικού δρόμου που οφείλεται στην φόρτιση:

$$\Delta s_{t_{1,2}} = (\eta_{1,2} - \eta) d + (\eta - \eta_o)\Delta d \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση στις προηγούμενες παίρνω τις κάτωθι σχέσεις:

$$\Delta\eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1\varepsilon_{1,2} + b_2(\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3) \quad (5)$$

όπου b_1, b_2 σταθερές και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες παραμορφώσεις. Με την εισαγωγή του νόμου του Hooke οι κάτωθι σχέσεις είναι:

$$\Delta s_{\eta_{1,2}} = 2c_r[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r(\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (6)$$

$$\Delta s_{t_{1,2}} = c_t[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t(\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (7)$$

όπου $\xi_{r,t}$ είναι ο συντελεστής της οπτικής ανισοτροπίας του υλικού και c_r, c_t είναι τασεοπτικές σταθερές που δίνονται από τις σχέσεις:

$$c_r = \frac{\alpha_r + \beta_r}{2}, \quad c_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{2}, \quad \xi_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} - \beta_{r,t}}{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}} \quad (8)$$

$$\alpha_r = \frac{1}{E}[b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \frac{\eta_o}{2})]$$

$$\beta_r = \frac{1}{E} [b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \frac{\eta_o}{2})]$$

$$\alpha_t = \frac{1}{E} [b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \eta_o)]$$

$$\beta_t = \frac{1}{E} [b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \eta_o)]$$

Βασική Θεωρία της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών

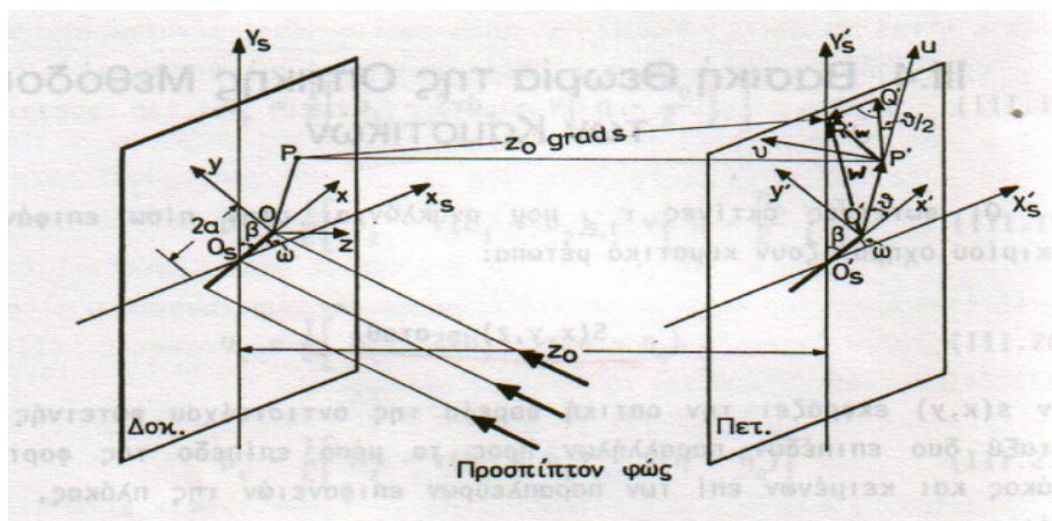
Οι φωτεινές ακτίνες $r_{1,2}$ που ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου σχηματίζουν κυματικά μέτωπα:

$$S(x, y, z) = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Εάν $s(x, y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντιστοίχου φωτεινής ακτίνας μεταξύ δυο επιπέδων παραλλήλων προς το μέσο επίπεδο της φορτιζόμενης πλάκας και κειμένων επί των παραπλεύρων επιφανειών της πλάκας, ισχύει η σχέση:

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (9)$$

όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ του οποίου η αρχή O συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξων Ox συμπίπτει με τον άξωνα της ρωγμής και ο άξων Oz είναι κάθετος επί του δοκιμίου και $s(x, y)$ είναι ο οπτικός δρόμος δια του δοκιμίου στο τυχόν σημείο P αυτού, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Η απόκλιση των ανακλωμένων φωτεινών ακτίνων σε απόσταση z_o από του μέσου επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα w επί του επιπέδου $z = z_o$ και δίνεται, σύμφωνα με την θεωρία της Εικονικής, από την σχέση:

$$w = z_o \text{grad}S(x, y, z) = -z_o \left(\frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (10)$$

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j$$

Ισχύει η σχέση $s(x, y) = z_o + \Delta s_{r,t}(x, y)$, όπου z_o παριστάνει σταθερά για κάποιο κυματικό μέσο. Έτσι έχουμε:

$$w = -z_o \text{grad} \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (11)$$

Οι αιχμές του διανύσματος w καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z = z_o$ περιβάλλουσα (**καυστική**), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες.

Από τις σχέσεις (6),(7),(11) και τις επόμενες:

$$\Delta s_{r_1} = \Delta s_{r_2} = 2c_r(\sigma_1 + \sigma_2)d$$

$$\Delta s_{t_1} = \Delta s_{t_2} = c_t(\sigma_1 + \sigma_2)d$$

προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1) Για τα ανισότροπα υλικά με συντελεστή διπλοθλαστικότητας $\xi_{r,t}$ είναι:

1.1) Για την πρώτη ακτίνα την ανακλωμένη από την πίσω επιφάνεια του δοκιμίου:

$$w = -2z_o dc_r \text{grad}[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_{r,t}(\sigma_1 - \sigma_2)]$$

1.2) Για την πρώτη ακτίνα την διερχομένη δια του δοκιμίου:

$$w = -2z_o dc_t \text{grad}[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_{r,t}(\sigma_1 - \sigma_2)]$$

Έτσι έχουμε μια γενικότερη σχέση:

$$w = -\varepsilon z_o dc_{r,t} grad[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_{r,t}(\sigma_1 - \sigma_2)]$$

Όπου η σταθερά ε παίρνει την τιμή $\varepsilon = 2$ για την πρώτη ανακλωμένη ακτίνα από την πίσω επιφάνεια του δοκιμίου που παριστάνεται με τον δείκτη (r) και $\varepsilon = 1$ για την διερχομένη δια του δοκιμίου ακτίνα που παριστάνεται με τον δείκτη (t).

2) Για τα ισότροπα υλικά ($\xi_{r,t} = 0$) είναι:

2.1) Για την πρώτη ακτίνα την ανακλωμένη από την πίσω επιφάνεια του δοκιμίου:

$$w = -2z_o dc_r grad(\sigma_1 + \sigma_2)$$

2.2) Για την πρώτη ακτίνα την διερχομένη δια του δοκιμίου:

$$w = -z_o dc_t grad(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Έτσι έχουμε μια γενικότερη σχέση:

$$w = -\varepsilon z_o dc_{r,t} grad(\sigma_1 + \sigma_2)$$

όπου η σταθερά ε παίρνει τις τιμές 2 και 1 για την ανακλωμένη και διερχομένη ακτίνα αντιστοίχως.

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα επί του δοκιμίου φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα (+) ή συγκλίνουσα (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης είναι:

$$\lambda_m = \frac{z_o \pm z_i}{z_i}$$

αντίστοιχα, με z_o την απόσταση του πετάσματος αναφοράς από το δοκίμιο και z_i την απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από το δοκίμιο.

Εφαρμογή της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο Εντατικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ισότροπα Υλικά

Κατά την επίλυση του επίπεδου εντατικού προβλήματος το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \phi(z)$$

όπου $\phi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z .

Εστω ότι η $\phi(z)$ είναι της μορφής:

$$\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

όπου $u(x, y), v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x, y που ικανοποιούν τις σχέσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Οι συναρτήσεις u και v ικανοποιούν την εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα ισότροπα υλικά δίνεται από την σχέση:

$$w = 4 C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad C_{r,t,f}^* = -\frac{\epsilon z_o dc_{r,t,f}}{\lambda_m}$$

Εαν η απόκλιση αυτή αναφερθεί στην αρχή O' του συστήματος συντεταγμένων $O'x'y'z'$ επί του πετάσματος αναφοράς, τότε το διάνυσμα απόκλισης εκφράζεται ως $W = z + w$.

Το διάνυσμα W στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέτασμα αναφοράς, γράφεται:

$$W = x' + iy'$$

Ετσι προκύπτει:

$$x' = x + C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$y' = y + C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y}$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ακτίνων. Οι αποκλίνουσες ακτίνες συγκεντρώνονται πάνω σε μια οριακή καμπύλη που φωτίζεται ισχυρά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **καυστική**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει ιδιόμορφη (singular) καμπύλη για το μέγεθος W . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας (singularity) πληρούνται με τον μηδενισμό της Ιακωβιανής (Jacobian) διακρίνουσας:

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Από τη διακρίνουσα αυτή προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f}^* \Phi''(z)| = 1$$

Η σχέση αυτή είναι η **εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής**.

$$\text{Ισχύει } \overline{\Phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Και καταλήγουμε στην σχέση $W = z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\Phi'(z)}$

Η τελευταία σχέση είναι η **εξίσωση της καυστικής** με την $\Phi(z)$ να ικανοποιεί την σχέση:
 $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \phi(z)$

Ανάλυση του Ελαστικού Προβλήματος της Εγκάρσιας Ρωγμής

Εαν χρησιμοποιήσουμε την τασική συνάρτηση Westergaard Z , η οποία συνδέεται με την $\Phi(z)$ με την σχέση: $\Phi(z) = \phi'(z) = \frac{Z}{2}$ η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής παίρνει την μορφή: $|2C_{r,t,f}^* Z''(z)| = 1$ και χρησιμοποιώντας τον συντελεστή μεγεθύνσεως λ_m έχουμε την σχέση για την εξίσωση της καυστικής:

$$W = \lambda_m [z + 2C_{r,t,f}^* \overline{Z'(z)}]$$

Ισχύει η σχέση: $|\zeta| = r_o = (\frac{3}{2} C_{r,t,f})^{2/5}$, η αρχική καμπύλη είναι ο κύκλος r_o .

Για την εξίσωση της καυστικής έχουμε την σχέση $\frac{W}{\lambda_m} = \zeta + C_{r,t,f} \overline{\zeta}^{-3/2}$ και με $\zeta = r e^{i\theta}$, $\overline{\zeta} = r e^{-i\theta}$

$$\text{έχουμε } \frac{W}{\lambda_m} = r_o (e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{3i\theta/2})$$

Με τις σχέσεις $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, $e^{3i\theta/2} = \cos\frac{3\theta}{2} + i \sin\frac{3\theta}{2}$ προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής παρά το άκρο της ρωγμής, η οποία είναι μια συμμετρική καμπύλη με άξονα συμμετρίας συμπίπτοντα με τον άξονα της ρωγμής. Η καυστική είναι μια κλειστή καμπύλη περατωμένη και περιοδική με περίοδο 4π .

Η καυστική παρουσιάζει την μέγιστη και ελαχίστη τιμή της πάνω στον άξονα συμμετρίας της $O'x_1$. Αυτό γίνεται για τις τιμές:

$$\theta_{l(1)}^{\max} = 0 \Rightarrow \rho_{\max} = \frac{5r_o}{3} \lambda_m$$

$$\theta_{l(2)}^{\max} = 2\pi \Rightarrow \rho_{\min} = \frac{r_o}{3} \lambda_m$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων είναι $D_l^{\max} = 3r_o \lambda_m$.

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$Z_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi\zeta}}, \quad K_1 = \sigma \sqrt{\pi a}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι:

$$x = \lambda_m r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$y = \lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

προκύπτει: $D^{\max} = 2y$ και $K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_o d \lambda_m^{2/3} c_{r,t,f}} \left(\frac{D^{\max}}{\delta} \right)^{5/2}$

Χρησιμοποιώντας **συντελεστές διόρθωσης (correction factors)**, δ_l^{\max} , δ_t^{\max} παίρνουμε τις διαμέτρους της καυστικής D_t^{\max} και D_l^{\max} οι οποίοι ισούνται με:

$$D_l^{\max} = \lambda_m r_o \delta_l^{\max} \text{ και } D_t^{\max} = \lambda_m r_o \delta_t^{\max}$$

Ανάλυση του Ελαστικού Προβλήματος της Κεκλιμένης Ρωγμής

Η συνάρτηση Westergaard για κεκλιμένη ρωγή μήκους $2a$ εντός απείρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{K^*}{\sqrt{2\pi\zeta}}, \quad K^* = K_I - iK_{II}, \quad \kappa = \frac{K_{II}}{K_I}$$

Η κατάσταση αυτή ισοδυναμεί με την περίπτωση της εγκάρσιας ρωγμής που υπόκειται σε εφελκυστική τάση σ στο άπειρο, όπου η τασική συνάρτηση Z_I δίνεται από τη σχέση,

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \text{ με } K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \text{ και } \zeta = re^{i\theta}, \text{ και συγχρόνως υπόκειται σε διάτμηση } \tau \text{ στο άπειρο. Η}$$

τασική συνάρτηση είναι $Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}}$ με $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$.

Εχομε την εξίσωση της καυστικής:

$$W = \zeta + C_{r,t,f} \frac{\overline{K^*}}{K_I} \zeta^{-3/2}$$

και από την σχέση: $\tan \omega = \frac{K_{II}}{K_I} = \kappa$ παίρνουμε την σχέση:

$$W = r_o (e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{i(\omega+3\theta/2)})$$

ή την σχέση:

$$W = r_o (\cos\theta + \frac{2}{3} \cos(\frac{3\theta}{2} + \omega)) + r_o (\sin\theta + \frac{2}{3} \sin(\frac{3\theta}{2} + \omega))i$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής ως προς τον άξονα της ρωγμής $O'x$ και τον κάθετο $O'y$, δηλαδή:

$$x'_{r,t,f} = r_o (\cos\theta + \frac{2}{3} \cos(\frac{3\theta}{2} + \omega))$$

$$y'_{r,t,f} = r_o (\sin\theta + \frac{2}{3} \sin(\frac{3\theta}{2} + \omega))$$

με ω η γωνία κλίσης της ρωγμής.

Εφαρμογή της Οπτικής Μεθόδου των Καυστικών στο Επίπεδο των Καυστικών στο Επίπεδο Ενταντικό Πρόβλημα για Οπτικώς Ανισότροπα Υλικά

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για οπτικώς ανισότροπα υλικά με συντελεστή διπλοθλαστικότητας $\xi_{r,t}$ δίνεται από τη σχέση :

$$w = C_{r,t}^* grad[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_{r,t}(\sigma_1 - \sigma_2)]$$

με $C_{r,t}^* = -\epsilon z_o dc_{r,t}$

Το άθροισμα και η διαφορά των κυρίων τάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} Z$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2y[(\operatorname{Im} Z')^2 + (\operatorname{Re} Z')^2]^{1/2}$$

όπου Z είναι η τασική συνάρτηση Westergaard. Καταλήγουμε στη παρακάτω σχέση:

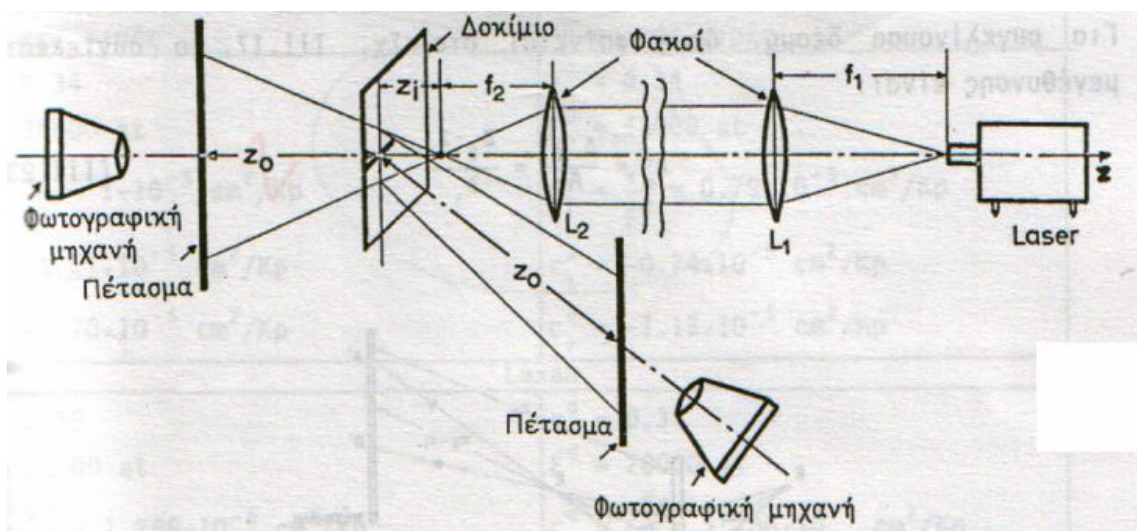
$$w = 2C_{r,t}^* grad(\operatorname{Re} Z) \pm 2C_{r,t}^* \xi_{r,t} grad[|y|((\operatorname{Im} Z')^2 + (\operatorname{Re} Z')^2)^{1/2}]$$

Η σχέση αυτή είναι μη γραμμική.

Πειραματική Διάταξη

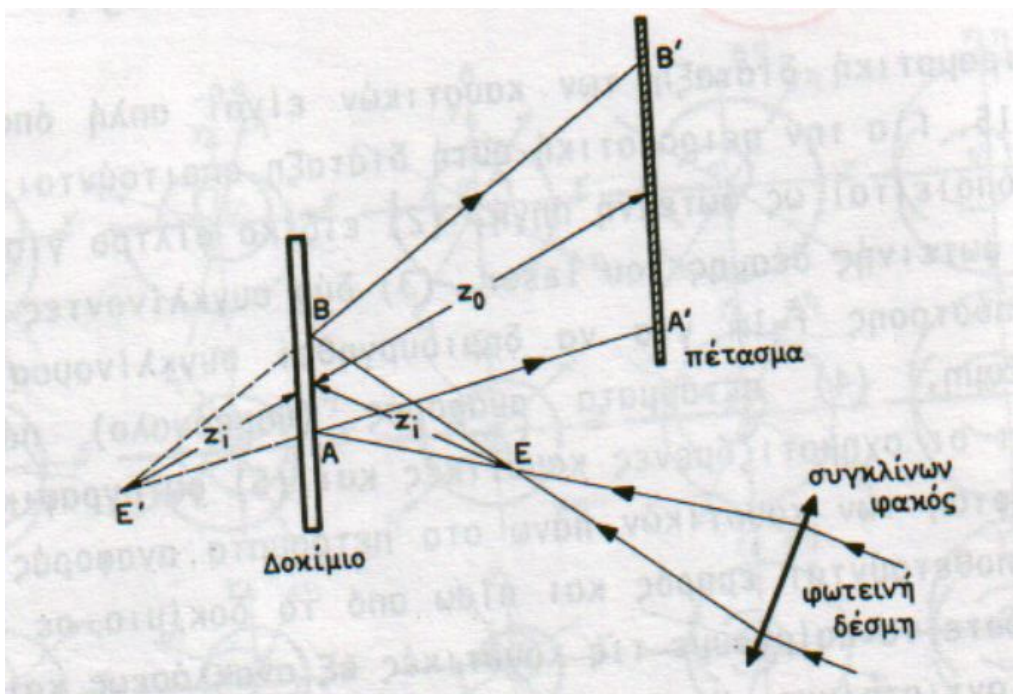
Η πειραματική διάταξη των καυστικών είναι απλή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για την πειραματική αυτή διάταξη απαιτούνται:

- (1) laser He-Ne που χρησιμοποιείται ως φωτεινή πηγή,
- (2) ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του laser,
- (3) δύο συγκλίνοντες οπτικούς φακούς εστιακής απόστασης $f=1\text{m}$ για να δημιουργηθεί συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη,
- (4) πέτασμα αναφοράς (θαμπόυαλο) πάνω στα οποία προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές και
- (5) φωτογραφικές μηχανές για την φωτογράφιση των καυστικών πάνω στα πετάσματα αναφοράς. Τα πετάσματα αναφοράς τοποθετούνται εμπρός και πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_o από το δοκίμιο ώστε να παίρνουμε τις καυστικές εξ ανακλάσεως και τις καυστικές διελεύσεως, αντιστοίχως. Η εστία της φωτεινής δέσμης, ανάλογα με το είδος του δοκίμιου και τον τύπο των καυστικών, τοποθετείται εμπρός ή πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_i . Για τα διαφανή υλικά η εστία τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο (αποκλίνουσα δέσμη) ενώ για αδιαφανή υλικά η εστία τοποθετείται πίσω από το δοκίμιο (συγκλίνουσα δέσμη).



Η οπτική διάταξη για αποκλίνουσα ή συγκλίνουσα δέσμη έχει συντελεστή μεγέθυνσης λ_m , ενώ για παράλληλη δέσμη ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι ίσος με 1 ($\lambda_m = 1$). Ο συντελεστής μεγέθυνσης υπολογίζεται γεωμετρικά σύμφωνα με την γεωμετρική οπτική. Για αποκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

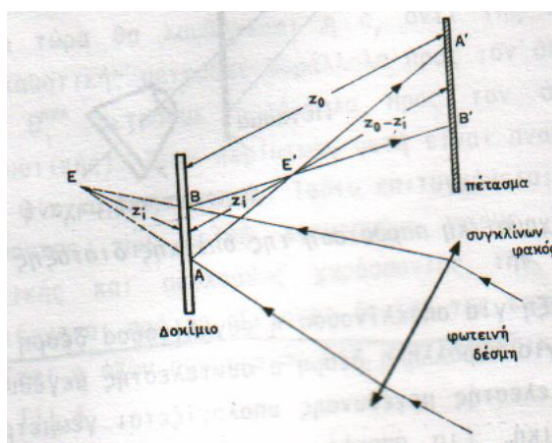
$$\lambda_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_o + z_i}{z_i}$$



Για συγκλίνουσα δέσμη ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

$$\lambda_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_o - z_i}{z_i}$$

χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω σχήμα



ΙΣΟΠΑΧΕΙΣ

Γενικά

Η ανάλυση των τάσεων, δηλαδή ο προσδιορισμός των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 , είναι πολύ εύκολο να γίνει εάν είναι γνωστό το άθροισμα των κυρίων τάσεων $\sigma_1 + \sigma_2$. Δεδομένου ότι η διαφορά $\sigma_1 - \sigma_2$ των κυρίων τάσεων προκύπτει με μεγάλη ακρίβεια από το δίκτυο των ισόχρωμων, τότε εάν προσδιορισθεί σε κάθε σημείο του επιπέδου δοκιμίου το άθροισμα $\sigma_1 + \sigma_2$ των κυρίων τάσεων προκύπτουν αμέσως οι τιμές των τάσεων σ_1 και σ_2 . Ο προσδιορισμός του αθροίσματος των κυρίων τάσεων επιτυγχάνεται πειραματικά από την μεταβολή του πάχους του δοκιμίου κατά την φόρτιση. Οι καμπύλες ίσης μεταβολής του πάχους καλούνται **ισοπαχείς**. Έτσι, φορτίζοντας ένα δοκίμιο είναι δυνατόν να ληφθεί ένα δίκτυο ισοπαχών καμπυλών με το φαινόμενο της **οπτικής συμβολής**.

Στο επίπεδο εντατικό πρόβλημα το άθροισμα των κυρίων τάσεων $\sigma_1 + \sigma_2$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace:

$$\nabla^2(\sigma_1 + \sigma_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$$

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace ονομάζονται **αρμονικές συναρτήσεις**.

Προσδιορισμός του Αθροίσματος $\sigma_1 + \sigma_2$ από την Μεταβολή του Πάχους Δd του Δοκιμίου

Από τη θεωρία ελαστικότητας και τον νόμο του Hooke για την επίπεδη εντατική κατάσταση (plane stress) ισχύει:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta d}{d} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

από την οποία προκύπτει:

$$\Delta d = -\frac{\nu d}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Το μέτρο της ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν του υλικού υπολογίζονται εύκολα και επομένως υπολογίζεται το άθροισμα των κυρίων τάσεων από την μεταβολή του πάχους Δd . Η μεταβολή του πάχους ενός δοκιμίου είναι της τάξεως 10^{-4} cm , ανάλογα με το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Επομένως, η μέτρηση του Δd με μηχανικά μέσα ή μηκυνσιόμετρα γίνεται πολύ δύσκολα, χωρίς μεγάλη ακρίβεια και περιορίζεται από σημείο σε σημείο. Για μια εικόνα της μεταβολής του πάχους Δd καθ' όλη την επιφάνεια του δοκιμίου χρησιμοποιείται η πειραματική μέθοδος του φαινομένου της οπτικής συμβολής.

Σύμφωνα με το φαινόμενο της οπτικής συμβολής, μεταβολή μήκους της τάξεως ενός μήκους κύματος του χρησιμοποιούμενου φωτός μετασχηματίζεται με την οπτική συμβολή σε ένα κροσσό συμβολής που απεικονίζεται με μεγάλη ακρίβεια, δηλαδή επιτυγχάνεται πολλαπλασιασμός της μεταβολής του μήκους. Οι κροσσοί αυτοί συμβολής λαμβάνονται με ειδικές οπτικές διατάξεις τα **συμβολλόμετρα**.

Στην περίπτωση του φορτιζομένου δοκιμίου, υπό συνεπίπεδου προς το επίπεδο συστήματος δυνάμεων, προκύπτει μεταβολή του πάχους d κατά Δd . Τότε ισχύει: $\Delta d = N \frac{\lambda}{2}$, με N η τάξη των κροσσών συμβολής και λ το μήκος κύματος. Έτσι, ενώ στην αφόρτιστη κατάσταση θα σχηματισθεί ένα δίκτυο κροσσών συμβολής, μετά την φόρτιση λόγω της μεταβολής του πάχους κατά Δd θα σχηματισθεί νέο δίκτυο κροσσών συμβολής το οποίο θα είναι μετατοπισμένο σε σχέση με την θέση του αρχικού δικτύου.

Οι ισοπαχείς κροσσοί εκφράζονται από την εξής εξίσωση:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = N \frac{f_p}{d}$$

όπου $f_p = -E\lambda/2\nu$ είναι σταθερά-ισοπαχών και εξαρτάται από το υλικό και το μήκος κύματος του χρησιμοποιούμενου φωτός. Η σταθερά αυτή υπολογίζεται πειραματικά.

Από τη μελέτη των ισοχρώμων προέκυψε ότι:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{\max} = N \frac{f_\sigma}{d}$$

Το ανάλογο της μεμβράνης είναι μια οπτική μέθοδος υπολογισμού του αθροίσματος $\sigma_1 + \sigma_2$ των κυρίων τάσεων από τις ισοϋψείς που σχηματίζονται με μηχανική συμβολή (*moire'*) μέσω του πλέγματος και των ανακλάσεων των φωτεινών ακτίνων από την επιφάνεια του σώματος.

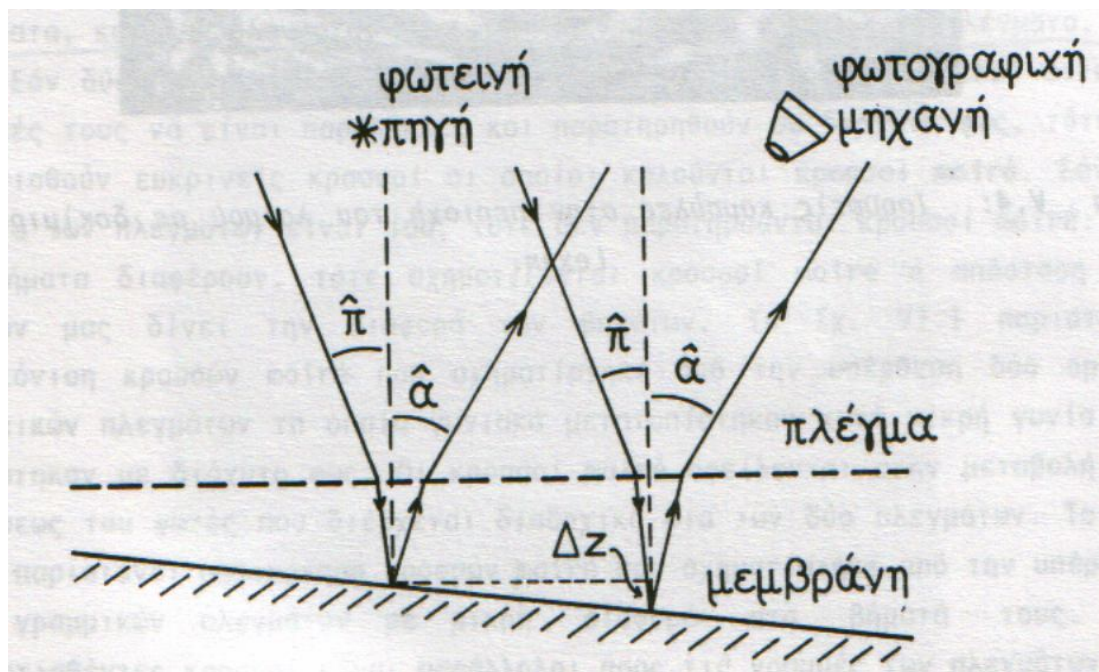
Προς τούτο λεπτή μεμβράνη τεντώνεται με σταθερή τάση T ανά μονάδα μήκους και φορτίζεται κάθετα υπό πίεσεως $p = p(x, y)$ ανά μονάδα επιφάνειας. Για μικρές κλίσεις της επιφάνειας, από την ισορροπία της κατά τον άξονα z , προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{T}$$

όπου z τα βέλη κάμψης της επιφάνειας της μεμβράνης.

Από την προηγούμενη εξίσωση συνάγεται ότι τα βέλη κάμψης της μεμβράνης ικανοποιούν την εξίσωση Laplace. Το πρώτο μέλος της εξίσωσης αυτής δίνει το άθροισμα των κυρίων τάσεων μέσω των ισοϋψών που λαμβάνονται από την μηχανική συμβολή πάνω στο πλέγμα. Προς τούτο κατασκευάζεται πλαίσιο πάνω στο οποίο τεντώνεται η μεμβράνη που παίρνει το σχήμα του πλαισίου.

Πάνω στην μεμβράνη τοποθετείται πλέγμα γνωστού βήματος p (πχ. 8 γραμμές/χιλιοστό). Ακολούθως φωτεινή δέσμη προσπίπτει πάνω στο πλέγμα υπό γωνία $\hat{\pi}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η δέσμη διερχομένη από το πλέγμα ανακλάται στην μεμβράνη και με την ανάκλαση της δέσμης πάνω στο πλέγμα συμβάλλει και έτσι σχηματίζεται δίκτυο κροσσών μηχανικής συμβολής το οποίο παρατηρείται υπό γωνία $\hat{\alpha}$. Το δίκτυο αυτό είναι οι ισοψείς καμπύλες, το δε ύψος Δz ανά κροσσό δίνεται από την σχέση:

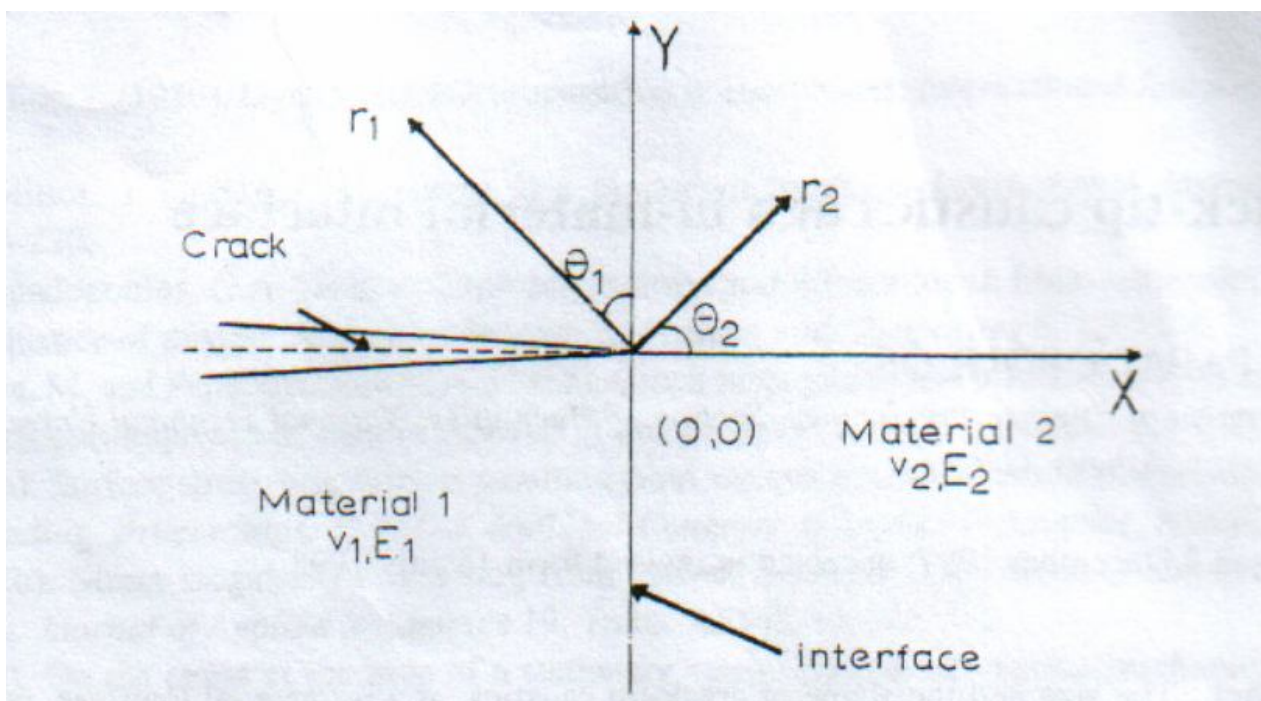
$$\Delta z = \frac{P}{\tan(\hat{\pi}) + \tan(\hat{\alpha})}$$

Έτσι, από το δίκτυο των ισοψών, εάν είναι γνωστά τα ύψη z , τότε υπολογίζεται το άθροισμα των κυρίων τάσεων διότι το άθροισμα αυτό είναι ανάλογο των υψών. Επίσης, από το δίκτυο των ισοψών κροσσών με εφαρμογή της σχέσης $\Delta z = \frac{P}{\tan(\hat{\pi}) + \tan(\hat{\alpha})}$ υπολογίζονται τα ύψη z

και εξ αυτών η τοπογραφία της επιφάνειας του σώματος. Η μέθοδος αυτή καλείται και **μέθοδος της σκιάς (shadowmethod)**.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι μελέτη του τασικού πεδίου στην άκρη της ρωγμής με την μέθοδο των καυστικών. Έχουμε διφασικό υλικό και το παρακάτω σχήμα είναι χαρακτηριστικό:



Πρόκειται για δύο υλικά πάρα πολύ καλά συνδεδεμένα μεταξύ τους με μέτρο ελαστικότητας E_1 και E_2 αντίστοιχα και λόγους Poisson ν_1 και ν_2 , για το υλικό (1) και το υλικό (2). Για την μελέτη αυτού του φαινομένου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση $X(r, \theta)$, οποία ισούται με:

$$X(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta)$$

όπου $F(\theta)$ ισοδυναμεί με: $F(\theta) = \alpha_2 \sin((\lambda+1)\theta) + b_2 \cos((\lambda+1)\theta) + c_2 \sin((\lambda-1)\theta) + d_2 \cos((\lambda-1)\theta)$.

Η τασική συνάρτηση $X(r, \theta)$ ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση $\nabla^4 X(r, \theta) = 0$.

Οι συντελεστές $\alpha_2, b_2, c_2, d_2, \alpha_1, b_1, c_1, d_1$ προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες ενώ τους συντελεστές α_1, b_1, c_1, d_1 θα τους δούμε παρακάτω.

Οι δείκτες των συντελεστών αναφέρονται στο υλικό (1) και (2). Οι οριακές συνθήκες είναι:

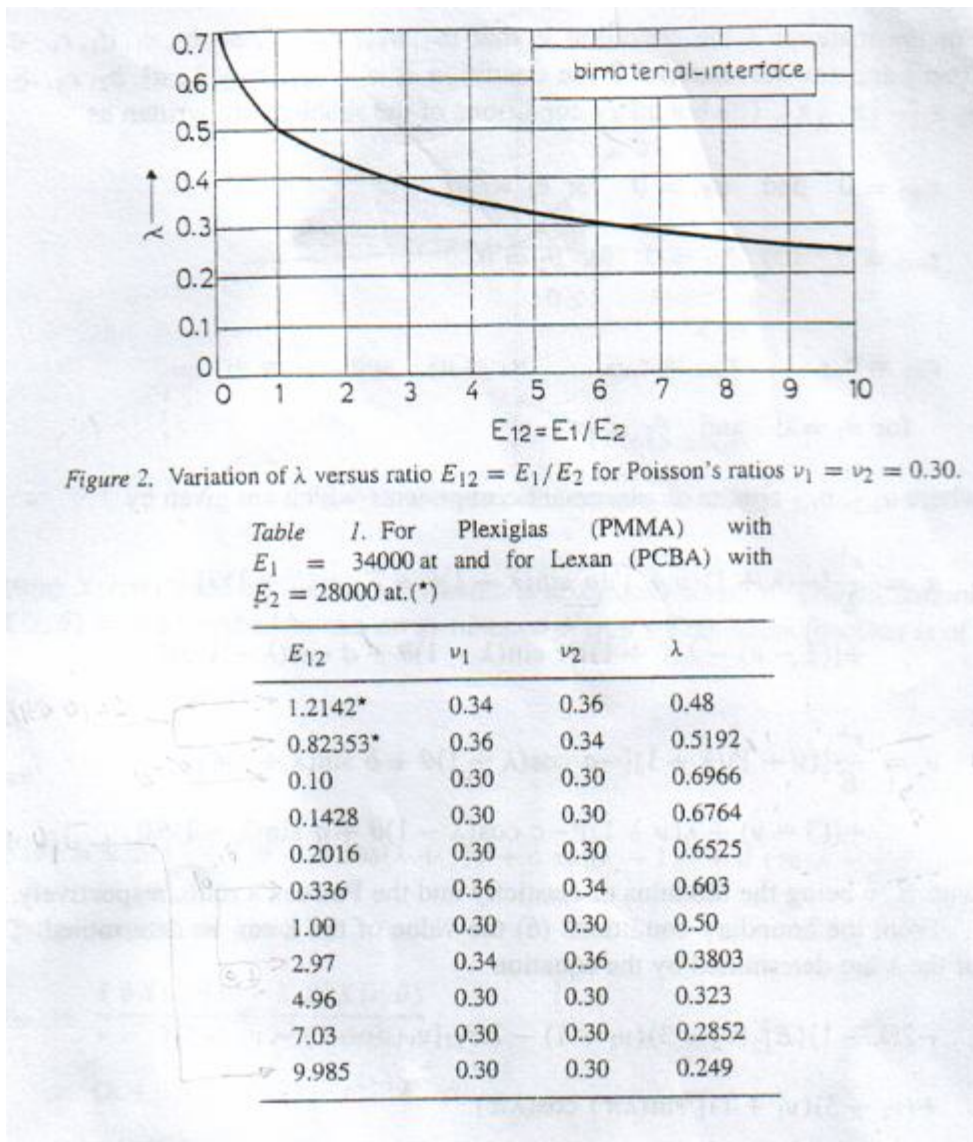
$$\tau_{r\theta_1} = 0 \text{ και } \sigma_{\theta_1} = 0 \text{ για } \theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\tau_{r\theta_2} = 0 \text{ και } \nu_2 = 0 \text{ για } \theta_2 = 0,$$

$$\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2}, \tau_{r\theta_1} = \tau_{r\theta_2}, u_1 = u_2 \text{ και } \nu_1 = \nu_2 \text{ για } \theta_1 = 0 \text{ και } \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

όπου u_1, u_2, ν_1 και ν_2 είναι οι μετατοπίσεις των υλικών (1) και (2) για συγκεκριμένη γωνία.

Από τις οριακές συνθήκες προκύπτει μια εξίσωση, η οποία οδηγεί στον προσδιορισμό του λ . Το λ παίρνει τιμές μεταξύ ένα και μηδέν, ($0 < \lambda < 1$). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω σχήμα.



όπου $E_{12} = E_1/E_2$.

Η εκτροπή του φωτός, η ανάκλαση και το πέρασμα αυτού από ένα σημείο μιας επιφάνειας πάχους d ,

δίνεται από την σχέση: $W_{r,t,f} = X_{r,t,f}i + Y_{r,t,f}j = r + w_{r,t,f}$

με $w_{r,t,f}$ να ισούται: $w_{r,t,f} = -\varepsilon z_o t c_{r,t,f} \text{grad}_{x,y} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$.

Στον τύπο αυτό, ε είναι ένας πολλαπλός παράγοντας, ο οποίος εξαρτάται εάν το φως ανακλάται, διαπερνά ή διαθλάται. Ο όρος z_o είναι η απόσταση του δοκιμίου από το πέτασμα,

ενώ ο όρος t είναι το πάχος του δοκιμίου, $c_{r,t,f}$ είναι η οπτική σταθερά του υλικού. Οι τάσεις σ_{rr} και $\sigma_{\theta\theta}$ προκύπτουν από την τασική συνάρτηση από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial X(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial r^2}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών στην μπροστά και πίσω επιφάνεια δίνονται από τις σχέσεις:

$$X_{rf} = \lambda_m r_{o,1,2} \left\{ \cos \theta \pm \frac{1}{(\lambda - 2)\sqrt{c_2 + d_2}} [c_2 \sin((\lambda - 2)\theta) + d_2 \cos((\lambda - 2)\theta)] \right\}$$

$$Y_{rf} = \lambda_m r_{o,1,2} \left\{ \sin \theta \pm \frac{1}{(\lambda - 2)\sqrt{c_2 + d_2}} [c_2 \cos((\lambda - 2)\theta) - d_2 \sin((\lambda - 2)\theta)] \right\}$$

όπου λ_m ο συντελεστής μεγέθυνσης, ο οποίος ισούται με $\lambda_m = \frac{z_o \pm z_i}{z_i}$, z_i η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από το δοκίμιο και z_o η απόσταση του δοκιμίου από το πέτασμα. Επίσης, $r_{o,1,2} \equiv r = [4\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)C_{rf} \sqrt{c_{1,2}^2 + d_{1,2}^2}]^{1/(3-\lambda)}$. Το μέγεθος C_{rf} είναι ίσο με $C_{rf} = -\frac{\varepsilon z_o t c_{rf}}{\lambda_m}$.

Στην συνέχεια θα δοθούν επεξηγήσεις για τους δείκτες $r, t, f, 1, 2$.

Ο δείκτης r αναφέρεται στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου όπου γίνεται η ανάκλαση, ο δείκτης t αναφέρεται στην ακτινοβολία που διαπερνά το δοκίμιο και ο δείκτης f αναφέρεται στην μπροστινή επιφάνεια του δοκιμίου. Τέλος οι δείκτες 1 και 2 αντιπροσωπεύουν τα υλικά 1 και 2 τα οποία είναι συνδεδεμένα.

Οι συντελεστές $\alpha_2, b_2, c_2, d_2, \alpha_1, b_1, c_1, d_1$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_2 = c_2 = 0$$

$$d_1 = \{E_{12} [b_2 (v_2 + 1)(\lambda + 1) - d_2 [\lambda(v_2 + 1) + v_2 - 3]] - (\lambda + 1)(b_2 - d_2)(v_1 + 1)\} 0.25 \sin \frac{\lambda\pi}{2}$$

$$c_1 = -\{E_{12}[b_2(v_2 + 1)(\lambda + 1) - d_2[\lambda(v_2 + 1) + 3 - v_2]] - [b_2(\lambda + 1) + d_2(1 - \lambda)](v_1 + 1)\}0.25 \sin \frac{\lambda\pi}{2}$$

$$b_2 = \{d_2[[E_{12}[\lambda(3v_2 - 5) + v_2 - 3] - [v_1(3\lambda + 1) + 1 - \lambda]]\cos(\lambda\pi) + [v_1(2\lambda^2 + \lambda + 1) + (\lambda - 1)(2\lambda + 3)] - E_{12}[2\lambda^2(v_2 + 1) + \lambda(v_2 + 1) + v_2 - 3]]\} / \{[[E_{12}(v_2 + 1) + 3 - v_1]\cos(\lambda\pi) - (2\lambda + 1)[E_{12}(v_2 + 1) - (v_1 + 1)]](\lambda + 1)\}$$

Ο συντελεστής d_2 είναι ελεύθερος άγνωστος.

Ο υπολογισμός των καυστικών για την μπροστά και πίσω επιφάνειες γίνεται για τις εξής περιοχές:

Για $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ δηλαδή για το υλικό (2) οι εξισώσεις των καυστικών είναι:

$$X_{rf} = \lambda_m r_{o2} \left\{ \cos \theta \pm \frac{1}{(\lambda - 2)\sqrt{c_2 + d_2}} [c_2 \sin((\lambda - 2)\theta) + d_2 \cos((\lambda - 2)\theta)] \right\}$$

$$Y_{rf} = \lambda_m r_{o2} \left\{ \sin \theta \pm \frac{1}{(\lambda - 2)\sqrt{c_2 + d_2}} [c_2 \cos((\lambda - 2)\theta) - d_2 \sin((\lambda - 2)\theta)] \right\}$$

Για $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ και $\pi < \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ για το υλικό (1) έχουμε τις εξής εξισώσεις:

$$X_{rf} = \lambda_m r_{o1} \left\{ \cos \theta \pm \frac{1}{(\lambda - 2)\sqrt{c_2 + d_2}} [c_2 \sin((\lambda - 2)\theta) + d_2 \cos((\lambda - 2)\theta)] \right\}$$

$$Y_{rf} = \lambda_m r_{o1} \left\{ \sin \theta \pm \frac{1}{(\lambda - 2)\sqrt{c_2 + d_2}} [c_2 \cos((\lambda - 2)\theta) - d_2 \sin((\lambda - 2)\theta)] \right\}$$

Βάσει των προαναφερθέντων εξισώσεων γίνονται οι υπολογισμοί.

Η αναγκαία συνθήκη για το σχηματισμό της καυστικής επί του πετάσματος είναι ο μηδενισμός της Jacobian ορίζουσας.

$$J = \frac{\partial(X_{r,t,f}, Y_{r,t,f})}{\partial(r, \theta)} = 0$$

Σχεδίαση καυστικών στο άκρο της ρώγμης για τα δύο υλικά

Με χρήση των προηγούμενων εξισώσεων σχεδιάζονται γραφικές παραστάσεις καυστικών για διάφορες περιπτώσεις συνδεδεμένων υλικών. Τα στοιχεία των περιπτώσεων αυτών αναφέρονται πάνω στις γραφικές παραστάσεις των καυστικών.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΠΑΧΩΝ

Ο υπολογισμός των ισοπαχών γίνεται βάσει της τασικής συνάρτησης $X(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta)$. Βάση αυτής υπολογίζονται οι παρακάτω τάσεις:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial X(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial \theta^2} = (\lambda + 1)r^{\lambda-1} F(\theta) + r^{\lambda-1} F''(\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial r^2} = \lambda(\lambda + 1)r^{\lambda-1} F(\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial X(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = -\lambda r^{\lambda-1} F'(\theta)$$

Στις σχέσεις αυτές έχουμε:

$$F(\theta) = \alpha_2 |\sin((\lambda + 1)\theta)| + b_2 |\cos((\lambda + 1)\theta)| + c_2 |\sin((\lambda - 1)\theta)| + d_2 |\cos((\lambda - 1)\theta)|$$

$$F'(\theta) = \alpha_2 (\lambda + 1) |\cos((\lambda + 1)\theta)| - b_2 (\lambda + 1) |\sin((\lambda + 1)\theta)| + c_2 (\lambda - 1) |\cos((\lambda - 1)\theta)| - d_2 (\lambda - 1) |\sin((\lambda - 1)\theta)|$$

$$F''(\theta) = -\alpha_2 (\lambda + 1)^2 |\sin((\lambda + 1)\theta)| - b_2 (\lambda + 1)^2 |\cos((\lambda + 1)\theta)| - c_2 (\lambda - 1)^2 |\sin((\lambda - 1)\theta)| - d_2 (\lambda - 1)^2 * |\cos((\lambda - 1)\theta)|$$

Ισχύει η εξίσωση: $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} [(\lambda + 1)^2 F(\theta) + F''(\theta)] = \frac{Nf_p}{d}$.

Εδώ N η τάξη μεγέθους των κροσσών, $f_p = -\frac{E\lambda}{2\nu}$ και $f_{p_2} = \frac{1}{E_{12}} \frac{\nu_1}{\nu_2} f_{p_1}$ με $E_{12} = \frac{E_1}{E_2}$, d το πάχος του δοκιμίου.

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε: $r = \left\{ \frac{1}{[(\lambda + 1)^2 F(\theta) + F''(\theta)]} \frac{Nf_p}{d} \right\}^{1/(\lambda-1)}$ από αυτή τη σχέση προκύπτουν οι ισοπαχείς για διάφορες περιπτώσεις.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΠΑΧΩΝ ΜΕ ΠΕΡΙΟΧΗ ΚΡΟΣΣΩΝ

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] - \sigma_{ox}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

Ο όρος K_I είναι ο συντελεστής εντάσεων των τάσεων για τον εφελκυστικό τύπο, ενώ ο όρος K_{II} είναι ο συντελεστής εντάσεων των τάσεων για συνεπίπεδο διατμητικό τύπο. Εδώ έχουμε $K_{II} = \sigma_{ox} = 0$, δηλαδή εξετάζουμε το εφελκυστικό τύπο.

Η εξίσωση των ισοπαχών είναι $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \frac{Nf_p}{d}$. N είναι ο αριθμός της τάξης των κροσσών, d το πάχος του δοκιμίου και $f_p = -\frac{E\lambda}{2\nu}$ είναι η σταθερά - ισοπαχών και εξαρτάται από το μήκος κύματος του χρησιμοποιούμενου φωτός. Από γνωστές σχέσεις προκύπτει $f_{p_2} = \frac{1}{E_{12}} \frac{\nu_1}{\nu_2} f_{p_1}$, $E_{12} = \frac{E_1}{E_2}$.

Από τις αρχικές εξισώσεις των τάσεων και την εξίσωση των ισοπαχών προκύπτει η σχέση: $r = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2d}{Nf_p} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\}^2$. Από αυτή την σχέση χαράζονται οι καμπύλες των ισοπαχών.

Το πλάτος των κροσσών προκύπτει από μια περιοχή τιμών που δίνονται στο N . Η περιοχή τιμών αυτή είναι: $N - E \leq N \leq N + E$, εδώ θεωρήσαμε το $E=0.05$.

Με αυτό τον τρόπο έχουμε τις γραφικές παραστάσεις ισοπαχών με κροσσούς για διάφορες περιπτώσεις.

Η τασική συνάρτηση εδώ είναι $Z_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}$, $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, $\zeta = re^{i\theta}$. Το μέγεθος σ είναι η εφαρμοζόμενη τάση στο άπειρο και a το μήκος ρωγμής.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΧΡΩΜΩΝ

Ο υπολογισμός των ισόχρωμων γίνεται βάσει της τασικής συνάρτησης $X(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta)$. Βάση αυτής υπολογίζονται οι παρακάτω τάσεις:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial X(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial \theta^2} = (\lambda + 1)r^{\lambda-1} F(\theta) + r^{\lambda-1} F''(\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial r^2} = \lambda(\lambda + 1)r^{\lambda-1} F(\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial X(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 X(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = -\lambda r^{\lambda-1} F'(\theta)$$

Στις σχέσεις αυτές έχουμε:

$$F(\theta) = \alpha_2 |\sin((\lambda + 1)\theta)| + b_2 |\cos((\lambda + 1)\theta)| + c_2 |\sin((\lambda - 1)\theta)| + d_2 |\cos((\lambda - 1)\theta)|$$

$$F'(\theta) = \alpha_2 (\lambda + 1) |\cos((\lambda + 1)\theta)| - b_2 (\lambda + 1) |\sin((\lambda + 1)\theta)| + c_2 (\lambda - 1) |\cos((\lambda - 1)\theta)| - d_2 (\lambda - 1) |\sin((\lambda - 1)\theta)|$$

$$F''(\theta) = -\alpha_2 (\lambda + 1)^2 |\sin((\lambda + 1)\theta)| - b_2 (\lambda + 1)^2 |\cos((\lambda + 1)\theta)| - c_2 (\lambda - 1)^2 |\sin((\lambda - 1)\theta)| - d_2 (\lambda - 1)^2 * |\cos((\lambda - 1)\theta)|$$

Ισχύει η εξίσωση: $\sigma_1 - \sigma_2 = r^{\lambda-1} [(1 - \lambda^2)F(\theta) + F''(\theta)]^2 + 4\lambda^2 (F'(\theta))^2)^{1/2} = \frac{Nf_{\sigma}}{d}$.

Εδώ N η τάξη μεγέθους των κροσσών, fσ φωτοελαστική σταθερά του υλικού του σώματος και εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, d το πάχος του δοκιμίου.

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε: $r = \left\{ \frac{1}{[(1 - \lambda^2)F(\theta) + F''(\theta)]^2 + 4\lambda^2 (F'(\theta))^2)^{1/2}} \frac{Nf_p}{d} \right\}^{1/(\lambda-1)}$ από

αυτή τη σχέση προκύπτουν οι ισόχρωμες για διάφορες περιπτώσεις.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΧΡΩΜΩΝ ΜΕ ΠΕΡΙΟΧΗ ΚΡΟΣΣΩΝ

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] - \sigma_{ox}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

Ο όρος K_I είναι ο συντελεστής εντάσεων των τάσεων για τον εφελκυστικό τύπο, ενώ ο όρος K_{II} είναι ο συντελεστής εντάσεων των τάσεων για συνεπίπεδο διατμητικό τύπο. Εδώ έχουμε $K_{II} = \sigma_{ox} = 0$, δηλαδή εξετάζουμε το εφελκυστικό τύπο.

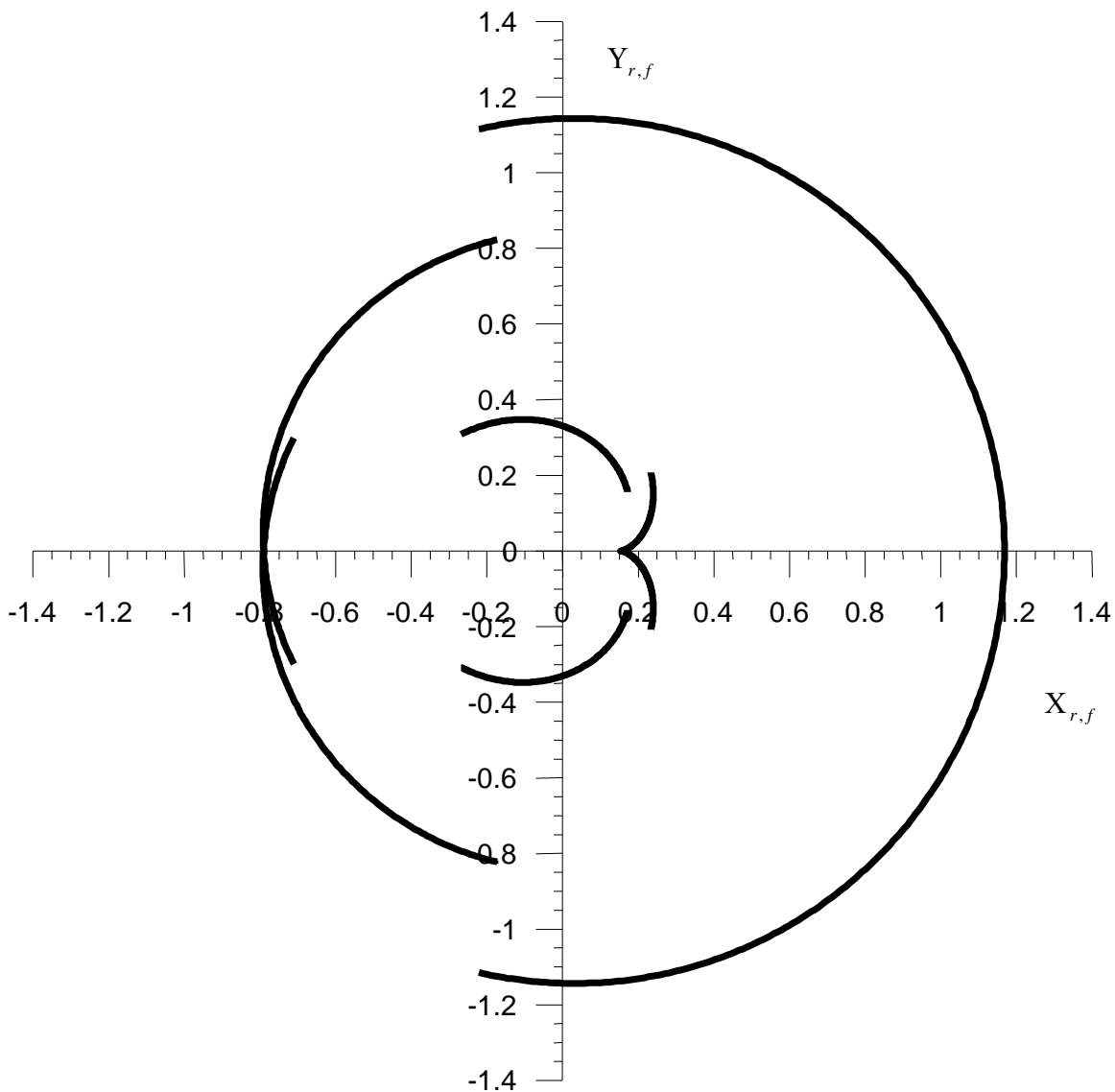
Η εξίσωση των ισόχρωμων είναι $\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{Nf_\sigma}{d}$. N είναι ο αριθμός της τάξης των κροσσών, d το πάχος του δοκιμίου και f_σ φωτοελαστική σταθερά του υλικού του σώματος και εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

Από τις αρχικές εξισώσεις των τάσεων και την εξίσωση των ισόχρωμων προκύπτει η σχέση: $r = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2d}{Nf_\sigma} \left[K_I \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \right\}$. Από αυτή την σχέση χαράζονται οι καμπύλες των ισόχρωμων. Το πλάτος των κροσσών προκύπτει από μια περιοχή τιμών που δίνονται στο N . Η περιοχή τιμών αυτή είναι: $N - E \leq N \leq N + E$, εδώ θεωρήσαμε το $E=0.05$.

Με αυτό τον τρόπο έχουμε τις γραφικές παραστάσεις ισόχρωμων με κροσσούς για διάφορες περιπτώσεις.

Η τασική συνάρτηση εδώ είναι $Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}$, $K_I = \sigma\sqrt{\pi\alpha}$, $\zeta = re^{i\theta}$. Το μέγεθος σ είναι η εφαρμοζόμενη τάση στο άπειρο και α το μήκος ρωγμής.

Στην συνέχεια έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των καυστικών και ισόχρωμων.



$$C_f = 0.35$$

$$E_{12} = 0.10$$

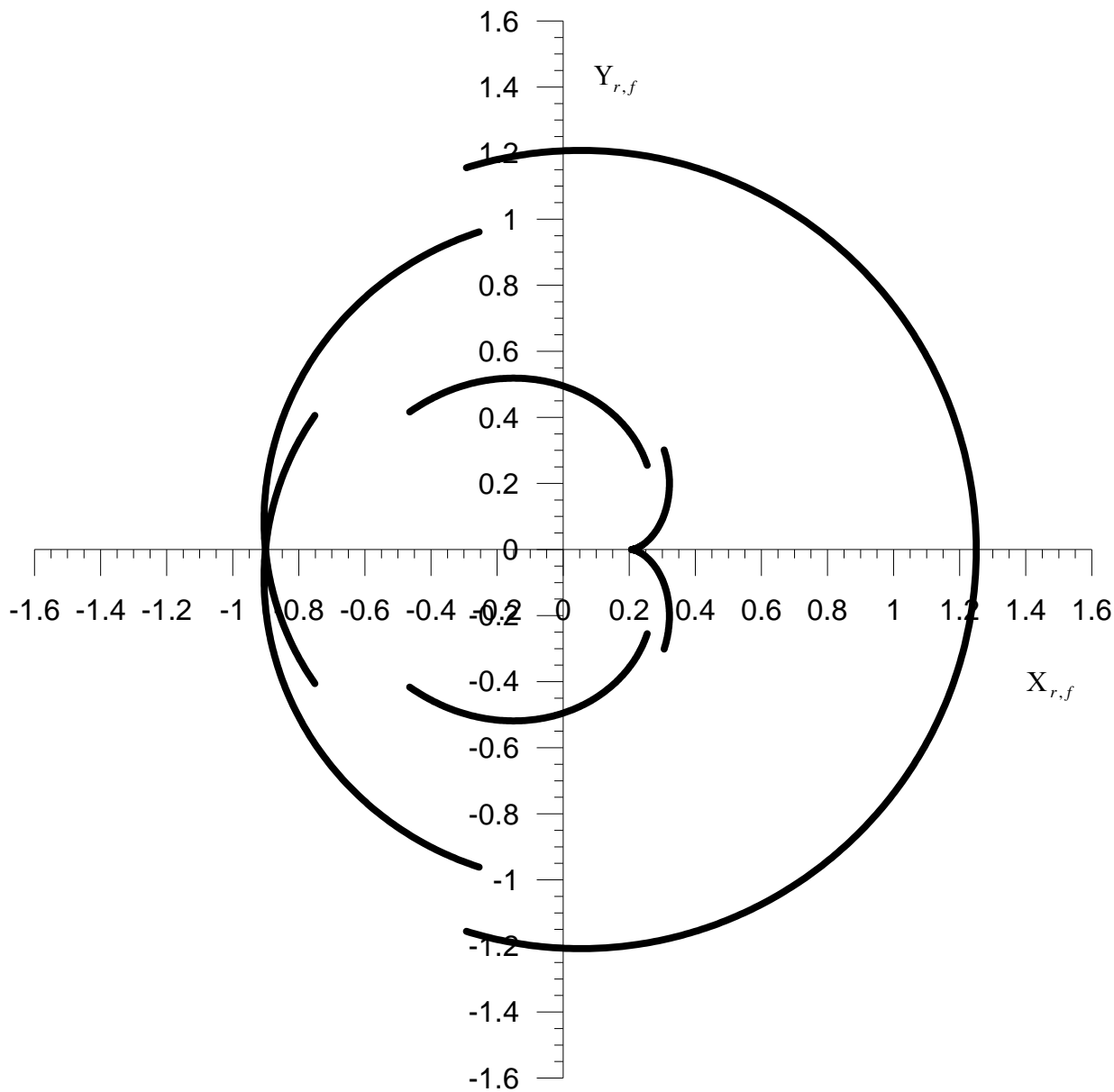
$$\nu_1 = 0.30$$

$$\nu_2 = 0.30$$

$$\lambda = 0.6966$$

$$\lambda_m = 1$$

$$d_2 = 1$$



$$C_f = 0.35$$

$$E_{12} = 0.336$$

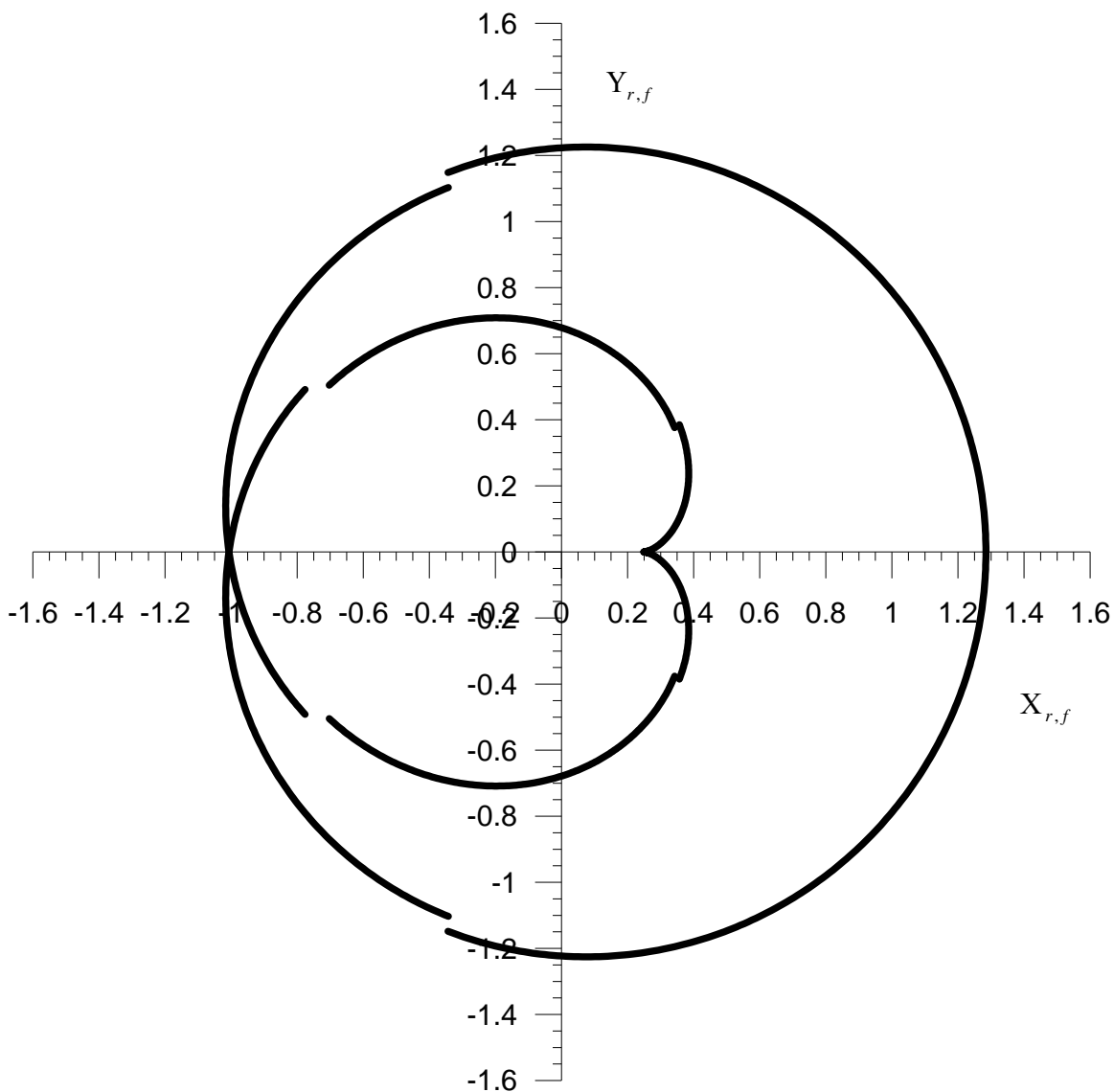
$$\nu_1 = 0.36$$

$$\nu_2 = 0.34$$

$$\lambda = 0.603$$

$$\lambda_m = 1$$

$$d_2 = 1$$



$$C_f = 0.35$$

$$E_{12} = 0.82353$$

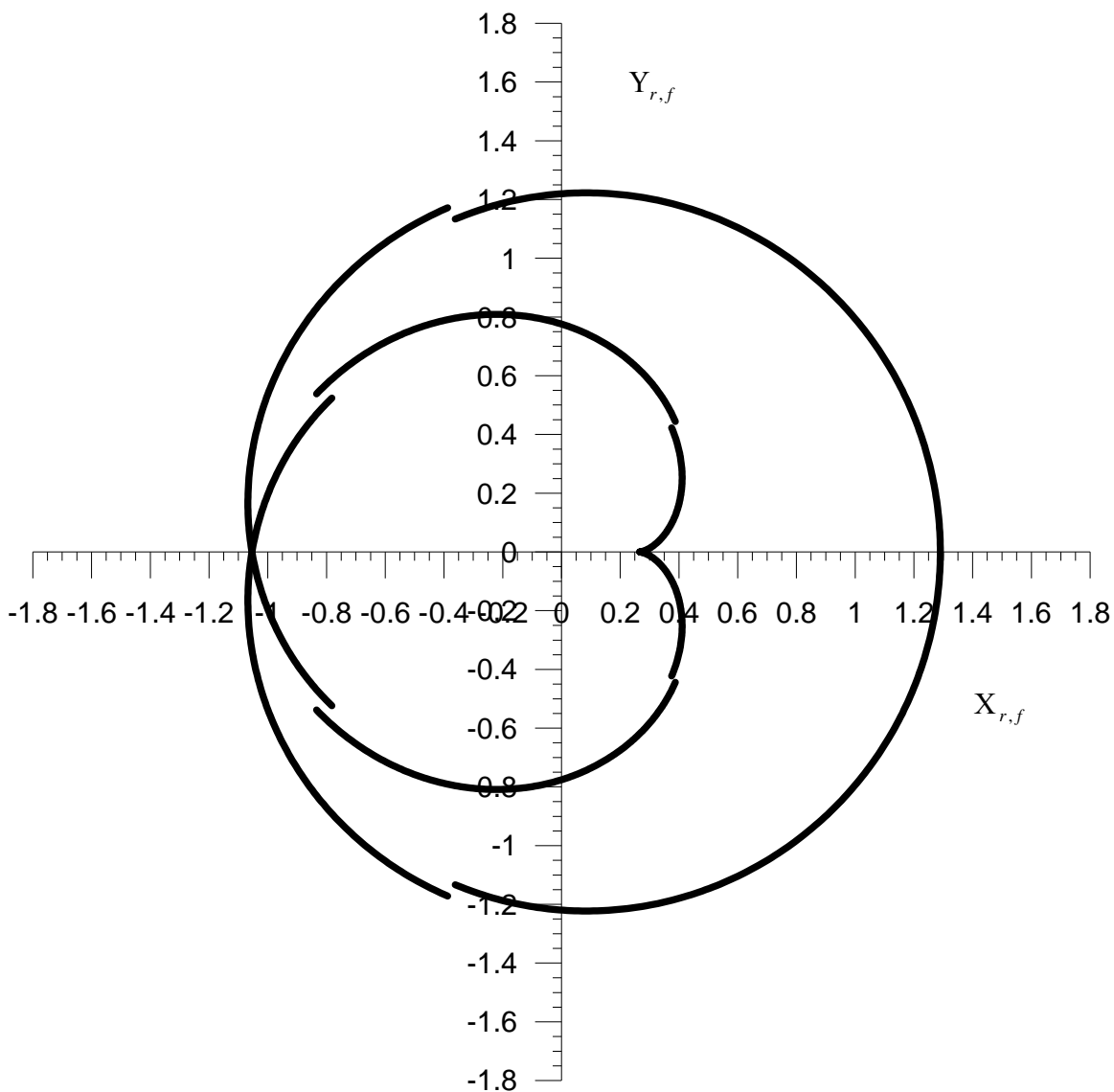
$$\nu_1 = 0.36$$

$$\nu_2 = 0.34$$

$$\lambda = 0.5192$$

$$\lambda_m = 1$$

$$d_2 = 1$$



$$C_f = 0.35$$

$$E_{12} = 1.2142$$

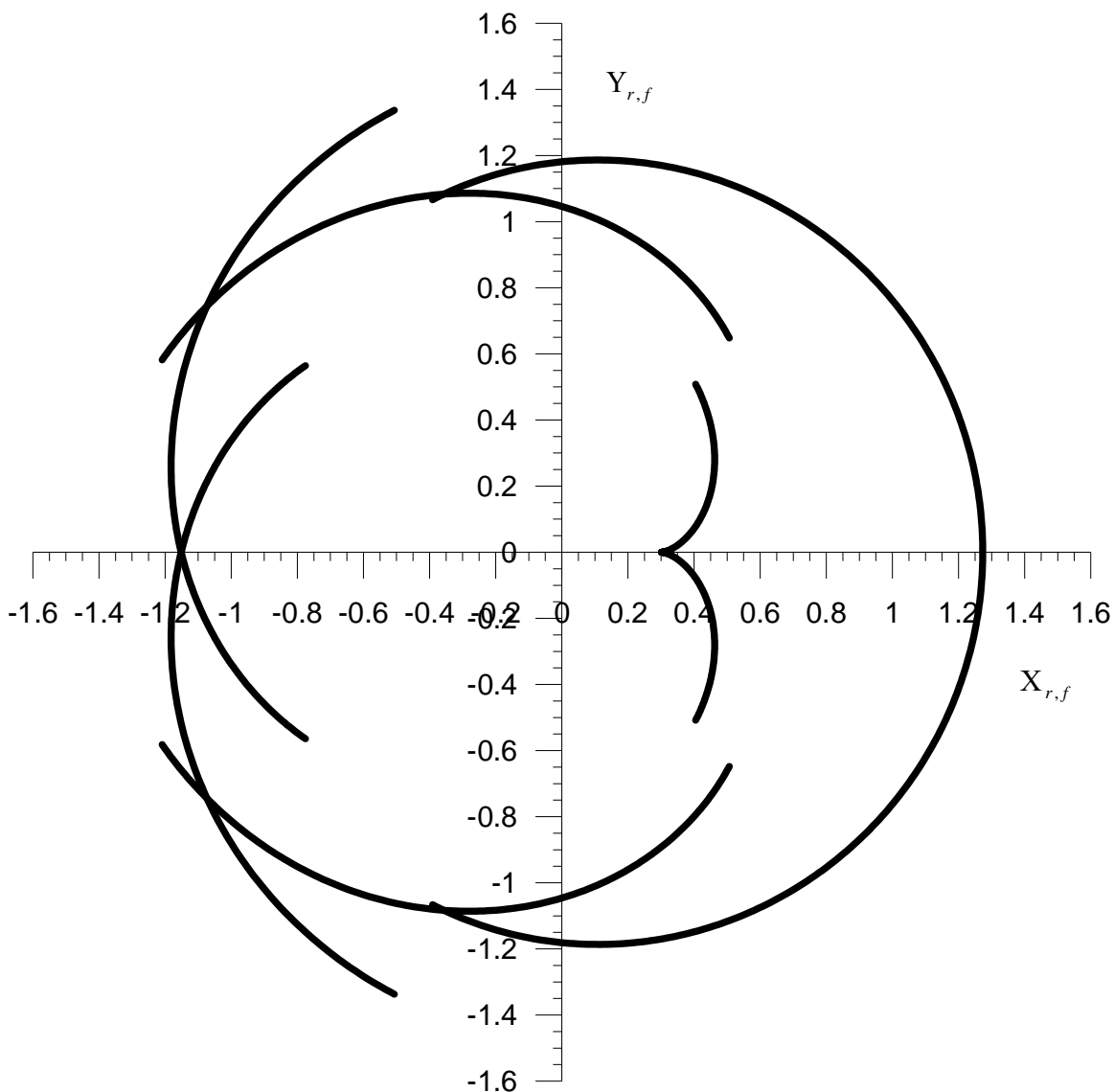
$$\nu_1 = 0.34$$

$$\nu_2 = 0.36$$

$$\lambda = 0.48$$

$$\lambda_m = 1$$

$$d_2 = 1$$



$$C_f = 0.35$$

$$E_{12} = 2.97$$

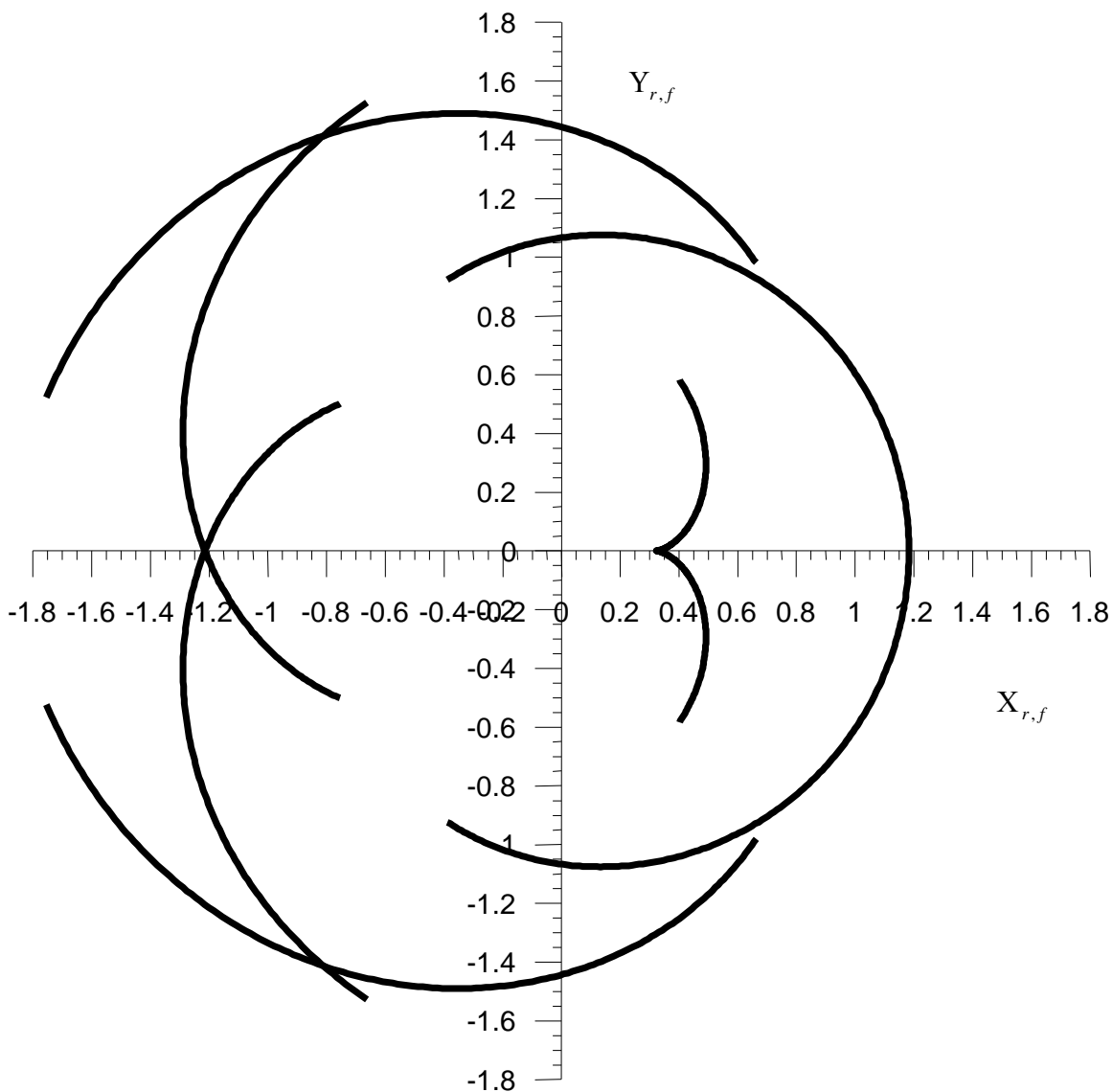
$$\nu_1 = 0.34$$

$$\nu_2 = 0.36$$

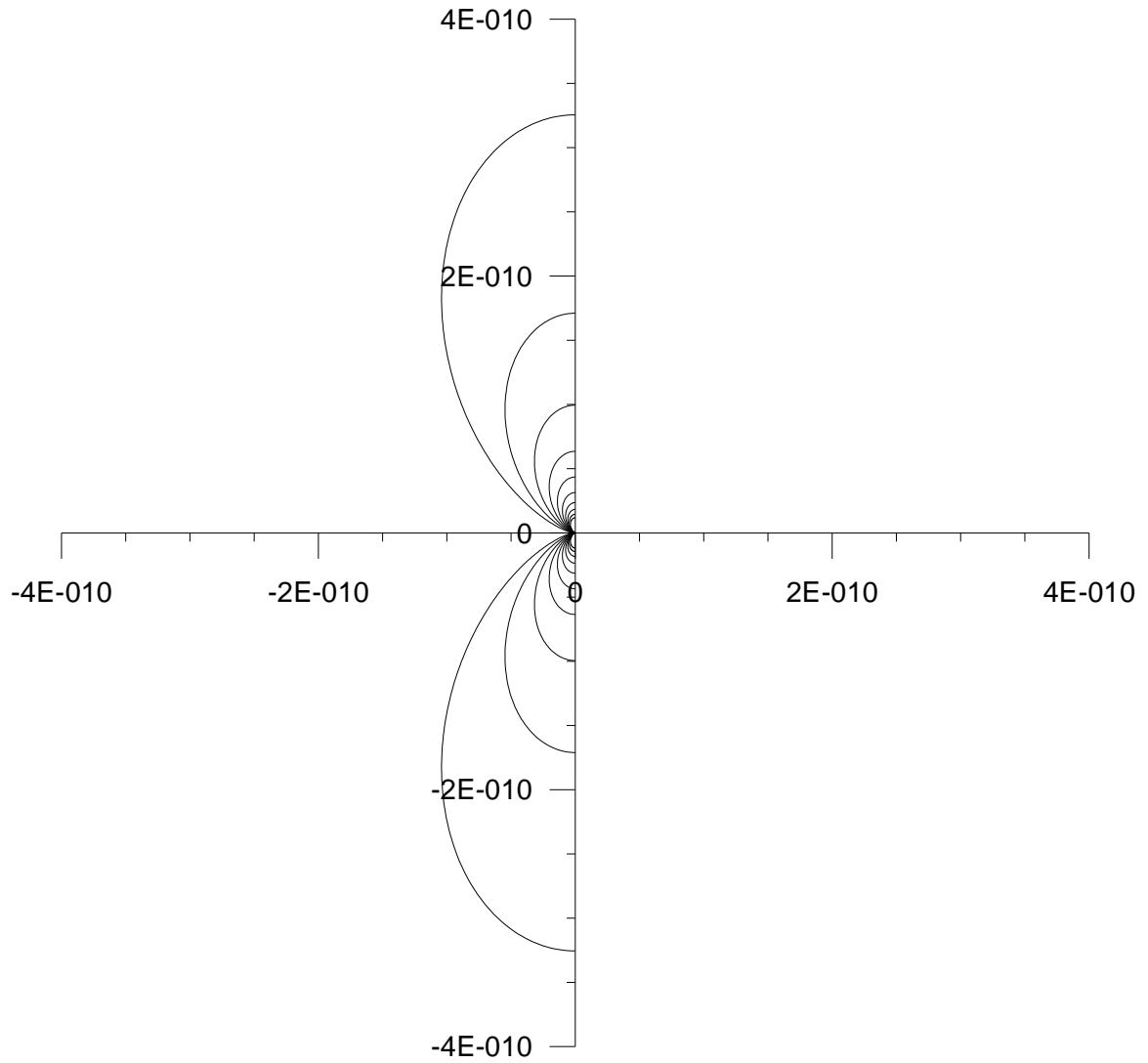
$$\lambda = 0.3803$$

$$\lambda_m = 1$$

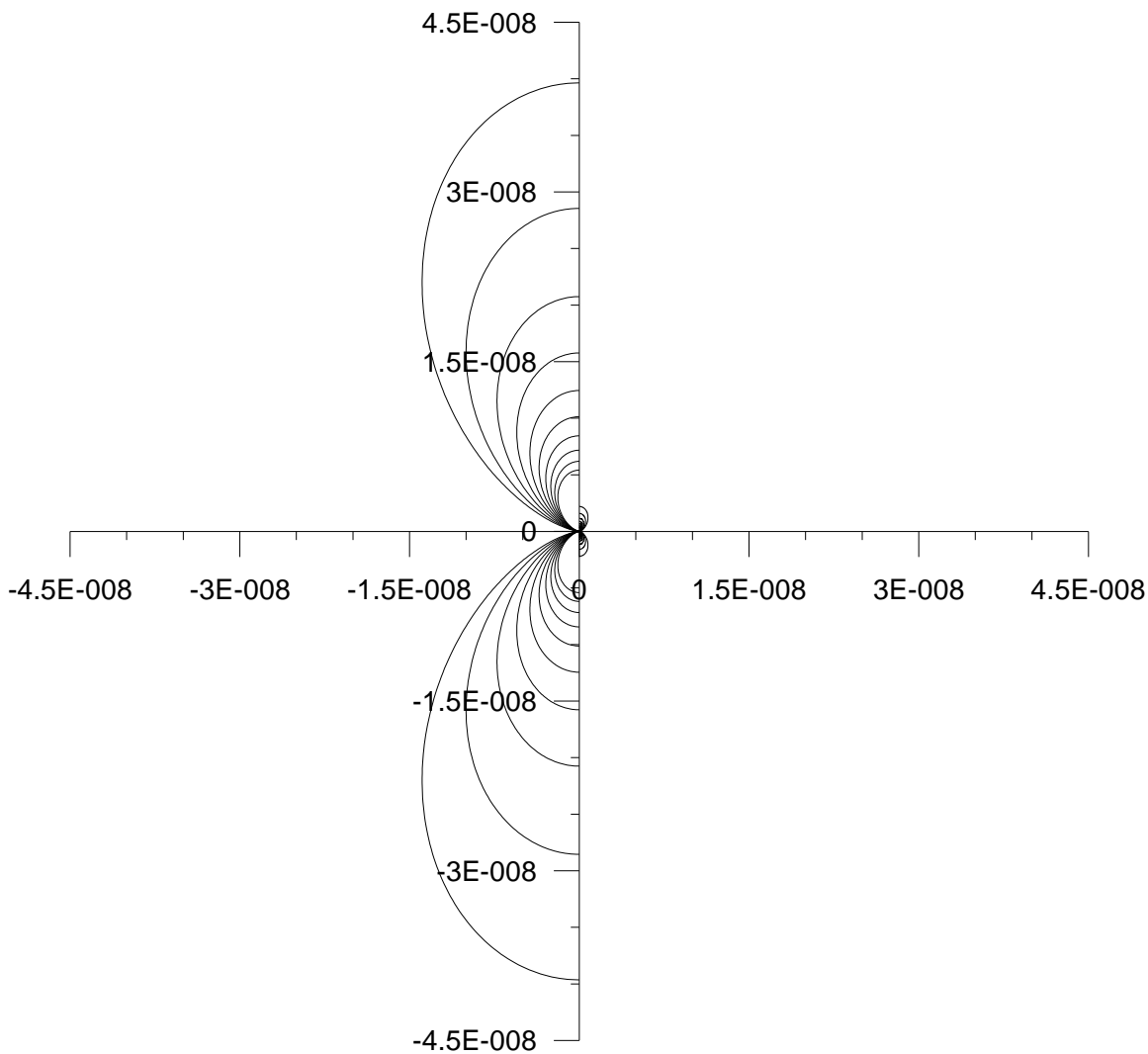
$$d_2 = 1$$



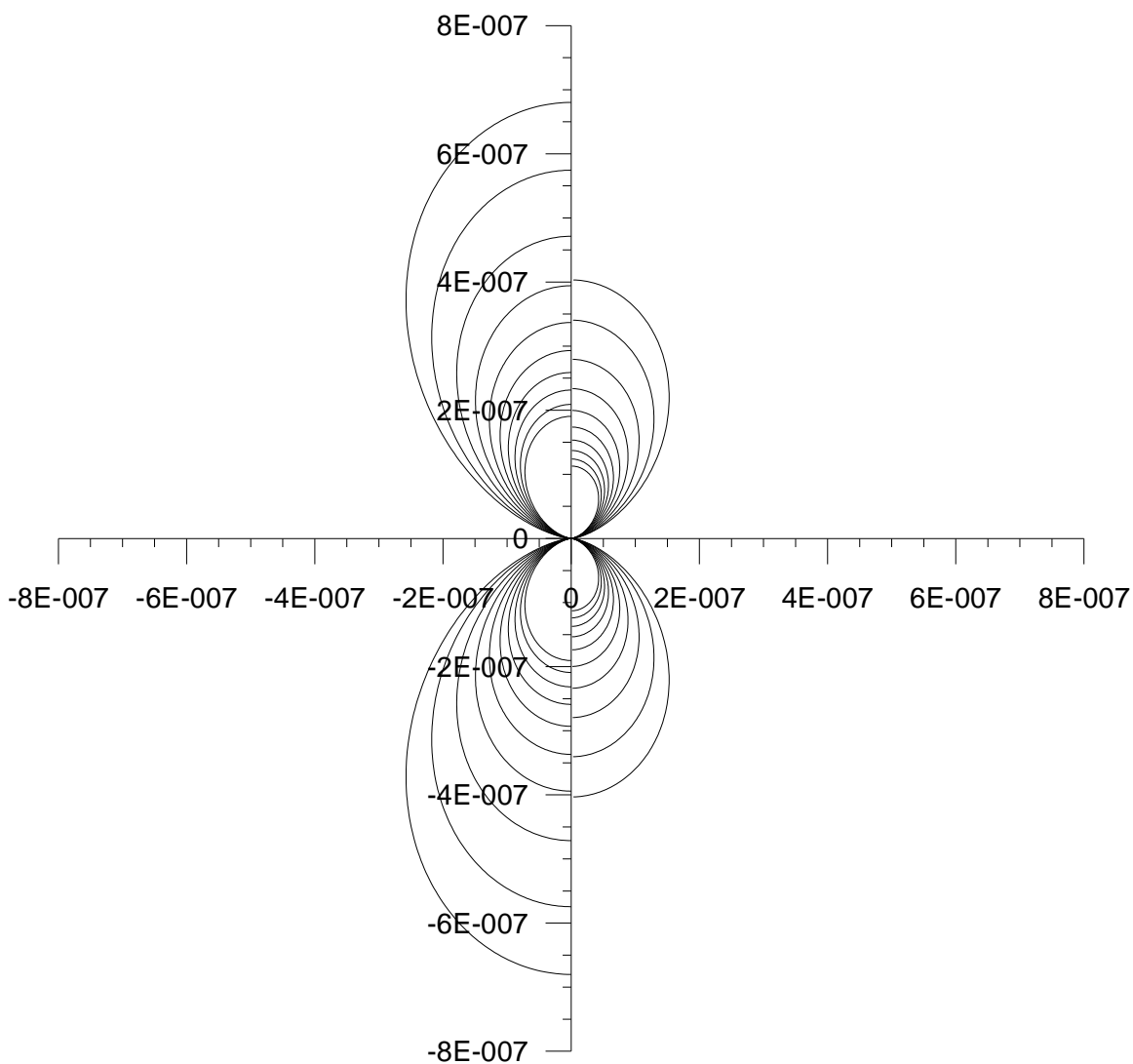
$$\begin{aligned}C_f &= 0.35 \\E_{12} &= 9.985 \\v_1 &= 0.30 \\v_2 &= 0.30 \\\lambda &= 0.249 \\\lambda_m &= 1 \\d_2 &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\E_{12} &= 0.10 \\v_1 &= 0.30 \\v_2 &= 0.30 \\\lambda &= 0.6966 \\\lambda_m &= 1 \\d_2 &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\ E_{12} &= 0.336 \\ \nu_1 &= 0.36 \\ \nu_2 &= 0.34 \\ \lambda &= 0.603 \\ \lambda_m &= 1 \\ d_2 &= 1\end{aligned}$$



$$C_r = 0.35$$

$$E_{12} = 0.82353$$

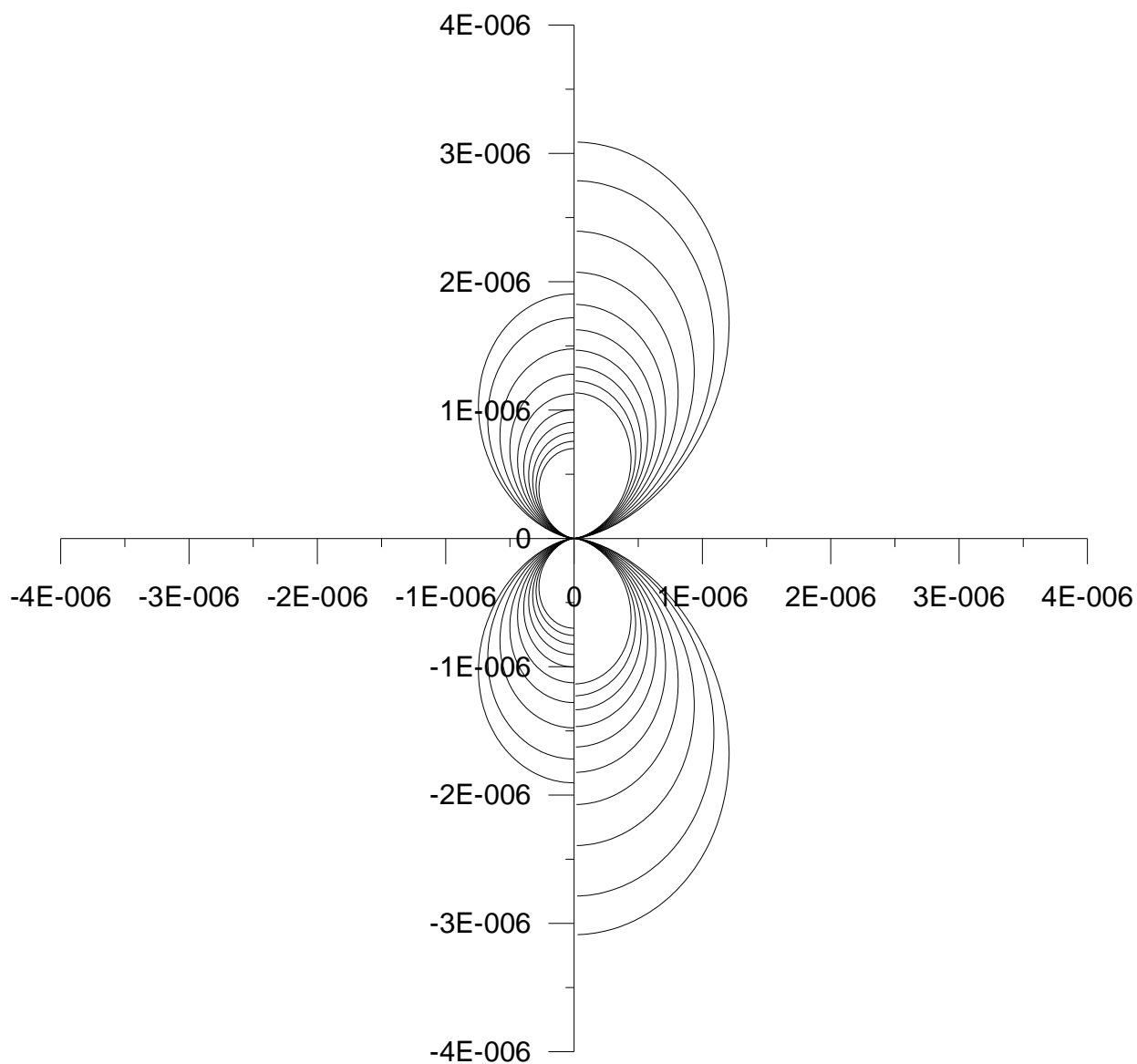
$$\nu_1 = 0.36$$

$$\nu_2 = 0.34$$

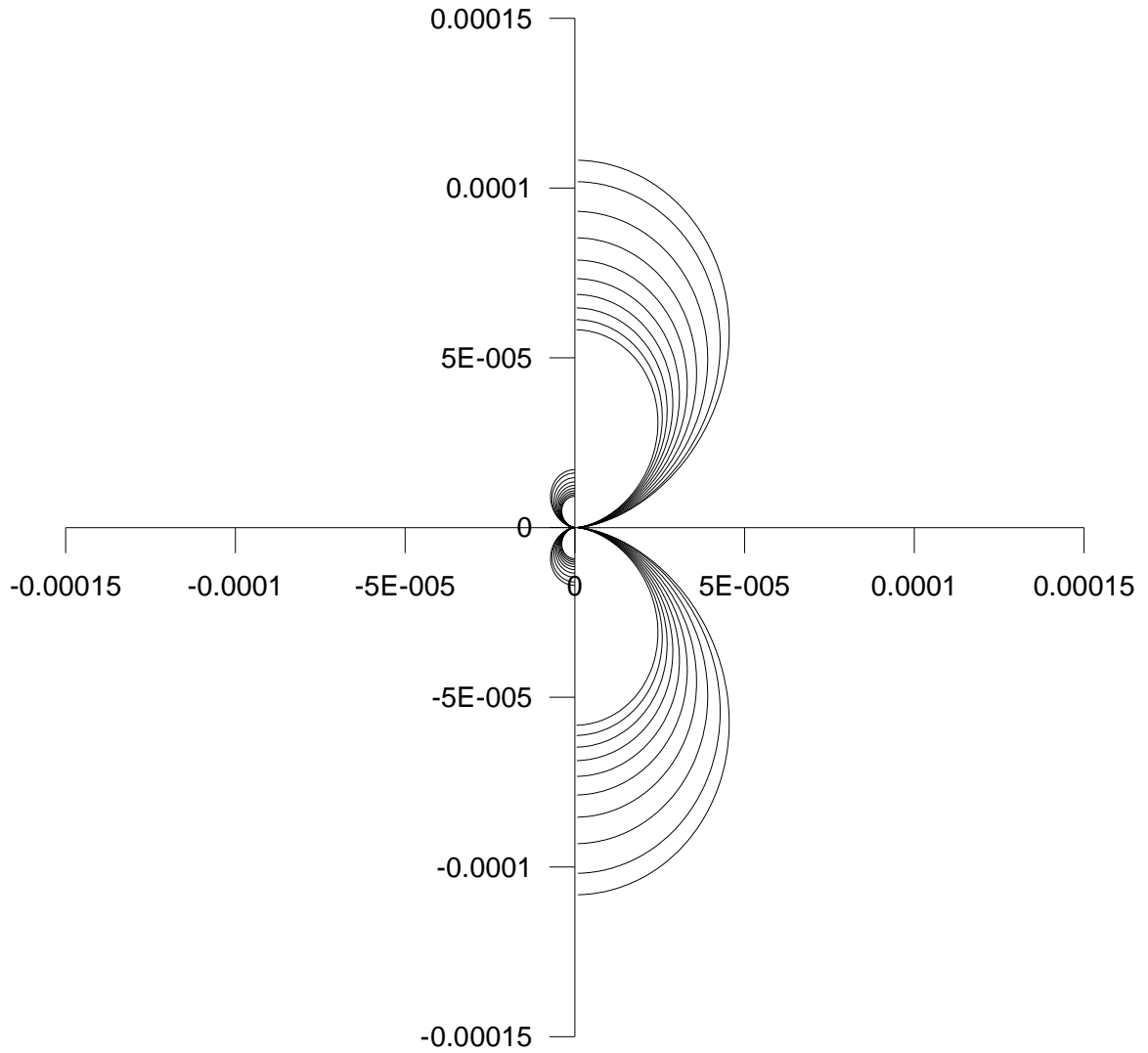
$$\lambda = 0.5192$$

$$\lambda_m = 1$$

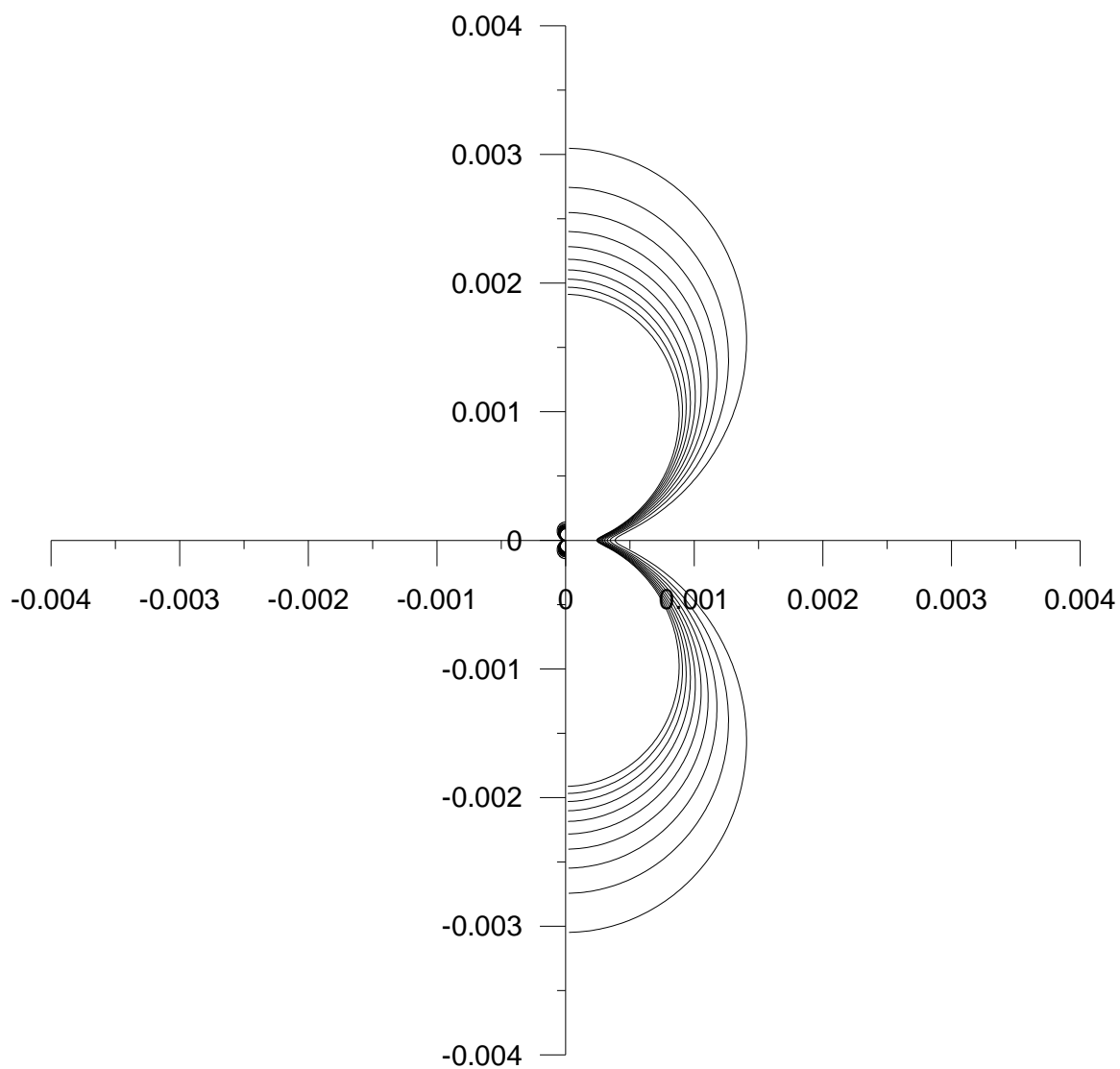
$$d_2 = 1$$



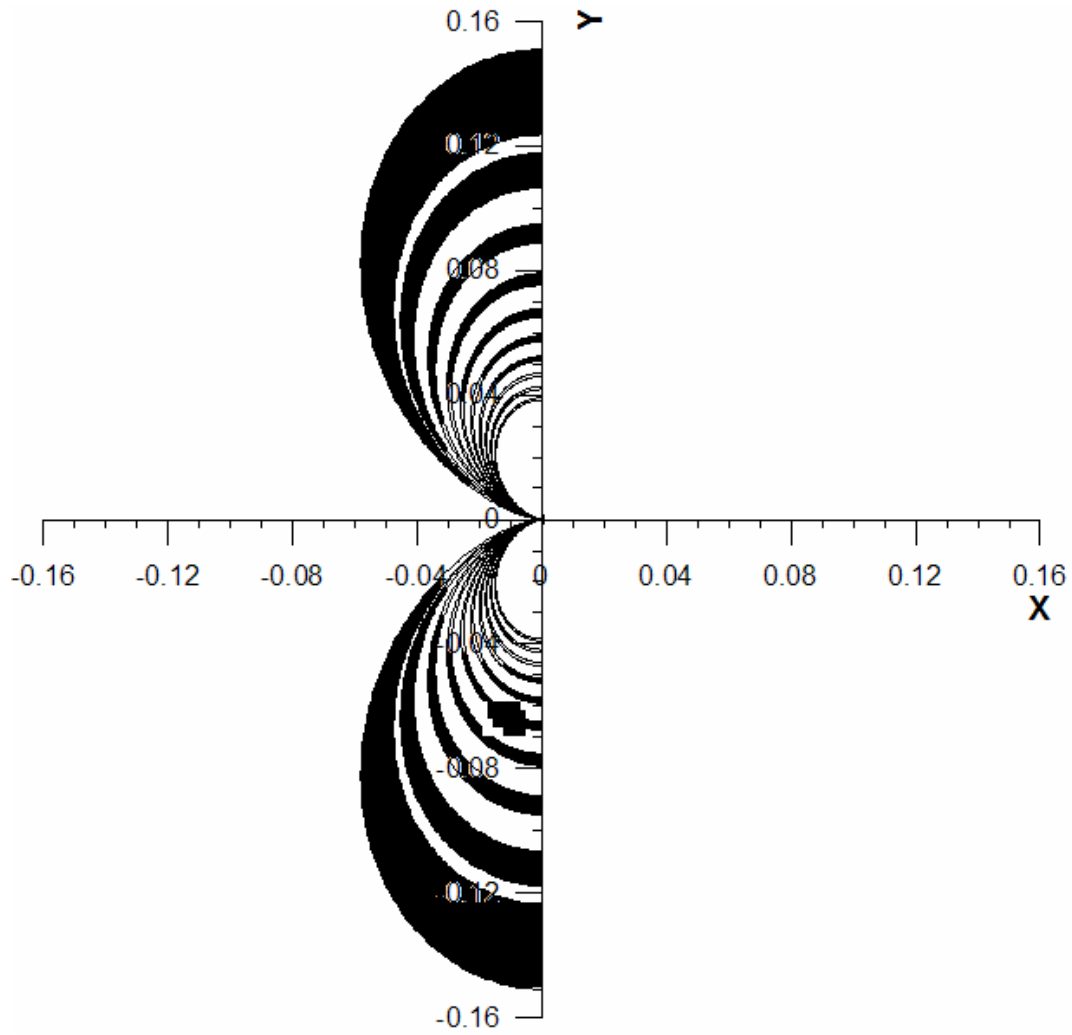
$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\ E_{12} &= 1.2142 \\ \nu_1 &= 0.34 \\ \nu_2 &= 0.36 \\ \lambda &= 0.48 \\ \lambda_m &= 1 \\ d_2 &= 1\end{aligned}$$



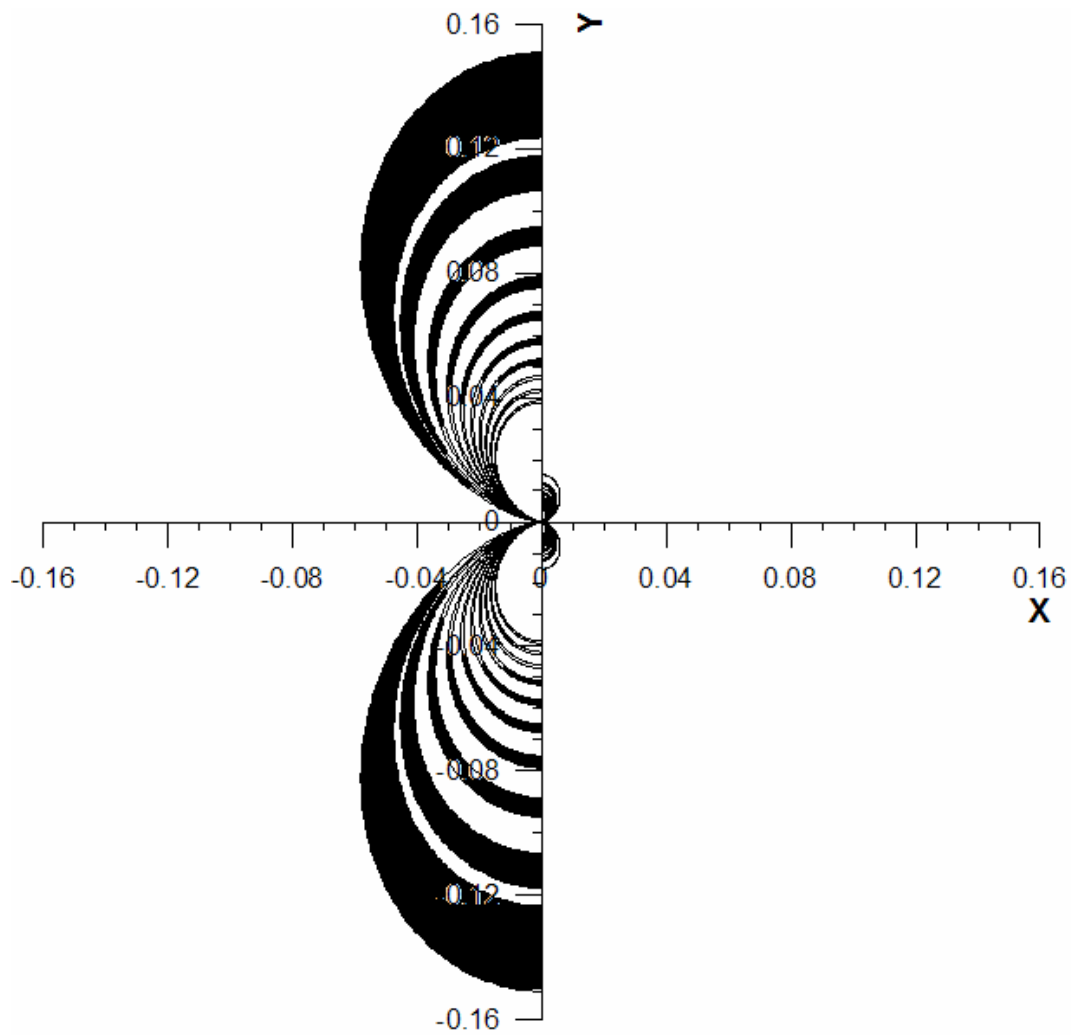
$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\E_{12} &= 2.97 \\v_1 &= 0.34 \\v_2 &= 0.36 \\\lambda &= 0.3803 \\\lambda_m &= 1 \\d_2 &= 1\end{aligned}$$



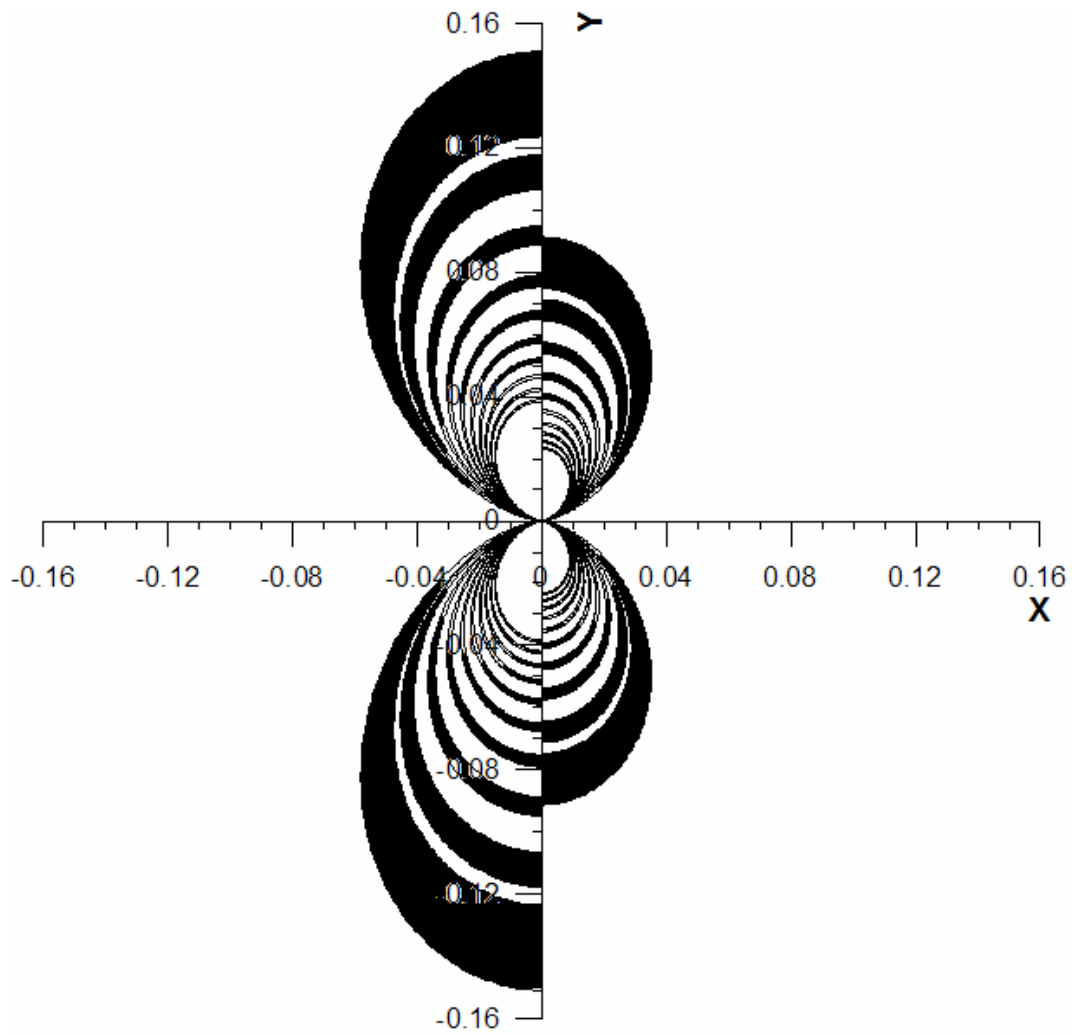
$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\ E_{12} &= 9.985 \\ \nu_1 &= 0.30 \\ \nu_2 &= 0.30 \\ \lambda &= 0.249 \\ \lambda_m &= 1 \\ d_2 &= 1\end{aligned}$$



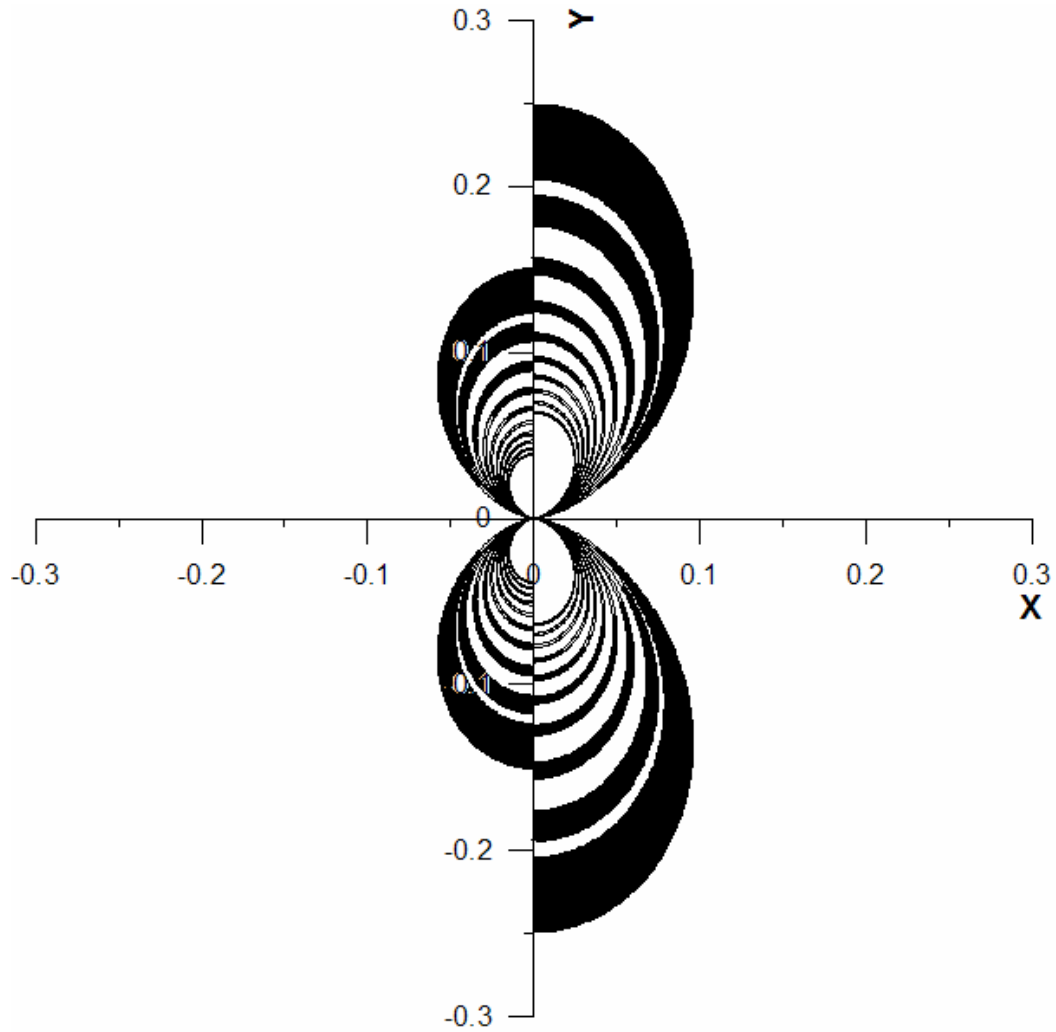
$C_r = 0.35$
 $E_{12} = 0.10$
 $\nu_1 = 0.30$
 $\nu_2 = 0.30$
 $\lambda = 0.6966$
 $\lambda_m = 1$
 $d_2 = 1$



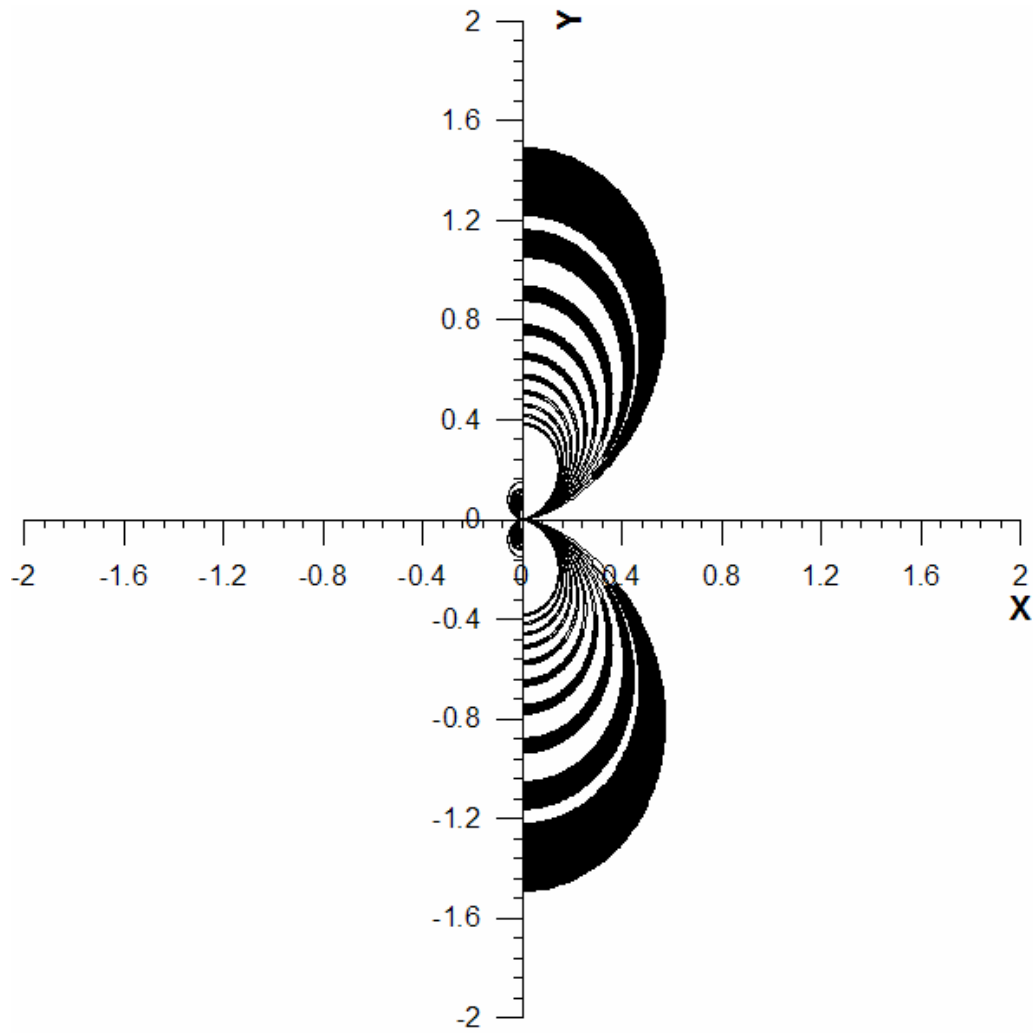
$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\E_{12} &= 0.336 \\v_1 &= 0.36 \\v_2 &= 0.34 \\\lambda &= 0.603 \\\lambda_m &= 1 \\d_2 &= 1\end{aligned}$$



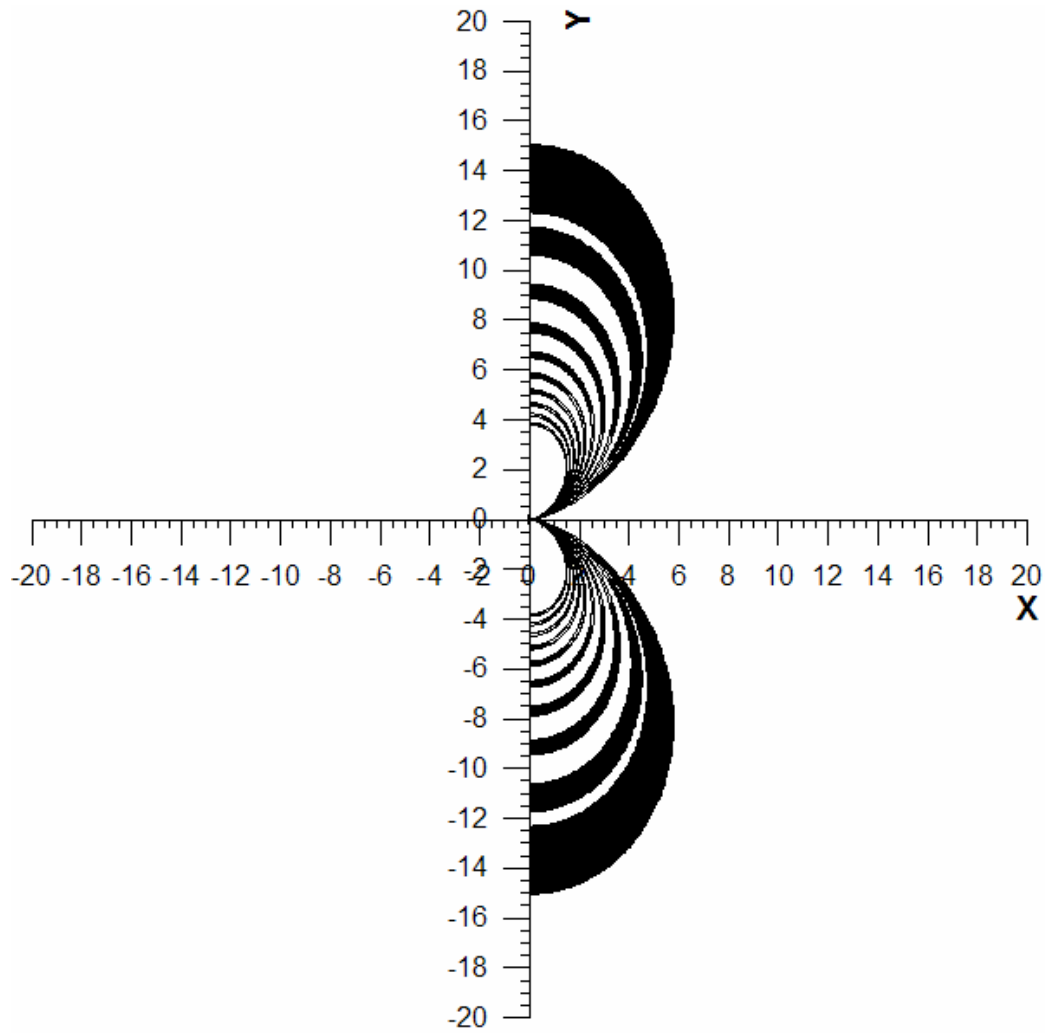
$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\E_{12} &= 0.82353 \\v_1 &= 0.36 \\v_2 &= 0.34 \\\lambda &= 0.5192 \\\lambda_m &= 1 \\d_2 &= 1\end{aligned}$$



$C_r = 0.35$
 $E_{12} = 1.2142$
 $\nu_1 = 0.34$
 $\nu_2 = 0.36$
 $\lambda = 0.48$
 $\lambda_m = 1$
 $d_2 = 1$



$$\begin{aligned}C_r &= 0.35 \\E_{12} &= 2.97 \\v_1 &= 0.34 \\v_2 &= 0.36 \\\lambda &= 0.3803 \\\lambda_m &= 1 \\d_2 &= 1\end{aligned}$$



$$C_r = 0.35$$
$$E_{12} = 9.985$$
$$\nu_1 = 0.30$$
$$\nu_2 = 0.30$$
$$\lambda = 0.249$$
$$\lambda_m = 1$$
$$d_2 = 1$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις γραφικές παραστάσεις είναι τα εξής:

α) Καυστικές. Παρατηρούμε ότι το υλικό που έχει μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας έχει και μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας στην χαρακτηριστική αυτή καμπύλη της καυστικής. Η καμπύλη αυτή εκφράζει την επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων, επομένως για μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη έκταση. Παρατηρούμε επίσης ότι το ένα υλικό, αυτό με το μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας, επιρραάζει το άλλο και η καμπύλη της καυστικής του εισέρχεται στο δεύτερο υλικό. Αυτό γίνεται ως ένα σημείο, γιατί στην συνέχεια παρατηρείται 'σπάσιμο' της καμπύλης και η καμπύλη συνεχίζεται με μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας. Στην περιοχή αυτή η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων, στην άκρη της ρωγμής, λαμβάνει μικρότερη έκταση. Το σπάσιμο αυτό γίνεται όλο και πιο έντονο όσο το μέγεθος E_{12} αυξάνει.

β) Ισοπαχείς. Στις ισοπαχείς για κάθε τάξη κροσσού έχουμε ίση μεταβολή του πάχους. Έτσι στο υλικό με το μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας η μεταβολή αυτή είναι μικρότερη. Επομένως το υλικό με το μικρότερο μέτρο ελαστικότητας λαμβάνει μεγαλύτερη έκταση μια και είναι πιο ψαθυρό. Τα 'σπασίματα' στις καμπύλες γίνονται πάνω στο σύνορο των δύο υλικών, όπου είναι πολύ καλά ενομένα. Όσο πιο μεγάλο γίνεται το E_{12} τόσο πιο μεγάλο γίνεται το σπάσιμο. Για μεγάλο E_{12} παρατηρείται στο υλικό με το μεγάλο μέτρο ελαστικότητας μια 'τοπική ανωμαλία' γιατί ουσιαστικά το υλικό λόγω της μεγάλης ελαστικότητάς του η μεταβολή στο πάχος είναι πάρα πολλή μικρή. Εάν αυξηθεί ακόμη περισσότερο το E_{12} τότε η τοπική αυτή ανωμαλία θα γίνει ακόμη πιο μικρή. Οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν δείχνουν αυτό το φαινόμενο. Επίση για $E_{12} = 0.10$ το υλικό (2) μένει ανεπηρέαστο (μεγάλο μέτρο ελαστικότητας).

γ) Ισοπαχείς με περιοχή κροσσών. Στην μέθοδο αυτή τα συμπεράσματα είναι παρόμοια με την προηγούμενη μέθοδο. Δεν εμφανίζεται 'τοπική ανωμαλία' σε καμιά των περιπτώσεων και το υλικό (1) μένει ανεπηρέαστο για $E_{12} = 9.985$. Το πλάτος της περιοχής των κροσσών μικραίνει όσο το N μεγαλώνει.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] **ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, Γ.Α.ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ**
- [2] **INTERNATIONAL JOURNAL OF FRACTURE 98**
Crack tip caustics at a bi-material interface
- [3] **Dally, J., Sanford R. Classification of stress – intensity factors from isochromatic – fringe patterns**
Experimental mechanics