



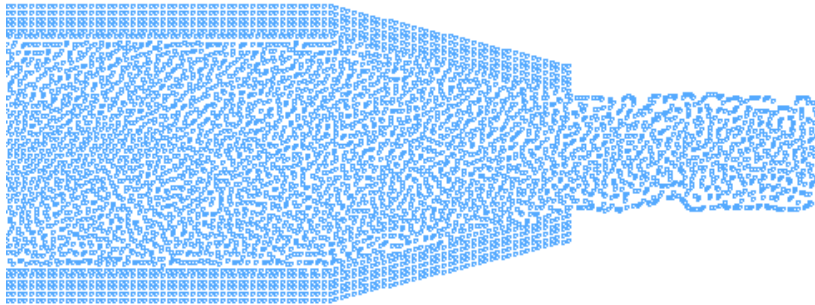
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ :

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΗΣ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
ΡΕΟΝΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (SRH)**



Εκπόνηση : Στεφανίδης Ι.

Επίβλεψη : Επικ.Καθ. Αναγνωστόπουλος Ι.

Αθήνα, Οκτώβριος 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	4
1. Εισαγωγή.....	7
1.1. Μέθοδοι με χρήση υπολογιστικού πλέγματος (Πλεγματικές).....	8
1.1.1 Πλέγμα Lagrange	
1.1.2 Πλέγμα Euler	
1.2. Μη πλεγματικές μέθοδοι.....	10
1.2.1 Μη Πλεγματικές Μέθοδοι Σωματιδίων(ΜΠΜΣ)	
1.2.2 Στρατηγική Επίλυσης με τις ΜΠΜΣ	
1.3. Η μέθοδος Υδροδυναμικής Ρεόντων Σωματιδίων – Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).....	13
2. Στοιχεία Θεωρίας της μεθόδου SPH.....	14
2.1. Βασικές ιδέες και στρατηγική της μεθόδου SPH.....	14
2.2. Μαθηματικές διατυπώσεις της μεθόδου SPH.....	15
2.2.1 Ολοκληρωματική Αναπαράσταση μιας Συνάρτησης	
2.2.2. Ολοκληρωματική Αναπαράσταση της Παραγώγου μιας Συνάρτησης	
2.3. Η συνάρτηση εξομάλυνσης ή smoothing kernel function.....	19
2.4. Εκφράσεις της συνάρτησης εξομάλυνσης W	21
2.5. Προσέγγιση σωματιδίων.....	26
2.6. Τεχνικές εξαγωγής τύπων της SPH.....	28
2.7. Περιοχή αλληλεπίδρασης.....	30
3. Η μέθοδος SPH για ροή Ρευστών.....	31
3.1. Διατυπώσεις της μεθόδου SPH για τις εξισώσεις Navier-Stokes.....	31

3.1.1	Προσεγγίσεις Σωματιδίων για την Πυκνότητα	
3.1.2	Προσεγγίσεις Σωματιδίων για την Ορμή.	
3.2.	Θέματα εφαρμογής της μεθόδου SPH για ρευστομηχανικές ροές.....	35
3.2.1	Τεχνητή Συνεκτικότητα (ή Τεχνητό Ιξώδες)	
3.2.2	Το μήκος αλληλεπίδρασης h	
3.2.3	Τεχνητή Συμπιεστότητα	
3.2.4	Η Τεχνική ΧSPH για την κίνηση των σωματιδίων	
3.2.5	Χειρισμός του Ορίου και Οριακές Συνθήκες	
3.2.6	Αλληλεπιδράσεις των Σωματιδίων - Αναζήτηση Γειτονικών Σωματιδίων	
3.3.	Επιλογή χρονικού βήματος και χρονική ολοκλήρωση.....	43
3.4.	Γενικός αλγόριθμος της μεθόδου SPH.....	46
4.	Υπολογιστικό Μέρος.....	49
4.1.	Περιγραφή του αλγόριθμου εφαρμογής.....	49
4.2.	Ροή Couette.....	54
4.2.1	Γενικά	
4.2.2	Ανάλυση Ανεξαρτησίας Σωματιδίων	
4.2.3	Επίδραση χρονικού βήματος	
4.2.4	Σύγκριση με την αναλυτική λύση	
4.3.	Ροή σε ακροφύσιο.....	66
4.3.1	Αλλαγές στον Αλγόριθμο Εφαρμογής	
4.3.2	Ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων	
4.3.3	Επίδραση της γωνίας της στένωσης	
4.3.4	Επίδραση του αριθμού Reynolds	
4.3.5	Παραμετροποίηση της γεωμετρίας του ακροφυσίου με πολυώνυμα Bezier	
4.3.5.1	Στοιχεία θεωρίας των Καμπυλών Bezier	
4.3.5.2	Αλλαγές στον Αλγόριθμο του Ακροφυσίου	
4.3.5.3	Προσέγγιση της γεωμετρίας του ακροφυσίου με καμπύλες Bezier με 3 σημεία ελέγχου	
4.3.5.4	Προσέγγιση με καμπύλες Bezier και 4 σημεία ελέγχου	
5.	Συμπεράσματα-Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη.....	98
	Αναφορές.....	102

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή αποτελεί μια απόπειρα εισαγωγής στην υπολογιστική μέθοδο της Υδροδυναμικής Ρεόντων Σωματιδίων (Smoothed Particle Hydrodynamics – SPH), με μελέτη απλών ροών και προοπτική τη μελέτη βαλβίδας – ακροφυσίου που είναι σημαντικό τμήμα ενός υδροστροβίλου Pelton αλλά και γενικότερα μηχανολογικό στέλεχος με διάφορες άλλες εφαρμογές.

Η μοντελοποίηση της ροής αποτελεί ένα πρώτο βήμα στη διαδικασία υδροδυναμικής βελτιστοποίησης τμημάτων υδροστροβίλων αλλά και οποιασδήποτε παρόμοιας μηχανής με απώτερο σκοπό τη μείωση των υδραυλικών απωλειών και τη βελτίωση της λειτουργικής συμπεριφοράς τους.

Η προσομοίωση με τις κλασσικές μεθόδους της Υπολογιστικής Μηχανικής που βασίζονται στη θεώρηση Euler, δείχνει να αντιμετωπίζει προβλήματα σε πολύπλοκες, διφασικές ή και μη-μόνιμες ροές με ελεύθερη επιφάνεια, όπως στη δέσμη που δημιουργείται στη βαλβίδα-ακροφύσιο και που προσκρούει στο σκαφίδιο ενός υδροστροβίλου Pelton. Γι αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που βασίζονται στην Λαγκρανζιανή μελέτη της ροής και τέτοια είναι η SPH, κατά την οποία το ρευστό προσομοιώνεται με ένα στατιστικά αντιπροσωπευτικό σύνολο σωματιδίων ρευστού, οι τροχιές των οποίων υπολογίζονται με αριθμητικές μεθόδους.

Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιήθηκε για το σκοπό αυτό κώδικας γραμμένος σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN που αναπτύχθηκε και συνεχίζει να αναπτύσσεται στα πλαίσια της σχετικής ερευνητικής προσπάθειας του Εργαστηρίου Υδροδυναμικών Μηχανών του ΕΜΠ. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν για την αναπαράσταση των αποτελεσμάτων τα πακέτα λογισμικού TecPlot και GRAPHER.

Η εργασία αυτή είναι δομημένη ως εξής:

Κεφ.1: Γίνεται μια μικρή θεωρητική εισαγωγή των κλασσικών μεθόδων Υπολογιστικής Μηχανικής και παρατίθενται τα χαρακτηριστικά τους με κυριότερο τη χρήση πλέγματος. Έπειτα γίνεται αναφορά σε Μη-Πλεγματικές μεθόδους και ειδικότερα στη μέθοδο SPH με τα πλεονεκτήματά της έναντι των κλασσικών μεθόδων και τη γενική στρατηγική επίλυσης που ακολουθείται.

Κεφ.2: Το κεφάλαιο αυτό είναι μια εισαγωγή στη μέθοδο SPH με τα βασικά θεωρητικά χαρακτηριστικά της και με μαθηματική θεμελίωση. Η βασική ιδέα είναι η μετάβαση από την προσεγγιστική ολοκληρωματική αναπαράσταση μιας συνάρτησης στην προσεγγιστική αναπαράσταση με χρήση σωματιδίων. Επίσης αναφέρεται και με παραδείγματα η σημαντική για τη μέθοδο έννοια της συνάρτησης εξομάλυνσης.

Κεφ.3: Εξειδικεύεται η μέθοδος SPH στην περίπτωση της Ρευστομηχανικής, διαμορφώνοντας κατάλληλα τις εξισώσεις Navier-Stokes, που είναι οι βασικές εξισώσεις της ροής. Ακόμα αναλύονται διάφορα θέματα εφαρμογής, πολλά από τα οποία είναι ανοιχτά σε διερεύνηση. Στο τέλος προτείνεται ένας γενικός αλγόριθμος για χρήση σε μοντελοποίηση ρευστομηχανικών ροών με αυτή τη μέθοδο.

Κεφ.4: Πρόκειται για το υπολογιστικό μέρος που καταλαμβάνει και το μεγαλύτερο τμήμα της εργασίας. Αρχικά περιγράφεται ο αλγόριθμος εφαρμογής ο οποίος βασίζεται στο γενικό αλγόριθμο που προηγήθηκε και είναι μια εκδοχή του με συγκεκριμένες εξισώσεις για την υλοποίησή του. Αυτός ο αλγόριθμος εφαρμόζεται για την προσομοίωση της ροής Couette ώστε να ελεγχθεί η αξιοπιστία του. Ελέγχεται η επίδραση του αριθμού σωματιδίων και του χρονικού βήματος στην ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων και γίνεται σύγκριση με την αναλυτική λύση. Στη συνέχεια, μελετάται η επίδραση του αριθμού Re και τέλος ο αλγόριθμος εφαρμόζεται για την ανάλυση της ροής σε ακροφύσιο, χωρίς και με στένωση.

Κεφ.5: Παρατίθενται κάποια βασικά συμπεράσματα για την πορεία της εργασίας και τα αποτελέσματα που παράχθηκαν, καθώς και η προοπτική για περαιτέρω ανάπτυξη και επέκτασή της στη μελέτη άλλων τμημάτων των υδροστροβίλων δράσης.

ABSTRACT

This work is an attempt to introduce and apply the Method of Smoothed Particle Hydrodynamics – SPH, with the study of simple fluid flows and with a perspective of studying the valve-nozzle which is an important part of a Pelton hydroturbine as well as a mechanical part with various other applications .

The modeling of fluid flow is a first step to the process of hydrodynamic optimization of parts of hydroturbines and of anyother analogous machine in order to reduce the hydraulic loss and to improve the operational behavior .

The simulation with the classical methods of Computanional Mechanics based on the Eulerian approach seems to confront problems on complex, two-phase and/or non-steady flows with a free surface, like the jet that is created within the valve-nozzle and impinges onto a bucket of a Pelton hydroturbine. For this reason, methods following the Langrangian study of a flow have been developed, and one of those is SPH, according to which the fluid is simulated with a statistically representative set of fluid particles and the tracks of them are computed numerically.

In the present work, a computer code in Fortran language is used, which has been developed in the Lab of Hydraulic Turbomachines.

Ευχαριστώ τον Επικ. Καθ. της Σχολής Μηχανολόγων Μηχ. Αναγνωστόπουλο Ι. για την ανάθεση και ενεργή επίβλεψη της παρούσας εργασίας καθώς και τον Υποψήφιο Διδάκτορα του Εργαστηρίου Υδροδυναμικών Μηχανών ΕΜΠ Σταματέλο Φ. για τη συνεργασία και συνεισφορά του στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

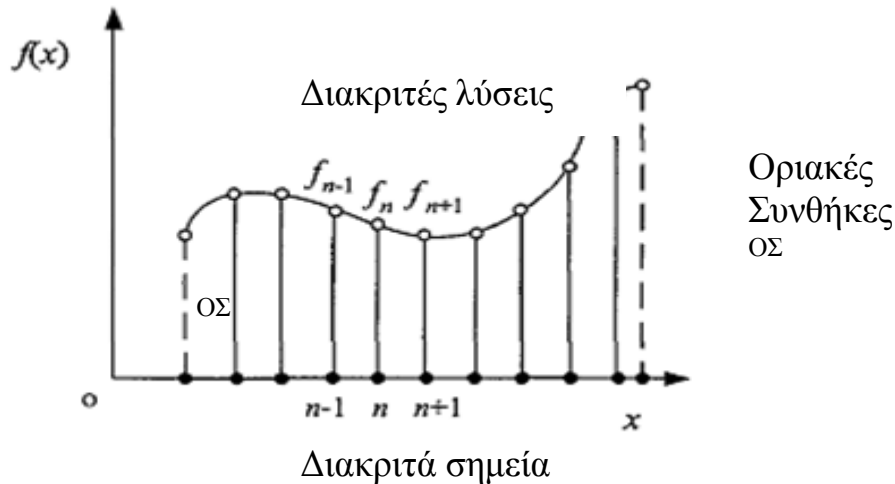
Η αριθμητική προσομοίωση με τη χρήση Η/Υ έχει γίνει πολύ σημαντικό εργαλείο επίλυσης σύνθετων πρακτικών προβλημάτων στην επιστήμη και την τεχνολογία, όταν πλέον η υπολογιστική ισχύς αυξάνεται συνεχώς.

Τα φυσικά προβλήματα από την μαθηματική τους περιγραφή διατυπώνονται σε διακριτή μορφή και επιλύονται στον Η/Υ με ταυτόχρονη δυνατότητα εικονικής αναπαράστασης της εξέλιξης της λύσης τους.

Η προσομοίωση αποτελεί εναλλακτική και συμπληρωματική μέθοδο ως προς τη θεωρητική διερεύνηση, η οποία συνήθως απαιτεί διάφορες απλοποιήσεις αλλά και στο πείραμα που κοστίζει. Ωστόσο, λειτουργεί και ως επιβεβαίωση ή απόρριψη των θεωριών καθώς και ως συνδετικός κρίκος της θεωρίας με τα πειραματικά μοντέλα.

Τα βήματα που ακολουθούνται μέχρι να φτάσουμε στην προσομοίωση είναι σε γενικές γραμμές τα ακόλουθα [Liu G.R.& Liu M.B.,2003]:

- Από την παρατήρηση των φυσικών φαινομένων προκύπτουν μαθηματικά μοντέλα με κατάλληλες απλοποιήσεις και παραδοχές. Αυτά εμφανίζονται με μορφή εξισώσεων που μπορεί να είναι συνήθεις διαφορικές, μερικές διαφορικές, ολοκληρωματικές, συστήματα ή άλλες και συνοδεύονται από οριακές ή και αρχικές συνθήκες που καθορίζουν τα χωρικά και χρονικά όρια αντίστοιχα.
- Στη συνέχεια ο χώρος του προβλήματος πρέπει να διακριτοποιηθεί, δηλαδή να διαιρεθεί σε διακριτά στοιχεία . Η διακριτοποίηση του χώρου ποικίλει αλλά συνήθως εφαρμόζεται ένα πλέγμα που σχηματίζεται από κόμβους πάνω στους οποίους υπολογίζονται οι τιμές ζητούμενων μεγεθών. Η ακρίβεια εξαρτάται από το μέγεθος και το σχήμα των κελιών του πλέγματος.
- Μετά την διακριτοποίηση του χώρου ακολουθεί η αριθμητική διακριτοποίηση ώστε τα ολοκληρώματα και οι παράγωγοι να αλλάξουν σε διακριτές μορφές, σχηματίζοντας συστήματα αλγεβρικών ή συνήθων διαφορικών εξισώσεων που λύνονται με συνήθεις ρουτίνες αριθμητικής ανάλυσης.
- Ο προγραμματισμός σε κάποια γλώσσα είναι το επόμενο βήμα και απαιτούμενα είναι η ταχύτητα και αποδοτικότητα του αλγορίθμου, η απαλλαγή από σφάλματα, η ευκολία διαβάσματος, χρήσης και τροποποίησης και η δυνατότητα επαλήθευσης από θεωρητικές λύσεις.



Σχ. 1.1 : Διακριτοποίηση χώρου και αριθμητική διακριτοποίηση για μια συνάρτηση $f(x)$ στον μονοδιάστατο χώρο.

1.1 Μέθοδοι με χρήση υπολογιστικού πλέγματος (Πλεγματικές)

Οι εξισώσεις που διέπουν το συνεχές μέσο μπορούν να εκφραστούν βασικά με δύο τρόπους : με την υλική περιγραφή ή κατά Lagrange, που έχει τυπικότερο εκπρόσωπο τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και με τη χωρική περιγραφή ή κατά Euler με συνηθέστερο παράδειγμα τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

Οι δύο αυτές περιγραφές αντιστοιχούν και σε δύο διαφορετικά πλέγματα κατά τη διαδικασία διακριτοποίησης του χώρου :

1.1.1. Πλέγμα Lagrange

Στις μεθόδους με πλέγμα Lagrange το πλέγμα είναι προσδεμένο στο υλικό μέσο και συνεπώς κινείται μαζί με αυτό. Άρα μαζί κινούνται και οι κόμβοι και τα κελιά του πλέγματος, όποτε με την παραμόρφωση του μέσου παραμορφώνονται και αυτά. Η μάζα, η ορμή και η ενέργεια παραμένουν σταθερές σε κάθε κελί.

Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι οι κόμβοι μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος ορίων ή διεπιφανειών. Οι οριακές συνθήκες στις ελεύθερες επιφάνειες, τα κινούμενα όρια και τις διεπιφάνειες καθορίζονται αυτόματα με την κίνηση αυτών των κόμβων. Πολύπλοκες γεωμετρίες μπορούν να αντιμετωπιστούν άνετα χρησιμοποιώντας πλέγματα μεταβλητής γεωμετρίας ή και πύκνωσης. Επίσης, καθώς το πλέγμα είναι προσδεμένο στο

υλικό είναι διαθέσιμη η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών σε ένα συγκεκριμένο υλικό σημείο. Το πλέγμα δε χρειάζεται να επεκταθεί πέρα από το χώρο του προβλήματος.

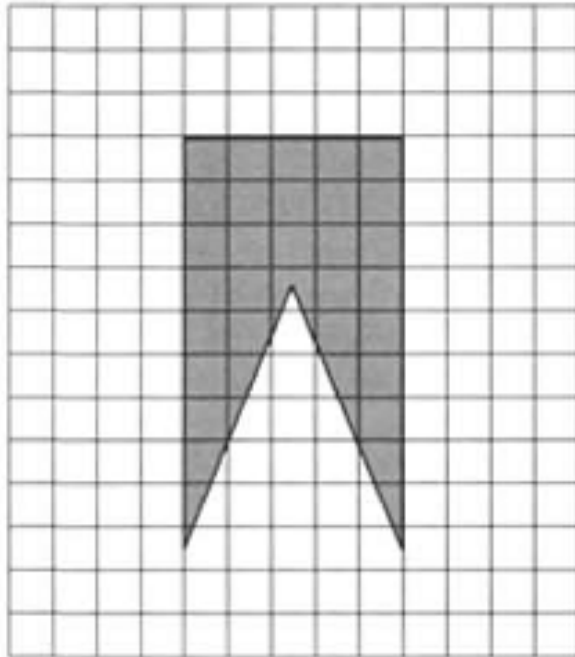


Σχ.1.2 : Λανγκρανζιανό πλέγμα με τριγωνικά στοιχεία για μια προσομοίωση.

Γι αυτό και οι μέθοδοι αυτές έχουν επιτυχία στην μηχανική στερεού μέσου όπου οι παραμορφώσεις είναι σχετικά μικρές. Στη μελέτη όμως των ρευστών η μεγάλη παραμόρφωση του πλέγματος εισάγει ανακρίβεια στον υπολογισμό ή οδηγεί σε πλήρη αδυναμία.

1.1.2 Πλέγμα Euler

Αντίθετα με το Lagrange, το πλέγμα Euler είναι προσδεμένο στο χώρο άρα οι κόμβοι σταθεροί και τα κελιά απαραμόρφωτα. Οι μεγάλες παραμορφώσεις του μέσου δεν επηρεάζουν και η μάζα, η ορμή και η ενέργεια ρέουν διαμέσου των κελιών. Η μέθοδος βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στην υπολογιστική μηχανική των ρευστών.



Σχ. 1.3 : Πλέγμα Euler, σταθερό στο χώρο, με τετραγωνικά κελιά για μια προσομοίωση.

Ένα μειονέκτημα είναι ότι δε μπορεί να καταγραφεί η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών σε ένα υλικό σημείο του μέσου. Ο χειρισμός πολύπλοκων γεωμετριών με τη δημιουργία ανομοιόμορφου πλέγματος είναι δύσκολη διαδικασία.

Με τη ροή μάζας, ορμής και ενέργειας διαμέσου των κελιών είναι δύσκολο να καθοριστεί η θέση ελεύθερων επιφανειών, παραμορφώσιμων ορίων και διεπιφανειών. Το πλέγμα χρειάζεται συχνά να επεκτείνει τον υπολογιστικό χώρο και σε άλλα σημεία όπου μπορεί να έχουμε ροή του μέσου.

Η ιδέα της εκμετάλλευσης των πλεονεκτημάτων των δύο μεθόδων μέσω του συνδυασμού τους έχει γίνει πράξη από τους ερευνητές και έχουν προκύψει νέες μέθοδοι που όμως δεν έχουν δώσει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα καθώς διατηρούν ταυτόχρονα τα μειονεκτήματα όπως περιγράφηκαν παραπάνω και δεν αντιμετωπίζουν προβλήματα μεγάλων παραμορφώσεων, ελεύθερων επιφανειών κ.α.

1.2 Μη Πλεγματικές Μέθοδοι

Το ενδιαφέρον πλέον έχει επεκταθεί στις μη πλεγματικές μεθόδους που θα λύνουν τέτοια προβλήματα, δηλαδή τις αντίστοιχες εξισώσεις, με κάθε πιθανή

οριακή συνθήκη, χρησιμοποιώντας αυθαίρετα κατανομημένους κόμβους ή σωματίδια χωρίς κάποιο πλέγμα να τα συνδέει μεταξύ τους, απαραίτητα.

1.2.1 Μη Πλεγματικές Μέθοδοι Σωματιδίων(ΜΠΜΣ)

Μια ΜΠΜΣ χρησιμοποιεί ένα αριθμό διακριτών σωματιδίων για να αναπαραστήσει ένα κινούμενο σύστημα. Τα σωματίδια μπορεί να ανήκουν από πλευράς μεγέθους από τη μικρο και νάνο κλίμακα έως την αστρονομική κλίμακα . Κάθε σωματίδιο φέρει μάζα, ορμή ενέργεια, χαρακτηρίζεται από πυκνότητα, ιξώδες κ.α. και μετατοπίζει τη θέση του. Η μελέτη του συστήματος καθορίζεται από τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας.

Ενδεικτικά παρατίθεται ο παρακάτω πίνακας με σημαντικές ΜΠΜΣ :

Μέθοδοι	Αναφορές
Molecular dynamics (MD)	Alder and Wainright 1957 Rahman, 1964 Stillinger and Rahman 1974
Monte Carlo (MC)	Metropolis and Utam1949 Binder 1988 1992
Direct simulation Monte Carlo (DSMC)	Bird 1994 Pan et al 1999 2000 2002
Dissipative particle dynamics (DPD)	Hoogerbrugge and Koelman 1992 Espanol 1998
Lattice Gas Cellular Automata (CA)	Wolfram 1983 Kandanoft et al 1989
Lattice Boltzmann equation (LBE)	Chen and Doolen 1998 Qian et al 2000
Particle-In-Cell (PIC)	Harlow 1963 1964
Marker-And-Cell (MAC)	Harlow 1964
Fluid-In-Cell (FLIC)	Gentry et al 1966
Moving Particle Semi-Implicit (MPS)	Kozhizuka et al 1998
Discrete Element Method (DEM)	Cundall 1987 Owen 1996
Vortex methods	Chorin 1973 Leonard 1980
Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)	Lucy 1977 Gingold and Monaghan 1977

Έχοντας αναφερθεί στις πλεγματικές μεθόδους μπορούμε πλέον να δούμε τα πλεονεκτήματα των μη πλεγματικών μεθόδων σωματιδίων που δικαιολογούν και την ενασχόληση μαζί τους:

- Στις ΜΠΜΣ ο χώρος του προβλήματος διακριτοποιείται με σωματίδια χωρίς σταθερή σύνδεση μεταξύ τους, άρα η αντιμετώπιση μεγάλων παραμορφώσεων είναι ευκολότερη.
- Η διακριτοποίηση πολύπλοκων γεωμετριών είναι απλούστερη αφού η διαδικασία αυτή γίνεται αρχικά μόνο μια φορά.

- Ο χειρισμός και η αναδιάταξη των σωματιδίων είναι ευκολότερη από αυτή του πλέγματος.
- Η ανάκτηση των χαρακτηριστικών όλου του φυσικού συστήματος γίνεται απλώς ακολουθώντας την κίνηση των σωματιδίων. Επομένως αντιμετωπίζονται δύσκολα σημεία όπως ελεύθερες επιφάνειες, κινούμενες διεπιφάνειες και όρια. Η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών της ροής σε κάθε σημείο του μέσου προκύπτει επίσης απλά από τις ιδιότητες των σωματιδίων.

1.2.2 Στρατηγική Επίλυσης με τις ΜΠΜΣ

Όμοια με τις συμβατικές μεθόδους που είδαμε παραπάνω, η επίλυση με τις ΜΠΜΣ ακολουθεί τα εξής βήματα:

- Εξισώσεις που διέπουν το σύστημα με τις κατάλληλες οριακές ή και αρχικές συνθήκες.
- Διακριτοποίηση του χώρου.
- Αριθμητική διακριτοποίηση.
- Ρουτίνες επίλυσης των προκυπτουσών αλγεβρικών ή συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Αξίζει να επισημανθεί ότι ακόμη και για τις ΜΠΜΣ μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποιου είδους βοηθητικό πλέγμα, τριγωνικό, τετραγωνικό ή άλλο προκειμένου να γίνει η επιθυμητή αρχική κατανομή των σωματιδίων ή οποιαδήποτε άλλη ανακατανομή χρειαστεί στον κώδικα.

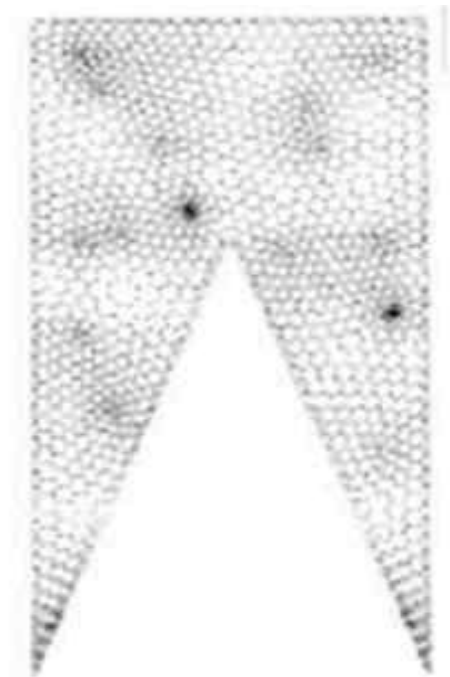
Η αριθμητική διακριτοποίηση είναι ουσιαστικά η προσέγγιση των τιμών συναρτήσεων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων σε ένα σωματίδιο, που προκύπτουν από την επίδραση των γειτονικών σωματιδίων τα οποία βρίσκονται σε μια περιοχή αλληλεπίδρασης με το συγκεκριμένο σωματίδιο.

Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου μετά τα αρχικά βήματα καθορίζεται ως εξής:

- Από τις αρχικές θέσεις και ταχύτητες και από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σωματίδιο στη χρονική στιγμή t
- Από τις δυνάμεις υπολογίζονται οι επιταχύνσεις σε κάθε σωματίδιο στη χρονική στιγμή t
- Από τις επιταχύνσεις τη χρονική στιγμή t υπολογίζονται οι νέες θέσεις και οι νέες ταχύτητες τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$
- Επαναλαμβάνεται ο κύκλος μέχρι ένα καθορισμένο χρονικό όριο.

1.3 Η Μέθοδος Υδροδυναμικής Ρεόντων Σωματιδίων - Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

Η μέθοδος SPH επινοήθηκε για την επίλυση προβλημάτων αστροφυσικής (Lucy,1977-Gingold&Monaghan,1977) και επεκτάθηκε σε προβλήματα κυρίως της μηχανικής ρευστών (βλ. στις Αναφορές).



Σχ. 1.4 : Σωματίδια της SPH αυθαίρετα κατανομημένα για μια προσομοίωση .

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό και πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η προσαρμοστικότητα και η γενικότητα εφαρμογής, καθώς η προσομοίωση της εξέλιξης των φαινομένων στα οποία χρησιμοποιείται εξαρτάται μόνο από την αρχική αυθαίρετη κατανομή των σωματιδίων, που έπειτα φαίνεται να κινούνται μόνο τους .

Ο όρος Smoothed αναφέρεται στην προσέγγιση των ιδιοτήτων κάθε σωματιδίου, που προκύπτει από μια σταθμισμένη τιμή με βάση τις αντίστοιχες τιμές των γειτονικών σωματιδίων, με συντελεστές βαρύτητας που καθορίζονται από μια συνάρτηση (Kernel).

Επίσης είναι αξιοσημείωτο ότι σε σχέση με τις άλλες μη πλεγματικές μεθόδους τα σωματίδια δε λειτουργούν μόνο σαν σημεία παρεμβολής για να καθοριστεί η επίδραση μεταξύ τους αλλά φέρουν υλικές ιδιότητες, μάζα, ορμή και ενέργεια, δηλαδή λειτουργούν σαν πραγματικά σωματίδια ρευστού.

2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SPH

2.1 Βασικές Ιδέες και Στρατηγική της μεθόδου SPH

Η μέθοδος SPH αναπτύχθηκε σε μεγάλο μέρος της για προβλήματα Υδροδυναμικής που εκφράζονται σε μορφή Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ), με μεταβλητές πεδίου όπως πυκνότητα, ενέργεια, ταχύτητα κ.α. . Η εξαγωγή αναλυτικών λύσεων για τέτοιες διαφορικές εξισώσεις δεν είναι συνήθως δυνατή, εκτός από μερικές απλές περιπτώσεις, και επομένως μεγάλο βάρος έχει δοθεί στην αριθμητική επίλυση. Για την αριθμητική επίλυση πρέπει να διακριτοποιηθεί ο χώρος του προβλήματος, όπου ορίζονται οι ΜΔΕ. Έπειτα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος για να προσεγγιστούν οι τιμές των μεταβλητών πεδίου και των παραγώγων τους σε κάθε σημείο. Η συνάρτηση προσέγγισης μετά εφαρμόζεται στις ΜΔΕ για να παράγει ένα σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ) σε διακριτή μορφή μόνο ως προς το χρόνο. Το σύστημα αυτό ΣΔΕ μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας γνωστές ρουτίνες αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Συγκεκριμένα, στη μέθοδο SPH, ακολουθούμε τα παρακάτω σημεία για να εφαρμόσουμε την στρατηγική που προαναφέρθηκε:

1. Ο χώρος του προβλήματος αναπαρίσταται από ένα πλήθος αυθαίρετα κατανεμημένων σωματιδίων. Τα σωματίδια δεν συνδέονται μεταξύ τους και αυτό δηλώνει ότι η μέθοδος είναι μη πλεγματική. Ωστόσο, ένα πρόβλημα αποτελεί η εξασφάλιση της σταθερότητας της αριθμητικής λύσης, ειδικά όταν με τα διάσπαρτα σωματίδια χρησιμοποιούνται οριακές συνθήκες Neuman (δηλ. με παραγώγους).
2. Η μέθοδος της ολοκληρωματικής αναπαράστασης χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των μεταβλητών πεδίου. Στη μέθοδο SPH αποκαλείται προσέγγιση πυρήνα και από μαθηματικής σκοπιάς δίνει στην SPH την απαραίτητη σταθερότητα αφού η ολοκληρωματική αναπαράσταση συνάρτησης έχει χαρακτηριστικά εξομάλυνσης.
3. Η προσέγγιση πυρήνα προσεγγίζεται επιπλέον, χρησιμοποιώντας σωματίδια και αυτό στη μέθοδο SPH αποκαλείται προσέγγιση σωματιδίων. Η προσέγγιση αυτή επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας την ολοκλήρωση στην ολοκληρωματική αναπαράσταση μεταβλητών πεδίου και των παραγώγων τους με άθροιση στις αντίστοιχες τιμές στα γειτονικά σωματίδια, σε μια τοπική περιοχή που ονομάζεται περιοχή στήριξης ή αλληλεπίδρασης . Μαθηματικά αυτό παράγει συμμετρικούς ή αραιούς πίνακες (δηλ. συστήματα εξισώσεων) που μειώνουν την απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ. Η σημασία του έγκειται σε

προβλήματα με μεγάλες παραμορφώσεις οπότε χρειάζεται μεγάλος αριθμός σωματιδίων (μπορεί και εκατομμύρια) για να αναπαραστήσουν το χώρο, και αυτό οδηγεί σε αντίστοιχα μεγάλα συστήματα εξισώσεων που απαιτούν απαράδεκτα υψηλό χρόνο CPU αν οι πίνακες είναι πλήρεις.

4. Η προσέγγιση σωματιδίων εκτελείται σε κάθε χρονικό βήμα οπότε η χρήση των σωματιδίων εξαρτάται από την εκάστοτε κατανομή τους που φυσικά αλλάζει με το χρόνο. Έτσι η μέθοδος δεν επηρεάζεται από την αρχική κατανομή δηλαδή έχει μια προσαρμοστικότητα και αυτό την καθιστά κατάλληλη για προβλήματα με μεγάλες παραμορφώσεις. Για να εξασφαλιστεί η ακρίβεια της ολοκλήρωσης και άρα η αριθμητική σταθερότητα πρέπει να χρησιμοποιηθεί επαρκής αριθμός σωματιδίων στην άθροιση ή αλλιώς η περιοχή αλληλεπίδρασης πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη.
5. Η προσέγγιση σωματιδίων πραγματοποιείται για κάθε όρο που σχετίζεται με τις μεταβλητές πεδίου στις ΜΔΕ για να παράγει ένα σύνολο από ΣΔΕ σε διακριτή μορφή ως προς το χρόνο.
6. Οι ΣΔΕ επιλύονται χρησιμοποιώντας σχήματα αριθμητικής ολοκλήρωσης και αυτό που πρέπει να καθοριστεί είναι το κατάλληλο χρονικό βήμα για την ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω σημεία μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη μέθοδο SPH μια Λαγκρανζιανή, μη πλεγματική, σταθερή, προσαρμοστική μέθοδο για την επίλυση δυναμικών προβλημάτων.

Στις επόμενες σελίδες θα παρατεθεί η με μαθηματική μορφή διατύπωση των παραπάνω .

2.2 Μαθηματικές Διατυπώσεις της μεθόδου SPH

2.2.1 Ολοκληρωματική Αναπαράσταση μιας Συνάρτησης

Το πρώτο βήμα για τη μαθηματική διατύπωση της θεωρίας είναι η ολοκληρωματική αναπαράσταση ή προσέγγιση πυρήνα για τις μεταβλητές του πεδίου ροής.

Ουσιαστικά, το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της τιμής μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής σε συγκεκριμένο σημείο (ή σε συγκεκριμένο σωματίδιο) στον υπολογιστικό χώρο και αυτό γίνεται με την ολοκλήρωση του γινομένου της ίδιας συνάρτησης επί μια συνάρτηση εξομάλυνσης πυρήνα ή απλούστερα συνάρτηση βάρους, σε μια γειτονική περιοχή γύρω από το σημείο (ή σωματίδιο).

Η μαθηματική σχέση είναι :

$$f(\vec{r}) = \int_{\Omega} f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.1)$$

όπου f είναι μια συνάρτηση μεταβλητής του πεδίου ροής στη θέση $\vec{r}(x,y,z)$ και $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ είναι το δέλτα Dirac, που δίνεται από τη σχέση:

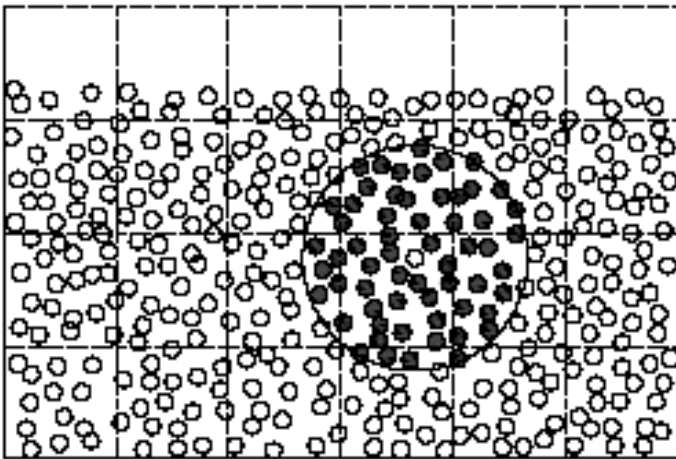
$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 1 & \vec{r} = \vec{r}' \\ 0 & \vec{r} \neq \vec{r}' \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δ , για να είναι η σχέση (2.1) ακριβής πρέπει η $f(\vec{r})$ να ορίζεται και να είναι συνεχής στο χώρο ολοκλήρωσης Ω .

Αν η συνάρτηση δ αντικατασταθεί από μια συνάρτηση εξομάλυνσης $W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ με $\int_{\Omega} W d\vec{r} = 1$, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}' \quad (2.2)$$

όπου W είναι μια συνάρτηση εξομάλυνσης πυρήνα ή συνάρτηση εξομάλυνσης ή απλά μια συνάρτηση βάρους. h είναι το μήκος εξομάλυνσης ή αλληλεπίδρασης που ορίζει την περιοχή στην οποία αλληλεπιδρά ο πυρήνας (δηλαδή το σωματίδιο-πυρήνας με τα υπόλοιπα σωματίδια).



Σχ. 2.1: Εποπτική αναπαράσταση σωματιδίου-πυρήνα με τα γειτονικά σωματίδια σε κυκλική περιοχή αλληλεπίδρασης, στον υπολογιστικό χώρο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον η συνάρτηση W δεν είναι η συνάρτηση Dirac το ολοκλήρωμα είναι μια προσέγγιση της f και αυτό το νόημα έχει ο συμβολισμός $\langle \rangle$. Από εδώ και πέρα, σε κάθε ολοκλήρωμα ή άθροισμα που περιέχεται συνάρτηση εξομάλυνσης W , δηλαδή αποτελεί προσέγγιση, για λόγους ευκολίας δεν θα χρησιμοποιείται ο προηγούμενος συμβολισμός, αλλά θα εξυπακούεται .

2.2.2. Ολοκληρωματική Αναπαράσταση της Παραγώγου μιας Συνάρτησης

Η προσέγγιση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f(\vec{r})$ (ας υποθέσουμε ότι είναι βαθμωτή) χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) δίνεται από :

$$\nabla f(\vec{r}) = \int_{\Omega} [\nabla f(\vec{r}')] W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}' \quad (2.3)$$

Έχοντας υπόψη τη γνωστή ιδιότητα παραγώγισης γινομένου, το ολοκλήρωμα ξαναγράφεται :

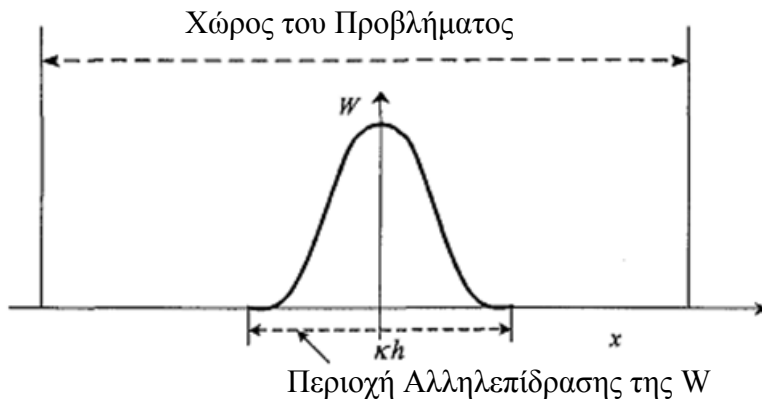
$$\nabla f(\vec{r}) = \int_{\Omega} \nabla [f(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h)] d\vec{r}' - \int_{\Omega} f(\vec{r}') \nabla W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}'$$

Η παράσταση μπορεί να αλλάξει διατύπωση χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή του Θεωρήματος της Απόκλισης από τον χώρο ολοκλήρωσης Ω στην επιφάνεια ολοκλήρωσης S :

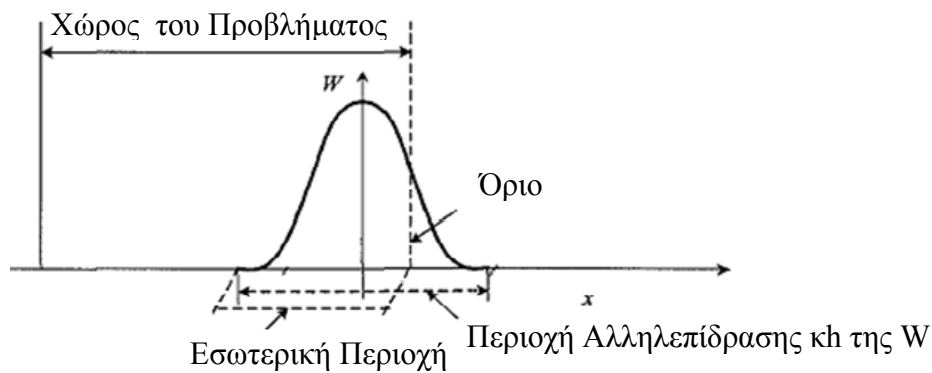
$$\nabla f(\vec{r}) = \int_S f(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) \vec{n} dS - \int_{\Omega} f(\vec{r}') \nabla W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}'$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια S .

Καθώς η W είναι συμμετρική και έχει την ιδιότητα, όπως θα δούμε παρακάτω, να είναι 0 εκτός περιοχής αλληλεπίδρασης, όταν αυτή η περιοχή βρίσκεται εντός του χώρου του προβλήματος το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι 0, όπως φαίνεται εποπτικά στο ακόλουθο σχήμα:



Αντίθετα, όταν η περιοχή αλληλεπίδρασης υπερβαίνει το χώρο του προβλήματος, η W τέμνεται από το όριο και το επιφανειακό ολοκλήρωμα δεν είναι πλέον 0 οπότε πρέπει να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις στο όριο για να θεωρηθεί 0.



Έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για την παράγωγο:

$$\nabla f(\vec{r}) = - \int_{\Omega} f(\vec{r}') \nabla W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}' \quad (2.4)$$

Δηλαδή φαίνεται ότι η παραγωγή της συνάρτησης ουσιαστικά ανάγεται στην παραγωγή της συνάρτησης εξομάλυνσης .

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα κεφάλαιο με τις ιδιότητες της W καθώς και τις μορφές της που βρίσκονται συχνότερα στη βιβλιογραφία.

2.3 Η συνάρτηση εξομάλυνσης ή smoothing kernel function

Η συνάρτηση εξομάλυνσης έχει ιδιαίτερη σημασία στη μέθοδο SPH καθώς ορίζει το μέγεθος της περιοχής αλληλεπίδρασης γύρω από τα σωματίδια και τον τρόπο και την αποδοτικότητα του υπολογισμού όταν προσεγγίζεται μια μεταβλητή του πεδίου μέσω αθροισμάτων όπως θα φανεί στις εξισώσεις που ακολουθούν.

Η συνάρτηση εξομάλυνσης πρέπει να ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις – ιδιότητες:

- Η συνάρτηση πρέπει να είναι κανονικοποιημένη στην περιοχή αλληλεπίδρασης δηλαδή το ολοκλήρωμά της στην ίδια περιοχή να ισούται με μονάδα.

$$\int_{\Omega} W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r} = 1$$

- Η συνάρτηση πρέπει να είναι συμπαγής γύρω από μια ακτίνα αλληλεπίδρασης:

$$W(\vec{r} - \vec{r}') = 0, \text{ για } |\vec{r} - \vec{r}'| \geq \kappa h$$

Η ακτίνα αλληλεπίδρασης εξαρτάται από το μήκος αλληλεπίδρασης h και ένα συντελεστή κ άρα το μέγεθος $|\vec{r} - \vec{r}'| \leq \kappa h$ ορίζει την περιοχή αλληλεπίδρασης. Η ιδιότητα αυτή στηρίζεται στο γεγονός ότι τα σωματίδια έξω από την περιοχή κh , όπως αποδεικνύεται, επενεργούν αμελητέα σε σχέση με τα εσωτερικά και το όφελος είναι ότι η ολοκλήρωση ή άθροιση περιορίζεται σε αυτή τη στενή περιοχή οπότε εξοικονομείται υπολογιστική ισχύς.

- Η συνάρτηση πρέπει να έχει θετική τιμή σε κάθε σημείο της περιοχής αλληλεπίδρασης

$$W(\vec{r} - \vec{r}') \geq 0 \text{ για } |\vec{r} - \vec{r}'| \leq \kappa h$$

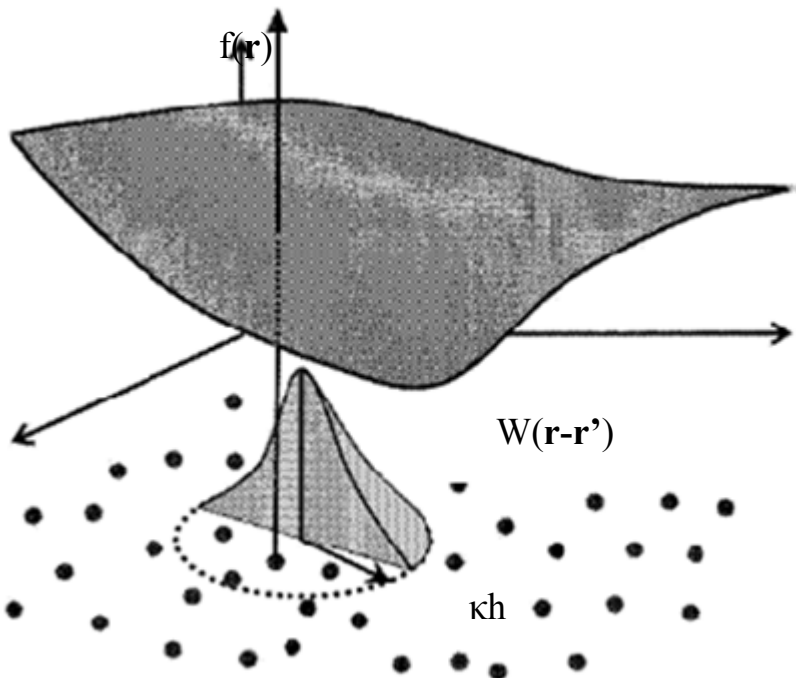
Είναι μια ιδιότητα που σε προβλήματα υδροδυναμικής βοηθάει να αποφεύγονται αρνητικές τιμές που δεν έχουν φυσική σημασία για διάφορα μεγέθη όπως πυκνότητα, ενέργεια κλπ.

- Η συνάρτηση πρέπει να φθίνει μονότονα με την αύξηση της απόστασης από το σωματίδιο πυρήνα, αφού θεωρείται ότι όσο πλησιέστερα προς τον πυρήνα βρίσκονται σωματίδια τόσο μεγαλύτερη επίδραση έχουν σε αυτόν.
- Η συνάρτηση πρέπει να τείνει στην συνάρτηση Dirac καθώς το μήκος αλληλεπίδρασης τείνει στο μηδέν.

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}', h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Δηλαδή όταν το h τείνει στο μηδέν η προσεγγιστική τιμή τείνει στην πραγματική τιμή της συνάρτησης.

- Η συνάρτηση πρέπει να είναι άρτια, δηλαδή τα σωματίδια που απέχουν ίση απόσταση από τον πυρήνα από διαφορετικές θέσεις πρέπει να τον επηρεάζουν εξίσου .
- Η συνάρτηση πρέπει να είναι επαρκώς ομαλή και αυτό εξασφαλίζει καλύτερη προσέγγιση για τις τιμές μιας συνάρτησης και των παραγώγων της .



Σχ. 2.2 : Εποπτική αναπαράσταση της συνάρτησης εξομάλυνσης W .

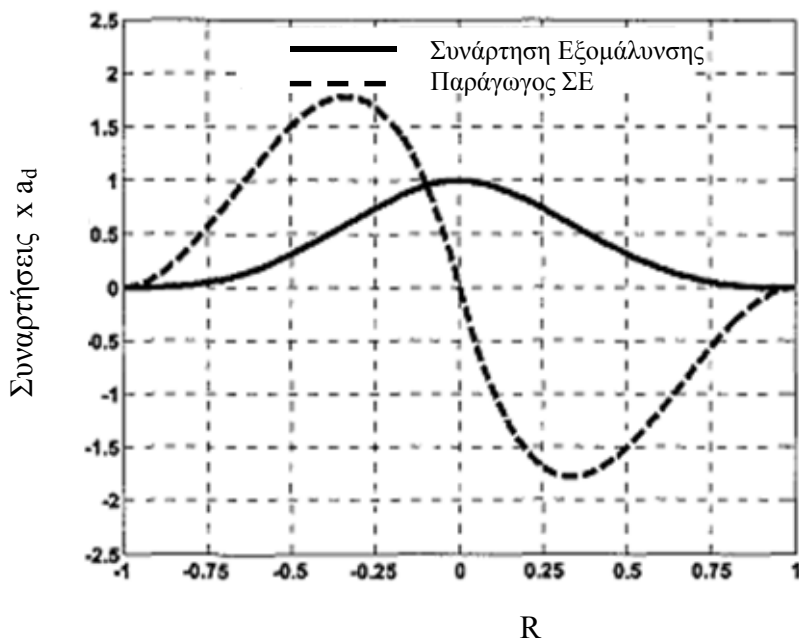
2.4 Εκφράσεις της συνάρτησης εξομάλυνσης W

Οποιαδήποτε συνάρτηση χαρακτηρίζεται από τις παραπάνω ιδιότητες μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τη μέθοδο SPH σαν συνάρτηση εξομάλυνσης. Διάφοροι ερευνητές έχουν δοκιμάσει διάφορους τύπους τέτοιων συναρτήσεων και οι βασικότερες καταγράφονται παρακάτω χωρίς βέβαια να εξαντλούνται (εξάλλου στο βιβλίο τους οι Liu [Liu G.R.& Liu M.B.,2003] δείχνουν πως μπορεί να παραχθεί μια τέτοια συνάρτηση) :

Σε δημοσίευσή του ο Lucy (1977) χρησιμοποιεί μια κωδωνοειδή συνάρτηση:

$$W(\vec{r} - \vec{r}', h) = W(R, h) = a_d \begin{cases} (1+3R)(1-R)^3 & R \leq 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases}$$

όπου a_d ισούται με $\frac{5}{4h}$, $\frac{5}{\pi h^2}$, $\frac{105}{16\pi h^3}$ για χώρο διαστάσεων 1,2 και 3 αντίστοιχα . R είναι η σχετική απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων στις θέσεις \vec{r} και \vec{r}' δηλαδή $R = \frac{r}{h} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{h}$ όπου r είναι η απόσταση των δύο σωματιδίων.



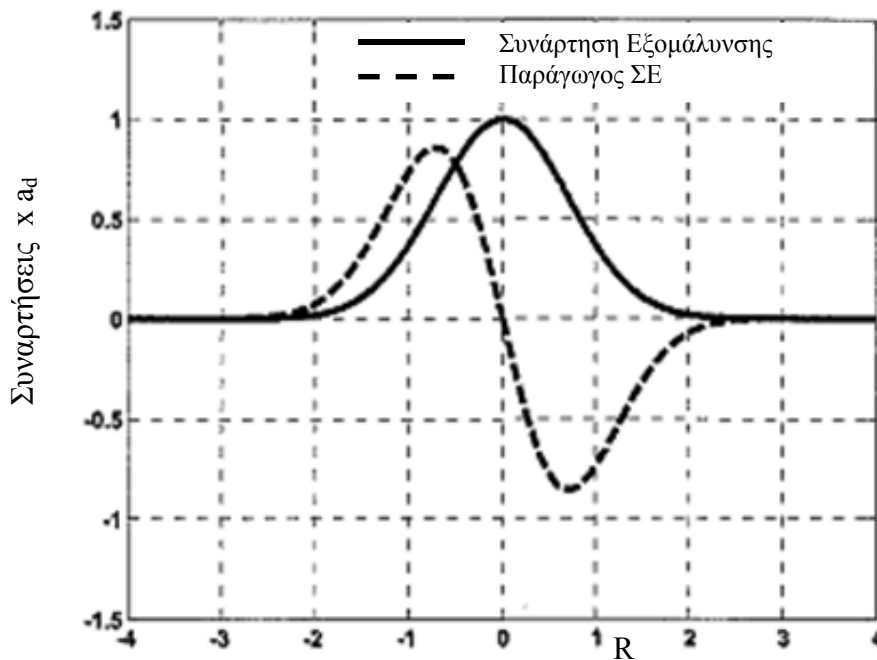
Σχ. 2.3 : Η συνάρτηση του Lucy και η πρώτη παράγωγος.

Οι Gingold και Monaghan (1977) προτείνουν την ακόλουθη συνάρτηση Gauss :

$$W(R, h) = a_d e^{-R^2}$$

όπου a_d ισούται με $\frac{1}{\pi^{1/2}h}$, $\frac{1}{\pi h^2}$, $\frac{1}{\pi^{3/2}h^3}$ για χώρο διαστάσεων 1,2 και 3 αντίστοιχα.

Η συνάρτηση Gauss είναι επαρκώς λεία ακόμα και για παραγώγους υψηλότερων τάξεων και αποτελεί καλή επιλογή καθώς είναι πολύ σταθερή και ακριβής ειδικά για σωματίδια με πολύ ανομοιογενή διασπορά. Ωστόσο δεν είναι τελείως συμπαγής παρά μόνο αν το R τείνει στο άπειρο αλλά πρακτικά θεωρούμε ότι είναι. Αυτό αποτελεί ένα μειονέκτημα αφού οδηγεί μερικές φορές σε μεγαλύτερη περιοχή αλληλεπίδρασης με την εισαγωγή αρκετών σωματιδίων κάτι που μεταφράζεται σε υπολογιστικό κόστος.



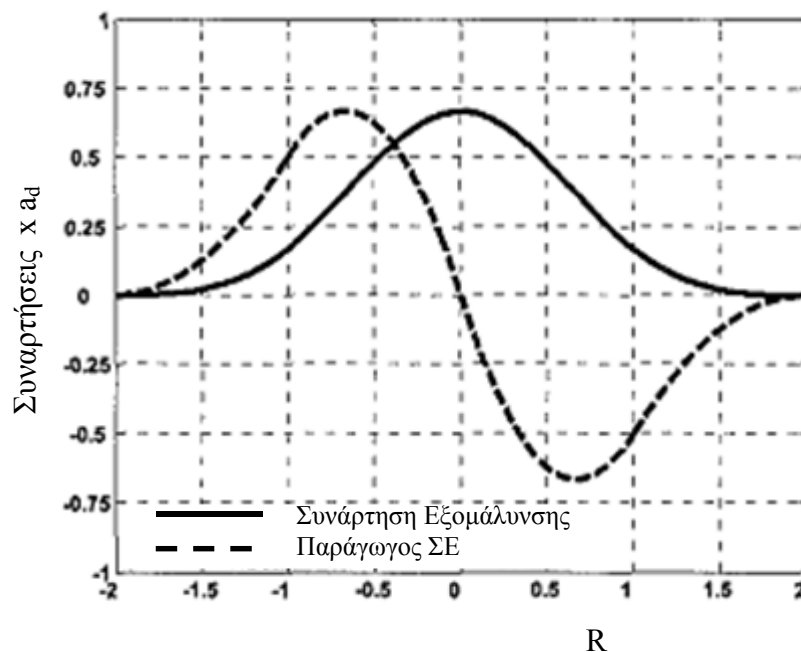
Σχ.2.4 : Η συνάρτηση Gauss και η πρώτη παράγωγος

Οι Monaghan και Lattanzio (1985) κατασκεύασαν την ακόλουθη συνάρτηση που βασίζεται στις συναρτήσεις κυβικών splines :

$$W(R,h) = a_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 & 0 \leq R \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2-R)^3 & 1 \leq R \leq 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases}$$

Το a_d είναι για μια , δύο και τρεις διαστάσεις αντίστοιχα : $\frac{1}{h}$, $\frac{15}{7\pi h^2}$ και $\frac{3}{2\pi h^3}$

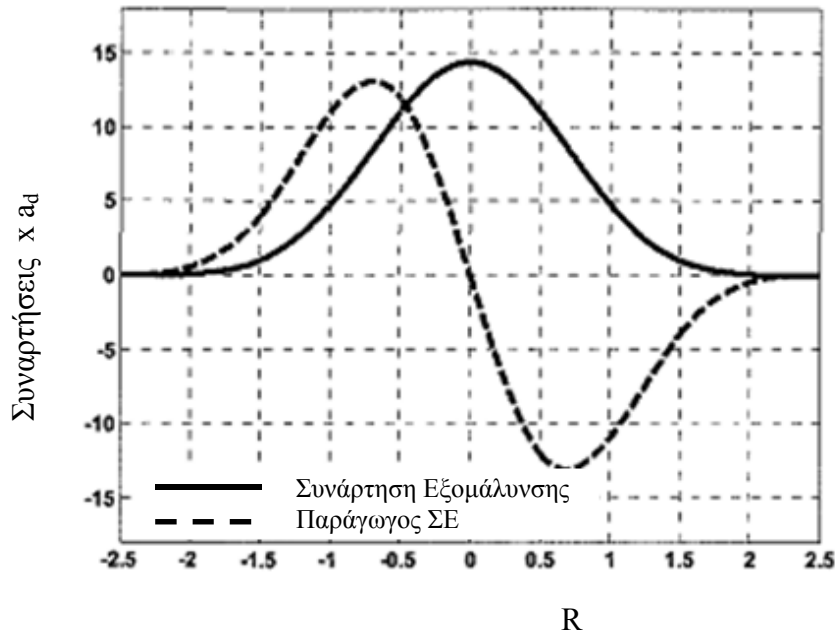
. Η συνάρτηση κυβικών spline έχει χρησιμοποιηθεί περισσότερο στη βιβλιογραφία αφού προσομοιάζει την Gauss και ταυτόχρονα έχει μικρότερη περιοχή αλληλεπίδρασης . Ωστόσο επειδή η συνάρτηση ορίζεται κατά τμήματα είναι δυσκολότερο να χρησιμοποιηθεί και η δεύτερη παράγωγός της που είναι πρώτης τάξης πολυώνυμο και κατά τμήματα εμφανίζει ασυνέχειες.



Σχ.2.5: Η συνάρτηση κυβικών spline και η πρώτη παράγωγος

Ο Morris (1994,1996) εισήγαγε υψηλότερης τάξης (4^{ns} και 5^{ns}) splines που προσεγγίζουν καλύτερα την Gauss και είναι σταθερότερες.

Η τέταρτης τάξης spline είναι :



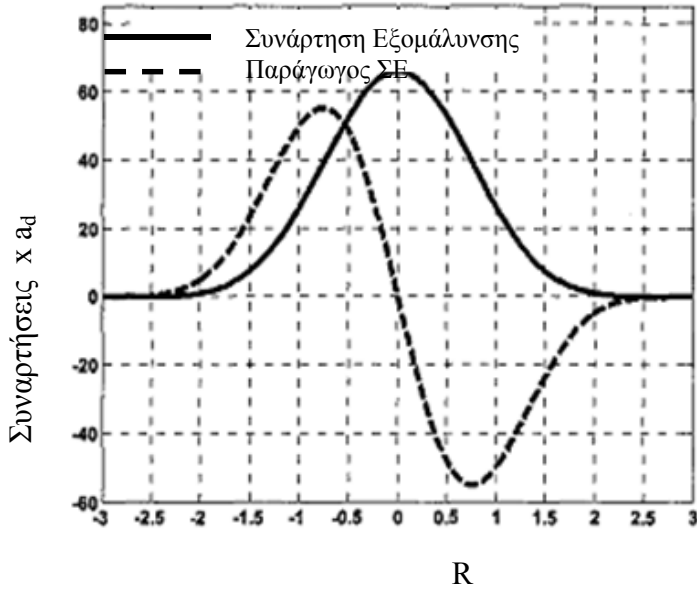
Σχ.2.6 : Η τέταρτης τάξης spline και η πρώτη παράγωγος .

$$W(R, h) = a_d \begin{cases} (R + 2.5)^4 - 5(R + 1.5)^4 + 10(R + 0.5)^4 & 0 \leq R \leq 0.5 \\ (2.5 - R)^4 - 5(1.5 - R)^4 & 0.5 \leq R \leq 1.5 \\ (2.5 - R)^4 & 1.5 \leq R \leq 2.5 \\ 0 & R > 2.5 \end{cases}$$

Η πέμπτης τάξης spline είναι :

$$W(R, h) = a_d \begin{cases} (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 + 15(1 - R)^5 & 0 \leq R \leq 1 \\ (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 & 1 \leq R \leq 2 \\ (3 - R)^5 & 2 \leq R \leq 3 \\ 0 & R > 3 \end{cases}$$

Όπου a_d είναι $\frac{120}{h}$, $\frac{7}{478\pi h^2}$ και $\frac{3}{359\pi h^3}$ για τις 1, 2 και 3 διαστάσεις.

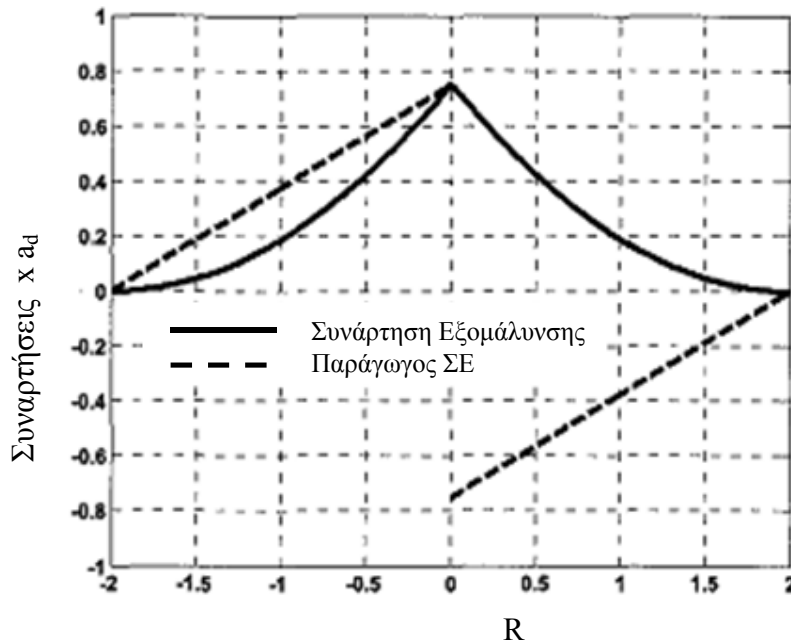


Σχ.2.7 : Η πέμπτης τάξης spline και η πρώτη παράγωγος .

Τέλος, ο Johnson et.al. (1966b) χρησιμοποίησε μια δεύτερης τάξης συνάρτηση:

$$W(R, h) = a_d \left(\frac{3}{16} R^2 - \frac{3}{4} R + \frac{3}{4} \right) \quad 0 \leq R \leq 2$$

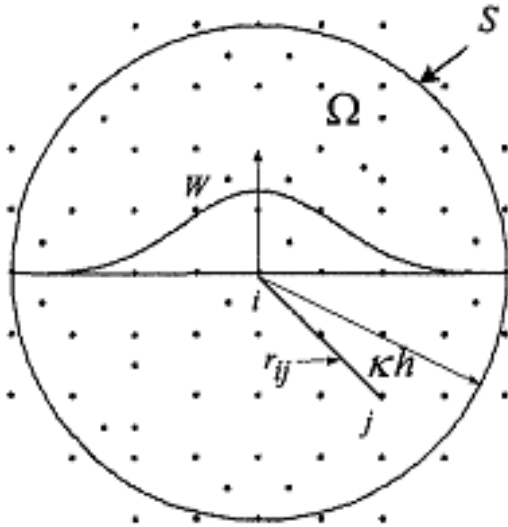
Όπου στις μία, δύο και τρεις διαστάσεις το a_d είναι $\frac{1}{h}$, $\frac{2}{\pi h^2}$, $\frac{5}{4\pi h^3}$ αντίστοιχα.



Σχ.2.8 : Η β' βαθμού συνάρτηση του Johnson και η πρώτη παράγωγος.

2.5 Προσέγγιση Σωματιδίων

Μια άλλη προσέγγιση αντί των παραπάνω προσεγγιστικών εκφράσεων με μορφή ολοκληρώματος για τις τιμές μιας συνάρτησης και των παραγώγων της, μπορεί να γίνει αναπαριστώντας το χώρο του προβλήματος με ένα αριθμό σωματιδίων που διαθέτουν ορισμένη μάζα και καταλαμβάνουν ορισμένο χώρο.



Σχ.2.9: Χώρος ολοκλήρωσης Ω , επιφάνεια ολοκλήρωσης S , συνάρτηση εξομάλυνσης W , απόσταση σωματιδίου-πυρήνα και γειτονικού σωματιδίου r_{ij} , ακτίνα αλληλεπίδρασης κh .

Τα ολοκληρώματα των σχέσεων (2.2) και (2.4) μπορούν να μετατραπούν σε αθροίσματα για κάθε σωματιδίο i μέσα στην περιοχή αλληλεπίδρασής του που ορίζεται από το κh , όπου κ ένας παράγοντας, με συνάρτηση εξομάλυνσης W και περιλαμβάνει κάποια σωματίδια j .

Αν ο απειροστός όγκος $d\vec{r}'$ στη σχέση (2.2) αντικατασταθεί από τον πεπερασμένο όγκο ΔV_j του σωματιδίου j και επιπλέον χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$m_j = \Delta V_j \rho_j$$

όπου m_j η μάζα και ρ_j η πυκνότητα των $j = 1, 2, \dots, N$ σωματιδίων που βρίσκονται εντός της περιοχής αλληλεπίδρασης, τότε η σχέση (2.2) μπορεί να ξαναγραφεί:

$$f(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N f(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \Delta V_j$$

ή με απλές πράξεις

$$f(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h)$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$f(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) W_{ij} \quad (2.5)$$

όπου

$$W_{ij} = W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) = W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h)$$

Η σχέση (2.5) υποδηλώνει ότι η τιμή μιας συνάρτησης σε ένα σωματίδιο i προσεγγίζεται από το σταθμισμένο όρο των τιμών των συναρτήσεων των σωματιδίων j που βρίσκονται μέσα στην περιοχή αλληλεπίδρασης με βάρος που ορίζει η συνάρτηση εξομάλυνσης W .

Με την ίδια τακτική, η προσέγγιση σωματιδίων, από τη σχέση (2.4) δίνει:

$$\nabla f(\vec{r}_i) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \quad (2.6)$$

όπου

$$\nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) = \nabla W_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.7)$$

και r_{ij} είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων.

Η παράγωγος ∇W αναφέρεται στο σωματίδιο i και το αρνητικό πρόσημο μπορεί να αγνοηθεί στην εξίσωση.

Η σχέση (2.6) όμοια όπως παραπάνω υποδηλώνει ότι η τιμή της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σωματίδιο i προσεγγίζεται από το σταθμισμένο όρο

των τιμών των παραγώγων των συναρτήσεων των σωματιδίων j που βρίσκονται μέσα στην περιοχή αλληλεπίδρασης με βάρος που ορίζει η συνάρτηση εξομάλυνσης W .

Η Λαπλασιανή μιας συνάρτησης όμοια μπορεί να εξαχθεί:

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) \nabla^2 W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \quad (2.8)$$

Μπορούμε τώρα να παρατηρήσουμε ότι η προσέγγιση των ολοκληρωμάτων με αθροίσματα βασισμένα σε ένα αυθαίρετα κατανεμημένο σύνολο σωματιδίων δίνει στη μέθοδο τη δυνατότητα να μη χρησιμοποιεί πλέγμα για την αριθμητική ολοκλήρωση.

Επίσης, η εισαγωγή της μάζας και της πυκνότητας στους τύπους των αθροισμάτων διευκολύνει την αντιμετώπιση προβλημάτων Υδροδυναμικής, αφού ειδικά η πυκνότητα αποτελεί σημαντική ρευστομηχανική μεταβλητή.

Αν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε την $f(\vec{r})$ με τη συνάρτηση της πυκνότητας $\rho(\vec{r})$ τότε η σχέση (2.5) μας δίνει:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (2.9)$$

που αποτελεί μια δημοφιλή μορφή υπολογισμού της πυκνότητας στην SPH

ενώ η σχέση (2.6) μας δίνει την παράγωγο :

$$\nabla \rho_i = - \sum_{j=1}^N m_j \nabla W_{ij} \quad (2.10)$$

2.6 Τεχνικές Εξαγωγής Τύπων της SPH

Ο στόχος της έκφρασης ΜΔΕ με τύπους από την SPH είναι πλέον φανερός αλλά απαιτούνται πιο βολικές εκφράσεις από τις σχέσεις (2.5) και (2.6).

Ο Monaghan (1992) χρησιμοποίησε γι αυτό το σκοπό τις ακόλουθες δύο ταυτότητες προκειμένου να εισάγει την πυκνότητα μέσα στον τελεστή της παραγωγίσης:

$$\nabla f(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} [\nabla(\rho f(\vec{r})) - f(\vec{r})\nabla\rho] \quad (2.11)$$

$$\nabla f(\vec{r}) = \rho \left[\nabla\left(\frac{f(\vec{r})}{\rho}\right) + \frac{f(\vec{r})}{\rho^2} \nabla\rho \right] \quad (2.12)$$

Τελικά, και από τις σχέσεις (2.5), (2.6), (2.9) και (2.10) παίρνουμε:

$$\nabla f(\vec{r}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j=1}^N m_j [f(\vec{r}_j) - f(\vec{r}_i)] \nabla W_{ij} \right] \quad (2.13)$$

και

$$\nabla f(\vec{r}_i) = \rho_i \left[\sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{f(\vec{r}_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(\vec{r}_i)}{\rho_i^2} \right] \nabla W_{ij} \right] \quad (2.14)$$

Ένα πλεονέκτημα των παραπάνω εξισώσεων είναι ότι οι συναρτήσεις εμφανίζονται με τη μορφή ζεύγους σωματιδίων.

Εκτός όμως από τις δύο ταυτότητες υπάρχουν και κάποιοι κανόνες που διέπουν τις προσεγγίσεις της SPH και μπορούν να είναι χρήσιμοι στο χειρισμό πολύπλοκων εξισώσεων. Για δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 ισχύουν :

$$\langle f_1 f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle$$

$$\langle f_1 + f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle$$

$$\langle c f_1 \rangle = c \langle f_1 \rangle$$

$$\langle f_1 + f_2 \rangle = \langle f_2 + f_1 \rangle$$

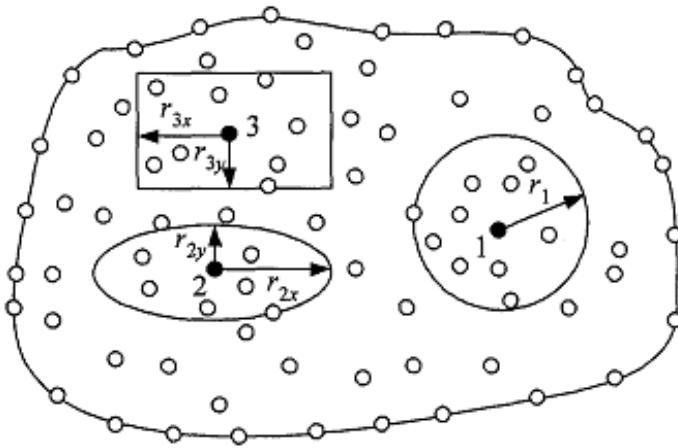
$$\langle f_1 f_2 \rangle = \langle f_2 f_1 \rangle$$

2.7 Περιοχή Αλληλεπίδρασης

Μέχρι εδώ έχει γίνει αναφορά στην έννοια της περιοχής αλληλεπίδρασης που είναι πολύ σημαντική για τη μέθοδο SPH, καθώς με την ολοκλήρωση-άθροιση των τιμών των συναρτήσεων οι οποίες περιορίζονται σε ένα σχετικά μικρό χώρο γύρω από τον πυρήνα εξοικονομείται υπολογιστικός χρόνος.

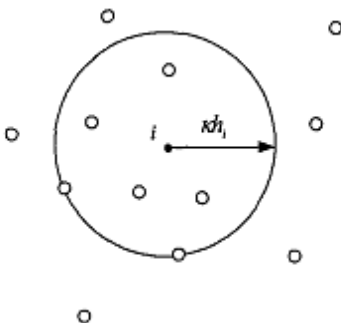
Αλλά και η μορφή και οι διαστάσεις αυτής της περιοχής εξαρτώνται από την γεωμετρία του προβλήματος, τη διασπορά των σωματιδίων, το χειρισμό του ορίου και την αποδοτικότητα του υπολογισμού.

Η μορφή μπορεί να μην είναι μόνο κυκλική, όπως έχει φανεί, αλλά και γενικότερα ελλειπτική ή ακόμα ορθογωνική και πιο ειδικά τετραγωνική, σαν αυτές στο ακόλουθο σχήμα:



Σχ.2.10: Διάφορες μορφές και διαστάσεις περιοχών αλληλεπίδρασης.

Το μέγεθος της περιοχής καθορίζεται από το μήκος αλληλεπίδρασης h πολλαπλασιασμένο με ένα παράγοντα κ . Το h θα δούμε ότι μπορεί να διαφέρει χρονικά και χωρικά ή και ανάλογα με τις διαστάσεις του προβλήματος.



Σχ.2.11: Η ακτίνα αλληλεπίδρασης h σε κυκλική μορφή περιοχής αλληλεπίδρασης.

3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SPH ΓΙΑ ΡΟΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μετά τη θεωρητική θεμελίωση της SPH στα προηγούμενα κεφάλαια μπορούμε πλέον να δούμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος σε ρευστομηχανικές ροές.

Για την προσομοίωση τέτοιων πεδίων ροής είναι γνωστό ότι απαιτούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes οι οποίες με τη βοήθεια της SPH διακριτοποιούνται χωρικά και προκύπτει ένα σύστημα ΣΔΕ ως προς το χρόνο που επιλύεται με διάφορες μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης.

3.1 Διατυπώσεις της μεθόδου SPH για τις εξισώσεις Navier-Stokes

3.1.1 Προσεγγίσεις Σωματιδίων για την Πυκνότητα

Η πυκνότητα μπορεί να δοθεί με δύο τρόπους στη μέθοδο SPH.

Ο πρώτος τρόπος που είδαμε παραπάνω στη σχέση (2.9) είναι η εφαρμογή της προσέγγισης μιας συνάρτησης στην SPH με αθροίσματα, όταν αυτή η συνάρτηση είναι η πυκνότητα, και επαναλαμβάνεται εδώ:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}$$

Ο τύπος αυτός, παρατηρώντας ότι η W_{ij} έχει μονάδες αντίστροφου όγκου, δηλώνει ότι η πυκνότητα ενός σωματιδίου προσεγγίζεται από το σταθμισμένο μέσο όρο των πυκνοτήτων των άλλων σωματιδίων.

Ένας δεύτερος τύπος για την πυκνότητα προκύπτει από την εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Χρησιμοποιώντας από την παράγραφο 2.6 την αντίστοιχη ταυτότητα της (2.11) για την απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης (όπως η ταχύτητα \vec{v}), δηλαδή :

$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \left[\nabla \cdot (\rho \vec{f}(\vec{r})) - \vec{f}(\vec{r}) \cdot \nabla \rho \right]$, προκύπτει η αντίστοιχη σχέση της (2.13)

$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j=1}^N m_j \left[\vec{f}(\vec{r}_j) - \vec{f}(\vec{r}_i) \right] \cdot \nabla W_{ij} \right]$ και αν αυτή εφαρμοστεί στην εξίσωση

της συνέχειας, παίρνουμε:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}$$

όπου

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

δηλαδή εισάγεται η διαφορά ταχυτήτων στον τύπο κάτι που είναι επιθυμητό στην SPH και η παράγωγος της πυκνότητας καθορίζεται από τις σχετικές αυτές ταχύτητες ανάμεσα στα σωματίδια με συμμετοχή που καθορίζει η κλίση της W .

Ένα πλεονέκτημα της πυκνότητας άθροισης είναι ότι διατηρεί ακριβώς τη μάζα ενώ η πυκνότητα συνέχειας όχι, και αποτελεί πιο ρεαλιστική επιλογή αλλά έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος, όπως μπορεί να δειχθεί. Επιπλέον ο τύπος αυτός δείχνει να έχει προβληματική συμπεριφορά κοντά στο στερεό όριο και παράγει ανώμαλα αποτελέσματα, όμως αυτό αντιμετωπίζεται με χρήση φανταστικών σωματιδίων ή άλλων τεχνικών που θα συζητηθούν σε επόμενη παράγραφο.

3.1.2 Προσεγγίσεις Σωματιδίων για την Ορμή

Ο παρακάτω τύπος μας δίνει την εξίσωση της ορμής:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

όπου

$$\vec{\sigma} = -p\vec{I} + \vec{\tau}$$

και

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{D} + \mu' \text{tr}\vec{D}\vec{I} \quad , \quad \text{tr}\vec{D} = \nabla \cdot \vec{v}$$

όπου

\vec{g} είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\vec{\sigma}$ είναι ο τανυστής των τάσεων, p είναι η πίεση, \vec{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας, $\vec{\tau}$ είναι ο τανυστής των διατμητικών τάσεων, μ είναι ο δυναμικός συντελεστής συνεπικότητας ή δυναμικό ιξώδες, μ' είναι το ιξώδες όγκου και $\text{tr}\vec{D}$ είναι το ίχνος του τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης.

Χρησιμοποιώντας από την παράγραφο (2.6) την αντίστοιχη ταυτότητα της (2.12) για την απόκλιση τανυστικού μεγέθους (όπως ο τανυστής των τάσεων $\vec{\sigma}$) προκύπτει η αντίστοιχη σχέση της (2.14) και αν αυτή εφαρμοστεί στην εξίσωση της ορμής, παίρνουμε:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\vec{\sigma}_i}{\rho_i^2} + \frac{\vec{\sigma}_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}$$

Αν θεωρήσουμε το ρευστό μη συνεκτικό προκύπτει η εξίσωση Euler για την ορμή:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$$

Χρησιμοποιώντας από την παράγραφο (2.6) την ταυτότητα (2.12) (όπως για το βαθμωτό μέγεθος p), προκύπτει η σχέση (2.14) και αν αυτή εφαρμοστεί στην εξίσωση Euler, παίρνουμε:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}$$

που είναι και η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη έκφραση για την ορμή.

Ο τελεστής $\frac{D}{Dt}$ που ως γνωστό ονομάζεται τελεστής Euler είναι:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

όπου $\frac{\partial}{\partial t}$ είναι η τοπική παράγωγος και οι υπόλοιποι είναι οι συναγωγικοί ή μεταφορικοί όροι. Ο τελεστής αυτός δείχνει τη Lagrange διατύπωση των εξισώσεων.

Ωστόσο, επειδή τα σωματίδια που χρησιμοποιούμε στη μέθοδο SPH αποτελούν το ίδιο το ρευστό και έχουν μάζα, θέση και ταχύτητα - άρα μπορούν να θεωρηθούν υλικά σωματίδια - πλέον, κάθε μεταβλητή του πεδίου εξαρτάται μόνο από το χρόνο t και οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε μπορούν να διαμορφωθούν ως εξής:

$$\text{Εξ. Συνέχειας : } \frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (3.1)$$

$$\text{Εξ. Ορμής : } \frac{d\vec{v}}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\rho_i}{\rho_i^2} + \frac{\rho_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} \quad (3.2)$$

3.2 Θέματα εφαρμογής της μεθόδου SPH για ρευστομηχανικές ροές

3.2.1 Τεχνητή Συνεκτικότητα (ή Τεχνητό Ιξώδες)

Για την προσομοίωση του ιξώδους στις εξισώσεις Navier-Stokes αλλά και για την αποφυγή αφύσικης προσέγγισης-διείσδυσης των σωματιδίων όταν αυτά πλησιάζουν μεταξύ τους, επινοήθηκε από τους Monaghan και Gingold (1983) ένας όρος τεχνητής συνεκτικότητας, ο οποίος προστίθεται στους όρους πίεσης, στις εξισώσεις SPH για την ορμή.

Ο όρος αυτός είναι:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\Pi} \bar{c}_{ij} \phi_{ij} + \beta_{\Pi} \phi_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

όπου

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij} \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2 + \varphi^2}$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j)$$

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

Στις παραπάνω εξισώσεις α_{Π} και β_{Π} είναι σταθερές που ισούνται περίπου με μονάδα. Ο όρος που σχετίζεται με το α_{Π} παράγει το τυπικό ιξώδες ενώ ο όρος που σχετίζεται με το β_{Π} εμποδίζει την αλληλοδιείσδυση των σωματιδίων σε υψηλούς αριθμούς Mach. Ο παράγοντας $\varphi = 0.01h_{ij}$ εισάγεται για την αποφυγή αριθμητικών αποκλίσεων όταν δύο σωματίδια πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους. \vec{v} και c είναι το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου και η ταχύτητα του ήχου αντίστοιχα. h_i και h_j είναι το μήκος αλληλεπίδρασης όταν αυτό μεταβάλλεται, όπως για παράδειγμα στην επόμενη παράγραφο (3.2.2).

Εναλλακτική πρόταση πρόταση δίνει ο Monaghan (2005):

$$\Pi_{ij} = 8 \frac{v_i + v_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{\vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2}$$

όπου $v = \frac{\mu}{\rho}$ το κινηματικό ιξώδες

και ο Morris et.al. (1997):

$$\Pi_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\vec{v}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2} \vec{r}_{ij}$$

Με την προσθήκη της τεχνητής συνεκτικότητας οι εξισώσεις Navier-Stokes διαμορφώνονται ως εξής (μόνο οι εξισώσεις της ορμής):

$$\frac{D\vec{v}_i}{Dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\rho_i}{\rho_i^2} + \frac{\rho_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij}$$

3.2.2 Το μήκος αλληλεπίδρασης h

Το μήκος αλληλεπίδρασης h παίζει σημαντικό ρόλο στη μέθοδο SPH αφού επηρεάζει την αποδοτικότητα των υπολογισμών και την ακρίβεια της λύσης. Αν είναι πολύ μικρό δε θα υπάρχουν πολλά σωματίδια στην περιοχή αλληλεπίδρασης που ορίζεται από την ακτίνα kh και ως συνέπεια θα έχουμε χαμηλή ακρίβεια. Αν είναι πολύ μεγάλο, από τις επιδράσεις των πολύ απομακρυσμένων σωματιδίων, αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος χωρίς να κερδίζουμε σε ακρίβεια.

Ωστόσο υπάρχει τρόπος να αλλάζει δυναμικά το h ώστε ο αριθμός των γειτονικών σωματιδίων να μένει σχετικά σταθερός. Η απλούστερη προσέγγιση είναι να μεταβάλλεται το μήκος αλληλεπίδρασης σύμφωνα με τη μέση πυκνότητα:

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{d}}$$

όπου h_0 είναι το αρχικό μήκος αλληλεπίδρασης ρ_0 είναι η αρχική πυκνότητα και d είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος.

Ο Benz (1989) πρότεινε άλλη μέθοδο εξαγωγής του h όταν αλλάζει η πυκνότητα (π.χ. συμπιεστές ροές) που βασίζεται στην χρονική παράγωγο

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{d} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

και είναι μια σχέση που μπορεί να διακριτοποιηθεί σύμφωνα με τις σχέσεις SPH και να λυθεί ακόλουθα.

3.2.3 Τεχνητή Συμπιεστότητα

Στη μέθοδο SPH για επίλυση συμπιεστών ροών, η κίνηση του σωματιδίου προκαλείται από την κλίση της πίεσης και η πίεση του σωματιδίου υπολογίζεται από την πυκνότητα και την εσωτερική ενέργεια μέσω της καταστατικής εξίσωσης.

Ωστόσο, για ασυμπίεστες ροές, η καταστατική εξίσωση οδηγεί σε απαράδεκτα μικρά χρονικά βήματα.

Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του όρου της πίεσης στις εξισώσεις της ορμής.

Το γεγονός ότι το πρακτικά ασυμπίεστο ρευστό είναι θεωρητικά συμπιεστό οδηγεί στην έννοια της τεχνητής συμπιεστότητας. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια καταστατική εξίσωση για να μοντελοποιήσουμε το ασυμπίεστο ρευστό.

Ο Monaghan (1994) εισήγαγε την ακόλουθη εξίσωση για το νερό για ροές με ελεύθερη επιφάνεια:

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (3.3)$$

όπου γ είναι μια σταθερά και παίρνει την τιμή 7 στις περισσότερες περιπτώσεις. ρ_0 είναι πυκνότητα αναφοράς και B ένας παράγοντας.

Οι Jiang, Oliviera, Sousa (2005) δίνουν τον παράγοντα B ως :

$$B = \frac{\gamma \rho_0}{\rho_0} = 100V^2 = c^2$$

όπου ρ_0 είναι πίεση αναφοράς, V είναι η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού και c η ταχύτητα του ήχου.

Η σχέση εξασφαλίζει ότι η διακύμανση της πυκνότητας είναι λιγότερο από 1% και η ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη. Στην πράξη, επιλέγεται η ταχύτητα του ήχου $c = \frac{dp}{d\rho}$ 10 φορές ή περισσότερο μεγαλύτερη από τη μέγιστη αναμενόμενη ταχύτητα του ρευστού.

Μια άλλη επιλογή για την τεχνητή συμπίεστικότητα είναι:

$$\rho = c^2 \rho$$

όπου c είναι η ταχύτητα του ήχου και τη χρησιμοποίησε ο Morris et. al.(1997) για ασυμπίεστες ροές μικρών αριθμών Re .

3.2.4 Η Τεχνική XSPH για την κίνηση των σωματιδίων

Η τεχνική XSPH προτάθηκε από τον Monaghan (1989,1992) για τις εφαρμογές της τεχνητής συμπίεστικότητας, όπως είδαμε παραπάνω, σε ασυμπίεστες ροές με στόχο την ομαλότερη κίνηση των σωματιδίων.

Ο τρόπος κίνησης των σωματιδίων, σύμφωνα με την XSPH δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (Colagrossi&Landrini, 2003):

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{v}_i + \varepsilon \sum_j \frac{m_j}{\rho_{ij}} \vec{v}_{ij} W_{ij}$$

$$\text{όπου } \overline{\rho_{ij}} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$$

και ε είναι μια σταθερά που παίρνει τιμές στο $[0,1]$ και προτείνεται η τιμή $\varepsilon=0.3$ για ασυμπίεστες ροές ενώ για συμπιεστές η τιμή $\varepsilon \geq 0.5$.

Η διορθωμένη ταχύτητα χρησιμοποιείται στις εξισώσεις θέσης και πυκνότητας των σωματιδίων αλλά όχι στην εξίσωση της ορμής.

Για διφασικές ροές η μέση πυκνότητα όπως φαίνεται παραπάνω υπολογίζεται λανθασμένα και δίνει λάθος αποτελέσματα και η XSPH.

Η ΧSPH εξομαλύνει την κίνηση του σωματίδιου με βάση τη μέση ταχύτητα των γειτονικών σωματιδίων και αυτό στις ασυμπίεστες ροές βοηθάει τα σωματίδια να κινούνται με περισσότερη τάξη ενώ στις συμπιεστές αποτρέπει τη διεξόδουση μεταξύ τους.

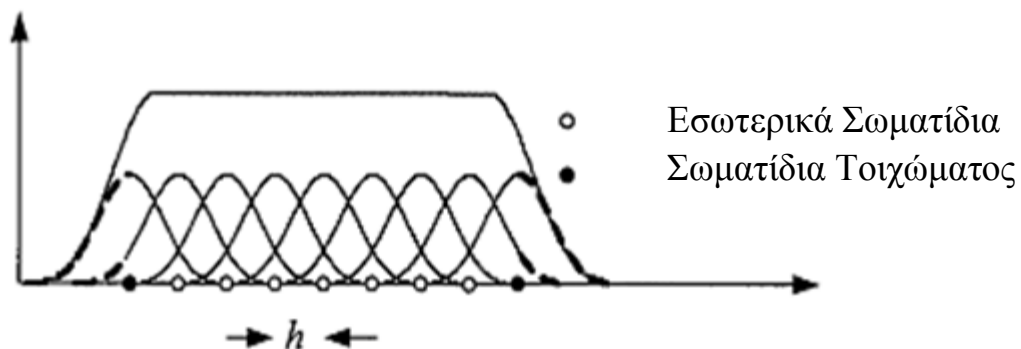
3.2.5 Χειρισμός του Ορίου και Οριακές Συνθήκες

Η αναπαράσταση του στερεού ορίου στο χώρο του προβλήματος όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο SPH είναι από τα σημεία που χρειάζονται προσοχή, αφού όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο η ολοκλήρωση διακόπτεται από το όριο και αυτό δημιουργεί προβλήματα.

Πιο συγκεκριμένα, για τα σωματίδια που βρίσκονται κοντά ή πάνω στο τοίχωμα, συνεισφέρουν μόνο τα σωματίδια που βρίσκονται εντός του τοιχώματος αφού εκτός αυτού δεν υπάρχουν, δηλαδή η περιοχή αλληλεπίδρασης είναι ελλειπής.

Έτσι εισάγονται λάθη στους υπολογισμούς αφού, παρόλο που οι θέσεις είναι σταθερές και οι ταχύτητες είναι μηδενικές για τα σωματίδια του τοιχώματος, οι πυκνότητες και οι πιέσεις τους αλλάζουν.

Επιπλέον, στις εφαρμογές εμφανίζεται το πρόβλημα της εισχώρησης σωματιδίων στο στερεό τοίχωμα, που δεν έχει φυσικό νόημα και πρέπει να αποτρέπεται.

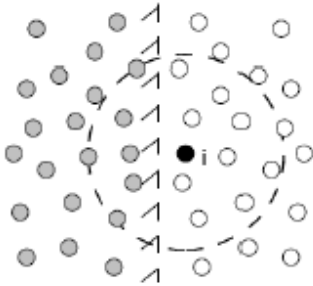


Σχ.3.1: Σωματίδια ρευστού και τοιχώματος με εμφανές το πρόβλημα της ελλειπούς αλληλεπίδρασης των ακραίων σωματιδίων.

Διάφορες λύσεις έχουν προταθεί, όπως η επέκταση του χώρου πέρα από το όριο με μη φυσικά σωματίδια.

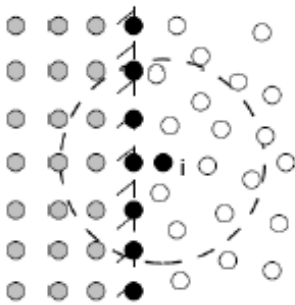
Μια πρόταση (Libersky&Pertschek, 1993) είναι να παραχθούν συμμετρικά σε σχέση με τα πραγματικά σωματίδια, δηλαδή κατοπτρικά σωματίδια με

γραμμή συμμετρίας το στερεό όριο, και ονομάζονται φανταστικά σωματίδια (ghost particles).



Σχ.3.2: Φανταστικά σωματίδια τοιχώματος (ghost particles).

Μια άλλη πρόταση είναι τα φανταστικά σωματίδια να τοποθετηθούν εξαρχής εντός του στερεού ορίου (Issa,2007) οπότε ονομάζονται εικονικά σωματίδια (fictitious particles).

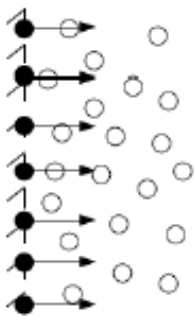


Σχ.3.3: Εικονικά σωματίδια τοιχώματος (fictitious particles).

Οι τιμές των μεταβλητών γι αυτά τα σωματίδια καθορίζονται έτσι ώστε να επιβάλλονται οι επιθυμητές οριακές συνθήκες.

Παρά τα καλά αποτελέσματα που δίνουν οι μέθοδοι αυτές, αντιμετωπίζουν προβλήματα στο χειρισμό σύνθετων γεωμετριών όπως κυρτές επιφάνειες ή απότομες ακμές.

Τέλος, προτείνεται από τον Monaghan (1994) μια απλούστερη αλλά λιγότερο ακριβής μέθοδος των σταθερών σωματιδίων τοίχου. Τα σωματίδια αυτά τοποθετούνται κατα μήκος του ορίου και ασκούν απωθητικές δυνάμεις στα σωματίδια του ρευστού, ώστε να μη διεισδύσουν στο τοίχωμα. Η τεχνική αυτή όμως δε δίνει καλά αποτελέσματα όταν τα σωματίδια ρευστού βρίσκονται κοντά στο τοίχωμα οπότε ο χώρος αλληλεπίδρασης είναι ελλειπής.



Σχ.3.4: Σωματίδια τοιχώματος που ασκούν απωθητικές δυνάμεις (wall particles).

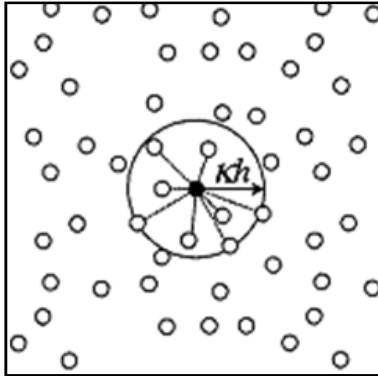
3.2.6 Αλληλεπιδράσεις των Σωματιδίων - Αναζήτηση Γειτονικών Σωματιδίων

Στη μέθοδο SPH, η συνάρτηση εξομάλυνσης έχει μια περιοχή που ορίζεται, και είναι η περιοχή μέσα στην οποία ένας αριθμός σωματιδίων αλληλεπιδρούν ώστε να εξαχθούν οι διάφορες προσεγγίσεις. Αντίθετα με μια πλεγματική αριθμητική μέθοδο, όπου τα γειτονικά κελιά είναι δεδομένα αφού το πλέγμα είναι από πριν καθορισμένο, η θέση των γειτονικών σωματιδίων αλλάζει με το χρόνο. Υπάρχουν τρόποι να βρεθούν τα γειτονικά σωματίδια ώστε σε κάθε χρονικό βήμα να γίνουν οι απαραίτητες πράξεις:

α) Ο Αλγόριθμος Αναζήτησης όλων των ζευγών σωματιδίων

Είναι ο αυτονόητος και πιο απλός αλγόριθμος αφού για κάθε σωματίδιο i ($1, 2, \dots, N$) υπολογίζεται η απόσταση r_{ij} του i από κάθε άλλο σωματίδιο j ($1, 2, \dots, N$) όπου N ο συνολικός αριθμός σωματιδίων και αν είναι μικρότερη από kh τότε το j θεωρείται γειτονικό του i και λαμβάνεται υπόψη στους υπολογισμούς.

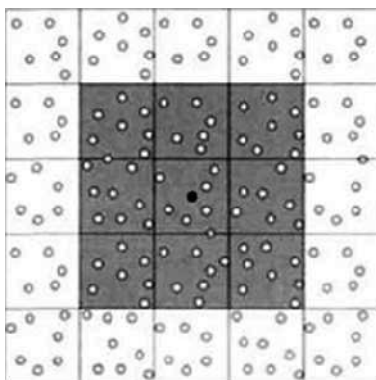
Πρέπει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος αυτός εκτελείται για κάθε χρονικό βήμα και επιπλέον οι υπολογισμοί γίνονται για κάθε σωματίδιο με κάθε σωματίδιο δηλαδή είναι τάξης N^2 , οπότε το υπολογιστικό κόστος είναι απαράδεκτα μεγάλο και χρησιμοποιείται μόνο για προβλήματα μικρής κλίμακας.



Σχ.3.5: Αναζήτηση για αλληλεπίδραση με όλα τα ζεύγη σωματιδίων του υπολογιστικού χώρου.

β) Ο Αλγόριθμος *linked-list*

Ο αλγόριθμος αυτός λειτουργεί καλά για σταθερό μήκος αλληλεπίδρασης. Αν κάθε σωματιδίο αντιστοιχίζεται σε κάποιο κελί και αναγνωρίζεται από το κελί στο οποίο ανήκει τότε εξοικονομείται υπολογιστικός χρόνος αφού η αναζήτηση των γειτονικών σωματιδίων περιορίζεται σε ένα μικρό υποσύνολο. Για την εφαρμογή του αλγορίθμου απαιτείται ένα βοηθητικό πλέγμα που καλύπτει το χώρο του προβλήματος. Το πλάτος του κελιού που σχηματίζει το πλέγμα ορίζεται ίσο με την ακτίνα αλληλεπίδρασης της συνάρτησης εξομάλυνσης δηλαδή k_h . Τότε η αναζήτηση γειτονικών σωματιδίων για ένα σωματίδιο περιορίζεται στα γειτονικά κελιά του κελιού στο οποίο ανήκει (δηλαδή για παράδειγμα στα 8 γειτονικά κελιά αν έχουμε 2D πρόβλημα). Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος έτσι επιταχύνει την διαδικασία αλλά μπαίνει το πρόβλημα του μεγέθους του κελιού και των σωματιδίων που αυτό πρέπει να περιέχει για να είναι αρκετά αποτελεσματικός.



Σχ.3.6: Αναζήτηση για αλληλεπίδραση μόνο με σωματίδια γειτονικών κελιών.

γ) Ο Αλγόριθμος του Δέντρου Αναζήτησης

Ο αλγόριθμος αυτός αντίθετα με τον προηγούμενο λειτουργεί καλά για μεταβλητό μήκος αλληλεπίδρασης, δημιουργώντας "δέντρα" με τις θέσεις των σωματιδίων. Όταν σχηματιστεί η δομή του δέντρου είναι εύκολο να βρεθούν τα γειτονικά σωματίδια.

Ο αλγόριθμος διαιρεί διαδοχικά το χώρο του προβλήματος στα τέσσερα μέχρι κάθε σωματίδιο να περιέχεται σε ένα "φύλλο" του δέντρου.

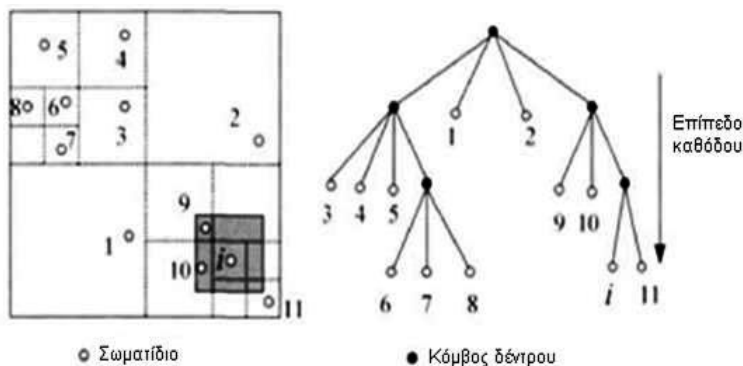
Για ένα σωματίδιο i , ένα τετράγωνο (2Δ πρόβλημα) με πλευρά $2k_i$ χρησιμοποιείται για να περικλείσει το σωματίδιο που βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου.

Σε κάθε επίπεδο γίνεται έλεγχος αν το εμβαδό του τετραγώνου τέμνει το εμβαδό που αντιπροσωπεύει ο τρέχων κόμβος στη δομή του δέντρου.

Αν όχι, τότε τερματίζεται η κάθοδος στο συγκεκριμένο μονοπάτι.

Αν ναι, τότε συνεχίζεται η κάθοδος στο επόμενο επίπεδο και αυτό γίνεται επαναληπτικά μέχρι ο τρέχων κόμβος στο δέντρο να είναι ένα μόνο σωματίδιο.

Τότε ελέγχεται αν το σωματίδιο αυτό ανήκει στην περιοχή αλληλεπίδρασης του αρχικού σωματιδίου και ανάλογα καταγράφεται ως γειτονικό ή μη.



Σχ.3.7: Αναζήτηση για αλληλεπίδραση με γειτονικά σωματίδια με βάση μια δενδροειδή αλγοριθμική μορφή.

3.3 Επιλογή Χρονικού Βήματος και Χρονική Ολοκλήρωση

Για τη χρονική ολοκλήρωση των διακριτών εξισώσεων της SPH χρησιμοποιούνται διαδοσόμενες μέθοδοι, όπως το σχήμα Leap-Frog που έχει χαμηλές απαιτήσεις αποθήκευσης μνήμης κατά τους υπολογισμούς, αλλά

όταν το μήκος αλληλεπίδρασης γίνεται πολύ μικρό το χρονικό βήμα γίνεται απαγορευτικά μικρό. Άλλος τρόπος ολοκλήρωσης είναι η Runge-Kutta που διορθώνει το παραπάνω πρόβλημα με ένα ρυθμιζόμενο χρονικό βήμα, που επιλέγεται έτσι ώστε να περιορίζει μια εκτίμηση του σφάλματος ολοκλήρωσης σε ανεκτά όρια . Άλλα σχήματα ολοκλήρωσης στη βιβλιογραφία είναι το σχήμα Verlet και το Πρόβλεψης-Διόρθωσης.

Για την επιλογή του χρονικού βήματος παρουσιάζεται η πιο δημοφιλής επιλογή που είναι η συνθήκη CFL (Courant-Friedrich-Levy) που ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta t = \min\left(\frac{h_i}{c}\right)$$

Όταν λαμβάνεται υπόψη το ιξώδες και οι εξωτερικές δυνάμεις το χρονικό βήμα δίνεται από τον Monaghan(1989,1992):

$$\Delta t = \min(\lambda_1 \Delta t_{cv} + \lambda_2 \Delta t_f)$$

με προτεινόμενα $\lambda_1=0.4$ και $\lambda_2=0.25$

$$\text{όπου } \Delta t_{cv} = \min\left(\frac{h_i}{c_i + 0.6(\alpha_{\Pi} c_i + \beta_{\Pi} \max(\phi_{ij}))}\right)$$

$$\text{και } \Delta t_f = \Delta t \left(\frac{h_i}{f_i}\right)^{1/2}$$

Τέλος ο Morris et.al (1997) δίνουν άλλη έκφραση όταν θεωρείται και η διάχυση του ιξώδους:

$$\Delta t = 0.125 \frac{h^2}{\nu}$$

όπου $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ το κινηματικό ιξώδες.

Παρακάτω περιγράφονται τα βήματα για την ολοκλήρωση με το σχήμα Πρόβλεψης – Διόρθωσης (Predictor - Corrector) που αναπτύσσεται και στον κώδικα που χρησιμοποιούμε:

- I. Θεωρούμε γνωστές τις ταχύτητες , θέσεις , πυκνότητες και πιέσεις στο αρχικό χρονικό βήμα dt .
- II. Υπολογίζουμε τις μεταβολές $d\vec{v}$ και $d\rho$ από τις σχέσεις (3.1) και (3.2).
- III. Κάνουμε πρόβλεψη για τις νέες ταχύτητες και τη νέα πυκνότητα:

$$\vec{v}_p = \vec{v} + d\vec{v}$$

$$\rho_p = \rho + d\rho$$

- IV. Προκύπτει πρόβλεψη για τις θέσεις και για την πίεση από την καταστατική εξίσωση (3.3) :

$$\vec{r}_p = \vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_p)dt$$

- V. Υπολογίζουμε τις προβλεπόμενες μεταβολές $d\vec{v}_p$ και $d\rho_p$ πάλι από τις σχέσεις (3.1) και (3.2).
- VI. Τέλος διορθώνουμε τις ταχύτητες:

$$\vec{v}_c = \vec{v} + \frac{1}{2}(d\vec{v} + d\vec{v}_p)$$

τις θέσεις:

$$\vec{r}_c = \vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_c)dt$$

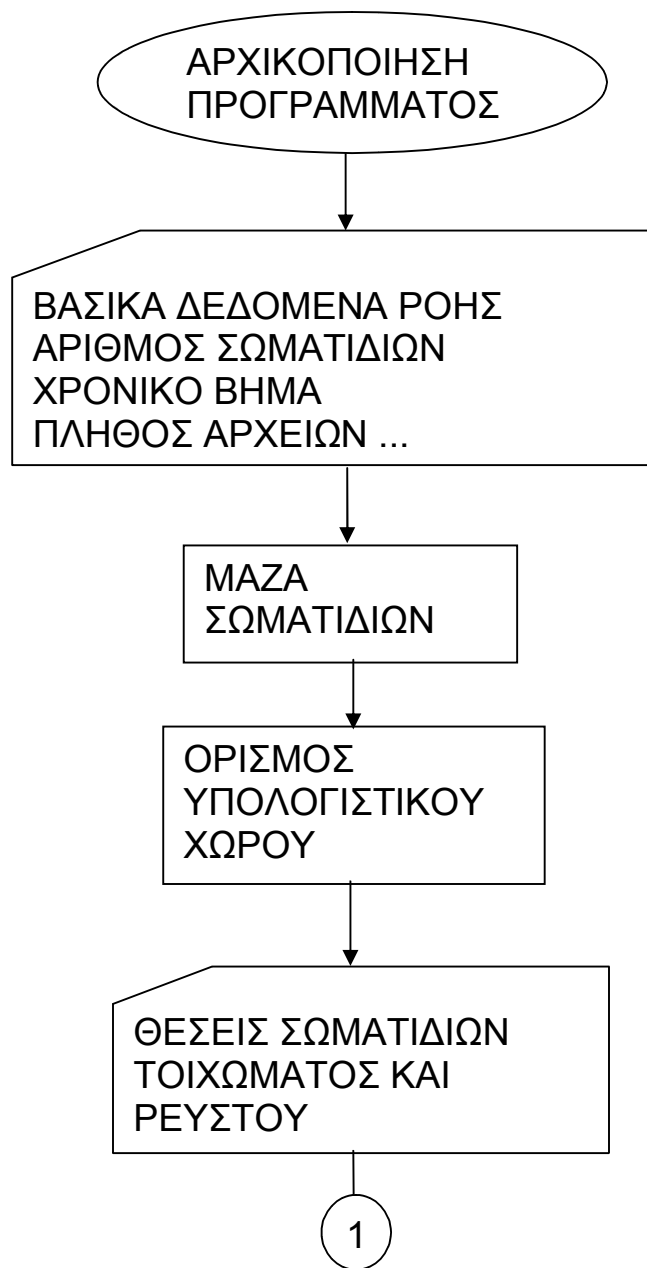
και την πυκνότητα:

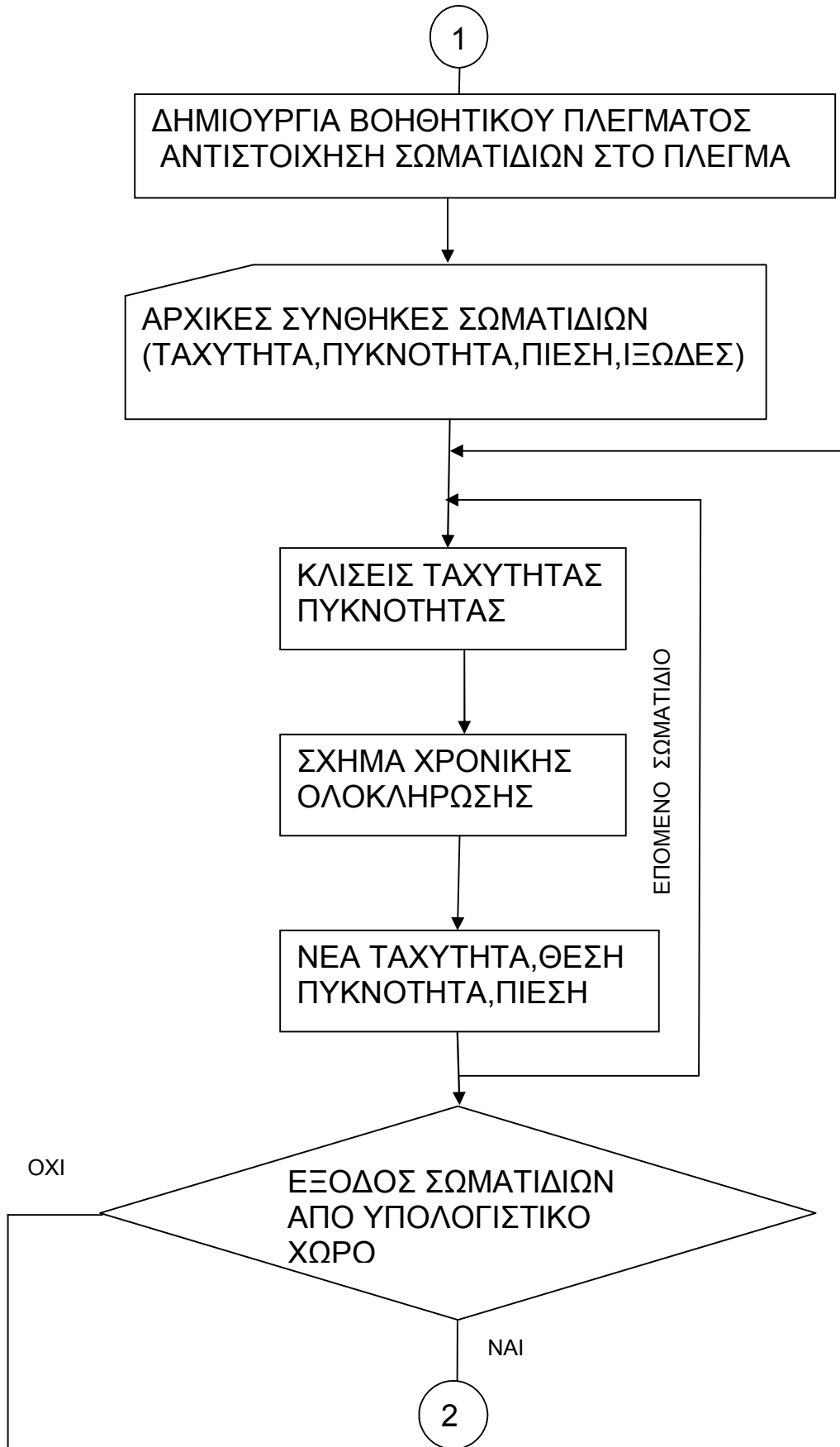
$$\rho_c = \rho + \frac{1}{2}(d\rho + d\rho_p)$$

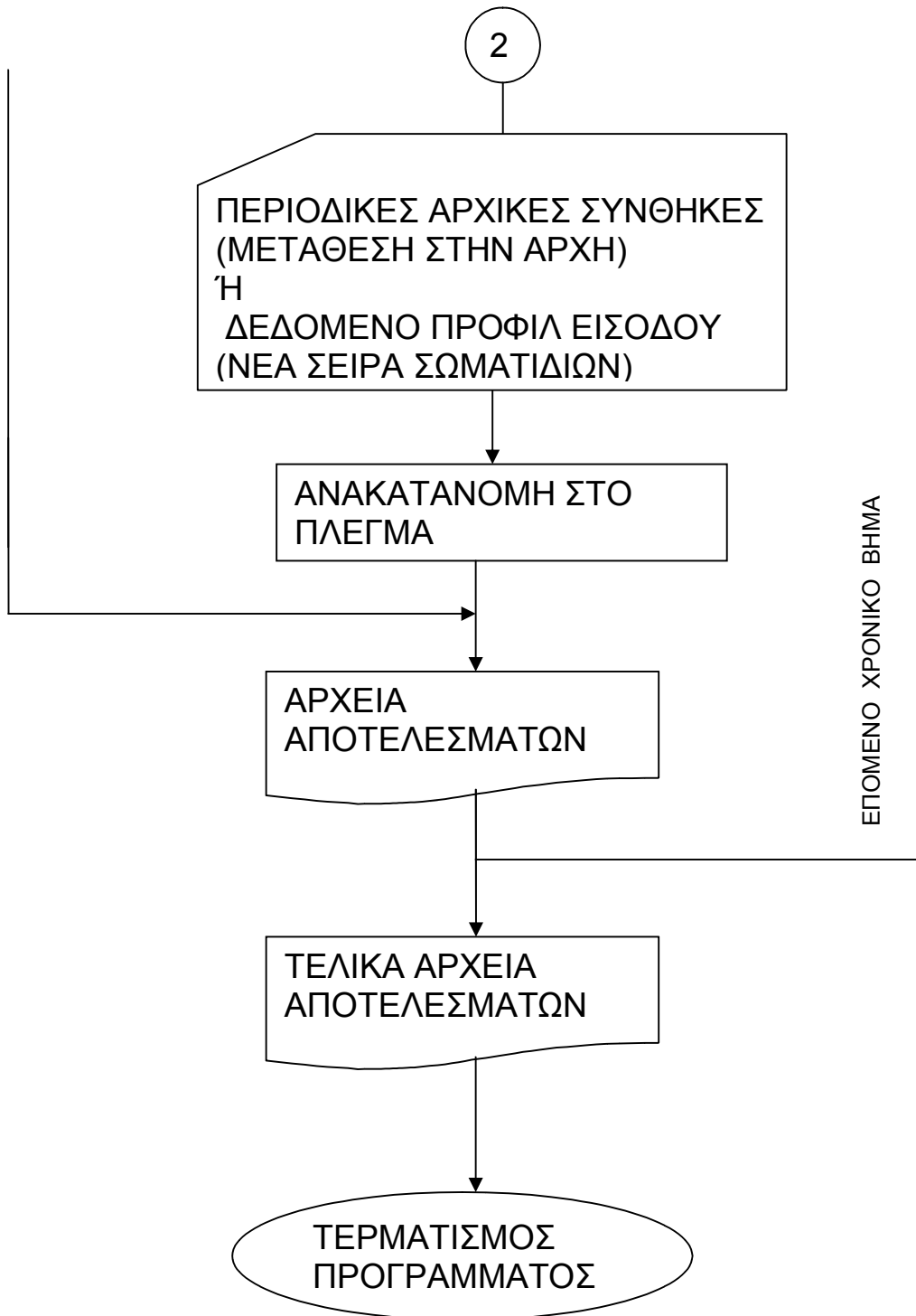
άρα και την πίεση από τον τύπο (3.3).

3.4 Γενικός Αλγόριθμος της μεθόδου SPH

Μετά την ολοκλήρωση της παρουσίασης της μεθόδου SPH για τη ρευστομηχανική θα δοθεί ένας γενικός αλγόριθμός της σε μορφή λογικού διαγράμματος, που συνοψίζει τα παραπάνω και αποτελεί βάση για τον αλγόριθμο εφαρμογής που θα ακολουθήσει και με μικρές αλλαγές του οποίου θα γίνει η σχετική μελέτη στο υπολογιστικό μέρος της εργασίας. Ο αλγόριθμος εφαρμογής, δηλαδή μια υλοποίηση αυτού του λογικού διαγράμματος, θα περιγραφεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.







4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4.1 Περιγραφή του Αλγόριθμου Εφαρμογής

Ο αλγόριθμος εφαρμογής έχει υλοποιηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran και είναι γραμμένος δομημένα .

Μετά από κάποιες παραμέτρους (PARAMETER), μεταβλητές και πίνακες COMMON για την μία υπορουτίνα του προγράμματος και πίνακες (DIMENSION), που συνιστούν την αρχικοποίηση του προγράμματος, δίνονται κάποια αρχικά δεδομένα όπως η πυκνότητα αναφοράς, η ταχύτητα του ρευστού και η διάμετρος της δέσμης.

Έπειτα καλείται ο χρήστης να δώσει τον αριθμό σωματιδίων στο προφίλ της δέσμης και έτσι προκύπτουν οι αποστάσεις ανάμεσα στα σωματίδια DX , DY και το μήκος αλληλεπίδρασης h ενώ ελέγχεται και το δοσμένο χρονικό βήμα DT-το οποίο είναι σταθερό- με ένα μέγιστο και αν το υπερβαίνει υποδιαιρείται. Ο χρήστης δίνει και τον αριθμό των αρχείων που θα τυπωθούν στην έξοδο οπότε προκύπτει το πλήθος επαναλήψεων του προγράμματος.

Ακόλουθα γίνεται υπολογισμός της μάζας των σωματιδίων χρησιμοποιώντας τον τύπο της πυκνότητας άθροισης (2.9) από όπου, με ρ_0 πυκνότητα αναφοράς και m τη ζητούμενη μάζα, προκύπτει :

$$m = \frac{\rho_0}{\sum_j W_{ij}}$$

Για συνάρτηση εξομάλυνσης χρησιμοποιείται η έκφραση που δίνουν στο άρθρο τους οι Violeau και Issa (2007) και θα χρησιμοποιηθεί και στους επόμενους υπολογισμούς :

$$W(R) = \frac{a_d}{h^d} \begin{cases} (2.5 - R)^4 - 5(1.5 - R)^4 + 10(0.5 - R)^4 & 0 \leq R \leq 0.5 \\ (2.5 - R)^4 - 5(1.5 - R)^4 & 0.5 \leq R \leq 1.5 \\ (2.5 - R)^4 & 1.5 \leq R \leq 2.5 \\ 0 & R \geq 2.5 \end{cases}$$

όπου $R = \frac{\vec{r}_{ij}}{h} = \frac{r}{h}$ και d είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος με $a_d = \frac{96\pi}{1199}$ για $d=2$ και $a_d = \frac{\pi}{20}$ για $d=3$.

Στη συνέχεια οριοθετείται ο υπολογιστικός χώρος με τα όρια αρκετά εκτεταμένα για μεγαλύτερη ασφάλεια στους υπολογισμούς (εγκάρσια 2 διάμετροι δέσμης και κατά μήκος 3 διάμετροι). Δίνονται οι αρχικές θέσεις των σωματιδίων, τα οποία χωρίζονται σε σωματίδια τοιχώματος και σωματίδια ρευστού.

Επόμενο βήμα είναι η κατασκευή βοηθητικού πλέγματος με διαστάσεις κελιού όσο η ακτίνα αλληλεπίδρασης kh , όπως έχει περιγραφεί στην παράγραφο 3.2.6, δηλαδή $(2.5h) \times (2.5h)$, με σκοπό τον περιορισμό των αλληλεπιδράσεων μόνο σε γειτονικά κελιά και τη μείωση του υπολογιστικού χρόνου. Όλα τα σωματίδια τώρα αντιστοιχούνται σε συγκεκριμένα κελιά.

Δίνονται αρχικές συνθήκες στα σωματίδια του τοιχώματος και του ρευστού και αυτές είναι:

Οι θέσεις και οι ταχύτητες, η πυκνότητα που είναι η αναφοράς ρ_0 , η πίεση που δίνεται από τον τύπο της παραγράφου 3.2.3, και το ιξώδες (κινηματικό) που συνδέεται ως γνωστό με τον αριθμό Re της ροής με τη σχέση $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$.

Στο σημείο αυτό μπορούν να αρχίσουν οι υπολογισμοί, δηλαδή το κύριο μέρος της ρουτίνας, για κάθε χρονικό βήμα DT και για κάθε σωματίδιο i .

Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου ολοκληρώνεται μέσα από ένα σχήμα Προβλεψής – Διόρθωσης (Predictor - Corrector):

Με γνωστές τις θέσεις και ταχύτητες στην αρχή του χρονικού βήματος υπολογίζεται η κλίση ταχύτητας και πυκνότητας από τις εξισώσεις ορμής και συνέχειας (3.1) και (3.2), που εδώ διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = -\sum_j m_j \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_i^2} + \frac{\rho_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} - (\Pi_{ij})_x \right] \\ \frac{dv_i}{dt} = -\sum_j m_j \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_i^2} + \frac{\rho_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} - (\Pi_{ij})_y \right] \end{cases}$$

και

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j \left[(u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial y} \right]$$

με το Π_{ij} να δίνεται από τη σχέση του Monaghan και να αναλύεται εδώ στις δύο συνιστώσες:

$$\begin{cases} (\Pi_{ij})_x = 8 \frac{v_i + v_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{(u_j - u_i)(x_i - x_j)}{|\vec{r}_{ij}|^2} \frac{\partial W}{\partial x} \\ (\Pi_{ij})_y = 8 \frac{v_i + v_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{(v_j - v_i)(y_i - y_j)}{|\vec{r}_{ij}|^2} \frac{\partial W}{\partial y} \end{cases}$$

και τις συνιστώσες της ∇W να αναλύονται όπως παρακάτω:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}$$

όπου με την απόσταση δύο σωματιδίων να είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ έχουμε την παραγωγή $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$ και όμοια $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ και ακόμα

από τον τύπο της $W(R)$ με $R = \frac{r}{h}$ έχουμε :

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{a_d}{h^{d+1}} \begin{cases} 4(2.5 - R)^3 - 20(1.5 - R)^3 + 40(0.5 - R)^3 & 0 \leq R \leq 0.5 \\ 4(2.5 - R)^3 - 20(1.5 - R)^3 & 0.5 \leq R \leq 1.5 \\ 4(2.5 - R)^3 & 1.5 \leq R \leq 2.5 \\ 0 & R \geq 2.5 \end{cases}$$

Από την κλίση της ταχύτητας γίνεται πρόβλεψη για την νέα ταχύτητα από τις σχέσεις (3.1) και (3.2) που πλέον γίνονται:

$$u_p = u + du$$

$$v_p = v + dv$$

Και προκύπτει πρόβλεψη για τη νέα θέση:

$$x_p = x + \frac{1}{2}(u + u_p)dt$$

$$y_p = y + \frac{1}{2}(v + v_p)dt$$

Επίσης γίνεται πρόβλεψη για τη νέα πυκνότητα:

$$\rho_p = \rho + d\rho \text{ και προκύπτει η προβλεπόμενη πίεση από τη σχέση (3.3).}$$

Στο σημείο αυτό παρεμβάλλεται μια υπορουτίνα που υπολογίζει τις κλίσεις ταχύτητας και πυκνότητας για τις νέες προβλεπόμενες θέσεις, $du_p, dv_p, d\rho_p$ οπότε γίνεται τελικά η διόρθωση στην ταχύτητα:

$$u_c = u + \frac{1}{2}(du + du_p)dt$$

$$v_c = v + \frac{1}{2}(dv + dv_p)dt$$

στη θέση :

$$x_c = x + \frac{1}{2}(u + u_c)dt$$

$$y_c = y + \frac{1}{2}(v + v_c)dt$$

και στην πυκνότητα :

$$\rho_c = \rho + \frac{1}{2}(d\rho + d\rho_p)$$

άρα και στην πίεση από τον τύπο (3.3).

Με την αναδιάταξη των μεταβλητών έχουμε τις αρχικές τιμές για το χρονικό βήμα που θα ακολουθήσει .

Σε κάθε χρονικό βήμα, σε περίπτωση που σωματίδια βγαίνουν εκτός υπολογιστικού χώρου, γίνεται μετάθεσή τους στην αρχή (περιοδικές αρχικές συνθήκες) ή αντικαθίστανται από νέα σειρά σωματιδίων (δεδομένο προφίλ

εισόδου) και έπειτα γίνεται αναδιάταξη των σωματιδίων και αντιστοίχησή τους στο πλέγμα.

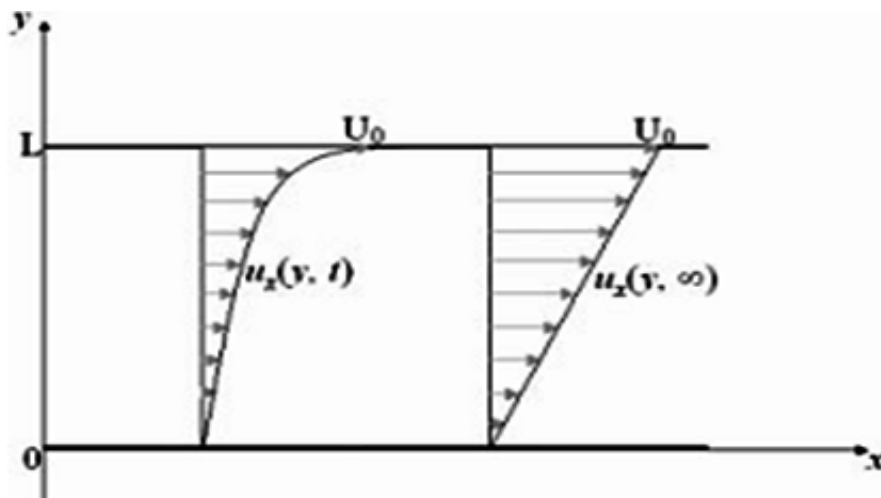
Τυπώνονται αρχεία με τις τροχιές, τις ταχύτητες, τις πιέσεις, τις πυκνότητες και τις μέσες τιμές ανά κελί, ανά κάποιο πολλαπλάσιο του χρονικού βήματος που καθορίζει ο χρήστης, όπως αναφέρθηκε στα πρώτα βήματα, και ο βρόχος συνεχίζει με το επόμενο χρονικό βήμα από το σημείο των υπολογισμών.

Με την ολοκλήρωση του βρόχου των χρονικών βημάτων, αφού εξασφαλίσουμε ότι έχει επέλθει η μόνιμη κατάσταση της ροής, τυπώνονται και αρχεία μέσης, μόνιμης χρονικής κατάστασης και το πρόγραμμα τερματίζει.

4.2 Ροή Couette

4.2.1 Γενικά

Για τον έλεγχο του αλγόριθμου εφαρμογής χρησιμοποιείται η ροή Couette που είναι από τις πιο κλασσικές περιπτώσεις ελέγχου στη μηχανική των ρευστών και για την οποία οι εξισώσεις Navier – Stokes έχουν αναλυτική λύση .



Σχ.4.1: Σχηματική αναπαράσταση της ροής Couette σε δύο φάσεις της ροής (μεταβατική αριστερά και μόνιμη κατάσταση δεξιά), απόσταση πλακών L και ταχύτητα άνω πλάκας U_0 .

Πρόκειται για τη ροή ανάμεσα σε δύο άπειρου μήκους πλάκες που προκαλείται από την έναρξη κίνησης της πάνω πλάκας που συμπαρασύρει το ρευστό καθώς η κάτω πλάκα μένει ακίνητη.

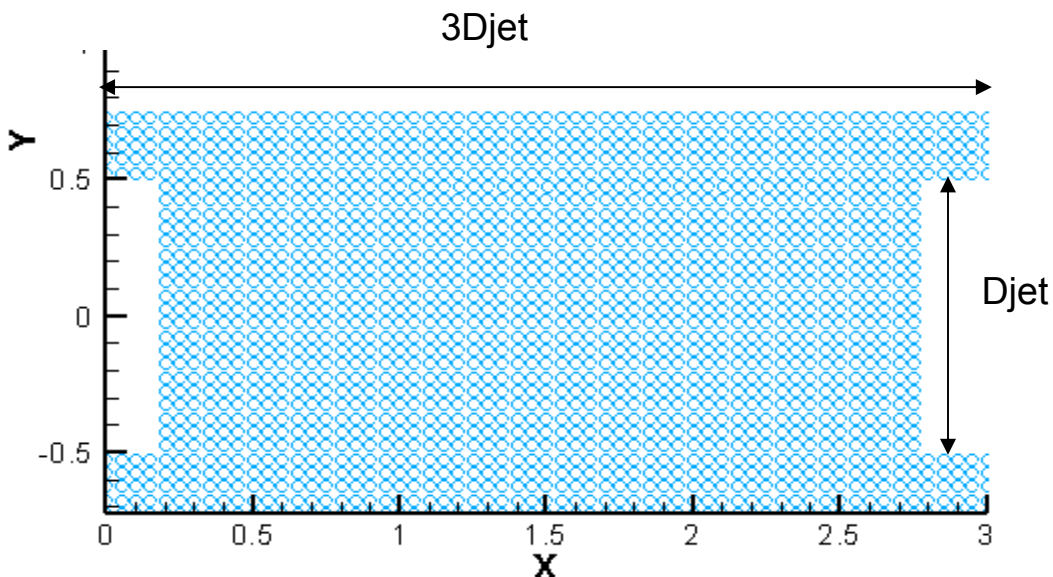
Επομένως, το πρόγραμμα τροποποιείται ελαφρά για την περίπτωση μας, αποδίδοντας στο κομμάτι του που αφορά τις αρχικές συνθήκες αρχική ταχύτητα στα σωματίδια τοιχώματος της πάνω πλάκας που μένει σταθερή και περιοδικές αρχικές συνθήκες όπως παρουσιάστηκαν πιο πάνω.

Η μελέτη έχει γίνει για στρωτή ροή και για διαφορετικούς αριθμούς σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας και καλύπτει τη μεταβατική ροή από μηδενική αρχική ταχύτητα, έως τη μόνιμη κατάσταση.

Σε πρώτη φάση, γνωρίζοντας ποιοτικά την εξέλιξη μιας τέτοιας ροής, την ελέγχουμε εποπτικά, για να βεβαιωθούμε ότι το πρόγραμμα δουλεύει και δίνει φυσικά αποδεκτά αποτελέσματα. Για το σκοπό αυτό, από κατάλληλα αρχεία

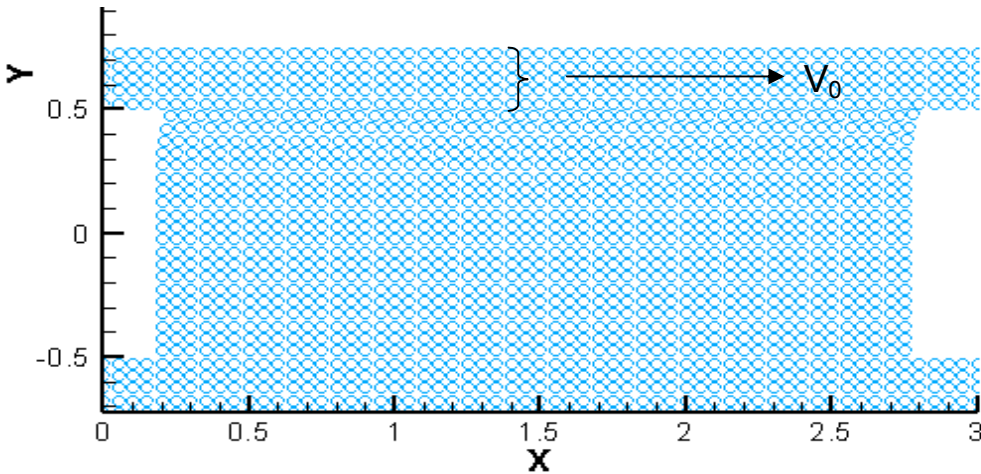
του προγράμματος και χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα TecPlot, παράγουμε Animation, προσομοιώνοντας το φαινόμενο.

Στο Σχ.4.2 φαίνεται η αρχική τοποθέτηση των σωματιδίων για 20 σωματίδια στο προφίλ της δέσμης, με εμφανή τη διάκριση σωματιδίων ρευστού και τοιχώματος, με αυτά του ρευστού να σχηματίζουν εγκάρσια τη διάμετρο της δέσμης ($1D_{jet}$) και τον υπολογιστικό χώρο να περιορίζεται κατά μήκος σε 3 διαμέτρους δέσμης. Ο υπολογιστικός χώρος εγκάρσια περιορίζεται σε 2 διαμέτρους δέσμης αλλά αυτό φαίνεται μόνο στα Διαγράμματα Ισοϋψών (Contour Plots) που θα ακολουθήσουν.



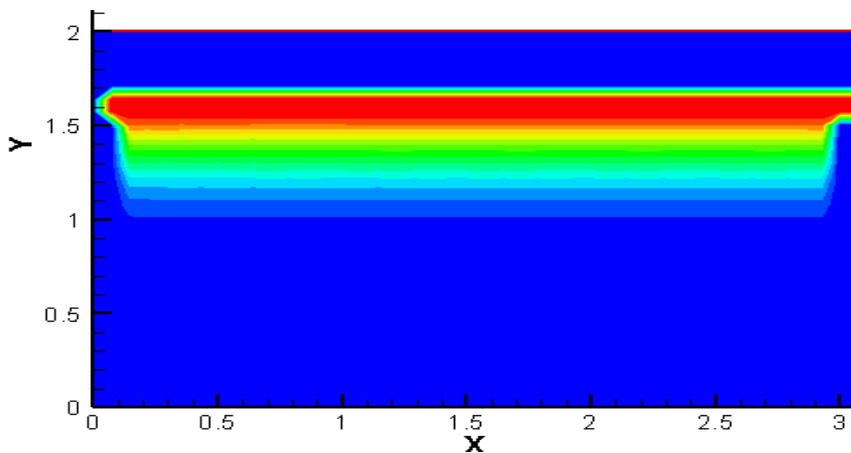
Σχ.4.2 : Αρχική κατανομή των σωματιδίων για 20 σωματίδια στο προφίλ της δέσμης .

Ακόλουθα στο Σχ.4.3, όπου δίνεται στιγμιότυπο από Animation με 20 σωματίδια, φαίνεται η ταχύτητα των σωματιδίων τοιχώματος της πάνω πλάκας V_0 . Βλέπουμε μια μικρή κίνηση των σωματιδίων που βρίσκονται πολύ κοντά ή εφάπτονται στην πλάκα, αφού το στιγμιότυπο πάρθηκε σε πολύ αρχική φάση της κίνησης. Δεν παρατίθενται στιγμιότυπα της μόνιμης ροής διότι δεν απεικονίζουν αντιπροσωπευτικά τη ροή Couette όπως το προηγούμενο, αφού πλέον κινούνται όλα τα σωματίδια (εκτός από αυτά που εφάπτονται με την κάτω πλάκα) και δεν σχηματίζεται εποπτικά, όπως δηλαδή επιθυμούμε, αυτή η φάση της ροής.



Σχ.4.3: Στιγμιότυπο από animation της ροής όπου φαίνεται ελαφρή μετατόπιση των πάνω σωματιδίων του ρευστού στα πρώτα δευτερόλεπτα .

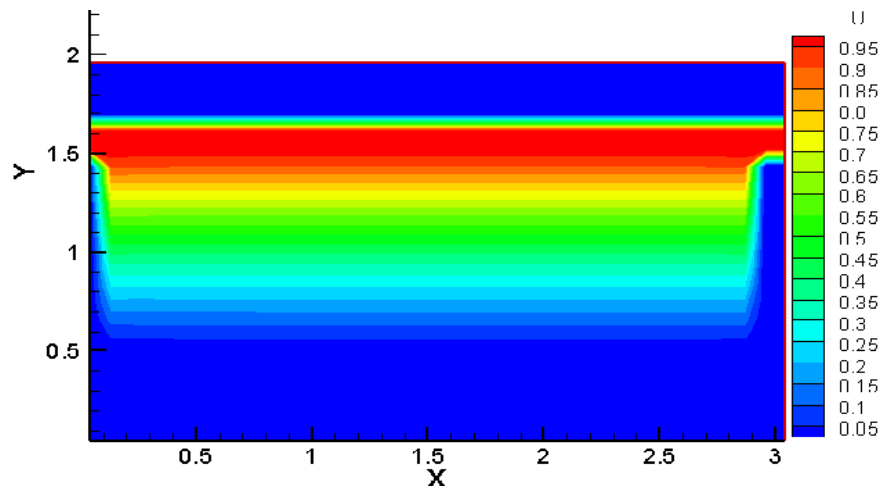
Επίσης, για τον έλεγχο της κυριότερης μεταβλήτης της ροής που είναι η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, από αρχεία μέσω τιμών ανά κελί, παράγουμε Animation με Διαγράμματα Ισοϋψών (Contour Plots) όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο του Σχ.4.5 και παρατηρούμε την ταχύτητα να κατέρχεται, δηλαδή τη ροή να εξελίσσεται μέχρι να αποκτήσουν ταχύτερα και τα πιο κάτω σωματίδια της δέσμης. Εδώ φαίνεται και το πλάτος του υπολογιστικού χώρου που είναι 2Djet.



Σχ.4.5: Στιγμιότυπο από animation ενός Contour Plot για την χρονική εξέλιξη της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας (μη αδιαστατοποιημένη) από αρχεία μέσω τιμών ανά κελί .

Παρατίθεται, τέλος, και εικόνα από Contour Plot της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας από αρχεία που προέκυψαν μετά το τέλος του βρόχου των

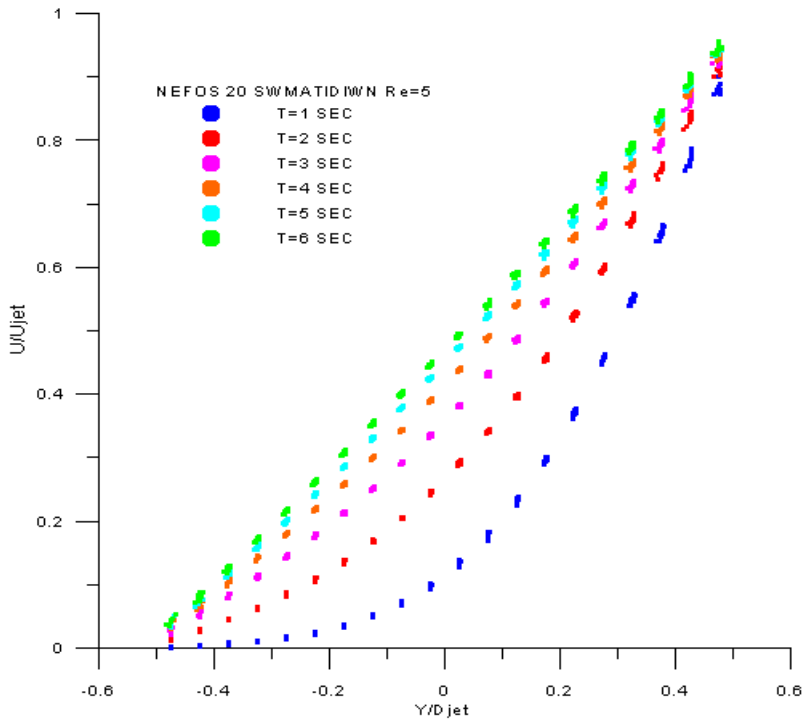
χρονικών βημάτων, από μέσες χρονικές τιμές ανά κελί και επιβεβαιώνει τα προηγούμενα.



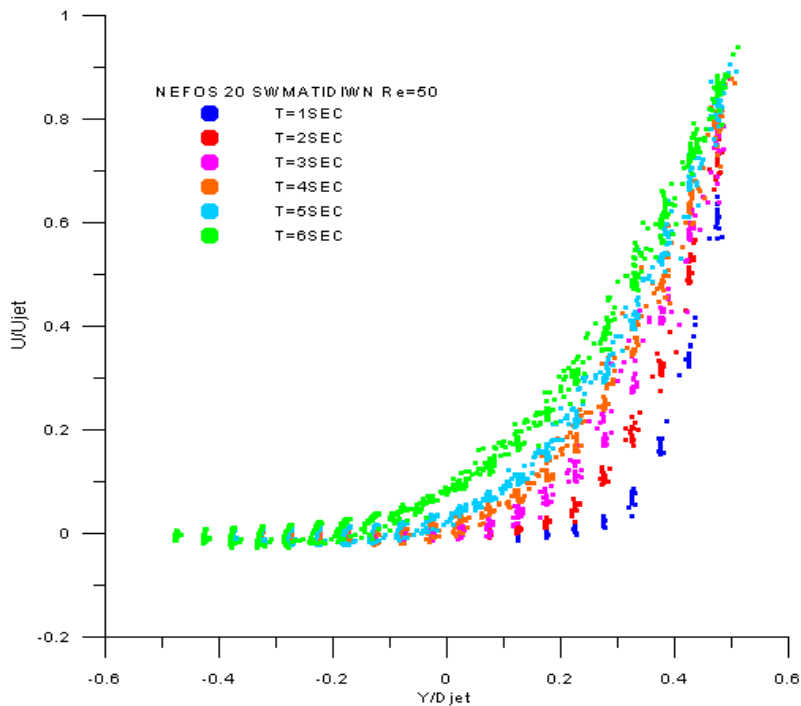
Σχ. 4.6: Εικόνα από Contour Plot της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας (αδιαστατοποιημένη) από αρχεία μέσης χρονικής κατανομής.

4.2.2 Ανάλυση Ανεξαρτησίας Σωματιδίων .

Για τον έλεγχο του προγράμματος σε ότι αφορά τη βασικότερη παράμετρο που είναι ο αριθμός των σωματιδίων στο προφίλ της δέσμης και που εισάγεται από το χρήστη κατά την εκτέλεση, κάνουμε ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων. Ελέγχουμε δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό σωματιδίων για τον οποίο το πρόγραμμα δίνει καλά αποτελέσματα, αφού ξεπερνώντας αρκετά αυτό τον αριθμό ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος γίνεται υπερβολικά μεγάλος. Η ροή είναι στρωτή - χρησιμοποιούνται σχετικά μικροί αριθμοί Reynolds, $Re=5$ και $Re=50$ - και τα διαγράμματα αφορούν την εξέλιξη της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας ως συνάρτηση της κατακόρυφης θέσης, δηλαδή το προφίλ ταχύτητας. Οι μεταβλητές στα αρχεία αποτελεσμάτων έχουν καταχωρηθεί αδιαστατοποιημένες και στα διαγράμματα απεικονίζεται η τιμή της ταχύτητας για όλα τα σωματίδια εντός του πεδίου ροής από 0 έως 3 διαμέτρους μήκους, ενώ έχουν παρθεί αποτελέσματα για χρόνους 1 έως 6 sec και για τις δύο περιπτώσεις.

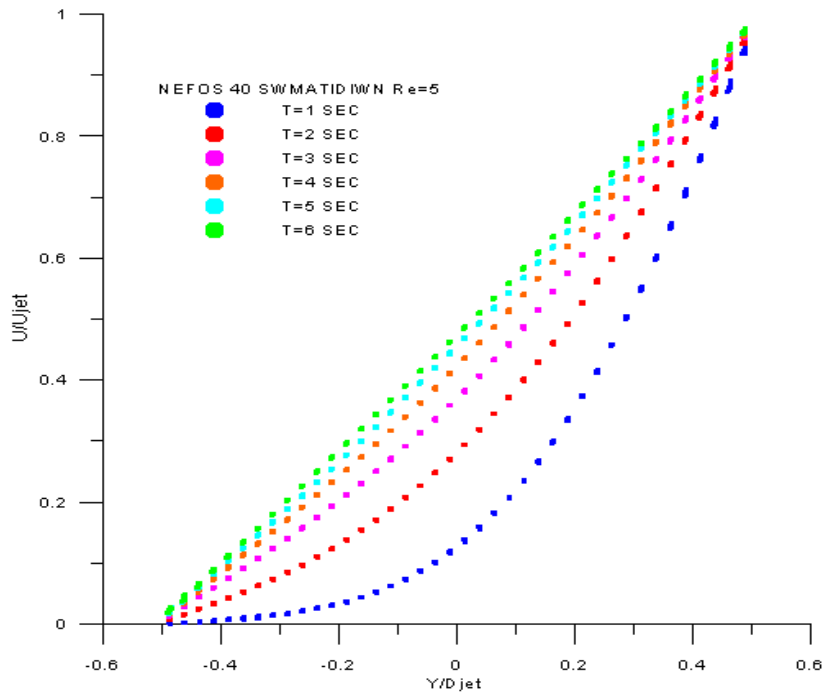


(α)

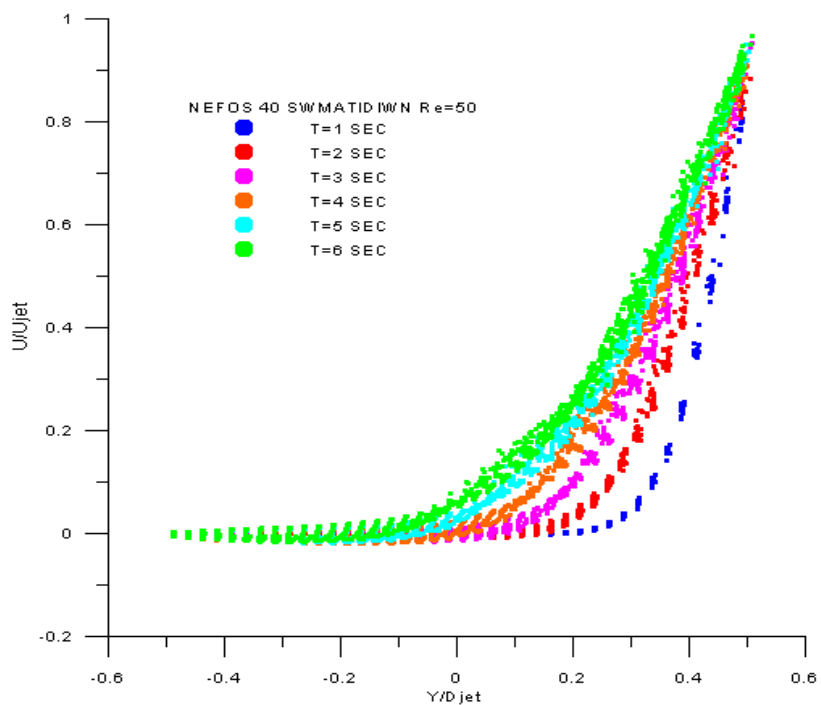


(β)

Σχ.4.7: Διαγράμματα οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας – κατακόρυφης θέσης (αδιαστατοποιημένες) με $Re=5$ (α) και $Re=50$ (β), για όλα τα σωματίδια από 0 έως $3D_{jet}$, για 20 σωματίδια στο προφίλ δέσμης, σε χρόνους 1-6 sec.

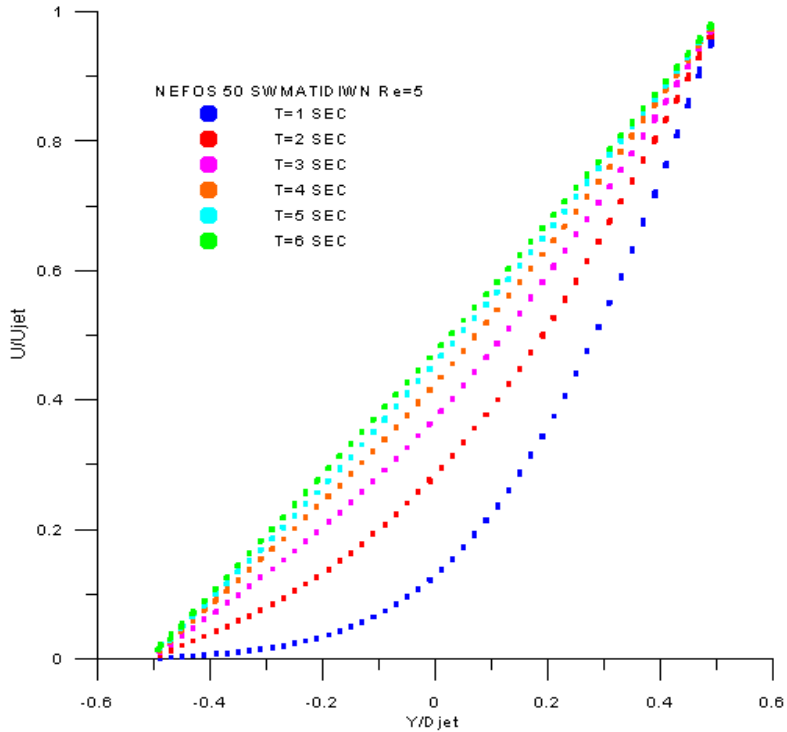


(α)

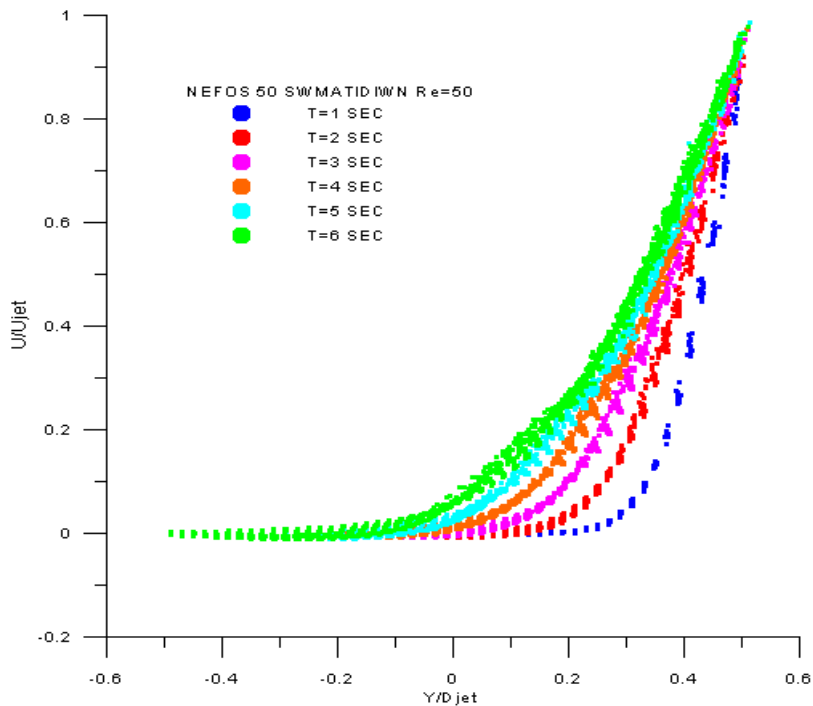


(β)

Σχ.4.8: Διαγράμματα οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας – κατακόρυφης θέσης (αδιαστατοποιημένες) με $Re=5$ (α) και $Re=50$ (β), για όλα τα σωματίδια από 0 έως $3D_{jet}$, για 40 σωματίδια στο προφίλ δέσμης, σε χρόνους 1-6 sec.



(α)



(β)

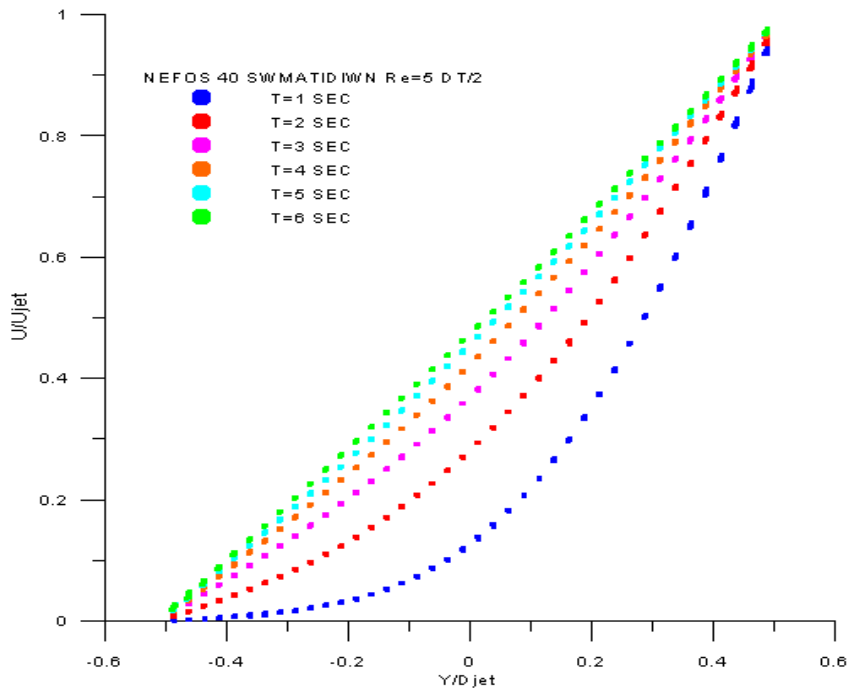
Σχ.4.9: Διαγράμματα οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας – κατακόρυφης θέσης (αδιαστατοποιημένες) με $Re=5$ (α) και $Re=50$ (β), για όλα τα σωματίδια από 0 έως $3D_{jet}$, για 50 σωματίδια στο προφίλ δέσμης, σε χρόνους 1-6 sec.

Από τα παραπάνω διαγράμματα (Σχ. 4.7- 4.9) συμπεραίνουμε ότι ποιοτικά η ροή απεικονίζεται αρκετά καλά . Για $Re = 5$ η ροή φτάνει τη μόνιμη κατάσταση (γραμμική κατανομή των σωματιδίων) σε περίπου 5 ή 6 δευτερόλεπτα , ενώ για αντίστοιχους χρόνους και $Re = 50$ δηλαδή μικρότερο ιξώδες ή λιγότερο συνεκτικό ρευστό , η ροή δεν έχει φθάσει και δοκιμές έδειξαν ότι απαιτείται απαράδεκτα μεγάλος χρόνος για να συμβεί αυτό, κάτι που καταδεικνύει την επίδραση του ιξώδους στην επίτευξη μονιμότητας της ροής.

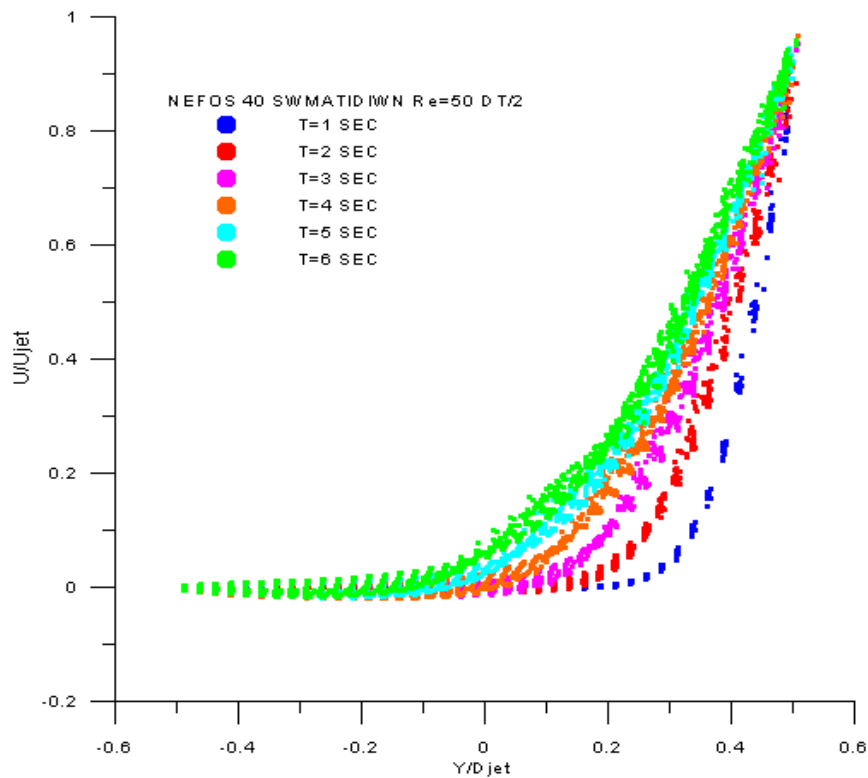
Η διασπορά του νέφους των σωματιδίων δείχνει ότι ο αριθμός των 20 σωματιδίων(Σχ. 4.7) είναι ανεπαρκής ενώ το πρόγραμμα δίνει συγκριτικά ικανοποιητικά αποτελέσματα για 40 ή 50 σωματίδια (Σχ.4.8 και 4.9), αλλά αυξάνοντας τον αριθμό τους, σε 60 σωματίδια για παράδειγμα, ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνει με εκθετικούς ρυθμούς χωρίς κάτι τέτοιο να κρίνεται σκόπιμο, αφού ήδη στις περιπτώσεις των 40 και 50 τα αποτελέσματα δείχνουν να συμπίπτουν.

4.2.3 Ανάλυση ανεξαρτησίας χρονικού βήματος

Άλλος έλεγχος που πραγματοποιούμε είναι η ανάλυση ανεξαρτησίας χρονικού βήματος. Για το χρονικό βήμα επιλέγεται μια τιμή, η οποία ελέγχεται ώστε να μην υπερβαίνει την τιμή h/c όπου h το μήκος αλληλεπίδρασης και c η ταχύτητα του ήχου, αλλιώς υποδιαιρείται, ώστε να μην προκαλείται αστάθεια στον κώδικα ή αδυναμία εκτέλεσής του, παρά την μείωση που αναμένεται στο χρόνο εκτέλεσης όσο αυξάνεται το χρονικό βήμα. Πλέον, δοκιμάζουμε να μειώσουμε στο μισό το χρονικό βήμα , η τιμή του οποίου δόθηκε για τις παραπάνω περιπτώσεις ήταν $DT=6.25E-04$ και αναμένοντας σημαντική αύξηση (διπλασιασμό) στον υπολογιστικό χρόνο θα ελέγξουμε αν βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.



(α)



(β)

Σχ. 4.10: Διαγράμματα οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας – κατακόρυφης θέσης (αδιαστατοποιημένες) με $Re=5$ (α) και $Re=50$ (β), για όλα τα σωματίδια από 0 έως $3D_{jet}$, για 40 σωματίδια στο προφίλ δέσμης, σε χρόνους 1-6 sec, με το μισό χρονικό βήμα.

Συγκρίνοντας με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του αρχικού χρονικού βήματος, των 40 σωματιδίων, για τις περιπτώσεις των δύο διαφορετικών αριθμών Re , δεν προκύπτει κάποια ουσιαστική διαφορά, κάτι που είναι φανερό στα σχήματα, οπότε δε συντρέχει λόγος να ερευνήσουμε την ακρίβεια που θα έδινε ένα ακόμα μικρότερο χρονικό βήμα και θεωρούμε ότι το χρονικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα δίνει αποτελέσματα με επαρκή ακρίβεια.

4.2.4 Σύγκριση με την αναλυτική λύση

Επιπλέον, αντιπαραβάλλουμε τα αποτελέσματα της SPH με αυτά της αναλυτικής λύσης για να δούμε, πέρα από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά, πόσο κόντα είναι η μέθοδος στην αναλυτική, δηλαδή στην ακριβή λύση.

Ο τύπος της αναλυτικής λύσης για την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας παρέχεται από τον Morris et.al.(1997) και είναι :

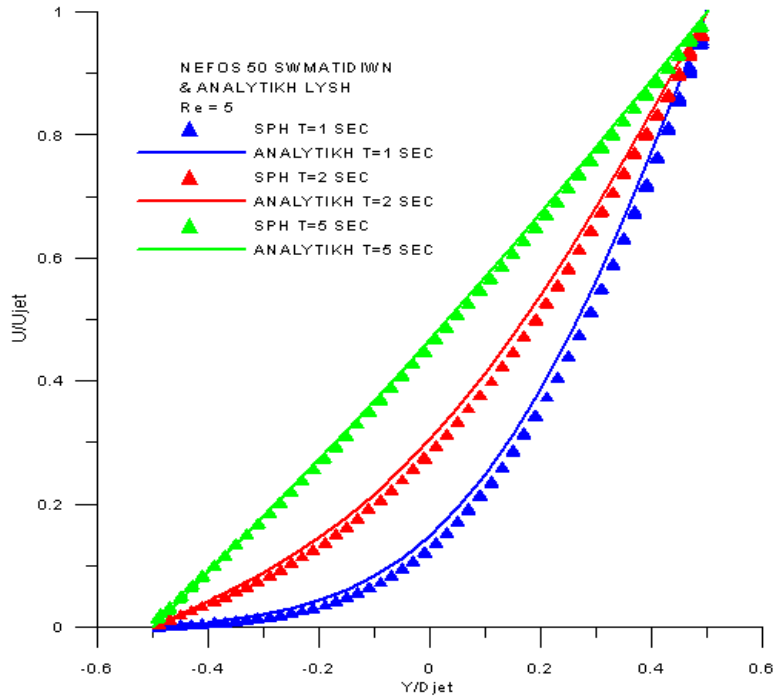
$$u(y,t) = \frac{V_0}{L} y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \exp\left(-\nu \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right)$$

Όπου L η απόσταση μεταξύ των πλακών και V_0 η ταχύτητα της πάνω πλάκας.

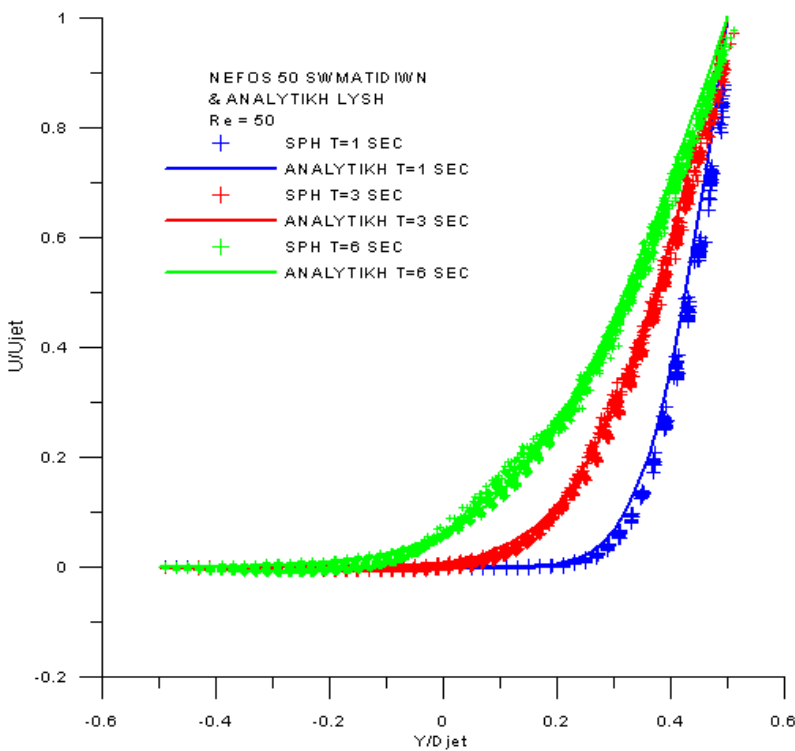
Προγραμματίζοντας τον παραπάνω τύπο και υπολογίζοντας αριθμητικά τη σειρά, προκύπτουν αναλυτικά αποτελέσματα για σύγκριση με τα αντίστοιχα του μοντέλου SPH.

Επιλέγοντας την περίπτωση της ροής με $Re = 5$ και 50 σωματίδια στο προφίλ της δέσμης και διατηρώντας το αρχικό χρονικό βήμα, συγκρίνουμε τις δύο λύσεις για τους χρόνους 1sec, 2sec και 5 sec οπότε φθάνουμε σχεδόν στην μόνιμη κατάσταση.

Ακόμη επιλέγουμε ροή με $Re = 50$ και 50 σωματίδια και συγκρίνουμε για χρόνους 1sec, 3sec και 6sec.



(α)



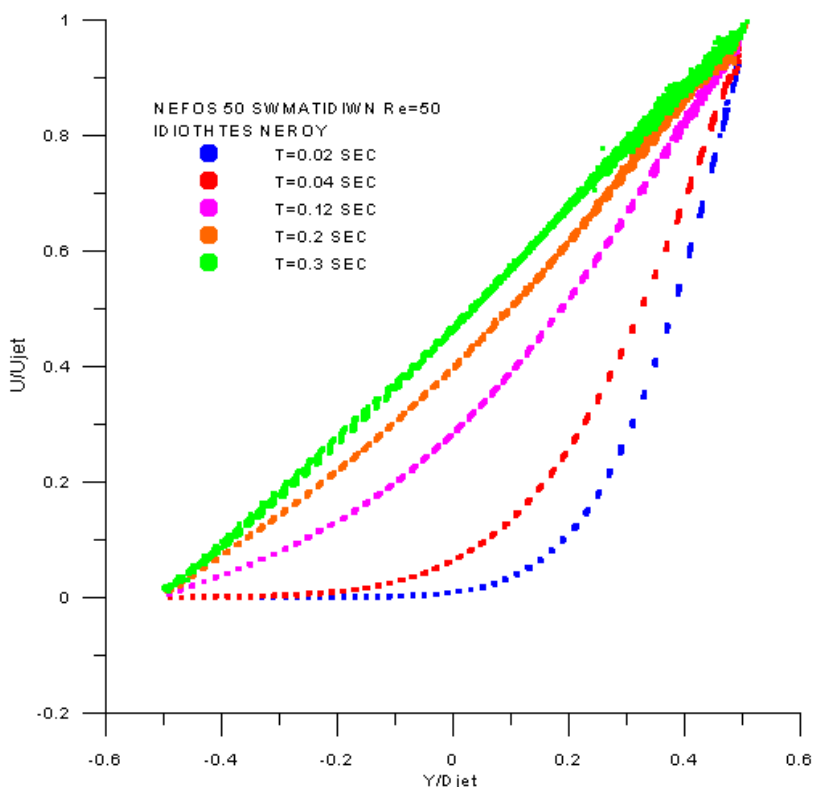
(β)

Σχ.4.11: Διαγράμματα οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας – κατακόρυφης θέσης (αδιαστατοποιημένες) με $Re=5$ (α) και $Re=50$ (β), για όλα τα σωματίδια από 0 έως $3D_{jet}$, για 50 σωματίδια στο προφίλ δέσμης, σε χρόνους 1,2,5 sec και 1,3,6sec σε σύγκριση με την αναλυτική λύση.

Όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση του $Re=50$, δηλαδή του μικρότερου ιξώδους, η μόνιμη κατάσταση αργεί να επιτευχθεί αλλά είναι φανερό από τα παραπάνω διαγράμματα ότι οι δύο λύσεις, SPH και αναλυτική, βρίσκονται σε καλή συμφωνία και στις δύο περιπτώσεις, και στην μεταβατική και στη μόνιμη κατάσταση σχεδόν συμπίπτουν και αυτός είναι ο πιο ασφαλής έλεγχος για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που δίνει ο κώδικας.

Σε μια δεύτερη προσομοίωση χρησιμοποιούμε πραγματικά μεγέθη, θεωρούμε ότι το ρευστό είναι νερό, δηλαδή χρησιμοποιούμε ιδιότητες νερού : πυκνότητα $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ και κινηματικό ιξώδες $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.
Ακόμα επιλέγεται $L = 10^{-3} \text{ m}$ και $V_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$.

Τα μεγέθη αυτά δίνουν και πάλι αριθμό $Re = \frac{V_0 L}{\nu} = 50$ και για 50 σωματίδια στη δέσμη παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα που δείχνει τη μονιμότητα να έρχεται μεταξύ 0.2 και 0.3 sec δηλαδή πολύ πιο γρήγορα από πριν, κάτι αναμενόμενο αφού στη μεταβατική περιοχή η ροή δεν καθορίζεται μόνο από τον Re .



Σχ.4.12: Διαγράμματα οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας – κατακόρυφης θέσης (αδιαστατοποιημένες) με $Re=50$ αλλά με πραγματικά μεγέθη.

4.3 Ροή σε Ακροφύσιο

4.3.1 Αλλαγές στον Αλγόριθμο Εφαρμογής

Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα που αποτελούν έλεγχο και επιβεβαίωση της αξιοπιστίας του αλγορίθμου εφαρμογής θα εξετάσουμε τη ροή μέσα σε ένα διδιάστατο ακροφύσιο, κάνοντας κάποιες τροποποιήσεις στη γεωμετρία, τις αρχικές συνθήκες και την επιβολή οριακών συνθηκών.

Στην περίπτωση του ακροφυσίου το τοίχωμα κατά την οριζόντια κατεύθυνση επεκτείνεται στις 4 διαμέτρους και προβλέπεται δυνατότητα στένωσης του ενός άκρου του τοιχώματος, από την τρίτη μέχρι την τέταρτη διάμετρο, από 1 διάμετρο σε μισή. Επίσης ο υπολογιστικός χώρος επεκτείνεται, πάλι κατά τον άξονα x , στις 7 διαμέτρους, ώστε κάθε φορά να φαίνεται και να μελετάται η δέσμη – jet σε ένα ικανό μήκος τουλάχιστον τριών διαμέτρων μετά την έξοδο του ρευστού από το ακροφύσιο.

Όσο αφορά στις αρχικές συνθήκες, τα σωματίδια του τοιχώματος μένουν όλα σταθερά, δηλαδή έχουν μόνιμα μηδενικές ταχύτητες ενώ τα σωματίδια ρευστού εισάγονται με δεδομένο προφίλ εισόδου, που αντιστοιχεί σε πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών (Τσαγγάρης, 1995) και δίνεται από τον τύπο:

$$u = 6V_0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right]$$

Την ίδια κατανομή ταχύτητας παίρνουν τα νεοεισερχόμενα σωματίδια και τη διατηρούν για ένα μήκος εισόδου που καθορίζεται στη μισή διάμετρο.

Η στατική πίεση των νεοεισερχόμενων σωματιδίων στον υπολογιστικό χώρο δίνεται ως διαφορά της ολικής πίεσης που δόθηκε ως αρχική συνθήκη μείον τη δυναμική πίεση εισόδου, σύμφωνα με το γνωστό τύπο:

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho V_0^2$$

ενώ η ταχύτητα δίνεται από το λόγο της παροχής ανά μονάδα βάθους προς την απόσταση των πλακών, από τον τύπο :

$$V_0 = \frac{Q}{D}$$

Η παροχή υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση όλων των σωματιδίων σε ένα μήκος 2 διαμέτρων δέσμης μέσα στον αγωγό, και διορθώνεται σε κάθε χρονικό βήμα, συγκλίνοντας σε μια τελική τιμή όταν η ροή φθάνει σε μόνιμη κατάσταση.

Στην περίπτωση αυτή του ακροφυσίου, σε όλο το μήκος του τοιχώματος, εφαρμόζονται από τα σωματίδια του τοιχώματος σε αυτά του ρευστού, δυνάμεις τύπου Lenard – Jones σαν αυτές που ασκούνται μεταξύ μορίων, για να αποτραπεί η διείσδυση στα τοιχώματα.

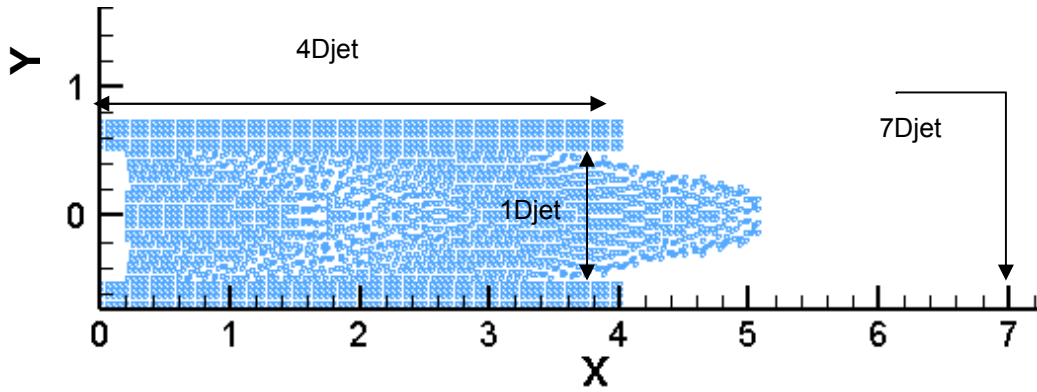
Ο τύπος που δίνεται από τον Monaghan (1994) για την ανά μονάδα μάζας δύναμη που ασκείται μεταξύ σωματιδίου τοιχώματος και σωματιδίου ρευστού σε απόσταση r δίνεται

$$f(r) = 10D \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right] \frac{\vec{r}}{r^2}$$

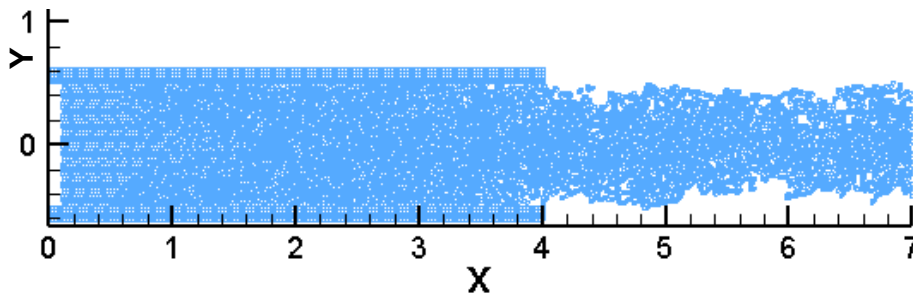
Οι εκθέτες p_1 και p_2 πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $p_1 > p_2$ και για την περίπτωσή μας επιλέγεται $p_1=12$ και $p_2=6$. Ο τύπος ισούται με μηδέν όταν η απόσταση σωματιδίου-τοιχώματος είναι μεγαλύτερη από μια ελάχιστη απόσταση r_0 (εδώ $r_0=0.55DXY$, όπου DXY η αρχική απόσταση των σωματιδίων), ώστε οι δυνάμεις να είναι μόνο απωθητικές. Η δύναμη αυτή προστίθεται στην κάθετη συνιστώσα στην εξίσωση της ορμής.

Αναφορικά με τα αποτελέσματα, εκτός από τα αρχεία που αναφέρονται στον αρχικό αλγόριθμο, τυπώνονται επίσης αρχεία παροχής και πίεσης ως συνάρτηση του χρόνου καθώς και αρχεία για το προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας σε μήκος 1 έως 7 διαμέτρων.

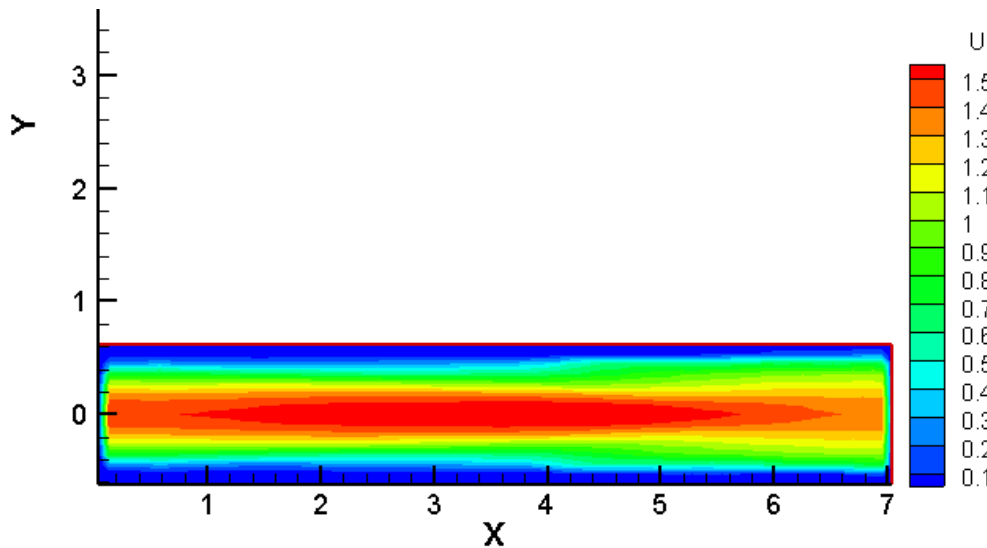
Ως πρώτο έλεγχο αυτού του αλγόριθμου χρησιμοποιούμε την περίπτωση ακροφυσίου χωρίς στένωση, για στρωτή ροή ($Re=100$) και για διάφορους αριθμούς σωματιδίων με το πρόγραμμα TecPlot παράγουμε Animation, που δείχνουν αν προσομοιώνεται ποιοτικά σωστά η φυσική ροή που είναι η ροή Poisseuille. Ενδεικτικά παρατίθενται τα παρακάτω στιγμιότυπα της ροής. Το Σχ.4.13 παρατίθεται για να επιδειχθεί η διαμόρφωση του υπολογιστικού χώρου και η τοποθέτηση σωματιδίων τοιχώματος και ρευστού για τη νέα περίπτωση.



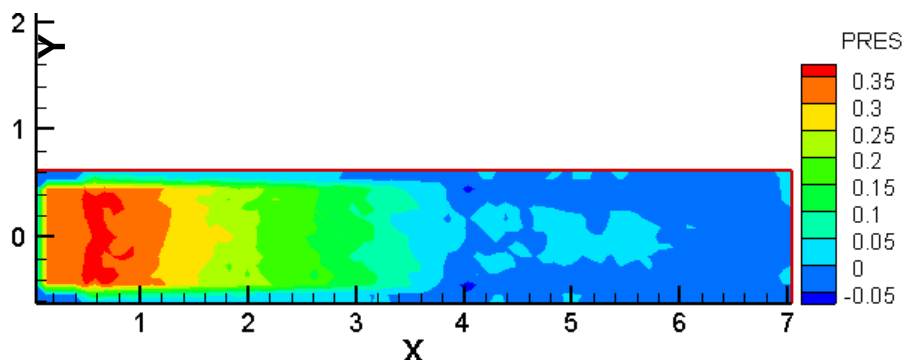
Σχ. 4.13: Στιγμιότυπο της ροής με 20 σωματίδια λίγο μετά την έξοδο των πρώτων σωματιδίων από το ακροφύσιο .



Σχ. 4.14: Στιγμιότυπο της ροής με 40 σωματίδια στη μόνιμη κατάσταση .



Σχ. 4.15: Εικόνα από Contour Plot της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας (αδιαστατοποιημένη) από αρχείο μέσης χρονικής κατανομής .

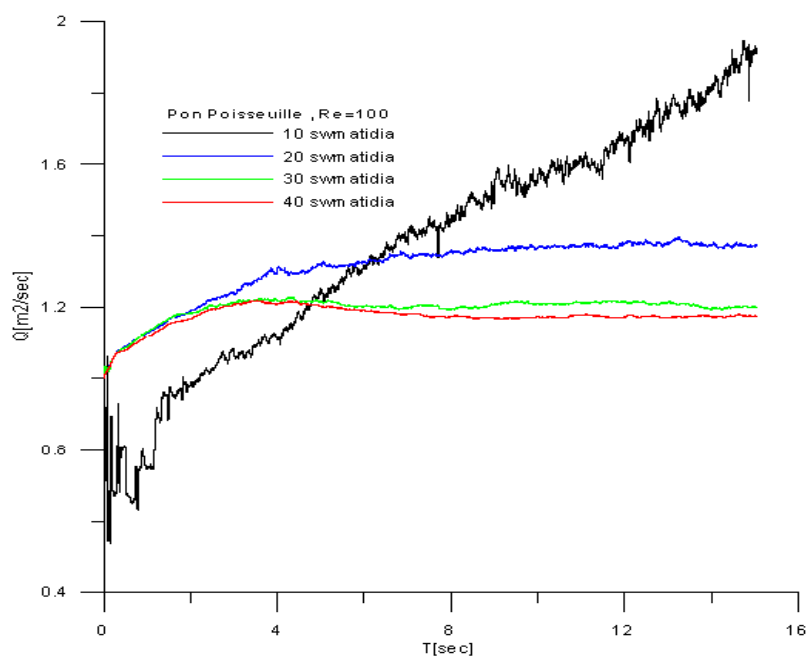


Σχ. 4.16: Εικόνα από Contour Plot της στατικής πίεσης από αρχείο μέσης χρονικής κατανομής .

Από το δεύτερο στιγμιότυπο, Σχ.4.14, όπου απεικονίζεται η μόνιμη κατάσταση με 40 σωματίδια στο προφίλ της δέσμης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι διαταραχές που εμφανίζει η δέσμη μετά την έξοδο της στον ελεύθερο χώρο και η ελαφρά διεύρυνσή της που παρατηρείται στο Σχ.4.15 συμβαδίζουν με τη μείωση της μέγιστης ταχύτητας στο ίδιο σχήμα και τη μείωση της στατικής πίεσης λόγω υδραυλικών απωλειών που παρατηρείται στο Σχ.4.16

4.3.2 Ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων

Για τον έλεγχο του ελάχιστου αριθμού σωματιδίων που επαρκούν για αυτό τον τύπο ροής χρησιμοποιούμε αρχικά τα αποτελέσματα παροχής – χρόνου και παίρνουμε το διάγραμμα του Σχ.4.17.



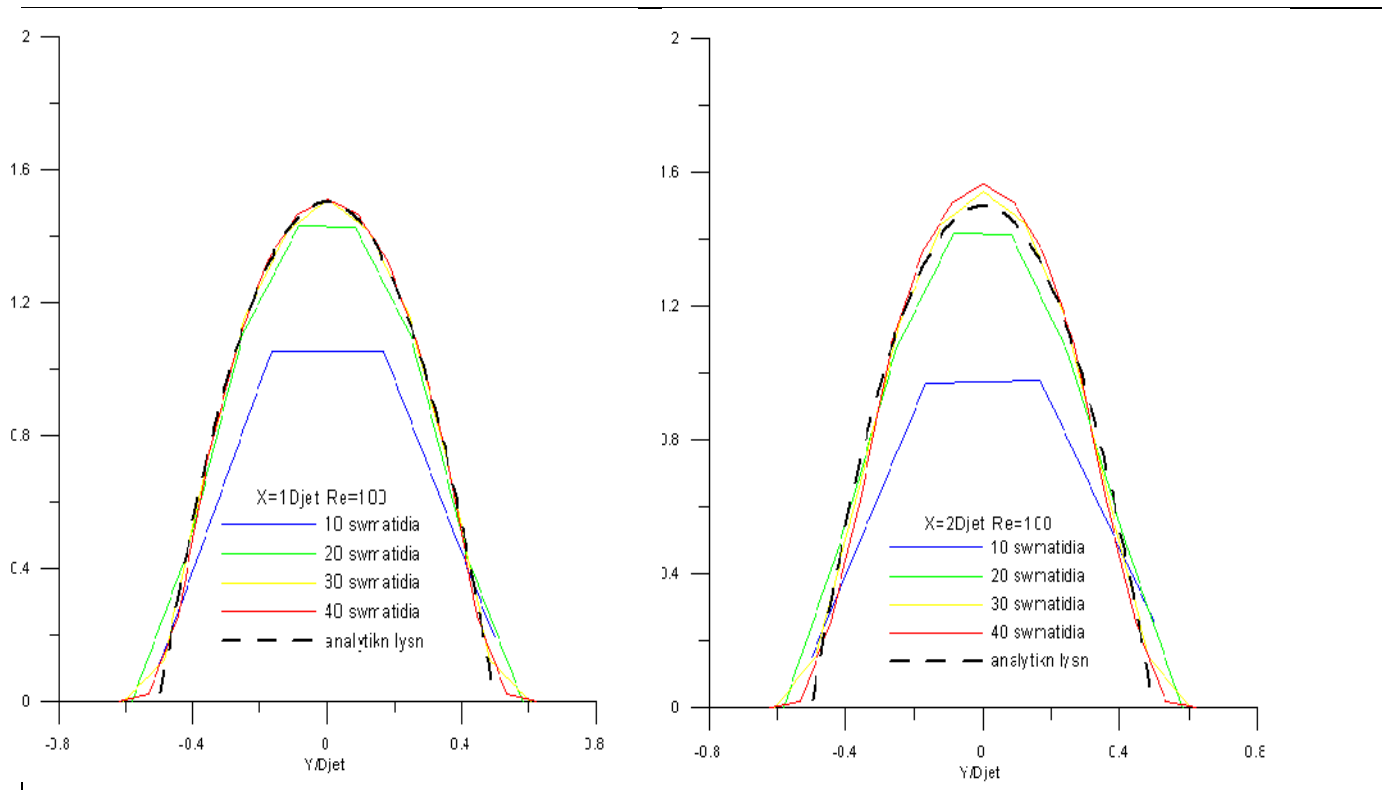
Σχ. 4.17: Η παροχή ως συνάρτηση του χρόνου για διάφορους αριθμούς σωματιδίων

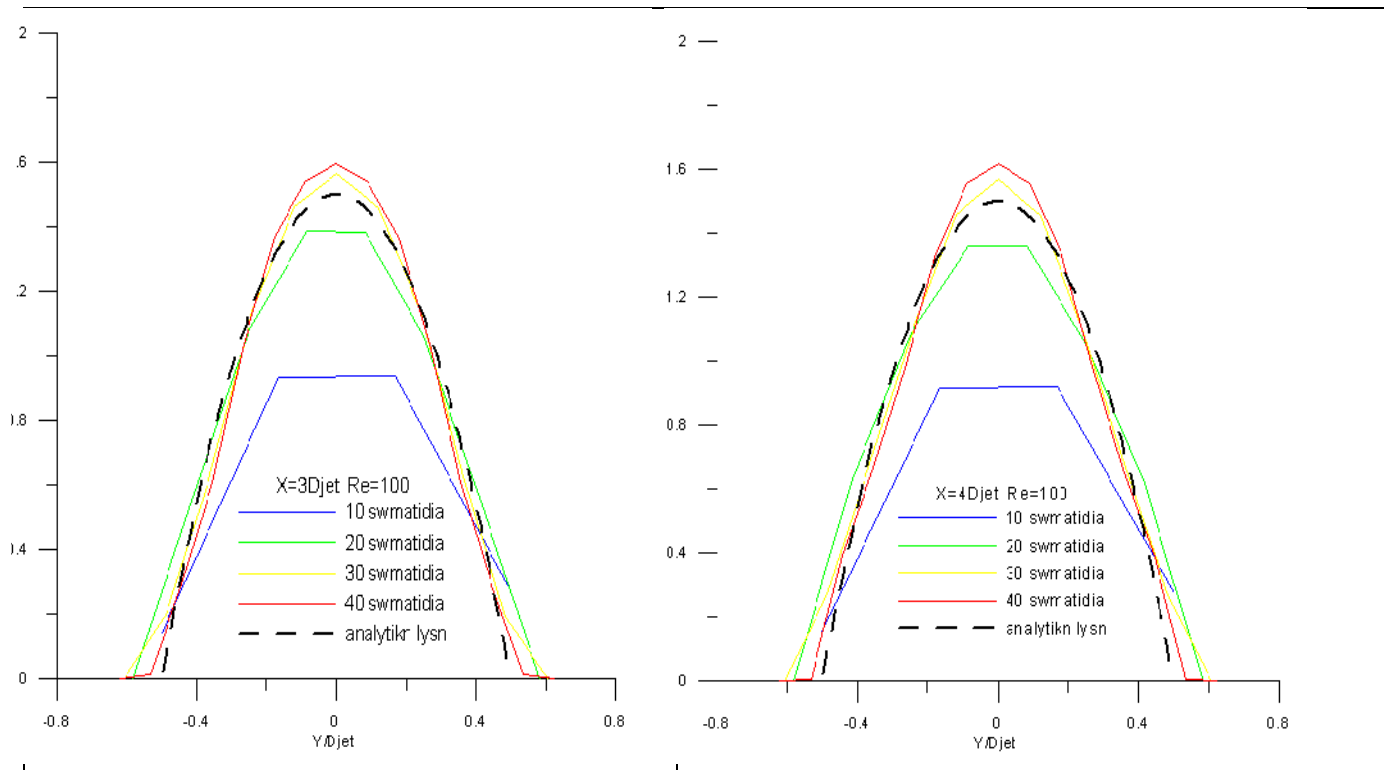
Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ότι για 10 σωματίδια η παροχή αποκλίνει δηλαδή δίνει μη αποδεκτά αποτελέσματα, για 20 σωματίδια συγκλίνει αλλά δε δίνει τη σωστή παροχή και για 30 και 40 τα αποτελέσματα είναι παρόμοια.

Επίσης δίνονται τα διαγράμματα του Σχ.4.18 με τα προφίλ οριζόντιας ταχύτητας σε 4 διαφορετικές θέσεις, κατά μήκος της ροής για τους παραπάνω αριθμούς σωματιδίων. Σε κάθε περίπτωση παρατίθεται και η αναλυτική λύση

$$u = 6V_0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right]$$

που αποτελεί και το προφίλ ταχύτητας εισαγωγής των σωματιδίων στον υπολογιστικό χώρο, όπως προαναφέρθηκε .





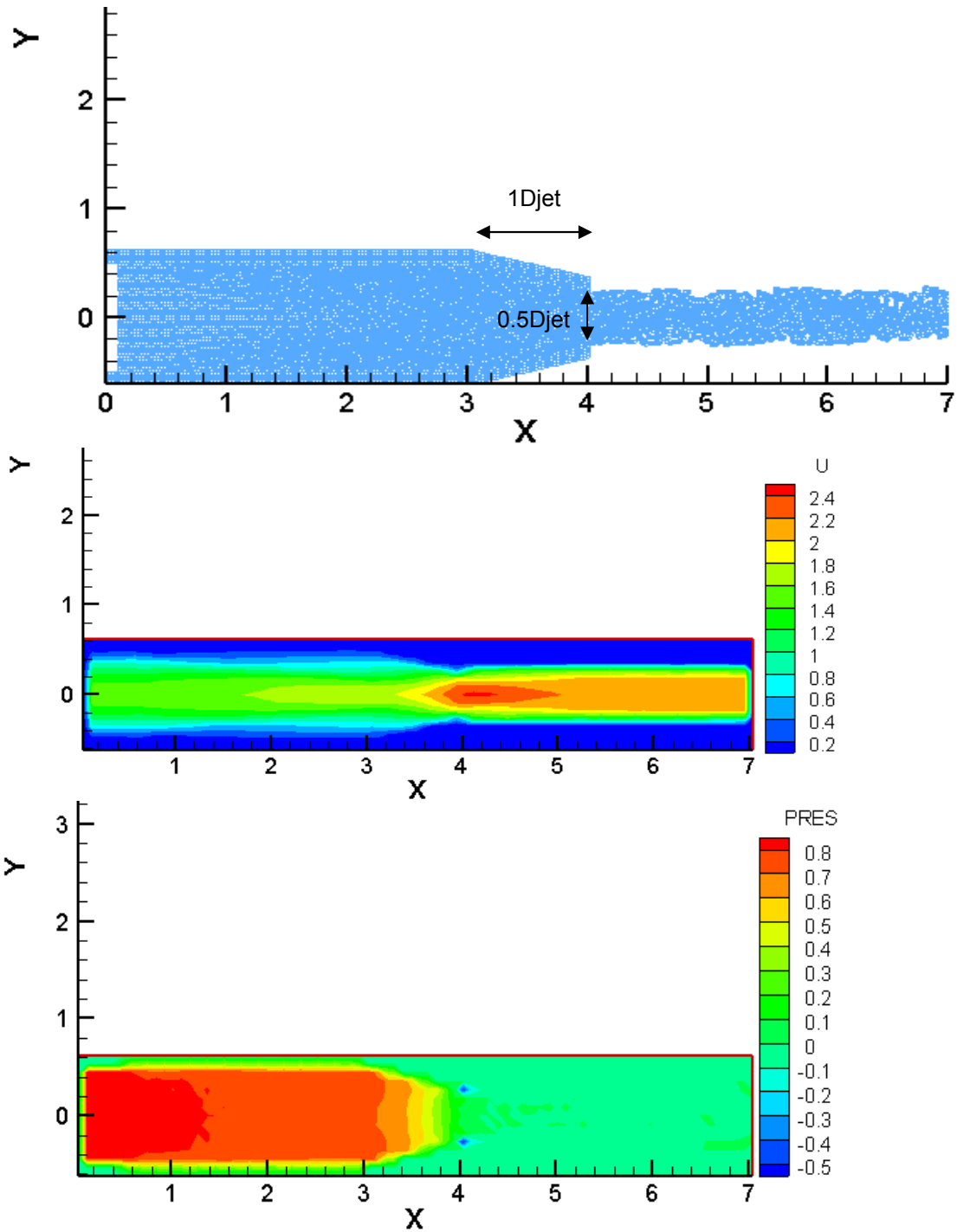
Σχ. 4.18: Διαγράμματα προφίλ οριζόντιας ταχύτητας σε 4 θέσεις και αναλυτική λύση.

Τελικά, και από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι τα 10 σωματίδια είναι πολύ μικρός αριθμός για να προσομοιωθεί η ροή, τα 20 σωματίδια βελτιώνουν αρκετά την εικόνα αλλά στα 30 και περισσότερο στα 40 σωματίδια αποδίδεται καλύτερα και ακριβέστερα η πραγματική ροή, άρα επιλέγονται τα 40 σωματίδια για την περίπτωση αυτή.

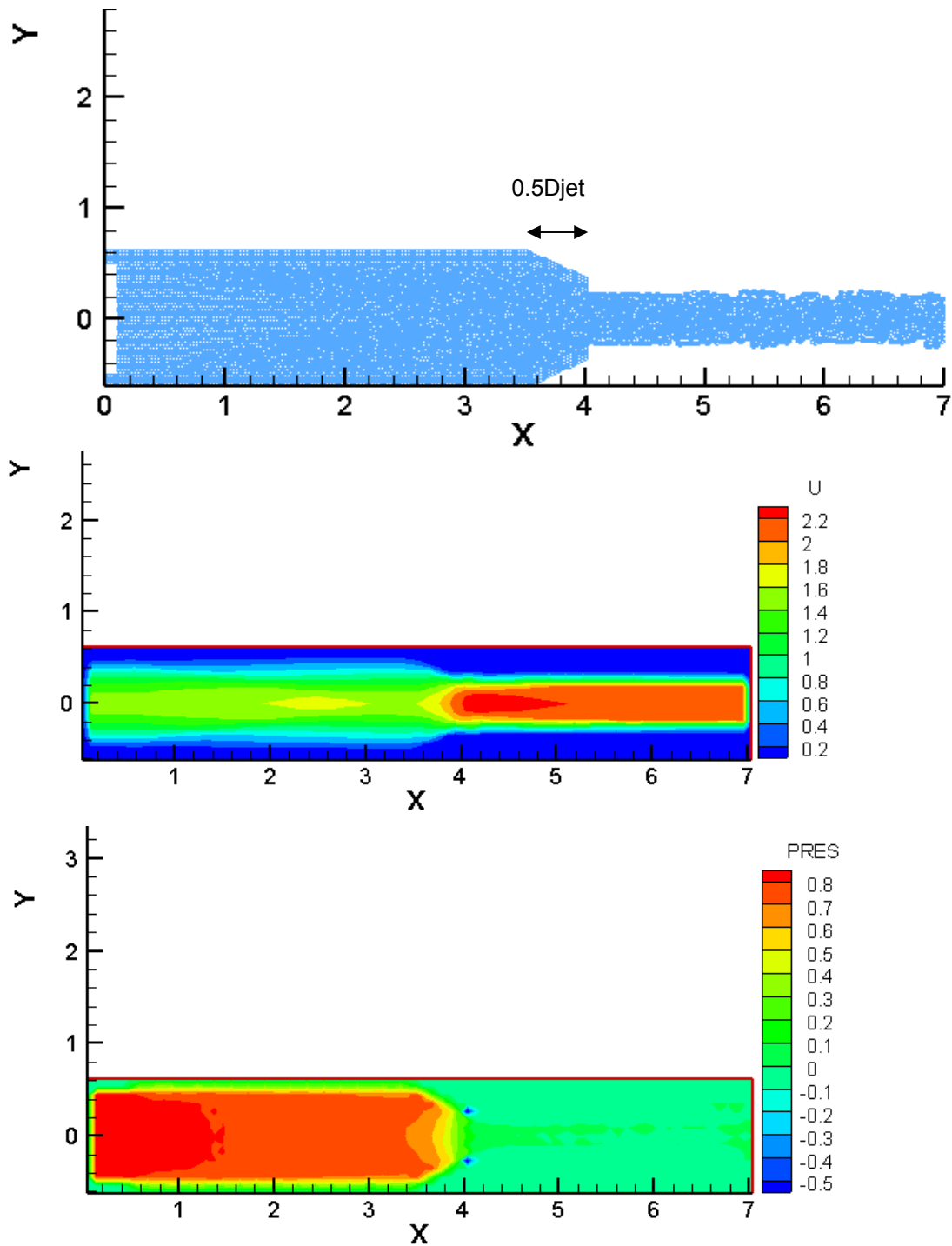
4.3.3 Επίδραση της γωνίας της στένωσης

Όπως είδαμε παραπάνω, στον αλγόριθμο υπάρχει δυνατότητα μεταβολής του άκρου του ακροφυσίου από την τρίτη στην τέταρτη διάμετρο, μειώνοντας τη διατομή από μία διάμετρο σε μισή. Διατηρώντας το μέγεθος της διαμέτρου εξόδου σε μισή διάμετρο, μεταβάλλουμε το μήκος της στένωσης μία φορά σε μισή διάμετρο ($0.5D_{jet}$) και μια φορά σε μιάμιση διάμετρο ($1.5D_{jet}$) ώστε να μεταβληθεί η προκύπτουσα γωνία της στένωσης και μελετάμε την επίδρασή της στη ροή.

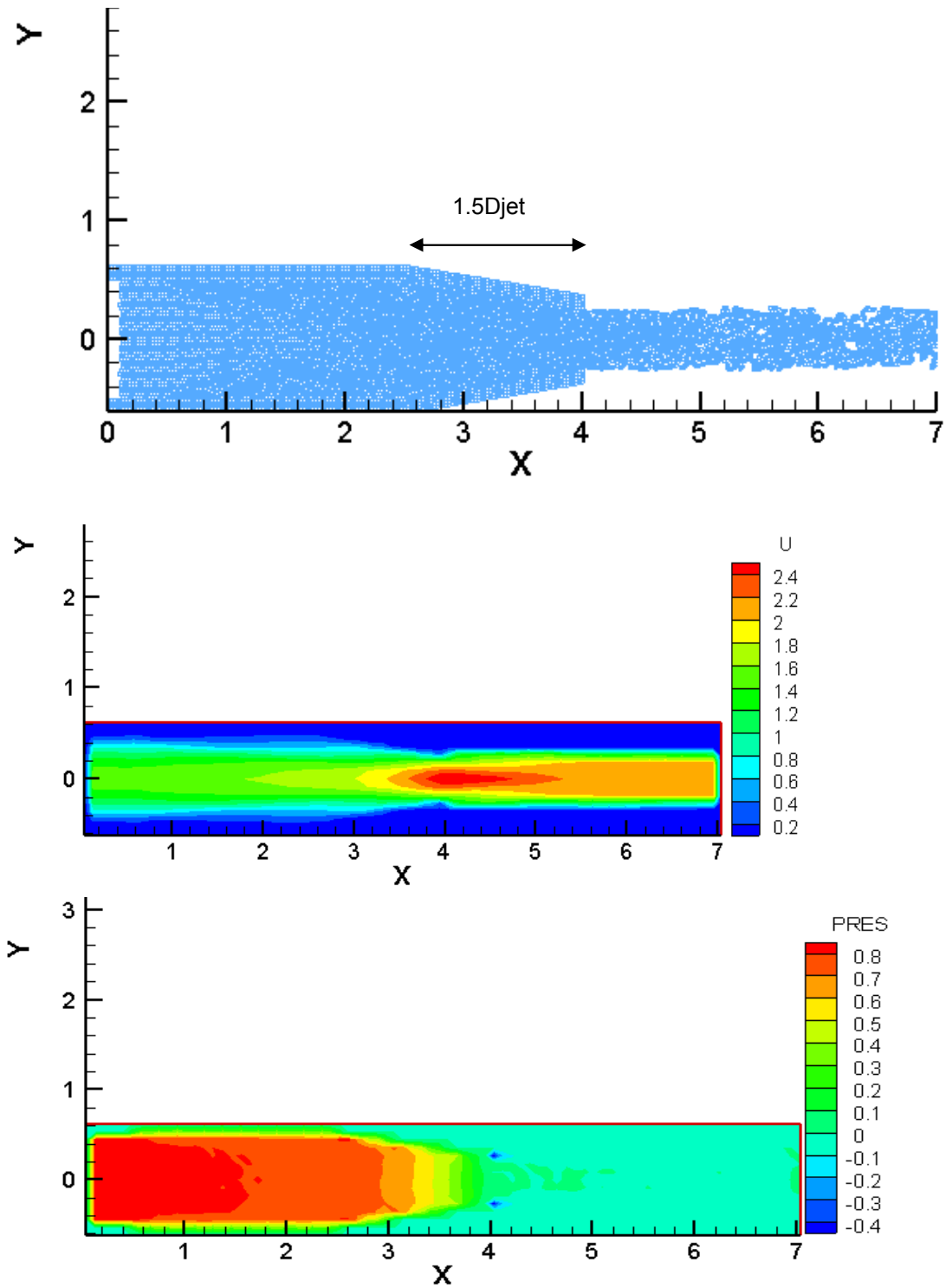
Διατηρώντας $Re=100$ και για 40 σωματίδια παίρνουμε τα ακόλουθα στιγμιότυπα της ροής στη μόνιμη κατάσταση και Contour Plots για την οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας και τη στατική πίεση, για τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις (Σχ.4.19,4.20,4.21



Σχ.4.19 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης για μήκος στένωσης $1D_{jet}$



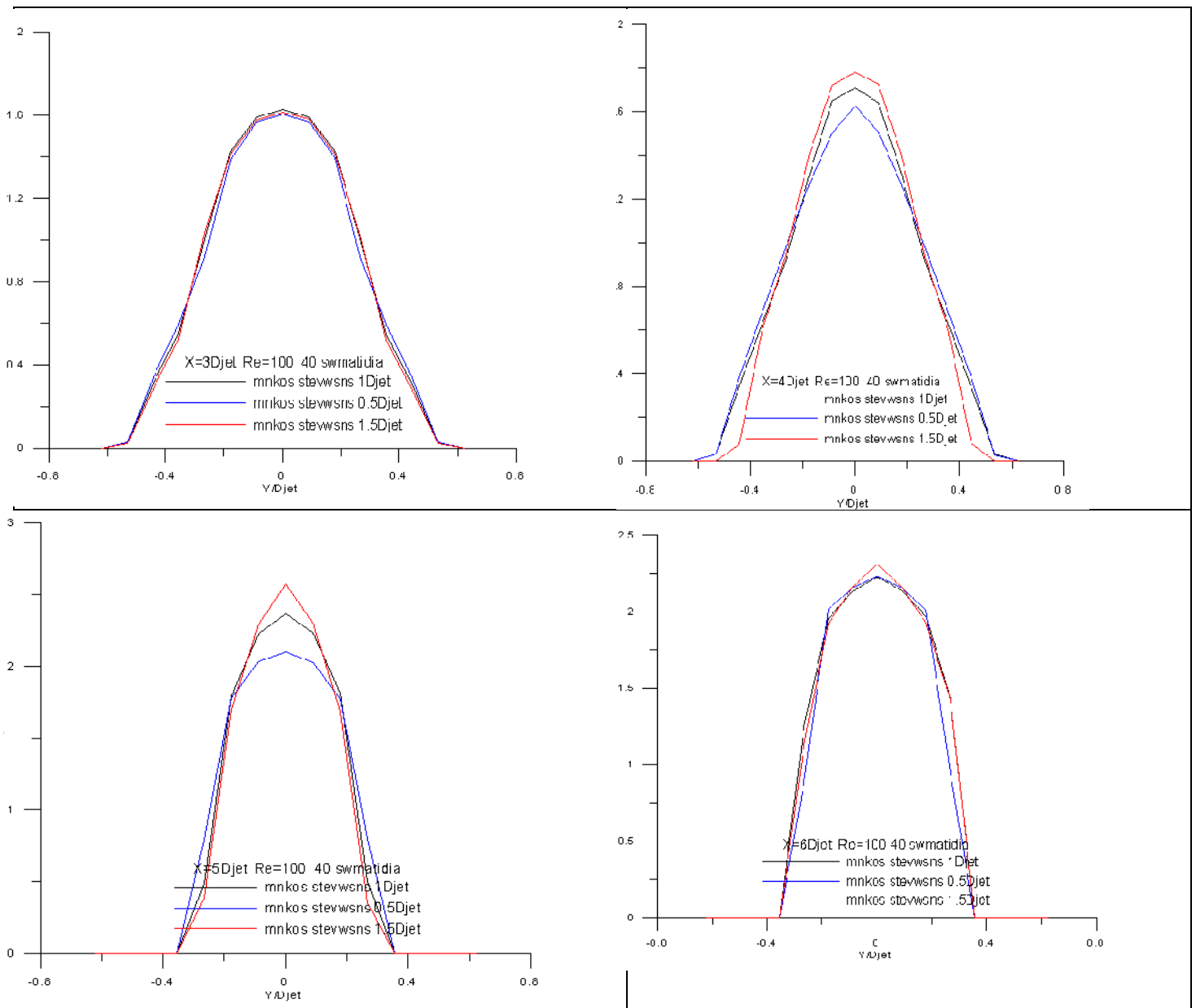
Σχ.4.20 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης για μήκος στένωσης $0.5D_{jet}$



Σχ.4.21 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης για μήκος στένωσης 1.5Djet

Από τα Contour Plots γίνονται εμφανείς οι διαφορές στην κατανομή οριζόντιας ταχύτητας και πίεσης σε όλη την έκταση του υπολογιστικού χώρου. Η μέγιστη ταχύτητα εμφανίζεται ακριβώς στη στένωση και λίγο μετά, ενώ στη συνέχεια μειώνεται.

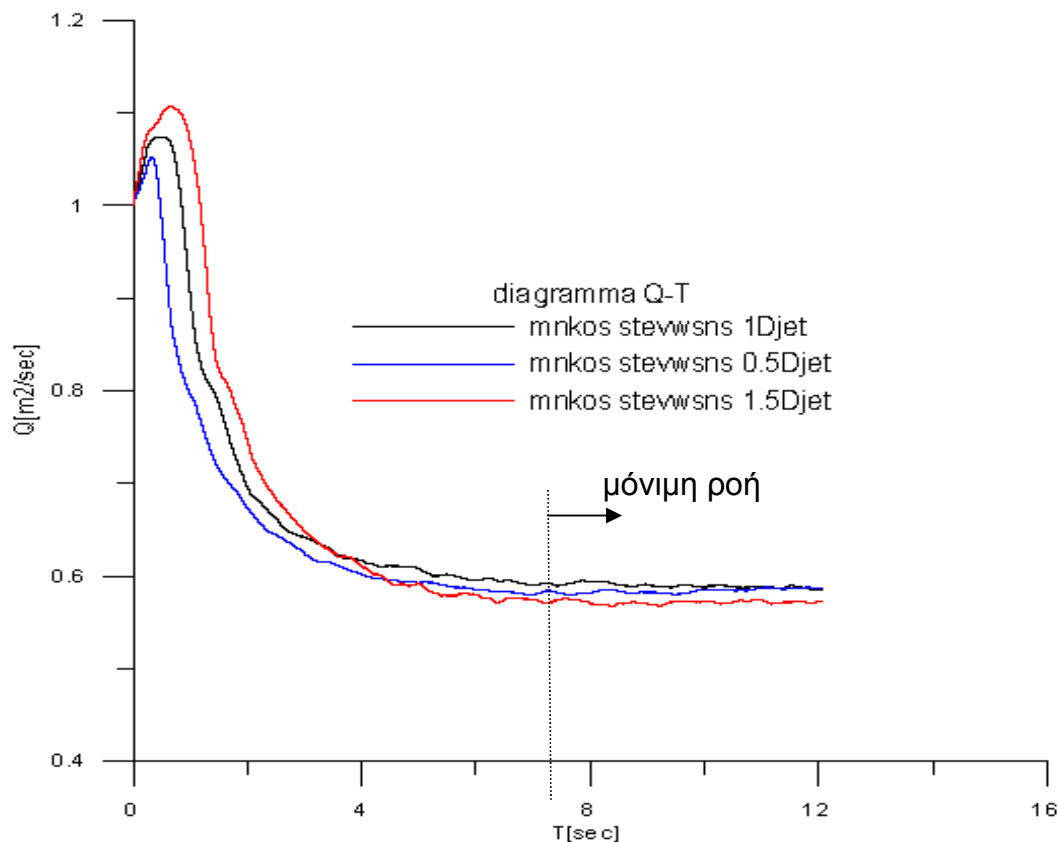
Στο παρακάτω Σχ.4.22 όπως και πριν παρατίθενται διαγράμματα της οριζόντιας ταχύτητας, αυτή τη φορά για τις θέσεις 2Djet έως 6Djet δηλαδή μέσα στο ακροφύσιο, ακριβώς στην έξοδο και μετά από αυτή στην ελεύθερη δέσμη, για τις τρεις περιπτώσεις και για 40 σωματίδια



Σχ.4.22: Διαγράμματα προφίλ οριζόντιας ταχύτητας για τις τρεις περιπτώσεις σε 4 διαφορετικές θέσεις

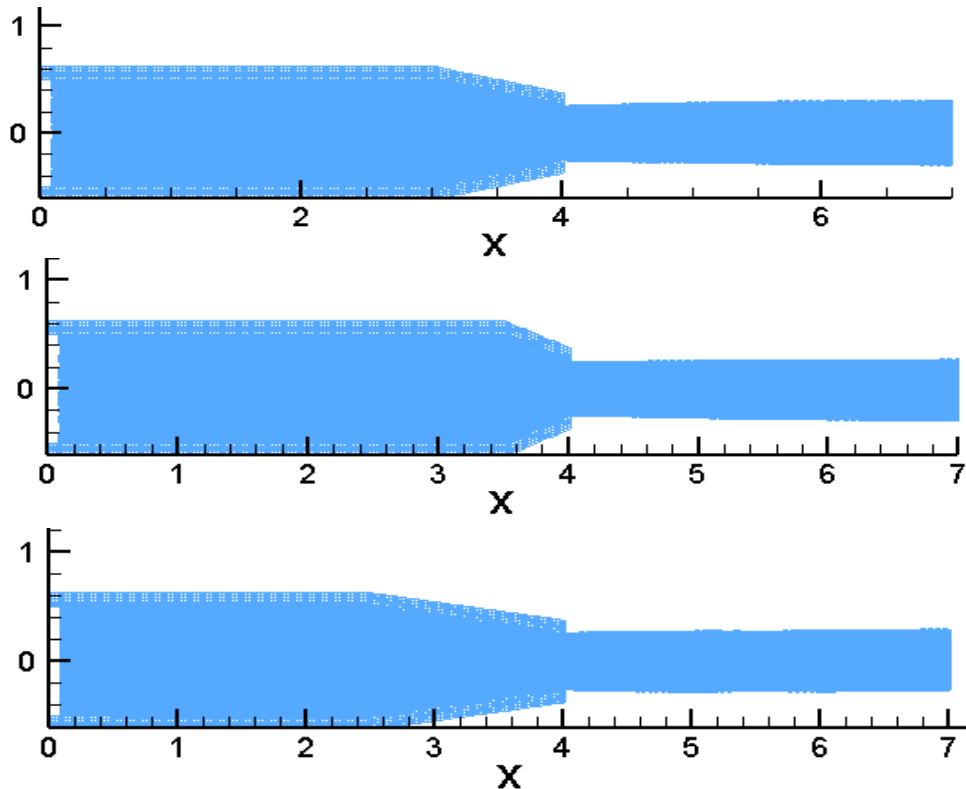
Είναι φανερό συνολικά ότι το jet που διαμορφώνεται έχει σχεδόν τα ίδια χαρακτηριστικά (διάμετρος, προφίλ ταχύτητας) σε όλες τις περιπτώσεις. Η μέγιστη ταχύτητα είναι λίγο μεγαλύτερη σε μικρότερες γωνίες ακροφυσίου αλλά οι διαφορές περιορίζονται κατάντι.

Επίσης παρατίθεται το διάγραμμα παροχής – χρόνου Σχ.4.23 όπου μετά από μερικά δευτερόλεπτα οι τρεις παροχές φαίνεται να συγκλίνουν με ελαφρά στην ίδια σχεδόν τιμή, με ελαφρά μειωμένη την παροχή για μήκος στένωσης 1.5Djet .



Σχ.4.23: Η παροχή ως συνάρτηση του χρόνου για τις τρεις περιπτώσεις της στένωσης.

Τέλος, για τις περιπτώσεις μελέτης ακροφυσίων, ενδιαφέρον έχει το μέγεθος της διαμέτρου του εξερχόμενου jet, το οποίο μετράται συνήθως με πρακτικούς εμπειρικούς τρόπους. Εδώ θα δοκιμάσουμε να τοποθετήσουμε συγκριτικά τις τρεις περιπτώσεις για να διακρίνουμε κάποια διαφορά. Χρησιμοποιούνται 100 διαδοχικά στο χρόνο αρχεία μόνιμης κατάστασης, τυπωμένα ταυτόχρονα στο ίδιο σχήμα.

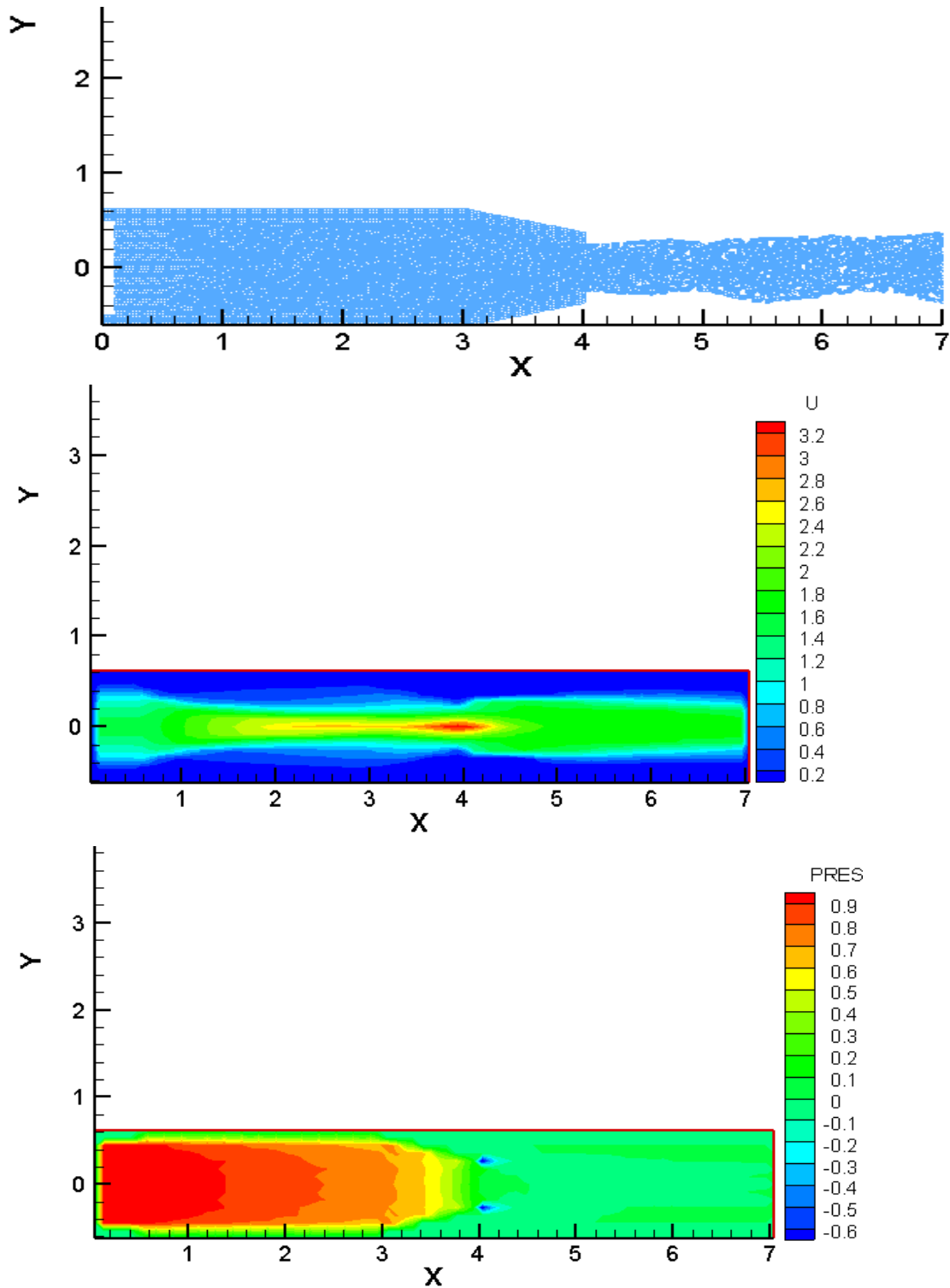


Σχ.4.24: Συγκριτική παράθεση των τριών περιπτώσεων της στένωσης: Djet, 0.5Djet και 1.5Djet κατά σειρά .

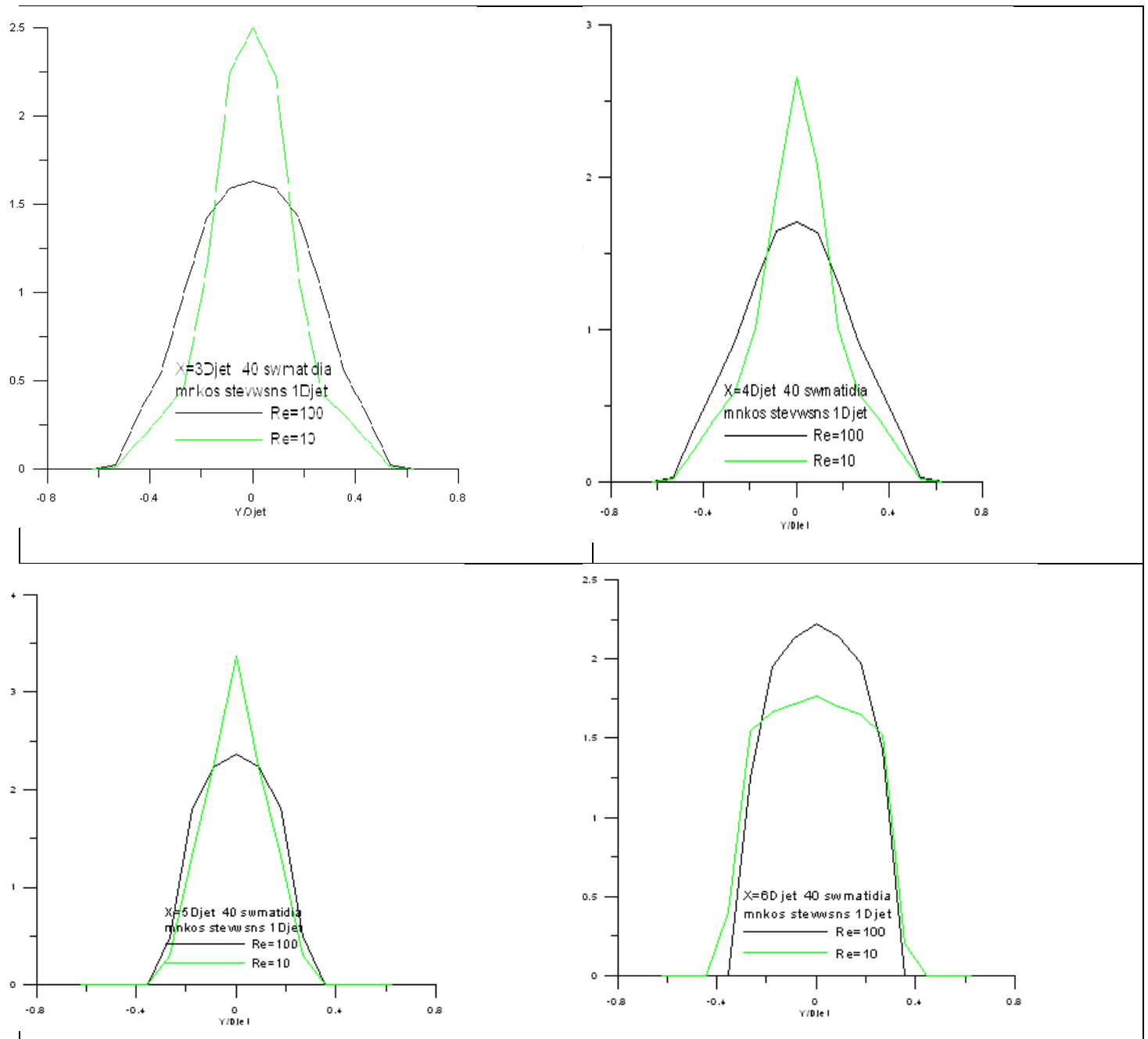
Δεν διακρίνεται κάποια σημαντική διαφορά στη διάμετρο του εξερχόμενου jet αλλά παρατηρούμε ότι όσο μικρότερη είναι η γωνία στένωσης τόσο πιο γρήγορα αποκτά η δέσμη το τελικό της πάχος μετά την έξοδο από το ακροφύσιο.

4.3.4 Επίδραση του αριθμού Reynolds

Μελετάται για το ακροφύσιο που έχει μήκος στένωσης μία διάμετρο δέσμης, η επίδραση του αριθμού Re στη ροή η οποία είναι στρωτή ροή με $Re=10$ δηλαδή έχουμε ρευστό με μεγαλύτερο ιξώδες. Όμοια όπως και πριν παίρνουμε στιγμιότυπο ροής και Διαγράμματα Ισοψών καμπυλών στο Σχ.4.25 , για 40 σωματίδια. Σε σχέση με τα προηγούμενα παρατηρούμε ήδη από τα διαγράμματα ισοψών αύξηση της ταχύτητας κοντά στον άξονα συμμετρίας και στην έξοδο του ακροφυσίου και μείωση οπουδήποτε αλλού και μικρή αύξηση των τιμών της στατικής πίεσης, ενώ από το στιγμιότυπο είναι ξεκάθαρη η αύξηση διαμέτρου του jet αλλά και η διαταραγμένη ροή του.



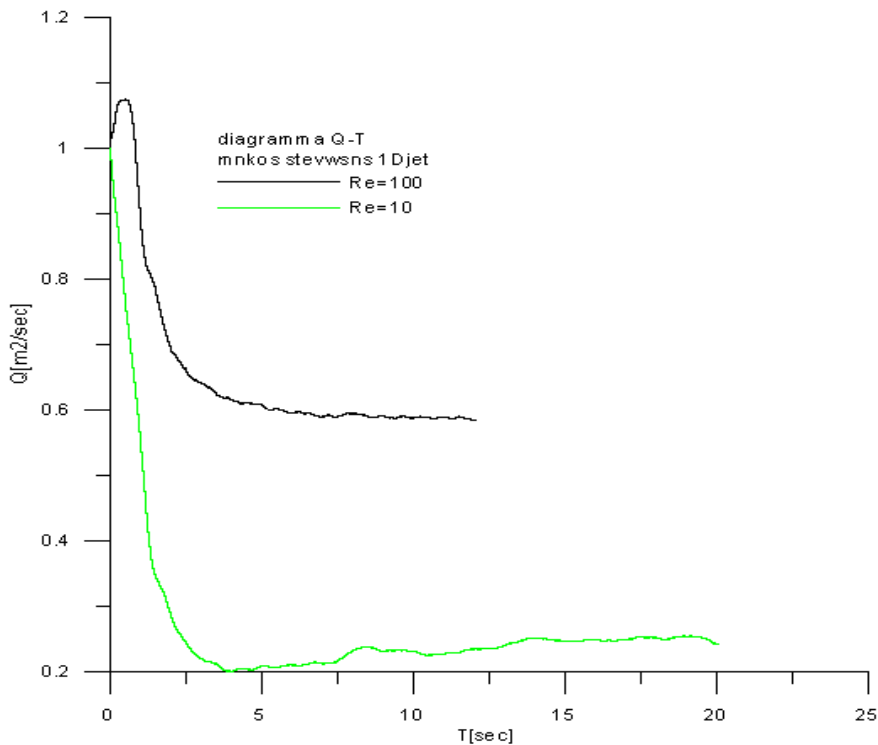
Σχ.4.25 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης για μήκος στένωσης 1Djet και $Re=10$



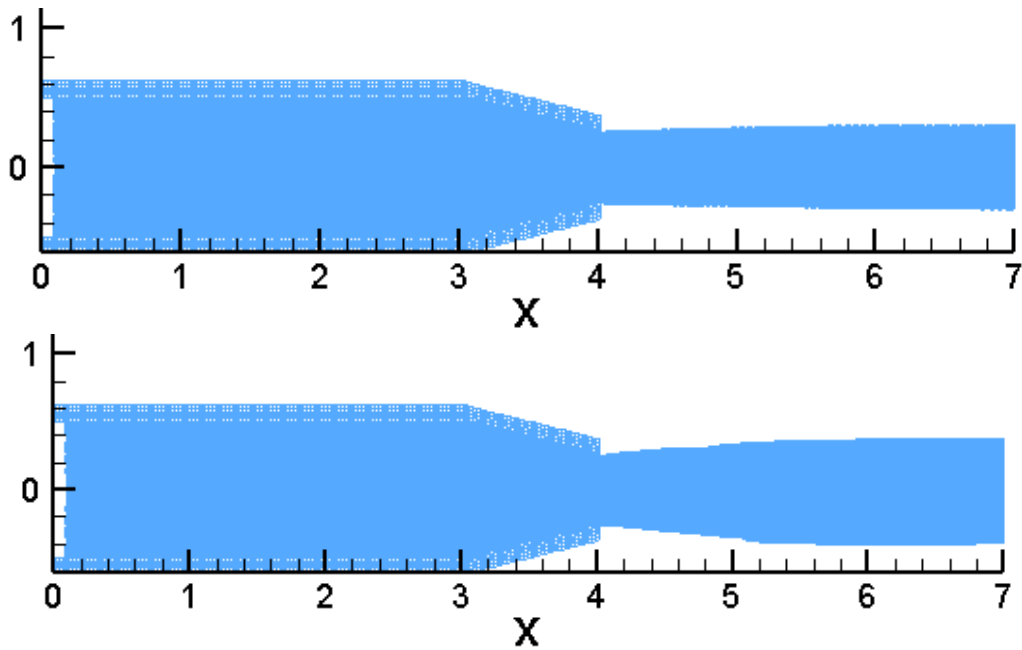
Σχ.4.26: Διαγράμματα προφίλ οριζόντιας ταχύτητας σε 4 διαφορετικές θέσεις για τους δύο Re .

Από τα διαγράμματα του προφίλ οριζόντιας ταχύτητας στο Σχ.4.26 γίνεται φανερή η επίδραση του μεγάλου ιξώδους στην πίεση και τη διάτμηση και άρα στο προφίλ της ταχύτητας, δηλαδή το ρευστό στη στένωση επιταχύνεται, ενώ λίγο μετά την έξοδο επιβραδύνεται στον ελεύθερο χώρο. Αυτό έχει συνέπεια

την μειωμένη παροχή αλλά και τη σημαντική αύξηση στη διάμετρο του jet, όπως φαίνεται στα ακόλουθα Σχ.4.27 και 4.28.



Σχ.4.27: Η παροχή ως συνάρτηση του χρόνου για τους δύο Re.



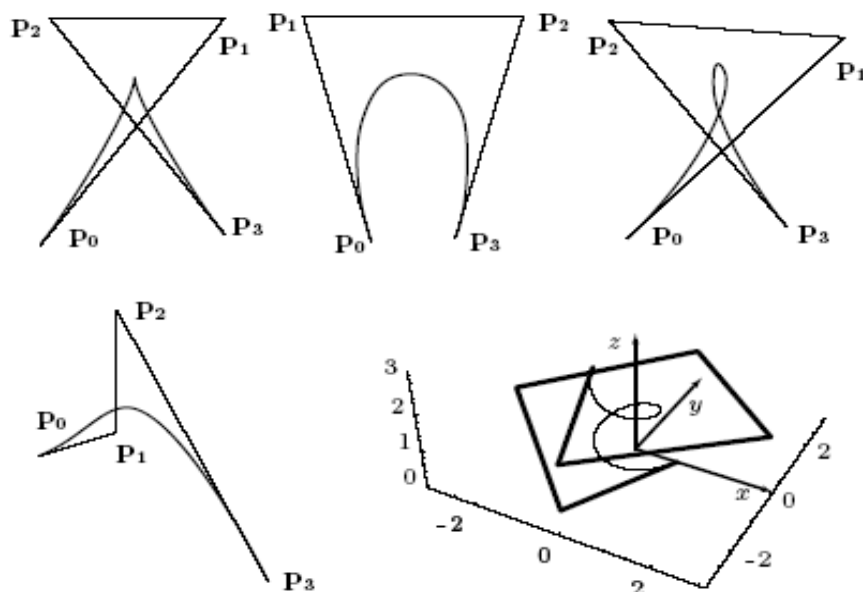
Σχ.4.28: Συγκριτική παράθεση των δύο περιπτώσεων αριθμών Re=100 και Re=10, κατά σειρά.

4.3.5 Παραμετροποίηση της γεωμετρίας του ακροφυσίου με πολυώνυμα Bezier

Στον αλγόριθμο του ακροφυσίου προστέθηκε η δυνατότητα να προσεγγιστεί η στένωση με καμπύλες Bezier για να μελετηθούν διάφορες τροποποιήσεις της γεωμετρίας του και να συγκριθούν με την περίπτωση της στένωσης με γραμμική κατανομή.

4.3.5.1 Στοιχεία θεωρίας των Καμπυλών Bezier

Οι καμπύλες Bezier είναι ένας σχετικά απλός τρόπος για να δημιουργηθεί ή να προσεγγιστεί μια γεωμετρική μορφή χρησιμοποιώντας σημεία ελέγχου.



Σχ.4.29 : Παραδείγματα καμπυλών Bezier στο επίπεδο και στο χώρο, με εμφανή το ρόλο των σημείων ελέγχου ως πόλων έλξης της καμπύλης.

Η βασική ιδιότητα μιας καμπύλης Bezier που καθορίζει το σχηματισμό της είναι ότι θα ξεκινάει από το πρώτο σημείο ελέγχου και θα καταλήγει στο τελευταίο με το ζεύγος των δύο πρώτων σημείων και το ζεύγος των δύο τελευταίων να καθορίζει την κλίση της καμπύλης στο πρώτο και στο τελευταίο σημείο αντίστοιχα.

Οι καμπύλες Bezier σχηματίζονται γεωμετρικά με βάση ένα αναδρομικό αλγόριθμο (αλγόριθμος de Casteljau) που είναι ουσιαστικά η διαδοχική εφαρμογή σχημάτων γραμμικής παρεμβολής. Στην ειδική περίπτωση τριών

σημείων P_0, P_1, P_2 με διανύσματα θέσης $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ και για κάθε τιμή μιας παραμέτρου $t \in [0, 1]$ δημιουργούμε δύο νέα σημεία από τη σχέση:

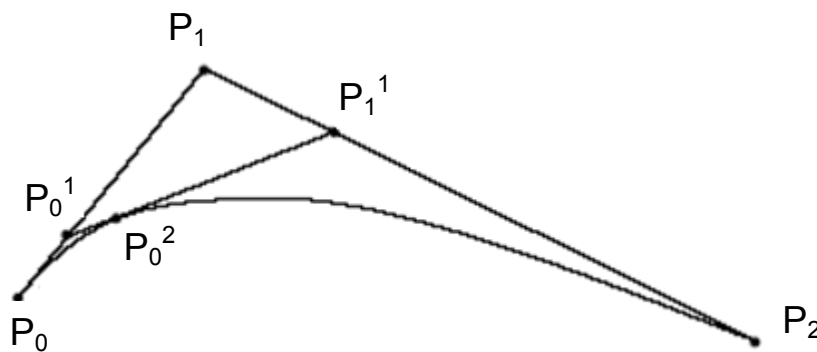
$$\vec{r}_0^1(t) = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \text{ ή γράφουμε εναλλακτικά}$$

$$\vec{r}_0^1(t) = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1 \text{ και}$$

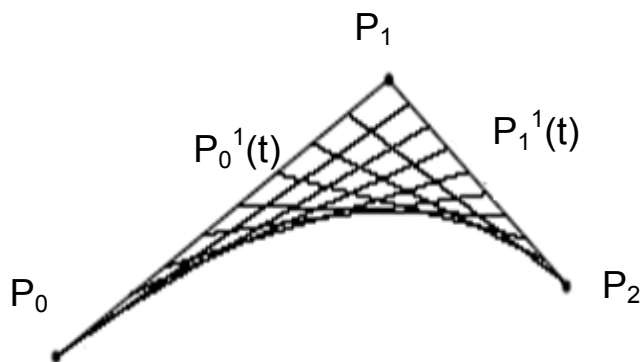
$$\vec{r}_1^1(t) = (1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2$$

τα οποία ανήκουν αντίστοιχα στα ευθύγραμμα τμήματα P_0P_1 και P_1P_2 . Για την ίδια τιμή της t , δημιουργούμε ένα νέο σημείο P_0^2 :

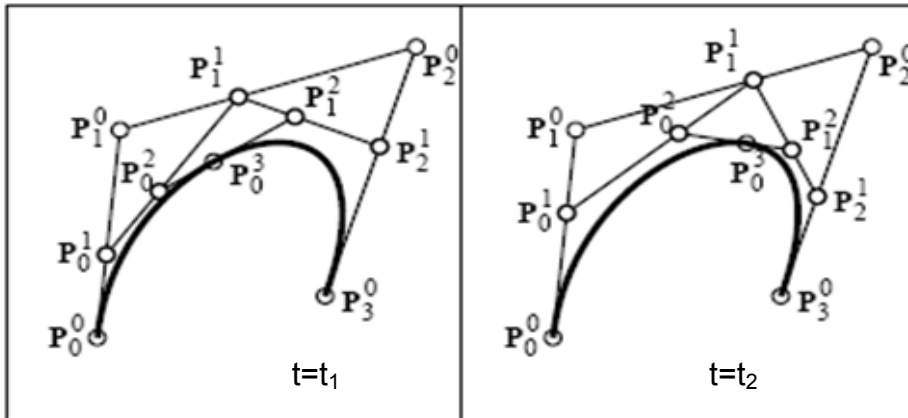
$$\vec{r}_0^2(t) = (1-t)\vec{r}_0^1 + t\vec{r}_1^1 \text{ που ανήκει στο } P_0^1P_1^1.$$



Για διάφορες τιμές της t παίρνουμε τα αντίστοιχα σημεία που τελικά σχηματίζουν το περίγραμμα της καμπύλης:



Με την ίδια διαδικασία, για 4 σημεία ελέγχου έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



Ο γενικός αναδρομικός τύπος του de Casteljau για $N+1$ σημεία $\vec{r}_0 \dots \vec{r}_N$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}_i^a(t) = (1-t)\vec{r}_i^{a-1} + t\vec{r}_{i+1}^{a-1} \quad \text{όπου} \quad \vec{r}_i^0(t) = \vec{r}_i, i = 0, \dots, N$$

Η σχέση αυτή προγραμματίζεται σαν διπλός βρόχος με τον εξωτερικό να έχει μεταβλητή την $a=1, \dots, N$ και τον εσωτερικό την $i=0, \dots, N-a$.

Στην κατανόηση του αλγοριθμικού σχήματος αυτού βοηθάει το ακόλουθο τριγωνικό μητρώο που καταλήγει σε ένα σημείο $\vec{r}_0^N(t)$ της καμπύλης για ένα συγκεκριμένο t

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_0 & & & & \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_0^1 & & & \\ \vec{r}_2 & \vec{r}_1^1 & \vec{r}_0^2 & & \\ & & & & \\ \vec{r}_N & \vec{r}_{N-1}^1 & \vec{r}_{N-2}^2 & & \vec{r}_0^N \end{bmatrix}$$

Για διάφορες τιμές t παίρνουμε άλλα σημεία της καμπύλης.

Εκτός από τον αναδρομικό τύπο του de Casteljau και τη γεωμετρική του ερμηνεία υπάρχει και αναλυτική μαθηματική έκφραση για τα σημεία της καμπύλης που χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα Bernstein:

$$B_i^a(t) = \binom{a}{i} t^i (1-t)^{a-i} \quad a=0, \dots, N$$

και δίνεται από τη σχέση : $\vec{r}_0^N(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i B_i^N(t)$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$B_i^a(t) = (1-t)B_i^{a-1}(t) + tB_{i-1}^{a-1}(t) \quad \text{με } B_0^0(t) \equiv 1$$

και $B_j^a(t) \equiv 0$, $j \notin (0, \dots, N)$.

Προγραμματίζοντας τον αναδρομικό τύπο με εξωτερικό βρόχο το $a=1, \dots, N$ και εσωτερικό το $i=0, \dots, a$ προκύπτουν οι συντελεστές $B_i^N(t)$, $i=0, \dots, N$ και άρα ένα σημείο της καμπύλης για ένα συγκεκριμένο t . Για μια κατανομή του t έχουμε μια καμπύλη.

Τελικά, για την αναπαράσταση της καμπύλης της στένωσης θα χρησιμοποιηθεί μια μητρική γραφή που δίνει κάθε σημείο της καμπύλης για συγκεκριμένο t ως:

$$\vec{r}_N(t) \equiv \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i C_i(t) \quad (4.1)$$

όπου :

$\vec{r}_i(t)$ είναι τα σημεία ελέγχου Bezier

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \dots & m_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \dots & m_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\text{και } m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i}$$

4.3.5.2 Αλλαγές στον Αλγόριθμο του Ακροφυσίου

Το μήκος στένωσης διατηρείται σταθερό για όλες τις περιπτώσεις και ίσο με 1Djet από την τρίτη έως την τέταρτη διάμετρο μήκους του ακροφυσίου όπως και το πλάτος εξόδου του ακροφυσίου ίσο με μισή διάμετρο, τα υπόλοιπα στοιχεία παραμένουν όπως πριν αλλά χρησιμοποιούνται 30 σωματίδια στο προφίλ της δέσμης.

Απενεργοποιείται ο καθορισμός θέσης σωματιδίων του τοιχώματος με βάση τη γραμμική κατανομή της στένωσης δηλαδή την γωνία και ενεργοποιείται αυτός με τα σημεία Bezier. Τα σημεία ελέγχου μπορούν να τοποθετηθούν, με κατάλληλη επέμβαση του χρήστη στον κώδικα. Για λόγους σύγκρισης με την περίπτωση της γραμμικής στένωσης, όπως είδαμε παραπάνω, το πρώτο σημείο θα κρατηθεί σταθερό στην αρχή της στένωσης και το τελευταίο σημείο στο τέλος της στένωσης δηλαδή στην έξοδο του ακροφυσίου.

Ο αριθμός και η θέση των ενδιάμεσων σημείων μπορεί να καθοριστεί από το χρήστη με κατάλληλες αλλαγές στον κώδικα.

Στο σημείο του προγράμματος που ορίζονται οι θέσεις των σωματιδίων του τοιχώματος, τα σωματίδια εκείνα που ανήκουν στην περιοχή της στένωσης διατηρούν την τετμημένη X . Για τον καθορισμό όμως της θέσης τους Y , που θα δώσει και την καμπύλη μορφή της στένωσης, καλείται μια υπορουτίνα που υλοποιεί τις κατάλληλες διαδικασίες.

Για την 2D περίπτωση που μελετάμε η διανυσματική εξίσωση (4.3) αναλύεται στις συνιστώσες :

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i C_i(t) \quad (4.1.1)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^N y_i C_i(t) \quad (4.1.2)$$

Με γνωστές τις θέσεις των σημείων X της καμπύλης και συγκεκριμένο τον αριθμό και τις θέσεις X των σημείων ελέγχου, από τη σχέση (4.1.1) προκύπτει μια Μη Γραμμική εξίσωση με άγνωστο το t η οποία επιλύεται με την απλή και γνωστή από την Αριθμητική Ανάλυση Μέθοδο της Διχοτόμησης του Διαστήματος.

Με γνωστό πλέον και το t , από τη σχέση (4.1.2) υπολογίζονται και οι θέσεις Y των σημείων της καμπύλης.

Για παράδειγμα, αν έχουμε 3 σημεία ελέγχου (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) τότε το μητρώο της σχέσης (4.2) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και για το σημείο (X, Y) της καμπύλης με άγνωστο το Y έχουμε:

$$X(t) = x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = (1 - 3t + 3t^2)x_1 + (3t - 6t^2)x_2 + 3t^2 x_3$$

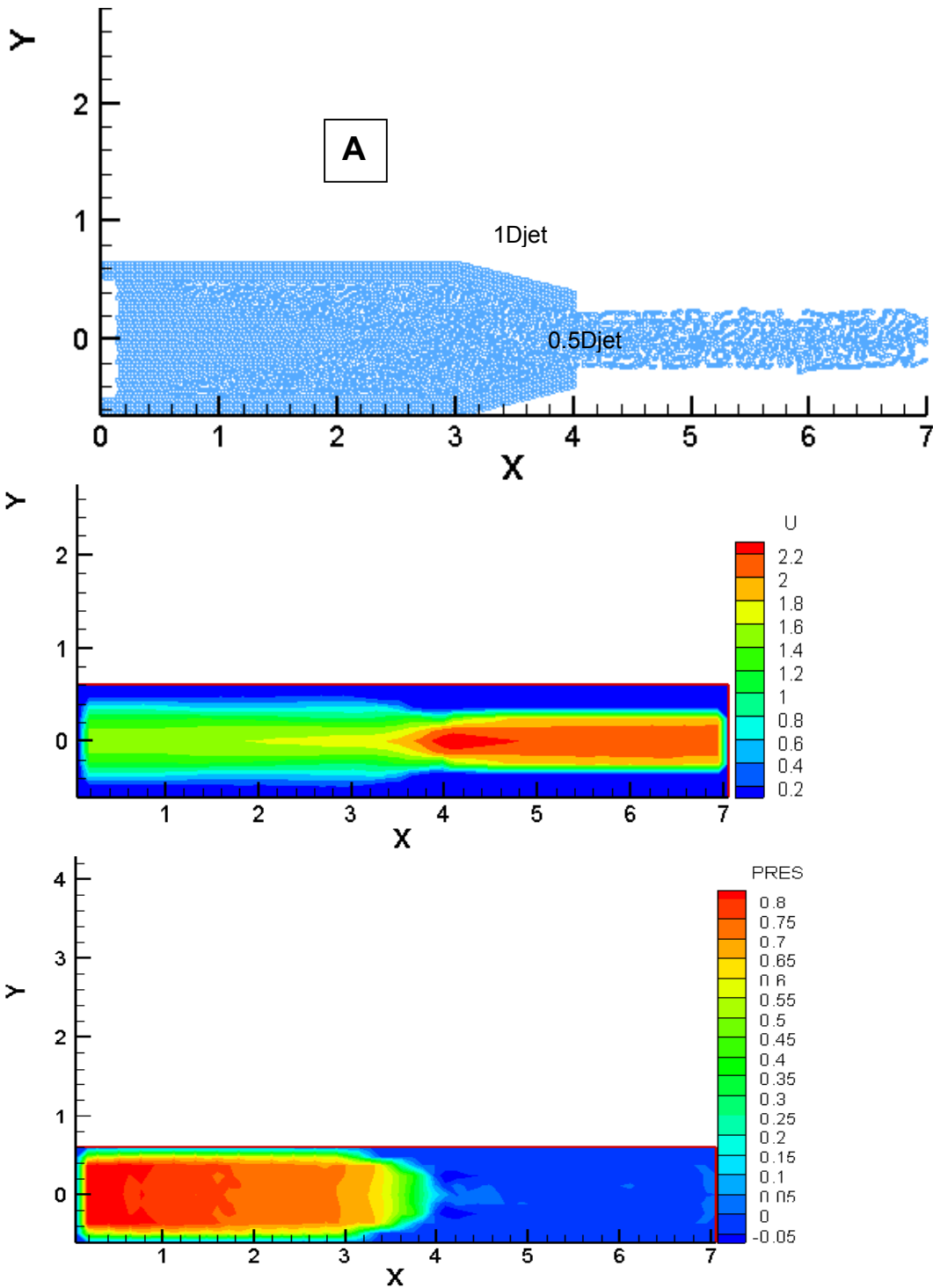
Υπολογίζουμε το t από την Μη Γραμμική Εξίσωση με τη Μέθοδο της Διχοτόμησης και το Y είναι :

$$Y(t) = y_1 C_1 + y_2 C_2 + y_3 C_3 = (1 - 3t + 3t^2)y_1 + (3t - 6t^2)y_2 + 3t^2 y_3$$

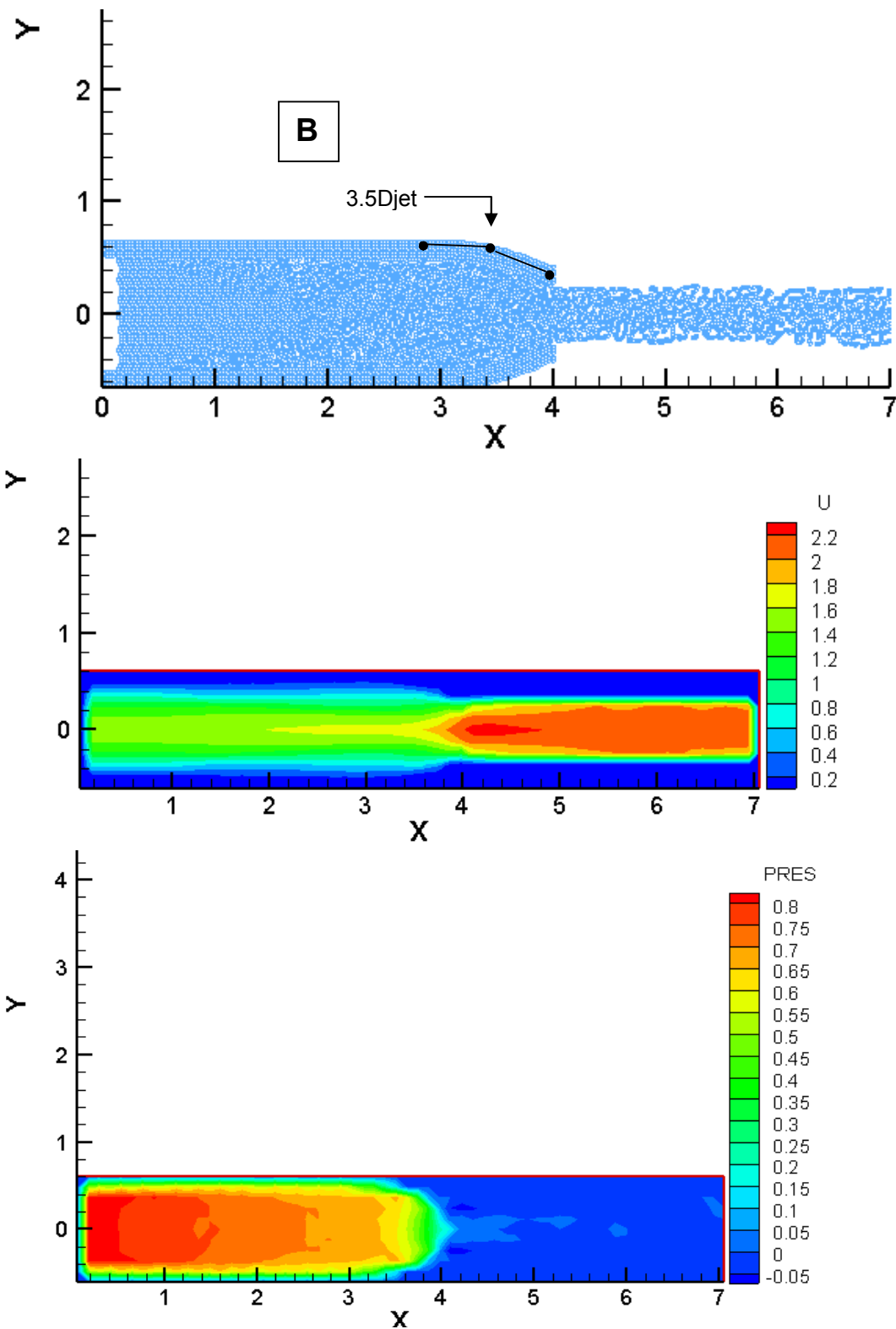
4.3.5.3 Προσέγγιση της γεωμετρίας ακροφυσίου με καμπύλες Bezier με 3 σημεία ελέγχου

Για τη σύγκριση με τις περιπτώσεις Bezier θα χρησιμοποιηθεί η περίπτωση γραμμικής στένωσης αλλά με 30 σωματίδια και με οριακές συνθήκες με δυνάμεις Lenard – Jones (βλ. και παρ.4.3.1). Με ένα μικρό σκαρίφημα φαίνεται κάθε φορά η θέση των σημείων Bezier που σχηματίζει τη μορφή της καμπύλης. Στις περιπτώσεις B και C το ενδιάμεσο σημείο Bezier τοποθετείται έτσι ώστε η καμπύλη να έχει τα κοίλα προς τα πάνω και τη μια φορά βρίσκεται στο μέσο του μήκους της στένωσης ενώ τη δεύτερη στα 8/10 του μήκους της στένωσης. Στις περιπτώσεις D και E το ενδιάμεσο σημείο Bezier τοποθετείται έτσι ώστε η καμπύλη να έχει τα κοίλα προς τα κάτω και τη μια φορά βρίσκεται στο μέσο του μήκους της στένωσης ενώ τη δεύτερη στα 2/10 του μήκους της στένωσης. Δοκιμές τοποθέτησης του ενδιάμεσου σημείου Bezier στην θέση 4Djet κατά μήκος και καμπύλη με κοίλα προς τα πάνω ή στην θέση 3Djet κατά μήκος και καμπύλη με κοίλα προς τα κάτω, απορρίφθηκαν διότι έδιναν αφύσικη μορφή της καμπύλης του ακροφυσίου με πολύ έντονες ακμές. Από τα Contour Plots φαίνονται επίσης οι διαφορές στο πεδίο τιμών της οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και της πίεσης .

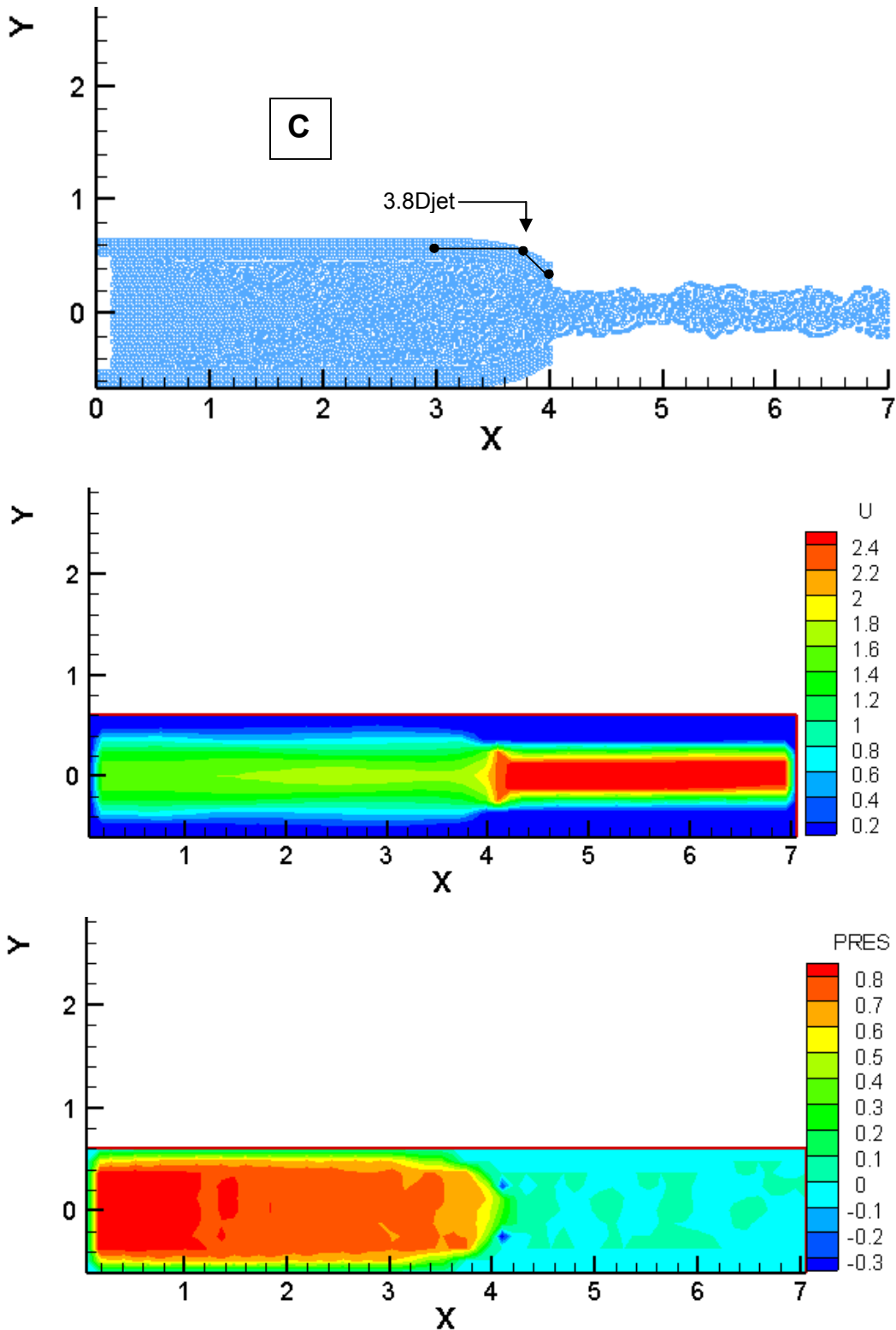
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες:



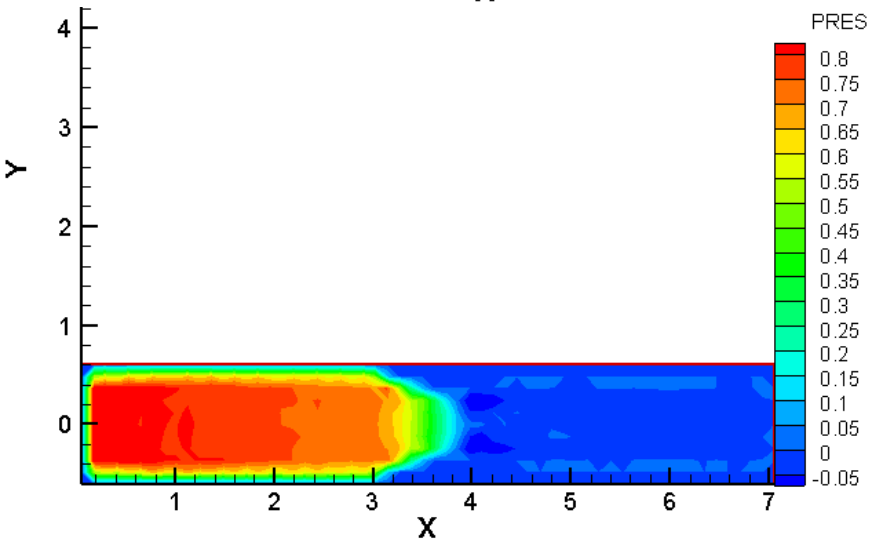
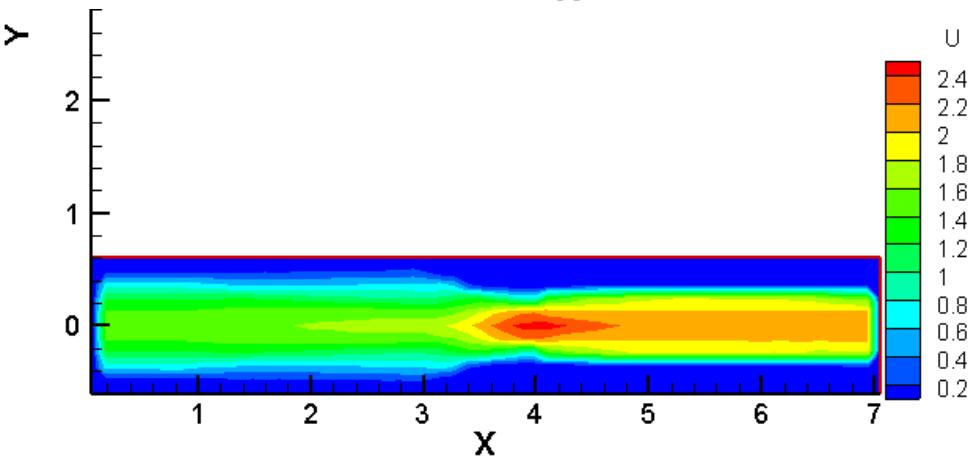
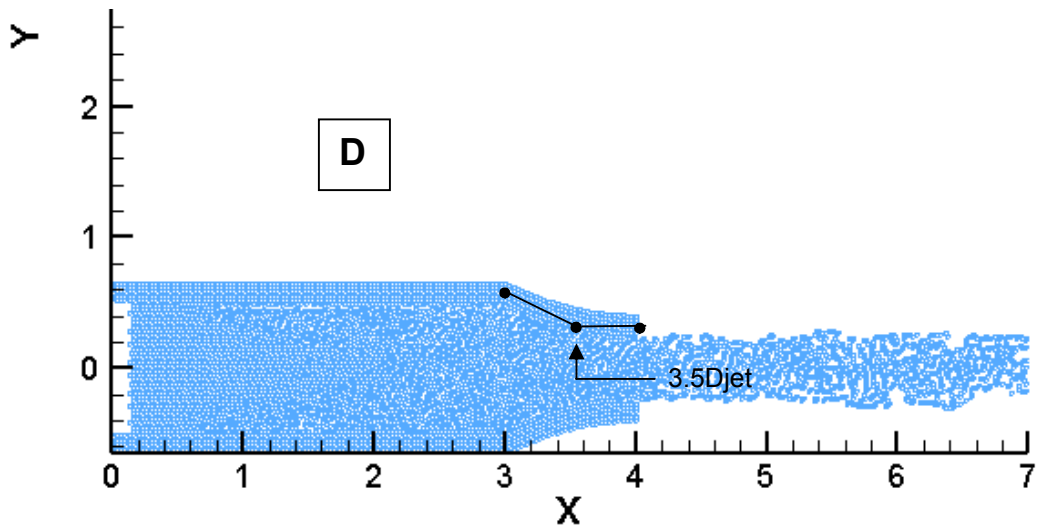
Σχ.4.30: Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης για μήκος στένωσης 1Djet, $Re=100$ και 30 σωματίδια



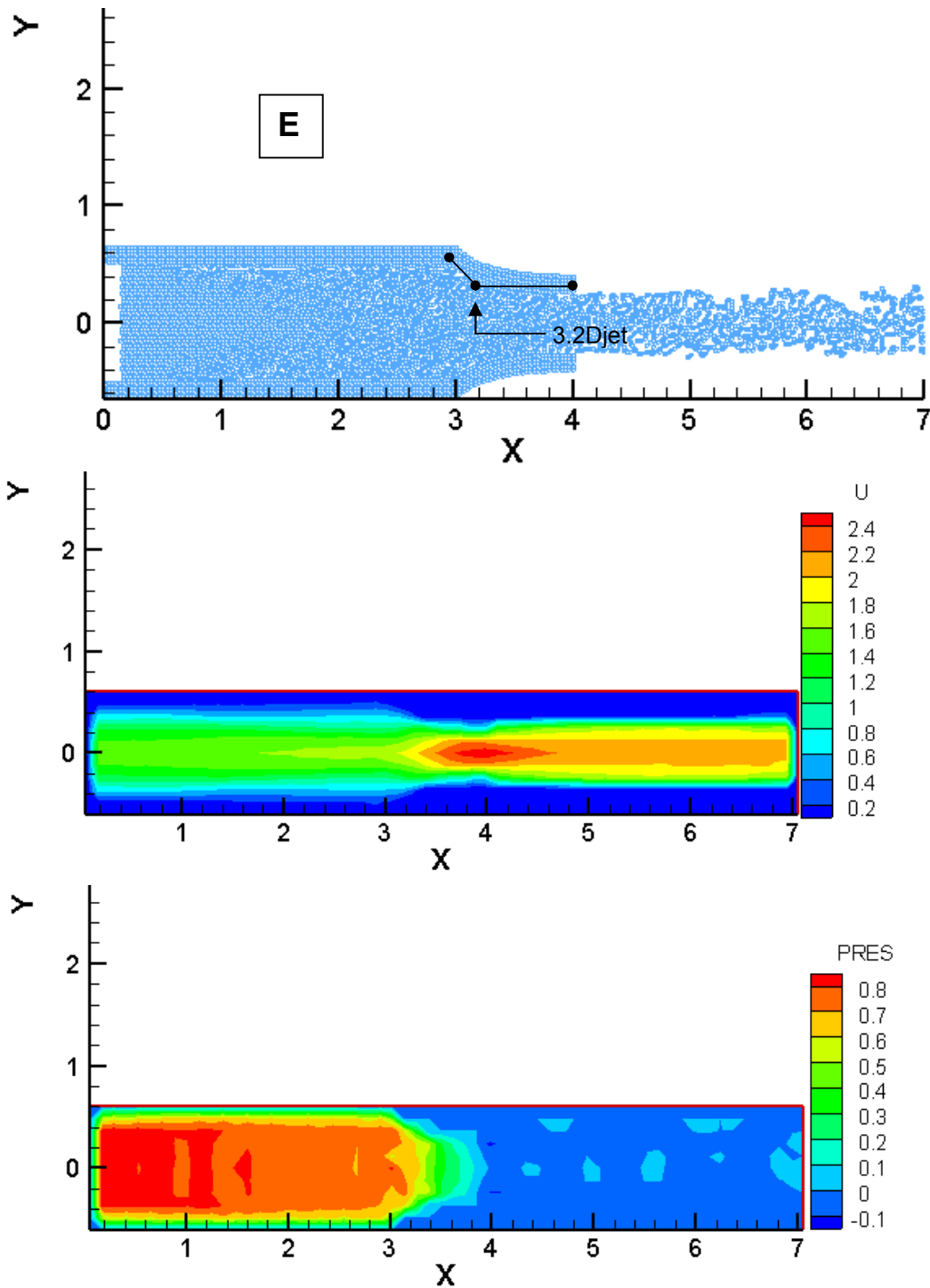
Σχ.4.31 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης . Περίπτωση Β.



Σχ.4.32 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης. Περίπτωση C.

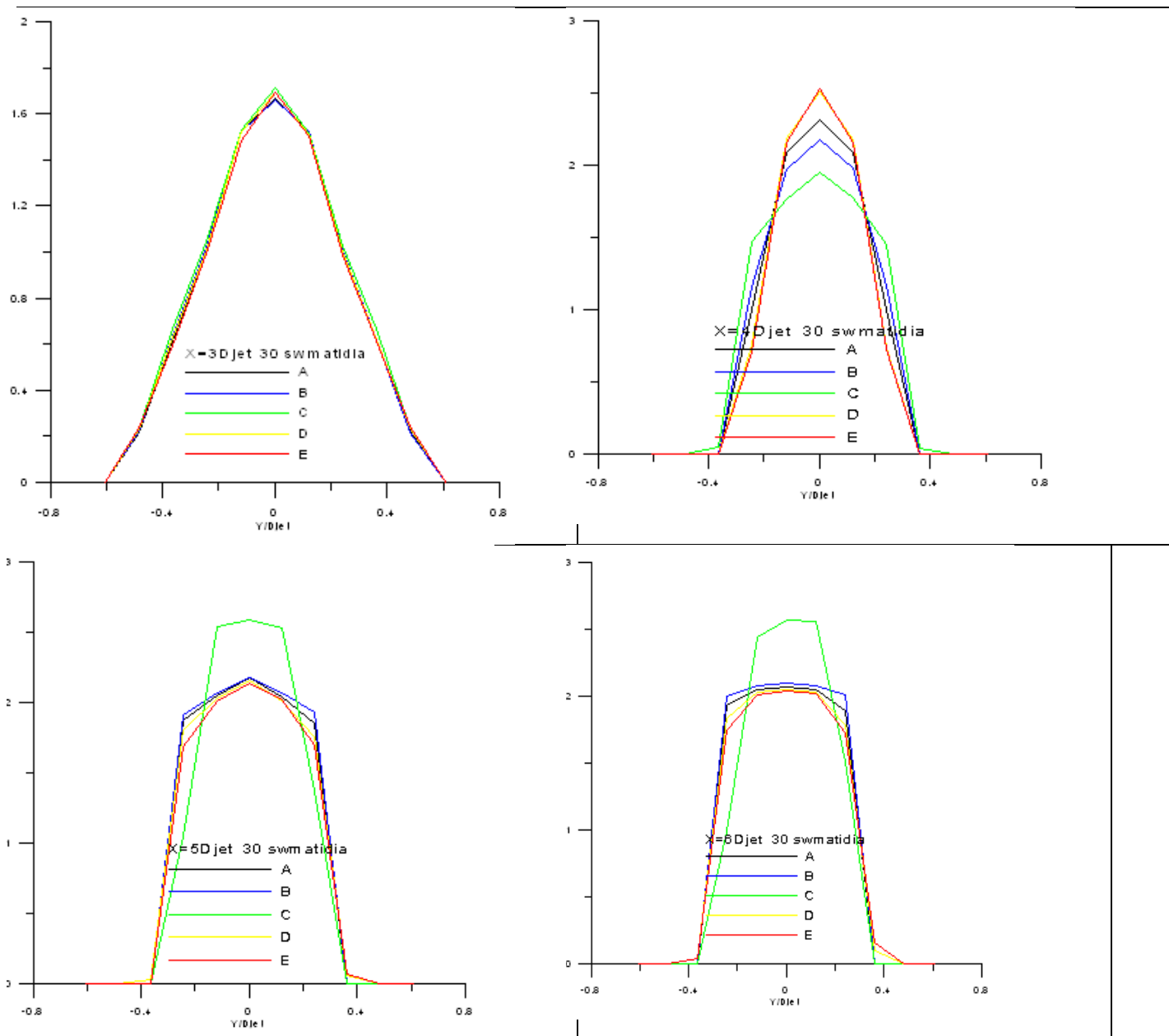


Σχ.4.33 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης. Περίπτωση D.



Σχ.4.34 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης. Περίπτωση E.

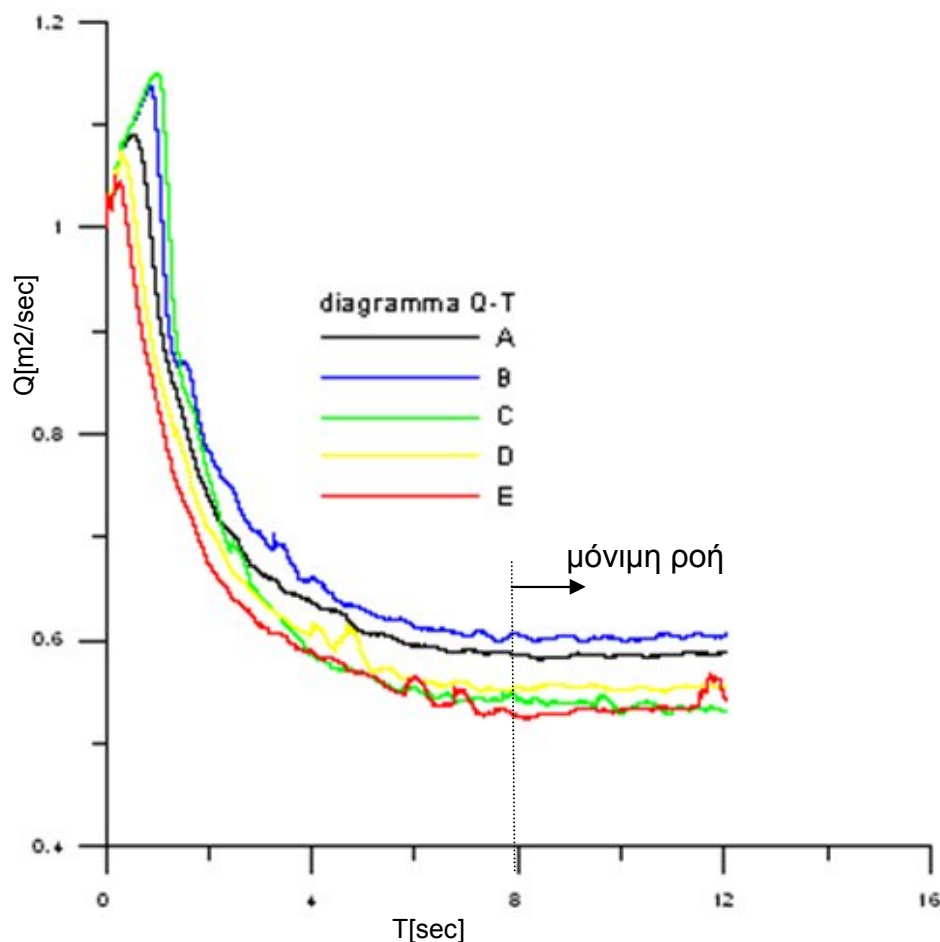
Η διάμετρος της δέσμης μετά την έξοδό της από το ακροφύσιο είναι ελαφρώς μεγαλύτερη στις περιπτώσεις D και E (Σχ.4.33,4.34), όπου παρατηρείται και η μεγαλύτερη αυξομείωση της ταχύτητας (μέγιστη 2.4m/sec στο ακροφύσιο). Η απότομη στένωση στην περίπτωση C φαίνεται να προκαλεί αισθητή μείωση της διαμέτρου της δέσμης με ταυτόχρονη αύξηση της μέγιστης ταχύτητας, όμως αυτό προκαλεί διαταραχές στη δομή και ομοιομορφία της δέσμης (Σχ.4.32). Η περίπτωση B (Σχ.4.31) φαίνεται να δημιουργεί την πιο ομαλή δέσμη, συγκρίσιμη με εκείνη της περίπτωσης A (Σχ.4.30).



Σχ. 4.35: Διαγράμματα προφίλ οριζόντιας ταχύτητας για τις 5 διαφορετικές περιπτώσεις.

Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, χρήσιμα είναι τα διαγράμματα προφίλ ταχύτητας καθώς και το διάγραμμα παροχής – χρόνου όπου μπορούν να γίνουν οι σχετικές συγκρίσεις.

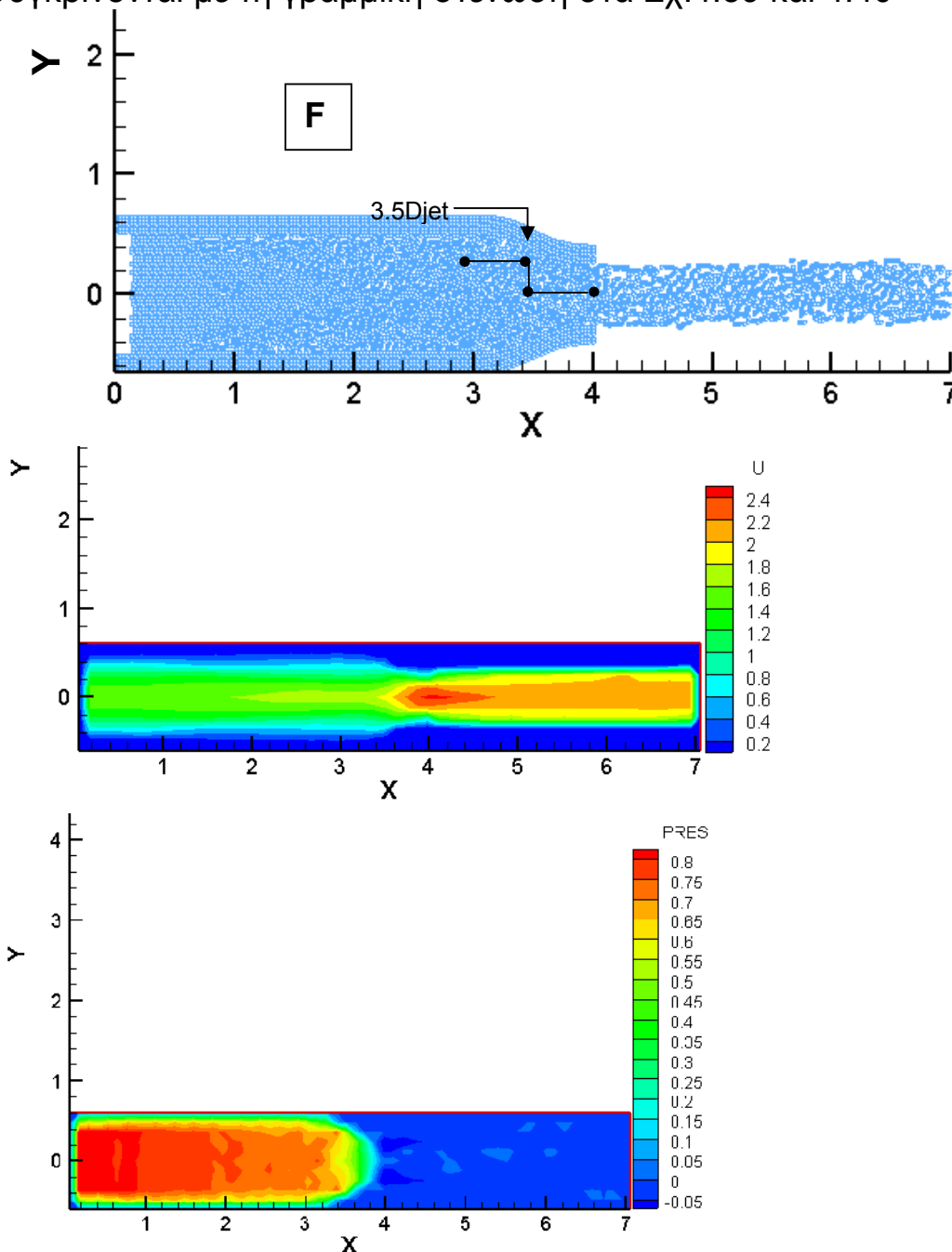
Γίνεται φανερό από τα παραπάνω ότι παίρνουμε τη μεγαλύτερη ταχύτητα για το jet μετά την έξοδό του στον ελεύθερο χώρο με την μορφή καμπύλης της περίπτωσης C αλλά ταυτόχρονα δείχνει να έχει μικρή διάμετρο (Σχ.4.30-4.35). Στο ακόλουθο Σχ.4.36 παροχής – χρόνου φαίνεται ότι τη μεγαλύτερη παροχή παίρνουμε από την περίπτωση B και μετά την A δηλαδή τη γραμμική στένωση, ενώ η C υπολείπεται σημαντικά επειδή η πολύ απότομη στένωση που έχει προκαλεί αυξημένες απώλειες. Ομοίως, οι περιπτώσεις D και E εμφανίζουν μεγαλύτερες υδραυλικές απώλειες και μικρότερη παροχή για τη δεδομένη διαφορά πίεσης. Με βάση τα παραπάνω η βέλτιστη μορφή της καμπύλης του ακροφυσίου πρέπει να έχει μορφή γραμμική με ελαφρή κλίση των κοίλων προς τα πάνω που αποτελεί και την πιο ομαλή και προοδευτική μείωση της διαμέτρου του ακροφυσίου. Σε όλες τις περιπτώσεις η ροή γίνεται πρακτικά μόνιμη μετά από περίπου 8 sec.



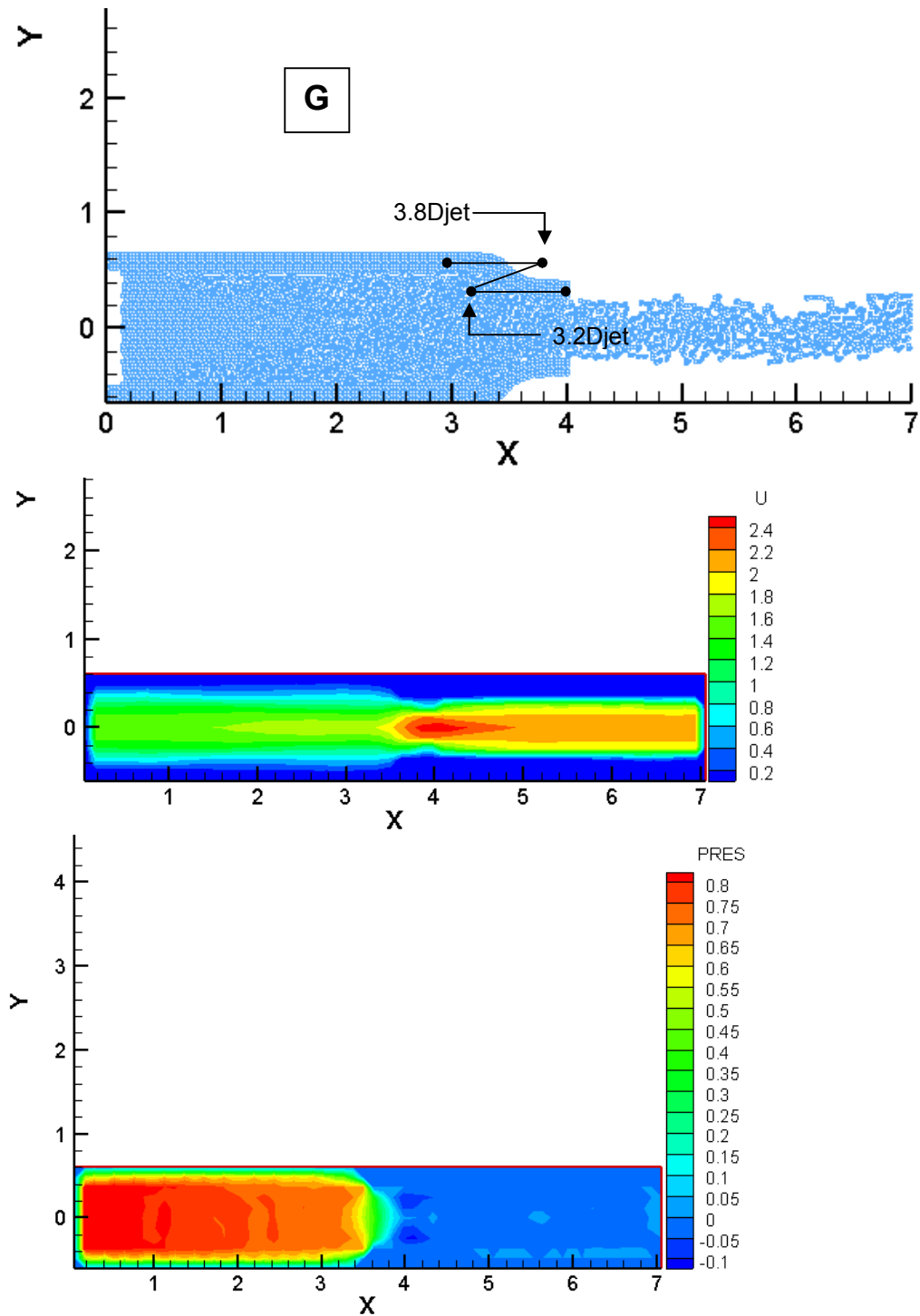
Σχ.4.36: Η παροχή ως συνάρτηση του χρόνου για τις 5 διαφορετικές περιπτώσεις.

4.3.5.4 Προσέγγιση με καμπύλες Bezier και 4 σημεία ελέγχου

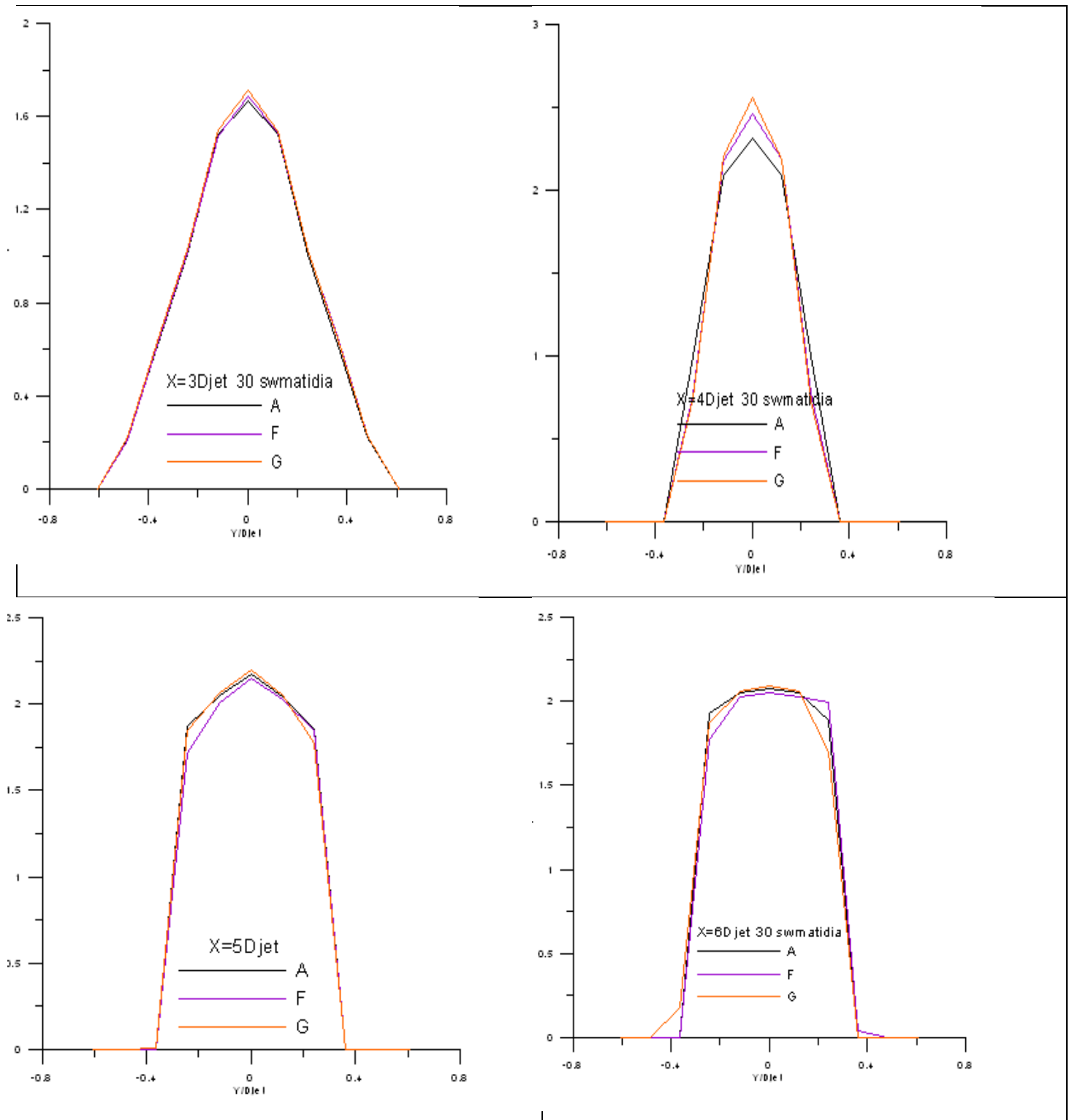
Σε μια τελευταία εφαρμογή του αλγορίθμου επαναλαμβάνονται οι ίδιες διαδικασίες όπως στην παρ.4.3.5.3 αλλά χρησιμοποιούνται 4 σημεία ελέγχου Bezier, ώστε να επιτευχθεί μια πιο σύνθετη (κοίλη-κυρτή) καμπύλη ακροφυσίου. Τα αποτελέσματα σχεδιάζονται στα επόμενα Σχ.4.37-4.38 και συγκρίνονται με τη γραμμική στένωση στα Σχ.4.39 και 4.40



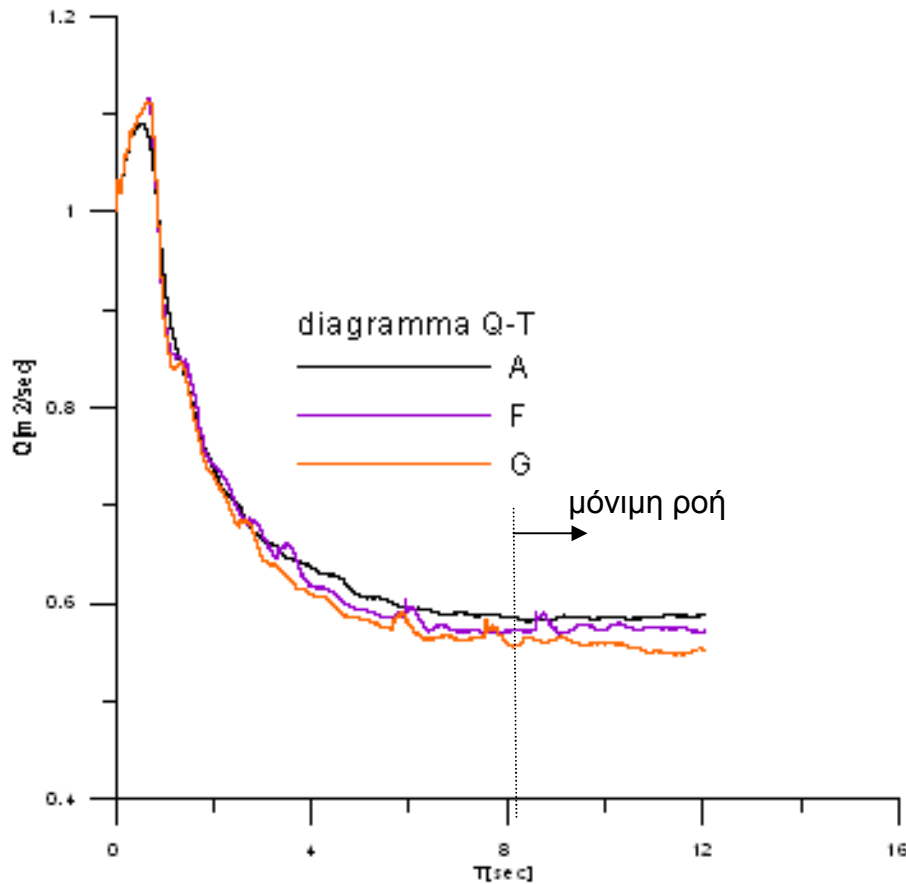
Σχ.4.37 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης. Περίπτωση F.



Σχ.4.38 : Στιγμιότυπο μόνιμης κατάστασης και Contour Plots οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας και στατικής πίεσης. Περίπτωση G.



Σχ. 4.39: Διαγράμματα προφίλ οριζόντιας ταχύτητας για τις 4 διαφορετικές θέσεις τις περιπτώσεις με 4 σημεία Bezier και τη γραμμική στένωση.



Σχ.4.40: Η παροχή ως συνάρτηση του χρόνου για τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις.

Όπως φαίνεται στα Σχ.4.39 και 4.40 οι δύο νέες αυτές περιπτώσεις δε δίνουν βελτιωμένα αποτελέσματα σε σχέση με τα προηγούμενα και πλησιάζουν πολύ αυτά της περίπτωσης της γραμμικής στένωσης τόσο ως προς το προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας και τη μέγιστη ταχύτητα, όσο και ως προς την παροχή σαν συνάρτηση του χρόνου.

Επομένως η εύρεση της βέλτιστης γεωμετρίας του ακροφυσίου δεν είναι προφανής και απαιτεί την εφαρμογή μεθόδων αριθμητικής βελτιστοποίησης σχεδιασμού.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

Συνοψίζοντας την εργασία, μπορούμε να πούμε ότι κυριότερη αφορμή για την ενασχόληση με τις μη πλεγματικές υπολογιστικές μεθόδους και πιο συγκεκριμένα με την SPH είναι η αδυναμία που παρουσιάζουν οι κλασσικές μέθοδοι στις ροές με ελεύθερη επιφάνεια και αντίστοιχα τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η SPH.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου και οι μαθηματικές σχέσεις που τον εκφράζουν δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες αν και υπάρχουν αρκετά θέματα εφαρμογής του ανοιχτά προς εξέταση όπως η εξίσωση της πίεσης και οι οριακές συνθήκες.

Η χρήση σωματιδίων για μοντελοποίηση του προβλήματος από την SPH την καθιστά ελκυστική για προβλήματα μηχανικής των ρευστών αφού τα σωματίδια εκφράζουν τη θεώρηση Lagrange που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για αυτή την περιοχή εφαρμογών.

Σαν γενικό συμπέρασμα από την υπολογιστική διερεύνηση απλών ροών είδαμε ότι ποιοτικά αναπαράγονται πολύ ικανοποιητικά.

Ο κώδικας παρουσίασε γενικά μια σταθερότητα χωρίς να λείπουν τα προβλήματα στις διάφορες εκτελέσεις του και με βασικότερες παραμέτρους για διερεύνηση σε αυτό το θέμα τον αριθμό των σωματιδίων και το χρονικό βήμα, οι τιμές των οποίων ποικίλουν ανάλογα με την περίπτωση ροής για την οποία εφαρμόζονται. Σχολιάζοντας τους χρόνους που 'έτρεξε' το πρόγραμμα για να δώσει τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο 4^ο κεφάλαιο, πρέπει να σημειωθεί ότι κυμάνθηκαν από 1 έως 12 ώρες, ανάλογα και με τον Η/Υ που χρησιμοποιήθηκε, και πάλι με παράμετρο τον αριθμό σωματιδίων, αφού αυξάνοντάς τον, χρόνοι αυξάνονται εκθετικά. Εδώ ίσως μπαίνει η ανάγκη μελλοντικά για κατάλληλη γραφή του ίδιου κώδικα ώστε να εκτελείται σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας και να δίνει γρηγορότερα αποτελέσματα από ότι σε ένα μόνο επεξεργαστή.

Η ροή Couette λόγω της απλής γεωμετρίας και αρχικών συνθηκών χρησίμευσε ως ένας πρώτος έλεγχος αξιοπιστίας του αλγόριθμου και σαν διερεύνηση της επίδρασης του αριθμού σωματιδίων και του χρονικού βήματος, ενώ η σύγκριση με την αναλυτική λύση έδωσε καλά αποτελέσματα και επιβεβαίωσε την καλή λειτουργία και αξιοπιστία του αλγορίθμου.

Στην περίπτωση του ακροφυσίου η μελέτη της γραμμικής στένωσης έδειξε μικρή επίδραση τόσο στη μορφή και τη διάμετρο του jet, όσο και στην παροχή σαν συνάρτηση του χρόνου. Η μελέτη της καμπυλωμένης στένωσης με προσέγγισή της από καμπύλες Bezier έδειξε κάποια διαφοροποίηση που οδήγησε στο συμπέρασμα ότι καλύτερα αποτελέσματα ως προς τη μέγιστη παροχή της δέσμης και τις μικρότερες υδραυλικές απώλειες στο ακροφύσιο

δίνουν μορφές καμπύλης που έχουν τα κοίλα προς τα πάνω και σχετικά ομαλή κλίση. Τέλος, με τη μείωση του αριθμού Re φάνηκε η μείωση της παροχής για δεδομένη διαφορά πίεσης αλλά και η σημαντική διεύρυνση της διαμέτρου της δέσμης στα κατάντι της εξόδου από το στόμιο του ακροφυσίου.

Η εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια γενικότερης ερευνητικής δραστηριότητας του Εργαστηρίου Υδροδυναμικών Μηχανών για την προσομοίωση της ροής στα διάφορα μέρη ενός υδροστροβίλου Pelton. Περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου πρέπει να περιλαμβάνει επέκταση του αλγορίθμου σε 3 διαστάσεις καθώς και ενσωμάτωση ενός μοντέλου τύρβης, ώστε να μπορούν να μελετηθούν πρακτικές περιπτώσεις και να συγκριθούν με πειράματα. Στη συνέχεια μπορεί να ενταχθεί και να παραμετροποιηθεί μια βελονοειδής βαλβίδα στο εσωτερικό του ακροφυσίου και να μελετηθεί αριθμητικά η λειτουργία της, που αντιστοιχεί σε μια πραγματική βαλβίδα υδροστροβίλου δράσης. Τέλος, η όλη διάταξη μπορεί να βελτιωθεί με αριθμητική βελτιστοποίηση σχεδιασμού.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

http://wiki.manchester.ac.uk/spheric/index.php/SPHERIC_Home_Page. Ιστοσελίδα της ευρωπαϊκής ερευνητικής ομάδας SPHERic για τη μέθοδο SPH.

http://wiki.manchester.ac.uk/sphysics/index.php/Main_Page

Ιστοσελίδα για το ελεύθερο λογισμικό SPHysics, γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN για προβλήματα 2Δ και 3Δ.

Στην ίδια ιστοσελίδα, ο οδηγός χρήσης του SPHysics : 'User Guide for the SPHysics Code', με στοιχεία θεωρίας .

Γιαννάκογλου Κ.Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ.: Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, (2002) Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα

Τσαγγάρης Σ. (1995): Μηχανική των ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα

Benz W. (1989), Smoothed particle hydrodynamics: a review, NATO Workshop, Les; Arcs, France.

Cleary P. et al. (2002): Flow modelling in casting processes. Applied Mathematical Modelling, 26(2): p. 171-190.

Colagrossi A. & Landrini M. (2003): Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, Journal of Computational Physics 191 448–475

Gingold R. A. & Monaghan J. J. (1977), Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181:375-389

Jiang F., Oliveira M. S. A., Sousa A. C. M. (2005): SPH Simulation of Low Reynolds Number Planar Shear Flow and Heat Convection, Mat.-wiss. u. Werkstofftech., 36, No. 10

Johnson G. R., Stryk R.A. and Beissel S.R. (1996b), SPH for high velocity impact computations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:347-373.

Libersky L. D., Petscheck A. G, Carney T. C, Hipp J. R. and Allahdadi F. A. (1993), High strain Lagrangian hydrodynamics-a three-dimensional SPH code for dynamic material response, Journal of Computational Physics, 109: 67-75.

Liu G.R. & Liu M.B. (2003): Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method, 472 pages, World Scientific, ISBN: 981-238-456-1.

Lucy L. B. (1977), Numerical approach to testing the fission hypothesis, Astronomical Journal, , 82:1013-1024.

Monaghan J. J. and Gingold R. A. (1983), Shock simulation by the particle method SPH, *Journal of Computational Physics*, 52:374-389.

Monaghan J. J. and Lattanzio J. C. (1985), A refined particle method for astrophysical problems, *Astronomy and Astrophysics*, 149:135-143.

Monaghan J. J. (1989), On the problem of penetration in particle methods, *Journal of Computational physics*, 82:1-15.

Monaghan J. J. (1992), Smoothed particle hydrodynamics, *Annual Review of Astronomical and Astrophysics*, 30:543-574.

Monaghan J.J. (1994): Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics*,. 110(2): p. 399-406.

Monaghan J.J. (2005): Smoothed particle hydrodynamics, *Rep. Prog. Phys.* 68 1703–1759

Morris J. P. (1994), A study of the stability properties of SPH, *Applied Mathematics Reports and Preprints*, Monash University.

Morris J. P. (1996), Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications, Ph. D. thesis, Monash University.

Morris Joseph P., Fox Patrick J., and Zhu Yi, (1997): Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS* 136, 214–226

Oger G. et al. (2006): Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*,. 213(2): p. 803-822.

Reichl P.J. et al(1998).: Smooth particle hydrodynamics simulation of surface coating. *Applied Mathematical Modelling*,. 22(12): p. 1037-1046

Shao S. & Lo E. (2003): Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in Water Resources* 26 787–800

Violeau D. & Issa R. (2007): Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*; 53:277–304

