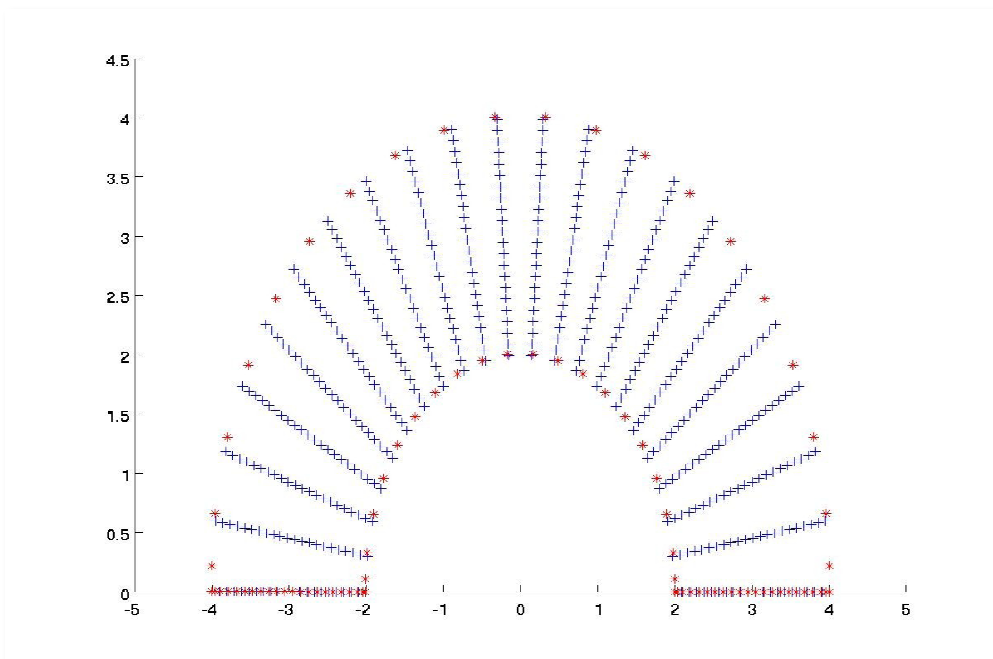




Επίλυση προβλημάτων δυναμικού με χρήση μακροστοιχείων B-Splines



Διπλωματική εργασία

Στα πλαίσια του μαθήματος Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών Ι

ΜΕΛΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Χρ. Προβατίδης, Αν. Καθηγ. ΕΜΠ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Περίληψη	σελίδα 2
2. Θεωρητικό μέρος	3
2.1 Μακροστοιχεία	3
2.2 B-Splines	4
2.2.1 Γενικά	4
2.2.2 Παρεμβολή μέσω b-splines	6
2.2.3 Σχόλια	8
2.2.4 Διαδραστική προσαρμογή σχήματος	9
2.3 Η Εξίσωση Laplace	12
2.3.1 Χωρίο ολοκλήρωσης	12
2.3.2 Μετατροπή σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων	12
2.4 Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων	15
2.4.1 Η μέθοδος της ταξιθεσίας	15
2.4.2 Η μέθοδος της ασθενούς ταξιθεσίας	18
2.4.3 Η μέθοδος Galerkin – Ritz	19
2.5 Ισογεωμετρική ανάλυση	20
2.6 Παρεμβολή Coons	21
3. Εφαρμογές	22
3.1 Κοίλος κύλινδρος	22
3.1.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας	24
3.1.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας	28
3.1.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz	30
3.2 Κοίλος κύλινδρος ακτίνας 1-32	32
3.2.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας	33
3.2.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας	35
3.2.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz	36
3.3 Ορθογωνική πλάκα	37
3.3.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας.....	38
3.3.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας	39
3.3.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz	40
3.4 Ορθογωνική πλάκα II	41
3.4.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας	42
3.4.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας	44
3.4.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz	45
3.5 Έλλειψη – Επίλυση της Poisson	47
3.5.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας	49
3.5.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας...	50
3.5.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz	51
4. Σχολιασμός αποτελεσμάτων	53
5. Ανάλυση του αναπτυχθέντος λογισμικού	55

1. Περίληψη

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων δυναμικού με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων. Τα πεπερασμένα στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση είναι μακροστοιχεία b-splines, με βαθμό πολυωνύμου $p=3$. Σε όλο το μήκος της εργασίας θα γίνει χρήση της ισογεωμετρικής ανάλυσης όπως αυτή εισάγεται από τον Hughes στην αντίστοιχη δημοσίευσή του.

Συνολικά θα επιλυθούν αριθμητικά 5 παραδείγματα, στα 4 από αυτά λύνουμε την ίδια εξίσωση (εξίσωση Laplace), ενώ στο ένα από αυτά λύνουμε την εξίσωση του Poisson. Όλα τα προβλήματα Laplace αφορούν προβλήματα μεταφοράς θερμότητας επομένως η λύση που αναζητείται κάθε φορά είναι ένα θερμοκρασιακό πεδίο, για αυτόν τον λόγο όταν αναφερόμαστε στην άγνωστη συνάρτηση θα εννοούμε έμμεσα θερμοκρασία. Επίσης, κάθε πρόβλημα προς ανάλυση διαφέρει στην γεωμετρία του χωρίου ολοκλήρωσης, γενικά τα χωρία που επιλέγονται είναι καμπυλόγραμμα, εκτός από 2 περιπτώσεις όπου είναι ορθογωνικά. Να τονίσουμε εδώ πως η επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε καμπυλόγραμμα χωρία απαιτεί τον ορισμό καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων, πράγμα που δυσχεραίνει αρκετά τους υπολογισμούς μας όπως και την μαθηματική διατύπωση της μεθόδου. Ακόμη το κάθε ένα από αυτά τα παραδείγματα λύνουμε με 3 μεθόδους. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι :

- Η συμβατική μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (galerkin – ritz)
- Η μέθοδος της ταξιθεσίας (collocation)
- Η μέθοδος της ασθενούς ταξιθεσίας (weak collocation)

Να τονίσουμε επίσης πως ενώ η ασθενής ταξιθεσία σαν μέθοδος δεν χρησιμοποιείται ευρύτατα, προτιμάται από τον φοιτητή αφού συνδυάζει κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα και όπως φαίνεται και στα παραδείγματα που ακολουθούν μπορεί να δώσει ικανοποιητικότητα αποτελέσματα.

Για την εφαρμογή της μεθόδου της ταξιθεσίας υπάρχει μεγάλη εμπειρία στο εργαστήριο, όπως και για την χρήση μακροστοιχείων Coons, στην παρούσα διπλωματική εκμεταλλευόμαστε την υπάρχουσα εμπειρία και αλλάζουμε τον τρόπο παρεμβολής της γεωμετρίας. Επιλέγουμε τις καμπύλες και επιφάνειες b-splines λόγω του εύκολου γεωμετρικού τους χειρισμού μέσω παραμετρικών εκφράσεων και της ευκολίας παρεμβολής οποιασδήποτε σχεδόν γεωμετρίας.

2. Θεωρητικό μέρος

2.1 Μακροστοιχεία

Σε μία συμβατική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται έχουν συνήθως 3, 4, 8, 9 κόμβους. Η διαδικασία ανάλυσης είναι η ακόλουθη :

- Δημιουργία πλέγματος
- Ορισμός των στοιχείων
- Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων με αγνώστους τις τιμές του ζητούμενου μεγέθους στους κόμβους των στοιχείων
- Παρεμβολή του μεγέθους στα υπόλοιπα σημεία του χωρίου με χρήση των συναρτήσεων παρεμβολής των στοιχείων $T = \sum N_i \bar{T}_i$
Όπου T είναι το μέγεθος σε οποιοδήποτε σημείο του χωρίου ολοκλήρωσης και \bar{T} είναι το μέγεθος στους κόμβους, N είναι οι συναρτήσεις βάσης

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος με μακροστοιχεία, όλο το χωρίο είναι ένα μόνο στοιχείο το πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι χρησιμοποιώντας ένα στοιχείο με πολλούς κόμβους αντί για πολλά στοιχεία με λίγους, χρησιμοποιούμε πιο περίπλοκες συναρτήσεις βάσης οι οποίες έχουν την δυνατότητα να παρεμβάλουν καλύτερα την άγνωστη συνάρτηση. Επίσης ο κώδικας απλοποιείται σημαντικά αφού δεν απαιτείται σύνδεση των μεμονωμένων στοιχείων.

2.2 B-Splines

2.2.1 Γενικά

Τα *b-splines* είναι τμηματικά συνεχείς καμπύλες που ορίζονται παραμετρικά, δηλαδή της μορφής :

$$C = C(u)$$

το u είναι η παράμετρος θέσης, τις περισσότερες φορές $0 \leq u \leq 1$. Το διάστημα $(0,1)$ δεν είναι ενιαίο αλλά χωρίζεται από κόμβους, έτσι ορίζεται το διάνυσμα κόμβων (knot vector) U .

$$U = \{0, a, b, \dots, 1\}$$

Το μήκος του διανύσματος κόμβων U ορίζεται ίσο με $m+1$ και είναι ένα μέγεθος που θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην συνέχεια.

Δύο διαδοχικοί κόμβοι ορίζουν ένα διάστημα. Οι κόμβοι δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικοί ο ένας από τον άλλον, αλλά μπορεί κάποιος να ταυτίζονται. Επί παραδείγματι σε ένα διάνυσμα κόμβων οι δύο ακραίοι κόμβοι έχουν πολλαπλότητα $p+1$, όπου p είναι ο βαθμός των πολυωνύμων που αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης.

Μία καμπύλη *b-spline* ορίζεται ως εξής :

$$C = C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i \quad a \leq u \leq b$$

σε μητρική γραφή :

$$C = \vec{C}(u) = [N] \cdot \vec{P}$$

Στην παραπάνω σχέση N είναι οι συναρτήσεις βάσης (shape functions) οι οποίες είναι $n+1$ το πλήθος και ουσιαστικά είναι οι συναρτήσεις που προσδίδουν τις επιθυμητές ιδιότητες στην καμπύλη. Τα P είναι τα σημεία ελέγχου της καμπύλης, είναι σταθερές οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τις αντίστοιχες συναρτήσεις βάσης και από αυτό το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει η καμπύλη C . προφανώς είναι και αυτά $n+1$ το πλήθος. Μια καμπύλη ορίζεται μονοσήμαντα από την θέση των σημείων ελέγχου αυτής, οι συναρτήσεις βάσης ορίζονται αναδρομικά και είναι συναρτήσεις της παραμέτρου u και του διανύσματος κόμβων.

$$N_{i,0}(u) = 1, u_i \leq u \leq u_{(i+1)}$$

$$N_{i,0}(u) = 0, \text{otherwise}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u)$$

στις ανωτέρω σχέσεις p , είναι ο βαθμός των πολυωνύμων βάσης, $m+1$ το μήκος του διανυσμάτος κόμβων και $n+1$ ο αριθμός των σημείων ελέγχου. Η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές αυτές είναι

$$m = n + p + 1$$

Είναι δυνατόν να προγραμματιστεί αλγόριθμος ώστε να υπολογίζει την τιμή των συναρτήσεων βάσης για κάθε διαφορετική τιμή της παραμέτρου u . Την κλίση της καμπύλης μπορούμε να υπολογίσουμε από την παραγωγή αυτής, για να παραγωγίσουμε μια καμπύλη b-spline αρκεί να παραγωγίσουμε τις συναρτήσεις βάσης της (τα σημεία ελέγχου είναι σταθερές και εξαιρούνται της παραγωγίσης).

$$\frac{dC(u)}{du} = \sum_{i=0}^n \frac{dN_{i,p}(u)}{du} \cdot P_i$$

Για τις παραγώγους αυτές υπάρχουν σχέσεις αντίστοιχες των προηγούμενων που ορίζονται πάλι αναδρομικά.

$$N'_{i,p} = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u)$$

Για τις ανάγκες της διπλωματικής έχουν προγραμματιστεί τέτοιες υπορουτίνες υπολογισμού των συναρτήσεων βάσης και των παραγώγων τους.

2.2.2 Παρεμβολή μέσω b-splines

Έχοντας προηγηθεί η παραπάνω ανάλυση θα προχωρήσουμε στην παρεμβολή δοθέντων σημείων Q_k μέσω μιας τμηματικά συνεχούς καμπύλης b-splines.

Έστω ένα σύνολο σημείων

$$[Q_k], k=0, \dots, n$$

Αντιστοιχίζεται σε κάθε σημείο Q μία μεταβλητή \bar{u}_k και επιλέγεται ένα διάνυσμα κόμβων U . Από την απαίτηση τα σημεία αυτά να ανήκουν στην καμπύλη C , πραγματοποιείται η σημειακή ικανοποίηση της καμπύλης. Επομένως :

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot P_i$$

όπου \bar{u}_k είναι οι παράμετροι που αντιστοιχήθηκαν σε κάθε σημείο. Στην παραπάνω εξίσωση άγνωστοι είναι τα P_i που είναι οι θέσεις των σημείων ελέγχου ώστε η καμπύλη που θα προκύψει να παρεμβάλει τα δοθέντα, γνωστά σημεία Q_k . Αντιστρέφοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προκύπτουν τα σημεία ελέγχου.

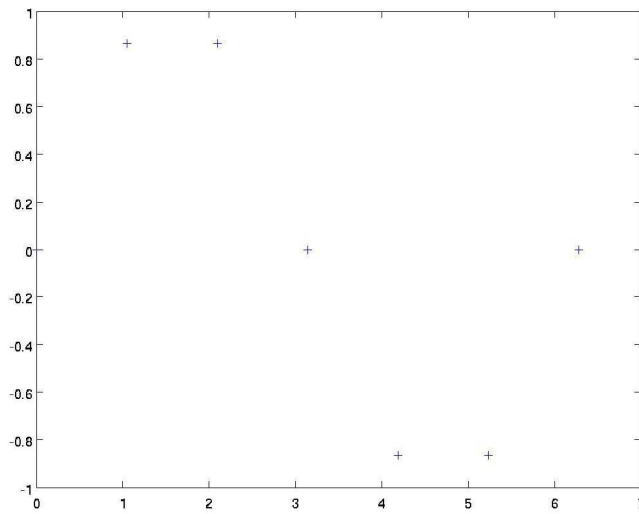
$$\vec{P}_i = [N]^{-1} \cdot Q_k$$

Προφανώς για να μπορεί να γίνει η αντιστροφή του μητρώου πρέπει το σύστημα να είναι τετραγωνικό, δηλαδή ο αριθμός των σημείων που παρεμβάλουμε να είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων ελέγχου που ορίζουν την καμπύλη. Να υπογραμμιστεί ότι με τον υπολογισμό των P_i προσδιορίστηκε μονοσήμαντα η καμπύλη C .

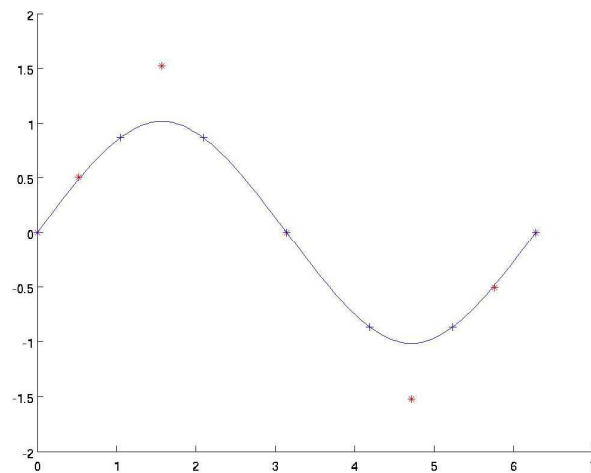
$$C = C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i$$

Η παρεμβολή που προηγήθηκε δεν είναι απαραίτητο να γίνει μόνο για γεωμετρικά μεγέθη, άλλα μπορεί να γίνει και για την άγνωστη συνάρτηση. Έτσι μπορούμε να παρεμβάλουμε οποιοδήποτε μέγεθος δοθέντων κάποιων τιμών του στους κόμβους. Τελικά έχουμε μια γενίκευση των χωρικών συντεταγμένων (x,y,z) ώστε να περιλαμβάνονται και τα άγνωστα μεγέθη δηλαδή (x,y,z,T)

Ακολουθεί μια εφαρμογή της προηγούμενης ανάλυσης. Έστω ένα δοθέν σύνολο σημείων



Τα σημεία αυτά τοποθετήθηκαν επί μιας καμπύλη ημιτόνου, προφανώς αυτή η πληροφορία δεν είναι κατά κανόνα διαθέσιμη και συνήθως το μόνο στοιχείο που είναι διαθέσιμο είναι οι συντεταγμένες των σημείων που θα παρεμβληθούν. Θα μπορούσαν τα σημεία αυτά να βρίσκονται σε μια οποιαδήποτε καμπύλη. Στην συνέχεια παρεμβάλουμε τα σημεία.



Στο παραπάνω σχήμα με μπλέ σταυρό ορίζονται τα προς παρεμβολή σημεία, με κόκκινο αστερίσκο σημειώνεται η θέση των σημείων ελέγχου, ενώ με συνεχή γραμμή είναι η καμπύλη που προκύπτει.

Περιγραφή της διαδικασίας : παρεμβάλουμε 7 σημεία άρα $n=6$, θα χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού, άρα $p=3$. $m=n+p+1$, άρα $m=10$. Άρα το διάνυσμα κόμβων U έχει 11 στοιχεία. Για την συγκεκριμένη περίπτωση θεωρήσαμε διάνυσμα ισαπέχοντων κόμβων. Στην συνέχεια για κάθε σημείο ορίσαμε μια παράμετρο u η οποία είναι από 0 έως 1. Πάλι θεωρήσαμε ομοιόμορφο αυτό το διάνυσμα, έπειτα υπολογίζουμε τις συναρτήσεις βάσης (N) με διάνυσμα κόμβων το u . Το μητρωο αυτό είναι που αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζοντας επί τις συντεταγμένες των σημείων προκύπτουν τα σημεία ελέγχου.

$$\vec{P}_i = [N]^{-1} \cdot Q_k$$

αφού βρήκαμε τα σημεία ελέγχου έχουμε προσδιορίσει μονοσήμαντα την καμπύλη.

2.2.3 Σχόλια

Τα σημεία προς παρεμβολή ήταν ισαπέχοντα (ωστόσο δεν υπάρχει κάποιος τέτοιος περιορισμός). Άρα ήταν συνετό να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία μια παράμετρο u και τελικά ορίστηκε ένα ομοιόμορφο διάνυσμα $\{u\}$. Αφού το διάνυσμα αυτό ήταν ομοιόμορφο ήταν επόμενο να οριστεί και το διάνυσμα κόμβων της καμπύλης ομοιόμορφο (U). Γενικά η παραμετροποίηση θα μπορούσε να μην ήταν ομοιόμορφη. Εάν επί παραδείγματι θέλαμε να δώσουμε έμφαση σε κάποιο συγκεκριμένο διάστημα της καμπύλης θα μπορούσαμε να επιμηκύνουμε αυτό το διάστημα στο διάνυσμα u . Δηλαδή :

Το u της συγκεκριμένης περίπτωσης ήταν :

$$u = \{0, 0.1667, 0.3333, 0.5000, 0.6667, 0.8333, 1\}$$

για να δώσουμε έμφαση στο 2ο διάστημα θα μπορούσαμε να ορίσουμε το διάνυσμα ως ακολούθως:

$$u = \{0, 0.1667, 0.6667, 0.7000, 0.8000, 0.9000, 1\}$$

Έτσι έχουμε κάνει μεγαλύτερο το δεύτερο διάστημα άρα έχουμε και μεγαλύτερη ακρίβεια στην παράστασή του, ωστόσο εμφανίζεται μειωμένη ακρίβεια στα υπόλοιπα διαστήματα.

Άμα οριστεί μη ομοιόμορφο το διάνυσμα u , τότε θα ήταν βέλτιστο οριστεί και το διάνυσμα κόμβων μη ομοιόμορφο. Αντίστοιχα πάλι επιμηκύνοντας κάποιο από τα διαστήματά του και μικραίνοντας τα υπόλοιπα.

Γενικά δεν υπάρχει κάποια τυπική μεθοδολογία για την κάθε περίπτωση και η ποιότητα της παρεμβολής θα ποικίλει ανάλογα με τις επιλογές του μελετητή. Πάντως η παρεμβολή θα είναι σε καλά επίπεδα εφόσον δεν μικρύνουμε τόσο πολύ κάποιο διάστημα ώστε αυτό να αρχίζει να εκφυλίζεται.

Εδώ να σχολιάσουμε άλλη μια παρατήρηση, παρεμβάλλοντας στην προηγούμενη περίπτωση 7 σημεία, επιλέξαμε μια καμπύλη b-spline με 7 σημεία ελέγχου, το διάνυσμα κόμβων που προέκυψε ήταν:

$$U=\{0, 0, 0,0, 0.25, 0.50, 0.75,1, 1,1, 1\}$$

$$\text{ενώ : } u=\{0, 0.1667,0.3333,0.5000,0.6667,0.8333,1\}$$

Αμέσως γίνεται σαφές ένα πρόβλημα, το διάνυσμα κόμβων έχει μόνο 4 διακριτά διαστήματα, δηλαδή διαστήματα μη μηδενικού μήκους, ενώ το u έχει 6, δηλαδή τα όρια των διαστημάτων δεν ταιριάζουν! Εφόσον η παρεμβολή γίνεται σωστά αυτό θα μπορούσε να μην μας απασχολήσει, ωστόσο δημιουργεί πρόβλημα στην διαδραστική προσαρμογή σχήματος (interactive shape modification).

2.2.4 διαδραστική προσαρμογή σχήματος

Υπάρχει η δυνατότητα με τον παραμετρικό ορισμό της καμπύλης να μεταβάλλεται το σχήμα της απλά και μόνο μεταβάλλοντας την θέση των σημείων ελέγχου. Επίσης επειδή οι συναρτήσεις βάσης της καμπύλης είναι τμηματικά ορισμένες αυτό θα πει πως μετακινώντας ένα σημείο ελέγχου δεν αλλάζει συνολικά όλη η καμπύλη παρά μόνο τα άμεσα γειτονικά διαστήματα. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **Ιδιότητα τοπικής στήριξης**.

Συγκεκριμένα μετακινώντας το P_i η καμπύλη αλλάζει μόνο στο διάστημα

$$[U(i), U(i+p+1)]$$

Εάν όπως είδαμε προηγουμένως για τα διανύσματα u και U , τα όρια των διαστημάτων δεν ταιριάζουν καταστρέφεται αυτή η ιδιότητα και δυσχεραίνεται η διαδραστική προσαρμογή σχήματος.

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα πρέπει να αλλάξουμε το διάνυσμα κόμβων έτσι ώστε οι εσωτερικοί κόμβοι του, να συμπίπτουν με τους κόμβους του u , ή αλλιώς τα διαστήματα τους να είναι ίδια. Για να υλοποιηθεί αυτό πρέπει να επιλέξουμε ένα καινούριο διάνυσμα κόμβων $U2$, του οποίου οι κόμβοι θα ταυτίζονται με του u και στην συνέχεια να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις βάσης $N2$ που προκύπτουν. Στην συνέχεια θα απαιτήσουμε η καινούρια

καμπύλη C_2 να είναι ταυτόσημη με την παλιά, από την απαίτηση αυτή θα υπολογιστούν τα καινούρια σημεία ελέγχου.

Πιθανότατα το καινούριο διάνυσμα κόμβων U_2 θα έχει διαφορετικό αριθμό στοιχείων από το προηγούμενο, για να υπολογίσουμε τα καινούρια σημεία ελέγχου χρειαζόμαστε αριθμό εξισώσεων ίδιο με τα σημεία ελέγχου, άρα θα απαιτήσουμε πάλι σημειακή ικανοποίηση της συνθήκης αυτής σε όσα σημεία χρειάζεται. Σχηματικά:

Έστω η αρχική καμπύλη

$$C_1 = \vec{C}_1(u) = [N_1] \cdot \vec{P}_1$$

με knot vector U_1 , αλλάζουμε το knot vector σε U_2 , η καινούρια καμπύλη είναι

$$C_2 = \vec{C}_2(u) = [N_2] \cdot \vec{P}_2$$

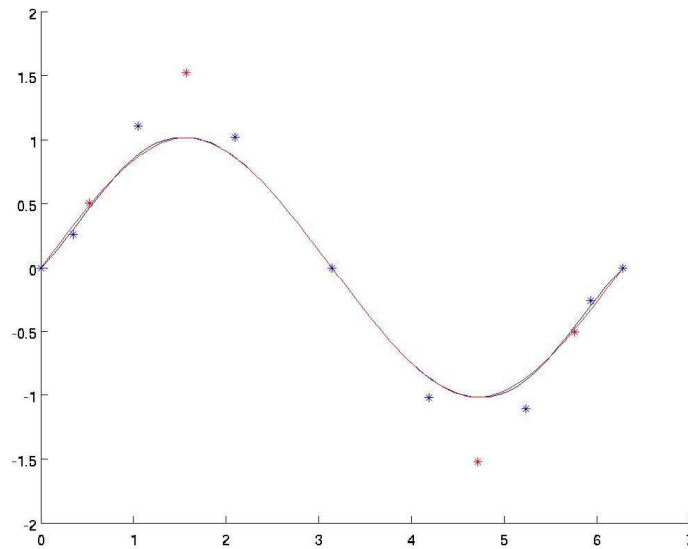
Απαιτώ $C_1 = C_2$

Άρα :

$$C_1 = C_2 \Rightarrow [N_1] \cdot \vec{P}_1 = [N_2] \cdot \vec{P}_2 \Rightarrow \vec{P}_2 = [N_2]^{-1} \cdot [N_1] \cdot \vec{P}_1$$

Η ικανοποίηση της εξίσωσης θα γίνει σε αριθμό σημείων ίσο με τον αριθμό των σημείων ελέγχου P_2 . Το πώς θα είναι κατανομημένα τα σημεία αυτά είναι επιλογή του ερευνητή, μια προφανής επιλογή είναι να θεωρηθούν ομοιόμορφα, αλλιώς όπως κρίνεται σκόπιμο. Αρκεί να έχουμε υπόψιν πως όπου αυτά επιλεγούν εκεί είναι που θα απαιτηθεί η ταύτιση των 2 καμπύλων. Είναι βεβαίως εύλογο πως αν οι καμπύλες ταυτίζονται τουλάχιστον σε ένα σημείο μέσα σε κάθε διάστημα τελικά θα είναι παντού ταυτόσημες.

Τα ανωτέρω θα εφαρμόσουμε στο παράδειγμα παρεμβολής που αναλύσαμε προηγουμένως



Στο ανωτέρω σχήμα διακρίνεται :

Με μπλέ συνεχή γραμμή η καινούρια καμπύλη, με κόκκινη συνεχή γραμμή η παλιά καμπύλη, με μπλέ αστερίσκους τα καινούρια σημεία ελέγχου και με κόκκινους αστερίσκους τα παλιά σημεία ελέγχου.

Διαπιστώνεται ότι οι δύο καμπύλες πρακτικά ταυτίζονται. Τα διανύσματα κόμβων είναι:

$$U_1 = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$$

$$U_2 = \{0, 0, 0, 0, 0.1667, 0.3333, 0.5000, 0.6667, 0.8333, 1, 1, 1, 1\}$$

Παρατηρούμε ότι οι κόμβοι του U_2 ταυτίζονται με του u και η καμπύλη ουσιαστικά δεν έχει αλλάξει μορφή.

2.3 Η εξίσωση Laplace

2.3.1 Χωρίο ολοκλήρωσης

Η εξίσωση δυναμικού προς επίλυση ορίζεται σε ένα χωρίο. Το χωρίο φράσσεται από 4 καμπύλες b-splines. Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω ανάλυση ορίζουμε τα σύνορα του χωρίου ολοκλήρωσης.

$$C^1(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^1$$

$$C^2(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^2$$

$$C^3(v) = \sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \cdot P_j^3$$

$$C^4(v) = \sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \cdot P_j^4$$

Στην συνέχεια θεωρούμε το τανυστικό γινόμενο των καμπύλων αυτών και έτσι ορίζεται μια επιφάνεια η οποία είναι το χωρίο ολοκλήρωσης.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) \cdot P_{i,j}$$

Έτσι προκύπτει μια παράσταση της γεωμετρίας του χωρίου με παραμέτρους τα u και v .

2.3.2 Μετατροπή σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων

Η εξίσωση δυναμικού γνωστή και ως εξίσωση Laplace είναι της ακόλουθης μορφής :

$$\nabla^2 T(x, y) = 0$$

Είναι **ελλειπτικής μορφής**, δηλαδή έχουμε ένα πρόβλημα οριακών συνθηκών. Η ανωτέρω εξίσωση είναι διατυπωμένη σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ωστόσο για την επίλυση της σε καμπυλόγραμμο χωρίο, πρέπει να διατυπωθεί σε κσσ. Αυτό γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω u-v το κσσ, υπάρχει η ακόλουθη σχέση μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων η οποία προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των επιφανειών b-splines.

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) \cdot Px_{i,j}$$

$$y(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) \cdot Py_{i,j}$$

Ή σε μητρική γραφή :

$$\vec{x} = [N] \cdot \vec{Px}$$

$$\vec{y} = [N] \cdot \vec{Py}$$

Έτσι ορίζονται και οι παράγωγοι :

$$\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} = \left[\frac{\partial N}{\partial u} \right] \cdot Px$$

$$\frac{\partial x(u, v)}{\partial v} = \left[\frac{\partial N}{\partial v} \right] \cdot Px$$

$$\frac{\partial y(u, v)}{\partial u} = \left[\frac{\partial N}{\partial u} \right] \cdot Py$$

$$\frac{\partial y(u, v)}{\partial v} = \left[\frac{\partial N}{\partial v} \right] \cdot Py$$

Αυτές οι σχέσεις ονομάζονται μετρικές του x-y ως προς u-v. Οι μετρικές του u-v ως προς x-y υπολογίζονται μέσω της ιακωβιανής.

$$J = x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v$$

$$u_x = \frac{y_v}{J}$$

$$u_y = \frac{-x_v}{J}$$

$$v_x = \frac{-y_u}{J}$$

$$v_y = \frac{x_u}{J}$$

Έχοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού της Laplace, χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης αλυσίδας και τελικά μετά από αρκετές πράξεις η τελική έκφραση για την Λαπλασιανή είναι :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial T}{\partial v}$$

$$\nabla^2 T = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι που θα ολοκληρωθούν. Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για κάθε εσωτερικό σημείο του χωρίου ολοκλήρωσης, για τα σύνορα του χωρίου ισχύουν οι οριακές συνθήκες. Αφού επιλύσουμε τις εξισώσεις και επιβάλλουμε τις οριακές συνθήκες κάνουμε μια μετεπεξεργασία υπολογίζοντας ροές (fluxes) και σφάλματα.

2.4 Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων

2.4.1 Η μέθοδος της ταξiθεσίας (collocation)

Απαιτούμε την σημειακή ικανοποίηση της Laplace σε ορισμένα σημεία, ο τρόπος που επιλέγουμε τα σημεία αυτά έχει κάποια σημασία στην σύγκλιση της μεθόδου, αλλά γενικά αν πάρουμε αρκούτσως πυκνό πλέγμα τα αποτελέσματα θα είναι ικανοποιητικά. Βέλτιστο είναι η σημειακή ικανοποίηση να γίνει στα σημεία Gauss. Στον αλγόριθμο ωστόσο σημειακή ικανοποίηση γίνεται σε ισαπέχοντα σημεία. Να τονίσουμε ότι χάριν γενικότητας της θεώρησης της γεωμετρίας, τα σημεία τοποθετούνται με χρήση της παρεμβολής Coons. Η διακριτοποίηση που ακολουθείται είναι :

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{Pt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} \cdot Pt + \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2} \cdot Pt = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2} \right) \cdot Pt = 0$$

Ακολουθως παρατίθεται μια σύντομη ανάλυση σχετικά με την μητρική γραφή των παραπάνω εξισώσεων.

Στην περίπτωση μιας καμπύλης b-splines η πρώτη εξίσωση γράφεται αναλυτικά :

$$\begin{Bmatrix} T^{(x=1)} \\ T^{(x=2)} \\ \dots \\ T^{(x=nx-1)} \\ T^{(x=nx)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(x=1)} & N_2^{(x=1)} & N_3^{(x=1)} \\ N_1^{(x=2)} & N_2^{(x=2)} & N_3^{(x=2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ N_1^{(x=nx-1)} & N_2^{(x=nx-1)} & N_3^{(x=nx-1)} \\ N_1^{(x=nx)} & N_2^{(x=nx)} & N_3^{(x=nx)} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} Pt_1 \\ Pt_2 \\ Pt_3 \end{Bmatrix}$$

Η παραπάνω καμπύλη ορίζεται από 3 σημεία ελέγχου, ενώ επί της καμπύλης θεωρούμε nx σημεία. Η γενίκευση για n σημεία ελέγχου είναι προφανής. Να τονίσουμε ότι κάποιες από τις συναρτήσεις βάσεως μπορεί να είναι και 0, αυτό προκύπτει από την ιδιότητα τοπικής στήριξης (local support property) που αναλύθηκε παραπάνω.

Αντίστοιχη έκφραση υπάρχει και για μια επιφάνεια b-splines, θυμίζουμε ότι ο ορισμός της επιφάνειας είναι :

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) \cdot Px_{i,j}$$

$$y(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) \cdot Py_{i,j}$$

Η διαφορά έγκειται στο ότι δεν ορίζεται ένα διάνυσμα με τα σημεία ελέγχου τα οποία ορίζουν την επιφάνεια, αλλά ορίζεται ένα διδιάστατο δίκτυο από αυτά. Το ίδιο και με τις συντεταγμένες των σημείων επί τις επιφάνειας, ενώ στην περίπτωση της καμπύλης είχαμε μόνο μία διάσταση τώρα έχουμε 2. Αυτό κάνει την μητρική έκφραση να μην είναι τόσο προφανής. Για να προκύψει μια τέτοια έκφραση πρέπει να μετατρέψουμε το μητρώο των σημείων ελέγχου σε διάνυσμα κοκ.

Αν θεωρήσουμε ένα δίκτυο 3x3 σημείων ελέγχου τότε η μητρική έκφραση θα είναι η ακόλουθη

$$\begin{Bmatrix} T^{x=1} \\ T^{x=2} \\ \dots \\ T^{x=nx-1} \\ T^{x=nx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{x=1} & N_2^{x=1} & N_3^{x=1} & N_4^{x=1} & N_5^{x=1} & N_6^{x=1} & N_7^{x=1} & N_8^{x=1} & N_9^{x=1} \\ N_1^{x=2} & N_2^{x=2} & N_3^{x=2} & N_4^{x=2} & N_5^{x=2} & N_6^{x=2} & N_7^{x=2} & N_8^{x=2} & N_9^{x=2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_1^{x=nx-1} & N_2^{x=nx-1} & N_3^{x=nx-1} & N_4^{x=nx-1} & N_5^{x=nx-1} & N_6^{x=nx-1} & N_7^{x=nx-1} & N_8^{x=nx-1} & N_9^{x=nx-1} \\ N_1^{x=nx} & N_2^{x=nx} & N_3^{x=nx} & N_4^{x=nx} & N_5^{x=nx} & N_6^{x=nx} & N_7^{x=nx} & N_8^{x=nx} & N_9^{x=nx} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} Pt_1 \\ Pt_2 \\ Pt_3 \\ Pt_4 \\ Pt_5 \\ Pt_6 \\ Pt_7 \\ Pt_8 \\ Pt_9 \end{Bmatrix}$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση το μητρώο με τις συναρτήσεις βάσης δεν είναι πλήρες αλλά περιέχει πολλά 0. Η γενίκευση για n σημεία ελέγχου είναι πάλι προφανής.

Παρατηρούμε πάλι την εξίσωση Laplace :

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{Pt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} \cdot Pt + \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2} \cdot Pt = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2} \right) \cdot Pt = 0$$

Είναι της μορφής $[K] \cdot \{Pt\} = 0$. Εύκολα μπορούμε να αντιστρέψουμε το μητρώο K και να υπολογίσουμε τις τιμές του ζητούμενου μεγέθους στα σημεία ελέγχου. Όταν υπολογίσουμε τα Pt μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της θερμοκρασίας σε οποιοδήποτε σημείο του χωρίου παρεμβάλλοντας τις κομβικές τιμές.

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{P}t$$

Επιβολή οριακών συνθηκών

Η εξίσωση $[K] \cdot \{Pt\} = 0$ είναι αυτή που τελικά θα επιλυθεί, ωστόσο πρέπει να επιβληθούν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες. Αυτές επιβάλλονται πάνω στις καμπύλες b-splines, σύνορα του χωρίου ολοκλήρωσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν καλούμαστε να επιβάλλουμε οριακές συνθήκες ή γενικότερα όταν θέλουμε να εκχωρήσουμε μια τιμή σε ένα μέγεθος το οποίο δεν ορίζεται σημειακά, πρέπει η ανάθεση αυτή να γίνει μέσω των σημείων ελέγχου, δηλαδή να ανατεθεί στα σημεία ελέγχου κάποια τιμή και στην συνέχεια παρεμβάλλοντας τις τιμές των σημείων αυτών να προκύψει η επιθυμητή κατανομή του μεγέθους, ακολουθείται δηλαδή μια αντίστροφη διαδικασία (αντί να ορίσουμε την τιμή απευθείας πάνω στην γεωμετρία, την ορίζουμε στα σημεία ελέγχου και στην συνέχεια την παρεμβάλλουμε πάνω στην γεωμετρία) Έτσι :

έστω $T = T_o$ το μέγεθος που θέλουμε να ορίσουμε σε κάποια καμπύλη C , u η παράμετρος θέσης

$$\vec{T}(u) = \vec{T}_o \Rightarrow [N] \cdot \vec{P}_i = \vec{T}_o \Rightarrow \vec{P}_i = [N]^{-1} \cdot \vec{T}_o$$

Αυτή θα είναι η τιμή του μεγέθους στα σημεία ελέγχου ώστε να πετύχουμε την επιθυμητή κατανομή T_o στην καμπύλη C .

Η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο :

Στο σύστημα εξισώσεων $[K] \cdot \{Pt\} = 0$

Ορίζουμε σαν δεξί μέλος ένα διάνυσμα το οποίο αρχικά είναι παντού 0

$$RHS = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Και έχει αριθμό στοιχείων ίσο με τον αριθμό των σημείων ελέγχου, το μητρώο K είναι αυτό που ορίστηκε προηγουμένως. Στην συνέχεια μηδενίζουμε τις σειρές του K που αντιστοιχούν στα σημεία ελέγχου που κείτονται επί των συνόρων. Στην θέση των σειρών αυτών που μηδενίσαμε

εισάγουμε τις αντίστοιχες σειρές του μητρώου N (μητρώο συναρτήσεων βάσης) και στις αντίστοιχες θέσεις του RHS εισάγουμε τις τιμές που απαιτούμε να παίρνει η συνάρτηση πάνω στα σύνορα.

Έτσι έχουμε καταφέρει για όλα τα σημεία ελέγχου εκτός αυτών που κείτονται επί των συνόρων να ισχύει η εξίσωση

$$[K] \cdot \{Pt\} = 0$$

Ενώ για τα σημεία τα «συνοριακά» να ισχύουν οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{Pt}$$

Το τελικό σύστημα που προέκυψε έτσι μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$[K_{tot}] \cdot \{Pt\} = \{RHS\}$$

Αντιστρέφοντας υπολογίζονται τα Pt

Να τονίσουμε επίσης πως αυτή η ανάλυση έγινε για οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, εάν είχαμε τύπου Neumann τότε αντί να αντικαταστήσουμε σειρές του μητρώου K με τις αντίστοιχες του μητρώου N, θα χρησιμοποιούσαμε το μητρώο N' (την πρώτη παράγωγο του N), και στο RHS θα βάζαμε την επιθυμητή τιμή της παραγώγου της θερμοκρασίας.

Δηλαδή σχηματίσαμε και πάλι τις εξισώσεις των οριακών συνθηκών (εδώ Neumann) και τις ενσωματώσαμε στο σύστημα

$$[K_{tot}] \cdot \{Pt\} = \{RHS\}$$

2.4.2 Η μέθοδος της ασθενούς ταξιθεσίας

Για την ασθενή ταξιθεσία ακολουθείται μια παρόμοια διαδικασία, μόνο που αντί να απαιτήσουμε την σημειακή ικανοποίηση της Laplace απαιτούμε την ασθενή ικανοποίηση αυτής, αυτό σημαίνει πως κάνουμε την διακριτοποίηση με τον ίδιο τρόπο (μόνο που τώρα γίνεται στα σημεία Gauss) και στην συνέχεια κάνουμε μια καθολική ολοκλήρωση, πάλι προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο λύνουμε με αντιστροφή. Σαν συναρτήσεις στάθμησης χρησιμοποιούμε μοναδιαίες συναρτήσεις.

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{Pt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \int \left(\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \right) du \cdot dv = 0 \Rightarrow \left[\int \left(\frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2} \right) du \cdot dv \right] \cdot Pt = 0$$

Τα σημεία Gauss που επιλέγουμε δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα σε αριθμό με τα σημεία ελέγχου, και γενικά για την επίτευξη καλής ακρίβειας στην ολοκλήρωση είναι τα τετραπλάσια. Αυτό σημαίνει πως έχουμε καλύτερη ακρίβεια στην λύση μόνο στο κομμάτι το σχετικό με την αποτελεσματικότητα της μεθόδου, την γεωμετρία την παριστούμε με τον ίδιο αριθμό σημείων που την παριστούμε και στην μέθοδο της ταξιθεσίας. Η χρήση μεγάλου αριθμού σημείων Gauss έχει το υπολογιστικό της κόστος, αλλά το κέρδος στην ακρίβεια της λύσης είναι μεγαλύτερο, γενικά υπάρχει ένας βέλτιστος αριθμός σημείων Gauss για κάθε περίπτωση, στα παραδείγματα που λύνουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα παίρνουμε με τα σημεία Gauss τετραπλάσια σε αριθμό από τα σημεία ελέγχου.

Και εδώ το τελικό σύστημα που λύνουμε είναι της μορφής $[Ktot] \cdot \{Pt\} = \{RHS\}$ Η μοναδική διαφορά έγκειται στο μητρώο K, το οποίο τώρα είναι ολοκληρωματικής μορφής. Οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται επίσης με τον ίδιο τρόπο.

2.4.3 Η μέθοδος Galerkin - Ritz

Παρόμοια διαδικασία με την ασθενή ταξιθεσία μόνο που πριν γίνει η ολοκλήρωση πολλαπλασιάζουμε με συναρτήσεις βάρους οι οποίες στην δική μας περίπτωση είναι οι συναρτήσεις βάσης. Επίσης χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση με στόχο να μειώσουμε την τάξη των παραγώγων.

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{P}t$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} \cdot Pt + \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2} \cdot Pt = 0 \Rightarrow$$

$$\int (N(u, v) \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial u^2} + N(u, v) \frac{\partial^2 N(u, v)}{\partial v^2}) du dv \cdot Pt = 0$$

Μια σημαντική διαφορά αυτής της μεθόδου από τις υπόλοιπες έγκειται στην επιβολή των οριακών συνθηκών. Σχηματίζουμε το αρχικό σύστημα : $[K] \cdot \{Pt\} = 0$ και στην συνέχεια ορίζουμε ένα δεξί μέλος το οποίο αρχικά είναι 0,

$$RHS = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Με αριθμό στοιχείων ίσο με τον αριθμό των σημείων ελέγχου. Τις γραμμές του K που αντιπροσωπεύουν δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας (οριακές συνθήκες) τις πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με τις τιμές των σημείων ελέγχου που προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες και το βαθμωτό αποτέλεσμα το περνάμε με αλλαγμένο πρόσημο στο δεύτερο μέλος, σαν στοιχείο του διανύσματος RHS

$$RHS(i) = -\{K(i,:)\} \cdot \{Pt^{boundary}\}$$

Όπου στην παραπάνω σχέση υπολογίζεται το i στοιχείο του RHS, $Pt^{boundary}$ είναι οι τιμές των σημείων ελέγχου επί το σύνορο. Πρακτικά η διαδικασία που περιγράφηκε είναι ένας χωρισμός γνωστών από αγνώστους, όπου γνωστές είναι οι τιμές της θερμοκρασίας πάνω στο σύνορο, ενώ αγνώστες είναι οι τιμές της θερμοκρασίας σπουδήποτε αλλού.

Σε περίπτωση Neumann οριακών συνθηκών δεν απαιτείται κανένας ειδικός χειρισμός, αφήνουμε τις αντίστοιχες γραμμές όπως έχουν και τις θέσεις στο RHS ίσες με 0, οι τιμές στους οριακούς κόμβους θα προκύψουν από την επίλυση του συστήματος. Το πρόβλημα επιλύεται τελικά με αντιστροφή του συστήματος

$$[K_{tot}] \cdot \{Pt\} = \{RHS\}$$

2.5 Ισογεωμετρική ανάλυση

Η ισογεωμετρική ανάλυση – προσέγγιση είναι μια έννοια ιδιαίτερα ελκυστική στην υπολογιστική μηχανική, πρακτικά σημαίνει πως με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που παρεμβάλλεται η γεωμετρία σε ένα χωρίο (καμπύλες και επιφάνειες b-splines στην δική μας περίπτωση, ή οποιοσδήποτε άλλος τρόπος όπως παρεμβολή Coons) παρεμβάλλεται και το άγνωστο μέγεθος. Επίσης επιχειρείται μια ακριβής περιγραφή της γεωμετρίας, η οποία προκειμένου να γίνει η ανάλυση εκλεπτύνεται (h-refinement, p-refinement), ενώ το γεωμετρικό μοντέλο που δημιουργήθηκε μένει αναλλοίωτο σε όλα τα επίπεδα χωρίς να απαιτείται η επικοινωνία με κάποιο σύστημα CAD το οποίο θα κάνει την γένεση πλέγματος.

Αυτή η προσέγγιση έχει το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να χειριζόμαστε όλα τα μεγέθη που μας απασχολούν γεωμετρικά, έτσι δεν ορίζουμε μόνο τις χωρικές διαστάσεις άλλα και τις διαστάσεις της θερμοκρασίας – πίεσης – ταχύτητας και γενικά οποιασδήποτε ιδιότητας –

μέγεθος μας ενδιαφέρει. Αποδεικνύεται ότι η χρησιμοποίηση των συναρτήσεων βάσης των b-splines σαν συναρτήσεις μορφής των πεπερασμένων στοιχείων είναι ιδιαίτερα αποδοτική και διαθέτει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τις συμβατικές πολυωνυμικές εκφράσεις.

2.6 Παρεμβολή Coons

Η παρεμβολή Coons είναι ο τρόπος που προκύπτουν τα χωρία Coons, Τα χωρία Coons είναι μια ειδική περίπτωση της επιφάνειας **Gordons**, μια επιφάνεια Gordons ορίζεται ως ακολούθως :

Έστω δύο σύνολα καμπύλων b-splines

$$C_k(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_{k,i} \quad \text{με} \quad k=0, \dots, r \quad \text{και} \quad u \in [0,1]$$

$$C_l(v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) P_{l,j} \quad \text{με} \quad l=0, \dots, s \quad \text{και} \quad v \in [0,1]$$

Τότε ορίζουμε μια επιφάνεια η οποία παρεμβάλει αυτές τις δύο οικογένειες καμπύλων.

$$S(u, v) = \sum_{l=0}^s C_l(v) \varphi_l(u) + \sum_{k=0}^r C_k(u) \psi_k(v) - \sum_{l=0}^s \sum_{k=0}^r Q_{l,k} \varphi_l(u) \psi_k(v) = L_1(u, v) + L_2(u, v) - T(u, v)$$

Η επιφάνεια S είναι μια επιφάνεια Gordon's και αποτελείται από 3 απλούστερες επιφάνειες, τις επιφάνειες L1, L2 που είναι Lofted surfaces και το τανυστικό γινόμενο T.

Το χωρίο Coons είναι μια επιφάνεια Gordon's όπως ορίστηκε προηγουμένως μόνο που η παρεμβολή τώρα γίνεται ανάμεσα σε δύο μόνο καμπύλες b-splines. Ακολουθεί ο μαθηματικός ορισμός :

$$\bar{x}(\xi, \eta) = E_o(\xi) \bar{x}(0, \eta) + E_1 \bar{x}(1, \eta) + E_o(\eta) \bar{x}(\xi, 0) + E_1(\eta) \bar{x}(\xi, 1) - E_o(\xi) E_o(\eta) \bar{x}(0, 0) \\ - E_1(\xi) E_o(\eta) \bar{x}(1, 0) - E_o(\xi) E_1(\eta) \bar{x}(0, 1) - E_1(\xi) E_1(\eta) \bar{x}(1, 1)$$

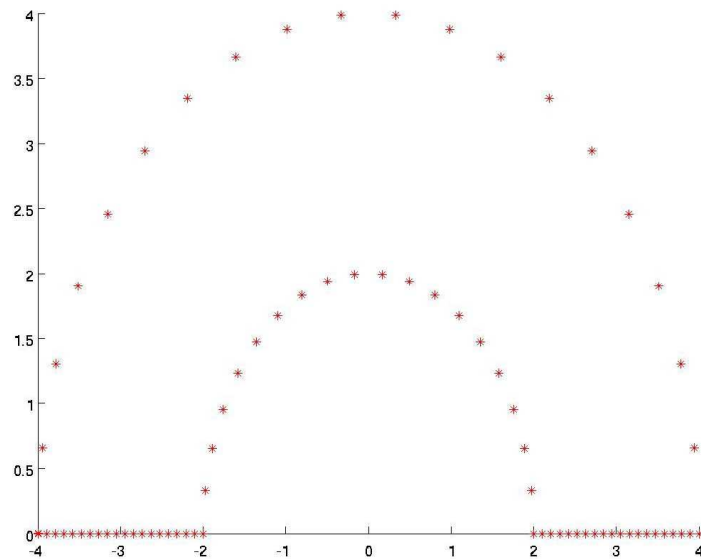
Να αναφέρουμε πώς η παρεμβολή Coons χρησιμοποιείται για αυτόματη γένεση πλέγματος, εμείς την χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε τις θέσεις των σημείων ελέγχου στο εσωτερικό του χωρίου ολοκλήρωσης, με αυτήν την τυποποίηση το μακροστοιχείο ορίζεται αυτόματα χωρίς να επεμβαίνουμε κάθε φορά που αλλάζει η γεωμετρία

3. Εφαρμογές

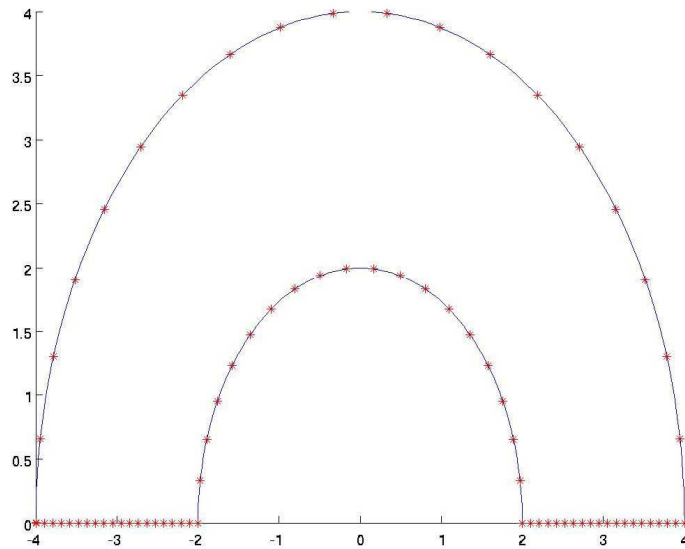
Θα επιλυθούν συνολικά 5 παραδείγματα με 3 διαφορετικές μεθόδους το καθένα, οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν αναλύθηκαν παραπάνω, με την εφαρμογή τους στα ακόλουθα προβλήματα θα φανούν κάποια χαρακτηριστικά τους, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τα οποία θα σχολιάζουμε. Θα γίνει κάποια σύγκριση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων της κάθε μεθόδου.

3.1 Κοίλος κύλινδρος

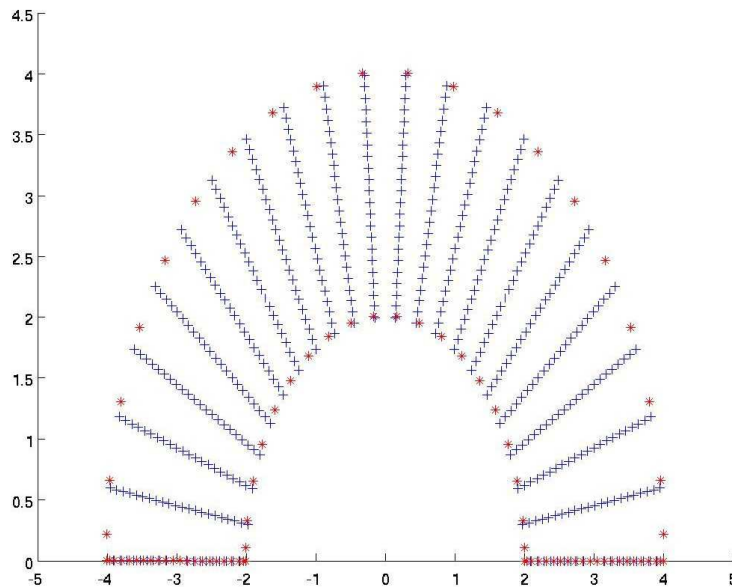
Το χωρίο ολοκλήρωσης αντιπροσωπεύει ένα κοίλο κύλινδρο, θα μπορούσε να ήταν ένας αγωγός, ο οποίος στην εσωτερική του επιφάνεια εκτίθεται σε θερμοκρασίες 200 βαθμών κελσίου ενώ στην εξωτερική 20 (θερμοκρασία περιβάλλοντος). Η μοναδική είσοδος στον αλγόριθμο είναι κάποια σημεία τα οποία ορίζουν τα σύνορα του χωρίου, αυτά τα σημεία παρεμβάλλονται μέσω b-splines. Τα σημεία που εισάγονται σαν γεωμετρία του χωρίου ολοκλήρωσης είναι :



Συνολικά χρησιμοποιούμε 20 διαμερίσεις στην ακτίνα και 20 στην περίμετρο. Αφού εισάγουμε τα σημεία αυτά τα παρεμβάλλουμε μέσω b-splines 3ου βαθμού.



Αυτές είναι οι καμπύλες που παρεμβάλουν τα δοθέντα σημεία. Στην συνέχεια αφού έχουν υπολογιστεί τα σύνορα του χωρίου, ορίζεται η επιφάνεια του χωρίου με χρήση του τανυστικού γινομένου. Η επιφάνεια που προκύπτει είναι:

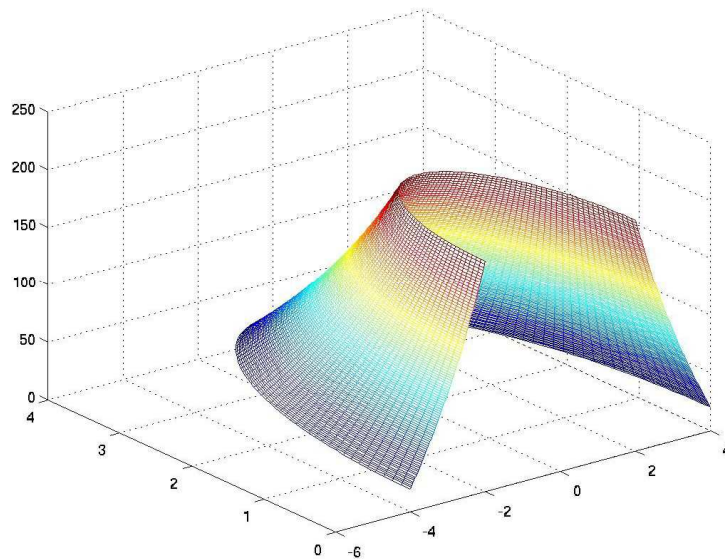


Τα σημεία που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα είναι οι θέσεις των σημείων ελέγχου. Δηλαδή στα εικονιζόμενα σημεία θα επιλυθεί η εξίσωση Laplace προς υπολογισμού των P_t . Στην

συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο με παρεμβολή της λύσης.

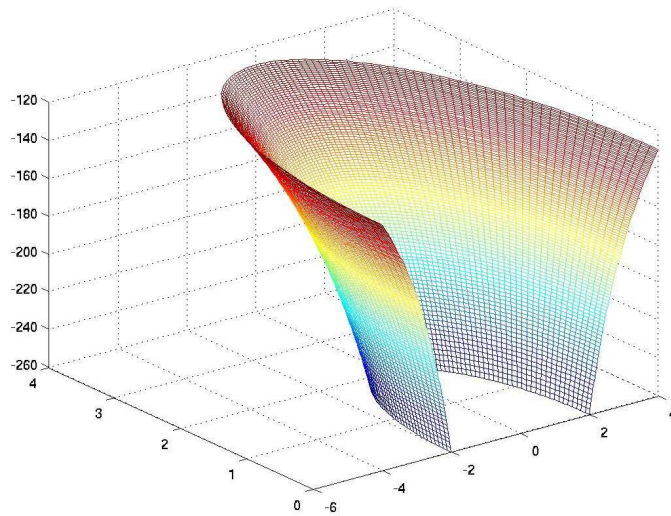
3.1.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας

Προηγουμένως είδαμε πως ορίζουμε την γεωμετρία του χωρίου και πως τοποθετούμε τα σημεία ελέγχου στο εσωτερικό του, αυτό το κομμάτι είναι ίδιο για όλες τις μεθόδους επίλυσης και για αυτό δεν θα επαναληφθεί, τώρα έχοντας ορίσει την γεωμετρία θα περάσουμε στην επίλυση της Laplace μέσω της μεθόδου της ταξιθεσίας. Θυμίζουμε πως για τον υπολογισμό της θερμοκρασίας στους κόμβους αντιστρέφουμε ένα τετραγωνικό σύστημα, το οποίο είδαμε πως σχηματίστηκε, στην συνέχεια παρεμβάλλουμε την λύση στο εσωτερικό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης.



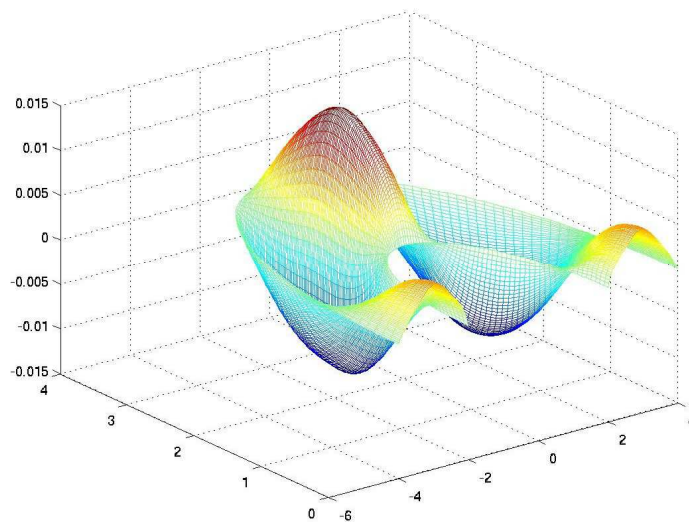
Αυτή είναι η λύση της εξίσωσης, οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν εδώ είναι συνθήκες dirichlet στις δυο περιφέρειες, $T=200$ στην εσωτερική και $T=20$ στην εξωτερική. Για τις υπόλοιπες πλευρές του χωρίου έχουμε χρησιμοποιήσει συνθήκες Neumann απαιτώντας μηδενική ροή θερμότητας περιφερειακά. Η λύση είναι ιδιαίτερα ομαλή όπως περιμέναμε να είναι μια αρμονική συνάρτηση.

Παραθέτουμε την ροή θερμότητας ακτινικά :



Παρατηρούμε ότι είναι μεγαλύτερη στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου, κάτι το οποίο μπορεί να προκύψει και αναλυτικά.

Επιλέξαμε ένα πρόβλημα το οποίο επιδέχεται αναλυτική λύση ώστε να μπορεί να ελεγχθεί η ακρίβεια της μεθόδου. Προγραμματίζουμε την αναλυτική λύση και συγκρίνουμε με την αριθμητική. Στο παρακάτω διάγραμμα σε κάθε σημείο του χωρίου έχουμε τυπώσει το απόλυτο σφάλμα της λύσης, δηλαδή την διαφορά της υπολογιστέας θερμοκρασίας από την αναλυτική.

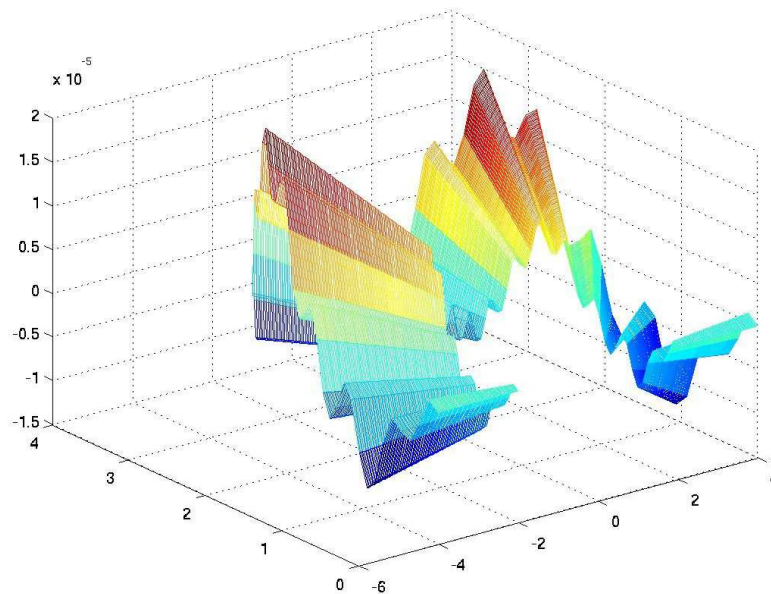


Παρατηρούμε πρακτικά μηδενικό σφάλμα μόλις της τάξης των 0.015 βαθμών στους 200 που είναι το απόλυτο μέγεθος της θερμοκρασίας. Η διακύμανση που παρατηρείται στην λύση είναι

ενδεικτική μικροσφαλμάτων που έχουν γίνει στην γεωμετρία. Εμφανίζει δε τα τοπικά μέγιστα στις διευθύνσεις όπου εμφανίζονται και τα μέγιστα γεωμετρικά σφάλματα.

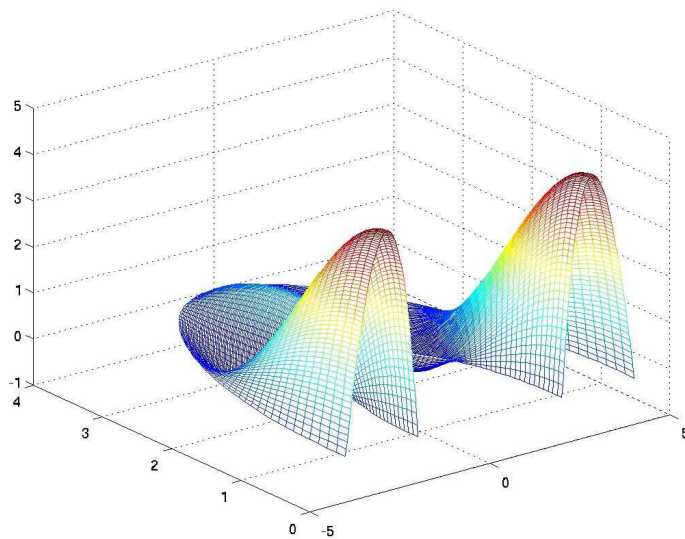
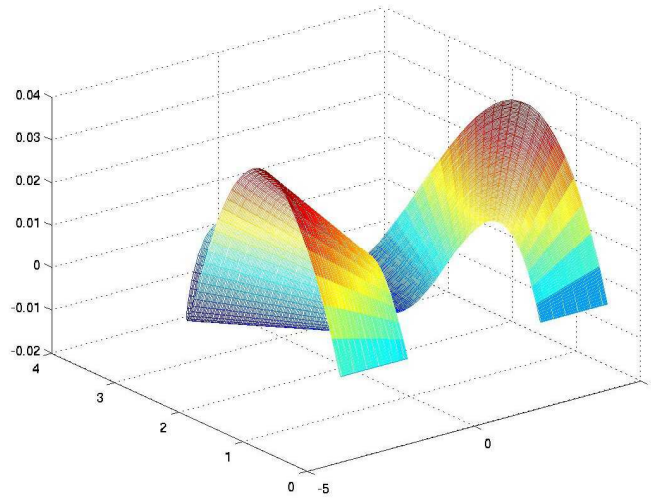
Η ακρίβεια της γεωμετρίας παρατίθεται παρακάτω.

Στο ακόλουθο διάγραμμα, για κάθε σημείο του χωρίου βλέπουμε ένα σφάλμα το οποίο χαρακτηρίζει την απόσταση του σημείου αυτού από το αντίστοιχό του αν η γεωμετρία ήταν ακριβής.



Βλέπουμε ένα σφάλμα απόλυτης τιμής της τάξης του 10^{-5} σε έναν κύλινδρο ακτίνας 2 και 4, άρα για ικανοποιητικότερη παράσταση της συγκεκριμένης γεωμετρίας. Να παρατηρήσουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει 20 σημεία για να προσεγγίσουμε ένα ημικύκλιο, αυτός ο αριθμός κρίνεται επαρκής.

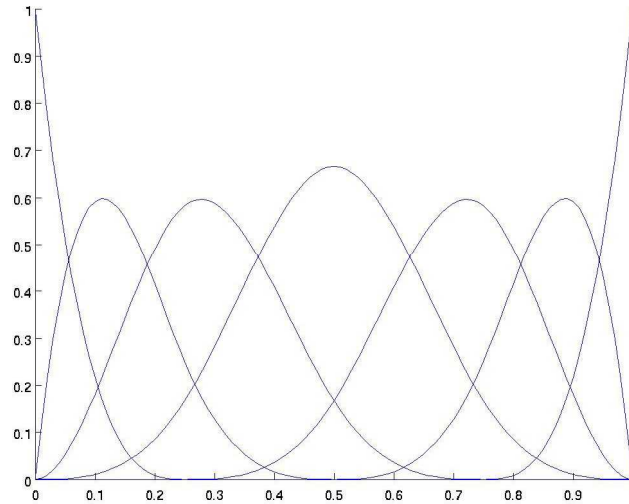
Για την προηγούμενη ανάλυση χρησιμοποιήσαμε ένα μακροστοιχείο b-spline διάστασης 20x20. Με αυτό το στοιχείο παρεμβάλαμε την γεωμετρία και λύσαμε την εξίσωση Laplace με σχεδόν απόλυτη ακρίβεια, αυτό εν μέρει οφείλεται και στην φύση της εξίσωσης. Στην συνέχεια θα παραθέσουμε το σφάλμα στην γεωμετρία και την λύση για ένα στοιχείο 5x5.



Στην πρώτη εικόνα αναπαρίσταται το σφάλμα στην γεωμετρία, είναι αρκετά περιορισμένο παρ' ότι χρησιμοποιήσαμε μόλις 5 σημεία για να προσεγγίσουμε το ημικύκλιο, αυτό αποδεικνύει την πολύ θετική ιδιότητα των καμπύλων αυτών να παρεμβάλουν με σχετική ακρίβεια ομαλές γεωμετρικές μορφές. Ενώ η λύση έχει αρκετά αυξημένο σφάλμα, περίπου 5 βαθμούς για μία τάξη μεγέθους 200 βαθμών, δηλαδή λίγο μεγαλύτερο από 3%. Το σφάλμα αυτό είναι υπολογίσιμο, άλλα δικαιολογείται από το αραιό πλέγμα που χρησιμοποιούμε.

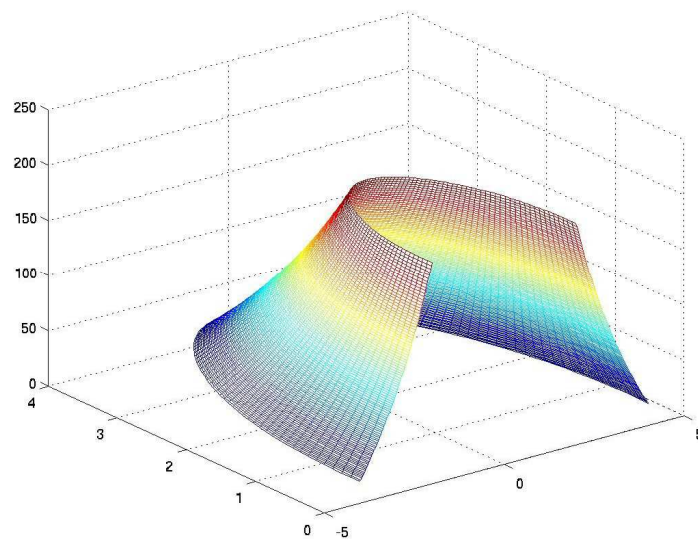
Μπορούμε να διακρίνουμε ότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο στα άκρα, αυτό συμβαίνει επειδή οποιοδήποτε σφάλμα έχουμε κάνει στην γεωμετρία κοντά στα άκρα πολλαπλασιάζεται με τις ιδιαίτερα συγκεντρωμένες συναρτήσεις βάσης των b-splines. Γενικά σε μία καμπύλη b-spline έχουμε παρεμβολή των άκρων, αυτό σημαίνει ότι στα άκρα της έχουμε παρεμβολή των σημείων ελέγχου και επομένως οι συναρτήσεις βάσης παίρνουν την μεγαλύτερη τιμή τους, όσο

απομακρυνόμαστε αυτή η επίδραση σταματάει, για αυτό και το σφάλμα μειώνεται. Ενδεικτικά τυπώνουμε τις συναρτήσεις βάσης.

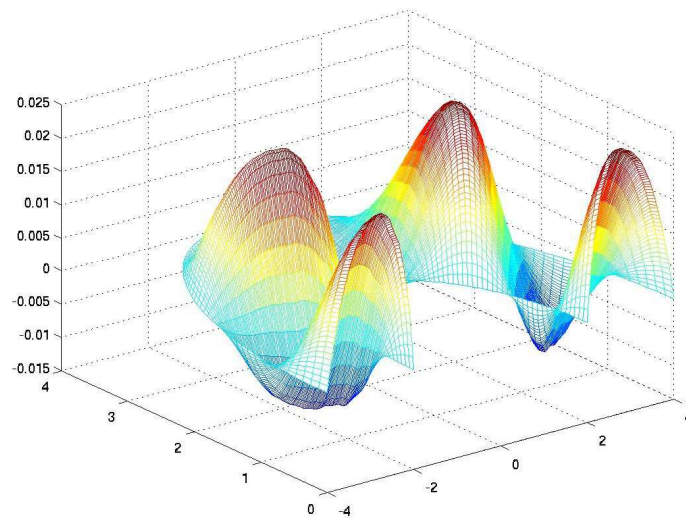


3.1.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενής ταξιθεσίας

Τα ακόλουθα αποτελέσματα υπολογίστηκαν με την μέθοδο της ασθενής ταξιθεσίας, η μαθηματική της διατύπωση αναλύθηκε προηγουμένως, εδώ απλά θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα.

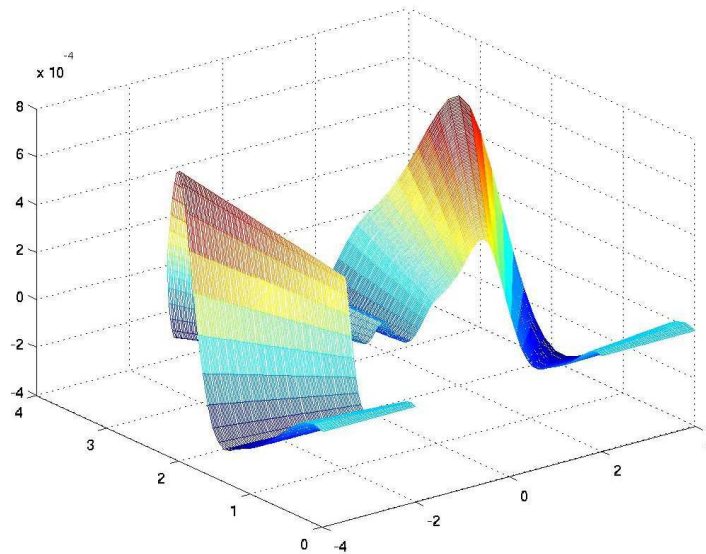


Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε την λύση που προκύπτει από ένα μακροστοιχείο 10x10. Παρότι χρησιμοποιούμε λιγότερους κόμβους απ' ότι πριν, επειδή κάνουμε gauss ολοκλήρωση χρησιμοποιούμε περισσότερα σημεία Gauss απ' ότι σημεία ελέγχου έτσι κάπως εξισορροπούμε το σφάλμα. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι αναφορικά με τον υπολογιστικό χρόνο οι δύο μέθοδοι είναι σχεδόν ισοδύναμες. Από το διάγραμμα αυτό δεν μπορούμε να διακρίνουμε μεγάλη λεπτομέρεια, για αυτό παραθέτουμε στην συνέχεια τα διαγράμματα με τα σφάλματα. (Επιλέγουμε να μην παραθέσουμε τα διαγράμματα τα σχετικά με την γεωμετρία του χωρίου αφού αυτή είναι ίδια με πριν)



Το σφάλμα σε τάξη μεγέθους είναι ίσο με της μεθόδου της ταξιθεσίας. Να τονίσουμε πως η ολοκλήρωση που έχουμε κάνει είναι καθολική και αυτό ίσως εισάγει κάποιο σφάλμα. Η τοπική ολοκλήρωση που θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει είναι ολοκλήρωση σε κάθε κελί του χωρίου, δηλαδή ανά 4 σημεία ελέγχου.

Ακολουθεί το διάγραμμα με το σφάλμα της γεωμετρίας το οποίο εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των σημείων ελέγχου

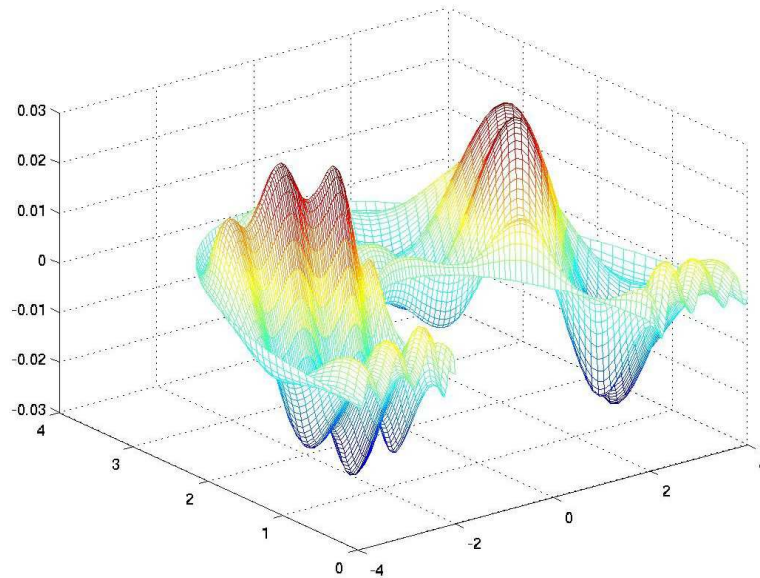


Εδώ παρατηρούμε κάτι πολύ ενδιαφέρον, το σφάλμα είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο απ' ότι ήταν με το μακροστοιχείο 20x20, ωστόσο είναι τόσο καλύτερη η ασθενής μέθοδος που καλύπτει αυτό το αυξημένο σφάλμα στην γεωμετρία και φέρνει την λύση στην ίδια ακρίβεια με πριν ανεξάρτητα του αραιότερου πλέγματος.

Και με τις 2 μεθόδους μέχρι τώρα προσεγγίζουμε με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια την λύση, τα σφάλματα είναι ελάχιστα και συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει και δυσκολότερα προβλήματα.

3.1.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz

Στην συνέχεια θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με την συμβατική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin – Ritz), δεν θα παραθέσουμε την λύση καθώς αυτή είναι ίδιας μορφής με τις προηγούμενες και λίγα θα φανούν για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου, αντί αυτού θα παραθέσουμε απευθείας το σφάλμα. Χρησιμοποιούμε ακριβώς τον ίδιο αριθμό κόμβων όπως και με την ασθενή ταξιοθεσία.



Το σφάλμα είναι πάλι στην ίδια τάξη μεγέθους, η υψίσυχη διακύμανση που παρατηρείται οφείλεται στην καθολική ολοκλήρωση. Είναι ένας από τους παράγοντες που αυξάνουν το σφάλμα αλλά δεν είναι τουλάχιστον σε αυτή την περίπτωση ο καθοριστικός.

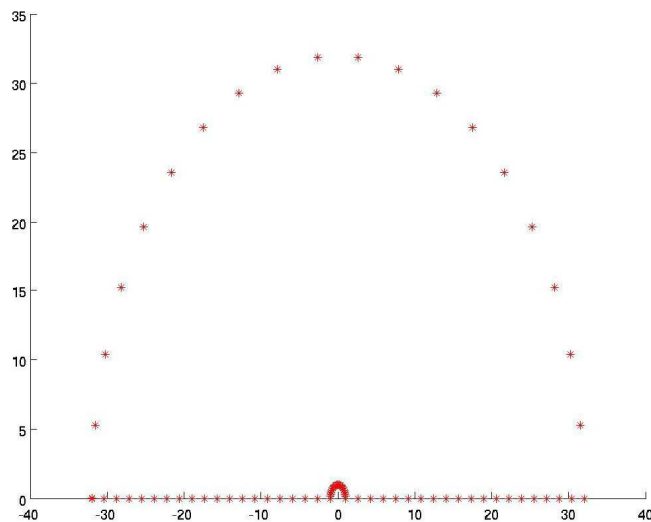
Γενικά η καθολική ολοκλήρωση επηρεάζει περισσότερο την galerkin-ritz επειδή σε αυτήν χρησιμοποιήσαμε παραγοντική ολοκλήρωση και μειώσαμε την τάξη των παραγώγων που υπήρχαν στο ολοκλήρωμα, αυτό είναι ένας παράγοντας αύξησης του σφάλματος, αφού όταν είχαμε δεύτερες παραγώγους στο ολοκλήρωμα αυτές ήταν σταθερές συναρτήσεις άρα και καλύτερες στην συμπεριφορά τους, οπότε μικρή διαφορά υπήρχε αν ολοκληρώναμε τοπικά ή καθολικά

3.2 Κόιλος κύλινδρος ακτίνας 1-32

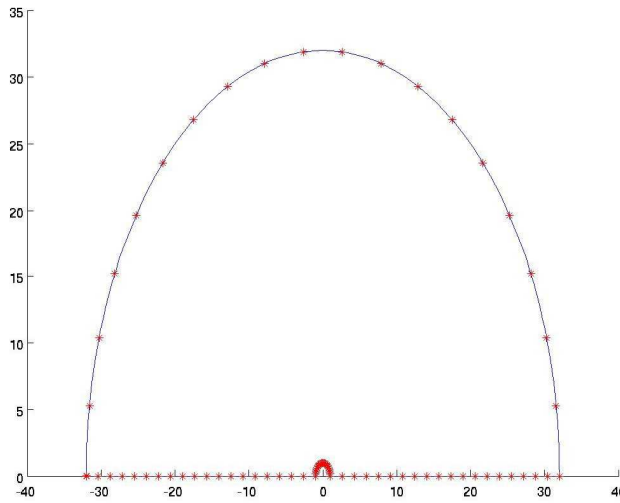
Το ακόλουθο παράδειγμα χρησιμοποιείται συχνά στην βιβλιογραφία για να ελέγξει την αποτελεσματικότητα ενός επιλύτη.

Η εσωτερική διάμετρος είναι 1, η εξωτερική 32, η θερμοκρασία είναι αντίστοιχα 1000 και 0. Με αυτή τη γεωμετρία περιμένουμε η λύση να είναι πιο απότομη απ' ό τι προηγουμένως. Ο μεγάλος λόγος ακτίνων κάνει την λύση πολύ πιο απότομη, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να την προσεγγίσουμε αποτελεσματικά με ένα αραιό στοιχείο.

Τα ακόλουθα αποτελέσματα είναι υπολογισμένα με ένα μακροστοιχείο 20x20. Πρώτα βλέπουμε τα σημεία που αποτελούν την είσοδο του αλγορίθμου μας.

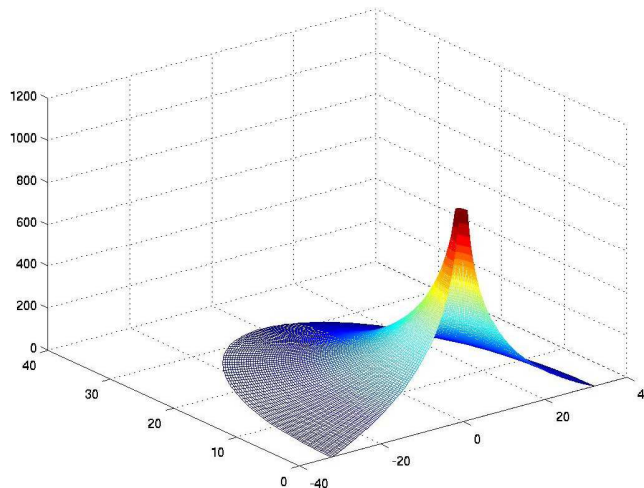


Ακολούθως βλέπουμε τις καμπύλες που προκύπτουν από παρεμβολή των προηγούμενων σημείων



3.2.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας

Το πρόβλημα αρχικά λύνουμε με την μέθοδο της ταξιθεσίας, η γεωμετρία που θα αποτελέσει είσοδο στον αλγόριθμό μας περιγράφηκε παραπάνω, πρώτα παραθέτουμε το θερμοκρασιακό πεδίο.

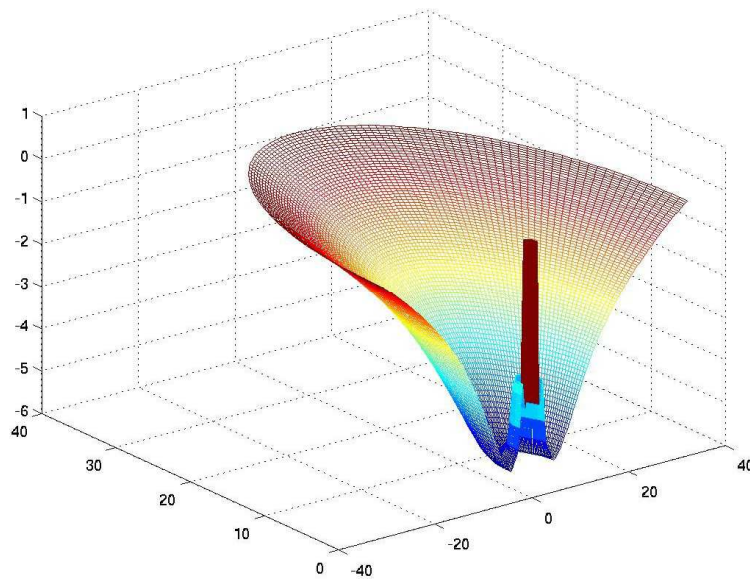


Βλέπουμε πως η λύση είναι ιδιαίτερα απότομη, από το 1000 που είναι η τιμή της στο (0,0) πέφτει πολύ γρήγορα στο 0. Να θυμίσουμε εδώ πως τόσο απότομες λύσεις είναι δύσκολο να

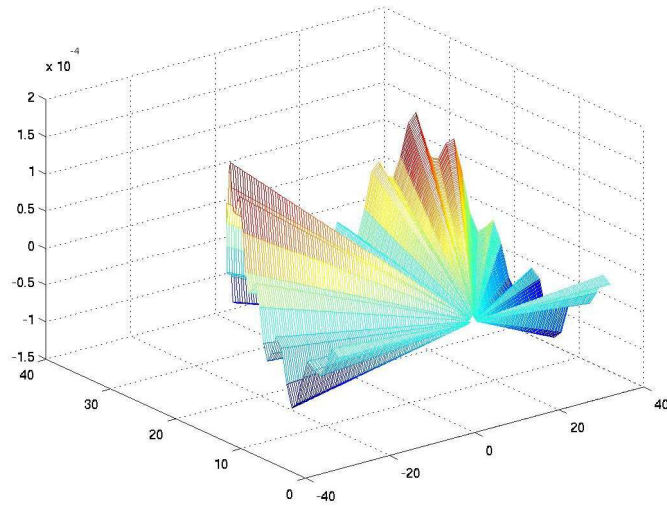
τις προσεγγίσουμε με κάποιο στοιχείο λίγων κόμβων, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που είναι δύσκολο να προσεγγίσουμε μια πολύ απότομη καμπύλη με μια καμπύλη b-splines λίγων σημείων ελέγχου.

Για να προσεγγίσουμε καλύτερα κάποια απότομη λύση θα μπορούσαμε να αυξήσουμε τον βαθμό του πολυωνύμου των συναρτήσεων βάσης. Η εμπειρία έχει δείξει ότι ανεβάζοντας το βαθμό μειώνεται κατακόρυφα το σφάλμα και μάλιστα κάποιες φορές είναι πολύ αποδοτικότερη αυτή η προσέγγιση από το να προσθέσουμε κόμβους στο στοιχείο.

Παρακάτω βλέπουμε την απόλυτη τιμή του σφάλματος. Μόλις της τάξης του 0.5% για μια τόσο απότομη λύση. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το σφάλμα μηδενίζεται στα σύνορα του χωρίου, ένδειξη ότι έχουμε εισάγει σωστά τις οριακές συνθήκες. Επίσης το σφάλμα είναι μέγιστο εκεί που η κλίση της λύσης είναι μεγαλύτερη, όπως περιμέναμε και μια απότομη καμπύλη να μην μπορεί να παρασταθεί ακριβώς από splines στο πιο απότομο τμήμα της.

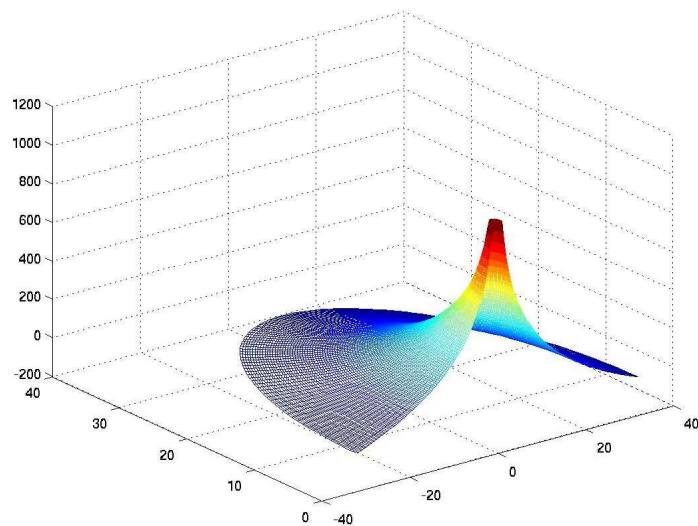


Στην συνέχεια βλέπουμε το σφάλμα στην γεωμετρία με παρόμοιο τρόπο όπως το είχαμε παρουσιάσει στο προηγούμενο παράδειγμα. Η γεωμετρία αυτή κάθε αυτή δεν παρουσιάζει δυσκολία στην παρεμβολή της, για αυτό και βλέπουμε πολύ μικρό σφάλμα, το σφάλμα που παρατηρήθηκε στην λύση ήταν αυξημένο όχι λόγω της δύσκολης γεωμετρίας αλλά επειδή ο μεγάλος λόγος των ακτίνων οδηγούσε σε πολύ μεγάλη ροή θερμότητας και συνεπώς πολύ απότομη θερμοκρασιακή μεταβολή.

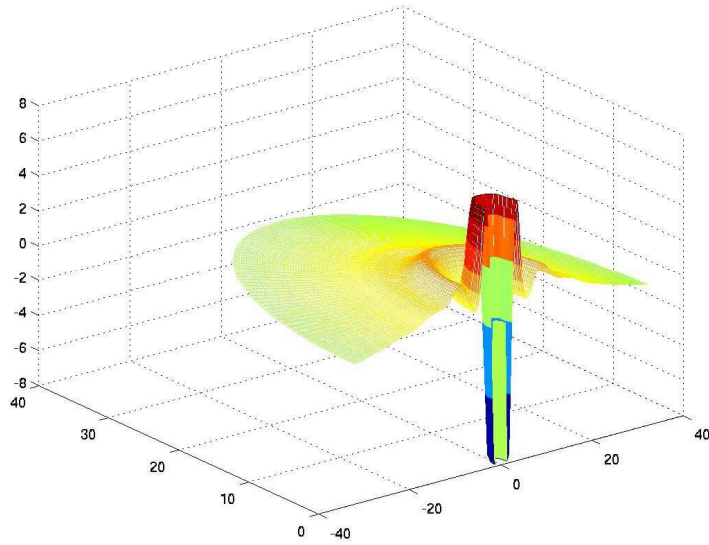


3.2.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας

Τα ακόλουθα αποτελέσματα αναφέρονται στην μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας για ένα στοιχείο 10x10. Πρώτα θα παραθέσουμε την λύση



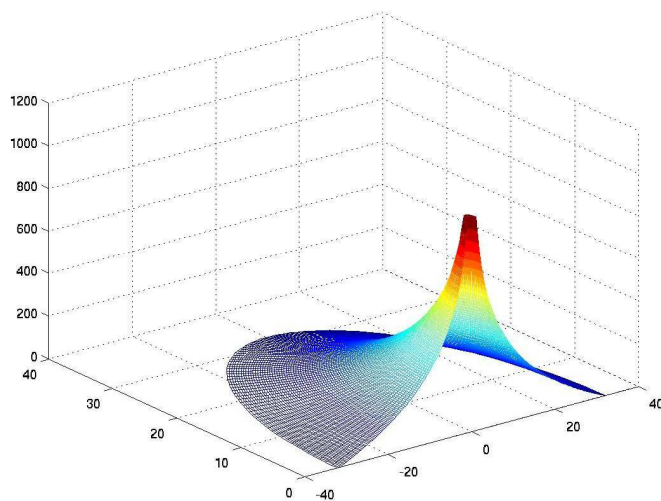
Αυτή είναι η λύση που υπολογίζουμε, λόγω του πιο αραιού πλέγματος περιμένουμε και μεγαλύτερο σφάλμα



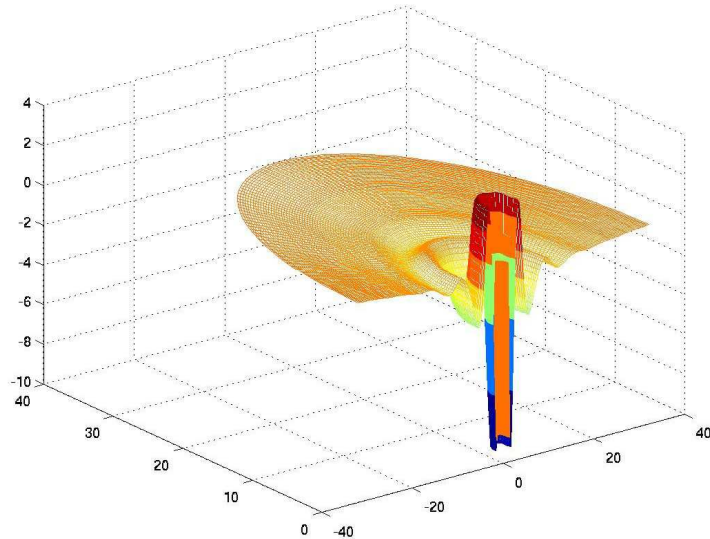
Όντως το σφάλμα είναι μεγαλύτερο, αλλά και πάλι είναι αρκετά μικρό αναφορικά με την δυσκολία της λύσης.

3.2.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz

Ακολουθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της galerkin – ritz. Περιμένουμε την γνωστή υψίσυχη ταλάντωση που οφείλεται στην καθολική ολοκλήρωση και χαρακτηρίζει όλα τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την μέθοδο αυτή. Πρώτα παραθέτουμε την λύση:



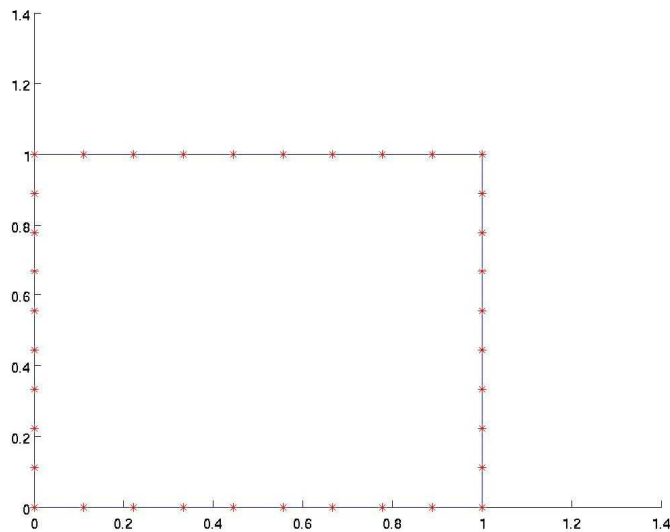
Και αυτό είναι το απόλυτο σφάλμα, είναι της ίδιας τάξης μεγέθους που είχαμε και με την ασθενή ταξιθεσία.



3.3 Ορθογωνική πλάκα

Πρωτού προχωρήσουμε σε άλλα δύσκολα παραδείγματα θα εξετάσουμε μια απλοποιημένη περίπτωση ώστε να δούμε με μεγαλύτερη σιγουριά αν υπάρχει κάποιος παράγοντας σφάλματος στον κώδικα ή στην μέθοδό μας γενικότερα που δεν έχουμε εντοπίσει ακόμα. Επομένως θα λύσουμε την εξίσωση δυναμικού του Laplace σε ορθογωνικό χωρίο. Σε ορθογωνικό χωρίο την γεωμετρία την προσεγγίζουμε ακριβώς, αφού για την παρεμβολή απλά τοποθετούμε όλα τα σημεία επί της ευθείας που θέλουμε να ορίσουμε, άρα ένας μεγάλος παράγοντας σφάλματος ήδη εκλείπει, επίσης δεν χρειάζεται ο μετασχηματισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι :



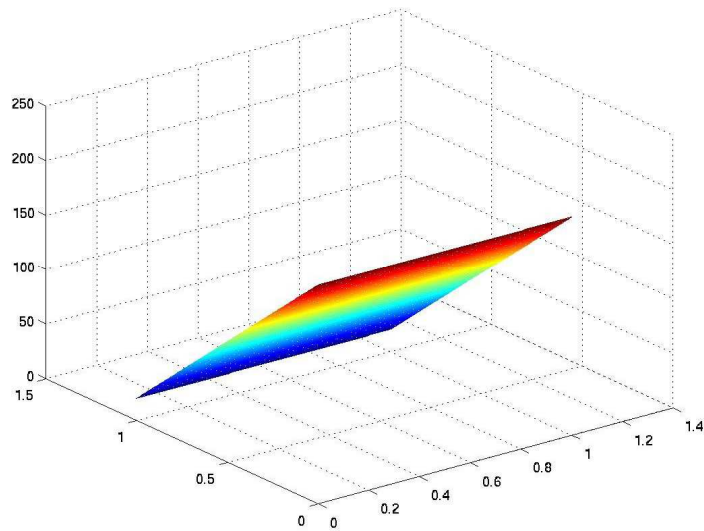
Έχουμε επιλέξει ένα τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, χρησιμοποιούμε για την παρεμβολή της λύσης και της γεωμετρίας ένα μακροστοιχείο 10x10. Προφανώς για την γεωμετρία δεν χρειάζονται 10 σημεία ανά πλευρά, ωστόσο λόγω της ισογεωμετρικής προσέγγισης που ακολουθούμε, χρησιμοποιούμε για την γεωμετρία όσα ακριβώς σημεία ελέγχου χρησιμοποιούμε και για την λύση.

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις που μπορούν να υιοθετηθούν για παράδειγμα ο Hughes, χρησιμοποιεί έναν συγκεκριμένο – μικρό αριθμό σημείων για την παρεμβολή της γεωμετρίας (βέβαια οι πιο εξελιγμένες καμπύλες που εφαρμόζει του δίνουν την δυνατότητα να προσεγγίσει κάποιες γεωμετρίες ακριβώς) και στην συνέχεια κάνει εκλέπτυνση του πλέγματος ώστε να έχει αρκετά σημεία για να προσεγγίσει την ενδεχομένως περίπλοκη συμπεριφορά της λύσης.

Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζουμε στο χωρίο είναι όμοιες με του πρώτου παραδείγματος. Δηλαδή στην κάτω πλευρά του τετραγώνου επιβάλλουμε δυναμικό (θερμοκρασία) 200 και στην πάνω πλευρά 20. Στις πλάγιες πλευρές εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες δεύτερου τύπου.

3.3.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας

Πρώτα επιλύουμε με την μέθοδο της ταξιθεσίας

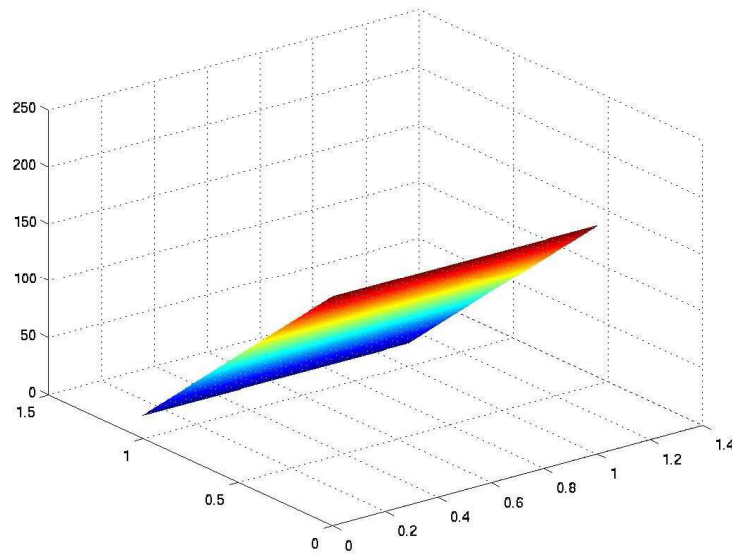


Το παραπάνω διάγραμμα είναι η λύση του θερμοκρασιακού πεδίου. Βλέπουμε την απόλυτα λεία κατανομή της θερμοκρασίας. Αυτό που έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε είναι η σταθερή σε όλο το χωρίο ροή θερμότητας, άμεσο αποτέλεσμα της γεωμετρίας του χωρίου ολοκλήρωσης.

Άρα γενικά η μέθοδος σε αυτό το απόλυτα ελεγχόμενο αριθμητικό πείραμα μας δίνει ικανοποιητικές λύσεις, αυτό μόνο προς επαλήθευση της ορθότητας του προγράμματος. Στην συνέχεια παραθέτουμε τα αποτελέσματα της ασθενούς ταξιθεσίας.

3.3.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας

Παρατηρείται η ίδια ομαλή συμπεριφορά.

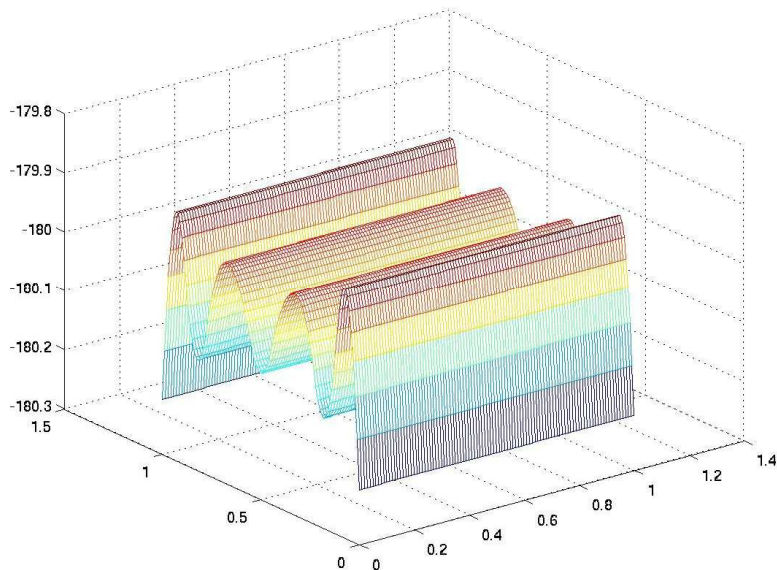


Η τιμή της ροής θερμότητας όπως και προηγουμένως είναι παντού σταθερή, πράγμα που δείχνει την ορθότητα της μεθόδου. Η καθολική ολοκλήρωση που εφαρμόζεται δεν προσθέτει κάποιο μετρήσιμο σφάλμα σε αυτό το παράδειγμα.

3.3.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin – Ritz

Για την Galerkin – Ritz περιμένουμε κάποια διαφοροποίηση αφού έχουμε σαν πηγή σφάλματος την καθολική ολοκλήρωση, το ότι δεν υπήρξε κάποιο πρόβλημα στην ασθενή ταξιδεσία αποδεικνύει ότι η ολοκλήρωση αν θα είναι τοπική ή καθολική μικρή διαφορά έχει όταν οι συναρτήσεις προς ολοκλήρωση (συναρτήσεις βάσης των b-splines) είναι σταθερές. Ίσως ένα μικρό πλεονέκτημα της ασθενούς ταξιδεσίας έναντι της galerkin – ritz !

Η ροή θερμότητας κατά τον άξονα y είναι :

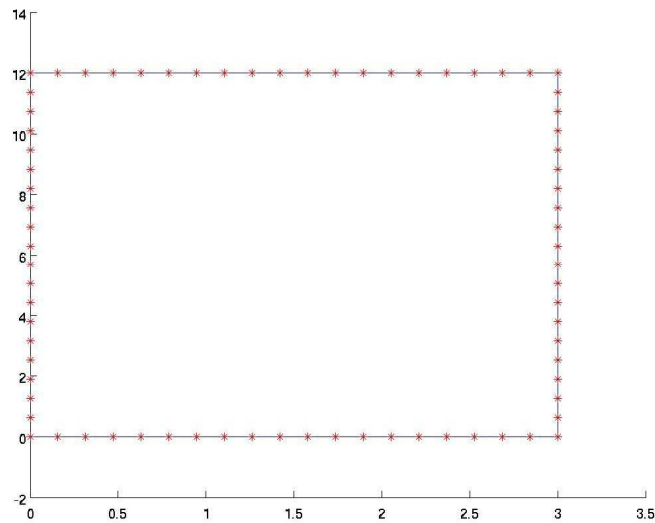


Παρατηρούμε μία ταλάντωση της τιμής της γύρω από την τιμή -180.00 που είναι και η τιμή της ροής θερμότητας που υπολογίστηκε από τις άλλες μεθόδους, η ταλάντωση αυτή αν και αισθητή και απόλυτα μετρήσιμη να τονίσουμε ότι είναι στην παράγωγο του μεγέθους που μας ενδιαφέρει και όχι στο ίδιο το μέγεθος όπου αναμένουμε να έχει μεταφερθεί σε μικρότερη ένταση. Είναι πάντως εμφανές ότι αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αυτή για ακριβείς υπολογισμούς θα πρέπει να εφαρμόσουμε τοπική ολοκλήρωση.

Αυτό δεν έχει γίνει ακόμα στο επίπεδο της διπλωματικής εργασίας μιας και σκοπός δεν είναι να παράγουμε κάποιο αποδοτικό κώδικα, όσο να δείξουμε τις δυνατότητες της ισογεωμετρικής ανάλυσης και τους δρόμους που ανοίγονται μέσω αυτής. Να συγκρίνουμε κάποιες μεθόδους μεταξύ τους και να δούμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους.

3.4 Ορθογωνική πλάκα II

Το επόμενο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι αντίστοιχης γεωμετρίας (ορθογωνικής) αλλάζουν όμως οι οριακές συνθήκες. Παρακάτω βλέπουμε την γεωμετρία του χωρίου :



Το χωρίο επιλέγεται με λόγο πλευρών 1:4, αυτό γίνεται για να κάνουμε την λύση πιο απότομη, δυσκολεύοντας έτσι το πρόβλημα. Οι οριακές συνθήκες είναι : ημιτονοειδής κατανομή θερμοκρασίας στο άνω σύνορο του χωρίου, σύμφωνα με την σχέση :

$$T(x) = 1000 \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

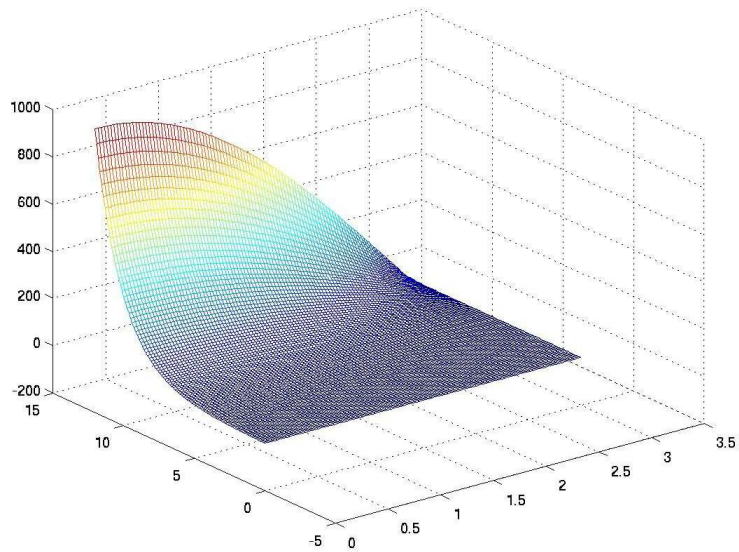
Αυτή η κατανομή θερμοκρασίας προκαλεί μια έντονη μεταφορά θερμότητας και έτσι σαν αποτέλεσμα έχουμε μια απότομη λύση του θερμοκρασιακού πεδίου. Στις υπόλοιπες πλευρές αντιστοιχούν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες .

- Στην αριστερή κατακόρυφη πλευρά έχουμε οριακή συνθήκη Neumann.
- Στην δεξιά κατακόρυφη πλευρά έχουμε Dirichlet : $T=0$
- Στην κάτω πλευρά ομοίως $T=0$

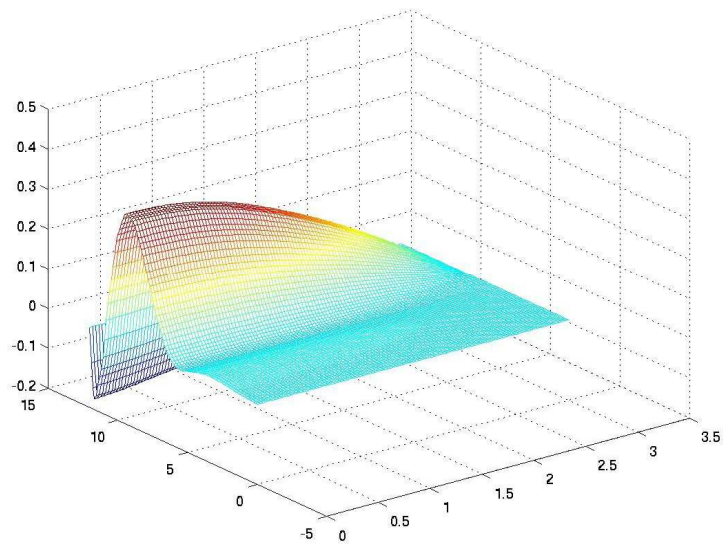
Το πρόβλημα αυτό λύνουμε για να ελέγξουμε την μέθοδο και τον επιλύτη μας κατά πόσο μπορεί να προσεγγίσει μια απότομη λύση, όπως κάναμε και προηγουμένως. Πάλι υπάρχει αναλυτική λύση ώστε να μπορούμε να ελέγξουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

3.4.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας

Η λύση που προκύπτει με την μέθοδο της ταξιθεσίας είναι η ακόλουθη



Παρατηρούμε μια αρκετά απότομη λύση του θερμοκρασιακού πεδίου, το πιο απότομο σημείο της είναι στο πάνω σύνορο από την πλευρά της συνθήκης Neumann (αριστερή πλευρά όπως φαίνεται στο σχήμα) . Και διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι εκεί αναμένεται να έχουμε τη μεγαλύτερη ροή θερμότητας, άρα είναι λογικό εκεί να έχουμε την πιο απότομη λύση. Να σημειώσουμε ότι η ροή θερμότητας γραφικά φαίνεται από την κλίση (gradient) της επιφάνειας. Στην συνέχεια βλέπουμε την απόλυτη τιμή του σφάλματος.

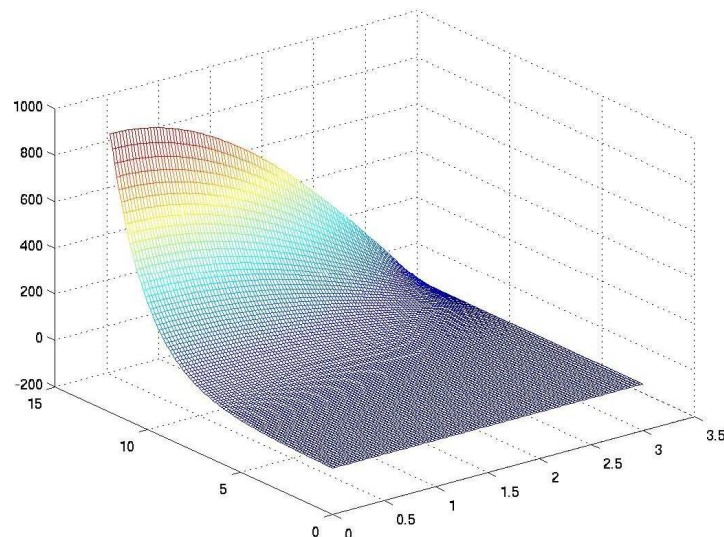


Το μέγιστο σφάλμα παρατηρείται κοντά στο άνω σύνορο και στην πλευρά της οριακής συνθήκης Neumann. Περιμέναμε το μέγιστο σφάλμα να είναι εκεί που η λύση είναι πιο απότομη. Παρατηρούμε το σφάλμα να μηδενίζεται στα σύνορα ενδεικτικό της σωστής επιβολής των οριακών συνθηκών.

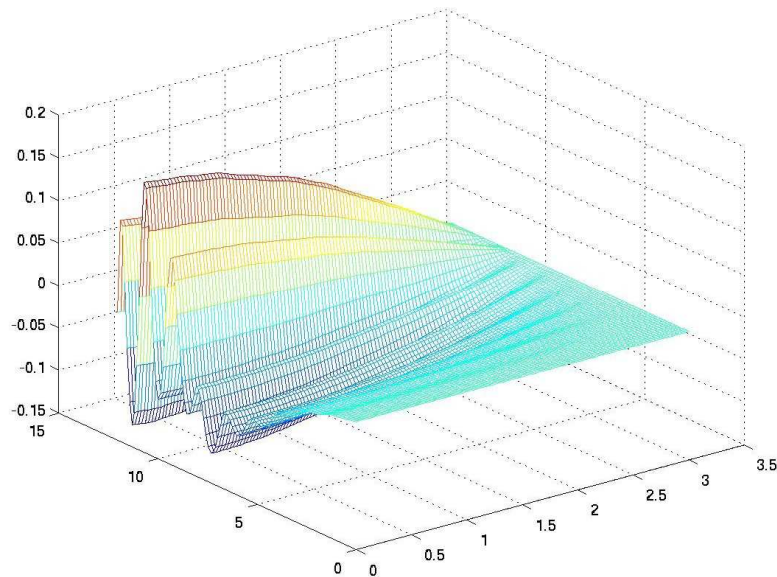
Για τόσο απότομες λύσεις θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού, ωστόσο να σημειώσουμε τα εξής: Όταν δεν έχουμε προσεγγίσει ακριβώς την γεωμετρία (προηγούμενα παραδείγματα) το σφάλμα είναι μεγαλύτερο στα άκρα και αυτό επειδή εκεί είναι πιο συγκεντρωμένες οι συναρτήσεις βάσης (βλέπε προηγούμενη ανάλυση) άμα σε εκείνη την περίπτωση ανεβάσουμε τον βαθμό του πολυωνύμου οι συναρτήσεις βάσης θα αρχίσουν να καταλαμβάνουν περισσότερα διαστήματα, έτσι θα μεγαλώσει και το διάστημα με αυξημένο το σφάλμα. Βέβαια και πάλι περιμένουμε μια καλύτερη λύση ωστόσο ο προσδιορισμός του βέλτιστου βαθμού πολυωνύμου δεν είναι τόσο τετριμμένη υπόθεση και πρέπει να ερευνηθεί σε βάθος ανάλογα με την περίπτωση.

3.4.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας

Ακολουθεί η λύση του ίδιου προβλήματος με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας



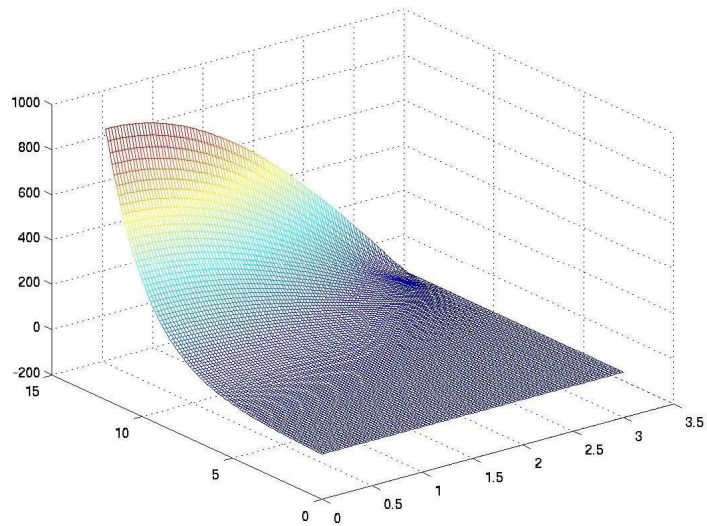
Δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα με την λύση, είναι ομαλή όπως περιμέναμε, μοιάζει με της ταξιθεσίας. Θα πρέπει να δούμε το διάγραμμα του σφάλματος για να βγάλουμε συμπεράσματα.



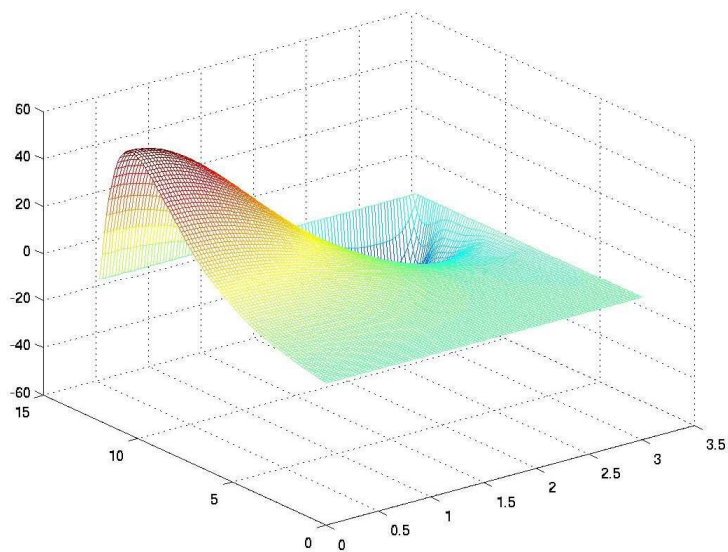
Σε τάξη μεγέθους το σφάλμα είναι μικρότερο από της μεθόδου της ταξιθεσίας, ωστόσο η καθολική ολοκλήρωση προκαλεί μια διακύμανση στην λύση. Πάντως είναι σαφέστατο ότι η ασθενής ταξιθεσία είναι πιο κατάλληλη για αυτό το πρόβλημα από την ταξιθεσία. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού και από τον σχολιασμό που κάναμε προηγουμένως έγινε σαφές ότι η ταξιθεσία υπερτερεί σε προβλήματα σύνθετης γεωμετρίας επειδή η σημειακή ικανοποίηση κοστίζει υπολογιστικά λιγότερο από την ολοκληρωτική λύση και έτσι μπορούμε να κάνουμε το πλέγμα πυκνότερο. Ωστόσο η γεωμετρία εδώ είναι απλούστατη και την παρεμβάλουμε ακριβώς όσο πυκνό πλέγμα και να χρησιμοποιήσουμε, άρα το πλεονέκτημα της καλύτερης γεωμετρικής αναπαράστασης της ταξιθεσίας δεν υφίσταται πια, ενώ αυξάνεται σημαντικά η ακρίβεια της ολοκληρωτικής μεθόδου που δίνει λύσεις πιο κοντά στις πραγματικές (ασθενείς λύσεις).

3.4.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin - Ritz

Το θερμοκρασιακό πεδίο είναι :



Το απόλυτο σφάλμα είναι :



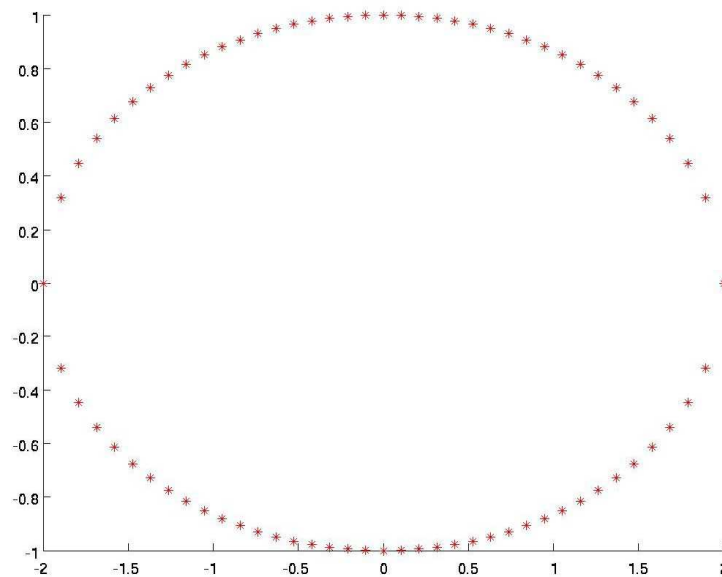
Το σφάλμα στην Galerkin – Ritz είναι πολύ αυξημένο, γενικά είναι η πρώτη φορά που μια μέθοδος δεν μας δίνει καλό αποτέλεσμα. Προσεγγίζει την γενική μορφή της λύσης, ωστόσο το σφάλμα είναι πολύ μεγάλο για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος.

Μονό να εικάσουμε μπορούμε σχετικά με το τι φταίει και δεν προσεγγίστηκε ικανοποιητικά η λύση, η καθολική ολοκλήρωση είναι σίγουρα ένας λόγος, ωστόσο από μόνος του δεν φαίνεται

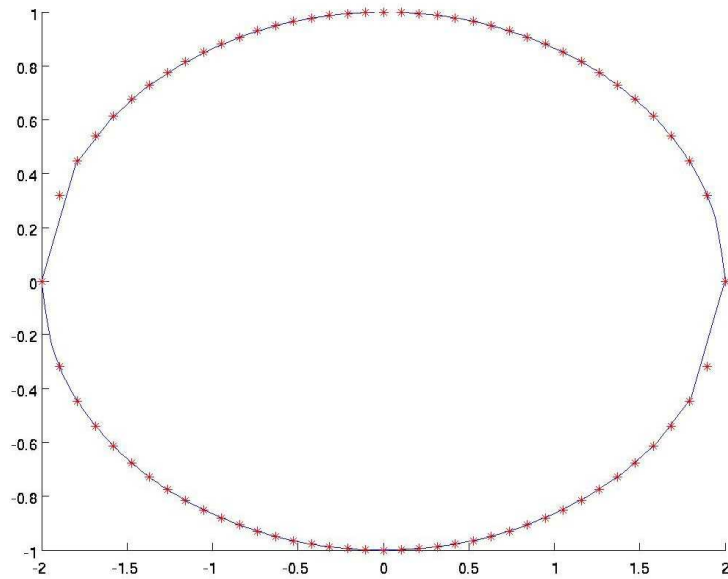
να είναι αρκετός. Στην αρχή υποψιαστήκαμε κάποιο προγραμματιστικό σφάλμα, όμως μετά από πολλούς ελέγχους και τελικά επαναπρογραμματισμό της μεθόδου το αποκλείσαμε. Η λύση αυτή είναι πραγματικά αυτή που μας δίνει η Galerkin Ritz για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ίσως να είναι κάτι στην φύση του προβλήματος που προκαλεί τα μικροσφάλματα που προκύπτουν από την καθολική ολοκλήρωση να μεγαθύνονται, δεν είναι κάτι που μπορούμε να καταλάβουμε εποπτικά, για αυτό και δεν θα ασχοληθούμε άλλο με αυτή την εφαρμογή.

3.5 Έλλειψη – επίλυση της εξίσωσης του Poisson

Το τελευταίο πρόβλημα που θα επιλυθεί είναι μια εξίσωση Poisson η οποία είναι η εκφυλισμένη μορφή των εξισώσεων Navier – Stokes για την ροή σε ελλειπτικό αγωγό. Η ροή θεωρείται μόνιμη, ασυμπίεστη και συνεκτική. Άγνωστος στο πρόβλημα είναι το πεδίο ταχυτήτων σε μια διατομή του αγωγού (έλλειψη). Τα παρακάτω σημεία είναι αυτά που ορίζουν την έλλειψη, αυτά θα παρεμβάλουμε για να ορίσουμε το χωρίο.

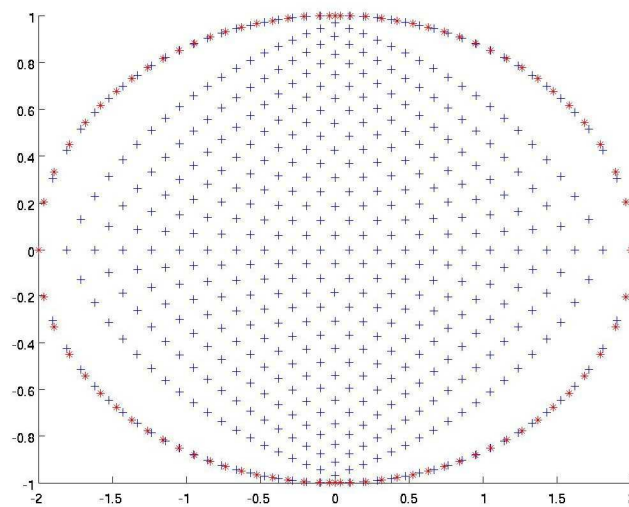


Εμφανές είναι ήδη το πρώτο εμπόδιο στην ανάλυση, η παραμετροποίηση της έλλειψης. Γνωρίζοντας την αναλυτική εξίσωση της έλλειψης και μόνο, δεν ήταν δυνατή η διαμέριση της περιφέρειάς της σε ίσα τόξα. Επομένως η διαμέριση τελικά πραγματοποιήθηκε σε διαστήματα με σταθερό το βήμα κατά χ . Έτσι όσα σημεία απεικονίζονται έχουν σταθερή κατά χ απόσταση μεταξύ τους, αυτός είναι ένας πολύ αναποτελεσματικός τρόπος να παραμετροποιήσουμε την συγκεκριμένη γεωμετρία.



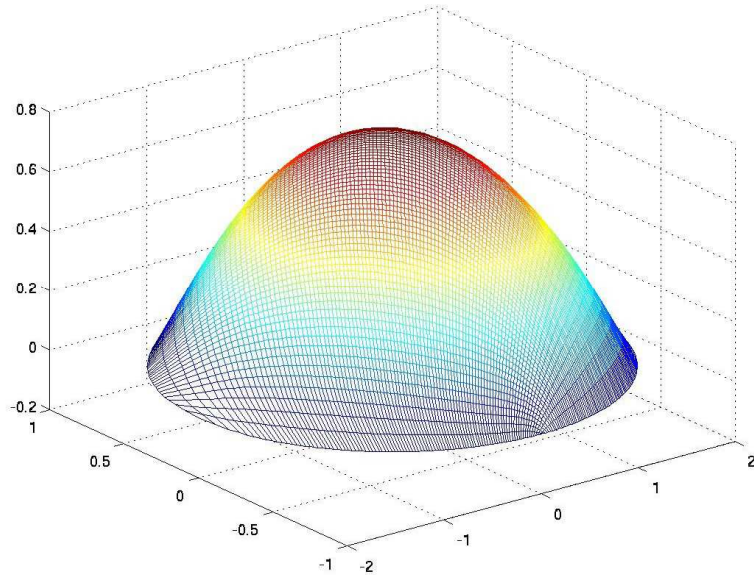
Αυτό το χωρίο είναι που προέκυψε από την παρεμβολή των προηγούμενων σημείων, υπάρχει μεγάλο σφάλμα κοντά τον άξονα $y=0$, επόμενο αφού εκεί είναι αραιότερο το πλέγμα.

Παρακάτω βλέπουμε την θέση των σημείων ελέγχου, εκεί θα απαιτήσουμε ικανοποίηση της εξίσωσης. Παρατηρείται ένα αραιώμα κοντά στην περιφέρεια της έλλειψης, αυτό είναι αρνητικό αφού εκεί δεν θα έχουμε καλή εικόνα του πεδίου, το αραιώμα αυτό οφείλεται στην παραμετροποίηση της γεωμετρίας, το γεγονός ότι έχουμε πολύ αραιό πλέγμα στα κοντά στον $y=0$, σε συνδυασμό με τον αλγόριθμο που έχουμε χρησιμοποιήσει για να γεμίζουμε το χωρίο με σημεία (παρεμβολή coons) οδηγεί σε αραιό πλέγμα κοντά στο σύνορο.

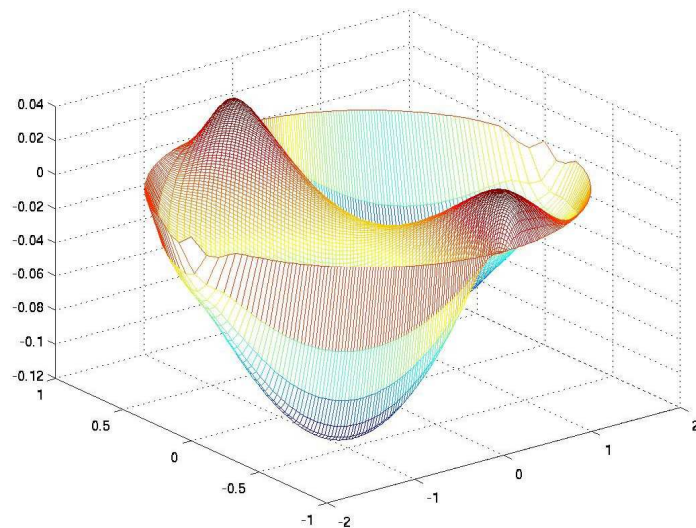


3.5.1 Επίλυση με την μέθοδο της ταξιθεσίας

Ακολουθεί το πεδίο ταχυτήτων, η επίλυση έγινε με χρήση της μεθόδου της ταξιθεσίας



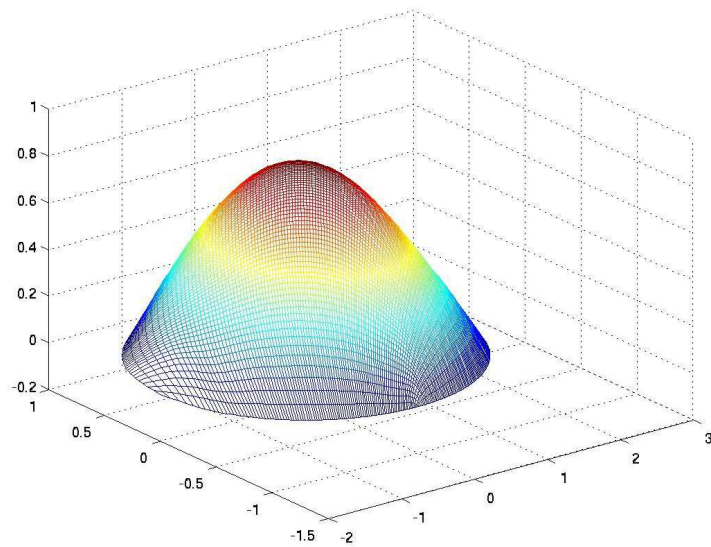
Το προφίλ είναι τυπικό της ροής συνεκτικού ρευστού σε διατομή αγωγού. Η μέγιστη ταχύτητα βρίσκεται στο “κέντρο” της έλλειψης ενώ μηδενίζεται στο στερεό σύνορο συνθήκη μη ολίσθησης – συνθήκη Dirichlet. Ακολουθεί η γραφική παράσταση του σφάλματος



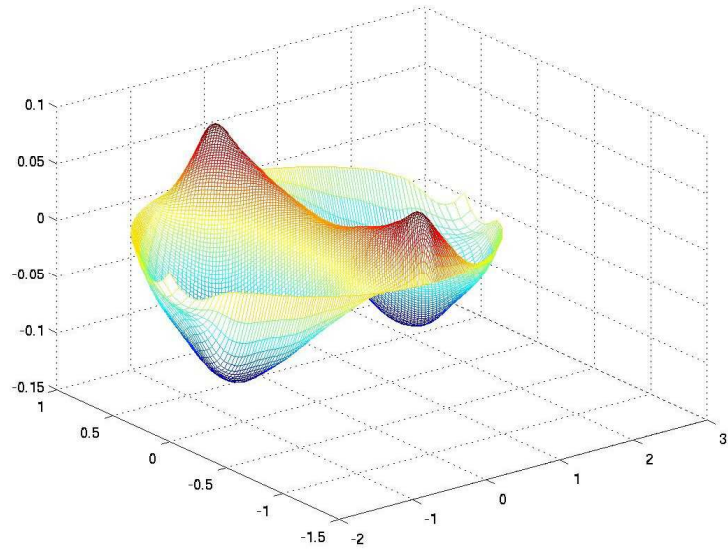
Το σφάλμα είναι της τάξης του 10% πολύ μεγάλο δηλαδή, η βασική αιτία εντοπίζεται στον ορισμό της γεωμετρίας. Το σφάλμα στις υπόλοιπες μεθόδους αναμένεται θεαματικά μεγαλύτερο αν λάβουμε υπόψη και το πιο αραιό πλέγμα που θα αναγκαστούμε να χρησιμοποιήσουμε λόγω υπολογιστικού κόστους της gauss ολοκλήρωσης.

3.5.2 Επίλυση με την μέθοδο της ασθενούς ταξιθεσίας

Η λύση είναι :



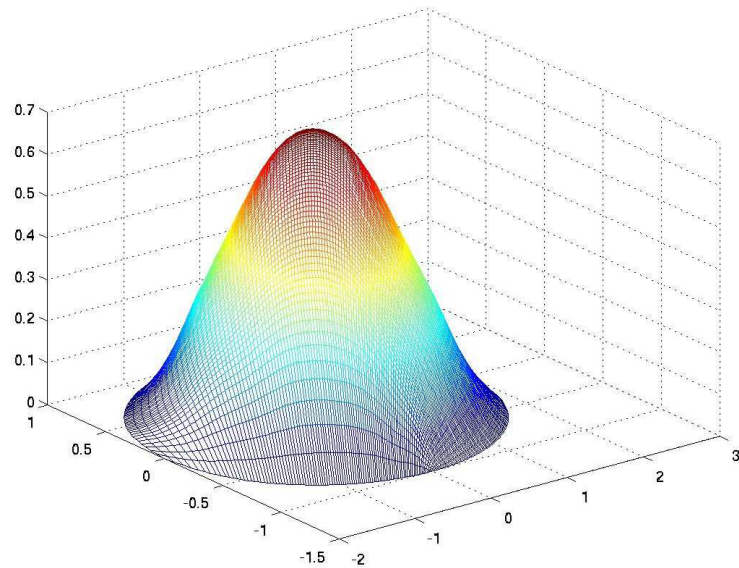
Το σφάλμα :



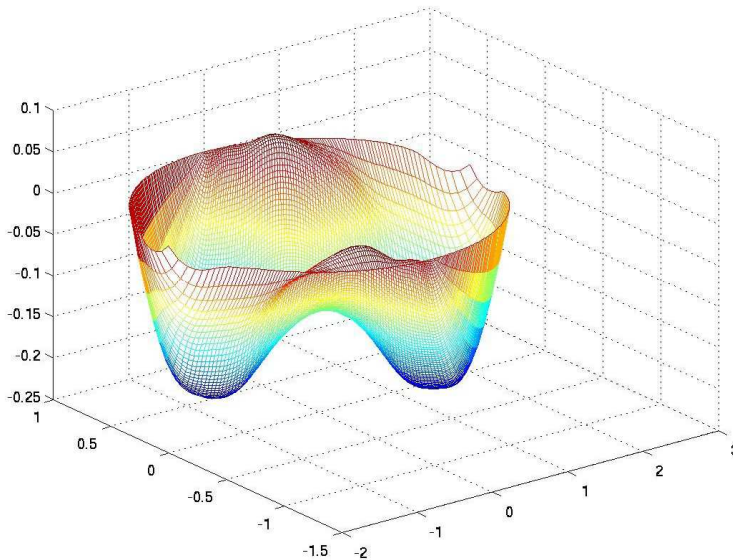
Το σφάλμα δεν είναι τόσο μεγαλύτερο από της ταξιθεσίας, είναι στην ίδια τάξη μεγέθους.

3.5.3 Επίλυση με την μέθοδο Galerkin - Ritz

Η λύση είναι :



Το σφάλμα :



Το σφάλμα εδώ είναι τόσο έντονο που φαίνεται και στο διάγραμμα της λύσης, είναι της τάξης του 30%. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε προβλήματα οριακών στρωμάτων, στρωτής ροής, το προφίλ της ταχύτητας είναι παραβολικό, εδώ παρατηρώντας την λύση δεν διακρίνουμε την παραβολικότητα που προβλέπεται από την φυσική, επομένως ουδεμία χρησιμότητα έχει η λύση που μόλις πήραμε.

Γενικά το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν αντιμετωπίστηκε καθόλου αποτελεσματικά, τα σφάλματα και με τις 3 μεθόδους ήταν πάρα πολύ μεγάλα, βέβαια να τονίσουμε πως το σφάλμα εντοπίζεται στην παραμετροποίηση της γεωμετρίας και όχι στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Έχοντας παραθέσει όλα τα προβλήματα τα οποία μελετήσαμε μπορούμε πλέον να βγάλουμε το τελικό συμπέρασμα της έρευνας μας.

4. Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Και οι 3 μέθοδοι (ταξιθεσία, ασθενής ταξιθεσία, Galerkin – Ritz) μπορούν να αντιμετωπίσουν προβλήματα δυναμικού αποτελεσματικά. Η προσέγγιση της ισογεωμετρικής ανάλυσης όπως την εφαρμόσαμε έχει πάρα πολλά πλεονεκτήματα, το κυριότερο από αυτά είναι η ευκολία με την οποία χειρίζεται την γεωμετρία. Γενικά ακολουθούμε μια εντελώς γεωμετρική προσέγγιση για την επίλυση των εξισώσεων αυτό μας δίνει μια πολύ καλή εποπτεία της διαδικασίας.

Ακολουθεί ο σχολιασμός της κάθε μεθόδου ξεχωριστά

Ταξιθεσία :

Η σημειακή ικανοποίηση της διαφορικής εξίσωσης είναι κατά πολύ γρηγορότερη από την ασθενή ικανοποίηση αυτής, αφού δεν υπολογίζονται ολοκληρώματα. Επίσης ο προγραμματισμός της μεθόδου είναι ευκολότερος και γλυτώνουμε από επιπλοκές όπως καθολική και τοπική ολοκλήρωση. Γενικά η μέθοδος αυτή είναι πολύ ευκολότερη στην εφαρμογή της, όπως επίσης και στην επιβολή των οριακών συνθηκών. Ακόμη θεωρητικά ίσως να περιμέναμε και καλύτερα αποτελέσματα από τις ολοκληρωτικές μεθόδους, αφού ικανοποιούμε την εξίσωση αυτή καθ' αυτήν και όχι κάποια ασθενή μορφή της. Ωστόσο η ταξιθεσία αναγκάζει την λύση να ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση σε συγκεκριμένα σημεία και έτσι προκύπτει μια λύση λιγότερο ομαλή. Γενικά αυτή η απαίτηση είναι ιδιαίτερα ισχυρή και καθοριστική και επηρεάζει την συμπεριφορά και ομαλότητα της συνάρτησης. Βέβαια το μικρό υπολογιστικό κόστος της μεθόδου μας επιτρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό των σημείων ελέγχου και αυτό δεν μας δίνει μόνο καλύτερη λύση (οδηγείται η συνάρτηση καλύτερα) αλλά προσεγγίζουμε καλύτερα την γεωμετρία του χωρίου, αυτό μας δίνει την δυνατότητα για περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας της μεθόδου.

Ασθενής ταξιθεσία :

Η λύση που προκύπτει έτσι είναι μια ασθενής λύση, έχει παρατηρηθεί ότι οι ασθενείς λύσεις είναι αυτές που παρατηρούνται περισσότερο στην φύση χωρίς να υπάρχει κάποια αυστηρή μαθηματική απόδειξη για αυτό. Το γεγονός ότι δεν αναγκάζουμε την συνάρτηση να ικανοποιήσει ακριβώς την εξίσωση είναι θετικό γιατί έτσι έχουμε μια πιο ομαλή λύση. Να τονίσουμε επίσης ότι από την στιγμή που αριθμητικά σφάλματα εισάγονται ούτως ή άλλως στους υπολογισμούς το να απαιτήσουμε την ακριβή ικανοποίηση είναι εν μέρη πλεονασμός, ζητώντας ασθενείς λύσεις αφήνουμε στην μέθοδο κάποιες ανοχές. Οι καλύτερες λύσεις που παίρνουμε έτσι έχουν το κόστος τους σε χρόνο υπολογιστή, επομένως ίσως να πρέπει να μειώσουμε τον αριθμό των σημείων ελέγχου. Ποια μέθοδος θα επικρατήσει δεν είναι προφανές. Ακόμη μεγαλύτερο γίνεται το υπολογιστικό κόστος από την απαίτηση για περισσότερα σημεία Gauss από σημεία ελέγχου, έτσι τελικά η δαπανηρή ολοκλήρωση γίνεται

σε ακόμα περισσότερα σημεία. Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει τοπικά ή καθολικά, καθολικά είναι η πιο εύκολη επιλογή, ωστόσο μπορεί να συμβούν φαινόμενα ταλάντωσης της λύσης, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εκφράσεις των b -splines είναι ορισμένες κατά διαστήματα (piecewise) ενώ η ολοκλήρωση γίνεται σε ολόκληρο το χωρίο. Η τοπική ολοκλήρωση είναι πιο δύσκολο να προγραμματιστεί αφού απαιτεί την δημιουργία συστήματος συντεταγμένων τοπικά για κάθε “κελί”, αλλά θεωρητικά είναι απαλλαγμένη από αυτήν την διακύμανση.

Galerkin – Ritz :

Πρακτικά είναι ισοδύναμη με την ασθενή ταξιδεσία. Μοναδική διαφορά είναι ότι χρησιμοποιούμε συναρτήσεις στάθμησης και κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση. Η χρήση των συναρτήσεων στάθμησης είναι άλλος ένας τρόπος να ομαλοποιήσουμε την λύση. Γενικά όταν αναφέρεται η μέθοδος των πεπ στοιχείων στην βιβλιογραφία εννοείται η Galerkin – Ritz. Ο λόγος που εδώ χρησιμοποιούμε και τις υπόλοιπες μεθόδους είναι για πληρότητα μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων τους.

Τελικά :

Όλες οι μέθοδοι έχουν τα δικά τους ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και το ποια είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση είναι θέμα του συγκεκριμένου ερευνητή και της εμπειρίας που έχει με την κάθε μέθοδο. Σίγουρα στις περιπτώσεις που εξετάζουμε όλες μπορούν να βγάλουν ανταγωνιστικά αποτελέσματα. Επίσης τα αποτελέσματα που παραθέτουμε θα πρέπει να ληφθούν υπόψη με κάποιες ανοχές, καθώς μιας και δεν χρησιμοποιούμε κάποιον δοκιμασμένο κώδικα είναι πολύ πιθανόν να υπάρχουν προγραμματιστικές ατέλειες, αν και τα αποτελέσματα που πήραμε ήταν ικανοποιητικά ως προς το απόλυτο σφάλμα τους.

Ποιοτικά πάντως το συμπέρασμα της εργασίας είναι ότι η μέθοδος της ταξιδεσίας είναι αποτελεσματικότερη των ολοκληρωματικών μεθόδων για προβλήματα σύνθετης γεωμετρίας, επειδή το χαμηλό υπολογιστικό κόστος της μεθόδου επιτρέπει την χρήση μακροστοιχείων με μεγάλο αριθμό κόμβων, και έτσι καλύτερη προσέγγιση της γεωμετρίας, ενώ ταυτόχρονα οι πολλοί κόμβοι οδηγούν ικανοποιητικά την λύση μειώνοντας αρκετά το σφάλμα της μεθόδου. Σε αντίθεση οι ολοκληρωματικές μέθοδοι υπερτερούν σε προβλήματα απλής γεωμετρίας, όπου δεν απαιτούνται πολλοί κόμβοι για την προσέγγιση της, ενώ η ασθενής λύση που λαμβάνεται έτσι είναι καλύτερης ποιότητας από την αντίστοιχη που λαμβάνεται από την μέθοδο της ταξιδεσίας.

Σίγουρα τα πεπ στοιχεία b -splines μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για εμπορικές εφαρμογές, είναι μια μέθοδος που γνωρίζει μεγάλη ανάπτυξη και πολύ ερευνητές ασχολούνται με αυτό το αντικείμενο. Οι δημοσιεύσεις πάνω στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων μέσω μακροστοιχείων b -splines και την μέθοδο της ταξιδεσίας διαδέχονται η μία την άλλη και θεωρείτε ένα θέμα στην αιχμή της υπολογιστικής μηχανικής. Επίσης μεγαλώνει και το πεδίο

εφαρμογής της μεθόδου αυτής, από υπολογιστική ρευστοδυναμική μέχρι ελαστικότητα και μετάδοση ρωγμών.

Με την εργασία αυτή μπορέσαμε να αντλήσουμε κάποια βασικά ποιοτικά χαρακτηριστικά της μεθόδου και επίσης πειραματιστήκαμε δημιουργώντας παραλλαγές της και τελικά περάσαμε στην σύγκριση 3 συγγενών μεθόδων από τις οποίες οι 2 χρησιμοποιούνται εκτενώς στην ανάλυση με πεπ στοιχεία. Δημιουργήσαμε κάποιον υπολογιστικό κώδικα ο οποίος φαίνεται ότι μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα δυναμικού αποτελεσματικά και μάλιστα χωρίς μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

5. Ανάλυση του αναπτυχθέντος λογισμικού

Συνολικά αναπτύχθηκαν 3 πακέτα λογισμικού, ένα για την κάθε μέθοδο που αναλύθηκε. Στην συνέχεια το λογισμικό αυτό προσαρμόστηκε σε κάθε διαφορετικό παράδειγμα που εξετάστηκε.

Το λογισμικό είναι δομημένο με υπορουτίνες. Το κυρίως πρόγραμμα βρίσκεται στο αρχείο ονόματι `manager.m`, είναι το πρόγραμμα το οποίο διαχειρίζεται όλες τις υπόλοιπες υπορουτίνες. Οι υπορουτίνες που αναπτύχθηκαν έχουν στόχο τον ορισμό και χειρισμό της γεωμετρίας. Ακολουθεί μία λίστα αυτών

- `Findspan.m` : Υπολογίζει για μία τιμή της αδιάστατης παραμέτρου u το διάστημα στο οποίο αυτή βρίσκεται.
- `Basisfun.m` : Υπολογίζει για μία τιμή της παραμέτρου u τις μη μηδενικές συναρτήσεις βάσης N_i
- `Basisfuntot.m` : Υπολογίζει για κάθε τιμή της παραμέτρου u όλες τις συναρτήσεις βάσης N_i (και τις μηδενικές).
- `Basisfunder.m` : Υπολογίζει τις παραγώγους των συναρτήσεων βάσης.
- `Gaussleg.m` : Πραγματοποιεί την κατά Gauss ολοκλήρωση.
- `Datain.m` : Υπορουτίνα εισόδου της γεωμετρίας, και ορισμού βασικών παραμέτρων των καμπυλών b -splines.

Οι υπορουτίνες αυτές παρατίθενται στο τέλος για λόγους πληρότητας, ωστόσο δεν θα γίνει περαιτέρω ανάλυση τους.

Στην συνέχεια θα αναλυθεί η δομή του κυρίως προγράμματος "`manager.m`", η ανάλυση θα γίνει αναφορικά με την μέθοδο της ταξιθεσίας ενδεικτικά, ώστε να φανεί η πορεία που ακολούθησε ο φοιτητής προς την προγραμματιστική εφαρμογή της μεθόδου.

Manager.m

- Αρχικά καλείται η υπορουτίνα `datain.m` προς ορισμό των διανυσμάτων κόμβων και των υπολοίπων μεγεθών που απαιτούνται για την αντιμετώπιση του προβλήματος.
- Υπολογίζεται η θέση των σημείων ελέγχου ώστε να παρεμβάλεται η δοθείσα γεωμετρία

$$\vec{P}_i = [N]^{-1} \cdot Q_k$$

- Γίνεται αλλαγή των διανυσμάτων κόμβων ώστε να διατηρείται η διαδραστική μεταβολή σχήματος

$$C_1 = C_2 \Rightarrow [N_1] \cdot \vec{P}_1 = [N_2] \cdot \vec{P}_2 \Rightarrow \vec{P}_2 = [N_2]^{-1} \cdot [N_1] \cdot \vec{P}_1$$

Έτσι ορίζονται καινούρια σημεία ελέγχου

- Υπολογισμός των συναρτήσεων βάσης για τα b-splines καθώς και των παραγώγων τους.
- Παράσταση της γεωμετρίας του χωρίου μέσω της παρεμβολής Coons, αυτήν την γεωμετρία θα παρεμβάλλουμε μέσω επιφανειών b-splines υπολογίζοντας έτσι την θέση των σημείων ελέγχου.

$$\vec{P}_i = [N]^{-1} \cdot Q_k$$

- Ορισμός των συνοριακών σημείων ελέγχου, εκεί όπου θα επιβληθούν οι οριακές συνθήκες
- Επίλυση της εξίσωσης του Laplace στο χωρίο ολοκλήρωσης
- Επιβολή οριακών συνθηκών
- Τελική αντιστροφή του συστήματος και υπολογισμός των κομβικών τιμών της θερμοκρασίας

$$[K_{tot}] \cdot \{P_t\} = \{RHS\}$$

- Παρεμβολή της θερμοκρασίας στα εσωτερικά σημεία του χωρίου

$$\vec{T} = [N] \cdot \vec{P}_t$$

- Υπολογισμός σφαλμάτων και ροής θερμότητας.

Βιβλιογραφία

- [1] L. Piegle, W. Tiller, The NURBS Book, Springer.
- [2] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, the finite element method, its basis and fundamentals, Elsevier
- [3] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, numerical recipes in fortran 77, second edition, Cambridge university press
- [4] Χ. Προβατίδης, Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών ΙΙ, Πρόχειρες σημειώσεις, Αθήνα 2004
- [5] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές, πανεπιστημιακές σημειώσεις, ΕΜΠ
- [6] Κανάραχος ΑΕ, Πεπερασμένα στοιχεία και ανάλυση κατασκευών στην μηχανολογία, Παπασωτηρίου, 1995.
- [7] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(2005) pp. 4135-4195
- [8] Schramm U, Pilkey WD. The coupling of geometric descriptions and finite element using NURBS – A study in shape optimization. Finite elements in analysis and design 1993; 15:11-34.
- [9] Inoue K, Kikuchi Y, Masuyama T. A NURBS finite element method for product shape design. Journal of engineering design 2005; 16(2) : 157-174.
- [10] Provatidis CG, Kanarachos AE. Performance of a macro-FEM approach using global interpolation (Coons') functions in axisymmetric potential problems. Computers & Structures 2001. 79: 1769 – 1779.
- [11] Provatidis CG, Three dimensional Coons macroelements : Application to eigenvalue and scalar wave propagation problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering 2006; 65 : 111-134
- [12] Provatidis CG. Coons patch macroelements in potential Robin problems. Forschung im Ingenieurwesen 2002; 67: 19-26
- [13] Provatidis CG. Analysis of axisymmetric structures using Coons' interpolation. Finite elements in analysis & design 2003; 39 : 535-558

[14] Provatidis CG. Coons-patch macroelements in two dimensional eigenvalue and scalar wave propagation problems. Computers & Structures 2004; 82(4-5) : 383-395.

[15] Provatidis CG. Solution of two-dimensional Poisson problems in quadrilateral domains using transfinite Coons' interpolation. Communications in numerical methods in engineering 2004; 20(7) : 521-533.

[16] C Grossmann, H.G. Roos, M. Stynes. Numerical treatment of Partial Differential Equations. Springer, universitext.

[17] I.M Smith, D.V Griffiths. Programming the finite element method. Wiley.