

ΟΡΓΑΝΟ ΑΥΛΩΝ ΑΝΕΜΟΥ

*Μελέτη ακουστικής συμπεριφοράς
σωλήνων και εφαρμογή σε ένα νέο
μουσικό όργανο*

ORCHESTRION

GROSSHERZOG FREDRICH VON BADEN

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΟΥΤΣΟΥΡΗΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας ρευστών
Εργαστήριο Περιβαλλοντικής Τεχνολογίας



Όνομα φοιτητή:

Γιώργος Κουτσούρης

Αριθμός γενικού μητρώου:

02101013

Κύκλος σπουδών:

Ενεργειακός

Όνομα υπεύθυνου καθηγητή:

Γιώργος Μπεργελές

Παράδοση:

Οκτώβριος 2008

Όργανο Αυλών Ανέμου

Επιτομή

Με σκοπό τη δημιουργία ενός νέου μουσικού οργάνου, που θα παράγει πλήρη μουσικό λόγο υπό τη στοχαστική πνοή του ανέμου, καταβάλλεται μία εκτεταμένη προσπάθεια κατανόησης των πολύπλοκων μηχανισμών που διέπουν τη λειτουργία των πνευστών δέσμης αέρα, καθώς και των εφαρμογών τους. Αναπτύσσονται αρχικά οι απαραίτητες έννοιες της ακουστικής που συνδέουν τις γνώσεις των θετικών επιστημών με το πεδίο της μουσικής ακουστικής. Αναλύεται έπειτα λεπτομερώς η φυσική πνευστών διέγερσης αέρα, όπως ο αυλός και το φλάουτο, μέσα από πλήθος σχετικών δημοσιεύσεων. Εξετάζονται δύο μοντέλα υπολογιστικής προσομοίωσης, το πρώτο αναλύοντας τη συμπεριφορά στο πεδίο της συχνότητας, αναπτυγμένο από τον N. H. Fletcher και το δεύτερο αναλύοντας τη συμπεριφορά στο πεδίο του χρόνου, αναπτυγμένο από τον M. P. Verge. Εκτελούνται σειρές πειραμάτων πάνω σε ένα μοντέλο αυλού μεταβλητής γεωμετρίας, για εξοικείωση με τη συμπεριφορά των εν λόγω οργάνων και επαλήθευση μέρους της θεωρίας τους. Προτείνεται τέλος μία παραλλαγή στο σχήμα του συμβατικού αυλού, ώστε να μπορεί να διεγείρεται απ' ευθείας από τον άνεμο, και θα καλείται *εγκάρσιος αυλός*. Με βάση αυτή την παραλλαγή κατασκευάζεται σειρά αυλών, που αντιστοιχούν στους φθόγγους μίας μουσικής κλίμακας. Αναπτύσσονται συνοπτικά ιδέες για χωροθέτησή τους και δίνεται το έναυσμα για περαιτέρω ενασχόληση, οραματίζοντας τη μελλοντική δημιουργία ενός ολοκληρωμένου *Όργάνου Αυλών Ανέμου*.

Wind Pipe Organ

Abstract

A great effort is made in order to understand the complicated mechanisms of Air-Jet Wind musical instruments and their applications, so that it will be possible to create a new one, which will be able to produce real musical speech by the stochastic action of wind. The necessary parts of acoustics are firstly developed, relating common scientific knowledge with musical acoustics. A large number of associated papers is then used in order to study in detail the physics of Air-Jet Wind musical instruments, such as flue pipe and flute. Two simulation models are presented for the analysis of these instruments. The first one, developed by N. H. Fletcher, is in frequency domain. The second one, developed by M. P. Verge, is in time domain. Series of experiments are performed using a flue pipe of adjustable geometry, in order to get better familiar with its behavior and verify specific theoretical topics. Finally, a variation of the flue pipe formal shape is proposed, so that it can be excited directly by the wind. This will be called *transverse flue pipe*. A series of transverse flue pipes is constructed, corresponding to a typical musical scale. Some ideas are briefly developed about the placement of these pipes and conclusions are made for future building of a complete *Wind Pipe Organ*.

Εισαγωγή

Θα συμφωνήσετε ότι η διπλωματική εργασία αποτελεί για εμάς τους φοιτητές ένα κομβικό σημείο της σταδιοδρομίας μας, όντας το τελευταίο σκαλί για το πτυχίο, άσχετα αν το θέμα της είναι εύκολο ή δύσκολο, σύντομο ή χρονοβόρο. Παρακαλώ να συγχωρήσετε λοιπόν λίγη φλυαρία στο εισαγωγικό αυτό σημείωμα.

Μεγαλωμένος σε περιβάλλον τέχνης (γιος ζωγράφων και δημιουργών κινουμένων σχεδίων), αλλά και με έντονο το ενδιαφέρον προς την επιστήμη και την τεχνολογία, βρίσκομαι από μικρός σε ένα διαρκές δίλημμα για το που πρέπει να στραφώ, και δίχως να μπορώ να αποφασίσω, νιώθω ευτυχισμένος προσπαθώντας απλά να ισορροπήσω ανάμεσα στις δύο ελκτικές αυτές δυνάμεις. Τρέφω την ελπίδα πως κάποτε θα μπορέσω να τις συγχωνεύσω σε μία ομοιογενή, παραγωγική και δημιουργική δραστηριότητα.

Από το τέταρτο κιόλας έτος των σπουδών μου ο καθηγητής Γ. Μπεργελές μου είχε προτείνει την ανάληψη μίας διπλωματικής που θα πραγματευόταν τη μελέτη ενός πνευστού μουσικού οργάνου, τοποθετημένου στον υπαίθριο χώρο, παράγοντας μουσική από την στοχαστική πνοή του ανέμου. Όσο απλή και ξεκάθαρη και αν μοιάζει αυτή η ιδέα, στην πραγματικότητα είναι εξαιρετικά σύνθετη. Αιολικά μουσικά όργανα κατασκευάζονται από αρχαιοτάτων χρόνων, αποδίδοντας ευχάριστους ήχους, αλλά όχι καθαρά μουσικούς. Πολύ παραπάνω, κανένα αιολικό μουσικό όργανο δεν μπορεί μέχρι στιγμής να παράγει μελωδία, αρμονία και εν τέλει, μουσικό λόγο. Η ιδέα αυτής της εργασίας έγκειται στην κατασκευή σωλήνων διαφόρων μεγεθών, παρόμοιους με του εκκλησιαστικού οργάνου, που θα διεγείρονται από το πέρασμα του ανέμου. Μία ιδέα επίκαιρη και συνεπής με την οικολογική τάση των τελευταίων ετών, που πασχίζει να εκμεταλλευτεί την ενέργεια των ανανεωσίμων πηγών. Η φορά και η ένταση πνοής αρκούν για καθορίσουν το μουσικό φθόγγο που εκπέμπεται από ένα συγκρότημα σωλήνων δεδομένης γεωμετρίας. Αλλά οι επιμέρους συσχετίσεις είναι εξαιρετικά πολύπλοκες. Μία τέτοια μελέτη απαιτεί διεξοδική ανάλυση των πνευστών μουσικών οργάνων και μεγάλο μέρος βασικών γνώσεων της ακουστικής.

Όπως θα διαπιστώσει κάποιος διαβάζοντας την εργασία, η θεωρία των μουσικών οργάνων δεν είναι καθόλου απλή και υπάγεται στη γενικότερη επιστήμη της ακουστικής, που συνδυάζει τα ανώτερα στοιχεία των μαθηματικών και της φυσικής. Αντιμετώπισα εξαιρετική δυσκολία για την εύρεση του απαραίτητου θεωρητικού υλικού, μίας που στη χώρα μας η βιβλιογραφία της ακουστικής είναι εξαιρετικά ελλιπής [H], ενώ για μουσική ακουστική ουσιαστικά δεν υφίσταται [L]. Εξάλλου σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, ελάχιστα διδάσκονται στα πανεπιστήμια.

Δυστυχώς αποδείχθηκε αδύνατο μέσα στα πλαίσια μίας απλής πτυχιακής εργασίας να καλυφθεί πλήρως το θέμα από την αρχή του, δηλαδή από την παρουσίαση βασικών εννοιών της ακουστικής μέχρι το τέλος, την κατασκευή του οργάνου. Δίνεται όμως το έναυσμα για περισσότερες μελέτες. Αναπόφευκτα, το αμιγώς μουσικό περιεχόμενο της διπλωματικής είναι φτωχό, μπροστά σε αυτά που απαιτούνται για τη λειτουργικότητα και τη βελτιστοποίηση ενός πραγματικού τέτοιου οργάνου, που όχι μόνο παράγει μουσικούς ήχους, αλλά ολοκληρωμένη μουσική. Απεναντίας, το υλικό έπρεπε πρωτίστως να συμβαδίζει με το ύφος των σπουδών του μηχανολόγου.

Κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής μου, μέσα από το διάβασμα βιβλίων και δημοσιεύσεων υψηλού επιπέδου καθώς και μέσα από τις πειραματικές εργασίες, χρειάστηκε να επαναλάβω και να κατανοήσω εκ νέου πολλά από τα μαθήματα της σχολής, τα οποία νόμιζα πως κατείχα, δίχως όμως να έχω συνειδητοποιήσει την πραγματική τους χρησιμότητα. Αυτό υπήρξε και η μεγαλύτερη μου ανταμοιβή. Και δε μετανιώνω για την ανάληψη μίας δύσκολης σχετικά διπλωματικής, που μου καθυστέρησε το πτυχίο, παρά μίας απλής εργασίας εξαμήνου. Πιστεύω ότι το κίνητρο ενός μηχανικού είναι πάνω απ' όλα η δημιουργία και η ποιότητα ζωής. Γνωρίζοντας καλά την εργασία του μπορεί να αποζητά και υλική αμοιβή. Αλλά το να αποκτά κανείς πτυχία και τίτλους δίχως να ξέρει το γιατί, είναι απλά χάσιμο χρόνου.

Στην εποχή της ταχύτητας, της φτήνιας, της προχειρότητας και των κλεμμένων ιδεών, ας κρατήσουμε χαρακτήρα εμείς οι φοιτητές και να μην παρασυρόμαστε από τάσεις που καταστρέφουν την προσωπικότητά μας. Ας φτιάξουμε τη ζωή μας με μεράκι και αγάπη για αυτό που κάνουμε, ώστε να συνεισφέρουμε θετικά στον πολιτισμό μας, χωρίς να τον καταστρέφουμε. Και αυτή είναι η συμβουλή μου, αν μου επιτρέπεται, προς τους νέους μηχανικούς. Γνωρίζοντας τις ρίζες μας, να πρωτοτυπούμε προς το καλύτερο!

Η διπλωματική αποτελείται από τέσσερα μέρη. Στο πρώτο επιχειρείται μία σύνδεση των όσων έχουμε διδαχθεί από βασικά μαθήματα, όπως τα μαθηματικά, η φυσική και η μηχανική ρευστών με τις θεμελιώδεις έννοιες της ακουστικής. Χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία προχωρούμε στο δεύτερο μέρος, σε ανάλυση των μουσικών οργάνων και εμβάθυνση στη λειτουργία των πνευστών που διεγείρονται από ρεύμα αέρα. Τέτοια πνευστά είναι το φλάουτο, η φλογέρα και το εντυπωσιακό από κάθε άποψη εκκλησιαστικό όργανο, του οποίου πολλά στοιχεία μπορούν να εφαρμοστούν στην κατασκευή του αιολικού οργάνου που διαπραγματευόμαστε. Γίνεται επίσης αναφορά σε γνωστά αιολικά πνευστά του παρελθόντος. Στο τρίτο μέρος, παρουσιάζονται και υλοποιούνται κάποια από τα πολλά υπολογιστικά μοντέλα, τα οποία με τη βοήθεια Η/Υ προσομοιώνουν (simulate) τη λειτουργία των πνευστών, με δεδομένα τη γεωμετρία τους και τις συνθήκες εισόδου. Μόνο με τη χρήση προηγμένων υπολογιστικών προγραμμάτων θα είναι σε θέση κάποιος να σχεδιάσει ένα σύγχρονο αιολικό όργανο, με γνωστή εκ των προτέρων συμπεριφορά σε διάφορες συνθήκες ανέμου. Τέλος, στο τέταρτο μέρος εκτελούνται σειρές πειραμάτων για την παραβολή των βασικών φαινομένων των πνευστών που διεγείρονται από ρεύμα αέρα με τη θεωρία και προτείνονται σχηματισμοί που μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετέπειτα σε διατάξεις σύγχρονων αιολικών οργάνων.

Για τη συνέπεια προς τον αναγνώστη πρέπει να αναφερθεί εξ' αρχής το πρόβλημα των συμβόλων. Η ενασχόληση των επιστημόνων με τα μουσικά όργανα έχει ηλικία μόλις κάποιων δεκαετιών, ώστε η μουσική ακουστική να θεωρείται ένα πεδίο πρόσφατο και σύγχρονο. Άμεση συνέπεια αυτού είναι η θεωρία των πνευστών δέσμης αέρα να εξελίσσεται μέρα με τη μέρα είτε από τον ίδιο είτε από διαφορετικούς μελετητές. Μαζί με την εξέλιξη των θεωριών, εξελίσσονται και τα σύμβολα των μεγεθών που υπεισέρχονται στις δημοσιεύσεις. Καθώς η εργασία αποτελεί κατά κύριο λόγο μία επισκόπηση αυτών των δημοσιεύσεων, χρησιμοποιώντας αναπόφευκτα πολλά από τα σχήματά τους ατόφια, ήμουν αναγκασμένος να ακολουθήσω τις αλλαγές των συμβολισμών για ίδια μεγέθη, παρά τη μεγάλη προσπάθεια που κατέβαλα για την ενοποίηση τους.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για την παρακολούθηση της διπλωματικής είναι βασικές έννοιες τριγωνομετρίας, μιγαδική ανάλυση, διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, δυναμοσειρές, μετασχηματισμοί, κυματική φυσική, ταλαντώσεις, μηχανική ρευστών, θερμοδυναμική, θεωρία συστημάτων, συναρτήσεις μεταφοράς, φίλτρα και στοιχειώδης θεωρία της μουσικής. Όλα, εκτός του τελευταίου, είναι διδαγμένα λίγο πολύ σε όλους τους προπτυχιακούς φοιτητές θετικών επιστημών.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Γιώργο Μπεργελέ για τρεις λόγους: 1) Που μου εμπιστεύτηκε ένα πρωτότυπο και εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα. 2) Για τις συμβουλές και τις παρατηρήσεις του και 3) Για την κατανόηση που επέδειξε στις καθυστερήσεις που συνόδευαν την εκπόνηση και οφείλονταν κυρίως σε αστάθμητους παράγοντες, σε εργασία και στρατιωτικό.

Σημαντική για μένα ήταν και η ηλεκτρονική επικοινωνία με τον καθηγητή του Εθνικού Πανεπιστήμιου της Αυστραλίας και διάσημου ακουστικολόγου Ν. Η. Fletcher, παρά τη σύντομη διάρκειά της.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου για όλα όσα μου προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια, τους συγγενείς και τους φίλους μου. Αισθάνομαι πιο τυχερός από κάθε άλλον για το ότι τροφοδοτήθηκα απ' τους γονείς μου με την αστείρευτη επιθυμία να πετυχαίνω τους στόχους μου μέσα από προσωπικούς αγώνες, να δουλεύω εντατικά για να βγάλω το ψωμί μου (από τα πρώτα κιόλας φοιτητικά χρόνια), να επιζητώ την καλαισθησία και την ποιότητα στο περιβάλλον μου και να απολαμβάνω τη ζωή μέσα από δραστηριότητες που με μεταπλάθουν σε έναν καλύτερο άνθρωπο.

Θα έλεγα ότι το ουσιαστικό μέρος της εργασίας εκπονήθηκε τον τελευταίο ενάμιση χρόνο με εντατικούς ρυθμούς, παράλληλα με σπουδές στη μουσική, δουλειές «του ποδαριού» και στρατιωτική θητεία, πράγμα που θα ήταν αδύνατο δίχως τη σπάνια, στις μέρες μας, συμπαράσταση και κατανόηση της φίλης μου Στελίνας, που αποτελεί για μένα ένα από τα πολυτιμότερα δώρα που μου προσέφερε μέχρι τώρα η ζωή. Την ευχαριστώ για όλα!

Στην υγεία των ωραίων επινοήσεων του ανθρώπου, της φύσης και της αρμονικής συνύπαρξής τους!

*Αφιερωμένη στα γονιδιά μου,
σπαρμένα στους τάφους
των παππούδων μου.*

Περιεχόμενα

Μέρος I – Ακουστική

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στον ήχο

1.1 Περιγραφή του ήχου	1
1.2 Ο ήχος στα στερεά	2
1.3 Ταλαντώσεις και ήχος	4
1.4 Ορισμοί	4

Κεφάλαιο 2

Η κυματική εξίσωση

2.1 Διατήρηση της μάζας	5
2.2 Διατήρηση της ορμής	7
2.3 Διατήρηση της ενέργειας	10
2.4 Θερμοδυναμικές εξισώσεις και ταχύτητα του ήχου	10
2.5 Κατάστροφη των ακουστικών εξισώσεων	12
2.6 Χρήση του δυναμικού ταχύτητας στην κυματική εξίσωση	15
2.7 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και κυματική εξίσωση	17
2.8 Η φυσική σημασία του δυναμικού ταχύτητας	19

Κεφάλαιο 3

Οι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

3.1 Οδεύοντα κύματα	20
3.2 Στάσιμα κύματα	22
3.3 Σχέση μεταξύ της λύσης για οδεύον και της λύσης για στάσιμο κύμα	24
3.4 Η πίεση και η σημειακή ταχύτητα σε ένα επίπεδο οδεύον κύμα	25

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Fourier

4.1 Τύποι Euler-Fourier	28
4.2 Η σειρά Fourier στην ακουστική	29
4.3 Ανάλυση Fourier με περιστρεφόμενα διανύσματα	30
4.4 Υλοποίηση ανάλυσης Fourier με χρήση φίλτρων	32
4.5 Μετάβαση από τη σειρά στο ολοκλήρωμα Fourier	32
4.6 Μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform)	33
4.7 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform -DFT)	35
4.8 Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform - FFT)	39

Κεφάλαιο 5

Χρήσιμα μεγέθη της ακουστικής

5.1 Οκτάβες	41
5.2 Ηχητική στάθμη	43

5.3 Ένταση.....	45
5.4 Στάθμη ακουστότητας	46
5.5 Καμπύλες στάθμισης	47

Κεφάλαιο 6

Ταλαντώσεις και συντονισμός

6.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις.....	49
6.2 Ταλαντώσεις με απόσβεση	51
6.3 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.....	54
6.4 Απόκριση συστήματος σε μεταβατικές δυνάμεις	58
6.5 Συζευγμένες ταλαντώσεις.....	61
6.6 Ακουστικά ανάλογα.....	69
6.7 Ακουστικές εμπεδήσεις	70

Κεφάλαιο 7

Ο ήχος σε κυματοδηγούς και σωλήνες

7.1 Ορθογώνια κοιλότητα.....	71
7.2 Δισδιάστατος κυματοδηγός	73
7.3 Διαδιδόμενα κύματα και πεδία διαταραχών	75
7.4 Ορθογωνικός κυματοδηγός.....	76
7.5 Ακουστικοί σωλήνες.....	78
7.6 Σωλήνας απείρου μήκους	78
7.7 Σωλήνας με κλειστό το ένα άκρο	78
7.8 Σωλήνας πλήρως ανοικτός	81
7.9 Ενεργειακή ακτινοβολήση από πλήρως ανοικτούς σωλήνες.....	83
7.10 Στάσιμα κύματα στους ακουστικούς σωλήνες	84
7.11 Δοχείο Helmholtz	85

Μέρος II – Θεωρητική μελέτη

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικοί ορισμοί στη μουσική

1.1 Μουσική και μουσικά όργανα	1
1.2 Αρμονικές, ηχόχρωμα, φθόγγοι και τόνοι	1
1.3 Ηχητικό φάσμα	2
1.4 Η συμπεριφορά των μουσικών οργάνων	3
1.5 Λίγα για τα μουσικά διαστήματα.....	3

Κεφάλαιο 2

Οικογένειες μουσικών οργάνων

2.1 Έγχορδα.....	5
2.2 Κρουστά	6
2.3 Πνευστά.....	7
2.4 Ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά όργανα.....	7
2.5 Πληκτροφόρα	7
2.6 Η σύγχρονη κατηγοριοποίηση.....	7
2.7 Η συχνοτική έκταση των μουσικών οργάνων.....	8

Κεφάλαιο 3 Η φυσική των πνευστών

3.1 Ταλαντώσεις του αέρα.....	10
3.2 Διέγερση της αέριας στήλης και φθόγγοι	10
3.3 Ταξινόμηση των πνευστών.....	10
3.4 Οι δομικοί μηχανισμοί των πνευστών	13
3.5 Τρόποι μελέτης των πνευστών	15
3.6 Εμπέδηση εισόδου.....	18
3.7 Απώλειες ενέργειας	20

Κεφάλαιο 4 Πνευστά δέσμης αέρα (Air-Jet Wind instruments)

4.1 Γενική θεώρηση.....	24
4.2 Ο αυλός και το όργανο αυλών	25
4.3 Η ιστορία του οργάνου αυλών.....	26
4.4 Η γεωμετρία ενός αυλού.....	27
4.5 Είδη αυλών (Flue pipes)	29
4.6 Ταξινόμηση αυλών σύμφωνα με το αρμονικό φάσμα	31
4.7 Μήκη αυλών και stops.....	32
4.8 Τόνοι συνδυασμού (combinational tones)	36
4.9 Το υλικό των αυλών	38
4.10 Το φάσμα συχνοτήτων της μόνιμης (σταθερής) κατάστασης.....	51
4.11 Υπολογισμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.....	58

Κεφάλαιο 5 Ο μηχανισμός διέγερσης στα Air-Jet πνευστά

5.1 Μορφή και κίνηση της δέσμης.....	60
5.2 Ακουστικές πηγές.....	63
5.3 Η συμπεριφορά της δέσμης στα air-jet πνευστά.....	65
5.4 Αλληλεπίδραση δέσμης - ακουστικού πεδίου	66
5.5 Σύζευξη δέσμης – συντονιστή. Jet-drive μηχανισμός.....	67
5.6 Η εμπέδηση της δέσμης.....	72
5.7 Η μη γραμμικότητα.....	74
5.8 Ο αναδραστικός μηχανισμός δέσμης.....	76
5.9 Ο λόγος l/h	79
5.10 Ο αριθμός Ising.....	80
5.11 Η μεταβατική κατάσταση στους αυλούς	81

Κεφάλαιο 6 Κλιμάκωση Αυλών (pipe scaling)

6.1 Κατασταλαγμένη γνώση.....	84
6.2 Φυσική ανάλυση της κλιμάκωσης αυλών.....	86

Κεφάλαιο 7 Αιολικά Πνευστά

7.1 Γενικά σχόλια	91
7.2 Ιστορία των αιολικών οργάνων	94
7.3 Φλάουτα χαρταετών (Kite flutes)	95
7.4 Φλάουτα περιστεριών (Pigeon flutes)	97
7.5 Αιολικό όργανο από Bamboo (Bamboo Aeolian organ)	101

Μέρος III – Υπολογιστική μελέτη

Κεφάλαιο 1

Υπολογιστικά μοντέλα προσομοίωσης των Air-Jet πνευστών

1.1 Η έννοια του υπολογιστικού μοντέλου στα μουσικά όργανα	1
1.2 Γνωστά υπολογιστικά μοντέλα	1

Κεφάλαιο 2

Frequency-domain αριθμητικό μοντέλο του N. H. Fletcher

2.1 Εξισώσεις συστήματος	4
2.2 Η επίλυση	5
2.3 Επίλυση με τη μέθοδο των Αργά Μεταβαλλόμενων Παραμέτρων	6
2.4 Μεταβατική κατάσταση (Transient state)	8
2.5 Αριθμητικοί υπολογισμοί	14
2.6 Σταθερή κατάσταση (Steady State) – Βελτιωμένο μοντέλο	24
2.7 Εξισώσεις δέσμης	24
2.8 Οι εξισώσεις συστήματος	31
2.9 Περισσότεροι τρόποι συντονισμού και όροι	33
2.10 Μέγιστη δυνατή ισχύς εξόδου	44

Κεφάλαιο 3

Time-domain αριθμητικό μοντέλο του M. P. Verge

3.1 Βασικό μοντέλο και εξισώσεις	45
3.2 Μοντελοποίηση των ταλαντώσεων της δέσμης	48
3.3 Μοντελοποίηση του συντονιστή	60
3.4 Ακτινοβολήση του ήχου	61
3.5 Ενεργειακές απώλειες	62
3.6 Διάχυση δινών στο άνω χείλος – Vortex Shedding	65
3.7 Παραγωγή θορύβου λόγω στροβιλισμών	68
3.8 Η κύρια εξίσωση του μοντέλου	68
3.9 Αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων	68
3.10 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων	72

Μέρος IV – Πειραματική μελέτη

Κεφάλαιο 1

Πειραματική μελέτη Ηχητικού Φάσματος Αυλού

1.1 Περιγραφή της πειραματικής διάταξης	1
1.2 Εκτέλεση των μετρήσεων	5
1.3 Πείραμα με οριζόντιο αυλό τετραγωνικής διατομής	7
1.4 Πείραμα με οριζόντιο αυλό ορθογωνικής διατομής	33
1.5 Πείραμα με Εγκάρσιο Αυλό διατομής 19 mm x 25 mm	38
1.6 Πείραμα με Εγκάρσιο Αυλό διατομής 19 mm x 19 mm	45

Κεφάλαιο 2

Συγκρότημα εγκάρσιων αυλών

2.1 Κατασκευή συγκροτήματος εγκάρσιων αυλών	51
2.2 Κατασκευή ορθογώνιου εγκάρσιου αυλού	60
2.3 Simulation.....	63
2.4 Κοίλος εγκάρσιος αυλός	67
2.5 Συζήτηση και περαιτέρω εργασία.....	68

Βιβλιογραφική αναφορά

Μέρος Ι

Ακουστική

1

Εισαγωγή στον ήχο

1.1 Περιγραφή του ήχου

Από παλαιότατων χρόνων, ο ήχος ήταν οτιδήποτε μπορούσε να ακουστεί από τον άνθρωπο. Κατά συνέπεια θεωρούσαν ότι συνίστατο από περιοδικές ή μη περιοδικές ταλαντώσεις του αέρα στο συχνοτικό εύρος ευαισθησίας του ανθρώπινου αυτιού. Ωστόσο, είναι σήμερα εξακριβωμένο ότι παρόμοιες ταλαντώσεις μπορούν να εμφανιστούν εκτός απ' τον αέρα, και σε υγρά και σε στερεά. Έτσι, το ανθρώπινο αυτί μπορεί να αντιληφθεί ήχο που δημιουργείται και διαδίδεται από όλες τις καταστάσεις τις ύλης. Συνήθως παρεμβάλλεται η αέρια κατάσταση (ατμοσφαιρικός αέρας), ως μέσο διάδοσης μεταξύ ηχητικής πηγής και αυτιού. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις κατά τις οποίες το μέσο διάδοσης είναι μία από τις άλλες καταστάσεις και το πιο φημισμένο παράδειγμα είναι το νερό όταν έχουμε το κεφάλι μας βυθισμένο στη θάλασσα.

Στην καθημερινή μας ζωή βιώνουμε ήχους που προκύπτουν από εξαιρετικά μικρές μεταβολές πίεσης, πυκνότητας και θερμοκρασίας. Σε κάθε αέριο, η πίεση, η πυκνότητα και η θερμοκρασία μεταβάλλονται με το χρόνο και σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της καταστατικής εξίσωσης του αερίου. Μεταβολές των τριών παραπάνω μεταβλητών συμβαίνουν συνεχώς στον ατμοσφαιρικό αέρα. Είναι γνωστοί οι όροι βαρομετρικό χαμηλό ή υψηλό, όπως επίσης και οι κινήσεις των αέριων μαζών. Αυτά και πολλά άλλα φαινόμενα σχετίζονται με τις μεταβολές των θερμοδυναμικών αυτών μεταβλητών, αλλά η χρονική διάρκεια μεταβολής τους είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι συμβαίνει με τον ήχο. Αυτό που διαφοροποιεί τις ακουστικές διαταραχές από τις υπόλοιπες είναι ότι διαδίδονται πολύ γρήγορα σε ένα ρευστό με ταχύτητα που εξαρτάται από το εκάστοτε ρευστό, αλλά και που επηρεάζεται από μία σειρά παραμέτρους όπως η θερμοκρασία. Η ταχύτητα αυτή καλείται *ταχύτητα του ήχου*.

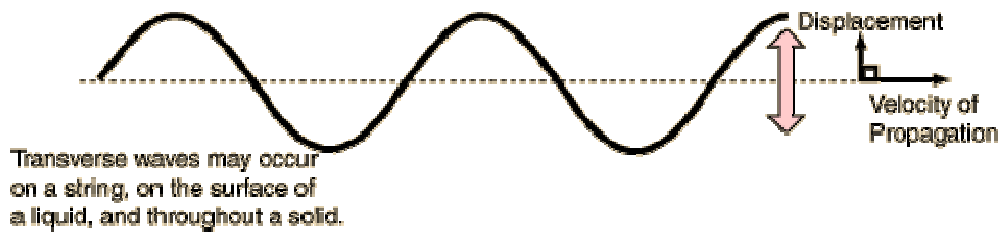
Στα ρευστά μία μεταβολή του όγκου σε δεδομένη μάζα παράγει μία ανάλογη πίεση αντίδρασης και αυτός είναι ο λόγος που χαρακτηρίζονται ελαστικά. Σε ένα αμορτισέρ αέρα, πιέζοντας το έμβολο προς τα κάτω, αυτό τείνει να επανέλθει στην αρχική του θέση, λόγω της ελαστικότητας. Ωστόσο, ακόμα και αν τα τοιχώματά του κυλίνδρου είναι τέτοια που εμποδίζουν τη θερμική συναλλαγή του εσωτερικού αέρα με το περιβάλλον, το έμβολο δεν θα επανέλθει ποτέ στην ακριβή αρχική του θέση, εξ' αιτίας των φαινομένων συνεκτικότητας και εν γένει επειδή ο αέρας από μόνος του δεν είναι ιδανικά ελαστικός. Ο μηχανισμός της διάδοσης του ήχου περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση μεταξύ διαταραχών πίεσης, οι οποίες δημιουργούνται απ' την ελαστική αντίδραση του αέρα και τείνουν να μεταβάλλουν την ορμή των στοιχειωδών σωματιδίων του, και την ίδια την αδράνεια των σωματιδίων, η οποία τείνει να τα διατηρήσει στις αρχικές τους «θέσεις». Κατά τη εκτροπή ενός σωματιδίου από τη θέση ισορροπίας του, δημιουργείται προς την κατεύθυνση εκτροπής, αύξηση πίεσης (συμπίεση) και προς την αντίθετη, μείωση (αραίωση). Αυτή η διαφορά πιέσεων τείνει να επαναφέρει το σωματίδιο στην αρχική θέση και μάλιστα να το εκτρέψει προς την αντίθετη φορά, όπως ακριβώς συμβαίνει σε ένα εκκρεμές. Αυτή είναι η αρχή μίας *ακουστικής διαταραχής*.

Ποιοτική περιγραφή της διάδοσης του ήχου

Οι ακουστικές διαταραχές διαδίδονται με τη μορφή κυμάτων. Ένα κύμα σε ένα υλικό μέσο μπορεί να οριστεί ως μία διαδικασία κατά την οποία μία διαταραχή από την ισορροπία, μετακινείται εντός του μέσου χωρίς καθαρή μετακίνηση μάζας [BB]. Το κύμα μεταφέρει μαζί με τη διαταραχή, ορμή και ενέργεια.

Ο ήχος διαδίδεται στα ρευστά με *διαμήκη κύματα* σε αντίθεση με πολλά άλλα φαινόμενα όπως το φως του οποίου η διάδοση γίνεται με *εγκάρσια κύματα* (εικόνα 1.1). Σε ένα διάμηκες κύμα, ως γνωστόν, τα στοιχειώδη σωματίδια του μέσου ταλαντώνονται σε διεύθυνση παράλληλη προς αυτή της διάδοσης. Αντιθέτως, σε ένα εγκάρσιο κύμα, η διεύθυνση ταλάντωσης των σωματιδίων είναι κάθετη προς αυτή της διάδοσης. Εγκάρσια διαδίδονται και τα θαλάσσια κύματα. Όταν ηχητικά κύματα φτάνουν ταυτοχρόνως από πολλές κατευθύνσεις τα σωματίδια εκτελούν πολύ πιο σύνθετες κινήσεις από τις διαμήκεις. Αυτή η παρατήρηση δεν οφείλεται σε κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφορετικών

ηχητικών κυμάτων. Στα επίπεδα ήχου της καθημερινής μας ζωής, τα ηχητικά κύματα που προέρχονται από διαφορετικές πηγές περνούν το ένα από το άλλο *αναλλοίωτα*.



Εικόνα 1.1

Σκαρίφημα ενός εγκάρσιου κύματος.

Το ηχητικό αποτέλεσμα μίας ορχήστρας θα ήταν χαοτικό και ανυπόφορο αν δεν μπορούσαμε να διακρίνουμε κάθε όργανο μέσα στο πλήθος των υπολοίπων ή η διάλεξη ενός καθηγητή σε ένα θορυβώδες αμφιθέατρο θα ήταν αδύνατη, αν η φωνή του αλλοιωνόταν [BB]. Αυτή η συμπεριφορά των ακουστικών κυμάτων λέγεται ότι ικανοποιεί την αρχή της γραμμικής υπέρθεσης (linear superposition). Δεν πρέπει να γίνει σύγχυση ωστόσο όλων των παραπάνω με την υπέρθεση των εντάσεων των διαφόρων ηχητικών σημάτων της καθημερινότητας μας, που δυσχεραίνει σημαντικά τη διάκριση μεταξύ τους, όπως θα γίνει κατανοητό στα επόμενα. Γυρίζοντας τώρα στην αρχική παρατήρηση, σε ήχους μεγάλης εντάσεως, όπως από εξατμίσεις μηχανών εσωτερικής καύσης ή αεροστρόβιλων, η αρχή της γραμμικής υπέρθεσης καταρρέει και η μορφή των διαταραχών μεταβάλλεται συνεχώς κατά τη διάδοσή τους [BB].

Η εικόνα 1.2 δείχνει μια προσέγγιση για τη συμπεριφορά και διάταξη των σωματιδίων σε μία ηχητική διάδοση [AA], που είναι όμοια με τη διάδοση ενός μηχανικού διαμήκους κύματος σε ένα ελατήριο. Τα συγκεντρωμένα σωματίδια παριστάνουν περιοχές συμπίεσης όπου η πίεση του αέρα είναι λίγο μεγαλύτερη από την επικρατούσα ατμοσφαιρική. Οι περιοχές με αραιά σωματίδια δηλώνουν περιοχές αραιώσης όπου η πίεση είναι λίγο μικρότερη από την ατμοσφαιρική. Τα μικρά βέλη δείχνουν ότι, κατά μέσο όρο, τα μόρια κινούνται προς τα δεξιά των περιοχών συμπίεσης και προς τα αριστερά στις περιοχές αραιώσης μεταξύ των περιοχών συμπίεσης. Κάθε σωματίδιο θα κινηθεί σε μια ορισμένη απόσταση προς τα δεξιά και ύστερα κατά την ίδια απόσταση προς τα αριστερά από τη θέση ακινησίας του καθώς ο ήχος προχωρεί σταθερά προς τα δεξιά.

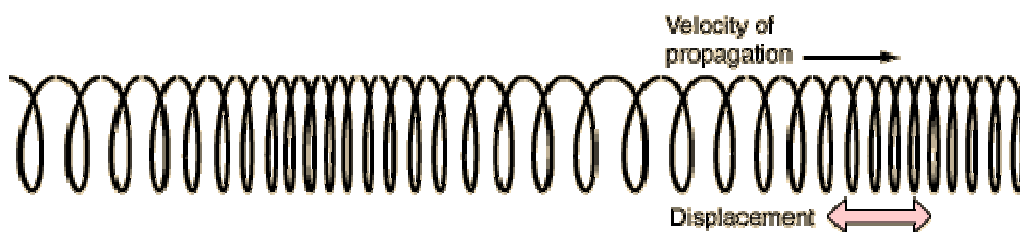
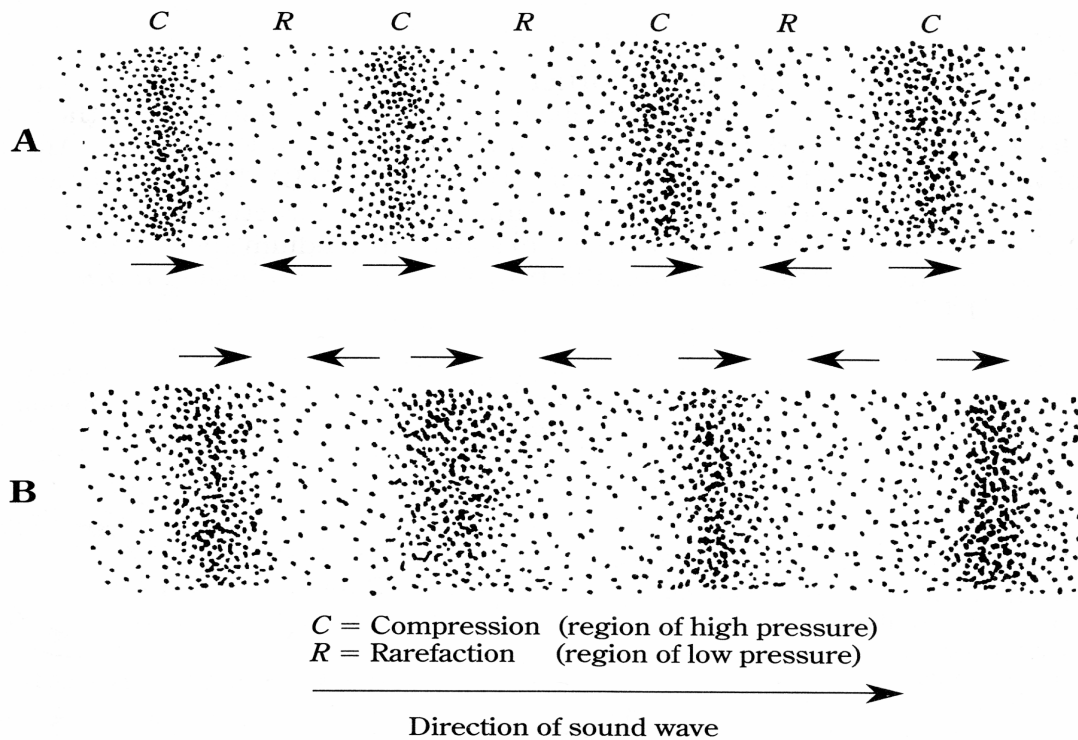
Παρατηρώντας με μεγαλύτερη προσοχή τα μικρά βέλη, αντιλαμβανόμαστε τον τρόπο με τον οποίο ο ήχος κατορθώνει να κινείται προς τα δεξιά. Τα σωματίδια τείνουν να συγκεντρωθούν εκεί όπου δυο βέλη δείχνουν το ένα προς το άλλο. Και αυτό συμβαίνει λίγο δεξιότερα από κάθε συμπίεση. Όταν τα βέλη δείχνουν αντίθετα το ένα ως προς το άλλο, η πυκνότητα των σωματιδίων λιγοστεύει. Έτσι η κίνηση της μεγαλύτερης συμπίεσης και της μικρότερης αραιώσης έχει αποτέλεσμα τη μικρή μετατόπιση του κύματος προς τα δεξιά.

1.2 Ο ήχος στα στερεά

Η διάδοση του ήχου στα στερεά είναι πολύ διαφορετική από τα ρευστά. Στα ρευστά παρατηρείται σημαντική μεταβολή στην πυκνότητα και την πίεση. Από την οικογένεια των ρευστών, τα αέρια εμφανίζουν τις πιο ξεκάθαρες μεταβολές. Αυτές οι ταλαντώσεις πυκνότητας και πίεσης καλούνται και *ταλαντώσεις διαστολής* (dilatational vibrations) [BB].

Ωστόσο, ο ήχος συχνά μεταβιβάζεται από έναν όγκο ρευστού σε έναν άλλο μέσω στερεού σώματος με τη βοήθεια κυμάτων στο ακουστικό πεδίο συχνοτήτων (audiofrequency waves). Αυτό το φαινόμενο καλείται από τον Cremer και τους συνεργάτες του “structure-borne sound” [X]. Σε ελληνική μετάφραση θα μπορούσαμε να το πούμε σαν «ήχο δομής». Συναντάμε το φαινόμενο αυτό πολλές φορές στα κτίρια, όπου ο ήχος διαδίδεται μέσω των χωρισμάτων ή όταν ακούμε τα πατήματα κάποιου στον από πάνω όροφο ή ακόμα όταν το νερό κυκλοφορεί στους αγωγούς. Πλήθος άλλων φαινομένων εμπλέκουν στη διάδοση του ήχου στερεά σώματα και τα ηχητικά κύματα που δημιουργούνται λαμβάνουν τρεις μορφές:

- 1) Ημιδιαμήκη (quasi-longitudinal) κύματα, στα οποία η κυρίαρχη κίνηση είναι στην διεύθυνση της διάδοσης του κύματος.
- 2) Κύματα δυνάμεων συνάφειας (shear waves), στα οποία η κίνηση των στοιχειωδών σωματιδίων είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης και ορθογώνια τμήματα εκφυλίζονται σε ρομβικά σχήματα. Τα κύματα αυτής της μορφής δεν επηρεάζουν την πίεση και την πυκνότητα του μέσου.
- 3) Καμπλωμένα κύματα (bending ή flexural waves), τα οποία είναι ημιτονοειδή και αποτελούν συνδυασμό των δύο προηγούμενων ειδών.



Εικόνα 2.2

Διάδοση του ηχητικού κύματος και αντιπαραβολή με τη διαμήκη διάδοση μηχανικού κύματος σε ένα ελατήριο.

Τα καμπλωμένα κύματα είναι τα πιο σημαντικά, γιατί από τα τρία είδη είναι αυτά που μπορούν καλύτερα να συζευχθούν με το γειτονικό ρευστό και να διαδώσουν τον ήχο μέσα από το στερεό. Η μοντελοποίηση και η ανάλυση της διάδοσης του ήχου σε στερεές δομές (structures) είναι πολύ πιο σύνθετη από ότι στα ρευστά, καθώς οι μορφές των κυμάτων εμπλέκονται μεταξύ τους στους δομικούς συνδέσμους του υλικού. Η δυσκολία αυξάνεται επίσης και από το γεγονός ότι η ταχύτητα των καμπλωμένων κυμάτων μεταβάλλεται με τη συχνότητα.

Για την μελέτη των πνευστών μουσικών οργάνων, της παρούσης εργασίας, θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου μόνο στα αέρια και ιδεί στον αέρα.

1.3 Ταλαντώσεις και ήχος

Η γέννηση του ήχου συνήθως συνεπάγεται τη μηχανική ταλάντωση στερεών αντικειμένων, όπως χορδές, ράβδοι, μεμβράνες και πλάκες ή αέριας μάζας. Οι μηχανικές αυτές ταλαντώσεις μπορεί να είναι παροδικές, όπως το τράβηγμα της χορδής μίας κιθάρας, και να αποσβένονται σε σύντομο χρονικό διάστημα ή μπορεί να διατηρούνται για πολύ και μάλιστα όσο κρατά η δύναμη που τις διεγείρει. Περιπτώσεις της δεύτερης κατηγορίας αποτελούν τα πνευστά μουσικά όργανα, όπου το ταλαντούμενο σώμα είναι ο αέρας.

Στα στερεά απ' την άλλη, παρατηρούμε εκτός των διαμηκών ταλαντώσεων (με πολύ μικρό εύρος) και εγκάρσιες (shear vibrations). Τα εγκάρσια κύματα αναπαριστούν τη διάδοση των δυνάμεων συνάφειας και δεν επηρεάζουν την πίεση ή την πυκνότητα του μέσου. Το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται επίσης περιοδικές μετατοπίσεις των μορίων και είναι κατά συνέπεια λογικό να ερμηνεύουμε τα εγκάρσια κύματα σαν μία ιδιαίτερη περίπτωση της κίνησης του ήχου. Στις μέρες μας, ο ήχος δεν περιορίζεται μόνο στο αέρα, αλλά περιλαμβάνει όλη την ύλη, της οποίας οι διαταραχές δίνουν κύματα συχνότητας μέσα στο ανθρώπινο ακουστικό πεδίο.

1.4 Ορισμοί

Ήχος είναι μία μηχανική διαταραχή, που ταξιδεύει σε ένα ελαστικό μέσο με ταχύτητα χαρακτηριστική του μέσου αυτού και έχει συχνότητα μεταξύ 16-20000 Hz, του πεδίου της ανθρώπινης ακοής [K, BB].

Υπόηχος (infrasound ή subsonic sound) είναι μία διαταραχή με συχνότητα χαμηλότερη των 16 Hz.

Υπέρηχος (supersonic sound) είναι μία διαταραχή με συχνότητα υψηλότερη των 20000 Hz. Διαταραχές με ακόμα υψηλότερες συχνότητες από αυτές των υπερήχων, ονομάζονται στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία ως hypersonic sound ή hypersound [BB].

Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι ο ήχος δεν διαδίδεται στο κενό, σε αντίθεση με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

2

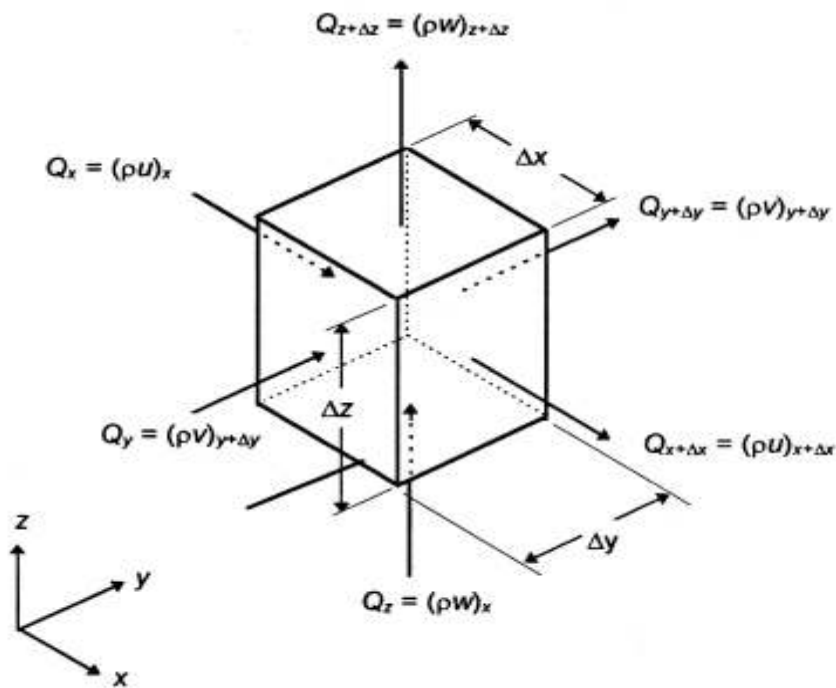
Η κυματική εξίσωση

Στη θεμελιώδη αυτή ενότητα θα δούμε πως από τους βασικούς νόμους της μηχανικής των ρευστών και της θερμοδυναμικής καταλήγουμε στις κύριες εξισώσεις που διέπουν την ακουστική.

2.1 Διατήρηση της μάζας

Στο σχήμα 1.1 θεωρούμε τον όγκο ελέγχου $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ διαμέσου του οποίου περνά το ρευστό. Η καθαρή ροή μέσα από τον όγκο αυτό ισούται με την πρόσδοση ή την απώλεια ροής εντός του όγκου:

$$\dot{m}_{exit} - \dot{m}_{enter} = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t_{volume}} \right)_{\Delta V \rightarrow dV}$$



Σχήμα 1.1

Η αρχή διατήρησης μάζας σε ένα ρευστό [TT].

Μπορούμε να αναλύσουμε την ταχύτητα \vec{V} του ρευστού στις συνιστώσες u , v και w κατά τις κατευθύνσεις x , y , z αντίστοιχα, ώστε να ισχύει:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Με \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} τα μοναδιαία διανύσματα στις x , y , z κατευθύνσεις. Η ροή $Q(x, t)$ της μάζας ορίζεται ανά μονάδα χρόνου και επιφανείας από τη σχέση:

$$Q(x, t) = \rho(x, t) \cdot u(x, t)$$

Έτσι ο ρυθμός της μάζας που διαπερνά τον όγκο dV κατά τη x κατεύθυνση είναι στη θέση x :

$$\dot{m}_x = Q(x, t)dE_x = (\rho u)_{x,t} dE_x = (\rho u)_{x,t} dydz$$

ενώ στη θέση $x+\Delta x$:

$$\dot{m}_{x+\Delta x} = Q(x + \Delta x, t)dE_x = (\rho u)_{x+\Delta x,t} dE_x = (\rho u)_{x+\Delta x,t} dydz$$

Ωστε η καθαρή ροή κατά τη x κατεύθυνση να είναι:

$$\dot{m}_{x+\Delta x} - \dot{m}_x = [(\rho u)_{x+\Delta x} - (\rho u)_x]dE_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dE_x dx = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dV \quad (2.1)$$

Για τις μαζικές ροές κατά τις κατευθύνσεις y και z , λαμβάνουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις:

$$\dot{m}_{y+\Delta y} - \dot{m}_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dV \quad (2.2)$$

και

$$\dot{m}_{z+\Delta z} - \dot{m}_z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dV \quad (2.3)$$

Προσθέτοντας τώρα τις εξισώσεις ροής (2.1), (2.2) και (2.3), και εξισώνοντας το αποτέλεσμα με τη μεταβολή της μάζας στον όγκο ελέγχου παίρνουμε τη γενική εξίσωση διατήρησης μάζας (εξίσωση συνέχειας) για το καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα στη διαφορική διατύπωση:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4)$$

Με διανυσματική γραφή η παραπάνω έκφραση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.5)$$

Όπου $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ είναι ο γνωστός από τα μαθηματικά τελεστής ανάδελτα, για ορθογώνιες συντεταγμένες.

Για κυλινδρικές συντεταγμένες ο τελεστής ανάδελτα παίρνει τη μορφή $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z}$,

Ενώ για σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Κατά συνέπεια, η εξίσωση συνέχειας με τη μορφή (2.5) εκφράζει τη διατήρηση μάζας για όλα τα πιθανά συστήματα (συντεταγμένες), ανάλογα με τη μορφή του τελεστή ανάδελτα.

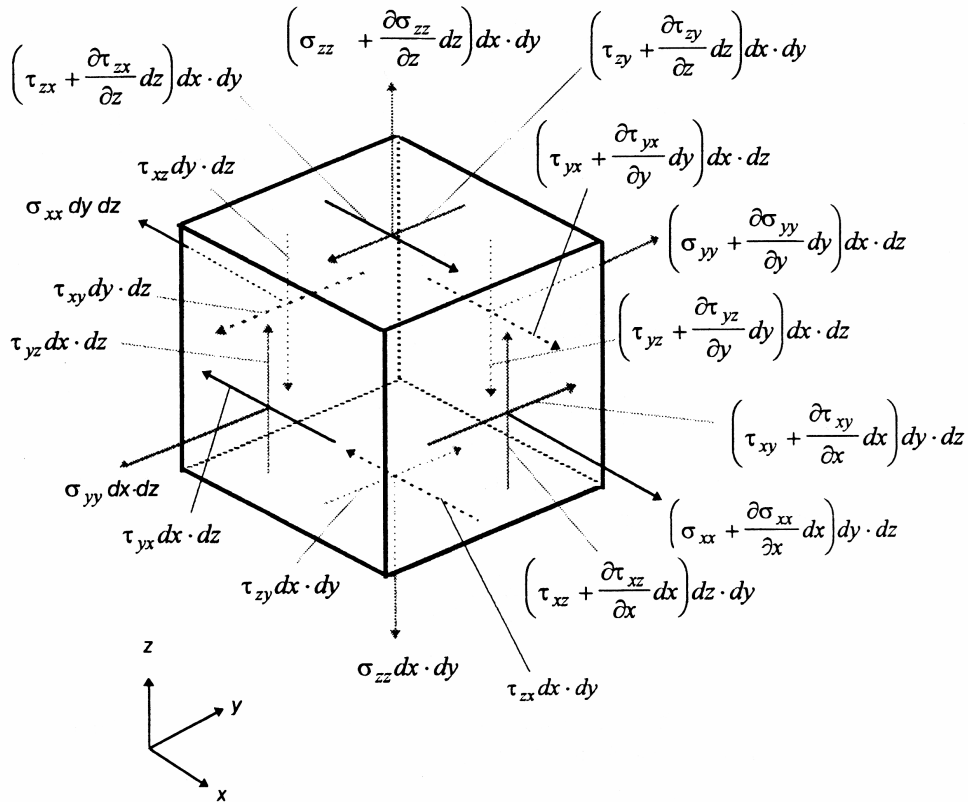
Αν θεωρήσουμε την πυκνότητα του ρευστού σταθερή, η ροή, όπως γνωρίζουμε χαρακτηρίζεται ασυμπίεστη και η εξίσωση συνέχειας απλοποιείται στην έκφραση:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

2.2 Διατήρηση της ορμής

Στο σχήμα 2.2 παρατηρούμε ένα στοιχείο ρευστού με πεδίο ταχύτητας $\vec{V}_p = \vec{V}_i(x, y, z, t)$. Μετά από χρόνο dt , το πεδίο ταχύτητας γίνεται $\vec{V}_{p'} = \vec{V}_{i+dt}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Ο δείκτης p απ' το particle (στοιχείο). Η μεταβολή της ταχύτητας είναι κατά συνέπεια:

$$d\vec{V} = \Delta(\vec{V}_{p'} - \vec{V}_p) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$



Σχήμα 2.2

Η αρχή διατήρησης ορμής σε ένα ρευστό [TT].

Η ολική επιτάχυνση του στοιχείου ρευστού [N] είναι:

$$\vec{b}_p = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Με τη βοήθεια όμως της υλικής ή ουσιώδους παραγώγου, μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{b}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Όπου $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w + \frac{\partial}{\partial t}$, ο τελεστής της υλικής ή ουσιώδους παραγώγου [N].

Μπορούμε τώρα να διασπάσουμε τη διανυσματική εξίσωση (2.8) σε βαθμωτές σχέσεις που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του ορθογώνιου συστήματος:

$$b_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.8\alpha)$$

$$b_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.8\beta)$$

$$b_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.8\gamma)$$

Από τους κλασσικούς νόμους του Newton συμπεραίνουμε τώρα ότι για να υπάρχει επιτάχυνση του στοιχείου του ρευστού, θα πρέπει να ενεργεί επάνω του μία συνισταμένη δύναμη. Δύο είναι τα είδη των δυνάμεων που μπορεί να ασκηθούν στο στοιχείο ρευστού. Οι μαζικές ή ογκικές και οι επιφανειακές δυνάμεις, ήτοι body και surface forces.

Η πιο γνωστή περίπτωση μαζικής δύναμης είναι η βαρύτητα, η οποία επιδρά σε όλο τον όγκο του στοιχείου. Τυπικές επιφανειακές δυνάμεις (ή τάσεις) είναι η πίεση (κάθετη τάση) και τριβή (εφαπτομενική δύναμη). Η πίεση δρα κάθετα σε δεδομένη επιφάνεια, ενώ η τριβή παράλληλα. Μια κάθετη (normal) τάση συμβολίζεται με σ_{mm} , όπου ο δείκτης mm συμβολίζει την κατεύθυνση της. Πολλαπλασιασμός της τάσης με την επιφάνεια που δρα, δίνει τη συνολική δύναμη.

Μια εφαπτομενική (shear) τάση συμβολίζεται με τ_{mn} , ώστε η δύναμη που παράγεται από αυτή την τάση να είναι κάθετη στην κατεύθυνση m και παράλληλη στην κατεύθυνση n . Οι δείκτες m και n αναπαριστούν οποιαδήποτε από τις x, y, z κατευθύνσεις αλλά $m \neq n$, γιατί όταν $m = n$ μεταβαίνουμε πλέον σε κάθετη επιφανειακή τάση σ_{mm} . Πολλαπλασιασμός της εφαπτομενικής τάσης τ_{mn} με την επιφάνεια που ενεργεί, δίνει τη συνολική εφαπτομενική δύναμη. Για παράδειγμα, έστω η εφαπτομενική τάση τ_{yz} . Πολλαπλασιαζόμενη με την επιφάνεια $dx dz$ δίνει εφαπτομενική δύναμη κάθετη στον άξονα y και παράλληλη στον άξονα z .

Στο επόμενο μας βήμα, υπολογίζουμε το μέγεθος της καθαρής δύναμης που δρα στο στοιχείο ρευστού κατά την x κατεύθυνση, αθροίζοντας αλγεβρικά όλες τις δυνάμεις σε αυτή την κατεύθυνση. Με τη βοήθεια του σχήματος (1.2) λαμβάνουμε:

$$dF_x = \rho g_x dx dy dz + \left(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy$$

Όπου g_x η βαρυτική επιτάχυνση κατά την x κατεύθυνση. Με απλοποιήσεις παίρνουμε:

$$dF_x = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.9)$$

Για τις κατευθύνσεις y και z λαμβάνουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις:

$$dF_y = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.10)$$

$$dF_z = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.11)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το δεύτερο νόμο του Newton:

$$d\vec{F} = d(m\vec{b}) = \rho dV \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho dV \vec{b} \quad (2.12)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.12) και συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.18α-γ) με τις (2.9)-(2.11), καταλήγουμε στις τρεις συνιστώσες της διατήρησης ορμής:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.13\alpha)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.13\beta)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.13\gamma)$$

Είναι χρήσιμο τώρα να εκφράσουμε τις εφαπτομενικές τάσεις ως συνάρτηση του πεδίου ταχυτήτων. Για Νευτώνια ρευστά, όπως είναι ο αέρας και το νερό, επικρατεί ένας νόμος αντίστοιχος με το νόμο του Hooke, της θεωρίας ελαστικότητας [N]. Αν μ είναι ο συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητας ή απλά ιξώδες, τότε οι εφαπτομενικές (διατμητικές) τάσεις δίδονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.14\alpha)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.14\beta)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.14\gamma)$$

Για τις κάθετες τάσεις ισχύουν οι παρακάτω συσχετισμοί:

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.15\beta)$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.15\gamma)$$

Όπου p η τοπική θερμοδυναμική πίεση, που είναι μία ιστροπική παράμετρος σε κάθε σημείο του ρευστού. Οι παραπάνω έξι εξισώσεις είναι οι υλικές εξισώσεις των νευτώνιων ρευστών [N].

Αν το ρευστό είναι μη συνεκτικό, δηλ. απαλλαγμένο από εσωτερικές τριβές, τότε $\mu=0$. Σε αυτή την περίπτωση είναι φανερό ότι ισχύει:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad (2.16)$$

Πολλές φορές είναι λογικό να παραλείψουμε την επίδραση της βαρύτητας, όταν το μέγεθός της είναι αμελητέο σε σχέση με τις υπόλοιπες δυνάμεις. Τότε με τη χρήση και της συσχέτισης (2.16), καταλήγουμε στις συνιστώσες της διατήρησης ορμής για τα νευτώνια, ασυμπίεστα και μη συνεκτικά ρευστά [TT]:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{Du}{Dt} \\
-\frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \frac{Dv}{Dt} \\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \frac{Dw}{Dt}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Η αρχή διατήρησης της ορμής για μία διάσταση ονομάζεται και εξίσωση Euler [N, AAA].

2.3 Διατήρηση της ενέργειας

Το ενεργειακό περιεχόμενο ενός ρευστού μπορεί να διαιρεθεί στο μέρος της μακροσκοπικής κινητικής ενέργειας $\rho |\vec{V}|^2 / 2$ και στο μέρος της εσωτερικής κινητικής ενέργειας ρE του ρευστού. Στα αέρια η μικροσκοπική κινητική ενέργεια, δηλαδή η θερμική ενέργεια των μορίων, αποτελεί το κύριο ποσοστό της εσωτερικής κινητικής ενέργειας, ώστε η δυναμική ενέργεια μεταξύ των μορίων να θεωρείται αμελητέα. Αν συμβολίσουμε με W το ενεργειακό περιεχόμενο και S τη ροή ενέργειας, μπορούμε να γράψουμε σε συνοπτική μορφή τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης ενέργειας [TT]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{2.18}$$

Η εσωτερική ενέργεια ενός στοιχείου όγκου μπορεί να αυξηθεί με πρόσδοση θερμότητας, που προκύπτει είτε από τη ροή του ρευστού γύρω από αυτό, είτε από εξωτερικές πηγές, καθώς και με συμπίεση $-\int p dV$, που προέρχεται από το περιρρέον ρευστό. Η ενεργειακή αυτή ισορροπία και το γεγονός ότι η εσωτερική ενέργεια είναι μία θερμοδυναμική κατάσταση η οποία μπορεί να προσδιορισθεί πλήρως από δύο ανεξάρτητες θερμοδυναμικές μεταβλητές, συνιστούν τελικά το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα.

2.4 Θερμοδυναμικές εξισώσεις και ταχύτητα του ήχου

Οι εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας που είδαμε, περιέχουν μεγαλύτερο αριθμό αγνώστων από τον αριθμό εξισώσεων. Για να επιλυθεί λοιπόν πλήρως το πρόβλημα της κατάστροφωσης των ακουστικών εξισώσεων, απαιτούνται περαιτέρω σχέσεις, προερχόμενες από τη θερμοδυναμική των ρευστών και λαμβανόμενων κάποιων παραδοχών. Μια πολύ καλή παραδοχή είναι ότι το ρευστό βρίσκεται τοπικά σε θερμοδυναμική ισορροπία. Θεωρώντας ομογενές ρευστό, αρκούν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και μία εξαρτημένη για να προσδιορίσουν τη θερμοδυναμική κατάσταση του. Οι τρεις θερμοδυναμικές μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους μέσω καταστατικής εξίσωσης. Αν η πυκνότητα ρ και η θερμοκρασία T είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ η πίεση p η εξαρτημένη, ισχύει:

$$p = p(\rho, T) \tag{2.19}$$

Κάλλιστα όμως ισχύουν και οι παρακάτω συσχετισμοί:

$$T = T(\rho, p), \quad \rho = \rho(p, T)$$

Μπορούμε ωστόσο να εκφράσουμε τη θερμοδυναμική κατάσταση ενός ρευστού με χρήση της ειδικής εσωτερικής ενέργειας e , της εντροπίας s , και της πυκνότητας ρ . Έτσι κατά παρόμοιο τρόπο, ισχύει ο συσχετισμός [48]:

$$e = e(\rho, s) \tag{2.20}$$

Οι μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας μπορούν να εκφραστούν ως:

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho ds \quad (2.21)$$

Με χρήση τώρα της θεμελιώδους εξίσωσης της θερμοδυναμικής:

$$de = Tds - pd\rho^{-1} \quad (2.22)$$

καταλήγουμε στις θερμοδυναμικές σχέσεις για τη θερμοκρασία και την πίεση:

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \quad (2.23)$$

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.24)$$

Καθώς όμως η πίεση p είναι συνάρτηση και των s και ρ μπορούμε να γράψουμε:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds \quad (2.25)$$

Ο ήχος εναλλακτικά ορίζεται ως ισεντροπικές ($ds = 0$) διαταραχές πίεσης – πυκνότητας. Έτσι, η ταχύτητα του $c = c(p, \rho)$ δίνεται από τη σχέση [48]:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (2.26)$$

Εκτενή ανάλυση πάνω στην ταχύτητα του ήχου υπάρχει στο σύγγραμμα του A. D. Pierce [SS]. Στις περισσότερες περιπτώσεις της ακουστικής, ως ρευστό διάδοσης θεωρείται ο αέρας, στην πίεση και θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Δεχόμαστε για αυτές τις συνθήκες ότι ισχύει με καλή προσέγγιση η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$p = \rho RT \quad (2.27)$$

Όπου:

R είναι η σταθερά του αερίου, η οποία εκφράζει ενέργεια ανά μονάδα μάζας, ανά βαθμούς Κέλβιν,

$R = \frac{\mathfrak{R}}{M}$, όπου \mathfrak{R} είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων και εκφράζει ενέργεια ανά moles ανά βαθμούς Κέλβιν. Είναι $\mathfrak{R} = 8,314 \frac{kJ}{kg \cdot mol \cdot K} = 1545,5 \frac{ft \cdot lb_f}{lb \cdot mol \cdot ^\circ R} = 1,986 \frac{Btu}{lb_m \cdot mol \cdot ^\circ R}$,

M είναι το μοριακό βάρος του αερίου σε $\frac{kg}{kg \cdot mol}$ ή $\frac{lb_m}{lb_m \cdot mol}$.

Εξ' ορισμού, για ένα ιδανικό αέριο, η ενεργειακή πυκνότητα εξαρτάται αποκλειστικά από τη θερμοκρασία T , $e=e(T)$. Έτσι:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.28)$$

όπου $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ είναι ο λόγος ειδικών θερμοχωρητικοτήτων ή λόγος Poisson.

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \quad (2.29)$$

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p \quad (2.30)$$

i είναι η ειδική ενθαλπία, οριζόμενη από τη σχέση:

$$i = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.31)$$

Ως γνωστόν, για ιδανικό αέριο ισχύει: $c_p - c_v = R$. Όταν ένα ιδανικό αέριο έχει σταθερές ειδικές θερμοχωρητικότητες, καλείται τέλειο αέριο. Για τα τέλεια αέρια $\gamma=1,4$.

Για τον αέρα στους 20°C η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι από τη σχέση (2.28):

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{Nm}}{\text{KgK}} (20 + 273,2) \text{K}} = 343,2 \text{ m/s.}$$

Στα υγρά η σχέση (2.28) δεν υφίσταται, και η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται τόσο από τη θερμοκρασία του υγρού όσο και από την πίεση στην οποία υπόκειται. Μία προσεγγιστική τιμή για τη c σε καθαρό νερό είναι 1461 m/s . Εν γένει, ο ήχος διαδίδεται γρηγορότερα στα ρευστά από ότι στα αέρια.

Στα στερεά η ταχύτητα του ήχου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση [ΤΤ]:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.32)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young (modulus of elasticity), του υλικού που εξετάζουμε και ρ η πυκνότητά του. Για παράδειγμα, στο ατσάλι, που έχει ειδικό βάρος $7,85$ και $E=207 \text{ GPa}$, η ταχύτητα του ήχου, όπως υπολογίζεται από τη (2.32), είναι [ΤΤ]:

$$c = \sqrt{\frac{207(10)^9 \text{ N/m}^2}{7850 \text{ kg/m}^2}} = 5135 \text{ m/s}$$

2.5 Κατάστροση των ακουστικών εξισώσεων

Με εργαλεία τη διατήρηση της μάζας, της ορμής, της ενέργειας και την καταστατική εξίσωση, που περιγράφηκαν αντίστοιχα στις ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 και 2.4, έχουμε όλες τις απαραίτητες σχέσεις για να βρούμε λύσεις για τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας \vec{V} , την πυκνότητα ρ , την πίεση p και τη θερμοκρασία T . Καθώς οι εξισώσεις που περιγράφουν το ρευστό είναι μη γραμμικές, δεν είναι εύκολο να προκύψουν ακριβείς λύσεις για πολλά φαινόμενα της μηχανικής των ρευστών όπως οι ατμοσφαιρικές δίνες, οι στροβιλισμοί, το τριχοειδές φαινόμενο κ.α. Τέτοιες λύσεις υφίστανται μόνο για ορισμένα απλά προβλήματα. Στην περίπτωση της ακουστικής προβαίνουμε στις ακόλουθες παραδοχές, ώστε το πρόβλημα να μπορεί να επιλυθεί:

- 1) Ένα ρευστό αδιατάραχο (σε ηρεμία) περιγράφεται από συγκεκριμένες τιμές πίεσης, πυκνότητας, θερμοκρασίας και ταχύτητας, οι οποίες θεωρούνται χρονικά ανεξάρτητες και συμβολίζονται με το δείκτη 0 [ΤΤ].
- 2) Το πέραςμα ενός ακουστικού σήματος διαμέσου του ρευστού προκαλείται από μικρές διαταραχές της πίεσης, της θερμοκρασίας, της πυκνότητας και της ταχύτητας. Οι διαταραχές αυτές αναπαριστώνται μαθηματικά ως:

$$p' = p + p_0, \quad T' = T + T_0, \quad \rho' = \rho + \rho_0 \quad \text{και} \quad u' = u + u_0 \quad (2.33)$$

με

$$p \ll p_0, \quad T \ll T_0, \quad \rho \ll \rho_0$$

Αντί της θερμοκρασίας, μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί ως θερμοδυναμικό μέγεθος η εντροπία [48]. Δηλ.:

$$s' = s + s_0$$

Επίσης, αντί οι αποκλίσεις από τις τιμές ισορροπίας (p, T, ρ, u, s) να προστίθενται στις αρχικές, θα μπορούσαν εξίσου σωστά να αφαιρούνται. Δηλ. $p' = p - p_0, T' = T - T_0$ κλπ.

Η ταχύτητα τώρα ενός ρευστού σε ηρεμία είναι μηδέν. Άρα $u_0 = 0$. Επειδή κατά τη διάδοση του ηχητικού κύματος δεν υπάρχει μακροσκοπική κίνηση στο ρευστό η τελική ταχύτητα διαταραχής είναι απλά $u' = u$.

3) Η μετάδοση του ήχου διαμέσου του ρευστού θεωρείται επαρκώς ακαριαία, ώστε να μην υπάρχει χρόνος να συναλλαχθεί θερμότητα με το περιβάλλον. Έτσι, η όλη διαδικασία μετάδοσης μπορεί να εκληφθεί ως αδιαβατική [TT].

Εξίσωση συνέχειας

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση συνέχειας κατά τη x κατεύθυνση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial[(\rho_0 + \rho)u]}{\partial x} = \frac{\partial(\rho_0 + \rho)}{\partial t} \Rightarrow u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.34)$$

Ο όρος $u \frac{\partial \rho}{\partial x}$ είναι μικρός, σε σχέση με τον $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ και μπορεί να απαλειφθεί. Θεωρούμε ότι $\rho_0 \approx \rho_0 + \rho$. Έτσι απομένει:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.35)$$

Εξίσωση ορμής

Για την κατεύθυνση x , η εξίσωση ορμής γίνεται:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho)}{\partial x} = (\rho_0 + \rho) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.36)$$

και τελικά παίρνουμε:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.37)$$

Θερμοδυναμική

Η αδιαβατική διαδικασία περιγράφεται μαθηματικά απ' τη σχέση:

$$p \rho^{-\gamma} = \text{const} \quad (2.38)$$

Όπου γ ο λόγος Poisson.

Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\rho^{-\gamma} dp - \gamma p \rho^{-\gamma-1} d\rho = 0 \quad (2.39)$$

ή

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.40)$$

Με τις παραδοχές $p_0 \approx p_0 + p$ και $\rho_0 \approx \rho_0 + \rho$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dp}{p_0} = \gamma \frac{d\rho}{\rho_0} \quad (2.41)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.42)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (2.37) και (2.42) προκύπτει:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma p_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.43)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \gamma p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (2.44)$$

Παραγωγίζοντας την (2.35) ως προς x , λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad (2.45)$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις και δεχόμενοι ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, δηλαδή να έχουμε ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτου σειράς παραγωγίσης, έχουμε [ΤΤ]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.46)$$

Είδαμε όμως ότι

$$c^2 = \gamma RT = \frac{\gamma p_0}{\rho_0},$$

κατά συνέπεια:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.47)$$

Αυτή είναι η μονοδιάστατη **κυματική εξίσωση**.

Στις τρεις διαστάσεις παίρνει τη μορφή:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.48)$$

όπου $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ είναι ο τελεστής Laplace.

Όμοια έκφραση μπορεί να ληφθεί ως προς την ταχύτητα, αντί για την πίεση:

$$\nabla^2 \vec{V} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} \quad (2.49)$$

Στη διάσταση x είναι προφανώς:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.50)$$

Και επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η πυκνότητα:

$$\nabla^2 \rho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (2.51)$$

Στη x διάσταση είναι:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.52)$$

2.6 Χρήση του δυναμικού ταχύτητας στην κυματική εξίσωση

Αν θεωρήσουμε ότι το πεδίο ροής ενός ρευστού είναι αστρόβιλο, τότε ως γνωστόν, το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση ενός βαθμωτού μεγέθους, του δυναμικού Φ [N]:

$$\vec{V} = \nabla \Phi = \text{grad} \Phi$$

ή

$$\vec{V} = \vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Δηλαδή:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.53\alpha)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.53\beta)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.53\gamma)$$

Το δυναμικό υπολογίζεται από την ολοκλήρωση της σημειακής ταχύτητας u :

$$\Phi = -\int u dx + \text{const} \quad (2.54)$$

Θεώρημα του Stoke

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (2.35α) ως προς y και την (2.53β) ως προς x και αφαιρέσουμε κατά μέλη, θα πάρουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.55\alpha)$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία με τους εναπομείναντες συνδυασμούς μεταξύ (2.53α) - (2.53γ) και (2.53β) - (2.53γ), παίρνουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.55\beta)$$

και

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.55\gamma)$$

Συνοπτικά,

$$\text{rot} \vec{V} = \text{rot}(\text{grad} \Phi) = 0 \quad (2.56)$$

που εκφράζει μαθηματικά το θεώρημα του Stoke. Δηλαδή όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αυτομάτως η εισαγωγή του δυναμικού ταχύτητας συνεπάγεται αστρόβιλο πεδίο ροής. Η πλειονότητα των ακουστικών ροών στα ρευστά θεωρείται ότι υπακούει στο αστρόβιλο πεδίο ροής, ακόμη και αν ληφθούν υπ' όψη φαινόμενα συνεκτικότητας. Όπως θα αναλυθεί και σε επόμενο κεφάλαιο της εργασίας, η συνεκτικότητα του ρευστού δημιουργεί ένα στρώμα δινών κοντά στα στερεά τοιχώματα και το οριακό αυτό στρώμα είναι εξαιρετικά λεπτό, μικρότερο από 0,06 mm στον αέρα στη συχνότητα των 1000 Hz.

Εισάγοντας το δυναμικό στην εξίσωση Euler, προκύπτει:

$$\text{grad} p = -\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial(\text{grad} \Phi)}{\partial t} = \rho_0 \text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.57)$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{const} \quad (2.58)$$

που είναι μία έκφραση ισοδύναμη της εξίσωσης Euler.

Συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας, αλλά και η ηχητική πίεση μπορεί να υπολογισθεί από το δυναμικό ταχύτητας με μία απλή παραγωγή ως προς το χρόνο.

Εισάγοντας τώρα την πίεση, όπως προσδιορίζεται απ' την (2.58), στην κυματική εξίσωση (2.48), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{const} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{const} \right) \\ \Rightarrow \nabla^2 \cancel{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \cancel{\rho_0} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο και παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία δε συνεισφέρει σε τίποτα, λαμβάνουμε την *κυματική εξίσωση του δυναμικού ταχύτητας* [AAA]:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.59)$$

Για περιοδικές κινήσεις, το δυναμικό ταχύτητας μπορεί να αντικατασταθεί από την πίεση λόγω της συσχέτισης:

$$\tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = \rho_0 j \omega \tilde{\Phi} \quad (260)$$

Όπου $\tilde{\Phi}$ είναι ένα σύνθετο (complex) δυναμικό με πραγματικό και φανταστικό μέρος [AAA]. Πιο απλά, θα μπορούσε να γραφτεί $\tilde{\Phi}$.

Τελικά,

$$\tilde{\Phi} = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 j \omega} = \frac{\tilde{p}}{jk \rho_0 c} \quad (2.61)$$

Όπου $k = \frac{\omega}{c}$ ο κυματικός αριθμός. Η σημειακή ταχύτητα προκύπτει τότε από την πίεση:

$$\tilde{u} = -\text{grad} \tilde{\Phi} = \frac{j}{k \rho_0 c} \text{grad} \tilde{p} \quad (2.62)$$

Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα μπορεί να προέλθει και απ' ευθείας από την εξίσωση Euler, αν αντικαταστήσουμε το $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}$ με $j \rho_0 \omega = j \rho_0 c k$.

2.7 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και κυματική εξίσωση

Σε έναν στοιχειώδη κύβο $dx dy dz$ ασκείται μία μαζική δύναμη τις οποίας οι συνιστώσες είναι:

$$\rho X dx dy dz, \rho Y dx dy dz, \rho Z dx dy dz \quad (2.63)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εξωτερικές δυνάμεις στην εξίσωση Euler παίρνουμε:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} \quad (2.64)$$

$$\rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{dv}{dt} \quad (2.65)$$

$$\rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{dw}{dt} \quad (2.66)$$

Το ρευστό ενδεχομένως να περιέχει πηγές που προσθέτουν ρευστό με ρυθμό q μονάδες όγκου ανά μονάδα όγκου, ανά μονάδα χρόνου. Η μάζα που προστίθεται λόγω αυτών των πηγών θα συμπεριληφθεί στο αριστερό μέλος της εξίσωσης συνέχειας:

$$\rho q - \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.67)$$

$$\rho q - \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.68)$$

$$\rho q - \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.69)$$

Για ασυμπίεστο ρευστό (σταθερή πυκνότητα) οι τρεις προηγούμενες εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + q \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + q \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + q \quad (2.72)$$

Με συνδυασμό των (2.67), (2.68), (2.69) και (2.70), (2.71), (2.72) παίρνουμε:

$$\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.73)$$

$$\rho_0 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.74)$$

$$\rho_0 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.75)$$

Διαφορίζοντας τις (2.70), (2.71), (2.72) ως προς t και πολλαπλασιάζοντας με ρ_0 προκύπτει:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.76)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.77)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.78)$$

Αντικαθιστώντας αντίστοιχα τις (2.73), (2.74), (2.75) στις (2.76), (2.77), (2.78) λαμβάνουμε την ακόλουθη συσχέτιση:

$$\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (2.79)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial t} \right) \quad (2.80)$$

Ομοίως ισχύει και για τις άλλες δύο διαστάσεις.

Με χρήση του δυναμικού ταχύτητας $u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ από την εξίσωση (2.64), δηλ. την εξίσωση Euler έχουμε:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \quad (2.81)$$

Μπορούμε να βρούμε την πίεση ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση, αφού πρώτα δεχθούμε ότι οι εξωτερική δύναμη $\rho_0 X$ είναι συντηρητική, ώστε να μπορεί να υπολογισθεί από το ενεργειακό δυναμικό:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.82)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την εξίσωση (2.81) παίρνουμε:

$$-\rho_0 U - p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + const \quad (2.83)$$

που συνεπάγεται:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho_0 U + const \quad (2.84)$$

Έτσι, η κυματική εξίσωση μπορεί να προέλθει άμεσα από την εξίσωση συνέχειας (2.70), αντικαθιστώντας την πίεση από την (2.84) και την ταχύτητα από την έκφραση του δυναμικού $u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) - q \quad (2.85)$$

Ομοίως και τις άλλες διαστάσεις:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) - q \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) - q \quad (2.85)$$

2.8 Η φυσική σημασία του δυναμικού ταχύτητας

Το δυναμικό ταχύτητας είναι μία από τις σημαντικότερες μεταβλητές της ακουστικής [AAA]. Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση Euler ως προς το χρόνο, θα έχουμε:

$$\int -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dt = \int \frac{du}{dt} dt = u + u_0 \quad (2.86)$$

Θεωρούμε ότι η κίνηση ενός στοιχειώδες σωματίου του ρευστού ξεκινάει από την ηρεμία και σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα. Κατόπιν αυτής της παραδοχής:

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{και} \quad u_0 = 0 \quad (2.87)$$

Εισάγουμε τώρα τη διεγείρουσα δύναμη Φ ανά μονάδα μάζης:

$$\Phi = \int \frac{p}{\rho_0} dt \quad (2.89)$$

Η εξίσωση (2.86) συρρικνώνεται τώρα στην εξίσωση ορισμού του δυναμικού ταχύτητας:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.90)$$

Κατά συνέπεια, το δυναμικό ταχύτητας είναι ταυτόσημο με τη διεγείρουσα δύναμη ανά μονάδα μάζης του ρευστού, που προκαλεί την κίνηση του από την κατάσταση ηρεμίας [AAA].

3

Οι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

Είδαμε ότι η κυματική εξίσωση μπορεί να εκφραστεί όχι μόνο για την πίεση, αλλά και για την ταχύτητα, το δυναμικό ταχύτητας και την πυκνότητα, όπως φαίνεται απ' τις σχέσεις (2.47) – (2.52) και (2.59).

Παρόλο που αλλάζει η μεταβλητή, η μορφή της εξίσωσης είναι ίδια και αποτελεί μία μερική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού κατά x , y , z και t .

Σε μία αρκετά μεγάλη απόσταση από την ηχητική πηγή, το προκύπτον κύμα θεωρείται ότι γίνεται επίπεδο. Έτσι, η διαφορική εξίσωση περιορίζεται μόνο στη x διάσταση, κατά την κατεύθυνση της διάδοσης:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.1\alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1\beta), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.1\gamma), \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (3.1\delta)$$

Για μία πλήρη λύση της απαιτούνται δύο αρχικές και δύο οριακές συνθήκες, αλλά δεν πρέπει να τις ορίσουμε, ώστε να διατηρήσουμε τη γενικότητα της λύσης [TT].

3.1 Οδεύοντα κύματα

Η γενική της λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης μπορεί να έχει τη μορφή:

$$p(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (3.2\alpha)$$

ή

$$u(x, t) = K(x - ct) + L(x + ct) \quad (3.2\beta)$$

ή

$$\Phi(x, t) = M(x - ct) + N(x + ct) \quad (3.2\gamma)$$

ή

$$\rho(x, t) = O(x - ct) + P(x + ct) \quad (3.2\delta)$$

Οι συναρτήσεις F , G , K , L , M , N , O , P είναι αυθαίρετες και θεωρείται πως έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης και δευτέρας τάξης.

Η διαδικασία που θα περιγραφεί παρακάτω είναι όμοια για όλες τις εκφράσεις (3.2). Θεωρούμε την εξίσωση για το δυναμικό (3.2γ). Η συνάρτηση $M(x - ct)$ αναπαριστά οδεύον κύμα που κινείται κατά τα θετικά x , ενώ η $N(x + ct)$ κατά τα αρνητικά. Άρα η (3.2γ) εκφράζει τη συμβολή δύο αντιθέτως κινούμενων κυμάτων.

Μπορούμε να φτάσουμε στην μορφή της λύσης (3.2γ) εισάγοντας δύο νέες μεταβλητές $u_m = x - ct$ και $u_n = x + ct$, οι οποίες μετασχηματίζουν τη διαφορική εξίσωση (3.1γ) στη χαρακτηριστική της μορφή:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_m \partial u_n} = 0 \quad (3.3)$$

Έτσι, η μεταβλητή Φ μπορεί να είναι:

- 1) Μία συνάρτηση ως προς u_m ,
- 2) Μία συνάρτηση ως προς u_n ,
- 3) Το άθροισμα των δύο παραπάνω συναρτήσεων.

Κατά συνέπεια η έκφραση (3.2γ) που συμπεριλαμβάνει τις παραπάνω περιπτώσεις, είναι κατάλληλη για γενική λύση της (3.1γ).

Όλες οι λύσεις της (3.1γ) θα πρέπει να έχουν τη μορφή (3.2γ). Έτσι κάθε έκφραση του Φ που δεν ταιριάζει με τη μορφή (3.2γ) δεν μπορεί να αποτελεί λύση.

Η συνάρτηση $M(x-ct)$ εξαρτάται μονάχα από τη μεταβλητή $u_m = x-ct$ και προφανώς παραμένει σταθερή όταν αυτή διατηρεί την ίδια τιμή. Η συνθήκη $x-ct = \text{const}$ ισοδυναμεί με την

$$\frac{d}{dt}(x-ct) = 0$$

Δηλαδή:

$$c - \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow c = \frac{dx}{dt}$$

Η τετμημένη x των σημείων για τα οποία η συνάρτηση $M(x-ct)$ έχει την ίδια τιμή, διαδίδεται κατά τη θετική x κατεύθυνση με ταχύτητα c . Παρομοίως, η τετμημένη x των σημείων για τα οποία η συνάρτηση $N(x+ct)$ έχει την ίδια τιμή, διαδίδεται κατά την αρνητική x κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα c . Έτσι, η λύση είναι πλήρης, καθώς περιέχει δύο αυθαίρετες συναρτήσεις. Η μορφή (3.2) είναι ιδανική για τη μελέτη της διάδοσης των κυμάτων, δηλαδή για τη μελέτη της πορείας μίας αρχικής διαταραχής εντός του συστήματος. Κατόπιν της παραπάνω αναλύσεως, καταλήγουμε ότι η σταθερά c είναι η ταχύτητα του ήχου.

Έστω τώρα ένα κύμα που οδεύει προς τη θετική κατεύθυνση x . Για $x=0$, τη χρονική στιγμή $t = t_1$ η πίεση είναι: $p_1 = F(-ct_1)$. Σε χρόνο $t_1 + t_2$ το κύμα θα έχει διανύσει απόσταση $x = ct_2$ (σταθερή ταχύτητα διάδοσης). Η πίεση θα είναι τότε:

$$p_2 = F(ct_2 - ct_1 - ct_2) = F(-ct_1) = p_1$$

Δηλαδή η ηχητική πίεση διεδóθει χωρίς να μεταβληθεί. Καταλήγουμε έτσι στο πολύ σημαντικό (ίσως προφανές) συμπέρασμα ότι:

Άσχετα με το πως σχηματίστηκε, το ηχητικό κύμα διαδίδεται χωρίς να μεταβάλλεται η μορφή του [ΤΤ].

Η εξίσωση (3.2γ) για περιοδικές ταλαντώσεις γράφεται [AAA]:

$$\Phi = M\left[\frac{c}{\omega}(kx - \omega t)\right] + N\left[\frac{c}{\omega}(kx + \omega t)\right] \quad (3.4)$$

Όπου $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ είναι ο κυματικός αριθμός και $\lambda = \frac{c}{f}$, κατά τα γνωστά, το μήκος κύματος.

Αφού τα M , N είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των $x+ct$ και $x-ct$ ή $x \pm ct = \frac{c}{\omega}(kx \pm \omega t) = \text{const}(kx \pm \omega t)$, η περιοδική λύση του οδεύοντος κύματος θα έχει απαραίτητα τη μορφή:

$$\Phi = A \cos \frac{\omega}{c}(x-ct) + B \cos \frac{\omega}{c}(x+ct) = A \cos(kx - \omega t) + B \cos(kx + \omega t) \quad (3.5)$$

ή τη μορφή:

$$\Phi = (\bar{A}e^{-jkx} + \bar{B}e^{jkx})e^{j\omega t} = \bar{A}e^{j\omega t - jkx} + \bar{B}e^{j\omega t + jkx} \quad (3.6)$$

Στο εξής, ο χρονικός παράγοντας θα γράφεται με τη μορφή:

$$e^{+j\omega t} \quad (3.7)$$

ώστε η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial t}$ να είναι ίση με πολλαπλασιασμό επί $+j\omega$. Οι επιφάνειες σταθερής φάσης της παραπάνω λύσης είναι τα επίπεδα $\omega t \pm kx = \text{const}$ ή $x + \text{const} = \pm \frac{\omega}{k}t = \pm ct$. Η ταχύτητα διάδοσής για τον πρώτο όρο της λύσης είναι:

$$x - ct = \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c \quad (3.8)$$

ενώ για το δεύτερο όρο:

$$x + ct = \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -c \quad (3.9)$$

όπως αναμενόταν για κύματα που διαδίδονται κατά τη θετική και αρνητική κατεύθυνση x αντίστοιχα.

3.2 Στάσιμα κύματα

Πολύ συχνά τα συστήματα που ενδιαφέρουν τη θεωρία των ταλαντώσεων είναι μικρά και με διαστάσεις συγκρίσιμες του μήκους κύματος. Σε τέτοια συστήματα μπορούν να δημιουργηθούν κύματα που δεν ταξιδεύουν, δηλαδή μένουν στάσιμα.

Η μορφή της λύσης που προτάθηκε προηγουμένως για τα οδεύοντα κύματα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και εδώ, αλλά είναι προτιμότερο να αντικατασταθεί από μία λύση στάσιμου κύματος, η οποία συνίσταται από ένα άθροισμα από συγκεκριμένα ολοκληρώματα της μορφής [AAA]:

$$\Phi = X(x) \cdot T(t) \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση (3.1γ) λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{c^2} X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης αυτής είναι συνάρτηση του χρόνου, ενώ το δεξί συνάρτηση της μετατόπισης. Ωστόσο, μία συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής t δεν μπορεί ποτέ να είναι ίση (για όλες τις τιμές της t) με μία συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x (για όλες τις τιμές της x). Ο μόνος τρόπος για να εξισώνονται τα δύο μέλη, είναι να ισούνται και τα δύο με έναν σταθερό αριθμό. Αν θεωρήσουμε ότι αυτός ο σταθερός αριθμός είναι της μορφής δ^2 , τότε προκύπτουν συγκεκριμένα ολοκληρώματα τα οποία αυξάνουν ή μειώνονται εκθετικά. Τέτοιες όμως λύσεις είναι μικρού ενδιαφέροντος. Ένα πολύ χρήσιμο συγκεκριμένο ολοκλήρωμα προκύπτει αν γράψουμε το σταθερό αριθμό με τη μορφή $-k^2$. Δηλαδή:

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \quad (3.12)$$

Όπου k ο κυματικός αριθμός.

Τώρα η διαφορική εξίσωση (4.2) μπορεί να διασπασθεί σε δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 X \quad (3.13)$$

και

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k^2 c^2 T = -\omega^2 T \quad (3.14)$$

όπου $\omega^2 = k^2 c^2$. Οι εξισώσεις αυτές είναι όμοιες με εκείνες που αναπαριστούν ελαστικά συστήματα σημειακής μάζας. Έτσι, έχουν τις ακόλουθες λύσεις:

$$X = A \cos(kx + \phi_x) \quad (3.15)$$

$$T = B \cos(\omega t + \phi_t) \quad (3.16)$$

Η γενική λύση, ακολούθως, της κυματικής εξίσωσης δίνεται από την έκφραση:

$$\Phi = XT = C \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) \quad (3.17)$$

όπου $C = AB$.

Ο παράγοντας $X(x)$ αναπαριστά τη διανομή του πλάτους και είναι ίδιος σε όλες τις χρονικές στιγμές. Απ' την άλλη, ο παράγοντας $T(t)$ δείχνει ότι όλα τα σημεία κινούνται σε ταυτοφωνία. Η μετατόπιση αυξάνεται ή μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τον κοινό παράγοντα $T(t)$. Η κίνηση δεν μπορεί πλέον να διαδοθεί. Οι εκτροπές όλων των σημείων λαμβάνουν τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους ταυτόχρονα. Αυτή η λύση της κυματικής εξίσωσης καλείται *στάσιμο κύμα* ή *φυσική ταλάντωση*.

Αν το σύστημα μας είναι άπειρο, απαιτείται ένας άπειρος αριθμός όρων της μορφής της εξίσωσης (3.17), για τις άπειρες τιμές που μπορεί να πάρει η γωνιακή συχνότητα ω και ο κυματικός αριθμός $k = \omega/c$. Η γενική λύση μπορεί να αναπαρασταθεί, στην περίπτωση αυτή, από ένα ολοκλήρωμα Fourier (επόμενο κεφάλαιο). Αν το σύστημα είναι πεπερασμένο και απομονωμένο, ώστε να μην υπάρχει διαρροή ενέργειας στο άπειρο, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε τη λύση από όρους, οι οποίοι να έχουν φυσική σημασία. Αν ξ είναι η μετατόπιση συναρτήσει της θέσης x και του χρόνου t , τότε στα όρια του πεπερασμένου συστήματος θα ισχύει:

$$\xi = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Κάθε ένας από τους όρους που αναφέρθηκαν πρέπει να αποτελεί λύση από μόνος του και περιγράφει μία πιθανή κίνηση του συστήματος. Κάθε τέτοια κίνηση καθορίζεται από μία ταλάντωση n που περιγράφεται απ' τη μετατόπιση $\xi_n(x, t)$, και της οποίας η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega_n = k_n c$.

Η έκφραση της λύσης για κάθε όρο είναι:

$$\Phi_n(x, t) = A_n \cos(k_n x + \phi_{nx}) \cos(k_n c t + \phi_{nt}) \quad (3.18)$$

Στα άκρα $x=0$ και $x=l$ του συστήματος το δυναμικό μηδενίζεται. Άρα θα πρέπει να ισχύει:

$$A_n \cos(\phi_{nx}) \cos(\omega_n t + \phi_{nt}) = A_n \cos(k_n l + \phi_{nx}) \cos(\omega_n t + \phi_{nt}) = 0 \quad (3.19)$$

Προκύπτει:

$$\phi_{nx} = \frac{n\pi}{2} \quad \text{και} \quad k_n l = n\pi, \quad \text{με} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.20)$$

Κάθε όρος παίρνει τότε τη μορφή:

$$\Phi_n(x, t) = \Phi_n(x) \cos(\omega_n t + \phi_{nt}) \quad (3.21)$$

όπου

$$\Phi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.22)$$

και

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{l} \quad (3.23)$$

Η συνάρτηση $\Phi_n(x, t)$ περιγράφει μία κίνηση η οποία καλείται *φυσική ταλάντωση* ή *κανονικός τρόπος ταλάντωσης* του συστήματος (θα εντυφύσουμε στις ταλαντώσεις στο κεφάλαιο 6). Οι φυσικές ταλαντώσεις, που αντιστοιχούν στα διαφορετικά n , αποτελούν τις πιο απλές μορφές ταλάντωσης που μπορεί να λάβει το σύστημα χωρίς επίδραση εξωτερικών δυνάμεων και αποσβέσεων. Οι ταλαντώσεις αυτές μπορούν θεωρητικά να εκτελούνται επ' άπειρον. Ο παράγοντας $\Phi_n(x)$ περιγράφει τη χωρική διανομή του πλάτους της ταλάντωσης και δεν εξαρτάται προφανώς απ' το χρόνο. Ο παράγοντας $\cos(\omega_n t + \phi_{nt})$, απ' την άλλη, εξαρτάται μόνο απ' το χρόνο και περιγράφει μία συνημιτονοειδή μεταβολή της χωρικής μορφής της ταλάντωσης. Οι συναρτήσεις $\Phi_n(x, t)$ ονομάζονται φυσικές συναρτή-

σεις ή συναρτήσεις των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (mode functions) [W]. Οι (γωνιακές) συχνότητες ω_n ονομάζονται φυσικές (γωνιακές) συχνότητες του συστήματος ή ιδιοσυχνότητες. Κάθε φυσική συνάρτηση περιγράφει τη χωρική μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης, δηλαδή το πλάτος που αντιστοιχεί σε κάθε x , όταν το σύστημα ταλαντώνεται σε κάποια από τις ιδιοσυχνότητες. Για όλες τις υπόλοιπες, πλην τις φυσικές, συχνότητες, η ομογενής της κυματικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\omega_n^2}{c^2} \Phi_n = 0 \quad (3.24)$$

έχει μονάχα τη μηδενική λύση $\Phi_n = 0$.

Κατά συνέπεια, οι φυσικές συναρτήσεις ορίζονται ως οι μη μηδενικές αρμονικές λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.24) που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες και περιγράφουν περιοδικές ταλαντώσεις του απαλλαγμένου από εξωτερικές δυνάμεις συστήματος, οι οποίες διατηρούνται επ'άπειρον.

Στο σημείο αυτό, η έκφραση της γενικής λύσης του συστήματος είναι η παρακάτω [AAA]:

$$\Phi(x, t) = \sum_n \Phi_n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos(\omega_n t + \phi_n), \text{ με } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Η έκφραση αυτή αποτελεί μία σειρά απείρων όρων και αποδεικνύεται με τη βοήθεια των θεωρημάτων Fourier (επόμενο κεφάλαιο), ότι είναι η πιο γενική λύση που μπορεί να περιγράψει το σύστημα. Μπορεί να προσαρμοστεί σε οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες (για $t=0$), για τη μετατόπιση $\Phi(x, 0) = \Phi_0(x)$ και για την ταχύτητα $\dot{\Phi}(x, 0) = \dot{\Phi}_0(x)$.

Από την πρώτη συνθήκη παίρνουμε:

$$\Phi(x, 0) = \sum_n \Phi_n(x) \cos \phi_n = \sum_n (A_n \cos \phi_n) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.26)$$

όπου $a_n = A_n \cos \phi_n$.

Από τη δεύτερη συνθήκη $\left(\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}(x, 0) \right)$ παίρνουμε:

$$\dot{\Phi}(x, 0) = \sum_n \Phi_n(x) \omega_n \sin \phi_n = -\sum_n A_n \omega_n \sin \phi_n \sin \frac{n\pi x}{l} = -\sum_n b_n \omega_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.27)$$

όπου $b_n = A_n \sin \phi_n$.

Οι δύο εξισώσεις περιέχουν δύο ανεξάρτητα σύνολα από σταθερές a_n και b_n , και μπορούν να ικανοποιούνται ταυτοχρόνως.

3.3 Σχέση μεταξύ της λύσης για οδεύον και της λύσης για στάσιμο κύμα

Οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν είτε ως προς οδεύοντα κύματα είτε ως προς στάσιμα. Τα οδεύοντα κύματα μπορούν να ερμηνευτούν ως παλμοί μεταξύ στάσιμων κυμάτων, ενώ τα στάσιμα ως ζεύγη κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, ώστε οι οδεύουσες συνιστώσες να ισορροπούν εξ' αιτίας της συμμετρίας του φαινομένου. Το ποια λύση θα χρησιμοποιηθεί είναι απλά θέμα βολικότητας.

Αν το σύστημα είναι μεγάλο συγκριτικά με το μήκος κύματος, ώστε η ταλάντωση αρχικά να μην είναι στάσιμη, τότε προτιμάται η λύση με οδεύοντα κύματα. Αν από την άλλη το σύστημα είναι μικρό, ώστε τα κύματα να ανακλώνται και να δημιουργούν μία στάσιμη ταλάντωση, είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε οδεύοντα κύματα και γι' αυτό το φαινόμενο μπορεί καλύτερα να περιγραφεί από τη λύση στάσιμων κυμάτων. Τα οδεύοντα κύματα χαρακτηρίζουν της αρχικά ασταθείς λύσεις, ενώ τα στάσιμα τις περιοδικές και τις λύσεις σταθερής κατάστασης [AAA].

Η ουσία είναι πως και η λύση με οδεύοντα κύματα και η λύση με στάσιμα αποτελούν εργαλεία που ερμηνεύουν το ίδιο φαινόμενο. Ένα παράδειγμα θα μας κατατοπίσει: Έστω ένας σωλήνας με κλει-

στά και τα δύο του άκρα. Στο ένα από τα δύο εφαρμόζεται ένας βραχύς παλμός και δημιουργείται κύμα, το οποίο ταξιδεύει προς το απέναντι άκρο, ανακλάται και γυρίζει πίσω. Έπειτα ανακλάται πάλι και ξανά οδεύει προς το απέναντι άκρο. Ο κύκλος συνεχίζεται επ' άπειρον. Η ερμηνεία αυτή βασίζεται στα οδεύοντα κύματα. Η λύση με στάσιμα κύματα μας οδηγεί σε διαφορετική περιγραφή του ίδιου φαινομένου. Ο βραχύς παλμός που διεγείρει το σωλήνα περιέχει όλες τις συνιστώσες Fourier με ίσο πλάτος. Ο παλμός διεγείρει όλες τις φυσικές ταλαντώσεις τις αέριας στήλης του σωλήνα. Καθώς ο παλμός δημιουργείται στο άκρο του σωλήνα, όπου όλες οι φυσικές ταλαντώσεις έχουν το μέγιστο πλάτος (κεφάλαιο), αυτές διεγείρονται σε φάση και με ίσο πλάτος. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αναπτύσσοντας τον παλμό στο $x=0$ για $t=0$ σε σειρά Fourier των φυσικών ταλαντώσεων. Έτσι, παίρνουμε για την πίεση στο άκρο του παλμού, $x=0$:

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \cos(n\omega_0 t) \cos(nk_0 x), \text{ με } \omega_0 = \frac{2\pi c}{2l} \quad (3.28)$$

Η σειρά μειώνεται σε σειρά παλμών ενός επαναλαμβανόμενου ρυθμού ίσου με τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα του σωλήνα. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι ακριβώς ίση με το ρυθμό αντήχησης $\frac{c}{2l}$, όπου c η ταχύτητα του ήχου και l το μήκος του σωλήνα.

3.4 Η πίεση και η σημειακή ταχύτητα σε ένα επίπεδο οδεύον κύμα

Έστω ένα κύμα που διαδίδεται κατά τη x κατεύθυνση. Η ηχητική πίεση μπορεί να γραφεί σε σύνθετη μορφή, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{p}(x,t) = \vec{A}e^{jk(ct-x)} = \vec{A}e^{j(\omega t - kx)} \quad (3.29)$$

ή σε πραγματική:

$$p = A \cos[k(ct-x) + \phi_A] = A \cos(\omega t - kx + \phi_A) \quad (3.30)$$

Η σημειακή ταχύτητα προκύπτει από τη σύνθετη πίεση με παραγωγή:

$$\vec{u} = \frac{j}{k\rho c} \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} = \frac{1}{\rho c} \vec{A}e^{j(\omega t - kx)} \quad (3.31)$$

Ο παράγοντας j εκφράζει την περιodicότητα και δηλώνει ότι έχουμε να κάνουμε με ένα σύνθετο περιστρεφόμενο διάνυσμα. Κατά συνέπεια ο τελεστής $\frac{j}{k\rho c} \frac{\partial}{\partial x}$ μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε μία σύνθετη λύση. Η πραγματική λύση μπορεί να προέλθει απομονώνοντας το πραγματικό μέρος:

$$u = \text{Re}(\vec{u}) = \frac{A}{\rho c} \cos(\omega t - kx + \phi_A) = \frac{p}{\rho c} \quad (3.32)$$

Το πηλίκο $\frac{\vec{p}}{\vec{u}} = \frac{p}{u} = \rho c$ της πίεσης προς τη σημειακή ταχύτητα, στην κατεύθυνση της διάδοσης, έχει διαστάσεις μηχανικής αντίστασης (resistance) ανά μονάδα επιφανείας και καλείται κυματική αντίσταση (wave resistance). Το μέγεθος αυτό χαρακτηρίζει κάθε υλικό. Για ένα κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική x κατεύθυνση, η σημειακή ταχύτητα είναι θετική προς τη διεύθυνση διάδοσης, αν η φάση της πίεσης είναι θετική. Αν το κύμα διαδίδεται κατά την αρνητική x κατεύθυνση, παραγωγή ως προς x , δίνει αρνητικό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι όταν ένα κύμα διαδίδεται κατά την αρνητική x κατεύθυνση, η σημειακή ταχύτητα είναι και αυτή αρνητική, δηλαδή προς την κατεύθυνση διάδοσης, όταν η πίεση είναι θετική. Η πίεση και η σημειακή ταχύτητα είναι ανάλογες μεταξύ τους κατά την κατεύθυνση της διάδοσης. Έχουν την ίδια φάση και ο λόγος τους είναι ρc . Στον πίνακα 3.1 φαίνονται οι ταχύτητες ήχου, η πυκνότητα και η κυματική αντίσταση διαφόρων γνωστών υλικών.

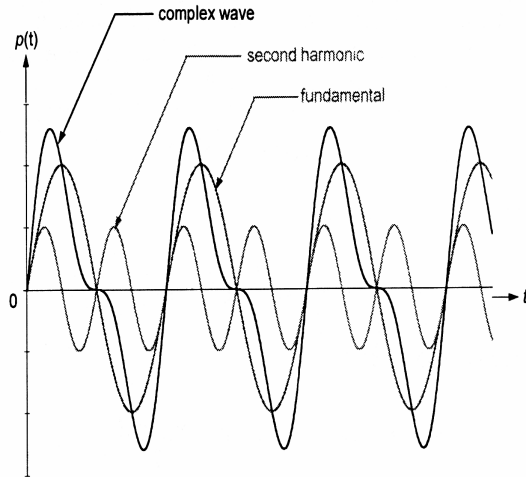
Πίνακας 3.3

Ηχητικές ιδιότητες γνωστών υλικών [AAA].

Υλικό	Ταχύτητα ήχου c , m/s	Πυκνότητα ρ , Kg/m^3	Κυματική αντίσταση $\rho c 10^{-6}$ $(Kg/m^2s) 10^{-6} = M\Omega$
Αέρας	331	1,29	0,00043
Οινόπνευμα	1440	790	1,1
Αλουμίνιο	6220	2650	16,5
Βακελίτης	2590	1400	3,63
Ορείχαλκος	4430	8500	37,1
Χαλκός	4620	8930	41,1
Γυαλί	4900 – 5900	2500	12 – 15
Μόλυβδος	2430	11400	27,3
Μαγνήσιο	5330	1740	9,26
Υδράργυρος	1460	13600	19,8
Νικέλιο	5600	8900	49,8
Πολυστυρένιο	2670	1160	2,94
Χαλαζίας	5750	2650	15,2
Ατσάλι	6110	7800	47,6
Ορυκτέλαιο	1390	920	1,28
Νερό	1450	1000	1,45

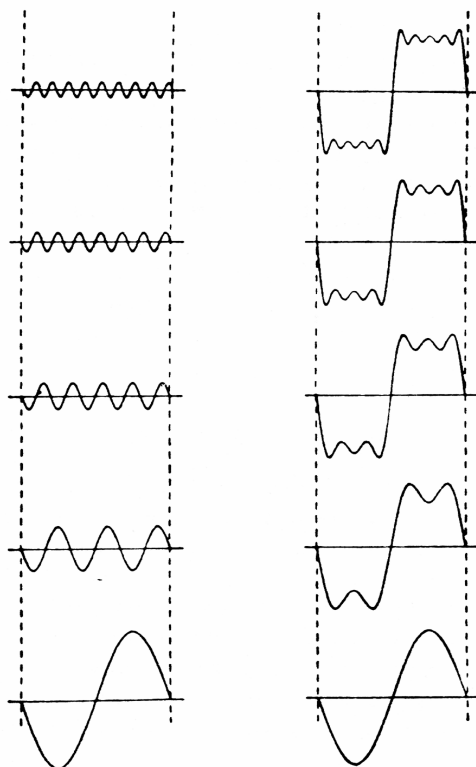
4

Ανάλυση Fourier



Σχήμα 4.1

Σύνθεση σύνθετου κύματος από δύο στοιχειώδη ημιτονοειδή



Σχήμα 4.2

Σύνθεση τετραγωνικού κύματος από απλά ημιτονοειδή. Στην κατώτερη αρμονική (κάτω αριστερά) προστίθενται οι υπόλοιπες (αριστερή στήλη) για να προκύψει διαδοχικά η σύνθετη μορφή (δεξιά στήλη).

Οι ημιτονοειδείς κινήσεις έχουν μελετηθεί ευρέως από τα μαθηματικά και τη φυσική. Παρόλο που δεν συναντούμε στην πραγματικότητα απλά ημιτονοειδή κύματα, μπορούμε να διασπασουμε τα πραγματικά και πολύπλοκα κύματα σε ένα ή περισσότερα ημιτονοειδή. Στο σχήμα 4.1 παρατηρούμε ότι όταν το απλό ημιτονοειδές κύμα συχνότητας *fundamental* αθροιστεί με το επίσης απλό ημιτονοειδές κύμα συχνότητας *second harmonic* (δηλ. διπλάσιας συχνότητας), προκύπτει ένα σύνθετο κύμα που δεν μοιάζει με ημιτονοειδές. Αντιστρόφως, αν μας έδιναν το σύνθετο ημιτονοειδές, θα λέγαμε ότι αυτό συντίθεται από δύο απλά κύματα, διαφορετικών συχνότητων και ίδιας φάσης, καθώς ξεκινούν μαζί.

Στο σχήμα 4.2 φαίνεται το πώς μπορούμε να επιτύχουμε μία κυματομορφή τετραγωνικού τύπου (άνω δεξιά), με διαδοχικές αθροίσεις των απλών κυμάτων της αριστερής στήλης. Για την μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί, το κύμα με τη χαμηλότερη συχνότητα, που προκύπτει απ' τη διάσπαση ενός σύνθετου, καλείται θεμελιώδες κύμα και η αντίστοιχη συχνότητά του, θεμελιώδης. Οι υπόλοιπες συχνότητες που προκύπτουν από τη διάσπαση, καλούνται αρμονικές και είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Ο ήχος που παράγεται από ένα μουσικό όργανο ή από μία μηχανή αυτοκινήτου δύναται να αποτελείται από άθροισμα άπειρου πλήθους αρμονικών. Αυτό που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι το σύνθετο κύμα δεν είναι απαραίτητα περιοδικό. Ο ήχος ενός πνευστού μουσικού οργάνου είναι περιοδικός, αλλά ο ήχος ενός κομπρεσέρ όχι. Το σήμα του κομπρεσέρ δεν μπορεί να αναλυθεί σε αρμονικές [TT], αλλά χρειάζεται περιπλοκότερη ανάλυση. Επίσης ακόμα και τα μουσικά όργανα εμφανίζουν συχνότητες που δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους ή κινήσεις που δεν είναι περιοδικές. Όσο όμως πολύπλοκο και να είναι το πρόβλημα η αρχή παραμένει η ίδια και συμπυκνώνεται στην ανάλυση Fourier, παίρνοντας το όνομα από τις ομώνυμες σειρές, που εισήχθησαν 18^ο αιώνα από τον Γάλλο φυσικό Jean Baptiste Joseph Fourier. Μέχρι και σήμερα, οι σειρές και η ανάλυση Fourier συνιστούν ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στη μελέτη των πάσης φύσεως κυμάτων και της ακουστικής. Πάνω απ' όλα, η γνώση των συχνοτήτων που απαρτίζουν ένα σήμα (ηλεκτρικό, μηχανικό, ακουστικό) βοηθούν τον επιστήμονα να κατανοήσει το μηχανισμό που το δημιούργησε. Τέλος, να σημειωθεί ότι τα απλά-στοιχειώδη κύματα μπορούν να εκφραστούν τόσο με ημιτονικές, όσο και με συνημιτονικές συναρτήσεις, αφού η συμπεριφορά

τους είναι όμοια. Στα αγγλικά τα απλά κύματα καλούνται με τον συνοπτικό όρο *sinusoids* [LL].

4.1 Τύποι Euler-Fourier

Η σειράς Fourier έχουν τη γενική μορφή [BBB]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.1)$$

Μία βασική ιδιότητα της σειράς (4.1) είναι ότι μπορεί να αναπαραστήσει ασυνεχείς συναρτήσεις, σε αντίθεση με άλλες σειρές, όπως μία σειρά Taylor που αναπαριστά μόνο παραγωγίσιμες συναρτήσεις όλων των τάξεων.

Θεωρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνωστή στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Πρέπει τώρα να προσδιοριστούν οι συντελεστές a_n και b_n . Υποθέτουμε (προσωρινά) ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, ώστε να μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο στο διάστημα $-\pi$ έως π . Ισχύει ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0, \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \dots$$

Έτσι η ολοκληρώνοντας την (4.1) παίρνουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi \quad (4.2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα την (4.1) με $\cos nx$. Έχουμε:

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \dots + a_n \cos^2 nx + \dots \quad (4.3)$$

Τα γινόμενα της μορφής $\sin mx \cdot \cos nx$, για όλα τα m και n ή της μορφής $\cos mx \cdot \cos nx$, για $m \neq n$, παραλείπονται, καθώς ισχύουν οι ταυτότητες [BBB]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nxdx = 0, \quad \text{για όλα τα } m \text{ και } n$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nxdx = 0, \quad m \neq n$$

Οι ταυτότητες αυτές καλούνται *συνθήκες ορθογωνικότητας* [BBB].

Ολοκληρώνοντας την (4.3) λαμβάνουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = a_n \pi$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (4.4)$$

Από (4.2) προκύπτει ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και για $n=0$. Αυτός είναι ο λόγος που ο σταθερός όρος γράφεται $\frac{a_0}{2}$ και όχι απλά a_0 .

Για τον υπολογισμό του b_n εκτελούμε την ίδια διαδικασία, πολλαπλασιάζοντας τώρα την (4.1) με $\sin nx$. Τελικά:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (4.5)$$

Οι σχέσεις (4.4) και (4.5) καλούνται τύποι *Euler-Fourier*.

4.2 Η σειρά Fourier στην ακουστική

Επειδή στην ακουστική μας ενδιαφέρουν οι χρονικά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις και μάλιστα οι περιοδικές, μπορούμε να γράψουμε την (4.1) στη μορφή:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (4.6)$$

όπου κάθε όρος, εκτός του πρώτου, παριστάνει μία χρονικά περιοδική συνάρτηση γωνιακής συχνότητας $\omega_n = n\omega_1$, με $n = 1, 2, 3, \dots$ και $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1$, με T_1 την θεμελιώδη περίοδο, ήτοι την περίοδο της συνάρτησης $f(t)$ και f_1 τη θεμελιώδη συχνότητα. Η περιοδικότητα της $f(t)$ ορίζεται απ' τη σχέση:

$$f(t+T) = f(t) \quad (4.7)$$

όπου με την ολοκλήρωση μίας περιόδου, η συνάρτηση λαμβάνει ξανά την ίδια τιμή. Μπορεί μία συνάρτηση (όπως αυτή της 4.1) να είναι περιοδική ως προς διάστημα x . Τότε η περιοδικότητα της εκφράζεται ως:

$$f(x+X) = f(x) \quad (4.8)$$

όπου X είναι η χωρική περίοδος ή το γνωστό μήκος κύματος. Αν το μήκος κύματος μετρείται σε μέτρα, η χωρική συχνότητα $f = 1/X$ μετράται σε κύκλους / μέτρο.

Η σειρά (4.6) μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή [AAA]:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (4.9)$$

όπου

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (4.10)$$

και

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (4.11)$$

Το μέγεθος C_n παριστάνει το Fourier πλάτος της συνιστώσας με συχνότητα ω_n της συνάρτησης $f(t)$, ενώ το μέγεθος ϕ_n τη φάση της συνιστώσας.

Οι όροι a_n και b_n των σχέσεων (4.4) και (4.5) μπορούν γραφούν και με τη μορφή:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \omega_n t dt \quad (4.12)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \omega_n t dt \quad (4.13)$$

Οι συντελεστές a_n απαλείφονται όταν η $f(t)$ είναι μία περιττή συνάρτηση, ενώ οι συντελεστές b_n απαλείφονται όταν η $f(t)$ είναι μία άρτια συνάρτηση. Τέλος ο σταθερός όρος (DC component) δίδεται απ' τον τύπο:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_n t dt \quad (4.14)$$

4.3 Ανάλυση Fourier με περιστρεφόμενα διανύσματα

Η ανάλυση Fourier με χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονου και συνημίτονου δεν είναι τόσο πρακτική όσο με χρήση διανυσμάτων, καθώς με αυτόν τον τρόπο οι σχέσεις συμπυκνώνονται αισθητά και παραβλέπονται και οι περιορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τα περιστρεφόμενα διανύσματα (rotating vectors) προκύπτουν από τις κλασσικές εκφράσεις του Euler για τα σύνθετα εκθετικά:

$$\cos \omega_n t = \frac{e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}}{2} \quad (4.15)$$

$$\sin \omega_n t = \frac{e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}}{2j} \quad (4.16)$$

που συνδέουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τους σύνθετους εκθετικούς αριθμούς $e^{\pm j\omega_n t}$ ή $\exp(\pm j\omega_n t)$. Αυτοί οι αριθμοί καλούνται και *complex exponentials* και περιγράφουν συνοπτικά έναν μιγαδικό αριθμό. Κατά τα γνωστά, ένας μιγαδικός αριθμός παριστάνεται με τη μορφή:

$$z = x + jy \quad (4.17)$$

στο καρτεσιανό (ή ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων. Σε πολλές περιπτώσεις, όπως στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, είναι χρήσιμη η παράσταση του μιγαδικού αριθμού σε πολική μορφή:

$$z \leftrightarrow r \angle \theta \quad (4.18)$$

όπου ο αριθμός παριστάνεται από μία ακτίνα r με κέντρο την αρχή των καρτεσιανών αξόνων, στραμμένη κατά γωνία θ , αντίστροφα απ' τους δείκτες του ρολογιού. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες συσχετίζονται με τις πολικές συντεταγμένες με τις εκφράσεις:

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta \quad (4.19)$$

αντίστροφα, για να πάμε απ' τις καρτεσιανές στις πολικές, έχουμε:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.20)$$

Επειδή η μορφή (4.18) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε υπολογισμούς, αντί αυτής χρησιμοποιείται ευρύτατα η μορφή του σύνθετου εκθετικού, η βάση του οποίου είναι ο αριθμός $e=2,7$.

Με βάση αυτά, η διανυσματική γραφή της σειράς Fourier είναι:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) \quad (4.21)$$

όπου ο όρος για $\omega_0 = 0$ παριστάνει το σταθερό όρο.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.21) με $\exp(-j\omega_m t)$ και ολοκληρώνοντας για μία περίοδο, παίρνουμε:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-j\omega_m t) dt = \sum_{n \neq m}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \vec{F}_n \exp[j(\omega_n - \omega_m)t] dt + \int_{-T/2}^{T/2} \vec{F}_n dt = T\vec{F}_n \quad (4.22)$$

όπου ο όρος $n=m$ αποσπάζεται από την άθροιση και αποτέλεσε το τελευταίο ολοκλήρωμα της (4.22). Επειδή το $\omega_n - \omega_m$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους γωνιακής συχνότητας, η άθροιση θα είναι μηδέν. Τελικά:

$$\vec{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-j\omega_n t) dt \quad (4.23)$$

Οι συναρτήσεις $f(t)$ που μας ενδιαφέρουν είναι συνήθως πραγματικές. Η $f(t)$ είναι πραγματική μόνο αν στην ανάπτυξη Fourier

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) = \sum_1^{\infty} [\vec{F}_n \exp(j\omega_n t) + \vec{F}_{-n} \exp(-j\omega_n t)] + F_0 \quad (4.24)$$

τα ζευγάρια των όρων που παριστάνουν ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας προστεθούν σε μία πραγματική ποσότητα. Δηλ. θα πρέπει:

$$\vec{F}_n \exp(j\omega_n t) + \vec{F}_{-n} \exp(-j\omega_n t) = \text{real} \quad (4.25)$$

Άρα οι όροι του προηγούμενου αθροίσματος θα πρέπει να είναι συζυγείς μιγαδικοί, ώστε να εξαλειφονται τα φανταστικά τους μέρη:

$$\vec{F}_n = -\vec{F}_n^* \quad (4.26)$$

ο συζυγείς ενός μιγαδικού σε μορφή $\exp(-j\omega_n t)$ είναι ο $\exp(j\omega_n t)$. Έτσι η σχέση (4.25) μετασχηματίζεται στην:

$$\vec{F}_n \exp(j\omega_n t) + \vec{F}_n^* \exp(j\omega_n t)^* = \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) + [\vec{F}_n \exp(j\omega_n t)]^* = 2 \text{Re}(\vec{F}_n \exp(j\omega_n t)) \quad (4.27)$$

Η συσχέτιση $\vec{F}_{-n} = \vec{F}_n^*$ μπορεί να προέλθει απ' ευθείας απ' την (4.23) με αντικατάσταση του ω_n από το ω_{-n} , με την προϋπόθεση ότι η $f(t)$ είναι πραγματική. Όπως παρατηρεί κανείς, για τη γωνιακή συχνότητα ισχύει $-\infty < \omega_n < +\infty$. Οι αρνητικές συχνότητες σημαίνουν απλά ότι το περιστρεφόμενο διάνυμα στρέφεται κατά γωνία αρνητική (σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού).

Καθώς τα μετρητικά όργανα δεν μπορούν να διαχωρίσουν τις αρνητικές από τις θετικές συχνότητες, τα αποτελέσματα θα πρέπει να ανάγονται στο διάστημα $0 \leq \omega \leq +\infty$. Για πραγματικές συναρτήσεις η (4.24) γίνεται:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_1^{\infty} \left\{ \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) + [\vec{F}_n \exp(j\omega_n t)]^* \right\} + F_0 \\ &= 2 \text{Re} \sum_1^{\infty} [\vec{F}_n \exp(j\omega_n t)] + F_0 \\ &= 2 \text{Re} \left\{ \sum_1^{\infty} [\text{Re}(\vec{F}_n) + j \text{Im}(\vec{F}_n)] [\cos \omega_n t + j \sin \omega_n t] \right\} + F_0 \\ &= \sum_1^{\infty} 2 \text{Re}\{\vec{F}_n\} \cos \omega_n t - \sum_1^{\infty} 2 \text{Im}\{\vec{F}_n\} \sin \omega_n t + \frac{2F_0}{2} \\ &= \sum_1^{\infty} a_n \cos \omega_n t + \sum_1^{\infty} b_n \sin \omega_n t + \frac{a_0}{2} \\ &= \sum_1^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \phi_n) + \frac{a_0}{2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Από την έκφραση (4.28) προκύπτουν:

$$a_0 = 2F_0 \quad (4.29)$$

$$a_n = 2 \text{Re}\{\vec{F}_n\} \quad (4.30)$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} \{ \vec{F}_n \} \quad (4.31)$$

$$C_n = 2 | \vec{F}_n | \quad (4.32)$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (4.33)$$

4.4 Υλοποίηση ανάλυσης Fourier με χρήση φίλτρων

Στις προηγούμενες ενότητες η ανάλυση Fourier εκτελέστηκε με μαθηματικά εργαλεία. Στην πράξη, μία τέτοια ανάλυση συχνά εκτελείται με τη βοήθεια ηλεκτρικών ή μηχανικών φίλτρων, λεπτού εύρους ζωνοπερατότητας [F,J]. Η συνάρτηση $f(t)$ είναι ισοδύναμη με τις αρμονικές συνιστώσες του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.21). Το φίλτρο μεταβιβάζει μία αρμονική, αν η συχνότητά της βρίσκεται εντός του εύρους διέλευσης συχνοτήτων του φίλτρου. Στην έξοδο του, αυτή η αρμονική συνιστώσα εμφανίζεται ακριβώς με τη μορφή του αντίστοιχου όρου στην (4.21). Αποδεικνύεται ότι ένα φίλτρο ολοκληρώνεται σε ένα διάστημα T , το οποίο είναι περίπου ίσο με τον αντίστροφο του εύρους ζώνης του Δf . Αν η θεμελιώδης περίοδος του φαινομένου είναι μεγαλύτερη από $T = 1/\Delta f$, τότε η έξοδος του φίλτρου θα έχει το ίδιο φάσμα με το σήμα που θα λαμβανόταν αν η συνάρτηση εισόδου $f(t)$ επαναλαμβανόταν περιοδικά, μία φορά στη μονάδα του χρόνου, στο διάστημα από $t-T$ σε t [AAA].

4.5 Μετάβαση από τη σειρά στο ολοκλήρωμα Fourier

Αν η περίοδος γίνει πολύ μεγάλη, οι αθροίσεις στη σειρά Fourier μπορούν να αντικατασταθούν με ολοκληρώσεις. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε την (4.21) με ω_1 , κατά τον παρακάτω τρόπο:

$$f(t) = \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) \quad (4.34)$$

Κάθε όρος της άθροισης αντιπροσωπεύει μία στοιχειώδη περιοχή και το ολικό άθροισμα είναι ίσο με τη συνολική περιοχή κάτω από την καμπύλη βηματισμού. Το πλάτος κάθε στοιχειώδους περιοχής $d\omega = \omega_1$ γίνεται πολύ μικρό, καθώς η T μεγαλώνει. Έτσι, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τμηματική γραφική παράσταση με μία συνεχή καμπύλη. Η περιοχή κάτω από την καμπύλη δίνεται τότε από το ολοκλήρωμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) \omega_1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) d\omega_n \quad (4.35)$$

Τελικά το ολοκλήρωμα Fourier γράφεται:

$$f(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) d\omega_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_n \exp(j\omega_n t) d\omega_n \quad (4.36)$$

Επειδή η $f(t)$ είναι πεπερασμένη και η T πολύ μεγάλη, ο σύνθετος αριθμός \vec{F}_n θα πρέπει να είναι ίσος το πολύ με $1/T$, αλλιώς το ολοκλήρωμα θα αποκλίνει. Είναι λοιπόν βολικό να αντικαταστήσουμε τον \vec{F}_n με:

$$T\vec{F}_n = \vec{F}_T(\omega_n) \quad (4.37)$$

όπου το $\vec{F}_T(\omega_n)$ είναι πεπερασμένο. Η εξίσωση (4.36) γίνεται τότε:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_T(\omega_n) \exp(j\omega_n t) \frac{d\omega_n}{2\pi} \quad (4.38)$$

Αν θεωρήσουμε όλη την ποσότητα $\omega_n / 2\pi$ ως τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, τότε εξαφανίζονται οι παράγοντες 2π ή $\sqrt{2\pi}$ μπροστά από το ολοκλήρωμα. Με χρήση της εξ. (4.23) λαμβάνουμε την αντίστροφη σχέση:

$$T\vec{F}_n = \vec{F}_T(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-j\omega_n t) dt \quad (4.39)$$

Η εξίσωση (4.38) εφαρμόζεται οποτεδήποτε η περίοδος της $f(t)$ είναι μεγάλη και όταν ο αριθμός \vec{F}_n είναι μία βηματική συνάρτηση του n , ώστε οι διακριτές τιμές τις (4.35) να μπορούν να αντικατασταθούν από μία συνεχή συνάρτηση. Μπορεί να δειχθεί ότι η \vec{F}_n είναι μία συνεχής συνάρτηση του n όταν η $f(t)$ είναι συνεχής ή έχει μόνο έναν περιορισμένο αριθμό από ασυνέχειες. Το ολοκλήρωμα Fourier προκύπτει τώρα αντικαθιστώντας το ω_n με ω και περνώντας στο όριο $T = +\infty$ όπως παρακάτω:

$$\vec{F}(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \vec{F}_T(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (4.40)$$

και

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\omega) \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.41)$$

Τα ολοκληρώματα ορίζονται για $t \rightarrow +\infty$, αν η $|f(t)|$ μειώνεται με τον χρόνο, με ρυθμό μεγαλύτερο του $1/t$ και για $\omega \rightarrow +\infty$, αν το μέτρο $|\vec{F}(\omega)|$ μειώνεται με το ω , με ρυθμό μεγαλύτερο του $1/\omega$. Κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα Fourier ορίζεται μόνον όταν η συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ αποσβένονται επαρκώς γρήγορα, όταν τα t και ω απειρίζονται. Επειδή τώρα πολλές συνηθισμένες συναρτήσεις δεν αποσβένονται καθώς $t \rightarrow \pm\infty$, έχουμε να κάνουμε με ένα μεγάλο μειονέκτημα του αρχικού μετασχηματισμού Fourier (ενότητα 4.7) και είναι απαραίτητο να γίνουν τροποποιήσεις της ανάλυσης Fourier πρώτου επεξεργαστούν τέτοιες συναρτήσεις. Κατόπιν συλλογισμών αντίστοιχων με την ενότητα 4.3 καταλήγουμε για τις σταθερές του ολοκληρώματος Fourier [AAA]:

$$a(\omega) = 2 \operatorname{Re}\{\vec{F}(\omega)\} \quad (4.42)$$

$$b(\omega) = -2 \operatorname{Im}\{\vec{F}(\omega)\} \quad (4.43)$$

$$C(\omega) = 2\sqrt{\{\operatorname{Re}[F(\omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[F(\omega)]\}^2} = 2|F(\omega)| \quad (4.44)$$

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{F(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(\omega)\}} \quad (4.45)$$

Όπως είναι προφανές οι σχέσεις (4.42)-(4.45) είναι αντίστοιχες με τις (4.29)-(4.33), που ισχύουν για τη σειρά Fourier.

4.6 Μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform)

Η έννοια των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών μας είναι γνωστή. Μετατρέπουν πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές και διευκολύνουν την επίλυσή τους. Κατά τη φοίτησή μας, οι

μηχανολόγοι του ΕΜΠ έχουμε ασχοληθεί κυρίως με το μετασχηματισμό Laplace [F,J,M]. Πολλοί ακόμα μετασχηματισμοί, όπως ο μετασχηματισμός z ή ο μετασχηματισμός Fourier εφαρμόζονται σε διαφορετικές περιπτώσεις ο καθένας. Στην ψηφιακή επιστήμη ο μετασχηματισμός z χρησιμοποιείται ευρέως, ενώ στην ακουστική (και όχι μόνο) ο μετασχηματισμός Fourier βοηθά τους μηχανικούς στην ανάλυση του συχνοτικού περιεχομένου των μη περιοδικών συναρτήσεων [Π].

Στη γενική μορφή τους οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί (integral transforms) περιγράφονται από τη σχέση [AAA]:

$$F(s) = \int_a^b f(x)K(s, x)dx \quad (4.46)$$

Η συνάρτηση $F(s)$ καλείται ολοκληρωτικός μετασχηματισμός της $f(x)$ υπό τη δράση του (σύνθετου) αριθμού Kernel $K(s, x)$. Το πρόβλημα έγκειται στην εύρεση της αντίστοιχης συνάρτησης της $f(x)$, ως προς την $F(s)$.

Θεωρητικά ο αριθμός Kernel μπορεί να λάβει οποιαδήποτε μορφή και συνεπώς οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί είναι άπειροι. Ωστόσο, λίγοι από αυτούς είναι πραγματικά χρήσιμοι. Τέτοιος είναι ο σύνθετος μετασχηματισμός Fourier. Ο αριθμός Kernel του μετασχηματισμού Fourier είναι:

$$K(s, x) = \exp(-jsx) = e^{-jsx} \quad (4.47)$$

Με χρήση των εξισώσεων (4.15) και (4.16) βρίσκουμε ότι το πραγματικό μέρος του αριθμού Kernel είναι:

$$K_{re}(s, x) = \cos(sx) \quad (4.48)$$

Η σχέση (4.48) οδηγεί στον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier. Το φανταστικό μέρος του Kernel είναι:

$$K_{im}(s, x) = \sin(sx) \quad (4.49)$$

και οδηγεί αντίστοιχα στον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier. Ο σύνθετος μετασχηματισμός Fourier είναι τελικά:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-jsx} dx \quad (4.50)$$

Ο αντίστροφος σύνθετος μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{jsx} \frac{ds}{2\pi} \quad (4.51)$$

Έτσι ο συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$F_{re}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(s, x) dx \quad (4.52)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{re}(s) \cos(s, x) \frac{ds}{2\pi} \quad (4.53)$$

Παρομοίως, για τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier:

$$F_{im}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(s, x) dx \quad (4.54)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{im}(s) \sin(s, x) \frac{ds}{2\pi} \quad (4.55)$$

Ενημερωτικά, για τον γνωστό μας μετασχηματισμό Laplace, ο αριθμός Kernel είναι:

$$K(s, x) = \exp(-sx) = e^{-sx} \quad (4.56)$$

4.7 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT)

Όταν θέλουμε να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο μίας σειράς από διακριτά δεδομένα, όπως είναι για παράδειγμα η δειγματοληψία (sampling) ενός ηχητικού σήματος, χωρίς να υπάρχει συνάρτηση που να περιγράφει τη χρονική συμπεριφορά του σήματος, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT), δηλαδή έναν αλγόριθμο που υπολογίζει αριθμητικά το συχνοτικό περιεχόμενο.

Υπολογισμός των συντελεστών Fourier

Έστω μία περιοδική συνάρτηση f με περίοδο T . Γνωρίζουμε τις τιμές της σε N σημεία μοιρασμένα ομοιόμορφα σε μία από τις περιόδους της. Δηλαδή:

$$f\left(k \frac{T}{N}\right) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.57)$$

Έτσι, το σήμα $f(t)$ λέμε ότι λήφθηκε ανά ίσα χρονικά διαστήματα διάρκειας T/N το καθένα. Χρησιμοποιώντας αυτές τις πληροφορίες προσπαθούμε τώρα να προσεγγίσουμε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης f . Θεωρούμε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει σημειακά στην f και ότι στα σημεία ασυνέχειας ισχύει:

$$f(t) = \frac{1}{2}[f(t+) - f(t-)] \quad (4.58)$$

Αφού είναι δοσμένα N σημεία, θα υπολογίσουμε N συντελεστές Fourier c_n . Καθώς το n τείνει στο άπειρο, οι συντελεστές αυτοί τείνουν στο μηδέν. Διαλέγουμε λοιπόν να υπολογίσουμε τα c_n για $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1$ (ή για ένα κεντρικό διάστημα, αν το N είναι περιττός). Οι συλλογισμοί αυτοί οδηγούν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος [DD]:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-2j\pi n \frac{t}{T}\right) dt \quad (4.59)$$

Δύο είναι τώρα οι δυνατές μέθοδοι για τον υπολογισμό αυτού του, όχι απλού, ολοκληρώματος [DD].

Μέθοδος πρώτη

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του τραπεζίου, που οδηγεί στην προσεγγιστική τιμή:

$$c'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \exp\left(-2j\pi n \frac{k}{N}\right) \quad (4.60)$$

ή αλλιώς

$$c'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}, \quad \text{με } \omega_N = \exp\left(2j\pi \frac{1}{N}\right) \quad (4.61)$$

Μέθοδος δεύτερη

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier c_n^N του τριγωνομετρικού πολυωνύμου:

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n^N \exp\left(2j\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (4.62)$$

το οποίο παρεμβάλει τη συνάρτηση f στα σημεία $k \frac{T}{N}$, όπου $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$. Με τον συμβολισμό c_n^N , ο N είναι σταθερός. Δεν είναι δηλαδή ένας μεταβλητός δείκτης, όπως ο n . Οι c_n^N , όπως και οι c'_n , προορίζονται να είναι προσεγγίσεις των πραγματικών c_n .

Το επόμενο βήμα είναι η λύση του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος τάξης N :

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n^N \omega_N^{nk} = y_k \quad \text{με } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.63)$$

Για βολικότητα μεταφέρουμε όλους του δείκτες n εντός του διαστήματος $[0, N-1]$, μετατρέποντας τους αρνητικούς δείκτες στα δεξιά σε N . Αυτό είναι δυνατό επειδή οι περιεχόμενες συναρτήσεις είναι περιοδικές.

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} c_n^N \omega_N^{nk} = \sum_{p=\frac{N}{2}}^{N-1} c_{p-N}^N \omega_N^{k(p-N)} = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} c_{n-N}^N \omega_N^{nk} \quad (4.64)$$

Ορίζουμε τώρα:

$$Y_n = \begin{cases} c_n^N, & 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1 \\ c_{n-N}^N, & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (4.65)$$

Το σύστημα επομένως μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk} = y_k, \quad \text{με } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.66)$$

Το σύστημα έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να λυθεί ρητά. Θεωρούμε ότι ο p είναι ακέραιος μεταξύ 0 και $N-1$. Υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kp} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{k(n-p)} = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-p)} \quad (4.67)$$

Το τελευταίο από τα τρία αθροίσματα είναι μία γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-p)} = \begin{cases} 0, & p \neq n \\ N, & p = n \end{cases} \quad (4.68)$$

Από αυτό έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kp} = N Y_p \quad (4.69)$$

Έτσι οδηγούμαστε στη λύση των αγνώστων Y_n :

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.70)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση είναι όμοια με την (4.61). Μετά από αλλαγή των δεικτών παρατηρούμε ότι:

$$c_n^N = c'_n, \quad \text{με } -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (4.71)$$

Σύνοψη

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.59) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του τραπεζίου, καταλήξαμε σε N προσεγγίσεις των συντελεστών Fourier c_n^N , οι οποίες είναι ίσες με τους συντελεστές Fourier του τριγωνομετρικού πολυωνύμου (4.62), το οποίο παρεμβάλει τη συνάρτηση f στα σημεία $t_k = k \frac{T}{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε στη διάθεσή μας τις δύο ισοδύναμες σχέσεις:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.72)$$

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.73)$$

Οι προσεγγίσεις των συντελεστών Fourier δίνονται συνοπτικά:

$$c_n \approx c_n^N = \begin{cases} Y_n, & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ Y_{n+N}, & -\frac{N}{2} \leq n \leq 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

Ο υπολογισμός του Y_n μας δίνει τις σταθερές Fourier c_n^N στην παρακάτω σειρά (για $N=8$, επί παραδείγματι):

Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
c_0^8	c_1^8	c_2^8	c_3^8	c_{-4}^8	c_{-3}^8	c_{-2}^8	c_0^8

Είναι βολικό, όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις, να επεκτείνουμε το διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^N$ σε μία περιοδική σειρά, με περίοδο N ,

Ορισμός

Η εξίσωση (4.73) ορίζει έναν μετασχηματισμό \mathfrak{F}_N από το \mathbb{C}^N στον εαυτό του:

$$(y_k) \xrightarrow{\mathfrak{F}_N} (Y_n)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός καλείται διακριτός μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform) τάξης N και είναι γραμμικός και αντιστρέψιμος:

$$y = \mathfrak{F}_N Y \Leftrightarrow Y = \mathfrak{F}_N^{-1} y \quad (4.75)$$

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το μετασχηματισμό \mathfrak{F}_N με τον πίνακα Ω_N :

$$\Omega_N = (\omega_N^{nk}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N} \bar{\Omega}_N$$

Ιδιότητες του DFT

Θεωρούμε ότι όλες οι σειρές δεδομένων αποτελούνται από σύνθετους αριθμούς και ότι είναι περιοδικές με περίοδο N . Μία σειρά y_N είναι άρτια όταν $y_{-n} = y_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$, ενώ είναι περιττή όταν $y_{-n} = -y_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Όλες οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό $(Y_n) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N^{-1}} (y_k)$ [DD].

Αν $(y_k) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (Y_n)$, τότε:

- $(y_{-k}) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (Y_{-n})$
- $(\bar{y}_k) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (\bar{Y}_{-n})$
- $(\bar{y}_{-k}) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (\bar{Y}_n)$

Επίσης ισχύουν οι επόμενοι συσχετισμοί:

- Αν y_k άρτια (περιττή), τότε και η Y_n άρτια (περιττή), και αντιστρόφως.
- Αν y_k πραγματική, τότε $Y_{-n} = \bar{Y}_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$.
- Αν y_k πραγματική και άρτια, τότε Y_n πραγματική και άρτια, και αντιστρόφως.
- Αν y_k πραγματική και περιττή, τότε Y_n φανταστική και περιττή, και αντιστρόφως.

Θεώρημα

Έστω x_k, y_k δύο σειρές σύνθετων αριθμών με περίοδο N και X_k, Y_k οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier αυτών.

- * Η σειρά που ορίζεται από την κυκλική συνέλιξη [M,LL] $z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}$, με $k \in \mathbb{Z}$ έχει μετασχηματισμό:

$$(z_k) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (Z_n = NX_n Y_n)$$

- * Ο μετασχηματισμός του εσωτερικού γινομένου των σειρών x_k και y_k είναι:

$$(p_k = x_k y_k) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (P_N), \text{ όπου } P_n = \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{n-q}$$

Πρόταση

Αν $(y_k) \xrightarrow{\mathfrak{S}_N} (Y_n)$, τότε $\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2$.

Aliasing

Για τη μεγαλύτερη συχνότητα f_{\max} που προκύπτει απ' τον DFT (το f της συχνότητας να μην συγχυστεί με τη συνάρτηση $f(t)$), αποδεικνύεται [II] ότι περιέχονται δύο δείγματα (samples) στη διάρκεια της περιόδου αυτής της συνιστώσας:

$$f_{\max} = \frac{1}{T_{\min}} = \frac{N}{2t_{\text{total}}} \rightarrow t_{\text{total}} = \frac{T_{\min} N}{2} \rightarrow \Delta t = \frac{T_{\min}}{2} \quad (4.76)$$

όπου t_{total} είναι η συνολική διάρκεια της δειγματοληψίας των N δειγμάτων και Δt η χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δειγμάτων. Η μέγιστη εμφανιζόμενη συχνότητα στον DFT ενός σήματος καλείται συχνότητα Nyquist και η αντίστοιχη συχνότητα δειγματοληψίας καλείται συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist.

$$f_{\text{sam, Nyquist}} = 2f_{\max} = 2f_{\text{Nyquist}} \quad (4.77)$$

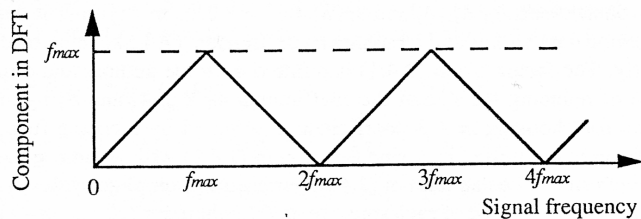
Με αυτά μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα του Shannon για τη δειγματοληψία [LL]:

Ένα συνεχές ως προς το χρόνο σήμα $s(t)$, με συχνότητες όχι μεγαλύτερες μίας f_{\max} , μπορεί να ανακατασκευασθεί επακριβώς από τα δείγματά του $s[N] = s(NT_{\text{sam}})$, αν αυτά έχουν ληφθεί με συχνότητα

$$f_{\text{sam}} = \frac{1}{T_{\text{sam}}}, \text{ μεγαλύτερη από } 2f_{\max}.$$

Μία αρμονική που έχει ακριβώς τη συχνότητα Nyquist δεν θα μπορεί να παρασταθεί σωστά από τον DFT. Μάλιστα, αν υπάρχουν στο σήμα συχνότητες μεγαλύτερες της Nyquist, εξ' αιτίας της περιοδικότητας του DFT θα εμφανίζονται ως συνιστώσες σε χαμηλότερη συχνότητα. Το φαινόμενο αυτό καλείται *aliasing* [II]. Το σχήμα 4.3 δείχνει τη σχέση μεταξύ των συχνοτήτων του σήματος και του DFT.

Έστω μία σειρά δεδομένων που λαμβάνεται ανά περίοδο 0,005 sec, δηλαδή με συχνότητα 200 samples/s. Η συχνότητα Nyquist είναι τότε $f_{\max} = 100$ Hz. Αν υπάρχει στο σήμα μία συχνότητα 125 Hz, αυτή θα εμφανίζεται, σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, ως συχνότητα 75 Hz. Μία συχνότητα 225 Hz θα εμφανίζεται ως συχνότητα 25 Hz και ούτω καθεξής. Το φαινόμενο *aliasing* πρέπει να αποφεύγεται, γιατί είναι δύσκολο έως ακατόρθωτο να αντιστοιχιστούν οι συχνότητες που εμφανίζει ο DFT με τις πραγματικές.



Σχήμα 4.3

Συσχέτιση της συχνότητας ενός σήματος και αυτής που αποδίδει ο μετασχηματισμός DFT. f_{\max} η συχνότητα Nyquist.

4.8 Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform - FFT)

Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$, χρησιμοποιώντας τις ισοδύναμες σχέσεις (4.72) και (4.73), απαιτούνται $(N-1)^2$ σύνθετοι πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ σύνθετες προσθέσεις, με την προϋπόθεση ότι οι τιμές των ω_N^j , δηλαδή τα ημίτονα και συνημίτονα των δοσμένων γωνιών, έχουν ήδη υπολογισθεί και αποθηκευθεί.

Μία τυπική τιμή για το N είναι της τάξεως του 1000, που συνεπάγεται περίπου ένα εκατομμύριο σύνθετους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις. Η υπολογιστική αυτή διαδικασία αποδείχθηκε με τον καιρό εξαιρετικά κοστοβόρα και η λύση ήρθε από δύο αμερικανούς επιστήμονες, τον J. W. Cooley και τον J. W. Tukey οι οποίοι εισήγαγαν έναν πολύ αποδοτικότερο αλγόριθμο προσέγγισης συναρτήσεων, με το όνομα Fast Fourier Transform (FFT), τροποποιώντας τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Ο FFT λαβαίνει υπ' όψη του την ειδική μορφή του πίνακα μετασχηματισμού, που κατασκευάζεται από τις ρίζες της μονάδας. Στις αρχές του, ο FFT γνώρισε πολύ μεγάλη επιτυχία [DD].

Ο αλγόριθμος των Cooley – Tukey

Έστω ότι ο N είναι άρτιος, $N=2m$. Αναδιατάσσουμε τους όρους των (4.72) και (4.73) σε δύο σύνολα. Ένα με άρτιους δείκτες και ένα με περιττούς. Έτσι:

$$Y_k = \frac{1}{2}(P_k + \omega_N^{-k} I_k) \quad (4.78)$$

Όπου:

$$P_k = \frac{1}{m}(y_0 + y_2 \omega_N^{-2k} + \dots + y_{N-2} \omega_N^{-(N-2)k})$$

$$I_k = \frac{1}{m}(y_1 + y_3 \omega_N^{-2k} + \dots + y_{N-1} \omega_N^{-(N-2)k})$$

Κατόπιν αυτών ισχύουν οι συσχετισμοί:

$$P_{k+m} = P_k, \quad I_{k+m} = I_k, \quad \omega_N^{-(k+m)} = -\omega_N^{-k} \quad \text{για } k = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$$

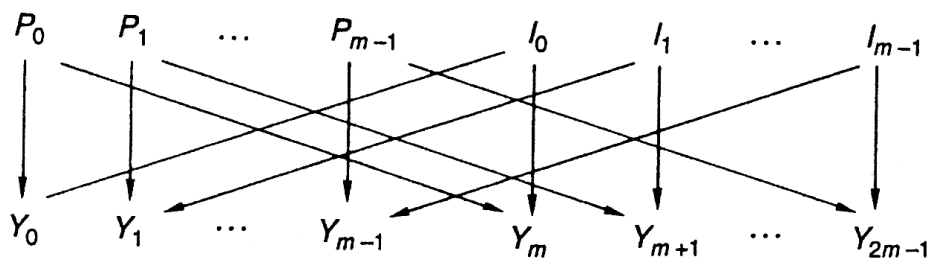
Τα βήματα του αλγορίθμου FFT συνοψίζονται στα εξής:

- 1) Υπολογισμός P_k και $\omega_N^{-k} I_k$.
- 2) Υπολογισμός της παράστασης $Y_k = \frac{1}{2}(P_k + \omega_N^{-k} I_k)$
- 3) Αφαίρεση: $Y_{k+m} = \frac{1}{2}(P_k - \omega_N^{-k} I_k)$

Οι υπολογισμοί εκτελούνται επιτυχώς μόνο για $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$. Το σχήμα 4.4 παρουσιάζει οπτικά την εξέλιξη των υπολογισμών.

Το υπολογιστικό κόστος του βήματος 1 είναι $2(m-1)^2 + m - 1$ ή περίπου $N^2/2$ πολλαπλασιασμοί. Τα βήματα 2 και 3 κοστίζουν ελάχιστα σε σύνθετους πολλαπλασιασμούς. Έτσι εκτελούμε την ίδια δουλειά με τους μισούς περίπου υπολογισμούς.

Θα βρει κανείς πολλά προγράμματα γραμμένα στις κοινές γλώσσες όπως Pascal, C, Fortran [G,47] που εκτελούν FFT. Πλέον με τα ολοκληρωμένα υπολογιστικά πακέτα, ο αλγόριθμος εκτελείται με μία απλή εντολή. Για τις ανάγκες της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στο πακέτο MatLab την εντολή `fft`, με την οποία μεταβαίνει άμεσα κανείς απ' το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Το πρόγραμμα CoolEdit εκτελεί και αυτό FFT σε ηχητικές έγγραφες, όπως θα δούμε στο πειραματικό μέρος της διπλωματικής.



Σχήμα 4.4

Διάγραμμα εκτέλεσης υπολογισμών στον αλγόριθμο Cooley – Tukey (FFT).

5

Χρήσιμα Μεγέθη της Ακουστικής

Θα ασχοληθούμε με τη γνωριμία λίγων στοιχειωδών όρων που χρησιμοποιούνται ευρέως στη διάλεκτη των ακουστικολόγων και θεωρούνται δεδομένοι σε οποιοδήποτε κείμενο ακουστικής. Εξάλλου η χρήση τους στη διπλωματική είναι συχνή.

5.1 Οκτάβες

Μια πολύ διαδεδομένη έννοια στους ασχολούντες με τον ήχο και τους μουσικούς είναι η *οκτάβα*. Το εύρος των ακουστών συχνοτήτων (16-20000 Hz) χωρίζεται σε δέκα τυποποιημένα λογαριθμικά διαστήματα, κάθε ένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από κάτω και πάνω όριο, καθώς και μία κεντρική ή μέση συχνότητα f_c (ή f_m). Η κεντρική συχνότητα f_c είναι ο γεωμετρικός μέσος των δύο ορίων:

$$f_c = \sqrt{f_L f_U} \quad (5.1)$$

όπου f_L και f_U , το κάτω (Lower) και άνω (Upper) όριο, αντιστοίχως. Σε κάθε οκτάβα ισχύει εξ' ορισμού $f_U = 2f_L$. Από τη σχέση (5.1) λαμβάνουμε:

$$f_L = \frac{f_c}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad f_U = \sqrt{2}f_c \quad (5.2)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η κεντρική συχνότητα κάθε οκτάβας είναι διπλάσια της κεντρικής συχνότητας της προηγούμενης οκτάβας. Το εύρος συχνοτήτων μίας οκτάβας (bandwidth) BW δίνεται από τον τύπο:

$$BW = f_U - f_L = f_c \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{f_c}{\sqrt{2}} \quad (5.3)$$

Ο λόγος λοιπόν $\frac{BW}{f_c}$ είναι πάντα σταθερός. Στον πίνακα 5.1 δίνονται οι τρεις χαρακτηριστικές συχνότητες κάθε οκτάβας.

Πίνακας 5.1. Οι οκτάβες

f_L	f_c	f_U
22,4 Hz	31,5 Hz	45 Hz
45	63	90
90	125	180
180	250	355
355	500	710
710	1000	1400
1400	2000	2800
2800	4000	5600
5600	8000	11200
11200	16000	22400

Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι μία απ' τις θεμελιώδεις έννοιες της μουσικής, η οκτάβα [C], ερμηνεύεται κατά σαφή τρόπο από τα μαθηματικά και τη φυσική. Όλη η μουσική, όπως θα δούμε και σ' αυτή την εργασία, είναι επιστήμη. Η μουσική σύνθεση δεν είναι τόσο δημιουργία όσο ανακάλυψη νέων συνδυασμών μεταξύ των μαθηματικών παραμέτρων της μουσικής.

Μπορούμε να χωρίσουμε κάθε οκτάβα σε τρία μέρη. Τότε το κάτω και το πάνω όριο κάθε τέτοιου τμήματος, όπως και η κεντρική συχνότητα συνδέονται με τις σχέσεις:

$$f_L = \frac{f_C}{2^{1/6}}, \quad f_U = 2^{1/6} f_C, \quad f_C = \sqrt{f_L f_U} \quad (5.4)$$

Από τις (5.3) και (5.4) διαπιστώνουμε ότι ο λόγος $\frac{BW}{f_C}$ είναι και εδώ σταθερός, ίσος με:

$$\frac{BW}{f_C} = 2^{1/6} - 2^{-1/6} \quad (5.5)$$

Ο πίνακας 5.2 δίνει τις τρεις χαρακτηριστικές συχνότητες κάθε τρίτου οκτάβας για το συχνοτικό εύρος του πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.2

Διαίρεση οκτάβας σε τρίτα.

Lower band limit f_L (Hz)	Center frequency f_C (Hz)	Upper band limit f_U (Hz)
18.0	20	24.4
22.4 ^a	25	28.0
28.0	31.5 ^a	35.5
35.5	40	45 ^a
45 ^a	50	56
56	63 ^a	71
71	80	90 ^a
90 ^a	100	112
112	125 ^a	140
140	160	180 ^a
180 ^a	200	224
224	250 ^a	280
280	315	355 ^a
355 ^a	400	450
450	500 ^a	560
560	630	710 ^a
710 ^a	800	900
900	1000 ^a	1120
1120	1250	1400 ^a
1400 ^a	1600	1800
1800	2000 ^a	2240
2240	2500	2800 ^a
2800 ^a	3150	3550
3550	4000 ^a	4500
4500	5000	5600 ^a
5600 ^a	6300	7100
7100	8000 ^a	9000
9000	10000	11200 ^a
11200 ^a	12500	14000
14000	16000 ^a	18000
18000	20000	22400 ^a

^a Octave marking points.

Η διαίρεση οκτάβας σε τρίτα είναι πολύ συνηθισμένη σε αναλυτές συχνοτικού φάσματος, που χρησιμοποιούνται για μετρήσεις θορύβων ή μουσικών ήχων. Πολλές φορές συναντούμε διαίρεση σε

άλλα κλάσματα (δέκατα, εκατοστά, κλπ). Αν το κλάσμα είναι $1/n$ οκτάβας, τότε η επόμενη με την προηγούμενη κεντρική συχνότητα δύο διαδοχικών διαιρέσεων διέπονται από τη σχέση:

$$f_{n+1} = 2^{1/n} f_n \quad (5.6)$$

5.2 Ηχητική στάθμη

Είδαμε ότι ο ήχος συνίσταται από μικρές θετικές αποκλίσεις της πίεσης από την κατάσταση ισορροπίας, που καλούνται συμπίεσεις (compressions) και από μικρές αρνητικές αποκλίσεις, που καλούνται αραιώσεις (rarefactions). Οι αποκλίσεις αυτές καλούνται και διαταραχές. Η μέση απόκλιση της πίεσης από την ισορροπία είναι πάντα μηδέν, καθώς η μέση συμπίεση ισούται με τη μέση αραιώση. Μπορούμε να μετρήσουμε το βαθμό μίας διαταραχής υψώνοντας στο τετράγωνο όλες τις τιμές των διαταραχών της ηχητικής πίεσης σε μία περίοδο, εξαλείφοντας έτσι τα πρόσημα των διαταραχών. Η μέση τετραγωνική πίεση είναι τότε [TT]:

$$\langle p \rangle^2 = \frac{\int_0^{\tau} p^2 dt}{\int_0^{\tau} dt} \quad (5.7)$$

Όπου τ είναι το χρονικό διάστημα της μέτρησης και p η στιγμιαία πίεση. Αν πάρουμε τη ρίζα της μέσης τετραγωνικής πίεσης θα έχουμε ένα πολύ γνωστό μέγεθος στην ακουστική, την *rms* πίεση (root – mean – square pressure):

$$p_{rms} = \sqrt{\langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\int_0^{\tau} p^2 dt}{\int_0^{\tau} dt}} \quad (5.8)$$

Για ένα στοιχειώδες συνημιτονοειδές κύμα, στη διάρκεια μίας περιόδου $T = 2\pi/\omega$, η σχέση γίνεται [TT]:

$$p_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^{\tau} p_m^2 \cos^2 k(x-ct) dt}{T}} = \frac{p_m}{\sqrt{2}} \quad (5.9)$$

όπου p_m το πλάτος του κύματος.

Το ανθρώπινο αυτί μπορεί να αντιληφθεί *rms* πιέσεις που εκτείνονται σε ένα εύρος από 20 μPa έως 40 Pa, δηλ. 40000000 μPa (αν και το όριο του πόνου φτάνει μέχρι 40 KPa). Όπως και να έχει, το εύρος των πιέσεων που μπορεί να αντιληφθεί ο άνθρωπος είναι τεράστιο και έχει επικρατήσει μία λογαριθμική διαίρεση αυτού του εύρους, που κάνει πιο βολικά τα πράγματα. Αν ορίσουμε ως πίεση αναφοράς το κατώφλι ακουστότητας $p_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} = 20 \mu\text{Pa}$ τότε μπορούμε να εισάγουμε το επίπεδο ηχητικής πίεσης L_p , μέσω της σχέσης:

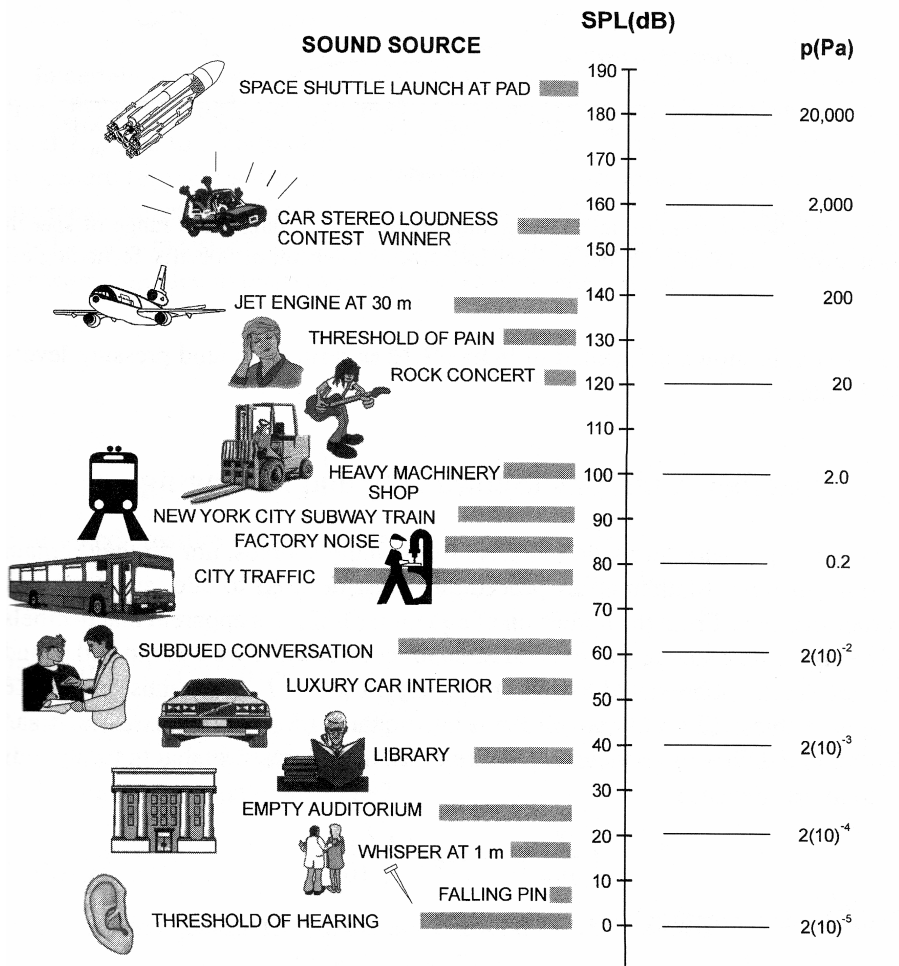
$$L_p = 10 \log_{10} \left(\frac{p_{rms}}{p_0} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{p_{rms}}{p_0} \right) \quad (5.10)$$

Το επίπεδο ηχητικής πίεσης (sound pressure level), ή αλλιώς ηχητική στάθμη, εκφράζεται σε dB. Από την εξίσωση (5.7) συμπεραίνουμε ότι ένας διπλασιασμός της *rms* πίεσης ισοδυναμεί με αύξηση κατά 6 dB του L_p . Στην εικόνα 5.1 παρουσιάζονται τα επίπεδα ηχητικής πίεσης και η απόλυτες *rms* πιέσεις που εκπέμπονται από συνηθισμένες πηγές, με αυξανόμενη, από κάτω προς τα πάνω, κλιμάκωση. Στο σχήμα 5.2α φαίνονται που κυμαίνονται τα επίπεδα ηχητικής πίεσης για όλο το ακουστό πεδίο συχνοτήτων, για τη μουσική και για την ομιλία. Παρατηρούμε ότι δεν ακούμε σε όλες τις στάθ-

μες όλες τις συχνότητες εξίσου καλά. Για να έχουμε μία πλήρη αντίληψη όλου του συχνοτικού φάσματος της μουσικής, όπως φαίνεται απ' το σχήμα 5.2^α, θα πρέπει το SPL να βρίσκεται περίπου στα 60 dB.

Πράξεις μεταξύ Ηχητικών σταθμών

Τα διαφορετικά SPL $L_{p1}, L_{p2}, L_{p3}, \dots, L_{pn}$, δεν αθροίζονται σε καμία περίπτωση αλγεβρικά για να μας δώσουν την ολική ένταση θορύβου. Επειδή ισχύει:



Εικόνα 5.4

Επίπεδα ηχητικής πίεσης και απόλυτες rms πιέσεις από διάφορες πηγές [TT].

$$\left(\frac{p_i}{p_{ref}} \right)^2 = \log^{-1} \left(\frac{L_{pi}}{10} \right) \tag{5.11}$$

η συνήχιση των διαφορετικών εντάσεων (σε κάθε μια από τις οποίες αντιστοιχεί μία ακουστική πίεση) θα δώσει:

$$L_{pt} = 10 \log \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p_{ref}} \right)^2 \right] \tag{5.12}$$

ή

$$L_{p_i} = 10 \log \left[\sum_{i=1}^n \log^{-1} \left(\frac{L_{p_i}}{10} \right) \right] = 10 \log \left(\sum_{i=1}^n 10^{L_{p_i}/10} \right) \quad (5.13)$$

Όταν τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή μίας σειράς εντάσεων που συνηχούν, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\bar{L}_p = 10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 10^{L_{p_i}/10} \right) \quad (5.14)$$

5.3 Ένταση

Θεωρούμε ότι τα ηχητικά κύματα εκπέμπονται από μία σημειακή πηγή στο χώρο κατά σφαιρικό και αυξανόμενο τρόπο. Έστω ότι η πηγή εκπομπής περιβάλλεται πλήρως από μία κλειστή σφαιρική επιφάνεια S . Η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς θα δίνεται τότε από το ολοκλήρωμα [ΤΤ,]:

$$W = \int_S I \cdot dS \quad (5.15)$$

όπου I είναι η ένταση του ήχου (sound intensity) σε μονάδες W/m^2 και dS ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας σε μονάδες m^2 . Το επιφανειακό ολοκλήρωμα (5.15) είναι επομένως το ολοκλήρωμα της ηχητικής έντασης κάθετα προς τη στοιχειώδη επιφάνεια dS . Εκτελώντας την ολοκλήρωση (5.15) για μία σφαίρα ακτίνας r , γύρω από μία πηγή που εκπέμπει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις, θα πάρουμε την παρακάτω αλγεβρική σχέση [ΤΤ]:

$$I(r) = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2} \quad (5.16)$$

Η σχέση (5.16) συνιστά τον νόμο αντίστροφου τετραγώνου για την ένταση του ήχου. Δηλαδή, ο ήχος γίνεται ασθενέστερος κατά το τετράγωνο της απόστασης καθώς απομακρυνόμαστε από την πηγή. Αν η πηγή ήταν τοποθετημένη σε ένα τοίχο πλήρως ανακλαστικό (reflective surface) και μπορούσε συνεπώς να εκπέμπει κύματα μόνο κατά ένα ημισφαίριο (προς την εξωτερική μεριά του τοίχου), τότε για την ίδια απόσταση r , η ένταση θα ήταν η διπλάσια από την (5.16), σύμφωνα με τη σχέση:

$$I(r) = \frac{W}{2\pi r^2} \quad (5.17)$$

Η ένταση, που αντιπροσωπεύει τη μεταφορά ενέργειας των ηχητικών κυμάτων, ισούται με το γινόμενο της ηχητικής πίεσης και της σημειακής ταχύτητας [ΤΤ]:

$$I = p \cdot u \quad (5.18)$$

Για ένα απλό σφαιρικό συνημιτονοειδές κύμα, η πίεση δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση:

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \cos[k(r - ct)] \quad (5.19)$$

Ενώ για την ταχύτητα ισχύει:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= -\frac{1}{\rho} \int \left[\frac{A}{r} k \sin[k(r - ct)] + \frac{A}{r^2} \cos[k(r - ct)] \right] dt \\ &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{-kA}{kcr} \cos[k(r - ct)] - \frac{A}{r^2 kc} \sin[k(r - ct)] \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

ή

$$u(r,t) = \frac{A}{\rho cr} \cos[k(r-ct)] \left\{ 1 + \frac{1}{kr} \tan[k(r-ct)] \right\} \quad (5.21)$$

Για μεγάλες τιμές του kr ($k^2 r^2 \gg 1$), η εξίσωση γίνεται:

$$u(r,t) \approx \frac{p(r,t)}{\rho c} \quad (5.22)$$

Για μικρές τιμές του kr ($k^2 r^2 \ll 1$), έχουμε:

$$u(r,t) \approx \frac{A}{k \rho c r^2} \sin[k(r-ct)] \approx \frac{p(r,t)}{\rho c k r} \quad (5.23)$$

Στην πραγματικότητα οι ηχητικές πηγές είναι κατευθυντικές, δηλαδή δεν εκπέμπουν κατά το ίδιο ποσό σε όλη την επιφάνεια που τις περιβάλλει. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της (5.16) πρέπει να τεμαχίσουμε τη συνολική επιφάνεια S σε έναν πεπερασμένο αριθμό επιμέρους επιφανειών S_i και να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα W_i ξεχωριστά για κάθε επιφάνεια. Γνωρίζοντας το ολοκλήρωμα W_i , γνωρίζουμε και την ένταση I_i σε κάθε S_i . Έτσι η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς θα δίνεται από τη σχέση [ΓΤ]:

$$W = \sum_i I_i S_i \quad (5.24)$$

Η εξίσωση (5.24) μπορεί να εκφρασθεί λογαριθμικά ως ακολούθως:

$$L_w = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) + 10 \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \Rightarrow L_w = L_I + 10 \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \quad (5.25)$$

όπου:

L_w το επίπεδο ηχητικής ισχύος (sound power level) σε dB ισχύος αναφοράς $10^{-12} W$,

L_I το επίπεδο ηχητικής έντασης (sound intensity level) σε dB έντασης αναφοράς $10^{-12} W/m^2$,

S η περιβάλλουσα επιφάνεια σε m^2 ,

S_0 η επιφάνεια αναφοράς ίση με $1 m^2$ και

I_0 η ένταση αναφοράς ίση, όπως είπαμε, με $10^{-12} W/m^2$.

5.4 Στάθμη Ακουστότητας

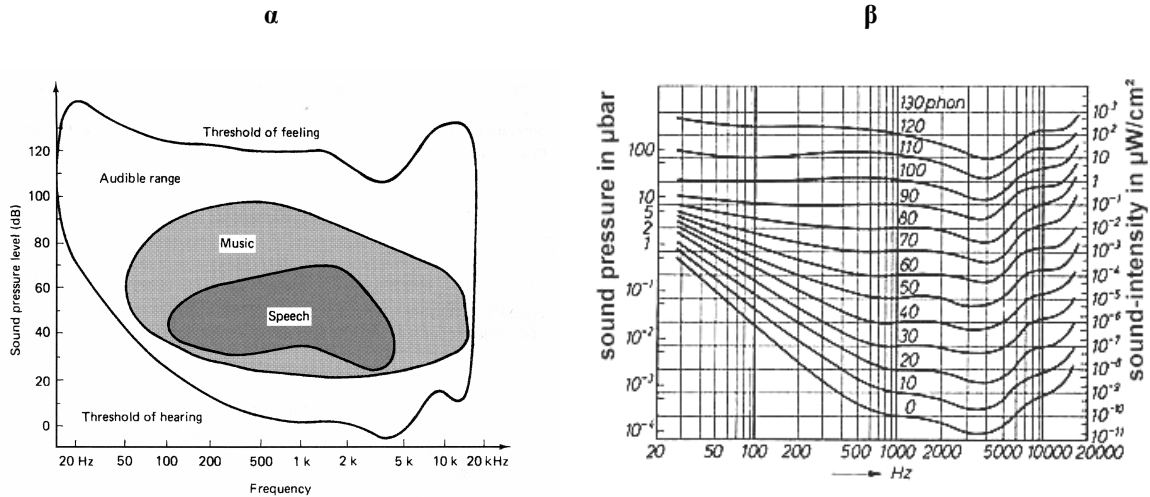
Εκτός από τη μαθηματική έκφραση της έντασης του ήχου, που περιγράφηκε στην ενότητα 3.2, χρησιμοποιείται συχνά και το μέγεθος της *ακουστότητας* [L] που λαβαίνει υπ' όψη και τον ανθρώπινο παράγοντα:

Η ακουστότητα αποτελεί το χαρακτηριστικό εκείνο γνώρισμα, που καταλαβαίνουμε αν ο ήχος είναι ισχυρός ή ασθενής. Πρόκειται για το μέγεθος του προκαλούμενου ακουστικού αισθήματος [L]. Η ακουστότητα είναι κάτι προσωπικό, αφού εξαρτάται από την ακοή του καθενός.

Η ευαισθησία του αυτιού μας είναι πολύ διαφορετική για τις διάφορες περιοχές των ακουστικών συχνοτήτων. Ένα προσωπικό μέτρο της ακουστότητας επιβάλλεται με ψυχοακουστικά πειράματα, κατά τα οποία ένα δείγμα ατόμων διερωτάται αν ήχοι διαφορετικών συχνοτήτων και σταθμών έντασης ηχούν εξίσου δυνατά με έναν πρότυπο τόνο.

Ο πρότυπος τόνος είναι ένας καθαρός ήχος συχνότητας 1000 Hz. Η στάθμη ακουστότητας (loudness level) οποιουδήποτε άλλου ήχου καθορίζεται ως η στάθμη της ακουστικής πίεσης του τόνου των 1000 Hz, όταν αυτός ηχεί εξίσου δυνατά με τον ήχο που εξετάζουμε. Μονάδα στάθμης ακουστότητας είναι το phon. Όταν ένας τόνος 1000 Hz έχει στάθμη πίεσης 60 dB, τότε η στάθμη ακουστότητάς του είναι 60 phon. Οι Fletcher και Munson εκτέλεσαν μετρήσεις τα αποτελέσματα των οποίων φαίνονται στο διάγραμμα 5.2 β [L]. Παρατηρούμε ότι η καμπύλες 0 και 130 phon συμπίπτουν με τα όρια του ακουστού πεδίου συχνοτήτων του σχήματος 5.2^α και ορίζουν τα όρια της ακοής μας.

Σύμφωνα με το διάγραμμα 5.2β, για να ακούγονται εξίσου δυνατά δύο τόνοι 1000 και 50 Hz στα 60 phon, πρέπει οι αντικειμενικές (πραγματικές) ηχητικές πιέσεις τους να είναι περίπου 0,5 και 2 mbar, αντίστοιχα. Δηλαδή όσο χαμηλώνουν οι συχνότητες τόσο πρέπει να αυξάνεται η ακουστική τους πίεση για να τις ακούμε με σταθερό υποκειμενικό τρόπο.



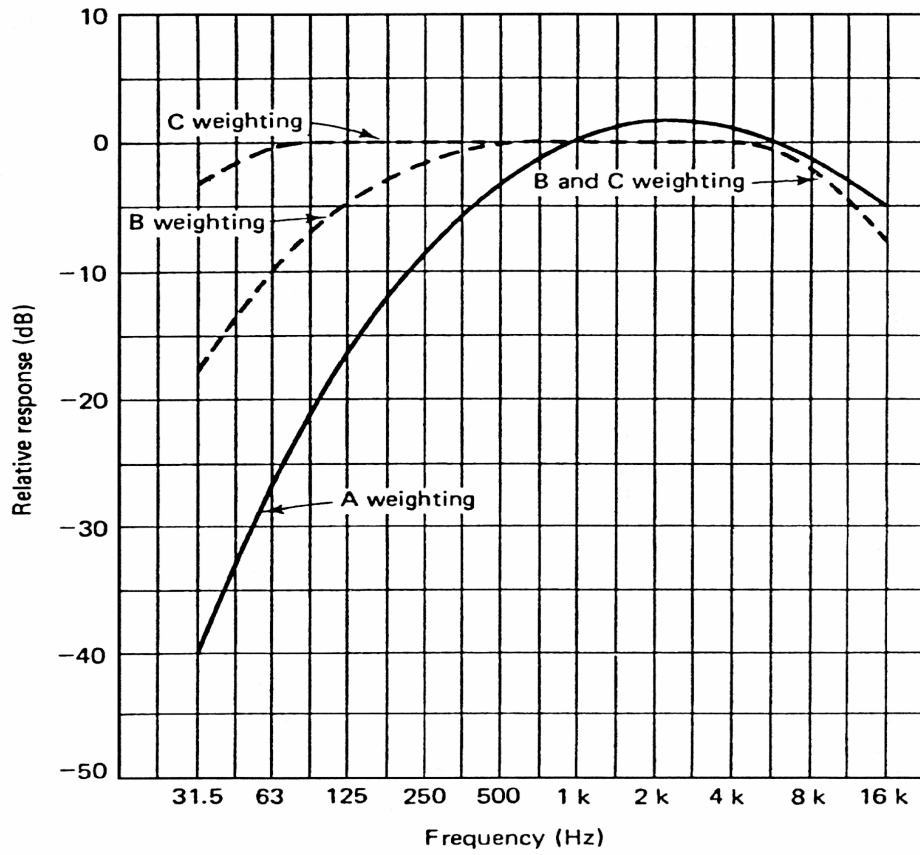
Εικόνα 5.2

Περιοχή ακουστότητας του ανθρώπου μαζί με τις περιοχές της μουσικής και της ομιλίας.

5.5 Καμπύλες στάθμισης

Οι άνθρωποι αξιολογούμε την ένταση ενός ηχητικού σήματος διαφορετικά σε κάθε συχνότητα. Ένα θόρυβος του οποίου το συχνοτικό περιεχόμενο συγκεντρώνεται κυρίως στο μέσον του ακουστικού εύρους (≈ 1000 Hz, σε λογαριθμική κλίμακα), θα θεωρείται πιο ηχηρός από ένα θόρυβο με συχνότητες στη χαμηλόσυχη περιοχή (≈ 40 Hz) ή στην υψηλόσυχη περιοχή (≈ 15 KHz). Αυτό το φαινόμενο είναι περισσότερο εμφανές στους χαμηλούς σε ένταση ήχους. Γι' αυτό κάποιιοι ενισχυτές της αγοράς διαθέτουν ηλεκτρονικό σύστημα που ενισχύει τις χαμηλές και τις υψηλές συχνότητες ενός χαμηλού σε ένταση ήχου και τις εξισώνει με την ένταση των μεσαίων συχνοτήτων [TT].

Για τους μηχανικούς του ήχου υπάρχουν οι λεγόμενες καμπύλες στάθμισης συχνοτήτων (Frequency Weighting Curves) που ενισχύουν ή αδυνατίζουν διαφορετικά κάποιες συχνοτικές περιοχές και βοηθούν στην αντικειμενική αξιολόγηση ενός ήχου, δίχως να απαιτείται η ανάλυση με βάση τις περιοχές ακουστότητας. Τρεις είναι αυτές οι καμπύλες: A, B και C, όπως φαίνονται στο διάγραμμα 5.1. Όταν με την ανάλυση Fourier έχουμε τη στάθμη έντασης κάθε συχνοτικής συνιστώσας ενός ήχου τότε από το διάγραμμα βρίσκουμε σε τη στάθμη αντιστοιχεί η κάθε συχνότητα ως προς μία καμπύλη και προσθέτουμε στη στάθμη έντασης Fourier. Αν για παράδειγμα θέλουμε να σταθμίσουμε ως προς την καμπύλη A μία συνιστώσα συχνότητας 63 Hz και έντασης 68 dB, αυτή θα είναι $68 - 26,2 = 41,8$ dB(A). Αν μία άλλη συνιστώσα του ήχου βρέθηκε σε συχνότητα 2000 Hz και 95 dB, τότε η ένταση κατά καμπύλη A θα είναι $95 + 1,2 = 96,2$ dB(A). Γνωρίζοντας όλες τις συνιστώσες ενός ηχητικού σήματος, μπορούμε να τις σταθμίσουμε με όποια καμπύλη επιθυμούμε και να τις προσθέσουμε ώστε να έχουμε την ολική ένταση του ήχου ως προς την καμπύλη αυτή. Σε όλα τα manuals των ντεσιμπελόμετρων θα δούμε ότι η καμπύλη A ενδείκνυται για μετρήσεις που προσεγγίζουν την ανθρώπινη ακοή. Στο ντεσιμπελόμετρο οι καμπύλες στάθμισης υλοποιούνται με φίλτρα. Έτσι, επιλέγοντας το φίλτρο A, το μικρόφωνο του οργάνου είναι σα να συμπεριφέρεται ως ανθρώπινο αυτί. Όταν έχουμε να κάνουμε με μετρήσεις θορύβου κοντά σε μία οικία, τότε πρέπει οπωσδήποτε να επιλέξουμε το φίλτρο A, γιατί αλλιώς το όργανο ενδεχομένως να μας δείχνει χαμηλή ένταση εκεί που ο άνθρωπος θα δυσανασχετούσε.



Διάγραμμα 5.1

Ηχητικές καμπύλες στάθμησης

6

Ταλαντώσεις και Συντονισμός

Από όσα έχουν περιγραφεί μέχρι τώρα, αλλά και απ' αυτά που θα ειπωθούν στη συνέχεια, είναι φανερό ότι η όλη μελέτη του ήχου είναι μία εκτενής μελέτη των ταλαντώσεων. Αν ένα τμήμα ενός συστήματος παρουσιάζει ακαμψία (stiffness), τότε εκτρέποντας το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του, αυτό θα εκτελέσει ταλάντωση. Παρόλο που οι βασικές αρχές των ταλαντώσεων είναι γνωστές στους περισσότερους, το κεφάλαιο αυτό αποτελεί έναν χρήσιμο σύνδεσμο αυτών των αρχών με τις ταλαντώσεις που διέπουν την ακουστική και ειδικότερα τη λειτουργία των μουσικών οργάνων.

Μπορούμε να χωρίσουμε τις ταλαντώσεις, όπως συνηθίζεται, σε τρεις μεγάλες κατηγορίες: Τις ελεύθερες ταλαντώσεις (free oscillations), τις ταλαντώσεις με απόσβεση (damped oscillations) και τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (forced oscillations). Γνωρίζοντας καλά αυτές τις κατηγορίες, είμαστε σε θέση να ερμηνεύσουμε οποιαδήποτε άλλη παραλλαγή.

6.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις

Ας θεωρήσουμε αρχικά μία μάζα προσαρτημένη σε ένα ελαστικό μέσο, ώστε να μπορεί να ταλαντώνεται πάνω σε μία και μοναδική διεύθυνση. Το σύστημα αυτό είναι ένας απλός ταλαντωτής (simple oscillator). Ένας μεγάλος αριθμός των ταλαντώσεων που αφορούν τη φυσική και τη μηχανική προσεγγίζονται με αυτό το απλό σύστημα. Το εκκρεμές (pendulums) ενός ρολογιού είναι ένα τέτοιο σύστημα, στο οποίο η βαρύτητα παίζει το ρόλο της ελαστικότητας. Το διάφραγμα ενός μεγαφώνου (loudspeaker), η μάζα του οποίου είναι συγκεντρωμένη σχεδόν όλη στο κέντρο του αποτελεί επίσης ένα σύστημα μάζας – ελαστικότητας και τέλος το διαπασών (tuning fork) είναι ένα ελευθέρως ταλαντούμενο σύστημα στο οποίο η μάζα και η ελαστικότητα είναι συγχωνευμένες. Όσο πολύπλοκο και αν είναι ένα ταλαντούμενο σύστημα, μπορεί αρχικά να αναχθεί, με απλοποιητικές παραδοχές, στον απλό ταλαντωτή και έπειτα να προσδιορισθούν οι διαφορές του με αυτόν.

Καθώς εκτρέπουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της, η ελαστικότητα ασκεί δύναμη επί της μάζας, με φορά αντίθετη προς τη μετατόπιση και μέτρο ανάλογο της απόστασης εκτροπής. Αυτός είναι ο γνωστός νόμος του Hooke και αποτελεί προϋπόθεση για έναν ιδανικό απλό ταλαντωτή. Ο νόμος του Hooke ισχύει κυρίως για μικρές εκτροπές. Σε πολλά πραγματικά προβλήματα οι εκτροπές δεν είναι μικρές και ο νόμος αυτός δεν είναι ακριβής. Ωστόσο, στην ακουστική, οι μετατοπίσεις των ταλαντούμενων σωμάτων είναι σχετικά μικρές και μπορούμε να τον εφαρμόσουμε. Για παράδειγμα, σπάνια η δόνηση του διαφράγματος ενός μεγαφώνου ξεπερνά το 1 mm [PP].

Ο νόμος του Hooke περιγράφεται από τη σχέση:

$$F = -Kx \quad (6.1)$$

όπου x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας και K η σταθερά της ακαμψίας και εξαρτάται από το υλικό του ελαστικού μέσου. Το αντίθετο πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη αντιτίθεται στην εκτροπή. Για τούτο καλείται και δύναμη επαναφοράς. Ο αντίστροφος της σταθεράς ακαμψίας καλείται ενδοτικότητα του ελαστικού μέσου:

$$C = \frac{1}{K} \quad (6.2)$$

Αφού εκτρέψουμε το σύστημα από τη θέση ισορροπίας και το αφήσουμε, θεωρούμε ότι δεν ασκούνται πάνω του άλλες δυνάμεις, πλην της δύναμης επαναφοράς. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει από εδώ και πέρα τη συμπεριφορά του συστήματος είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1}{mC}} \quad (6.3)$$

Όπου m η μάζα του συστήματος. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής:

$$x = C \exp(-i\omega t), \quad C = a + ib$$

ή

$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (6.4)$$

Όπου a και b σταθερές. Η κίνηση της μάζας είναι περιοδική με συχνότητα

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (6.5)$$

Από την (6.5) φαίνεται ότι καθώς η σταθερά K μεγαλώνει, η συχνότητα ταλάντωσης επίσης μεγαλώνει, αλλά μικραίνει, όταν μεγαλώνει η μάζα.

Αρχικές συνθήκες

Οι τιμές των a και b προσδιορίζονται από τον τρόπο με τον οποίο η μάζα έχει τεθεί αρχικά σε κίνηση. Συνήθως αρχίζουμε την ταλάντωση προσδίδοντας στη μάζα μία αρχική μετατόπιση και μία αρχική ταχύτητα, κατά τη χρονική στιγμή $t=0$. Γνωρίζοντας τις δύο αυτές αρχικές συνθήκες, η κίνηση είναι τότε πλήρως ορισμένη. Η τιμή της a ταυτίζεται με την αρχική μετατόπιση, ενώ η τιμή του γινομένου ωb με την αρχική ταχύτητα. Κατόπιν αυτών, η λύση (6.4) μπορεί να γραφεί υπό την ακόλουθη μορφή:

$$x = x_0 \cos(2\pi f_0 t) + \left(\frac{V_0}{2\pi f_0} \right) \sin(2\pi f_0 t) \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow x = A \cos(2\pi f_0 t - \Phi)$$

όπου

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{V_0}{2\pi f_0} \right)^2 \quad \text{και} \quad \tan \Phi = \frac{V_0}{2\pi f_0 x_0} \quad (6.7)$$

όπου x_0 είναι η αρχική μετατόπιση (εκτροπή) και V_0 η αρχική ταχύτητα, $(dx/dt)_0$. Αντικαθιστώντας την τιμή της αρχικής μετατόπισης x_0 στην εξίσωση (6.3), έχουμε απ' ευθείας την αρχική επιτάχυνση της μάζας, δηλαδή τη δεύτερη παράγωγο της μετατόπισης προς το χρόνο. Διαφορίζοντας την (6.3) και αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος την ταχύτητα V_0 , προσδιορίζουμε την αρχική τρίτη παράγωγο. Αν συνεχίσουμε να διαφορίζουμε διαδοχικά την (6.3), θα έχουμε όλες τις ανώτερες αρχικές παραγώγους. Γνωρίζοντας τις ανώτερες παραγώγους στη χρονική στιγμή $t=0$, μπορούμε, κατά το ανάπτυγμα της σειράς Taylor,

$$F(t) = F(0) + t \left(\frac{dF}{dt} \right)_{t=0} + \frac{t^2}{2} \left(\frac{d^2 F}{dt^2} \right)_{t=0} + \frac{t^3}{6} \left(\frac{d^3 F}{dt^3} \right)_{t=0} + \dots \quad (6.8)$$

να υπολογίσουμε την κίνηση σε οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή t .

Από τη σχέση (6.5) διαπιστώνουμε ότι η συχνότητα της ταλάντωσης εξαρτάται μόνον από τα k και m , και καθόλου από τις αρχικές συνθήκες. Αυτή η διαπίστωση έχει μεγάλη σημασία για τα μουσικά όργανα, καθώς ο φθόγγος που παράγουν είναι αντίστοιχος της συχνότητας ταλάντωσης τους και συνήθως δεν εξαρτάται από το πόσο δυνατά ή γρήγορα θα παίζουμε το όργανο, παρά μόνο από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά. Γι' αυτό, έστω και κατά προσέγγιση, στα περισσότερα μουσικά όργανα ισχύει ο νόμος του Hooke. Βεβαίως, όπως θα δούμε, στα πνευστά ο τρόπος παιξίματος παίζει μεγάλο ρόλο και για τη συχνότητα του παραγόμενου φθόγγου. Αλλά στο πιάνο όπως και να πατήσουμε ένα συγκεκριμένο πλήκτρο, θα ακούγεται πάντοτε ο ίδιος φθόγγος.

Οι ταλαντώσεις εκείνες για τις οποίες η δύναμη πάνω στη μάζα υπακούει στο νόμο του Hooke και η συχνότητα εξαρτάται μόνο από τη μάζα και τη σταθερά ακαμψίας, ονομάζονται *απλές αρμονικές ταλαντώσεις*.

Ενέργεια της ταλάντωσης

Η ενέργεια της μάζας που ταλαντώνεται κατά απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και συχνότητας f είναι σε κάθε στιγμή το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} mV^2 + \int_0^x Kxdx = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} Kx^2 \\ &= 2\pi^2 m f_0^2 A^2 \sin^2(2\pi f_0 t - \Phi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(2\pi f_0 t - \Phi) \end{aligned} \quad (6.9)$$

όμως $4\pi^2 f_0^2 = \frac{K}{m}$ ώστε:

$$W = \frac{1}{2} KA^2 [\sin^2(2\pi f_0 t - \Phi) + \cos^2(2\pi f_0 t - \Phi)] \quad (6.10)$$

ή

$$W = \frac{1}{2} KA^2 = 2\pi^2 m f_0^2 A^2 = \frac{1}{2} mU^2 \quad (6.11)$$

όπου $U = 2\pi f_0 A$ είναι το πλάτος ταχύτητας της κίνησης.

Η ολική ενέργεια είναι συνεπώς ίση με τη δυναμική ενέργεια της μάζας, κατά τη μέγιστη μετατόπιση της $\left(\frac{1}{2}KA^2\right)$ ή με τη κινητική ενέργεια κατά τη μέγιστη ταχύτητα της $\left(\frac{1}{2}mU^2\right)$. Παρατηρούμε ότι στην ουσία η τιμή της W εξαρτάται από το τετράγωνο της συχνότητας f και της μέγιστης μετατόπισης A , με τον ένα ή τον άλλο τρόπο.

6.2 Ταλαντώσεις με απόσβεση

Μέχρι τώρα δεν λήφθηκε υπ' όψη η δύναμη της τριβής στο ταλαντούμενο σύστημά μας. Σε πολλά προβλήματα βέβαια μπορεί να αμεληθεί σε σχέση με την πολύ μεγαλύτερου μεγέθους δύναμη επαναφοράς. Η τριβή (friction) μπορεί να είναι πολύ σημαντική στην έκβαση της ταλάντωσης, όταν αντιτίθεται στην αρμονική κίνηση του σώματος. Τότε μπορεί να καλείται και δύναμη αντίστασης. Στα ηχητικά κύματα η ενέργεια διαδίδεται στον αέρα που περιβάλλει το ταλαντούμενο σώμα, το οποίο και δημιουργεί τα κύματα αυτά. Η δύναμη αντίστασης εξαρτάται από την ταχύτητα του ταλαντωτή και αν το μέτρο της δεν είναι μεγάλο, τότε και το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογο της ταχύτητας. Η έκφραση που περιγράφει τότε τη δύναμη είναι $-R_m(dx/dt)$, όπου η σταθερά R_m καλείται *σταθερά αντίστασης*. Η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα (μάζα) ενός απλού ταλαντωτή, όταν σε αυτό επιδρούν τόσο η ελαστικότητα όσο και η τριβή (αντίσταση) είναι $-R_m(dx/dt) - kx$. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος δίνεται τότε απ' την εξίσωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 f_0^2 x = 0 \quad (6.12)$$

όπου $k = \frac{R_m}{2m}$ και $4\pi^2 f_0^2 = \frac{K}{m}$. Η f_0 είναι η συχνότητα στην οποία θα ταλαντωνόταν ο ταλαντωτής, αν δεν υπήρχε απόσβεση λόγω τριβής, δηλαδή αν $R_m = 0$. Και την ονομάζουμε *φυσική συχνότητα* (natural frequency) του ταλαντωτή.

Η εξίσωση (6.12) περιγράφει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και τον απλό ηλεκτρικό ταλαντωτή με απόσβεση [J], όταν στη θέση της μάζας αντικαταστήσουμε την επαγωγή L , στη θέση της σταθεράς

αντίστασης την ωμική αντίσταση R και στη θέση της σταθεράς ακαμψίας τον αντίστροφο της χωρητικότητας C .

Για την επίλυση της (6.12) είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση, όπως πριν. Έστω η λύση της μορφής:

$$x = C \exp(bt) \quad (6.13)$$

Λύνουμε ως προς β και αντικαθιστούμε στην (6.12). Προκύπτει τότε ότι η ποσότητα

$$(\beta^2 + 2k\beta + 4\pi^2 f_0^2) \exp(\beta t)$$

πρέπει να ισούται με το μηδέν για κάθε t . Επομένως:

$$\beta^2 + 2k\beta + 4\pi^2 f_0^2 = 0, \text{ δηλαδή } \beta = -k \pm \sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_0^2} \quad (6.14)$$

Στα περισσότερα προβλήματα η σταθερά ακαμψίας K είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη σταθερά αντίστασης R_m . Δηλαδή η αντίσταση δεν θα είναι ποτέ τόσο μεγάλη, ώστε να διαφοροποιήσει τη συμπεριφορά που περιγράφεται απ' τις προηγούμενες εξισώσεις. Καθώς η ποσότητα $4\pi^2 f_0^2$ θεωρείται πως είναι μεγαλύτερη από k^2 , η τετραγωνική ρίζα στη σχέση του β είναι μία αυθαίρετη ποσότητα και είναι προτιμότερο να γράψουμε:

$$\beta = -k \pm 2\pi i f_d, \quad f_d = f_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2\pi f_0}\right)^2} \quad (6.15)$$

Κατόπιν αυτών η λύση γράφεται:

$$x = C \exp(-kt - 2\pi i f_d t) \quad (6.16)$$

Οι τιμές των a και b καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Το a είναι ίσο με την αρχική μετατόπιση x_0 , ενώ η αρχική ταχύτητα είναι ίση με $2\pi f_d - kf_0$, ώστε:

$$a = \frac{V_0 + kx_0}{2\pi f_d} \quad (6.17)$$

Η λύση δεν είναι περιοδική, καθώς η κίνηση ποτέ δεν επαναλαμβάνεται αυτούσια. Σε κάθε κύκλο το πλάτος γίνεται ολοένα πιο μικρό. Πάρα ταύτα, αν το k είναι αρκετά μικρό, σε σχέση με τη συχνότητα f_d , μπορούμε να πούμε ότι έχουμε περιοδική κίνηση, όπως διαπιστώνουμε από τον τύπο (6.15), αφού $f_d \rightarrow f_0$. Και στην ταλάντωση με απόσβεση η συχνότητα είναι ανεξάρτητη του πλάτους.

Υπάρχουν τώρα συγκεκριμένες διαφορές μεταξύ της ελεύθερης ταλάντωσης και της ταλάντωσης με απόσβεση. Πρώτον, το πλάτος της ταλαντώσεως με απόσβεση μειώνεται εκθετικά με το χρόνο κατά τη σχέση:

$$A_0 \exp(-kt) \quad (6.18)$$

όπου A_0 η αρχική του τιμή. Ερμηνεύοντας τη σχέση (6.18), το πλάτος μειώνεται κατά έναν παράγοντα $1/e$ μέσα σε χρόνο $1/k$. Αυτή η χρονική διάρκεια είναι ένα μέτρο του πόσο απότομα σβήνει η κίνηση και καλείται *συντελεστής εξασθένησης* (modulus of decay) τ της ταλάντωσης. Ο λόγος της συνολικής διάρκειας της ταλάντωσης προς τον συντελεστή εξασθένησης ονομάζεται *απώλεια* (decrement) δ της ταλάντωσης. Ένας άλλος τρόπος για να ποσοτικοποιήσουμε την απώλεια είναι μέσω του παράγοντα Q του συστήματος:

$$Q = \frac{\omega_0 m}{R_m} \quad (6.19)$$

Το μέγεθος αυτό εκφράζει τον αριθμό των κύκλων που απαιτούνται ώστε να μειωθεί το πλάτος της ταλάντωσης στο $1/e^{\pi}$ του αρχικού. Αν θεωρήσουμε, κατά την προηγούμενη ανάλυση, ότι $f_d \approx f_0$, τότε οι ποσότητες που μόλις συζητήθηκαν μπορούν να υπολογισθούν από τις σχέσεις:

$$Q = \frac{\pi f_0}{k}, \quad \tau = \frac{1}{k} = \frac{Q}{\pi f_0} \quad (6.20)$$

Όσο μικραίνει η σταθερά αντίστασης R_m , τόσο μεγαλώνει ο παράγοντας Q και ο συντελεστής τ , που σημαίνει ότι απαιτείται περισσότερος χρόνος για να αποσβεσθεί πλήρως η ταλάντωση. Απ' την άλλη η απώλεια δ μειώνεται δείχνοντας ότι το πλάτος μειώνεται λιγότερο από κύκλο σε κύκλο. Μία δεύτερη διαφορά της ελεύθερης με τη φθίνουσα ταλάντωση είναι στη συχνότητα. Όταν το $k/2\pi f_0$ είναι μικρό, η έκφραση της f_d μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα, κρατώντας μόνον τους δύο πρώτους όρους:

$$f_d = f_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2\pi f_0}\right)^2} = f_0 - \frac{k^2}{8\pi^2 f_0} + \dots \quad (6.21)$$

Αλλά όπως είπαμε, στις περισσότερες περιπτώσεις τα k και f_0 έχουν τέτοιες τιμές ώστε ακόμα και ο δεύτερος όρος της (6.21) να είναι μικρός, ώστε να μην υπάρχει σημαντική διαφορά στη συχνότητα.

Ενέργεια φθίνουσας ταλάντωσης

Ένα σημαντικό κομμάτι των ταλαντώσεων με απόσβεση είναι η απώλεια ενέργειας. Αρχικά πρέπει να βρούμε μία έκφραση για τη μέση τιμή της ενέργειας σε κάθε χρονική στιγμή. Οι εξισώσεις (6.9) έως (6.10) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν λόγω της διαρκούς μεταβολής του πλάτους. Το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός σώματος μάζας m , που υπόκειται στη δύναμη επαναφοράς $-Kx$ και η ταλάντωσή του εμφανίζει μεταβαλλόμενο πλάτος $A(t)$, θα είναι:

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} Kx^2 \\ &= 2\pi^2 m f^2 A^2 - 2\pi m f \frac{dA}{dt} A \sin(2\pi ft - \Phi) \cos(2\pi ft - \Phi) + \frac{1}{2} m \left(\frac{dA}{dt}\right)^2 \cos^2(2\pi ft - \Phi) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Αν πάρουμε τη μέση τιμή του παραπάνω μεγέθους, στη διάρκεια ενός κύκλου, ο δεύτερος όρος θα απαλειφθεί. Αν πάλι το A μεταβάλλεται αργά, ώστε η παράγωγός του dA/dt να είναι πολύ μικρότερη του fA , τότε και ο τρίτος όρος μπορεί να παραλειφθεί. Προκύπτει τότε η προσεγγιστική σχέση για την ενέργεια, προτού ακόμα μετατραπεί σε θερμότητα, κατά μη αναστρέψιμο τρόπο:

$$W(t) \approx \frac{1}{2} KA(t)^2 = 2\pi^2 m f^2 A(t)^2 = \frac{1}{2} mU(t)^2 \quad (6.23)$$

Καθώς $A(t) = A_0 \exp(-kt)$, η ελεύθερη αυτή ενέργεια μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ο ρυθμός της απώλειας ενέργειας βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τη δύναμη αντίστασης $R_m V$ με την ταχύτητα V , δηλαδή:

$$\begin{aligned} P = R_m V^2 &= \left[4\pi^2 R_m f_d^2 \sin^2(2\pi f_d t - \Phi) \right. \\ &\quad + 4\pi R_m f_d k \sin(2\pi f_d t - \Phi) \cos(2\pi f_d t - \Phi) \\ &\quad \left. + R_m k^2 \cos^2(2\pi f_d t - \Phi) \right] A_0^2 \exp(-2kt) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις παρόμοιες με τα προηγούμενα, μπορούμε να γράψουμε:

$$P = -\frac{dE}{dt} \approx 2\pi^2 f_0^2 R_m A_0^2 \exp(-2kt) = \frac{1}{2} R_m U(t)^2 \quad (6.25)$$

Απαλείφοντας τη δυναμική ενέργεια U από τις (6.23) και (6.25), προκύπτει:

$$P \approx \frac{R_m}{m} W = 2kW \quad (6.26)$$

Ωστε:

$$P = -\frac{dW}{dt} \approx 2kW \quad \text{ή} \quad \frac{dW}{dt} \approx +2kW \quad (6.27)$$

Η λύση που ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι:

$$W = W_0 \exp(-2kt) = \frac{1}{2} m U_0^2 \exp(-2kt) = 2\pi^2 f_0^2 m A_0^2 \exp(-2kt) \quad (6.28)$$

Από τη σκοπιά της ενέργειας, λόγω της μείωσής της, σύμφωνα με τη σχέση (6.28), η κίνηση πρέπει αναγκαστικά να αποσβένεται [PP]. Το κλάσμα απωλειών ανά κύκλο της ελεύθερης ενέργειας είναι:

$$\frac{2k}{f_d} \approx \frac{2k}{f_0} = \frac{2\pi}{Q} \quad (6.29)$$

όπου ο παράγοντας Q δίνεται από την (6.19).

Στις πιο σύνθετες περιπτώσεις ταλάντωσης, η επίδραση της τριβής (αντίστασης) είναι όμοια με την απλή περίπτωση. Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται αργά και οι συχνότητες της φυσικής ταλάντωσης ελαττώνονται ελαφρώς. Συνήθως όμως η αλλαγή στη συχνότητα είναι πολύ μικρή για να ληφθεί υπ' όψη.

6.3 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Ένα σύστημα μπορεί να μην ταλαντώνεται ελεύθερα, αλλά επειδή είναι συνδεδεμένο με ένα άλλο σύστημα το οποίο επίσης ταλαντώνεται. Το τελευταίο καλείται *διεγείρον σύστημα* (driving system). Για παράδειγμα το διάφραγμα ενός μικροφώνου δονείται επειδή συνδέεται μέσω των ακουστικών κυμάτων με τις δονήσεις της χορδής ενός βιολιού. Αντιστρόφως, το διάφραγμα ενός μεγαφώνου δονείται επειδή συνδέεται με τις ταλαντώσεις του ρεύματος στο κύκλωμα εξόδου ενός ενισχυτή [PP]. Στις δύο περιπτώσεις που αναφέρθηκαν, αλλά και σε πολλές άλλες, το παθητικό σύστημα (αυτό που διεγείρεται) δεν προσδίδει αναδραστικά κάποιο σημαντικό ποσό ενέργειας πίσω στο διεγείρον σύστημα. Αυτό συμβαίνει είτε επειδή η σύνδεση μεταξύ τους είναι ασθενής, είτε επειδή το διεγείρον σύστημα διαθέτει πολύ μεγάλη αποθηκευμένη ενέργεια, ώστε το ποσό που παίρνει πίσω από το παθητικό σύστημα να είναι αμελητέο, όπως συμβαίνει ακριβώς με τον ενισχυτή και το μεγάφωνο. Η βασική ιδιότητα αυτών των περιπτώσεων είναι το διεγείρον σύστημα παρέχει στο παθητικό μία περιοδικά μεταβαλλόμενη (διεγείρουσα) δύναμη. Αποτελούν τις πιο απλές περιπτώσεις εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Οι πιο σύνθετες περιπτώσεις περιλαμβάνουν μία ενεργειακή πρόσδοση από το παθητικό στο διεγείρον σύστημα που δεν μπορεί να αμεληθεί. Τότε έχουμε ανάδραση ενέργειας και είναι η μορφή των ταλαντώσεων που θα συναντήσουμε αργότερα στη φυσική των πνευστών. Αυτή η κατηγορία αναπτύσσεται στη συνέχεια.

Εξίσωση και επίλυση

Έστω ότι σε έναν απλό ταλαντωτή ασκείται μία περιοδική δύναμη της μορφής $F \cos(2\pi ft)$ ή $F \exp(-2\pi jft)$, ανάλογα με το συμβολισμό που επιθυμούμε. Μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τη μορφή της κίνησης του παθητικού συστήματος μόλις αρχίσει να εφαρμόζεται η δύναμη και ποια θα είναι η εξέλιξή της αν η δύναμη εφαρμόζεται για μεγάλο χρονικό διάστημα. Σημαντικό είναι επίσης να γνωρίζουμε κατά πόσο η συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης, αφού δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με τη φυσική συχνότητα f_0 του ταλαντωτή.

Η ολική δύναμη που ασκείται στον ταλαντωτή είναι το άθροισμα της δύναμης επαναφοράς, της αντίστασης και της διεγείρουσας δύναμης:

$$\Sigma F = -R_m V - Kx + F \exp(-2\pi jft) \quad (6.30)$$

Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 f_0^2 x = c \exp(-2\pi jft) \quad (6.31)$$

όπου

$$c = \frac{F}{m}, \quad k = \frac{R_m}{2m}, \quad \omega = 2\pi f, \quad 4\pi^2 f_0^2 = \frac{K}{m}$$

Η λύση της (6.31) είναι της μορφής $x = C \exp(-kt - 2\pi jft) + D \exp(-2\pi jft)$. Αντικαθιστώντας στην (6.31) προκύπτει ότι:

$$D = \frac{c}{4\pi^2 (f_0^2 - f^2) - 4\pi jfk} = c \frac{\pi (f_0^2 - f^2) + jfk}{4\pi^3 (f_0^2 - f^2)^2 + 4\pi f^2 k^2} = B \exp(j\theta) \quad (6.32)$$

όπου:

$$B = \frac{c/4\pi}{\sqrt{\pi^2 (f_0^2 - f^2)^2 + f^2 k^2}} = \frac{F/2\pi f}{\sqrt{R_m^2 + \left[2\pi fm - \frac{K}{2\pi f}\right]^2}} \quad (6.33)$$

και

$$\tan \theta = \frac{kf}{\pi (f_0^2 - f^2)} = \frac{R_m}{(K/2\pi f) - 2\pi fm} \quad (6.34)$$

Μηχανική εμπέδηση

Στην ακουστική είναι πολύ συχνή η χρήση της εμπέδησης, όπως και στα ηλεκτρικά κυκλώματα [J], καθώς διευκολύνει σε αρκετές περιπτώσεις τη μελέτη και συμπυκνώνει τις σχέσεις που περιγράφουν ένα πρόβλημα. Ορίζουμε εδώ τη *μηχανική εμπέδηση* του συστήματος:

$$\bar{Z}_m = R_m - j \left(\omega m - \frac{K}{\omega} \right) = R_m - jX_m = |\bar{Z}_m| \exp(-j\phi) \quad (6.35)$$

όπου

$$|\bar{Z}_m| = \sqrt{R_m^2 + \left(\omega m - \frac{K}{\omega} \right)^2} \quad \text{και} \quad \phi = \theta - 90^\circ = \tan^{-1} \left(\frac{\omega m - K/\omega}{R_m} \right) \quad (6.36)$$

Η σχέση (6.35) για τη μηχανική εμπέδηση είναι ακριβώς αντίστοιχη με την ηλεκτρική εμπέδηση αν το αρνητικό πρόσημο γίνει θετικό. Η μηχανική αντίσταση R_m είναι ανάλογη με την αντίσταση, η μάζα m ανάλογη με την επαγωγή και η μηχανική ενδοτικότητα $C_m = 1/K$ ανάλογη με την ηλεκτρική επαγωγή.

Η ποσότητα $X_m = \omega m - \frac{K}{\omega}$ καλείται μηχανική ανάδραση του συστήματος [PP], κατ' αναλογία με τα ηλεκτρικά κυκλώματα [J]. Έτσι η (6.35) μπορεί να γραφεί:

$$\bar{Z}_m = R_m - j \left(\omega m - \frac{1}{\omega C_m} \right) \quad (6.37)$$

Η μηχανική εμπέδηση αποτελεί λόγο δύναμης προς ταχύτητα και όχι τάσης προς ρεύμα. Κατά συνέπεια δεν μετριέται σε ohm. Συννηθισμένη μονάδα είναι gr/sec.

Η λύση της (6.31) μπορεί να γραφεί τώρα, με χρήση της μηχανικής εμπέδησης, ως:

$$x = C \exp(-kt - 2\pi jft) - \frac{F}{2\pi jf\bar{Z}_m} \exp(-2\pi jft) \quad (6.38)$$

ή

$$x = \exp(-kt) [a \cos(2\pi f_d t) + b \sin(2\pi f_d t)] + \frac{F}{2\pi f |\bar{Z}_m|} \cos(2\pi ft - \theta) \quad (6.39)$$

Οι σταθερές a και b καθορίζονται, όπως και στα προηγούμενα είδη ταλαντώσεων από τις αρχικές συνθήκες.

Μεταβατική και μόνιμη κατάσταση

Όταν η διεγείρουσα δύναμη πρωτοεφαρμόζεται στο σύστημα, η κίνηση είναι εξαιρετικά πολύπλοκη, αποτελούμενη από το συνδυασμό δύο αρμονικών κινήσεων, που διαφέρουν, κατά το σύνηθες, στη συχνότητα. Ακόμα και αν η αντίσταση είναι μικρή, ο πρώτος όρος, που αντιπροσωπεύει την ελεύθερη – μεταβατική ταλάντωση, αποσβένεται γρήγορα, αφήνοντας μόνο τον δεύτερο όρο, που αντιπροσωπεύει την απλή αρμονική κίνηση συχνότητας ίσης με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης. Οι παρακάτω σχέσεις δείχνουν την κατάληξη της λύσης, όταν χαθεί η μεταβατική κατάσταση (transient state).

$$x \rightarrow -\frac{F}{2\pi jf\bar{Z}_m} \exp(-j\omega t) \quad \text{ή} \quad x \rightarrow \frac{F}{2\pi f |\bar{Z}_m|} \sin(2\pi ft - \phi) \quad (6.40)$$

$$V \rightarrow \frac{F}{\bar{Z}_m} \exp(-j\omega t) \quad \text{ή} \quad V \rightarrow \frac{F}{|\bar{Z}_m|} \cos(2\pi ft - \phi)$$

όπου:

$$\tan \phi = -\cot \theta = \frac{(\omega m) - (K / \omega)}{R_m}$$

Το μέρος αυτό της κίνησης καλείται μόνιμη κατάσταση (steady state). Παρατηρούμε ότι είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο ο ταλαντωτής ξεκινά την κίνησή του. Το πλάτος, η συχνότητα και η φάση του εξαρτώνται μόνο από τις σταθερές F και f της δύναμης και τις σταθερές του συστήματος m , R_m και K .

Συντονισμός

Το πλάτος της κίνησης και το πλάτος της ταχύτητας είναι ανάλογα με το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης και αντιστρόφως ανάλογα με το μέτρο της μηχανικής εμπέδησης. Έχουμε λοιπόν μία πλήρη αναλογία με τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Εκτός των υπολοίπων αναλογιών, η ταχύτητα αντιστοιχεί στο ρεύμα.

Η εμπέδηση γενικά είναι μεγάλη εκτός όταν $f = f_0$. Τότε, αν η αντίσταση είναι μικρή, θα εμφανισθεί αιχμηρό ελάχιστο στην καμπύλη της εμπέδησης. Ακολουθώντας, το πλάτος της κίνησης είναι εν γένει μικρό, εκτός όταν $f = f_0$, οπότε, σύμφωνα με την (6.40) θα εμφανίζεται αιχμηρό μέγιστο (σχήμα 6.1). Η συνθήκη κατά την οποία η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης συμπίπτει με τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή και η απόκριση (το πλάτος της κίνησης) είναι μεγάλη, ονομάζεται *συντονισμός*. Η κορυφή στην καμπύλη του πλάτους συναρτήσει της συχνότητας, είναι τόσο αιχμηρότερη, όσο μικρότερη είναι η R_m και αντιστρόφα (σχήμα 6.1). Από το σχήμα φαίνεται ότι η κίνηση της μόνιμης κατάστασης δεν είναι πολύ ευαίσθητη προς την τιμή της σταθεράς αντίστασης R_m , παρά μόνο για το εύρος

συχνοτήτων κοντά στο συντονισμό. Η διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί σε R_m μεγαλύτερο κατά 11 φορές από το R_m της συνεχούς καμπύλης. Οι δύο καμπύλες είναι πρακτικά ίσες, εκτός από τη περιοχή κοντά στο συντονισμό.

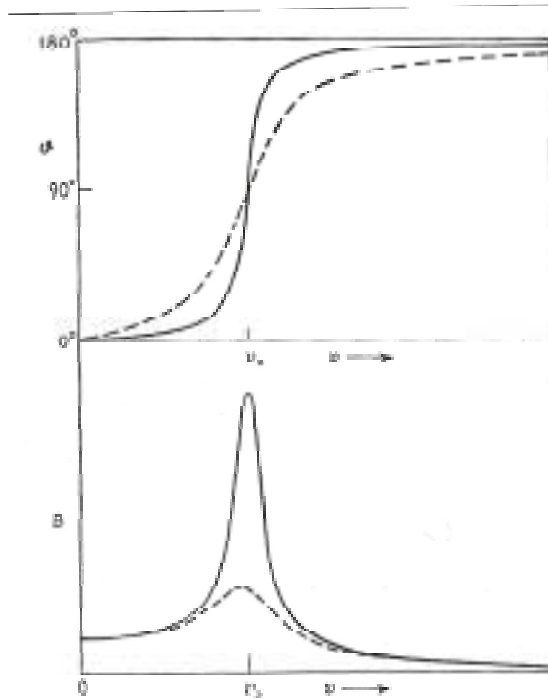
Η κίνηση δεν είναι πάντοτε σε φάση με τη διεγείρουσα δύναμη. Η γωνία καθυστέρησης της μετατόπισης, σε σχέση με τη δύναμη, δίνεται από τη γωνία θ , η οποία όταν $f=0$, μηδενίζεται, όταν $f = f_0$, είναι ίση με $\pi/2$ και όταν $f \rightarrow \infty$, πλησιάζει στην τιμή π . Στην τελευταία περίπτωση, ουσιαστικά η μετατόπιση είναι απλά αντίθετης φοράς με τη δύναμη, η οποία δρα σα να είχε σταθερό μέτρο. Η γωνία καθυστέρησης της ταχύτητας $\phi = +(\pi/2) + \theta$ είναι ίση με $-\pi/2$ όταν $f=0$, μηδενική όταν $f = f_0$ και $+\pi/2$ όταν $f \rightarrow \infty$.

Ανακεφαλαιώνοντας, όταν η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι πολύ μικρότερη της φυσικής συχνότητας του συστήματος, το πλάτος είναι μικρό και η μετατόπιση βρίσκεται σε φάση με τη δύναμη. Καθώς η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης αυξάνεται, το πλάτος αυξάνεται και διαφέρει ολοένα περισσότερο από τη φάση της, έως ότου φτάσουμε στο συντονισμό, όπου το πλάτος μεγιστοποιείται (όταν η R_m είναι μικρή) και η ταχύτητα βρίσκεται σε φάση με τη δύναμη. Από το συντονισμό και έπειτα, με συνεχή αύξηση της συχνότητας, το πλάτος μειώνεται και τελικά γίνεται πολύ μικρό, περισσότερο από το αρχικό. Στις μεγάλες συχνότητες η μετατόπιση αντιτίθεται στη δύναμη.

Διακρίνουμε δύο τρόπους διέγερσης ενός συστήματος από μία περιοδική δύναμη. Κατά τον πρώτο τρόπο το σύστημα ανταποκρίνεται ισχυρά σε συγκεκριμένες συχνότητες, όπως συμβαίνει με τις χορδές ενός βιολιού, τους ακουστικούς σωλήνες των πνευστών, τους συντονιστές κάτω από τις πλάκες του ξυλόφωνου ή την ανθρώπινη στοματική κοιλότητα, στη διάρκεια σχηματισμού ενός φωνήεντος. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λάβουμε την αντίσταση όσο μικρότερη γίνεται, ώστε η μόνη διεγείρουσα συχνότητα, που θα προκαλέσει μεγάλη απόκριση να είναι και η φυσική συχνότητα του συστήματος. Κατά τον δεύτερο τρόπο, το σύστημα ανταποκρίνεται, με κάποια διακύμανση, εξίσου καλά προς όλες τις συχνότητες. Τέτοια παραδείγματα αποτελούν τα διαφράγματα των μικρόφωνων και των μεγαφώνων, όπως επίσης και το αντηχείο του βιολιού. Σε μερικές περιπτώσεις επιθυμούμε το πλάτος της μόνιμης κατάστασης να είναι ανεξάρτητο της συχνότητας, σε άλλες επιθυμούμε το πλάτος της ταχύτητας να είναι παραμένει σταθερό, ενώ σε λιγότερες περιπτώσεις η επιτάχυνση. Οι απαιτήσεις αυτές είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν εντός ενός συγκεκριμένου εύρους συχνοτήτων, με μεγάλη αύξηση της ακαμψίας, της αντίστασης ή της μάζας, ώστε η επίδρασή της μίας από αυτές να επικαλύπτει τις επιδράσεις των υπολοίπων στο εύρος αυτό.

Οι τρεις οριακές περιπτώσεις διεγερόμενων ταλαντωτών, που μόλις αναφέρθηκαν καλούνται αντιστοίχως, ελεγχόμενος από ακαμψία (stiffness – controlled), ελεγχόμενος από αντίσταση (resistance – controlled) και ελεγχόμενος από μάζα (mass – controlled). Οι ιδιότητες και τα εύρη συχνοτήτων, μέσα στα οποία λειτουργούν είναι:

$$\text{Stiffness - controlled: } K \text{ μεγάλη: } \bar{Z}_m \approx j \frac{K}{2\pi f}, \quad x = \frac{F}{K} \exp(-j\omega t), \quad f < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ και } \frac{K}{2\pi R_m}.$$



Σχήμα 6.3

Φάση και πλάτος και μίας εξαναγκασμένης ταλάντωσης ως συνάρτηση της συχνότητας της διεγείρουσας δύναμης. Το αιχμηρό μέγιστο της καμπύλης του πλάτους αντιστοιχεί στην κατάσταση συντονισμού του συστήματος.

Resistance - controlled: R_m μεγάλη: $\bar{Z}_m = R_m$, $\frac{dx}{dt} = \frac{F}{R_m} \exp(j\omega t)$, $f < \frac{R_m}{2\pi m}$ και $f > \frac{K}{2\pi R_m}$.

Mass - controlled: m μεγάλη: $\bar{Z}_m = -2\pi jfm$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} \exp(-j\omega t)$, $f > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$ και $\frac{R_m}{2\pi m}$.

Κάθε ταλαντωτής υπό διέγερση είναι mass – controlled σε συχνότητες αρκετά υψηλότερες από τη φυσική του συχνότητα, resistance – controlled σε συχνότητες κοντά στη φυσική και stiffness – controlled σε συχνότητες πολύ μικρότερες από αυτή.

Ενέργεια εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Η μέση τιμή της απώλειας της ενέργειας ανά δευτερόλεπτο, λόγω αντίστασης (τριβής), όταν ο ταλαντωτής είναι στη μόνιμη κατάσταση, δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{1}{2} R_m U^2 = \frac{1}{2} R_m \left(\frac{F}{|\bar{Z}_m|} \right)^2 \quad (6.41)$$

Ο ρυθμός παροχής ενέργειας από το διεγείρον προς το διεγειρόμενο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned} VF \cos(2\pi ft) &= \frac{F^2}{|\bar{Z}_m|} \cos(2\pi ft) \cos(2\pi ft - \phi) \\ &= \frac{F^2}{|\bar{Z}_m|} \cos(2\pi ft) [\cos \phi \cos(2\pi ft) + \sin \phi \sin(2\pi ft)] \end{aligned} \quad (6.42)$$

Η μέση τιμή αυτού του μεγέθους ανά δευτερόλεπτο είναι:

$$\frac{1}{2} \frac{F^2}{|\bar{Z}_m|} \cos \phi = \frac{1}{2} R_m \left(\frac{F}{|\bar{Z}_m|} \right)^2 \quad (6.43)$$

αφού $\cos \phi = \frac{R_m}{|\bar{Z}_m|}$. Η τιμή (6.43) ισούται με την απώλεια ενέργειας P λόγω αντίστασης. Καταλήγουμε

δηλαδή ότι η ενέργεια που προσφέρεται από τον διεγέρτη είναι ίση με την ενέργεια που χάνεται από παθητικό σύστημα, στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.

6.4 Απόκριση συστήματος σε μεταβατικές δυνάμεις

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με δυνάμεις που διατηρούσαν την επίδρασή τους πάνω στο σύστημα πολύ μετά από την εμφάνιση και εξασθένηση των μεταβατικών φαινομένων. Μελετήσαμε τη μόνιμη κατάσταση ταλάντωσης όταν η ίδια η δράση της δύναμης είναι μόνιμη. Στην περίπτωση όμως που η δύναμη είναι παροδική, τότε το σύστημα δεν προλαβαίνει ποτέ να φτάσει σε μία μόνιμη κατάσταση. Τότε η μελέτη της συμπεριφοράς του είναι πιο σύνθετη και επικεντρώνεται στα μεταβατικά φαινόμενα.

Η μορφή της δύναμης

Έστω ότι η δύναμη έχει τη μορφή του παρακάτω ολοκληρώματος:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega \quad (6.44)$$

Έστω τώρα ότι η λύση είναι της μορφής:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega \quad (6.45)$$

Ωστε όταν το X είναι γνωστό, το x μπορεί να προσδιορισθεί. Αντιστρόφως με γνωστό το x υπολογίζουμε το X από την εξίσωση:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(j\omega t) dt \quad (6.46)$$

Με το μαθηματικό αυτό τρικ μπορούμε να μεταβούμε από μία διαφορική εξίσωση που συσχετίζει τα x και f σε μία αλγεβρική εξίσωση των X και F [PP]. Η εξίσωση (6.45) μπορεί να χρησιμοποιηθεί έπειτα για τον υπολογισμό του x .

Στα περισσότερα προβλήματα θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας πριν από τη χρονική στιγμή $t=0$, κατά την οποία εφαρμόζεται ξαφνικά η μεταβατική δύναμη. Κατά συνέπεια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $x(t)$ είναι διάφορες του μηδενός μόνο για $t > 0$. Τότε το X μπορεί να προσδιορισθεί απλούστερα:

$$X(jp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-pt) dt \quad (6.47)$$

όπου $p = -j\omega$ με το πραγματικό μέρος του να είναι θετικό. Μία όμοια εξίσωση δίνει το $F(jp)$ ως προς $f(t)$.

Μία πολλή χρήσιμη συσχέτιση που χρησιμοποιείται συχνά σε προβλήματα ταλαντώσεων είναι ο μετασχηματισμός Fourier της dx/dt :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-pt) dt &= pX = -j\omega X \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d^2x}{dt^2} \exp(-pt) dt &= p^2 X = -\omega^2 X \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Όροι πρέπει να προστεθούν αν το x είναι διάφορο του μηδενός για $t < 0$.

Μεταβατικά φαινόμενα σε απλό σύστημα

Με αντικατάσταση της δύναμης από την (6.44) στη γενική διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, προκύπτει:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega \quad (6.49)$$

Χρησιμοποιώντας τις συσχετίσεις (6.48), μετατρέπουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $(1/2\pi) \exp(-pt)$ και ολοκληρώσουμε ως προς t :

$$(K - j\omega R_m - \omega^2 m)X(\omega) = F(\omega) \quad (6.50)$$

Η εξίσωση

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{K - j\omega R_m - \omega^2 m} = \frac{F(\omega)}{-j\omega \bar{Z}(\omega)} \quad (6.51)$$

είναι η έκφραση για το πλάτος της συνιστώσας $X(\omega)$, συχνότητας ω , ως συνάρτηση της συνιστώσας $F(\omega)$, που εισέρχεται στο ολοκλήρωμα της συνολικής μεταβατικής δύναμης. Για την εμπέδηση ισχύει:

$$\bar{Z}(\omega) = R_m - j\left(\omega m - \frac{K}{\omega}\right)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στις εκφράσεις που δίνουν τη μετατόπιση και την ταχύτητα ενός απλού συστήματος στο οποίο ασκείται η δύναμη $f(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega) \exp(-j\omega t)}{-j\omega \bar{Z}(\omega)} d\omega \quad \text{και} \quad V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega) \exp(-j\omega t)}{\bar{Z}(\omega)} d\omega \quad (6.52)$$

όπου

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad p = -j\omega \quad (6.53)$$

Οι εξισώσεις είναι σωστές μόνο όταν το φανταστικό μέρος της ω (επόμενη υποενότητα) είναι θετικό στην ολοκλήρωση και όταν τα x , V και f είναι μηδενικά για $t < 0$. Για να συγκλίνουν τα παραπάνω ολοκληρώματα πρέπει να τεθούν περιορισμοί για τη συμπεριφορά της \bar{Z} καθώς η ω τείνει προς το άπειρο.

Για την επίλυση των ολοκληρωμάτων (6.52) πρέπει να διερευνήσουμε τους πόλους [F] της συνάρτησης $F/(-j\omega \bar{Z})$. Για να προσδιορισθούν οι πόλοι της $F(\omega)$, πρέπει να γνωρίζουμε τη μορφή της $f(t)$. Ωστόσο, ακόμα και με άγνωστη την $f(t)$, μπορούμε να συζητήσουμε τη συμπεριφορά του παράγοντα $1/(-j\omega \bar{Z})$. Για να έχει ο παράγοντας αυτός πόλους, πρέπει η συνάρτηση $-j\omega \bar{Z}(\omega)$ να έχει μηδενικά [F] για κάποιες τιμές της (γωνιακής) συχνότητας ω , η οποία είτε είναι πραγματική ή φανταστική.

Σύνθετες συχνότητες

Είχαμε ορίσει αρχικά την εμπέδηση ως το σύνθετο λόγο της απλής αρμονικής δύναμης, συχνότητας f και της προκύπτουσας ταχύτητας της μόνιμης καταστάσεως. Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της εμπέδησης, χωρίς να αλλάξουμε τον ορισμό, αλλά επιτρέποντας στη συχνότητα να λάβει σύνθετη μορφή, με πραγματικό και μιγαδικό μέρος. Ψάχνουμε τώρα για εκείνες τις σύνθετες συχνότητες για τις οποίες ο μιγαδικός αριθμός $-j\omega \bar{Z}$ είναι μηδέν.

Για ένα απλό μηχανικό σύστημα ισχύει: $-j\omega \bar{Z} = -\omega^2 m - j\omega R_m + K$. Με παραγοντοποίηση οι πόλοι γίνονται εμφανείς:

$$-j\omega \bar{Z} = -m(\omega - \omega_d + jk)(\omega + \omega_d + jk) \quad (6.54)$$

όπου το k είναι γνωστό από πριν, $\omega_d^2 = \omega_0^2 - k^2$ και $\omega_0^2 = (K/m)$, σε συμφωνία με τις (6.12) και (6.15). Οι τιμές της ω , για τις οποίες η συνάρτηση μηδενίζεται, έχει πραγματικό μέρος τη συχνότητα ταλάντωσης του ελεύθερου μηχανικού συστήματος πολλαπλασιασμένη με $\pm 2\pi$ και φανταστικό μέρος τη σταθερά απόσβεσης, με αρνητικό πρόσημο. Για αυτές τις τιμές της ω , η συνάρτηση $F/(-j\omega \bar{Z})$ θα έχει απλούς πόλους, εκτός από την ακραία περίπτωση, κατά την οποία η F έχει μηδενικά και πόλους στις ίδιες τιμές της ω .

Υπολογισμός της μεταβατικής κατάστασης

Οι πόλοι της συνάρτησης $F/(-j\omega\bar{Z})$ είναι στενά συνδεδεμένοι με τις μεταβατικές ταλαντώσεις του συστήματος που περιγράφηκε στην ενότητα 6.5. Οι πόλοι είναι τοποθετημένοι επάνω στο μιγαδικό επίπεδο συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, σε ακτίνα $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ και κάθετη απόσταση από τον άξονα των πραγματικών αριθμών ίση με k . Το υπόλοιπο της $\frac{F \exp(-j\omega t)}{-j\omega\bar{Z}}$ στους πόλους είναι:

$$\exp(j\omega_d t - kt) \frac{F(-\omega_d - jk)}{2m\omega_d}, \quad \omega = -\omega_d - jk$$

$$-\exp(-j\omega_d t - kt) \frac{F(-\omega_d - jk)}{2m\omega_d}, \quad \omega = \omega_d - jk$$

Καθώς η $F(\omega)$ έχει μόνο απλούς πόλους και καθώς κανένας από αυτούς δεν συμπίπτει με τους πόλους της $1/(-j\omega\bar{Z})$, η μετατόπιση του συστήματος θα είναι [PP]:

$$x(t) = 0, \quad \text{για } t < 0 \quad (6.55\alpha)$$

$$x(t) = \frac{\pi}{m} \frac{1}{j\omega_d} \exp(-kt) \left[\begin{array}{l} \exp(j\omega_d t) F(-\omega_d - jk) \\ -\exp(-j\omega_d t) F(\omega_d - jk) \end{array} \right], \quad \text{για } t > 0 \quad (6.55\beta)$$

$$-(2\pi j) \text{Sum}_{\text{res}}^{\omega} \left(\frac{F \exp(-j\omega t)}{-j\omega\bar{Z}} \right)$$

όπου $\text{Sum}_{\text{res}}^{\omega} \left(\frac{F \exp(-j\omega t)}{-j\omega\bar{Z}} \right)$ είναι το άθροισμα των υπολοίπων της $\frac{F \exp(-j\omega t)}{-j\omega\bar{Z}}$ σε όλους τους

απλούς πόλους της F πάνω στον άξονα της ω και κάτω από αυτόν.

Ο πρώτος όρος της (6.55β) είναι η μεταβατική κίνηση του συστήματος εξ' αιτίας της ξαφνικής μεταβολής της $F(\omega)$ για $t = 0$. Οι όροι που προέρχονται από τους πόλους της $F(\omega)$ είναι μία σειρά από γενικευμένες μεταβατικές κινήσεις και εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μορφή της $f(t)$. Αντίστοιχα, για την ταχύτητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$V(t) = 0, \quad \text{για } t < 0 \quad (6.56\alpha)$$

$$V(t) = \frac{\pi}{m} \frac{1}{\omega_d} \exp(-kt) \left[\begin{array}{l} (\omega_d + jk) \exp(j\omega_d t) F(-\omega_d - jk) \\ +(\omega_d - jk) \exp(-j\omega_d t) F(\omega_d - jk) \end{array} \right], \quad \text{για } t > 0 \quad (6.56\beta)$$

$$-(2\pi j) \text{Sum}_{\text{res}}^{\omega} \left(\frac{F \exp(-j\omega t)}{\bar{Z}} \right)$$

όπου $\text{Sum}_{\text{res}}^{\omega} \left(\frac{F \exp(-j\omega t)}{\bar{Z}} \right)$ είναι το άθροισμα των υπολοίπων της $\frac{F \exp(-j\omega t)}{\bar{Z}}$ σε όλους τους

απλούς πόλους της F πάνω στον άξονα της ω και κάτω από αυτόν. Παραδείγματα εφαρμογής της αναπτυχθείσας μεθόδου μπορεί να βρει κανείς στη βιβλιογραφική αναφορά [PP].

6.5 Συζευγμένες ταλαντώσεις

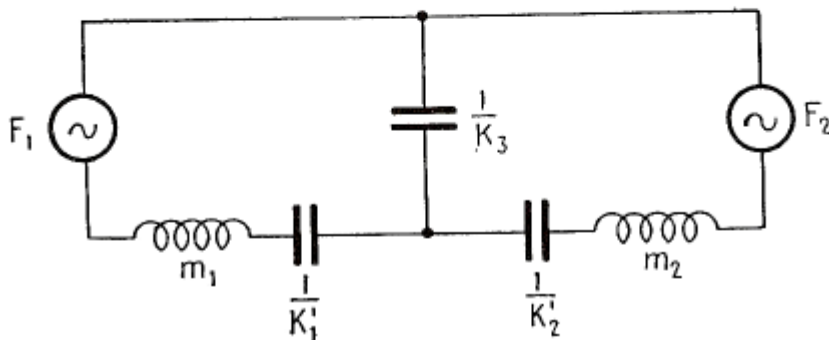
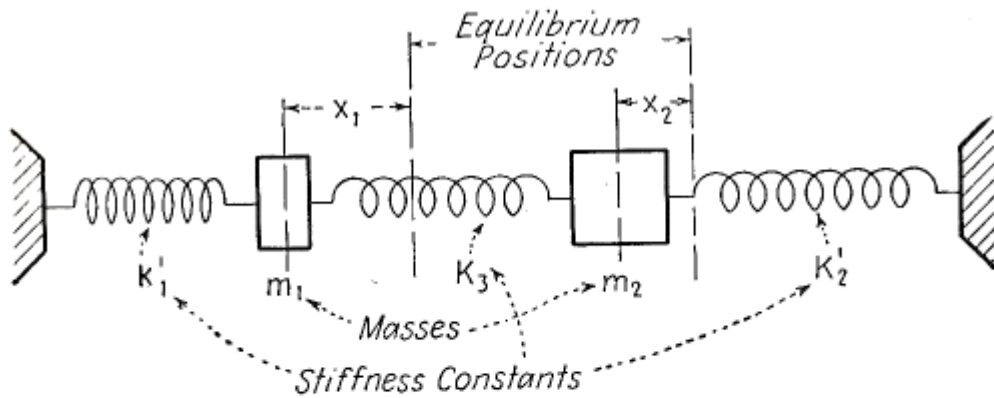
Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση που συζητήθηκε στην εισαγωγή των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων και μας βοηθά να κατανοήσουμε τα ηχητικά κύματα στους σωλήνες (επόμενο κεφάλαιο) και τη φυσική των πνευστών. Έστω ότι δύο ταλαντωτές είναι συνδεδεμένοι τόσο άρρηκτα μεταξύ τους, ώστε

να μην μπορεί να παραληφθεί η ανάδραση ενέργειας από τον ένα (διεγέρτη) προς τον άλλο (διεγειρόμενο). Ωστόσο, κατά περιόδους ο κάθε ταλαντωτής επηρεάζεται απ' τον άλλο και ο ρόλος του αλλάζει από διεγέρτη σε διεγειρόμενο, και αντιστρόφως [PP]. Μάλιστα αυτή η ισχυρή ανάδραση συμβαίνει έντονα όταν οι συχνότητες των δύο ταλαντωτών είναι παραπλήσιες. Για σημαντικά διαφορετικές συχνότητες τα αποτελέσματα της ακόλουθης ανάλυσης δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτά της ενότητας 6.3. Σε αυτή την περίπτωση, το πλάτος της κίνησης του ενός από τους δύο ταλαντωτές θα είναι πολύ μικρότερο από του άλλου, χωρίς έντονη ανάδραση μεταξύ τους.

Γενική εξίσωση

Θα εξετάσουμε πρώτα τη γενική περίπτωση των διαφορετικών συχνοτήτων. Στο σχήμα 6.2, ο ταλαντωτής No 1 έχει μάζα σώματος m_1 και έχει μετατοπισθεί από τη θέση ισορροπίας κατά x_1 . Ο ταλαντωτής No 2 έχει μάζα σώματος m_2 και είναι μετατοπισμένος κατά x_2 . Όταν $x_1 = x_2 = 0$, όλο το σύστημα ισορροπεί. Για την ώρα αμελούμε τυχόν αποσβέσεις που θα περιπλέξουν το πρόβλημα.

Έστω τώρα ότι κρατούμε σταθερό το σώμα 2 σε μηδενική μετατόπιση. Εκτρέποντας το σώμα 1 κατά x_1 , θα ασκείται επάνω του δύναμη μόνο από το ελατήριο K_1 ίση με $-K_1 x_1$, υπό την προϋπόθεση ότι η μετατόπιση είναι μικρή. Αφήνοντας το σώμα, ο ταλαντωτής No 1 (που συνίσταται από το ελατήριο K_1 και τη μάζα m_1) θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα: $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}$, κατ' αναλογία με τη σχέση (6.5).



Σχήμα 6.3

Αν εφαρμόσουμε την ακριβώς αντίστοιχη διαδικασία για τη μάζα m_2 , ο ταλαντωτής No 2 (που αποτελείται από τη μάζα αυτή και το ελατήριο K_2), θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση συχνότη-

τας $f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$. Πέρα από τα προηγούμενα, επειδή μεταξύ των μαζών μεσολαβεί το ελατήριο K_3 , μία μετατόπιση της m_1 θα προκαλέσει δύναμη Hooke στη m_2 ίση με $K_3 x_1$ και αυτή είναι η έννοια της σύζευξης. Εξ' αιτίας τώρα της συμμετρίας του όλου συστήματος, η μετατόπιση της m_2 προκαλεί στη m_1 δύναμη $K_3 x_2$. Η σταθερά K_3 καλείται *σταθερά σύζευξης* (coupling constant). Η τιμή της είναι συνήθως πολύ μικρότερη από τις K_1 και K_2 . Θεωρούμε τώρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $f_1 > f_2$.

Οι εξίσωση κίνησης για κάθε μάζα είναι:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -K_1 x_1 + K_3 x_2 \quad \text{και} \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -K_2 x_2 + K_3 x_1$$

Αν θέσουμε $x = x_1 \sqrt{m_1}$ και $y = x_2 \sqrt{m_2}$, οι εξισώσεις απλοποιούνται ως παρακάτω:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4\pi^2 f_1^2 x = 4\pi^2 \mu^2 y \quad \text{και} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4\pi^2 f_2^2 y = 4\pi^2 \mu^2 x \quad (6.57)$$

με
$$4\pi^2 f_1^2 = \frac{K_1}{m_1}, \quad 4\pi^2 f_2^2 = \frac{K_2}{m_2} \quad \text{και} \quad 4\pi^2 \mu^2 = \frac{K_3}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

Αν ένας από τους δύο ταλαντωτές ακινητοποιηθεί, ο άλλος θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν όμως και οι δύο αφεθούν ελεύθεροι, ύστερα από την αρχική εκτροπή τους, η κίνηση θα είναι κατά κανόνα μη περιοδική. Τη συμπεριφορά αυτή τη βλέπουμε στις καμπύλες c του σχήματος 6.3. Επειδή οι καμπύλες των x και y δεν είναι ημιτονοειδείς, δεν μπορούμε να συνεχίσουμε εύκολα τη μελέτη, αν δεν ορίσουμε ένα νέο είδος συνάρτησης για να περιγράψουμε την κίνηση [PP].

Απλή αρμονική κίνηση

Εξετάζουμε την περίπτωση να εκκινήσουμε τις μάζες με τέτοιο τρόπο ώστε η κίνηση που θα προκύψει να είναι απλή αρμονική, παρόλο που κατά κανόνα δεν είναι. Το βασικότερο στοιχείο για μία τέτοια συνθήκη είναι ότι οι συχνότητες των δύο ταλαντωτών πρέπει να συμπίπτουν. Έστω οι λύσεις $x = A \exp(-2\pi jft)$ και $y = B \exp(-2\pi jft)$. Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις (6.57) και προκύπτουν οι συνθήκες:

$$\mu^2 B = A(f_1^2 - f^2) \quad \text{και} \quad \mu^2 A = B(f_2^2 - f^2) \quad (6.58)$$

Με συνδυασμό των (6.58) απαλείφουμε τα A και B και παίρνουμε τη σχέση:

$$f^4 - (f_1^2 + f_2^2)f^2 + f_1^2 f_2^2 - \mu^4 = 0 \quad (6.59)$$

Η λύση της (6.59) είναι:

$$f = \left[\frac{1}{2}(f_1^2 + f_2^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(f_1^2 - f_2^2)^2 + 4\mu^4} \right]^{1/2} \\ = \frac{1}{2\pi \sqrt{m_1 m_2}} \left[\frac{1}{2}(K_1 m_2 + K_2 m_1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(K_1 m_2 - K_2 m_1)^2 + 4K_3^2 m_1 m_2} \right]^{1/2} \quad (6.60)$$

Από την (6.60) διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δύο δυνατές συχνότητες f_+ και f_- (αντιστοίχως με το πρόσημο της διακρίνουσας), για τις οποίες η ταλάντωση του συστήματος είναι απλή αρμονική. Καμία από αυτές τις συχνότητες δεν ισούται με κάποια από τις φυσικές f_1 και f_2 . Από την (6.60) επίσης διαπιστώνουμε ότι $f_- < f_1, f_2$ και $f_+ > f_1, f_2$.

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Παρόλο που η γενική κίνηση του συστήματος δεν είναι περιοδική, αν οι μάζες ξεκινήσουν με τέτοιο τρόπο ώστε τα πλάτη τους να συνδέονται από τη σχέση $B^+ = A^+ (f_1^2 - f_+^2) / \mu^2 = A^+ \mu^2 / (f_2^2 - f_+^2)$, τότε η ταλάντωση του συστήματος θα είναι απλή αρμονική, με συχνότητα f_+ , ενώ ο λόγος A^+ / B^+ θα παραμένει σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης. Ομοίως, αν οι μάζες ξεκινήσουν με τέτοιο τρόπο ώστε τα πλάτη τους να συνδέονται αυτή τη φορά από τη σχέση $B^- = A^- (f_1^2 - f_-^2) / \mu^2 = A^- \mu^2 / (f_2^2 - f_-^2)$, τότε η ταλάντωση του συστήματος θα είναι πάλι απλή αρμονική, με συχνότητα f_- , ενώ ο λόγος A^- / B^- θα παραμένει σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης. Αν η κίνηση ξεκινήσει με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, δεν θα υπάρχει σταθερός λόγος μεταξύ των πλατών και η ταλάντωση δεν θα είναι περιοδική. Οι δύο κινήσεις που μόλις αναφέρθηκαν καλούνται κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος (normal modes of vibration). Οι κινήσεις μπορούν να παρασταθούν συνοπτικά ως ακολούθως:

Συχνότητα f_+

$$x = C^+ \cos a \exp(-2\pi j f_+ t), \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1}} [a^+ \cos(2\pi f_+ t) + b^+ \sin(2\pi f_+ t)] \cos a$$

$$y = -C^+ \sin a \exp(-2\pi j f_+ t), \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{m_2}} [a^+ \cos(2\pi f_+ t) + b^+ \sin(2\pi f_+ t)] \sin a$$

Συχνότητα f_-

$$x = C^- \sin a \exp(-2\pi j f_- t), \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1}} [a^- \cos(2\pi f_- t) + b^- \sin(2\pi f_- t)] \sin a$$

$$y = C^- \sin a \exp(-2\pi j f_- t), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2}} [a^- \cos(2\pi f_- t) + b^- \sin(2\pi f_- t)] \cos a$$

όπου για τη γωνία a ισχύουν:

$$\tan a = -\frac{(f_1^2 - f_+^2)}{\mu^2} = -\frac{\mu^2}{(f_2^2 - f_+^2)} = \frac{\mu^2}{(f_1^2 - f_-^2)} = \frac{(f_2^2 - f_-^2)}{\mu^2}$$

$$\tan 2a = \frac{2\mu^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

$$C_+ \cos a = A_+, \quad C_+ \sin a = B_+, \quad C_- \sin a = A_-, \quad C_- \cos a = B_-$$

Πρέπει να γίνει κατανοητό εδώ ότι μόνο όταν το σύστημα ταλαντώνεται στους κανονικούς του τρόπους ταλάντωσης, μπορούμε να περιγράψουμε εύκολα την κίνηση. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα πράγματα γίνονται εξαιρετικά σύνθετα και δύσκολο να περιγραφούν. Η γενική λύση της (6.57) μπορεί να αναπαρασταθεί ως συνδυασμός και των δύο κανονικών τρόπων [PP]:

$$x = C^+ \cos a \exp(-2\pi j f_+ t) + C^- \sin a \exp(-2\pi j f_- t) \quad (6.61\alpha)$$

$$y = -C^+ \sin a \exp(-2\pi j f_+ t) + C^- \cos a \exp(-2\pi j f_- t) \quad (6.61\beta)$$

Θέτουμε τώρα

$$X = C^+ \exp(-2\pi j f_+ t) \quad \text{και} \quad Y = C^- \exp(-2\pi j f_- t) \quad (6.62)$$

Προκύπτει:

$$x = X \cos a + Y \sin a \quad \text{και} \quad y = -X \sin a + Y \cos a \quad (6.63)$$

Ενέργεια συζευγμένων ταλαντώσεων

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι κάθε στιγμή:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \quad (6.64)$$

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια, αμελούμε προφανώς τις πάσης φύσεως αντιδράσεις και τριβές. Φτάνει λοιπόν να εκτρέψουμε τα δύο σώματα από τα θέση ισορροπίας με οποιαδήποτε σειρά και να υπολογίσουμε τη συνολικό έργο που απαιτείται για αυτές τις εκτροπές. Έστω ότι μετακινούμε πρώτα το σώμα m_1 . Το έργο που σπαταλούμε είναι: $\int K_1 x_1 dx_1 = \frac{1}{2} K_1 x_1^2$. Για τη μετακίνηση του σώματος m_2 το έργο που σπαταλούμε είναι $\int (K_2 x_2 - K_3 x_1) dx_2 = \frac{1}{2} K_2 x_2^2 - K_3 x_1 x_2$. Η ολική ενέργεια λοιπόν κάθε στιγμή για το σύστημά μας είναι:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + K_1 x_1^2 + K_2 x_2^2 - 2K_3 x_1 x_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 4\pi^2 f_1^2 x^2 + 4\pi^2 f_2^2 y^2 - 8\pi^2 \mu^2 xy \right] \end{aligned} \quad (6.65)$$

Ο όρος με το γινόμενο xy περιπλέκει τη σχέση και μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα x και y με X και Y από τις σχέσεις (6.63) για απλοποίηση. Επίσης μπορούμε να εκφράσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του a ως συναρτήσεις του $2a$ και να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για την $\tan 2a$. Τότε η έκφραση για την ενέργεια απλοποιείται κατά πολύ:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 + 2\pi^2 f_+^2 X^2 + 2\pi^2 f_-^2 Y^2 \quad (6.66)$$

χωρίς να υπάρχει αυτή τη φορά γινόμενο XY .

Μικρή σύζευξη

Όπως έχει συζητηθεί, όταν ο βαθμός σύζευξης μεταξύ των ταλαντωτών του συστήματος είναι μικρός και οι συχνότητές τους δεν συμπίπτουν, τότε το πλάτος του ενός θα είναι πολύ μεγαλύτερο από του άλλου. Ο ταλαντωτής με τη μεγαλύτερη κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως διεγέρτης και το πλάτος του θα δίνεται από την (6.40). Έστω ότι ο ταλαντωτής με τη μάζα m_1 αποτελεί τον διεγέρτη του συστήματος στο σχήμα 6.3. Αν η σύζευξη είναι μικρή τότε και η γωνία a θα είναι μικρή και η περίπτωση που πρέπει να εξετάσουμε είναι για συχνότητα f_+ . Ισχύει:

$$x_1 = \frac{C_+}{\sqrt{m_1}} \cos(a) \exp(-2\pi j f_+ t) \quad (6.67)$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tan(a) x_1 = \frac{\mu^2 x_1}{f_2^2 - f_+^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{K_3 x_1}{K_2 - m_2 (2\pi f_+)^2} \quad (6.68)$$

Καθώς το a είναι μικρό, το x_2 θα είναι μικρότερο από το x_1 , εκτός αν η m_1 είναι πολύ μικρότερη της m_2 . Η ποσότητα $K_3 x_1$ είναι η δύναμη $f(t)$ που εφαρμόζεται στη m_2 μέσω του ελατηρίου K_3 λόγω της κίνησης x_1 . Ο διεγέρτης ταλαντώνεται με συχνότητα f_+ , ώστε $f = F_0 \exp(-2\pi j f_+ t) = K_3 x_1$, με $F_0 = \frac{K_3 C_+}{\sqrt{m_1}} \cos a$. Καθώς $-2\pi j f_+ \bar{Z}_2 = K_2 - m_2 (2\pi f_+)^2$, η μετατόπιση της m_2 , όταν διεγείρεται από τη m_1 σε συχνότητα f_+ είναι:

$$x_2 = \frac{F_0}{-2\pi j f_+ \bar{Z}_2} \exp(-2\pi j f_+ t) \quad (6.69)$$

Συντονισμός συζευγμένης ταλάντωσης

Έστω η περίπτωση οι φυσικές συχνότητες των ταλαντωτών να συμπίπτουν, $f_1 = f_2$, με αμελητέες πάντα τις αποσβέσεις. Από την (6.60) έχουμε:

$$f_+ = \sqrt{f_1^2 + \mu^2} = f_1 + \frac{\mu^2}{2f_1} + \dots \quad (6.70)$$

$$f_- = \sqrt{f_1^2 - \mu^2} = f_1 - \frac{\mu^2}{2f_1} + \dots \quad (6.71)$$

και

$$a = \pi/4$$

Αν το μ είναι πολύ μικρότερο της f_1 , μόνο οι δύο πρώτοι όροι των αναπτυγμάτων ρίζας είναι απαραίτητοι. Συνεπώς, αν δύο ίδιοι ταλαντωτές είναι συζευγμένοι, δεν θα ταλαντώνονται πλέον με τη φυσική τους συχνότητα f_1 , αλλά με αυτές που δίνουν οι σχέσεις (6.70) και (6.71). Αν οι μάζες του συστήματος ξεκινήσουν ώστε $x_1 = -x_2 \sqrt{m_2/m_1}$, τότε θα ταλαντώνονται μόνο στην υψηλότερη συχνότητα. Αν ξεκινήσουν με $x_1 = x_2 \sqrt{m_2/m_1}$, τότε θα ταλαντώνονται στη χαμηλότερη συχνότητα. Για οποιαδήποτε άλλη εκκίνηση, θα έχουμε έναν συνδυασμό των δύο συχνοτήτων.

Αν μετακινήσουμε τη m_1 κατά x_0 , κρατώντας την απόσταση x_2 μηδενική, τότε, αφήνοντας τις δύο μάζες στη χρονική στιγμή $t = 0$, οι μετατοπίσεις x_1 και x_2 θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = x_0 \cos\left(\pi \frac{\mu^2}{f_1} t\right) \cos(2\pi f_1 t) \quad (6.72)$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} x_0 \sin\left(\pi \frac{\mu^2}{f_1} t\right) \sin(2\pi f_1 t) \quad (6.73)$$

Η μορφή των εξισώσεων δείχνει ότι αν οι ταλαντωτές ξεκινήσουν με τον τρόπο που περιγράφηκε και η σύζευξη είναι ασθενής, η κίνηση αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση συχνότητας f_1 , στην οποία το πλάτος ταλαντώνεται με μικρή συχνότητα $\mu^2/2f_1$. Μία τέτοια κίνηση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί απλή αρμονική, καθώς το πλάτος του συστήματος μεταβάλλεται με το χρόνο.

Μεταφορά ενέργειας

Με χρήση της εξίσωσης (6.23) μπορούμε να υπολογίσουμε την ελεύθερη ενέργεια της ταλάντωσης των m_1 και m_2 . Στην πραγματικότητα δεν είναι ορθό να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση αυτή, που ισχύει για έναν απλό ταλαντωτή, για να υπολογίσουμε την ενέργεια ενός συζευγμένου συστήματος.

Όταν ωστόσο η σύζευξη είναι ασθενής, το σφάλμα δεν είναι μεγάλο. Η μέση (average) ελεύθερη ενέργεια της μάζας m_1 είναι $2\pi^2 m_1 f_1^2 x_0^2 \cos^2(\pi\mu^2 t / f_1)$ και για τη m_2 , $2\pi^2 m_1 f_1^2 x_0^2 \sin^2(\pi\mu^2 t / f_1)$. Από αυτές τις σχέσεις συνεπάγεται ότι για τη χρονική στιγμή $t=0$, όλη η ενέργεια του συστήματος είναι συγκεντρωμένη στη m_1 . Καθώς όμως ο χρόνος προχωρεί, η ενέργεια της m_1 μειώνεται και της m_2 αυξάνεται, έως ότου τα δύο ποσά εξισωθούν. Τότε η ροή αντιστρέφεται και σταδιακά η ενέργεια της m_1 αυξάνεται, καθώς της m_2 μειώνεται. Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή σε κάθε χρονική στιγμή, ίση με $2\pi^2 m_1 f_1^2 x_0^2$ [PP].

Όταν η σύζευξη μεταξύ των ταλαντωτών 1 και 2 είναι μεγάλη ή οι φυσικές τους συχνότητες συμπίπτουν, τότε το ποσό ενέργειας που μεταφέρεται απ' τον ένα ταλαντωτή στον άλλο είναι μεγάλο. Αυτό ενδεχομένως να αποτελεί εμπόδιο στη δημιουργία συντονισμού του συστήματος. Είδαμε ότι για να φτάσει ένα σύστημα σε συντονισμό πρέπει οι αποσβέσεις να είναι μικρές στην αντίστοιχη συχνοτική περιοχή. Αν όμως αναγκάσουμε ένα τέτοιο σύστημα, να συντονιστεί στη συχνότητα f_1 και προσπαθήσουμε να το διεγείρουμε με ένα άλλο σύστημα επίσης συχνότητας f_1 , το αποτέλεσμα της σύζευξης θα είναι ότι και ο διεγέρτης και το διεγερόμενο σύστημα δεν θα ταλαντώνονται με f_1 , αλλά με $f_1 \pm (\mu^2 / 2f_1)$. Άρα αποκλείεται το ενδεχόμενο συντονισμού στη φυσική συχνότητα.

Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Έστω τώρα ότι εφαρμόζουμε στο σύστημα των δύο συζευγμένων ταλαντωτών μία μεταβαλλόμενη δύναμη $F = F_0 \exp(-j\omega t)$. Αν αυτή εφαρμοστεί στη μάζα m_1 , τότε η εξίσωση (6.57) θα δώσει:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x - d^2 y = a_1 \exp(-j\omega t) \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_2^2 y - d^2 x = 0 \quad (6.74)$$

όπου

$$\omega_1^2 = K_1 / m_1, \quad \omega_2^2 = K_2 / m_2, \quad d^2 = K_3 / \sqrt{m_1 m_2} \quad \text{και} \quad a_1 = F_0 / \sqrt{m_1}$$

Έστω ότι οι λύσεις έχουν τη μορφή $x = x_0 \exp(-j\omega t)$ και $y = y_0 \exp(-j\omega t)$. Αντικαθιστώντας στην (6.74) και επιλύοντας ως προς x_0 και y_0 , προκύπτουν, με χρήση των $x = x_1 \sqrt{m_1}$ και $y = x_2 \sqrt{m_2}$, οι πραγματικές μετατοπίσεις (αποκρίσεις) των ταλαντωτών:

$$x_1 = \frac{F_0 (\omega_2^2 - \omega^2) \exp(-j\omega t)}{m_1 (\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{F_0 K_3 \exp(-j\omega t)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \quad (6.75)$$

όπου $\omega_+ = 2\pi f_+$, $\omega_- = 2\pi f_-$ ή κατά τις παρακάτω σχέσεις [PP]:

$$\omega_+^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4d^4}$$

$$\omega_-^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4d^4}$$

Αν είχαμε εφαρμόσει τη δύναμη στη μάζα m_2 οι μετατοπίσεις των ταλαντωτών θα ήταν:

$$x_1 = \frac{F_0 K_3 \exp(-j\omega t)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{F_0 (\omega_1^2 - \omega^2) \exp(-j\omega t)}{m_2 (\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \quad (6.76)$$

Ένας άλλος βολικός τρόπος να γράψουμε την απόκριση του συστήματος είναι με χρήση εμπεδήσεων που αντιστοιχούν στο κύκλωμα του σχήματος 6.2. Αν η μάζα m_2 κρατηθεί στη θέση ισορροπίας της, τότε η εμπέδηση για την m_1 είναι:

$$\vec{Z}_1 = -j\omega m_1 + j(K_1 / \omega)$$

Κρατώντας σταθερή τη m_1 , η εμπέδηση για τη m_2 είναι:

$$\vec{Z}_2 = -j\omega m_2 + j(K_2 / \omega)$$

Η σύζευξη μπορεί να περιγραφεί από μία κοινή εμπέδηση (mutual impedance):

$$\vec{Z}_M = j(K_3 / \omega) \quad (6.77)$$

Με διαφόριση των (6.76) και πράξεις, παίρνουμε για τους λόγους μεταξύ της αρμονικής δύναμης που εφαρμόζεται στη m_1 και τις προκύπτουσες ταχύτητες των m_1 και m_2 :

$$\vec{Z}_{11} = \frac{\vec{F}}{\vec{V}_1} = \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 - \vec{Z}_M^2}{\vec{Z}_2} \quad \text{και} \quad \vec{Z}_{12} = \frac{\vec{F}}{\vec{V}_2} = \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 - \vec{Z}_M^2}{\vec{Z}_M} \quad (6.78)$$

Η \vec{Z}_{11} καλείται μηχανική αντίσταση εισόδου του συστήματος, ενώ η \vec{Z}_{12} μηχανική αντίσταση μεταφοράς μεταξύ των ταλαντωτών 1 και 2. Αν η δύναμη εφαρμοστεί στη m_2 , οι αντίστοιχες εμπεδήσεις θα είναι:

$$\vec{Z}_{22} = \frac{\vec{F}}{\vec{V}_2} = \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 - \vec{Z}_M^2}{\vec{Z}_1} \quad \text{και} \quad \vec{Z}_{21} = \frac{\vec{F}}{\vec{V}_1} = \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 - \vec{Z}_M^2}{\vec{Z}_M} = \vec{Z}_{12} \quad (6.79)$$

Οι εμπεδήσεις μεταφοράς προκύπτει ότι είναι συμμετρικές. Η απόκριση του ταλαντωτή 2, λόγω της δύναμης στον ταλαντωτή 1 είναι ίδια με την απόκριση του ταλαντωτή 1, λόγω της δύναμης στον ταλαντωτή 2. Αυτή η συμμετρία καλείται και αρχή της αμοιβαιότητας (principle of reciprocity) [PP].

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και συντονισμός

Για τις δύο συχνότητες συντονισμού f_+ και f_- , οι εμπεδήσεις των (6.78) και (6.79) αντίστοιχα μηδενίζονται. Στις συχνότητες αυτές, τα πλάτη ταλάντωσης απειρίζονται, όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί από τις (6.75) και (6.76). Τα πλάτη θα ήταν πολύ μεγάλα αλλά όχι άπειρα, αν είχε συμπεριληφθεί κάποια μικρή απόσβεση στην ταλάντωση. Ο λόγος y προς x , όταν η διεγείρουσα δύναμη έχει συχνότητα f_+ είναι $d^2 / (\omega_2^2 - \omega_+^2) = \mu^2 / (f_2^2 - f_+^2)$, κατά τις εξισώσεις (6.75). Ο λόγος αυτός συμπίπτει με το λόγο που λάβαμε όταν το σύστημα εκτελούσε ελεύθερη ταλάντωση με συχνότητα f_+ .

Η παραπάνω διαπίστωση είναι θεμελιώδης και πολύ σημαντική. Όταν το σύστημα διεγείρεται από μία απλή αρμονική δύναμη με συχνότητα που ισούται με κάποια από τις συχνότητες της ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος, τότε η απόκριση θα είναι μεγάλη και η σχέση μεταξύ των κινήσεων των ταλαντωτών θα είναι η ίδια με αυτή της ελεύθερης ταλάντωσης στην εν λόγω συχνότητα [PP].

Στην περίπτωση του σχήματος 6.2, που εξετάσαμε εκτενώς, οι ταλαντωτές (και οι αντίστοιχες μάζες) ήσαν δύο. Για δύο ταλαντωτές έχουμε δύο φυσικές συχνότητες (ελεύθερης ταλάντωσης), ήτοι δύο συχνότητες στις οποίες μπορεί να συντονιστεί το σύστημα. Αν είχαμε τρεις μάζες συνδεδεμένες με ελατήρια, οι φυσικές συχνότητες θα ήταν τρεις και ούτω καθ' εξής.

Όταν το σύστημα διεγείρεται από δύναμη συχνότητας πολύ μικρότερη τις f_- , που εφαρμόζεται στη m_1 , τότε και οι δύο μάζες κινούνται σε φάση με τη δύναμη, με το λόγο x_2 προς x_1 να είναι $K_3 / K_2 = K_3 / (K_3 + K_2)$. Έτσι η μετατόπιση x_1 είναι μεγαλύτερη από τη x_2 κατά παράγοντα εξαρτώμενο από τη σχετική ακαμψία των δύο ελατηρίων που ενώνονται στη μάζα m_2 .

Σύμφωνα τώρα με την εξίσωση (6.75), καθώς η διεγείρουσα συχνότητα αυξάνεται, το πλάτος επίσης θα αυξάνεται μέχρι το συντονισμό στη συχνότητα f_- , η οποία είναι χαμηλότερη από τις f_1 και f_2 . Για συχνότητες μόλις μεγαλύτερες της f_- , και οι δύο μετατοπίσεις των ταλαντωτών αντιτίθενται στη δύναμη (διαφορά φάσης 180°).

Στη συχνότητα f_2 η μετατόπιση x_1 γίνεται μηδέν. Αν οι αποσβέσεις είναι μη μηδενικές, η x_1 είναι μικρή, αλλά όχι μηδενική. Στη συχνότητα αυτή η εμπέδηση εισόδου \bar{Z}_{11} απειρίζεται, καθώς η \bar{Z}_2 είναι μηδέν. Άρα όταν η m_1 κρατιέται σταθερή, η m_2 συντονίζεται. Αν κινήσουμε τώρα τη m_1 σε αυτή τη συχνότητα, η m_2 θα απορροφά όλη τη διαθέσιμη ενέργεια έστω και με μία απειροστή κίνηση της m_1 . Αυτό ισοδυναμεί με παράλληλο συντονισμό.

Πάνω απ' την f_2 , η x_1 είναι σε φάση με τη δύναμη και η x_2 αντιτίθεται σ' αυτή. Όταν $f = f_+$, δηλαδή υψηλότερη των f_1 και f_2 , τα πλάτη απειρίζονται ξανά. Για υψηλότερες ακόμη συχνότητες, η x_1 αντιτίθεται στη δύναμη και η x_2 είναι σε φάση με αυτή.

Η τενωμένη χορδή ενός βιολιού ή μίας κιθάρας μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί σύστημα πολλών απειροστών μαζών, ενωμένες με αντίστοιχες ακαμψίες. Βεβαίως οι μάζες και οι ακαμψίες είναι σ' αυτή την περίπτωση ομοιόμορφα συγχωνευμένες, έτσι που δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τη χορδή άμεσα με το σχήμα 6.2. Η αρχή όμως παραμένει η ίδια και πολλές μελέτες έχουν γραφεί για τον υπολογισμό των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός τέτοιου συστήματος [CC,PP,QQ,TT,AAA]. Ο αριθμός των στοιχειωδών μαζών στις οποίες θεωρητικά χωρίζεται η χορδή είναι άπειρος. Κατά συνέπεια άπειροι είναι και οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης στις συχνότητες των οποίων μπορεί να συντονιστεί η χορδή.

Οι ακουστικοί σωλήνες που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο αποτελούν και αυτοί συστήματα συγχωνευμένης μάζας – ακαμψίας. Εδώ η έννοια όμως είναι πολύ πιο αυθαίρετη μιας και το ταλαντούμενο σύστημα δεν είναι το σώμα του σωλήνα, αλλά ο περιεχόμενος αέρας, που είναι κατά τα γνωστά ένα άμορφο ελαστικό μέσο [N]. Και στα συστήματα αυτά οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι άπειροι. Στο κεφάλαιο 2 του μέρους II θα δούμε με ποιο τρόπο παράγουν μουσική οι οικογένειες των μουσικών οργάνων. Στα πνευστά, που ενδιαφερόμαστε στην εργασία αυτή, η παραγωγή γίνεται από τις ταλαντώσεις του αέρα εντός των ακουστικών σωλήνων.

6.6 Ακουστικά ανάλογα

Στο κεφάλαιο αυτό μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με μηχανικές ταλαντώσεις. Μάλιστα αναζητήσαμε πολλές φορές την αντιστοιχία μεταξύ μηχανικού και ηλεκτρικού συστήματος, ώστε να διευκολυνθούμε στην κατάστρωση των εξισώσεων. Ερχόμαστε τώρα να προσθέσουμε στο ζεύγος αυτό και το ακουστικό σύστημα, του οποίου οι ομοιότητες με τα άλλα δύο είναι εμφανείς. Στην ακουστική η μελέτη της συμπεριφοράς των διαφόρων στοιχείων και γεωμετριών, απλοποιείται συχνά με τη μετατροπή του ακουστικού συστήματος σε μηχανικό και ηλεκτρικό ανάλογο. Ο πίνακας 7.1 παρουσιάζει τις αναλογίες μεταξύ των τριών συστημάτων.

Πίνακας 6.1

Μηχανικό	Μάζα(Mass) m	Ενδοτικότητα-ελαστικότητα (Compliance) C	Μηχανική αντίσταση (Resistance) R	Δύναμη (Force) F	Ταχύτητα (Velocity) V
Ηλεκτρικό	Επαγωγή (Inductance) L	Χωρητικότητα (Capacitance) C	Ηλεκτρική αντίσταση (Resistance) R	Τάση (Voltage) V	Ρεύμα (Current) I
Ακουστικό	Αδράνεια (Inertance) M	Ενδοτικότητα-ελαστικότητα (Compliance) C	Ακουστική αντίσταση (Resistance) R	Διαφορά πίεσης (Pressure gradient) P	Ακουστική ροή (Acoustic flow) U

6.7 Ακουστικές εμπεδήσεις

Από το επόμενο κιάλας κεφάλαιο θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ακουστικής εμπεδήσης στην επίλυση ακουστικών προβλημάτων. Όπως και στο μηχανικό ή το ηλεκτρικό σύστημα, έτσι και στο ακουστικό, η εμπεδήση (ή σύνθετη αντίσταση) συμπυκνώνει πολλά από τα χαρακτηριστικά του συστήματος σε μία σχέση με πραγματικό και φανταστικό μέρος (μιγαδικός αριθμός).

Σύνθετη ακουστική αντίσταση – Ακουστική Εμπέδηση

Στον ηλεκτρισμό, η εμπέδηση (impedance) ορίζεται από το πηλίκο της τάσης με το ρεύμα και εκφράζει τη συμπεριφορά του συνόλου των επαγωγών, των χωρητικοτήτων και των ωμικών αντιστάσεων που συζεύγονται στο κύκλωμα.

Στην ακουστική, η *ακουστική εμπέδηση* (acoustic impedance) \bar{Z} ενός ρευστού που ρέει λόγω ακουστικής πίεσης \bar{p} σε μία διατομή S είναι:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{p}}{\bar{U}} \quad (6.80)$$

όπου \bar{U} είναι η ταχύτητα όγκου (volume velocity) διαμέσου του ακουστικού στοιχείου που μας ενδιαφέρει.

Η *ειδική ακουστική εμπέδηση* (specific acoustic impedance) είναι η ίδια έκφραση που είδαμε στο κεφάλαιο 3 για την *κυματική αντίσταση* και ορίζεται απ' τη σχέση:

$$\bar{z} = \frac{\bar{p}}{\bar{u}} \quad (6.81)$$

όπου \bar{u} είναι η σημειακή ταχύτητα (particle velocity). Η \bar{z} αναφέρθηκε στο κεφ. 3 ότι εξαρτάται απ' το υλικό. Εκτός απ' αυτό, εξαρτάται και από τον τύπο του διαδιδόμενου κύματος.

Οι δύο εμπεδήσεις σχετίζονται μεταξύ τους σύμφωνα με τη σχέση:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{z}}{S} \quad (6.82)$$

Γιατί προφανώς ισχύει: $\bar{U} = S\bar{u}$.

Αν τώρα μία ταλαντούμενη επιφάνεια διεγείρεται με ταχύτητα \bar{u} από μία δύναμη \vec{F} , που επιδρά στο ρευστό, τότε η *εμπέδηση ακτινοβολήσης* (radiation impedance) δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{Z}_r = \frac{\vec{F}}{\bar{u}} \quad (6.83)$$

Αυτή η εμπέδηση αποτελεί μέρος της μηχανικής εμπέδησης του ταλαντούμενου συστήματος [TT]. Η εμπέδηση ακτινοβολήσης σχετίζεται με την ειδική εμπέδηση σε μία επιφάνεια, μέσω της σχέσης:

$$\bar{Z}_r = \bar{z}S \quad (6.84)$$

7

Ο ήχος σε κυματοδηγούς και σωλήνες

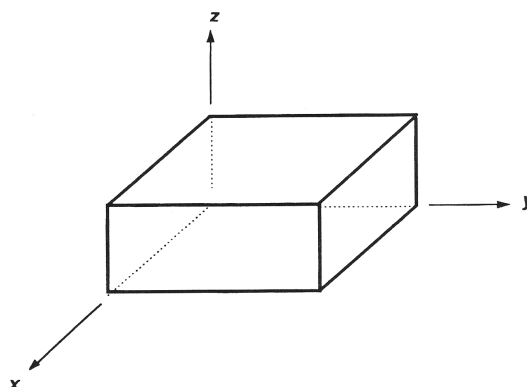
Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί ουσιαστικά το προοίμιο της θεωρίας των πνευστών μουσικών οργάνων, που θα ακολουθήσει. Οι αρχές που διέπουν την παραγωγή και διάδοση του ήχου εντός ορισμένων χωρητικοτήτων, όπως οι ακουστικοί σωλήνες είναι η βάση της λειτουργίας των πνευστών.

Όταν τα ακουστικά κύματα περιορίζονται στο χώρο, συμβαίνουν πολύπλοκα φαινόμενα. Ένα παράδειγμα είναι η διάδοση του ήχου εντός σωλήνα με ακλόνητο τοίχωμα. Αν το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο σωλήνα είναι πολύ μεγαλύτερο της ακτίνας του, η ακουστική διάδοση γίνεται στην ουσία επίπεδη [AAA]. Οι ιδιότητες συντονισμού των ακουστικών σωλήνων που οδηγούνται απ' το ένα στις άκρο και είναι κλειστοί στο άλλο, συνιστούν τη βάση για τη μέτρηση των ακουστικών εμπεδήσεων και των απορροφητικών ιδιοτήτων διαφόρων υλικών. Όταν οι διαστάσεις των χωρητικοτήτων υπερβαίνουν τα μήκη κύματος, δημιουργούνται στάσιμα κύματα δύο και τριών ακόμα διαστάσεων.

7.1 Ορθογώνια κοιλότητα

Έστω μία ορθογώνια κοιλότητα διαστάσεων l_x , l_y , l_z κατά τους άξονες x , y , z αντίστοιχα του ορθογώνιου συστήματος. Η κοιλότητα, που παριστάνεται στο σχήμα 7.1 μπορεί να είναι ένα κουτί, ένα κλειστό δωμάτιο ή μία αίθουσα εκδηλώσεων. Τα τοιχώματα στις κοιλότητες είναι πλήρως ακλόνητα και άκαμπτα ώστε να μην κινούνται στη διεύθυνση των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων επιφανείας. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε ότι $\hat{n} \cdot \vec{u} = 0$ για όλα τα τοιχώματα – όρια του συστήματος. Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται ότι $\hat{n} \cdot \nabla p = 0$. Αναλύοντας στις τρεις διαστάσεις έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=l_x} = 0 \\ \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0} &= \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=l_y} = 0 \\ \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=0} &= \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=l_z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$



Σχήμα 7.1

Ορθογώνια κοιλότητα διαστάσεων l_x , l_y , l_z

Θεωρούμε ότι τα τοιχώματα εκτός από ακλόνητα είναι και αδιαβατικά, δηλαδή αποκλείουν κάθε θερμική συναλλαγή με το περιβάλλον. Από αυτό το απολύτως κλειστό σύστημα δεν μπορεί να δραπέτευσει ακουστική ενέργεια προς το περιβάλλον. Κατά συνέπεια δεν μπορούν να υφίστανται οδεύοντα κύμα, τα οποία μεταφέρουν ενέργεια, παρά μόνον στάσιμα. Έτσι, η λύση της κυματικής εξίσωσης για την πίεση μπορεί να έχει τη μορφή:

$$p(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) = X(x)Y(y)Z(z)\exp(j\omega t) \quad (7.2)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (7.3)$$

λαμβάνουμε, χωρίζοντας τις μεταβλητές:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_x^2\right)X = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dy^2} + k_y^2\right)Y = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2\right)Z = 0 \quad (7.4)$$

Οι σταθερές συσχετίζονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (7.5)$$

Οι οριακές συνθήκες (7.1) υπαγορεύουν συνημιτονοειδή λύση της κυματικής εξίσωσης και εξ' άλλου στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και σύμφωνα με το κεφάλαιο 3 για τη λύση με στάσιμα κύματα. Η εξίσωση (7.2) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$p_{nmd} = A_{nmd} \cos k_{xn}x \cos k_{ym}y \cos k_{zd}z \exp(j\omega_{nmd}t) \quad (7.6)$$

Οι συνιστώσες του k είναι:

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}, \quad k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y}, \quad k_{zd} = \frac{d\pi}{l_z} \quad (7.7)$$

με $n, m, d = 0, 1, 2, 3, \dots$

Από τη σχέση (7.5) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις συχνότητες με τις οποίες μπορεί να ταλαντωθεί το ρευστό (αέρας) εντός της κοιλότητας:

$$\omega_{nmd} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{l_y^2} + \frac{d^2\pi^2}{l_z^2}} \quad (7.8)$$

Κάθε ιδιοσυνάρτηση της εξίσωσης (7.6) χαρακτηρίζεται από μία ιδιοσυχνότητα (ένα k) και οι τρεις μαζί συνιστούν, σύμφωνα με την (7.8), τις ολικές (γωνιακές) συχνότητες ταλαντώσεων. Η εξίσωση (7.6), που αποτελεί τη λύση της εξίσωσης (7.3), περιγράφει τρισδιάστατα στάσιμα κύματα εντός της κοιλότητας, με τα επίπεδα των δεσμών να είναι παράλληλα στα τοιχώματα. Η πίεση μεταβάλλεται συνημιτονοειδώς μεταξύ των δεσμικών επιπέδων.

Είναι γνωστό [ΓΓ] ότι μπορούμε να αναλύσουμε ένα στάσιμο κύμα μίας ταλαντούμενης χορδής σε ένα ζεύγος κυμάτων, οδεύοντων σε αντίθετες κατευθύνσεις. Κατά παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να διασπάσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της (7.6) σε οδεύοντα επίπεδα κύματα. Αυτό επιτυγχάνεται μετατρέποντας τη γενική λύση (7.6) σε σύνθετη εκθετική μορφή και αθροίζοντας όλους τους πιθανούς συνδυασμούς προσήμων:

$$\bar{p}_{nmd} = \frac{\bar{A}_{nmd}}{8} \sum \exp[j\omega_{nmd}(\pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)] \quad (7.9)$$

Οι όροι στο σύνολό τους είναι οκτώ. Κάθε ένας περιγράφει ένα επίπεδο κύμα που ταξιδεύει κατά τη διεύθυνση του διανύσματος διάδοσης του, \vec{k} , το οποίο έχει προβολές $\pm k_x$, $\pm k_y$, $\pm k_z$ στους άξονες του ορθογώνιου συστήματος. Η γενική λύση στάσιμου κύματος προκύπτει απ' την υπέρθεση οκτώ οδευόντων κυμάτων, ένα σε κάθε τεταρτημόριο του τρισδιάστατου χώρου, των οποίων οι διευθύνσεις διάδοσης περιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

7.2 Δισδιάστατος κυματοδηγός

Έστω τώρα ένας ορθογώνιος σωλήνας απείρου μήκους και αρκετά πλατύς (μικρού ύψους), ώστε μόνο οι δύο διαστάσεις να είναι σημαντικές και να καθορίζουν τη λύση. Έστω z ο άξονας που συμπίπτει με το μήκος του σωλήνα και x ο άξονας που συμπίπτει με το πλάτος. Η δισδιάστατη λύση της κυματικής εξίσωσης που περιγράφει στάσιμα κύματα κατά τη x διεύθυνση και οδεύοντα κατά τη z είναι:

$$\bar{p}(x, t) = \bar{A} \cos(k_x x + \phi_x) \exp[j(\omega t - k_z z)] \quad (7.10)$$

Για τα k_x και k_z ισχύει:

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (7.11)$$

Αν το επίπεδο $x=0$ είναι ένα ακλόνητο όριο, τότε $\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ και $\phi_x = 0$.

Αν το επίπεδο $x=l_x$ είναι επίσης ένα ακλόνητο όριο, τότε:

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)_{x=l_x} = 0 \Rightarrow \sin k_x l_x = 0 \quad (7.12)$$

Από αυτή τη συνθήκη προκύπτει:

$$k_x l_x = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.13)$$

Λόγω όμως της εξίσωσης (7.11),

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 = k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l_x^2} \quad (7.14)$$

Η λύση (7.10) μπορεί να διασπασθεί σε δύο οδεύοντα κύματα:

$$\bar{p}_0 \cos(k_x x) \exp[j(\omega t - k_z z)] = \frac{\bar{p}_0}{2} \left\{ \exp[j(k_x x - k_z z + \omega t)] + \exp[j(k_x x + k_z z - \omega t)] \right\} \quad (7.15)$$

Κάθε μία από αυτές τις εξισώσεις αναπαριστά ένα επίπεδο κύμα. Οι ισοφασικές επιφάνειες δίνονται από τη σχέση:

$$-k_x x \pm k_z z = \omega t \quad (7.16)$$

ή

$$-\frac{k_x}{k} x \pm \frac{k_z}{k} z = \frac{\omega t}{k} \quad (7.17)$$

όπου προφανώς απ' την (7.11):

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \quad (7.18)$$

Η εξίσωση επιπέδου είναι:

$$n_x x + n_z z = s \quad (7.19)$$

όπου s είναι η απόσταση του επιπέδου από την αρχή των αξόνων και n_x , n_z τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x και z αντίστοιχα. Συνδυάζοντας τις (7.17) και (7.19) καταλήγουμε ότι $n_x = \frac{k_x}{k}$, $n_z = \frac{k_z}{k}$ και $s = \frac{\omega t}{k}$. Η ταχύτητα διάδοσης των ισοφασικών επιφανειών λαμβάνεται με παραγωγή του s , ως προς το χρόνο:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \quad (7.20)$$

Η ταχύτητα αυτή είναι προφανώς η ταχύτητα του ήχου.

Η γωνία της διεύθυνσης διάδοσης των καθέτων διανυσμάτων στο μέτωπο του κύματος με τον άξονα x είναι:

$$\cos(x, n) = n_x = \frac{k_x}{k} \quad (7.21)$$

Ομαδική ταχύτητα (group speed)

Ομαδική είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η πληροφορία ή η ενέργεια. Η ομαδική ταχύτητα σε ένα κανάλι, στο οποίο η διάδοση γίνεται κατά τον z άξονα, είναι [AAA]:

$$t_g = \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (7.22)$$

όπου $\phi = k_z z$.

Κατά συνέπεια:

$$c_g = \frac{z}{t_g} = \frac{1}{\frac{\partial k_z}{\partial \omega}} \quad (7.23)$$

Παραγωγίζοντας το k_z ως προς ω , παίρνουμε:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} \Rightarrow \frac{\partial k_z}{\partial \omega} = \frac{2k \frac{\partial k}{\partial \omega}}{2\sqrt{k^2 - k_x^2}} \Rightarrow \frac{\partial k_z}{\partial \omega} = \frac{k}{k_z} \frac{1}{c} = \frac{1}{n_z c} \quad (7.24)$$

Ωστε καταλήγουμε:

$$c_g = n_z c = c \cos(n, z) \quad (7.25)$$

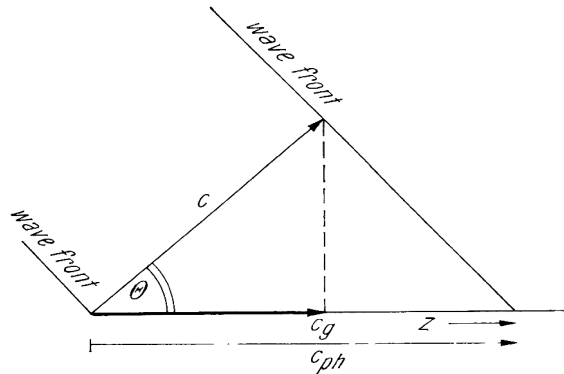
Η ομαδική ταχύτητα c_g είναι η προβολή της ταχύτητας με την οποία πραγματικά ταξιδεύει το κύμα, στη διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας (δηλαδή του ήχου).

Φασική ταχύτητα (phase speed)

Η ταχύτητα που περιγράφει το πόσο γρήγορα διαδίδεται το κομβικό ή φασικό μοτίβο στην διεύθυνση z , καλείται φασική ταχύτητα [AAA]. Στην περίπτωση του καναλιού, το κυματικό μοτίβο στην διεύθυνση z περιγράφεται από το k_z . Έτσι, αν γράψουμε:

$$k_z = \frac{\omega}{c_{ph}} \Rightarrow c_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k} \left(\frac{k}{k_z} \right) = \frac{c}{n_z} \quad (7.26)$$

το c_{ph} παριστάνει τη φασική ταχύτητα κατά την διεύθυνση z . Στο σχήμα 7.2 μπορεί κανείς να αποσαφηνίσει τη σχέση μεταξύ ηχητικής, ομαδικής και φασικής ταχύτητας.



Σχέση μεταξύ ηχητικής c , ομαδικής c_g και φασικής c_{ph} ταχύτητας [AAA].

7.3 Διαδιδόμενα κύματα και πεδία διαταραχών

Η λύση (7.1) για το δισδιάστατο κανάλι μπορεί να γραφεί και ως:

$$\vec{p} = \sum_n A_n \cos \frac{n\pi x}{l_x} e^{-jk_z z} \quad (7.27)$$

Για χαμηλές συχνότητες μόνο ο όρος $n = 0$ παριστάνει οδεύον κύμα και για $n = 0$ ισχύει: $k_z = k$. Οι όροι $n > 0$ διέπονται από τη συνθήκη:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \pm j\sqrt{k_x^2 - k^2} \pm jk\sqrt{\left(\frac{k_x}{k}\right)^2 - 1} = \pm jk\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{k^2 l_x^2} - 1} \quad (7.28)$$

καθώς στις χαμηλές συχνότητες ισχύει $k_x > k$ για $n > 0$ και

$$\vec{p} = p_0 \cos k_x x \cdot e^{(\pm)k_z z + j\omega t} \quad (7.29)$$

Κατά συνέπεια, οι όροι $n > 0$ παριστάνουν μη διαδιδόμενες διαταραχές του ηχητικού πεδίου που εξασθενούν απότομα (εκθετικά) με την απόσταση. Αυτοί οι όροι ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες σε ανώμαλες περιοχές του καναλιού ή στα άκρα του.

Όταν ο κυματικός αριθμός παίρνει την τιμή που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{\pi^2}{k^2 l_x^2} - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi}{l_x} \quad (7.30)$$

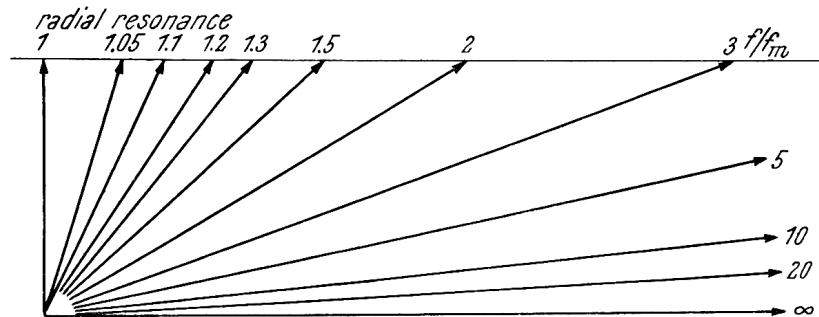
ή όταν ισχύει:

$$\omega = \omega_1 = \frac{\pi c}{l_x}, \quad f = f_1 = \frac{c}{2l_x}, \quad \lambda = \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = 2l_x \quad (7.31)$$

ο κυματικός αριθμός k_z γίνεται πραγματικός για $n = 1$ και ο τρόπος $n = 1$ γίνεται ένα διαδιδόμενο κύμα. Η συχνότητα f_1 αποτελεί τη συχνότητα συντονισμού του πλάτους του καναλιού. Το πλάτος του

καναλιού, σύμφωνα με την τελευταία εκ των (7.31) είναι ίσο με το μισό του μήκους κύματος. Επίσης, για τη συχνότητα f_1 είναι $k_z = n_z k = 0$ και οι συνιστώσες του διαδιδόμενου κύματος που αφορούν τον όρο $n = 1$ διαδίδονται κάθετα προς τα τοιχώματα του καναλιού.

Καθώς η f_1 αυξάνει, τότε και τα n_z και $k_z = n_z k$ αυξάνουν, με συνέπεια να στρέφεται η διεύθυνση της διάδοσης ολοένα προς τον άξονα του καναλιού, όπως φαίνεται κατατοπιστικά στο σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3

Διεύθυνση διάδοσης των ηχητικών κυμάτων μέσα σε ένα πλατύ κανάλι για διαφορετικές συχνότητες f/f_m [AAA].

Αν ο κυματικός αριθμός λάβει την τιμή για $n = 2$, δηλαδή:

$$\frac{2^2 \pi^2}{k^2 l_x^2} - 1 = 0 \quad (7.32)$$

και

$$k_z = \frac{2\pi}{l_x}, \quad f_2 = \frac{c}{l_x}, \quad \lambda_2 = l_x \quad (7.33)$$

τότε έχουμε συντονισμό ξανά ως προς το πλάτος (διεύθυνση x) και καθώς αυξάνεται ο k , η διεύθυνση διάδοσης στρέφεται προς τον άξονα z , όπως στο σχήμα 7.3.

Καταλήγουμε λοιπόν στο γενικό συμπέρασμα ότι οι τρόποι πάνω από τον n -οστό τρόπο γίνονται διαδιδόμενοι τρόποι όταν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$f \geq f_n = \frac{nc}{2l_x} \quad \text{ή} \quad \lambda_n \leq \frac{2l_x}{n} \quad (7.34)$$

Αν επιβάλλουμε έναν ημιτονοειδή παλμό σε ένα από τα δύο κλειστά άκρα ενός σωλήνα, ο παλμός θα διαδοθεί διαμέσου του σωλήνα και να ανακλάται κάθε φορά που θα προσκρούει σε άκρο. Αν η συχνότητα είναι κάτω από τη χαμηλότερη εγκάρσια (ακτινική) συχνότητα συντονισμού του σωλήνα, τότε δύναται να υπάρχουν μόνο επίπεδα ακουστικά κύματα εντός του σωλήνα. Όμως, αν η συχνότητα είναι πάνω από τη χαμηλότερη εγκάρσια συχνότητα συντονισμού, ένας ή περισσότεροι κανονικοί τρόποι μπορούν να διεγερθούν ταυτόχρονα. Οι τρόποι αυτοί ταξιδεύουν σε διαφορετικές διευθύνσεις, σχηματίζοντας αντίστοιχες γωνίες με τον άξονα z και έχουν διαφορετικές ομαδικές ταχύτητες. Το αποτέλεσμα είναι να εμπλέκονται όλοι οι διεγερμένοι τρόποι μεταξύ τους και τελικά το κύμα να διασπείρεται και να αποσβένεται γρήγορα.

7.4 Ορθογωνικός κυματοδηγός

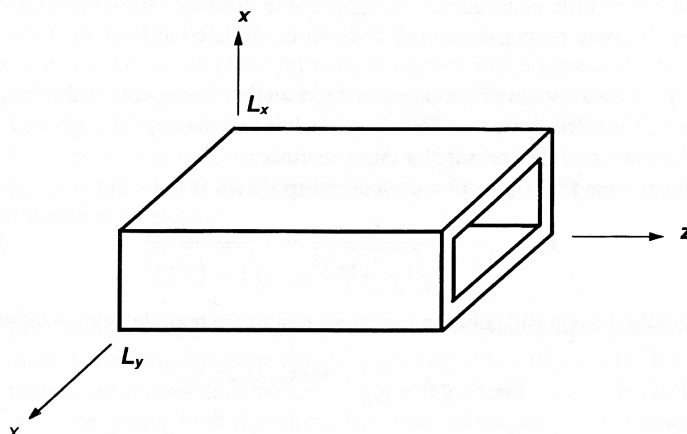
Ο ορθογωνικός κυματοδηγός είναι ένας αγωγός απείρου μήκους ορθογωνικής διατομής, ώστε εκτός απ' το πλάτος, και το ύψος να λαμβάνεται υπ' όψη (σχήμα 7.4). Η διαδικασία υπολογισμού των

συχνοτήτων είναι παρόμοια με πριν, με τη διαφορά ότι προστίθεται ο παράγοντας γινομένου $\cos k_y y$ στη λύση (7.10). Έτσι η λύση παίρνει τη μορφή:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 \cos k_x x \cos k_y y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (7.35)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση στην (7.3), λαμβάνουμε τη σχέση μεταξύ των κυματικών αριθμών:

$$k_z^2 + k_x^2 + k_y^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (7.36)$$



Σχήμα 7.4

Ορθογώνιος κυματοδηγός απείρου μήκους.

Ισχύουν:

$$k_{xm} = \frac{n\pi}{l_x} \text{ και } k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y}, \quad \text{με } n, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.37)$$

Η συχνότητα πάνω από την οποία οι τρόποι n, m μπορούν και διαδίδονται υπολογίζεται ως εξής:

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0 \quad (7.38)$$

ή

$$1 = \sqrt{\frac{k_x^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2}} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}, \quad n_z = 0 \quad (7.39)$$

και τελικά:

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_y}\right)^2} \quad \text{και} \quad f_{nm} = \frac{c}{\lambda_{nm}} = \frac{2c}{\sqrt{\left(\frac{n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_y}\right)^2}} \quad (7.40)$$

Οι τρόποι $n > 0$ και $m > 0$ διαδίδονται σε μία διεύθυνση που δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{k_x}{k_y} = \frac{n l_y}{m l_x} \quad (7.41)$$

7.5 Ακουστικοί σωλήνες

Η μεγάλη διαφορά των ακουστικών σωλήνων με τους κυματοδηγούς είναι ότι στους πρώτους ο ήχος διαδίδεται μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα, δηλαδή τα ηχητικά κύματα είναι επίπεδα.

Θεωρούμε ότι οι ακουστικοί σωλήνες είναι γεμισμένοι με αέρα. Ο αέρας που περιέχεται μέσα στον σωλήνα καλείται *αέρια στήλη*. Η αέρια στήλη, λόγω των ιδιοτήτων του αέρα, αποτελεί ένα ενιαίο σύνολο μάζας και ενδοτικότητας (ελαστικότητας ή αντίστροφα ακαμψίας) [RR] και όπως σχολιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορεί να διεγερθεί όπως θα διεγείραμε ένα συζευγμένο σύστημα απειροστών μαζών. Στον ακουστικό σωλήνα η ενεργοποιημένη συχνότητα είναι χαμηλότερη και από τις δύο εγκάρσιες συχνότητες συντονισμού, αν πρόκειται για ορθογώνιο σωλήνα ή από την ακτινική, αν πρόκειται για κυλινδρικό. Συνεπώς, ένας κυματοδηγός για ενεργοποιημένες συχνότητες κάτω από τις εγκάρσιες, μπορεί να αποτελέσει ακουστικό σωλήνα και αντίστροφα, ένας ακουστικός σωλήνας με ενεργοποιημένη συχνότητα πάνω απ' τις εγκάρσιες μεταβαίνει στη λειτουργία του κυματοδηγού. Όσο λοιπόν οι δύο διαστάσεις ενός κυματοδηγού μειώνονται κατά πολύ σε σχέση με τη μία, τότε μεταβαίνουμε σε ακουστικό σωλήνα και αντίστροφα.

7.6 Σωλήνας απείρου μήκους

Το απλούστερο σύστημα εντός του οποίου διαδίδεται ο ήχος είναι ένας κυλινδρικός σωλήνας απείρου μήκους, που ο άξονάς του είναι παράλληλος στη διεύθυνση της διάδοσης του επίπεδου (ακουστικού) κύματος (κατεύθυνση x). Το τοίχωμα θεωρείται κατά τα γνωστά άκαμπτο, λείο και θερμικά μονωμένο, ώστε ο σωλήνας ο ίδιος να μην έχει καμία επίδραση στη διάδοση του κύματος. Κινώντας ένα πιστόνι κατά τη x κατεύθυνση, προκύπτει ένα κύμα πίεσης που μπορεί να εκφρασθεί από την εξίσωση:

$$\bar{p}(x,t) = p_0 \exp[j(\omega t - kx)] \quad (7.42)$$

όπου p_0 είναι το μέγιστο πλάτος της πίεσης.

Η ροή του όγκου δίνεται από την εξίσωση:

$$U(x,t) = \frac{p_0 S}{\rho c} \exp[j(\omega t - kx)] \quad (7.43)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ ο κυματικός αριθμός, S η διατομή του σωλήνα, ρ η πυκνότητα του αέρα και c η ταχύτητα του ήχου.

Εφαρμόζοντας τη θεωρία της ενότητας 7.4 σε κυλινδρική διατομή, μπορούμε να πούμε ότι ο χαμηλότερος τρόπος συντονισμού του ακουστικού σωλήνα απείρου μήκους παύει να είναι επίπεδο κύμα όταν [AAA]:

$$2r = 0,586\lambda = \frac{1}{2}\lambda \cdot 1,172 \approx \frac{1}{2}\lambda \quad (7.44)$$

ή

$$\frac{1}{2}\lambda = 0,85 \cdot 2r \quad (7.45)$$

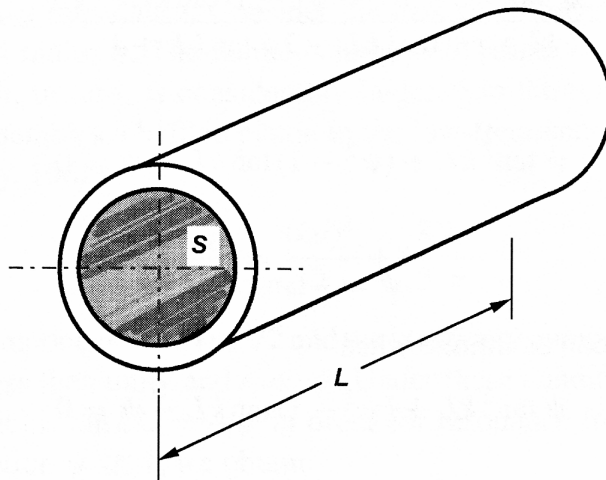
Όπου r η ακτίνα του σωλήνα. Δηλαδή όταν το μήκος κύματος είναι ελαφρά μικρότερο από τη διάμετρο του σωλήνα, τότε το κύμα δεν είναι επίπεδο.

7.7 Σωλήνας με κλειστό το ένα άκρο

Θεωρούμε έναν σωλήνα πεπερασμένου μήκους L και διατομής S γεμισμένο με αέρα και με κλειστό το ένα του άκρο. Ο σωλήνας είναι παράλληλος στη x διεύθυνση και το κλειστό άκρο βρίσκεται για $x=L$ (σχήμα 7.5). Στη θέση $x=0$ ένα πιστόνι δίνει κίνηση στον περιεχόμενο αέρα. Το ρευστό όπως περιορίζεται μέσα στο χώρο του σωλήνα, εμποδίζεται στην κίνηση του και σύμφωνα με τα όσα ελέγχθησαν στο κεφ. 6, ο σωλήνας παρουσιάζει μία μηχανική εμπέδηση στην κίνηση του ρευστού, που συμ-

βολίζεται με \vec{Z}_{nL} . Έστω ότι το πιστόνι παλινδρομεί αρμονικά σε τόσο χαμηλή συχνότητα ώστε να θεωρούμε ότι μόνον επίπεδα κύματα δύνανται να δημιουργούνται εντός του σωλήνα. Τα κύματα μέσα στο σωλήνα μπορούν να περιγραφούν απ' την ακόλουθη εξίσωση:

$$\vec{p} = \vec{A}e^{j[\omega t + k(L-x)]} + \vec{B}e^{j[\omega t - k(L-x)]} \quad (7.46)$$



Σχήμα 7.5

Σωλήνας μήκους L με κλειστό το άκρο για $x=L$.

Οι σύνθετες σταθερές \vec{A} και \vec{B} προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες στα $x=0$ και $x=L$. Για $x=L$ η μηχανική εμπέδηση του κύματος πρέπει να ισούται με τη μηχανική εμπέδηση του σωλήνα \vec{Z}_{nL} στο κλειστό άκρο, ώστε να διατηρείται η συνέχεια της δύναμης και των στοιχειωδών σωματιδίων του ρευστού. Η δύναμη του ρευστού που δρα στο κλειστό άκρο του σωλήνα είναι $\vec{p}(L,t)S$ και η αντίστοιχη ταχύτητα των στοιχείων του ρευστού προκύπτει από την εξίσωση (2.37) ως:

$$u = -\int \frac{1}{\rho} \delta \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dt \quad (7.47)$$

Η μηχανική εμπέδηση \vec{Z}_n , που εκφράζεται ως

$$\vec{Z}_n = \frac{\vec{f}}{\vec{u}} \quad (7.48)$$

αναπαριστά έναν σύνθετο αριθμό που προκύπτει από το λόγο της διεγείρουσας δύναμης \vec{f} του συστήματος (διανυσματικό μέγεθος) προς την ταχύτητα \vec{u} του σημείου στο οποίο επιβάλλεται η δύναμη αυτή (επίσης διανυσματικό μέγεθος). Για την περίπτωση μας όπου ο σωλήνας έχει πεπερασμένο μήκος, η εμπέδηση στη θέση $x=L$ δίνεται από την έκφραση [TT]:

$$\vec{Z}_{nL} = \rho_0 c S \frac{\vec{A} + \vec{B}}{\vec{A} - \vec{B}} \quad (7.49)$$

Ενώ στη θέση $x=0$ η εμπέδηση είναι:

$$\vec{Z}_{n0} = \rho_0 c S \frac{\vec{A}e^{ikL} + \vec{B}e^{-ikL}}{1 + \frac{i\vec{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} \tan kL} \quad (7.50)$$

Απαλείφοντας τα A και B από τις εξισώσεις (7.49) και (7.50) λαμβάνουμε:

$$\frac{\bar{Z}_{n0}}{\rho_0 c S} = \frac{\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} + i \tan kL}{1 + \frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} \tan kL} \quad (7.51)$$

Ο όρος $\rho_0 c S$ είναι η χαρακτηριστική (μηχανική) εμπέδηση του ρευστού πυκνότητας ρ_0 για τη διατομή S του σωλήνα.

Μπορούμε να αναλύσουμε τη σύνθετη (μιγαδική) ποσότητα \bar{Z}_{n0} σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} = \text{Re} + j \text{Im} \quad (7.52)$$

Ο λόγος στο αριστερό μέρος της προηγούμενης εξίσωσης συνιστά μία *κανονικοποιημένη* εμπέδηση [QQ].

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Z}_{n0}}{\rho_0 c S} &= \frac{(\text{Re} + j \text{Im}) + j \tan kL}{1 + j(\text{Re} + j \text{Im}) \tan kL} \\ \Rightarrow \frac{\bar{Z}_{n0}}{\rho_0 c S} &= \frac{\text{Re}(\tan^2 kL + 1) - j[\text{Im} \tan^2 kL + (\text{Re}^2 + \text{Im}^2 - 1) \tan kL - \text{Im}]}{(\text{Im}^2 + \text{Re}^2) \tan^2 kL - 2 \text{Im} \tan kL + 1} \end{aligned} \quad (7.53)$$

Όταν $\text{Re}=0$ τότε η εμπέδηση μηδενίζεται όταν μηδενίζεται η αντίδραση (reactance), έτσι:

$$\frac{-[\text{Im} \tan^2 kL + (\text{Re}^2 + \text{Im}^2 - 1) \tan kL - \text{Im}]}{(\text{Im}^2 + \text{Re}^2) \tan^2 kL - 2 \text{Im} \tan kL + 1} = 0 \quad (7.54)$$

Το παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$\text{Im} \tan^2 kL + (\text{Im}^2 - 1) \tan kL - \text{Im} = 0 \quad (7.55)$$

και προκύπτει:

$$\text{Im} = -\tan kL$$

Διατηρώντας το $\text{Re}=0$, η εμπέδηση απειρίζεται όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής της (7.53), δηλαδή:

$$(\text{Im}^2 + \text{Re}^2) \tan^2 kL - 2 \text{Im} \tan kL + 1 = 0 \quad (7.56)$$

Προκύπτει:

$$\text{Im} = \cot kL \quad (7.57)$$

Έστω τώρα η περίπτωση μίας σταθερής δύναμης που ασκείται στο σημείο $x=0$. Λόγω του ανοικτού άκρου, η εμπέδηση είναι μηδενική εκεί και λαβαίνοντας υπ' όψη τη συσχέτιση (7.48), συμπεραίνουμε ότι το πλάτος της ταχύτητας θα είναι άπειρο στο ανοικτό άκρο, κάτι που οδηγεί σε μηχανικό συντονισμό (resonance) [TT]. Αντιστρόφως, όταν η εμπέδηση τείνει στο άπειρο, όπως συμβαίνει στο κλειστό άκρο, το πλάτος της ταχύτητας τείνει στο μηδέν, κάτι που οδηγεί σε συνθήκη αντισυντονισμού (antiresonance condition) [TT]. Για να πάρουμε μία σχέση που περιγράφει το συντονισμό σε έναν σω-

λήνα που διεγείρεται στη θέση $x=0$ και είναι κλειστός στο άκρο $x=L$, θεωρούμε ότι η κανονικοποιημένη εμπέδηση $\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S}$ τείνει στο άπειρο, ώστε

$$\frac{\bar{Z}_{n0}}{\rho_0 c S} = -j \cot kL \quad (7.58)$$

Η αντίδραση γίνεται μηδενική όταν $\cot kL = 0$, δηλαδή:

$$k_n L = (2n-1)\pi/2, \quad \text{όπου } n=1,2,3,\dots \quad (7.59)$$

Από τη σχέση (7.59) παίρνουμε όλες τις συχνότητες για τις οποίες συμβαίνει συντονισμός.

$$f_n = \frac{2n-1}{4} \frac{c}{L} \quad (7.60)$$

Διαπιστώνουμε ότι μόνον περιττές αρμονικές μπορούν να συντονίσουν την αέρια στήλη του σωλήνα, η οποία υπόκειται σε δεσμό πίεσης στη θέση $x=0$ και αντίδεσμο ή κοιλία στη θέση $x=L$.

7.8 Σωλήνας πλήρως ανοικτός

Έστω τώρα ένας σωλήνας ανοικτός και στα δύο του άκρα. Η εμπέδηση \bar{Z}_{nL} στη θέση $x=L$ είναι μηδενική, όπως και στη θέση $x=0$. Προκύπτει τότε:

$$f_n = n \frac{c}{2L} \quad (7.61)$$

Αντίστοιχα, τα μήκη κύματος για τα οποία συμβαίνει συντονισμός θα δίνονται από τη σχέση:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Δηλαδή, σε έναν ανοικτό σωλήνα περιέχεται μισό μήκος στάσιμου κύματος θεμελιώδους συχνότητας. Καθώς η εμπέδηση είναι μηδενική στα άκρα, από τον ορισμό της συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα των σωματιδίων θα είναι μέγιστη και η διαφορά πίεσης (διεγείρουσα δύναμη) μηδενική. Η μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων στα άκρα θα είναι επίσης μέγιστη (όρια της ταλάντωσής τους).

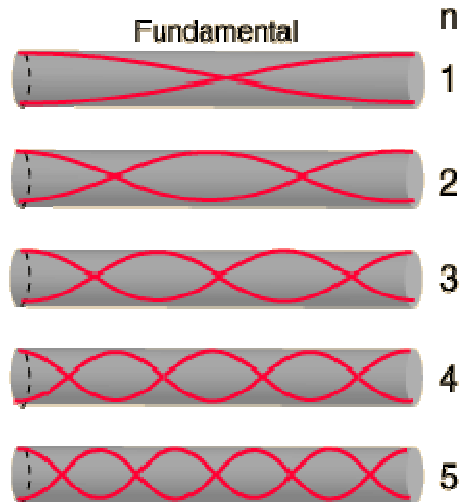
Όταν η μετατόπιση είναι μέγιστη και η διαφορά πίεσης μηδενική, τότε λέμε ότι έχουμε κοιλία (antinode) του κύματος ή δεσμό (node) πίεσης. Αντιστρόφως, όταν η μετατόπιση είναι μηδενική και η διαφορά πίεσης μέγιστη, λέμε ότι έχουμε δεσμό του κύματος και κοιλία πίεσης. Στο δεσμό κύματος τα σωματίδια του αέρα παραμένουν ακίνητα. Εποπτικά, μπορούμε να δούμε τις κοιλίες και τους δεσμούς κύματος και πίεσης στην εικόνα 7.6, για τις πρώτες 5 συχνότητες συντονισμού, όπου για διευκόλυνση τα κύματα έχουν σχεδιαστεί εγκάρσια και όχι διαμήκη, όπως είναι στην πραγματικότητα.

Παρόλο που η σχέση (7.61) είναι φαινομενικά σωστή, δεν μπορεί να δώσει με ακρίβεια τις πραγματικές συχνότητες συντονισμού, γιατί το ανοικτό άκρο ακτινοβολεί ήχο στον περιβάλλοντα αέρα, τροποποιώντας το ενεργό μήκος L το σωλήνα.

Στην πραγματικότητα λοιπόν η \bar{Z}_{nL} δεν είναι μηδενική, αλλά ισούται με μία εμπέδηση ακτινοβολίας \bar{Z}_{rad} :

$$\bar{Z}_{nL} = \bar{Z}_{rad} \quad (7.62)$$

Αν ο σωλήνας καταλήγει σε χωνί, όπως η καμπάνα (flange) των χάλκινων πνευστών, τότε η \bar{Z}_{nL} επηρεάζεται ακόμη περισσότερο.



Εικόνα 7.6

Στάσιμα κύματα των 5 πρώτων συντονισμών ακουστικού σωλήνα ανοικτού και στα δύο άκρα.

Έστω ένας σωλήνας ακτίνας r που καταλήγει σε καμπάνα. Η ακτίνα της καμπάνας είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος του ηχητικού κύματος που δημιουργείται στο σωλήνα, ενώ η ακτίνα του σωλήνα είναι πολύ μικρότερη από αυτό. Ισχύει η παρακάτω σχέση [ΤΤ]:

$$\frac{\bar{Z}_{nl}}{\rho_0 c S} = \frac{(kr)^2}{2} + i \frac{8kr}{3\pi} \quad (7.63)$$

όπου:

$$\text{Re} = \frac{(kr)^2}{2} \quad \text{και} \quad \text{Im} = \frac{8kr}{3\pi}$$

Τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος είναι κατά πολύ μικρότερα της μονάδας. Επίσης $\text{Re} \ll \text{Im}$. Με αυτές τις συνθήκες η λύση της (7.54) δίνει $\tan kL = -\text{Im}$, για να υπάρξει συντονισμός. Με την παραδοχή $\text{Im} \ll 1$ έχουμε:

$$\tan(n\pi - k_n L) = \frac{8}{3\pi} \approx \tan \frac{8kr}{3\pi} \quad n=1,2,3,\dots \quad (7.64)$$

Λύνοντας την εξίσωση παίρνουμε:

$$n\pi = k_n L + \frac{8k_n r}{3\pi} \quad (7.65)$$

Προκύπτουν έτσι οι συχνότητες συντονισμού:

$$f_n = \frac{n}{2} \frac{c}{L + \frac{8}{3\pi} r} \quad (7.66)$$

Όλες οι συχνότητες συντονισμού είναι αρμονικά πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Το άθροισμα $L + 8r/3\pi$ παριστάνει το ενεργό μήκος του σωλήνα, λίγο μεγαλύτερο απ' το πραγματικό.

Στην περίπτωση που ο σωλήνας είναι απόλυτα κυλινδρικός και δεν καταλήγει σε καμπάνα (unflanged pipe) η εμπέδηση ακτινοβολήσης όπως προκύπτει τόσο από τη θεωρία όσο και από πειράματα [TT] είναι:

$$\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} = \frac{(kr)^2}{4} + i(0,6kr) \quad (7.67)$$

Εδώ η διόρθωση μήκους είναι $0,6r$ και κατά συνέπεια το ενεργό μήκος του σωλήνα: $L + 0,6r$. Σε πρώτη φάση μπορούμε να πούμε πως η διόρθωση μήκους δεν εξαρτάται από τη συχνότητα. Θα δούμε όμως αργότερα ότι υπάρχει εξάρτηση που επανακαθορίζει τις συχνότητες συντονισμού.

Με την προϋπόθεση ότι $r \ll \lambda n$ (όπου λ το μήκος κύματος), οι συχνότητες συντονισμού ενός flanged και ενός unflanged ακουστικού σωλήνα, αποτελούν αρμονικές της θεμελιώδους. Συνεπώς, η συχνότητα διέγερσης ενός πλήρως ανοικτού σωλήνα προκαλεί συντονισμούς που έχουν αρμονική σχέση με αυτή.

Όταν τώρα ο σωλήνας εμφανίζει κωνικότητα και δεν είναι απόλυτα κυλινδρικός (flared pipe), όπως συμβαίνει με το κλαρινέτο ή το όμποε, τα αποτελέσματα τροποποιούνται και οι συντονισμοί δεν βρίσκονται σε συχνότητες αρμονικές προς τη θεμελιώδη. Ο κατασκευαστής ενός τέτοιου μουσικού οργάνου μπορεί να σχεδιάσει έτσι το σωλήνα ώστε να ενισχύσει ή να ατονήσει συγκεκριμένες αρμονικές.

7.9 Ενεργειακή ακτινοβολήση από πλήρως ανοικτούς σωλήνες

Από την εξίσωση (7.49) μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} - 1}{\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} + 1} \quad (7.68)$$

Όταν γνωρίζουμε την εμπέδηση \bar{Z}_{nL} μπορούμε να εισάγουμε τον συντελεστή μεταφοράς ισχύος T_n (power transmission coefficient):

$$T_n = 1 - \left| \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \right|^2 \quad (7.69)$$

Με χρήση της εξίσωσης (7.67) στην (7.68), λαμβάνουμε για τους πλήρως ανοικτούς σωλήνες:

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{\left[1 - \frac{(kr)^2}{2} \right] - j \frac{8kr}{3\pi}}{\left[1 + \frac{(kr)^2}{2} \right] + j \frac{8kr}{3\pi}} \quad (7.70)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.69) προκύπτει:

$$T_n = \frac{2(kr)^2}{\left[1 + \frac{(kr)^2}{2} \right]^2 + (kr)^2 \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2} \quad (7.71)$$

Συνήθως $kr \ll 1$, ώστε ο συντελεστής μεταφοράς ισχύος είναι τότε αρκετά μικρός και δίνεται από την έκφραση (για σωλήνα με καμπάνα):

$$T_n \approx 2(kr)^2 \quad (7.72)$$

Από την εξίσωση (7.69) παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{\bar{B}}{A}$ είναι σχεδόν ίσος προς -1 .

Εισάγοντας την εξίσωση (7.67) που περιγράφει τον unflanged σωλήνα, στην εξίσωση (7.68) παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για το συντελεστή μεταφοράς ισχύος:

$$T_n = \frac{(kr)^2}{\left[1 + \frac{(kr)^2}{4}\right]^2 + (0,6kr)^2} \approx (kr)^2 \quad (7.73)$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (7.71) και (7.73), διαπιστώνουμε ότι η προσθήκη καμπάνας στο ανοικτό άκρο ενός σωλήνα διπλασιάζει την ακτινοβολούμενη ηχητική ισχύ στις χαμηλές συχνότητες. Όταν ο σωλήνας έχει κωνικό, παρά κυλινδρικό σχήμα τότε η ακτινοβολήση είναι ακόμα πιο έντονη.

7.10 Στάσιμα κύματα στους ακουστικούς σωλήνες

Η διαφορά φάσης μεταξύ διαδιδόμενων και ανακλώμενων κυμάτων μέσα σε έναν σωλήνα οδηγεί σε αύξηση του πλάτους ενός ανακλώμενου κύματος. Οι ιδιότητες των στάσιμων κυμάτων μπορούν να εφαρμοστούν σαν ένδειξη της αντίστασης εισόδου.

Στην εξίσωση (7.46) που περιγράφει το κύμα εντός του σωλήνα μπορούμε να θέσουμε:

$$\bar{A} = A, \quad \bar{B} = Be^{i\theta} \quad (7.74)$$

όπου A και B πραγματικοί θετικοί αριθμοί.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.74) με την (7.49) παίρνουμε:

$$\frac{\bar{Z}_{nL}}{\rho_0 c S} = \frac{1 + \frac{B}{A} e^{i\theta}}{1 - \frac{B}{A} e^{i\theta}} \quad (7.75)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5) στην εξίσωση πίεσης:

$$\bar{p} = \bar{A} e^{i[\omega t + k(L-x)]} + \bar{B} e^{i[\omega t - k(L-x)]},$$

μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της πίεσης του κύματος: $p = |\bar{p}|$

$$p = \sqrt{(A+B)^2 \cos^2[k(L-x) - \theta/2] + (A-B)^2 \sin^2[k(L-x) - \theta/2]} \quad (7.76)$$

Στην κοιλία κίνησης του στάσιμου κύματος το μέτρο της πίεσης είναι $A+B$, ενώ στο δεσμό κίνησης $A-B$. Ο λόγος στάσιμου κύματος SWR (standing wave ratio) προκύπτει απ' το λόγο των δύο αυτών μέτρων της πίεσης:

$$SWR = \frac{A+B}{A-B} \quad \text{ή} \quad \frac{B}{A} = \frac{SWR-1}{SWR+1} \quad (7.77)$$

Ο λόγος B/A μπορεί να μετρηθεί. Η φάση θ μπορεί να βρεθεί μετρώντας την απόσταση του πρώτου δεσμού απ' τη θέση $x=L$. Σύμφωνα με την εξίσωση (7.76) οι δεσμοί βρίσκονται στη θέση:

$$k(L-x_n) - \frac{\theta}{2} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (7.78)$$

Για τον πρώτο δεσμό ($n=1$) έχουμε:

$$\theta = 2k(L - x_1) - \pi \quad (7.79)$$

7.11 Δοχείο Helmholtz

Για να αναλύσουμε πολλές ακουστικές διατάξεις, δεχόμαστε την απλοποίηση ότι το μήκος κύματος του ήχου που δημιουργείται είναι πολύ μεγαλύτερο από κάποιες από τις διαστάσεις της διάταξης. Έτσι έγινε με τους ακουστικούς σωλήνες, όπου το μήκος κύματος ξεπερνά κατά πολύ την ακτίνα, ακόμα και την περιφέρεια της διατομής του σωλήνα. Υπάρχουν διατάξεις όπου το μήκος κύματος υπερκαλύπτει όλες τις διαστάσεις της διάταξης. Σε αυτή την περίπτωση, οι ακουστικές μεταβλητές ενός στοιχείου του ρευστού που περιέχεται μπορεί να μεταβάλλονται χρονικά, αλλά δεν εξαρτώνται από τη θέση του στοιχείου. Μία τέτοια διάταξη μπορεί να θεωρηθεί ως αρμονικός ταλαντωτής με έναν βαθμό ελευθερίας και μπορεί να ονομασθεί

συγκεντρωμένο ακουστικό στοιχείο (lumped acoustic element). Το πιο άμεσο παράδειγμα είναι το δοχείο ή ο συντονιστής Helmholtz. Στην εικόνα 7.7 εικονίζονται τρεις τύποι αυτής της διάταξης. Το δοχείο Helmholtz αποτελείται από μία άκαμπτη χωρητικότητα V και έναν λαιμό διατομής A και μήκους L . Ένα μπουκάλι είναι κλασική περίπτωση δοχείου Helmholtz.

Με την παραδοχή $\lambda \gg L$ το ρευστό εντός του λαιμού συμπεριφέρεται ως μία συμπαγής μάζα που παλινδρομεί κατακορύφως. Καθώς το ρευστό (συνήθως αέρας) κινείται με αυτόν τον τρόπο, η ακουστική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα εξ' αιτίας των φαινομένων συνεκτικότητας. Οι απώλεια αυτή μπορεί να αυξηθεί τοποθετώντας ένα πορώδες υλικό εγκάρσια στο λαιμό ή τοποθετώντας το υλικό εντός της κοιλότητας. Η ποσότητα τώρα του ρευστού εντός του λαιμού και η ποσότητα εντός της κοιλότητας συνιστούν ένα σύστημα αντίστοιχο με το ελατήριο και τη μάζα [RR].

Όπως στο ελατήριο, το ρευστό (αέρας) της κοιλότητας παρουσιάζει ελαστικότητα και θέτει σε ταλάντωση τον αέρα του λαιμού. Η μεγαλύτερη ακουστική απορρόφηση (sound absorption) συντελείται για τη συχνότητα συντονισμού του συστήματος λαιμού-κοιλότητας. Σε άλλες συχνότητες παρατηρείται ελάχιστη ακουστική απορρόφηση. Για λαιμούς όμως διαμέτρου μεγαλύτερης του 1 cm οι απώλειες συνεκτικότητας είναι σημαντικά μικρότερες από τις απώλειες ηχητικής ακτινοβόλησης. Για να αναλύσουμε λοιπόν τη συμπεριφορά του συντονιστή Helmholtz μπορούμε να αμελήσουμε τις συνεκτικές απώλειες, ώστε το σύστημα να είναι ακριβώς το ανάλογο ελατηρίου-μάζας στην ακουστική.

Ξεκινάμε να υπολογίσουμε την ενεργή μάζα στο λαιμό:

$$m = \rho_0 A L_{eff} \quad (7.80)$$

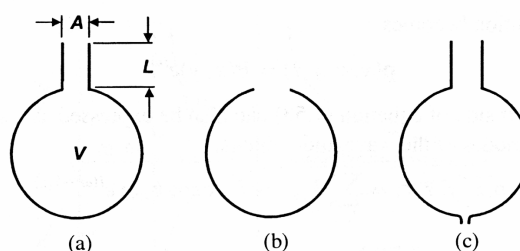
όπου ρ_0 η πυκνότητα του ρευστού και L_{eff} το ενεργό μήκος του λαιμού, μεγαλύτερο απ' το γεωμετρικό L , εξ' αιτίας του φορτίου ακτινοβόλησης που επιβάλλει η μάζα. Ο λαιμός μπορεί να εμφανίζει φλάντζα ή όχι. Αντίστοιχα λοιπόν το ενεργό μήκος δίνεται απ' τις παρακάτω σχέσεις [TT]:

$$L_{eff} = L + 1,7r, \quad (\text{άκρο με φλάντζα}) \quad (7.81)$$

$$L_{eff} = L + 1,5r, \quad (\text{άκρο χωρίς φλάντζα}) \quad (7.82)$$

Θεωρούμε τώρα ότι στο λαιμό του δοχείου παλινδρομεί ένα πιστόνι. Όταν το πιστόνι διανύει απόσταση x , ο όγκος της κοιλότητας μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta V = -xS \quad (7.83)$$



Εικόνα 7.7

Τύποι δοχείου Helmholtz

όπου S η σταθερά ελαστικότητας ή αλλιώς ενεργός ακαμπτότητα (effective stiffness) του ρευστού στην κοιλότητα (που συμπεριφέρεται ως ελατήριο). Μπορούμε να γράψουμε τότε:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = \frac{Ax}{V} \quad (7.84)$$

από τη θερμοδυναμική [TT]:

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\Delta p}{p} \quad (7.85)$$

με c την ταχύτητα του ήχου.

Απ' τις δύο τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$p = \rho_0 c^2 \frac{Ax}{V} \quad (7.86)$$

Το πιστόνι διήνυσε την απόσταση x υπό την επιβολή μίας δυνάμεως F :

$$F = pA = \rho_0 c^2 \frac{A^2}{V} x \quad (7.87)$$

Η ενεργός ακαμπτότητα, κατά το νόμο Hooke είναι $S = F/x$. Άρα:

$$S = \rho_0 c^2 \frac{A^2}{V} \quad (7.88)$$

Καθώς το ρευστό κινείται στο λαιμό ακτινοβολεί ηχητική ενέργεια γύρω στο τοίχωμα που, όπως και στον ακουστικό σωλήνα. Για μήκη κύματος πολύ μεγαλύτερα της ακτίνας του λαιμού, η αντίσταση ακτινοβολήσης είναι:

$$R_{rad} = \rho_0 c \frac{kA^2}{2\pi} \quad (\text{με φλάντζα}) \quad (7.89)$$

$$R_{rad} = \rho_0 c \frac{kA^2}{4\pi} \quad (\text{χωρίς φλάντζα}) \quad (7.90)$$

Όταν το πιστόνι λοιπόν παλινδρομεί, η δύναμη F καλείται διεγείρουσα δύναμη και λαμβάνει διανυσματική μορφή με μεταβαλλόμενη φορά πάνω στην ίδια διεύθυνση, αυτή του άξονα του λαιμού. Τότε η δύναμη μπορεί να γραφεί με μορφή σύνθετου εκθετικού (κεφ. 4) με πλάτος πίεσης P :

$$\vec{F} = AP \exp(j\omega t) \quad (7.91)$$

Το σύστημά του δοχείου Helmholtz περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R_{rad} \frac{dx}{dt} + Sx = AP \exp(j\omega t) \quad (7.92)$$

Η εξίσωση είναι ανάλογη με έναν μηχανικό ταλαντωτή μίας μάζας, που διεγείρεται ημιτονοειδώς, και αναλύθηκε εκτενώς στο κεφάλαιο 6. Η λύση της (7.92) περιέχει μία σύνθετη μετατόπιση x . Το πραγματικό μέρος της διεγείρουσας δύναμης αναπαριστά την κύρια διεγείρουσα δύναμη $AP \cos \omega t$ και το πραγματικό μέρος της μετατόπισης την κύρια μετατόπιση. Καθώς η \vec{F} είναι περιοδική με γωνιακή συχνότητα ω , η λύση για τη μετατόπιση θα είναι της μορφής [TT]:

$$\vec{x} = \vec{B} \exp(j\omega t) \quad (7.93)$$

όπου \bar{B} ένας σύνθετος σταθερός αριθμός. Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε:

$$(-\bar{B}\omega^2 m + j\bar{B}\omega R_{rad} + \bar{B}S) \exp(j\omega t) = AP \exp(j\omega t) \quad (7.94)$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς \bar{B} έχουμε τελικά μία έκφραση για τη σύνθετη μετατόπιση:

$$\bar{x} = \frac{AP \exp(j\omega t)}{j\omega \left[R_{rad} + j \left(m\omega - \frac{S}{\omega} \right) \right]} \quad (7.95)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (7.95) λαμβάνουμε τη σύνθετη ταχύτητα του ρευστού στο λαϊμό του δοχείου:

$$\bar{u} = \frac{\bar{A}\bar{P} \exp(j\omega t)}{\bar{R}_{rad} + j \left(m\omega - \frac{S}{\omega} \right)} \quad (7.96)$$

Η εμπέδηση $\bar{Z}_m = \bar{F} / \bar{u}$ από τις σχέσεις (7.91) και (7.96) είναι:

$$\bar{Z}_m = R_{rad} + j \left(m\omega - \frac{S}{\omega} \right) \quad (7.97)$$

Η ανάδραση της εμπέδησης (φανταστικό μέρος) είναι:

$$\text{Im}(\bar{Z}_m) = m\omega - \frac{S}{\omega} \quad (7.98)$$

Όταν μηδενίζεται η ανάδραση, τότε κατά τα γνωστά έχουμε κατάσταση συντονισμού. Προκύπτει λοιπόν η γωνιακή συχνότητα συντονισμού:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_0 c^2 A^2 / V}{\rho_0 L_{eff} A}} = c \sqrt{\frac{A}{L_{eff} V}} \quad (7.99)$$

Η αντίστοιχη συχνότητα συντονισμού είναι προφανώς:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{L_{eff} V}} \quad (7.100)$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα συντονισμού εξαρτάται από τον όγκο της κοιλότητας και το μήκος του λαϊμού. Το σχήμα λοιπόν της κοιλότητας δεν παίζει κανένα ρόλο στην παραγόμενη συχνότητα. Παράλληλα με συχνότητα f_0 στο δοχείο Helmholtz εμφανίζονται και άλλες, υψηλότερες συχνότητες, εξ' αιτίας των στάσιμων κυμάτων εντός της κοιλότητας. Οι συχνότητες αυτές δεν έχουν αρμονική σχέση με την f_0 [ΤΤ].

Γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 6 τον παράγοντα Q , που καλείται και παράγοντας ποιότητας (quality factor). Στα πνευστά χρησιμοποιείται πολύ αυτό το μέγεθος, που κατά τα άλλα εκφράζει τη «στενότητα» του συντονισμού, δηλαδή το πόσο αιχμηρή είναι η γραφική παράσταση του πλάτους της ακουστικής πίεσης.

$$Q = \frac{m\omega_0}{R_{rad}} = 2\pi \sqrt{V \left(\frac{L_{eff}}{A} \right)^3} \quad (7.101)$$

Στην εικόνα 7.7 παρατηρούμε στο τρίτο είδος δοχείου Helmholtz ότι υπάρχει ένας μικρός λαμιίσκος στη βάση της κοιλότητας και απέναντι από τον κύριο λαισμό. Ο ίδιος ο Helmholtz χρησιμοποίησε πολλά διαφορετικά δοχεία για να επιτύχει μία μεγάλη κλίμακα συχνοτήτων. Όταν ένα τυχαίο ηχητικό κύμα έχει κάποια συχνοτική συνιστώσα που συμπίπτει με τη συχνότητα συντονισμού του δοχείου Helmholtz, τότε η συνιστώσα αυτή ενισχύεται και μπορεί να ακουσθεί αν συνδέσουμε έναν σωλήνα στο λαμιίσκο και τον φτάσουμε στο αυτί μας. Τέτοια φαινόμενα μας οδηγούν στον ορισμό της *ενίσχυσης πίεσης* (pressure amplification). Το μέγεθος αυτό είναι ο λόγος του πλάτους της ακουστικής πίεσης P_{cavity} εντός της κοιλότητας προς το πλάτος της εξωτερικής πίεσης P . Από την εξίσωση (7.95) λαμβάνουμε την P_{cavity} . Στην κατάσταση συντονισμού ισχύει:

$$|\bar{x}| = \frac{PA}{\omega_0 R_{rad}} \quad (7.102)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (7.89) και (7.99) βρίσκουμε για λαίμο με φλάντζα:

$$\frac{P_{cavity}}{P} = 2\pi \sqrt{V \left(\frac{L_{eff}}{A} \right)} = Q \quad (7.103)$$

Προκύπτει δηλαδή ότι η ενίσχυση πίεσης ταυτίζεται με τον παράγοντα ποιότητας. Άρα το δοχείο Helmholtz λειτουργεί, στην κατάσταση συντονισμού, ως ενισχυτής κέρδους Q . Εφαρμογή αυτής της ιδιότητας βρίσκουμε σε ένα κοινό megάφωνο [ΓΤ].

Μέρος II

Θεωρητική Μελέτη

1

Εισαγωγικοί ορισμοί στη μουσική

1.1 Μουσική και μουσικά όργανα

Ο Nederveen στο κλασσικό πλέον βιβλίο του “Aspects of woodwind instruments” [RR], περιγράφει τη μουσική ως μία συμφωνία των αλληλοεμπλεκόμενων δονήσεων του αέρα, που παράγονται από τα μουσικά όργανα. Λεπτομερέστεροι ορισμοί και ιστορική έρευνα της μουσικής δεν έχουν θέση σε αυτή την εργασία. Αρκεί μόνο να αναφερθεί ότι η έκφραση αυτή του πολιτισμού μας είναι από τις ισχυρότερες, όσον αφορά την επίδρασή της στον άνθρωπο. Μπορεί να διαμορφώνει ή να ενισχύει συναισθήματα, να διευκολύνει την επικοινωνία, να καθοδηγεί τον ψυχισμό και τις ανθρώπινες πράξεις ή ακόμα και να θεραπεύει. Λόγω της πολύπλευρης αυτής επιρροής, η εκτίμηση των διάφορων παραμέτρων της μουσικής, χιλιάδες χρόνια τώρα είναι εφικτή κατ’ ουσίαν με υποκειμενικά κριτήρια, «με το αυτί». Χαρακτηρισμοί όπως «η λαμπρότητα» του ήχου ενός εκκλησιαστικού οργάνου ή ότι η *Σονάτα για Φλάουτο, Βιόλα και Άρπα* του C. Debussy είναι «τρομερά λυπητερή», αποτελούν κώδικα επικοινωνίας μεταξύ των μελετητών και των μουσικόφιλων, δίχως όμως να μπορούν εύκολα να ποσοτικοποιηθούν. Κατά τον 20^ο αιώνα, ανάμεσα στα άλλα, έγινε και η μεγάλη ανάπτυξη της *μουσικής ακουστικής* και *ψυχοακουστικής*. Η μουσική ακουστική προσπαθεί να περιγράψει τη λειτουργία των μουσικών οργάνων και γενικότερα της μουσικής με νόμους της ακουστικής (ήτοι της φυσικής και των μαθηματικών), γεφυρώνοντας κατά κάποιο τρόπο τις όχθες της τέχνης και της επιστήμης. Η ψυχοακουστική ασχολείται με τη μετατροπή των δονήσεων του αέρα σε σήματα εντός του ανθρώπινου αυτιού. Με άλλα λόγια, μελετά την απόκριση του ανθρώπινου εγκεφάλου στα ηχητικά σήματα, όχι απαραίτητα της μουσικής. Η συνεργασία μουσικής ακουστικής και ψυχοακουστικής έχει δώσει θεαματικά αποτελέσματα στην προσπάθεια της κατανόησης του φαινομένου της μουσικής.

Μουσική παράγουν τα μουσικά όργανα. Αυτόματα, φέρνουμε στο νου μας, όλα αυτά που κατασκευάζει ο άνθρωπος. Εντούτοις, μουσικό όργανο θεωρείται και η σύριγγα των πουλιών, οι φωνητικές χορδές και μία άπειρη λίστα από δημιουργήματα της φύσης. Το να αποφανθεί κάποιος για την ποιότητα ενός οργάνου δίχως να το ακούσει συνιστά ακόμα ένα δύσκολο εγχείρημα, παρά τη βοήθεια της θεωρίας και των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στην εποχή που ο υπολογιστής χρησιμοποιείται ακόμα και για να συνθέσει μουσική, ο άνθρωπος συνεχίζει να είναι ο κύριος καθοδηγητής, με τα αλάνθαστα αισθητήριά του.

1.2 Αρμονικές, ηχόχρωμα, φθόγγοι και τόνοι

Ο ήχος που παράγεται από ένα μουσικό όργανο είναι μία αρκετά περίπλοκη διαταραχή του αέρα, την οποία αντιλαμβανόμαστε με το αυτί μας. Η διαταραχή αυτή μπορεί να αναλυθεί με σειρές Fourier σε απλές ημιτονοειδείς (αρμονικές) ταλαντώσεις, που κάθε μία χαρακτηρίζεται από τη συχνότητά και το πλάτος της. Είδαμε στη θεωρία των ακουστικών σωλήνων ότι οι συχνότητες των αρμονικών ταλαντώσεων αυξάνονται με συγκεκριμένες προόδους, για τις διάφορες περιπτώσεις. Οι αρμονικές ταλαντώσεις καλούνται απλά *αρμονικές*. Μετράμε τις αρμονικές από τη χαμηλότερη, τη *θεμελιώδη* και καταλήγουμε στο άπειρο.

Αν ένα βιολί και ένα φλάουτο «παίζουν» διαδοχικά τον ίδιο φθόγγο La, το ηχητικό αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό. Από το σύνολο των άπειρων αρμονικών, ισχυρότερη σε ένταση είναι συνήθως η θεμελιώδης. Ο φθόγγος που παράγει ένα όργανο παίρνει το όνομα του από τη συχνότητα που αντιστοιχεί στην ισχυρότερη από τις αρμονικές. Στην περίπτωση του βιολιού και του φλάουτου η ισχυρότερη αρμονική είναι η πρώτη (θεμελιώδης) και έχει συχνότητα 440 Hz, που αντιστοιχεί στο φθόγγο La. Οι υπόλοιπες αρμονικές ταλαντώσεις έχουν διαφορετικές συχνότητες και εντάσεις για κάθε όργανο και είναι αυτές που προσδίδουν το διαφορετικό άκουσμα του ίδιου φθόγγου. Το σύνολο αυτό των αρμονικών αποτελεί το *ηχόχρωμα* του μουσικού οργάνου.

Ο Nederveen [RR] σημειώνει τη διαφορά μεταξύ *τόνου* και *φθόγγου* (*νότας*). Στην πράξη χρησιμοποιούμε χωρίς διάκριση τους όρους αυτούς, αλλά στην πραγματικότητα ο *τόνος* (tone) είναι η αρμονική ταλάντωση, δηλαδή ένας καθαρός ημιτονοειδής ήχος, ενώ φθόγγος (note) είναι το σύνολο των τόνων (αρμονικών) με τις εντάσεις τους μαζί.

Ο πίνακας 1.1 δίνει τις πρώτες 16 αρμονικές μίας τετρωμένης χορδής με θεμελιώδη συχνότητα που αντιστοιχεί στο φθόγγο Do, κάποιας αυθαίρετης οκτάβας [B]. Στον πίνακα αυτό θεωρούμε ότι η κάθε αρμονική αποτελεί τη θεμέλιο και μοναδική συχνότητα για τον αντίστοιχο φθόγγο. Και αντίστροφα, κάθε φθόγγος αποτελείται από έναν αμιγή τόνο (δηλαδή χωρίς αρμονικές). Το σύνολο των αρμονικών οι μουσικοί καλούν *αρμονική στήλη*. Από την αρμονική στήλη, που είναι ένας υπαρκτός φυσικός νόμος και όχι δημιούργημα, προέκυψαν με κατάλληλη ταξινόμηση οι γνωστοί μας φθόγγοι Do, Re, Mi, Fa, Sol, La και Si με τις αλλοιώσεις τους. Προφανώς λοιπόν, όπως ειπώθηκε και στο κεφάλαιο 5 του I μέρους, η μουσική τέχνη δεν είναι τόσο μία διαρκής επινόηση, αλλά μάλλον μία διαρκής ανακάλυψη. Ο δείκτης σε κάθε φθόγγο συμβολίζει την αντίστοιχη οκτάβα.

Πίνακας 1.1

Οι 16 πρώτες αρμονικές μία χορδής με θεμέλιο συχνότητα Do

1	Do ₀
2	Do ₁
3	Sol ₁
4	Do ₂
5	Mi ₂
6	Sol ₂
7	Sib ₂
8	Do ₃
9	Re ₃
10	Mi ₃
11	Fa [#] ₃
12	Sol ₃
13	La ₃
14	Sib ₃
15	Si ₃
16	Do ₄

Θα δούμε στα επόμενα ότι δύναται κάποια από τις υψηλότερες της θεμελιώδους αρμονικές (over-tones) να είναι ισχυρότερη σε ένταση. Τότε, ο φθόγγος καθορίζεται στο μεγαλύτερο ποσοστό από αυτή με τη μεγαλύτερη ένταση.

Είναι φανερό ότι αρκούν οι λίγες πρώτες αρμονικές για να μας δώσουν μία ιδέα του ήχου ενός οργάνου. Στην πραγματικότητα όμως, ο τεράστιος πλούτος των ηχοχρωμάτων έγκειται στον άπειρο αριθμό των υψηλών αρμονικών, που νομίζουμε ότι δεν ακούμε, αλλά η επίδρασή τους είναι καθοριστική. Θα διαπιστώσουμε αργότερα και πειραματικά την ύπαρξη *υποαρμονικών*, δηλαδή ταλαντώσεων με συχνότητες χαμηλότερες της θεμελιώδους, καθώς και την ύπαρξη *μερικών αρμονικών*, με συχνότητες ενδιάμεσα στις αρμονικές και άρα μη ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Όλα αυτά και ακόμα περισσότερα συντελούν στην αδυναμία του ανθρώπου να υποκαταστήσει την πληρότητα της ζωντανής μουσικής με ηχογραφήσεις ή τεχνητά μέσα. Πολύ απλοϊκά, στην περιορισμένη χωρητικότητα ενός CD δεν είναι δυνατό να χωρέσουν ποτέ όλες οι συχνοτικές πληροφορίες ενός ήχου, μολονότι έχουμε φτάσει σε απίστευτα μεγάλα νούμερα. Η διαδικασία αυτή θα αποτελεί πάντα μία ασύμπτωτη καμπύλη με τον άξονα της τελειότητας. Η βιβλιογραφική αναφορά [LL] εξηγεί πολύ καλά τις έννοιες του αναλογικού και του ψηφιακού σήματος, με πολλά παραδείγματα από τη μουσική.

1.3 Ηχητικό φάσμα

Είναι ουσιαστικά το ηχώχρωμα. Δεν μπορούμε, και δεν έχει νόημα, να καταγράψουμε όλες τις αρμονικές ενός οργάνου, καθότι δε γίνονται άμεσα αντιληπτές. Κατά συνέπεια, το ηχητικό φάσμα είναι κατά κανόνα μία παρουσίαση των πρώτων αρμονικών ενός φθόγγου με τις εντάσεις τους.

1.4 Η συμπεριφορά των μουσικών οργάνων

Για να καθορίσουμε τη συμπεριφορά ενός μουσικού οργάνου, αρκούν δύο παράγοντες [HH], [39, 42,51]:

- Τα αρχικά μεταβατικά φαινόμενα (Initial Transients) και
- Η σταθερή-μόνιμη κατάσταση (Steady State).

Τα αρχικά μεταβατικά φαινόμενα συμβαίνουν κατά την πορεία του οργάνου από την πλήρη σιωπή έως την πλήρη ήχηση. Οι μουσικοί ονομάζουν αυτή την πορεία *ατάκα*. Όταν ο μουσικός διεγείρει ένα μουσικό όργανο, οι εντάσεις των συχνοτήτων που ενεργοποιούνται είναι αρκετά διαφορετικές από αυτές που θα ακολουθήσουν και επίσης κάποιες θα αποσβεσθούν πολύ σύντομα. Αυτό σημαίνει ότι το άκουσμα στα πρώτα χιλιοστά ή εκατοστά του δευτερολέπτου είναι διαφορετικό από ότι στη συνέχεια. Τα μεταβατικά φαινόμενα οδηγούν στη σταθερή ή μόνιμη κατάσταση. Η αρχική έκρηξη της πληθώρας των αρμονικών αλλά και των υπόλοιπων μη αρμονικών ταλαντώσεων καταλαγιάζει βαθμιαία στο ηχητικό φάσμα του μουσικού οργάνου. Όταν αναφερόμαστε στο αρμονικό περιεχόμενο ενός οργάνου, επικαλούμαστε τις συχνότητες της σταθερής κατάστασης και όχι της μεταβατικής.

Ανάλογα με τον τρόπο που διεγείρονται, τα διάφορα όργανα εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία στους χρόνους μετάβασης και σταθερής κατάστασης. Τα κρουστά παρουσιάζουν μικρό μεταβατικό χρόνο, αλλά και η μόνιμη τους κατάσταση είναι εξαιρετικά σύντομη. Τα νυκτά έγχορδα παρουσιάζουν μικρό χρόνο μετάβασης και κάπως πιο μεγάλο χρόνο μόνιμης κατάστασης, ενώ τα έγχορδα με δοξάρι έχουν πολύ μεγάλο χρόνο μόνιμης κατάστασης (μάλιστα όσο διαρκεί η δράση του δοξαριού). Τα πνευστά συμπεριφέρονται παρόμοια. Όσο διαρκεί η διεγείρουσα δύναμη μπορούν να παράγουν το (μόνιμο) ηχητικό τους φάσμα. Η αρχική μεταβατική τους κατάσταση διαρκεί εν γένει περισσότερο από τα έγχορδα. Βεβαίως, ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο παίζουν όπως θα δούμε και οι ενδιάμεσες μεταβάσεις από έναν συντονισμό σε άλλο (άλλης αρμονικής), οι οποίες συνιστούν το κλασσικό φαινόμενο *overblowing*.

1.5 Λίγα για τα μουσικά διαστήματα

Έστω δύο διαπασών τα οποία ηχούν ταυτοχρόνως. Το πρώτο δονείται με σταθερή συχνότητα 261 Hz, ενώ το δεύτερο δονείται με συχνότητα που ξεκινά από 262 Hz και σταδιακά αυξάνεται. Κατά τη διάρκεια αυτής της αύξησης, αρχικά ακούμε πληθώρα διακροτημάτων [TT] εξ' αιτίας της μικρής συχνοτικής διαφοράς, τα οποία φτάνουν σε ένα μέγιστο και έπειτα βαθμιαία ατονούν. Έτσι ο συνδυασμένος ήχος απ' τα δύο διαπασών αρχικά (στις συχνότητες 261 και 262 Hz) ακούγεται σχεδόν ευχάριστα, αλλά γρήγορα γίνεται δυσάρεστος μέχρι την τιμή 23 διακροτήματα το δευτερόλεπτο, όπου από εκεί και πέρα ξαναγίνεται σταδιακά ευχάριστος. Ωστόσο, όσο ευχάριστος και αν γίνεται ο ήχος, μόνο όταν το δεύτερο διαπασών φτάσει στη συχνότητα 522 Hz θα νιώσουμε την απόλυτη ισορροπία στο άκουσμα. Η συχνότητα αυτή αντιστοιχεί στην οκτάβα (ή στην δεύτερη αρμονική).

Αν το πείραμα εκτελεστεί με δύο χορδές βιολιού, τα αποτελέσματα θα είναι αρκετά διαφορετικά. Το δυσάρεστο αίσθημα θα εξαλείφεται όταν οι χορδές έχουν λόγους συχνοτήτων 5/4, 4/3, 3/2 και 2/1 [TT]. Οι λόγοι αυτοί στη μουσική μεταφράζονται σε διάστημα μεγάλης τρίτης, τετάρτης (καθαρής), πέμπτης (καθαρής) και οκτάβας.

Έχει παρατηρηθεί ότι δύο τόνοι συνηθούν ευχάριστα όταν ο λόγος συχνοτήτων τους μπορεί να εκφραστεί ως προς μικρούς αριθμούς. Όσο μικρότεροι μάλιστα είναι οι αριθμοί του κλάσματος συχνοτήτων, τόσο πιο ευχάριστο άκουσμα λαμβάνουμε ή αλλιώς έχουμε μεγαλύτερη *συμφωνία* [TT]. Ο πίνακας 1.2 δίνει τα σύμφωνα διαστήματα κατά αυξανόμενο λόγο συχνοτήτων. Ενώ ο πίνακας 1.3 κατά αυξανόμενη *διαφωνία* (ασυμφωνία).

Ο Πυθαγόρας γνώριζε την ιδιαιτερότητα συχνοτικών λόγων (όσο μικρότεροι αριθμοί, τόσο μεγαλύτερη συμφωνία) περισσότερο από 2500 χρόνια πριν. Η αρχή του μεγάλου Έλληνα φιλόσοφου ότι «Όλη η φύση στηρίζεται στην αρμονία των αριθμών» μπορεί να φαίνεται απλοϊκή, αλλά στην άλλη άκρη του κόσμου, Κινέζοι φιλόσοφοι, στα χρόνια του Κομφούκιου θεωρούσαν τους μικρούς αριθμούς 1, 2, 3, 4 ως την πηγή της τελειότητας.

Ο Σουηδός μαθηματικός Leonhard Euler, προχώρησε τη θεωρία του Πυθαγόρα ένα βήμα παραπέρα προτείνοντας έναν τρόπο μέτρησης της διαφωνίας μίας *συγχορδίας*, δηλαδή τη συνήχηση παραπάνω από δύο τόνων. Η ιδέα του ήταν να εκφραστεί ο λόγος συχνοτήτων μίας συγχορδίας (chord) με τους μικρότερους δυνατούς αριθμούς και έπειτα να βρεθεί ο κοινός παρονομαστής αυτών των συχνοτήτων. Για παράδειγμα έστω η γνωστή συγχορδία Ντο – Μι – Σολ (ή στη διεθνή μουσική σημειογραφία: C – E – G). Ο σύνθετος λόγος συχνοτήτων είναι 4:5:6:8. Ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής είναι

ο 120, καθώς αποτελεί τον ελάχιστο κοινό διαιρέτη των 4, 5, 6 και 8. Η θεωρία δυστυχώς καταρρέει όταν ο ίδιος παρονομαστής προστίθεται στη συγχορδία εβδομής: Ντο – Μι – Φα – Σολ – Σι (ή C – E – F – G – B), όπου ο λόγος συχνοτήτων είναι 8:10:12:15. Εδώ το ηχητικό αποτέλεσμα είναι αρκετά δυσάρεστο.

Τέλος ο πίνακας 1.4 δίνει τις αντιστοιχίες των φθόγγων της δυτικής κλίμακας με τη διεθνή μουσική σημειογραφία.

Πίνακας 1.2

Τα μουσικά διαστήματα με σειρά αυξανόμενου λόγου συχνοτήτων

Διάστημα	Λόγος συχνοτήτων
Ουνίσονο (Unison)	1:1 = 1,000
Δευτέρα (Second)	9:8 = 1,125
Μικρή Τρίτη (Minor Third)	6:5 = 1,200
Μεγάλη Τρίτη (Major Third)	5:4 = 1,250
Τετάρτη (Fourth)	4:3 = 1,333
Πέμπτη (Fifth)	3:2 = 1,500
Μικρή Έκτη (Minor Sixth)	8:5 = 1,600
Μεγάλη Έκτη (Major Sixth)	5:3 = 1,666
Οκτάβα (Octave)	2:1 = 2,000

Πίνακας 1.3

Τα μουσικά διαστήματα με σειρά αυξανόμενης διαφωνίας

Διάστημα	Λόγος συχνοτήτων
Ουνίσονο (Unison)	1:1 = 1,000
Οκτάβα (Octave)	2:1 = 2,000
Πέμπτη (Fifth)	3:2 = 1,500
Τετάρτη (Fourth)	4:3 = 1,333
Μεγάλη Τρίτη (Major Third)	5:4 = 1,250
Μεγάλη Έκτη (Major Sixth)	5:3 = 1,666
Μικρή Τρίτη (Minor Third)	6:5 = 1,200
Μικρή Έκτη (Minor Sixth)	8:5 = 1,600
Δευτέρα (Second)	9:8 = 1,125

Πίνακας 1.4

Φθόγγος στα ελληνικά	Διεθνές σύμβολο
Ντο	C
Ρε	D
Μι	E
Φα	F
Σολ	G
Λα	A
Σι	B

2

Οικογένειες μουσικών οργάνων

Το κεφάλαιο δεν αποτελεί παρά εισαγωγικό σημείωμα στην πολύπλοκη επιστήμη των μουσικών οργάνων και γέφυρα για την επιστήμη των πνευστών, που μας ενδιαφέρουν σε αυτή την εργασία. Εκτενή ανάλυση της φυσικής τους, με σοβαρό επιστημονικό χαρακτήρα, μπορεί να βρει κανείς σε ένα από τα πλέον αντιπροσωπευτικά και ολοκληρωμένα βιβλία “The Physics of Musical Instruments” Fletcher και Rossing [CC]. Εισαγωγικές παρατηρήσεις υπάρχουν και στα βιβλία του Raichel [TT], Morse [PP,QQ] και πολλών άλλων που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Όλα τα συμβατικά μουσικά όργανα μπορούν να κατανεμηθούν σε τέσσερις κατηγορίες, ανάλογα με το πως παράγουν τον ήχο τους. Έχουμε τα έγχορδα, τα κρουστά, τα πνευστά και τα ηλεκτρικά μουσικά όργανα [TT]. Σε ένα έγχορδο (String instrument) οι χορδές του μπορεί να χτυπώνται, να τραβιούνται ή να τρίβονται με κάποιο άλλο σώμα (δοξάρι). Τα κρουστά (Percussion instruments) μπορεί να παράγουν ήχο ορισμένης συχνότητας ή κάτι πιο αόριστο. Τα πνευστά (Wind instruments) απ’ την άλλη διακρίνονται σε πολλές κατηγορίες, όπως θα δούμε και αποτελούν τον πυρήνα της εργασίας. Τέλος, τα ηλεκτρικά – ηλεκτρονικά όργανα (Electric – Electronic instruments) χρησιμοποιούν ηλεκτρικούς ταλαντωτές είτε για να μιμηθούν το αρμονικό φάσμα των ήδη υπάρχοντων φυσικών μουσικών οργάνων είτε για να παράγουν τελείως πρωτόγνωρα ηχητικά ακούσματα, που είναι αδύνατο να παραχθούν με φυσικό (μηχανικό) τρόπο. Πλέον και οι προσωπικοί Η/Υ μπορούν να προγραμματιστούν για να λειτουργούν ως μουσικά όργανα, όταν εφοδιαστούν με τον κατάλληλο εξοπλισμό, όπως οι κάρτες ήχου. Ίσως η μεγαλύτερη αλλαγή στο χώρο της μουσικής συντελέστηκε στα τέλη του 20^{ου} αιώνα, όταν η τέχνη της ψηφιακής δειγματοληψίας έφτασε σε τόσο μεγάλες χωρητικότητες ώστε δύσκολα να ξεχωρίζουμε το πραγματικό αρμονικό φάσμα από το ψηφιακά αποθηκευμένο. Είναι ρουτίνα πλέον η ηχογράφιση κάθε φθόγγου της μουσικής σκάλας ξεχωριστά, όπως τον έχει παίξει ένας επαγγελματίας μουσικός, με φυσικό όργανο και έπειτα η χρήση του μέσα στον υπολογιστή σε καινούριες μουσικές συνθέσεις. Ο πίνακας 2.1 δείχνει συνοπτικά τα όργανα που περιλαμβάνει κάθε οικογένεια.

2.1 Έγχορδα

Ίσως ο μεγαλύτερος σε ηλικία τρόπος να παράγουμε μουσική είναι μία ταλαντούμενη χορδή υπό εφελκυστική τάση. Μία τέτοια χορδή είναι ικανή να παράγει μία ολόκληρη έκταση από τόνους, που είναι αρμονικοί της θεμελίου συχνότητας. Το ποιες αρμονικές θα ηχήσουν και ποια θα είναι τα πλάτη τους εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο θα διεγερθεί η χορδή [NN], δηλαδή ή με χτύπημα ή με τράβηγμα ή με τριβή και από το σημείο που θα εφαρμοστεί η διέγερση πάνω στη χορδή.

Καθώς τώρα η χορδή καταλαμβάνει μία πολύ μικρή περιοχή στο χώρο, είναι δύσκολο να κινήσει σημαντική ποσότητα αέρα και συνεπώς δεν αποτελεί από μόνη της έναν αποδοτικό μηχανισμό παραγωγής ήχου. Γι’ αυτό οι χορδές συνδέονται με μία μεγάλη επιφάνεια (soundboard) ικανή να συντονίζετα σε μεγάλη γκάμα συχνοτήτων (multiresonant), ώστε να ενισχυθεί η έξοδος του ήχου.

Όλα τα έγχορδα μουσικά όργανα χρησιμοποιούν ή μία απλή επιφάνεια ή έναν συνδυασμό μίας επιφάνειας και ενός κοίλου σώματος ώστε οι χορδές, μέσω αυτών, να συνδεθούν με τον αέρα. Όσο μεγαλύτερη είναι ακτινοβολούσα επιφάνεια, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ακουστική εμπέδηση και τόσο ισχυρότερη η ενίσχυση του σήματος. Οι επιφάνειες γενικά (μεμβράνες ή πλάκες) είναι από τα σώματα που ταλαντώνονται με εξαιρετικά πολύπλοκους συνδυασμούς συντονισμών [CC, QQ, TT], περισσότερο από κάθε άλλο σώμα, και σίγουρα μη αρμονικούς. Στα περισσότερα έγχορδα, όπως η οικογένεια του βιολιού, η κιθάρα, το μαντολίνο, το μπουζούκι, το λαούτο, η λύρα, η άρπα, το σαντούρι, το κανονάκι κ.α., οι χορδές συνδέονται με ένα κοίλο σώμα, που στο πάνω μέρος είναι κλεισμένο με μία επιφάνεια που έχει οπές. Η ταλάντωση των χορδών μεταφέρεται στην επιφάνεια, η οποία με τη σειρά της ακτινοβολεί ήχο προς το κοίλο σώμα. Το σώμα αυτό έτσι όπως κλείνεται απ’ την επιφάνεια και αφήνει τον αέρα να περάσει απ’ τις οπές, προσεγγίζει ένα συντονιστή Helmholtz [TT]. Οι διαστάσεις του συντονιστή μπορεί να είναι ίσες ή μεγαλύτερες απ’ το μήκος κύματος στον αέρα για τους τόνους ή τις αρμονικές τους που παράγονται απ’ το όργανο. Έτσι, το δοχείο αυτό μπορεί να λαμβάνει εκτός από τη θεμελίου συχνότητα συντονισμού και άλλες. Εν τέλει ένα τέτοιο δοχείο είναι ένα εξαιρετικά πολύπλοκο σύστημα συντονισμών.

2.2 Κρουστά

Τα κρουστά μουσικά όργανα παράγουν ήχο μέσω κτυπήματος ή κουνήματος. Το ταλαντούμενο σύστημα που διεγείρεται από κρούση μπορεί να είναι μία ράβδος, μία πλάκα, μία μεμβράνη ή μία καμπάνα. Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες κρουστών. Τα κρουστά ορισμένου τονικού ύψους, στα οποία η θεμελιώδης συχνότητα αντιστοιχεί σε έναν αναγνωρίσιμο φθόγγο και στα κρουστά αόριστου τονικού ύψους, στα οποία ο παραγόμενος ήχος δεν έχει καν θεμελιώδη συχνότητα και η υπέρθεση των

String Instruments			
Plucked Strings	Bowed Strings	Struck Strings	
Lyre	Violin	Piano	
Lute	Viola	Dulcimer	
Harp	Violoncello		
Zither	Double bass		
Guitar			
Ukulele			
Mandolin			
Banjo			
Sitar			
Harpsichord			
Wind Instruments			
Air Reed	Single Mechanical Reed	Double Mechanical Reed	Lip Reed
Whistle	Free-reed organ	Oboe	Bugle
Flue Organ Pipe	Reed organ pipe	English horn	Trumpet
Recorder	Accordion	Oboe d' amore	Cornet
Flageolet	Harmonica	Bassoon	French horn
Ocarina	Clarinet	Contra bassoon	Trombone
Flute	Bass clarinet	Sarrusophone	Bass trombone
Piccolo	Saxophone (soprano,		Tuba
Fife	alto, tenor, and bass)		
	Bagpipe		
<i>Organ</i> (combination air reed and mechanical reed)			
Percussion Instruments			
Definite Pitch		Indefinite Pitch	
Tuning fork	Celesta	Snare or side drum	Triangle
Xylophone	Kettledrums (tympani)	Military drum	Steel drum
Marimba	Bell	Bass drum	Cymbals
Chimes	Carillon	Gong	Tambourine
Glockenspiel		Castanets	
Electrical or Electronic Instruments			
Siren	Electric piano	Electrical carillon	Computer (specially configured)
Automobile horn	Electric guitar	Synthesizer	
Electric organ	Music Box	Metronome	

Πίνακας 2.1

Οι οικογένειες των συμβατικών μουσικών οργάνων [TT].

συντονισμών δεν οδηγεί σε ευδιάκριτο φθόγγο. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει το διαπασών, το ξυλόφωνο, το μεταλλόφωνο, την τσελέστα, το glockenspiel, τα τύμπανα ορχήστρας, τις καμπάνες και άλλα. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει το τρίγωνο, το ταμπούρο, τις καστανιέτες, τα κύμβαλα, τα drums και άλλα.

2.3 Πνευστά

Ένα πνευστό μουσικό όργανο είναι μία συσκευή παραγωγής ήχου μέσω ταλαντώσεων του αέρα. Οι ταλαντώσεις του αέρα διεγείρονται με τρεις τρόπους: 1) με παλλόμενη ή παλλόμενες γλωσσίδες (εδώ ανήκει και η ανθρώπινη φωνή), 2) με παλλόμενα χείλη (που λειτουργούν ως γλωσσίδες) και 3) με την κίνηση μία αέριας δέσμης. Θα ασχοληθούμε με τα πνευστά, με περισσότερη λεπτομέρεια, στο επόμενο κεφάλαιο.

2.5 Ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά όργανα

Εδώ ένας τόνος μπορεί να παραχθεί με μία σειρά από ηλεκτρικά μέσα. Τα ηλεκτρικά μέσα μπορεί να παράγουν ήχο διακόπτοντας τη ροή ενός ρεύματος αέρα, όπως συμβαίνει στη σειρήνα, που συνίσταται από έναν περιστρεφόμενο διάτρητο τροχό, μπορεί επίσης να κινούν ένα διάφραγμα, όπως συμβαίνει με την αυτοκινούμενη κόρνα (το κλάξον) ή μπορεί τέλος να συνιστούν έναν συνδυασμό ηλεκτρικού ταλαντωτή, ενισχυτή και μεγαφώνου, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με το ηλεκτρικό πιάνο.

Η ηλεκτρική ακουστική κιθάρα είναι μία τροποποίηση της κλασικής, όπου ένας ηλεκτρομαγνητικός μεταλλάκτης (transducer) συνδέει τις χορδές με έναν ενισχυτή (amplifier). Οι μηχανικές ταλαντώσεις τις κάθε χορδής μετατρέπονται σε ηλεκτρικά σήματα στον μεταλλάκτη και ακολούθως ενισχύονται απ' τον ενισχυτή για να μετατραπούν τελικά σε ακουστικά κύματα στο μεγάφωνο. Ένα στοιχείο ελέγχου της έντασης στον ενισχυτή ή ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα καθιστά ευχερής τη ρύθμιση του επιπέδου έντασης της εξόδου του ήχου.

Η ηλεκτρική κιθάρα χρησιμοποιεί έναν μαγνητικό μετατροπέα κάτω απ' τις χορδές. Οι χορδές μαγνητίζονται από μόνιμους μαγνήτες εντός των μετατροπέων. Αλλά εντός τους υπάρχουν επίσης και πηνία συνδεδεμένα με τον ενισχυτή. Όταν οι χορδές κινηθούν, η μαγνητική ενέργεια μετατρέπεται σε ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο στέλνεται στον ενισχυτή και κατόπιν στο μεγάφωνο.

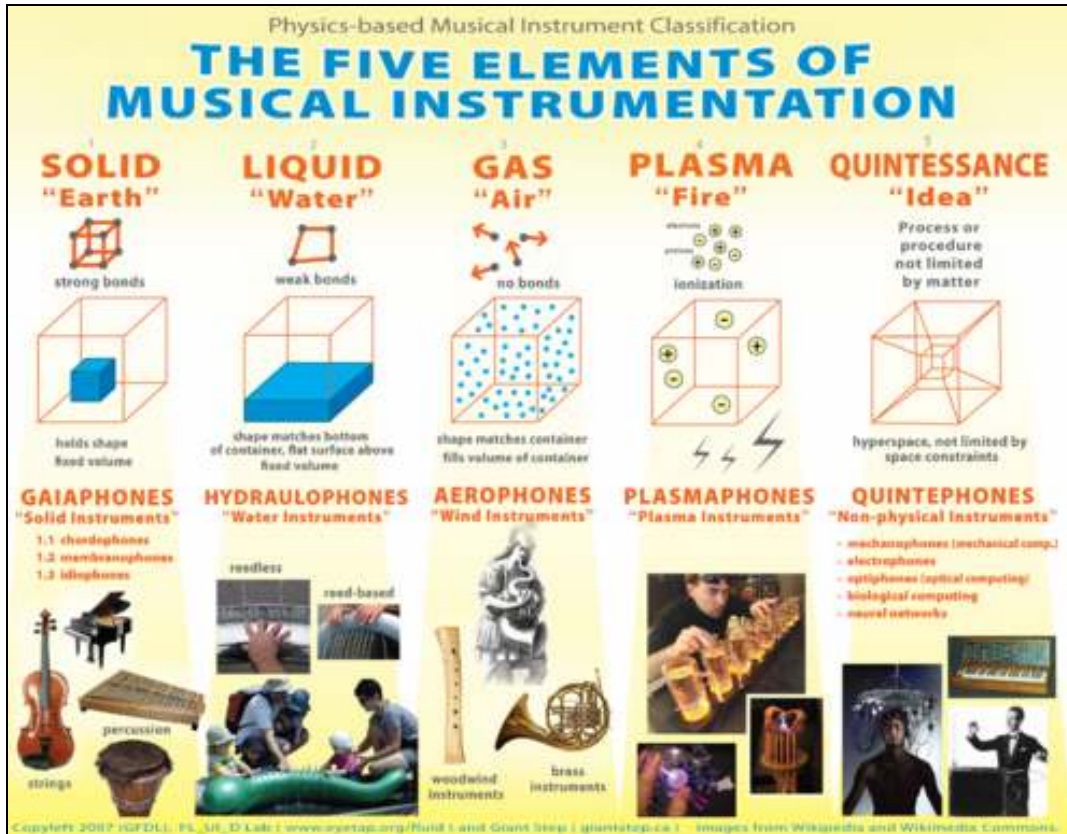
Δημιουργώντας μουσική με ηλεκτρονικά μέσα είναι μία ιστορία όχι τόσο πρόσφατη όσο φανταζόμαστε. Τα πρώτα ηλεκτρονικά όργανα περιλαμβάνουν αυτά του Theremin (1919), του Martenot (1928), του Trautonium (1928) και του Hammond (1929). Ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες για την ιστορία και τη λειτουργία αυτών των οργάνων βρίσκουμε στο βιβλίο του Rossing και του Strong και Plitnick [WW, CCC].

2.7 Πληκτροφόρα

Για πολλούς το πιάνο και το εκκλησιαστικό όργανο ανήκουν σε μία ιδιαίτερη κατηγορία, τα πληκτροφόρα. Στην πραγματικότητα η παραγωγή ήχου γίνεται με κάποιον απ' τους παραπάνω τρόπους. Θα δούμε στο επόμενο κεφαλαίο ότι έκαστος φθόγγος παράγεται από ξεχωριστό ηχητικό σύστημα, όπως για παράδειγμα από ξεχωριστή χορδή (ή ομάδα χορδών) στο τσέμπαλο ή στο πιάνο. Τα πλήκτρα το μόνο που κάνουν είναι να καθορίζουν ποιος σύστημα θα ηχησει κάθε φορά. Τα εκκλησιαστικά όργανα είναι στην ουσία τους πνευστά και τα όργανα σαν το Hammond ηλεκτρονικά, αλλά εφοδιασμένα και αυτά με πληκτροφόρο μηχανισμό.

2.6 Η σύγχρονη κατηγοριοποίηση

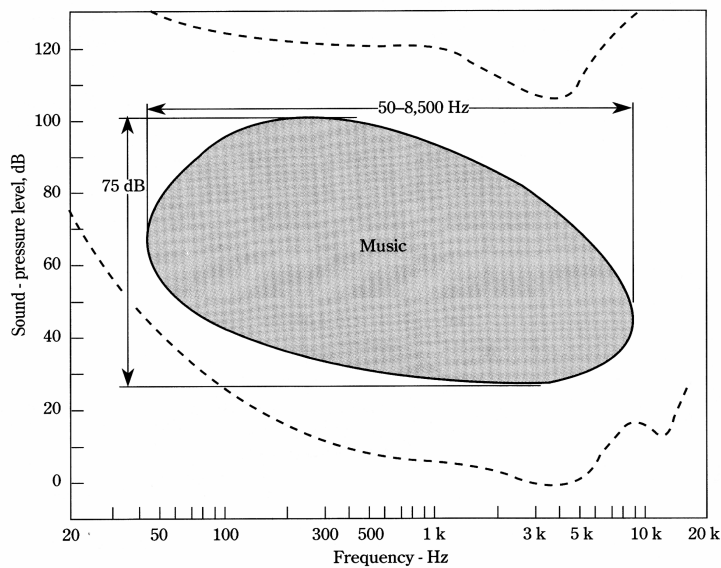
Πλέον, μουσική μπορούμε να παράγουμε, εκτός από τους τέσσερις αναφερθέντες τρόπους, με ευφάνταστα άλλα μέσα, όπως τα χείλη των κρυστάλλινων ποτηριών, το νερό ή η φλόγα. Ο πίνακας 2.2 δίνει μία σύγχρονη, πιο γενική κατηγοριοποίηση για την παραγωγή μουσικών ήχων. Τα όργανα νερού (water musical instruments) εκμεταλλεύονται ταλαντώσεις του νερού και μάλιστα αποδίδουν καλλίτερα σε περιβάλλον με νερό!



Πίνακας 2.2

Όλοι οι τρόποι παραγωγής μουσικής [ο].

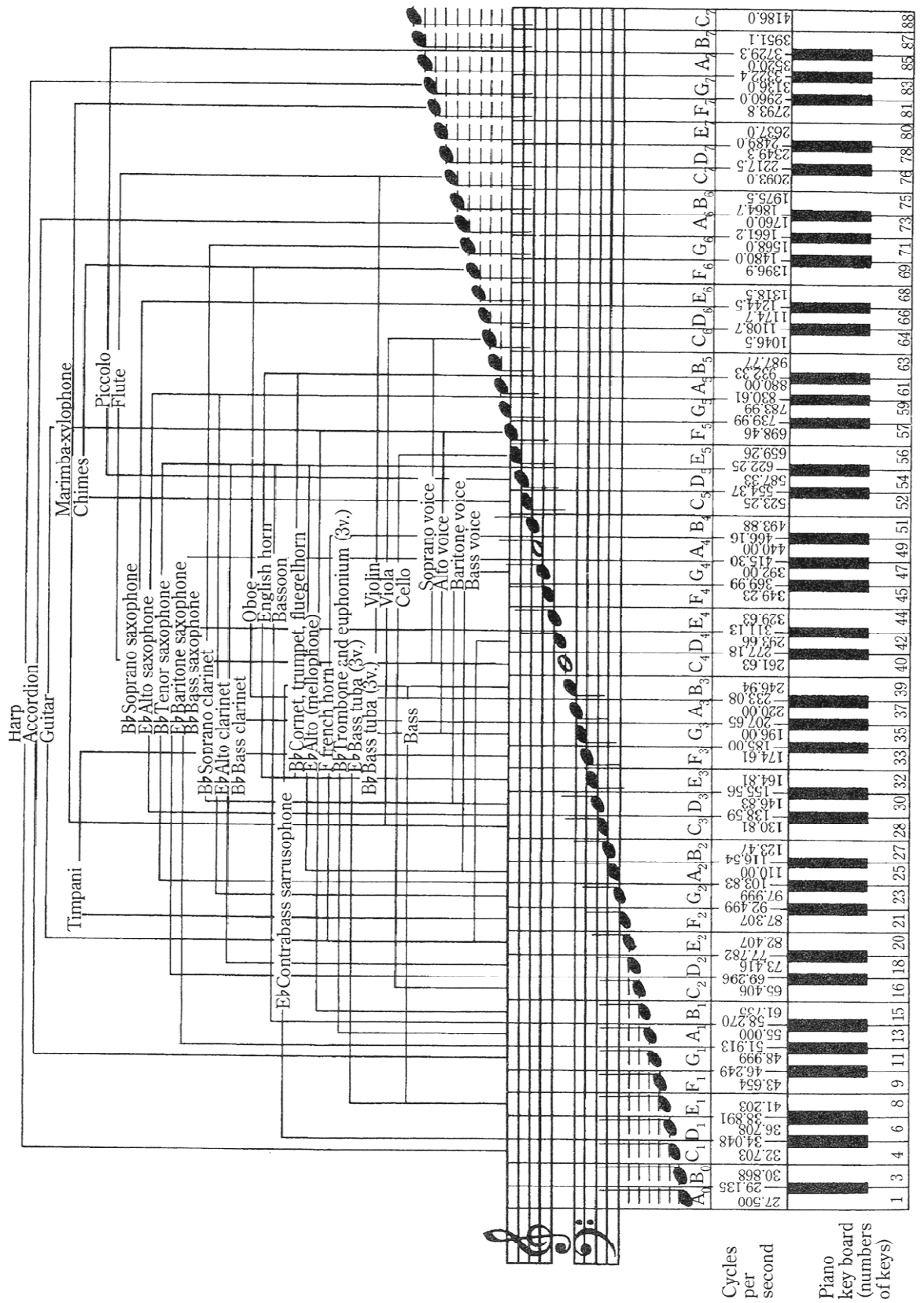
2.7 Η συχνοτική έκταση των μουσικών οργάνων



Σχήμα 2.1

Το σχήμα 2.1 [AA] μας δείχνει την έκταση της μουσικής τόσο από συχνοτική άποψη, όσο και από θέμα ηχητικής πίεσης (SPL). Η διακεκομμένη γραμμή καθορίζει τα όρια ακουστότητας του ανθρώπου.

Οι φθόγγοι που χρησιμοποιούνται κατά το μεγαλύτερο ποσοστό στη μουσική δημιουργία, μαζί με τις συχνότητές τους παριστάνονται στο σχήμα 2.2, σε αντιστοιχία με τα πλήκτρα του πιάνου, πάνω στο οποίο είναι βασισμένη όλη η θεωρία της μουσικής. Οι συχνοτικές εκτάσεις των πιο συνηθισμένων μουσικών οργάνων παραβάλλονται στο σχήμα αυτό για σύγκριση.



Σχήμα 2.2

3

Η φυσική των πνευστών

3.1 Ταλαντώσεις του αέρα

Αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η ουσιώδης διαφορά των πνευστών με τα υπόλοιπα μουσικά όργανα. Το σύστημα που ταλαντώνεται και ακτινοβολεί ήχο είναι ένας περιορισμένος όγκος αέρα. Συνήθως τα πνευστά είναι μακριοί και λεπτοί σωλήνες, οι οποίοι καμπυλώνονται και τυλίγονται όταν έχουν αρκετά μεγάλο μήκος, δίχως αυτό να επηρεάζει βέβαια τις δονήσεις του αέρα μέσα σε αυτούς, αφού αυτές είναι διαμήκεις. Όλη η θεωρία των ακουστικών σωλήνων του κεφαλαίου 7 του μέρους I εφαρμόζεται στα πνευστά τύπου σωλήνα (σχεδόν όλα δηλαδή) για τον υπολογισμό των συχνοτήτων που μπορούν να παραχθούν και άρα των φθόγγων. Σε πνευστά όμως σαν την *οκαρίνα*, η γεωμετρία του όγκου αέρα μοιάζει περισσότερο με δοχείο Helmholtz παρά με σωλήνα. Έτσι σε αυτή την περίπτωση, οι συχνότητες υπολογίζονται με χρήση της σχετικής θεωρίας του κεφαλαίου 7.

3.2 Διέγερση της αέριας στήλης και φθόγγοι

Ο αέρας μέσα στο όργανο πρέπει να διεγερθεί για να ταλαντωθεί. Η διέγερση αυτή γίνεται κατά τον ένα ή τον άλλο τρόπο με τοπική ταλάντωση της πίεσης του αέρα. Η διέγερση μπορεί να προέρχεται από το στόμα του εκτελεστή φυσώντας απ' ευθείας ή από τεχνητά μέσα.

Με κατάλληλη προσαρμογή των χειλιών του στόματος και της πίεσης φυσήματος είναι δυνατό να διεγερθούν διαδοχικά όλες οι αρμονικές συχνότητες της αέριας στήλης εντός του οργάνου. Είδαμε ότι η σειρά όλων των αρμονικών, δηλαδή η αρμονική στήλη, περιλαμβάνει όλους τους φθόγγους της μουσικής σκάλας. Ωστόσο τα συχνοτικά διαστήματα μεταξύ τους είναι μεγάλα και δεν περιορίζονται στο διάστημα μίας μόνο οκτάβας. Εκτός από αυτό οι αρμονικές υψηλής τάξης δεν έχουν τον ίδιο πλούτο ή και ένταση σε σχέση με τη θεμέλιο. Κατά συνέπεια για να είναι λειτουργικό ένα πνευστό, δηλαδή να μπορεί με επιτυχία να παράγει όλους τους φθόγγους μίας τουλάχιστον οκτάβας, ή θα πρέπει να μεταβάλλεται το μήκος του σωλήνα του ή να υπάρχει ξεχωριστός σωλήνας για κάθε φθόγγο στη θεμελιώδη του συχνότητα.

Σε αρκετά πνευστά, η αλλαγή του μήκους πετυχαίνεται με τη δημιουργία οπών, τις οποίες κλείνει με τα δάχτυλά του ο μουσικός, κατά βούληση. Σε άλλα, η αλλαγή του μήκους πετυχαίνεται προσθέτοντας τεμάχια σωλήνα με χρήση βαλβίδων. Στο *τρομπόνι*, ο εκτελεστής σέρνει ένα φαρδύτερο κομμάτι σωλήνα μέσα σε ένα λεπτότερο και αλλάζει το συνολικό του μήκος. Σε όργανα όπως το εκκλησιαστικό όργανο και τον Αυλό του Πανός, ο κάθε φθόγγος προέρχεται από ξεχωριστό σωλήνα με δικό του διεγερτικό μηχανισμό.

3.3 Ταξινόμηση των πνευστών

Με βάση τον τρόπο παραγωγής των φθόγγων

Είδαμε ήδη μία ταξινόμηση με βάση τον τρόπο παραγωγής των φθόγγων σε πνευστά με *οπές* (*hole-instruments*), πνευστά με *βαλβίδες* (*valve instruments*) και *ξεχωριστών σωλήνων* (*pipe organs*).

Με βάση το υλικό

Τα πνευστά με *οπές* αρχικά κατασκευάζονταν από ξύλο. Παρά την εξέλιξη στο υλικό κατασκευής τους (μέταλλο ή και πλαστικό), η ονομασία *ξύλινα πνευστά* (*woodwind instruments*) χρησιμοποιείται

μέχρι σήμερα για να χαρακτηρίζει μία ολόκληρη οικογένεια πνευστών. Από την άλλη, τα πνευστά με βαλβίδες, αρχικά κατασκευάζονταν από καθαρό μέταλλο και μάλιστα χαλκό. Ο χαλκός εξελίχθηκε σε διάφορα κράματα, με κυριότερο τον μπρούντζο (*brass wind instruments*). Στην ελληνική χρησιμοποιούμε ακόμα την ονομασία *χάλκινα πνευστά*. Σήμερα πάντως το υλικό εμπλουτίζεται με πολλά άλλα στοιχεία.

Στα ξύλινα πνευστά ανήκουν το κλαρινέτο, το όμποε, το φλάουτο, το πίκολο, το φαγκότο, η φλογέρα, το σαξόφωνο, ο Αυλός του Πανός και άλλα λιγότερο γνωστά.

Στα χάλκινα πνευστά ανήκουν η τρομπέτα, η κορνέτα, το κόρνο, το τρομπόνι, το ευφώνιο, το βαρύτονο, η τούμπα και επίσης άλλα λιγότερο γνωστά.

Οι σωλήνες του εκκλησιαστικού οργάνου κατασκευάζονται από διάφορα υλικά. Μπορεί να είναι ξύλο, χαλκός, αλουμίνιο, πλαστικό και πολλά άλλα. Το εκκλησιαστικό όργανο είναι από τα πιο πολύπλοκα και σύνθετα, συνδυάζει ιδιότητες και τεχνολογίες από πολλά μουσικά όργανα, όπως πνευστά και ηλεκτροφόρα και δεν μπορεί να ανήκει σε μία κατηγορία. Δεσπόζει μόνο του ανάμεσα σε όλα τα όργανα.

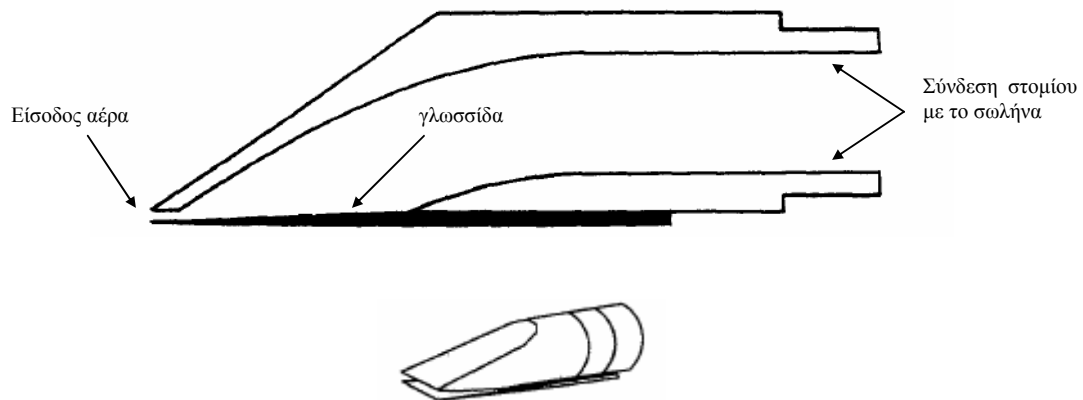
Με βάση τον μηχανισμό διέγερσης

Η διέγερση της αέριας στήλης των πνευστών μουσικών οργάνων μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

- Με παλλόμενη γλωσσίδα
- Με παλλόμενα χείλη
- Με δέσμη αέρα

Παλλόμενη γλωσσίδα (Reed generator)

Στο κλαρίνο, το όμποε, το φαγκότο, το σαξόφωνο και σε ορισμένους σωλήνες του εκκλησιαστικού οργάνου η διέγερση της αέριας στήλης του σωλήνα προέρχεται από την παλινδρόμηση μίας ή δύο καλαμένιων γλωσσίδων (λεπτών φύλλων). Η γλωσσίδα ή οι γλωσσίδες τοποθετούνται στο στόμιο του οργάνου, στο ένα από τα δύο άκρα του σωλήνα. Στο σχήμα 3.1 βλέπουμε τη μορφή του στομίου του κλαρινέτου.

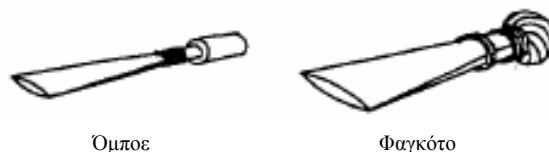


Σχήμα 3.1

Το στόμιο του Κλαρινέτου

Το κλαρινέτο έχει στόμιο με μία γλωσσίδα. Ο αέρας από το στόμα του μουσικού εισέρχεται απ' το διάκενο μεταξύ γλωσσίδας και τοιχώματος. Η πίεση πέφτει τοπικά και η γλωσσίδα αναγκάζεται να κινηθεί προς τα επάνω. Η ελαστικότητά της όμως την επαναφέρει στην αρχική της θέση. Ο αέρας ξαναεισέρχεται στο διάκενο και η κίνηση επαναλαμβάνεται. Η παλινδρομική κίνηση της γλωσσίδας κινεί τον αέρα εντός του σωλήνα αυξομειώνοντας την πίεσή του. Δημιουργείται έτσι το ηχητικό κύμα με θεμέλιο συχνότητα αντίστοιχη του μήκους του σωλήνα.

Το όμποε και το φαγκότο καταλήγουν στο στόμα του μουσικού με δύο γλωσσίδες, η μία πάνω στην άλλη, αφήνοντας ένα διάκενο ελλειψοειδούς διατομής ενδιάμεσα (Σχήμα 3.2). Οι γλωσσίδες, με την πνοή του αέρα και την ελαστικότητά τους κλείνουν και ανοίγουν επαναληπτικά το διάκενο.



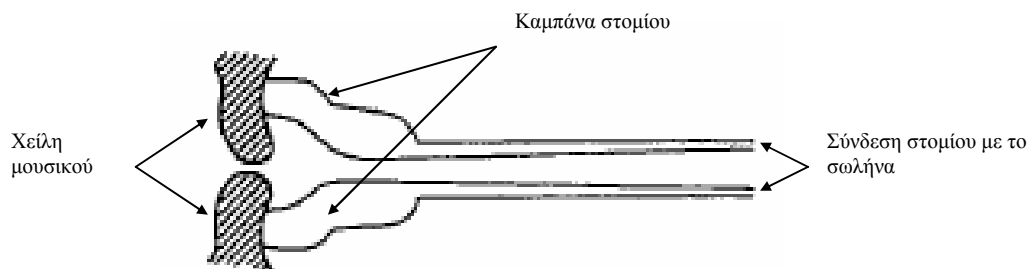
Σχήμα 3.2

Το στόμιο του όμποε και του φαγκότου, αποτελούμενο από διπλή γλωσσίδα

Από τα πνευστά με παλλόμενες γλωσσίδες, το κλαρινέτο, το όμποε και το φαγκότο κατασκευάζονται μέχρι και σήμερα κυρίως από ξύλο και ανήκουν στα ξύλινα πνευστά. Το σαξόφωνο κατασκευαζόταν ανέκαθεν από μέταλλο, αλλά ο ήχος του προσέγγιζε περισσότερο την οικογένεια των ξύλινων πνευστών και θεωρείται ότι ανήκει σε αυτά.

Παλλόμενα χείλη (Lip generator)

Όλα τα χάλκινα πνευστά διεγείρονται από μικρά πακέτα πεπιεσμένου αέρα, που προκύπτουν από την παλινδρόμηση των χειλιών του μουσικού στο στόμιο του οργάνου. Το στόμιο δεν είναι τίποτε άλλο από μία μικρή καμπάνα, την οποία ακουμπά ο μουσικός στο κλειστό του στόμα (Σχήμα 3.3). Ο μουσικός φυσώντας θέτει τα χείλια του σε παλινδρομική κίνηση.

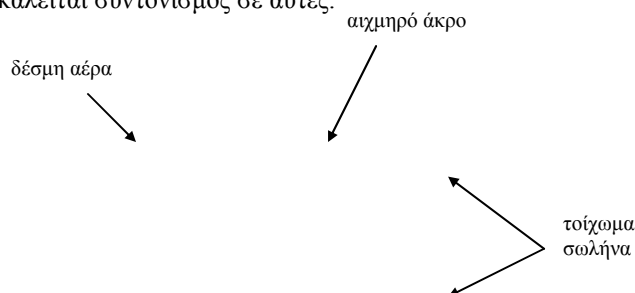


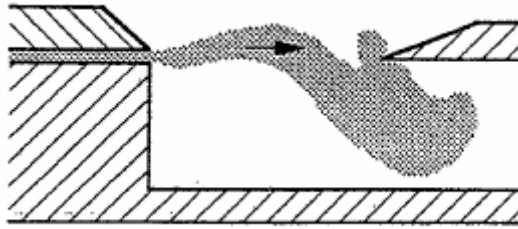
Σχήμα 3.3

Το στόμιο ενός τυπικού χάλκινου πνευστού

Δέσμη αέρα (Air jet generator)

Στο φλάουτο, στο εκκλησιαστικό όργανο, στον αυλό του Πανός, στη φλογέρα και στην οκαρίνα, μία λεπτή δέσμη αέρα προσκρούει σε ένα αιχμηρό άκρο σχηματίζοντας δίνες και διαταραχές. Όπως θα αναλυθεί εκτενώς στα επόμενα, οι δίνες αυτές διεγείρουν τις φυσικές συχνότητες του σωλήνα του οργάνου (ιδιοσυχνότητες) και προκαλείται συντονισμός σε αυτές.





Σχήμα 3.4

Το στόμιο μίας φλογέρας

3.4 Οι δομικοί μηχανισμοί των πνευστών

Οι πρώτες ουσιαστικές επιστημονικές και ακουστικές μελέτες για τα πνευστά μουσικά όργανα ήταν των Helmholtz, Rayleigh και Raman στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Οι μελέτες αυτές στρέφονταν κυρίως στην κατανόηση της φυσικής των ήδη υπάρχοντων παραδοσιακών οργάνων και στην εφαρμογή μικρών βελτιώσεων πάνω σε αυτά, παρά στο σχεδιασμό νέων οργάνων με επιθυμητές ιδιότητες. Ο Hunt [FF] συγκέντρωσε το υλικό των πρώτων αυτών μελετών στο βιβλίο του για την πρόσφατη ιστορία της ακουστικής. Μία συλλογή των σημαντικότερων δημοσιεύσεων για το θέμα παρουσιάζει και ο Lindsay [JJ]. Δύο πολύ διαδεδομένα συγγράμματα για τις βασικές ιδιότητες της ακουστικής και των μουσικών οργάνων με τη βοήθεια των θεωριών του Rayleigh και παραλληλισμών με ηλεκτρικά ανάλογα είναι του Morse το 1936 [PP] και του Morse και Ingard το 1968 [QQ].

Γραμμικότητα

Η εργασία των πρώτων επιστημόνων της μουσικής ακουστικής βασίστηκε στις *γραμμικές ακουστικές ιδιότητες* των οργάνων. Με τον όρο *γραμμικότητα* (*linearity*) εννοούμε ότι μία μεταβολή στην είσοδο ενός συστήματος προκαλεί μία μεταβολή στην έξοδο αναλογικά και χρησιμοποιείται η αρχή της επαλληλίας για τις επιδράσεις από διαφορετικές μεταβολές [42]. Η *γραμμική θεωρία* αποτελεί ένα χρήσιμο και επαρκές εργαλείο για τον υπολογισμό σημαντικών παραμέτρων, όπως το μήκος και το σχηματισμό του σωλήνα, ώστε να δίνει αρμονικά συσχετιζόμενους συντονισμούς. Με τη γραμμικότητα επίσης, καθίσταται ευχερής η τοποθέτηση των οπών στα ξύλινα πνευστά με μεγάλη ακρίβεια. Ένα από τα κλασσικά βιβλία που εμβαθύνει στον υπολογισμό των οπών, μέσω της γραμμικής θεωρίας είναι αυτό του Nederveen [RR]. Ευρεία βιβλιογραφική ανάπτυξη για τη γραμμική θεωρία στην ακουστική μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο του Kent [HH].

Ένα από τα βασικά στοιχεία της γραμμικής θεωρίας είναι η *αρμονικότητα* (*harmonicity*). Είδαμε στους κυματοδηγούς και στους ακουστικούς σωλήνες (Κεφ. 7, Μέρος I) ότι το ηχητικό αποτέλεσμα είναι μία υπέρθεση από κανονικούς τρόπους ταλάντωσης των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας. Στην εισαγωγική ενότητα (Κεφ. 1) του Μέρους αυτού είδαμε επίσης ότι αυτή η ακέραια αρμονική σχέση των συχνοτήτων είναι που στηρίζει ουσιαστικά όλο το μουσικό οικοδόμημα του δυτικού κόσμου, το οποίο και έχει υιοθετήσει και η Ελλάδα στο μεγαλύτερο ποσοστό της μουσικής της. Οι λόγοι που ενσωματώθηκε στο αυτί του δυτικού ανθρώπου αυτή η μουσική αντίληψη δεν είναι τόσο αριθμολογικοί, αλλά μάλλον ψυχοφυσικοί [42,SS]. Εκτός από τους ηχητικούς σωλήνες (σταθερής ή μεταβαλλόμενης διατομής) και οι τεντωμένες χορδές εμφανίζουν (ακέραια) αρμονική συσχέτιση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων τους.

Ένας ακουστικός σωλήνας, όπως και μια τεντωμένη χορδή είναι παθητικοί συντονιστές (*passive resonators*). Αυτό σημαίνει ότι τα συστήματα αυτά μπορούν να φτάσουν σε κατάσταση συντονισμού αν τα διεγείρουμε, προσφέροντάς τους ενέργεια με κατάλληλο τρόπο. Η διέγερση κατά συνέπεια μπορεί να προέρχεται από μία ή δύο παλλόμενες γλωσσίδες, τα παλλόμενα χείλη του μουσικού, μία δέσμη αέρα για τον ακουστικό σωλήνα ή ένα δοξάρι για τη χορδή.

Στα κρουστά μουσικά όργανα και ιδίως στις καμπάνες και στα gongs οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης δεν υπάγονται ούτε κατά προσέγγιση σε αρμονική σχέση. Ανέκαθεν όργανα σαν το Κονγκ δεν αποτελούσαν παράδοση στη δυτική μουσική, λόγω αυτής ακριβώς της μη-αρμονικότητας. Αντιθέτως στην άπω ανατολή έχουν πιο καλά ενσωματωθεί. Παρόλα αυτά, τα τελευταία χρόνια, με την είσοδο των υπολογιστών στη μουσική και την ανάπτυξη γενικότερα της ηλεκτρονικής, η μη-αρμονικότητα διερευνάται και υιοθετείται ολοένα και περισσότερο στη δύση [42,TT].

Μη-γραμμικότητα

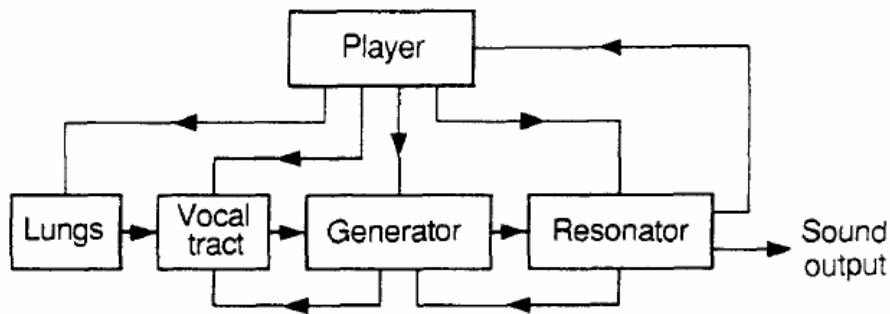
Παρά τα σημαντικά οφέλη που προέκυψαν από τη γραμμική θεώρηση του ηχητικού μηχανισμού των πνευστών και των άλλων μουσικών οργάνων, υπήρχε από παλιά η διαπίστωση ότι η σχέση μεταξύ των συχνοτήτων των τρόπων μίας τεντωμένης χορδής δεν είναι καθαρά αρμονική, επειδή δεν εμφανίζει ιδανική ελαστικότητα. Μάλιστα, οι συχνότητες των τρόπων σε μία πραγματική χορδή, για το λόγο ότι υπάρχει μεγαλύτερη ακαμψία από μία ιδανική, εμφανίζονται μεγαλύτερες από τις αρμονικές [PP]. Επίσης, από νωρίς γνώριζαν ότι ο απλός ακουστικός σωλήνας ήταν μόνο κατά προσέγγιση αρμονικός, λόγω της μεταβολής της διόρθωσης μήκους με τη συχνότητα [51]. Βέβαια, πέρα από τις παρατηρήσεις αυτές, οι παραγόμενες συχνότητες από την κίνηση ενός δοξαριού κάθετα σε μία τεντωμένη χορδή ή από το φύσημα μέσα σε έναν σωλήνα εκκλησιαστικού οργάνου είναι ακριβώς αρμονικές, όπως μπορεί να διαπιστωθεί από την κυματομορφή, η οποία παραμένει αμετάβλητη για ώρες. Αυτή η παρατήρηση επαληθεύει μία θεμελιώδη αρχή της φυσικής. Παρόλα αυτά, από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 αναπτύχθηκε η τάση για διερεύνηση ύπαρξης μη-γραμμικότητας στα φαινόμενα που σχετίζονται με τον ήχο στα πνευστά και στην οικογένεια του βιολιού. Καταρχήν, όπως έγινε σιωπηρά φανερό από τα προηγούμενα, το ιδιαίτερο γνώρισμα των δύο αυτών οικογενειών οργάνων είναι η διατήρηση του ήχου τους για όση ώρα διαρκεί η διεγείρουσα δύναμη. Στην απέναντι όχθη είναι τα όργανα που παλμό, όπως ο χτύπος στο ξύλο ενός ξυλόφωνου και γρήγορα ο ήχος τους αποσβένεται. Ο Benade [R] ήταν απ' τους πρώτους που διεπίστωσε ότι τα όργανα που έχουν την ικανότητα να διατηρούν τον ήχο τους είναι απαραίτητως μη-γραμμικά. Η ύπαρξη της μη-γραμμικότητας είναι αυτή που κατά κάποιο τρόπο «δένει» τον ήχο του οργάνου σε αρμονικότητα.

Η κατάσταση με τα όργανα που διεγείρονται με παλμούς είναι αρκετά διαφορετική. Ο ήχος που παράγεται όταν τραβήξουμε στιγμιαία (κιθάρα) ή χτυπήσουμε (πίانو) μία τεντωμένη χορδή δεν είναι ακριβώς αρμονικός. Το κούρδισμα του πιάνου είναι μία αρκετά δύσκολη υπόθεση και εκτελείτε από ειδικευμένους τεχνίτες. Ένας από τους παράγοντες της δυσκολίας είναι η μη αρμονικότητα του ήχου των χορδών του, οι οποίες συνδυάζονται πολλές μαζί ταυτόχρονα για μεγαλύτερο ηχητικό πλούτο [75]. Οι καμπάνες, τα κύμβαλα και το Κονγκ, όπως αναφέρθηκε ήδη, έχουν σε μεγάλο βαθμό μη αρμονικές ιδιοσυχνότητες και σε αυτό το γεγονός οφείλεται ο χαρακτηριστικός μυστηριώδης (και μεγαλεπήβολος) ήχος τους. Παρόλο που η λειτουργία τους θα χαρακτηριζόταν γραμμική, η όλη συμπεριφορά τους είναι μη αρμονική. Τα όργανα αυτά περιγράφονται με τον παράξενο ορισμό «συμπτωματικός μη-γραμμικά» ή *incidentally nonlinear*. Αυτή η συμπτωματική μη γραμμικότητα οδηγεί σε «χτυπητούς» και ενοχλητικούς ήχους όταν η δύναμη κρούσης είναι πολύ μεγάλη [42].

Το διάγραμμα ενός πνευστού

Είναι χρήσιμο να θεωρούμε ότι το όλο σύστημα ενός πνευστού μουσικού οργάνου και του εκτελεστή του αποτελείται απ' τις συνιστώσες που εικονίζονται στο σχήμα 3.5, όπως το παρουσίασε ο Fletcher το 1979 [35]. Ο κορμός του οργάνου, δηλαδή ο ακουστικός σωλήνας, η ενδεχόμενη καμπάνα στο άκρο, μαζί με τις οπές ή τις βαλβίδες συνιστούν το *συντονιστή (resonator)*, ο οποίος θεωρείται ότι υπακούει σε σχεδόν πλήρη γραμμική συμπεριφορά. Ο συντονιστής συνδέεται αναδραστικά, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχήμα, με τον *διεγέρτη (generator)*, ο οποίος θεωρείται στο μεγαλύτερο ποσοστό του μη-γραμμικός. Είδαμε ότι ο διεγέρτης μπορεί να είναι είτε παλλόμενες γλωσσίδες, είτε παλλόμενα χείλη, είτε τέλος μία λεπτή δέσμη αέρα. Ο εκτελεστής δίνει εντολή στους *πνεύμονες (lungs)* να στείλουν αέρα στη *στοματική κοιλότητα (vocal tract)*, ελέγχοντας παράλληλα και τις κινήσεις της (φορά βελών). Παρατηρούμε τη σύζευξη μεταξύ διεγέρτη και στόματος του εκτελεστή, ένα θέμα στο οποίο θα εμβαθύνουμε ιδιαίτερα στα επόμενα. Ο αναδραστικός μηχανισμός από την ακουστική έξοδο του οργάνου προς τον εκτελεστή είναι σχεδόν προφανής. Η σωστή εκτέλεση ενός μουσικού οργάνου συνεπάγεται να ακούμε αυτό που παίζουμε!

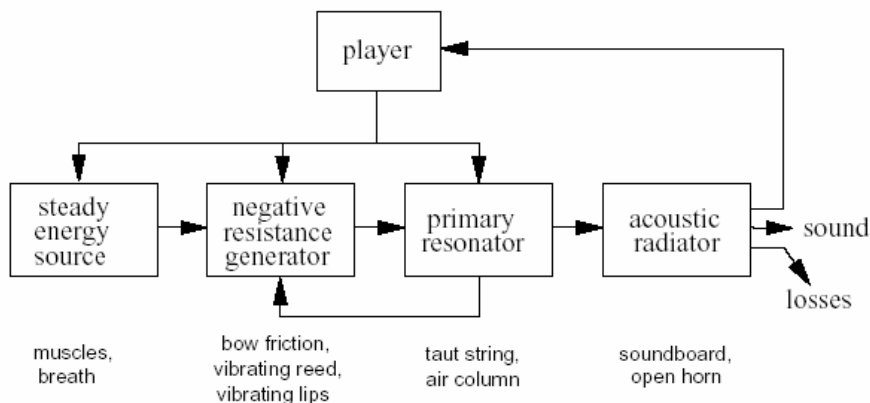
Από τις συζεύξεις του όλου συστήματος, καταλαβαίνουμε πόσο σημαντική επίδραση έχει ένα διαφορετικό μουσικό όργανο στην ερμηνεία του εκτελεστή του.



Σχήμα 3.5

Οι βασικές συνιστώσες ενός πνευστού κατά τον Fletcher (1979)

Στην εργασία βαθμιαία θα περιορίσουμε τον ανθρώπινο παράγοντα σε αντιδιαστολή με το παραπάνω σχήμα. Σε μία φλογέρα, το στόμα του εκτελεστή έχει μερίδιο μόνο στην πίεση με την οποία εισέρχεται ο αέρας εντός του ακουστικού σωλήνα, καθώς η δέσμη δημιουργείται από τεχνητό άνοιγμα. Απ' την άλλη, στο φλάουτο, που πάλι διεγείρεται με δέσμη αέρα, το στόμα του εκτελεστή ρυθμίζει και την πίεση και το άνοιγμα της δέσμης. Ο Fletcher το 1999 [42] δημοσίευσε ένα πιο γενικό σχήμα για τον μηχανισμό όχι μόνο των πνευστών, αλλά όλων των μουσικών οργάνων που μπορούν να επιτύχουν συντονισμούς διαρκείας (sustained-tone instruments). Τέτοια είναι, εκτός απ' τα πνευστά, όσα ανήκουν στην οικογένεια του βιολιού, οι διάφορες λύρες και όλα εν ολίγοις τα έγχορδα που παίζονται με δοξάρι. Βεβαίως, όργανα που διατηρούν το συντονισμό τους είναι και τα ηλεκτρονικά (synthesizer) και τα ηλεκτρικά (κιθάρα, μπάσο). Στο σχήμα 3.6, οι πνεύμονες και η στοματική κοιλότητα έχουν αντικατασταθεί από την ενεργειακή πηγή (steady energy source), για να συμπεριληφθούν όλοι οι διαφορετικοί τρόποι πρόσδοσης ενέργειας, φυσική ή τεχνητοί.



Σχήμα 3.6

Οι συνιστώσες ενός sustained-tone μουσικού οργάνου, όπως τις δεχόμαστε σήμερα (Fletcher 1999)

Στο σχήμα 3.6 ο συντονιστής διαιρείται σε κύριο (primary) συντονιστή και ακουστικό ακτινοβολητή (acoustic radiator). Ο κύριος συντονιστής μπορεί να είναι ο ακουστικός σωλήνας ή μία ταημένη χορδή και δεχόμαστε ότι έχει την απόλυτη γραμμική συμπεριφορά. Ο ακουστικός ακτινοβολητής ή δευτερεύον συντονιστής περιλαμβάνει την καμπάνα και γενικά όλες τις διατάξεις που εκπέμπουν τις ηχητικές ταλαντώσεις του κύριου συντονιστή στην ατμόσφαιρα.

Αν θεωρήσουμε τώρα πως ο διεγέρτης υπακούει πλήρως σε γραμμική αρμονική συμπεριφορά, τότε παρέχει μία αρνητική συνολική αντίσταση, με μέγεθος τέτοιο ώστε να μπορεί να υπερνικήσει τις μηχανικές και ακουστικές απώλειες σε όλο το σύστημα του συντονιστή. Μολονότι απλοποιεί τα πράγματα, το μειονέκτημα αυτής της θεώρησης είναι ότι δεν μας παρέχει πληροφόρηση για το ηχητικό φάσμα του οργάνου και την ποιότητα, με όλα όσα συνεπάγεται αυτό (αρμονικές, ένταση αρμονικών, αρχικά μεταβατικά φαινόμενα κλπ). Αν παρόλα αυτά κάνουμε μία υπόθεση για τις εντάσεις των αρμονικών, όπως για παράδειγμα μία εξασθένιση 6 dB ανά οκτάβα, στην περίπτωση μίας χορδής που διεγείρεται από δοξάρι, τότε αυτό το φάσμα αναπροσαρμόζεται από τις παλμικές και ακτινοβολούντες ιδιότητες του δευτερεύοντος συντονιστή (το σώμα του έγχορδου) και αυτή η επίδραση είναι που

καθορίζει τελικά την ηχητική ποιότητα του οργάνου. Η διαφορά ανάμεσα σε ένα κακό και ένα καλό βιολί προέρχεται κυρίως από τις παλμικές ιδιότητες του σώματος του οργάνου [42].

Στην πλήρως μη-γραμμική προσέγγιση του διεγέρτη, η σύζευξη με τον συντονιστή είναι αναπόφευκτη και προς τις δύο κατευθύνσεις, ώστε είναι αδύνατο να θεωρήσουμε τα δύο αυτά συστήματα ξεχωριστά.

Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η επιρροή των συνιστωσών ενός πνευστού στους βασικούς μηχανισμούς του. Επίσης βλέπουμε πως επηρεάζουν το όργανο ξεχωριστά οι γραμμικές και οι μη-γραμμικές ιδιότητες του διεγέρτη. Οι μη-γραμμικές, όπως ειπώθηκε, αποτελούν το μεγαλύτερο ποσοστό. Ο πίνακας είναι δανεισμένος απ' τη βιβλιογραφική αναφορά [39] και όπου I σημαίνει Ισχυρή επίδραση, ενώ A ασθενής.

3.5 Τρόποι μελέτης των πνευστών

Το πρόβλημα της μελέτης των πνευστών ξεκινάει από τη διαφορετική μαθηματική φύση των δύο βασικών του συνιστωσών. Ο διεγέρτης είναι μη γραμμικός και ο συντονιστής γραμμικός. Έτσι μελετούμε τις σχέσεις που περιγράφουν κάθε μία συνιστώσα ξεχωριστά και έπειτα ενώνουμε τις μαθηματικές αυτές περιγραφές μέσω συνθηκών συνέχειας της ροής και της ακουστικής πίεσης.

	Συντονιστής	Διεγέρτης		Στοματική κοιλότητα
	Γραμμικός	Γραμμικός	Μη-γραμμικός	Γραμμική
Φθογγικό ύψος	I	I	A	A
Ένταση (πλάτος κύματος)	A	I	I	A
Ηχητικό φάσμα	A	A	I	A
Μεταβατικά φαινόμενα	A	A	A	A

Πίνακας 3.3

Το μέγεθος της επίδρασης των συνιστωσών ενός πνευστού στις βασικές του ιδιότητες.
I = Ισχυρή επίδραση, A = Ασθενής επίδραση

Σε όλες τις περιπτώσεις, οι αναδραστικοί μηχανισμοί που περιλαμβάνουν και τον μουσικό λειτουργούν με αρκετά πιο αργό ρυθμό από τους αναδραστικούς μηχανισμούς εντός του οργάνου, ώστε να είναι λογικό να τους αντιμετωπίζουμε σαν να παρέχουν στο εσωτερικό του συστήματος αργά μεταβαλλόμενες ή ακόμα και σταθερές εξωτερικές επιδράσεις. Πρώτα λοιπόν γίνονται κατανοητοί οι εσωτερικοί μηχανισμοί του οργάνου, ως προς τη γραμμική και μη γραμμική φυσική τους, και έπειτα μεταβαίνουμε και στον εξωτερικό χώρο για να μελετήσουμε την επίδραση του μουσικού και του περιβάλλοντος επάνω σε αυτό.

Η ανάλυση ενός οποιουδήποτε φυσικού συστήματος μπορεί να προσεγγισθεί με πολλούς τρόπους. Για το σύστημα του πνευστού η πιο χρήσιμες προσεγγίσεις είναι ως προς το *πεδίο του χρόνου* και ως προς το *πεδίο της συχνότητας*. Η μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο είναι εύκολη στην περίπτωση του γραμμικού υποσυστήματος, καθώς τα δύο πεδία συνδέονται μεταξύ τους με μετασχηματισμό Fourier. Τα μη γραμμικά υποσυστήματα είναι πιο δύσκολο να συζευχθούν μεταξύ τους. Η τρίτη προσέγγιση είναι με τη μέθοδο της *αρμονικής ισορροπίας*, χωρίς να αποτελεί ιδιαίτερη διαφοροποίηση από τη συχνοτική προσέγγιση. Η προσέγγιση αυτή είναι σίγουρα, όπως θα δούμε, η πιο απλοϊκή.

Το σημαντικό χαρακτηριστικό των δύο πρώτων προσεγγίσεων είναι πως κάθε φορά θα περιγράφεται μία από τις δύο βασικές συνιστώσες πολύ καλά, ενώ η άλλη με απλουστευμένο και προσεγγιστικό τρόπο. Και αυτό λόγω της διαφορετικής μαθηματικής φύσης τους.

Προσέγγιση στο πεδίο του χρόνου (Time-domain approach)

Οι δύο κύριες συνιστώσες στις οποίες χωρίζεται ένα πνευστό, δηλαδή ο διεγέρτης και ο συντονιστής είναι υποσυστήματα, το καθένα με δικιά του είσοδο και έξοδο. Η συμπεριφορά τους καθορίζεται από τη σχέση μεταξύ ακουστικών ποσοτήτων (πίεση και ροή) στην έξοδο και όμοιων ακουστικών ποσοτήτων στην είσοδο. Ο διεγέρτης μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μικρός σε σύγκριση με το μήκος κύματος που περιέχεται σε όλο το σύστημα. Κρίνεται λοιπόν λογικό να περιγραφεί η συμπεριφορά του από ένα σύνολο “τοπικών” μη-γραμμικών εξισώσεων, υπό την έννοια ότι όλες οι

μεταβλητές μεταβάλλονται ραγδαία σε κάθε σημείο του, λόγω επίδρασης των παραμέτρων εισόδου και εξόδου. Μία αντιμετώπιση του διεγέρτη στο πεδίο του χρόνου είναι συνεπώς σχετικά απλούστερη και ακριβέστερη, άπαξ και έχουν προσδιορισθεί όλες οι εσωτερικές φυσικές μεταβλητές.

Ο συντονιστής από την άλλη έχει διαστάσεις συγκρίσιμες με το μήκος κύματος του συστήματος, ξεπερνώντας το κατά πολύ αρκετές φορές. Η συμπεριφορά του μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων, μία απ' τις οποίες θα είναι η κυματική εξίσωση για τη διάδοση του ήχου στον κορμό του.

Η βασική αρχή στην οποία στηρίζεται η χρονική προσέγγιση είναι η εύρεση συναρτήσεων που καθορίζουν την απόκριση του οργάνου σε έναν παλμό της αέριας στήλης, στην είσοδο του ακουστικού σωλήνα, δηλαδή στην έξοδο του διεγέρτη. Ο Fletcher [39] μιλάει ουσιαστικά για μία υποκίνηση της ροής του αέρα, που ξεκινάει από την έξοδο του διεγέρτη (flow impulse). Η απόκριση του οργάνου συσχετίζεται μέσω μετασχηματισμού Fourier με την εμπέδηση εισόδου (επόμενη ενότητα) στο πεδίο της συχνότητας, όπου τα μεγέθη είναι πιο άμεσα κατανοήσιμα.

Όταν ολοκληρωθεί η αντιμετώπιση και των δύο υποσυστημάτων στο πεδίο του χρόνου, τότε είναι σχετικά απλή η συνένωσή τους, απαιτώντας τη συνέχεια των ακουστικών ποσοτήτων στην κοινή επιφάνεια των δύο υποσυστημάτων. Αυτή η διαδικασία οδηγεί συνήθως σε μία ολοκληρωτική εξίσωση [56], που μπορεί να λυθεί αριθμητικά και να δώσει την κυματομορφή της ροής και της πίεσης είτε στο στόμα του μουσικού, είτε στην ένωση του διεγέρτη με τον συντονιστή, είτε στο ανοικτό άκρο του συντονιστή και στην καμπάνα του, αν υπάρχει. Για τα όργανα με σπές, χρειάζεται να χωρίσουμε τον ακουστικό σωλήνα σε διαδοχικά τμήματα και να υπολογίσουμε τις επί μέρους μεταβολές.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της χρονικής προσέγγισης είναι ότι οδηγεί αυτόματα σε μία πολύ ικανοποιητική περιγραφή των μεταβατικών φαινομένων και ιδίως της αρχικής μετάβασης (initial transient), καθώς η ολοκλήρωση των εξισώσεων απαιτεί ακριβή γνώση του τρόπου με τον οποίο εφαρμόζεται η πίεση πνοής (blowing pressure) προς το όργανο και άρα ακολουθεί πιστά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος [39]. Αυτό οδηγεί στην πιθανότητα να υπάρχουν διαφορετικές ευσταθείς λύσεις, εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες, κάτι που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά των πνευστών.

Ένα σημαντικό στοιχείο της χρονικής προσέγγισης είναι ότι δεν γίνονται υποθέσεις για τη μορφή των παραγόμενων ηχητικών κυμάτων, αλλά τόσο τα πλάτη όσο και οι συχνότητές τους καθορίζονται αυτόματα από την εξέλιξη των αριθμητικών υπολογισμών.

Προσέγγιση στο πεδίο της συχνότητας (Frequency-domain approach)

Η πιο συνηθισμένη και λογική προσέγγιση της λειτουργίας των πνευστών, ιδίως πριν τις μεγάλες ταχύτητες των υπολογιστών, ήταν και είναι η αντιμετώπιση του διεγέρτη και του συντονιστή στο πεδίο της συχνότητας. Ο συντονιστής, μέσω της καμπύλης εμπέδησης εισόδου, λαμβάνει έναν άπειρο αριθμό από κανονικούς τρόπους ταλάντωσης που διεγείρονται ο καθένας ξεχωριστά από το διεγέρτη. Καθώς ο συντονιστής είναι γραμμικός, όλοι αυτοί οι τρόποι μπορούν να συνυπάρχουν ανεξάρτητα και να συνεισφέρουν ο καθένας ξεχωριστά στο συνολικό ηχητικό αποτέλεσμα. Οι ιδιοσυχνότητες του συντονιστή έχουν γενικά μη αρμονική σχέση, παρόλο που κάποια καλοσχεδιασμένα και κατασταλαγμένα, διαμέσου των αιώνων, μουσικά όργανα έχουν αρμονική σχέση σε ορισμένους απ' τους τρόπους τους (κυρίως στους πρώτους).

Η απόκριση τώρα του διεγέρτη, που είναι μη γραμμικός, δεν προκύπτει από απλή υπέρθεση των αποκρίσεων στους κανονικούς τρόπους του συντονιστή, που λαμβάνουν χώρα για μία συγκεκριμένη κατάσταση πίεσης πνοής. Απεναντίας, ο διεγέρτης ανταποκρίνεται στο άθροισμα των όλων πιέσεων ή των ροών που σχετίζονται με τους ανεξάρτητους τρόπους και γι' αυτό η συνολική απόκρισή του είναι μη γραμμική. Η απόκριση λοιπόν του διεγέρτη περιλαμβάνει πολλαπλά αθροίσματα και διάφορες των συχνοτήτων που χαρακτηρίζουν τους τρόπους του συντονιστή, κάθε ένα από τα οποία βρίσκεται σε συγκεκριμένη φάση, που δρα ως εκ νέου διεγείρουσα δύναμη για τους τρόπους. Το γεγονός ότι υπάρχει διαφορά φάσεων, οδηγεί και σε μεταβολή των συχνοτήτων των φυσικών τρόπων του συντονιστή. Το αποτέλεσμα είναι να «κλειδώνονται» οι συχνότητες και οι φάσεις των τρόπων, συνήθως, δημιουργώντας εν τέλει ένα πλήρως αρμονικό φάσμα. Παρόλα αυτά, ένα τέτοιο κλειδώμα (mode locking) δεν συμβαίνει πάντοτε. Έτσι σε ορισμένες περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι μη αρμονικό.

Θα δούμε στο μέρος III την ανάπτυξη μίας διαδικασίας από τον Fletcher για την λεπτομερή εύρεση της εξέλιξης του αρμονικού φάσματος των sustained-tone μουσικών οργάνων. Με βάση τη μαθηματική μέθοδο των αργά μεταβαλλόμενων παραμέτρων (Slowly Varying Parameters) [U,GG,NN,OO] καταστρώνεται μία εξίσωση για κάθε τρόπο και έπειτα ολοκληρώνεται αριθμητικά. Αυτή η προσέγγιση του προβλήματος, εκτός από τη μόνιμη κατάσταση, δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα και για τα μεταβατικά φαινόμενα και ιδίως τα αρχικά. Στο ξεκίνημα ενός φθόγγου οι

τρόποι του συντονιστή διεγείρονται στις φυσικές τους συχνότητες που, όπως αναφέρθηκε, στην πραγματικότητα δεν έχουν ακριβή αρμονική σχέση. Καθώς όμως τα πλάτη τους μεγαλώνουν, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους γίνονται ολοένα ισχυρότερες, ώστε οι συχνότητες τους αναγκάζονται να υπακούσουν σε πλήρη αρμονική συμπεριφορά. Παρότι αυτή η προσέγγιση είναι εκ πρώτης όψεως απλή στη σκέψη και εύληπτη στη φιλοσοφία της, εν τούτοις πάσχει στο ότι απαιτεί εκτενή αλγεβρικό λογισμό για την κατάστρωση των εξισώσεων των τρόπων. Η άλγεβρα γίνεται απαγορευτικά πολύπλοκη για τη χειρωνακτική κατάστρωση των εξισώσεων, όταν οι τρόποι ξεπεράσουν τους τρεις. Ο Fletcher στις δημοσιεύσεις του [31,32] υπολόγισε τους τρεις πρώτους τρόπους, εισάγοντας τις εξισώσεις έτοιμες στον υπολογιστή για την αριθμητική τους ολοκλήρωση. Τώρα, που οι πράξεις του H/Y γίνονται ασύγκριτα γρηγορότερα από την εποχή των παραπάνω δημοσιεύσεων, μπορούμε να προγραμματίσουμε τον υπολογιστή να δημιουργήσει μόνος του τις εξισώσεις για περισσότερους τρόπους ταλάντωσης. Αυτή την απόπειρα εκτελούμε στο 2^ο κεφάλαιο του III μέρους της εργασίας, αφού πρώτα εξασκηθούμε με τις έτοιμες, «χειρωνακτικές» εξισώσεις του Fletcher.

Αρμονική ισορροπία (Harmonic balance)

Η μέθοδος τις αρμονικής ισορροπίας, που χρησιμοποιείται ευρέως στην ηλεκτρονική, αντιμετωπίζει μόνο τη μόνιμη κατάσταση και εισάγει την υπόθεση ότι οι υψηλότεροι τρόποι υπακούν σε αρμονικότητα, ώστε οι κυματομορφές να είναι απόλυτα επαναλαμβανόμενες, δηλαδή με χρονικά αμετάβλητη μορφή. Από αυτή τη σκοπιά, είναι δυνατό να αντιμετωπισθεί ο διεγέρτης στο πεδίο του χρόνου και ο συντονιστής στο πεδίο της συχνότητας, συνδέοντας τα δύο αυτά υποσυστήματα με μετασχηματισμό Fourier που εκτελείται αριθμητικά. Με αυτόν τον τρόπο, και οι δύο βασικές συνιστώσες του οργάνου αντιμετωπίζονται πιο φυσικά, από την άποψη της λειτουργίας τους. Η λύση προσεγγίζεται με επαναλήψεις από ένα λογικό σημείο εκκίνησης. Για παράδειγμα, θεωρείται ότι ο πιο χαρακτηριστικός και σημαντικός τρόπος του συντονιστή περιγράφεται από μία απλή ημιτονοειδή μορφή. Έτσι είναι εύκολο να προσδιοριστούν οι υπόλοιποι.

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι η αδυναμία να περιγραφούν τα μεταβατικά φαινόμενα [39] και οι πιθανές μη αρμονικές συμπεριφορές. Παρόλα αυτά, για το πεδίο εφαρμογής που αναφέρθηκε, δηλαδή την ανάλυση του ηχητικού φάσματος, αποτελεί ένα γρήγορο και χρήσιμο υπολογιστικό εργαλείο. Συνήθως χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι βασισμένοι στον ταχύ μετασχηματισμό Fourier (FFT).

Γενικότερα, η μέθοδος της αρμονικής ισορροπίας βοηθά μάλλον σε μία ικανοποιητική ποιοτική ανάλυση του φάσματος ενός οργάνου, χωρίς να απαιτείται μία πλήρης ανάλυση της λειτουργίας του, όπως συμβαίνει με τις άλλες δύο προσεγγίσεις.

3.6 Εμπέδηση εισόδου

Ένα σημαντικό μέγεθος στη μελέτη των πνευστών είναι η ακουστική εμπέδηση στην είσοδο του συντονιστή (input impedance). Στο μέρος I της εργασίας είδαμε ότι η ακουστική εμπέδηση είναι ο λόγος της ακουστικής πίεσης προς την ακουστική ροή (όγκου). Στην είσοδο του συντονιστή, η δύναμη και η πίεση που οδηγεί τη ροή προέρχεται απ' τον διεγέρτη. Η ακουστική εμπέδηση εισόδου συμβολίζεται \bar{Z}_p . Πολλά όργανα έχουν επινοηθεί για τη μέτρηση της \bar{Z}_p [7,16,70], η οποία είναι μία σύνθετη ποσότητα. Κατά συνέπεια, το εκάστοτε σύστημα μέτρησης μπορεί να ρυθμιστεί να προσδιορίζει είτε το πραγματικό είτε το φανταστικό μέρος είτε τέλος το μέτρο της και τον αντίστροφο του μέτρου, που είναι η αγωγιμότητα (admittance) \bar{Y}_p .

Σε έναν στενό κυλινδρικό ακουστικό σωλήνα, διατομής A η ταχύτητα του ήχου είναι σχεδόν ίδια με την ταχύτητα στον ελεύθερο αέρα και το μεγαλύτερο ποσοστό απωλειών προκαλείται από φαινόμενα συνεκτικότητας της αέριας στήλης και μετάδοσης θερμότητας μέσω των τοιχωμάτων. Μικρό ποσοστό ενέργειας χάνεται απ' το άκρο του σωλήνα, όταν αυτό είναι ανοιχτό, εφ' όσον η περιφέρεια σε εκείνο το σημείο είναι πολύ μικρότερη του μήκους κύματος που περιέχεται. Κατά τα γνωστά ο κυματικός αριθμός μίας γωνιακής συχνότητας ω είναι $k = \frac{\omega}{c}$. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το k με την

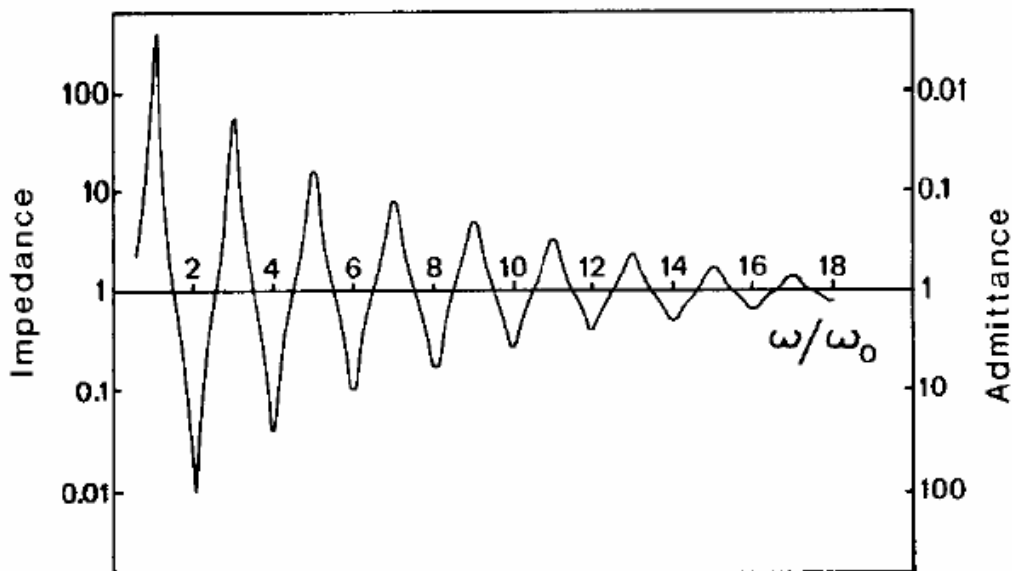
έκφραση $k - jk'$, για να συμπεριλάβουμε τις ενεργειακές απώλειες, όπου $j = \sqrt{-1}$ και $k' \ll k$. Η παράμετρος απωλειών k' αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα της (γωνιακής) συχνότητας $\omega^{1/2}$. Αν ο σωλήνας είναι ανοικτός στο άκρο εξόδου του, τότε η εμπέδηση εισόδου είναι με πολύ καλή προσέγγιση:

$$\bar{Z}_p \approx j \frac{\rho c}{A} \tan[(k - jk')L] \quad (3.1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα και L το ενεργό μήκος του σωλήνα, μεγαλύτερο απ' το γεωμετρικό κατά 0,6 επί την ακτίνα. Η μορφή της σχέσης 3.1 φαίνεται στο σχήμα 3.7, όπου ο κάθετος άξονας της εμπέδησης είναι σε λογαριθμική κλίμακα. Οι συχνότητες στον οριζόντιο άξονα εκφράζονται ως προς τη θεμέλιο ω_0 . Η μορφή της αγωγιμότητας εισόδου $\bar{Y}_p = \frac{1}{\bar{Z}_p}$ λαμβάνεται εύκολα αν αναστρέψουμε το

διάγραμμα. Η γραφική παράσταση της εμπέδησης εισόδου καλείται *φάσμα εμπέδησης εισόδου (input impedance spectrum)*.

Στο σχήμα 3.7 λήφθηκε η τυπική τιμή $\frac{\rho c}{A} = 10^6 \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} = 1$ ακουστικό megohm. Η εμπέδηση εισόδου παρουσιάζει μέγιστα για τις συχνότητες $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ και ελάχιστα για τις συχνότητες $2\omega_0, 4\omega_0, \dots$. Για τις ίδιες συχνότητες, η αγωγιμότητα παρουσιάζει ελάχιστα και μέγιστα αντίστοιχα. Μπορούμε τώρα να διατρέσουμε τα πνευστά σε άλλες δύο κατηγορίες σύμφωνα με την επίδραση που έχει ο διεγερτικός μηχανισμός στην εμπέδηση εισόδου. Έτσι έχουμε πνευστά:



Σχήμα 3.7

Το φάσμα της εμπέδησης εισόδου ενός πνευστού [36].

- *Ελεγχόμενα από πίεση.*

Περιλαμβάνονται τα κυλινδρικά reed generator και lip generator πνευστά. Στα πνευστά αυτά το ένα άκρο του σωλήνα, εκεί που προσαρμόζεται ο διεγερτικός μηχανισμός, είναι παλινδρομικά κλειστό. Δηλαδή όταν η γλωσσίδα εφάπτεται στο στόμιο του διεγέρτη, τότε κλείνει πλήρως το άκρο. Τότε επίσης η πίεση και η εμπέδηση παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους. Καταλαβαίνουμε ότι ο διεγέρτης παρέχει τη μέγιστη ενέργεια για τις συχνότητες που η εμπέδηση μεγιστοποιείται (σχήμα 3.7). Δηλαδή για τις περιττές αρμονικές.

- *Ελεγχόμενα από ταχύτητα.*

Περιλαμβάνονται τα air-jet generator πνευστά. Εδώ, το άκρο του σωλήνα, όπου προσαρμόζεται ο διεγερτικός μηχανισμός, είναι ανοικτό. Τα πνευστά αυτά λειτουργούν με ρεύμα αέρα, δηλαδή ροή αέρα. Αφού η εμπέδηση ορίζεται ο λόγος πίεσης προς τη ροή, συμπεραίνουμε ότι για να μεγιστοποιείται η ροή, ελαχιστοποιείται η εμπέδηση. Ο air-jet διεγέρτης παρέχει τη μέγιστη ενέργεια στις άρτιες αρμονικές, όπου η εμπέδηση είναι ελάχιστη (αγωγιμότητα μέγιστη).

Από τη γραφική παράσταση της εμπέδησης βλέπουμε ότι η πρώτη συχνότητα (η θεμελιώδης) στην οποία ηχούν τα air-jet πνευστά είναι $2\omega_0$, ενώ τα reed ω_0 , για το ίδιο μήκος σωλήνα. Επαληθεύεται δηλαδή ότι ο ανοικτός ακουστικός σωλήνας ηχεί μία οκτάβα ψηλότερα απ’ τον κλειστό, στη θεμελιώδη του συχνότητα.

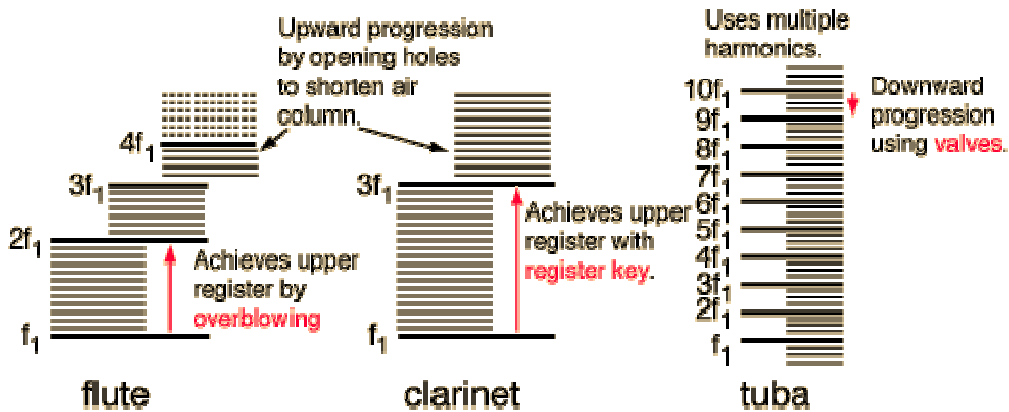
Αν κλείσουμε τώρα και το απέναντι άκρο ενός πνευστού ελεγχόμενου από πίεση, τότε η προσπάθειά μας να φυσήξουμε θα καταρρεύσει, καθώς η πίεση απ’ το στόμιο δεν θα μπορεί να εκτονωθεί μέσω του απέναντι άκρου, στην ατμόσφαιρα. Η εμπέδηση εξόδου είναι τώρα άπειρη.

Σε ένα πνευστό ελεγχόμενο από ταχύτητα, ακόμα και αν το απέναντι άκρο είναι κλειστό, η ροή που προέρχεται απ’ το στόμιο (ανοικτό άκρο) θα εξοστρακιστεί πάλι μέσω αυτού και ο ακουστικός σωλήνας θα συνεχίσει να ταλαντώνεται. Τώρα όμως ο σωλήνας είναι κλειστός στο ένα άκρο και ηχεί στις περιττές αρμονικές. Η \tan στη σχέση (3.1) αντικαθίσταται απ’ την \cot και η αγωγιμότητα έχει μορφή ίδια με την εμπέδηση του σχήματος 3.7.

Όσα αναφέρθηκαν σχετικά με τα κυλινδρικά όργανα, ελεγχόμενα από πίεση, δεν ισχύουν γι’ αυτά που ο ακουστικός τους σωλήνας έχει κωνικό σχήμα. Το όμποε, το φαγκότο και το σαξόφωνο εμφανίζουν μέγιστα εμπέδησης στις συχνότητες $2\omega_0, 4\omega_0, \dots$. Δεδομένου ότι ο σωλήνας στην ουσία δεν είναι πλήρης κώνος, αλλά κόλουρος, το μήκος L στη σχέση (3.1) αντιστοιχεί στο αξονικό μήκος του νοητού πλήρη κώνου [RR,UU].

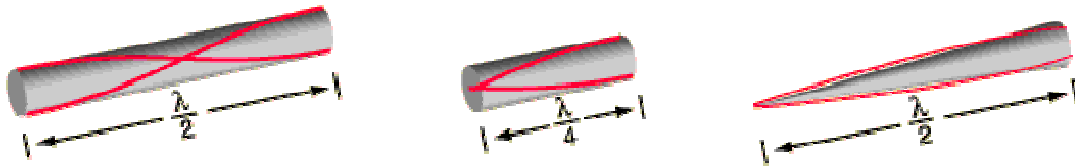
Τα χάλκινα τώρα πνευστά (lip generator) δεν αποτελούνται στην πραγματικότητα από ενιαίο σχηματισμό σωλήνα. Το στόμιό τους είναι σαν φλιτζανάκι και ο ακουστικός σωλήνας στη συνέχεια ξεκινάει ως κυλινδρικός αλλά σύντομα γίνεται αρκετά κωνικός για να καταλήξει στην καμπάνα, που εμφανίζει πολύ μεγάλη (σχεδόν ορθή) γωνία κορυφής, στην κατάληξή της. Ένας σχεδιαστής χάλκινων προσαρμόζει έτσι το όργανο, ώστε τα μέγιστα της εμπέδησης εισόδου να αντιστοιχούν στις συχνότητες $0.8\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0$ [V,14].

Στο σχήμα 3.8 φαίνεται σε ποιες συχνότητες συντονίζεται ένα χαρακτηριστικό πνευστό από κάθε οικογένεια. Κατά σειρά, το φλάουτο αντιπροσωπεύει τα air-jet generator πνευστά, το κλαρινέτο τα reed generator και η τούμπα τα lip generator.



Σχήμα 3.8

Τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται στον ακουστικό σωλήνα κάθε ενός από τα παραπάνω μουσικά όργανα φαίνονται στο σχήμα 3.9. Παρατηρούμε ότι ο κωνικός σωλήνας λειτουργεί όμοια με σωλήνα ίδιου μήκους, κλειστό στο ένα άκρο.



Σχήμα 3.9

3.7 Απώλειες ενέργειας

Έχει γίνει κατανοητό ότι ο διεγέρτης προσφέρει συνεχώς ενέργεια στο συντονιστή (ακουστικό σωλήνα) για να καλυφθούν οι ενεργειακές απώλειες του τελευταίου και να επικρατεί ενεργειακή ισορροπία. Κατά τη μελέτη των πνευστών ισχύουν δύο βασικές παραδοχές [RR]:

1) Αμελούμε τις ενεργειακές απώλειες στον ίδιο τον αέρα (μέσο), θεωρώντας πως είναι αρκετά μικρότερες από αυτές στο τοίχωμα. Οι απώλειες τοιχώματος μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν.

2) Το τοίχωμα θεωρείται άκαμπτο και σκληρό καθώς και μεγάλης θερμικής αγωγιμότητας και χωρητικότητας, ώστε να είναι, τόσο μηχανικά όσο και θερμικά, σε πλήρη ηρεμία.

Οι απώλειες ενέργειας στο τοίχωμα του συντονιστή χωρίζονται σε απώλειες λόγω συνεκτικότητας και σε θερμικές απώλειες.

Η πρώτη κατηγορία έχει να κάνει με το ότι ο αέρας εμφανίζει έστω και μικρή συνεκτικότητα, ώστε η σημειακή ταχύτητα να μηδενίζεται καθώς ένα στοιχείο του ρευστού πλησιάζει το τοίχωμα.

Στη δεύτερη κατηγορία, παρόλο που πρακτικά θεωρούμε ότι η θερμοκρασία τοιχώματος είναι σταθερή, η θερμοκρασία του αέρα υφίσταται διακυμάνσεις εξ' αιτίας των αδιαβατικών διακυμάνσεων πίεσης. Αυτές οι διακυμάνσεις πίεσης μειώνονται δίπλα στο τοίχωμα, καθώς η θερμότητα ρέει περιοδικά, διαμέσου του τοιχώματος, προς τα έξω.

Τελικά όσο πλησιέστερα βρισκόμαστε στο τοίχωμα, τόσο πιο αισθητές γίνονται και οι δύο κατηγορίες απωλειών. Στα πνευστά η επιρροή του τοιχώματος στις κινήσεις του αέρα και άρα η δημιουργία απωλειών, περιορίζεται σε ένα λεπτό οριακό στρώμα. Έξω από αυτό το οριακό στρώμα, η σημειακή ταχύτητα είναι πρακτικά σταθερή σε όλη την κάθετη προς τη ροή επιφάνεια και οι αλλαγές καταστάσεων είναι ουσιαστικά αδιαβατικές.

Ο πρώτος που μελέτησε το πρόβλημα της απόσβεσης των ταλαντώσεων του αέρα, μέσα σε έναν άκαμπτο σωλήνα μεγάλου μήκους, ήταν ο Helmholtz. Η ανάλυση του Helmholtz παρουσιάζεται στο βιβλίο του Rayleigh *Theory of sound* [UU]. Έκτοτε έγιναν αρκετά πειράματα πάνω στην ταχύτητα του ήχου στον αέρα μέσα σε σωλήνες, για να ελεγχθεί η ορθότητα της μεθοδολογίας του Helmholtz. Το βιβλίο που περιλαμβάνει στοιχεία και από τη θεωρία του Helmholtz και από τα μετέπειτα πειράματα, είναι αυτό Crandall *Theory of Vibrating Systems and Sound* [W]. Σύμφωνα με τον Crandall, για ένα ακουστικό κύμα, το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται απότομα εντός του οριακού στρώματος, του οποίου το πάχος είναι:

$$d = (2\mu / \omega\rho)^{1/2} \quad (3.2)$$

όπου:

μ το ιξώδες.

ρ η πυκνότητα και

ω η γωνιακή συχνότητα του κύματος.

Το οριακό στρώμα δημιουργεί αντίσταση στην κίνηση του αέρα μέσα στο σωλήνα και έτσι αυτή η κίνηση παύει να συμπεριφέρεται ως απλό κύμα.

Απ' την άλλη ο Kirchoff ερεύνησε το θέμα των θερμικών απωλειών και κατέληξε πως όταν η αγωγιμότητα του αέρα εντός του σωλήνα είναι αρκετά μικρότερη των τοιχωμάτων, οι απώλειες είναι:

$$\alpha' = \frac{1}{ru} \sqrt{\frac{\omega}{2\rho}} \left(\sqrt{\mu} + \sqrt{(\gamma-1) \frac{K}{C_v}} \right) \quad (3.3)$$

όπου:

K είναι η θερμική αγωγιμότητα του αέρα,

γ ο λόγος των ειδικών θερμοχωρητικότητων,

C_v η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο

r η (εσωτερική) ακτίνα του ακουστικού σωλήνα (συντονιστή).

Η σχέση (4.2) αντικαθιστώντας το 2μ με το δυναμικό ιξώδες η (σύμφωνα με τον Nederveen [RR] για τον αέρα) γράφεται:

$$d = \sqrt{\frac{\eta}{\omega\rho}} \quad (3.4)$$

Το δυναμικό ιξώδες για τον αέρα στους 25° (μέση θερμοκρασία) είναι περίπου $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$ [N]. Η πυκνότητα είναι $\rho = 1,2 \text{ Kg/m}^3$. Για μια συχνότητα 1000 Hz, το πάχος του οριακού στρώματος είναι 0,05 mm. Οι διάμετροι των πνευστών πάντα ξεπερνούν κατά πολύ την τιμή αυτή. Η μικρότερη που έχει παρατηρηθεί είναι στην κορυφή του όμπουε (όπου βρίσκεται ο διεγερτικός μηχανισμός) και έχει τιμή 2,5 mm. Όσο βεβαίως η συχνότητα ελαττώνεται το οριακό στρώμα γίνεται όλο και πιο αμελητέο.

Η κυματική εξίσωση τώρα εντός ενός ιδανικού ακουστικού σωλήνα, χωρίς ενεργειακές απώλειες, μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

όπου K ο συντελεστής ελαστικότητας Young για τον αέρα και p η πίεση.

Στην πραγματική περίπτωση, όπου έχουμε ενεργειακές απώλειες η ελαστικότητα και η πυκνότητα μπορούν να μετασχηματιστούν σε δύο σύνθετες σταθερές:

$$K_w = K[1 - (1 - j)\alpha'_t] \quad (3.6)$$

$$\rho_w = \rho[1 + (1 - j)\alpha'_v] \quad (3.7)$$

όπου τα α'_v και α'_t είναι δύο πραγματικές ποσότητες που δίνονται από τις σχέσεις [RR]:

$$\alpha'_t = \frac{1}{r}(\gamma - 1) \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho \cdot C_p}} \quad (3.8)$$

$$\alpha'_v = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} \quad (3.9)$$

όπου λ το μήκος κύματος.

Βλέπουμε απ' τις προηγούμενες σχέσεις ότι η θερμοχωρητικότητα επιδρά στην ελαστικότητα, ενώ η συνεκτικότητα στην πυκνότητα του αέρα.

Παρόμοια τροποποίηση υφίσταται και ο κυματικός αριθμός k , σύμφωνα με τη σχέση:

$$k_w = k[1 + (-j)\alpha'] \quad (3.10)$$

με

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha'_v + \alpha'_t) \quad (3.11)$$

Μπορούμε τώρα να ασχοληθούμε ξανά με τον παράγοντα ποιότητας συντονισμού Q (Q-value), ένα χρήσιμο μέγεθος στην μελέτη των πνευστών, και θα δούμε αργότερα το γιατί:

$$Q = \frac{1}{2\alpha'} = \frac{1}{\alpha'_v + \alpha'_t} \quad (3.12)$$

Πολύ συνηθισμένη έκφραση του παράγοντα συντονισμού είναι με το συντελεστή απόσβεσης k_d των τρόπων που λαμβάνει η αέρια στήλη εντός του συντονιστή:

$$Q = \frac{\omega}{k_d} \quad (3.13)$$

όπου όταν η ακτίνα r του ακουστικού σωλήνα είναι πολύ μικρότερη του περιεχόμενου μήκους κύματος, ο συντελεστής απόσβεσης μπορεί να υπολογισθεί για τον αέρα από τη σχέση [CC,32]:

$$k_d = \frac{r^2 \omega^2}{L_p c} + \frac{5 \cdot 10^{-5} c \omega^{1/2}}{r} \quad (3.14)$$

Όπου L_p το μήκος του ακουστικού σωλήνα.

Ενεργειακή απόδοση

Καλό είναι να έχουμε μία ιδέα για το τι ποσοστό της ενέργειας εισόδου σε ένα πνευστό μετατρέπεται σε ηχητική ενέργεια στην έξοδο.

Το ενεργειακό περιεχόμενο του ήχου ενός τυπικού μουσικού οργάνου κυμαίνεται από λίγες δεκάδες mwatt σε μερικές εκατοντάδες mwatt. Το εύρος της ισχύος αυτής αντιστοιχεί σε ένα εύρος ακουστικής πίεσης από 60 έως 110 dB, σε απόσταση ενός μέτρου από το σημείο ακτινοβολήσης του οργάνου [42]. Το δυναμικό εύρος τώρα των περισσότερων μουσικών οργάνων, δηλαδή η διάφορα τις χαμηλότερης από την υψηλότερη ένταση ήχου που μπορούν να παράγουν, δεν ξεπερνά τα 20 dB. Εξαιρέση αποτελούν η τρομπέτα, το τρομπόνι και το κλαρινέτο, που παρουσιάζουν ένα εύρος 30 dB [V,HH,42]. Ο μουσικός καταβάλλει μυϊκή δύναμη για να κινήσει το δοξάρι πάνω στη χορδή ενός εγχόρδου ή για να φυσήξει αέρα μέσα σε ένα πνευστό. Η ισχύς της προσφερόμενης ενέργειας κυμαίνεται από λίγες εκατοντάδες mwatt, στα έγχορδα και στα ξύλινα πνευστά, μέχρι 10 watt, περίπου, στα χάλκινα.

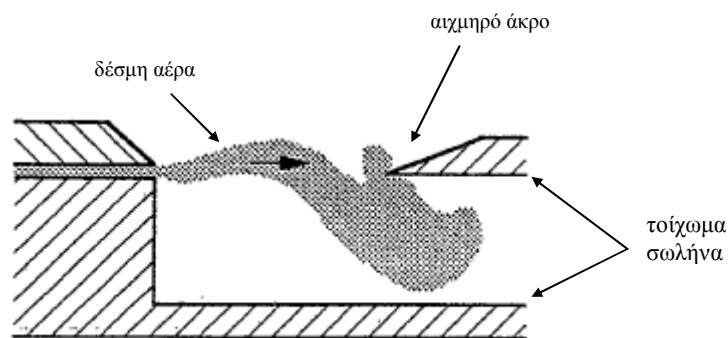
Συγκρίνοντας τις παρατηρήσεις για την ενέργεια εισόδου και εξόδου, καταλήγουμε ότι ο βαθμός απόδοσης των μουσικών οργάνων (τουλάχιστον για αυτά που διατηρούν τους συντονισμούς τους) είναι μεταξύ 0,1 έως 5 %. Καταλαβαίνει κανείς ότι ο ήχος είναι ένα εξαιρετικά δευτερεύον προϊόν του όλου συστήματος του μουσικού οργάνου. Το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας διαφεύγει σε τριβές, συνεκτικότητα και εν τέλει θερμότητα.

4

Πνευστά δέσμης αέρα (Air-Jet Wind instruments)

4.1 Γενική θεώρηση

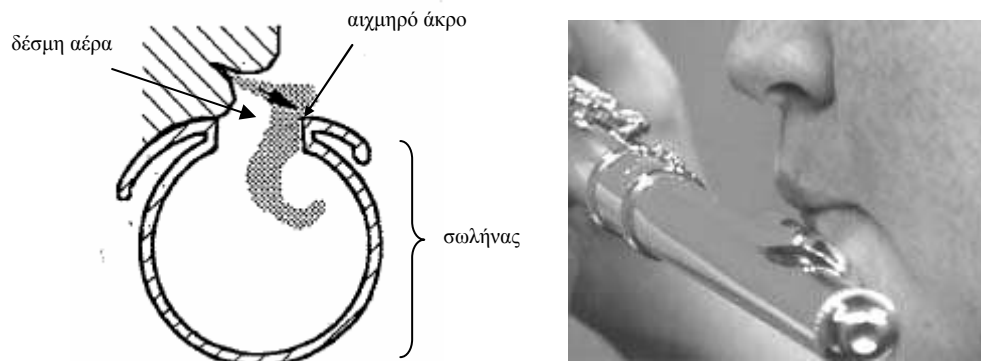
Η οικογένεια των πνευστών στην οποία θα επικεντρωθούμε από εδώ και στο εξής είναι αυτή που ο διεγερτικός μηχανισμός περιλαμβάνει τον ίδιο τον αέρα. Μία δέσμη αέρα (air jet) εκτοξεύεται από μία σχισμή κατευθυνόμενη προς ένα αιχμηρό άκρο (sharp edge), όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Από την πρόσκρουση της δέσμης στο άκρο, όλα τα πολύπλοκα φαινόμενα της μηχανικής των ρευστών οδηγούν σε διέγερση της αέριας στήλης του συντονιστή, χωρίς παρεμβολή μηχανικών τμημάτων, όπως είναι οι παλλόμενες γλωσσίδες ή τα παλλόμενα χείλη. Η οικογένεια αυτή περιλαμβάνει τους αυλούς (flue pipes), τη φλογέρα (recorder), τη σφυρίχτρα (whistle), το φλάουτο (flute), την οκαρίνα (ocarina) και τον αυλό του Πανός (Pan pipes). Οι διαφοροποιήσεις σε κάθε ένα από τα πνευστά αυτά έγκεινται στο σχηματισμό της δέσμης και στη μορφή του αιχμηρού άκρου.



Σχήμα 4.1

Ο δράση της αέριας δέσμης στον αυλό

Το σχήμα 4.1 παρουσιάζει απλοποιημένα τον μηχανισμό των αυλών, της φλογέρας και της σφυρίχτρας. Μία σταθερή σχισμή δημιουργεί δέσμη αέρα που κατευθύνεται απέναντι στο αιχμηρό άκρο, το οποίο και την αναγκάζει να ταλαντωθεί γύρω από αυτό, διεγείροντας την αέρια στήλη του σωλήνα.



Σχήμα 4.2

Η δράση της αέριας δέσμης στο φλάουτο

Ο βασικός μηχανισμός του φλάουτου παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2. Η σχισμή που δημιουργεί τη δέσμη σχηματίζεται από τα χείλη του μουσικού και η κατεύθυνση της προς το αιχμηρό άκρο είναι κάθετη προς τον άξονα του σωλήνα. Ο μηχανισμός σύζευξης των διαταραχών της δέσμης, λόγω του άκρου, με την αέρια στήλη δεν αλλάζει ουσιαστικά επειδή άλλαξε και η κατεύθυνση της δέσμης. Το φλάουτο μέσα στα χρόνια είχε διαφορετικές μορφές. Αρχικά η σχισμή του ήταν σταθερή, όπως στο σχήμα 4.1 και προσέγγιζε τη φλογέρα. Η ανάγκη όμως για μεγαλύτερη ερμηνευτική ποικιλία οδήγησε στην ελευθερία σχηματισμού της δέσμης από τον μουσικό, οποίος με αυτόν τον τρόπο, ρυθμίζει εκτός απ' την ταχύτητα, το πάχος, τη μορφή της και τη γωνία πρόσκρουσης. Στη φλογέρα και σε όλα τα παρόμοια όργανα (recorder like instruments) ο μουσικός ρυθμίζει όπως θα δούμε μόνο την ταχύτητα της δέσμης. Το σημερινό φλάουτο ονομάζεται εγκάρσιο φλάουτο (transverse flute), λόγω της κατεύθυνσης της δέσμης ως προς τον άξονα του οργάνου.



Σχήμα 4.3

Ο αυλός του Πανός [46]

Ένας τυπικός αυλός του Πανός εικονίζεται στο σχήμα 4.3. Αποτελείται από κομμάτια καλαμιών (περίπου 20 τον αριθμό) διαφόρων μηκών και ενωμένα στη σειρά. Το κάτω μέρος τους είναι κλειστό και συμπεριφέρονται ως ακουστικοί σωλήνες με κλειστό το ένα άκρο. Ο εκτελεστής κρατά το όργανο κατακόρυφα και σχηματίζει με τα χείλη μία δέσμη αέρα, όπως στο φλάουτο, την οποία και κατευθύνει λοξά στο επάνω άκρο των καλαμιών. Η πρόσκρουση της δέσμης στο άκρο των καλαμιών διεγείρει τις ιδιοσυχνότητές τους. Για τον κάθε φθόγγο, ο μουσικός φυσά στο αντίστοιχο καλάμι [46].

Η οκαρίνα είναι ουσιαστικά ένα δοχείο Helmholtz που διεγείρεται επίσης από μία δέσμη αέρα σχηματιζόμενη απ' το μουσικό. Επειδή όμως η παραγόμενη συχνότητα σε ένα δοχείο Helmholtz εξαρτάται από τον όγκο του αέρα εντός του και όχι το μήκος, για να παιχτούν οι διάφοροι φθόγγοι μεταβάλλουμε αυτόν τον όγκο με σπές διεσπαρμένες στο σώμα, που κλείνονται και ανοίγονται από τον μουσικό.

Πέρα από τα βασικά και πιο γνωστά όργανα αυτής της οικογένειας που αναφέρθηκαν ως εδώ, υπάρχει μία τεράστια ποικιλία από άλλα λιγότερο γνωστά στους πολλούς, συνηθισμένα όμως σε τοπικές κοινωνίες. Μπουκάλια, καλάμια, νέι, παραλλαγές του φλάουτου, των αυλών και άλλα. Όλα ερμηνεύονται με τους μηχανισμούς που θα περιγραφούν στη συνέχεια και την εισαγωγή ορισμένων τροποποιήσεων.

4.2 Ο αυλός και το όργανο αυλών

Για την ακουστική μελέτη των air jet πνευστών είναι βολικότερο να επικεντρωθούμε στη γεωμετρία του αυλού (που περιλαμβάνει και τη φλογέρα και τη σφυρίχτρα), γιατί διατηρεί τις γεωμετρίες του σταθερές κατά τη διάρκεια της μουσικής παραγωγής και περιορίζει τις παραμέτρους της εκτέλεσης σε μία: την πίεση ή την ταχύτητα πνοής της δέσμης.

Στη γεωμετρία των αυλών με τις πολλές παραλλαγές της, όπως θα δούμε, στηρίχθηκε η άνθηση των εκκλησιαστικών οργάνων. Η ιδιομορφία του εκκλησιαστικού οργάνου είναι ότι ο μουσικός δεν ρυθμίζει ούτε καν την ταχύτητα της δέσμης, παρά μόνο το ποιοι αυλοί θα ηχήσουν. Οι αυλοί τροφοδοτούνται από ποσότητα αέρα εγκλωβισμένη υπό πίεση σε δοχείο και ο μουσικός έχει μπροστά του πλήκτρα σε κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί μία σειρά από βαλβίδες αυλών. Πατώντας ένα πλήκτρο οι βαλβίδες ορισμένων αυλών ανοίγουν και ποσότητα του αέρα ελευθερώνεται εντός τους. Το εκκλησιαστικό όργανο, αυτό το μεγαλόπρεπο δημιούργημα, ανήκει και στα πνευστά, λόγω της φύσης της παραγωγής του ήχου, αλλά και στα πληκτροφόρα μουσικά όργανα, λόγω του μηχανισμού της εκτέλεσης.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι σπάνια θα συναντήσει κανείς στη διεθνή βιβλιογραφία τον όρο *church organ* (εκκλησιαστικό όργανο). Αντιθέτως, ο όρος *pipe organ* χρησιμοποιείται εκτενώς και μπορούμε να τον ερμηνεύσουμε ως *όργανο αυλών*. Το pipe organ περιλαμβάνει αυλούς που διεγείρονται από δέσμη αέρα (flue pipes), αλλά και αυλούς που διεγείρονται από παλλόμενες γλωσσιδές (reed

pipes), σαν το κλαρινέτο. Όταν ένα τέτοιο όργανο αποτελείται μόνο από air-jet αυλούς, καλείται flue pipe organ, ενώ όταν αποτελείται μόνον από reed αυλούς, καλείται reed pipe organ. Η χρήση των pipe organs στους καθολικούς ναούς έδωσε με τον καιρό και την εναλλακτική ονομασία church organ, αλλά η έννοια pipe organ είναι πολύ πιο ευρύτερη. Στο εξής θα καλούμε αυλούς μόνον τους flue pipes, καθώς οι reed αυλοί θα εμφανιστούν σπάνια έως καθόλου στη συνέχεια της εργασίας.

4.3 Η ιστορία του οργάνου αυλών

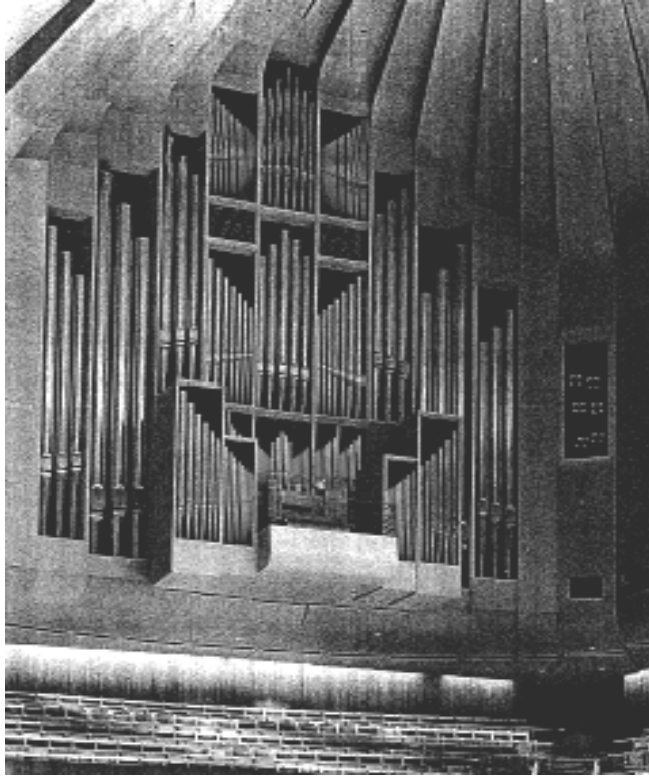
Η γέννηση του οργάνου αυλών χάνεται μέσα στους αιώνες και καταλήγει, όπως πολλά άλλα επιτεύγματα, στον ελληνικό πολιτισμό. Ο πρόδρομος του οργάνου αυλών ήταν η Ύδραυλις ή Ύδραυλος ή Ύδραυλικόν όργανον ή απλά όργανον που κατασκεύασε ο Έλληνας μηχανικός Κτησίβιος (285-222 π.Χ) κατά τα ελληνιστικά χρόνια. Λειτουργούσε με πεπιεσμένο αέρα, προερχόμενο από την ενέργεια μίας ανεμογεννήτριας και η ήχηση των αυλών του επιλέγονταν από πληκτροφόρο μηχανισμό. Ο Κτησίβιος έδρασε στην Αλεξάνδρεια και το όργανό του συγκαταλέγεται ανάμεσα στα θαυμαστά επιτεύγματα των χρόνων του Μ. Αλεξάνδρου και μετά. Το έργο του Κτησίβιου έχει χαθεί πλήρως και το γνωρίζουμε μέσα από αναφορές μεταγενέστερων μηχανικών και ιστορικών, ώστε να αμφισβητείται από κάποιους η δημιουργία του οργάνου απ' τον ίδιο. Μία εκτενή μελέτη για την Ύδραυλη και για την πρόσφατη ανακατασκευή της από την Εταιρεία Μελέτης Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας μπορεί κανείς να βρει στη διπλωματική εργασία του συναδέλφου Χ. Π. Παρνάσσα [Κ], απ' την οποία δανείστηκα και τα παραπάνω στοιχεία.

Από τα ελληνιστικά χρόνια και έπειτα άρχισε η ευρεία κατασκευή οργάνων, που ολοένα και εξελίσσονταν διαμέσου των αιώνων, αποτελώντας σταδιακά παράδοση του δυτικού πολιτισμού. Απ' τον 4^ο αιώνα μ.Χ. (1361) χρονολογείται η κατασκευή ενός μεγάλου οργάνου αυλών στο Halberstadt, που περιείχε ορισμένες εκατοντάδες αυλούς, ο μεγαλύτερος από τους οποίους είχε μήκος περίπου 25 ft (=7,62 m). Στο 10^ο αιώνα το όργανο αυλών άρχισε να υιοθετείται από τη Χριστιανική θρησκεία και ιδίως την Καθολική. Αυτή η συνύφανση του οργάνου με τις εκκλησίες, του έδωσε αργότερα το όνομα εκκλησιαστικό όργανο. Στη διάρκεια αυτού του αιώνα ένα πελώριο όργανο σχεδιάζόταν να κατασκευαστεί για τη Μητρόπολη του Winchester στην Αγγλία. Σύμφωνα με εικασίες, το όργανο θα περιλάμβανε 400 μεταλλικούς αυλούς, 26 δοχεία πίεσης – πνεύμονες (bellows) και δύο πληκτρολόγια με 40 συνολικά πλήκτρα. Κάθε πλήκτρο θα έλεγχε 10 αυλούς. Η μετέπειτα εξέλιξη αύξησε κατά πολύ τον αριθμό των αυλών στα όργανα. Το όργανο που κατασκευάστηκε το 1429 στη Μητρόπολη Amiens είχε 2500 αυλούς.

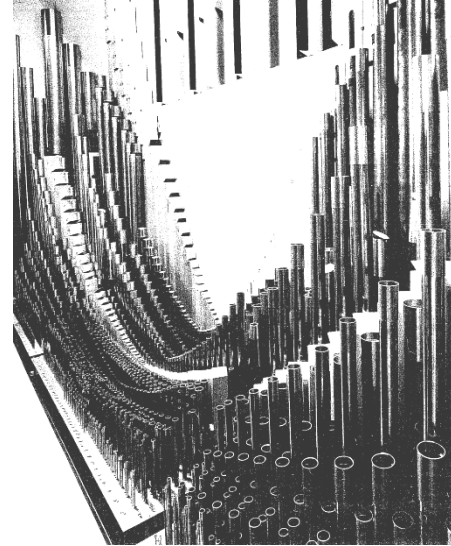
Η σύγχρονη μορφή του οργάνου άρχισε να σχηματίζεται στις αρχές του 17^{ου} αιώνα στο Continent. Ο 17^{ος} αιώνας χαρακτηρίζεται από μεγάλη άνθηση των οργάνων αυλών και γενικότερα των εκκλησιαστικών οργάνων. Η δημιουργία πολλών εμπειρικών, εξ' ολοκλήρου, κατασκευαστών προσέγγισε την τελειότητα στη διάρκεια αυτής της περιόδου (η λεγόμενη “κλασική περίοδος” της μουσικής) και αρκετά από τα όργανα αυτά στεγάζονται μέχρι σήμερα σε επιβλητικούς θρησκευτικούς ναούς. Η ποιότητα τους χαρακτηρίζεται από μία “ευγενική ομιλία” των πολυάριθμων αυλών τους, δίνοντας περισσότερο μία εντύπωση λαμπρότητας και όχι τόσο δύναμης. Η ηχητική πολλών τέτοιων οργάνων παραμένει αζεπέραστη! Παρά τη μεγάλη παραγωγή αυλών και οργάνων, δεν υπάρχει εξέλιξη από τη δημιουργία του οργάνου στο Continent και μέχρι τα μέσα του 19^{ου} αιώνα, όπου και συναντούμε τον δεύτερο μεγάλο σταθμό στην ανάπτυξη του οργάνου. Οι κατασκευαστές (organ-builders) Aristide Cavaille-Coll στη Γαλλία και ο πατέρας Henry Willis στην Αγγλία εισήγαγαν καινοτομίες για μεγαλύτερες και σταθερότερες πιέσεις αέρα στους αυλούς, σχεδίασαν νέους τύπους αυλών, που οδηγούσαν σε διαφορετική ποιότητα τόνου και πρότειναν νέους τρόπους διάταξης τους. Από τότε μέχρι και το 1890 υπήρξε μικρή βελτίωση της ηχητικής ποιότητας στα όργανα αυλών, αλλά η εισαγωγή του ηλεκτρισμού στους διάφορους επιμέρους μηχανισμούς τους, προσέδωσε νέες διαστάσεις στο μηχανικό τους μέρος [57]. Παράλληλα, ο αριθμός των αυλών δεν έπαυε να αυξάνεται και σήμερα πολλά όργανα διαθέτουν, ούτε λίγο, ούτε πολύ 10000 αυλούς! Η συνήχηση πολλών αυλών μαζί δίνει το λαμπρό και πλούσιο ηχητικό περιεχόμενο αυτού του οργάνου.

Όπως αναφέρθηκε, από την εποχή της επινοήσης της Ύδραυλεως μέχρι τα μέσα του 20^{ου} αιώνα αναπτύχθηκε μεγάλη γνώση και εμπειρία σχετικά με την κατασκευή του οργάνου αυλών, αλλά ελάχιστες φορές συνεργάστηκαν οι κατασκευαστές με τους επιστήμονες. Η κατασκευή του παρέμενε μία τέχνη που διαδιδόταν από γενιά σε γενιά και επειδή το άκουσμα θεωρούταν “τέλειο” δεν υπήρχε λόγος παραπέρα βελτίωσης μέσω της θεωρίας. Η ακοή όμως της ανθρωπότητας εξελίσσεται με τα χρόνια. Αυτό που κάποια στιγμή φαινόταν καινοτομικό τώρα μοιάζει τετριμμένο, συνηγήςσεις φθόγγων και αρμονικών που ενοχλούσαν με τη διαφωνία τους τώρα είναι κατά κάποιο τρόπο αναγκαίοι για να επέλθει η ανανέωση [EE]. Έτσι, όσο ικανοποιητικά και να ηχούσαν τα παλαιά όργανα, με την εξέλιξη της επιστήμης και της τεχνολογίας το ενδιαφέρον στράφηκε όχι μόνο στη βελτίωση τους, αλλά και στη

δημιουργία νέων, με βάση αυτά. Στη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα, δύο επιφανείς φυσικοί, ο Hermann von Helmholtz και ο Λόρδος Rayleigh κατέληξαν σε κάποια αντιφατικά συμπεράσματα σχετικά με τους βασικούς μηχανισμούς παραγωγής ήχου από αυλούς. Οι ισχυρισμοί τους όμως έπασχαν από θεωρητική τεκμηρίωση. Από την εποχή του Morse [PP,QQ] και του Mercer [57,58], στα μέσα του 20^{ου} αιώνα, είχε διαπιστωθεί πλέον η ανάγκη για θεωρητική μελέτη.



Σχήμα 4.4

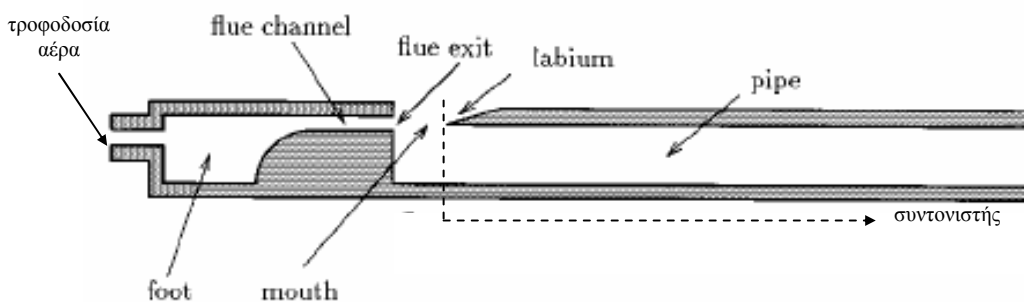


Σχήμα 4.5

Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η φωτογραφία του εκκλησιαστικού οργάνου της όπερας του Sydney στην Αυστραλία. Η κατασκευή του ολοκληρώθηκε το 1979 και θεωρείται ένα από τα μεγαλύτερα και καλύτερα σε όλο τον κόσμο. Έχει περίπου 10500 σωλήνες (flue και

reed αυλούς) που ελέγχονται από 5 πληκτρολόγια και μία σειρά πεταλιών για τα πόδια του εκτελεστή. Ο μηχανισμός που ρυθμίζει τη ροή του αέρα στους αυλούς λειτουργεί ηλεκτρικά και ελέγχεται από μικροεπεξεργαστή. Συνεπώς, το όργανο μπορεί να λειτουργήσει και χωρίς εκτελεστή, αλλά διαβάζοντας τις πληροφορίες του μουσικού κομματιού από αποθηκευτικά μέσα. Σχεδιαστής και κατασκευαστής του είναι ο Ronald Sharp. Μία φωτογραφία απ' το εσωτερικό του ίδιου οργάνου φαίνεται στο σχήμα 4.5

4.4 Η γεωμετρία ενός αυλού



Σχήμα 4.6

Η γεωμετρία ενός τυπικού αυλού

Στο σχήμα 4.6 εικονίζονται τα κύρια μέρη ενός τυπικού αυλού. Ο ακουστικός σωλήνας (pipe) είναι ο συντονιστής και λαμβάνεται από το αιχμηρό άκρο (labium ή upper lip) μέχρι το πέρας του σωλήνα, όπως φαίνεται απ' το διακεκομμένο βελάκι του σχήματος. Ο σωλήνας λοιπόν είναι ανοικτός και στα δύο άκρα. Οι σωλήνες έχουν ορθογωνική ή συνηθέστερα κυκλική διατομή (σχήμα 4.7). Το μέρος του συντονιστή καλείται και σώμα (body). Απέναντι απ' το αιχμηρό άκρο βρίσκεται η σχισμή (flue exit ή slit-like flue), απ' όπου εκτοξεύεται η αέρια δέσμη. Το άνοιγμα μεταξύ σχισμής και αιχμηρού άκρου ονομάζεται στόμα (mouth). Ο αυλός τροφοδοτείται με αέρα υπό πίεση στο αριστερό άνοιγμα (toe) και στο πόδι (foot) αποκαθίσταται στατική σταθερή πίεση. Το κανάλι (flue channel ή wind way) οδηγεί ομαλά τον αέρα προς τη σχισμή, λόγω διαφοράς πιέσεων μεταξύ ποδιού και στόματος (ατμόσφαιρα). Έτσι η δέσμη που εκτοξεύεται είναι στρωτή, στην ιδανική περίπτωση. Στο εξής, το αριστερό άκρο του σχήματος 4.6 θα καλείται απλά άκρο.



Σχήμα 4.7

Είδη διατομής συντονιστή

Ο αυλός διαπασών

Οι επιμέρους συνιστώσες ενός αυλού λαμβάνουν μεγάλη ποικιλία. Το πόδι μπορεί να είναι κωνικό, ενδέχεται να μην υπάρχει κανάλι, το άκρο του μπορεί να είναι κλειστό και πολλά άλλα. Από όλα τα είδη όμως αυλών, θεμελιώδης για τα όργανα αυλών θεωρείται ο ανοικτός διαπασών (open diapason ή principal, όταν έχει μικρές διαστάσεις). Είναι ένας μεταλλικός κυλινδρικός ανοικτός αυλός και το ιδιαίτερο ηχώχρωμά του είναι αυτό που χαρακτηρίζει τα όργανα αυλών (σχήμα 4.8).

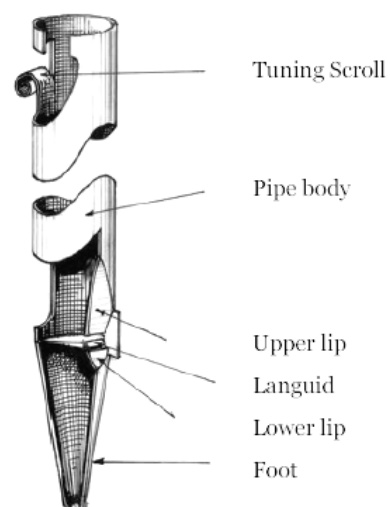
Στο σχήμα 4.9 εικονίζεται ένας αυλός διαπασών με θεμελιώδη συχνότητα 261 Hz που αντιστοιχεί στο Ντο (C) στο μέσον του πιάνου (Κεφ. 2). Γι' αυτό καλείται και «μεσαίο ντο». Έχει μήκος περίπου 0,61m (=2 ft).

Βλέπουμε ότι ο διαπασών δεν έχει κανάλι για τον αέρα, παρά μόνο ένα μεταλλικό πέτασμα που ονομάζεται languid ή tongue (γλώσσα), το οποίο αφήνει την απαιτούμενη σχισμή για τον σχηματισμό της δέσμης. Η σχισμή (flue exit ή flue) δημιουργείται επομένως από το languid και το κάτω χείλος (lower lip).

Ο αέρας που διεγείρει τον αυλό παρέχεται στο πόδι του σε πιέσεις από 500 μέχρι 1000 Pascal. Όταν δοθεί η εντολή να ηχήσει ο αυλός, το πόδι του πληρώνεται με αέρα και μία λεπτή δέσμη δραπετεύει απ' τη σχισμή. Η ταχύτητα της δέσμης είναι κάποιες δεκάδες μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Οι μεταλλικές πλάκες που περικλείουν το στόμα καλούνται αυτιά (ears) και διασφαλίζουν την ήχηση του αυλού στη θεμελιώδη του συχνότητα, όσο και αν αυξηθεί η πίεση.

Όπως όλοι οι αυλοί, έτσι και ο διαπασών, πρέπει να επιδέχεται φωνολογικές ρυθμίσεις (voicing). Δηλαδή να μπορεί να διορθώνεται το φθογγικό του ύψος. Με τρεις τρόπους γίνεται αυτό στο διαπασών [57,58]:

- 1) Με ένα ολισθαίνων κυλινδρικό δαχτυλίδι (tuning-slide ή tuning sleeve)
- 2) Αναμορφώνοντας το ανοικτό πάνω άκρο με μία κωνική

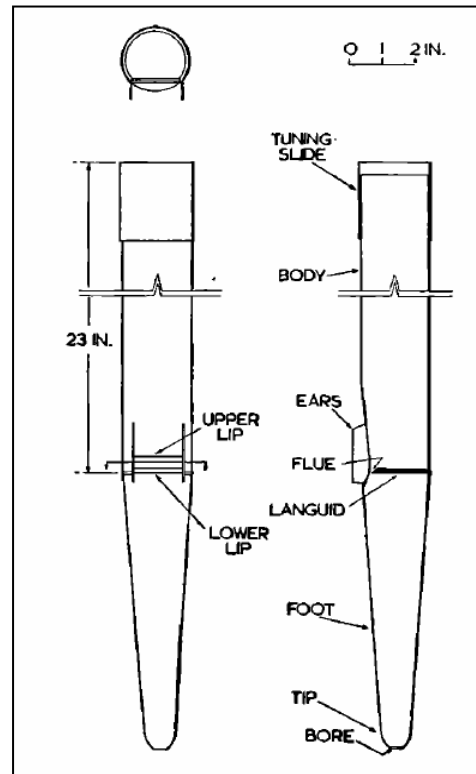
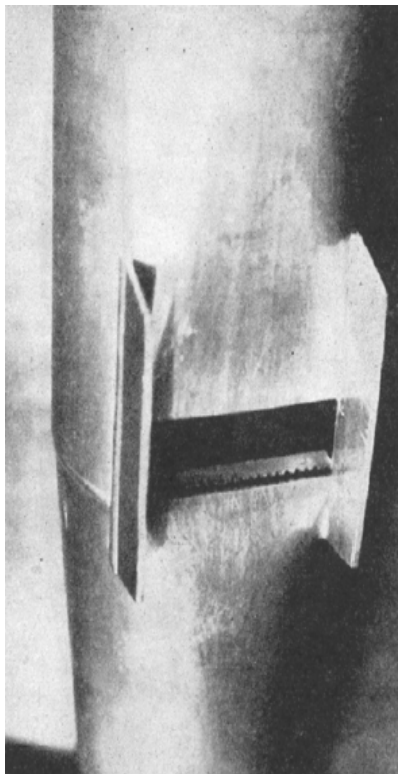


Σχήμα 4.8

Διαπασών με Tuning Scroll

μήτρα, «κλείνοντας» το, αν θέλουμε να χαμηλώσουμε τη συχνότητα ή «ανοίγοντάς» το, αν θέλουμε να την υψώσουμε.

3) Δημιουργώντας σχισμές (slots) και λεπίδες (tuning scroll), όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.9

Ο αυλός διαπασών. Δεξιά: Φωτογραφία ενός διαπασών θεμελιώδους συχνότητας μεσαίου Ντο (261,63 Hz). Αριστερά: Σκαρίφημα με τα στοιχεία που τον απαρτίζουν [58].

4.5 Είδη αυλών (Flue pipes)

Ο αυλός διαπασών είναι αναμφίβολα ο πιο χαρακτηριστικός. Παραλλαγές του φαίνονται στο σχήμα 4.10. Το πλούσιο ηχόχρωμα όμως των οργάνων αυλών δημιουργείται από συνδυασμούς πολλών άλλων αυλών, όπως οι επόμενοι:

Κλειστοί αυλοί (Stopped pipes)

- *Πλήρως κλειστοί (Completely stopped)*

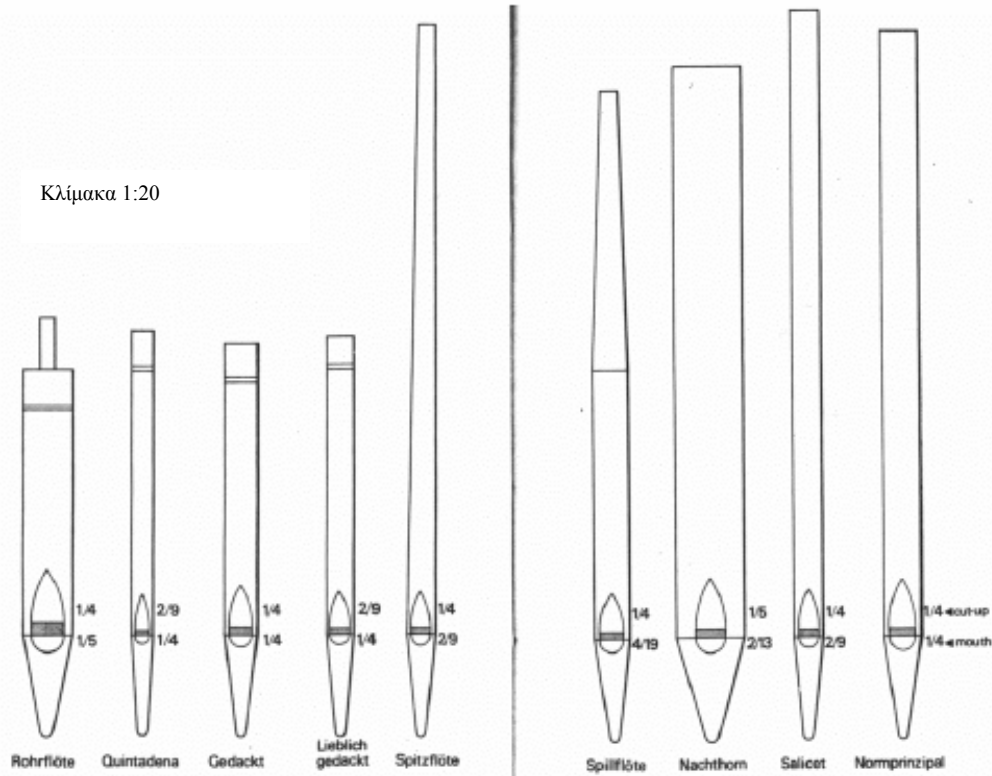
Αν το άκρο του αυλού είναι κλειστό, τότε οι άρτιες αρμονικές καταπνίγονται, όπως θα περιμέναμε και απ' τη θεωρία των ακουστικών σωλήνων. Ταπώνοντας το ανοικτό άκρο ενός διαπασών, αυτός θα ηχήσει μία οκτάβα χαμηλότερα και με διαφορετικό ηχόχρωμα, καθώς θα ηχούν μόνον οι περιττές αρμονικές.

- *Μερικώς κλειστοί (Half-stopped)*

Αποτελούν μία πολύ ενδιαφέρουσα για μελέτη περίπτωση. Ένας σωλήνας πολύ μικρότερης διαμέτρου προσαρμόζεται στην τάπα ενός πλήρως κλειστού αυλού, ώστε αφήνει να ηχήσουν με περιορισμένη ένταση οι άρτιες αρμονικές. Οι αυλοί αυτοί καλούνται και Chimney pipes, καθώς ο πρόσθετος σωλήνας μοιάζει με καμινάδα (σχήμα 4.10 ο πρώτος αυλός από αριστερά). Μία πρόσφατη μελέτη μπορεί να βρει κανείς στη βιβλιογραφική αναφορά [74].

Κωνικοί αυλοί (conical pipes)

Σχεδόν πανομοιότυποι με τους κυλινδρικούς, οι αυλοί αυτοί έχουν τη διάμετρο του άκρου τους μικρότερη απ' το υπόλοιπο σώμα, με λόγο διαμέτρων $1/4$ έως $2/3$. Το ηχόχρωμά τους φαίνεται να καθορίζεται στο μεγαλύτερο ποσοστό από τον κωνικό σχηματισμό τους.

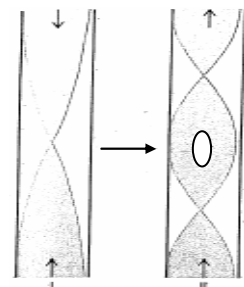


Σχήμα 4.10

Παραλλαγές του αυλού διαπασών [XX]

Αρμονικοί αυλοί (Harmonic pipes)

Είναι οι ανοικτοί αυλοί που δεν ηχούν στη θεμελιώδη τους συχνότητα αλλά στην αμέσως υψηλότερη αρμονική, όταν η πίεση της δέσμης αυξηθεί επαρκώς. Καλούνται και αρμονικά φλάουτα. Για να βοηθηθεί η μετάβαση του αυλού στην υψηλότερη συχνοτική στάθμη, δηλαδή μία οκτάβα πάνω, πρέπει να δημιουργηθεί αντίδεσμος (κοιλία) ταχύτητας στο κέντρο του ακουστικού σωλήνα. Αυτό πετυχαίνεται ανοίγοντας μία πολύ μικρή οπή, ώστε απ' τη μία να μπορεί να κινείται εκεί ο αέρας και να μην έχουμε δεσμό και απ' την άλλη να μην αλλάζει το ενεργό μήκος του σωλήνα. Πιο σπάνια συναντούμε και κλειστούς αρμονικούς αυλούς, όπου η οπή πρέπει να ανοιχθεί στο ανάλογο μήκος.

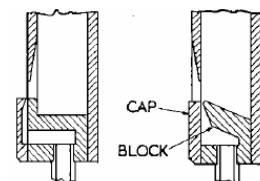


Αυλοί διπλής γλώσσας (Double-languid pipes)

Πολλές φορές οι κατασκευαστές πρόσθεταν και ένα ακόμη μεταλλικό πέτασμα, στο ήδη υπάρχον, όπως φαίνεται στο σχήμα, για να αυξήσουν την ηχητική δύναμη.

Ξύλινοι αυλοί (Wooden pipes)

Οι ξύλινοι αυλοί μπορεί να είναι ανοικτοί ή κλειστοί, τετραγωνικοί ή κυλινδρικοί (σχήμα 4.7), ακόμα και ορθγωνικοί ή τριγωνικοί. Στους ξύλινους αυ-

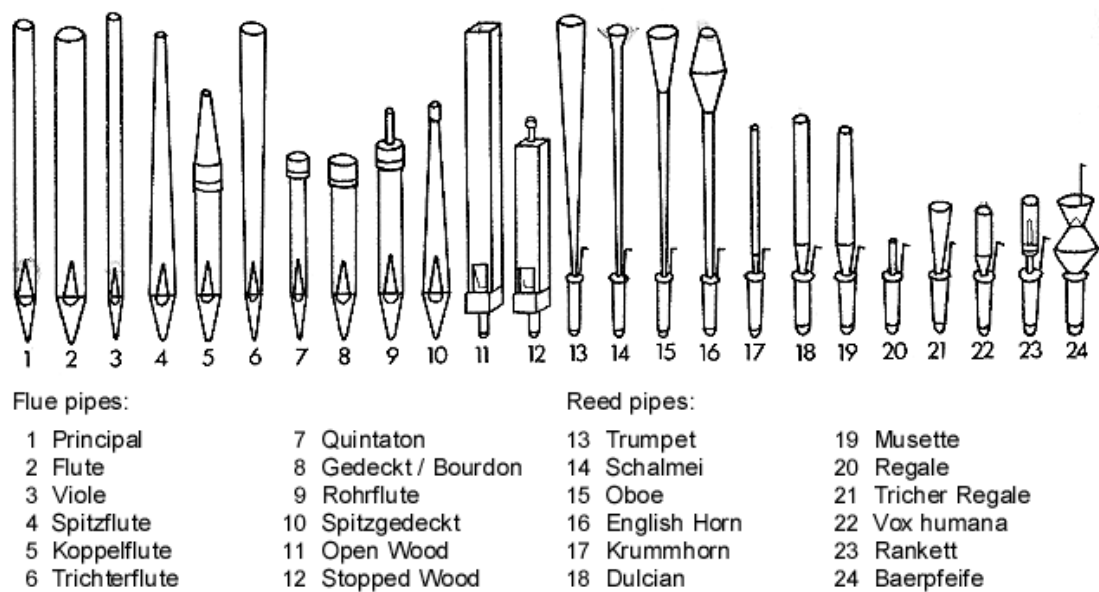


Σχήμα 4.11

λους συχνά χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του ανεστραμμένου άνω χείλους (σχήμα 4.11), η οποία έδινε μία ιδιαίτερη ηχητική χροιά.

Οι ξύλινοι αυλοί θεωρείται ότι παράγουν έναν πιο θαμπό, αδύναμο και μουντό ήχο, σε σχέση με τους αντίστοιχους μεταλλικούς. Ωστόσο, με κάποιες τροποποιήσεις, όπως το κεκλιμένο πέτασμα (block) στο δεξί αυλό, ο ήχος προκύπτει πιο σφοδρός και έντονος [57].

Ένα εκκλησιαστικό όργανο διαθέτει σεβαστό αριθμό και reed σωλήνων (reed pipes), οι οποίοι προσθέτουν εξαιρετικά ηχοχρώματα στο ηχητικό αποτέλεσμα. Βλέπουμε στο σχήμα 4.12 ένα γενικό πλάνο των σωλήνων που απαρτίζουν ένα ολοκληρωμένο εκκλησιαστικό όργανο [g]. Το εντυπωσιακό είναι ότι μερικοί σχηματισμοί μιμούνται το ηχοχρώμα ενός φυσικού μουσικού οργάνου (Flute, Trumpet, Oboe). Για παράδειγμα ο reed pipe που μιμείται το αγγλικό κόρνο (English Horn) παρουσιάζει έναν λοβό στο πάνω του μέρος, όπως συμβαίνει και στο πραγματικό αγγλικό κόρνο. Πάντως στην εργασία αυτή δεν θα ασχοληθούμε με τη λειτουργία των reed pipes.



Σχήμα 4.12

Κάποια πιο ασυνήθιστα σχήματα αυλών εικονίζονται στο σχήμα 4.13, χωρίς να έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως μέσα σε pipe organs.



Σχήμα 4.13

4.6 Ταξινόμηση αυλών σύμφωνα με το αρμονικό φάσμα

Μπορούμε να πούμε πως η ταξινόμηση της παραγράφου 4.6 έγινε με βάση τη γεωμετρία. Ανάλογα όμως με τον χαρακτηριστικό ήχο του κάθε αυλού, ο οποίος εξαρτάται από το φάσμα των αρμονικών του, διακρίνουμε τρεις μεγάλες κατηγορίες [59]. Μάλιστα η αρμονική ανάπτυξη επηρεάζεται καθοριστικά από τη διατομή του ακουστικού σωλήνα του αυλού.

- Φλάουτα αυλοί ή flute αυλοί

Έχουν πολύ ισχυρή θεμέλιο συχνότητα και γρήγορη αρχική μετάβαση. Θεωρούνται φαρδείς αυλοί (μεγάλης διαμέτρου).

- Διαπασών αυλοί

Αναφέρθηκε ήδη ότι αυτή η κατηγορία εμφανίζει πολύ ιδιαίτερο ηχόχρωμα, που προέρχεται από μία ισχυρή δευτέρα αρμονική που είναι πολύ πιο έντονη στην αρχική μετάβαση. Θεωρούνται μεσαίου φάρδους.

- String αυλοί

Ο ήχος τους είναι πολύ λαμπερός, καθότι περισσότερες από τις 20 πρώτες αρμονικές εμφανίζουν μεγάλα πλάτη και γίνονται εύκολα αντιληπτές. Η αρχική τους μετάβαση είναι απ' τις πιο αργές. Είναι οι πιο στενοί αυλοί.

4.7 Μήκη αυλών και stops

Η θεωρία ακουστικών σωλήνων και κυματοδηγών εφαρμόζεται πλήρως στους αυλούς. Κατά συνέπεια, όταν η διάμετρός τους είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος που περιέχεται εντός, τα κύματα της αέριας στήλης είναι επίπεδα και διαμήκη. Έτσι, το μήκος των σωλήνων καθορίζει τον παραγόμενο φθόγγο (θεμέλιο συχνότητα και αρμονικές). Όπως σχολιάστηκε στην ενότητα 4.4, το μήκος αυτό μετράται από το στόμα, κάτω απ' το άνω χείλος (labium) μέχρι το απέναντι άκρο (σχήμα 4.6). Το πόσο μακρύ θα είναι το πόδι (foot) του αυλού έχει να κάνει με την αποκατάσταση στατικής πίεσης πριν τη flue σχισμή. Ωστόσο, αισθητικοί λόγοι επιβάλλουν πολλές φορές το πόδι να είναι αρκετά μακρύ και κωνικό, ιδίως για τους αυλούς που βρίσκονται στην πρόσοψη ενός pipe organ. Αναφέρθηκε ότι στο pipe organ, έκαστος φθόγγος δημιουργείται από ξεχωριστό αυλό. Ο διαπασών του σχήματος 4.9 είναι θεμελιώδους συχνότητας μεσαίου Ντο, ήτοι 261,630 Hz, που δημιουργείται από έναν ανοικτό σωλήνα μήκους περίπου 61 cm (2 πόδια ή 2'). Το τενόρο Ντο, με συχνότητα 130,810 Hz, δηλαδή μία οκτάβα χαμηλότερα απ' το προηγούμενο, πετυχαίνεται από έναν σωλήνα μήκους περίπου 1,2 m (4 πόδια ή 4'). Πολλά pipe organs σταματούν στο Ντο 65,406 Hz μία οκτάβα κάτω απ' το τενόρο. Ο αντίστοιχος σωλήνας έχει μήκος περί τα 2,5 m (8 πόδια ή 8'). Πάντως, στη διάλεκτο των κατασκευαστών ως μέτρο μήκους χρησιμοποιείται ευρέως το πόδι και η ίντσα. Έτσι, στους περισσότερους πίνακες αυλών βρίσκουμε αυτές τις μονάδες. Το σημείο αναφοράς τώρα ενός pipe organ είναι το Ντο των 65,406 Hz ή το χαμηλό Ντο. Για να μην εμπλέκονται σε λογισμούς, οι κατασκευαστές οργάνων περιγράφουν τους φθόγγους και τους αυλούς που τους παράγουν απ' ευθείας με το μήκος τους. Έτσι ο αυλός του χαμηλού Ντο είναι ο 8' αυλός. Το μήκος 8' και κάθε μήκος εκφρασμένο σε πόδια (4', 2' και λοιπά) καλείται και κανονικό τονικό ύψος (normal pitch) ή ίσο τονικό ύψος (equal pitch) και ο λόγος θα φανεί αμέσως τώρα.

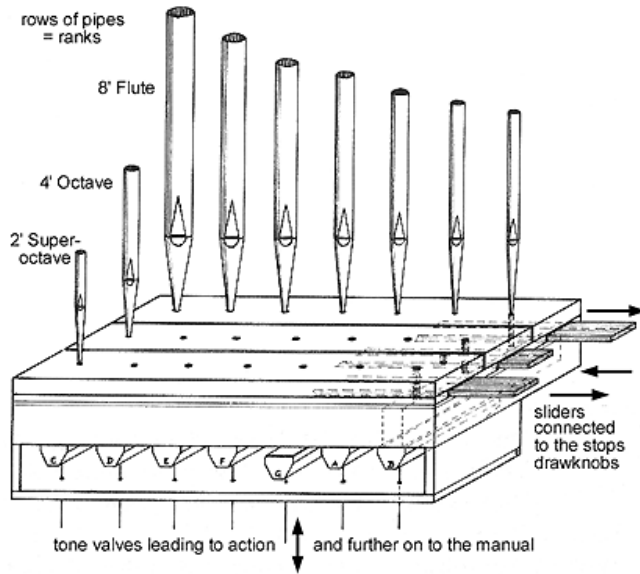


Πρόσοψη Pipe Organ, όπως τη βλέπει ο εκτελεστής. Στο συγκεκριμένο όργανο κάποιοι σωλήνες είναι διατεταγμένοι οριζόντια, προφανώς για λόγους καλύτερης ακτινοβολήσης στο συγκεκριμένο χώρο.

Κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί σε τι μπορεί να χρησιμεύουν οι χιλιάδες αυλοί ενός pipe organ. Η απάντηση βρίσκεται στον αρμονικό πλούτο. Όλος αυτός ο αριθμός σπάει σε σύνολα (flue) αυλών και reed pipes που καλούνται stops (διαβαθμισμένα σετ) και σε σύνολα που καλούνται συστοιχίες (ranks). Σχηματίζεται έτσι ένας πίνακας σωλήνων που έχει ως γραμμές τις συστοιχίες και ως στήλες τα stops. Είδαμε ότι οι σωλήνες μπορούν να λάβουν τεράστια ποικιλία σχηματισμών και ηχοχρωμάτων. Κάθε συστοιχία αντιστοιχεί σε ένα ηχόχρωμα και οι σωλήνες κατά μήκος της δίνουν τους διαφορετικούς φθόγγους τις κλίμακας (σχήμα 4.13). Άρα οι συστοιχίες αποτελούνται από όμοιους σωλήνες και ο ρόλος τους είναι να καθορίζουν το φθόγγο. Κάθετα τώρα, βρίσκονται οι σωλήνες που καθορίζουν το ηχόχρωμα. Εξ' αιτίας αυτής της διάταξης ο πίνακας των σωλήνων καλείται και σκακιέρα (wind chess). Την αρχή λειτουργίας της σκακιέρας μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα με το εποπτικό σχήμα 4.14. Κάθε στήλη αποτελείται από σωλήνες διαφορετικού ή και ίδιου είδους (αριστερή πλευρά), που συνηχούν με το πάτημα ενός πλήκτρου του πληκτρολογίου, αποδίδοντας όλοι μαζί το φθόγγο που αντιστοι-

χεί στο πλήκτρο. Ωστόσο, το ποιοι σωλήνες θα συμπεριληφθούν στην απόδοση του συγκεκριμένου φθόγγου, καθορίζεται από τις λαβές (drawstops ή sliders) στη δεξιά πλευρά του σχήματος, που ανοιγοκλείνουν τις βάσεις των ποδών των σωλήνων. Μπορεί να ηχούν και όλοι της ίδιας στήλης. Αυτό είναι στη βούληση του εκτελεστή για να δώσει το ηχόχρωμα που επιθυμεί. Πάντως οποιοσδήποτε συνδυασμός από stop έχει επιλεγεί πάντα θα υπάρχει μία συστοιχία, στις οριζόντιες γραμμές, που θα δίνει τους φθόγγους. Στην περίπτωση του σχήματος 4.14 μόνον δύο σωλήνες θα ηχήσουν για την απόδοση του φθόγγου Sol.

Ένα stop μπορεί να αποτελείται από αυλούς (ή reeds) ίδιου μήκους που οι θεμέλιές τους ταυτίζονται ή διαφορετικών μηκών ώστε οι θεμέλιες τους να συνιστούν κάποιες από τις συχνότητες μίας αρμονικής στήλης. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε *ουνίσωνους* pipes. Στη δεύτερη περίπτωση μπορεί τα stop να αποτελούνται απλά από σωλήνες με μήκη οκτάβων (8', 4', 2', 1' κλπ) ή ακόμα και από ενδιάμεσες αρμονικές. Κάθε stop χαρακτηρίζεται από το κανονικό τονικό ύψος (normal pitch), δηλαδή το μήκος του μεγαλύτερου από τους αυλούς ή διαφορετικά του αυλού που η θεμέλιός του είναι και η θεμέλιος της αρμονικής στήλης. Έτσι αν έχουμε



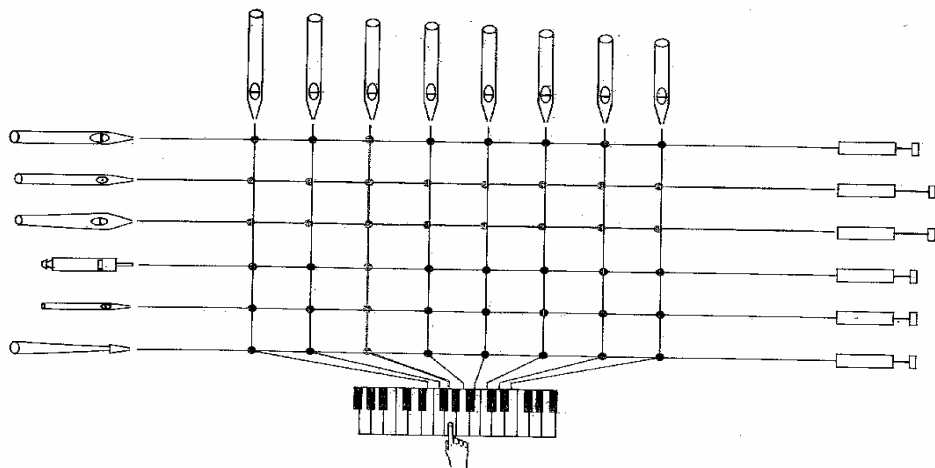
Σχήμα 4.13

Η διάταξη των αυλών στο Pipe Organ. Οριζόντια: Συστοιχίες (Ranks), Κάθετα: Stops

λόγου χάρη τρεις αυλούς διαπασών (principle), με μήκη 8' (65,406 Hz), 4' (130,810 Hz) και 2' (261,630 Hz), αυτοί θα αποτελούν ένα 8' principle stop. Μπορούμε να δούμε τους φθόγγους που θα ηχήσουν από αυτό το stop στο πληκτρολόγιο του πιάνου στο σχήμα 4.16. Τα μήκη σωλήνων που μπορεί να διαθέτει ένα stop συνηθίζεται να φτάνουν ακόμα και τα 32' (περίπου 11m), όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 4.15. Οπότε η μέγιστη σειρά οκτάβων που μπορεί να συναντήσει κανείς είναι η 32', 16', 8', 4', 2', 1', 1/2', κλπ. Οι αυλοί των 32' είναι πράγματι εντυπωσιακοί, ενώ δίνουν μία συχνότητα περίπου 16 Hz, δηλαδή, ούτε λίγο ούτε πολύ, δίπλα στο κατώφλι ακοής μας.



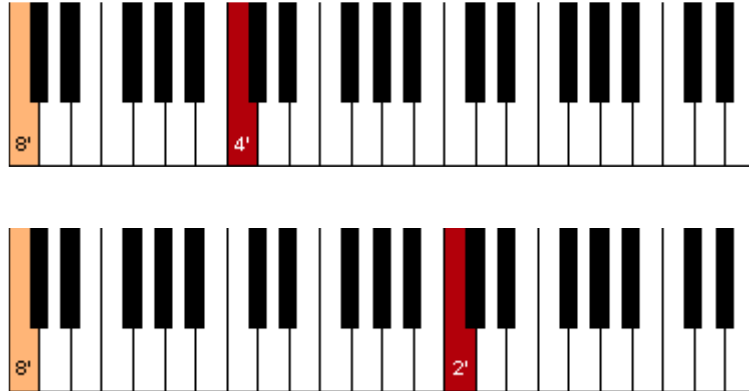
Εικόνα 4.15



Σχήμα 4.14

Λειτουργία της σκακιέρας (wind chess) του οργάνου αυλών. Ο χρήστης έχει πατημένο το πλήκτρο που αντιστοιχεί στο φθόγγο Sol. Δύο από τις λαβές αριστερά έχουν τραβηχτεί για να αφήσουν να περάσει αέρας από τους αυλούς που ευρίσκονται στις αντίστοιχες γραμμές. Έτσι ο Sol θα αποδοθεί από δύο σωλήνες διαφορετικού είδους και ηχοχρώματος, δημιουργώντας ένα καινούριο τελικό ηχόχρωμα.

Δύο μόνο όργανα στον κόσμο διαθέτουν stop με αυλό που φτάνει στο εκπληκτικό μήκος των 64', δηλαδή περίπου 22 m. Το ένα είναι το Down Hall Organ του Sydney (σχήμα 4.4) και το δεύτερο είναι το Hall Auditorium Organ Boardwalk. Το stop του πρώτου ονομάζεται *Contra-Trombone 64'*, ενώ του δεύτερου *Diaphone-Dulzian 64'*. Είναι αδύνατο το ανθρώπινο αυτί να ακούσει τη θεμελίό ενός αυλού 64' και γι' αυτό γίνεται αντιληπτός απ' τις αρμονικές του αλλά και απ' τις δονήσεις που προκαλεί στο χώρο.



Σχήμα 4.16

Οι φθόγγοι ενός stop 8'.

Ειπώθηκε ότι ένα stop μπορεί να διαθέτει και άλλες αρμονικές (άλλους αυλούς) πέραν των οκτάβων. Αυτό είναι και το πιο συνηθισμένο. Τα μήκη εξελίσσονται όπως παρακάτω:

- 3^η αρμονική (η δεύτερη είναι η οκτάβα – αν ο σωλήνας είναι ανοικτός). Τότε τα μήκη είναι: $32/3 = 10\ 2/3'$, $16/3 = 5\ 1/3'$, $8/3 = 2\ 2/3'$, $4/3 = 1\ 1/3'$, $2/3'$ κλπ.
- 5^η αρμονική, με μήκη: $32/5 = 6\ 2/5'$, $16/5 = 3\ 1/5'$, $8/5 = 1\ 3/5'$, $4/5'$ κλπ.
- 7^η αρμονική, με μήκη: $32/7 = 4\ 4/7'$, $16/7 = 2\ 2/7'$, $8/7 = 1\ 1/7'$, $4/7'$ κλπ.
- 9^η αρμονική, με μήκη: $32/9 = 3\ 5/9'$, $16/9 = 1\ 7/9'$, $8/9'$, $4/9'$ κλπ.

Σπάνια έχουμε περισσότερες. Στο σχήμα 4.17 βλέπουμε πάλι ένα stop 8' στο πιάνο, αλλά αυτή τη φορά με τις ενδιάμεσες αρμονικές.



Σχήμα 4.17

Stop 8' με ενδιάμεσες αρμονικές

Πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας πως το ripe organ χωρίζεται εκτός από τις συστοιχίες και τα stops σε μεγάλους τομείς, που καθένας εκτελεί μία μουσική λειτουργία (σχήμα 4.18). Έτσι, για παράδειγμα ο τομέας των Pedal (που χειρίζεται από τα πόδια του εκτελεστή) περιλαμβάνει τους χαμηλόσυχνους και μεγαλύτερους αυλούς (ή καλύτερα stops), που χρησιμεύουν στη συνοδεία της μελωδίας. Ο τομέας swell περιλαμβάνει τα πιο πρίμα stops, που προορίζονται για τη μελωδία.

Το σχήμα 4.19 παρουσιάζει μία αρκετά πλήρη λίστα από stops [ο], όπου με μαύρο είναι οι αυλοί, ενώ με κόκκινο οι reed pipes. Παρατηρούμε ότι δεν έχουν όλοι οι τομείς τα ίδια stops. Το σχήμα 4.20 μας δίνει μία εποπτική εικόνα των αυλών κατά μήκος μίας συστοιχίας, ως προς το πιάνο και μία εικόνα για τον τρόπο που διατάσσονται τα stops. Εδώ, προφανώς το μεγαλύτερο stop αντιστοιχεί σε 8 πόδια.



Εικόνα 4.18

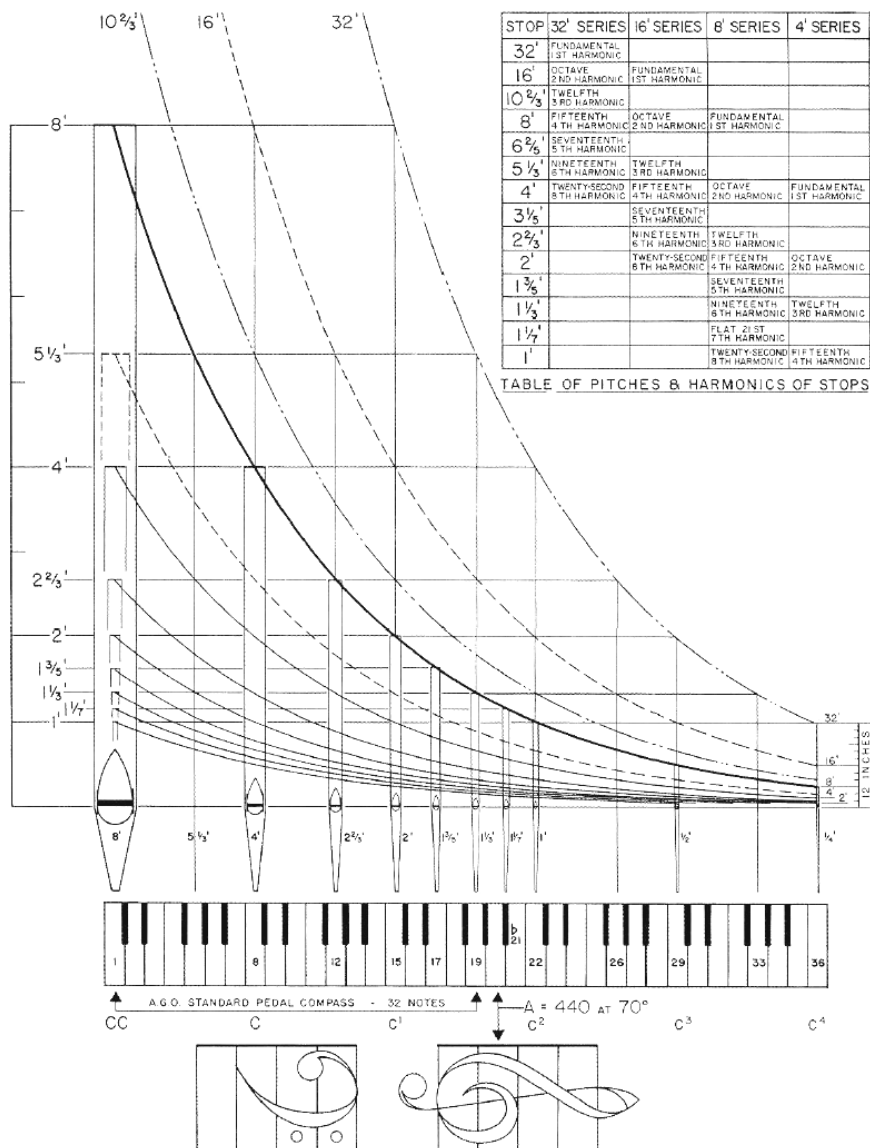
Οι μουσικοί τομείς ενός συνηθισμένου pipe organ

Με αυτά τα στοιχεία είμαστε σε θέση να παρακολουθήσουμε πίνακες από pipe organs όπως έχουν δημοσιευτεί σε βιβλία και στο διαδύκτιο, οι οποίοι και καταγράφουν τις διαστάσεις όλων των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των αυλών των επιμέρους τμημάτων τους. Τέτοιοι πίνακες βρίσκονται στις σελίδες 39 έως και 45, που περιλαμβάνουν όλους τους flue σωλήνες του pipe organ της εικόνας 4.21, κατασκευασμένο από την εταιρεία PASI Organ Builders για τον καθεδρικό Ναό St. Cecillia στην Omaha της Νέας Αγγλίας, όπως και στις σελίδες 46 έως και 50, για το pipe organ της Bedford Presbyterian Church στη Νέα Υόρκη, κατασκευασμένο το 2001 (εικόνα 4.22).

GREAT	SWELL	PEDAL
16' Bourdon	8' Open Diapason	32' Contra Violone
8' Prestant I-II	8' Stopped Diapason	16' Open Diapason
8' Gemshorn	8' Salicional	16' Sub Bass
8' Chimney Flute	8' Vox Céleste	16' Lieblich Gedeckt
4' Principal	4' Octave	8' Octave
4' Harmonic Flute	4' Röhr Flute	8' Bourdon
2 2/3' Twelfth	2 2/3' Nazard	4' Choral Bass
2' Super Octave	2' Doublette	II Rausch Quinte
2' Night Horn	2' Block Flute	32' Contre Bombarde
IV-VI Mixture	1 3/5' Tierce	16' Ophicleide
II Cymbal	1' Sifflet	16' Posaune
16' Bombarde	IV Sharp	8' Tromba
8' Trompette en Chamade	16' Contra Fagotto	
8' Trumpet	8' Trompette	
8' Cromorne	8' Hautbois	
4' Clarion	8' Vox Humana	
Tremulant	Tremulant	
SWELL to GREAT		GREAT to PEDAL
		SWELL to PEDAL

Σχήμα 4.19

Συνηθισμένα stops [ο].



ORGAN PITCH DIAGRAM AND TABLE
FORMULATED AND DRAWN BY JOSEPH E. BLANTON

Source: Joseph Edwin Blanton *The Organ in Church Design*
Venture Press, Albany, Texas, 1957.
Reproduced with permission

Figure 14

Σχήμα 4.20

Μία εικόνα των αυλών ενός Pipe Organ και η σχέση τους με τους φθόγγους της συγκεκριμένης κλίμακας. Για τις μονάδες ισχύει: 1 inch (")=2,540 cm και 1 ft (')=12 inch=30,58 cm.

4.8 Τόνοι συνδυασμού (combinational tones)

Όταν δύο ισχυροί τόνοι διαφορετικής συχνότητας ηχούν ταυτοχρόνως, μπορούμε να ακούσουμε έναν τρίτο, που προκύπτει απ' το συνδυασμό τους. Η συχνότητα του παραγόμενου τόνου διαφέρει πάντοτε από τις συχνότητες των αρχικών, καθώς και των αρμονικών τους, με μόνη εξαίρεση τη συνήχηση δύο τόνων με συχνοτική διαφορά οκτάβας. Οι τόνοι συνδυασμού αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο στη λειτουργία ενός pipe organ. Η σημασία τους θα φανεί στη συνέχεια.

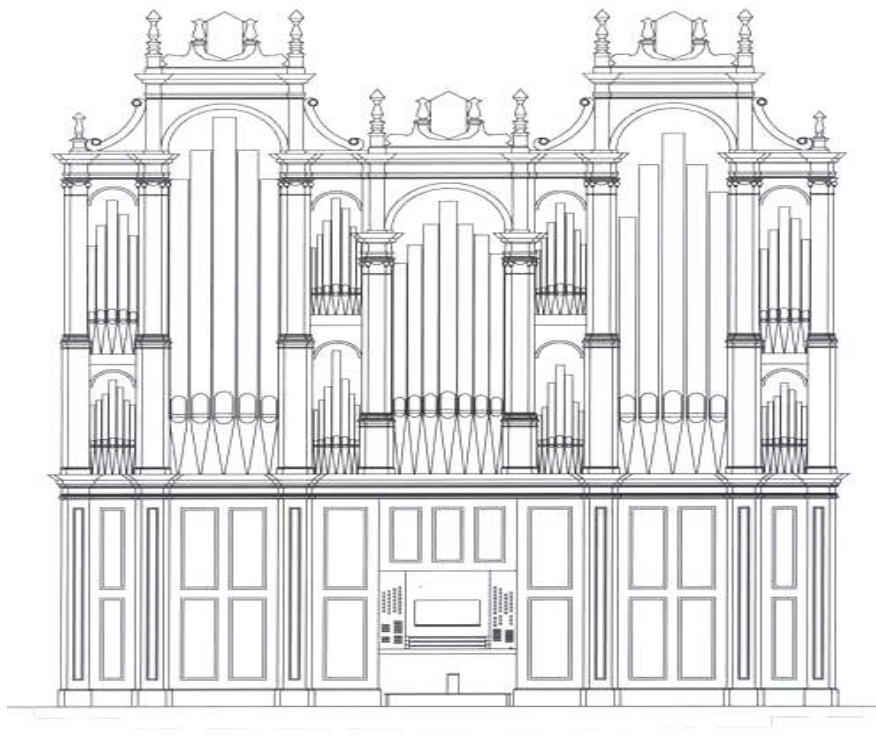
Στην πραγματικότητα δεν παράγεται μόνο ένας τόνος απ' τη συνήχηση των δύο. Ο κατασκευαστής Sorge ανακάλυψε πως δημιουργείται ένας τόνος με συχνότητα ίση με τη διαφορά των συχνοτήτων των δύο αρχικών, ενώ ο Helmholtz διεπίστωσε την εμφάνιση ενός δεύτερου τόνου με συχνότητα ίση με το άθροισμα των δύο αρχικών. Το πρώτο είδος τόνου καλείται *τόνος διαφοράς* (differential tone) ενώ το δεύτερο *τόνος αθροίσματος* (summational tone).

Έστω πρώτα η συνήχιση δύο τόνων με συχνοτική διαφορά οκτάβας. Ο τόνος διαφοράς αυτών θα έχει συχνότητα ίση με τη μικρότερη απ' τις δύο αρχικές συχνότητες. Αν οι δύο τόνοι είναι το C 64 Hz και το C 128 Hz, τότε ο παραγόμενος θα είναι ξανά ο C 64 Hz, ενισχύοντας τον όμοιό του. Αυτή η συμπεριφορά είναι εμφανής στα stop οκτάβας και συνεισφέρει πολύ στη σταθερότητα της τονικής δομής (tonal structure) ενός pipe organ. Ο τόνος αθροίσματος που θα προκύψει θα αντιστοιχεί σε συχνότητα 192 Hz, αλλά η έντασή του θα είναι εν γένει αρκετά χαμηλότερη του τόνου διαφοράς. Επειδή οι τόνοι διαφοράς είναι πιο εύκολα διακριτοί, ανακαλύφθηκαν και πρώτοι. Μία λογική τώρα υπόθεση του Helmholtz είναι πως απ' τους προκύπτοντες τόνους συνδυασμού, μαζί και με τους αρχικούς προκύπτουν ακολούθως νέοι τόνοι συνδυασμού, που εν τέλει φθάνουν άπειροι στον αριθμό. Βέβαια ο ήχος που παράγουν οι αλλοί ενός pipe organ δεν είναι καθαρός τόνος, αλλά φθόγγος, με αρμονικές. Έτσι, τόνοι διαφοράς θα προκύψουν εξίσου ισχυροί και από τις συνηχίσεις των αρμονικών μεταξύ τους.

Έστω τώρα δύο τόνοι C 32 Hz και C 48 Hz. Ο παραγόμενος τόνος διαφοράς θα είναι ο C 16 Hz. Δηλαδή, μία οκτάβα κάτω απ' τον χαμηλότερο. Επειδή η συχνότητά του δε συμπίπτει με κάποια από τις αρχικές, είναι πιο εύκολα αντιληπτή. Μάλιστα, η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται συχνά στην εγκατάσταση ενός pipe organ για τη δημιουργία του *ακουστικού μπάσου*. Ο σωλήνας που θα χρειαζόταν για την απόδοση της συχνότητας 16 Hz φτάνει όπως είδαμε τα 11 m. Η κατασκευή του είναι πιο κοστοβόρα από την κατασκευή δύο μικρότερων σωλήνων, έναν με 5 m ύψος και έναν με 3,5 m. Έτσι προτιμάται η παραγωγή του C 16 Hz από τη συνήχιση αυτών των δύο. Ο τόνος αυτός καλείται *ακουστικό μπάσο*. Παρά την πρακτικότητα του εγχειρήματος, η ποιότητά του ακουστικού μπάσου υπολείπεται σε ένταση και αρμονικό πλούτο του πραγματικού μπάσου των 11 m.

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση ενός stop που περιλαμβάνει τρεις αλλούς συχνοτήτων 64, 128 και 192 Hz. Δηλαδή ο δεύτερος ενισχύει την πρώτη αρμονική του θεμελίου αλλού του stop και ο τρίτος τη δεύτερη. Ο τόνος διαφοράς που δημιουργείται μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου αλλού αντιστοιχεί σε συχνότητα 64 Hz ίση με του θεμελίου. Αποτέλεσμα είναι η ενίσχυση του αλλού αυτού και η πρόσδοση στιβαρότητας στο stop.

Αν στο παραπάνω stop εγκαθιστούσαμε έναν ακόμα αλλό συχνότητας 256 Hz, που ενισχύει την τρίτη αρμονική, τότε η συνήχιση του με τον τρίτο αλλό των 192 Hz θα έδινε πάλι τόνο διαφοράς 64 Hz. Με αυτά βλέπουμε πόσο σημαντική είναι η λειτουργία των stop σε ένα pipe organ. Εκτός από τον εμπλουτισμό του ηχοχρώματος, πετυχαίνουμε και μία επιβλητική αύξηση της έντασης του φθόγγου που παράγεται από αυτό το stop.



Εικόνα 4.21

4.7 Το υλικό των αυλών

Τα υλικά με τα οποία κατασκευάζονται οι αυλοί ενός pipe organ δεν είχαν αλλάξει ουσιαστικά για μία ολόκληρη χιλιετία. Οι σωλήνες των περισσότερων αυλών δημιουργούνται από μεταλλικά φύλλα, τα οποία τυλίγονται για να δώσουν το κυλινδρικό σχήμα [43]. Τα φύλλα έχουν συνήθως πάχος από 1 μέχρι 2 mm και η επιφάνειά τους μπορεί να εκτείνεται σε μήκος μέχρι 11 m και σε πλάτος μέχρι 50 cm. Το μεταλλικό υλικό των φύλλων πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να μπορεί εύκολα να καμπυλώνεται. Επίσης αρκετά χρόνια πριν, το μέταλλο λιωνόταν μέσα σε μία ξύλινη δε-



Εικόνα 4.22

ξαμενή, που είχε μία σχισμή στον πάτο της και σαρώνοντας μία μεγάλη πέτρινη επιφάνεια, άπλωνε ομοιόμορφα το υλικό για να κρυσώσει και να γίνει φύλλο. Έπρεπε λοιπόν συν τοις άλλοις να είναι όσο πιο χαμηλή γίνεται η θερμοκρασία τήξης. Στο μεσαίωνα τα διαθέσιμα υλικά ήταν ο μόλυβδος (lead), ο κασσίτερος (tin), ο χαλκός (copper) και ο ψευδάργυρος (zinc). Πιο σπάνια ήταν το ασήμι (silver) και ο χρυσός (gold), ενώ ο σίδηρος (iron) ήταν πολύ περιορισμένος [42]. Κράματα από χαλκό και κασσίτερο δημιουργούσαν μπρούντζο (bronze), που τον χρησιμοποιούσαν για οπλισμό, κράματα από χαλκό και ψευδάργυρο δημιουργούσαν ορείχαλκο (brass) που τον χρησιμοποιούσαν για κοσμήματα, ενώ κράματα κασσίτερου-ψευδάργυρου ή κασσίτερου-μολύβδου (pewter alloys) ήταν εύκολα κατεργάσιμα λόγω της χαμηλής θερμοκρασίας τήξης. Το ασήμι και ο χρυσός ήταν πολύ ακριβά, ενώ ο σίδηρος πολύ δύσκολο να δουλευτεί. Από όλα αυτά το ιδανικό κράμα για τους αυλούς των οργάνων ήταν ο κασσίτερος με το μόλυβδο με 62% περιεκτικότητα σε κασσίτερο. Το σημείο τήξης του κράματος αυτού είναι 183° C και ενδείκνυται για λιώσιμο (casting) χαμηλής θερμοκρασίας. Η αντοχή του ήταν τότε αρκετή για να κατασκευαστούν αυτο-υποστηριζόμενοι σωλήνες αυλών μεσαίας κλίμακας. Αν υπήρχαν μέθοδοι καθαρισμού των κραμάτων απ' τις ακαθαρσίες, θα ήταν εφικτή η κατασκευή και των πλέον μεγάλων αυλών (μέχρι 11 m). Η ευπλαστότητα του σωλήνα, ακόμα και όταν είχε έρθει σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, αποτελούσε πλεονέκτημα για τις παραπέρα φωνολογικές ρυθμίσεις.

Σήμερα, με τις μοντέρνες κατασκευαστικές τεχνικές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σχεδόν όποιο μέταλλο επιθυμήσουμε. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα αν το υλικό κατασκευής επηρεάζει το ηχητικό αποτέλεσμα. Μία μεγάλη και μακρόχρονη διαμάχη υφίσταται μεταξύ των πρακτικών κατασκευαστών και των ακουστικολόγων. Οι μεν θεωρούν ότι πράγματι το υλικό επηρεάζει τον ήχο, οι δε όχι. Στην πραγματικότητα το τοίχωμα του ακουστικού σωλήνα ταλαντώνεται ελαφρά και ιδίως στην αρχική μεταβατική κατάσταση. Επειδή όμως η ακαμπτότητά του είναι πολύ μεγάλη, σε σχέση με την αέρια στήλη, το επίπεδο της ταλάντωσης είναι κατά 40 dB περίπου χαμηλότερο από την κίνηση του αέρα. Ίσως έτσι να επηρεάζονται και τα σχετικά επίπεδα των αρμονικών κατά 1 dB περίπου ή ακόμα και κάποιες μη αρμονικές συχνότητες αλλά σε πολύ μικρότερο ποσοστό. Στην ουσία όμως του πράγματος, δεν είναι το υλικό καθεαυτό που αλλοιώνει τις κυματομορφές των συχνοτήτων αλλά το πάχος του.

Πολλά όργανα διαθέτουν ξύλινους αυλούς, οι οποίοι πραγματικά ηχούν διαφορετικά απ' τους μεταλλικούς. Αλλά δεν είναι το υλικό που κάνει τη διαφορά [43]. Εκτός από διαστασιολογικές διαφορές (για παράδειγμα στη διάμετρο), υπάρχει μεγάλη διαφορά στη γεωμετρία του στόματος. Δεν είναι μόνο ότι ο ξύλινος αυλός είναι συνήθως τετραγωνικής διατομής, αλλά ότι τα τοιχώματά του έχουν πάχος που φτάνει συνήθως τα 20 mm, πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με τους μεταλλικούς, των οποίων τα τοιχώματα είναι κάπου μεταξύ 1 έως 2 mm. Σε πολλά δημοφιλή Pipe Organs οι μπάσοι αυλοί είναι ξύλινοι και δίνουν έναν ισχυρό θεμελιώδη τόνο. Αν αυτοί φτιάχνονταν από κόντρα πλακέ (αρκετά λεπτό τοίχωμα), τότε θα ήμασταν σε θέση να ακούσουμε τις ταλαντώσεις των τοιχωμάτων [43].

Flue Pipes

HAUPTWERK

Praestant 16'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
<i>C-C⁰ Wood Haskell (see Pedal 16')</i>						
Diameter	254	150	84	49	31	17
Cut-up	51	31	21.7	11.3	6.9	4.5
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	8.5	5.7	3.5	2.3	1.7	1.1
Material	97% Lead					
Octave 8'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	155	90	50	31	20	9
Cut-up	30	21.3	11.5	6.8	4.6	2.3
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	5.9	3.7	2.3	1.7	1.2	0.7
Material	97% Lead					
Rohrflöte 8'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	122	76	51	33	22	16
Cut-up	40.2	24.3	16.3	9.2	4.7	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Rohr Diameter	-	16	12	9	7	5
Rohr Length	-	110	58	31	16	9
Languid Thickness	4.7	3.2	2.3	1.75	1.3	1
Material	97% Lead					
Salicional 8'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	120	69	43	26	15	9
Cut-up	25.8	14.9	9	5.8	3.2	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	4.6	3	2.1	1.5	1	0.7
Toe Hole	-	6	4.5	3.2	2.2	-
Material	97% Lead					
Octave 4'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	83	48	28	18	10.5	5.5
Cut-up	20.1	11	6.8	4.2	2.7	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	3.5	2.2	1.6	1.1	0.75	0.55
Material	97% Lead					
Spitzflöte 4'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Lower Diameter	85	58	40	27	18	12
Upper Diameter	50	32	21	13	8	7
Cut-up	19.8	12.8	8.1	4.9	3.3	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	3.5	2.4	2	1.5	1.1	0.8
Material	97% Lead					
Quinte 2 2/3'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	58	34	20	10.5	6.5	4.5
Cut-up	14	7.9	6.4	3.1	1.8	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.4	1.8	1.2	0.7	0.6	0.5
Material	97% Lead					

Flue Pipes

HAUPTWERK (continued)

Superoctave 2'		C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter		47	27	17	10	6	3.7
Cut-up		10.6	6.2	4	2.5	1.4	-
Mouth Width		1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness		2.2	1.55	1.1	0.7	0.55	0.45
Material		97% Lead					
Mixture 1 1/3' V		C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
<i>Scales based on 2'</i>							
Diameter		46.3	25.3	14.8	9.7	6.2	4
Cut-up		10.6	6.2	4	2.5	1.4	-
Mouth Width		1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness		2.2	1.45	1	0.7	0.55	0.5
Material		97% Lead					
Mixture 1' IV		C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
<i>Scales based on 2'</i>							
Diameter		43	23.5	13.5	9	5.7	3.8
Cut-up		10.6	6.2	4	2.5	1.4	-
Mouth Width		1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness		2.1	1.35	1.1	0.7	0.55	0.45
Material		97% Lead					
Cornet V		e¹	e²	e³	e⁴		
8'	Diameter	51	33	22	16		
	Cut-up	16	8.8	5.5	-		
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4		
	Rohr Diameter	12	9	7	5		
	Rohr Length	58	31	16	9		
	Languid Thickness	2.3	1.75	1.3	1		
	Material	97% Lead					
4'	Diameter	35	23.2	15.8	9		
	Cut-up	7.8	4.9	3.2	-		
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4		
	Languid Thickness	1.8	1.35	1	0.7		
	Material	97% Lead					
2 2/3'	Diameter	28.7	19.6	11.5	7.1		
	Cut-up	6	4.3	2.7	-		
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4		
	Languid Thickness	1.6	1.2	0.75	0.6		
	Material	97% Lead					
2'	Diameter	24.6	17.6	10.8	7		
	Cut-up	4.9	3.3	2	-		
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4		
	Languid Thickness	1.4	1.1	0.7	0.6		
	Material	97% Lead					
1 3/5'	Diameter	20.3	14	8.4	5.3		
	Cut-up	3.8	2.8	1.7	-		
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4		
	Languid Thickness	1.2	0.9	0.65	0.5		
	Material	97% Lead					

Flue Pipes

OBERWERK

Praestant 8'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	147	85	47	29	17	8
Cut-up	30.5	21	11.6	7	4.5	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	5.7	3.5	2.15	1.65	1.1	0.6
Material	97% Lead					
Suavial 8'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	-	-	47	29	17	8
Cut-up	-	-	11.6	7	4.5	-
Mouth Width	-	-	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	-	-	2.2	1.65	1.1	0.6
Material	97% Lead					
Gedeckt 8'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	115	76	50	32	20	15
Cut-up	37.2	22	15.1	8.5	4.3	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	4.4	3.2	2.3	1.7	1.2	1
Material	97% Lead					
Octave 4'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	79	45	27	16.5	10.5	5.5
Cut-up	20.5	11.8	7.0	4	2.8	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	3.4	2.15	1.55	1.1	0.7	0.5
Material	97% Lead					
Rohrflöte 4'	C	e⁰	e¹	e²	e³	<i>Tapered open from e⁰ as in HW 4'</i>
Diameter	84	56	33	21	14	-
Cut-up	26	16	9.8	5.4	3.1	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	-
Rohr Diameter	14	10.5	8.7	6.3	4.7	-
Rohr Length	95	60	35	20	14	-
Languid Thickness	3.5	2.4	1.75	1.2	1	-
Material	97% Lead					
Octave 2'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	44	25.5	16	10	6	3.7
Cut-up	11.6	7	4.5	2.9	1.8	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.15	1.45	1	0.7	0.55	0.45
Material	97% Lead					
Waldflöte 2'	C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
Diameter	54	35	22	15	10	7
Cut-up	11.2	8	4.8	2.8	1.9	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.4	1.8	1.3	1	0.7	0.6
Material	97% Lead					

Flue Pipes

OBERWERK (continued)

Sequialtera II		C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
2 2/3'	Diameter	59	33	19	12	7.4	4.2
	Cut-up	14.7	8.9	5.6	3.3	2	-
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
	Languid Thickness	2.6	1.7	1.2	0.8	0.6	0.5
	Material	97% Lead					
1 3/5'	Diameter	38	21	13	8	4.9	3
	Cut-up	9.9	5.8	3.8	2.7	1.5	-
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
	Languid Thickness	1.9	1.2	0.85	0.6	0.5	0.45
	Material	97% Lead					
Quinte 1 1/3'		C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
	Diameter	32	18	11.5	7.3	5.2	3.5
	Cut-up	8	4.9	3	2.1	1.2	-
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
	Languid Thickness	1.7	1.1	0.75	0.6	0.5	0.4
	Material	97% Lead					
Mixture 1' IV		C	e⁰	e¹	e²	e³	e⁴
<i>Scales based on 2'</i>							
	Diameter	44	25.5	16	10	6	3.7
	Cut-up	11.5	6.5	4	2.8	1.6	-
	Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
	Languid Thickness	2.15	1.45	1	0.7	0.55	0.45
	Material	97% Lead					

Flue Pipes

UNTERWERK

	C	e ⁰	e ¹	e ²	e ³	e ⁴
Bourdon 16'						
Diameter	145x175	105	70	42	26	17
Cut-up	58	34	23	13.8	7.3	-
Mouth Width	145	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	-	4.1	3	2.1	1.5	1.1
Material	97% Lead					
Principal 8'						
Diameter	158	92	51	32	20	9
Cut-up	31	19.3	11	6.5	4.2	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	6	3.8	2.3	1.7	1.2	0.7
Material	97% Lead					
Gamba 8'						
Diameter	95	58	36	23	14	8
Cut-up	17.2	11.3	8.3	4.5	2.5	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	3.8	2.5	1.8	1.3	1	0.6
Material	97% Lead					
Toe Hole	10.5	7.5	4.7	3	2	-
Roller Beards	16.2	9.5	6.4	-	-	-
Celeste 8'						
Diameter	-	49	31	19	12	7
Cut-up	-	11	8.5	5	3.1	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	-	2.3	1.65	1.2	0.8	0.6
Material	-	97% Lead				
Toe Hole	-	5.5	3.5	2.7	2	-
Roller Beards	-	9	6.4	6.4	-	-
Harmonic Flute 8'						
				<i>Overblowing from e²</i>		
Diameter	130	73	55	40	27	15
Cut-up	31	16.2	11.1	9.5	6.8	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	5	3.2	2.4	2	1.5	1
Material	97% Lead					
Principal 4'						
Diameter	84	49	29	18	10.5	6
Cut-up	19	11	7	4	2.9	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	3.5	2.3	1.65	1.1	0.7	0.55
Material	97% Lead					
Harmonic Flute 4'						
			<i>Overblowing from e¹</i>			
Diameter	67	52	39	27	18	13
Cut-up	15.5	11	9.0	6	4	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.8	2.4	2	1.5	1.1	0.8
Material	97% Lead					

Flue Pipes

UNTERWERK (continued)

	C	e ⁰	e ¹	e ²	e ³	e ⁴
Nazard 2 2/3'						
Diameter	59	44	29	20	11.5	8
Cut-up	13.8	9.5	6.8	3.9	2.8	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.6	2.15	1.6	1.2	0.75	0.6
Material	97% Lead					
Octavin 2'						
	C	e ⁰	e ¹	e ²	e ³	e ⁴
		<i>Overblowing from e⁰</i>				
Diameter	49	35	22	14	9	6
Cut-up	11.8	9	4.8	3	2	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.3	1.8	1.3	1	0.7	0.55
Material	97% Lead					
Tierce 1 3/5'						
	C	e ⁰	e ¹	e ²	e ³	e ⁴
Diameter	46	29	20	14	8.5	4.8
Cut-up	9.8	6.1	4	3.1	2.2	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.15	1.65	1.2	1	0.6	0.5
Material	97% Lead					
Mixture V 2'						
	C	e ⁰	e ¹	e ²	e ³	e ⁴
<i>Scales based on 2'</i>						
Diameter	48	28	18	10	6	3.7
Cut-up	11	6.7	4.5	2.3	1.5	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.2	1.55	1.1	0.7	0.55	0.45
Material	97% Lead					

Flue Pipes

PEDAL

Subbass 32'	C	e⁰		
Diameter	322 x 383	194 x 228		
Cut-up	150	84		
Wall Thickness	33	29		
Material	Sugar Pine / Douglas Fir			
Praestant 16'	C	e⁰		
<i>Wood Haskell</i>				
Diameter	200 x 251	126 x 158		
Cut-up	60	35		
Wall Thickness	20	16		
Material	Poplar			
Subbass 16'	C	e⁰	e¹	e²
Diameter	194 x 228	120 x 153	70 x 97	40 x 53
Cut-up	78	48	28	16
Wall Thickness	20	16	10	9
Material	Poplar			
Octave 8'	C	e⁰	e¹	e²
Diameter	155	93	53	32
Cut-up	30.5	21.2	11.3	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	5.8	3.8	2.4	1.7
Material	97% Lead			
Gedeckt 8'	C	e⁰	e¹	e²
Diameter	117	78	50	33
Cut-up	39.2	24.8	15.5	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	4.5	3.3	2.3	1.7
Material	97% Lead			
Octave 4'	C	e⁰	e¹	e²
Diameter	80	47	26	18
Cut-up	19	11.2	6.9	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	3.4	2.2	1.5	1.1
Material	97% Lead			
Mixture V 2 2/3'	C	e⁰	e¹	e²
<i>Scales based on 2 2/3'</i>				
Diameter	60	35	22	12
Cut-up	14.5	8.3	5.2	-
Mouth Width	1/4	1/4	1/4	1/4
Languid Thickness	2.6	1.8	1.3	1.8
Material	97% Lead			

PASI Organ Builders Inc.

Roy, Wa

Opus 13 scaling information

GREAT**Bourdon 16'**

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	145x175	58	145		Poplar
c ^o	95	35	1/4	3.8	97% Lead
c ⁱ	62	24		2.7	
c ⁱⁱ	38	14		1.9	
c ⁱⁱⁱ	24	7.2		1.45	
c ⁱⁱⁱⁱ	16	4.5		1.05	

Principal 8'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	150	31	1/4	5.7	97% Lead
c ^o	85	19.2	1/4	3.5	
c ⁱ	48	11.3	1/4	2.2	
c ⁱⁱ	27	6.8	1/4	1.5	
c ⁱⁱⁱ	16	4.1	1/4	1.1	
c ⁱⁱⁱⁱ	9	2.3	1/4	0.65	

Spitzflöte 8'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	136/68	32.5	2/9	5.2	97% Lead
c ^o	85/40	20.2	1/5	3.5	
c ⁱ	57/32	11.5	1/5	2.4	
c ⁱⁱ	35.7/22	7.1	2/9	1.8	
c ⁱⁱⁱ	22.2/15	3.8	2/9	1.3	
c ⁱⁱⁱⁱ	13.2/8	2.2	2/9	1.1	

Octave 4'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	84	20.5	1/4	3.55	97% Lead
c ^o	48	11.2		2.2	
c ⁱ	27	7.4		1.5	
c ⁱⁱ	16	4.1		1	
c ⁱⁱⁱ	10.2	2.5		0.7	
c ⁱⁱⁱⁱ	6	1.1		0.55	

Rohrflöte 4'

	Ø	cut-up	mouth width	Rohr Ø	Rohr len.	languid th.	material
C	84	26	1/4	14	95	3.5	97% Lead
c ^o	56	16		10.5	60	2.45	
c ⁱ	33	9.8		8.7	35	1.75	
c ⁱⁱ	21	5.4		6.3	20	1.2	
c ⁱⁱⁱ	14	3.1		4.7	14	0.95	
cs ⁱⁱⁱ	17.8/7.6	3				1.1	
c ⁱⁱⁱⁱ	12.7/5.1	2				0.85	

PASI Organ Builders Inc.
Roy, Wa
Opus 13 scaling information

Quinte 2 2/3'					
	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	61	16	1/4	2.6	97% Lead
c°	36	9.2		1.8	
c'	20	5.5		1.2	
c''	12	3		0.8	
c'''	8	1.7		0.6	
c''''	6	1.2		0.55	
Octave 2'					
	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	48	11.2	1/4	2.25	97% Lead
c°	27	6.5		1.5	
c'	16	4.2		1	
c''	10	2.6		0.7	
c'''	7	1.6		0.6	
c''''	4	1		0.45	
Waldflöte 2'					
	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	54	11.3	40	2.45	97% Lead
c°	35	7	24	1.8	
c'	22	4.5	16	1.3	
c''	15	2.4	10	1	
c'''	10	1.9	7.5	0.7	
c''''	7	1.2	6	0.6	
Nazard 2 2/3'					
	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	60	13	45	2.6	97% Lead
c°	41	8.9	28	2	
c'	26	5.3	16	1.5	
c''	18	3.2	10	1.1	
c'''	10	1.9	5	0.7	
c''''	6	1.1	3	0.55	
Tierce 1 3/5'					
	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	46	9	32	2.2	97% Lead
c°	32	6.2	21	1.7	
c'	23	3.8	14	1.3	
c''	14	2.2	8	1	
c'''	9	1.5	4.8	0.7	
c''''	6	1	3.1	0.55	
Mixture 1 1/3' IV					
	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C			Scale from Octave 2'		
c°					4' 4' 4'
c'					2 2/3' 2 2/3' 2 2/3'
c''					2' 2' 2'
c'''	1 1/3'	1 1/3'	1 1/3'	1 1/3'	1 1/3'
c''''	1'	1'	1'		
	2/3'	2/3'			
	1/2'				

PASI Organ Builders Inc.

Roy, Wa

Opus 13 scaling information

SWELL**Principal 8'**

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	143	32	1/4	5.4	97% Lead
c ^o	80	20		3.4	
c ⁱ	46	11.3		2.2	
c ⁱⁱ	25	6.5		1.45	
c ⁱⁱⁱ	14.5	4		1	
c ⁱⁱⁱⁱ	8	2.2		0.6	

Bourdon 8'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	110	39.5	1/4	4.3	97% Lead
c ^o	74	22.4		3.2	
c ⁱ	48	15.2		2.3	
c ⁱⁱ	30	8.8		1.65	
c ⁱⁱⁱ	19	4.5		1.2	
c ⁱⁱⁱⁱ	14	2.4		1	

Gamba 8'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material	toe hole	roller beards
C	102	19	1/4	4	97% Lead	10.5	16.2
c ^o	58	13		2.6		7.5	3/8"
c ⁱ	36	9		1.8		4.7	1/4"
c ⁱⁱ	23	5		1.4		3	
c ⁱⁱⁱ	14	2.5		1		2	
c ⁱⁱⁱⁱ	7.2	2		0.6		1.2	

Celeste 8'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material	toe hole	roller beards
C					97% Lead		
c ^o	49		1/4	2.3		5.5	9.5
c ⁱ	31			1.65		3.5	1/4"
c ⁱⁱ	18			1.1		2.7	1/4"
c ⁱⁱⁱ	11.5			0.8		2	
c ⁱⁱⁱⁱ	8			0.6		1.5	

Principal 4'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	80	20.6	1/4	3.4	97% Lead
c ^o	48	11.5		2.2	
c ⁱ	25	6.2		1.45	
c ⁱⁱ	15	3.9		1	
c ⁱⁱⁱ	10	2.1		0.7	
c ⁱⁱⁱⁱ	6	1.3		0.55	

PASI Organ Builders Inc.

Roy, Wa

Opus 13 scaling information

Spitzflöte 4'

	Ø	cut-up	mouth width	lanquid th.	material
C	80/30	17.5	1/4	3.4	97% Lead
c ^o	56/19	12		2.45	
c ⁱ	38/14	7.5		1.9	
c ⁱⁱ	26/11	4.8		1.5	
c ⁱⁱⁱ	17/8	2.5		1.1	
c ⁱⁱⁱⁱ	0 11/5	1.8		0.7	

Octave 2'

	Ø	cut-up	mouth width	lanquid th.	material
C	46	11.8	1/4	2.2	97% Lead
c ^o	25	7		1.45	
c ⁱ	15	4.2		1	
c ⁱⁱ	10	2.5		0.7	
c ⁱⁱⁱ	6	1.8		0.6	
c ⁱⁱⁱⁱ	4	1.1		0.45	

Larigot 1 1/3'

	Ø	cut-up	mouth width	lanquid th.	material
C	32	8	1/4	1.7	97% Lead
c ^o	18	4.9		1.1	
c ⁱ	11.5	3		0.8	
c ⁱⁱ	7.3	2		0.6	
c ⁱⁱⁱ	5.2	1.2		0.5	
c ⁱⁱⁱⁱ	3.5	0.8		0.4	

Sesquiltera II

	Q/T	Ø	cut-up	mouth width	lanquid th.	material
C	59/38	same as		1/4	2.6/1.9	97% Lead
c ^o	33/21	P 4'			1.7/1.2	
c ⁱ	19/13				1.2/ .8	
c ⁱⁱ	0 12/ 8				.8/ .6	
c ⁱⁱⁱ	7.4/4.9				.6/ .5	
c ⁱⁱⁱⁱ	4.2/3				.45/ .4	

Scharff 1' IV

	Ø	cut-up	mouth width	lanquid th.	material	1	13	19	25	37	51
C			Scale from 2' Octave		97% Lead					4'	4'
c ^o									2 2/3'	2 2/3'	2 2/3'
c ⁱ								2'	2'	2'	2'
c ⁱⁱ							1 1/3'	1 1/3'	1 1/3'	1 1/3'	
c ⁱⁱⁱ						1'	1'	1'	1'		
c ⁱⁱⁱⁱ						2/3'	2/3'	2/3'			
						1/2'	1/2'				
						1/3'					

PASI Organ Builders Inc.

Roy, Wa

Opus 13 scaling information

PEDAL**Subbass 16'**

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material	Wall th
C	180x230	60			Poplar	20
c°	112x144	36				16
c'	70x90	24.5				12

Principal 8'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	150	32	1/4	5.7	97% Lead
c°	85	20.5		3.6	
c'	47	11.5		2.2	

Octave 4'

	Ø	cut-up	mouth width	languid th.	material
C	92	20.5	1/4	3.7	97% Lead
c°	57	12		2.5	
c'	30	7.5		1.65	

REEDS**Trumpet 8'**

	Ø upper	Ø lower	length	material	Shallots Ger Style	t-thickn.
C	120	21	2150	97% Lead		0.5
c°	93	15.5	1050			0.35
c'	70	11	540			0.25
c''	58	8	260			0.14
c'''	48	7	120			0.1
c''''	40	7	43			

Chamade 8' mc

same as Trumpet 8' but 90% Tin

Ger Style

Dulzian 16'

Ger Style

	Ø upper	Ø lower	length Cyl.	length, cone	material	t-thickn.
C	60	22.5	1250	410	97% Lead	0.8
c°	48	17	1170	312		0.5
c'	37	15.3	550	225		0.35
c''	28	12.2	255	115		0.27
c'''	22	7.5	70	61		0.18
c''''	18	7	40	33		0.08

Oboe 8'

	Stem Ø upper	Stem Ø lower	Stem Length	Bell Ø upper	Bell length, cone	Fr Style material	t-thickn.
C	70	14	2270			97% Lead	0.45
c°	56	12	1115				0.35
c'	44	9	366	54	144		0.27
c''	16	9	50	46	80		0.2
c'''	14	8	44	38	50		0.1
c''''	12	7	38	32	25		

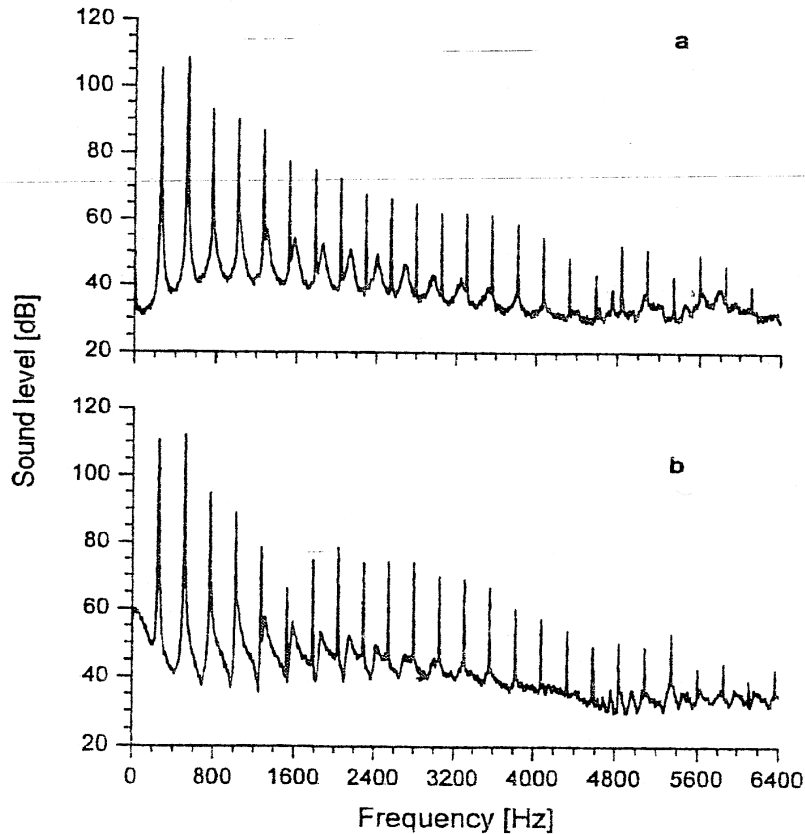
Posaune 16'

Ger Style

	Ø upper	Ø lower	length	material	t-thickn.
C	205	32	4480	97% Lead	1.05
c°	140	22	2230		0.63
c'	105	18	1066		0.47

4.10 Το φάσμα συχνοτήτων της μόνιμης (σταθερής) κατάστασης

Στο σχήμα 4.23 φαίνεται το ηχητικό φάσμα ενός διαπασών αυλού. Είναι μία αντιπροσωπευτική εικόνα για τη γενική συμπεριφορά των αυλών. Τα χαρακτηριστικά του μπορούν να ομαδοποιηθούν σε οκτώ κατηγορίες οι οποίες θα αναλυθούν αμέσως [59]. Από αυτές, οι έξι πρώτες είναι εμφανείς στα διαγράμματα του σχήματος 4.23, ενώ οι δύο τελευταίες θα είναι εμφανείς σε παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.23

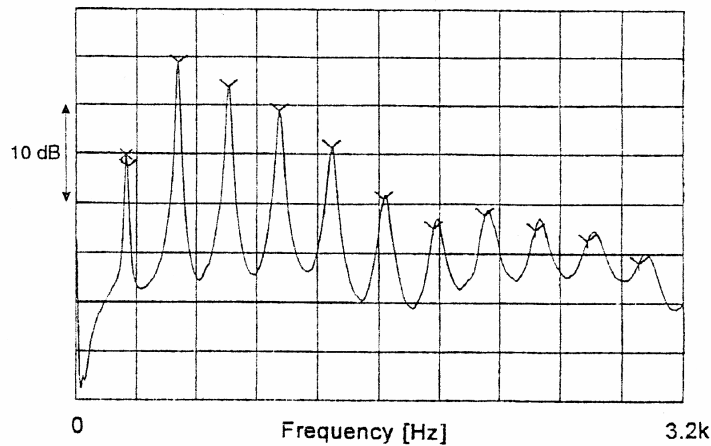
Τυπικό φάσμα συχνοτήτων σταθερής κατάστασης αυλού διαπασών, a) Στο ανοικτό παθητικό άκρο, b) στο άνω χείλος (labium).

1) Μία σειρά αρμονικών συχνοτήτων (οι υψηλές κορυφές του διαγράμματος)

Στη θεωρία Fourier [DD] ένα περιοδικό σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως η συνέλιξη μίας μόνο περιόδου με μία άπειρη σειρά από Dirac-delta παλμούς, χωριζόμενους από την περίοδο T [59]. Ο μετασχηματισμός Fourier (FT) μίας τέτοιας συνέλιξης θα είναι το προϊόν των μετασχηματισμών Fourier των επί μέρους συνιστωσών. Έτσι ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος περιλαμβάνει μία σειρά από αρμονικές συνιστώσες

2) Μία σειρά συχνοτήτων πολύ χαμηλότερου πλάτους από τις αρμονικές και με συχνότητα ελαφρώς μεγαλύτερη (οι χαμηλές κορυφές του διαγράμματος)

Οι μικρές και φαρδιές κορυφές που φαίνονται στο διάγραμμα δηλώνουν τους τρόπους συντονισμού εντός του ακουστικού σωλήνα. Αν ένας ανοικτός σωλήνας τοποθετηθεί στο ηχητικό πεδίο ενός μεγαφώνου, θα ενισχύσει τις συχνότητες εκείνες που ανταποκρίνονται στους τρόπους συντονισμού του. Τοποθετώντας τώρα ένα μικρό μικρόφωνο μέσα στο σωλήνα και χρησιμοποιώντας διέγερση λευκού θορύβου, θα λάβουμε στην απέναντι έξοδο το φάσμα συντονισμών του (σχήμα 4.24).



Σχήμα 4.24

Τα πλάτη των ιδιοσυχνοτήτων ενός ανοικτού ακουστικού σωλήνα μήκους 60 cm και διαμέτρου 31 mm. Οι αρμονικές συχνότητες τις θεμελίου έχουν τσεκαριστεί με v .

Οι ιδιοσυχνότητες ενός σωλήνα είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από τις αρμονικές της θεμελίου συχνότητας. Μπορούμε να καλούμε το φαινόμενο διεύρυνση (stretching) των ιδιοσυχνοτήτων. Πάντως, η διεύρυνση παρατηρείται εντονότερα στους ανοικτούς, παρά στους κλειστούς αυλούς. Στο φάσμα του διαπασών (σχήμα 4.23^α), η 9^η ιδιοσυχνότητα βρίσκεται σχεδόν στη μέση μεταξύ 9^{ης} και 10^{ης} αρμονικής. Η διεύρυνση των ιδιοσυχνοτήτων αυξάνεται καθώς μεγαλώνει ο λόγος της διαμέτρου προς το μήκος του ακουστικού σωλήνα (συντονιστή) και καθώς μικραίνουν τα ανοίγματα στα άκρα του. Βέβαια, οι κωνικοί σωλήνες παρουσιάζουν μικρότερη διεύρυνση, που μειώνεται καθώς αυξάνεται η γωνία κορυφής. Υπάρχει τώρα μία τιμή της γωνίας αυτής, για την οποία οι ιδιοσυχνότητες σχετίζονται αρμονικά. Αν η γωνία αυξηθεί περαιτέρω, οι ιδιοσυχνότητες συμπύσσονται, δηλαδή είναι ελαφρά χαμηλότερες από τις αρμονικές.

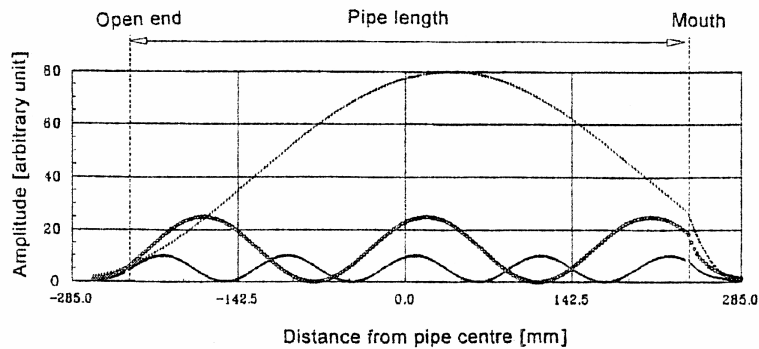
Αυτά έχουν παρατηρηθεί πειραματικά [59], άλλα εξηγούνται απλά και με τα όσα περιγράψαμε στη θεωρία ακουστικών σωλήνων (Κεφ. 7, Μέρος I). Η αέρια στήλη συντονίζεται, κατά τη θεωρία, σε συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες (eigenfrequencies), που ανταποκρίνονται στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (eigenmodes) του σωλήνα. Καθώς η διάμετρος του σωλήνα είναι πάντα κατά πολύ μικρότερη του μήκους κύματος, οι καθαρά διαμήκεις συντονισμοί εμφανίζονται πρώτοι. Οι συχνότητές τους δεν σχετίζονται αρμονικά εξ' αιτίας της διόρθωσης μήκους που στην πραγματικότητα μειώνεται με τη συχνότητα, όπως έχει επαληθευτεί επίσης πειραματικά [CC,57], παρόλο που στους υπολογισμούς γενικά δεχόμαστε τα όσα ελέγχθησαν στην ενότητα 7.8. Στην ενότητα αυτή είδαμε ότι η διόρθωση είναι ανάλογη της διαμέτρου του σωλήνα, ώστε η διεύρυνση των αρμονικών να είναι εντονότερη για τους μεγάλους σωλήνες (μεγάλης διαμέτρου) παρά για τους μικρούς. Ακόμα, η διόρθωση είναι μεγαλύτερη για ένα μικρό άνοιγμα στόματος παρά για ένα μεγάλο [EEE,59,80]. Συνεπώς, ένας αυλός παρουσιάζει εντονότερη διεύρυνση αρμονικών από έναν απλό ακουστικό σωλήνα ίδιου μήκους και διαμέτρου. Εξ' αιτίας τώρα των διαφορετικών διορθώσεων μήκους στα ανοίγματα, το στάσιμο κύμα τοποθετείται ασύμμετρα εντός του σωλήνα και μάλιστα μετακινείται προς την πλευρά του μικρότερου ανοίγματος. Στο σχήμα 4.25 φαίνονται οι μετρημένες ασυμμετρίες της 1^{ης}, της 3^{ης} και της 5^{ης} αρμονικής ενός φαρδύ κλειστού στο παθητικό άκρο σωλήνα, τύπου Nachthorn (Night horn, σχήμα 4.18) [59]. Εκτός από τις ασυμμετρίες, παρατηρούμε ότι οι φάσεις των μετρημένων ηχητικών πιέσεων στα άκρα ενώ θα έπρεπε να είναι πολλαπλάσια του π , κατά τη θεωρία, τελικά αποκλίνουν απ' αυτή τη συνθήκη.

Ένας ακουστικός σωλήνας χαρακτηρίζεται επαρκώς από τους κανονικούς του τρόπους. Κάθε κανονικός τρόπος όμως περιγράφεται πλήρως από τρεις ποσότητες:

- 1) Την ιδιοσυχνότητα
- 2) Τον παράγοντα ποιότητας (quality factor) Q .
- 3) Τη θέση του στάσιμου κύματος εντός του σωλήνα.

Ο συντονιστής συλλέγει και αποθηκεύει ενέργεια στους τρόπους του. Όπως έχει ήδη αναλυθεί, για έχουμε συντονισμούς διαρκείας πρέπει απλά το ποσό ενέργειας που προσφέρεται στην είσοδο του σωλήνα από το διεγέρτη να ισούται με το ποσό ενέργειας που χάνεται, για κάθε τρόπο, ήτοι να ισούται με τις απώλειες συνεκτικότητας και θερμότητας. Η ισορροπία αυτή της ενέργειας που αποθηκεύεται προς αυτή που χάνεται σε μία περίοδο περιγράφεται από τον παράγοντα ποιότητας Q του αντίστοιχου τρόπου. Η τιμή του Q μπορεί εύκολα να υπολογιστεί διαιρώντας τη συχνότητα του τρόπου με την τιμή

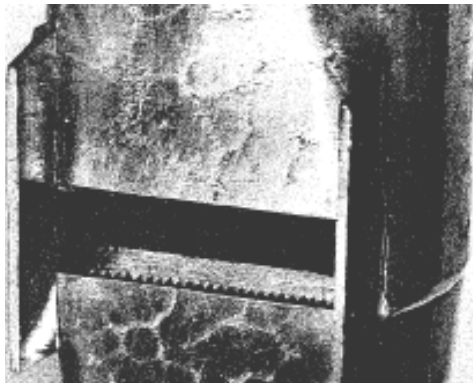
FWHM (Full Width at Half Maximum) της καμπύλης συντονισμού [59]. Καθώς ένας συντονιστής μπορεί να λαμβάνει και να αποβάλλει ενέργεια σε μικρές μόνο ποσότητες, απαιτείται συγκεκριμένος αριθμός περιόδων για να φτάσουμε σε ισορροπία κατά την αρχική διέγερση ή για να χάσουμε όλη την ενέργεια όταν η διέγερση σταματήσει. Ο αριθμός των περιόδων που μεσολαβούν για να χαθεί το 99,8 % της αποθηκευμένης ενέργειας δίνεται για $2Q$. Από αυτά είναι φανερό ότι ο παράγοντας Q περιορίζει σημαντικά την ταχύτητα της αρχικής μετάβασης (initial transient). Η ομιλία (speech) ενός αυλού με υψηλό Q θα είναι πιο αργή από έναν αυλό με χαμηλό Q . Από την άλλη μεριά ο παράγοντας Q εκφράζει και το μέγεθος της ακουστικής πίεσης μέσα σε έναν σωλήνα. Άρα όταν μεγαλώνει ο Q μεγαλώνει και η παραγόμενη ηχητική ένταση.



Σχήμα 4.25

Στάσιμα κύματα σε έναν κλειστό αυλό τύπου Nachthorn. Παρουσιάζεται η κατανομή της ηχητικής πίεσης για την 1^η, 3^η και 5^η αρμονική.

3) Καμπύλη θορύβου ευρέως φάσματος



Εικόνα 4.26

Τριγωνικές εγκοπές στη flue σχισμή για περιορισμό θορύβου υψηλής συχνότητας.

όπου οι αρμονικές συνιστώσες είναι ασθενείς (έχουν μικρά πλάτη). Ο θόρυβος υψηλών συχνοτήτων μπορεί να περιορισθεί αποτελεσματικά δημιουργώντας εγκοπές (nicking) στη flue σχισμή [59], όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στο σχήμα 4.26 [58]. Με αυτή τη μέθοδο αυξάνουμε το λόγο των υψηλών αρμονικών προς το θόρυβο.

4) Απόσβεση των αρμονικών

Η απόσβεση των αρμονικών εξαρτάται από τις συνολικές ενεργειακές απώλειες στο συντονιστή. Αυτές αποτελούνται από τις απώλειες όγκου στον αέρα, τις επιφανειακές απώλειες στο τοίχωμα του σωλήνα, λόγω συνεκτικότητας και θερμικής αγωγιμότητας, τις απώλειες ακτινοβολήσης στα ανοίγ-

ματα και στη σύζευξη του ήχου με τις ταλαντώσεις των τοιχωμάτων. Στους αυλούς, οι επιφανειακές απώλειες και απώλειες ακτινοβολήσης είναι πολύ μεγαλύτερες από τις άλλες δύο. Οι επιφανειακές απώλειες θεωρητικά είναι ανάλογες με τον παράγοντα $1/r\sqrt{f}$ [59], ενώ οι απώλειες ακτινοβολήσης είναι ανάλογες κατά τον παράγοντα $r^2 f^2$, όπου R είναι η ακτίνα του σωλήνα και f η συχνότητα. Σύμφωνα με αυτά, για την ίδια συχνότητα οι επιφανειακές απώλειες είναι σχετικά μεγαλύτερες για στενούς αυλούς παρά για φαρδείς. Αντίστροφα, οι απώλειες ακτινοβολήσης είναι σχετικά μεγαλύτερες σε φαρδείς παρά σε στενούς αυλούς. Τώρα, καθώς μεγαλώνει η συχνότητα, οι επιφανειακές απώλειες μειώνονται και οι απώλειες ακτινοβολήσης αυξάνονται. Υπάρχει λοιπόν μία συγκεκριμένη συχνότητα για κάθε αυλό στην οποία οι συνολικές απώλειες ελαχιστοποιούνται. Αξιοσημείωτο είναι ότι σε στενούς σωλήνες η ελαχιστοποίηση των απωλειών συμβαίνει σε συχνότητα υψηλότερη της θεμελιώδους, ώστε το αντίστοιχο πλάτος να είναι μεγαλύτερο. Το σχήμα 4.27 δείχνει πως κυμαίνεται το αρμονικό φάσμα με αυξανόμενο διάμετρο. Ενώ στο σχήμα 4.28 φαίνεται το μετρημένο φάσμα ενός στενού και ενός φαρδιού αυλού ίδιου μήκους. Οι μετρήσεις έγιναν απ' τους Miklos και Angster [59].

Σε έναν φαρδύ ακουστικό σωλήνα αυλού, υπάρχουν λιγότερες υψηλές αρμονικές, με συγκρίσιμο προς τις πρώτες πλάτος. Το πλάτος των αρμονικών εξασθενεί γοργότερα με τη συχνότητα και η διεύρυνση των κανονικών τρόπων είναι εντονότερη, απ' ότι σε έναν στενό σωλήνα. Οι αυλοί ακτινοβολούν ήχο σχεδόν εξ' ολοκλήρου από τα ανοίγματά τους, δηλαδή από το στόμα και το άκρο, αν ο σωλήνας είναι ανοικτός ή μόνον από το στόμα, όταν είναι κλειστός. Τελευταίες μελέτες δείχνουν ότι το σώμα ίσως να ακτινοβολεί κάποιο ποσοστό ήχου, αλλά αυτό μπορεί να αμεληθεί [59]. Καθώς τα ανοίγματα έχουν διαστάσεις πολύ μικρότερες από το μήκος κύματος του ήχου, κάθε ένα από αυτά μπορεί να εκληφθεί ως μία μονοπολική πηγή ήχου (επόμενο κεφάλαιο), με τη δύναμη της πηγής να δίνεται από την ακουστική ροή διαμέσου τους [59]. Στο σχήμα 4.23b παρατηρούμε μία ελάττωση της 6^{ης} αρμονικής. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να εξηγηθεί λαμβάνοντας υπ' όψη τις ιδιότητες του συντονιστή. Σύμφωνα με θεωρία της διόρθωσης μήκους, είναι γνωστό ότι το μισό μήκος κύματος του ήχου είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μήκος του σωλήνα. Έτσι, οι ηχητικές πιέσεις στα άκρα είναι μη μηδενικές. Θεωρώντας μία διόρθωση μήκους δ_m στο στόμα, η ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί ως:

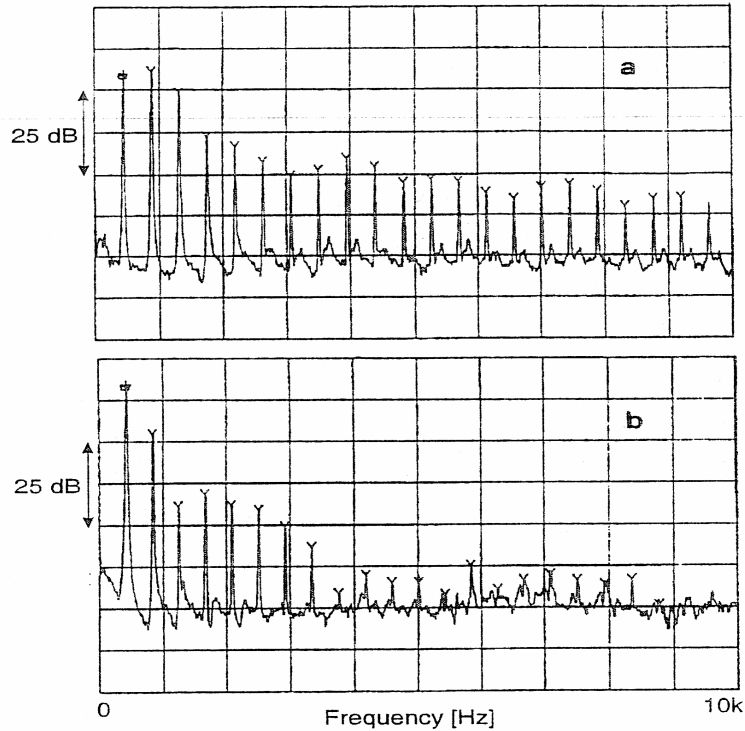
$$p = P \sin(k_1(x + \delta_m)) \quad (4.1)$$

όπου $k_1 = 2\pi/\lambda$ ο κυματικός αριθμός και x η απόσταση. Η χωρική φάση (η γωνία μέσα στο ημίτονο) για $x=0$ είναι: $\phi = k_1\delta_m$. Δηλαδή, έχει τιμή μεγαλύτερη του μηδενός στο στόμα. Η απόκλιση ϕ μπορεί να εκληφθεί ως μία διόρθωση φάσης για το στόμα. Η χωρική φάση της κάθε αρμονικής, στο στόμα, μπορεί να καθορισθεί αντικαθιστώντας απλά τον κυματικό αριθμό της θεμελιώδους με τον κυματικό αριθμό της αντίστοιχης αρμονικής. Δηλαδή: $k_N = Nk_1$. Κατά συνέπεια, η χωρική φάση για κάθε αρμονική γράφεται: $\phi_N = N\phi$. Καθώς η ακουστική ροή εξαρτάται απ' το συνημίτονο της χωρικής φάσης [6], η ακουστική πίεση που ακτινοβολείται από το στόμα θα παρουσιάζει ελάχιστο όταν η ϕ_N προσεγγίζει την τιμή $\pi/2$. Η πρώτη ελαχιστοποίηση (απότομη μείωση του πλάτους) αρμονικής καθορίζεται από τη διάμετρο του σωλήνα και το άνοιγμα του στόματος. Για τυπικούς διαπασών αυλούς (πλάτος στόματος $\sim 1/4$ περιφέρεια, ύψος στόματος $\sim 1/4$ πλάτος στόματος, λεπτομέρειες στο κεφ. 6), η πρώτη ελαχιστοποίηση συμβαίνει στην περιοχή της 5^{ης} και 6^{ης} αρμονικής (σχήμα 4.23). Για φαρδείς σωλήνες η ελαχιστοποίηση συνήθως συμβαίνει από την 3^η κιάλας αρμονική, ενώ για στενούς σωλήνες αυτή η συμπεριφορά μετατοπίζεται προς την 7^η και 8^η αρμονική, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο σχήμα 4.28.

	Viscous loss	Radiation loss		Total loss	Quality factor Q	Spectrum
		open end	labium end			
narrow pipe (-12 HT)	9.7	0.8	4	14.5	70	
normal pipe	5.7	2.4	12	20.1	50	
broad pipe (+12 HT)	3.5	6.7	34	44.2	23	

Σχήμα 4.27

Υπολογισμένες απώλειες αυλών διαφορετικών διατομών για τη θεμελιώδη συχνότητα, σε 0,1 %. Το σύμβολο ± 12 HT σημαίνει ότι η διάμετρος του σωλήνα παραμένει ίδια με τη διάμετρο του κανονικού αυλού διαπασών, αλλά το μήκος αλλάζει ώστε να δίνει θεμελιώδη συχνότητα ± 12 ημιτόνια υψηλότερα ή χαμηλότερα, αντιστοίχως.



Εικόνα 4.28

Μέτρηση του συχνοτικού φάσματος ενός a) στενού, τύπου Salicional, και b) ενός φαρδιού, τύπου Kornet αυλού.

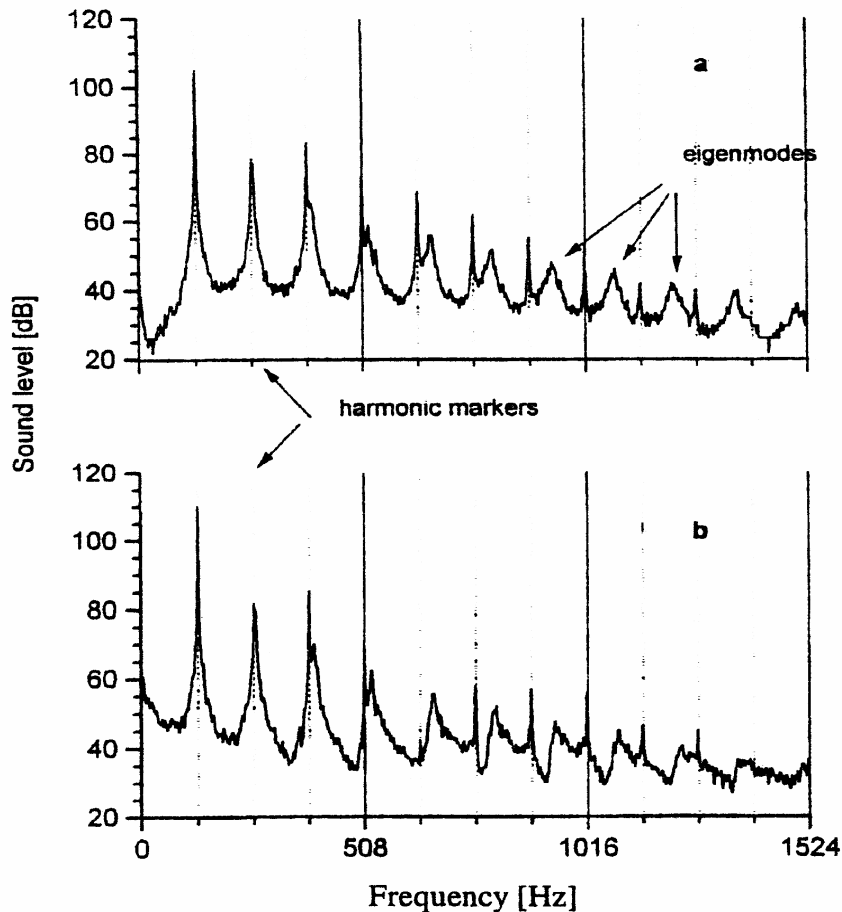
Θα δούμε στο κεφάλαιο 5 ότι οι αρμονικές επηρεάζονται ισχυρά από τη σχετική θέση της αέριας δέσμης και του άνω χείλους (labium). Όταν η δέσμη κατευθύνεται συμμετρικά προς το άνω χείλος, δεν μπορούν να ενεργοποιηθούν οι άρτιες αρμονικές, παρά μόνον οι περιττές. Ωστόσο, επειδή η δέσμη τελικά δεν είναι από μόνη της συμμετρική, πάντα θα ενεργοποιούνται έστω και λίγο οι άρτιες αρμονικές, κάτι που θα φανεί και στην πειραματική μελέτη, του μέρους IV.

Η σχετική θέση μίας αρμονικής συνιστώσας και ο γειτονικός της κανονικός τρόπος επηρεάζουν το πλάτος αυτής της αρμονικής. Αν η συχνότητα της αρμονικής βρίσκεται κοντά σε μία ιδιοσυχνότητα, η αρμονική θα ενισχυθεί. Απ' την άλλη, αν η συχνότητα της αρμονικής βρίσκεται ενδιάμεσα σε δύο κανονικούς τρόπους, τότε δεν θα ενισχυθεί. Κατά συνέπεια η διεύρυνση (stretching) των ιδιοσυχνοτήτων επηρεάζει με τη σειρά της τη μορφή των αρμονικών στο συχνοτικό φάσμα. Όταν ένας σωλήνας είναι στενός, οι πρώτες αρμονικές συνιστώσες ενισχύονται. Όταν ένας σωλήνας είναι φαρδύς, συνήθως η 3^η και 4^η αρμονική βρίσκονται μεταξύ των κανονικών τρόπων.

5) Διαφορετικός βαθμός απόσβεσης στο στόμα και στο ανοιχτό άκρο (για ανοικτούς αυλούς)

Είδαμε προηγουμένως ότι ο ήχος στον αυλό ακτινοβολείται από δύο μονοπολικές πηγές, τοποθετημένες στα ανοίγματά του. Οι πηγές αυτές ακτινοβολούν σε φάση για τις περιττές αρμονικές και εκτός φάσης για τις άρτιες. Η δύναμη είναι διαφορετική για την κάθε πηγή και τα φάσματα που ακτινοβολούν τα δύο ανοίγματα είναι διαφορετικά [6]. Ο λόγος που τα φάσματα διαφέρουν είναι λόγω της ασυμμετρίας του στάσιμου κύματος, όπως είδαμε στο σχήμα 4.25. Αφού η διόρθωση μήκους είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την επιφάνεια του ανοίγματος [CC,6,59], το φάσμα στο στόμα αποσβένεται γρηγορότερα απ' ότι στο άνοιγμα, σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις [59]. Υπάρχει βεβαίως περίπτωση τα δύο ανοίγματα να έχουν το αυτό μέγεθος, κάτι που συμβαίνει συνήθως όταν υπάρχει tuning scroll στον αυλό (σχήμα 4.8). Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να αποκατασταθεί συμμετρία στο στάσιμο κύμα ή να μετατοπισθεί περισσότερο προς το παθητικό άκρο (που διαθέτει το tuning scroll), παρά προς το στόμα. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι ελαφρές αλλαγές στη γεωμετρία των ανοιγμάτων μπορούν να προκαλέσουν αισθητές μεταβολές στα ακτινοβολούμενα φάσματα.

Στο σχήμα 4.29 παρουσιάζονται τα φάσματα των ανοιγμάτων σε έναν αυλό διαπασών [59]. Παρατηρούμε ότι για την 5^η αρμονική το b διάγραμμα παρουσιάζει κοιλιά (ελαχιστοποίηση). Τέτοιες κοιλιές μπορούν να ρυθμιστούν από τις μετατροπές που θα κάνει ο ρυθμιστής (voicer) του αυλού, ο οποίος τελικά μπορεί να καθορίσει και τη μορφή του ακτινοβολούμενου φάσματος.



Εικόνα 4.29

Φάσμα σταθερής κατάστασης από έναν αυλό διαπασών, a) στο ανοικτό παθητικό άκρο και b) στην περιοχή του στόματος (στο άνω χείλος).

6) Ανωμαλίες στο υψηλόσυχο μέρος του φάσματος

Όσο μετακινούμαστε δεξιότερα στο φάσμα του σχήματος 4.23 παρατηρούμε όλο και μεγαλύτερη αναρχία στην κατανομή των αρμονικών. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται κατά κύριο λόγο στη διέγερση των εγκάρσιων τρόπων του ακουστικού σωλήνα. Είδαμε στο κεφ. 7 του μέρους I ότι όσο οι δύο διαστάσεις ενός σωλήνα είναι πολύ μικρότερες τις τρίτης, τότε αυτός διατηρεί τις ιδιότητες του ακουστικού σωλήνα, όπου μόνον επίπεδα κύματα υφίστανται. Καθώς όμως κάποια ή και οι δύο διαστάσεις μεγαλώνουν, ο σωλήνας μεταπίπτει βαθμιαία στις ιδιότητες του κυματοδηγού, όπου δημιουργούνται κύματα και άλλων κατευθύνσεων. Στην πραγματικότητα, κάθε ακουστικός σωλήνας ενός αυλού περιγράφεται από ένα κατώφλι συχνοτήτων, πάνω από το οποίο εμφανίζονται ακτινικοί και αζιμουθιακοί εγκάρσιοι τρόποι, όπως και συνδυασμοί τους [AA,PP,AAA]. Το κατώφλι αυτό καλείται συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency) και χρησιμοποιείται ευρέως ο τύπος [59]:

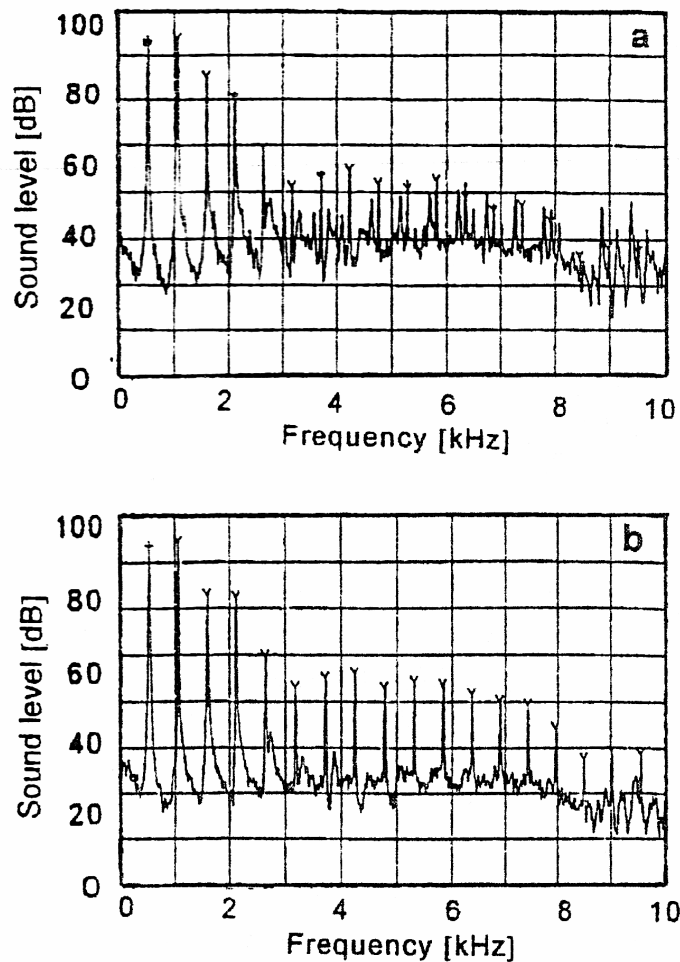
$$f = \frac{200}{d} \quad (4.2)$$

όπου d είναι η (ισοδύναμη) διάμετρος του ακουστικού σωλήνα και f η συχνότητα αποκοπής. Συνήθως οι διεγέρσεις των εγκάρσιων τρόπων είναι εμφανείς στο φάσμα στα διαστήματα μεταξύ των αρμονικών. Στο σχήμα 4.23 ο πρώτος εγκάρσιος τρόπος αντιστοιχεί σε συχνότητα περίπου 4600 Hz. Οι εγκάρσιοι τρόποι διεγείρονται κατά κύριο λόγο από την υψηλής συχνότητας περιοχή του θορύβου, από τους edge tones (επόμενο κεφάλαιο) και γενικότερα από διαταραχές στη ροή της αέρας δέσμης.

Γενικά το τοίχωμα του ακουστικού σωλήνα δεν μπορεί να ακτινοβολήσει άμεσα ήχο. Ωστόσο, υπάρχει μία γραμμική σύζευξη μεταξύ της αέρας στήλης και του τοιχώματος του σωλήνα στους ορθογωνικούς αυλούς, αλλά και στους κυλινδρικούς, όταν η διατομή τους δεν είναι απόλυτα κυκλική, αλλά ελαφρά ελλειπτική [59]. Σε αυτή την περίπτωση οι ταλαντώσεις του τοιχώματος μπορούν να επηρεάσουν τον ακτινοβολούμενο από τα ανοίγματα ήχο.

7) Αιχμηρές, μη αρμονικές καμπύλες στο υψηλής συχνότητας μέρος του φάσματος

Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στους μεταλλικούς αυλούς, στα δύο πρώτα stops, όπως φαίνεται στη σχήμα 4.30.



Εικόνα 4.30

Αυτές οι συνιστώσες δίνουν ένα ιδιαίτερο μεταλλικό χαρακτήρα στους αυλούς διαπασών. Κάποιοι ερευνητές συνδέουν αυτές τις κορυφές με τις ταλαντώσεις του τοιχώματος, αλλά πρόσφατες μελέτες δείχνουν ότι το φαινόμενο προέρχεται από τη διέγερση των υψηλών κανονικών τρόπων από τις υψηλές συνιστώσες του edge tone. Το χαρακτηριστικό αυτό μπορεί να μειωθεί με εγκοπές (nicking) ή ρυθμί-

ζοντας τον edge tone. Παρόμοιες μη αρμονικές κορυφές εμφανίζονται όταν μειωθεί δυναμικά η πίεση πνοής.

8) Υποαρμονικές συνιστώσες στο μέσον μεταξύ των αρμονικών συνιστωσών

Οι κορυφές που εμφανίζονται ακριβώς στο μέσον μεταξύ των αρμονικών συνιστωσών ενδέχεται να προκαλούνται από μία ισχυρή μη γραμμική σύζευξη μεταξύ του ηχητικού κύματος και των δονήσεων του τοιχώματος [59]. Το τοίχωμα, αν θεωρήσουμε ότι ταλαντώνεται, λαμβάνει περιοδικά ελλειπτική μορφή αποκλίνοντας από την κυκλική. Καθώς η επιφάνεια μίας έλλειψης είναι πάντα μικρότερη από αυτή του κύκλου ίδιας περιφέρειας η διατομή του σωλήνα θα συντονίζεται στη διπλάσια συχνότητα.

Σύνοψη

Η παραπάνω επισκόπηση των βασικών ιδιοτήτων του φάσματος ενός αυλού, μας δίνει μία πολύ καλή ιδέα για πως συμπεριφέρεται το όργανο αυτό και που πρέπει να στρέψουμε τις μελέτες μας στα επόμενα, για να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς λειτουργίας του. Στο πειραματικό μέρος, πολλά από αυτά τα στοιχεία θα εμφανιστούν, δίχως όμως να μας εκπλήξουν, καθώς οι ερμηνεία τους βασίζεται στις προηγούμενες παραγράφους.

4.11 Υπολογισμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης

Ο Verge [EEE,81] προτείνει την ακόλουθη διαδικασία για τον προσδιορισμό των συχνοτήτων συντονισμού ενός αυλού, που όπως έχει αναλυθεί δεν βρίσκονται σε καθαρή αρμονική σχέση μεταξύ τους, αλλά σε ελαφριά διεύρυνση (harmonic stretching). Για να υπολογίσει κανείς με ακρίβεια τις συχνοτήτες των τρόπων χρειάζεται να γνωρίζει την ακριβή μεταβολή της διόρθωσης μήκους στα ανοίγματα (στόμα και παθητικό άκρο) με τη συχνότητα. Στο κεφάλαιο 7 του μέρους I χρησιμοποιήσαμε μία σχέση σταθερής διόρθωσης μήκους στο παθητικό άκρο η οποία είναι βεβαίως προτιμότερη από τη σχέση (7.61) αλλά δεν συμπεριλαμβάνει την αρμονική διεύρυνση. Και στη μέθοδο του Verge η διόρθωση μήκους είναι σταθερή, όμως τα αποτελέσματα φαίνεται να συμφωνούν αρκετά καλά με τις πειραματικές μετρήσεις [81].

Κατ' αρχήν θεωρούμε δύο βασικές διορθώσεις μήκους, στο παθητικό άκρο και στο στόμα. Η ολική διόρθωση μήκους του στόματος δ_m περιλαμβάνει τρεις επί μέρους όρους:

Τη διόρθωση δ_c στο άνοιγμα του στόματος,

τη διόρθωση δ_e λόγω τυχόν ύπαρξης αυτιών (ears) γύρω απ' το στόμα και

τη διόρθωση δ_r λόγω φαινομένων αδρανείας της ροής στην περιοχή του στόματος.

Κατά συνέπεια για το στόμα του αυλού μπορούμε να γράψουμε:

$$\delta_m \approx \delta_c + \delta_e + \delta_r \quad (4.3)$$

Έστω ότι ο συντονιστής του αυλού είναι τετραγωνικής διατομής πλευράς H . Αν η απόσταση μεταξύ flue σχισμής και άνω χείλους (labium) είναι W , τότε κατά την έκφραση των Morse και Ingard [QQ], η διόρθωση στο άνοιγμα του στόματος είναι:

$$\delta_c = \frac{4}{\pi} W \ln \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\pi W}{4H} + \frac{1}{2} \cot \frac{\pi W}{4H} \right) \quad (4.4)$$

Όταν το ύψος των αυτιών είναι l_e και οριοθετούν μία περιοχή ίση με το άνοιγμα του στόματος, τότε προκύπτει μία διόρθωση ίση με:

$$\delta_e = \frac{S_m \tan k_0 l_e}{S_p k_0} \quad (4.5)$$

όπου

$$S_m = WH \quad (4.6)$$

η επιφάνεια του στόματος και

$$S_p = H^2 \quad \text{ή} \quad S_p = \pi r_p^2 \quad (4.7)$$

η διατομή του συντονιστή, όπου r_p την ακτίνα ενός κύκλου με επιφάνεια ίση με τη διατομή S_p (ισοδύναμη ακτίνα). $k_0 = \omega / c_0$ είναι ο κυματικός αριθμός, με c_0 την ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Η διόρθωση λόγω φαινομένων αδρανείας μπορεί να προσδιοριστεί από τον τύπο:

$$\delta_r = \frac{S_m}{S_p} \frac{\tan k_0 \left(0,82 \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} \right)}{k_0} \quad (4.8)$$

Στο ανοικτό άκρο τώρα του συντονιστή πρέπει να προσθέσουμε μία διόρθωση μήκους δ_p ίση με:

$$\delta_p = 0,60 \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} \quad (\text{για unflanged ακουστικό σωλήνα}) \quad (4.9)$$

$$\delta_p = 0,82 \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} \quad (\text{για flanged ακουστικό σωλήνα}) \quad (4.10)$$

Το μήκος του ακουστικού σωλήνα, η διόρθωση μήκους του, η ολική διόρθωση μήκους του στόματος και ο κυματικός αριθμός συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση χαμηλόσυχνης προσέγγισης (low frequency approximation) [EEE,81]:

$$\tan [k_0 (L_p + \delta_p)] = -\frac{S_p}{S_m} k_0 \delta_m \quad (4.12)$$

Ο μοναδικός άγνωστός στην παραπάνω σχέση είναι ο κυματικός αριθμός, τον οποίο άπαξ και γνωρίζουμε, ξέρουμε και τη (γωνιακή) συχνότητα. Η ισότητα επαληθεύεται για άπειρες συχνότητες, που αντιστοιχούν στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του ακουστικού σωλήνα – συντονιστή του αυλού.

Ευθεία αναλυτική λύση δεν υπάρχει και πρέπει να καταφύγουμε σε επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό των συχνοτήτων. Είναι βολικό να περάσουμε τα δύο μέλη της σχέσης σε ένα loop κώδικα και να τα υπολογίζουμε ξεχωριστά αρχίζοντας από μία ελάχιστη συχνότητα, με μικρό συχνοτικό βήμα, μέχρι μία επιθυμητή μέγιστη τιμή. Σε εκείνες τις τιμές συχνότητας που τα δύο μέλη είναι περίπου ίσα, θα έχουμε και τους κανονικούς τρόπους. Μία συνθήκη ισότητας σε κάθε επανάληψη του βρόγχου είναι αρκετή για να μας καθορίσει τη συχνότητα επαλήθευσης της σχέσης (4.12).

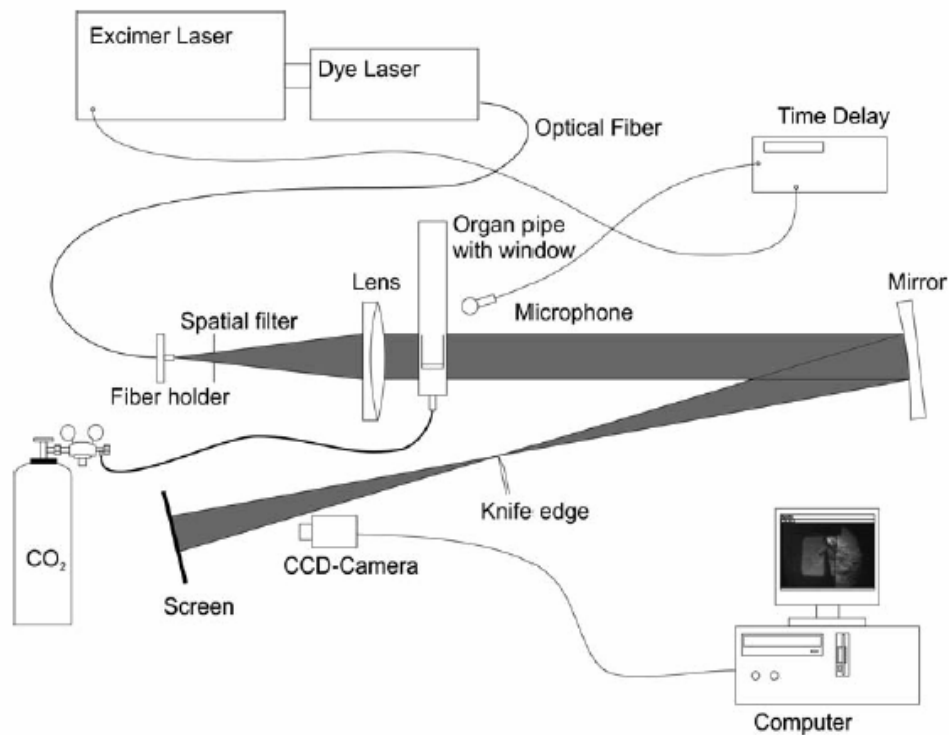
Στο πειραματικό μέρος (Μέρος IV) χρησιμοποιούμε ένα τέτοιο πρόγραμμα γραμμένο σε Fortran.

5

Ο μηχανισμός διέγερσης στα Air-Jet πνευστά

5.1 Μορφή και κίνηση της δέσμης

Ο G. Paal και οι συνεργάτες του [63] πραγματοποίησαν πειράματα για την οπτικοποίηση της ροής της δέσμης του αέρα (flow visualization) μέσα στον αυλό. Η οπτικοποίηση αυτή είναι απ' τις πιο πρόσφατες (2006), αλλά παρόμοιες εργασίες έγιναν πολλές στο παρελθόν. Του Brown [16] το 1935, του Verge [EEE] το 1995 και του Yoshikawa [85] το 1998. είναι κάποιες απ' τις επιτυχημένες φωτογραφικές μελέτες, που μας οδηγούν σε ασφαλή συμπεράσματα για τον πολύπλοκο μηχανισμό αλληλεπίδρασης της δέσμης με τον ακουστικό σωλήνα (συντονιστή). Τα πειράματα του Paal έγιναν σε έναν τυπικό οργανίσιο αυλό (organ flue pipe), τόσο για ανοικτό, όσο και για κλειστό άκρο. Ο εξοπλισμός φαίνεται στο σχήμα 6.1. Η δέσμη προέρχεται από αέριο CO_2 για να μπορεί να διακρίνεται απ' τον υπόλοιπο αέρα του αυλού.

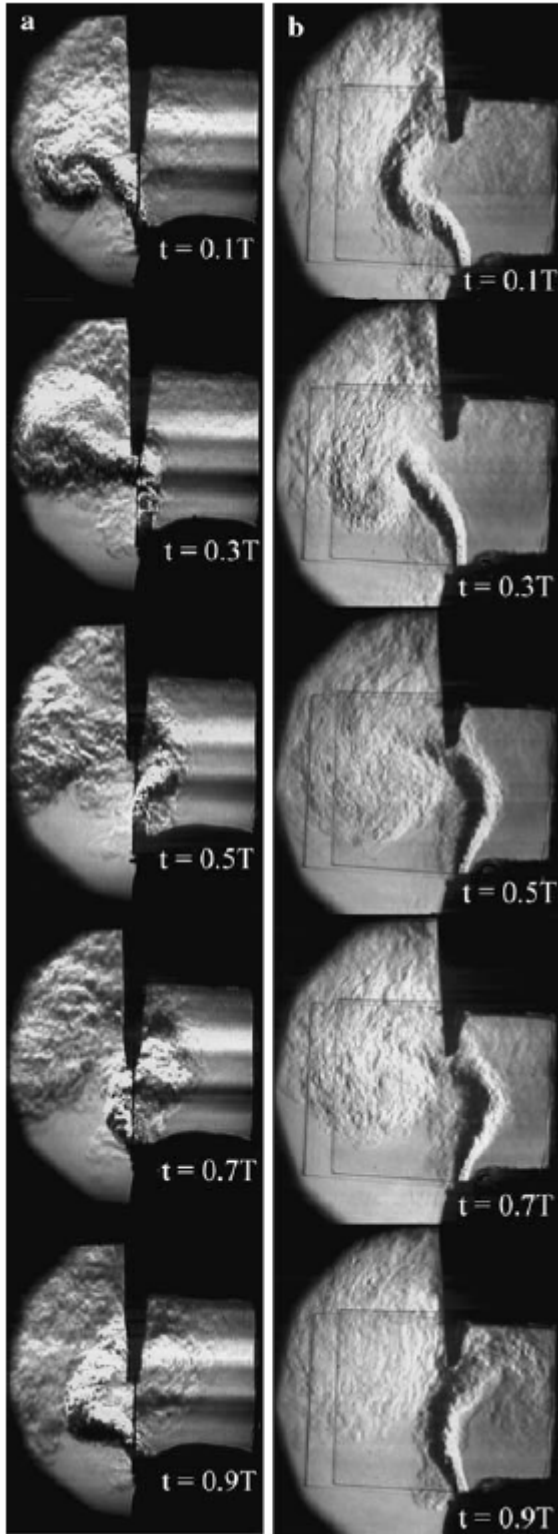


Σχήμα 5.1

Η διάταξη του Paal για την οπτικοποίηση της δέσμης μέσα στον αυλό [63].

Για την ώρα μας ενδιαφέρει να έχουμε μία εικόνα για τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του αυλού και όχι για τη μεταβατική. Στο σχήμα 6.2 φαίνονται τα αποτελέσματα της μελέτης του Paal για ανοικτό (a) και για κλειστό (b) αυλό αντιστοίχως, σε διάφορα κλάσματα μίας περιόδου.

Ο Verge ορίζει τα air-jet πνευστά ως ακουστικά συστήματα που παράγουν ήχο από τη σύζευξη μεταξύ μίας υδροδυναμικά ασταθής ροής και ενός συντονισμένου ακουστικού πεδίου σε ένα σωλήνα [EEE]. Η ύπαρξη ενός σταθερού ακουστικού πεδίου μέσα στο σωλήνα είναι μία γενικότερη παραδοχή και του Coltman [18] και του Fletcher [32]. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα πεδίο πίεσεων. Η δέσμη που



Σχήμα 5.2

a: ανοικτός αυλός, b: κλειστός αυλός

εκτοξεύεται απ' τη σχισμή και προσκρούει στο απέναντι χείλος είναι εξαιρετικά λεπτή και αυτό την καθιστά πολύ ευαίσθητη σε εξωτερικές επιδράσεις. Ο Rayleigh [UU] πρώτος έδειξε ότι μία οποιαδήποτε λεπτή δέσμη αερίου όταν εισβάλει σε χώρο ίδιου σταθερού περιβάλλοντος αερίου, αυτομάτως γίνεται αρκετά ασταθής, ώστε να ενθαρρύνεται η γένεση απειροστών διαταραχών που ενισχύονται κατά μήκος της και μεγαλώνουν βαθμιαία. Ουσιαστικά, ο περιβάλλον αέρας κάτω απ' το στόμα του αυλού καλείται ακουστικό πεδίο. Ο Brown [16] έδειξε ότι η αλληλεπίδραση δέσμης και ακουστικού πεδίου ξεκινά σχεδόν αποκλειστικά στο σημείο στο οποίο η δέσμη εγκαταλείπει τη σχισμή. Οι δημιουργούμενες διαταραχές διαδίδονται με κατεύθυνση ίδια με αυτή της δέσμης, αλλά με ταχύτητα σημαντικά μικρότερη [16]. Κατά τον Coltman [18], η βαθμιαία ενίσχυση των διαταραχών αναγκάζει τον άξονα της δέσμης να πάρει ημιτονοειδή μορφή (σχήμα 5.2). Έτσι ο Fletcher [39,42] προτείνει να χωρίσουμε τα αποτελέσματα της επίδρασης του ακουστικού πεδίου πάνω στη δέσμη σε δύο κατηγορίες:

- 1) Δημιουργία διαταραχών τυρβώδους φύσεως ή όπως χαρακτηριστικά αναφέρει «κιρσογενείς (varicose)» διαταραχές, που μεταβάλλουν κυρίως το πάχος της.
- 2) Ημιτονοειδής μεταβολή (διαταραχή) της κατεύθυνσης της δέσμης, που έχει ως αποτέλεσμα την εκτροπή απ' την πορεία της (σχήμα 5.3).

Ο Nederveen [RR] παρομοιάζει τη δέσμη με μία γραμμή από κολυμβητές (ο ένας πίσω απ' τον άλλο), που απ' τη μια προσπαθούν να διασχίσουν κάθετα τον ποταμό, αλλά απ' την άλλη το ρεύμα τους παρασύρει απ' την κατεύθυνσή τους. Ο Rayleigh [UU] έδειξε ότι αν δεχτούμε ένα προφίλ ταχύτητας σαν κωνικό καπέλο (top-hat velocity profile), ταχύτητα δέσμης V και πάχος σχισμής $2b$, η φασική ταχύτητα μίας διαταραχής λαμβάνει δύο συνιστώσες:

$$u_{\text{sinuous}} = \frac{V}{1 + \coth kb} \quad (5.1)$$

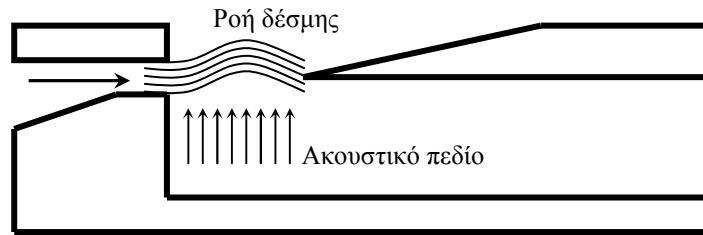
$$u_{\text{varicose}} = \frac{V}{1 + \tanh kb} \quad (5.2)$$

Όπου $k = \frac{\omega}{u}$ είναι ο κυματικός αριθμός

της διαταραχής. Το πλάτος της διαταραχής αυξάνει εκθετικά ως $\exp \mu x$, όπου ο παράγων αύξησης μ είναι σχεδόν ίσος με τον κυματικό αριθμό k , ώστε να αυξάνεται χωρίς όριο στις υψηλές συχνότητες:

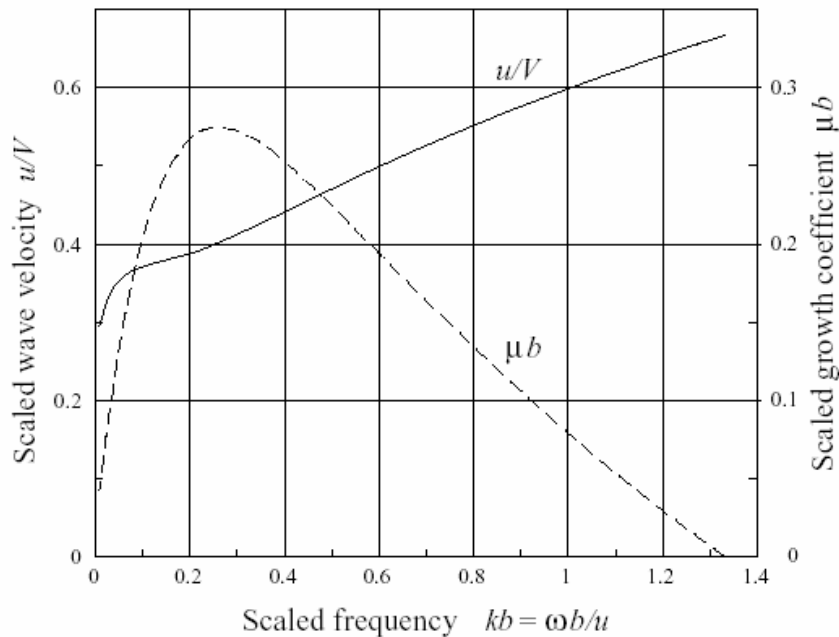
$$\mu = k(\coth kb)^{1/2} \tag{5.3}$$

Απ' τις σχέσεις (5.1) και (5.2), παρατηρούμε ότι αν η συχνότητα είναι χαμηλή, ώστε το μήκος κύματος μίας διαταραχής στη δέσμη να είναι πολύ μεγαλύτερο απ' το b , δηλαδή $kb \ll 1$ ή $kb \rightarrow 0$, τότε $u_{\text{sinuous}} \approx kbV \rightarrow 0$, $u_{\text{varicose}} \rightarrow V$ και $\mu = \left(\frac{k}{b}\right)^{1/2}$. Όταν όμως η συχνότητα γίνεται αρκετά υψηλή, τότε $\lambda \ll b$, δηλαδή $kb > 1$, ώστε και οι δύο ταχύτητες πλησιάζουν την τιμή $V/2$, ενώ $\mu \approx k \approx \frac{2\omega}{V}$, όπως αναφέρθηκε.



Σχήμα 5.3

Η δέσμη στην πραγματικότητα προσεγγίζει περισσότερο μία «καμπανοειδή (bell-shaped)» μορφή παρά ένα κωνικό καπέλο (top-hat) [42,62], όπως είχε θεωρήσει ο Rayleigh. Ο Bickley [15] το 1937 ανακάλυψε το προφίλ ταχύτητας μίας επίπεδης δέσμης, καθώς εισβάλλει σε ένα συνεκτικό ρευστό, προτείνοντας τη μαθηματική bell-shaped μορφή: $V \sec h^2\left(\frac{y}{b}\right)$. Σύμφωνα με τον Nolle [62], η χωρική ανάλυση των Mattingly και Crimiale [55] το 1971 έδωσε μία ακριβέστερη περιγραφή της bell-shaped δέσμης, από ότι η προηγηθείσα το 1962, χρονική ανάλυση των Drazin και Howard [24]. Στο σχήμα 5.4 φαίνεται η συμπεριφορά της κυματικής (φασικής) ταχύτητας και του παράγοντα αύξησης για μία ημιτονοειδή διαταραχή. Ο υπολογισμός έγινε απ' τον Nolle [62] για bell-shaped προφίλ: $V \sec h^2\left(\frac{y}{b}\right)$, με y την απόσταση απ' τον άξονα της δέσμης. Η αδιάστατη συχνότητα (scaled frequency) είναι 2π φορές ο αριθμός Strouhal $St_b = \frac{f \cdot b}{u}$.



Σχήμα 5.4

Από τη μορφή της καμπύλης mb , παρατηρούμε ότι ο παράγων αύξησης μηδενίζεται για $kb > 1,33$, που σημαίνει ότι παύει τότε να αυξάνεται η κυματική διαταραχή στη δέσμη. Επίσης, ο παράγων αύξησης γίνεται μέγιστος για $kb = 0.3$. Συνεπώς, διαταραχές με μήκος κύματος μικρότερο από το ολικό πλάτος (άνοιγμα) της δέσμης εξασθενούν. Η κυματική (φασική) ταχύτητα, απ' την άλλη, αυξάνεται γραμμικά, καθώς αυξάνεται η συχνότητα, μεταξύ των τιμών $0,4V - 0,6V$. Στην πράξη, για μικρές διαταραχές, η δέσμη συμπεριφέρεται όπως παραπάνω. Όταν όμως το πλάτος των διαταραχών γίνεται μεγαλύτερο από το ολικό πλάτος της δέσμης, δημιουργείται μία τάση για σχηματισμό δινών και γένεση μίας οδού στροβίλων (*vortex street*) [42].

5.2 Ακουστικές πηγές

Προτού συνεχίσουμε στην ανάλυση της συμπεριφοράς της δέσμης στα air-jet πνευστά, είναι χρήσιμο να ξεκαθαρίσουμε μερικά πράγματα για τις πηγές παραγωγής ήχου.

Οι ακουστικές πηγές μπορούν να χωρισθούν σε μονόπολα, δίπολα, τετράπολα ή πηγές περισσότερων πόλων. Μία τέτοια πηγή είναι ουσιαστικά ένας διεγερτικός μηχανισμός του ρευστού που την περιβάλλει, ώστε να το θέσει σε περιοδική κίνηση με συχνότητα εντός του εύρους της ακουστικής. Μία απλή μονοπολική πηγή παριστάνεται από μία σφαίρα με ακτίνα που μεγαλώνει και μικραίνει περιοδικά. Η αυξομείωση του όγκου της σφαίρας ωθεί και έλκει κατ' ακολουθία το περιβάλλον ρευστό. Όταν η πηγή είναι δίπολο, τότε σε πρώτη φάση ο ένας πόλος (σφαίρα) ωθεί, ενώ ο άλλος έλκει το ρευστό, ενώ σε δεύτερη φάση οι ρόλοι αλλάζουν και ο πόλος που ωθούσε, έλκει, ενώ ο πόλος που έλκυε, ωθεί. Επεκτείνοντας αυτή τη συμπεριφορά για δύο πόλους που ωθούν και δύο που έλκουν ρευστό εναλλάξ, παίρνουμε ένα τετράπολο. Αυτά φαίνονται στον πίνακα 5.1, όπου η ώθηση συμβολίζεται με +, ενώ η έλξη με -. Στον πίνακα αυτόν δίνεται και η τάξη μεγέθους της ακτινοβολούμενης ισχύος, όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, L το χαρακτηριστικό μήκος, U η ταχύτητα του ρευστού και a η ταχύτητα του ήχου.

Μονοπολική πηγή

Ένα σημείο που μπορεί να δημιουργεί σφαιρικά ηχητικά κύματα καλείται μονόπολο ή μονοπολική πηγή (*monopole source*). Τέτοια πηγή μπορεί να θεωρηθεί και μία παλλόμενη σφαίρα όταν η ακτίνα της είναι μικρή σε σχέση με το μήκος κύματος του ήχου που παράγει. Καθώς το κύμα ακτινοβολείται ομοιόμορφα γύρω από τη σφαίρα, η κυματική εξίσωση (2.47) του 2^{ου} Κεφαλαίου του Ι Μέρους, όταν γραφεί για σφαιρικές συντεταγμένες, θα είναι ανεξάρτητη των γωνιών φ και θ , εξαρτώμενη μονάχα από την ακτίνα r . Άρα, το κύμα θα υπακούει στην εξίσωση:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5.4)$$

Ένας δρόμος για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά μίας μονοπολικής πηγής είναι με την εξίσωση αυτή. Ο άλλος είναι με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας (Κεφ. 2, Μέρος Ι). Η κυματική εξίσωση για το δυναμικό σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι [AAA]:

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

με λύση:

$$\Phi = \frac{1}{r} f_1(ct - r) + \frac{1}{r} f_2(ct + r) \quad (5.6)$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει ένα οδεύον κύμα που απομακρύνεται απ' το κέντρο της πηγής κατά τη θετική κατεύθυνση r . Ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει ένα κύμα που συγκλίνει στο κέντρο της πηγής κατά την αρνητική κατεύθυνση r . Επειδή όμως ενδιαφερόμαστε κυρίως για κύματα που απομακρύνονται από την πηγή, επικεντρωνόμαστε στον πρώτο όρο της λύσης, ώστε:

Source type	Radiation characteristic		Directivity pattern	Radiated power is proportional to
	180° phase difference			
Monopole				$\rho L^2 \omega^4$
Dipole				$\rho L^2 \omega^6$
Quadrupole				$\rho L^2 \omega^8$

Πίνακας 5.1

Τρία βασικά είδη ακουστικών πηγών [Y].

$$\Phi = \frac{1}{r} f(ct - r) \quad (5.7)$$

ή

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial f(v)}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\rho c f'}{r} \quad (5.8)$$

με $v = ct - r$ και $f' = \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$. Η σημειακή ταχύτητα είναι:

$$u_{par} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} f' + \frac{1}{r^2} f = \frac{p}{\rho c} + \frac{1}{\rho r} \int p dt \quad (5.9)$$

Η λύση της κυματικής εξίσωσης (5.4) ή (5.5) για αρμονικές ταλαντώσεις δίνεται από την έκφραση [AAA]:

$$\bar{p} = \frac{A \exp[jk(r - ct)]}{r} + \frac{A' \exp[jk(r + ct)]}{r} \quad (5.10)$$

Όπου k ο κυματικός αριθμός. Επειδή μας ενδιαφέρουν τα κύματα που αποκλίνουν, η λύση γίνεται:

$$\bar{p} = \frac{A \exp[jk(r - ct)]}{r} \quad (5.11)$$

Λόγω τώρα της εξίσωσης (2.62), προκύπτει για το διάνυσμα της σημειακής ταχύτητας:

$$u_{par} = \frac{j}{k \rho c} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = \frac{j \bar{A}}{k \rho c} \left[-\frac{1}{r^2} - \frac{jk}{r} \right] \exp[jk(r - ct)] = \frac{\bar{A}}{\rho c r} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] \exp[jk(r - ct)] \quad (5.12)$$

Όταν το μονόπολο δημιουργεί μία απλή αρμονική ροή αέρα που δίνεται από την έκφραση $\bar{Q}(t) = Q_0 \exp(-j\omega t)$, με Q_0 την ένταση της πηγής [PP], τότε:

$$\bar{A} = j\rho c \frac{kQ_0}{4\pi} \quad (5.13)$$

ώστε η ακουστική πίεση σε απόσταση r από τη πηγή θα είναι:

$$\bar{p} = j\omega \frac{\rho}{4\pi r} Q_0 \exp[jk(r - ct)] \quad (5.14)$$

Η ένταση και η ισχύς που θα ακτινοβολούνται από την πηγή δίνονται από τις σχέσεις [PP]:

$$I = \frac{\rho f^2 Q_0^2}{8cr^2} \quad \text{και} \quad W = \frac{\pi \rho f^2 Q_0^2}{2c}$$

Το στόμα και το παθητικό άκρο ενός αυλού μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακή (μονοπολική) πηγή. Αν η μέση ταχύτητα σε κάθε ένα από αυτά τα ανοίγματα είναι $U_0 \exp(-2\pi jft)$ και η διατομή του σωλήνα S , τότε η ένταση θα είναι: $U_0 S$ και η ακτινοβολούμενη ισχύς $\pi \rho S^2 f^2 U_0^2 / 2c$ [PP].

Διπολική πηγή

Όταν δύο όμοιες μονοπολικές πηγές, η μία θετική και η άλλη αρνητική, βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη, τότε η συνολική ακουστική πίεση σε ένα σημείο που απέχει r_+ από τη θετική και r_- από την αρνητική πηγή, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{p} = \bar{P} \left[\frac{\exp(-jkr_+)}{r_+} - \frac{\exp(-jkr_-)}{r_-} \right] \quad (5.15)$$

όπου $\bar{P} = \frac{j\rho c Q_0}{4\pi}$ και Q_0 η ένταση των πηγών, που πέρα απ' το πρόσημο θεωρούνται ίδιες.

5.3 Η συμπεριφορά της δέσμης στα air-jet πνευστά

Παρά τη μεγάλη πολυπλοκότητα του φαινομένου, μπορούμε να επιτύχουμε μία αρκετά ικανοποιητική κατανόηση του ρόλου που έχει η αέρια δέσμη στα πνευστά, με χρήση της *θεωρίας μικρών πλατών (small-amplitude theory)*, που αναπτύχθηκε σταδιακά από τους Coltman [18], Elder [25] και Fletcher [30,32,36] και της *θεωρίας των περιορισμένων δεσμών (Theory of confined jets)* που αναπτύχθηκε από τις ερευνητικές ομάδες των Verge [EEE] και Fabre [27]. Στην πρώτη θεωρία, οι στροβιλισμοί, όταν υπάρχουν (μεγάλοι αριθμοί Reynolds), ενσωματώνονται στις ενεργειακές απώλειες, ενώ στη δεύτερη προσέγγιση, στην οποία η ροή της δέσμης αναμιγνύεται με την κύρια ροή εντός του οργάνου, λαμβάνονται ξεχωριστά και οι επιδράσεις απ' τους στροβίλους.

Από τα δύο είδη διαταραχών που υφίσταται η δέσμη (κιρσογενείς και ημιτονοειδείς), σημαντικότερο ρόλο στα συμβατικά air-jet πνευστά (Κεφ. 4, Μέρος II) παίζουν οι ημιτονοειδείς. Απ' την άλλη, σε διατάξεις που παράγουν ήχο με **αεροδυναμικό σφύριγμα (aerodynamic whistle)**, υφίστανται μόνο οι κίρσογενείς διαταραχές [17,48,50]. Όταν σφυρίζουμε με το στόμα, τότε μία δέσμη αέρα δημιουργείται απ' το πίσω μέρος της στοματικής κοιλότητας και περνά μέσα απ' τα χείλη μας, που σχηματίζουν άνοιγμα (orifice), προς τα έξω. Καθώς αποχωρίζεται ένα μέρος του αέρα (οριοθετούμενο απ' τη δέσμη) από τον υπόλοιπο του στόματος, δημιουργούνται στροβιλισμοί που αλληλεπιδρούν με τον υπόλοιπο στατικό αέρα. Οι εμφανιζόμενες δίνες συντονίζουν τους τρόπους της κοιλότητας (cavity) του στόματος, που προσεγγίζει ένα δοχείο Helmholtz. Η συχνότητα του παραγόμενου ήχου καθορίζεται επομένως από τη γεωμετρία του στόματος. Καθώς όμως η δέσμη περνά ανάμεσα σε δύο ανοίγματα (της στοματικής κοιλότητας και των χειλιών), τόσο η γεωμετρία του στόματος, όσο και η πίεση εκτόξευσης της δέσμης πρέπει να ρυθμίζονται ώστε να χωράει περίπου

μισό μήκος κύματος διαταραχής ανάμεσα στα δύο αυτά ανοίγματα. Το παραγόμενο ηχητικό φάσμα είναι αρμονικά φτωχό, ώστε να έχουμε έναν αμιγή θεμέλιο τόνο και η έντασή του είναι συνήθως χαμηλή [L].

Σε όλα τα υπόλοιπα συστήματα που παράγουν ήχο υπό την επίδραση δέσμης αέρα, η διαταραχή που έχει πρωτεύοντα ρόλο είναι η ημιτονοειδής, η οποία και εκτρέπει τη δέσμη έξω και μέσα από το πάνω χείλος (labium), εναλλακτικά, με συχνότητα ίση με αυτή του ακουστικού πεδίου [Verge, EEE].

Edge tone και pipe tone

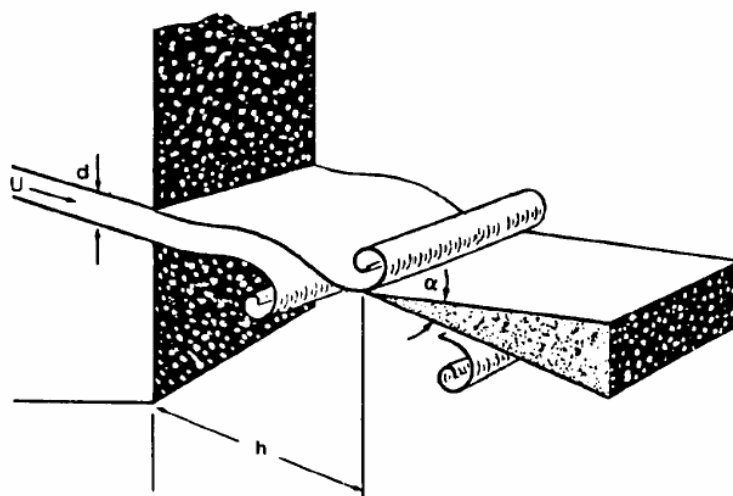
Αν μία λεπτή δέσμη αέρα προσκρούσει σε ένα αιχμηρό άκρο (wedge), δίχως να υπάρχει σωλήνας, θα δημιουργηθούν και πάλι ημιτονοειδείς διαταραχές στη δέσμη (σχήμα 5.5), ώστε να σχηματιστεί ένας αναδραστικός μηχανισμός απευθείας από το αιχμηρό άκρο στη δέσμη στο σημείο εκπομπής της (σχισμή). Θα παραχθεί με αυτόν τον τρόπο ένας ήχος σχετικά ασθενής, που καλείται **edge tone** [Powell, 68]. Το συχνотικό περιεχόμενο του ήχου αυτού είναι υψηλό και συνεχίζει να υπάρχει σε κάθε πνευστό, ως ανεπιθύμητο ηχητικό παράσιτο.

Όταν πλέον το αιχμηρό άκρο είναι τμήμα του ακουστικού σωλήνα (κοινά air-jet πνευστά), η κίνηση της δέσμης γύρω απ' το χείλος παρέχει ενέργεια στο ακουστικό πεδίο το οποίο με τη σειρά του βοηθά τη δέσμη να διατηρήσει την κίνησή της. Η ενέργεια τελικά συσσωρεύεται σε στάσιμα κύματα, που ανταποκρίνονται στις συχνότητες συντονισμού του ακουστικού σωλήνα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ταλάντωση του συστήματος στις συγκεκριμένες συχνότητες [EEE]. Ο παραγόμενος τότε ήχος έχει μεγάλο επίπεδο έντασης και καλείται **pipe tone**. Είναι ο κύριος ήχος στα air-jet πνευστά.

Το σύστημα της δέσμης που προσκρούει στο άκρο (wedge) δίχως την επίδραση ακουστικού πεδίου από κάποιον σωλήνα, είναι μία διπολική ακουστική πηγή [Y], όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6. Ο Verge, όπως θα δούμε στο III Μέρος της εργασίας, χρησιμοποιεί αυτή την ιδιότητα στην αριθμητική του μοντελοποίηση για τη διέγερση ενός τυπικού αυλού.

5.4 Αλληλεπίδραση δέσμης - ακουστικού πεδίου

Ο τρόπος με τον οποίο το ακουστικό πεδίο κάτω απ' το στόμα του αυλού επιδρά με τη δέσμη και αντίστροφα, δεν είναι για την ώρα πλήρως γνωστός. Μέχρι τώρα έχουν προταθεί διάφοροι μηχανισμοί, με επικρατέστερο αυτόν του Fletcher [30], που χρησιμοποίησε την αρχή της «αρνητικής μετατόπισης (negative displacement)». Ο μηχανισμός υποστηρίχθηκε σε μεγάλο βαθμό αργότερα και απ' τα πειράματα του Nolle [62]. Στον μηχανισμό αυτό, το ακουστικό πεδίο θεωρείται ως ροή αέρα που μετατοπίζει (εκτρέπει) κατά τα γνωστά τον πυρήνα της δέσμης, αλλά αδυνατεί να μετατοπίσει τη δέσμη ακριβώς στο σημείο που εγκαταλείπει τη σχισμή (flue exit).



Σχήμα 5.5

Το edge-tone φαινόμενο. Η δέσμη που εκτοξεύεται από τη σχισμή πάχους d διαχωρίζεται και ταλαντώνεται υπό την επίδραση του απέναντι αιχμηρού άκρου (wedge), που βρίσκεται σε απόσταση h από τη flue σχισμή και έχει οξύτητα α [V].

της παραμένει σταθερή. Στην πραγματικότητα όμως σχεδόν πάντα μεταβάλλονται και η ταχύτητα και η διατομή.

Η γενική προσέγγιση του θέματος ήρθε απ' τον Fletcher το 1976 που παγίωσε τον μηχανισμό **jet-drive** [30] για την περιγραφή της σύζευξης. Βεβαίως, θα δούμε ότι προτάθηκαν έκτοτε και άλλοι μηχανισμοί πιο ακριβείς. Ωστόσο, οι θεωρίες του Fletcher βοηθούν πολύ στην αρχική κατανόηση των φαινομένων, γι' αυτό και παραθέτονται εδώ. Υπογραμμίζεται ότι οι θεωρίες αυτές βασίζονται στο πεδίο της συχνότητας, σε αντίθεση με του Verge (EEE, Μέρος III), που βασίζονται στο πεδίο του χρόνου.

Είναι σαφές ότι η δέσμη είναι μία πηγή χαμηλής εμπέδησης, αφού όταν δεν υπάρχει ροή αέρα προς τον ακουστικό σωλήνα, το στόμα του είναι πλήρως ανοιχτό. Το στόμα τώρα εισάγει μία διόρθωση μήκους στο σωλήνα και έχει μία μικρή αλλά μη μηδενική εμπέδηση.

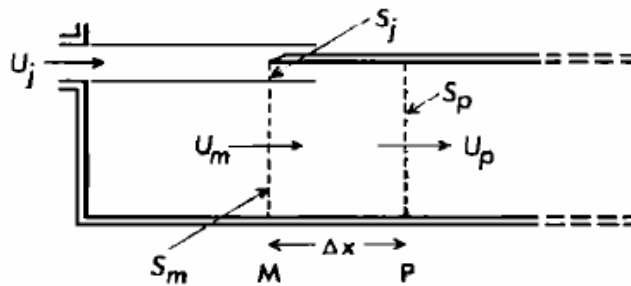
Εξισώσεις διατήρησης

Αρχικά θεωρούμε [25] μία δέσμη με σταθερή διατομή S_j και ταχύτητα (όγκου) U_j , που αλληλεπιδρά αφενός με το στόμα του αυλού, η διατομή S_m του οποίου θεωρείται το άνοιγμα του συντονιστή, κάτω απ' το άνω χείλος, αφετέρου με τον συντονιστή, διατομής S_p . Θεωρούμε ταχύτητες όγκου στις διατομές του στόματος και του συντονιστή U_m και U_p αντίστοιχα (σχήμα 5.7). Η ταχύτητα όγκου (volume velocity) είναι [RR] η ολοκλήρωση της σημειακής ταχύτητας ενός ρευστού καθ' όλη την επιφάνεια της διατομής. Η δέσμη μεταφέρει ορμή στο ρευστό του σωλήνα σε μία περιοχή ανάμιξης, μήκους Δx . Λαμβάνουμε τώρα την απλουστευτική παραδοχή ότι τα τοιχώματα του σωλήνα δεν ασκούν αξονικές (διαμητικές) δυνάμεις στο ρευστό. Αυτό οδηγεί στην απαραίτητη συνθήκη:

$$S_p = S_m + S_j \quad (5.17)$$

Καθώς οι ογκικές ταχύτητες στο στόμα και στο σωλήνα θεωρούνται ομοιόμορφα διεσπαρμένες στις αντίστοιχες διατομές. Η διατομή S_j της δέσμης βλέπει και την ταχύτητα U_j και την U_m . Σύμφωνα με το σχήμα 5.6, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας, θεωρώντας ότι το μήκος ανάμιξης Δx είναι πολύ μικρότερο του μήκους κύματος στον ακουστικό σωλήνα:

$$S_p U_p = S_m U_m + S_j (U_m + U_j) \quad (5.18)$$



Σχήμα 5.7

Η εξίσωση διατήρησης ορμής, όπως διατυπώθηκε απ' τον Elder [25] είναι:

$$\rho \Delta x \left(\frac{dU_j}{dt} A_{jp} + \frac{dU_m}{dt} A_{mp} \right) + (p_p - p_m) = \rho U_j^2 A_{jp} (1 - A_{jp}) + \rho U_m^2 A_{mp} (1 - A_{mp}) - 2\rho U_j U_m A_{mp} A_{jp} \quad (5.19)$$

όπου $A_{jp} = \frac{S_j}{S_p}$ και $A_{mp} = \frac{S_m}{S_p}$, ρ η πυκνότητα του αέρα και p_p , p_m οι πιέσεις στις επιφάνειες P και M αντίστοιχα.

Αφού τώρα η πραγματική δέσμη έχει μεταβλητή ταχύτητα U_j και διατομή S_j , η σχέση (5.19) μετασχηματίζεται έπειτα από πράξεις [Fletcher, 30] στην:

$$\rho \Delta x \left(\frac{dU_p}{dt} \right) + (p_p - p_m) = \rho A_{jp} (1 - A_{jp}) U_j^2 \quad (5.20)$$

Σύμφωνα με τον Elder [25], οι πιέσεις p_p , p_m και οι ταχύτητες U_p , U_m , U_j μπορούν να αναλυθούν σε συνιστώσες Fourier στις συχνότητες $n\omega$. Οι σχέσεις μεταξύ τους μπορούν να γραφούν με φασηδείκτες ως εξής:

$$p_m = p_{m0} - \sum_{n=1} \bar{Z}_{mn} \bar{U}_{mn} S_p \quad (5.21)$$

$$p_p = p_{p0} + \sum_{n=1} \bar{Z}'_{pn} \bar{U}_{pn} S_p \quad (5.22)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{mn} &= U_{mn} \exp[j(n\omega t + \phi_{mn})] \\ \bar{U}_{pn} &= U_{pn} \exp[j(n\omega t + \phi_{pn})] = \bar{U}_{jn} A_{jp} + \bar{U}_{mn} A_{mp} \\ \bar{U}_{jn} &= \frac{Q_{jn}}{S_j} = U_{jn} \exp[j(n\omega t + \phi_{jn})], \quad Q_{jn} \text{ η ροή της δέσμης.} \end{aligned} \quad (5.23)$$

\bar{Z}_{mn} και \bar{Z}'_{pn} είναι οι εμπεδήσεις στη n αρμονική, υπολογιζόμενες στον άξονα του σωλήνα, κοιτώντας προς τα έξω απ' τον όγκο ελέγχου (σχήμα 5.6).

Ο Fletcher [30] στη συνέχεια, για να περιορίσει τη γενικότητα της εξίσωσης (5.20), πηγαίνει προς το άλλο άκρο από αυτό του Elder, δηλαδή να έχουμε μία δέσμη της οποίας μεταβάλλεται η διατομή S_j και η ταχύτητα U_j παραμένει σταθερή. Εξάλλου, έχουμε καταλήξει ότι σημαντικότερο ρόλο παίζει η κίνηση της δέσμης, δηλαδή η μεταβολή της διατομής της κάτω από το χείλος (σχήμα 5.6), παρά η αλλαγή της ταχύτητας, για τη διέγερση του σωλήνα [32]. Μάλιστα, αν το προφίλ της ταχύτητας είχε μορφή top-hat, σε έναν πραγματικό αυλό, τότε η ακραία αυτή περίπτωση θα ήταν πλήρως ρεαλιστική [30]. Τέλος, επειδή τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν σημαντικά για τις δύο ακραίες περιπτώσεις, καταλαβαίνουμε ότι για την πραγματική λειτουργία, θα βρισκόμαστε κάπου ενδιάμεσα.

Ερχόμαστε τώρα σε έναν τυπικό οργανισμό αυλό. Ισχύει σχεδόν πάντα $A_{jp} \ll 1$. Δηλαδή μία εξαιρετικά λεπτή δέσμη εισβάλλει σε έναν φαρδύ σωλήνα. Παρατηρώντας την εξίσωση (5.20), το δεξί μέλος εμφανίζει μεγάλη μη-γραμμικότητα για $A_{jp} \ll 1$, που είναι εντονότερη με τη μεταβολή της U_j , παρά με τη μεταβολή της S_j (ήτοι της A_{jp}). Το μέγεθος της μη γραμμικότητας είναι περίπου ίδιο και στις δύο ακραίες περιπτώσεις (σταθερό S_j ή σταθερό U_j) αν $A_{jp} \approx 0.5$. Κατά συνέπεια, ο Fletcher με τις παραπάνω παραδοχές, περιορίζει σημαντικά τη μη γραμμικότητα, που προέκυπτε από τις παραδοχές του Elder [25].

Εξισώσεις σύζευξης

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε της σχέσεις (5.18), (5.21) και (5.22) στην εξίσωση (5.20), για να καταλήξουμε σε μία εξίσωση για την ακουστική ροή εντός του σωλήνα, που προκαλείται από την κίνηση της δέσμης. Η ακουστική ροή στο σωλήνα είναι $\bar{Q}_{pn} = \bar{U}_{pn} S_p$ σε μία αρμονική n . Η U_j είναι σταθερή και η A_{jp} αναπτύσσεται σε μία σειρά από συνιστώσες Fourier \bar{A}_{jpn} [30]. Η ακουστική ροή στο σωλήνα μπορεί τότε να γραφεί ως:

$$\bar{Q}_{pn} = (\bar{Q}_{pn})_I + (\bar{Q}_{pn})_{II} + (\bar{Q}_{pn})_{III} \quad (5.24)$$

όπου:

$$(\bar{Q}_{pn})_I = \frac{\bar{Z}_{mn}}{\bar{Z}_{pn} + \bar{Z}_{mn}} S_p U_j \bar{A}_{jpn} \quad (5.25)$$

$$(\bar{Q}_{pn})_{II} = \frac{\rho U_j^2}{\bar{Z}_{pn} + \bar{Z}_{mn}} \bar{A}_{jpn} \quad (5.26)$$

$$(\bar{Q}_{pn})_{III} = -\frac{\rho U_j^2}{\bar{Z}_{pn} + \bar{Z}_{mn}} \sum_{n'} \bar{A}_{jpn'} \bar{A}_{jp(n-n')} \quad (5.27)$$

Προσοχή. Εδώ η \bar{Z}_{pn} δεν έχει τόνο όπως στην (5.22) και είναι η εμπέδηση του σωλήνα υπολογιζόμενη από το επίπεδο M και όχι απ' το P:

$$\bar{Z}_{pn} = \bar{Z}_{pn} + j \rho n \omega \frac{\Delta x}{S_p} \quad (5.28)$$

Οι τρεις όροι της (5.24) περιγράφουν ροές προκαλούμενες από διαφορετικές αιτίες:

- Ο πρώτος όρος $(\bar{Q}_{pn})_I$ είναι μία ροή προκαλούμενη από την επίδραση της ταχύτητας, όπως περιγράφεται από τους Cremer και Ising [23].
- Ο δεύτερος όρος $(\bar{Q}_{pn})_{II}$ είναι μία ροή προκαλούμενη απ' την ταλάντωση της πίεσης, όπως περιγράφεται απ' τον Coltman [18].
- Ο τρίτος όρος $(\bar{Q}_{pn})_{III}$ είναι μία ροή που συμπεκνώνει εξ' ολοκλήρου την μη γραμμικότητα της σύζευξης, σε αντίθεση με τους δύο προηγούμενους που είναι καθαρά γραμμικοί.

Όταν η (σταθερή) ταχύτητα της δέσμης γίνεται μεγάλη και η διατομή της, όσο και αν μεταβάλλεται μέσα στο σωλήνα, παραμένει μικρή, τότε ο τρίτος, μη γραμμικός όρος τείνει να μηδενιστεί. Αφού στην πράξη, πράγματι η δέσμη κινείται με μεγάλη ταχύτητα (20-50 m/s) και είναι και πολύ λεπτή, μπορούμε χωρίς μεγάλο σφάλμα να παραλείψουμε τον τρίτο όρο.

Σύμφωνα με τον Elder [25], η εμπέδηση του στόματος, στη θεμελιώδη (γωνιακή) συχνότητα συντονισμού ω είναι κατά προσέγγιση:

$$|\bar{Z}_m(\omega)| = \rho \omega \frac{\Delta L}{S_p} \quad (5.29)$$

όπου ΔL είναι η διόρθωση μήκους στο στόμα του ακουστικού σωλήνα. Προφανώς, για τη n αρμονική ισχύει:

$$|\bar{Z}_{mn}(n\omega)| = \rho n \omega \frac{\Delta L}{S_p} \quad (5.30)$$

Ο λόγος τώρα των δύο πρώτων όρων της (5.24) είναι:

$$\left| \frac{(\bar{Q}_{pn})_I}{(\bar{Q}_{pn})_{II}} \right| = n \omega \frac{\Delta L}{U_j S_p} \quad (5.31)$$

Η τιμή του στην πράξη δεν απέχει πολύ απ' τη μονάδα.

Μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε τη ροή όγκου εντός του συντονιστή:

$$\bar{Q}_{pn} = (\bar{Q}_{pn})_I + (\bar{Q}_{pn})_{II} \quad (5.32)$$

Οι όροι I και II μπορούν να γραφούν:

$$(\bar{Q}_{pn})_I = \frac{\bar{Z}_{mn}}{\bar{Z}_{pn} + \bar{Z}_{mn}} Q_j \quad \text{και} \quad (\bar{Q}_{pn})_{II} = \frac{\rho U_j}{\bar{Z}_{pn} + \bar{Z}_{mn}} \frac{Q_j}{S_p} \quad (5.33)$$

και το διάνυσμα της εμπεδήσης του στόματος:

$$\bar{Z}_{nm} = j\rho n\omega \frac{\Delta L}{S_p} \quad (5.34)$$

Αθροίζοντας διανυσματικά τις εμπεδήσεις σωλήνα και στόματος παίρνουμε:

$$\bar{Z}_{sn} = \bar{Z}_{pn} + \bar{Z}_{nm} \quad (5.35)$$

Με αντικατάσταση των (5.33), (5.34) και (5.35) στην (5.32), παραλείποντας το n , υπονοώντας την κάθε συχνότητα, καταλήγουμε στη βασική σχέση που συνδέει τη ροή της δέσμης με την προκύπτουσα ακουστική ροή στον ακουστικό σωλήνα:

$$\bar{Q}_p = \frac{\rho(U_j + j\omega\Delta L)Q_j}{S_p \bar{Z}_s} \quad (5.36)$$

ή

$$\bar{Z}_s \bar{Q}_p = \frac{\rho(U_j + j\omega\Delta L)}{S_p} Q_j \quad (5.37)$$

Διασπάμε τώρα τους όρους του αριθμητή και αναγράφουμε τη σχέση:

$$\bar{Z}_s \bar{Q}_p = \frac{\rho U_j Q_j}{S_p} + \frac{j\rho\omega\Delta L Q_j}{S_p} \quad (5.38)$$

Οι εξισώσεις (5.37) και (5.38) δίνουν τη διεγείρουσα δύναμη (πίεση) του συντονιστή, η οποία συνίσταται από δύο μορφές:

- Ο όρος $\frac{\rho U_j Q_j}{S_p}$ γράφεται $\frac{\rho U_j^2 S_j}{S_p}$ και εκφράζει τη διέγερση του σωλήνα, οδηγούμενη από τη μεταβολή της πίεσης, καθώς η δέσμη εισέρχεται στον ακουστικό σωλήνα, κατ' αντιστοιχία με το δεύτερο όρο της σχέσης (5.24).
- Ο όρος $\frac{j\rho\omega\Delta L Q_j}{S_p}$ γράφεται $j\rho\omega\Delta L U_j \frac{S_j}{S_p}$ και εκφράζει τη διέγερση του σωλήνα, οδηγούμενη από την ταχύτητα, κατ' αντιστοιχία με τον πρώτο όρο της σχέσης (5.24).

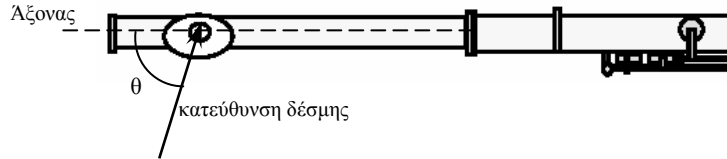
Για έναν τυπικό αυλό ισχύει $\omega\Delta L \gg U_j$, που σημαίνει ότι ο όρος της ταχύτητας (φανταστικό μέρος) κυριαρχεί του όρου της πίεσης (πραγματικό μέρος). Έτσι, από την (5.37) γίνεται φανερό ότι η διεγείρουσα δύναμη προπορεύεται της ροής της δέσμης Q_j κατά φάση 90° ή $\pi/2$. Από την (5.36) τώρα βλέπουμε ότι η ακουστική ροή \bar{Q}_p γίνεται μέγιστη όταν η σειριακή εμπεδήση \bar{Z}_s είναι ελάχιστη. Αυτό επαληθεύει πλήρως της παρατήρηση της ενότητας 3.6 (Μέρος II), ότι τα air-jet πνευστά ηχούν στις ιδιοσυχνότητες που η εμπεδήση ελαχιστοποιείται και μεγιστοποιείται η αγωγιμότητα.

Η ακουστική ροή στο φλάουτο

Αν θέλουμε να έχουμε μία έκφραση για την ακουστική ροή στο εγκάρσιο φλάουτο, μπορούμε να μετατρέψουμε τη σχέση (5.36), λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η δέσμη εισβάλλει στο σωλήνα όχι παράλληλα με τον άξονα του, αλλά με γωνία που για ιδανικά εγκάρσιο φλάουτο είναι 90° . Δηλαδή η σχέση (5.36) μπορεί να γραφτεί [40]:

$$\bar{Q}_p = \frac{\rho(U_j \cos \theta + j\omega\Delta L)Q_j}{S_p \bar{Z}_s} \quad (5.39)$$

όπου για $\theta=90^\circ$ ο πρώτος όρος του αριθμητή απαλείφεται.



Κάτοψη του εγκάρσιου φλάουτου

Η δέσμη στην πραγματικότητα ποτέ δεν εισέρχεται τελείως εγκάρσια στον σωλήνα, γιατί ο λαιμός κάτω από την οπή του στομίου και το πάχος των τοιχωμάτων οδηγεί μέρος της δέσμης να ακολουθήσει την καμπύλη των τοιχωμάτων. Έτσι, ένας μέσος όρος ανάμεσα στις σχέσεις (5.36) και (5.39) φαίνεται να είναι πιο ρεαλιστικός [40].

5.6 Η εμπέδηση της δέσμης

Ο Coltman [18] πρώτος εκτέλεσε μία σειρά μετρήσεων της ακουστικής εμπέδησης \bar{Z}_j της αέριας δέσμης (air jet impedance) στο φλάουτο. Οι μετρήσεις έγιναν στο στόμα του οργάνου, απ' την πλευρά του ακουστικού σωλήνα και προς τα έξω. Ο Coltman προσπάθησε να βρει τη συσχέτιση μεταξύ αυτής της εμπέδησης και της πίεσης που δημιουργεί τη δέσμη, δηλαδή της πίεσης πνοής (blowing pressure). Οι καμπύλες στις οποίες κατέληξε είχαν μορφή σαν το σπирάλ του σχήματος 5.8. Οι αριθμοί πάνω στην καμπύλη δηλώνουν την πίεση. Εξετάζοντας την εμπέδηση μαθηματικά, η μορφή της είναι $\bar{Z}_j = R + jX$ και το σπирάλ προκύπτει απλά από την περιστροφή του μιγαδικού διανύσματος περί το κέντρο των αξόνων, και με μεταβαλλόμενο μέτρο. Αν τώρα μία ακουστική ροή Q_p εντός του σωλήνα αναγκάσει τη δέσμη να παράγει μια ακουστική πίεση p , τότε η εμπέδηση της δέσμης θα δίνεται απ' τον τύπο:

$$\bar{Z}_j = \frac{-P}{Q_p} \quad (5.40)$$

Η ακουστική ισχύς που δημιουργείται λόγω της δράσης της πίεσης της δέσμης θα είναι $Q_p^2 \operatorname{Re}(-\bar{Z}_j)$, ενώ αν \bar{Z}_s είναι η σειριακή εμπέδηση σωλήνα – στόματος, η διάχυση της ακουστικής ενέργειας θα είναι $Q_p^2 \operatorname{Re}(\bar{Z}_s)$. Κατά συνέπεια η συνθήκη για να έχουμε ταλαντώσεις που δεν εξασθενούν με το χρόνο, αλλά απεναντίας αυξάνονται ή μένουν σταθερές, πρέπει να πληρείται η συνθήκη:

$$\operatorname{Re}(\bar{Z}_j + \bar{Z}_s) \leq 0 \quad (5.41)$$

Καθώς $\operatorname{Re}(\bar{Z}_s) = \operatorname{Re}(\bar{Z}_p + \bar{Z}_m) > 0$, θα πρέπει απαραίτητως $\operatorname{Re}(\bar{Z}_j) < 0$. Δηλαδή θα πρέπει το μιγαδικό διάνυσμα να κείται επί του αριστερού ημιμορίου.

Για να έχουμε τώρα σταθερούς συντονισμούς στο σύστημα διεγέρτη-ακουστικού σωλήνα, θα πρέπει απλά:

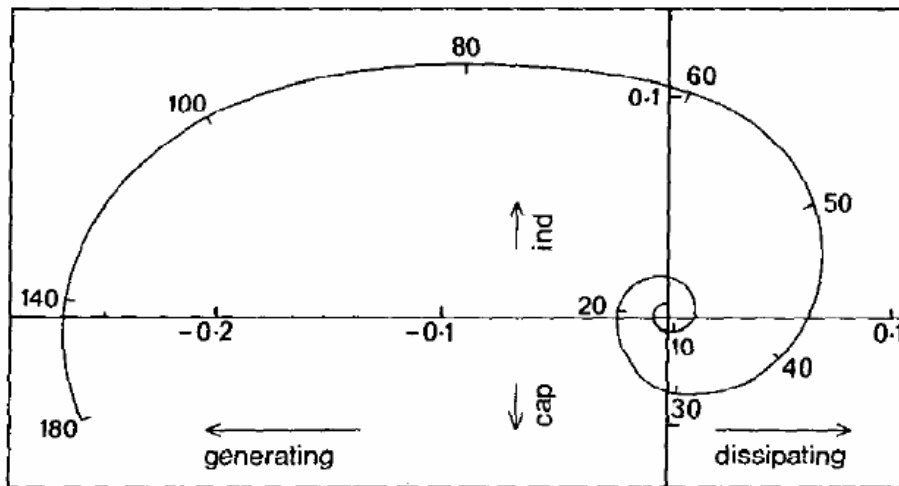
$$\operatorname{Re}(\bar{Z}_j + \bar{Z}_s) = 0 \quad (5.42)$$

Κάτι ο οποίο πετυχαίνεται από τα φαινόμενα μη γραμμικότητας στην εμπέδηση \bar{Z}_j , που ολοένα μειώνεται καθώς η ακουστική ροή Q_p αυξάνεται. Επειδή όμως η ακουστική ροή πρέπει να είναι συνεχής καθ' όλο του μήκος του συστήματος, ισχύει και η ακόλουθη συνθήκη:

$$\text{Im}(\bar{Z}_j + \bar{Z}_s) = 0 \quad (5.43)$$

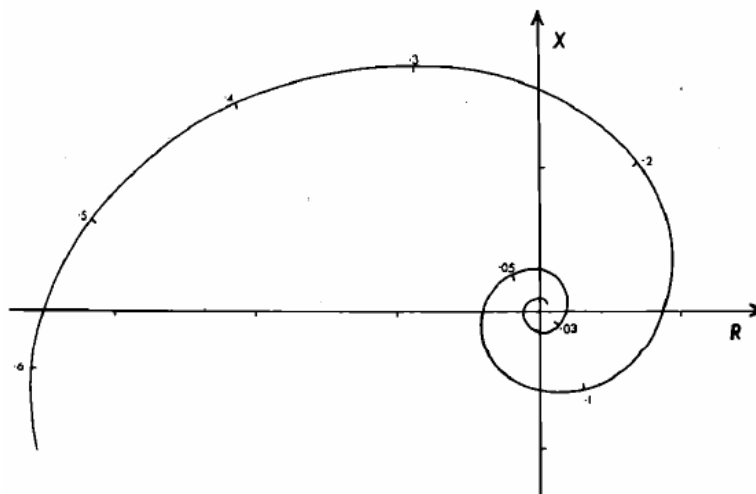
που σημαίνει ότι αν η \bar{Z}_j έχει επαγωγική συμπεριφορά, δηλ. $\text{Im}(\bar{Z}_j) > 0$, τότε $\text{Im}(\bar{Z}_s) < 0$. Ενθυμούμενοι όμως τη σχέση (3.1),

$$\bar{Z}_p \approx j \frac{\rho c}{A} \tan[(k - jk')l] \quad (3.1)$$



Σχήμα 5.8

Η εμπέδηση της δέσμης



Σχήμα 5.9

Το σπирάλ της εμπέδησης της δέσμης σε έναν αυλό όπως μετρήθηκε πειραματικά απ' τον Fletcher [28].

Fletcher [28] για την εμπέδηση της δέσμης στον αυλό, όπως εικονίζεται στο σχήμα 5.9.

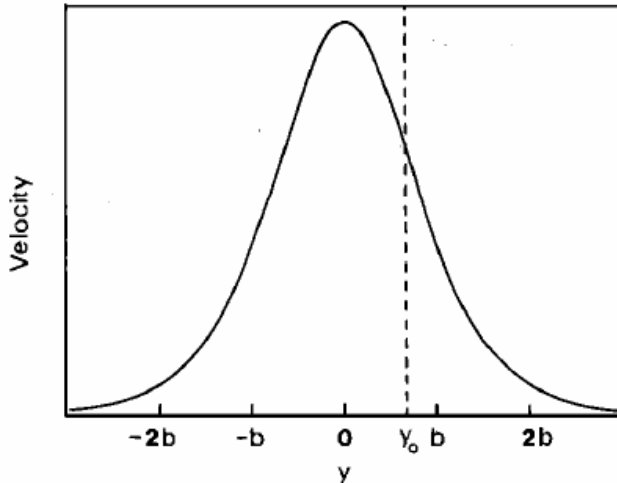
μπορούμε αντί για \bar{Z}_p να θεωρήσουμε τη \bar{Z}_s και στο μήκος l να συμπεριλάβουμε και τη διόρθωση. Από απλή εποπτεία της (3.1), βλέπουμε ότι η συχνότητα με την οποία θα ηχεί το σύστημα διεγέρτη-ακουστικού σωλήνα θα είναι χαμηλότερη απ' τη συχνότητα συντονισμού του απλού ακουστικού σωλήνα, όταν η \bar{Z}_j είναι επαγωγική. Στην αντίθετη περίπτωση που $\text{Im}(\bar{Z}_j) < 0$, δηλ. όταν η \bar{Z}_j εμφανίζει χωρική συμπεριφορά, η ακουόμενη συχνότητα θα είναι υψηλότερη από τη συχνότητα συντονισμού. Παρόμοια καμπύλη με αυτή του σχήματος 5.8 μετρήσε ο

5.7 Η μη γραμμικότητα

Η μέχρι τώρα ανάλυση, έτσι όπως απλοποιήθηκε κατά τον jet-drive μηχανισμό, είναι πλήρως γραμμική. Έχει μεγάλη σημασία τώρα να δούμε που οφείλεται η μη γραμμικότητα, η οποία κυβερνά τον διεγέρτη. Αναφέρθηκε ήδη ότι το bell-shaped προφίλ της ταχύτητας της δέσμης περιγράφεται από μία σχέση της μορφής:

$$U_j(y) = V_0 \sec h^2 \left(\frac{y}{b} \right) \quad (5.44)$$

όπου V_0 είναι η κεντρική ταχύτητα, y η απόσταση απ' το αξονικό επίπεδο και b το μισό του ολικού πάχους της δέσμης κάθε στιγμή. Δηλαδή καθώς η δέσμη εκτοξεύεται απ' τη σχισμή και διαχέεται, η V_0 μειώνεται και το τρέχον πάχος αυξάνεται. Στην πραγματικότητα η σχέση (5.44) αναφέρεται σε



Σχήμα 5.10

Το προφίλ ταχύτητας της δέσμης

συνθήκες στρωτής ροής (μικροί αριθμοί Reynolds). Στους πραγματικούς αυλούς η ροή συνήθως είναι ομογενώς στρωβιλώδης. Κατά τον Fletcher όμως [39] η συμπεριφορά των τυρβωδών δεσμών είναι παρόμοια με τις στρωτές, όσον αφορά την επίδρασή τους στον αυλό. Επίσης η έκφραση (5.44) διαθέτει μαθηματική απλότητα. Στο σχήμα 5.10 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης (5.44) που είναι μία κλασσική Gauss κατανομή. Θεωρούμε ότι η σχισμή βρίσκεται στην κορυφή του διαγράμματος και η δέσμη κατευθύνεται προς τα κάτω. Στη θέση ισορροπίας της δέσμης το άνω χείλος του αυλού δεν βρίσκεται ακριβώς στο επίπεδο y , αλλά κόβει τη δέσμη σε μία απόσταση y_0 απ' τον άξονα, που καλείται σημείο offset (σημείο μετατόπισης). Η ροή της δέσμης που

εισέρχεται στον ακουστικό σωλήνα, όταν η εκτροπή (jet deflection) είναι y , δίνεται συνεπώς απ' το ολοκλήρωμα [42]:

$$Q_j(y) = W \int_{-\infty}^{y_0+y} V_0 \sec h^2 \left(\frac{y}{b} \right) dy = WbV_0 \left[\tanh \left(\frac{y+y_0}{b} \right) + 1 \right] \quad (5.45)$$

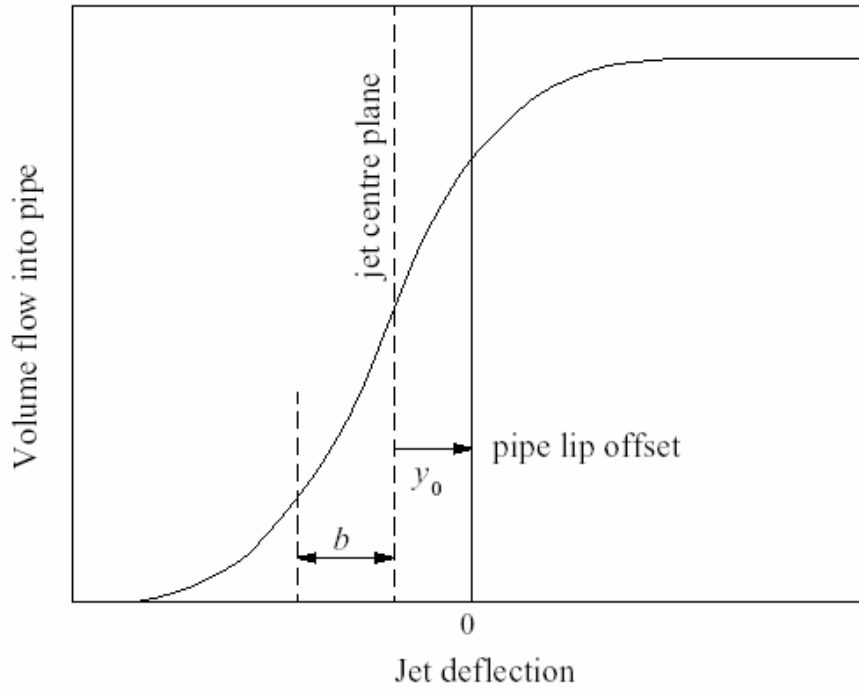
Η γραφική παράσταση της έκφρασης (5.45) φαίνεται στο σχήμα 5.11. Καθώς η δέσμη παλινδρομεί, μπορεί να βρίσκεται από πλήρως έξω μέχρι πλήρως μέσα από το άνω χείλος (labium). Λόγω όμως της bell-shaped μορφής της, η ροή, κατά τη μετάβαση της δέσμης από τη μία ακραία θέση στην άλλη, συνεχίζει να εισβάλλει στον ακουστικό σωλήνα με τον μη γραμμικό τρόπο του σχήματος 5.11. Η μη γραμμικότητα λοιπόν του διεγέρτη οφείλεται κατά κύριο λόγο σε αυτό το φαινόμενο, το οποίο ο Fletcher καλεί saturation (κορεσμό).

Υποθέτουμε τώρα μία απλή ημιτονοειδή (εγκάρσια) εκτροπή της δέσμης με συχνότητα ω και πλάτους a . Τότε η σχέση (5.45) μπορεί να γραφεί [38]:

$$Q_j(t) = W \int_{-\infty}^{y_0+a \sin \omega t} V_0 \sec h^2 \left(\frac{y}{b} \right) dy = WbV_0 \left[\tanh \left(\frac{y_0 + a \sin \omega t}{b} \right) + 1 \right] \quad (5.46)$$

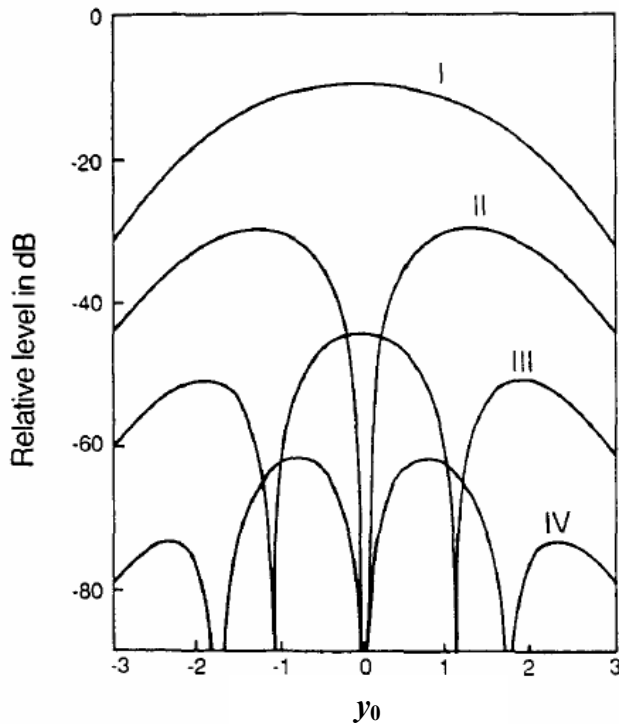
Η ροή βέβαια δεν είναι ημιτονοειδής, αλλά περιέχει αρμονικές $n\omega$ με πλάτη:

$$U_n = \frac{\omega}{\pi} \left| \int_0^{2\pi/\omega} U(t) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} n\omega t \cdot dt \right| \quad (5.47)$$



Σχήμα 5.11

Γραφική παράσταση της ροής της δέσμης εντός του ακουστικού σωλήνα, σχέση (5.46).



Σχήμα 5.12

Οι δημιουργούμενες από τη δέσμη αρμονικές ως συνάρτηση του σημείου offset

[42], όταν $y_0 = 1,1b$, εξαφανίζεται η 3ω αρμονική, ενώ όταν $y_0 = 1,7b$, εξαφανίζεται η 4ω αρμονική. Οι θεωρητικές αυτές διαπιστώσεις επαληθεύονται και πειραματικά [37]. Πρόσφατα ο Coltman δημοσί-

όπου το ημίτονο χρησιμοποιείται για τις περιττές και το συνημίτονο για τις άρτιες αρμονικές. Θεωρούμε ότι το πλάτος a της μετατόπισης της δέσμης στο άνω χείλος δεν διαφέρει πολύ από το μισό πάχος b σε αυτό ακριβώς το σημείο, δηλαδή $a/b \sim 1$. Η σχέση (5.47) μπορεί τώρα να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier για να έχουμε μία εικόνα για το φάσμα της διέγερσης [38]. Το αποτέλεσμα όπως υπολογίστηκε απ' τον Fletcher φαίνεται εποπτικά στο σχήμα 5.12 για τις τέσσερις πρώτες αρμονικές της δέσμης [39]. Η απόσταση offset είναι σε μονάδες b . Και τα επίπεδα πιέσεων των αρμονικών παρουσιάζονται ως προς την θεμέλιο.

Αν $y_0 = 0$, ώστε η κίνηση της δέσμης να είναι συμμετρική γύρω απ' το χείλος, βρίσκουμε ότι ενεργοποιούνται μόνον οι περιττές αρμονικές. Καθώς η απόσταση του σημείου offset αυξάνεται, αρχικά όλες οι αρμονικές ενεργοποιούνται, αλλά έπειτα, σε συγκεκριμένα offset εξαφανίζονται και συγκεκριμένες αρμονικές. Για παράδειγμα

ευσε μία υπολογιστική μοντελοποίηση για το αρμονικό φάσμα δέσμης αποκλειστικά στο φλάουτο [22]. Είναι κατανοητό, ότι η ρύθμιση της κατεύθυνσης της δέσμης αποτελεί ένα σημαντικό στάδιο του voicing ενός αυλού, όπως επίσης και μία καθοριστική παράμετρο εκτέλεσης στο φλάουτο.

Η μεγάλη αλήθεια είναι ότι αρμονικές ενός φθόγγου δεν γεννιούνται μέσα στον ακουστικό σωλήνα αλλά στο διεγέρτη, με τον παραπάνω εξαιρετικά μη γραμμικό τρόπο. Ο ακουστικός σωλήνας απλά ενισχύει τις παραγόμενες αρμονικές. Και μάλιστα όταν το άκρο του είναι κλειστό, δεν ενισχύει καν τις άρτιες αρμονικές. Αλλά όπως είπαμε, λόγω του αναδραστικού μηχανισμού, ο διεγέρτης, με την επίδραση του ακουστικού πεδίου του σωλήνα παράγει τις αρμονικές (!). Όπως θα δούμε, ο μηχανισμός του ακουστικού σωλήνα που «κλειδώνει» τις διεγείρομενες συχνότητες σε αυστηρή αρμονική σχέση καλείται *mode locking*.

5.8 Ο αναδραστικός μηχανισμός δέσμης

Ο Verge παρουσίασε ένα διάγραμμα για το μηχανισμό διέγερσης δέσμης [EEE], με φιλοσοφία παρόμοια με αυτή του Fletcher (Κεφ. 3, Μέρος II), του οποίου το αντίστοιχο διάγραμμα αναφέρεται σε όλο το σύστημα του οργάνου. Στο διάγραμμα (σχήμα 5.13), η δέσμη συνδέεται με τις ακουστικές ιδιότητες του σωλήνα μέσω ενός υδροδυναμικού αναδραστικού μηχανισμού (*hydrodynamic feedback*). Δημιουργείται έτσι ένας βρόγχος (loop). Για να υπάρξουν συντονισμοί διαρκείας στο όργανο, θα πρέπει να υφίσταται μία διαφορά φάσης μεταξύ δέσμης και σωλήνα, που να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Όταν πληρείται η προϋπόθεση, το σύστημα καλείται αυτοταλαντούμενο (*auto-oscillate*).

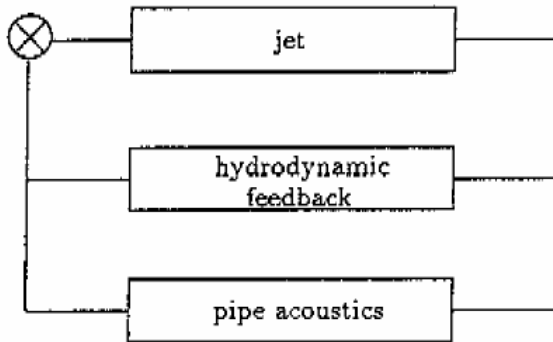
Τόνος ακουστικού σωλήνα (pipe tone)

Όταν η ακουστική ανάδραση του σωλήνα κυριαρχεί, τότε ο παραγόμενος ήχος προέρχεται στο μεγαλύτερο ποσοστό απ' τον ακουστικό σωλήνα, ώστε δημιουργείται ο pipe tone.

Edge tone

Όταν η ανάδραση του σωλήνα είναι ασήμαντη, όπως συμβαίνει στη μεταβατική κατάσταση ή όταν οι ταλαντώσεις του σωλήνα αποσβένονται ή όταν δεν υπάρχει καν σωλήνας, παρά μόνο το χείλος, τότε οι ταλαντώσεις της δέσμης ελέγχονται απευθείας απ' την υδροδυναμική ανάδραση, ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης της δέσμης με το χείλος. Τότε παράγεται ο edge tone.

Το πρώτο στοιχείο του βρόγχου είναι το υποσύστημα της δέσμης. Πρέπει να ληφθούν υπ' όψη η ενίσχυση των διαταραχών κατά μήκος της δέσμης και η καθυστέρηση που δημιουργείται λόγω της μετάδοσης των διαταραχών αυτών. Η ταχύτητα μετάδοσης των διαταραχών εξαρτάται από την



Σχήμα 5.13

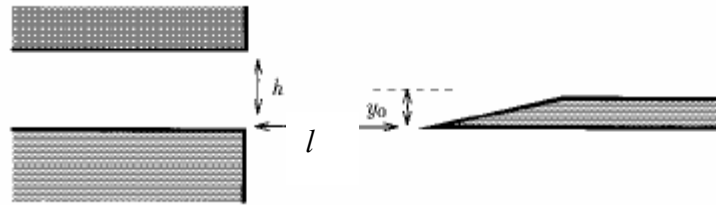
Ο αναδραστικός μηχανισμός δέσμης κατά τον Verge [SS]

ταχύτητα της δέσμης. Συμβολίζουμε με l την απόσταση σχισμής – χείλους, δηλαδή το άνοιγμα στόματος του αυλού (σχήμα 5.14, κατά Verge) και με U_j την ταχύτητα της δέσμης (ακολουθώντας το συμβολισμό του Fletcher). Ο χρόνος για να φτάσει ένα σωματίδιο της δέσμης απ' τη σχισμή στο χείλος είναι l/U_j . Η διαφορά φάσης που εισάγεται από τη δέσμη είναι συνεπώς ανάλογη του αριθμού Strouhal $St_w = \frac{f_l}{U_j}$, της θεμελιώ-

δους συχνότητας. Σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας του οργάνου, ο ήχος προέρχεται απ' τον σωλήνα (pipe tone) και ο χρόνος διαδρομής μίας διαταραχής απ' τη σχισμή στο χείλος είναι μικρότερος από την περίοδο

του θεμελιώδους τρόπου, $T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Τότε λέμε ότι η δέσμη ταλαντώνεται στον πρώτο υδροδυνα-

μικρό τρόπο. Όταν όμως η ταχύτητα δέσμης είναι μικρή και ο λόγος l/h αρκετά μεγάλος, δηλ. $(l/h) > 5$, με h το πάχος της σχισμής, τότε ο χρόνος διαδρομής των διαταραχών μπορεί να είναι μεγαλύτερος απ' την περίοδο. Τότε η δέσμη λέγεται ότι ταλαντώνεται σε έναν υψηλότερο υδροδυναμικό τρόπο.

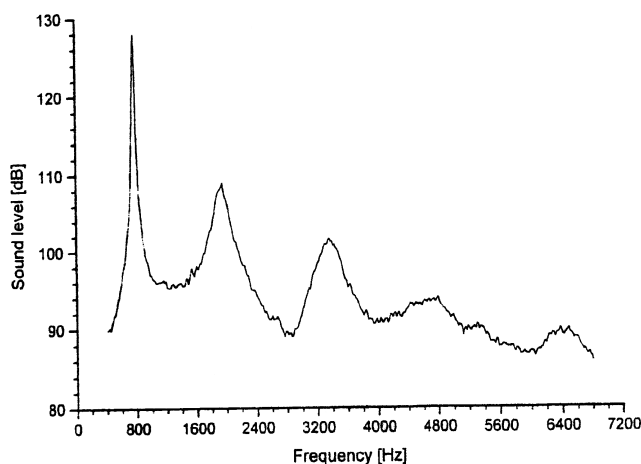


Σχήμα 5.14

Το δεύτερο στοιχείο του βρόγχου είναι το χείλος. Η παλινδρομική κίνηση της δέσμης γύρω απ' το χείλος, μεταφέρει ρευστό σε κάθε μεριά. Κατά τον Verge αυτή η συμπεριφορά μπορεί να αναπαρασταθεί από μία πηγή και μία καταβόθρα εκατέρωθεν του χείλους. Σε πρώτη προσέγγιση, η σύνθετη παλινδρομική ροή της δέσμης μπορεί να αντιπροσωπευθεί από ένα δίπολο τοποθετημένο στο άκρο του χείλους, όπως είδαμε στην ενότητα 5.3 για την περίπτωση χωρίς συντονιστή (edge tone φαινόμενο).

Όπως θα δούμε, ο edge tone φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο στη μεταβατική κατάσταση ενός αυλού. Ο συνηθέστερος τρόπος μελέτης του edge tone είναι, όπως αναφέρθηκε με έναν αυλό στον οποίο υπάρχει μονάχα το πόδι, η σχισμή και το labium. Τέτοια συστήματα, στα οποία απουσιάζει ο συντονιστής, καλούνται foot models (μοντέλα ποδός). Ο ήχος που προκύπτει από ένα foot model είναι θορυβώδης, έχει μεταβαλλόμενο πλάτος, αλλά και σταθερό τονικό ύψος. Το συχνοτικό φάσμα ενός foot model παρουσιάζει όλα αυτά τα χαρακτηριστικά (σχήμα 5.15). Διακρίνονται δύο ή τρεις το πολύ κορυφές, η οποίες δεν συνδέονται αρμονικά και μία βασική καμπύλη ευρέως συχνοτικού φάσματος (broadband base line), η οποία εξασθενεί καθώς αυξάνεται η συχνότητα. Στην υψηλής συχνότητας περιοχή ($f > 10$ KHz) ενδεχομένως να εμφανίζονται μέγιστα ευρείας ζώνης. Η ύπαρξη αυτών των μεγίστων υπονοεί ότι συγκεκριμένοι υδροδυναμικοί τρόποι ταλάντωσης πρέπει να υφίστανται στον edge tone. Οι κυριότερες παράμετροι του edge tone και η εξάρτησή τους από τις διαστάσεις του στόματος και την πίεση μπορούν να συνοψισθούν ως ακολούθως [59]:

- Η εκτοξευμένη δέσμη δεν είναι στην πραγματικότητα απόλυτα συμμετρική ως προς το κάθετο επίπεδο που περιλαμβάνει τη flue σχισμή, αλλά αποκλίνει ελαφρώς προς την ευθεία που ορίζει το επάνω μέρος της σχισμής. Η γωνία απόκλισης από την κάθετη διεύθυνση εξαρτάται από τη σχετική θέση του επάνω μέρους της σχισμής και τη μορφή του άκρου του labium.
- Όπως έχουμε δει, η δέσμη απλώνεται με την απόσταση τη σχισμή σε καμπανοειδή μορφή (saturation), αλλά η γωνία απόκλισης είναι σχετικά μικρή ($3 - 5^\circ$).



Σχήμα 5.15

Τυπικό φάσμα συχνοτήτων ενός foot model (edge tone).

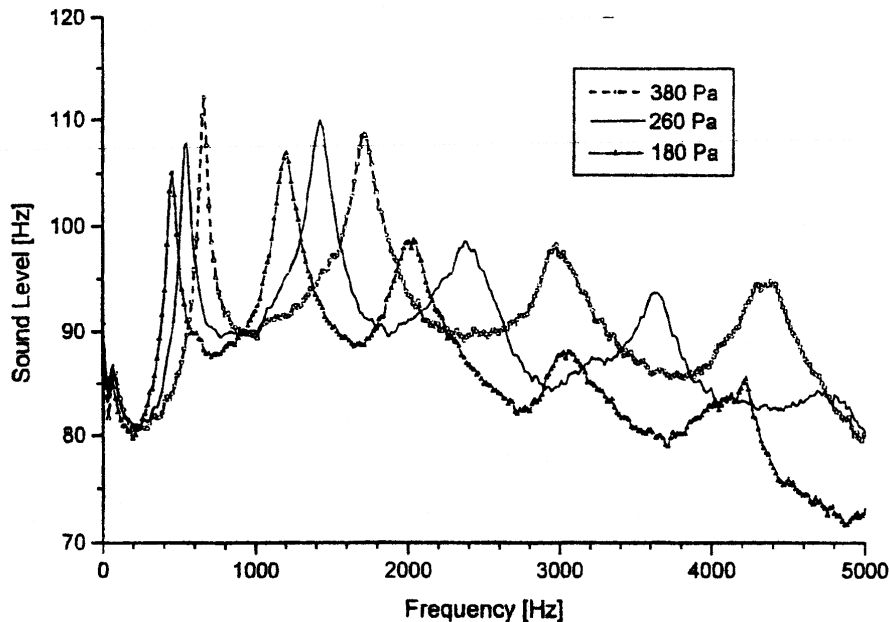
- Στις συνηθισμένες πιέσεις των organ pipes (100 – 900 Pa) δεν έχει παρατηρηθεί κάποιο άλμα ή υστέρηση στη θεμελιώδη συχνότητα του edge tone.
- Η ανάπτυξη του edge tone κατά την αρχική μεταβατική κατάσταση είναι πολύ γρηγορότερη από το ακουστικό σήμα του συντονιστή ενός αυλού.

c) Η πηγή του edge tone είναι ένα ακουστικό δίπολο, τοποθετημένο ελαφρά πάνω από το άκρο του labium. Ο διπολικός χαρακτήρας μπορεί να παρατηρηθεί στη χωρική κατανομή του edge tone [59].

d) Οι κορυφές στο φάσμα του edge tone μετατοπίζονται δεξιότερα, δηλαδή αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες συχνότητες, καθώς αυξάνεται η ταχύτητα της δέσμης (άρα και η πίεση), κρατώντας σταθερή την απόσταση l ή καθώς μειώνεται η απόσταση l , κρατώντας σταθερή την ταχύτητα. Ακριβώς τα αντίστροφα ισχύουν με μείωση της ταχύτητας ή αύξηση της απόστασης l (Σχήμα 5.16).

e) Επίσης, οι κορυφές του φάσματος μειώνονται σε μέγεθος, με μείωση της ταχύτητας δέσμης και αυξάνονται, με αύξησή της (σχήμα 5.16).

h) Οι μεταβολές του πλάτους παράγονται κυρίως από τις ταλαντώσεις της πίεσης στο πόδι. Δύο σταθερές καταστάσεις ροής έχουν παρατηρηθεί στο πόδι και θεωρείται ότι η ροή ταλαντώνεται με τυχαίο τρόπο μεταξύ αυτών των καταστάσεων, δημιουργώντας σχετικά μεγάλες αλλαγές στην πίεση, στο μέρος της σχισμής [59]. Κατά συνέπεια, ο edge tone γίνεται περισσότερο σταθερός και οι κορυφές στο φάσμα του περισσότερο αιχμηρές, όταν η ροή ωθείται να παραμείνει μέσα σε μία επιλεγμένη κατάσταση ροής.



Εικόνα 5.16

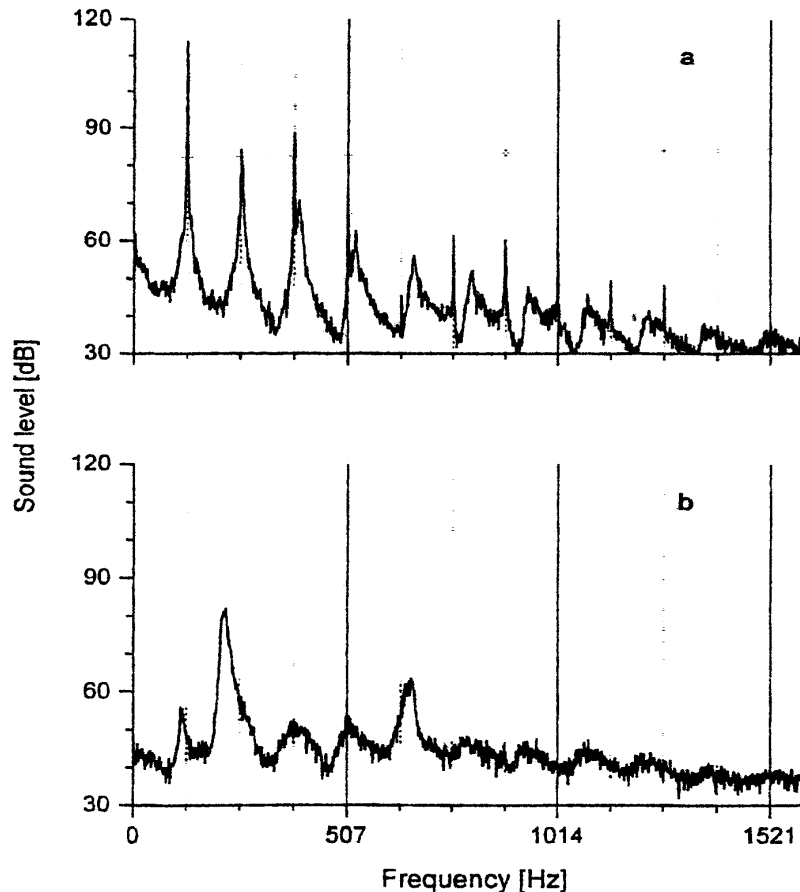
Συχνотικό φάσμα foot model με παράμετρο την πίεση πνοής (blowing pressure).

Mouth tone

Λόγω του χαρακτηριστικού (c) του edge tone, ο ήχος αυτός θα ακτινοβολείται απευθείας έξω από την περιοχή του labium. Ένα δίπολο, σύμφωνα με την ενότητα 5.2, συνίσταται από δύο πηγές αντίθετης πολικότητας (φάσης). Άρα, ένα ίδιο ακουστικό σήμα με αυτό του edge tone, με αντίθετη όμως φάση, θα ακτινοβολείται εντός του ακουστικού σωλήνα, ταυτοχρόνως. Αυτή η συνιστώσα, ενισχυμένη από την απόκριση του συντονιστή, ξαναακτινοβολείται από το στόμα. Ο edge tone και η συνιστώσα που μόλις αναφέρθηκε δημιουργούν μαζί έναν ακόμη χαρακτηριστικό ήχο του αυλού, που καλείται mouth tone.

Οι mouth tones μπορούν να μελετηθούν αν σε έναν αυλό εμποδίσουμε την ανάκλαση του ηχητικού σήματος εντός του συντονιστή, στο παθητικό του άκρο, κάτω από το κατώφλι της ταλάντωσης. Αυτό το πετυχαίνουμε τοποθετώντας έναν αποσβεστήρα στο παθητικό άκρο. Ο σημαντικός ρόλος του mouth tone στη μεταβατική κατάσταση του οργάνου μόλις πρόσφατα έγινε αντιληπτός απ' τους επιστήμονες και πλέον μελετάται ευρέως [59]. Οι mouth tones μετρώνται με αρκετή δυσκολία, επειδή με την τοποθέτηση του αποσβεστήρα, εκτός από την μείωση του πλάτους του ανακλώμενου κύματος προκύπτει και μεταβολή στη διαφορά φάσης. Έχει διαπιστωθεί ότι το καλύτερο υλικό για απόσβεση χωρίς ανεπιθύμητες παρενέργειες είναι πετροβάμβακας (rockwool), χαμηλής πυκνότητας [59].

Το φάσμα του mouth tone είναι παρόμοιο με το φάσμα του edge tone. Η κυριότερη διαφορά έχει να κάνει με την broadband base line, η οποία λαμβάνει ελαφρώς μεγαλύτερες τιμές εξαιτίας των αποσβεσθέντων κανονικών τρόπων του σωλήνα (εικόνα 5.17). Η ακουστική αίσθηση είναι επίσης παρόμοια και γενικά μπορούμε να πούμε ότι οι δύο αυτοί τόνοι είναι του ίδιου χαρακτήρα. Ο χρόνος ανάπτυξης του mouth tone είναι παραπλήσιος με αυτόν του edge tone.

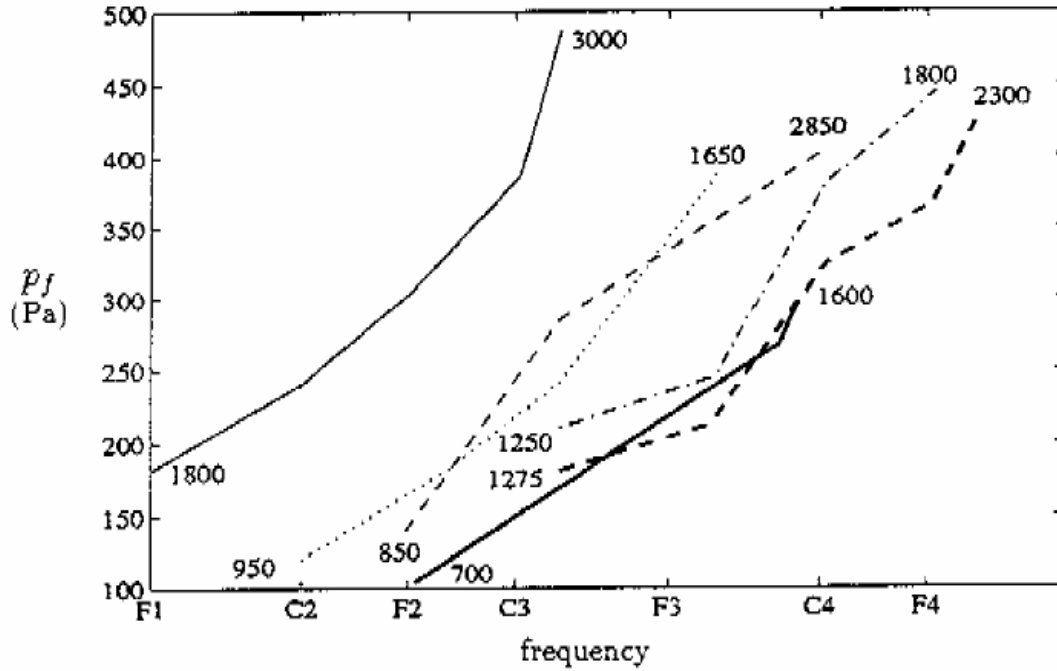


Εικόνα 5.17

Άνω διάγραμμα: Συχνοτικό φάσμα ενός διαπασών αυλού. Κάτω διάγραμμα: Συχνοτικό φάσμα του mouth tone του ίδιου αυλού (το ηχητικό κύμα εμποδίζεται να ανακλαστεί προς τα πίσω, επειδή στο παθητικό άκρο έχει τοποθετηθεί αποσβεστήρας).

5.9 Ο λόγος l/h

Ένα από τα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός αυλού ή ενός air-jet πνευστού γενικότερα είναι ο λόγος της απόστασης σχισμής – χείλους προς το πάχος της σχισμής, που μόλις αναφέρθηκε. Η παράμετρος αυτή είναι πολύ σημαντική επειδή καθορίζει την απόσταση που θα διανύσει η διαταραχή στη δέσμη και άρα τον υδροδυναμικό της τρόπο. Επίσης καθορίζει το λόγο επιφάνειας στόματος προς τη διατομή του σωλήνα και άρα την ακουστική ταχύτητα στο στόμα. Στους μικρούς αυλούς οι κατασκευαστές συνηθίζουν να δίνουν στο λόγο l/h την τιμή 4. Όπως διαπιστώθηκε από οπτικοποιήσεις, η τιμή 4 κρατά τη δέσμη στον πρώτο υδροδυναμικό της τρόπο και τη ροή της στρωτή μέχρι την πρόσκρουσή της στο χείλος. Το σχήμα 5.18 δείχνει πως μεταβάλλεται η πίεση πνοής της δέσμης με τη συχνότητα, με παράμετρο τον αριθμό Reynolds $Re_h = U_j h / \nu$, όπου ν η κινηματική συνεκτικότητα [EEE]. Το διάγραμμα αντιστοιχεί στην οικογένεια της φλογέρας, αλλά μπορεί να μας δώσει μία αίσθηση και για τους αυλούς. Κάθε τεθλασμένη αντιστοιχεί στη συχνοτική έκταση μίας φλογέρας (βλέπε σχήμα). Οι συχνότητες εκφράζονται με τη βοήθεια φθόγγων και ο φθόγγος F1 αντιστοιχεί σε 43,654 Hz δηλαδή σε ένα μήκος περίπου 4 m. Στο άλλο άκρο ο F4 αντιστοιχεί σε 349,23 Hz και μήκος περίπου 0,5 m. Το βασικό στοιχείο είναι ότι ο Reynolds αυξάνεται καθώς μετακινούμαστε σε χαμηλές συχνότητες και σε πιο μπάσες φλογέρες. Στους μεγάλους αυλούς του εκκλησιαστικού οργάνου, η τιμή του λόγου l/h μπορεί να φτάσει πάνω από 10.



Σχήμα 5.18

Οι φλογέρες από αριστερά προς τα δεξιά: συνεχής γραμμή = μπάσα αναγεννησιακή, διακεκομμένη γραμμή = τενόρο αναγεννησιακή, γραμμή με τελείες = άλλο αναγεννησιακή, διακεκομμένη με τελείες = άλλο μπαρόκ, έντονη γραμμή = σοπράνο μπαρόκ, έντονη διακεκομμένη = σοπράνο αναγεννησιακή. p_f είναι η πίεση πνοής [EEE].

5.10 Ο αριθμός Ising

Ο H. Ising [23] εισήγαγε έναν αδιάστατο αριθμό I που συσχετίζει την αρχική ταχύτητα της δέσμης, τη θεμέλιο συχνότητα του σωλήνα, το πάχος της σχισμής και την απόσταση σχισμής – άνω χείλους.

$$I = \frac{U_j}{f} \sqrt{\frac{h}{l^3}} \quad (5.48)$$

Με χρήση της εξίσωσης Bernoulli μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό Ising ως προς την πίεση:

$$I = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2Ph}{\rho l^3}} \quad (5.49)$$

Είναι μία χρήσιμη σχέση για τους κατασκευαστές αυλών και οργάνων, χωρίς βέβαια να παρέχει εξαιρετική ακρίβεια. Για τιμή του I ίση με 2, ο αυλός ηχεί στη θεμέλιο συχνότητα. Όταν ο I πλησιάζει την τιμή 3, ο αυλός υφίσταται overblowing.

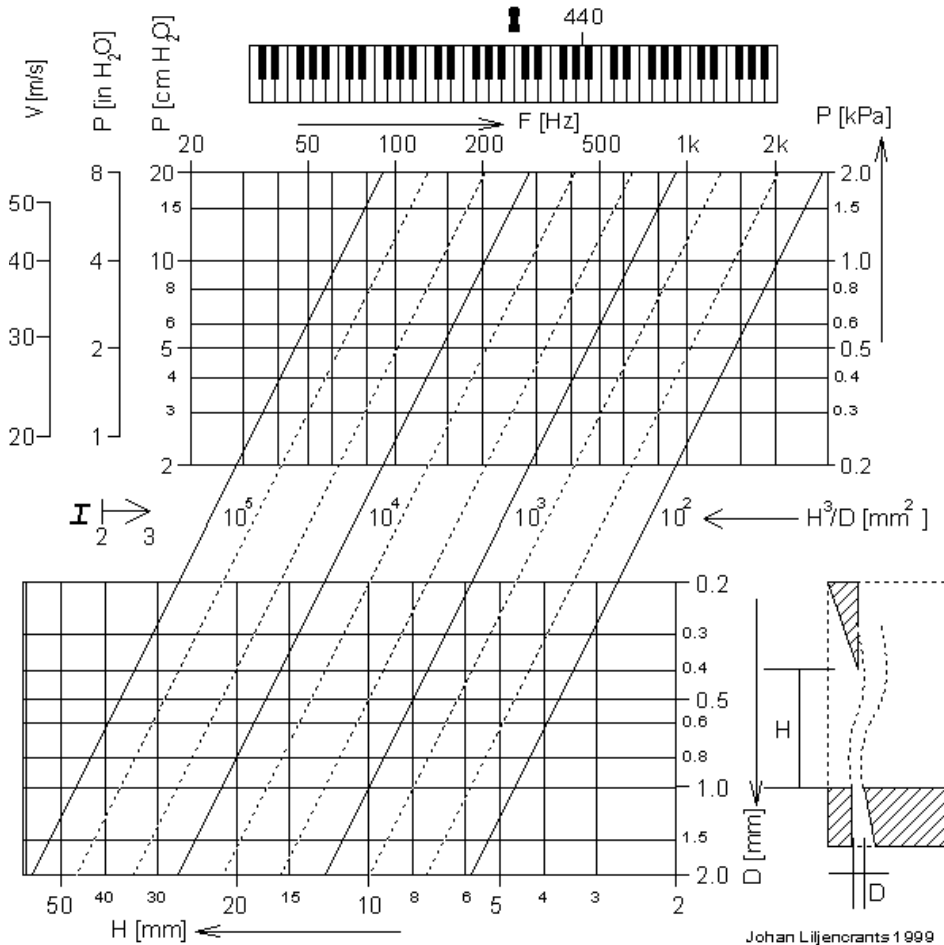
Μπορούν να γίνουν λοιπόν πρόχειροι υπολογισμοί για τη συμπεριφορά ενός αυλού όταν γνωρίζουμε τη συχνότητα του και την πίεση πνοής. Το σχήμα 5.19 μας βοηθά να επιλέξουμε γραφικά το πάχος της σχισμής και το άνοιγμα του στόματος με γνωστές τις δύο προηγούμενες παραμέτρους.

Πρώτα εντοπίζουμε στο πάνω διάγραμμα το ζεύγος συχνότητας F και ταχύτητας δέσμης V (ή πίεσης P). Κατόπιν χαράσσουμε από αυτό το σημείο μία γραμμή παράλληλη με τις κεκλιμένες γραμμές μέχρι να τμήσουμε και το κάτω διάγραμμα. Μέσα στο κάτω διάγραμμα και πάνω στην ευθεία μας κείτονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί D και ανοίγματος H για λειτουργία με $I=2$.

Πηγαίνοντας δεξιότερα ο αριθμός Ising μεγαλώνει. Πολλές φορές επιλέγεται λίγο μεγαλύτερη τιμή απ' το 2 για να ενθαρρυνθούν οι υψηλότερες αρμονικές και να εμπλουτιστεί το ηχόχρωμα. Φτάνοντας στην τιμή 3 θα έχουμε overblowing. Όπως θα διαπιστώσουμε στο πειραματικό μέρος της διπλωματικής, ο αριθμός Ising λειτουργεί σωστά μόνο για ένα περιορισμένο εύρος διαστάσεων.

Ising intonation number = 2

$$I = \frac{V}{F} \sqrt{\frac{D}{H^3}} = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{2PD}{\rho H^3}} = 2$$



Σχήμα 5.19

5.11 Η μεταβατική κατάσταση στους αυλούς

Κατά την έναρξη ήχησης ενός αυλού μπορούμε να αναλύσουμε τη συμπεριφορά του σε τρεις φάσεις [59], οι οποίες όμως δεν γίνεται να διαχωριστούν χρονικά μεταξύ τους, καθώς επικαλύπτει η μία την άλλη. Έτσι είναι καλύτερα να μιλούμε για τρεις συνιστώσες που ξεκινούν ταυτοχρόνως, αλλά εξελίσσονται με διαφορετικούς ρυθμούς:

1^η Συνιστώσα: ο πρόδρομος ήχος (forerunner)

Είναι ο ήχος που ακούγεται πρώτος. Είναι πολύ δύσκολο να περιγραφεί. Μπορεί να έχει κάποιο τονικό ύψος, αλλά τις περισσότερες φορές δεν μπορούμε να ισχυριστούμε κάτι τέτοιο. Διάφοροι χαρακτηρισμοί χρησιμοποιούνται για αυτή την κατάσταση: *chiff*, *ping*, *hiss*, *cough* κλπ, που μοιάζουν με τον ήχο που ακούμε.

Παρακολουθώντας την έναρξη της μεταβατικής κατάστασης στο πεδίο του χρόνου, μπορούμε να εξηγήσουμε τη δημιουργία αυτής της συνιστώσας από τις φυσικές ιδιότητες του αυλού. Έστω ότι ο αυλός είναι προσαρμοσμένος στη σκακιέρα ενός *pipe organ* (κεφ. 4). Όταν η αντίστοιχη βαλβίδα ανοίγει, η πίεση στο πόδι του αυξάνεται απότομα και μία δέσμη αέρα σχηματίζεται στην *flue* σχισμή λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ ποδός και στόματος. Καθώς η δέσμη εκτοξεύεται, παράγεται ένας στροβιλώδης θόρυβος (*turbulent noise*), εξ' αιτίας της διαταραγμένης ροής του αέρα. Πρώτα, δημιουργείται ένας παλμός πίεσης και έπειτα εμφανίζεται ο θόρυβος αυτός, με φάσμα ευρείας συχνοτικής περιοχής (*broadband noise*), προκαλούμενος απ' τη στροβιλότητα της δέσμης. Τόσο ο παλμός πίεσης, όσο και ο θόρυβος ευρέως φάσματος δύσκολα μπορούν να αντιστοιχισθούν σε κάποιο

τονικό ύψος (συγκεκριμένες συχνότητες). Ο ήχος αυτός ακτινοβολείται απευθείας στο περιβάλλον από το στόμα, χωρίς συνεισφορά από τον συντονιστή (ακουστικό σωλήνα).

Όταν τώρα η δέσμη προσκρούει στο labium, δημιουργείται ένας edge tone, ο οποίος πολύ γρήγορα θα μετατραπεί σε τόνο στόματος (mouth tone). Καθώς η ταχύτητα της δέσμης μεταβάλλεται από τη μηδενική τιμή έως την τελική μέσα στα πρώτα 10 ms περίπου, ο mouth tone δεν μπορεί να αναπτύξει σταθερό τονικό ύψος. Το φάσμα συχνοτήτων του μεταβάλλεται συνεχώς σύμφωνα με τη μεταβολή της ταχύτητας της δέσμης. Αυτό το μεταβαλλόμενο ακουστικό σήμα, που μοιάζει να «γλιστρά» (sliding acoustical signal), παράγει το ιδιαίτερο ακουστικό αποτέλεσμα του πρόδρομου ήχου. Όταν ο χρόνος αποκατάστασης της τελικής τιμής της ταχύτητας είναι εξαιρετικά μικρός, σε σύγκριση με την περίοδο του edge tone, μονάχα ένας σύντομος ακουστικός παλμός γίνεται αντιληπτός.

2^η Συνιστώσα: Εμφάνιση τονικού ύψους (pitch)

Κατά την εξέλιξη της δεύτερης αυτής κατάστασης εμφανίζεται τονικό ύψος που πλησιάζει τη συχνότητα κάποιας υψηλής αρμονικής. Η συνιστώσα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική σε μερικά είδη αυλών. Για παράδειγμα, σε ορισμένους Diapason αυλούς η δεύτερη ή η τρίτη αρμονική υπερίσχυουν της θεμελιώδους συχνότητας, στους αυλούς Quintadena, είναι εμφανής η υπερίσχυση της τρίτης αρμονικής, ενώ στους string αυλούς, υπερίσχυει κάποια από τις ακόμα υψηλότερες (6^η–7^η).

Οι κανονικοί τρόποι συντονισμού (eigenresonances) του ακουστικού σωλήνα χρειάζονται περίπου 10 φορές περισσότερο χρόνο, σχετικά με τον πλησίον τους τόνο στόματος, για να φτάσουν στην τελική τους ταλαντωτική κατάσταση και να εκπέμψουν σταθερό ήχο. Έτσι, μέχρι να αποκατασταθεί η συμπεριφορά του συντονιστή, η επίδρασή του στην εγκάρσια ταλάντωση της δέσμης είναι ασθενής. Γι' αυτό ο ήδη αναπτυχθέν mouth tone, απ' το προηγούμενο στάδιο, θα κυριαρχεί και θα διεγείρει τους πλησίον κανονικούς τρόπους συντονισμού της αέριας στήλης. Επειδή τώρα ο mouth tone έχει συγκεκριμένες συχνότητες στο φάσμα του, περισσότεροι του ενός κανονικοί τρόποι συντονισμού μπορούν να διεγερθούν ταυτοχρόνως. Ανάμεσα στους τρόπους αυτούς, ο υψηλότερος θα αναπτυχθεί πιο γρήγορα απ' όλους, γιατί ο χρόνος αποκατάστασης είναι μικρότερος για τους υψηλότερους τρόπους συντονισμού [59]. Ένα καλά εκπαιδευμένο αυτί μπορεί να διακρίνει αυτές τις συχνότητες, ως μία γρήγορη αλλαγή στην ήχηση – ομιλία (speech) του αυλού.

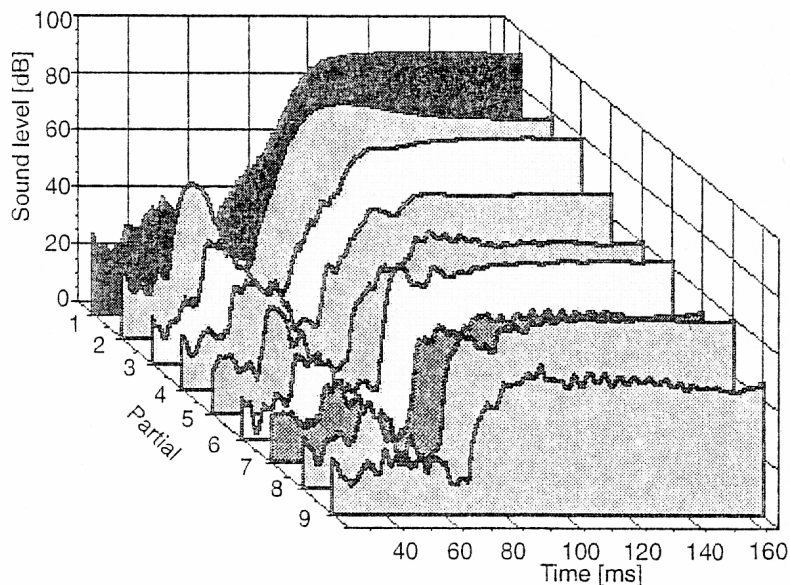
Για στενούς σωλήνες η αποκατάσταση της θεμελιώδους συχνότητας αργεί πολύ. Επειδή οι υψηλότεροι τρόποι συντονισμού έχουν μεγάλες τιμές του παράγοντα ποιότητας Q, θα χρειάζονται περισσότερο χρόνο να αναπτυχθούν. Κατά συνέπεια, ο mouth tone μπορεί να ακουστεί στο διάστημα μεταξύ του πρόδρομου ήχου και της ανάπτυξης του ήχου του συντονιστή. Ένας καλός ρυθμιστής pipe organ (voicer) μπορεί να προκαλέσει τον edge tone να αφήσει ένα άκουσμα κάποιας αρμονικής συνιστώσας της σταθερής κατάστασης που πρόκειται να ακολουθήσει, σαν συνδετικό κρίκο μεταξύ της μεταβατικής και της σταθερής κατάστασης. Έτσι πετυχαίνεται ένα πολύ ευχάριστο ακουστικό αποτέλεσμα.

3^η Συνιστώσα: Ανάπτυξη της θεμελιώδους συχνότητας (fundamental)

Η τρίτη συνιστώσα της μεταβατικής κατάστασης έχει να κάνει με το χρόνο που παρέρχεται έως ότου αναπτυχθεί πλήρως η θεμελιώδης συχνότητα του συντονιστή. Για αυλούς τύπου φλάουτου (fluty αυλοί) ο χρόνος αυτός είναι πολύ μικρός, ενώ για string αυλούς ο χρόνος είναι πολύ μεγαλύτερος. Καθώς η θεμελιώδης συχνότητα αναπτύσσεται και ενισχύεται πλήρως, οι υπόλοιπες δύο συνιστώσες ταυτοχρόνως εξασθενούν. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνιστώσες 1 και 2 δεν είναι επιτακτικές κατά τη μεταβατική κατάσταση. Πολύ περισσότερο η ύπαρξή τους εξαρτάται από τον voicer του οργάνου, ο οποίος μπορεί να προκαλέσει γρήγορη ή αργή μεταβατική κατάσταση (attack), λιγότερο η περισσότερο πρόδρομο ήχο, λαμπερότερο ή πιο θεμελιώδη ήχο κλπ. Στο σχήμα 5.20 εικονίζεται η μεταβατική κατάσταση ενός διαπασών, ρυθμισμένο να έχει ισχυρή 5^η αρμονική κατά την έναρξη ήχησης. Τα τρία στάδια της αρχικής μετάβασης εμφανίζονται καθαρά στο διάγραμμα, που περιλαμβάνει τις 9 πρώτες αρμονικές. Αρχικά, ο πρόδρομος ήχος εμφανίζεται σε κάθε αρμονική συνιστώσα. Έπειτα οι αρμονικές μεγαλώνουν σε πλάτος με την 6^η να αυξάνεται γοργότερα. Η δεύτερη αρμονική ακολουθεί, για να εξασθενήσει τελικά μπροστά στην αύξηση της θεμελιώδους.

Η αύξηση του πλάτους της θεμελιώδους συχνότητας ενισχύεται και από τις ανακλάσεις μεταξύ των άκρων του σωλήνα. Καθώς το ακουστικό σήμα μεγαλώνει εντός του συντονιστή, η ηχητική πίεση και η ακουστική ροή στο στόμα του αυλού γίνονται τόσο μεγάλες που επηρεάζουν την κίνηση της δέσμης. Γίνεται κατανοητή τώρα η έννοια του ακουστικού πεδίου της ενότητας 5.1 και ο αναδραστικός μηχανισμός, στον οποίο επικεντρώνεται όλη η θεωρία των air-jet πνευστών. Μετά από κάποιο χρονικό

διάστημα, η εγκάρσια κίνηση της δέσμης θα «κλειδωθεί» στη θεμελιώδη συχνότητα συντονισμού του ακουστικού σωλήνα [59] και θα δημιουργηθεί μία αυτοσυντηρούμενη ταλάντωση (self-sustaining oscillation) [CC,28,59]. Ο απαιτούμενος χρόνος για να επιτευχθεί η πλήρης αποκατάσταση της σταθερής κατάστασης εξαρτάται κυρίως από τον παράγοντα ποιότητας Q του θεμελιώδη τρόπου συντονισμού του ακουστικού σωλήνα. Επειδή ο Q είναι μικρός για φαρδείς σωλήνες (fluty pipes), μεσαίος για διαπασών σωλήνες και υψηλός για στενούς, η διάρκεια της μεταβατικής μεταβάλλεται αναλόγως. Δηλαδή έχουμε απότομη ατάκα για την οικογένεια των fluty αυλών, ατάκα μεσαίας διάρκειας για διαπασών και αργή ατάκα για στενούς, string αυλούς.



Σχήμα 5.20

Ανάλυση της μεταβατικής κατάστασης ενός διαπασών θεμελίου συχνότητας 311,1 Hz.

Οι συχνότητες των υψηλών αρμονικών συνιστωσών και η κατανομή της πίεσης εντός του ακουστικού σωλήνα αλλάζουν μέχρι να αποκατασταθεί η σταθερή κατάσταση. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετάβασης, οι υψηλές συνιστώσες μεταβαίνουν από τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στις συχνότητες των αρμονικών της θεμελιώδους. Αυτές οι μεταβάσεις ενδέχεται να είναι πολύ έντονες, επειδή οι κανονικοί τρόποι έχουν τη δική τους χωρική κατανομή, η οποία εξαρτάται μόνον από τις οριακές συνθήκες στα ανοίγματα του αυλού, ενώ η χωρική κατανομή των αρμονικών εξαρτάται μόνο από το στάσιμο κύμα του θεμελιώδους τρόπου συντονισμού. Η αλλαγή της χωρικής φάσης στα ανοίγματα του αυλού επηρεάζει την ηχητική ακτινοβολήση. Κατά συνέπεια το πλάτος της αρμονικής που βρίσκεται πλησιέστερα στην ελάχιστη τιμή του φάσματος της σταθερής κατάστασης θα μειωθεί σε μία σταθερή τιμή. Στην περίπτωση διαπασών αυλών, το ελάχιστο βρίσκεται μεταξύ της 5^{th} και της 6^{th} αρμονικής [59]. Αυτές οι αρμονικές συνιστώσες μειώνονται σημαντικά κατά τη διάρκεια του τρίτου σταδίου της μεταβατικής κατάστασης. Αυτή η διαδικασία ενδεχομένως να διαρκεί αρκετά. Ας πούμε, για μία μέση συχνοτική περιοχή μεταξύ 130 και 260 Hz (η οκτάβα του τενόρου), απαιτούνται 100 με 120 ms για την ολοκλήρωσή της.

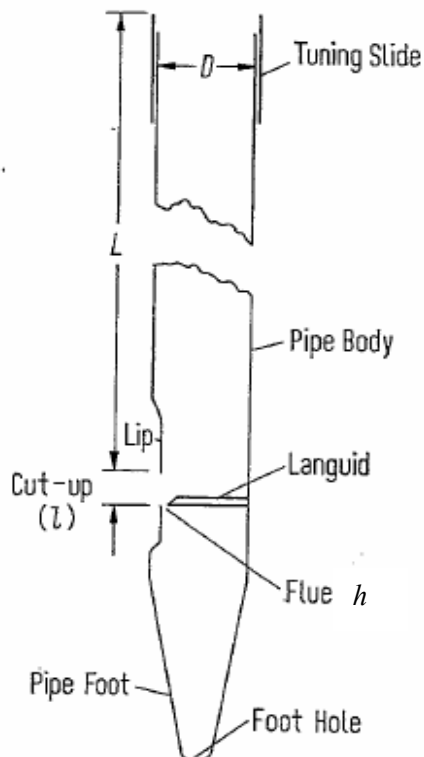
6 Κλιμάκωση Αυλών (Pipe Scaling)

Μέχρι τώρα είδαμε κάποια απ' τα σπουδαιότερα χαρακτηριστικά του αυλού και τον τρόπο που λειτουργεί ως αυτοτελές μουσικό όργανο. Στο εκκλησιαστικό όργανο όμως και στον αυλό του Πανός [46] οι διαφορετικοί φθόγγοι δεν παράγονται από ένα και μόνο ακουστικό σύστημα (έναν αυλό), αλλά ο καθένας από ξεχωριστό. Υπάρχει άμεση αναλογία με το πιάνο ή το παλιό τσέμπαλο όπου για κάθε φθόγγο έχουμε επίσης ιδιαίτερο μηχανισμό παραγωγής. Τίθεται τώρα το ερώτημα αν οι διατεταγμένοι στη σειρά αυλοί συνδέονται μεταξύ τους με μαθηματικές σχέσεις που καθορίζουν τις διαστάσεις τους. Η παρακάτω ανάλυση του N. Fletcher [33] μας δίνει χρήσιμα συμπεράσματα.

Ο σχεδιαστής μίας τρομπέτας ή ενός φλάουτου για παράδειγμα, πρέπει να συμβιβάσει όλα εκείνα τα στοιχεία που προκύπτουν από τη σταθερή γεωμετρία του οργάνου, ώστε να παράγεται μία ισορροπημένη ηχητικά και αρμονικά κλίμακα, καθόλη την έκταση της μουσικής σκάλας. Από την άλλη, στα πνευστά αυτά όργανα (ξύλινα και χάλκινα) υπάρχει η δυνατότητα ρύθμισης ποικίλων παραμέτρων, όπως η ένταση, το αρμονικό περιεχόμενο, ακόμα και η ίδια η συχνότητα του φθόγγου από τον ίδιο τον εκτελεστή. Στο όργανο αυλών, το θέμα του σχεδιασμού αφενός απλοποιείται καθότι υπάρχει κάποιος βαθμός ελευθερίας στη διαστασιολόγηση κάθε αυλού, αφετέρου γίνεται πιο δύσκολο εξ' αιτίας του ότι η παραγωγή δεν μπορεί να ρυθμιστεί από τον μουσικό.

Ο σχεδιασμός μίας συστοιχίας αυλών, με σκοπό να παράγουν ένα μουσικά ικανοποιητικό αποτέ-

λέσμα περιλαμβάνει τον έλεγχο πολλών μεταβλητών για κάθε σωλήνα. Οι κυριότερες είναι το τονικό ύψος (pitch), η ένταση (loudness), η αρμονική δομή (harmonic structure) και η αρχική μετάβαση (initial transient), δηλαδή το πως θα αποκριθεί ηχητικά ο αυλός από τη στιγμή που θα τον ενεργοποιήσουμε. Ο καθορισμός αυτών των παραμέτρων ολοκληρώνεται από τις τελικές φωνολογικές ρυθμίσεις (voicing), που λαμβάνουν χώρα όταν πλέον έχουν κατασκευασθεί οι αυλοί.



Σχήμα 6.1

Ένας 'διάπασών' με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του

οι υψηλοί (υψηλόσυχοι) σωλήνες θα γινόντουσαν εξαιρετικά φαρδείς, δίνοντας έναν θολό αρχικά ήχο που θα εξασθενούσε πολύ γρήγορα. Για το λόγο αυτό κάπου μέσα στον 13^ο αιώνα, εισήχθη ένα σύ-

6.1 Κατασταλαγμένη γνώση

Το *όργανο αυλών* ή πιο απλά *όργανο* είναι από τα μουσικά όργανα με την πιο μακριά ιστορία, όπως είδαμε στο κεφ. 5 του μέρους αυτού. Κατά το μεσαίωνα τα όργανα αυλών είχαν έκταση περίπου δύο οκτάβων και όλοι οι σωλήνες-αυλοί ήταν της ίδιας διαμέτρου («το μέγεθος ενός αυγού περιστεριού», δηλαδή περίπου 2,5 έως 3,0 cm). Ο μακρύτερος σωλήνας είχε λόγο μήκους διαμέτρου περίπου 8:1. Η προσπάθεια κατά το σχεδιασμό των οργάνων αυτών επικεντρωνόταν στον καθορισμό των μηκών των σωλήνων για την παραγωγή συγκεκριμένων φθόγγων και ήταν γνωστές διάφορες πρακτικές λύσεις.

Το μεγάλο πρόβλημα σε αυτά τα όργανα ήταν ότι η έκτασή τους δεν μπορούσε να επεκταθεί σε χαμηλότερες οκτάβες, καθότι οι μπάσοι σωλήνες θα γινόντουσαν εξαιρετικά στενοί (η διάμετρος παρέμενε σταθερή), δίνοντας αρχικά έναν αδύναμο σκληρό ήχο και τελικά ένα φθόγγο μόνο από overblowing σε κάποιον από τους υψηλότερους τρόπους. Απ' την άλλη

στημα για κλιμάκωση των σωλήνων (pipe scaling) κατά το οποίο οι διάμετροι τους ήταν ανάλογες των μηκών τους. Αυτή η κλιμάκωση που καλείται ‘διπλασιασμός στην οκτάβα’ (‘doubling on the octave’) ή κλιμάκωση 2:1, έδινε ένα καλύτερο αποτέλεσμα, αλλά πάλι με προβλήματα, καθώς η μπάσοι σωλήνες ήταν τώρα πολύ φαρδείς, δίνοντας θολό και με μεγάλη ένταση ήχο, ενώ οι υψηλοί προέκυπταν πολύ στενοί δίνοντας σκληρό και «τσιριχτό» ήχο. Πολλοί θεωρητικοί της κλιμάκωσης σωλήνων άρχισαν να αναπτύσσουν από τότε πρακτικές μεθόδους βασισμένες σε απλές γεωμετρικές κατασκευές, που στην πορεία εξελίχθηκαν απ’ τους φυσικούς νόμους για να μας δώσουν τις σημερινές αποδεκτές μεθόδολογίες.

Έστω D η διάμετρος ενός ανοιχτού κυλινδρικού σωλήνα αυλού, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1. L είναι το μήκος του συντονιστή που παράγει θεμελιώδη συχνότητα f_1 .

Θεωρούμε τώρα έναν αυλό αναφοράς με διαστάσεις D_0 και L_0 , που ηχεί σε θεμελιώδη συχνότητα f_0 . Αν οι διορθώσεις μήκους για το ανοιχτό άκρο και για το στόμα συμβολιστούν με Δ τότε κατά τα γνωστά:

$$f_0 = \frac{c}{2(L_0 + \Delta_0)} \quad \text{και} \quad f_1 = \frac{c}{2(L + \Delta)}$$

οπότε:

$$L = (L_0 + \Delta_0) \frac{f_0}{f_1} - \Delta \quad (6.1)$$

Η μεσαιωνική κλιμάκωση υπαγόρευε:

$$D = D_0 \quad (6.2)$$

Η κλιμάκωση ‘διπλασιασμού στη οκτάβα’ υπαγόρευε:

$$D = D_0 \frac{f_0}{f_1} \quad (6.3)$$

Εξ’ αιτίας των προβλημάτων που αναφέρθηκαν, πολλοί κατασκευαστές (builders) θέλησαν να βελτιώσουν την παραπάνω μέθοδο εισάγοντας μία απλή διόρθωση:

$$D = D_0 \frac{f_0}{f_1} + \sigma \quad (6.4)$$

Έτσι κατά τον 17^ο και 18^ο αιώνα πολλά όργανα κατασκευάστηκαν στηριζόμενα στον παραπάνω νόμο, τον οποίο φημισμένοι σχεδιαστές χρησιμοποιούσαν με κατάλληλη εκλογή των D_0 και σ .

Αργότερα εισήχθη ένας εκθετικός κανόνας κλιμάκωσης:

$$D = D_0 \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^x \quad (6.5)$$

όπου, αν $x < 1$, τότε προκύπτει μία κλιμάκωση που διορθώνει πολλές από τις ατέλειες της κλιμάκωσης 2:1. Επειδή αυτές οι κλιμακώσεις είχαν αναπτυχθεί κατά έναν αριθμητικό παρά αλγεβρικό τρόπο, το x εκλεγόταν έτσι ώστε να αποτελεί για τη δύναμη 2^x ένα λογικό κλάσμα ή κάποιον άλλο «μαγικό» αριθμό. Μέσα σε αυτό το πνεύμα, είχαν προταθεί οι λόγοι διαμέτρων οκτάβας 5:3=1,667, $\sqrt[4]{8} : 1 = 1,682$ και 1,618 (η «χρυσή τομή»). Στην πράξη, είναι προφανές ότι οι διάφοροι αυτοί αριθμοί έδιναν αποτελέσματα που ελάχιστα διέφεραν μεταξύ τους.

Μία άλλη πρόταση ήταν η εκλογή $x = 12/n$, όπου ο n ακέραιος αριθμός. Ο λόγος συχνοτήτων για ένα συγκερασμένο ημιτόνιο (equal-tempered) είναι $2^{1/12}$. Κατά συνέπεια αυτή η πρόταση εξασφάλιζε ότι η διάμετρος διπλασιάζεται σε ένα διάστημα n ημιτονίων. Τιμές του n από 15 έως 18 δίνουν αποδεκτές κλιμακώσεις. Συγκεκριμένα, για $n = 16$, παίρνουμε πάλι για την οκτάβα τον λόγο $\sqrt[4]{8} : 1$, που είχε προταθεί κατά ημι-θεωρητικό τρόπο από τον Torffer το 1833 και είχε γίνει ευρέως αποδεκτός.

Εξετάζοντας τα όργανα των σπουδαιότερων κατασκευαστών από τον 16^ο μέχρι και τον 18^ο αιώνα [P], βλέπουμε ότι οι κλιμακώσεις τους διαφέρουν ελαφρώς από όλα τα προηγούμενα απλά μοντέλα,

αλλά δεν υπάρχουν σαφείς νόμοι που να διέπουν αυτές τις διαφοροποιήσεις. Το θέμα είναι πως αυτά τα όργανα είχαν κριθεί ως άψογα στην εποχή τους και παραμένουν εξαιρετικά και στο σημερινό αυτί.

Η κλιμάκωση της εξίσωσης (6.5) χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, και αυτό που έχει σημασία είναι η εκλογή της τιμής του x . Για $x=0,75$ δημιουργείται μία πολύ καλή κλιμάκωση με ικανοποιητική τονική ομοιογένεια και ισορροπία, σε μία συνηθισμένη συστοιχία αυλών.

Είναι χρήσιμο τώρα να εξετάσουμε πως μεταβάλλονται δύο άλλα στοιχεία, σημαντικά στο σχεδιασμό αυλών. Οι διαστάσεις του στόματος και ο υπόλοιπος διεγερτικός μηχανισμός, καθώς και η πίεση πνοής (blowing pressure).

Οι βασικές μεταβλητές για το σχεδιασμό του στόματος είναι το πλάτος W , η απόσταση σχισμής-άνω χείλους (lip cut-up) l και το πάχος της σχισμής (flue opening ή flue exit) h , όπως φαίνονται στο σχήμα 6.1. Στην κοινή πρακτική, το πλάτος W του στόματος εκφράζεται ως κλάσμα της περιφέρειας του σωλήνα. Το κλάσμα αυτό είναι κοντά στο $\frac{1}{4}$ για αυλούς διαπασών. Έπειτα η απόσταση l είναι με τη σειρά της ένα κλάσμα του πλάτους του στόματος. Συνηθίζεται επίσης η τιμή $\frac{1}{4}$ στους αυλούς διαπασών. Δηλαδή:

$$W = \alpha \pi D \quad (6.6)$$

$$l = \beta W \quad (6.7)$$

Με $\alpha = \beta = 0,25$ για συστοιχίες διαπασών. Για string-toned αυλούς, όπου απαιτείται ένας πιο ήσυχος τόνος, τα κλάσματα είναι $\alpha = 0,25$ και $\beta = 0,3$. Για φαρδείς, τύπου φλάουτου, αυλούς χρησιμοποιούνται $\alpha = 0,2$ και $\beta = 0,4$. Οι παράμετροι αυτοί μπορούν τελικά να μεταβάλλονται ποικιλοτρόπως, ανάλογα με το επιθυμητό ηχητικό αποτέλεσμα. Το πάχος της σχισμής h είναι και αυτό ένα ποσοστό γ του πλάτους του στόματος:

$$h = \gamma W \quad (6.8)$$

Το γ εκλέγεται περίπου 0,03 και μπορεί να μεταβληθεί επηρεάζοντας την παραγόμενη ένταση.

Τώρα, όσον αφορά την πίεση πνοής, στα περισσότερα όργανα, οι αυλοί τοποθετούνται με τα πόδια τους στο ίδιο κιβώτιο πίεσης, ώστε να διεγείρονται με την ίδια πίεση πνοής. Προφανώς βέβαια η πίεση πνοής στο πόδι δεν είναι ίδια με την πίεση στο κιβώτιο, λόγω της παρεμβολής βαλβίδων κλπ, αλλά αυτό που έχει σημασία είναι ότι η παραμένει σταθερή καθόλο το μήκος της συστοιχίας αυλών.

6.2 Φυσική ανάλυση της κλιμάκωσης αυλών

Η ακουστική έξοδος ενός αυλού καθορίζεται όπως έχουμε δει από έναν σύνθετο μηχανισμό ανάδρασης, κατά τον οποίο συζεύγονται οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του σωλήνα με τις διαδιδόμενες διαταραχές στη δέσμη αέρα, καθώς και μεταξύ τους.

Αν δύο αυλοί διεγείρονται απ' την ίδια πίεση πνοής, αλλά έχουν διαφορετικό μήκος L , τότε οι διάμετροί τους D κλιμακώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι μη αρμονικότητες $\frac{f_i - if_1}{f_1}$ και οι παράγοντες

ποιότητας (Quality factors) Q_i των ανταποκρινόμενων συντονισμών f_i να είναι ίδιοι. Ο δείκτης i χαρακτηρίζει τον αριθμό του τρόπου (ή της αρμονικής). Τώρα, αν δεχτούμε, διαφορετικά με πριν, ότι το πλάτος της σχισμής h είναι ανάλογο της διαμέτρου D και η απόσταση l ανάλογη του μήκους σωλήνα L , τότε τα πλάτη ταχυτήτων των ανταποκρινόμενων τρόπων ταλάντωσης των σωλήνων, στους δύο αυλούς, πρέπει επίσης να είναι ίδια.

Η ακουστική πίεση, σε μία δοσμένη αξονική απόσταση από το ανοιχτό άκρο του σωλήνα είναι ανάλογη της διατομής του σωλήνα, του πλάτους ταχύτητας και της συχνότητας του τρόπου. Η γωνιακή κατανομή της ηχητικής ενέργειας μεταβάλλεται σε κάποιο βαθμό με το μέγεθος fD , αλλά αυτή η παρατήρηση μπορεί κάλλιστα να παραλειφθεί.

Για να καθορίσουμε τον καταλληλότερο νόμο κλιμάκωσης για μία συστοιχία πρέπει να προσπαθήσουμε να συμβιβάσουμε δύο προϋποθέσεις: Ομοιόμορφη αρμονική κατανομή και ίση ένταση κατά μήκος της συστοιχίας.

Είδαμε πριν λίγο έναν απλό νόμο κλιμάκωσης κατά τον οποίο οι παράγοντες ποιότητας Q_i και οι μη αρμονικότητες είναι ίδιες για τους ανταποκρινόμενους συντονισμούς όλων των σωλήνων τις συστοιχίας. Αυτό στην πραγματικότητα μπορεί να μην ισχύει. Η απόσβεση στο σωλήνα, που καθορίζει και το Q έχει δύο συνιστώσες που διαφέρουν ως προς τη συχνотική ανεξαρτησία. Η πρώτη συνιστώσα προέρχεται από τις απώλειες ακτινοβολήσης από το στόμα και το ανοιχτό (αν υπάρχει) άκρο

του σωλήνα. Η δεύτερη προέρχεται από τις απώλειες συνεκτικότητας και τις θερμικές απώλειες στο τοίχωμα του σωλήνα. Σύμφωνα με τον Benade [11,12] ο παράγοντας ποιότητας για μία οποιαδήποτε συχνότητα συντονισμού f ενός αυλού μπορεί να γραφεί:

$$Q \approx \frac{1}{5 \cdot 10^{-5} f D^2 L^{-1} + 1,4 f^{-1/2} D^{-1}} \quad (6.9)$$

Όπου το D και είναι L είναι σε cm. Ο πρώτος όρος του παρονομαστή αντιστοιχεί σε απώλειες ακτινοβολίας και κυριαρχεί για φαρδείς σωλήνες σε υψηλές συχνότητες. Ο δεύτερος όρος του παρονομαστή αντιστοιχεί σε απώλειες τοιχώματος (συνεκτικότητας και θερμικές) και κυριαρχεί για στενούς σωλήνες σε χαμηλές συχνότητες.

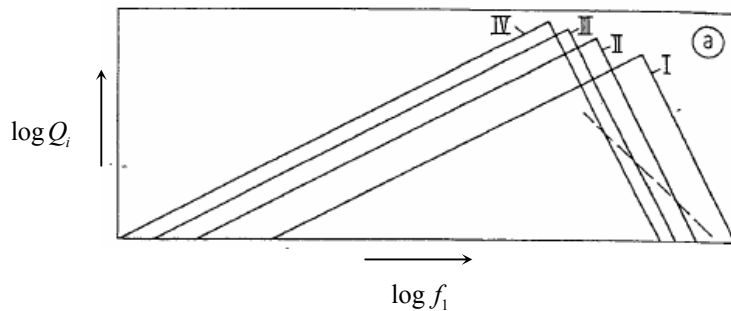
Για την i αρμονική ενός σωλήνα με θεμελιώδη f_1 , έχουμε $f = i f_1$ και $L = \frac{c}{2 f_1}$, για ανοιχτό σωλήνα και αμελώντας στην παρούσα περίπτωση τις διορθώσεις μήκους. Θεωρώντας τώρα ότι συμπίπτουν οι συντονισμοί με τις αρμονικές, ο παράγοντας ποιότητας του i συντονισμού προκύπτει απλά από την (6.9) με αντικατάσταση των παραπάνω:

$$Q_i \approx \frac{1}{3 \cdot 10^{-9} i f_1^2 D^2 L^{-1} + 1,4 i^{-1/2} f_1^{-1/2} D^{-1}} \quad (6.10)$$

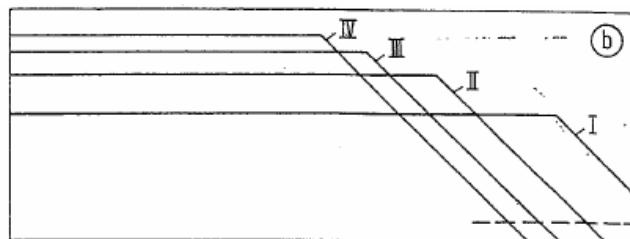
Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου τη συμπεριφορά του παράγοντα ποιότητας Q_i για διάφορες τιμές του x στον κανόνα της σχέσης (6.5). Τα διαγράμματα που ακολουθούν προέρχονται από τη μελέτη του Fletcher [33] και οι λατινικοί αριθμοί αντιστοιχούν στους πρώτους τέσσερις τρόπους ταλάντωσης (I, II, III, IV) συναρτήσει της θεμελιώδους συχνότητας. Στον οριζόντιο άξονα είναι οι συχνότητες σε μορφή $\log f_1$ και στον κατακόρυφο τα Q_i σε μορφή $\log Q_i$. Σημαντικό είναι ότι η απόλυτη τιμή του παράγοντα ποιότητας ή της ηχητικής έντασης δεν εξετάζονται εδώ, καθώς εξαρτώνται από την τιμή της D_0 του σωλήνα αναφοράς, με θεμελιώδη συχνότητα f_0 . Εδώ εξετάζεται η κλιμάκωση, που είναι κάτι αντίστοιχο της ομοιότητας και έχει να κάνει μόνο με τη σχέση των διαστάσεων των σωλήνων μεταξύ τους.

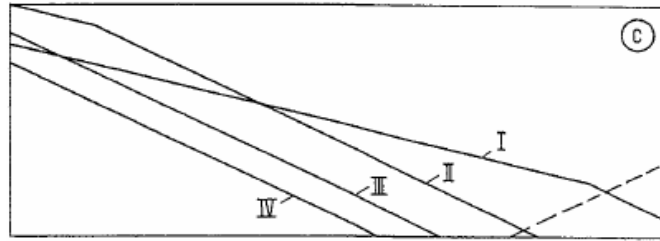
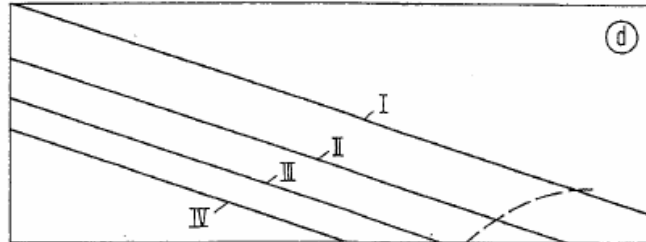
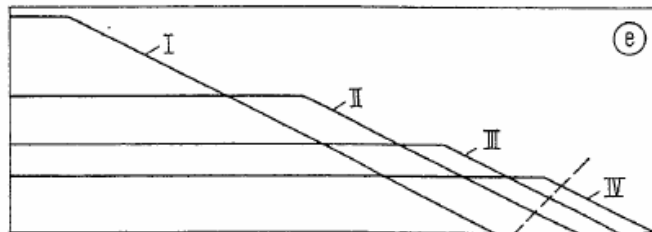
Ο Fletcher υπολόγισε τα Q_i για $x=0$ (κλιμάκωση με σταθερή διάμετρο, με μεγάλη χρήση, όπως είδαμε, στο μεσαίωνα), $x=1$ (κλιμάκωση με διάμετρο ανάλογη του μήκους), $x=1/2$ (κλιμάκωση με διατομή ανάλογη του μήκους), $x=3/4$ (η πλέον διαδεδομένη κλιμάκωση) και $x=5/6$ (μία ειδική περίπτωση που θα εξετασθεί).

$x=0$



$x=1/2$



$x=3/4$  $x=5/6$  $x=1$ 

Από τα παραπάνω διαγράμματα εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Η ακουστική ισχύς η συσχετιζόμενη με έναν συγκεκριμένο τρόπο του σωλήνα μεταβάλλεται ευθέως με το Q_i του συντονισμού που λαμβάνει χώρα.

Για $x=0$, οι υψηλοί αυλοί (δεξιά στο διάγραμμα) έχουν συμπεριφορά φλάουτου είναι δηλαδή “fluty”, καθώς ο συντονισμός I υπερτερεί. Εξ’ αιτίας τώρα της απότομης πτώσης του Q_i μετά από ελαφρά μεταβολή της συχνότητας (δηλ. του μήκους σωλήνα), οι ακόμα υψηλότεροι (σοπράνο) αυλοί δεν παράγουν καν ήχο. Στους μπάσους σωλήνες από την άλλη, οι καμπύλες των τρόπων αναστρέφονται και ο παραγόμενος ήχος γίνεται σκληρός και «τσιριχτός». Οι πολλοί μπάσοι σωλήνες δεν ηχούν καθόλου στη θεμελιώδη συχνότητα, αλλά σε κάποιο υψηλότερο τρόπο με overblowing. Μέσα στη συνηθισμένη έκταση αυτής της κλιμάκωσης, η ποιότητα του παραγόμενου ήχου μεταβάλλεται με τη συχνότητα. Η θεμελιώδης συχνότητα στην οποία ο τρόπος I διασταυρώνεται με τους άλλους, καθορίζεται απ’ τη διάμετρο D_0 του σωλήνα αναφοράς, κατά τη σχέση (6.5).

Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν απ’ την παρατήρηση των κλιμακώσεων $x=1/2$ και $x=3/4$. Η ποιότητα του παραγόμενου ήχου αλλάζει προοδευτικά κατά μήκος της συστοιχίας, όντας κατά κάποιο τρόπο “fluty” στους υψηλούς σωλήνες (υπερισχύει ο πρώτος τρόπος) και σκληρή στους μπάσους (αρμονικοί μεγάλης έντασης). Σε αυτές τις δύο κλιμακώσεις, οι αλλαγές στο αρμονικό περιεχόμενο είναι πιο ομαλές από την $x=0$ και μπορεί να κατασκευασθεί ικανοποιητική έκταση τουλάχιστον πέντε οκτάβων.

Στην περίπτωση $x=5/6$ οι σχετικές τιμές των Q για όλους τους συντονισμούς παραμένουν ίδιες για όλους τους αυλούς. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτής της κλιμάκωσης είναι η απουσία σημείου διασταύρωσης και αλλαγή της διαμέτρου D_0 του σωλήνα αναφοράς απλά μετατοπίζει παράλληλα τις γραμμές των χαμηλότερων τρόπων σχετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν η D_0 είναι αρκετά μικρή, η γραμμή του τρόπου I μπορεί να βρίσκεται κάτω απ’ τη γραμμή II, αλλά πάντα παράλληλα.

Για μία συστοιχία με $x=5/6$ η ποιότητα του παραγόμενου ήχου, κρινόμενη με φυσικά και όχι με ψυχοακουστικά κριτήρια, παραμένει σταθερή για οποιαδήποτε έκταση.

Τέλος, για την περίπτωση $x=1$, οι χαμηλότεροι σωλήνες δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα (με την έννοια ότι υπερεισχύουν οι πρώτες αρμονικές), αλλά οι υψηλοί (υψηλής συχνότητας) σωλήνες γίνονται υπερβολικά λεπτοί και ηχούν μόνο με overblowing στους υψηλούς τρόπους.

Μετά από αυτή την ανάλυση, έχει σημασία να εξετάσουμε την άνω συχνότητα αποκοπής των τρόπων των σωλήνων (παρίσταται με διακεκομμένη γραμμή στα διαγράμματα). Όταν το μήκος κύματος συντονισμού γίνεται μικρότερο από την περιφέρεια του σωλήνα, οι συντονισμοί εξαφανίζονται (Κεφ. 7, Μέρος I). Η συχνότητα αποκοπής μπορεί να ληφθεί από τον τύπο:

$$f^* = \frac{10^4}{D} \quad (6.11)$$

Όπου η D είναι σε cm. Από τον τύπο (6.5) εξάγουμε ότι $f^* \propto f_1^x$, ώστε, αν $x < 1$, ο ολικός αριθμός i^* των διαθέσιμων τρόπων συντονισμού κάτω απ' τη συχνότητα αποκοπής f^* μειώνεται καθώς η θεμελιώδης συχνότητα f_1 αυξάνεται (ελαττώνεται το μήκος κύματος). Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$n^* \propto f_1^{x-1} \quad (6.12)$$

Η μη αρμονικότητα των συντονισμών του σωλήνα καθορίζεται από τον αριθμό i^* και αυξάνεται καθώς η f_1 πλησιάζει την f^* . Αυτή η επίδραση χαμηλώνει τα πλάτη των ανταποκρινόμενων αρμονικών περισσότερο από το αναμενόμενο, από την απλή μείωση του Q .

Σαν συμπέρασμα όλων αυτών, καταλήγουμε ότι μία κλιμάκωση με $x=5/6$, που δίνει λόγο διαμέτρων στην οκτάβα 1,78 και διπλασιασμό διαμέτρου ανάμεσα στο 14° και 15° ημιτόνιο, θα ήταν ιδανική για συστοιχίες αυλών. Βέβαια, είναι πολύ κοντά στην ημιεμπειρική κλιμάκωση $x=3/4$ και καλό είναι να γίνει μία περαιτέρω συζήτηση σχετικά με την ένταση κατά μήκος της έκτασης της συστοιχίας.

Ήδη αναφέρθηκε ότι η ακουστική πίεση p σε μία δοσμένη αξονική απόσταση απ' τον σωλήνα μεταβάλλεται κατά $f_1 D^2$ και άρα κατά f_1^{1-2x} , με την προϋπόθεση ότι οι τιμές των Q των ανταποκρινόμενων συντονισμών είναι ανεξάρτητες των f_1 . Βέβαια, όπως είδαμε στην ανάλυση των μη γραμμικοτήτων κατά την παραγωγή ήχου στους αυλούς, αυτή η παραδοχή δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Είναι ωστόσο προσεγγιστικά παραδεκτό ότι τα πλάτη ακουστικών ταχυτήτων εντός του σωλήνα και επομένως οι ηχητικές πιέσεις θα είναι ανάλογα των παραγόντων ποιότητας Q , με την προϋπόθεση ότι οι τιμές των Q_i για όλους τους συντονισμούς είναι παραπλήσιες. Ισχύει λοιπόν η παρακάτω συνθήκη:

$$p \propto Q_i f_1^{1-2x} \quad (6.13)$$

Η μόνη περίπτωση κατά την οποία η παραπάνω συνθήκη επαληθεύεται απόλυτα είναι στην κλιμάκωση $x=5/6$, όπου $Q_i \propto f_1^{-1/3}$ για όλα τα i (όλες τις αρμονικές). Με αυτή την παρατήρηση και απ' τη σχέση (7.13), για $x=5/6$ λαμβάνουμε:

$$p \propto Q_i f_1^{1-2 \cdot \frac{5}{6}} \propto f_1^{-\frac{1}{3}} f_1^{1-\frac{5}{3}} \Rightarrow p \propto f_1^{-1} \quad (6.14)$$

Θεωρούμε τώρα τις κεντρικές συχνότητες δύο διαδοχικών οκτάβων f_{c1} και f_{c2} , με $f_{c2} = 2f_{c1}$. Ο λόγος των ακουστικών πιέσεων κατά την αναλογία (6.14) θα είναι:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2f_{c1}}{f_{c1}} = 2$$

Εκφράζοντας το λόγο αυτό σε dB παίρνουμε:

$$20 \log \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 6,021 \text{ dB}$$

Έτσι το επίπεδο ακουστικής πίεσης πέφτει περίπου κατά 6 dB ανά οκτάβα όσο πηγαίνουμε προς υψηλές συχνότητες.

Ο ανθρώπινος παράγοντας

Η ένταση του ήχου ωστόσο, δεν καθορίζεται μόνο από το επίπεδο ηχητικής πίεσης αλλά και από τα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης ακοής. Για ήχους στη (θεμελιώδη) συχνοτική έκταση 30 – 4000 Hz, που περιλαμβάνει τη μέγιστη έκταση όλων των οργάνων αυλών, και σε επίπεδα έντασης από 60 σε 80 phons (Κεφ. 5, Μέρος I) που είναι επίσης συνηθισμένα στη μουσική οργάνων αυλών, οι καμπύλες ίσης έντασης πέφτουν περίπου 3 dB ανά οκτάβα, πηγαίνοντας προς υψηλές συχνότητες. Είναι λοιπόν απαραίτητο σε μία συστοιχία αυλών να ληφθεί υπ' όψη αυτό το χαρακτηριστικό για να πετύχουμε ίση υποκειμενική (εκτός από φυσική) ένταση. Έτσι, η κλιμάκωση $x=5/6$, θα δίνει μεγάλες εντάσεις στα μπάσα εξ' αιτίας της κλίσης των 6 dB ανά οκτάβα.

Για την κλιμάκωση $x=1/2$ παρόμοια ανάλυση είναι πιο σύνθετη, λόγω της διασταύρωσης των καμπυλών Q_1 . Για τους υψηλούς σωλήνες, μετά την περιοχή διασταύρωσης, η θεμελιώδης Q_1 μεταβάλλεται με το f^{-1} δίνοντας πτώση 6 dB ανά οκτάβα, αυξανόμενης της συχνότητας. Πριν από την περιοχή διασταύρωσης, οι καμπύλες Q_1 έχουν κλίση $f^{-1/3}$ και εφαρμόζοντας την έκφραση (6.13) παίρνουμε προσεγγιστικά μία πτώση 2 dB ανά οκτάβα (προς υψηλές συχνότητες), που είναι ικανοποιητική.

Η σύγχρονη κλιμάκωση $x=3/4$ μπορεί να έχει τέτοια διάμετρο σωλήνα αναφοράς D_0 , ώστε η θεμελιώδης να κυριαρχεί σχεδόν σε όλη την έκταση της συστοιχίας και να δίνει μεταβολή στην Q κατά $f^{-1/4}$. Με μία προσεγγιστική εφαρμογή πάλι της (6.13) παίρνουμε μία πτώση έντασης 4,5 dB ανά οκτάβα (προς υψηλές συχνότητες) για τη θεμελιώδη και 6 dB για τους υψηλότερους τρόπους. Μία τέτοια συστοιχία, δίχως περαιτέρω τροποποιήσεις, ενδεχομένως να ακούγεται δυνατώτερα στα μπάσα παρά στα πρίμα.

Μετά από όλη αυτή την ανάλυση, καταλήγουμε ότι μία ικανοποιητική κλιμάκωση βρίσκεται μεταξύ $x=3/4=0,75$ και $x=5/6=0,83$. Αυτό το διάστημα δεν απέχει πολύ από εκείνο που χρησιμοποιούσαν οι κατασκευαστές του 17^{ου} αιώνα [CC], δηλαδή από $x=0,67$ έως $x=0,86$. Πάντα όμως, όποια και να είναι η εκλογή του x , είναι απαραίτητες μετέπειτα τροποποιήσεις για να ελαττωθεί η ένταση των μπάσων.

7

Τα Αιολικά Πνευστά

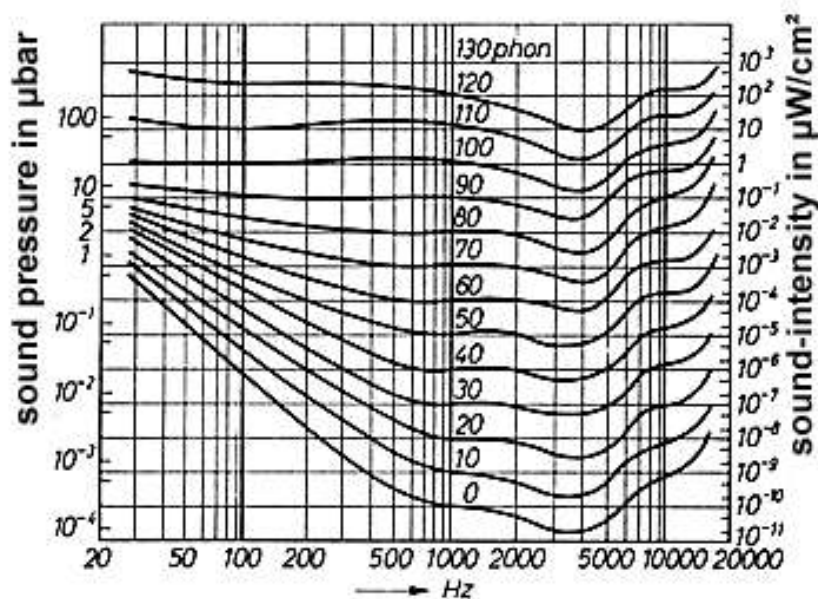
7.1 Γενικά σχόλια

Στη μέχρι τώρα ανάλυση της λειτουργίας των air-jet πνευστών η ενέργεια προερχόταν είτε από τους πνεύμονες του μουσικού (φλογέρα, φλάουτο, αυλός του Πανός) είτε από κάποιο αεριοφυλάκιο (pipe organs, church organs). Αιώνες όμως τώρα οι άνθρωποι δείχνουν ενδιαφέρον να χρησιμοποιήσουν ως ενεργειακή πηγή τον άνεμο με σκοπό την κατασκευή μουσικών οργάνων (όχι απαραίτητα πνευστών) στα οποία ο μουσικός είναι ο ίδιος ο αέρας με τις στοχαστικές μεταβολές της ταχύτητας και της κατεύθυνσης του. Συγκεκριμένα όμως ζητήματα προκύπτουν από μία τέτοια σκέψη:

1) Η αιολική ενέργεια αποτελεί μία «αραιή» και «ήπια» μορφή ενέργειας. Δηλαδή είναι μικρή η ποσότητα ενέργειας ανά μονάδα χρόνου που μπορεί να δεσμευτεί σε κάθε τετραγωνικό μέτρο επιφανεάς, που προσβάλλεται από τον άνεμο [1]. Η ισχύς ενός ρεύματος ρευστού είναι εν γένει ανάλογη της πυκνότητας του και του κύβου της ταχύτητάς του. Κατά συνέπεια, για την ίδια ταχύτητα και διατομή ένα ρεύμα αέρα θα έχει 800 περίπου φορές μικρότερη ενέργεια από ένα αντίστοιχο ρεύμα νερού [1]. Είναι κατά συνέπεια πολύ δύσκολο να πάρουμε πιέσεις της τάξεως 100 και άνω Pascal, που συναντούμε στα pipe organs. Τα αιολικά όργανα πρέπει να λειτουργούν με όσο το δυνατόν χαμηλότερη πίεση και προσφερόμενη ισχύ.

2) Καθώς τα αιολικά όργανα (aeolian musical instruments) λειτουργούν σε ανοικτό περιβάλλον, η διασπορά της ηχητικής ενέργειας που παράγουν είναι μεγάλη. Άρα, ασθενείς ήχοι δύσκολα φθάνουν στο αυτί του ακροατή, ιδίως κάτω από συνθήκες ανεμοθύελλας.

Σύμφωνα με το διάγραμμα 7.1, που απεικονίζει τις καμπύλες ακουστότητας του ανθρώπου, η μεγαλύτερη ακουστική ευαισθησία υφίσταται μεταξύ 3000 και 4000 Hz. Για αυτές τις συχνότητες, ο άνθρωπος μπορεί να ακούσει ηχητικά σήματα πολύ χαμηλής έντασης. Όσο απομακρυνόμαστε από αυτό το κεντρικό εύρος και μεταβαίνουμε σε χαμηλότερες συχνότητες, τόσο ισχυρότερος πρέπει να είναι ο αντίστοιχος τόνος ώστε να γίνεται αντιληπτός. Το ίδιο συμβαίνει όταν μεταβούμε σε συχνότητες υψηλότερες του εύρους 3000 έως 4000 Hz. Γνωρίζοντας αυτή την ιδιαιτερότητα του ανθρώπινου αυτιού οι κατασκευαστές αιολικών οργάνων συνήθιζαν να τους δίνουν διαστάσεις τέτοιες, ώστε να παράγουν τόνους από 1000 έως 5000 Hz.



Διάγραμμα 7.1

Καμπύλες ακουστότητας του ανθρώπου

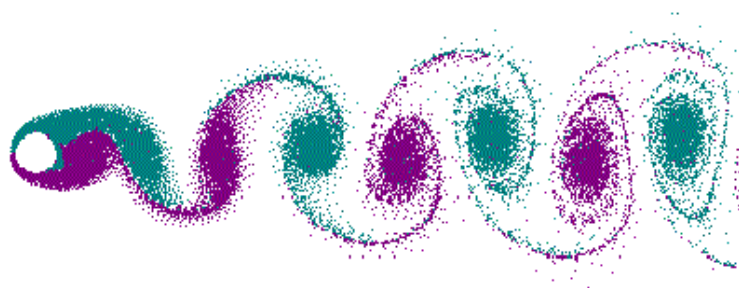
Με μία προσεκτική ακρόαση του περιβάλλοντός μας, θα μετρήσουμε πολλές περιπτώσεις στις οποίες ο άνεμος τραγουδά, είτε στη φύση, είτε στις κατασκευές μας, χωρίς να το έχουμε προκαλέσει εσκεμμένα:

1) Στην εικόνα δεξιά, μια οπή στο κομμάτι του σωλήνα μίας γέφυρας δημιουργεί ένα δοχείο Helmholtz, ώστε να παράγεται ένας ασθενής τόνος καθώς ο άνεμος πνέει γύρω από τον σωλήνα. Παρόμοια αποτελέσματα διαπιστώνουμε από παρατημένα μπουκάλια στο ύπαιθρο.

2) Πόρτες ή παράθυρα που δεν έχουν κλείσει εφαρμοστά με το πλαίσιό τους παράγουν πολλές φορές, όταν ο άνεμος είναι ισχυρός, ήχους λόγω των στροβιλισμών του αέρα [17,48]. Αυτό το φαινόμενο καλείται vortex sound και το αποτέλεσμα του, αεροδυναμικό σφύριγμα (aerodynamic whistle). Το αεροδυναμικό σφύριγμα το συναντούμε και γενικότερα σε περιπτώσεις κοιλοτήτων που έχουν μία οπή, από τις οποίες δραπετεύει ο αέρας, όπως συμβαίνει με το ανθρώπινο σφύριγμα (κεφ. 5) [1, 2, 3, 17].

3) Τανημένα καλώδια (ηλεκτρικού ρεύματος, τηλεφώνου, στήριξης), λεπτές και μακριές κεραιές, καλάμια και άλλοι παρόμοιοι σχηματισμοί παράγουν εντυπωσιακούς «αινιγματικούς» ήχους καθώς ο άνεμος διασχίζεται από αυτά. Ο V. Stouhal ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με τη γένεση ήχων από ρεύμα αέρα που προσκρούει σε καλώδια και αιχμηρά άκρα [1878, 'On aspecial way of generating tones'] καθώς το ρεύμα αέρα διαπερνά ένα καλώδιο σχηματίζονται δίνες στην μία τυρβώδη, ασταθή περιοχή γνωστή με τον όρο Von Karman Vortex

street. Η ασταθής αυτή περιοχή αναγκάζει το καλώδιο να ταλαντωθεί. Η ταλάντωση εξαρτάται από την



Εικόνα 7.2

Σχηματισμός δινών ανάντι της φοράς του ρεύματος

εξασθένηση της αντοχής τους, ώστε πολύ συχνά να οδηγούμαστε σε καταστροφικά αποτελέσματα (συντονισμός, Κεφ. 6, Μέρος Ι).

Εφαρμογή του φαινομένου βρίσκουμε στις Αιολικές Άρπες. Δηλαδή σε μουσικά όργανα, εφοδιασμένα με τεντωμένες χορδές που υπό την επίδραση του ανέμου παράγουν μουσικούς τόνους. Από τη ρευστομηχανική [N] μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για το πότε μπορεί να ταλαντωθεί ένα τεντωμένο καλώδιο και να παράγει ήχο. Στην εικόνα 7.3 φαίνεται για ποιες τιμές του αριθμού Reynolds έχουμε σχηματισμό Von Karman Vortex street. Το σημαντικό είναι ότι ο Reynolds πρέπει να βρίσκεται μεταξύ 30 έως 5000, καθώς κάτω από αυτό το εύρος η ροή είναι απόλυτα στρωτή και το ρευστό ανάντι του ρεύματος δεν σχηματίζει δίνες και ασταθή περιοχή, ενώ πάνω από αυτό το εύρος η ροή αποκολλάται και έχουμε περιοχή σταθερής υποπίεσης.

Μπορεί κάποιος πολύ εύκολα να πειραματιστεί με τα αιολικά όργανα που θα περιγραφούν στη συνέχεια όχι μόνο σε κάποιο εργαστήριο ή αεροδυναμική σήραγγα, αλλά και σε πλαγιές, στην ανοικτή θάλασσα ή στην ταράτσα του σπιτιού του. Για οποιονδήποτε ασχολείται με τον άνεμο και τις κατασκευές που τον αξιοποιούν είναι χρήσιμος ο πίνακας 7.1 που δίνει την κλίμακα Beaufort και της αντιστοιχίες της με τιμές ταχύτητας [I].

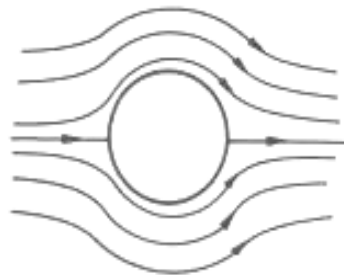


Εικόνα 7.1

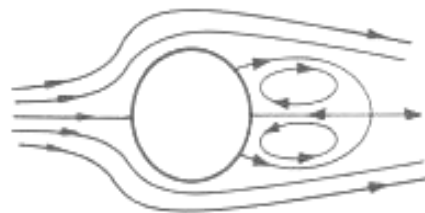
Μικρή οπή σε σωλήνωση γέφυρας, που οδηγεί σε παραγωγή ήχου με την πνοή του ανέμου.

Όπως φαίνεται στην εικόνα 7.2 υπήνεμη πλευρά σχηματίζοντας street. Η ασταθής αυτή περιοχή ταχύτητα του ανέμου, την ελαστικότητα του καλωδίου και τη διάμετρό του [PP,AAA,48]. Όταν η συχνότητα παλινδρόμησης του καλωδίου συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του, παράγεται ένας πολύ χαρακτηριστικός ήχος, σαν τραγουδί. Κινώντας γοργά με το χέρι ένα ξίφος θα αντιληφθούμε έναν παρόμοιο ήχο, όπως και αν σταθούμε κάτω από ένα δέντρο με γυμνά κλαριά εκτεθειμένα στον άνεμο. Η ταλάντωση που προκαλεί ο άνεμος στα καλώδια στήριξης των κρεμαστών γεφυρών έχει ως αποτέλεσμα την καταπόνηση και σταδιακή

**Development of a Current around a Cylinder
in dependence of the flowspeed**



Re ~ 1

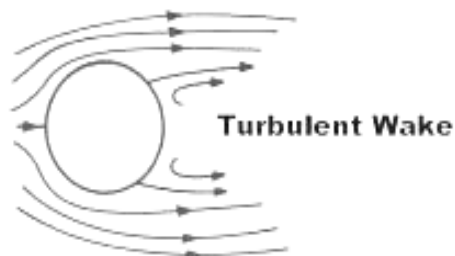


Re ~ 20

von Kármán Vortex Trail = Principle of Aeolian Harp



Re more than 30 and smaller 5000



Re more than 5000...

Εικόνα 7.3

Τιμές του αριθμού Reynolds και συμπεριφορά του ρεύματος έναντι της ροής του ρεύματος ρευστού.

Beaufort	Ταχύτητα (m/s)	Μέση ταχ. (m/s)	Ταχύτητα (Km/h)	Ταχύτητα (Knotts)	Ταχύτητα (mph)	Ονομασία	Ενδείξεις
0	0-0,2	0,1	<2	<1	<1	Νηνεμία	Κάθετη άνοδος καπνού
1	0,3-1,5	0,9	2-6	1-3	1-3	Ελαφρός αέρας	Η διεύθυνση φαίνεται από καπνό. Όχι από ανεμοδείκτη
2	1,6-3,3	2,45	7-11	4-6	4-7	Ήπια αύρα	Γίνεται αισθητή στο πρόσωπο. Η διεύθυνση φαίνεται από ανεμοδείκτη
3	3,4-5,4	4,40	12-19	7-10	8-12	Μέτρια αύρα	Ξεδιπλώνει λεπτό ύφασμα (σημαία).
4	5,5-7,9	6,70	20-30	11-16	13-18	Δροσερή αύρα	Σηκώνει σκόνη. Τα μικρά κλαδιά κινούνται.
5	8-10,7	9,35	31-40	17-21	19-24	Ισχυρή αύρα	Τα μικρά δέντρα ταλαντώνονται
6	10,8-13,8	12,3	41-50	22-27	25-31	Μέτριος άνεμος	Κινούνται μεγάλα κλωνάρια. Σφυρίζουν τα καλώδια του τηλεγράφου.
7	13,9-17,1	15,5	51-60	28-33	32-38	Μέσος άνεμος	Όλα τα δένδρα κινούνται.
8	17,2-20,7	18,95	62-74	34-40	39-46	Ισχυρός άνεμος	Μικρά κλαδιά σπάζουν. Εμποδίζεται το βάδισμα.
9	20,8-24,4	22,6	75-87	41-47	47-54		Κίνδυνος για ελαφρές κατασκευές.
10	24,5-28,4	26,45	88-102	48-55	55-63		Ξεριζώνονται δέντρα.
11	28,5-32,6	30,55	103-120	56-65	64-75	Θύελλα	
12	32,7-36,9	34,8	>120	>65	>75	Καταιγίδα	

Πίνακας 7.1

Κλίμακα Beaufort και οι μετατροπές της [1].

7.2 Ιστορία των αιολικών οργάνων

Η Ύδραυλις του Έλληνα μηχανικού Κτησίβιου, που αναφέρθηκε στο κεφ. 4, τροφοδοτείται με πεπιεσμένο αέρα, υπό τη δράση μίας ανεμογεννήτριας. Μπορούμε να πούμε κατά κάποιον τρόπο ότι το μουσικό αυτό όργανο αποτελεί πρόδρομο της προκλητικής ιδέας των αιολικών οργάνων, αλλά μάλλον ξεφεύγει από το ακριβές πνεύμα καθότι ο άνεμος δίνει έμμεσα και όχι άμεσα ενέργεια στους αυλούς.

Αν ταξιδέψει κανείς στην Ανατολή θα συναντήσει πολλές φορές χαρταετούς που πάνω τους έχουν προσαρτημένα μικρά δοχεία με σχισμές ώστε να παράγουν ήχους κατά την πτήση του χαρταετού. Τέτοια δοχεία καλούνται Φλάουτα Χαρταετών (Kite flutes).

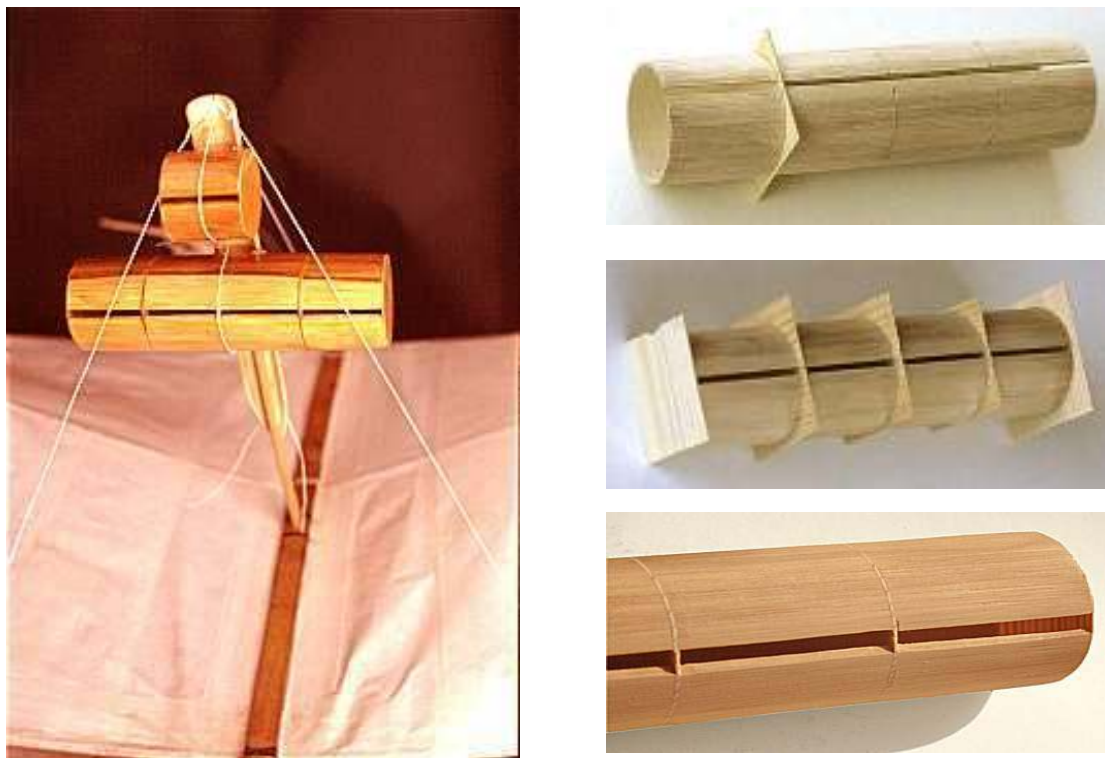
Η πατρίδα των πιο εκλεπτυσμένων και εντυπωσιακών χαρταετών είναι η Κίνα. Η Κινέζοι διαμέσου των αιώνων ανέπτυξαν εκπληκτική τέχνη τόσο στην αισθητική όσο και στην πτητική συμπεριφορά των χαρταετών τους, προσφέροντας θεαματικά ακροβατικά. Κατά τη διάρκεια της 5^{ης} δυναστείας (907-960 π.Χ) εμφανίζονται στην Κινέζικη λογοτεχνία τα πρώτα δείγματα μουσικών οργάνων πάνω σε χαρταετούς. Ανάμεσα στα ευρήματα δοχείων με σχισμές υπάρχουν και σχέδια για τενωμένες χορδές πάνω σε τόξα, που έχουν τοποθετηθεί στο χαρταετό. Καθώς ο άνεμος περνά από τη χορδή και τη δονεί ελαφρώς, η ταλάντωση ενισχύεται από τον χαρταετό, ο οποίος δρα ως συντονιστής και τελικά στέλνει στην ατμόσφαιρα έναν διατηρητέο τόνο. Αυτή η επινόηση είναι ο πρόδρομος της Αιολικής Αρπας (Aeolian Harp).

Πού αργότερα, στη διάρκεια της δυναστείας Sung (1127-1279), επεκτείνεται η χρήση των μικροσκοπικών φλάουτων στα ταχυδρομικά περιστέρια (Pigeon flutes ή Pigeon Wistles). Κατά την

κινέζικη παράδοση δύο λόγοι οδήγησαν σε αυτή την επινόηση: Ο πρώτος ήταν για να κρατιέται το κοπάδι των περιστεριών δεμένο υπό το άκουσμα των σφυριγμάτων τους, όπως ακριβώς συμβαίνει με τα κουδουνάκια των προβάτων. Ο δεύτερος ήταν για να διώχνονται τα εχθρικά πτηνά, τα οποία δεν ήταν συνηθισμένα στους ήχους αυτούς. Πέρα από αυτά, εξίσου αισθητικοί λόγοι πιστεύεται ότι συνέβαλλαν σε αυτή την παράδοση, όπως επίσης και το ότι οι άνθρωποι μπορούσαν να έχουν μία ακουστική αντίληψη για το αν εβρίσκονταν κοντά τα περιστέρια τους.

7.3 Φλάουτα Χαρταετών (Kite Flutes)

Η εικόνα 7.4 δείχνει ένα εγκάρσιο φλάουτο χαρταετού (transverse kite flute). Όπως φαίνεται στα βήματα κατασκευής, ένας κύλινδρος από Bamboo χωρίζεται με χρήση ξύλινων πλακιδίων σε μικρές κυλινδρικές κοιλότητες, οι οποίες διαθέτουν μία σχισμή στο πάνω μέρος. Κανονικά η διατομή της σχισμής πρέπει να βρίσκεται παράλληλα με τη ροή του ανέμου. Γι' αυτό, η αριστερή φωτογραφία της εικόνας 1 δεν είναι απόλυτα σωστή.

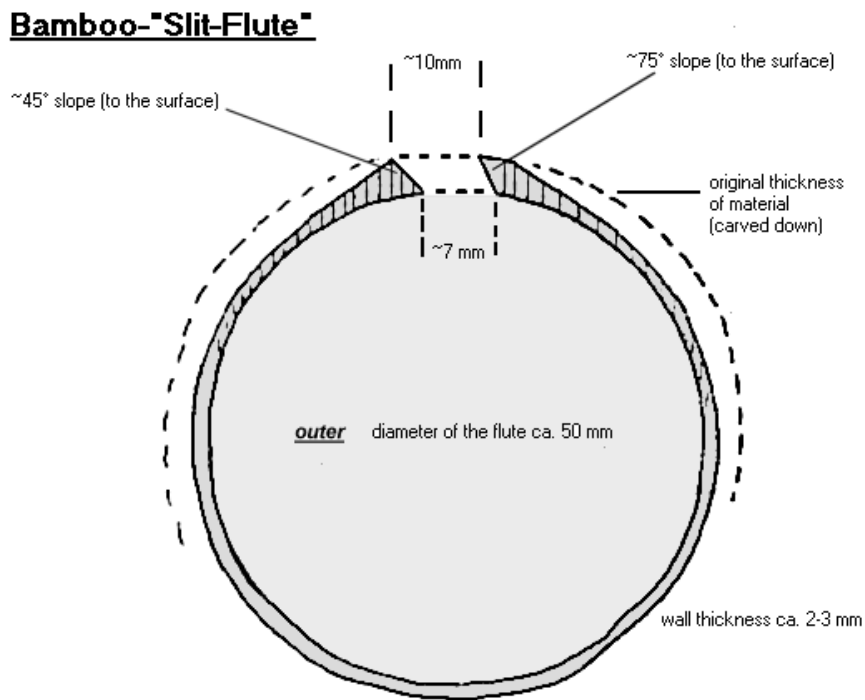


Εικόνα 7.4

Εγκάρσιο φλάουτο χαρταετού και τα βήματα κατασκευής του από κορμό Bamboo.

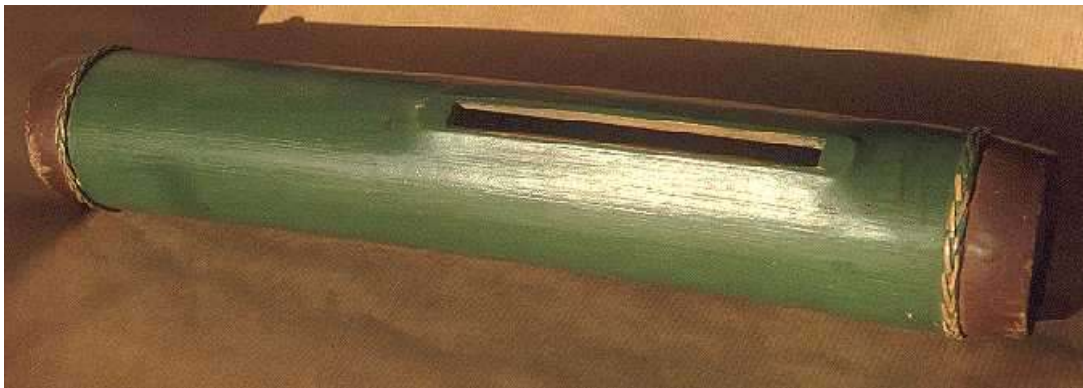
Σύμφωνα με τον κατασκευαστή του συγκεκριμένου οργάνου, ταχύτητες ανέμου 15-20 Km ήτοι 3 περίπου Beaufort δίνουν σταθερή λειτουργία και καλή ηχητική εκπομπή. Η εικόνα 7.3 δείχνει πως πρέπει να είναι η ιδανική σχισμή στο φλάουτο. Μία παραλλαγή του τύπου της εικόνας 7.4 φαίνεται στην εικόνα 7.6. Όπως γίνεται άμεσα φανερό, τα αιολικά φλάουτα έχουν συγκρίσιμες και τις τρεις διαστάσεις τους, σε αντίθεση με τη θεωρία των air-jet πνευστών που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 5, όπου μόνον η διάσταση του μήκους λαμβάνεται υπ' όψη για τον υπολογισμό της συχνότητας (ακουστικός σωλήνας).

Τα αιολικά πνευστά διέπονται από τη θεωρία Helmholtz και η συχνότητά τους εξαρτάται από τον όγκο αέρα που περικλείουν. Όπως και σε ένα δοχείο Helmholtz, έτσι και εδώ, υπάρχει μόνον ένας τρόπος συντονισμού του αέριου όγκου και άρα μία θεμελιώδη συχνότητα. Κατά συνέπεια δεν υφίστανται αρμονικές, ούτε και καταστάσεις overblown. Τέτοιες διατάξεις καλούνται και κυβικές σφυρίχτρες (cubic whistles) για διάκριση από τις κοινές σφυρίχτρες που δεν είναι τίποτε άλλο παρά μικροσκοπικοί αυλοί.



Εικόνα 7.5

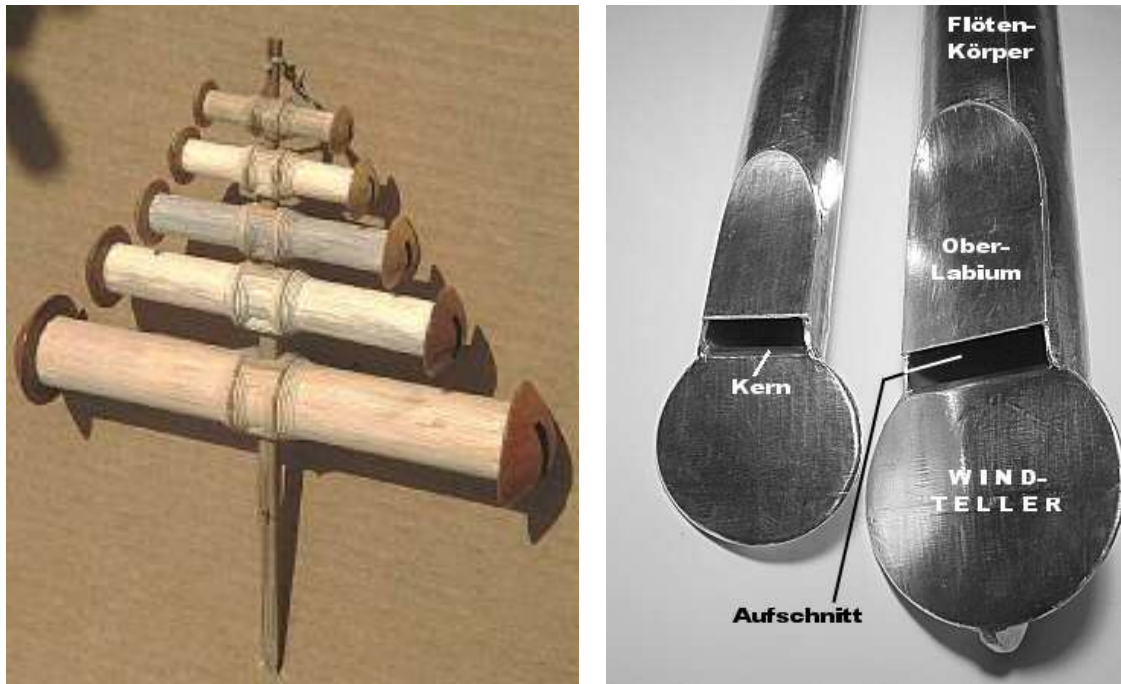
Φλάουτο χαρταετού. Διακρίνεται η μορφή της σχισμής του.



Εικόνα 7.6

Φλάουτο χαρταετού από Bamboo.

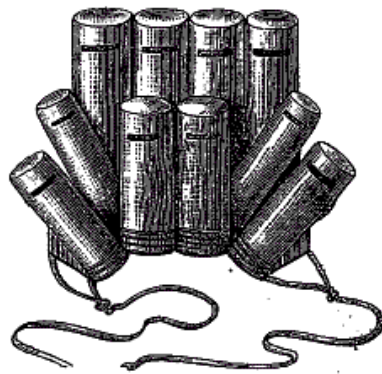
Η διάταξη φλάουτων στο αριστερό μέρος της εικόνας 7.7 περιλαμβάνει μέλη δοαφόρων μηκών, ώστε οι θεμέλιες συχνότητες συντονισμού να αντιστοιχούν στις αρμονικές της θεμελίου του φλάουτου με το μεγαλύτερο μήκος, ήτοι του φλάουτου με τη μικρότερη συχνότητα. Δεξιά στην εικόνα 7.7 ένας κοινός αυλός έχει *απαλλαγεί* από το πόδι του ώστε ο άνεμος να οδηγείτε ελεύθερα στην flue σχισμή. Το αποτέλεσμα δεν είναι το ίδιο με έναν τυπικό αυλό, καθώς δεν δημιουργείται λεπτή ασταθής δέσμη αέρα, ώστε να προκληθούν ταλαντώσεις τέτοιες που να διατηρήσουν τον αναδραστικό μηχανισμό, όπως περιγράφηκε στο κεφ. 5. Οι συντονισμοί που προκύπτουν είναι ασθενείς.



Εικόνα 7.7

Αριστερά: Συγκρότημα φλάουτων χαρταετών. Δεξιά: Τροποποιημένος αυλός για προσάρτηση σε χαρταετό.

7.4 Φλάουτα Περιστεριών (Pigeon Flutes)

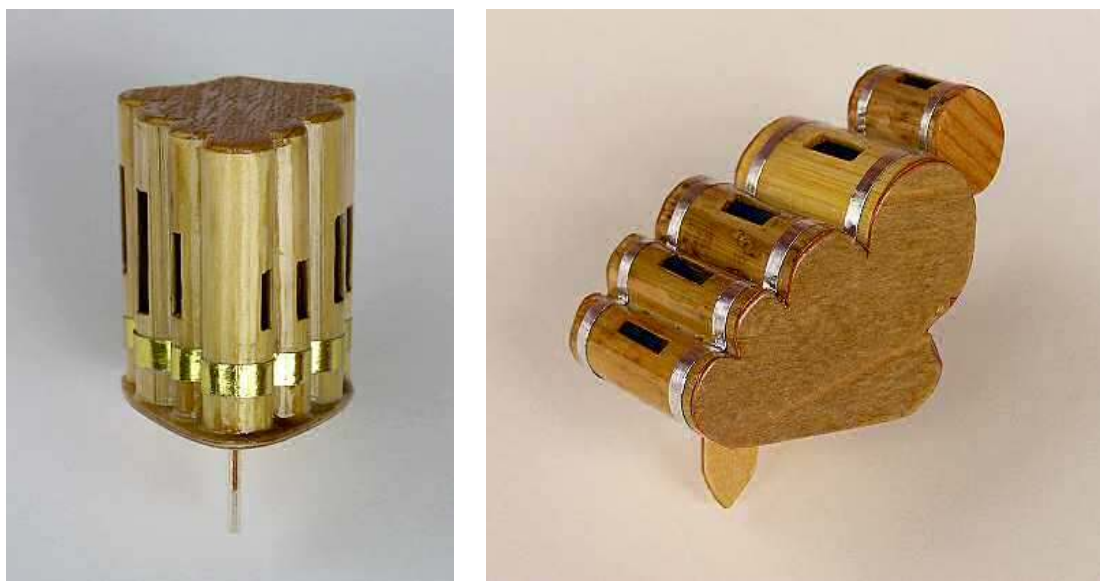


Le sifflet des pigeons, en Chine.

Εικόνα 7.4

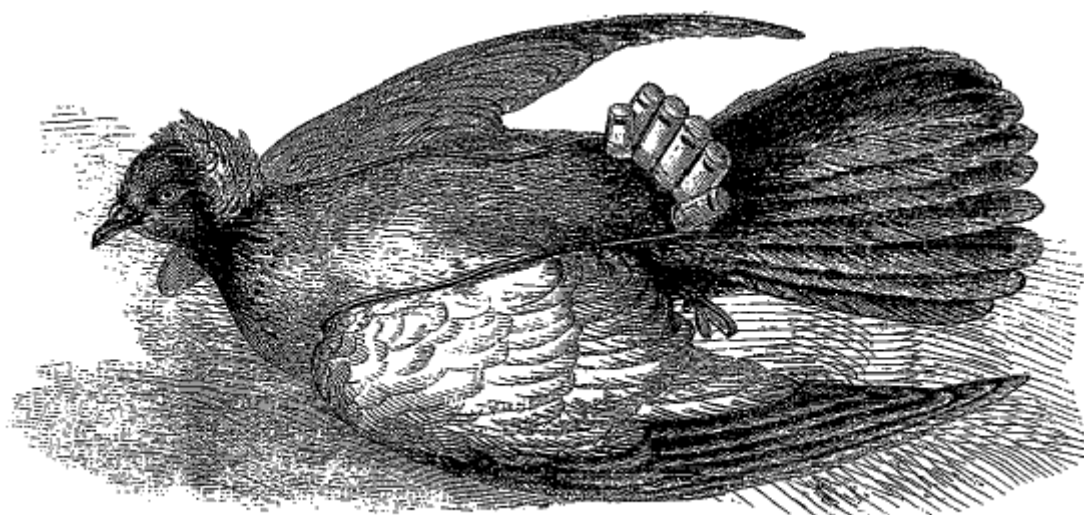
Φλάουτα περιστεριών (Pigeon flutes)

να στρέφονταν όσο ήταν εφικτό προς το μέρος του ακροατή, έτσι που ο τελευταίος να βρίσκεται εντός του πεδίου ηχητικής ακτινοβολήσης. Στην εικόνα 7.5 φαίνονται πραγματικά φλάουτα περιστεριών από Bamboo και ξύλο. Οι γκραβούρες στις εικόνες 7.6 έως 7.9 απεικονίζουν διάφορους σχηματισμούς φλάουτων περιστεριών και το πώς τοποθετούνταν πάνω στα πτηνά.



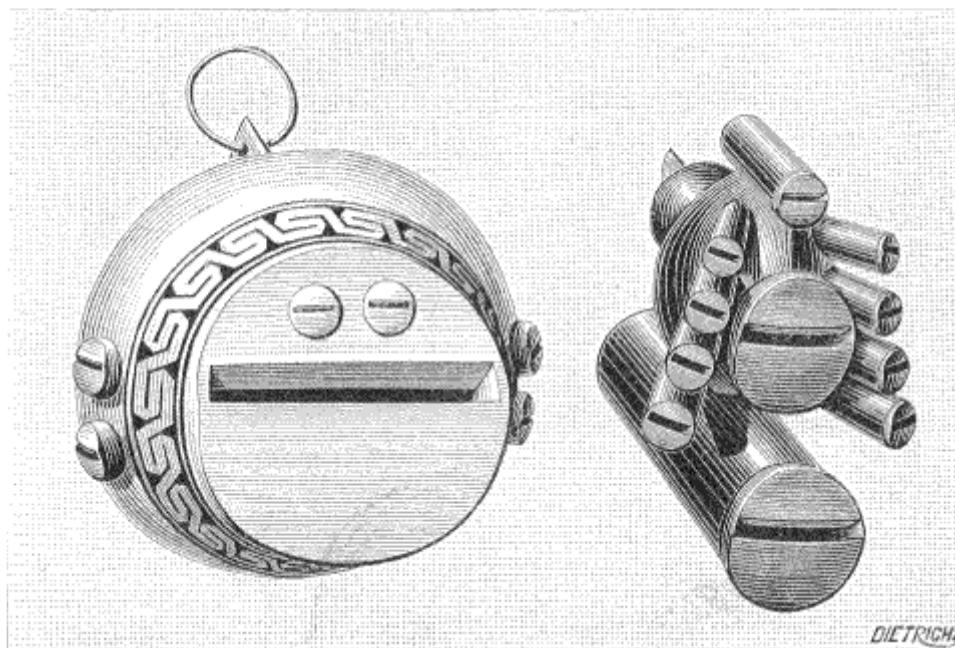
Εικόνα 7.5

Φλάουτα περιστεριών από Bamboο και ξύλο.

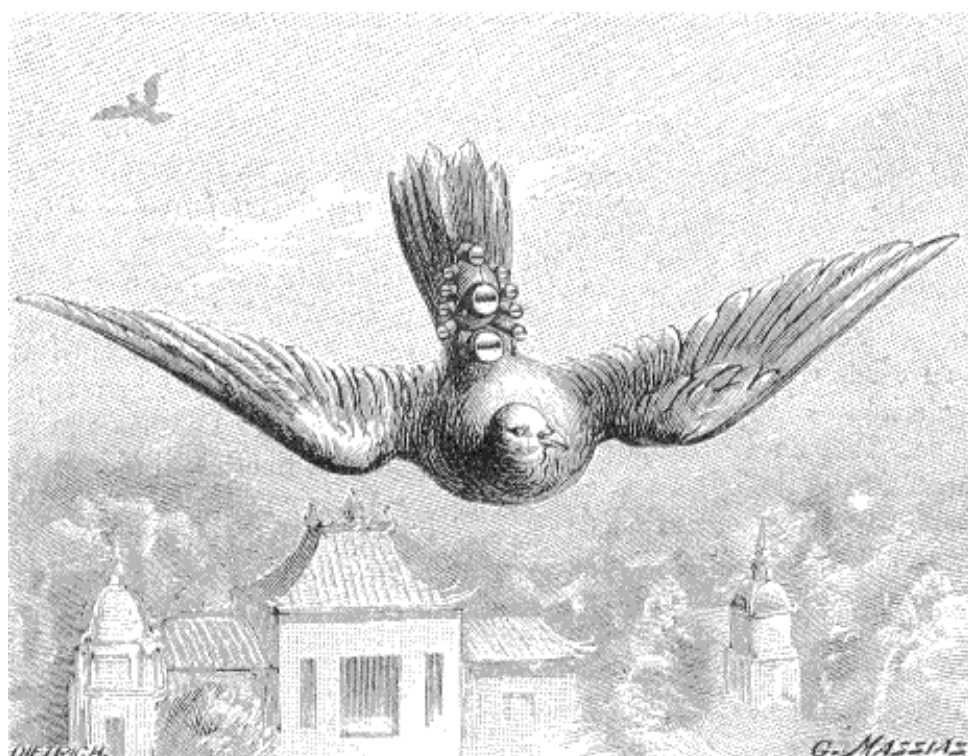


Pigeon chinois avec sifflet. — Dessin de Freeman.

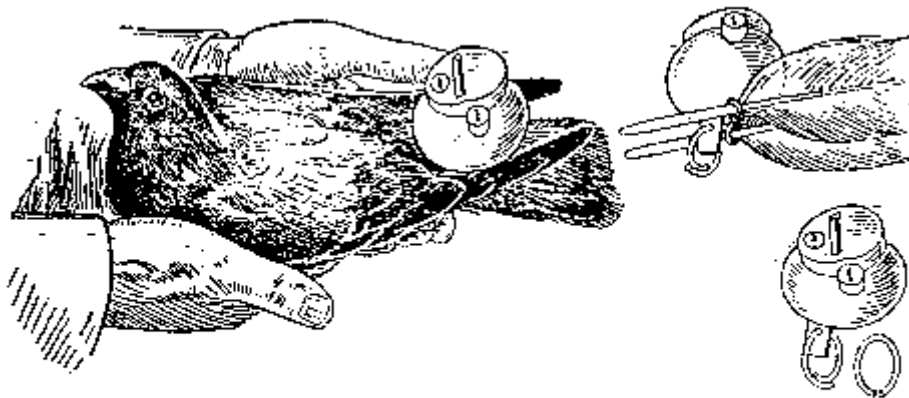
Εικόνα 7.6



Εικόνα 7.7



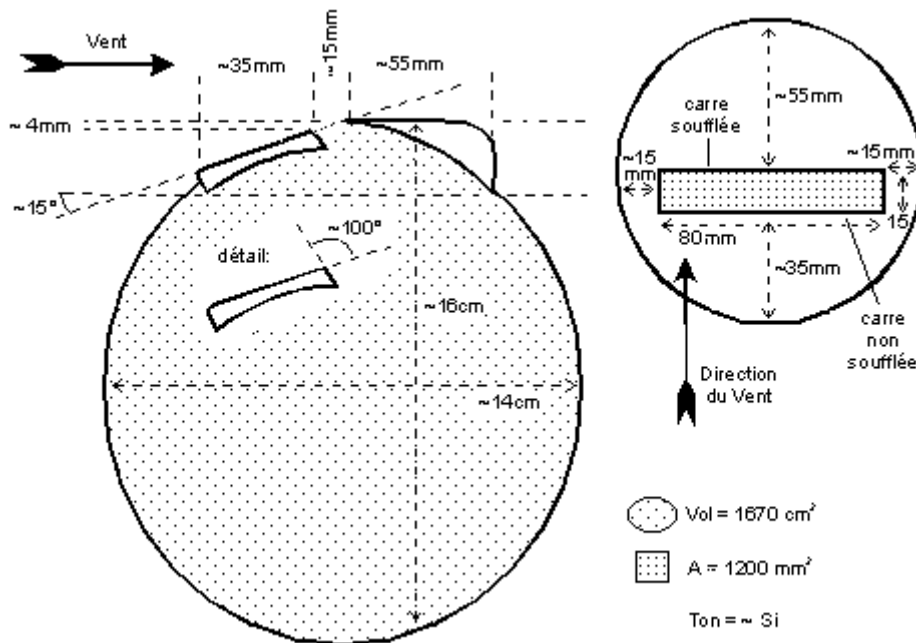
Εικόνα 7.8



Attachment of a pigeon-whistle (Gourd-type, China) onto the tail feathers. The two middle feathers are tied together, the whistle's "foot" is stuck in between and secured with a ring.

Εικόνα 7.9

Στην εικόνα 7.10 μπορεί κανείς να πληροφορηθεί για τις τυπικές διαστάσεις ενός φλάουτου περιστεριών.



Εικόνα 7.10

Αναλογίες στις διαστάσεις ενός φλάουτου περιστεριών.

7.5 Αιολικό όργανο από μπαμπού (Bamboo Aeolian Organ)

Το αιολικό όργανο από Bamboo προέρχεται από τη Νοτιοανατολική Ασία και τα νησιά του Ειρηνικού. Μετρά και αυτό αιώνες ύπαρξης. Η χρήση του προοριζόταν για καθαρά ψυχαγωγικούς λόγους, για τον ακουστικό προσανατολισμό των κατοίκων της πόλης όπου τοποθετούταν, καθώς εκείνοι γύριζαν από τη ζούγκλα, αλλά και για θρησκευτικούς σκοπούς. Με τον καιρό, αποτέλεσε είδος τέχνης, συνδυάζοντας στοιχεία από γλυπτική και μουσική. Στην εικόνα 7.11 βλέπουμε ένα τέτοιο όργανο κατασκευασμένο την προηγούμενη δεκαετία από έναν γλύπτη σε μία πεδιάδα της Αμερικής.



Εικόνα 7.11

Αιολικό όργανο από Bamboo. Αριστερά: Σχηματισμός σχισμών στους φυσικούς κυλίνδρους που είναι φυσικά σχηματισμένοι στον κορμό του καλαμιού. Δεξιά: Διάταξη των κορμών (καλαμιών) του οργάνου στο χώρο.

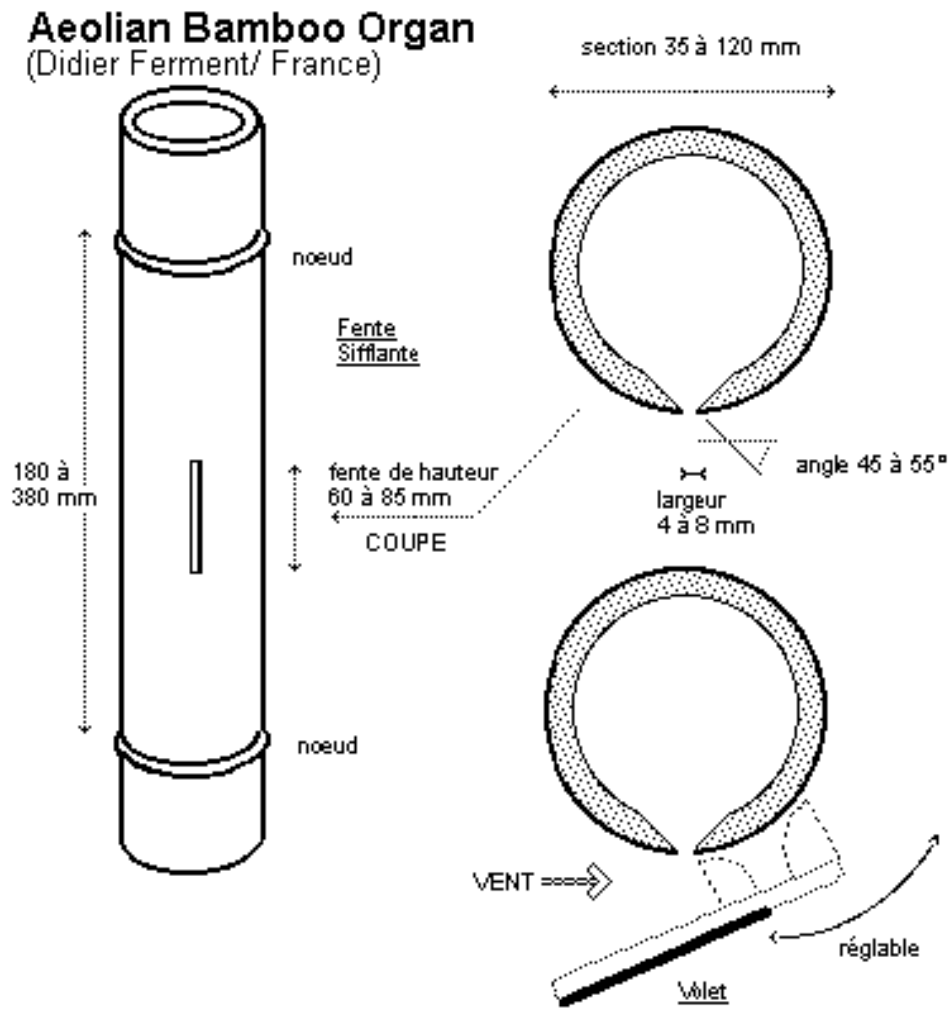


Εικόνα 7.12

Ο ανοιχτός χώρος αφήνει το όργανο εκτεθειμένο σε όλες τις κατευθύνσεις και εντάσεις ανέμου, ώστε να παράγονται τυχαίο ευχάριστο ήχοι, ωστόσο όχι μουσικοί.

Ένα καλάμι Bamboo, το οποίο μπορεί να φτάσει και μήκος περί τα 20 m, διαιρείται από τη φύση του σε πολλούς μικρότερους κυλίνδρους, μήκους περίπου 30 έως 40 cm. Η διάμετρος ενός τέτοιου καλαμιού είναι περί τα 10 έως 15 cm. Ανοίγοντας σχισμές σαν αυτές της εικόνας 7.13, μπορούμε να δημιουργήσουμε καθ' όλο το μήκος του καλαμιού, επάλληλα, μικρά δοχεία Helmholtz, όπως φαίνεται στην εικόνα 7.11. Ο μεγάλος αριθμός δοχείων Helmholtz συνεισφέρει σε μία πολυφωνία ήχων καθώς ο άνεμος συντονίζει τους αέριους όγκους τους. Οι διαστάσεις όλων των δοχείων είναι ίδιες, γιατί έτσι προκύπτουν από τη φύση του καλαμιού. Ωστόσο, μεταβολές αυτών σε τεχνητά καλάμια, διαφορετικών υλικών, θα προσέθεταν μεγαλύτερη ποικιλία συχνοτήτων και ήχων.

Στη διπλανή εικόνα μία μίμηση ενός αιολικού οργάνου από Bamboo έχει κατασκευαστεί από πλαστικούς σωλήνες. Η εκδοχή αυτή είναι πολύ απλή και εύκολη στην κατασκευή.



Εικόνα 7.13

Τυπικές διαστάσεις και γεωμετρία ενός κυλίνδρου καλαμιού, που χρησιμοποιείται στο αιολικό όργανο από Bamboo.

Μέρος III

Υπολογιστική Μελέτη

1

Υπολογιστικά μοντέλα προσομοίωσης των air-jet πνευστών

1.1 Η έννοια του υπολογιστικού μοντέλου στα μουσικά όργανα

Τα μουσικά όργανα ιστορικά αποτελούν κάποια από τα πιο πολύπλοκα μηχανικά συστήματα που έχει επινοήσει ο άνθρωπος [79]. Από τα λίγα που έχουν γραφεί στο II μέρος της διπλωματικής μπορεί κανείς να συμπεράνει πόσο απαιτητική είναι η φυσική των μουσικών οργάνων σε γνωστικό υπόβαθρο πολλών επιστημών. Έχει ξαναειπωθεί ότι τον τελευταίο αιώνα υπήρξε μεγάλο ενδιαφέρον στην ανάλυση της λειτουργίας τους από φυσικούς και ακουστικούς.

Είδαμε τον εμφανή ρόλο της μη γραμμικότητας στις εξισώσεις που περιγράφουν ένα πνευστό. Παρόμοια πράγματα ισχύουν και για τα υπόλοιπα μουσικά όργανα. Απ' την άλλη, οι εξισώσεις οι ίδιες είναι τόσο σύνθετες που δεν μπορούν να επιλυθούν άμεσα, εκτός αν ληφθούν απλοποιητικές παραδοχές και πληθώρα παραμέτρων, όπως συμβαίνει με την προσεγγιστική λύση του N. H. Fletcher (επόμενο κεφάλαιο) ή του Howe (Κεφάλαιο 1, Μέρος IV) που αφορούν στα air-jet πνευστά. Όσο περισσότερες απλοποιήσεις δεχόμαστε για τη συμπεριφορά των συνιστωσών του συστήματός, τόσο το αποτέλεσμα της θεωρίας μας διαφοροποιείται από την πραγματικότητα. Μία τυπική απλοποίηση είναι η γραμμικοποίηση ορισμένων ελαφρώς μη γραμμικών φαινομένων που εμπλέκονται στη λειτουργία του μουσικού οργάνου [79].

Αυτό που επιδιώκουμε κατά κύριο λόγο κατά την ανάλυση της συμπεριφοράς ενός air-jet πνευστού είναι ο υπολογισμός του ακουστικού του φάσματος (συχνότητες και πλάτη των αρμονικών) τόσο στη σταθερή (steady) όσο και στη μεταβατική (transient) κατάσταση, όταν είναι δοσμένη η μεταβολή της πίεσης πνοής και γνωστές οι διαστάσεις του οργάνου.

Η πιο μοντέρνα αντιμετώπιση της συμπεριφοράς των μουσικών οργάνων επιτυγχάνεται με τη χρήση υπολογιστή. Υιοθετώντας μεθόδους από την υπολογιστική ρευστομηχανική [G] ή την ψηφιακή επεξεργασία [LL] μεταβαίνουμε σε ένα νέο ελκυστικό πεδίο έρευνας, αυτό της *υπολογιστικής ακουστικής* (computational acoustics). Καθώς ο υπολογιστής έχει τη δυνατότητα να εκτελεί τεράστιες ποσότητες πράξεων ανά δευτερόλεπτο, μπορούμε με κατάλληλους αλγορίθμους να επιλύσουμε αριθμητικά πολλές από τις σύνθετες εξισώσεις αποφεύγοντας τις απλοποιήσεις και παίρνοντας ολοένα ρεαλιστικότερα αποτελέσματα.

1.2 Γνωστά υπολογιστικά μοντέλα

Στην ακόλουθη χρονολογική επισκόπηση μπορεί κανείς να ενημερωθεί για τις επινοήσεις των τελευταίων ετών σχετικά με τη μελέτη των air-jet πνευστών μέσω προγραμματισμού σε υπολογιστή. Τα υπολογιστικά μοντέλα διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, αυτά που αναλύουν τη συμπεριφορά του οργάνου στο πεδίο της συχνότητας και εκείνα που προσομοιώνουν απευθείας τη συμπεριφορά στο πεδίο του χρόνου (κεφ.3, μέρος II). Με την ανάλυση Fourier είναι εύκολο να μεταβεί κάποιος από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και λάβει το συχνοτικό φάσμα απόκρισης. Η αντίστροφη ανάλυση Fourier θα μας διευκόλυνε να μεταβούμε από το συχνοτικό στο χρονικό πεδίο, αλλά δε θα προσέφερε κάτι περισσότερο στη μελέτη μας. Τα μοντέλα στο πεδίο της συχνότητας είναι γρηγορότερα από αυτά στο πεδίο του χρόνου, καθώς η επίλυση των συχνοτικών εξισώσεων απαιτεί μικρή υπολογιστική ισχύ, και τέτοια ισχύ είχαν οι υπολογιστές 30 χρόνια πριν.

Από πλευράς εξισώσεων, πάλι μπορούμε να διαχωρίσουμε τα μοντέλα, σε αυτά που χρησιμοποιούν κανόνες από την ανάλυση Fourier (μοντέλα στο πεδίο της συχνότητας), σε αυτά που χρησιμοποιούν σχέσεις από την ψηφιακή επεξεργασία σημάτων (Digital Signal Processing, ανάλυση στο πεδίο του χρόνου) και σε αυτά που χρησιμοποιούν εξισώσεις ρευστομηχανικής (ανάλυση επίσης

στο πεδίο του χρόνου). Πολλά μοντέλα είναι υβριδικά, δηλαδή συνδυάζουν στοιχεία από τα προηγούμενα.

1) Ημιεμπειρικό μοντέλο του N. H. Fletcher

Δημιουργήθηκε τη δεκαετία του 70, αλλά το αποδέχεται μέχρι και σήμερα. Αγνοεί θορύβους από δίνες ή στροβιλισμούς και χρησιμοποιεί σειρές και ανάλυση Fourier για εκφράσει τη μορφή των λύσεων μίας κύριας εξίσωσης συστήματος. Οι λύσεις αποτελούν από μόνες τους νέες υποεξισώσεις, που γίνονται αριθμητικά ολοκληρώσιμες, αφού μετασχηματισθούν με τη μέθοδο των αργά μεταβαλλόμενων συναρτήσεων. Βασίζεται στον κοινά αποδεκτό ισχυρισμό ότι δημιουργείται ισορροπία ενέργειας μεταξύ της προσφοράς του διεγέρτη και των απωλειών στο συντονιστή. Είναι αρκετά προσεγγιστικό, αλλά είναι το μόνο που έχει επαληθευτεί πειραματικά σε μεγάλο εύρος διαστάσεων αυλών. Πέραν αυτού, η χρήση του μοντέλου στη μουσική σύνθεση έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα [EEE]. Στις δημοσιεύσεις του ο Fletcher εκτελεί αριθμητικά παραδείγματα για τους τρεις πρώτους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Η αντιμετώπιση του θέματος είναι απ' τη σκοπιά της συχνότητας (frequency domain) και χρησιμοποιείται τόσο για τη σταθερή όσο και για τη μεταβατική κατάσταση. Το μοντέλο του Fletcher, όπως και η αντίστοιχη θεωρία των air-jet πνευστών (κεφ. 5, μέρος II) προσφέρεται για μία πρώτη και αρκετά περιεκτική κατανόηση του μηχανισμού τους. Γι' αυτό, παρά την παλαιότητά της, αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο και τη χρησιμοποιούμε και στην ερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων του IV Μέρους.

Βιβλιογραφική αναφορά: [CC, 28, 31, 32, 34, 39, 42, 45].

2) Ολοκληρωτικό μοντέλο του R.T. Schumacher

Αποτελεί επέκταση του προηγούμενου μοντέλου με χρήση ολοκληρωτικών, αντί διαφορικών εξισώσεων συστήματος. Βασισμένο σε FFT υπολογίζει τα αρμονικά πλάτη έως και των 14 πρώτων συνιστωσών ως συνάρτηση της πίεσης, για την κατάσταση του θεμελιώδη και του δεύτερου τρόπου συντονισμού. Το μοντέλο είναι πιο ακριβές από του Fletcher, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για τη σταθερή κατάσταση.

Βιβλιογραφική αναφορά: [73].

3) Μοντέλο των McIntyre, Woodhouse και Schumacher

Βασισμένο σε μία συνάρτηση ανάκλασης (reflection function) αντιμετωπίζει το θέμα από τη σκοπιά του χρόνου (time domain), ώστε να μπορεί να υποδιαιρεί την περίοδο και να προβλέπει τις αλλαγές μέσα σε αυτή. Δημιουργήθηκε το (1983). Ο Coltman το 1991 επέκτεινε το μοντέλο και το εφήρμοσε στο φλάουτο.

Βιβλιογραφική αναφορά: [56,21].

4) Μοντέλο του M. P. Verge

Εξέλιξη του προηγούμενου μοντέλου για μικρές διαστάσεις αυλών. Ο Verge καταλήγει σε ένα μονοδιάστατο (time domain) μοντέλο, που λαμβάνει υπ' όψη του δίνες και στροβιλισμούς στη ροή του σέρα και της δέσμης, ώστε να προβλέπει και το θόρυβο και τους edge tones. (Κεφ. 4, μέρος II). Η επέκταση που προτείνει ο ίδιος ο Verge για το μοντέλο του είναι να προστεθεί και η δεύτερη διάσταση για να μπορούν να προβλεφθούν οι εγκάρσιες αρμονικές σε μεγάλους και φαρδείς σωλήνες, οι οποίες κατά κύριο λόγο ενεργοποιούνται από τους στροβιλισμούς της αέριας δέσμης για μεγάλους Reynolds (>3000), πριν καν προσκρούσει εκείνη στο χείλος. Οι εγκάρσιες αρμονικές μειώνουν την καθαρότητα του παραγόμενου ήχου.

Το μοντέλο δημοσιεύτηκε το 1997 και με σχέσεις ροής ρευστών, καταλήγει σε αριθμητικές επιλύσεις διαφορικών εξισώσεων, μέσω πεπερασμένων διαφορών. Το μειονέκτημα είναι όπως ειπώθηκε, ότι έχει εφαρμοσθεί για μικρούς αυλούς (μήκους έως 30 cm).

Βιβλιογραφική αναφορά: [EEE, 80, 81, 82, 83].

5) Τεχνικές επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes

Περιλαμβάνει μία ολόκληρη κατηγορία μοντέλων και αποτελεί την πλέον σύγχρονη μέθοδο. Ο Έλληνας ακουστικολόγος Π. Σκόρδος δημοσίευσε το 1995 τη διδακτορική του διατριβή στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του MIT, με θέμα τη μοντελοποίηση αυλών με τη μέθοδο Lattice Boltzmann που επιλύει τις εξισώσεις Navier – Stokes, χρησιμοποιώντας παράλληλη επεξεργασία υπολογιστών. Πολλά άλλα μοντέλα στηρίζονται στη μέθοδο αυτή.

Βιβλιογραφική αναφορά: [ZZ,8,52].

Ο κατάλογος των υπολογιστικών μοντέλων δεν καλύπτεται σε καμία περίπτωση πλήρως από αυτά που αναφέρθηκαν, για το λόγο ότι μέρα με τη μέρα καινούργιες μελέτες δημοσιεύονται. Ωστόσο, τα περισσότερα μοντέλα βασίζονται σε αυτά και εύκολα μπορεί κάποιος να τα παρακολουθήσει.

2

Frequency-domain μοντέλο του N. H. Fletcher

2.1 Εξισώσεις συστήματος

Υποθέτουμε ότι ο συντονιστής (ακουστικός σωλήνας) ταλαντώνεται χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης στους κανονικούς του τρόπους ταλάντωσης, που ο καθένας συμβολίζεται με i και χαρακτηρίζεται από γωνιακή συχνότητα n_i . Αν η κίνηση του κάθε τρόπου περιγράφεται απ' την ακουστική μετατόπιση x_i , τότε, επειδή ο συντονιστής είναι ένας γραμμικός ταλαντωτής (Κεφ. 4, Μέρος II), οι τρόποι του θα υπακούουν στην παρακάτω διαφορική εξίσωση [34]:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \kappa_i \frac{dx_i}{dt} + n_i^2 x_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

όπου $\kappa_i > 0$ είναι η σταθερά απόσβεσης του κάθε τρόπου. Η εξίσωση (2.1) είναι γραμμική και έτσι πρέπει να είναι, ώστε να περιγράφει τη γραμμική συμπεριφορά του συντονιστή.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια η ιδιοσυχνότητα n του i τρόπου δεν είναι ταυτόσημη με τη συχνότητα της n αρμονικής $\omega_n = n\omega$, αλλά διαφέρει, καθώς ο ακουστικός σωλήνας είναι ένας μη ιδανικός ταλαντωτής.

Έστω τώρα ότι επιβάλλεται μία διεγείρουσα δύναμη, από το διεγέρτη, η οποία όμως δημιουργείται υπό την επίδραση του ακουστικού πεδίου των τρόπων του συντονιστή, όπως είδαμε, κατά έναν περίπλοκο αναδραστικό μηχανισμό. Έτσι η δύναμη είναι της μορφής $F\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots\right) = F\left(\frac{dx_j}{dt}\right)$, δηλαδή εξαρτάται τόσο απ' τους τρόπους, όσο και το χρόνο. Έτσι, υπό την επενέργεια της δύναμης αυτής, ο i τρόπος θα υπακούει στην εξίσωση [31]:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \kappa_i \frac{dx_i}{dt} + n_i^2 x_i = \eta_i F\left(\frac{dx_j}{dt}\right) \quad (2.2)$$

όπου η_i είναι ένας πραγματικός αριθμός, που καλείται σταθερά σύζευξης (coupling coefficient). Οι ποσότητες κ_i και η_i είναι γενικά υπολογίσιμες από τη γεωμετρία του σωλήνα και τις μηχανικές και θερμικές ιδιότητες του αέρα [PP,9,12].

Στην περίπτωση τώρα ενός σωλήνα με ακτίνα r πολύ μικρότερη από το περιεχόμενο μήκος κύματος, όταν συμπεριλαμβάνονται συνεκτικές και θερμικές απώλειες [32], καταλήγουμε στις προσεγγιστικές σχέσεις:

$$\kappa_i \approx \frac{r^2 \omega_i^2}{L_p c} + 5 \cdot 10^{-5} \frac{c \omega^{1/2}}{r} \quad (2.3)$$

$$\eta_i = \eta \approx \frac{2S_m}{\rho L_p S_p} \quad (2.4)$$

όπου ω_i η γωνιακή συχνότητα κάθε τρόπου, c η ταχύτητα του ήχου, S_m η διατομή του στόματος, S_p η διατομή και L_p το μήκος του ακουστικού σωλήνα. Η ταχύτητα του ήχου επιλέγεται για ένα μεγάλο εύρος υπολογισμών $c = 342$ m/s [EEE].

Με τον τρόπο που γράφτηκε η (2.2), υπαγορεύει σύζευξη οποιωνδήποτε συνδυασμών. Για παράδειγμα, μπορεί το $\frac{dx_i}{dt}$ στο αριστερό μέλος να αναφέρεται σε μία χρονική στιγμή t , ενώ το $\frac{dx_j}{dt}$ στη δύναμη F , να αναφέρεται σε μία προηγούμενη χρονική στιγμή $t - \delta_i$. Κατά συνέπεια, το σύστημα διεγέρτη-συντονιστή περιγράφεται από ένα σύνολο άπειρων συσχετιζόμενων, μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο προφανώς δεν έχει απευθείας λύση [42].

2.2 Η Επίλυση

Η λύση της (2.2) έγκειται στον προσδιορισμό της ακουστικής μετατόπισης x_i κάθε τρόπου, που μας οδηγεί στον προσδιορισμό του παραγόμενου ηχητικού φάσματος. Για να κατανοήσουμε τη διαδικασία που οδηγεί στη λύση της παραπάνω εξίσωσης υποθέτουμε αρχικά ότι ο διεγέρτης έχει γραμμική συμπεριφορά και μπορεί να γραφεί [42], στη θέση του δεξιού μέλους της (2.2):

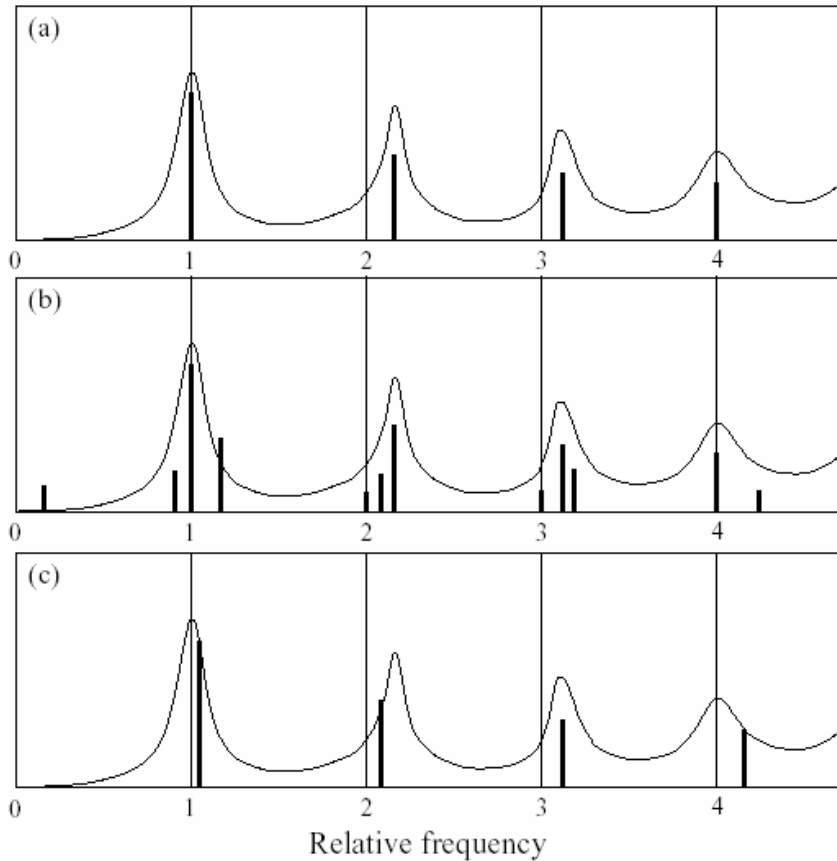
$$g(x_1, x_2, x_3, \dots) = c_1(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) + c_2 \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt} + \dots \right) \quad (2.5)$$

όπου τα c_1, c_2 είναι σταθερές, που ενδεχομένως να περιέχουν αλλαγές φάσεων, σε σύνθετες περιπτώσεις. Έστω ότι η ακουστική μετατόπιση του τρόπου i , που ταλαντώνεται με ιδανική γωνιακή συχνότητα ω_i , δίνεται από τη Fourier συνιστώσα:

$$x_i = a_i \sin(\omega_i t + \beta_i) \quad (2.6)$$

Ο i τρόπος διεγείρεται κυρίως από τον όρο του διεγέρτη $c_1 x_i + c_2 \frac{dx_i}{dt}$ λόγω της ταύτισης των συχνοτήτων τους. Αν το μέρος $c_2 \frac{dx_i}{dt}$ του διεγέρτη, που είναι σε φάση με το $\frac{dx_i}{dt}$, είναι μεγαλύτερο από τον όρο απόσβεσης $\kappa_i \frac{dx_i}{dt}$ του συντονιστή, τότε το πλάτος a_i της ακουστικής μετατόπισης του τρόπου i θα αυξάνεται συνεχώς, έως ότου αυξηθεί η σταθερά απόσβεσης κ_i ή μειωθεί το μέρος $c_2 \frac{dx_i}{dt}$ του διεγέρτη [42]. Αυτή η μη γραμμική δράση, ερμηνεύει πλήρως το σχολιασμό του Benade (Κεφ. 4, Μέρος II), ότι τα όργανα με συντονισμούς διαρκείας είναι απαραίτητως μη γραμμικά. Το μέρος τώρα $c_1 x_i$ του διεγέρτη, που είναι σε φάση με το x_i θα προκαλέσει μία μικρή αλλαγή φάσης στη γωνιακή συχνότητα ω_i . Αν όμως ο διεγέρτης παρείχε μία καθαρά αρνητική αντίσταση, τότε $c_1 = 0$ και δεν θα υπήρχε μεταβολή της φάσης και άρα της συχνότητας. Το ηχητικό φάσμα θα μπορούσε τότε να είναι σαν αυτό του σχήματος 2.1(a) [42], όπου οι γραμμές του βρίσκονται ακριβώς στις κορυφές της αγωγιμότητας εισόδου (Κεφ. 4, Μέρος II).

Είδαμε όμως ότι ο διεγέρτης είναι μη γραμμικός. Αυτό σημαίνει ότι εκτός από τα $c_1 x_i$ και $c_2 \frac{dx_i}{dt}$ εξαρτάται και από όρους της μορφής $c_{ij} x_i x_j$, με υψηλότερες τάξεις όπως $x_i^p x_j^q \dots$ με p, q ακέραιους, καθώς και αντίστοιχους τέτοιους όρους για τα $\frac{dx_i}{dt}$. Όλο αυτό το φάσμα του διεγέρτη προσδίδει όρους διέγερσης με συχνότητες $\omega_i \pm \omega_j$ ή γενικά $p\omega_i \pm q\omega_j \pm \dots$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τρόπος συνοδεύεται από μία ομάδα άλλων τόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1(b). ένα τέτοιο ηχητικό φάσμα καλείται πολυφωνικό (multiphonic) και το συναντούμε κάποιες φορές στη σύγχρονη μουσική και στο παίξιμο των αρχαίων εκτελεστών self-sustained οργάνων. Ο δυνατός και βραχνός θόρυβος που παράγεται, είναι γνωστός στους φωνολόγους και ,κατασκευαστές αυλών ως “burbling” [32]. Τέτοια περίπτωση θα δούμε και στο πειραματικό μέρος της εργασίας.



Σχήμα 2.1

(a) Αγωγιμότητα εισόδου ενός ελαφρά μη αρμονικού συντονιστή, μαζί με το συχνοτικό φάσμα που παράγεται όταν αυτός διεγείρεται από διεγέρτη που παρουσιάζει απλή γραμμική αρνητική αντίσταση. (b) Πολυφωνικό φάσμα του ίδιου συντονιστή όταν διεγείρεται από διεγέρτη με ελαφρά μη γραμμικά χαρακτηριστικά. (c) Απόκριση mode-locking του ίδιου συντονιστή, όταν διεγείρεται από διεγέρτη έντονα μη γραμμικό. Παρατηρούμε τη μετατόπιση των συχνοτήτων της θεμελιώδους και των αρμονικών της. Σχήμα απ' τη βιβλιογραφική αναφορά [42].

2.3 Επίλυση με τη μέθοδο των Αργά Μεταβαλλόμενων Παραμέτρων

Η εξίσωση (2.6) του κάθε τρόπου δεν είναι απόλυτα σωστή. Στην πραγματικότητα τα μεγέθη a_i και β_i δεν είναι σταθερά, αλλά μεταβάλλονται αργά με το χρόνο [31,32,34,42]. Έτσι η μορφή των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (2.2) θα είναι:

$$x_i = a_i(t) \sin[\omega_i t + \beta_i(t)] \quad (2.7)$$

Τα a_i και β_i είναι αντιστοίχως το πλάτος και η φάση της ταλάντωσης του τρόπου i . Αν η μη αρμονικότητα δεν είναι έντονη, τότε θα μεταβάλλονται με το χρόνο με ρυθμό πολύ μικρότερο από τη γωνιακή συχνότητα ω_i [42]. Χρησιμοποιούμε λοιπόν μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, την οποία εισήγαγαν οι Bogoliubov Mitropolsky το 1961 [U] και που ονομάζεται μέθοδος των *Αργά Μεταβαλλόμενων Παραμέτρων* (Slowly Varying Parameters). Η μέθοδος αποτελεί μαθηματικό εργαλείο γενικής φύσης, αλλά πρώτος ο Fletcher το 1976 τη χρησιμοποίησε για επίλυση συστημάτων μουσικής ακουστικής.

Η παράγωγος της σχέσης (2.5) είναι:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{da_i}{dt} \sin(\omega_i t + \beta_i) + a_i \cos(\omega_i t + \beta_i) \cdot \left(\omega_i + \frac{d\beta_i}{dt} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx_i}{dt} = \frac{da_i}{dt} \sin(\omega_i t + \beta_i) + a_i \frac{d\beta_i}{dt} \cos(\omega_i t + \beta_i) + a_i \omega_i \cos(\omega_i t + \beta_i) \quad (2.8)$$

Η παράγωγος που προέκυψε, εξ' αιτίας της παραδοχής ότι τα a_i και β_i μεταβάλλονται με το χρόνο, δημιουργεί μία χασοτική κατάσταση στο σύστημά μας και μπορούμε κάλλιστα να απαιτήσουμε να έχει τη μορφή μόνο του τελευταίου όρου, όπου τα a_i και β_i παραμένουν σταθερά:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i \omega_i \cos(\omega_i t + \beta_i) \quad (2.9)$$

Έτσι, αναγκαστικά οι δύο πρώτοι όροι θα πληρούν τη συνθήκη [31]:

$$\frac{da_i}{dt} \sin(\omega_i t + \beta_i) + a_i \frac{d\beta_i}{dt} \cos(\omega_i t + \beta_i) = 0 \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας τη (2.7) και τη (2.9) στη (2.2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -a_i \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \beta_i) + \frac{da_i}{dt} \omega_i \cos(\omega_i t + \beta_i) - a_i \omega_i \frac{d\beta_i}{dt} \sin(\omega_i t + \beta_i) \\ + n_i^2 a_i \sin(\omega_i t + \beta_i) + \kappa_i [a_i \omega_i \cos(\omega_i t + \beta_i)] = \eta_i F \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (2.10) καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\frac{d\beta_i}{dt} = - \left[\frac{1}{a_i \omega_i} \eta_i F \left(\frac{dx_j}{dt} \right) + \frac{\kappa_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)}{a_i \omega_i} \right] \sin(\omega_i t + \beta_i) + \frac{n_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i} \sin^2(\omega_i t + \beta_i) \quad (2.12)$$

$$\frac{da_i}{dt} = \left[\frac{1}{\omega_i} \eta_i F \left(\frac{dx_j}{dt} \right) - \frac{\kappa_i \frac{dx_i}{dt}}{\omega_i} \right] \cos(\omega_i t + \beta_i) - \frac{a_i (n_i^2 - \omega_i^2)}{\omega_i} \sin^2(\omega_i t + \beta_i) \cos(\omega_i t + \beta_i) \quad (2.13)$$

Απαλείφοντας όσους όρους των (2.12) και (2.13) δεν μεταβάλλονται αργά σε σχέση με το ω_i , δηλαδή παίρνοντας το μέσο όρο των (2.12) και (2.13) στη διάρκεια μίας περιόδου $2\pi/\omega_i$, θα καταλήξουμε στις προσεγγιστικές (average) τιμές των παραγώγων:

$$\left\langle \frac{d\beta_i}{dt} \right\rangle = - \frac{\eta_i}{a_i \omega_i} \left\langle F \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \sin(\omega_i t + \beta_i) \right\rangle + \frac{n_i^2 - \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.14)$$

$$\left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle = \frac{\eta_i}{\omega_i} \left\langle F \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \cos(\omega_i t + \beta_i) \right\rangle - \frac{1}{2} \kappa_i a_i \quad (2.15)$$

όπου το σύμβολο $\langle \rangle$ υπονοεί ότι το μέγεθος που βρίσκεται εντός του είναι ο μέσος όρος, υπό την έννοια ότι μόνο οι συνιστώσες με συχνότητα πολύ μικρότερη του ω_i παραμένουν στο ανάπτυγμα. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.14) και (2.15), το πλάτος κάθε κανονικού τρόπου i θα μεταβάλλεται διαρκώς, όπως το ίδιο θα συμβαίνει και με τη φάση και με τη στιγμιαία (γωνιακή) συχνότητα του τρόπου, η οποία θα δίνεται από τη σχέση [31,32]:

$$\omega_i^{inst} = \omega_i + \frac{d\beta_i}{dt} \quad (2.16)$$

Mode locking

Η στιγμιαία συχνότητα ω_i^{inst} καλείται και ενεργή συχνότητα [42]. Ο ρυθμός και η έκταση της μεταβολής τόσο του πλάτους όσο και της συχνότητας, αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η μη γραμμικότητα της συνάρτησης της δύναμης $F\left(\frac{dx_j}{dt}\right)$. Έτσι, τα πλάτη των μη γραμμικά παραγόμενων συνιστωσών, που έχουν παραπλήσιες συχνότητες με τις ιδιοσυχνότητες ω_i , θα αυξάνονται [42].

Με την προϋπόθεση ότι η μη γραμμικότητα είναι έντονη, το σύστημα του συντονιστή και του διεγέρτη τείνει να περάσει από μία κατάσταση, κατά την οποία οι συχνότητες δύο τρόπων n και m , με μεγάλα πλάτη ταλάντωσης θα εμπλέκονται στιγμιαία σε μία σχέση στην οποία η μία θα ισούται με ένα μικρό ακέραιο πολλαπλάσιο της άλλης. Όταν συμβαίνει αυτό, οι φάσεις των δύο τρόπων θα «κλειδωθούν» και θα παραμείνουν σταθερές, ενώ τα πλάτη τους θα μεταβληθούν ώστε:

$$\frac{da_n}{dt} = \frac{da_m}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

Άλλοι ασθενέστεροι (χαμηλότερων πλατών) τρόποι θα παρασυρθούν από τη συμπεριφορά των ισχυρότερων δύο που αναφέρθηκαν ή θα εξαλειφθούν εντελώς, ώστε η όλη ταλάντωση να γίνει αυστηρώς αρμονική [34,42]. Δηλαδή, για όλους τους τρόπους θα ισχύει [31]:

$$\omega_i^{inst} = i\omega_1^{inst} \Rightarrow \omega_i + \frac{d\beta_i}{dt} = i\left(\omega_1 + \frac{d\beta_1}{dt}\right) \quad (2.18)$$

Αυτή η κατάσταση ισορροπίας, που συναντάται στη βιβλιογραφία ως *mode locking* (σχήμα 2.1c), είναι και η αναμενόμενη, από πειραματικές μετρήσεις, για τους αυλούς και γενικότερα για τα air-jet πνευστά, κατά τη σταθερή τους κατάσταση (steady state).

2.4 Μεταβατική κατάσταση (Transient state)

Είδαμε μέχρι τώρα τις γενικές σχέσεις που θα μας βοηθήσουν στην προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος της μεταβατικής κατάστασης των αυλών. Το επόμενο βήμα είναι να αντικατασταθεί η διεγείρουσα δύναμη με μία γνωστή συνάρτηση και να αναπτυχθούν οι εκφράσεις (2.14) και (2.15) σε εξισώσεις γνωστών μεταβλητών, ώστε να μπορούν έπειτα να ολοκληρωθούν αριθμητικά.

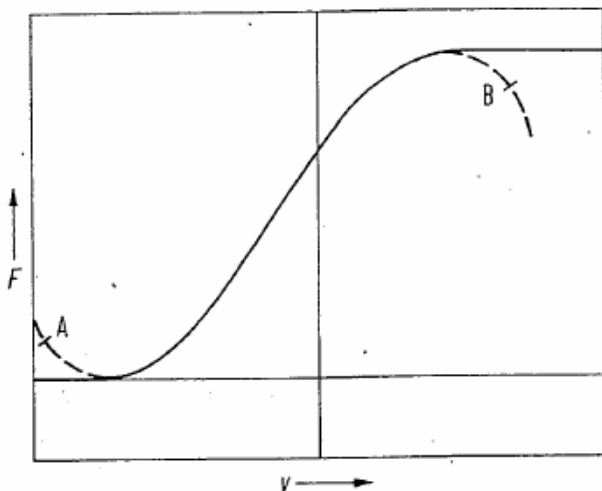
Το ακουστικό πεδίο του συντονιστή που επιδρά στην αέρια δέσμη και ενισχύει την ταλάντωσή της, όπως περιγράφηκε στο κεφ. 5 του μέρους II, μπορεί να αναπαρασταθεί και αυτό με συνιστώσες Fourier της μορφής:

$$v = \sum \frac{dx_i}{dt} \quad (2.19)$$

όπου v ταχύτητα του ακουστικού πεδίου στο στόμα του αυλού. Όταν η ακουστική ροή κατευθύνεται έξω από το στόμα, η δέσμη εκτρέπεται πάνω απ' το labium και η ακουστική πίεση εντός του στόματος ελαττώνεται. Όταν η ακουστική ροή κατευθύνεται εντός του στόματος, η δέσμη έλκεται κάτω απ' το labium και η ακουστική πίεση αυξάνεται στην περιοχή του στόματος. Αν η ταχύτητα v είναι σταθερή, η διεγείρουσα δύναμη, η οποία παράγεται από τη δέσμη, θα έχει τη μορφή του σχήματος 2.2. Η

καμπύλη έχει σιγμοειδή μορφή και εξ' αιτίας του offset της αρχικής κατεύθυνσης της δέσμης δεν θα είναι εν γένει αντισυμμετρική για $v=0$. Η διεγείρουσα δύναμη μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα δυναμοσειράς:

$$F = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + \dots \quad (2.20)$$



Σχήμα 2.2

Η καμπύλη της διεγείρουσας δύναμης, που αντικατοπτρίζει την αλληλεπίδραση δέσμης – ακουστικού πεδίου. Τα διακεκομμένα άκρα δείχνουν την κυβική προσέγγιση, η οποία είναι επαρκής μέχρι τα σημεία A και B.

Η διεγείρουσα δύναμη, ως συνάρτηση του χρόνου, μπορεί τότε να γραφεί:

$$F(t) = F \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{dx_i}{dt} \left(t - \delta_i - \frac{\Delta_i}{\omega_i} \right) \right]^m \quad (2.21)$$

Ο χρόνος δ δίνεται από την έκφραση [31]:

$$\delta = \frac{l}{u} \quad (2.22)$$

όπου l η απόσταση flue σχισμής – labium και u η ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών στη δέσμη, η οποία κανονικά εξαρτάται από τη συχνότητα. Ωστόσο, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5, του μέρους II, μπορούμε να απλοποιήσουμε τα πράγματα δεχόμενοι ότι αποτελεί κλάσμα της ταχύτητας της δέσμης, χωρίς εξάρτηση από τη συχνότητα. Υπάρχει διαφορά στις τιμές του κλάσματος α που προτείνονται κατά καιρούς [18,32,35,82,83,84]. Ο Fletcher στη δημοσίευσή του για τα μεταβατικά φαινόμενα [31], χρησιμοποιεί την τιμή $\alpha = 0,2$ και $0,4$, αντί για την πιο κοινά αποδεκτή $\alpha = 0,6$ [18,82]. Μπορούμε εν πάση περιπτώσει να γράψουμε:

$$u = \alpha U_j \quad (2.23)$$

Όπου U_j η ταχύτητα της δέσμης. Με χρήση της εξίσωσης Bernoulli έχουμε:

$$U_j = \sqrt{\frac{2p_f}{\rho}} \quad (2.24)$$

Ωστε με συνδυασμό των (2.22), (2.23) και (2.24) καταλήγουμε για το χρόνο δ :

όπου οι σταθερές c_m είναι συναρτήσεις της πίεσης πνοής (blowing pressure) p_f . Στο ανάπτυγμα είναι απαραίτητο να περιλαμβάνονται τουλάχιστον οι όροι 3^{ης} τάξης, ώστε η δύναμη να προσεγγίζει το δυνατότερο την μορφή της καμπύλης του σχήματος 2.2. Όταν το ακουστικό πεδίο ταλαντώνεται, η ταχύτητα v μεταβάλλεται και αυτή είναι η περίπτωση που μας ενδιαφέρει. Όπως αναλύθηκε στο κεφ. 5, του μέρους II, το ακουστικό πεδίο (άρα και η ακουστική ταχύτητα) δρα πάνω στη δέσμη, ακριβώς μετά τη flue σχισμή. Ο χρόνος που χρειάζεται μία διαταραχή πάνω στη δέσμη για να φτάσει από τη σχισμή στο labium είναι δ . Η απόκριση ακουστικής πίεσης κατά συνέπεια παράγεται μετά από χρόνο δ . Βέβαια ο χρόνος αυτός στην πραγματικότητα εξαρτάται από τη συχνότητα και θα πρέπει να υπάρχει μία επιπλέον διαφορά φάσης A , κατά την αλληλεπίδραση δέσμης – ακουστικού πεδίου. Η πραγματική γωνιακή συχνότητα του τρόπου i είναι ω_i και η ιδιοσυχνότητά του n_i . Η

$$\delta = \frac{l}{\alpha U_j} = \alpha^{-1} l \rho^{1/2} 2^{-1/2} p_f^{-1/2} \quad (2.25)$$

Η διαφορά φάσης στους μετέπειτα υπολογισμούς θα θεωρηθεί ίδια για όλους τους τρόπους, δεχόμενοι ότι ούτε και αυτή εξαρτάται από τη συχνότητα [28]:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \pi \quad (2.26)$$

Μένει τώρα να υπολογίσουμε τους συντελεστές c_m για να ορίσουμε πλήρως τη διεγείρουσα δύναμη. Ο σταθερός όρος c_0 δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς και δεν είναι απαραίτητο να τον γνωρίζουμε. Οι όροι c_1 , c_2 , c_3 δίνονται από τις σχέσεις [28]:

$$c_1 = Cq \quad (2.27)$$

$$c_2 = -2Cq^2 W^{-2} y_0 \quad (2.28)$$

$$c_3 = -\frac{2}{3} Cq^3 W^{-2} (1 - 4y_0^2 W^{-2}) \quad (2.29)$$

όπου:

$$C = 2p_f H S_p^{-1} \exp[-2y_0^2 W^{-2}] \quad (2.30)$$

όπου H το πλάτος του στόματος.

* Το μέγεθος q μετρά την ευαισθησία της δέσμης στην ακουστική διαταραχή και δίνεται από τη σχέση [28]:

$$q = \frac{\gamma\theta}{\omega_1 W} \quad (2.31)$$

όπου γ είναι μία θεμελιώδης παράμετρος που εκφράζει την ισχύ της αλληλεπίδρασης μεταξύ της δέσμης και του ακουστικού πεδίου και εξαρτάται από ποσότητες όπως ο αριθμός Reynolds [28,31]. Ο Fletcher μεταβάλλει πολύ την επιλογή του ανάμεσα στις δύο του δημοσιεύσεις, [28] και [31]. Στην προγενέστερη χρησιμοποιεί την τιμή 0,4, ενώ στη μεταγενέστερη [31] την τιμή 100.

* Το θ στη σχέση (2.31) είναι η φάση των διαταραχών στη δέσμη που διαδίδονται με ταχύτητα u και διανύουν απόσταση l . Δίνεται από την ακόλουθη έκφραση [27] και πρέπει να έχει την τιμή π , για κάθε γωνιακή συχνότητα:

$$\theta = \frac{l\omega}{u} \quad (2.32)$$

Με συνδυασμό των (2.31) και (2.32) παίρνουμε:

$$q = \frac{\gamma l}{u W} \quad (2.33)$$

* Το W είναι το πάχος της συμμετρικής δέσμης και μισό του πάχους h της flue σχισμής. Δηλαδή:

$$W = \frac{h}{2} \quad (2.34)$$

* Τέλος, το y_0 είναι κατά τα γνωστά και από τη θεωρία το σημείο offset, δηλαδή το πόσο μη συμμετρικά θα συναντήσει η δέσμη το labium (κεφ. 5, μέρος II). Όταν το labium βρίσκεται ακριβώς στη μέση του bell-shaped προφίλ της δέσμης, τότε $y_0 = 0$ και όπως είδαμε ενεργοποιούνται μόνον οι περιττές αρμονικές.

Με χρήση τώρα των (2.23) και (2.24), απαλείφουμε από την παράμετρο q την ταχύτητα διαταραχών u .

$$q = \alpha^{-1} 2^{-1/2} \rho^{1/2} p_f^{-1/2} \gamma l W^{-1} \Rightarrow q = \gamma W^{-1} \delta \quad (2.35)$$

Από τις σχέσεις (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) και (2.35) υπολογίζουμε εύκολα τους συντελεστές της δύναμης, όταν είναι δοσμένη η μεταβολή της πίεσης πνοής p_f . Η όλη συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος δέσμης - ακουστικού σωλήνα έχει πλήρως τώρα οριστεί από το σύνολο των διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \kappa_i \frac{dx_i}{dt} + n_i^2 x_i = \eta_i F(t) \quad (2.36)$$

όπου πλέον η $F(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση.

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση της δύναμης στις σχέσεις (2.12) και (2.13) μπορούμε να πάρουμε τα αναπτύγματα των φάσεων και των πλατών για τους πρώτους τρεις τρόπους ενός αυλού. Τα αναπτύγματα μπορούν να γραφούν και για σύζευξη περισσότερων τρόπων, αλλά η άλγεβρα καθίσταται πιο σύνθετη. Ο Fletcher εκτέλεσε υπολογισμούς με τρεις τρόπους συντονισμού [31].

Για την εφαρμογή της έκφρασης (2.19) αντικαθιστούμε στις εκφράσεις των παραγώγων (2.7) το χρόνο με την παράσταση $t - \delta_i - \frac{\Delta_i}{\omega_i}$. Πολύ χρήσιμες είναι οι παρακάτω σχέσεις απ' την τριγωνομετρία [NN], με τις οποίες «σπάμε» τα γινόμενα που προκύπτουν σε όρους αθροίσματος.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

Είναι επίσης επιτακτική η χρήση των ακόλουθων γνωστών αλγεβρικών ταυτοτήτων τριών όρων, στην περίπτωση με τους τρεις τρόπους συντονισμού:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc$$

Η τετραγωνική και η κυβική ταυτότητα προκύπτουν αντίστοιχα για τιμές του εκθέτη m 2 και 3 στον τύπο της δύναμης (2.21).

Από τους όρους που προκύπτουν στα αναπτύγματα των (2.14) και (2.15) κρατούμε μόνον εκείνους που μεταβάλλονται αργά στη διάρκεια μίας περιόδου. Δηλαδή από τους συνδυασμούς $(\pm\omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l \dots)t$ επιλέγουμε μόνο αυτούς για τους οποίους ισχύει $\pm\omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l \dots \approx 0$. Κατόπιν αυτών, λαμβάνουμε τους καταληκτικούς τύπους [31]:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\beta_1}{dt} \right\rangle &= -\frac{\eta_1}{2a_1\omega_1} \{c_1 a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 \delta_1 + \Delta_1) \\ &+ c_2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \sin[(2\omega_1 - \omega_2)t + \omega_2 \delta_2 - \omega_1 \delta_1 + 2\beta_1 - \beta_2 + \Delta_2 - \Delta_1] \\ &+ c_2 a_2 a_3 \omega_2 \omega_3 \sin[(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t + \omega_3 \delta_3 - \omega_2 \delta_2 + \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \Delta_2 + \Delta_3] \\ &+ \frac{3}{4} c_3 a_1^2 a_3 \omega_1^2 \omega_3 \sin[(3\omega_1 - \omega_3)t + \omega_3 \delta_3 - 2\omega_1 \delta_1 + 3\beta_1 - \beta_3 - 2\Delta_1 + \Delta_3] \\ &+ \frac{3}{4} c_3 a_2^2 a_3 \omega_2^2 \omega_3 \sin[(\omega_1 + \omega_3 - 2\omega_2)t - \omega_3 \delta_3 + 2\omega_2 \delta_2 + \beta_1 + \beta_3 - 2\beta_2 - \Delta_3 + 2\Delta_2] \\ &+ \frac{3}{4} c_3 (a_1^3 \omega_1^3 + 2a_1 a_2^2 \omega_1 \omega_2^2 + 2a_1 a_3^2 \omega_1 \omega_3^2) \sin(\omega_1 \delta_1 + \Delta_1)\} + \frac{n_1^2 - \omega_1^2}{2\omega_1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{da_1}{dt} \right\rangle &= \frac{\eta_1}{2\omega_1} \{c_1 a_1 \omega_1 \cos(\omega_1 \delta_1 + \Delta_1) \\
 &+ c_2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t + \omega_2 \delta_2 - \omega_1 \delta_1 + 2\beta_1 - \beta_2 + \Delta_2 - \Delta_1] \\
 &+ c_2 a_2 a_3 \omega_2 \omega_3 \cos[(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t + \omega_3 \delta_3 - \omega_2 \delta_2 + \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \Delta_2 + \Delta_3] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 a_1^2 a_3 \omega_1^2 \omega_3 \cos[(3\omega_1 - \omega_3)t + \omega_3 \delta_3 - 2\omega_1 \delta_1 + 3\beta_1 - \beta_3 - 2\Delta_1 + \Delta_3] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 a_2^2 a_3 \omega_2^2 \omega_3 \cos[(\omega_1 + \omega_3 - 2\omega_2)t - \omega_3 \delta_3 + 2\omega_2 \delta_2 + \beta_1 + \beta_3 - 2\beta_2 - \Delta_3 + 2\Delta_2] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 (a_1^3 \omega_1^3 + 2a_1 a_2^2 \omega_1 \omega_2^2 + 2a_1 a_3^2 \omega_1 \omega_3^2) \cos(\omega_1 \delta_1 + \Delta_1) \} - \frac{1}{2} \kappa_1 a_1
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d\beta_2}{dt} \right\rangle &= -\frac{\eta_2}{2a_2 \omega_2} \{c_1 a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 \delta_2 + \Delta_2) \\
 &+ \frac{1}{2} c_2 a_1^2 \omega_1^2 \sin[(\omega_2 - 2\omega_1)t + 2\omega_1 \delta_1 + \beta_2 - 2\beta_1 + \Delta_1] \\
 &+ c_2 a_1 a_3 \omega_1 \omega_3 \sin[(\omega_2 + \omega_1 - \omega_3)t - \omega_1 \delta_1 + \omega_3 \delta_3 + \beta_2 + \beta_1 - \beta_3 - \Delta_1 + \Delta_3] \\
 &+ \frac{3}{2} c_3 a_1 a_2 a_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \sin[(2\omega_1 - \omega_1 - \omega_3)t - \omega_2 \delta_2 + \omega_1 \delta_1 + \omega_3 \delta_3 \\
 &+ 2\beta_2 - \beta_1 - \beta_3 - \Delta_2 + \Delta_1 + \Delta_3] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 (a_2^3 \omega_2^3 + 2a_2 a_1^2 \omega_2 \omega_1^2 + 2a_2 a_3^2 \omega_2 \omega_3^2) \sin(\omega_2 \delta_2 + \Delta_2) \} + \frac{n_2^2 - \omega_2^2}{2\omega_2}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{da_2}{dt} \right\rangle &= \frac{\eta_2}{2\omega_2} \{c_1 a_2 \omega_2 \cos(\omega_2 \delta_2 + \Delta_2) \\
 &+ \frac{1}{2} c_2 a_1^2 \omega_1^2 \cos[(\omega_2 - 2\omega_1)t + 2\omega_1 \delta_1 + \beta_2 - 2\beta_1 + \Delta_1] \\
 &+ c_2 a_1 a_3 \omega_1 \omega_3 \cos[(\omega_2 + \omega_1 - \omega_3)t - \omega_1 \delta_1 + \omega_3 \delta_3 + \beta_2 + \beta_1 - \beta_3 - \Delta_1 + \Delta_3] \\
 &+ \frac{3}{2} c_3 a_1 a_2 a_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \cos[(2\omega_1 - \omega_1 - \omega_3)t - \omega_2 \delta_2 + \omega_1 \delta_1 + \omega_3 \delta_3 \\
 &+ 2\beta_2 - \beta_1 - \beta_3 - \Delta_2 + \Delta_1 + \Delta_3] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 (a_2^3 \omega_2^3 + 2a_2 a_1^2 \omega_2 \omega_1^2 + 2a_2 a_3^2 \omega_2 \omega_3^2) \cos(\omega_2 \delta_2 + \Delta_2) \} - \frac{1}{2} \kappa_2 a_2
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d\beta_3}{dt} \right\rangle &= -\frac{\eta_3}{2a_3 \omega_3} \{c_1 a_3 \omega_3 \sin(\omega_3 \delta_3 + \Delta_3) \\
 &+ c_2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \sin[(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)t + \omega_1 \delta_1 + \omega_2 \delta_2 + \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 + \Delta_1 + \Delta_2] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 a_2^2 a_1 \omega_2^2 \omega_1 \sin[(\omega_3 - 2\omega_2 + \omega_1)t + 2\omega_2 \delta_2 - \omega_1 \delta_1 + \beta_3 - 2\beta_2 + \beta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_1] \\
 &+ \frac{3}{4} c_3 (a_3^3 \omega_3^3 + 2a_3 a_1^2 \omega_3 \omega_1^2 + 2a_3 a_2^2 \omega_3 \omega_2^2) \sin(\omega_3 \delta_3 + \Delta_3) \} + \frac{n_3^2 - \omega_3^2}{2\omega_3}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{da_3}{dt} \right\rangle &= \frac{\eta_3}{2\omega_3} \{ c_1 a_3 \omega_3 \cos(\omega_3 \delta_3 + \Delta_3) \\
&+ c_2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \cos[(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)t + \omega_1 \delta_1 + \omega_2 \delta_2 + \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 + \Delta_1 + \Delta_2] \\
&+ \frac{3}{4} c_3 a_2^2 a_1 \omega_2^2 \omega_1 \cos[(\omega_3 - 2\omega_2 + \omega_1)t + 2\omega_2 \delta_2 - \omega_1 \delta_1 + \beta_3 - 2\beta_2 + \beta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_1] \\
&+ \frac{3}{4} c_3 (a_3^3 \omega_3^3 + 2a_3 a_1^2 \omega_3 \omega_1^2 + 2a_3 a_2^2 \omega_3 \omega_2^2) \cos(\omega_3 \delta_3 + \Delta_3) \} - \frac{1}{2} \kappa_3 a_3
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Είδαμε ότι ένας τρόπος i βρίσκεται σε κατάσταση σταθερού, μη μηδενικού πλάτους όταν $\left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle = 0$ για κάποιο μη μηδενικό πλάτος a_i , ενώ $\left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle > 0$ καθώς $a_i \rightarrow 0$. Αυτό για τον i τρόπο συνεπάγεται ότι:

$$\eta_i c_i \cos(\omega_i \delta_i + \Delta_i) > \kappa_i \tag{2.43}$$

Το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης αποτελεί τη σταθερά ανασύζευξης φάσης για τον i τρόπο. Η σταθερά αυτή θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη του συντελεστή απόσβεσης του τρόπου, ώστε να φτάσουμε στην κατάσταση σταθερού πλάτους. Το πλάτος στην κατάσταση ισορροπίας για το οποίο συμβαίνει $\left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle = 0$ εξαρτάται από τους μη γραμμικούς όρους της εξίσωσης (2.15). Ακόμα και αν η συνθήκη (2.43) δεν ικανοποιείται, θα υπάρχει γενικά κάποια συνιστώσα με συχνότητα κοντά στην ιδιοσυχνότητα n_i , προερχόμενη από την αλληλεπίδραση μεταξύ άλλων τρόπων, των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν περίπου κατά n_i [31].

Υπάρχουν ωστόσο και «μη μουσικοί» τρόποι στο φάσμα του αυλού οι οποίοι τείνουν επίσης σε μία σταθερή κατάσταση για συγκεκριμένα εύροι τιμών των σταθερών. Αυτοί οι τρόποι έχουν παρατηρηθεί πειραματικά σε πολλούς οργανίστους αυλούς, συνήθως για πιέσεις λίγο πριν τη μετάβαση στη δεύτερη κατάσταση συντονισμού (overblowing) [31].

Μία περίπτωση που συναντάται συχνά στην πράξη είναι όταν η συνθήκη (2.43) ικανοποιείται για τους τρόπους 2 και 3 αλλά δεν ικανοποιείται ή ικανοποιείται πολύ ασθενώς για τον θεμελιώδη τρόπο 1 [31]. Στην περίπτωση αυτή τα πλάτη a_2 και a_3 είναι πολύ μεγαλύτερα του a_1 . Παρατηρώντας τώρα την εξίσωση (2.37) και τις αντίστοιχες της (2.39) και (2.41) βλέπουμε ότι οι τρόποι 2 και 3 δεν μπορούν να συζευχθούν, παρά μόνο μέσω μικρών, υψηλών όρων, όπως τον $c_4 a_2^2 a_3^2 \sin[(3\omega_2 - 2\omega_3)t]$ ή τον $c_2 a_1 a_3 \sin[(\omega_3 - \omega_2 - \omega_1)t]$, που έχουν μικρή τιμή επειδή το a_1 είναι μικρό. Έτσι, οι τρόποι 2 και 3 παραμένουν οριακά μη συζευγμένοι και μπορούν να προσαρμοστούν ώστε $\omega_2 \approx n_2$ και $\omega_3 \approx n_3$ [31]. Τότε, δεν θα σχετίζονται αρμονικά. Οι όροι που διασταυρώνονται θα παράγουν μία συνιστώσα με γωνιακή συχνότητα ω_1 , κοντά στην ιδιοσυχνότητα n_1 , η οποία θα ενισχύεται από όρους που μεταβάλλονται σύμφωνα με την τιμή $\sin[(\omega_3 - \omega_2 - \omega_1)t]$ και που εμφανίζονται ως ενοχλητικοί, για το αυτί, παλμοί (beats). Η συμπεριφορά αυτή έχει επαληθευτεί και πειραματικά.

Η μεταβολή της πίεσης πνοής

Η μορφή της μεταβατικής κατάστασης (ατάκας) εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του αυλού και τη γεωμετρία της δέσμης. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι γνωστά στους μουσικούς των pipe organs, και ενεργοποιούνται από μηχανική δράση, αλλά και στους φλαουτίστες οι οποίοι με το *γλώσσιμα* (tonging) πετυχαίνουν μία κοφτή και καθαρή ατάκα [31]. Πολλές φορές σε ένα pipe organ καθώς ανοίγει η βαλβίδα του αντίστοιχου αυλού η πίεση στο πόδι αυξάνει απότομα μέσα σε χρόνο τάξης 10^{-2} s και έπειτα καθυστερεί σε μία σταθερή χαμηλότερη τιμή μέσα σε χρόνο περίπου 10^{-1} s. Άλλες πάλι φορές, η αρχική τιμή της πίεσης είναι χαμηλή και σιγά σιγά φτάνει σε μία σταθερή μέγιστη τιμή.

Ο Fletcher προτείνει, για την περιγραφή των διαφόρων μεταβολών της πίεσης που συμβαίνουν στη μεταβατική κατάσταση, να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$p(t) = p_0 + (p_1 - p_0) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (2.44)$$

όπου p_1 είναι η αρχική και p_0 η τελική τιμή της πίεσης. τ είναι ο χρόνος αποκατάστασης της τελικής τιμής. Όταν $p_1 \gg p_0$, έχουμε απότομη αρχική αύξηση και έπειτα μείωση σε σταθερή τιμή. Αυτή η περίπτωση περιγράφεται ως plosive (εκρηκτική). Όταν $p_1 \ll p_0$, τότε η αποκατάσταση της τελικής τιμής είναι αργή, ενώ όταν $p_1 = p_0$, έχουμε μία, θεωρητικά από την αρχή, σταθερή πίεση.

Αρχικές συνθήκες

Για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις (2.37) έως (2.42) πρέπει να ορίσουμε αρχικές τιμές στα πλάτη και τις φάσεις των τριών τρόπων. Με αφετηρία την εξίσωση (2.44) ο Fletcher καταλήγει [31]:

$$a_i^0 = \frac{0,5 p_1}{i n_i} \quad (2.45)$$

$$\beta_i^0 = -\frac{\pi}{2} \quad (2.46)$$

Οι γωνιακές συχνότητες που θα εισέλθουν στις εξισώσεις (2.37) έως (2.42) μπορούν να θεωρηθούν ίσες με τις ιδιοσυχνότητες:

$$\omega_i = n_i \quad (2.47)$$

Ενώ η πραγματικές στιγμιαίες συχνότητες θα δίνονται ασφαλώς από τις εκφράσεις (2.16). Αρχικά οι πραγματικές συχνότητες ω_i^{inst} μπορεί να διαφέρουν πολύ από τις ιδιοσυχνότητες n_i . Γρήγορα όμως, με την πρόοδο των υπολογισμών, τις πλησιάζουν και τελικά συζεύγονται σε αρμονική σχέση. Επίσης η τιμή των ω_i δεν έχει και μεγάλη σημασία, καθώς η παραμικρή απόκλιση, διορθώνεται γρήγορα από τις εξισώσεις (2.37) έως (2.42).

2.5 Αριθμητικοί υπολογισμοί

Μπορούμε τώρα να περάσουμε τις εξισώσεις (2.37) έως (2.42) σε έναν κώδικα Fortran ώστε να ολοκληρώσουμε αριθμητικά τις προσεγγιστικές παραγώγους, από τις οποίες θα προκύψουν τα πλάτη a_i και οι φάσεις β_i των τριών αναπτυσσόμενων τρόπων ως συνάρτηση του χρόνου, με μεταβαλλόμενο μέγεθος την πίεση στο πόδι του πνευστού.

Αρχικά αντικαθιστούμε τις οριακές συνθήκες, τις γωνιακές συχνότητες, τους συντελεστές της δύναμης και τις σταθερές απόσβεσης και σύζευξης σε όλες τις εξισώσεις υπολογίζοντας την πρώτη τιμή των παραγώγων για χρονικό βήμα Δt . Έπειτα με εφαρμογή απλής πίσω διαφοράς 1^{ης} τάξης [G], υπολογίζουμε την επόμενη τιμή των πλατών και των φάσεων. Έπειτα, με χρήση της εξίσωσης (2.16) υπολογίζουμε την ενεργό συχνότητα σε αυτό το βήμα. Οι σχέσεις είναι οι ακόλουθες:

$$a_i^{n+1} = a_i^n + \left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle^n \Delta t \quad \beta_i^{n+1} = \beta_i^n + \left\langle \frac{d\beta_i}{dt} \right\rangle^n \Delta t \quad (2.48)$$

$$\omega_i^{inst} = \omega_i^n + \left\langle \frac{d\omega_i}{dt} \right\rangle^n \quad (2.49)$$

Γνωρίζοντας τα πλάτη και τις (γωνιακές) συχνότητες, μπορούμε να χαράξουμε γραφήματα των στιγμιαίων ταχυτήτων των τρόπων, όπως αυτές προκύπτουν απ' τη σχέση (2.9):

$$vel_i = a_i \omega_i \quad (2.50)$$

Μπορούμε επίσης να χαράξουμε τη μεταβολή των ενεργών συχνοτήτων ως προς το χρόνο από τη σχέση (2.47) και να παρατηρήσουμε πότε αποκαθίσταται mode locking.

Ο κώδικας Fortran που εκτελεί τους υπολογισμούς της μεθόδου μπορεί να διατεθεί σε όποιον ενδιαφέρεται. Τα αποτελέσματα καταγράφονται σε αρχεία txt. Ένα script σε MatLab, διαβάζει τα αρχεία και σχεδιάζει τα παραπάνω διαγράμματα.

Ο κώδικας Fortran επίσης υπολογίζει το επίπεδο ηχητικής πίεσης των τρόπων σε κάθε χρονική στιγμή κατά τη σχέση της δημοσίευσης [32]:

$$SPL_i = 20 \log \frac{p_i(d)}{p_0} \quad (2.51)$$

όπου κατά τα γνωστά απ' το κεφάλαιο 5, του μέρους I, $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$, και είναι η πίεση αναφοράς στην ακουστική. Η πίεση $p_i(d)$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$p_i(d) \approx \frac{\rho \omega_i^2 a_i S_p}{4\pi d \sqrt{2}} \quad (2.52)$$

και αποτελεί την rms ακουστική πίεση του τρόπου i , που ακτινοβολείται σε απόσταση d απ' το παθητικό άκρο διατομής S_p .

Ο Fletcher στην προηγούμενη δημοσίευσή του [31] εκτέλεσε υπολογισμούς για έναν αυλό διατομής $S_p = 10 \text{ cm}^2$, πλάτους και πάχους δέσμης 3 και 0,1 cm αντίστοιχα, απόσταση σχισμής – labium ίση με 1 cm και jet offset 0,01 cm. Επίσης, για τον αυλό αυτόν μετρήθηκαν τα ακόλουθα στοιχεία:

Γωνιακές ιδιοσυχνότητες: $n_1 = 1000 \text{ rad s}^{-1}$, $n_2 = 2050 \text{ rad s}^{-1}$, $n_3 = 3100 \text{ rad s}^{-1}$.

Σταθερές απόσβεσης: $\kappa_1 = 50 \text{ s}^{-1}$, $\kappa_2 = 100 \text{ s}^{-1}$, $\kappa_3 = 150 \text{ s}^{-1}$.

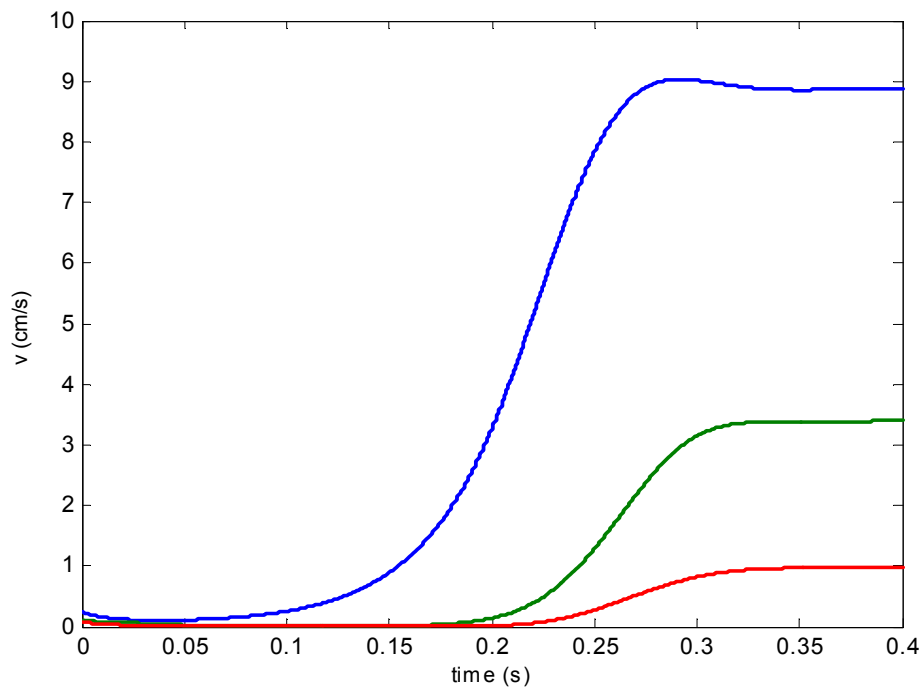
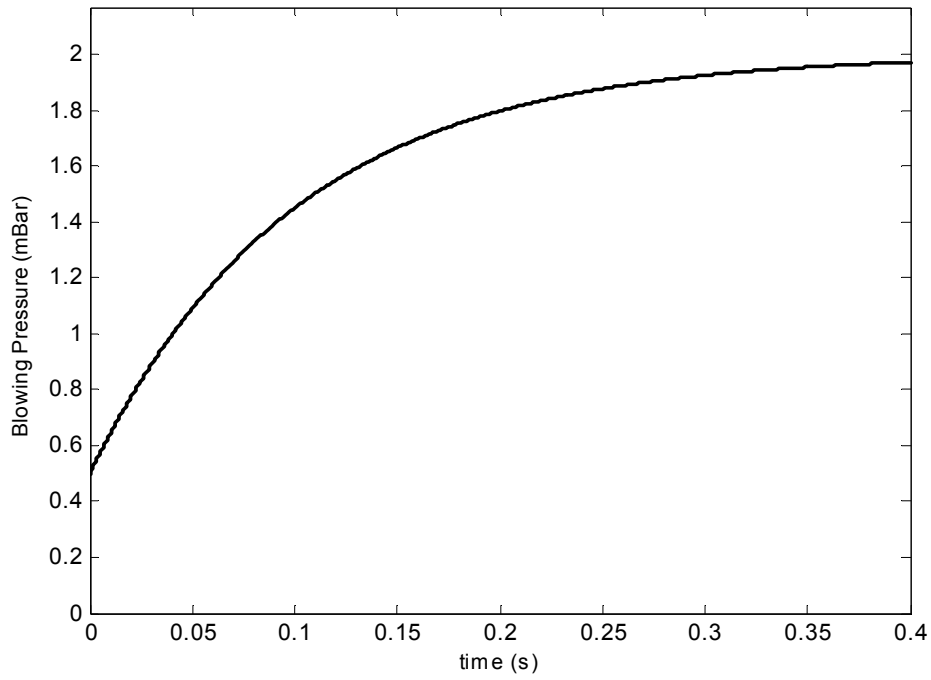
Σταθερές σύζευξης: $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 2$

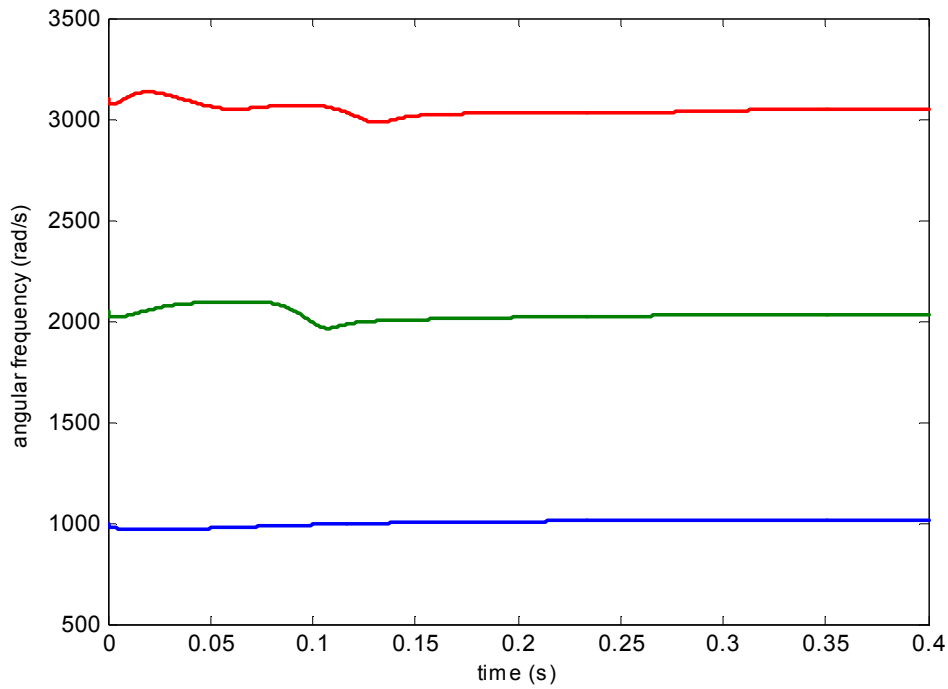
Επίσης, $\gamma = 100$ και $\alpha = 0,2$.

Υπολογισμοί έγιναν με ποικίλες μεταβολές της πίεσης πνοής από την κατάσταση ηρεμίας, μέχρι τη σταθεροποίηση του οργάνου. Ο χρόνος αποκατάστασης της πίεσης ήταν πάντα ίσος με 0,1 sec. Με χρήση των δικών μας προγραμμάτων ανασχεδιάζουμε μερικά από τα διαγράμματα του Fletcher, για να ελέγξουμε την ορθότητα των κωδίκων. Στα διαγράμματα που ακολουθούν φαίνεται η αρχική και η τελική τιμή της πίεσης, οι ταχύτητες των τρόπων, όπως και οι συχνότητές τους στα πρώτα 0,4 sec της ενεργοποίησης του αυλού. Σε όλα τα διαγράμματα με μπλε χρώμα είναι ο πρώτος τρόπος, με πράσινο ο δεύτερος και με κόκκινο ο τρίτος τρόπος συντονισμού.

Στις σελίδες 22 και 23 παρουσιάζεται συνοπτικά όλη η ακολουθία των καταστάσεων συντονισμού για τον συγκεκριμένο αυλό, ως προς τις ταχύτητες των τρόπων. Η συμπεριφορά είναι αντιπροσωπευτική.

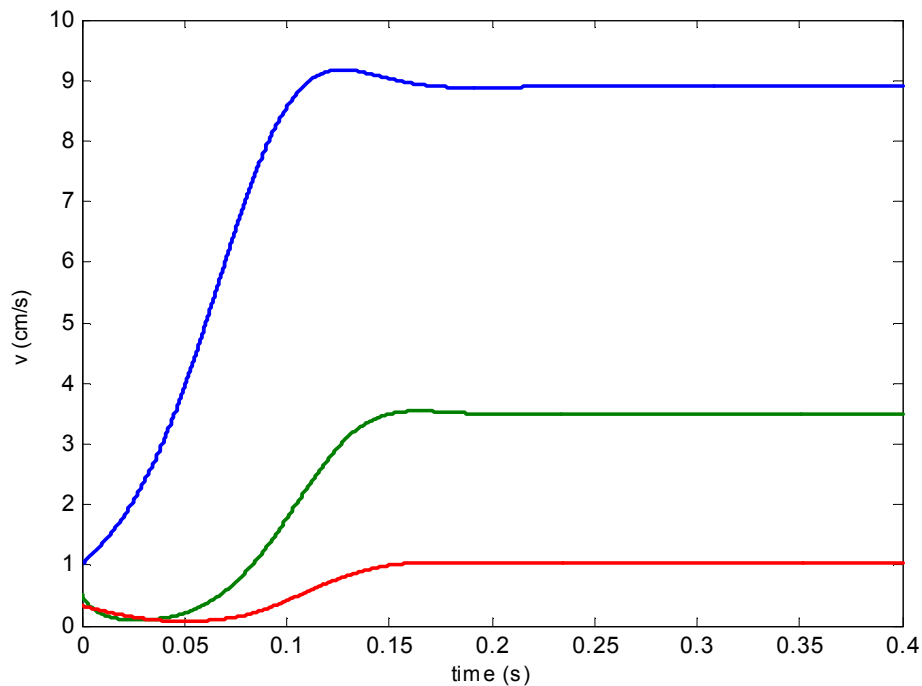
1) Αργή αύξηση της πίεσης από 0,5 σε 2 mBar

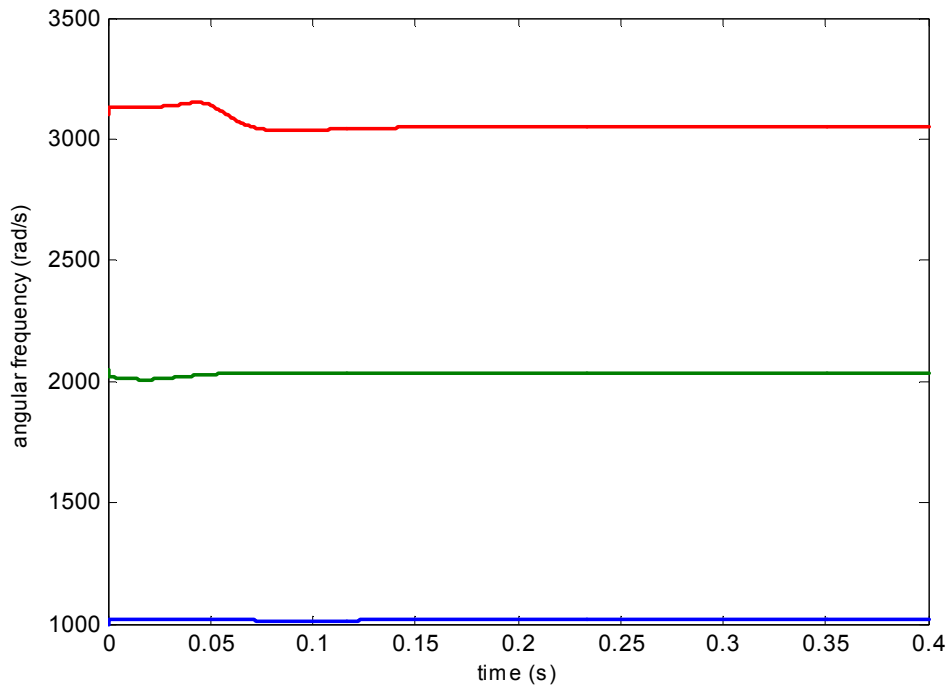




Στο δεύτερο διάγραμμα, είναι εμφανής η υπερίσχυση, απ' την αρχή, του πρώτου τρόπου, με ακόλουθο σε ένταση τον δεύτερο και έπειτα τον τρίτο τρόπο. Η σταθερή κατάσταση συμβαίνει στα 0,35 sec. Παρατηρώντας το διάγραμμα συχνοτήτων, βλέπουμε ξεκάθαρα το φαινόμενο mode locking, που εκδηλώνεται πριν ακόμα και από τη σταθερή κατάσταση (λιγότερο από 0,33 sec).

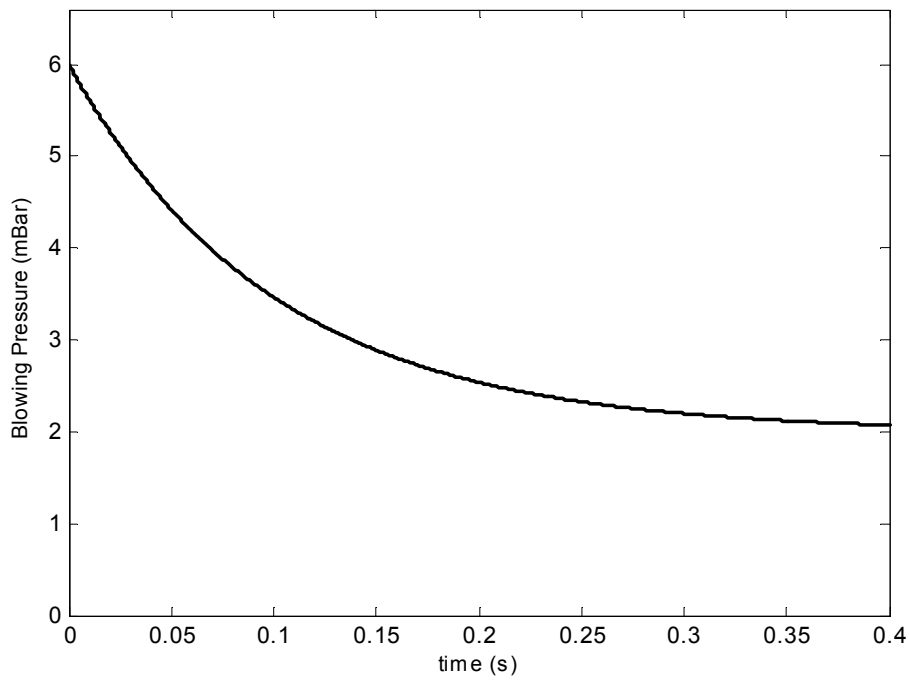
2) Σταθερή πίεση 2 mBar (Το διάγραμμα της πίεσης είναι προφανές)

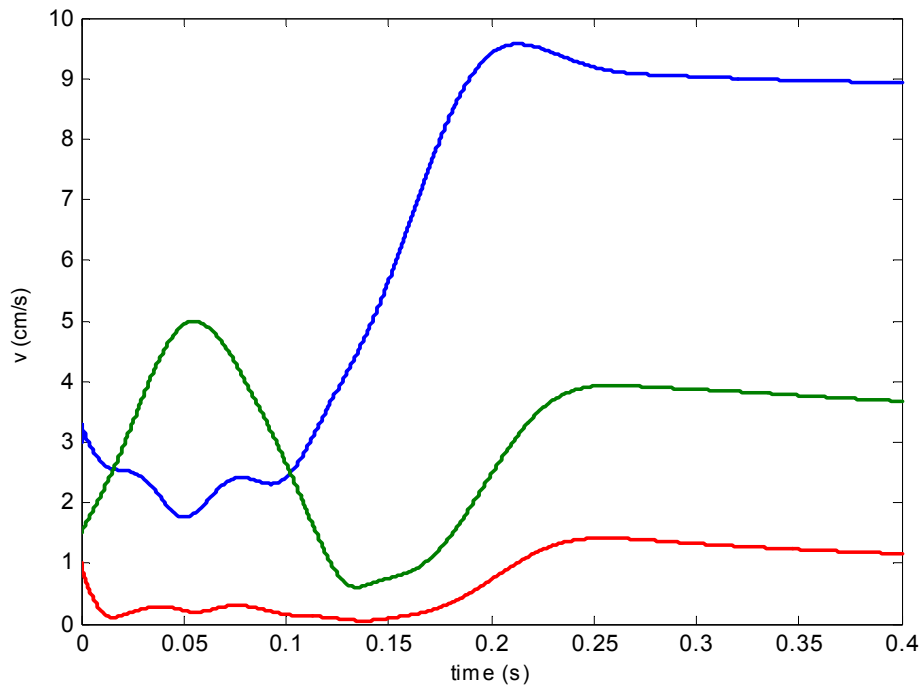




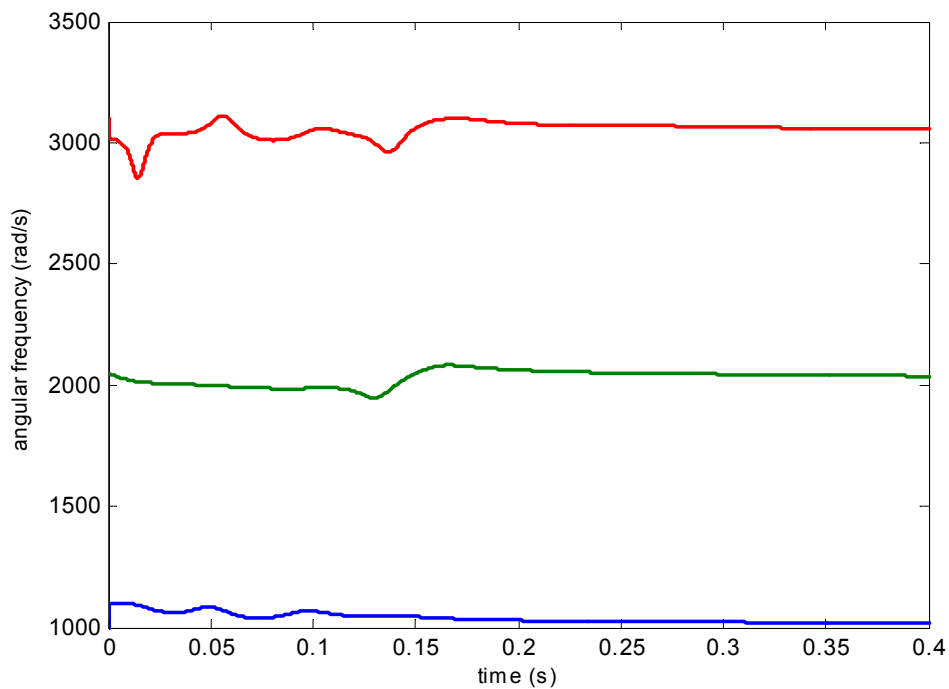
Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν και εδώ.

3) Πίεση αρχικά 6 και έπειτα 2 mBar

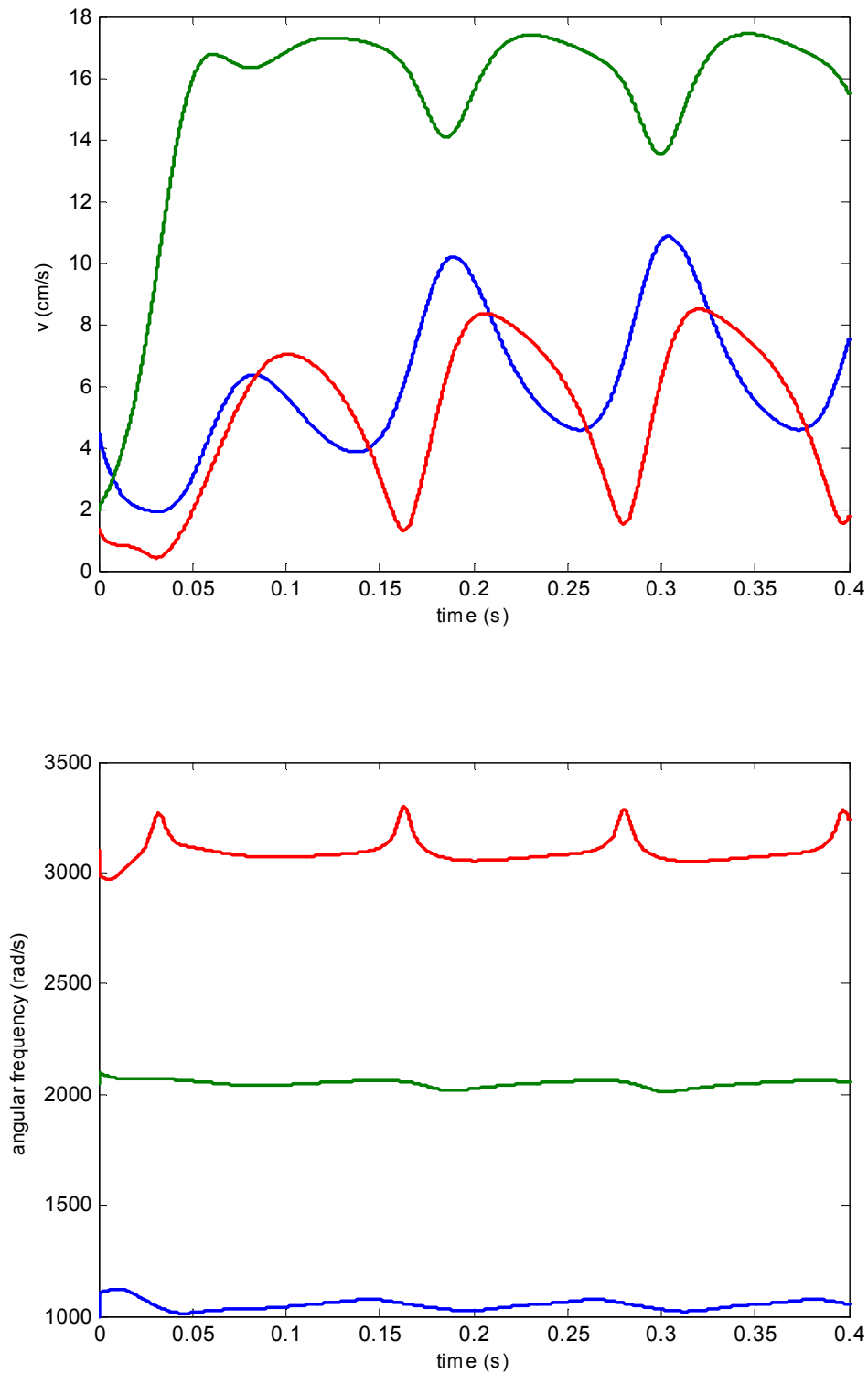




Είπαμε ότι αυτή η περίπτωση είναι πολύ συνηθισμένη στους αυλούς ενός pipe organ, όταν ανοίγει απότομα η βαλβίδα τους. Ο δεύτερος τρόπος υπερισχύει στα πρώτα εκατοστά του δευτερολέπτου και αυτός είναι λόγος για τον χαρακτηριστικό ήχο «chiff» των αυλών ενός pipe organ [30].

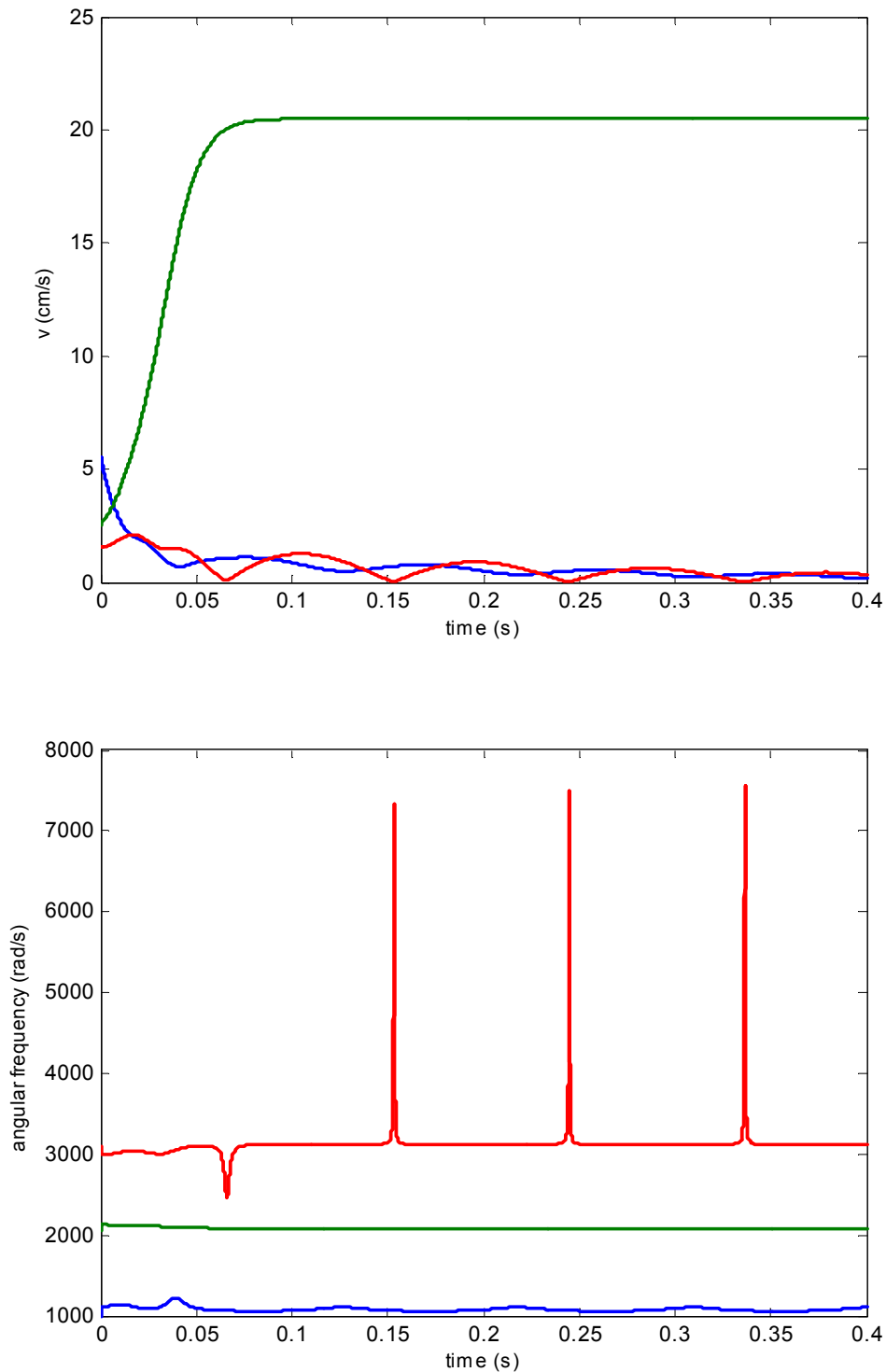


4) Σταθερή πίεση 8 mBar



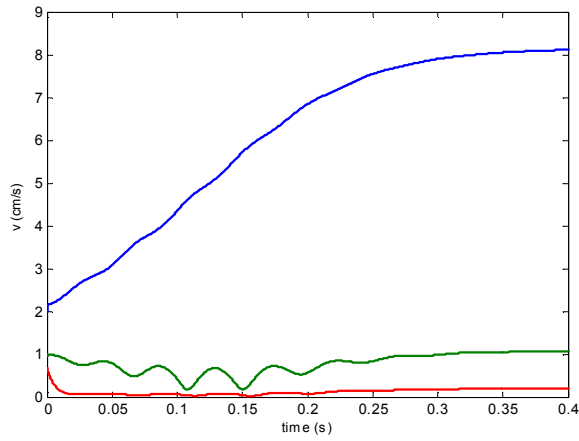
Στην πίεση αυτή εκτελείται η μετάβαση από την πρώτη κατάσταση συντονισμού στη δεύτερη και όλοι οι τρόποι είναι εξαιρετικά ασταθείς, τόσο ως προς τις ταχύτητές τους, όσο και ως προς τις συχνότητες.

5) Σταθερή πίεση 10 mBar

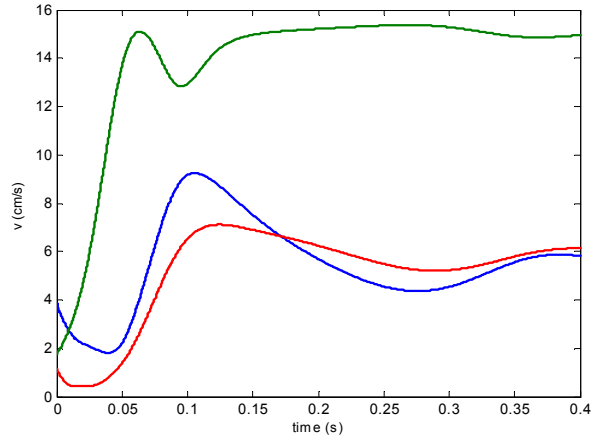


Η περίπτωση αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα, καθώς έχουμε κατάσταση overblowing. Φαίνεται καθαρά η κυριαρχία του δεύτερου τρόπου προς τους υπόλοιπους, οι οποίοι μάλιστα εξασθενούν σημαντικά. Όσον αφορά τις συχνότητες, παρατηρούμε μεγάλη αστάθεια στον τρίτο τρόπο (αχμηρές κορυφές). Όταν τελικά αποκαθίσταται overblowing οι συχνότητες έχουν μετατοπιστεί ελαφρά πιο πάνω σε σχέση με τη θεμελιώδη κατάσταση.

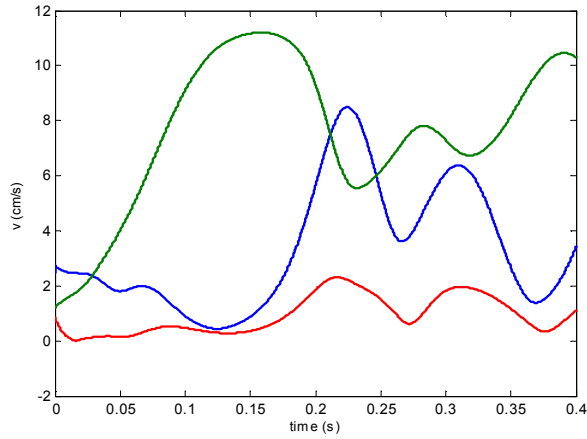
400 Pascal



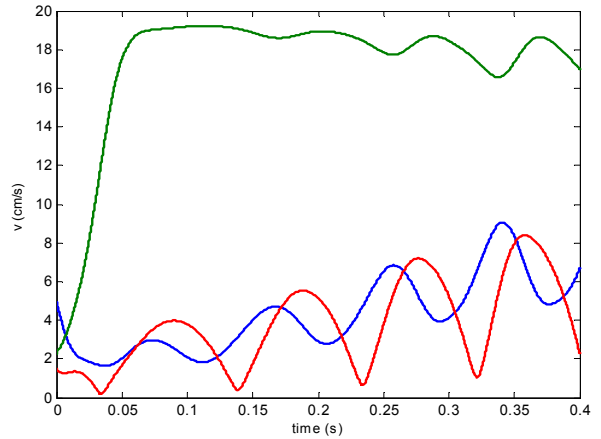
700 Pascal



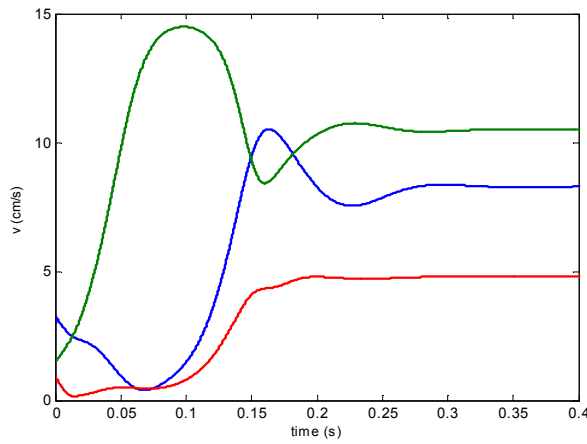
500 Pascal



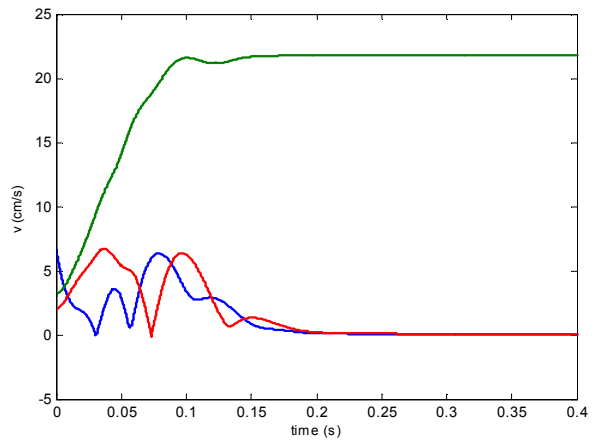
900 Pascal



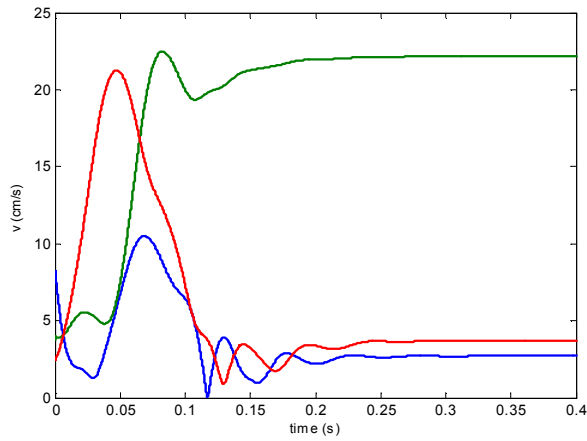
600 Pascal



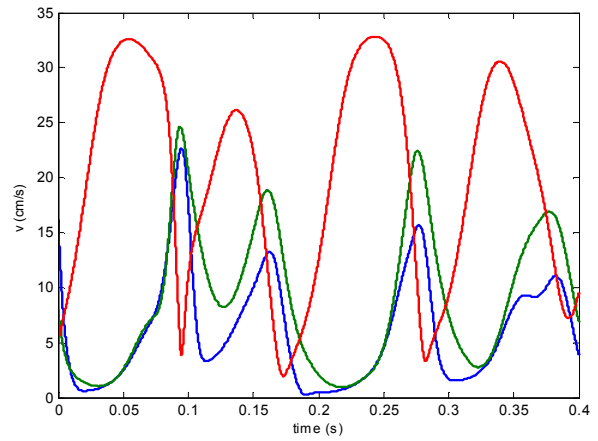
1200 Pascal



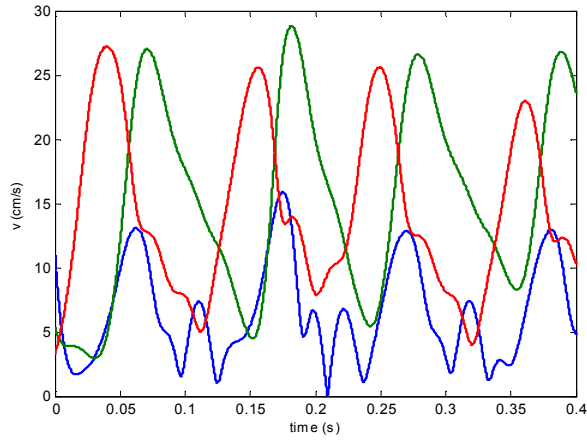
1500 Pascal



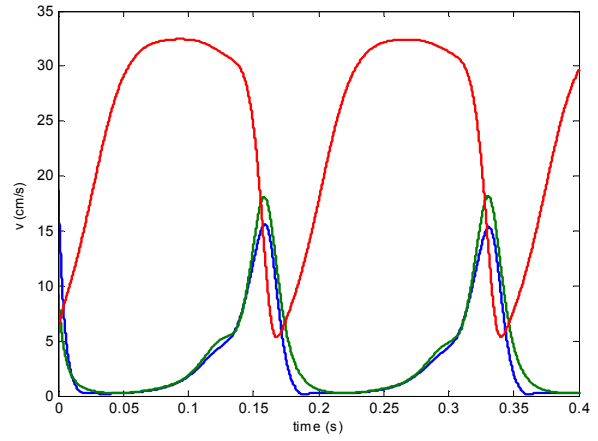
3000 Pascal



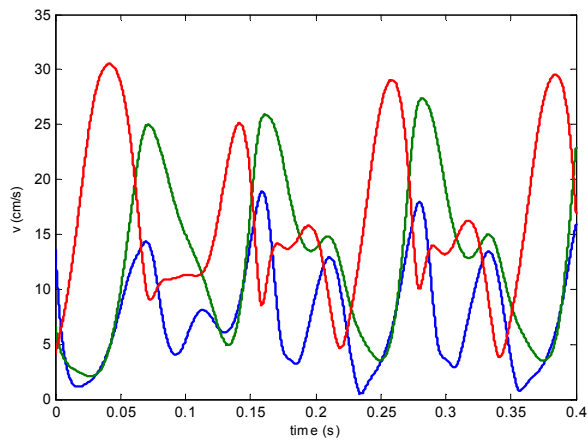
2000 Pascal



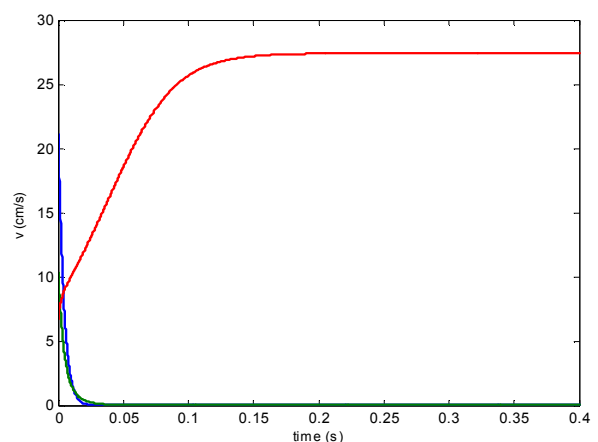
3500 Pascal



2500 Pascal



4000 Pascal



Με την αναπτυχθείσα μέθοδο μπορεί κανείς να μελετήσει όχι μόνο την αρχική μεταβατική κατάσταση (από τη σιωπή στην ήχηση), αλλά και άλλα μεταβατικά φαινόμενα, όπως το vibrato, το οποίο το συναντούμε τόσο σε αυλούς pipe organ, όσο και συχνότερα στο παίξιμο του φλάουτου, κατά το οποίο ο μουσικός μεταβάλλει ρυθμικά την πίεση πνοής. Η ουσία εδώ είναι ότι τα προηγούμενα διαγράμματα συμφωνούν με αυτά του Fletcher [30] και η εφαρμογή των σχέσεων ήταν σωστή.

2.6 Σταθερή κατάσταση (Steady State) – Βελτιωμένο μοντέλο

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα διαγράμματα, μπορεί κάποιος εύκολα να αποφανθεί όχι μόνο για τα μεταβατικά φαινόμενα, αλλά και για τη σταθερή κατάσταση τόσο των πλατών, όσο και των συχνοτήτων των τρόπων, μετά την παρέλευση του απαραίτητου χρόνου. Στην επόμενη δημοσίευσή του ο Fletcher [32], εφήρμοσε την ίδια μεθοδολογία με μία τροποποιημένη μορφή διεγείρουσας δύναμης, μεγαλύτερης ακριβείας, για να επικεντρωθεί στη σταθερή κατάσταση των αυλών και τη μεταβολή του φάσματος των τριών πρώτων τρόπων ως προς την πίεση πνοής, με παραμέτρους τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά.

Στη βελτιωμένη αυτή επίλυση του προβλήματος, τα διάφορα ανεξήγητα φαινόμενα της αλληλεπίδρασης της δέσμης με το συντονιστή αντιμετωπίζονται με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων παραμέτρων, κάτι που μειώνει το επίπεδο ανακρίβειας των αποτελεσμάτων, παρόλο που απέχουν σημαντικά από την πραγματικότητα.

2.7 Εξισώσεις δέσμης

Το προφίλ της ταχύτητας της δέσμης που εκτοξεύεται από τη σχισμή μπορεί για τις ανάγκες του παρόντος μοντέλου να προσεγγισθεί με κατανομή Gauss κατά τον τύπο [32]:

$$V(y) = V \exp\left[-\frac{\pi(y-y_0)^2}{4W^2}\right] \quad (2.53)$$

Η διαφορά $y - y_0$ είναι η απόσταση από το κεντρικό επίπεδο της δέσμης (επίπεδο συμμετρίας) y_0 . Το πλάτος της δέσμης σε μία απόσταση x από τη σχισμή (flue exit), μπορεί να προσεγγισθεί από την έκφραση:

$$W = W_0 + 2x \tan \phi \quad (2.54)$$

όπου ϕ είναι η ημιγωνία εξάπλωσης (ανοίγματος) της δέσμης. Θεωρώντας ότι έχουμε αρχή διατήρησης ορμής κατά μήκος της δέσμης, βρίσκουμε για την κεντρική ταχύτητα στην απόσταση x :

$$V = V_0 \left(\frac{W_0}{W}\right)^{1/2} \quad (2.55)$$

Ο Fletcher εδώ χρησιμοποιεί το μοντέλο του P. Savić για το προφίλ ταχύτητας που είδαμε στο κεφ. 5 του μέρους II, το οποίο δίνει τη φασική ταχύτητα ως συνάρτηση της συχνότητας, του πλάτους της δέσμης σε απόσταση x και της ταχύτητας της δέσμης, σύμφωνα με τον επόμενο τύπο, υποθέτοντας ουδέτερα ευσταθή διαταραχή:

$$u = 0,55\omega^{1/3}W^{1/3}V^{2/3} \quad (2.56)$$

Η έκφραση αυτή είναι ικανοποιητικά σύμφωνη με τα πειράματα του Brown [16] για αυξανόμενες διαταραχές. Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (2.55) στην (2.56) βρίσκουμε:

$$u = 0,55\omega^{1/3}V_0^{2/3}W_0^{2/6} \quad (2.57)$$

Δηλαδή, η u παραμένει σταθερή κατά μήκος μίας δέσμης που απλώνεται. Η έκφραση του Savić θεωρείται κατάλληλη για τη μελέτη των αυλών.

Σύμφωνα τώρα με την ανάπτυξη του Savić ο παράγων αύξησης των διαταραχών που συναντήσαμε στο κεφάλαιο 5 του μέρους II μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά από την έκφραση:

$$\mu = \alpha \omega^{2/3} W^{-1/3} V^{-2/3} \quad (2.58)$$

Η σταθερά α μπορεί να πάρει την τιμή 3,15 [32], αλλά εξ' αιτίας της αβεβαιότητας που περιβάλλει αυτήν την προσέγγιση, είναι προτιμότερο να τη θεωρήσουμε ως παράμετρο στους υπολογισμούς, με μεταβαλλόμενη τιμή. Με αντικατάσταση της (2.55) στην (2.58) παίρνουμε:

$$\mu = \alpha \omega^{2/3} W_0^{-2/6} V_0^{-2/3} \quad (2.59)$$

Δηλαδή, το μ παραμένει και αυτό σταθερό κατά μήκος της δέσμης. Η δέσμη καθώς εκτοξεύεται απ' τη σχισμή και οδεύει προς το labium μετατοπίζεται με ολόένα αυξανόμενο πλάτος (κεφ. 5, μέρος II). Αν ενώσουμε τις κορυφές των πλατών της μετατόπισης της δέσμης, σε διαδοχικές θέσεις της διαδρομής σχισμής – χείλους l , θα προκύψει η περιβάλλουσα καμπύλη (envelope), που υπακούει στον εκθετικό νόμο ανάπτυξης διαταραχών $e^{\mu x}$.

Χρειάζεται τώρα μία τροποποίηση για τον εκθετικό αυτό νόμο, καθότι τόσο ο Rayleigh όσο και ο Savić, προϋπέθεσαν ότι το πλάτος της μετατόπισης της δέσμης είναι μικρό, σχετικά με το πάχος της και με το μήκος κύματος της (κυματοειδούς) διαταραχής. Όταν η πρώτη προϋπόθεση παύει να ισχύει, η νόμος ανάπτυξης τείνει σε γραμμική συμπεριφορά, παρά σε εκθετική. Όταν η δεύτερη προϋπόθεση παύει να ισχύει, ενθαρρύνεται η δημιουργία αλληλουχίας δινών. Είναι απαραίτητο λοιπόν στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν να περιλάβουμε μία μετάβαση σε γραμμική ανάπτυξη διαταραχής για αριθμητική επίλυση συγκεκριμένων περιπτώσεων. Υποθέτουμε ότι η παραγωγή δινών έχει μικρή επίδραση στη συμπεριφορά του σωλήνα, αν αυτές απαντώνται πλήρως εντός ή πλήρως εκτός του χείλους του σωλήνα. Συνεπώς η δεύτερη προϋπόθεση θεωρούμε ότι ισχύει πάντα.

Έξω ακριβώς απ' τη flue σχισμή, θεωρούμε, όπως είδαμε και σε προηγούμενες ενότητες, ένα ακουστικό πεδίο $v \cos(\omega t + \beta)$ με διεύθυνση κάθετη στη ροή της δέσμης. Το σώμα της δέσμης

μετατοπίζεται μπρος και πίσω κατά το ολοκλήρωμα της ακουστικής ταχύτητας $\frac{v}{\omega} \sin(\omega t + \beta)$, εκτός

από το άκρο της σχισμής $x=0$, στο οποίο η μετατόπιση είναι μηδενική. Στα ίδια θα οδηγούμασταν να

εφαρμόζαμε τοπικά στη δέσμη μία αρνητική μετατόπιση $y(0) = -\frac{v}{\omega} \sin(\omega t + \beta)$. Σύμφωνα με την

αντιμετώπιση του Rayleigh, αυτή η διαταραχή θα διαδιδόταν κατά μήκος της δέσμης μεγαλώνοντας εκθετικά με το χρόνο ή ισοδύναμα με το x . Καθώς η συμπεριφορά είναι συμμετρική ως προς το επίπεδο $x=0$, αν παραλείψουμε την απόκλιση της δέσμης, ο χωρικός παράγων ανάπτυξης θα πρέπει να είναι $\cosh(\mu x)$, αντί $e^{\mu x}$. Στο διάγραμμα φαίνεται πόσο μεγαλύτερη είναι η ενίσχυση για εκθετικό νόμο ανάπτυξης (πράσινο χρώμα), σε σύγκριση με τον υπερβολικό (μπλε γραμμή).

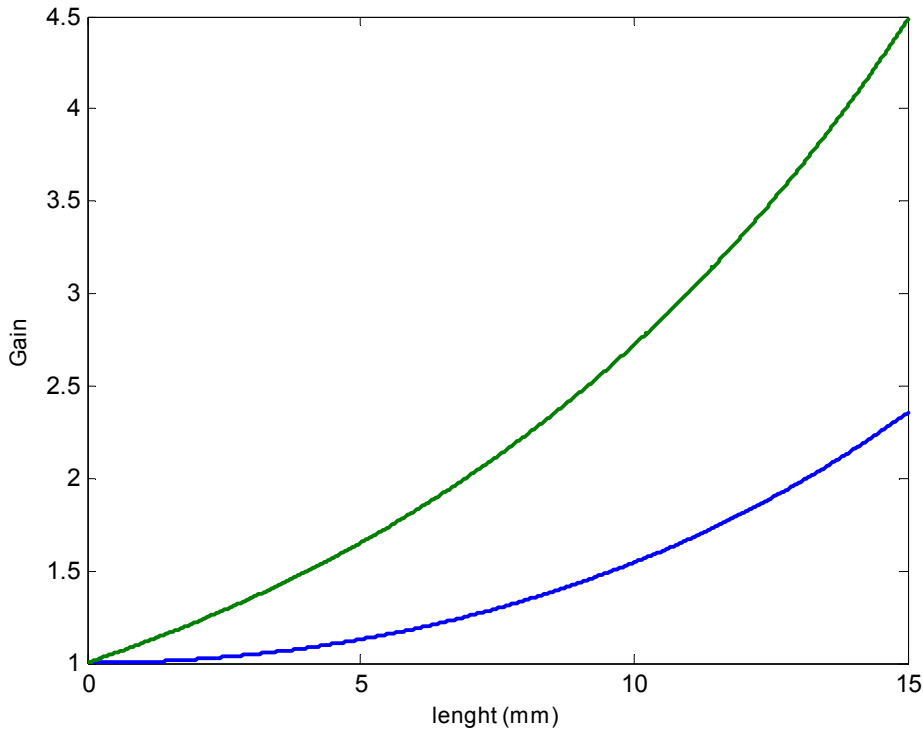
Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε σε μία σχέση παρόμοια με την (5.16) για την συνολική μετατόπιση της δέσμης στη θέση x και τη χρονική στιγμή t :

$$y(x,t) = \frac{v}{\omega} \left[\sin(\omega t + \beta) - \cosh(\mu x) \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \beta \right] \right] \quad (2.60)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης είναι η ολική μετατόπιση του σώματος της δέσμης (bodily displacement) στο πεδίο ακουστικής ροής και ο δεύτερος είναι το αποτέλεσμα της μετατόπισης έχει προκληθεί στη δέσμη, στο σημείο $x=0$, πριν από χρόνο $\frac{x}{u}$, καθώς αυτή διαδίδεται με ταχύτητα u και μεγαλώνει κατά $\cosh(\mu x)$.

Στο άνω χείλος (labium), όπου $x=l$, ο παράγοντας $\cosh(\mu, x)$ είναι γενικά πολύ μεγαλύτερος από τη μονάδα, ώστε, παραλείποντας μικρούς όρους, μπορούμε να γράψουμε την εκτροπή της δέσμης στο χείλος του σωλήνα, με τη συνεισφορά του i τρόπου, ως:

$$y_i = G_i v_i \cos \left[\omega_i (t - \delta_i) + \beta_i - \frac{3\pi}{2} \right] \quad (2.61)$$



Διάγραμμα 2.1

Εκθετική (πράσινο χρώμα) και υπερβολική (μπλε χρώμα) εκδοχή του παράγοντα αύξησης.

Όπου δ_i είναι κατά τα γνωστά ο χρόνος που κάνει ένα στοιχείο της δέσμης για να ταξιδέψει από τη σχισμή μέχρι το χείλος (transit time):

$$\delta_i = \frac{l}{u_i} \quad (2.62)$$

ω_i είναι η γωνιακή συχνότητα του τρόπου και G_i είναι η ενίσχυση (amplification) κατά μήκος της δέσμης:

$$G_i = \cosh(\mu_i l) \quad (2.63)$$

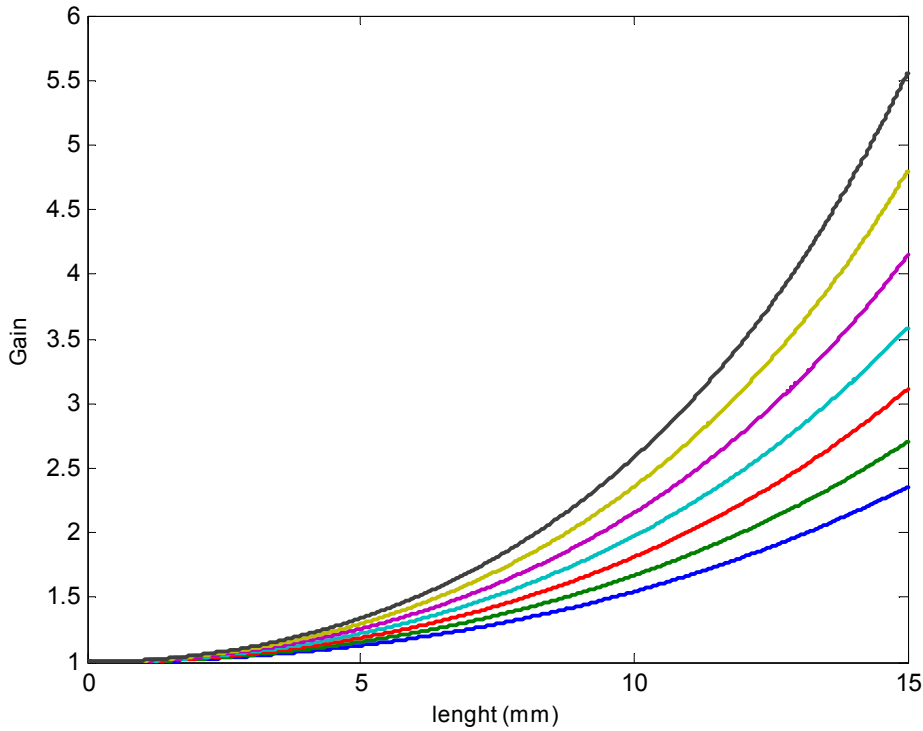
με την κατάλληλη προσαρμογή όταν $\sum y_i > W$. Στην εξίσωση (2.61), η σταθερά φάσης είναι $\frac{3\pi}{2}$, επειδή διαλέξαμε να γράψουμε το y_i ως μία συνημιτονοειδή συνάρτηση.

Το πλάτος τώρα v_i της ακουστικής ταχύτητας μέσα στο στόμα του σωλήνα σχετίζεται με το πλάτος της ακουστικής μετατόπισης a_i του i τρόπου, σύμφωνα με τη σχέση:

$$v_i = a_i \omega_i \frac{S_p}{S_m} \quad (2.64)$$

Όπου S_p είναι η διατομή του σωλήνα (cross-sectional area) και S_m η διατομή του στόματος. Υποθέτουμε ότι η συμπεριφορά της δέσμης διέπεται από γραμμικότητα, που είναι μία λογική προσέγγιση τελικά, αν συγκρίνουμε με τις υπόλοιπες μη γραμμικότητες του υπόλοιπου μηχανισμού. Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε μία σχέση που αποτελεί άθροισμα των συμβολών από όλους τους τρόπους στην τελική εκτροπή της κορυφής της δέσμης:

$$y_0(t) = \sum_i y_i(t) = \sum_i \frac{S_p}{S_m} G_i \dot{x}_i \left(t - \delta_i - \frac{3\pi}{2\omega_i} \right) \quad (2.65)$$



Διάγραμμα 2.2

Καμπύλες υπερβολικής ενίσχυσης για τιμές του εκθέτη μ ίσες με 100, 110, 120, 130, 140, 150 και 160 m^{-1} , από κάτω προς τα επάνω.

Εξισώσεις ροής

Αν στο άνω χείλος το πλάτος της δέσμης είναι D (το πλάτος του στόματος), τότε η ροή Q_j της δέσμης μέσα στο σωλήνα θα είναι το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.53) από $y=0$ έως άπειρο. Δηλαδή, θα είναι εκείνη η ποσότητα από την ολική ροή της δέσμης που, προσκρούοντας στο χείλος ($y=0$), συγκρατείται κάτω από αυτό και οδηγείται μέσα στο σωλήνα. Κατά συνέπεια:

$$Q_j = DV \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\pi(y-y_0)^2}{4W^2} \right] dy \quad (2.66)$$

Ακολούθως, η διεγείρουσα πίεση που δημιουργείται από την ταλάντωση της δέσμης είναι:

$$F(t) = \bar{Z}_s S_p \frac{dx}{dt} = HQ_j \quad (2.67)$$

Όπου το μέγεθος H , δίνεται από την έκφραση:

$$H = \frac{\rho}{S_p} (V^2 + \omega^2 \Delta l^2)^{1/2} \quad (2.68)$$

με

$$\Delta l \approx 1,3 \frac{S_p}{S_m} r_m \quad (2.69)$$

που αντιπροσωπεύει τη διόρθωση μήκους (end correction) για το άνοιγμα του στόματος, όπως την πρότειναν οι Ingerslev και Frobenius [32]. Πέρα από τις γνωστές ποσότητες, r_m είναι η ακτίνα ενός κύκλου που έχει ίδια επιφάνεια με αυτή του στόματος (ισοδύναμη ακτίνα). Η διόρθωση μήκους στο στόμα φαίνεται να αυξάνει καθώς αυξάνει και η διόρθωση στο ανοιχτό άκρο του σωλήνα και φαίνεται να αυξάνεται καθώς μειώνεται η επιφάνεια (διατομή) του στόματος. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφ. 4 του Μέρους II, ακριβής γνώση της μεταβολής της διόρθωσης με τη συχνότητα δεν υπάρχει και οι τύποι που προτείνονται είναι προσεγγιστικοί. Το μέγεθος H εισάγει μία προπορεία φάσης (phase lead), μεγέθους:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega \Delta l}{V} \right) \quad (2.70)$$

Ανάπτυξη εξισώσεων ροής

Είδαμε σε προηγούμενες ενότητες, ότι η δέσμη εκτρέπεται εντός και εκτός του σωλήνα, μέσω του χείλους (labium) κατά απόσταση μικρότερη από δύο φορές το πλάτος της, ώστε η έκφραση (2.63) μπορεί, χωρίς να χάσει μεγάλο μέρος ακρίβειας, να αναπαρασταθεί με λίγους όρους από ανάπτυγμα σε σειρά, καθότι η απευθείας ολοκλήρωση είναι αδύνατη.

Αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση (2.65) στην (2.66), προκύπτουν δύο επιλογές. Είτε μπορούμε να αναπτύξουμε πρώτα τα εκθετικά, που θα δώσουν σειρές τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel [AAA, PP], είτε ολοκληρώνοντας κατ' ευθείαν και να προκύψει μία συνάρτηση σφάλματος (error function). Η δεύτερη επιλογή είναι προτιμότερη γιατί οδηγεί σε πιο άμεσα αποτελέσματα. Από την (2.66) ολοκληρώνοντας το εκθετικό ανάπτυγμα παίρνουμε:

$$Q_j = \frac{DVW}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y_0 \pi^{1/2}}{2W} \right) \right] \quad (2.71)$$

όπου η συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x)$ μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad (2.72)$$

Και το y_0 δίνεται απ' τη σειρά (2.65), η οποία μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\frac{y_0 \pi^{1/2}}{2W} = \sum_i b_i \cos \psi_i \quad (2.73)$$

Όπου

$$b_0 = \frac{a_0 \pi^{1/2}}{2W} \quad \text{και} \quad b_i = \frac{S_p}{S_m} \frac{G_i \omega_i a_i \pi^{1/2}}{2W} \quad (2.74)$$

είναι τα κανονικοποιημένα πλάτη για τη μετατόπιση της κορυφής της δέσμης. Επίσης,

$$\psi_i = \omega_i(t - \delta_i) + \beta_i - \frac{3\pi}{2} + \theta_i \quad (2.75)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (2.70) στην (2.68) και με χρήση της συνάρτησης σφάλματος (2.69), παίρνουμε μετά από πράξεις:

$$Q_j = \frac{DVW}{2} \left\{ 1 + B_0(b_0) + B_1(b_0) \sum_i b_i \cos \psi_i + B_2(b_0) \sum_i \sum_j b_i b_j \cos(\psi_i \pm \psi_j) \right. \\ \left. + B_3(b_0) \sum_i \sum_j \sum_k b_i b_j b_k \cos(\psi_i \pm \psi_j \pm \psi_k) + \dots \right\} \quad (2.76)$$

Όπου

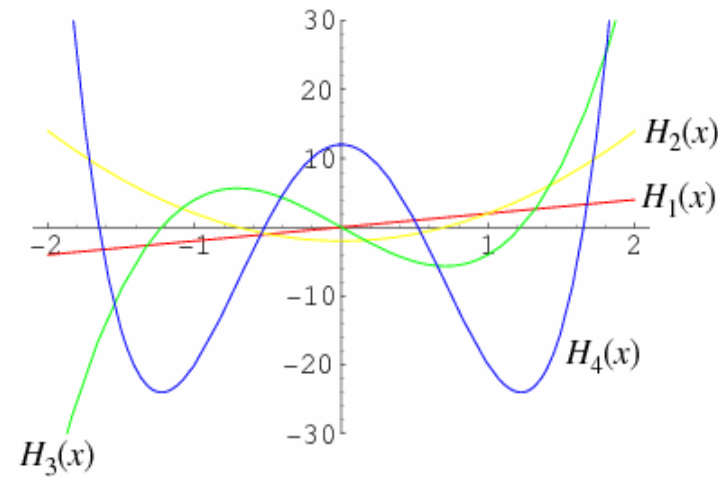
$$B_0(x) = \text{erf}(x) \quad (2.77)$$

και

$$B_n(x) = \frac{1}{2^{n-1} n!} \frac{d^n}{dx^n} B_0(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2} \pi^{1/2} n!} H_{n-1}(x) e^{-x^2} \quad (2.78)$$

όπου $H_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο Hermite, βαθμού n [M]. Ο γενικός τύπος του πολυωνύμου Hermite είναι:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-x^2}) \quad (2.79)$$



Σχήμα 2.3

Τέσσερις πρώτοι βαθμοί του πολυωνύμου Hermite.

Το πολυώνυμο μηδενικού βαθμού είναι ίσο με τη μονάδα. Αργότερα, στους υπολογισμούς, αντί του τύπου (2.79), είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω αναδρομική σχέση, που μας απαλλάσσει από σύνθετες παραγωγίσεις.

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad (2.80)$$

Η σειρά (2.76) συγκλίνει σχετικά γρήγορα και μόνο λίγοι πρώτοι όροι απαιτούνται, εκτός εάν κάποια πλάτη b_i είναι πολύ μεγαλύτερα της μονάδος.

Με αυτά τα αποτελέσματα, είμαστε σε θέση να εκφράσουμε τη ροή Q_j ως ένα σύνολο από ημι-Fourier συνιστώσες (quasi-Fourier components) [32] είτε για ανοιχτό είτε για κλειστό ακουστικό σωλήνα και για οποιοδήποτε αριθμό τρόπων (pipe modes).

Για να αναπτύξουμε τη συνιστώσα Q_j^1 της ροής της δέσμης που αποτελείται από όλους τους όρους με συχνότητα κοντά στην ω_1 , εκλέγουμε απλά από τη σχέση (2.76) όλους εκείνους τους όρους $\cos(\psi_i \pm \psi_j \pm \psi_k \pm \dots)$ για τους οποίους ισχύει:

$$i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 1 \quad (2.81)$$

Για να αναπτύξουμε τη συνιστώσα Q_j^2 , θα πρέπει, κατ' αντιστοιχία, να επιλέξουμε εκείνους τους όρους για τους οποίους ισχύει $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 2$. Ομοίως και για την Q_j^3 . Ο Fletcher πήρε την

και έτσι είναι προφανής η ισότητα (2.80).

Χαρακτηριστική ιδιότητα του πολυωνύμου Hermite είναι ότι εμφανίζει περιττή ή άρτια συμπεριφορά, ανάλογα με την τιμή του βαθμού n . Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων των τεσσάρων πρώτων βαθμών:

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Το πολυώνυμο μηδενικού

περίπτωση ενός ανοιχτού σωλήνα, ώστε $\omega_n \approx n\omega_1$ και κατέστρωσε τους υπολογισμούς για τους τρεις πρώτους τρόπους ($n = 1, 2, 3$).

Πρόέκυψαν οι τύποι:

$$Q_j^1 = \frac{DVW}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[B_1 b_1 + B_3 b_1 (3b_1^2 + 6b_2^2 + 6b_3^2) \right. \\ & \left. + B_5 b_1 (10b_1^4 + 30b_2^4 + 30b_3^4 + 60b_1^2 b_2^2 + 60b_1^2 b_3^2 + 120b_2^2 b_3^2) + \dots \right] \cos \psi_1 \\ & + \left[2B_2 b_1 b_2 + B_4 b_1 b_2 (12b_1^2 + 12b_2^2 + 24b_3^2) + \dots \right] \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ & + \left[2B_2 b_2 b_3 + B_4 b_2 b_3 (24b_1^2 + 12b_2^2 + 12b_3^2) + \dots \right] \cos(\psi_3 - \psi_2) \\ & + \left[3B_3 b_1^2 b_3 + \dots \right] \cos(\psi_3 - 2\psi_1) \\ & + \left[3B_3 b_2^2 b_3 + \dots \right] \cos(2\psi_2 - \psi_3) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

$$Q_j^2 = \frac{DVW}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[B_1 b_2 + B_3 b_2 (6b_1^2 + 3b_2^2 + 6b_3^2) \right. \\ & \left. + B_5 b_2 (10b_2^4 + 30b_1^4 + 30b_3^4 + 60b_1^2 b_2^2 + 60b_2^2 b_3^2 + 120b_1^2 b_3^2) + \dots \right] \cos \psi_2 \\ & + \left[B_2 b_1^2 + B_4 b_1^2 (4b_1^2 + 12b_2^2 + 12b_3^2) + \dots \right] \cos 2\psi_1 \\ & + \left[2B_2 b_3 b_1 + B_4 b_3 b_1 (12b_1^2 + 24b_2^2 + 12b_3^2) + \dots \right] \cos(\psi_3 - \psi_1) \\ & + \left[6B_3 b_1 b_2 b_3 + \dots \right] \cos(\psi_3 - \psi_2 + \psi_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

$$Q_j^3 = \frac{DVW}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[B_1 b_3 + B_3 b_3 (6b_1^2 + 6b_2^2 + 3b_3^2) \right. \\ & \left. + B_5 b_3 (10b_3^4 + 30b_1^4 + 30b_2^4 + 60b_3^2 b_1^2 + 60b_2^2 b_3^2 + 120b_1^2 b_3^2) + \dots \right] \cos \psi_3 \\ & + \left[B_3 b_1^3 + \dots \right] \cos 3\psi_1 \\ & + \left[2B_2 b_1 b_2 + \dots \right] \cos(\psi_1 + \psi_2) \\ & + \left[3B_3 b_1 b_2^2 + \dots \right] \cos(2\psi_2 - \psi_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Όπου $B_n \rightarrow B_n(b_0)$. Όροι που λείπουν στο τέλος των εκφράσεων περιέχουν συνδυασμούς από τέσσερις ή περισσότερες συχνότητες και είναι σχετικά μικροί, εκτός αν τα b_i είναι πολύ μεγαλύτερα της μονάδας, αντιστοιχώντας σε μία εκτροπή δέσμης αρκετά μεγαλύτερη από το πάχος της. Αυτή η περικοπή μάλλον αποτελεί πρόβλημα για τη συμπεριφορά των τρόπων.

Παρατηρώντας τώρα τις εξισώσεις (2.82) έως (2.84), βλέπουμε την ύπαρξη συγκεκριμένων συνιστωσών, οι οποίες ενδεχομένως να διαφέρουν ελάχιστα στη συχνότητά τους, που συμβάλλουν σε κάθε όρο. Αυτή η συμβολή δημιουργεί, στη γενικότητα, ηχητικούς επαναλαμβανόμενους κτύπους και παλμούς (beat-like effects) και τελικά έναν δυνατό και βραχνό ήχο. Αυτό ίσως να συμβαίνει πρακτικά, αλλά γενικά οι σωλήνες «κουρδίζονται» με τέτοιο τρόπο, ώστε να παράγουν έναν μαλακό σταθερό ήχο στον οποίο, όπως αναφέρθηκε, όλες οι συνιστώσες «κλειδώνονται» μεταξύ τους σε μία ακριβή αρμονική σχέση (mode locking):

$$\omega_n = n\omega_1 \quad (2.85)$$

Σύγκλιση των εξισώσεων ροής

Υπάρχει ένα θέμα τώρα σχετικά με το αν μπορεί να συγκλίνει το ανάπτυγμα (2.76). Η δέσμη μπορεί να εκτρέπεται πλήρως γύρω από το χείλος, με συνέπεια τα b_i να είναι μεγαλύτερα από τη μονάδα. Οι εκφράσεις (2.82) έως (2.84), για τις συνιστώσες της ροής της δέσμης, απαιτούν τότε έναν μεγάλο αριθμό όρων για να δώσουν μία καλή προσέγγιση. Η δυσκολία σύγκλισης έχει να κάνει με το

ότι οι εκφράσεις στις αγκύλες αποκλίνουν καθώς τα b_i αυξάνουν, αντί να προσεγγίζουν μία οριακή τιμή. Αυτή η δυσκολία αυξάνεται από την περικοπή της συνάρτησης σφάλματος (2.72), μετά από ορισμένο αριθμό όρων $n = N$ και μπορεί να αποφευχθεί αντικαθιστώντας το ακριβές ανάπτυγμα από το προσεγγιστικό:

$$erf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \approx \sum_{n=0}^N a_n z^n \left(1 + |a_N z^N|\right)^{-1} \quad (2.86)$$

με την προϋπόθεση ότι, εξ' αιτίας της μονοτονικής φύσης της συνάρτησης σφάλματος, $a_N > 0$. Αυτό ισχύει για $N = 1, 5, 9, \dots$, ώστε το προφανές σημείο για να κόψουμε τη σειρά είναι μετά τον πέμπτο όρο.

Εφαρμόζοντας την τεχνική αυτή στο ανάπτυγμα Q_j της εξίσωσης (2.76), βλέπουμε ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε την Q_j με την προσέγγιση:

$$Q_j \left[1 + \left\langle B_5(b_0) \sum_{i,j,k,l,m} b_i b_j b_k b_l b_m \cos(\psi_i \pm \psi_j \pm \psi_k \pm \psi_l \pm \psi_m) \right\rangle \right]^{-1} \quad (2.87)$$

Όπου η Q_j είναι ανάπτυγμα με κρατημένους τους πέντε πρώτους όρους και όπως και στις σχέσεις (2.14) και (2.15) το σύμβολο $\langle \rangle$ δηλώνει μέσο όρο στον οποίο παραμένουν μόνο οι ποσότητες που μεταβάλλονται αργά σχετικά με το n_i . Ο λόγος που χρησιμοποιούμε έναν μέσο όρο αυτού του είδους είναι ότι οι παραλειπόμενοι όροι υψηλής συχνότητας, αν μεταφερθούν στον αριθμητή, οδηγούν μόνο σε όρους τάξεως ίσης ή μεγαλύτερης του N , ώστε μπορούν λογικά να παραλειφθούν.

Η σημαντικότερη συμβολή στον παρονομαστή της (2.87) έρχεται όχι από τους λίγους όρους για τους οποίους $i \pm j \pm k \pm l \pm m = 0$, αλλά κυρίως από το άθροισμα των σταθερών όρων που παράγονται από κάθε ταλαντούμενο όρο καθώς παίρνει την απόλυτή τιμή του. Είναι αδύνατο να βρούμε μία συγκεκριμένη τιμή για αυτό το αποτέλεσμα, επειδή οι ταλαντώσεις είναι γενικά υψηλά συσχετιζόμενες. Ωστόσο, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την παράσταση (2.87) με την παρακάτω, χωρίς μεγάλο σφάλμα:

$$Q_j \left[1 + \left| \frac{32}{\pi} B_5(b_0) \left(\sum_i b_i \right)^5 \right| \right]^{-1} \quad (2.88)$$

ο παράγοντας $32/\pi$ προκύπτει αν λάβουμε υπ' όψη τον αριθμό των συνδυασμών που υπάρχουν στην (2.87) και τη μέση τιμή $2/\pi$ που συμβάλλεται απ' τον καθένα. Είναι απίθανο η (2.88) να έχει λάθος κατά έναν παράγοντα περισσότερο του 2, που δεν είναι σημαντικός, για μεγάλες τιμές των b_i και γίνεται ορθός για μικρά b_i . Κατά συνέπεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την προσέγγιση για την Q_j και τις συνιστώσες της Q_j^i στην αριθμητική μας ανάπτυξη.

Από τη σχέση (2.15) και μία εκ των (2.82), (2.83) και (2.84) βλέπουμε πως η μόνη λύση σταθερής κατάστασης (στην οποία τα πλάτη a_i είναι σταθερά) είναι αυτή που λαμβάνεται μετά από «κλειδωμα» των συχνοτήτων $\omega_i^{inst} = \omega_i + \dot{\beta}_i$ στην αυστηρή αρμονική σχέση, ώστε $\omega_i^{inst} = i\omega_i^{inst}$, όπως συνέβη και νωρίτερα. Αυτό το «κλειδωμα» που συμβαίνει στους συνηθισμένους αυλούς μπορεί να επαληθευτεί αμέσως από την κυματομορφή εξόδου τους στη σταθερή κατάσταση (steady state).

2.8 Οι εξισώσεις συστήματος

Μπορούμε τώρα στις εκφράσεις των παραγώγων (2.14) και (2.15), που αναλύσαμε στην ενότητα 2.3:

$$\left\langle \frac{d\beta_i}{dt} \right\rangle = -\frac{\eta_i}{a_i \omega_i} \langle F_i \sin(\omega_i t + \beta_i) \rangle + \frac{n_i^2 - \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.14)$$

$$\left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle = \frac{\eta_i}{\omega_i} \langle F_i \cos(\omega_i t + \beta_i) \rangle - \frac{1}{2} k_i a_i \quad (2.15)$$

να χρησιμοποιήσουμε το νέο μοντέλο της δέσμης, όπως περιγράφεται από την (2.88) και τα αναπτύγματά της. Η F_i σημαίνει τη συνιστώσα εκείνη της $F(t)$ με συχνότητα κοντά στην ω_i και το σύμβολο $\langle \rangle$ συμβολίζει έναν μέσο όρο στον οποίο παραμένουν μόνο οι συνιστώσες με συχνότητες αρκετά μικρότερες του ω_i . Η $F(t)$ σχετίζεται με τη ροή με τη σχέση (2.67).

Για να βρούμε την average τιμή της παράστασης $F_i \sin(\omega_i t + \beta_i)$ και της $F_i \cos(\omega_i t + \beta_i)$, πολλαπλασιάζουμε τα αναπτύγματα (2.82) έως (2.84), με $H_i \sin(\omega_i t + \beta_i)$ και $H_i \cos(\omega_i t + \beta_i)$, αντίστοιχα και με χρήση των σχέσεων

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)] \quad (2.89)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \quad (2.90)$$

«σπάμε» τα γινόμενα σε απλούς ημιτονικούς και συνημιτονικούς όρους. Κατ' αναλογία με την ενότητα 2.4, κρατούμε στο άθροισμα μόνον εκείνους τους όρους που δίνουν $(\pm\omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l \dots)t \approx 0$.

Αρχικές συνθήκες

Οι εξισώσεις (2.14) και (2.15) επιτρέπουν απ' ευθείας αριθμητικό υπολογισμό των πλατών ταχύτητας $a_i \omega_i$ και των ενεργών συχνοτήτων $\omega_i + \left\langle \frac{d\beta}{dt} \right\rangle$ των ταλαντώσεων του σωλήνα, ως συνάρτηση του χρόνου, άπαξ οι αρχικές συνθήκες και η μεταβολή της πίεσης πνοής με το χρόνο είναι γνωστά.

Μπορούμε να δεχθούμε, με αρκετά καλή προσέγγιση, ως αρχικές συνθήκες, εκείνες που δημιουργούνται από μία ξαφνική αύξηση της πίεσης στο πόδι του σωλήνα (blowing pressure) στην τιμή P_1 . Αν δεχθούμε (για απλότητα) την ισχύ της εξίσωσης Bernoulli, τότε, όπως ξαναείδαμε, η ταχύτητα δέσμης, με το που βγαίνει απ' τη σχισμή, σχετίζεται κάθε στιγμή με την πίεση πνοής, σύμφωνα με τη σχέση:

$$V_0 = \left(\frac{2P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.91)$$

και είδαμε ότι, σύμφωνα με την (2.51), μειώνεται κατά μήκος της δέσμης, ενώ σύμφωνα με την (2.49), κατά το πάχος της. Από τις εξισώσεις (2.66) και (2.67), για το βήμα πίεσης P_1 προκύπτει:

$$F_1 = HDVW \cdot \operatorname{erfc} \left(-\frac{\pi^{1/2} a_0}{2W} \right) = HDVW \left[1 - \operatorname{erf} \left(-\frac{\pi^{1/2} a_0}{2W} \right) \right] = HDVW [1 - \operatorname{erf}(-b_0)] \quad (2.92)$$

Όπου b_0 είναι το αδιάστατο σημείο offset της δέσμης και η V προκύπτει από την P_1 με χρήση των εξισώσεων (2.91) και (2.54).

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε το βήμα πίεσης P_1 στις εξισώσεις (2.36), αμελώντας κάθε σύζευξη μεταξύ των τρόπων, στην παρούσα φάση. Επιλύοντας με μετασχηματισμό Laplace τις εξισώσεις αυτές, με την προϋπόθεση ότι $k_i \ll n_i$, που ισχύει για συνηθισμένους αυλούς, παίρνουμε [32]:

$$a_i(0) = \eta_i \frac{F_1^{(i)}}{n_i^2} \quad (2.93)$$

$$\beta_i(0) = \theta_i - \frac{\pi}{2} \quad (2.94)$$

$$\omega_i = n_i \quad (2.95)$$

Για να κλείσουμε την ενότητα, είναι απαραίτητο να εισάγουμε μία τελευταία τροποποίηση. Κατά τη διατύπωση των εξισώσεων (2.71) – (2.78), θεωρήσαμε το σημείο offset b_0 της κεντρικής γραμμής της δέσμης, ως μία ρυθμιζόμενη φυσική παράμετρο, καθοριζόμενη από τη γεωμετρία της σχισμής και του χείλους. Περαιτέρω συλλογισμός δείχνει ότι παρόλο που αυτό ενδεχομένως να αληθεύει κατά την αρχική επιρροή της δέσμης στο σωλήνα, δεν ισχύει για μετέπειτα χρονικές στιγμές.

Υποθέτουμε ότι η δέσμη κατευθύνεται με συγκεκριμένο offset b_0 , ώστε η σταθερή συνιστώσα της ροής μέσα στο σωλήνα να είναι: γQ_j , όπου $\gamma \leq 1$. Κατά τον Coltman [18] και τον Elder [25], αυτή η ροή αναπτύσσει σταδιακά μία στατική και υπερβολικά μεγάλη πίεση στο σωλήνα, μεγέθους $\frac{\gamma Q_j V}{S_p}$.

Αυτή η συνιστώσα στατικής πίεσης δεν είναι ακριβώς εξαρτώμενη από την παλινδρομική κίνηση της δέσμης, όταν πλέον έχει μονιμοποιηθεί. Έτσι $\gamma \approx 0,5$.

Το κλάσμα αυτής της στατικής ροής που επιστρέφει στο στόμα είναι περίπου $\frac{S_m}{S_p + S_m}$ και αυτό μας οδηγεί να εκτιμήσουμε άμεσα την κλασματική εκτροπή της δέσμης, από την αρχική της διαδρομή, με χρήση των εξισώσεων (2.55) και (2.56):

$$\Delta b_0 \approx -\gamma \frac{S_m}{S_p + S_m} \left(\frac{W_0}{W} \right)^{1/2} \quad (2.96)$$

που έχει μία τάξη μεγέθους $-0,1$. Ο σωλήνας είναι συνήθως προσαρμοσμένος ώστε η δέσμη να πνέει σε κάποιο βαθμό έξω από το χείλος σε κάθε περίπτωση ($b_0 < 0$), ώστε αυτό το όρισμα τείνει να θέσει ένα άνω όριο σε κανονικές τιμές του b_0 . Περιμένουμε συνεπώς, το b_0 να είναι αρχικά αρνητικό κατά ένα μέσο κλάσμα του W και να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την τιμή του b_0 για τις αρχικές συνθήκες (2.89), αλλά μετά να χρησιμοποιήσουμε μια πιο αρνητική κατά $-0,1$ τιμή του b_0 , για την επακόλουθη συμπεριφορά. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς όταν $b_0 = 0$, η εξίσωση (2.78) δίνει $B_2 = 0$, ώστε να μην υπάρχει σύζευξη δευτέρας τάξεως μεταξύ των τρόπων. Στην πράξη αυτό θα συνεπαγόταν μείωση της ακουστικής αστάθειας.

2.9 Περισσότεροι τρόποι συντονισμού και όροι

Οι τύποι (2.82) έως (2.84) που παρουσίασε ο Fletcher στη δημοσίευσή του είναι αποτέλεσμα άλγεβρας για τρεις τρόπους συντονισμού, μέχρι πέντε όρους. Επίσης πολλά γινόμενα έχουν παραληφθεί για λόγους λογιστικής οικονομίας, καθώς η συνεισφορά τους είναι μικρή. Το σκεπτικό του Fletcher ήταν να τοποθετηθούν έτοιμοι οι τύποι στις σχέσεις (2.14) έως (2.15) και να ολοκληρωθούν, όπως έγινε και με το μοντέλο της ενότητας 2.4. Εκμεταλλευόμενοι τις μεγάλες υπολογιστικές δυνατότητες ενός μέσου H/Y, εμείς μπορούμε να γράψουμε κώδικα που δημιουργεί ο ίδιος τους τύπους της ροής, για αυθαίρετο αριθμό τρόπων και όρων και ταυτόχρονα ολοκληρώνει τις (2.14) και (2.15).

Ο αριθμός των τρόπων και οι γωνιακές τους συχνότητες καταγράφονται σε ένα αρχείο που θα καλούμε Resonances.txt. Ο αριθμός των όρων δίδεται κατά τη διάρκεια του προγράμματος και πρέπει να περιλαμβάνεται στην ακολουθία $N = 1, 5, 9, \dots$. Τα υπόλοιπα δεδομένα, όπως η μεταβολή της πίεσης, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι παράμετροι δίδονται εντός του κώδικα.

Με δεδομένο τον αριθμό των τρόπων και των όρων του αναπτύγματος (2.76), πρέπει να ευρεθούν όλοι οι συνδυασμοί για τους οποίους $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 1$ για τον τύπο της Q_j^1 και ομοίως για τις Q_j^2, Q_j^3, \dots . Ο πρώτος όρος είναι πάντα θετικός. Αν και αυτός έπαιζε μεταξύ + και -, τότε όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί $i \pm j \pm k \pm \dots$ με ελεύθερες επαναλήψεις θα ήταν κατά τα γνωστά N^{im} (όπου im

είναι ο συνολικός αριθμός των τρόπων). Αφού όμως παίρνει μόνο θετικές τιμές, αυτομάτως οι συνδυασμοί μειώνονται στους μισούς. Έτσι έχουμε να βρούμε $N^{im}/2$ συνδυασμούς.

Μία υπορουτίνα αναλαμβάνει να βρει τους $N^{im}/2$ συνδυασμούς και από αυτούς να φιλτράρει εκείνους που πληρούν τη συνθήκη $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 1$, $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 2$, κλπ, αποθηκεύοντας τους, ώστε να ανακληθούν στη συνέχεια από το κυρίως πρόγραμμα για την επίλυση των (2.14) και (2.15). Το να αποθηκεύσουμε σε πίνακες τα αποτελέσματα των συνδυασμών δεν ενδείκνυται, γιατί οι χωρητικότητες που απαιτούνται είναι τεράστιες, όσο αυξάνονται οι τρόποι και οι όροι. Οι ίδιες οι γλώσσες προγραμματισμού επιβάλουν όριο στο μέγεθος των πινάκων τους. Η καλύτερη λύση είναι η καταγραφή σε αρχεία, από τα οποία αργότερα θα διαβαστούν. Δανειζόμαστε το σκεπτικό του δένδρου από τη συνδυαστική για να βρούμε τους συνδυασμούς $i \pm j \pm k \pm \dots$.

Οι δυνατές τιμές του πρώτου όρου ($i=1,2,3,\dots,im$) καταγράφονται στο αρχείο combinations_odd σε κάθε γραμμή. Για κάθε μία τέτοια τιμή η υπορουτίνα καταγράφει στο αρχείο combinations_even σε κάθε γραμμή την τιμή αυτή και δίπλα της μία από τις τιμές του δεύτερου όρου, που προκύπτουν από τη σειρά $j=1,2,3,\dots,im, -1,-2,-3,\dots,-im$. Όταν τελειώσει η καταγραφή, το αρχείο combinations_even θα περιέχει $im \cdot (2im) = 2im^2$ γραμμές με δύο όρους η κάθε μία. Δηλαδή $2im^2$ συνδυασμούς $i \pm j$. Στη συνέχεια η υπορουτίνα διαβάζει τα δεδομένα του αρχείου που μόλις δημιουργήθηκε και για οικονομία χώρου γυρνάει πίσω στο combinations_odd καταγράφοντας αυτή τη φορά σε κάθε γραμμή τον συνδυασμό $i \pm j$ που διάβασε μαζί με μία από τις τιμές του τρίτου όρου, που προκύπτουν από τη σειρά $k=1,2,3,\dots,im, -1,-2,-3,\dots,-im$. Έτσι, μετά το πέρας της διαδικασίας το αρχείο combinations_odd θα περιέχει $2im^2(2im) = 4im^3$ γραμμές. Έπειτα θα ξαναγυρίσουμε στο combinations_even για να γράψουμε την αλληλουχία συνδυασμών των τεσσάρων όρων και ούτω καθ' εξής, ώστε πάντα στο combinations_odd να καταγράφεται ο περιττός αριθμός όρων και στο combinations_even ο άρτιος. Στο τέλος, προφανώς, τα αρχεία θα περιέχουν αντίστοιχα μόνον τους συνδυασμούς $N-1$ και N όρων, αφού οι ενδιάμεσοι θα έχουν σβηστεί.

Για κάθε συνδυασμό που διαβάζει η υπορουτίνα, εκτελεί παράλληλα και έλεγχο για το αν πληρείται η συνθήκη $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 1$ και οι υπόλοιπες που αντιστοιχούν στους τρόπους, δηλαδή $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 2$, $i \pm j \pm k \pm \dots = \pm 3$ κλπ. Αν η συνθήκη είναι αληθής, ο συνδυασμός τυπώνεται στο αντίστοιχο αρχείο combinations1.txt, combinations2.txt, κλπ. Μπροστά από κάθε συνδυασμό, τυπώνεται στην ίδια γραμμή και ο αριθμός n των όρων της γραμμής. Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία, το αρχείο κάθε τρόπου θα περιέχει τους συνδυασμούς όλων των όρων με τη σειρά που τυπώθηκαν και όχι μόνο την τελευταία αλληλουχία. Τώρα είμαστε έτοιμοι να επιστρέψουμε στο κυρίως πρόγραμμα και να σχηματίσουμε και να επιλύσουμε ταυτόχρονα τις εξισώσεις (2.14) και (2.15).

Σε κάθε χρονικό βήμα το κυρίως πρόγραμμα διαβάζει τους συνδυασμούς του κάθε τρόπου από το αντίστοιχο αρχείο combinations1.txt, combinations2.txt,... και υπολογίζει για κάθε γραμμή το γινόμενο:

$$b[m(1)] \cdot b[m(2)] \cdot b[m(3)] \cdot \dots \quad (2.97)$$

και το άθροισμα:

$$\{ \text{sign}[m(1)] \cdot \psi[m(1)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \dots \} \quad (2.98)$$

όπου $m(1) = 1, 2, 3, \dots, im$, $m(2) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, im$ κλπ, οι τιμές του κάθε όρου, που έχουν καταγραφεί στο αρχείο. Επίσης υπολογίζεται και η τιμή $B(n)$, από τον αριθμό n που έχει καταγραφεί μπροστά από κάθε συνδυασμό.

Μετά από κάθε γραμμή ο κώδικας μπορεί πλέον να σχηματίσει το γινόμενο:

$$B(n) \cdot \{ b[m(1)] \cdot b[m(2)] \cdot b[m(3)] \cdot \dots \} \cdot \cos \{ \text{sign}[m(1)] \cdot \psi[m(1)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \dots \} \quad (2.99)$$

που αντιστοιχεί σε κάθε γινόμενο του αναπτύγματος (2.76). Αλλά χρειάζεται ένα τελευταίο βήμα για να ολοκληρωθεί η αντιμετώπιση κάθε συνδυασμού. Καθώς

$$\psi_i = \omega_i(t - \delta_i) + \beta_i - \frac{3\pi}{2} + \theta_i = \omega_i t - \omega_i \delta_i + \beta_i - \frac{3\pi}{2} + \theta_i,$$

τα ορίσματα των συνημιτόνων θα περιέχουν πάντα μία παράσταση της μορφής $(\omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l \dots)t \approx \omega_l t$, για τον πρώτο τρόπο, $(\omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l \dots)t \approx \omega_2 t$, για τον δεύτερο κλπ, ώστε για να εισάγουμε τα γινόμενα ροής στις αγκύλες $\langle \rangle$ των σχέσεων (2.14) και (2.15) θα πρέπει να κατά τις σχέσεις (2.89) και (2.90) να γράψουμε:

$$\left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_a = B(n) \cdot \left\{ b[m(1)] \cdot b[m(2)] \cdot b[m(3)] \cdot \dots \right\} \cdot \cos \left\{ (\omega_i t + \beta_i) - \text{sign}[m(1)] \cdot \psi[m(1)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \text{sign}[m(3)] \cdot \psi[m(3)] + \dots \right\} \quad (2.100)$$

$$\left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_\beta = B(n) \cdot \left\{ b[m(1)] \cdot b[m(2)] \cdot b[m(3)] \cdot \dots \right\} \cdot \sin \left\{ (\omega_i t + \beta_i) - \text{sign}[m(1)] \cdot \psi[m(1)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \text{sign}[m(2)] \cdot \psi[m(2)] + \dots \right\} \quad (2.101)$$

Έτσι σε κάθε όρισμα των τριγωνομετρικών αριθμών θα αλληλοεξουδετερώνονται οι γοργά μεταβαλλόμενοι όροι κατά την αρχή $(\pm \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l \pm \omega_m \dots)t = 0$.

Αθροίζοντας όλες τις μέσες ροές $\left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_a$ και $\left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_\beta$, των συνδυασμών κάθε τρόπου, θα προκύψουν για κάθε χρονική στιγμή οι συνολικές ροές $\sum \left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_\beta^i$ και $\sum \left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_a^i$. Πρωτού εισάγουμε αυτά τα μεγέθη στις εξισώσεις των average παραγώγων, πρέπει να εφαρμόσουμε την παράσταση σύγκλισης (2.87) για να διασφαλίσουμε τη σύγκλιση των αναπτυγμάτων. Κατόπιν αυτών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές των παραγώγων των πλατών και των φάσεων από τις σχέσεις:

$$\left\langle \frac{d\beta_i}{dt} \right\rangle = -\frac{\eta_i}{a_i \omega_i} H_i \sum \left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_\beta^i + \frac{n_i^2 - \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.102)$$

$$\left\langle \frac{da_i}{dt} \right\rangle = \frac{\eta_i}{\omega_i} H_i \sum \left\{ \mathcal{Q}_{aver}^{comb} \right\}_a^i - \frac{1}{2} k_i a_i \quad (2.103)$$

Υπολογισμοί

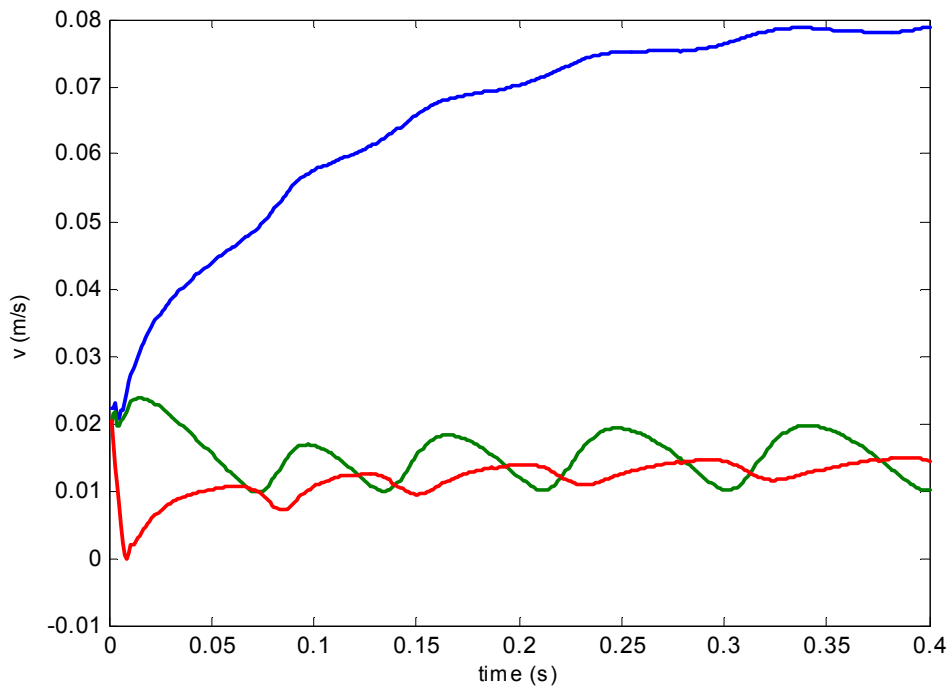
Δοκιμάζουμε τον παραπάνω αλγόριθμο αρχικά με ίδιο αριθμό όρων και τρόπων, όπως του Fletcher. Η ουσιαστική διαφορά των εξισώσεων ροής του παρόντος αλγορίθμου με τις εξισώσεις ροής (2.82) έως (2.84) βρίσκεται στο μεγάλο αριθμό των όρων που συμπληρώνουν το άθροισμα και είχαν αποκοπεί από τις (2.82) έως (2.84). Ο αλγόριθμος μπορεί και αυτός, όπως τις ενότητες 2.5, να υλοποιηθεί σε fortran. Ένα script Matlab διαβάζει τα αποτελέσματα δημιουργώντας αντίστοιχα διαγράμματα. Τα προγράμματα είναι διαθέσιμα απ' τον συγγραφέα.

Επιπρόσθετα με τον κώδικα της 2.5, αθροίζοντας λογαριθμικά τα επίπεδα ηχητικής πίεσης SPL_i των τρόπων (Κεφ. 5, Μέρος I) προκύπτει το ολικό SPL του υπολογισμένου ηχητικού φάσματος του αυλού σε κάθε χρονική στιγμή:

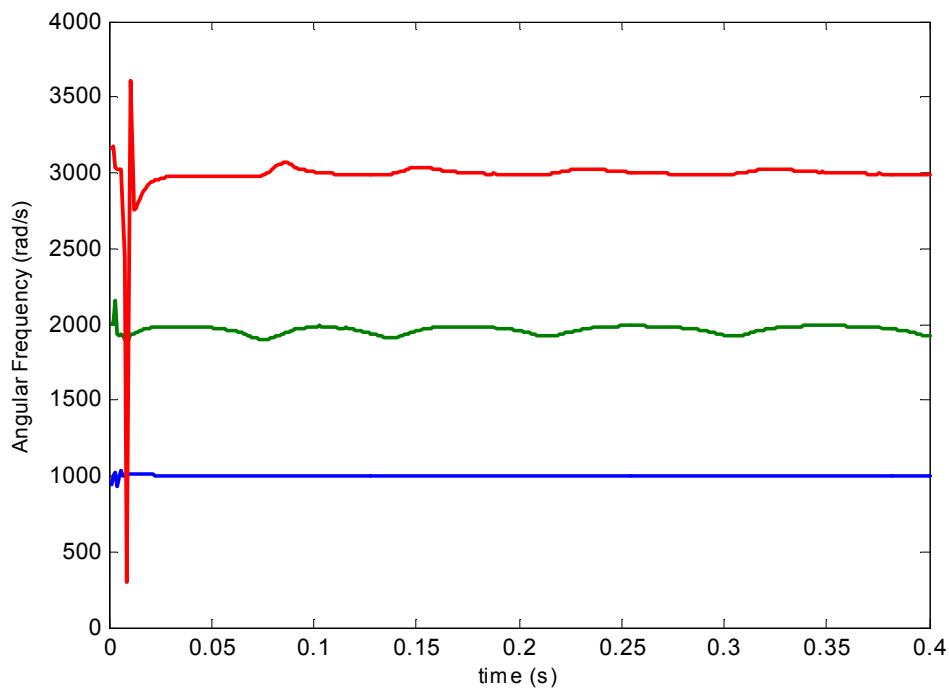
$$SPL_{tot} = 10 \log \left(\sum_{i=1}^n 10^{SPL_i / 10} \right) \quad (2.104)$$

Χρησιμοποιούμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αυλού της ενότητας 2.5 για να συγκρίνουμε το παρών μοντέλο με αυτό της ενότητας 2.4. Τα διαγράμματα 2.3 έως 2.6 δείχνουν αντίστοιχα τη συμπεριφορά των ταχυτήτων των τρόπων, των γωνιακών συχνοτήτων, των επί μέρους SPL και του ολικού SPL για μία σταθερή πίεση 200 Pascal, που επιβάλλεται στην κατάσταση ηρεμίας του συστήματος.

Πίεση 200 Pascal



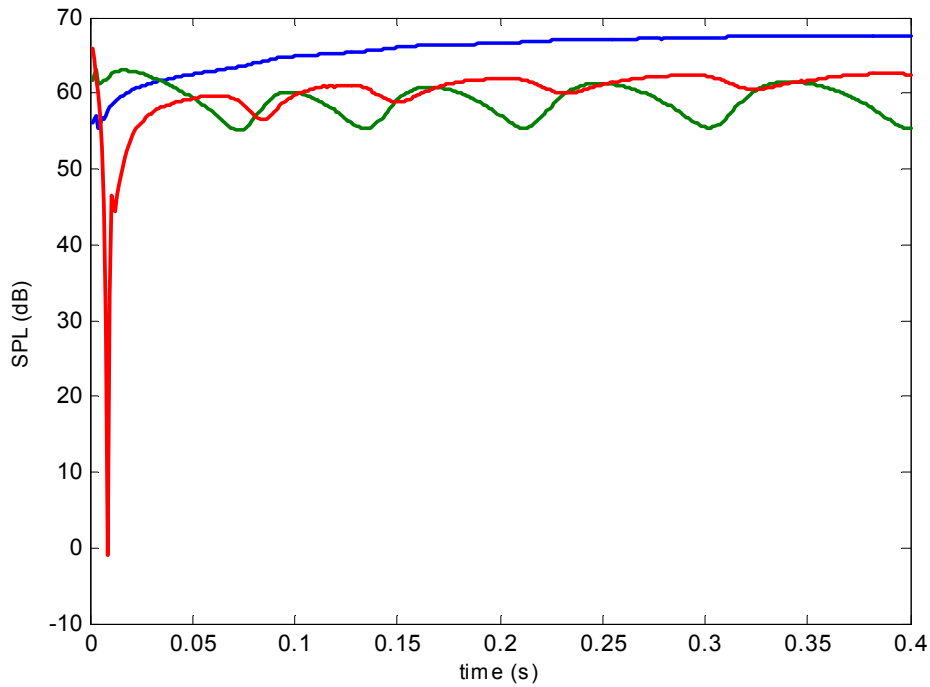
Διάγραμμα 2.3



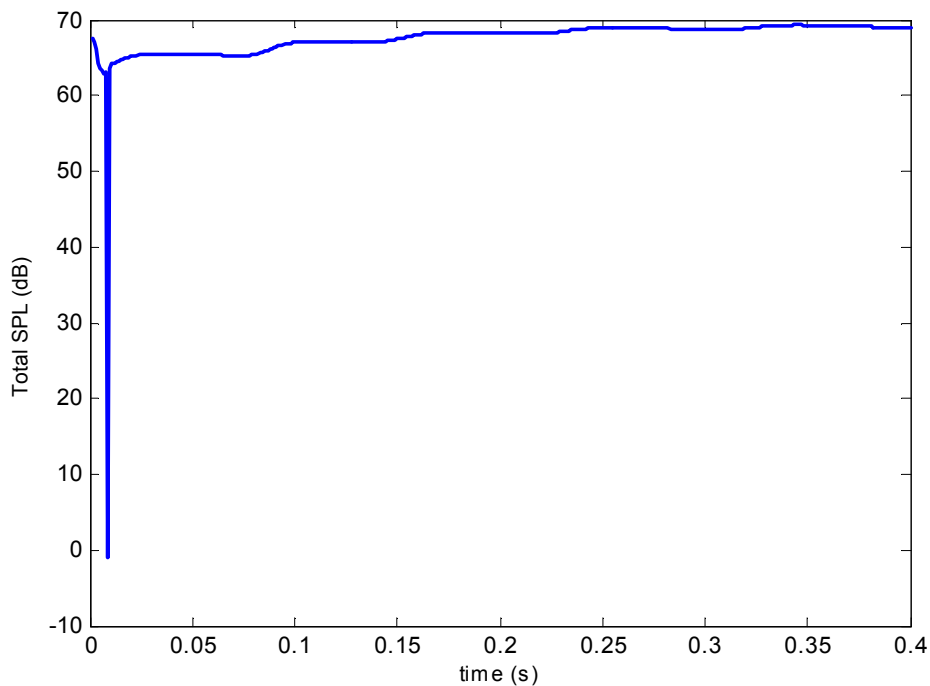
Διάγραμμα 2.4

Εμφανίζεται ισχυρότατος ο πρώτος τρόπος και πολύ χαμηλοί οι άλλοι δύο, σε αντίθεση με το αντίστοιχο διάγραμμα της 2.5. Παρατηρούμε μία έντονη ταλαντωτική συμπεριφορά του μοντέλου, που

ενδεχομένως οφείλεται στην ασάφεια κάποιων παραδοχών και στη δυσκολία σύγκλισης των αναπτυγμάτων (2.80) έως (2.82). Το μέτρο της ταχύτητας του πρώτου τρόπου είναι σχεδόν ίδιο με το αντίστοιχό του στη 2.5. Όσον αφορά τα επίπεδα ηχητικής πίεσης, αυτά βρίσκονται σε παραπλήσιο επίπεδο.



Διάγραμμα 2.5

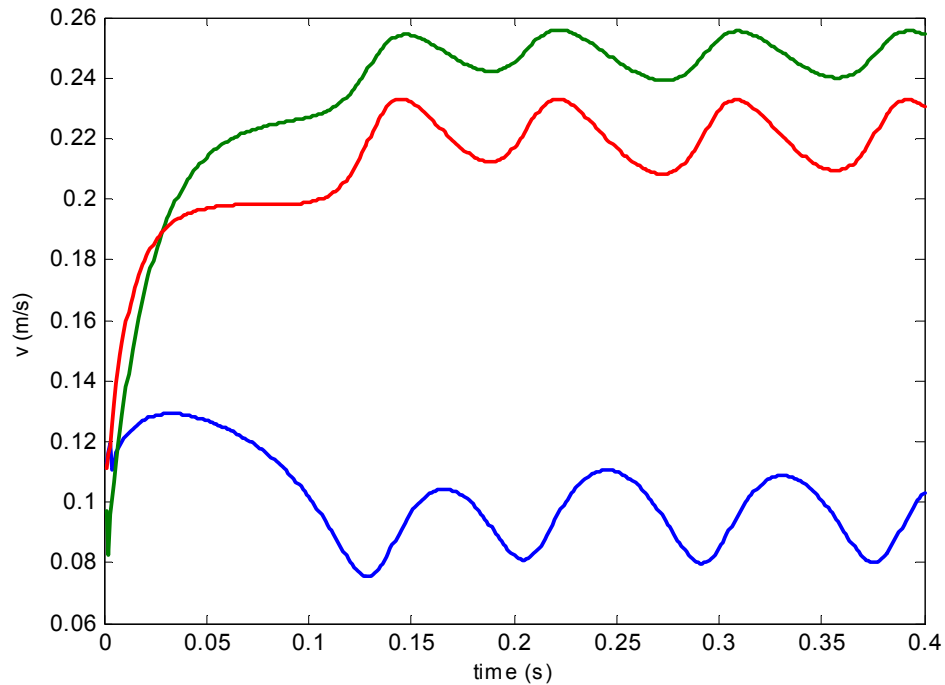


Διάγραμμα 2.6

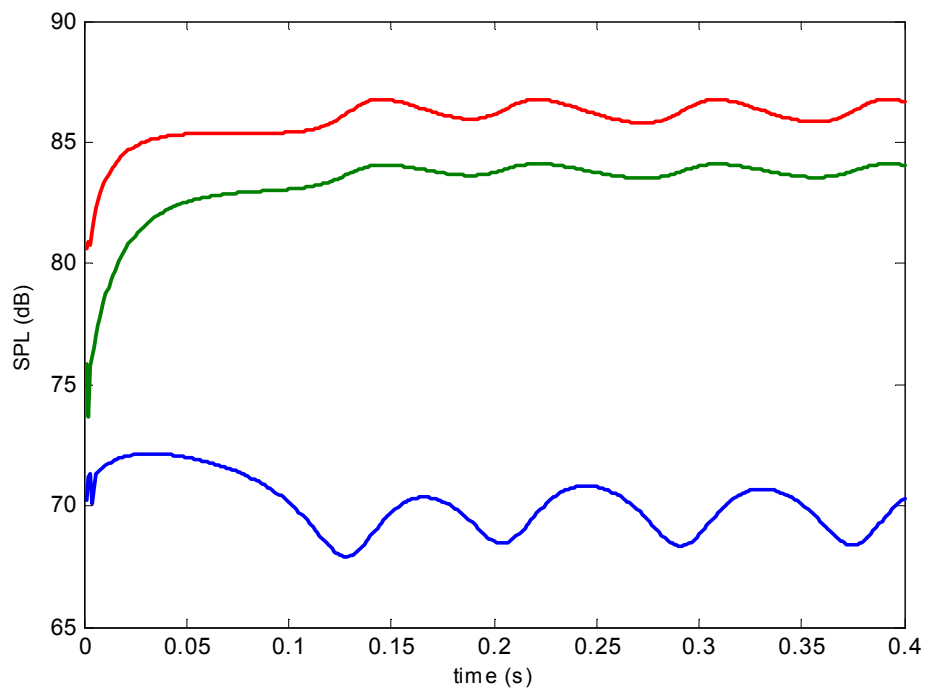
Στα διαγράμματα 2.7 και 2.8 επιβάλλεται στο πόδι του αυλού πίεση 1000 Pascal. Το όργανο εμφανίζει ασταθή απόκριση με το τροποποιημένο βελτιωμένο μοντέλο του Fletcher (παρούσα

ενότητα), σε αντίθεση με το μοντέλο της ενότητας 2.4 με το οποίο ο αυλός βρίσκεται ήδη σε κατάσταση overblowing. Στο SPL διάγραμμα ο τρίτος τρόπος υπερσχύει του δεύτερου.

Πίεση 1000 Pascal



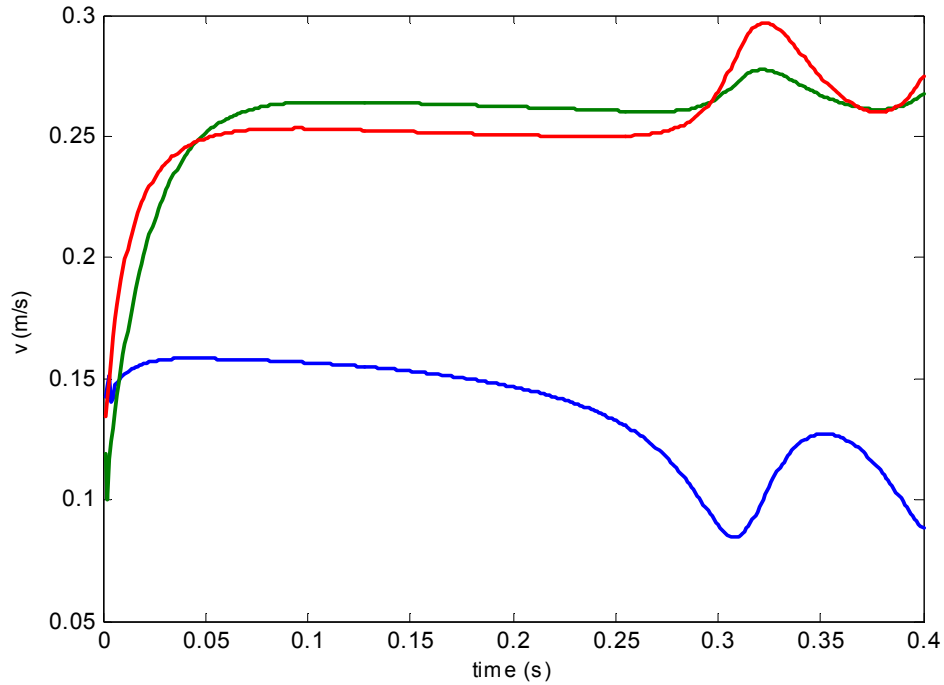
Διάγραμμα 2.7



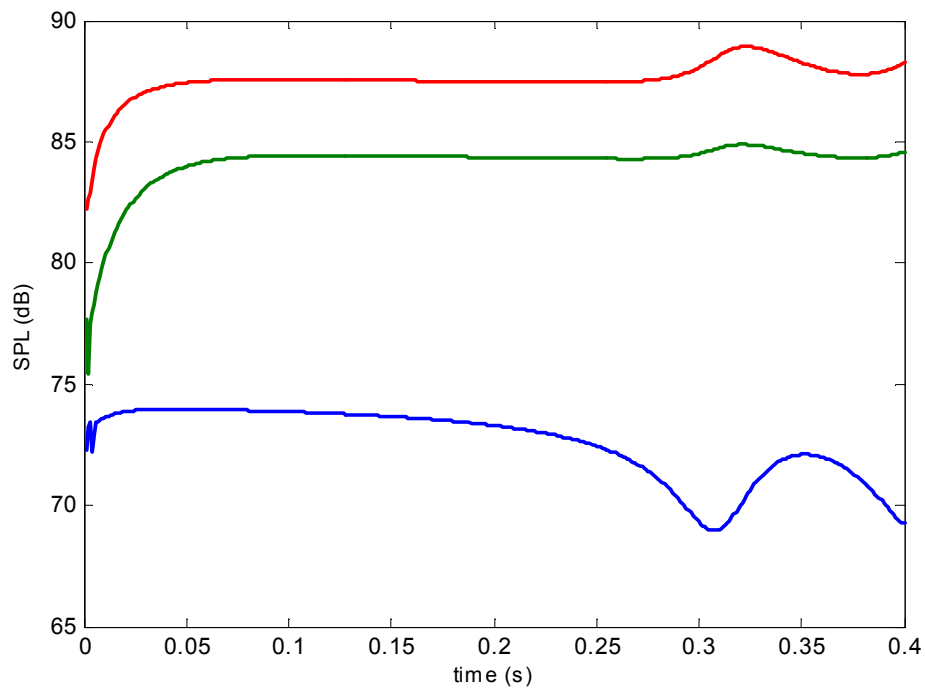
Διάγραμμα 2.8

Για πίεση 1400 Pascal το όργανο αρχίζει να μεταβαίνει σε σταθερή κατάσταση overblowing (διαγράμματα 2.9 και 2.10) ενώ για 1500 έχει αποκατασταθεί σταθερότητα (διαγράμματα 2.11 και 2.12).

Πίεση 1400 Pascal

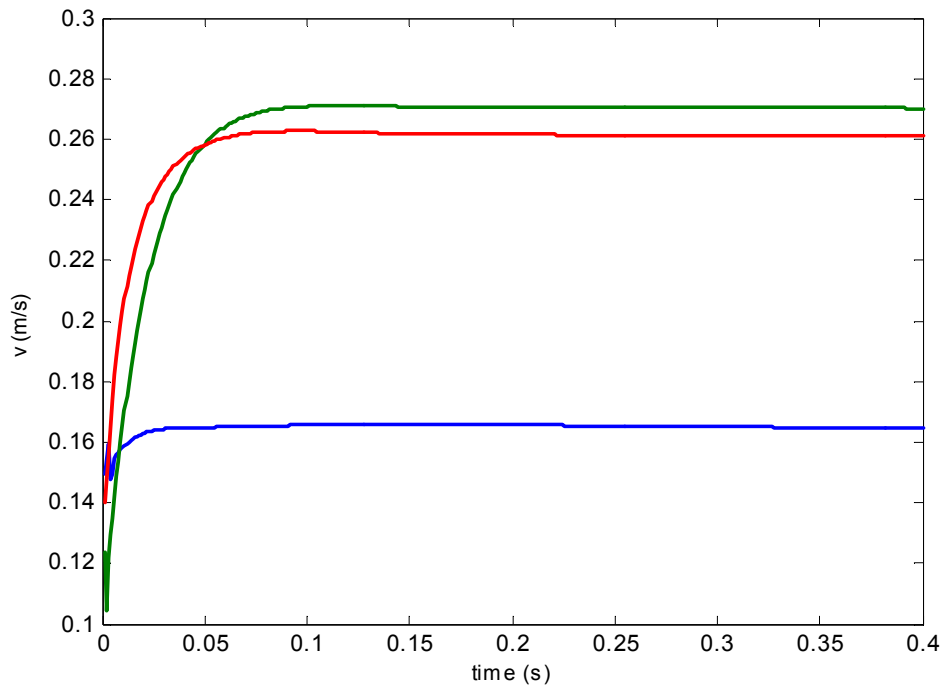


Διάγραμμα 2.9

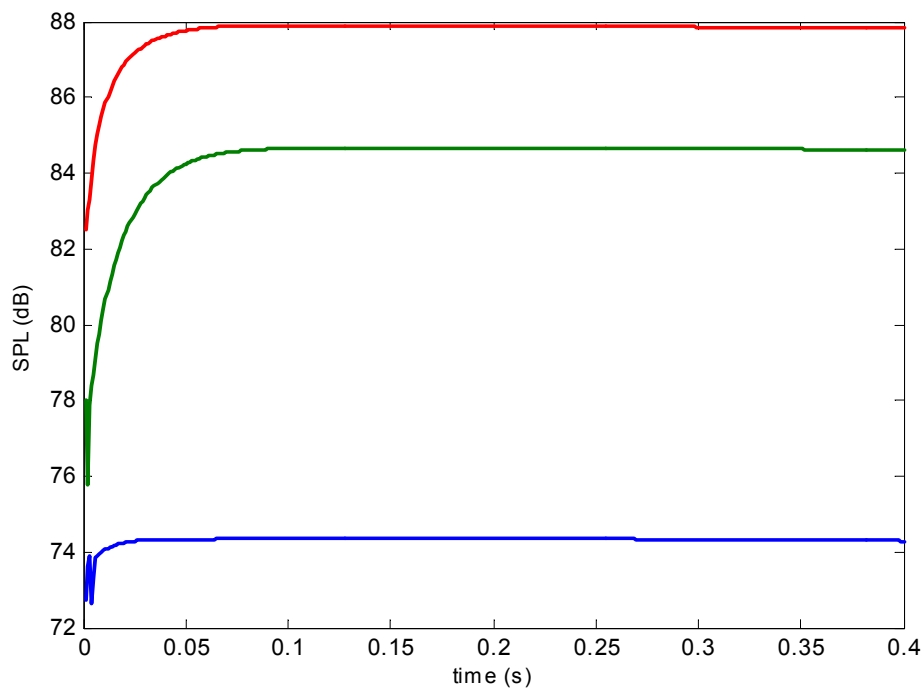


Διάγραμμα 2.10

Πίεση 1500



Διάγραμμα 2.11

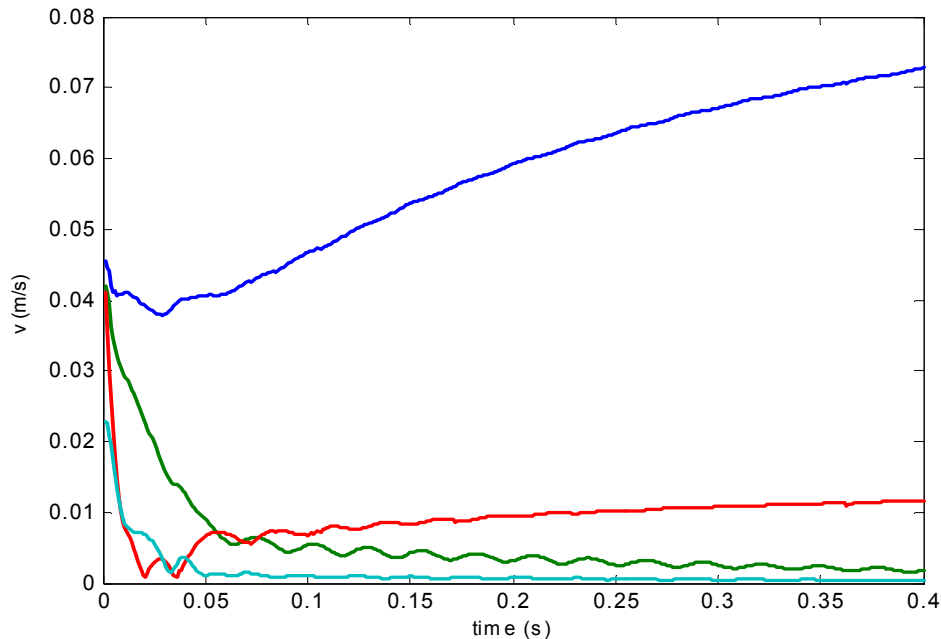


Διάγραμμα 2.12

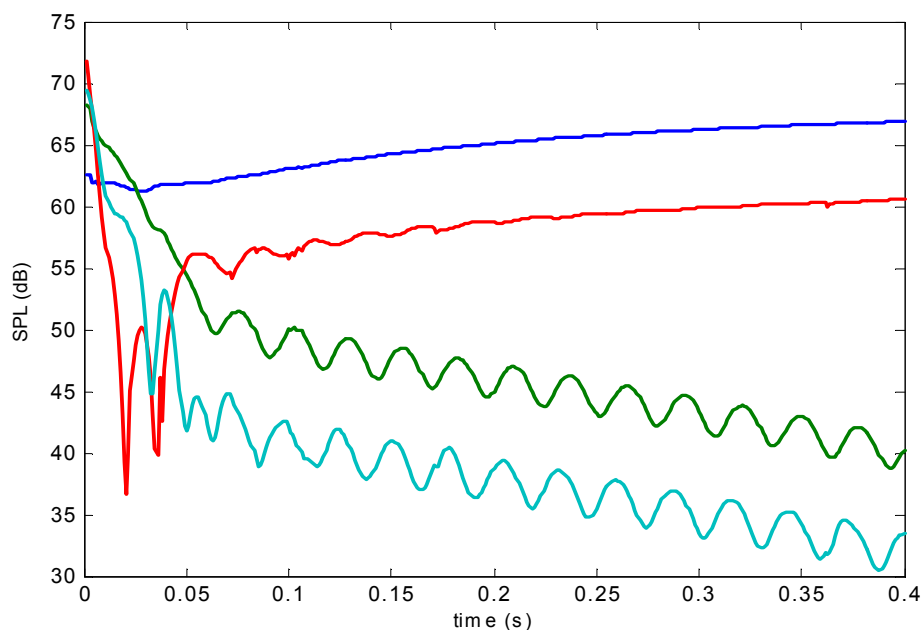
Δοκιμάζουμε τώρα τον αλγόριθμο της παρούσης ενότητας για 5 όρους και 4 κανονικούς τρόπους. Λαμβάνουμε προσεγγιστικά τη γωνιακή συχνότητα του 4^{ου} τρόπου ως ακέραιο πολλαπλάσιο της

θεμελιώδους. Για πίεση 200 Pascal, προκύπτουν τα διαγράμματα ταχυτήτων και SPL 2.13 και 2.14 αντιστοίχως.

Πίεση 200 Pascal



Διάγραμμα 2.13



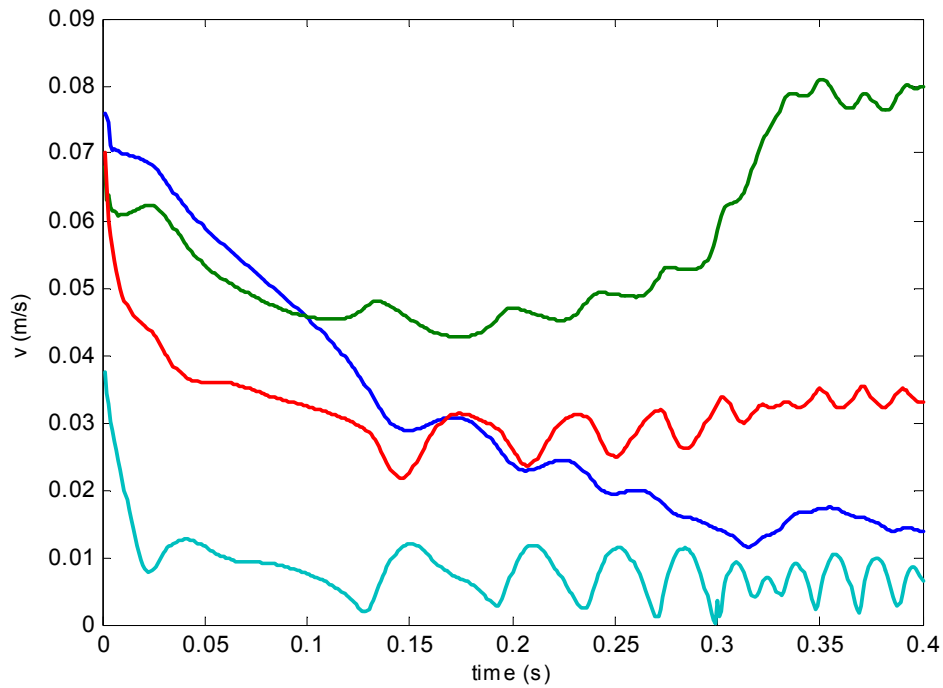
Διάγραμμα 2.14

Οι ταχύτητες των τριών τελευταίων τρόπων εμφανίζονται πολύ μικρότερες της ταχύτητας του πρώτου τρόπου, ενώ τα επίπεδα SPL είναι ισχυρότερα για τον πρώτο και τον τρίτο τρόπο, κατά συμφωνία με τη γενική παρατήρηση ότι περιττές αρμονικές εμφανίζουν μεγαλύτερα πλάτη από τις άρτιες (Κεφ. 4, Μέρος II). Μάλιστα ο δεύτερος και τρίτος τρόπος βαθμιαία καταλαγιάζουν.

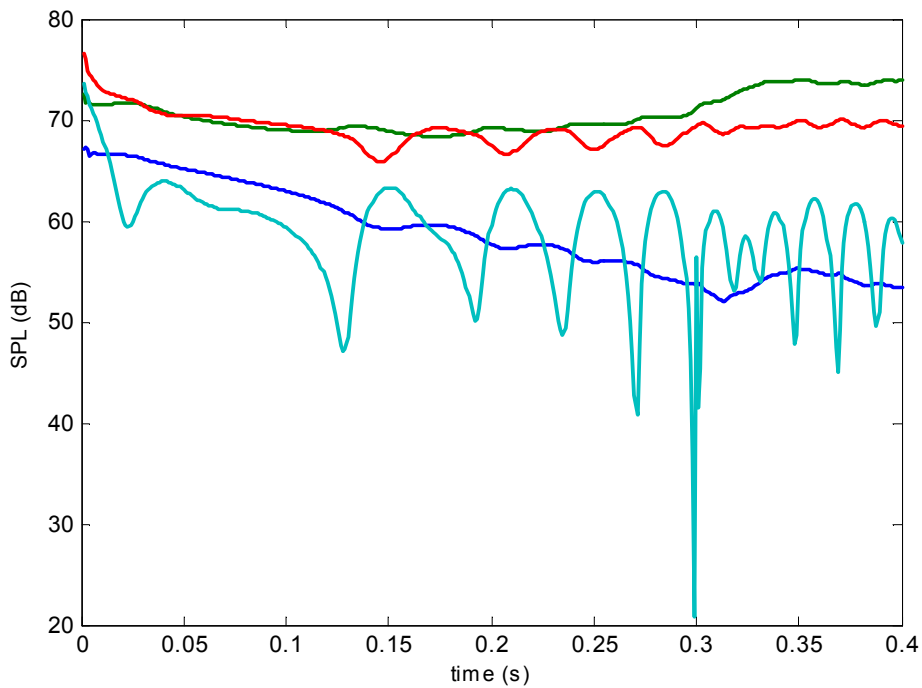
Για 600 Pascal εμφανίζεται ασαφής κατάσταση (διαγράμματα 2.15 και 2.16). Ενώ τέλος για πίεση 1000 Pascal φτάνουμε στην κατάσταση overblowing (διαγράμματα 2.17 και 2.18), κατά συμφωνία με

την ενότητα 2.5. Ωστόσο, το επίπεδο έντασης του τρίτου τρόπου είναι αρκετά υψηλότερο του δεύτερου, ώστε να δημιουργείται η εντύπωση τρίτης κατάστασης συντονισμού.

Πίεση 600 Pascal

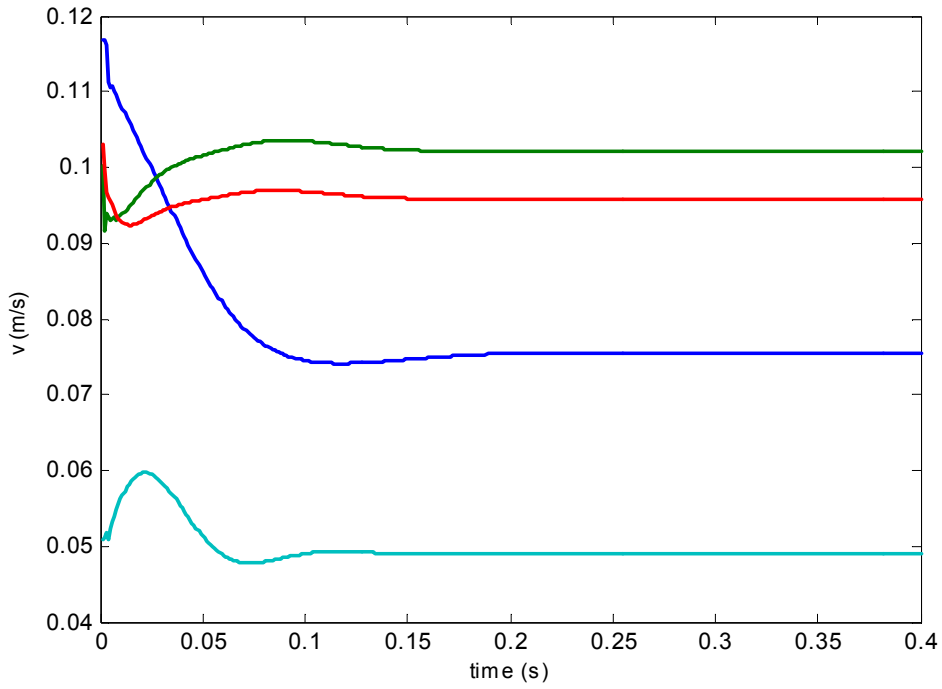


Διάγραμμα 2.15

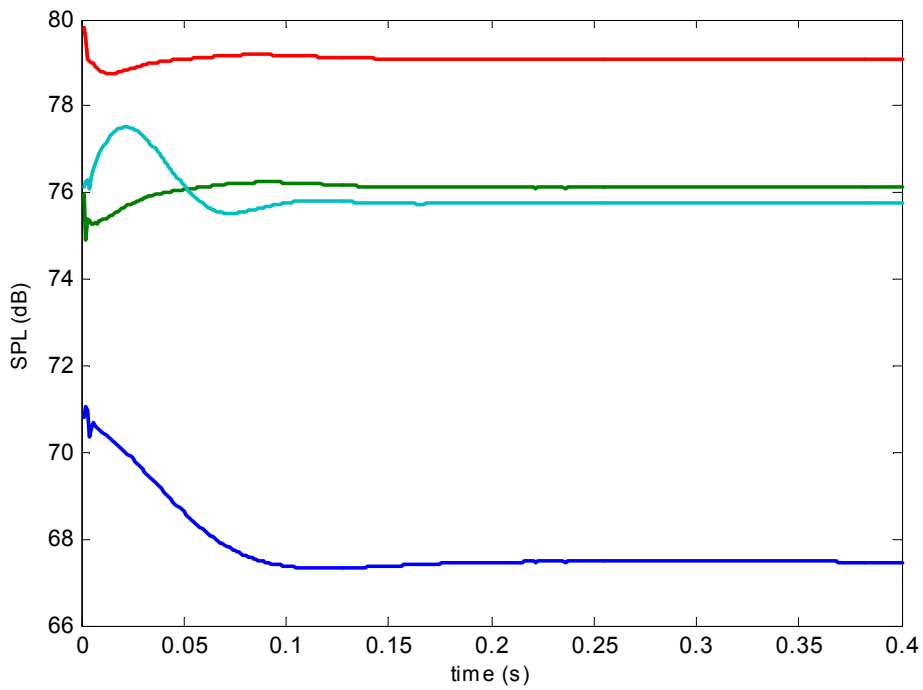


Διάγραμμα 2.16

Πίεση 1000 Pascal



Διάγραμμα 2.17



Διάγραμμα 2.18

2.10 Μέγιστη δυνατή ισχύς εξόδου

Μπορούμε να έχουμε μία εικόνα για το τη ισχύς θα μπορούσε να παραχθεί από έναν αυλό συγκεκριμένης γεωμετρίας, αν όλα ήταν ιδανικά (μηδενικές απώλειες συνεκτικότητας και θερμότητας, καμία σύζευξη στους τρόπους), εφαρμόζοντας μερικές απλές σκέψεις.

Η ισχύς που εισάγεται στον συντονιστή προσδιορίζεται αν πολλαπλασιάσουμε την πίεση πνοής με τη ροή του όγκου του ρευστού διαμέσου της flue σχισμής. Για μία σχισμή πλάτους D και πάχους W_0 η ροή είναι DW_0V_0 . Κατά συνέπεια η παρεχόμενη ισχύς είναι

$$\Pi = PDW_0V_0 \quad (2.105)$$

όπου P η πίεση πνοής. Αν θέλουμε να απαλείψουμε την ταχύτητα, εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli:

$$\Pi = \sqrt{\frac{2}{\rho}} DW_0 P^{3/2} \quad (2.106)$$

όπου ρ η πυκνότητα. Η σταθερή αυτή ισχύς εισόδου, αφού μετατραπεί σε ακουστική ισχύς εντός του σωλήνα, ακτινοβολείται σχεδόν ισόποσα από το άνοιγμα στο στόμα και το παθητικό άκρο. Η ηχητική ακτινοβολήση από το παθητικό άκρο, το οποίο έχει διαστάσεις πολύ μικρότερες από ένα μήκος κύματος, είναι σχεδόν απόλυτα ισοτροπική, ώστε η μέγιστη δυνατή ακουστική ένταση που αντιλαμβάνεται κάποιος, σε απόσταση R από το άκρο, είναι:

$$I_{\max} = \frac{\Pi}{4\pi R^2} \quad (2.107)$$

Αν θεωρήσουμε ότι το όργανο λειτουργεί σε ανηχοϊκές (anechoic) συνθήκες, το προκύπτον ηχητικό πεδίο αποτελείται από σφαιρικά κύματα (κεφάλαιο 5, Μέρος I), ώστε η ηχητική πίεση στην απόσταση R σχετίζεται με την ένταση μέσω της σχέσης:

$$I = \frac{P_{acoust}^2}{\rho c} \quad (2.108)$$

Αν τώρα η πυκνότητα του αέρα και η ταχύτητα του ήχου θεωρηθούν ίσες με αυτές μίας συνηθισμένης κλειστής αίθουσας, μπορούμε να γράψουμε μία αναλυτική έκφραση για το μέγιστο επίπεδο ηχητικής πίεσης που θα μπορούσε να παραχθεί από τον αυλό [31]:

$$L_{\max} = 107 + 10 \log_{10} \frac{DW_0}{R^2} + 15 \log_{10} P \quad (2.109)$$

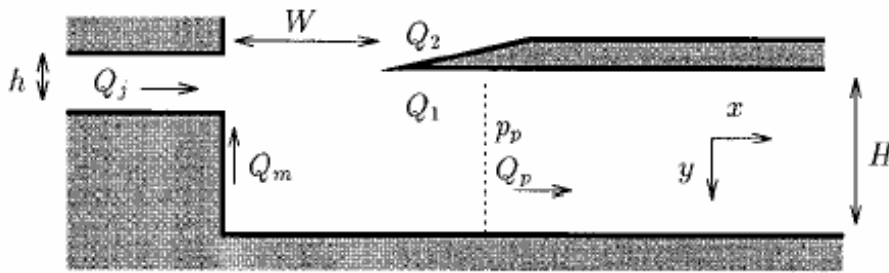
Το αποτέλεσμα προκύπτει σε dB πίεσης αναφοράς 20 μ Pa.

3

Time-domain αριθμητικό μοντέλο του M. P. Verge

3.1 Βασικό μοντέλο και εξισώσεις

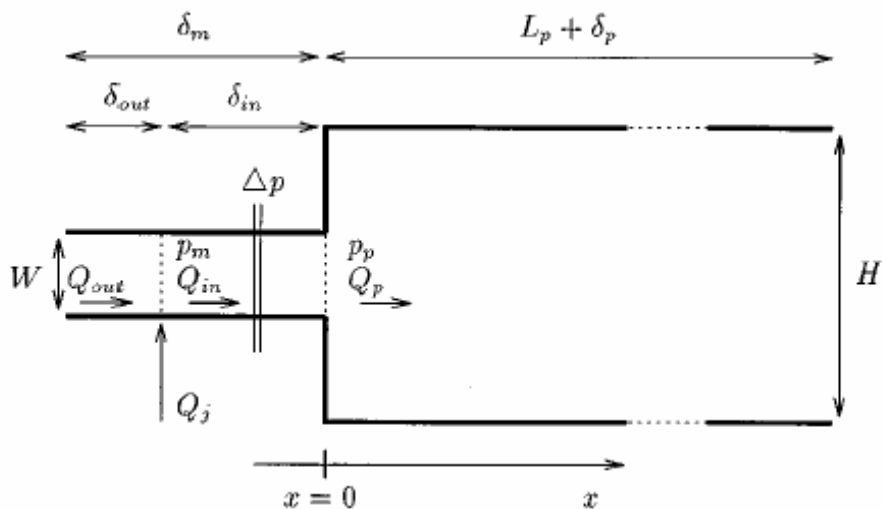
Θεωρούμε τον τετραγωνικό αυλό του σχήματος 3.1, στις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 3.1

Οι δύο διαστάσεις μπορούν με κατάλληλο τρόπο να συμπυκνωθούν σε μία. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 3.2. Ο συντονιστής παριστάνεται από έναν μεγάλο σωλήνα διατομής $S_p = H^2$ και ενεργού μήκους $L_p + \delta_p$, όπου L_p το γεωμετρικό του μήκος και δ_p η διόρθωση. Το στόμα του αυλού παριστάνεται από έναν μικρότερο σωλήνα διατομής $S_m = WH$, όπου W είναι η απόσταση μεταξύ σχισμής (flue exit) και άνω χειλούς (labium).

Θεωρούμε ότι το μοντέλο προορίζεται για χαμηλές συχνότητες. Επειδή σε αυτή την περίπτωση, η περιοχή του στόματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με τα μήκη κύματος που περιλαμβάνονται, μπορούμε, χωρίς μεγάλη ανακρίβεια, να δεχθούμε **ασυμπιεστή ροή**.

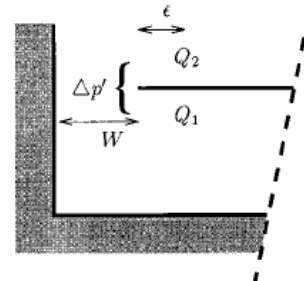


Σχήμα 3.2

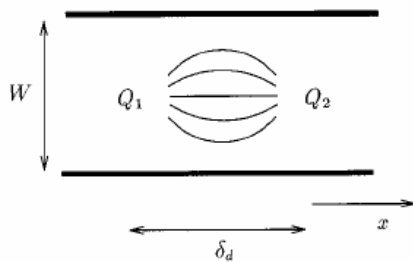
Η σύνθετη τώρα δισδιάστατη γεωμετρία του στόματος μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα ισοδύναμο κομμάτι σωλήνα, μήκους δ_m . Το μήκος αυτής της διόρθωσης καθορίζεται από τα φαινόμενα αδρανείας της ακουστικής ροής στην είσοδο του ακουστικού σωλήνα και στην παρεμπόδιση της λόγω της παρεμβολής του άνω χείλους. Η σχισμή, στο μονοδιάστατο μοντέλο, τοποθετείται σε μία απόσταση δ_{out} από το περιβάλλον και δ_{in} από την είσοδο του συντονιστή (ακουστικού σωλήνα), ώστε:

$\delta_m = \delta_{out} + \delta_{in}$. Λεπτομερή εξήγηση για τον καθορισμό των παραπάνω παραμέτρων μπορεί κανείς να βρει στις μελέτες του Verge και των συνεργατών του [EEE,81]. Η σχισμή, εκτός ότι είναι το σημείο όπου σχηματίζεται η δέσμη, θεωρείται και μία πηγή όγκου, που δρα ως πηγή ήχου (Κεφ. 5, Μέρος II), όταν η ταχύτητα της δέσμης U_j ταλαντώνεται [EEE,81].

Κατά τη μόνιμη κατάσταση, η δέσμη υποβάλλεται στην επίδραση της εγκάρσιας ακουστικής ροής Q_m , που ενεργεί αμέσως μετά τη σχισμή (σχήμα 3.1) και ελέγχει την παλινδρομική κίνηση της δέσμης στο στόμα του αυλού. Στο άνω χείλος, αυτή η κίνηση προκαλεί μία σύνθετη ροή, που μπορεί να αναπαρασταθεί από δύο πηγές ροής Q_1 και Q_2 , εκατέρωθεν του χείλους [EEE,80] και [20,26,68]. Οι δύο αυτές πηγές εισάγουν μία διαφορά πίεσης κάθετα στο στόμα του αυλού (σχήμα 3.3), που αναγκάζει την αέρια στήλη του συντονιστή να ταλαντωθεί, κατά συμφωνία με τον αναπτυσσόμενο jet-drive μηχανισμό (Κεφ.5, Μέρος II). Στο μονοδιάστατο μοντέλο, οι συμπληρωματικές αυτές πηγές μπορούν να αντιπροσωπευθούν από ένα δίπολο τοποθετημένο στη διόρθωση μήκους δ_m .



Σχήμα 3.3



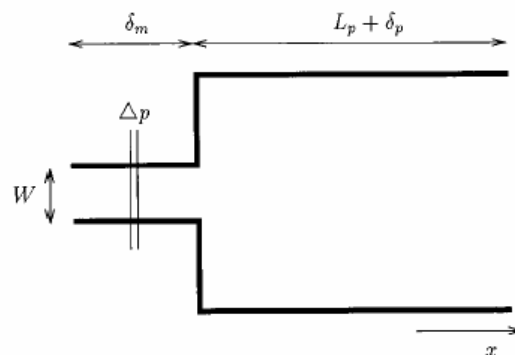
Σχήμα 3.4

από το άκρο του χείλους, η «ακουστική» απόσταση δ_d μεταξύ των πηγών (σχήμα 3.4), που καθορίζει και τη δύναμη του διπόλου, μπορεί να υπολογισθεί από τη δισδιάστατη γεωμετρία, κατά την προσέγγιση της ροής του δυναμικού, χρησιμοποιώντας τεχνικές conformal mapping [80]. Σε συμφωνία τώρα με τους Powell [69], Elder [25] και πιο πρόσφατα Coltman [18], θεωρείται ότι τα σημεία έγχυσης (των πηγών) είναι ακλόνητα τοποθετημένα, ανεξάρτητα από την ταχύτητα ροής της

δέσμης. Η απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων έγχυσης και του άκρου του χείλους εκτιμάται ότι είναι της τάξης μεγέθους του πάχους h της δέσμης. Αυτές οι αυθαίρετες παραδοχές παρέχουν εντούτοις λογικά αποτελέσματα. Ένα τέτοιο δίπολο προκαλεί ένα ταλαντούμενο άλμα πίεσης (pressure jump) Δp κάθετα στο κομμάτι σωλήνα που αντιπροσωπεύει το στόμα στο μονοδιάστατο μοντέλο (σχήματα 3.2 και 3.5).

Το μοντέλο διεγείρεται από ένα σήμα πίεσης (pressure signal) p_f , που αναπαριστά την πίεση στο πόδι του αυλού ή στο στόμα του μουσικού (για την περίπτωση, ας πούμε, του φλάουτου). Αμελώντας τριβές, μπορούμε να λάβουμε απ' την εξίσωση Bernoulli, μία σχέση μεταξύ της πτώσης πίεσης $p_f - p_m$ κατά μήκος του καναλιού (flue channel) του αυλού (Μέρος II, Κεφ. 4), όπου p_m η (ακουστική) πίεση μετά τη σχισμή και της προκύπτουσας ταχύτητας δέσμης U_j :

$$p_f - p_m = \rho_0 l_c \frac{dU_j}{dt} + \frac{1}{2} \rho_0 U_j^2 \quad (3.1)$$



Σχήμα 3.5

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα (του αέρα) και l_c το μήκος του καναλιού. Από τη συσχέτιση αυτή μπορούν να ληφθούν υπ' όψη μεταβολές της ταχύτητας δέσμης προερχόμενες από ταλαντώσεις πίεσης στη σχισμή [81].

Η διατήρηση της μάζας δίνει για το μονοδιάστατο μοντέλο (σχήμα 3.2):

$$Q_j + Q_{out} = Q_{in} \quad (3.2)$$

Έξω απ' τη σχισμή ($x = -\delta_{in}$), η πίεση p_m υπολογίζεται από την ακτινοβολούμενη ακουστική εμπέδηση Z_{out} [EEE] ή [83]:

$$\bar{Z}_{out} = \frac{p_m}{Q_{out}} = -\frac{\rho_0 c_0}{S_m} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\omega r_m}{c_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{c_0} \delta_{out} \right] \quad (3.3)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα, r_m η ακτίνα του κύκλου που έχει ίδια επιφάνεια με τη διατομή του στόματος, δηλ. $r_m = \sqrt{\frac{S_m}{\pi}}$ και c_0 η ταχύτητα του ήχου. Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε σε μία χρονική σχέση μεταξύ p_m και Q_{out} [80]:

$$p_m = \frac{\rho_0 c_0}{S_m} \left(\frac{1}{4} \frac{r_m^2}{c_0^2} \frac{d^2 Q_{out}}{dt^2} - \frac{\delta_{out}}{c_0} \frac{dQ_{out}}{dt} \right) \quad (3.4)$$

Η πίεση p_p τώρα στην είσοδο του συντονιστή μπορεί να συσχετισθεί με την πίεση p_m έξω απ' τη σχισμή, με χρήση της εξίσωσης Bernoulli στο κομμάτι σωλήνα, που αναπαριστά το στόμα:

$$p_p - p_m = -\frac{\rho_0 \delta_{in}}{S_m} \frac{dQ_{in}}{dt} + \Delta p \quad (3.5)$$

όπου υποτέθηκε ότι υπάρχει συνέχεια της πίεσης στην είσοδο του συντονιστή ($x=0$) και ο jet-drive μηχανισμός αναπαριστάται από ένα άλμα πίεσης Δp στη διόρθωση μήκους δ_{in} (σχήμα 3.2). Όπως θα δούμε αργότερα, και άλλοι μηχανισμοί παραγωγής ήχου, όπως η διάχυση δινών (vortex shedding) και ο θόρυβος στροβιλισμών (turbulence noise), μπορούν να συμπεριληφθούν σε αυτό το άλμα πίεσης.

Στην επιφάνεια ένωσης στόματος και συντονιστή η μάζα διατηρείται και λαμβάνουμε:

$$Q_p(0) = Q_{in}(0) \quad (3.6)$$

Όπου Q_p είναι η (ακουστική) ροή στο συντονιστή.

Τώρα το άλμα πίεσης Δp_{jd} που σχετίζεται αποκλειστικά με τον jet-drive μηχανισμό, καθορίζεται [EEE] ή [83] από την παράγωγο της πηγής Q_1 , η οποία αντιστοιχεί στην ποσότητα της δέσμης που εισέρχεται στο συντονιστή, κάτω απ' το άνω χείλος (σχήμα 3.3).

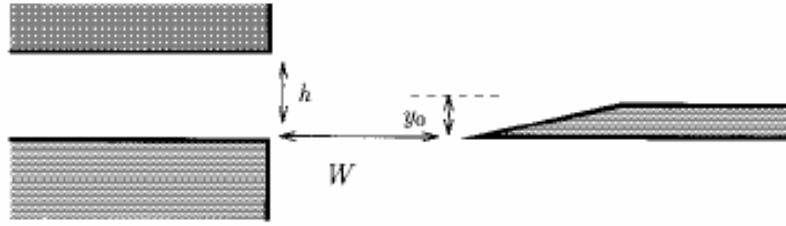
$$\Delta p_{jd} = -\frac{\rho_0 \delta_d}{S_m} \frac{dQ_1}{dt} \quad (3.7)$$

όπου δ_d είναι, όπως αναφέρθηκε, η ακουστική απόσταση μεταξύ των πηγών, στο μονοδιάστατο μοντέλο. Όταν δεν ληφθούν υπ' όψη άλλα άλματα εκτός απ' το Δp_{jd} , ισχύει απλά $\Delta p = \Delta p_{jd}$.

Η ροή Q_1 υπολογίζεται, όπως πρότειναν οι Cremer και Ising [22], από τη θέση της δέσμης $\eta(W, t)$ στο άνω χείλος:

$$Q_1 = H \int_{(y_0-\eta)}^{\infty} U_j(0) dy \quad (3.8)$$

όπου H είναι το πλάτος της δέσμης (τετραγωνικός αυλός), y_0 η θέση του άκρου του άνω χείλους, σε σχέση με το κέντρο της σχισμής (σχήμα 3.6), με θετική φορά προς το εσωτερικό του αυλού.



Σχήμα 3.6

Επειδή το προφίλ της ταχύτητας της δέσμης είναι κατά μεγάλη προσέγγιση bell-shaped (Μέρος II, Κεφ. 5), δηλ. $U_j(y) = U_0 \sec h^2\left(\frac{y}{b}\right)$, η ροή της πηγής είναι:

$$Q_1 = bHU_0 \left[1 + \tanh\left(\frac{\eta - y_0}{b}\right) \right] \quad (3.9)$$

όπου U_0 η κεντρική ταχύτητα και b η παράμετρος πλάτους.

Το μονοδιάστατο μοντέλο μπορεί να περιγραφεί πλήρως με τις εξισώσεις (3.1) έως (3.9). Το επόμενο στάδιο είναι ο συνδυασμός τους.

3.2 Μοντελοποίηση των ταλαντώσεων της δέσμης

Ο Verge [EEE,80] χρησιμοποιεί μία τροποποίηση της μετατόπισης της δέσμης που πρότεινε ο Fletcher (Μέρος II, Κεφ. 5), ακολουθώντας τη μελέτη του Powel [68]:

$$\eta(W, \omega) = \frac{1}{j\omega} \left(\frac{2 Q_p}{\pi S_m} - \frac{0,38 Q_1'}{S_m} \right) \left[1 - \cosh(\mu W) \exp\left(\frac{-j\omega W}{u}\right) \right] \quad (3.10)$$

όπου μ είναι ο παράγων αύξησης και u η ταχύτητα διαταραχών στη δέσμη. Η ροή Q_1' ορίζεται απ' τη σχέση:

$$Q_1' = Q_1 - \frac{1}{2} bHU_0 \quad (3.11)$$

Παρατηρώντας προσεκτικά τη σύνθετη αυτή σχέση, βλέπουμε ότι συμπεριλαμβάνονται τα τρία κύρια στοιχεία που καθορίζουν τη συμπεριφορά της δέσμης:

1) Οι όροι στην παρένθεση της εξίσωσης (3.10) περιγράφουν την εγκάρσια ακουστική ταχύτητα v_m που επιδρά κάθετα στην κατεύθυνση της δέσμης ακριβώς στο σημείο που εκτοξεύεται, δηλαδή μετά τη σχισμή:

$$v_m = \frac{2 Q_p}{\pi S_m} - \frac{0,38 Q_1'}{S_m} \quad (3.12)$$

Αυτή η ταχύτητα είναι το άθροισμα αφενός της συμβολής του ακουστικού πεδίου λόγω του σωλήνα, αφετέρου μίας υδροδυναμικής ανάδρασης λόγω του άκρου του άνω χείλους, κάτι που μπορεί να εκληφθεί ως edge tone [EEE] ή [80].

2) Το υπερβολικό συννημίτονο της εξίσωσης (3.10) περιγράφει την ενίσχυση των διαταραχών στη δέσμη, όπως αυτή καθορίζεται από τον ενισχυτικό παράγοντα μ .

3) Τέλος, ο σύνθετος εκθέτης αντιπροσωπεύει την καθυστέρηση φάσης, δηλαδή τη χρονική καθυστέρηση, εξ' αιτίας της μετάδοσης των διαταραχών από τη σχισμή προς το άνω χείλος με ταχύτητα μικρότερη από αυτή της ίδιας της δέσμης (φασική ταχύτητα u).

Η μονάδα πριν το υπερβολικό συννημίτονο περιγράφει την οριακή συνθήκη μηδενικής μετατόπισης της δέσμης αμέσως έξω απ' τη σχισμή.

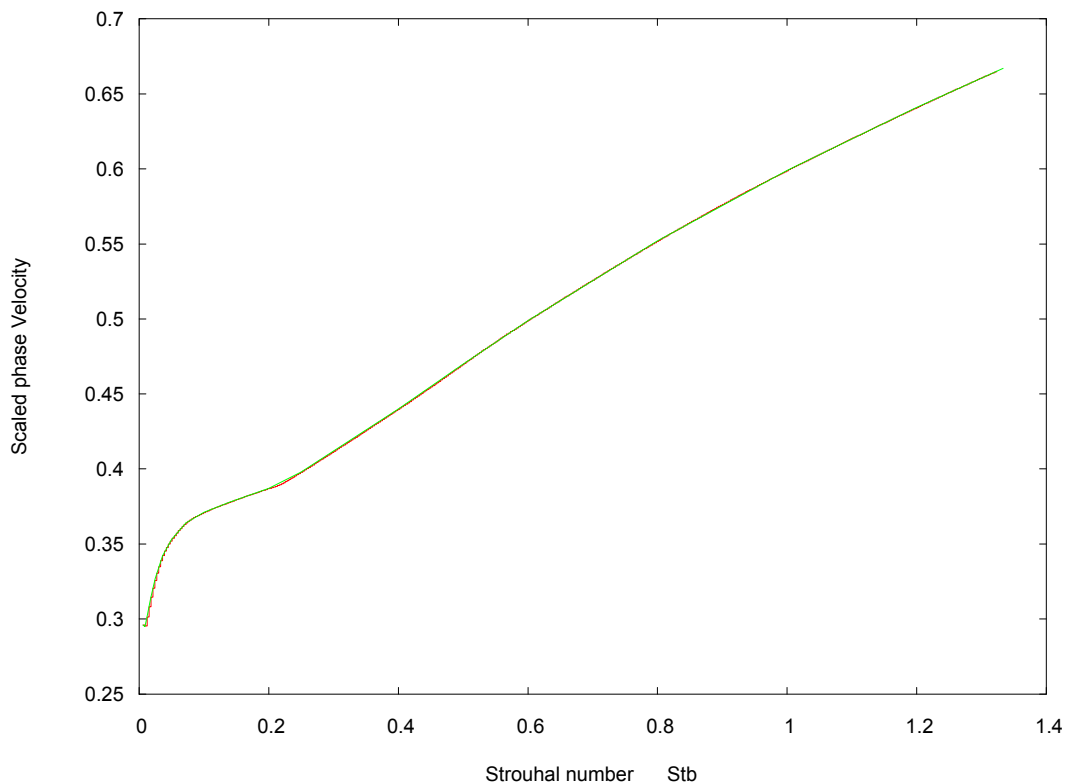
Οι παράμετροι μ και u

Έχουν περιγραφεί όλα τα απαραίτητα για τις ουσιώδεις παραμέτρους μ και u στο κεφάλαιο 5 (Μέρος II). Στο εξής, για να μη συγχεώμαστε με άλλες παραμέτρους, θα καλούμε αυτές τις δύο παράγοντες.

Οι παράγοντες αυτοί εξαρτώνται απ' τον αριθμό Strouhal $\left(St_b = \frac{\omega b}{U_0} \right)$ και ο πιο αξιόπιστος υπολογι-

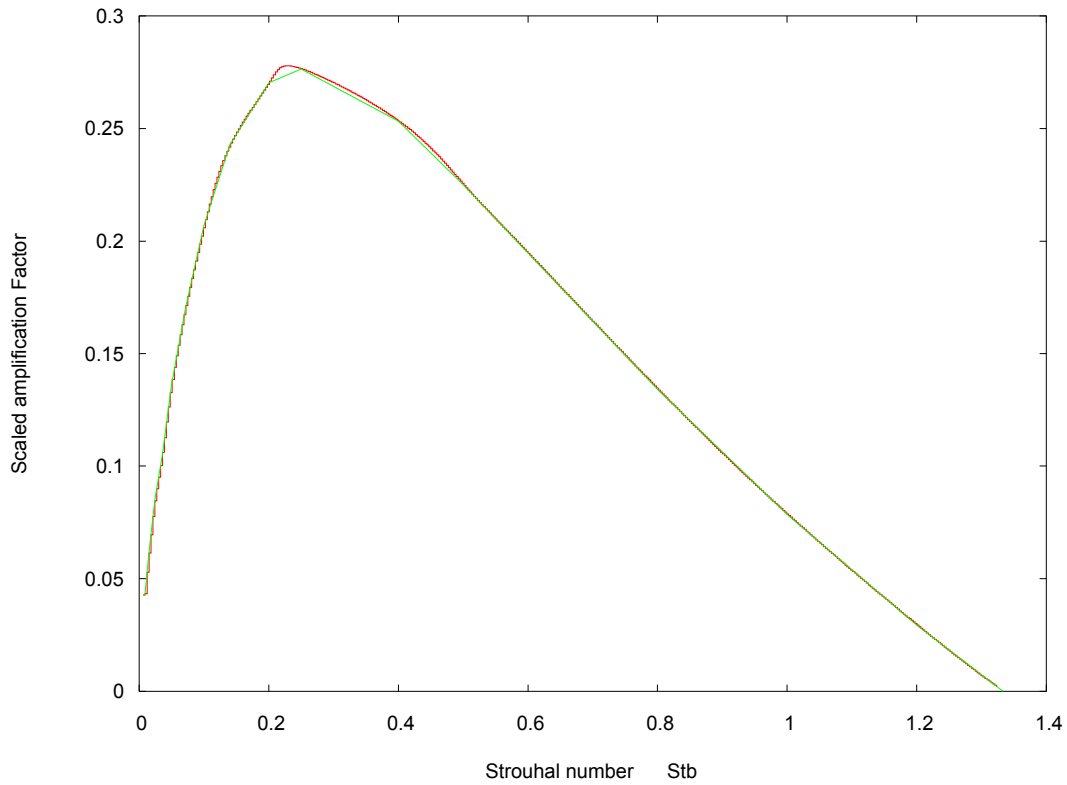
σμός τους, μέχρι που ο Verge έβγαζε το μοντέλο του, ήταν από τους Mattingly και Criminale [55]. Αμέσως μετά ο Nolle τους υπολόγισε πάλι (1998) και δημοσίευσε πίνακα με τα αποτελέσματα [62]. Με βάση αυτόν τον πίνακα μπορούμε να χαράξουμε τις καμπύλες του σχήματος 5.5 του Κεφ. 5 (Μέρος II).

Στα διαγράμματα 3.7 και 3.8 φαίνονται οι 19 τιμές που δίνει ο Nolle στη δημοσίευσή του και δύο τύποι παρεμβολών. Η πράσινη γραμμή είναι μία απλή γραμμική παρεμβολή που εκτελέστηκε με το λογισμικό γραφημάτων *Gnuplot*. Η κόκκινη γραμμή προέκυψε με κυβικές Splines [A]. Παρατηρούμε ότι στο διάγραμμα 3.7 τόσο η γραμμική όσο και η Spline παρεμβολή οδηγούν σε καλό αποτέλεσμα. Όμως το διάγραμμα 3.8 παρουσιάζει μία δυσάρεστη ταλαντωτική συμπεριφορά στην περιοχή αλλαγής μονοτονίας, δηλαδή στην κορυφή του και γενικά δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει πολύ καλή παρεμβολή. Αυτό αποτελεί πρόβλημα για το μοντέλο της δέσμης και σε λίγο θα δούμε το γιατί και πως το αντιμετωπίζουμε.



Διάγραμμα 3.7

Εξάρτηση της φασικής ταχύτητας διαταραχών στη δέσμη u (σε ποσοστό της αρχικής ταχύτητας της δέσμης U_0) από τον αριθμό Strouhal, $St_b = \omega b / U_0$. Η κόκκινη γραμμή είναι με κυβικές Splines, ενώ η πράσινη με γραμμική παρεμβολή.



Διάγραμμα 3.8

Εξάρτηση του αδιάστατου παράγοντα αύξησης (amplification factor) μ b από τον αριθμό Strouhal, $St_b = \omega b / U_0$. Η κόκκινη γραμμή είναι με κυβικές Splines, ενώ η πράσινη με γραμμική παρεμβολή.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε το μέτρο της σχέσης (3.10) αν τη φέρουμε σε μορφή ενός κοινού μιγαδικού αριθμού. Με την ισχύ της ταυτότητας:

$$\exp(-j\psi) = \cos\psi - j \sin\psi$$

λαμβάνουμε:

$$\eta(W, \omega) = \frac{-j}{\omega} v_m \left\{ 1 - \cosh(\mu W) \left[\cos \frac{\omega W}{u} - j \sin \frac{\omega W}{u} \right] \right\}$$

και εν συνεχεία:

$$\eta(W, \omega) = \left\{ \left(\cosh(\mu W) \sin \frac{\omega W}{u} \right) \frac{v_m}{\omega} \right\} + j \left\{ \left(\cosh(\mu W) \cos \frac{\omega W}{u} - 1 \right) \frac{v_m}{\omega} \right\} \quad (3.13)$$

Άρα το μέτρο είναι:

$$|\eta(W, \omega)| = \frac{|v_m|}{\omega} \sqrt{\left(\cosh(\mu W) \sin \frac{\omega W}{u} \right)^2 + \left(\cosh(\mu W) \cos \frac{\omega W}{u} - 1 \right)^2} \quad (3.14)$$

Ο Verge [EEE] προτείνει μία εναλλακτική σχέση που διαχωρίζει την επίδραση του παράγοντα ενίσχυσης από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού και αντιμετωπίζει ξεχωριστά την ενίσχυση από την καθυστέρηση στη δέσμη:

$$\eta(W, \omega) = \frac{1}{j\omega} \left(\frac{2 Q_p}{\pi S_m} - \frac{0,38 Q_1'}{S_m} \right) \left\{ [1 - \cosh(\mu W)] \exp\left(\frac{-j\omega W}{u}\right) \right\} \quad (3.15)$$

Ομοίως με πριν, φέρνουμε τη σχέση σε μορφή μιγαδικού αριθμού:

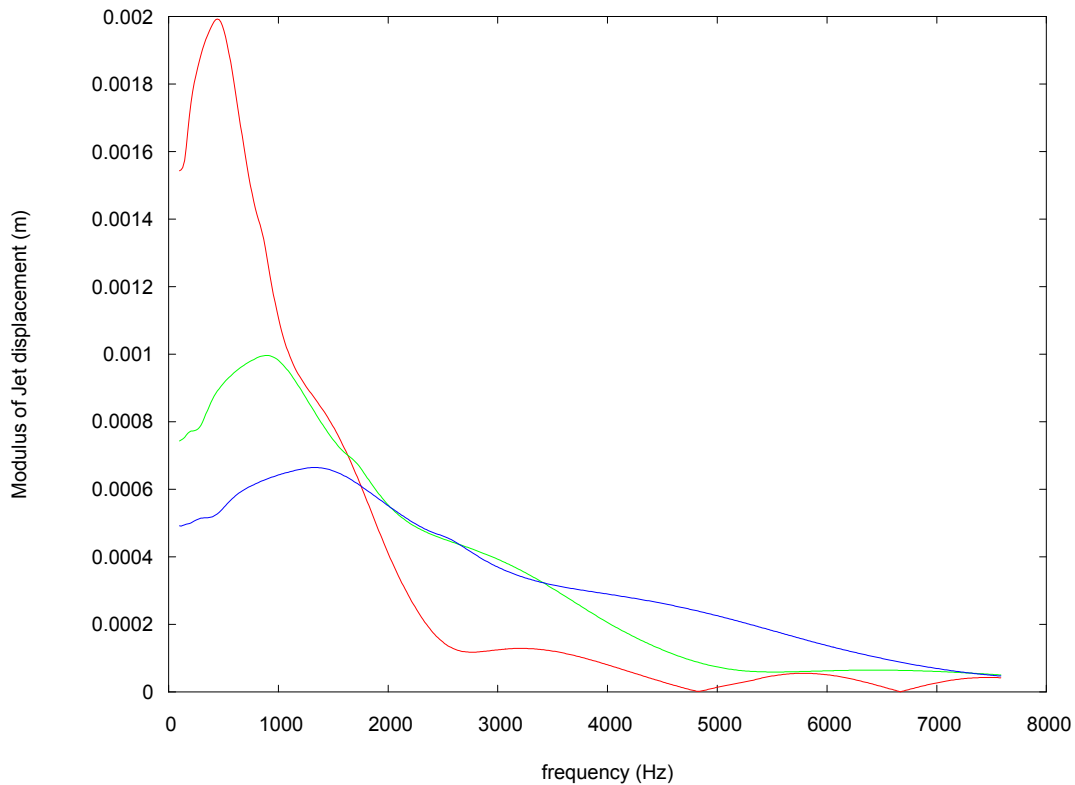
$$\eta(W, \omega) = \frac{1}{\omega} v_m [1 - \cosh(\mu W)] \left(-\sin \frac{\omega W}{u} - j \cos \frac{\omega W}{u} \right) \quad (3.16)$$

και λαμβάνουμε το μέτρο:

$$|\eta(W, \omega)| = \frac{1}{\omega} |v_m [1 - \cosh(\mu W)]| \sqrt{\sin^2 \frac{\omega W}{u} + \cos^2 \frac{\omega W}{u}} \quad (3.17)$$

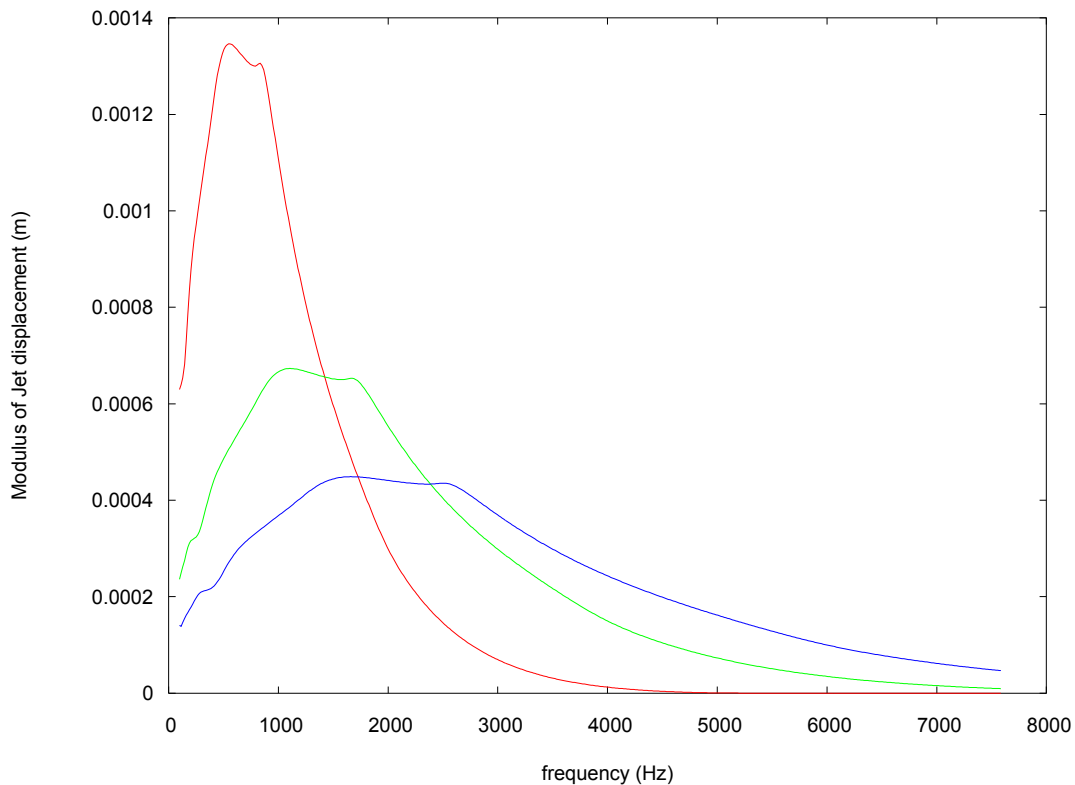
Σε πρώτη φάση μπορούμε να πάρουμε τη γραφική παράσταση των σχέσεων (3.14) και (3.17), ως συνάρτηση της συχνότητας και για διάφορες ταχύτητες δέσμης, αντικαθιστώντας τη μεταβολή των τιμών των παραγόντων από τα διαγράμματα 3.7 και 3.8. Για την ώρα, η ταχύτητα του ακουστικού πεδίου αφενός δεν μπορεί να υπολογισθεί αν δε γνωρίζουμε τη ροή του σωλήνα $Q_p(0)$ και της πηγής Q_1 , αφετέρου δεν μας απασχολεί ιδιαίτερα γιατί απλά μετατοπίζει ολόκληρη την καμπύλη, χωρίς να αλλάζει τη μορφή της. Δεχόμαστε αυθαίρετα $v_m = 1$ m/s.

Η γραφική παράσταση της σχέσης (3.14) για ταχύτητες 10 m/s, 20 m/s και 30 m/s, με σταθερές της μεταβλητές $W=0,004$ m και $b=0,4h$, φαίνεται στο διάγραμμα 3.9, ενώ η γραφική παράσταση της (3.17) για τις ίδιες παραμέτρους φαίνεται στο διάγραμμα 3.10.



Διάγραμμα 3.9

Γραφική παράσταση της σχέσης (3.14) συναρτήσει της συχνότητας για ταχύτητες δέσμης: 10 m/s (κόκκινη γραμμή), 20 m/s (πράσινη γραμμή) και 30 m/s (μπλε γραμμή).



Διάγραμμα 3.10

Γραφική παράσταση της σχέσης (3.17) συναρτήσει της συχνότητας για ταχύτητες δέσμης: 10 m/s (κόκκινη γραμμή), 20 m/s (πράσινη γραμμή) και 30 m/s (μπλε γραμμή).

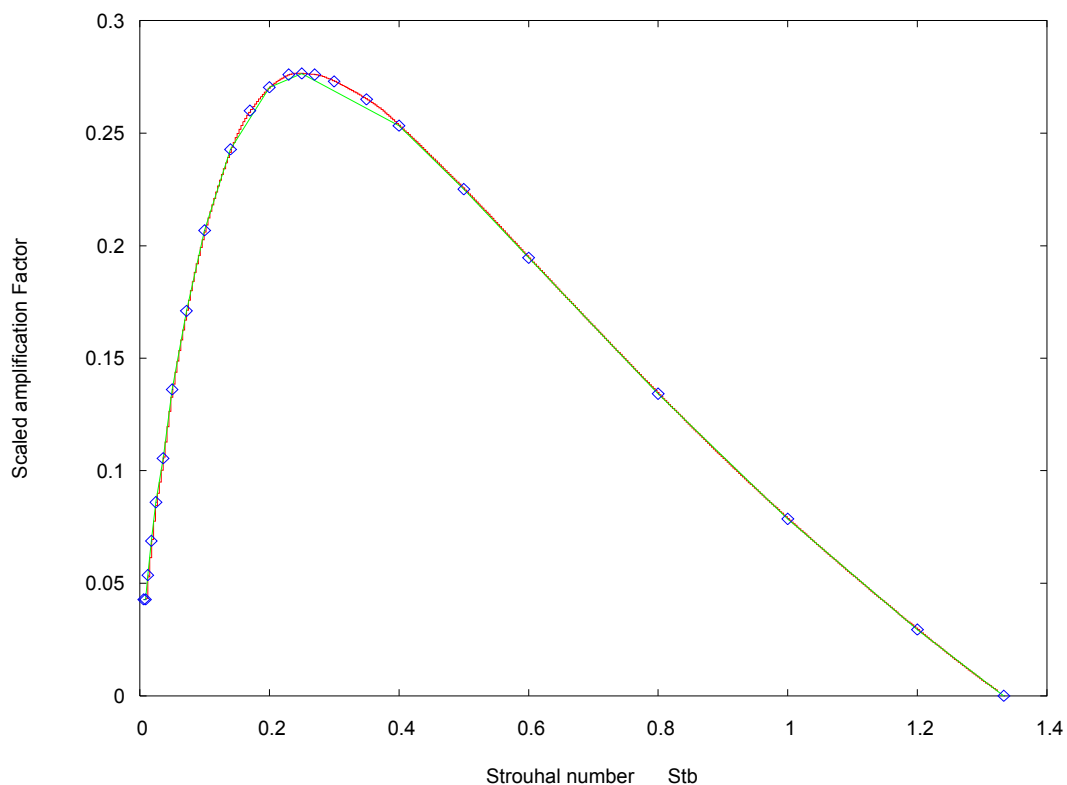
Ένα σημαντικό ζήτημα τίθεται τώρα για τις καμπύλες 3.7 και 3.8. Ο παράγοντας $\cosh(\mu W)$ είναι εξαιρετικά ευαίσθητος στις μεταβολές του μ . Στο διάγραμμα 3.9 τα πράγματα είναι κάπως ομαλά, αλλά στο 3.10 εμφανίζονται ανωμαλίες στην περιοχή που η παρεμβολή του διαγράμματος 3.8 δεν είναι καλή. Κοιτάμε να εξομαλύνουμε όσο περισσότερο γίνεται τις καμπύλες και κυρίως τη δεύτερη, γιατί πάνω απ' όλα μας ενδιαφέρει η κορυφή της. Για να το πετύχουμε αυτό, δύο ιδέες έρχονται. Η μία είναι να προγραμματίσουμε κυβικές B-Splines [A], για να παρεμβάλουμε καλύτερα τις τιμές του Nolle. Η δεύτερη πιο πρόχειρη αλλά και πιο άμεση είναι να παρεμβάλλουμε μερικές ακόμα τιμές «με το μάτι», στις ήδη υπάρχουσες του Nolle και να ξαναεφαρμόσουμε κυβικές Splines. Αυτό το πετυχαίνουμε «παίζοντας» με το Gnuplot. Το αποτέλεσμα δεν είναι πολύ αυθαίρετο γιατί απλά ακολουθούμε την πορεία των τιμών και κατευθύνουμε καλύτερα τα πολυώνυμα Splines στην περιοχή μεγάλης καμπυλότητας. Ο πίνακας 3.11 δίνει τις τιμές του Nolle και τις δικές μας εμβόλιμες. Οι εμβόλιμες είναι με πλάγια.

Scaled frequency $St_b = \omega b / U_0$	Scaled phase velocity u/U	Scaled amplification factor μb
0,00625	0,296	0,0428
0,009	0,295	0,0428
0,0125	0,302	0,0536
0,018	0,314	0,0688
0,025	0,327	0,0860
0,036	0,342	0,1055
0,05	0,353	0,1361
0,072	0,364	0,1710
0,01	0,371	0,2068
0,014	0,378	0,2428
0,017	0,3823	0,2600

0,2	0,387	0,2704
0,23	0,395	0,2760
0,25	0,400	0,2765
0,27	0,4054	0,2760
0,3	0,414	0,2730
0,35	0,427	0,2650
0,4	0,440	0,2533
0,5	0,470	0,2251
0,6	0,499	0,1946
0,8	0,552	0,1342
1,0	0,599	0,0786
1,2	0,641	0,0294
1,33	0,667	0,0000

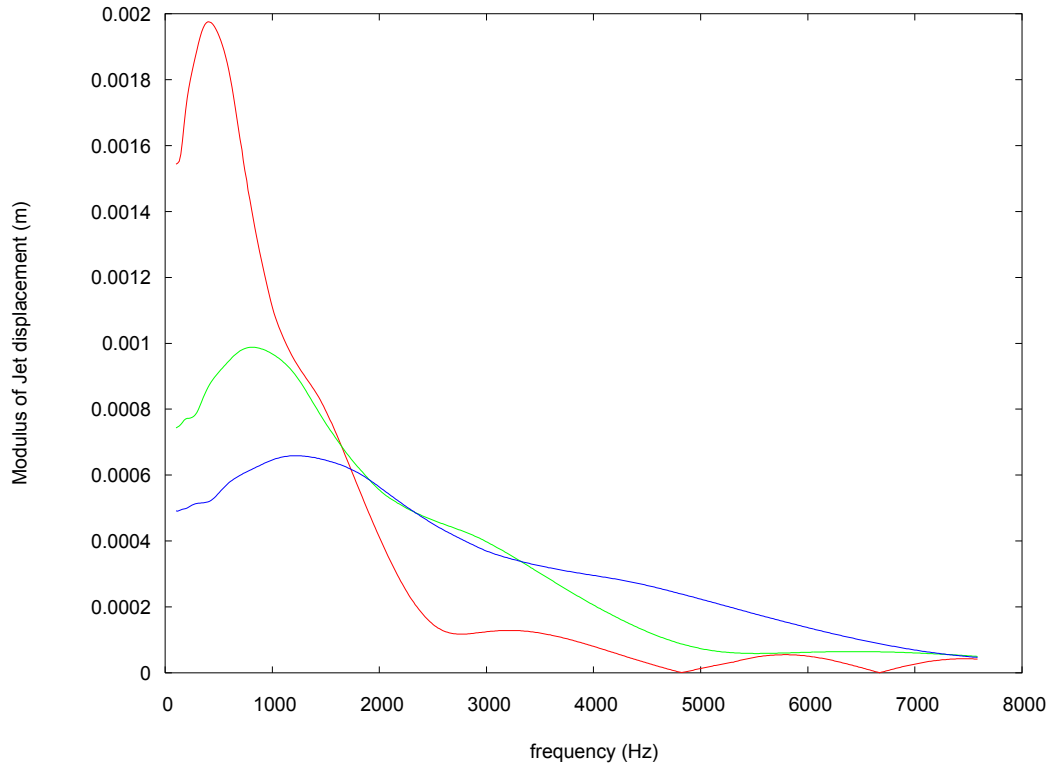
Πίνακας 3.11

Στο διάγραμμα τώρα 3.12 βλέπουμε πόσο καλύτερα έχει παρεμβληθεί η καμπύλη mb στις τιμές του Nolle και με χρήση των εμβόλιμων του πίνακα 3.11. Για τη μεταβολή της φασικής ταχύτητας κάνουμε το ίδιο, αλλά εδώ η διαφορά είναι ασήμαντη. Μπορεί κάποιος να συμβουλευτεί για την ώρα το διάγραμμα 3.7. Η γραφική παράσταση της 3.14 παρουσιάζει ομαλότερη συμπεριφορά (διάγραμμα 3.13), ενώ της (3.17) είναι αισθητά ικανοποιητική (διάγραμμα 3.14).



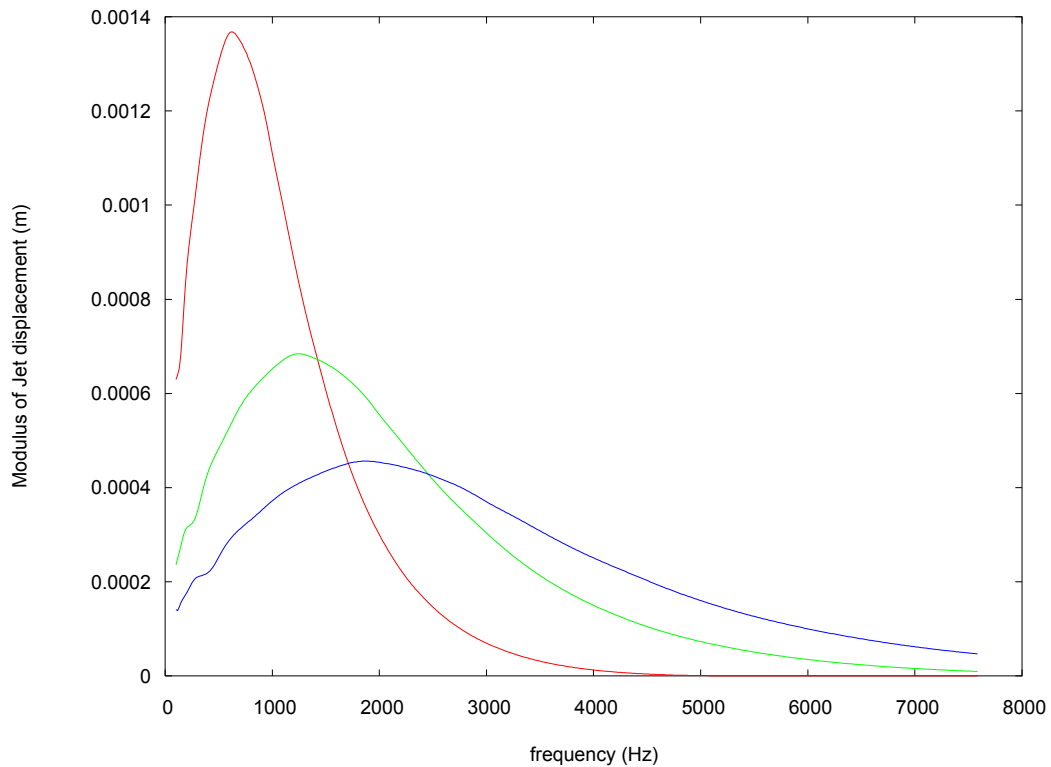
Διάγραμμα 3.12

Τελική καμπύλη μεταβολής του μεγέθους mb ως προς τον αριθμό Strouhal $St_b = \omega b / U_0$. Με πράσινο είναι η αρχική γραμμική παρεμβολή και με κόκκινο η τελική κυβική Spline παρεμβολή με τις τιμές του πίνακα 3.11 (μπλε τετραγωνάκια).



Διάγραμμα 3.13

Γραφική παράσταση της σχέσης (3.14) συναρτήσει της συχνότητας για ταχύτητες δέσμης: 10 m/s (κόκκινη γραμμή), 20 m/s (πράσινη γραμμή) και 30 m/s (μπλε γραμμή), με βάση τις τιμές του πίνακα 3.11.



Διάγραμμα 3.14

Γραφική παράσταση της σχέσης (3.17) συναρτήσει της συχνότητας για ταχύτητες δέσμης: 10 m/s (κόκκινη γραμμή), 20 m/s (πράσινη γραμμή) και 30 m/s (μπλε γραμμή), με βάση τις τιμές του πίνακα 3.11.

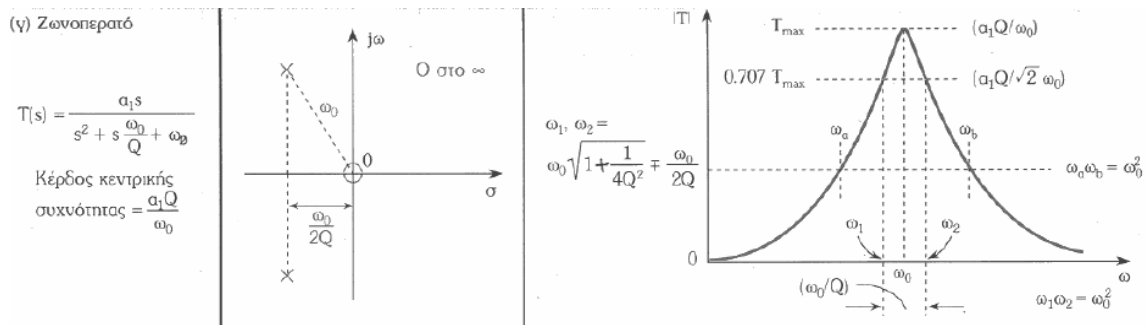
Χρήση ηλεκτρονικών φίλτρων

Από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις βλέπουμε πόσο ιδιότυπα συμπεριφέρεται η δέσμη σε σχέση με τη συχνότητα ταλάντωσής της. Παρατηρούμε σε όλα τα γραφήματα ότι το μέγιστο πλάτος μετατοπίζεται δεξιότερα και μικραίνει, όσο αυξάνεται η ταχύτητα δέσμης. Για την ίδια δε ταχύτητα, η εκτροπή μικραίνει όσο αυξάνεται η συχνότητα της ταλάντωσής της. Παρατηρούμε επίσης ότι η σχέση (3.15) περιγράφει πιο ομαλά τη μετατόπιση της δέσμης από την (3.10). Χωρίς βέβαια αυτό να είναι απαραίτητα και ρεαλιστικό. Όλες οι καμπύλες ξεκινούν από 100 Hz. Η (3.10) ξεκινά από πολύ μεγαλύτερο πλάτος μετατόπισης από ότι η (3.15) για το κατώφλι των 100 Hz.

Οι προτεινόμενες τώρα σχέσεις (3.10) και (3.15), παρουσιάζουν μία εξωπραγματική συμπεριφορά για $\omega \rightarrow 0$, καθότι απειρίζονται, εξ' αιτίας του παράγοντα $1/j\omega$ [EEE,83]. Άρα δεν μας βοηθούν για να έχουμε ένα πλήρες μοντέλο περιγραφής για όλες τις συχνότητες. Επίσης η φασική ταχύτητα και ο παράγων ενίσχυσης εξαρτώνται απ' τη συχνότητα και εν γένει όλη η σχέση εκφράζεται στο πεδίο της συχνότητας, όντας αδύνατο να βρεθεί αναλυτική περιγραφή στο πεδίο του χρόνου [EEE,83], την οποία και χρειαζόμαστε για το πρόγραμμά μας.

Ο Verge ξεπερνά αυτά τα προβλήματα αναπαριστώντας τη συμπεριφορά των σχέσεων (3.10) και (3.15) με τη συνάρτηση μεταφοράς ενός κατάλληλα εκλεγμένου ηλεκτρονικού φίλτρου [O]. Το πλεονέκτημα στην περίπτωση αυτή είναι ότι μπορούμε εν τέλει να πάρουμε μία διαφορική εξίσωση στο πεδίο του χρόνου.

Πρώτα απ' όλα θα πρέπει το φίλτρο μας να άρει τη λανθασμένη συμπεριφορά των σχέσεων (3.10) και (3.15) για $\omega \rightarrow 0$. Αν θέλουμε η καμπύλη του διαγράμματος 3.14 να συνεχίζει προς τα αριστερά για $\omega \rightarrow 0$ και μάλιστα να μηδενίζεται όταν $\omega = 0$, θα πρέπει να στραφούμε σε ζωνοπερατά φίλτρα 2^{ης} τάξης [O]. Το σχήμα 3.15 δείχνει τα κύρια στοιχεία ενός τέτοιου φίλτρου.



Σχήμα 3.15

Ζωνοπερατό φίλτρο 2^{ης} τάξης και τα κύρια στοιχεία του [L].

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου έχει το γενικό τύπο:

$$T(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \tag{3.18}$$

όπου αριθμητής και παρονομαστής είναι σε μετασχηματισμό Laplace, ω_0 είναι η κεντρική συχνότητα και Q ο συντελεστής ποιότητας πόλου [O]. Ο παρονομαστής παριστάνει μία ημιτονική διέγερση (σήμα) με συχνότητα ω , που εισέρχεται στο φίλτρο, ενώ ο αριθμητής ένα άλλο ημιτονικό σήμα ίδιας συχνότητας, αλλά κατά κανόνα διαφορετικής φάσης, που προκύπτει στην έξοδο του φίλτρου. Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς δίνονται απ' τη σχέση:

$$p_1, p_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{3.19}$$

Όταν $Q > 0,507$, οι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί και το φίλτρο εμφανίζει υψηλότερη επιλεκτικότητα από τη περίπτωση πραγματικών πόλων [O]. Εξάλλου, σε αυτή την περίπτωση, οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και το φίλτρο εμφανίζει υποαπόσβεση, όντας ισχυρά ευσταθές [F]. Όταν $Q = 0,707$, η συνάρτηση μεταφοράς περιγράφει ένα καθαρό ζωνοπερατό Butterworth φίλτρο. Για να βρούμε τώρα την απόκριση του φίλτρου με τη μεταβολή της συχνότητας, αρκεί πρώτα να θέσουμε $s \rightarrow j\omega$ στη σχέση (3.18):

$$T(j\omega) = \frac{a_1(j\omega)}{(j\omega)^2 + (j\omega)\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Με απλές πράξεις παίρνουμε:

$$T(j\omega) = \frac{a_1\omega}{\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right) + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Στη συνέχεια, η απόκριση σε μία συχνότητα θα είναι ίση με το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς για την συχνότητα αυτή, δηλαδή:

$$|T(j\omega)| = |T| = \frac{a_1\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (3.20)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα (3.15) ορισμένες μόνο συχνότητες εμφανίζουν μεγάλη απόκριση. Αυτές είναι που ουσιαστικά αφήνονται να διαπεράσουν το φίλτρο. Το σήμα εξόδου ενός ζωνοπερατού φίλτρου υπολείπεται χρονικά του σήματος εισόδου. Η φάση του επομένως είναι αρνητική [F,J] και δίνεται απ' τον τύπο [O]:

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{Q(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega_0\omega}\right) \quad (3.21)$$

Ένα χρήσιμο μέγεθος στη μελέτη των φίλτρων είναι το εύρος ζώνης (Bandwidth), που δίνεται από την έκφραση:

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.22)$$

όπου:

$$\omega_1, \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{\omega_0}{2Q} \quad (3.23)$$

Όπως τέλος φαίνεται και στο σχήμα 3.15, η μέγιστη απόκριση του φίλτρου ισούται με

$$|T|_{\max} = \frac{a_1Q}{\omega_0} \quad (3.24)$$

Με φρεσκαρισμένες τώρα αυτές τις στοιχειώδεις γνώσεις, μπορούμε να προχωρήσουμε στον αλγόριθμο προσέγγισης της καμπύλης μετατόπισης της δέσμης των διαγραμμάτων 3.13 ή 3.14 για μία δεδομένη ταχύτητα.

Θεωρούμε όπως και πριν αυθαίρετα την ακουστική ταχύτητα v_m ίση με τη μονάδα. Αρχικά πρέπει να βρούμε για ποια συχνότητα μεγιστοποιείται το μέτρο της μετατόπισης του μοντέλου (3.10) ή του (3.15). Αυτή θα είναι και η κεντρική συχνότητα του φίλτρου ω_0 . Πετυχαίνουμε έτσι τη σύμπτωση των κορυφών των καμπυλών του μέτρου της μετατόπισης και του φίλτρου.

Έπειτα, θέλουμε να βρούμε το Q εκείνο που δίνει στο φίλτρο το απαραίτητο Bandwidth για να ταιριάζει ικανοποιητικά στην καμπύλη μετατόπισης. Αρχίζοντας από $Q > 0,507$, προχωρούμε βαθ-

μιαία αυξάνοντας το κατά ποσότητα αντίστοιχη της ακρίβειας που απαιτούμε και υπολογίζουμε κάθε φορά τη σταθερά a_1 μέσω της σχέσης (3.24), όπου θέτουμε

$$|T|_{\max} = |\eta(W, \omega)|_{\max}$$

Έχουμε λοιπόν σε κάθε βήμα Q γνωστές όλες τις σταθερές της συνάρτησης μεταφοράς.

Όπως αναλύει ο Verge [EEE], θέλουμε το φίλτρο να παριστάνει ικανοποιητικά τις ταλαντώσεις της δέσμης για τη θεμελιώδη συχνότητα του συστήματος και τις πρώτες αρμονικές του. Άρα σε εκείνες συχνότητες πρέπει να δίνει παραπλήσια απόκριση με την εξίσωση της δέσμης. Επειδή η θεμελιώδης συχνότητα μεταβάλλεται ανάλογα με την ταχύτητα της δέσμης μία καλή πρακτική είναι να εκφράσουμε τις σχέσεις (3.14) και (3.17), όπως και την απόκριση του φίλτρου ως προς τον αριθμό Strouhal:

$$St_W = \frac{\omega W}{2\pi U_j} \quad (3.25)$$

Έτσι για τη θεμελιώδη συχνότητα και τις δύο πρώτες αρμονικές μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κατά σειρά αριθμούς Strouhal [83]:

$$St_W = 0,2, \quad St_W = 0,4, \quad St_W = 0,6$$

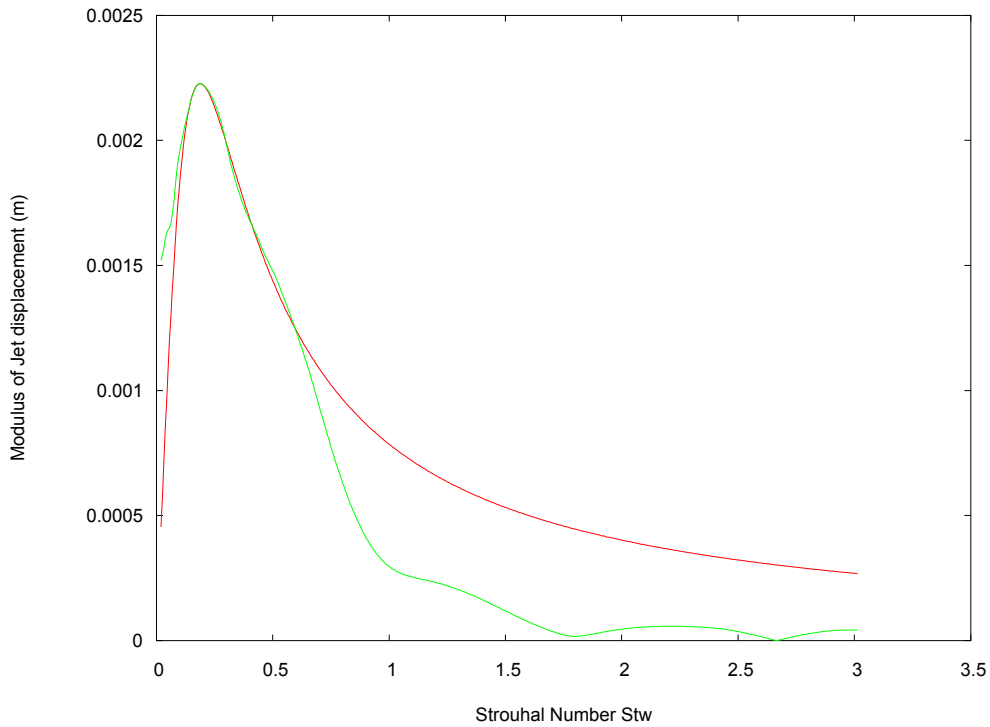
Επιστρέφοντας στον αλγόριθμο εύρεσης φίλτρου, υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης μεταφοράς για τις συχνότητες που αντιστοιχούν στους τρεις παραπάνω Strouhal. Για αυτές τις συχνότητες, υπολογίζουμε και το αντίστοιχο μέτρο της μετατόπισης της δέσμης. Τέλος βρίσκουμε τις τρεις διαφορές $|T| - |\eta(W, \omega)|$. Αφού περατωθούν οι επαναλήψεις για όλα τα Q , επιλέγουμε το καλύτερο Q με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των τριών διαφορών. Η προσέγγιση που πετυχαίνουμε με τον παραπάνω αλγόριθμο φαίνεται στο διάγραμμα 3.16 για τη σχέση (3.10), ενώ στο διάγραμμα (3.17) για τη σχέση (3.15). Και στα δύο διαγράμματα η ταχύτητα της δέσμης είναι $U_j = 10$ m/s. Στην πρώτη περίπτωση προκύπτει φίλτρο $a_1 = 12,72$, $\omega_0 = 2952,1$ rad/sec και $Q = 0,517$, ενώ στη δεύτερη $a_1 = 10,14$, $\omega_0 = 4623,4$ και $Q = 0,827$.

Για το εύρος $St_W = 0,2$ έως $0,6$ το ζωνοπερατό 2^{ης} τάξης φίλτρο μπορεί να προσεγγίσει καλύτερα τη σχέση (3.14) παρά την (3.17). Ωστόσο υπάρχει ένα ακόμα κρίσιμο σημείο να μελετηθεί και να αποφασίσουμε εν τέλει ποια απ' τις δύο σχέσεις θα χρησιμοποιήσουμε στη μοντελοποίηση. Το φίλτρο εμφανίζει μία καθυστέρηση φάσης όπως δίνεται απ' την έκφραση (3.21). Αυτή είναι πολύ μικρότερη από την καθυστέρηση που εισάγει η φασική ταχύτητα διαταραχών στην πραγματική μετατόπιση της δέσμης. Εν' ολίγοις το φίλτρο ενώ μπορεί να μοντελοποιήσει το πλάτος της μετατόπισης, αδυνατεί να προγράψει πλήρως και τη χρονική της συμπεριφορά. Γι' αυτό παριστάνουμε την κίνηση των διαταραχών με φασική ταχύτητα u , με μία γραμμή καθυστέρησης (delay line). Για να υλοποιήσουμε το φαινόμενο με γραμμή καθυστέρησης πρέπει να θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι η u αποτελεί σταθερό ποσοστό της ταχύτητας U_j , χωρίς εξάρτηση απ' τη συχνότητα. Έτσι η ακουστική ταχύτητα v_m επιδρά στη δέσμη ακριβώς στη σχισμή, αλλά η εκτροπή της στο άνω χείλος συμβαίνει μετά την παρέλευση του χρόνου της φάσης του φίλτρου συν της γραμμής καθυστέρησης $\frac{W}{aU_j}$, όπου a το ποσοστό της u ως

προς U_j . Ο Verge [EEE] βρήκε ότι ένας λόγος u/U_j ίσος με 0,6 δίνει συνολική φάση φίλτρου και γραμμής καθυστέρησης πολύ κοντά στη φάση της σχέσης (3.10). Η συνολική φάση φίλτρου και γραμμής καθυστέρησης δίνεται τότε απ' την έκφραση:

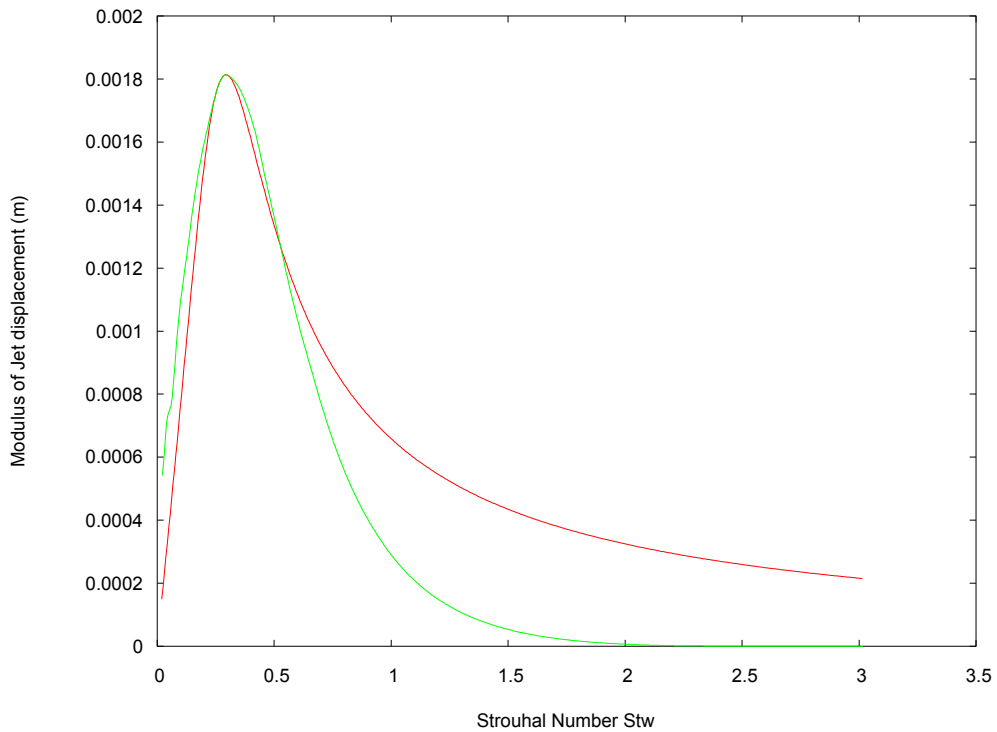
$$phase = -\tan^{-1}\left(Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega}\right) - \omega \frac{W}{0,6U_j} \quad (3.26)$$

Στο διάγραμμα 3.18 χαράσσουμε τη φάση της σχέσης (3.10) και του φίλτρου, μαζί με τη γραμμή καθυστέρησης. Η ταχύτητα δέσμης είναι $U_j = 10$ m/s και οι σταθερές του φίλτρου ίδιες με του διαγράμματος 3.16.



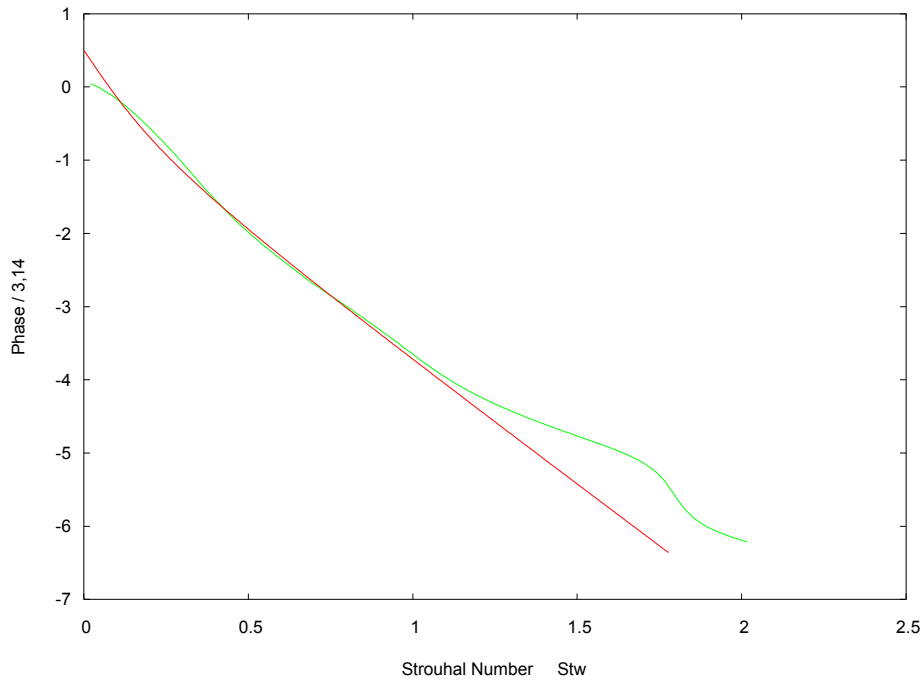
Διάγραμμα 3.16

Γραφική παράσταση της σχέσης (3.14) συναρτήσει του αριθμού Strouhal $St_w = fW / U_j$ για ταχύτητα δέσμης 10 m/s (πράσινη γραμμή) και η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός ζωνοπερατού φίλτρου 2^{ns} τάξης (κόκκινη γραμμή). Πλάτος Bickey $b=0,35h$.



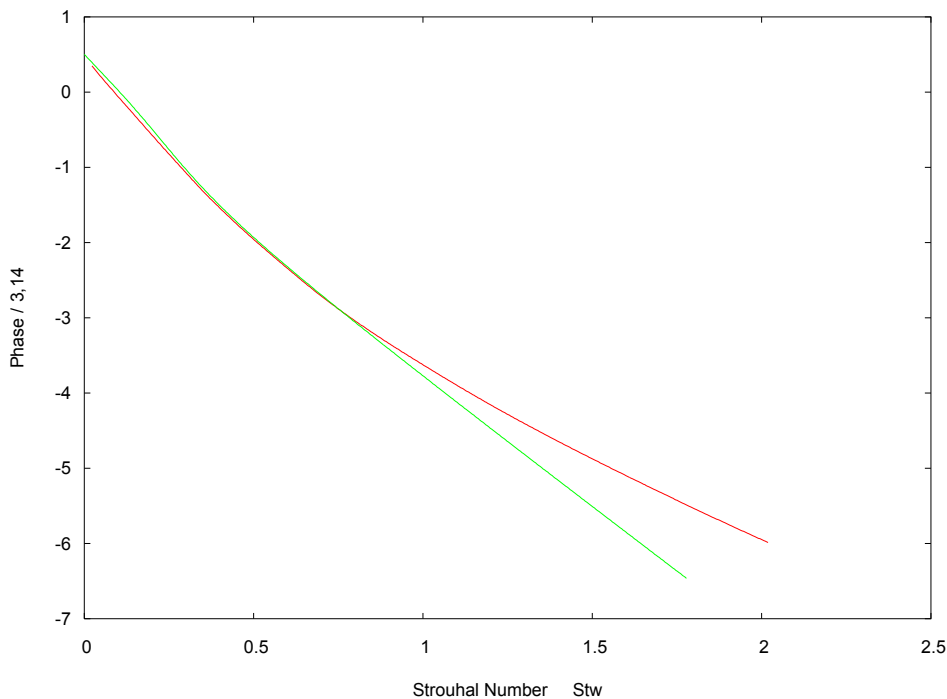
Διάγραμμα 3.17

Γραφική παράσταση της σχέσης (3.17) συναρτήσει του αριθμού Strouhal $St_w = fW / U_j$ για ταχύτητα δέσμης 10 m/s (πράσινη γραμμή) και η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός ζωνοπερατού φίλτρου 2^{ns} τάξης (κόκκινη γραμμή). Πλάτος Bickey $b=0,35h$.

**Διάγραμμα 3.18**

Καθυστέρηση φάσης της (3.10) (κόκκινη γραμμή) και σύγκριση με την καθυστέρηση φάσης που προκύπτει από το φίλτρο του διαγράμματος 3.16 και τη γραμμή καθυστέρησης $0,6 U_j$.

Αντίστοιχο διάγραμμα με το 3.18 μπορεί να γίνει και για τη σχέση (3.15), οπότε οι σταθερές του φίλτρου είναι αυτές του διαγράμματος 3.17. Βρίσκουμε ότι τώρα μία γραμμή καθυστέρησης $0,59 U_j$ δίνει πολύ καλή προσέγγιση στη φάση της (3.15) για $St_w < 0,75$ (διάγραμμα 3.19). Στο διάγραμμα όμως 3.18, η προσέγγιση είναι καλή μέχρι $St_w = 1$.

**Διάγραμμα 3.19**

Καθυστέρηση φάσης της (3.15) (κόκκινη γραμμή) και σύγκριση με την καθυστέρηση φάσης που προκύπτει από το φίλτρο του διαγράμματος 3.17 και τη γραμμή καθυστέρησης $0,59 U_j$.

Κατά τη διάρκεια των υπολογισμών του προγράμματος κάθε φορά που αλλάζει η ταχύτητα της δέσμης, πρέπει να καθοριστεί εκ νέου η κεντρική συχνότητα και η σταθερά a_1 του φίλτρου, ενώ το Q παραμένει σταθερό για W και b σταθερά. Το πρόγραμμα εφοδιάζεται με έλεγχο για τη σταθερότητα των παραπάνω μεταβλητών, ώστε να μας γλιτώσει από περίσσιους υπολογισμούς.

Απαιτείται τώρα προσοχή στην χρήση της ταχύτητας της δέσμης για τον καθορισμό των ω_0 και a_1 . Η ταχύτητα U_j υπολογίζεται από τη διαφορά πιέσεων $p_f - p_m$ κατά την εξίσωση (3.1). Όπως αναφέρθηκε, η U_j θα εμφανίζει μία έντονη ταλαντωτική συμπεριφορά, εξ' αιτίας των ταλαντώσεων τις πίεσης p_m και μάλιστα ίδιας συχνότητας με τις ταλαντώσεις του συντονιστή. Αυτό συνεπάγεται τη μεταβολή των ω_0 και a_1 , άρα και της απόκρισης του φίλτρου, κατά τη διάρκεια μίας περιόδου. Ο Verge εκλέγοντας το φίλτρο αρχικά με βάση τη U_j διεπίστωσε ότι η δέσμη εμφάνιζε μη συμμετρική ταλαντωτική συμπεριφορά, ώστε μετά από ορισμένο αριθμό περιόδων να εκτρέπεται πλήρως μόνο απ' τη μία μεριά του χείλους [EEE]. Στη μελέτη του λοιπόν, ο Verge καθορίζει το φίλτρο με βάση τη στατική προσέγγιση $U_f = \sqrt{\frac{2p_f}{\rho_0}}$, που προκύπτει πάλι απ' την εξίσωση Bernoulli αλλά αυτή τη φορά αμελώντας τις ακουστικές ταλαντώσεις. Τα αποτελέσματα με αυτή τη θεώρηση είναι πολύ ρεαλιστικά.

3.3 Μοντελοποίηση του συντονιστή

Όπως αναπτύχθηκε στο πρώτο μέρος της διπλωματικής, ο ακουστικός σωλήνας περιγράφεται ικανοποιητικά από τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 p_p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_p}{\partial t^2} \quad (3.27)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να δεχθεί λύση D' Alembert, όπου η συνολική ακουστική πίεση p_p συνίσταται από δύο αντιθέτως κινούμενα οδεύοντα κύματα p_0 και p_i :

$$p_p = p_0(x - c_0 t) + p_i(x + c_0 t) \quad (3.28)$$

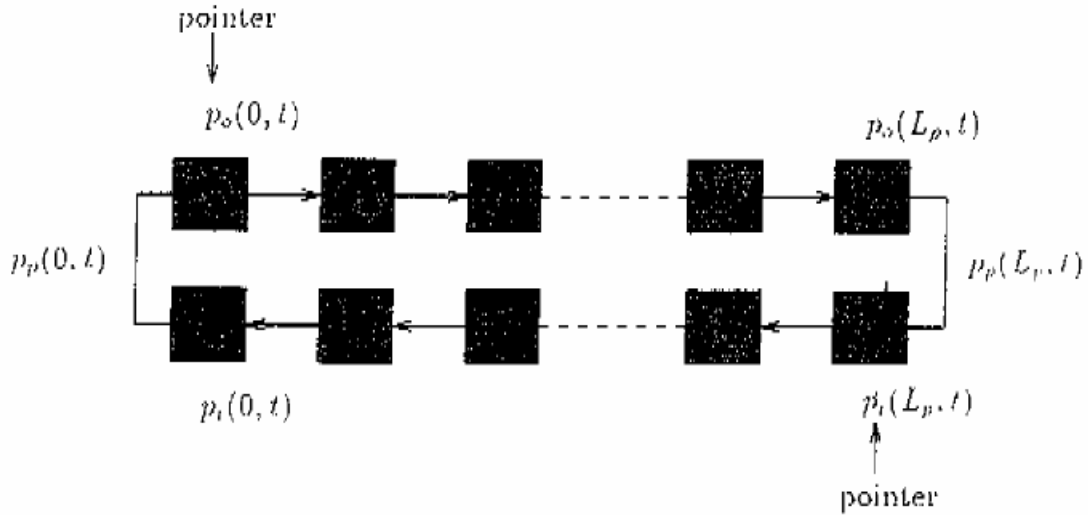
Για έναν παρατηρητή στο κέντρο του ακουστικού σωλήνα, το κύμα p_i που φτάνει είναι ίσο με το κύμα p_0 που φεύγει, καθυστερημένο κατά το χρόνο μίας περιόδου (roundtrip time) και φιλτραρισμένο από τα φαινόμενα συνεκτικότητας, μεταφοράς θερμότητας και ηχητικής ακτινοβολίας στο άκρο του συντονιστή.

Από την εξίσωση Euler και την έκφραση (3.28), παίρνουμε για τη ροή εντός του συντονιστή:

$$Q_p = \frac{S_p}{\rho_0 c_0} (p_0 - p_i) \quad (3.29)$$

Μία αποτελεσματική υλοποίηση της κυματικής εξίσωσης πετυχαίνεται με χρήση ψηφιακών κυματοδηγών [EEE]. Η αναπαράσταση βασίζεται στη λύση της κυματικής εξίσωσης με οδεύοντα κύματα (Μέρος I, Κεφ. 3).

Πρώτα διακριτοποιούμε το σωλήνα σε έναν ορισμένο αριθμό κελιών, όπως δείχνει το σχήμα 3.20. Αυτό πετυχαίνεται όταν πρώτα γνωρίζουμε το χρονικό βήμα υπολογισμών Δt . Σε ένα τέτοιο χρονικό βήμα το κύμα διανύει διάστημα $\Delta x = c_0 \Delta t$. Ο αριθμός των κελιών προκύπτει απλά με διαίρεση του γεωμετρικού μήκους L_p προς το διάστημα Δx . Κάθε κελί χαρακτηρίζεται με έναν δείκτη και από αυτό περνά τόσο το κύμα p_0 όσο και το κύμα p_i . Σε κάθε βήμα των υπολογισμών, για το μεν κύμα p_0 μετακινούμε όλες τις τιμές των κελιών κατά ένα κελί προς τα δεξιά, για το δε κύμα p_i όλες τις τιμές κατά ένα κελί προς τα αριστερά, όπως δείχνουν τα βέλη. Υλοποιούμε έτσι τη γραμμή καθυστέρησης. Η συνολική (ακουστική) πίεση σε κάθε κελί του σωλήνα και κάθε χρονική στιγμή θα είναι, κατά την εξίσωση (3.28), ίση προς το άθροισμα των δύο οδευόντων κυμάτων p_0 και p_i .



Σχήμα 3.20

Αναπαράσταση της διάδοσης των κυμάτων εντός του συντονιστή με διακριτοποίηση του μήκους του και χρήση Delay lines [EEE].

3.4 Ακτινοβολήση του ήχου

Στα ανοίγματα του αυλού, ένα μέρος της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη εντός του ακουστικού σωλήνα ακτινοβολείται προς το περιβάλλον. Κατά τη μοντελοποίηση του οργάνου, η εκτίμηση αυτών των απωλειών είναι σημαντική, αφού καθορίζουν την παραγωγή του ήχου. Οι υψηλές συχνότητες ακτινοβολούνται πιο εύκολα από τις χαμηλές. Αυτό διαφοροποιεί τα εσωτερικά από τα εξωτερικά ακουστικά σήματα. Στο σχήμα 3.12 βλέπουμε δύο μετρημένες τιμές της ακουστικής πίεσης a) εντός του αυλού και b) εκτός του αυλού σε απόσταση 12 cm από το στόμα [EEE]. Οι απώλειες ακτινοβολήσης στο άκρο του συντονιστή (passive end) μπορούν να ληφθούν υπ' όψη φιλτράροντας το κύμα πίεσης p_o πριν ανακλαστεί πίσω στο σωλήνα. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί από την έκφραση της εμπέδησης ακτινοβολήσης στο άκρο του σωλήνα, όπως στην εξίσωση (3.3):

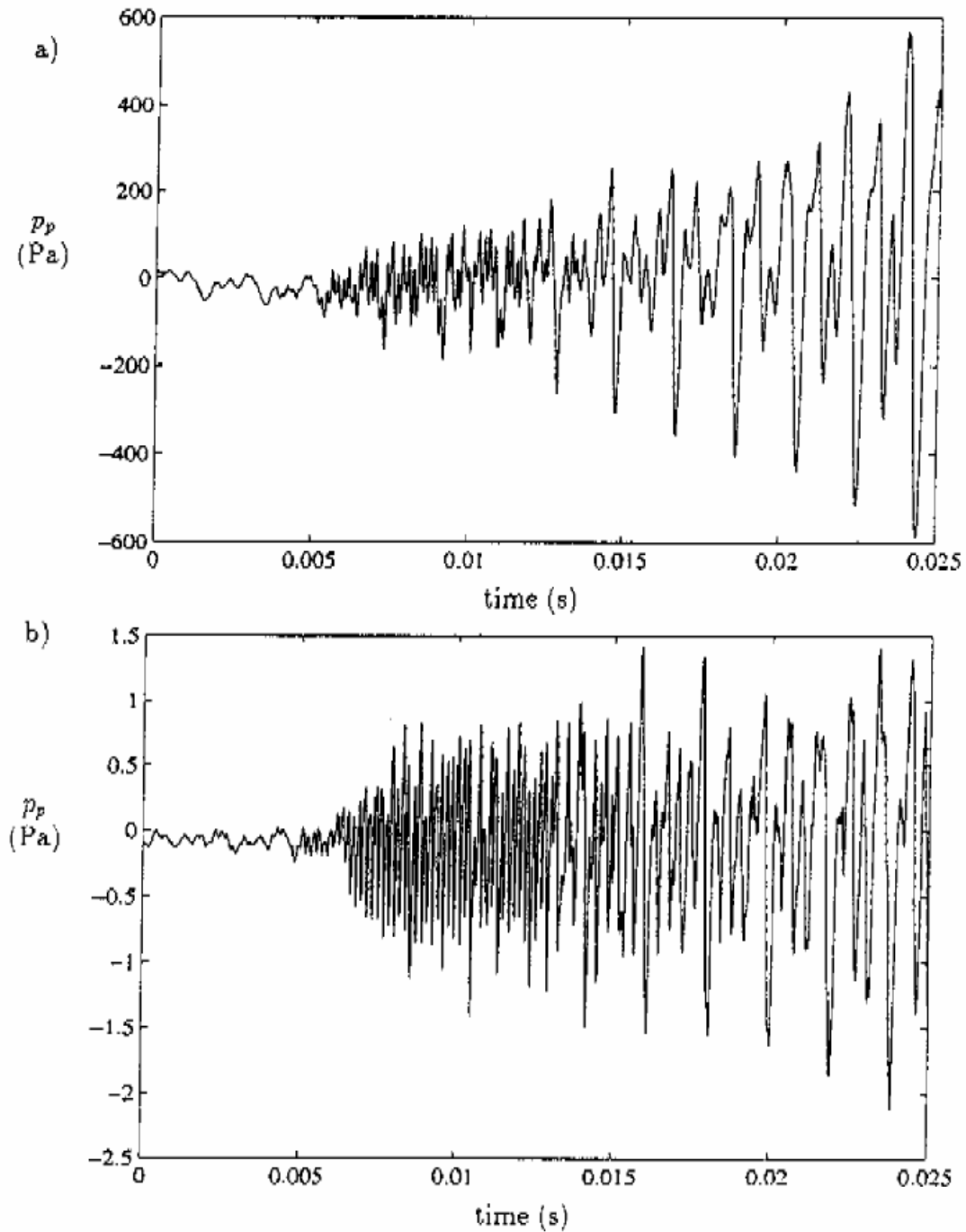
$$\bar{Z}_{out} = \frac{P_p(L_p)}{Q_p(L_p)} = \frac{\rho_0 c_0}{S_p} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\omega r_p}{c_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{c_0} \delta_p \right] \quad (3.30)$$

Η χρονική συσχέτιση μεταξύ της πίεσης $p_p(L_p)$ και της ροής $Q_p(L_p)$, κατ' αναλογία με την εξίσωση (3.4), είναι:

$$P_p(L_p) = \frac{\rho_0 c_0}{S_p} \left[-\frac{1}{4} \frac{r_p^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 Q_p(L_p)}{\partial t^2} + \frac{\delta_p}{c_0} \frac{\partial Q_p(L_p)}{\partial t} \right] \quad (3.31)$$

όπου $r_p = \sqrt{\frac{S_p}{\pi}}$ είναι ακτίνα κύκλου με επιφάνεια ίση με τη διατομή του σωλήνα και $\delta_p = 0,82r_p$ η διόρθωση μήκους του σωλήνα [79]. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.28) και (3.29) η προηγούμενη έκφραση μπορεί να γραφεί:

$$p_o + p_i = -\frac{-r_p^2}{4c_0^2} \frac{\partial^2 (p_o - p_i)}{\partial t^2} + \frac{\delta_p}{c_0} \frac{\partial (p_o - p_i)}{\partial t} \quad (3.32)$$



Σχήμα 3.21

Ακουστική πίεση μετρημένη (a) στο εσωτερικό ενός πειραματικού οργανίσου αυλού, ακριβώς κάτω από το αιχμηρό άκρο του labium (δηλ. στην είσοδο του συντονιστή) και (b) έξω απ' τον αυλό και σε απόσταση 12 cm από το στόμα του [EEE].

3.5 Ενεργειακές απώλειες

Είναι πλέον γνωστό ότι η ενέργεια μέσα στο όργανο χάνεται λόγω συνεκτικότητας του ρευστού και λόγω μετάδοσης θερμότητας μέσω των τοιχωμάτων. Τα αποτελέσματα των απωλειών αυτών μπορούν να περιγραφούν στο πεδίο της συχνότητας, με χρήση ενός σύνθετου κυματικού αριθμού [EEE] ή [83]:

$$p_p = \left[p_0 \exp(-jk^+ x) + p_i \exp(jk^- x) \right] \exp(i\omega t) \quad (3.33)$$

όπου

$$k^\pm = \frac{\omega}{c_0} \pm \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} (1-j) \quad (3.34)$$

με a μία σταθερά απόσβεσης:

$$a = \frac{\sqrt{l_v} + (\gamma-1)\sqrt{l_t}}{\sqrt{c_0}} \quad (3.35)$$

όπου l_v και l_t είναι τα χαρακτηριστικά μήκη για τη συνεκτικότητα και τη θερμότητα, αντίστοιχα [EEE] ή [83]. Για τον αέρα στους 20° C είναι $l_v = 4,0 \cdot 10^{-8}$ m και $l_t = 5,6 \cdot 10^{-8}$ m. Κατά τα γνωστά, γ είναι ο λόγος Poisson (=1,4).

Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης (3.33) στο πεδίο του χρόνου απαιτεί κλασματικές παραγώγους λόγω του παράγοντα $\sqrt{\omega}$ στην εξίσωση (3.34) [EEE] ή [83]. Αυτό κάνει πολύ περίπλοκα τα πράγματα και ο Verge καταφεύγει πάλι στη χρήση φίλτρων. Αυτή τη φορά επιλέγονται IIR φίλτρα 3^{ης} τάξης. Το κάθε σήμα p_0 και p_i μπορεί να φιλτραριστεί είτε σε κάθε κελί, είτε, για οικονομία υπολογισμών, στο τέλος της κάθε γραμμής καθυστέρησης, δηλ. στο (παθητικό) άκρο και στο στόμα αντίστοιχα.

Η (3.33) γράφεται:

$$p_p = p_0 \exp(-jk^+ x + j\omega t) + p_i \exp(jk^- x + j\omega t)$$

Με αντικατάσταση της (3.34) λαμβάνουμε:

$$p_p = p_0 \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x - j \left(\frac{\omega}{c_0} + \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} \right) x + j\omega t \right] + p_i \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x + j \left(\frac{\omega}{c_0} - \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} \right) x + j\omega t \right]$$

Τελικά:

$$p_p = p_0 \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) \exp \left[\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} x - \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) j \right] + p_i \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) \exp \left[\left(\omega t + \frac{\omega}{c_0} x - \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) j \right]$$

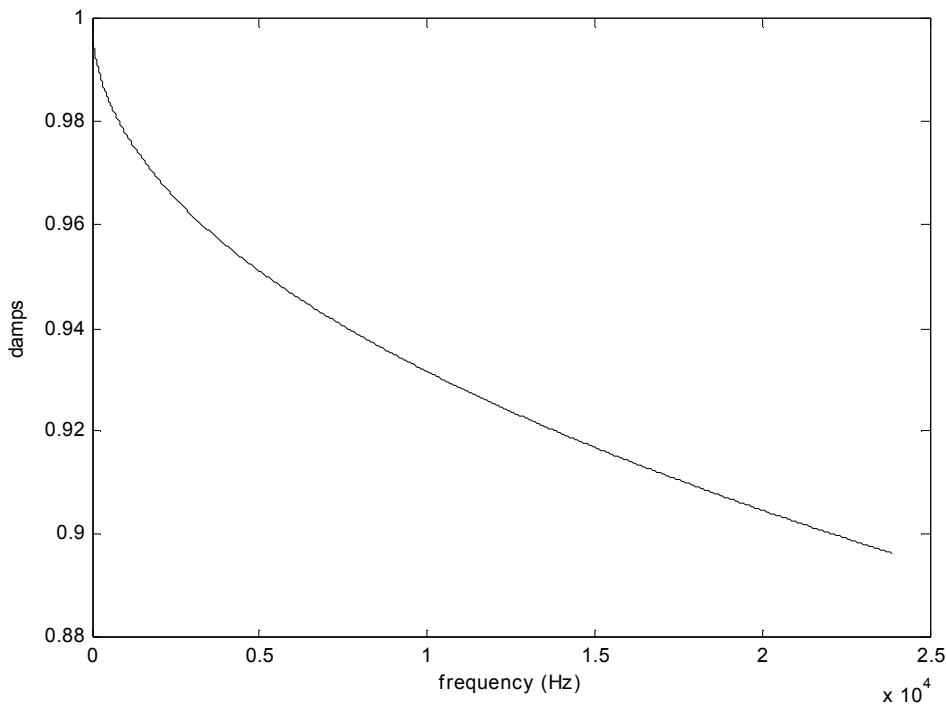
Θέτοντας $A = \omega t - \frac{\omega}{c_0} x - \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x$ και $B = \omega t + \frac{\omega}{c_0} x - \sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x$ παίρνουμε:

$$p_p = \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) \left[p_0 (\cos A + j \sin A) + p_i (\cos B + j \sin B) \right] \quad (3.36)$$

Από την τελευταία μορφή της εξίσωσης, παρατηρούμε ότι οι παράγοντες

$$\exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) (\cos A + j \sin A) \quad \text{και} \quad \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{a}{r_p}} x \right) (\cos B + j \sin B) \quad (3.37)$$

αναπαριστούν τις απώλειες των οδοντώντων κυμάτων p_0 και p_i αντίστοιχα, όταν αυτά διατρέξουν μήκος x , εντός του ακουστικού σωλήνα. Για τιμή του x ίση με το μήκος του συντονιστή του Verge (283 mm) και ακτίνα $r_p = 1,13$ cm, οι απώλειες του ενός από τα δύο κύματα πίεσης φαίνονται στο διάγραμμα 3.22 ως συνάρτηση της συχνότητας.



Διάγραμμα 3.22

Το μέτρο μίας από τις (3.37) ως συνάρτηση της συχνότητας.

Με χρήση του υπολογιστικού πακέτου Matlab, προσδιορίζουμε εύκολα και τη μεταβολή της φάσης των (3.37), όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.23.

Η εύρεση τώρα ενός ψηφιακού φίλτρου που να προσεγγίζει και το μέτρο και τη φάση της απόσβεσης όπως σχεδιάστηκε στα διαγράμματα 3.22 και 3.23 αντίστοιχα δεν αποτελεί εύκολη διαδικασία, ιδίως όταν πρόκειται για IIR φίλτρα. Θα μπορούσε κάποιος να επιχειρήσει τη χρήση FIR φίλτρων, αλλά αυτό θα το πετύχαινε με εξαιρετικά μεγαλύτερο βαθμό από ένα IIR, κάτι που μεταφράζεται σε τεράστιο αριθμό πίσω διαφορών. Εκτός αυτού, η φάση τους είναι γραμμική και δεν ταιριάζει στη μορφή που θέλουμε.

Ένα IIR φίλτρο διέπεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

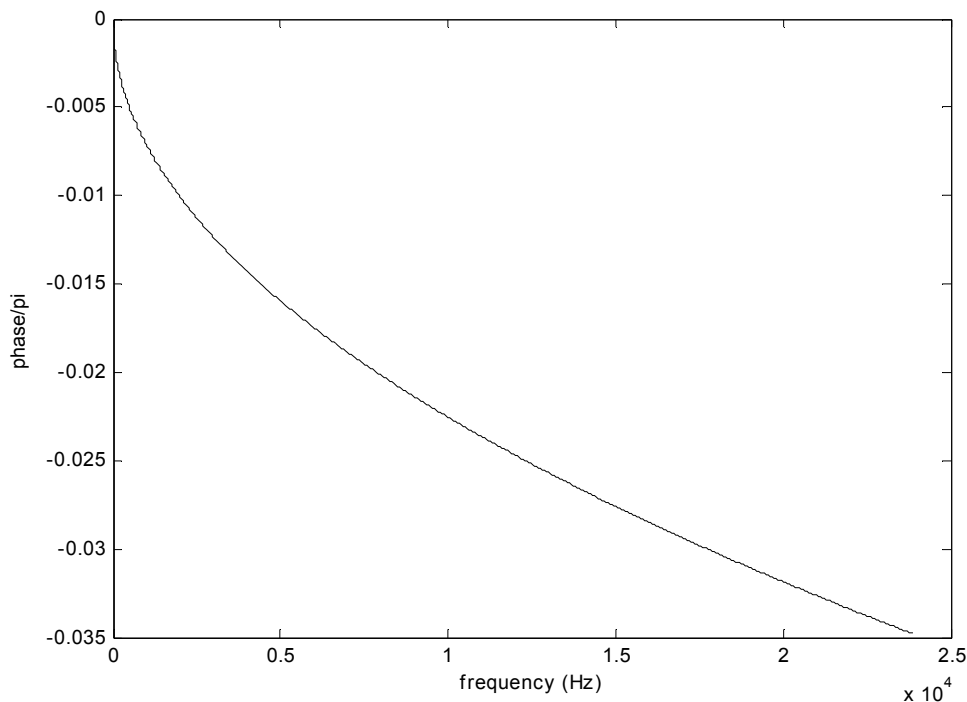
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k z^k}{\sum_{k=0}^m a_k z^k} \quad (3.38)$$

Όπου n η τάξη του αριθμητή και m η τάξη του παρονομαστή. Ενώ τα a_k και b_k είναι οι συντελεστές του φίλτρου (coefficients) και είναι καθαροί αριθμοί. Όταν το φίλτρο είναι 3^{ης} τάξης σε αριθμητή και παρονομαστή η $H(z)$ γίνεται:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-3}}{a_0 + a_1 z + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-3}} \quad (3.39)$$

Από τη συνάρτηση μεταφοράς (3.39) είναι εύκολο να μεταβούμε στο πεδίο του χρόνου:

$$y[n]a_0 + y[n-1]a_1 + y[n-2]a_2 + y[n-3]a_3 = x[n]b_0 + x[n-1]b_1 + x[n-2]b_2 + x[n-3]b_3 \quad (3.40)$$



Διάγραμμα 3.23

Απόκριση φάσης μίας από τις (3.37) ως συνάρτηση της συχνότητας.

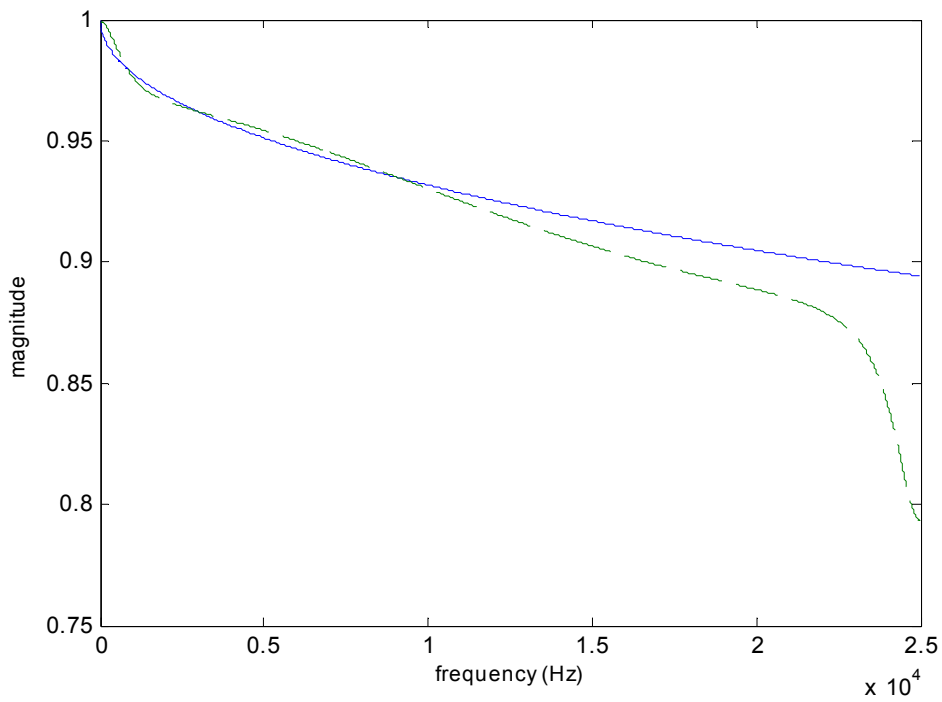
όπου $[n]$ είναι η τρέχουσα χρονική στιγμή και $[n-1]$, $[n-2]$, $[n-3]$ οι προηγούμενες. Η συνάρτηση μεταφοράς του IIR δεν βρίσκεται ούτε στο πεδίο του χρόνου, ούτε στο πεδίο της συχνότητας, αν κάποιος θέλει να βρει την απόκριση συχνότητας του φίλτρου με δοσμένη τη συνάρτηση μεταφοράς θα πρέπει να αντικαταστήσει το z (μετασχηματισμός z) με $\exp(j\omega)$.

Ερχόμενοι πάλι στη σχέση (3.39), ένα φίλτρο είναι πλήρως ορισμένο όταν γνωρίζουμε τους συντελεστές του. Υπάρχουν πολλές δημοσιεύσεις που προτείνουν διάφορους αλγορίθμους για τον προσδιορισμό των συντελεστών, με δοσμένη την απόκριση μέτρου ή φάσης ή και των δύο. Καθότι μία τέτοια διαδικασία θα επιβαρύνει το υλικό της διπλωματικής, μπορούμε να καταφύγουμε στη MatLab και στην εντολή `iirlpnormc`. Η εντολή υπολογίζει το φίλτρο με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου σφάλματος (weighted error) μεταξύ της επιθυμητής απόκρισης και αυτής του φίλτρου. Μπορεί να επιλεγθεί κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων ή άλλο. Παρόμοια λειτουργία έχει και η εντολή `yulewalk`. Η αδυναμία όλων των εντολών που διαθέτει η MatLab έγκειται στο ότι δεν συνυπολογίζουν την απόκριση φάσης ταυτοχρόνως με την απόκριση μέτρου. Για να πετύχουμε μία απόκριση φάσης κοντά στην επιθυμητή πρέπει να εκτελέσουμε πολλές δοκιμές με τις σταθμίσεις των σφαλμάτων. Η προσέγγιση που θεωρήθηκε τελικά ικανοποιητική εικονίζεται στα διαγράμματα 3.24 και 3.25. Οι συντελεστές του φίλτρου είναι:

$$\begin{array}{cccc}
 b_0 = 0,9171 & b_1 = -0,0693 & b_2 = -0,7421 & b_3 = 0,0466 \\
 a_0 = 1,000 & a_1 = -0,1320 & a_2 = -0,7992 & a_3 = 0,0836
 \end{array}$$

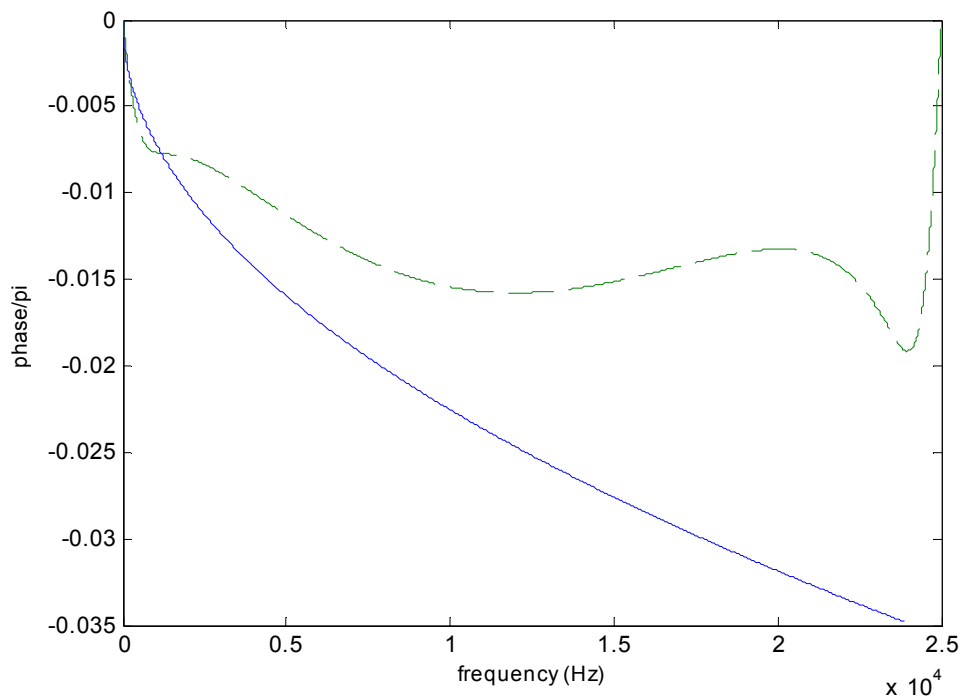
3.6 Διάχυση δινών στο άνω χείλος –Vortex Shedding

Το Jet-drive μοντέλο που συζητήθηκε μέχρι τώρα φαίνεται να προβλέπει ικανοποιητικά τη γραμμική συμπεριφορά ενός αυλού, κατά τη διάρκεια μίας αργής μεταβατικής κατάστασης [ZZ] ή [78]. Για να εξηγηθεί η μη γραμμική συμπεριφορά του οργάνου, θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψη οι δίνες που σχηματίζονται κατά την αλληλεπίδραση δέσμης και άνω χείλους. Το φαινόμενο αυτό δείχνει να αποτελεί τελικά ένα σημαντικό φαινόμενο στη συμπεριφορά όλου του συστήματος [EEE] ή [80,83].



Διάγραμμα 3.24

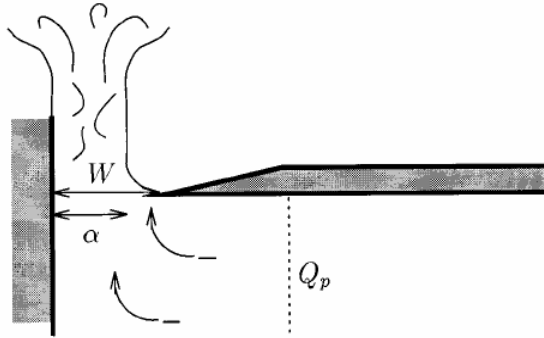
Απόκριση μέτρου των πραγματικών απωλειών και του φίλτρου της σχέσης (3.39).



Διάγραμμα 3.25

Απόκριση φάσης των πραγματικών απωλειών και του φίλτρου της σχέσης (3.39).

Η διάχυση δινών (vortex shedding) πρώτα αναλύθηκε από τον Fabre [27], ο οποίος έδειξε ότι κατά τη μόνιμη κατάσταση, αυτό το φαινόμενο αποτελεί τον κυριότερο μη γραμμικό μηχανισμό περιορισμού του πλάτους. Επίσης σχετίζεται με τη γένεση των υψηλών αρμονικών του οργάνου. Οι δίνες στο άκρο του χείλους προκύπτουν ως αποτέλεσμα της αποκόλλησης της ροής (flow separation), η οποία φαίνεται να προέρχεται από την αλληλεπίδραση της ακουστικής ροής Q_p του συντονιστή με το άκρο του χείλους. Επί του παρόντος, δεν υπάρχει κάποιο μοντέλο που να περιγράφει επακριβώς την περιοδική διάχυση δινών, που προκαλείται απ' τη δέσμη. Αντί αυτού, στο μοντέλο του Verge μπορεί να ληφθεί υπ' όψη μόνο η διάχυση δινών που προκύπτει από την σχετικά μόνιμη αποκόλληση της ακουστικής ροής. Αλλά και στη μεταβατική κατάσταση, η διάχυση δινών εκτιμάται ότι παίζει σημαντικό ρόλο [81].



Σχήμα 3.22

Αποκόλληση της ροής Q_p εξ' αιτίας του σχηματισμού της δέσμης στο στόμα του οργάνου.

που παίρνει τιμές μεταξύ 0,6 και 1. Για ένα αιχμηρό άνω χείλος, εκλέγεται συνήθως η τιμή 0,6 [ZZ] ή [81]. Αυτή η πτώση πίεσης αντιτίθεται στην ακουστική ροή στο στόμα και αποκρίνεται στο διασκορπισμό της κινητικής ενέργειας της ελεύθερης δέσμης, λόγω στροβιλισμών. Οι ενεργειακές απώλειες E_a δίνονται από τη σχέση:

$$E_a = \int_0^T \Delta p_a \frac{Q_p}{S_m} dt \quad (3.42)$$

όπου T είναι η περίοδος του ακουστικού σήματος.

$$\Delta p_w = \infty \frac{1}{2} \rho_0 U_{fr}^2 \quad (3.43)$$

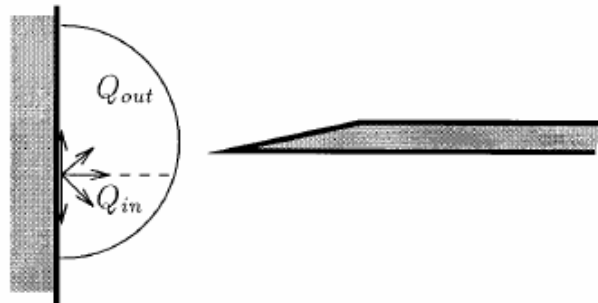
Όπως αναφέρθηκε [EEE], κατά τη διάρκεια της μεταβατικής κατάστασης, η διάχυση δινών λόγω της αρχικής επίδρασης της δέσμης με το labium είναι καθοριστική. Καθώς η δέσμη χτυπά το άκρο του χείλους, σχηματίζεται μία δίνη, η οποία φαίνεται να είναι σημαντική για τη διέγερση της αττάκας του οργάνου και των υψηλών αρμονικών κατά τη διάρκεια της μετάβασης. Για να καθοριστεί η θέση της δέσμης κατά τον σχηματισμό της δίνης, ο Verge χρησιμοποιεί τη lower limit προσέγγιση που περιγράφει στη διατριβή [EEE]. Σε αυτή τη μοντελοποίηση (σχήμα 3.23), η flue σχισμή βλέπεται, σε μία προσέγγιση δισδιάστατης ροής δυναμικού, σαν μία σημειακή πηγή $Q_j(t)$ που ρέει σε ένα ημι-άπειρο χώρο. Ο σχηματιζόμενη δέσμη εμφανίζεται τότε σαν ένα ημικύκλιο ολόένα αυξανόμενης διαμέτρου. Η κατακόρυφη θέση του ημικυκλίου καθορίζεται από το λόγο των ροών Q_{in} και Q_{out} στο στόμα του οργάνου. Όταν αυτό ημικύκλιο χτυπήσει το labium, ένας

Για να μοντελοποιήσουμε τώρα το φαινόμενο που συζητάμε, θεωρούμε ότι η αποκόλληση της Q_p στο χείλος προκύπτει από το σχηματισμό μίας ελεύθερης δέσμης στο στόμα του αυλού (σχήμα 3.22).

Σε αυτό το σχετικά μόνιμο μοντέλο ελεύθερης δέσμης, που προτάθηκε από τους Ingard και Ising [50], η επίδραση των δινών αντιπροσωπεύεται από ένα ταλαντούμενο άλμα πίεσης Δp_a , στο στόμα του αυλού:

$$\Delta p_a = -\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{Q_p}{a_v S_m} \right)^2 \text{sign}(Q_p) \quad (3.41)$$

όπου a_v είναι μία παράμετρος για τη γεωμετρία της δέσμης, ονομαζόμενη *vena-contracta*,



Σχήμα 3.23

παλμός πίεσης Δp_w , που έχει πλάτος ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας μετώπου U_{fr} , στέλνεται στον ακουστικό σωλήνα:

$$\Delta p_w = \infty \frac{1}{2} \rho_0 U_{fr}^2 \quad (3.44)$$

Η σταθερά αναλογίας στη σχέση (3.39) μπορεί να θεωρηθεί κάπως αυθαίρετα ώστε να ταιριάζουν τα υπολογιστικά με τα πειραματικά δεδομένα [ZZ,81].

3.7 Παραγωγή θορύβου λόγω στροβιλισμών

Για να έχουμε εν τέλει μία ρεαλιστική μοντελοποίηση του οργάνου, θα πρέπει να περιλάβουμε στις εξισώσεις και το θόρυβο που προκαλείται απ' το στροβιλισμό της ροής [EEE]. Η πηγή θορύβου μοιάζει να παρουσιάζει μία διπολικότητα και γι' αυτό μπορεί να παρασταθεί με ένα άλμα πίεσης Δp_i τοποθετημένο κάθετα στο στόμα του οργάνου και με μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας δέσμης. Αυτή η πηγή θορύβου εξαρτάται από τον αριθμό Strouhal εμφανίζοντας μία bell-shaped μορφή. Το άλμα πίεσης μπορεί τότε να δοθεί από την έκφραση:

$$\Delta p_i = \infty \frac{1}{2} \rho_0 U_j^2 \quad (3.45)$$

3.8 Η κύρια εξίσωση του μοντέλου

Το time-domain μονοδιάστατο μοντέλο του Verge περιγράφεται πλήρως από τις εξισώσεις (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.14) και (3.15). Η πίεση πνοής p_f (blowing pressure), που λειτουργεί τον αυλό, είναι το δεδομένο μας. Δεδομένο επίσης είναι και το εισερχόμενο σήμα πίεσης $p_i(0)$ στην είσοδο του συντονιστή, καθώς καθορίζεται από προηγούμενες τιμές του εξερχόμενου σήματος $p_o(0)$. Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα δέκα εξισώσεων με δέκα αγνώστους, που πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα.

Με χρήση των εξισώσεων (3.2), (3.4), (3.5) και (3.6) βρίσκουμε μία σχέση μεταξύ της ακουστικής πίεσης p_p και της ροής Q_p στην είσοδο του συντονιστή:

$$p_p = \frac{\rho_0 c_0}{S_m} \left[\frac{1}{4} \frac{r_m^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 (Q_p - Q_j)}{\partial t^2} \right] - \frac{\rho_0 \delta_m}{S_m} \frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\rho_0 \delta_{out}}{S_m} \frac{dQ_j}{dt} + \Delta p \quad (3.46)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εξισώσεις (3.14) και (3.15) στην προηγούμενη σχέση, λαμβάνουμε μία σχέση με έναν άγνωστο:

$$p_o = \frac{r_m^2 S_p}{4c_0^2 S_m} \frac{\partial^2 (p_o - p_i)}{\partial t^2} - \frac{\rho_0 r_m^2}{4c_0 S_m} \frac{d^2 Q_j}{dt^2} - \frac{\delta_m S_p}{c_0 S_m} \frac{\partial (p_o - p_i)}{\partial t} + \frac{\rho_0 \delta_{out}}{S_m} \frac{dQ_j}{dt} + \Delta p - p_i \quad (3.47)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το εξερχόμενο σήμα p_o καθορίζεται από τα φαινόμενα αδράνειας στο στόμα (είσοδο) του ακουστικού σωλήνα, από την ανάδραση στο συντονιστή, από την πηγή πίεσης στο στόμα του αυλού και από τις ταλαντώσεις της δέσμης. Κατά τη μόνιμη κατάσταση, η πηγή πίεσης Δp είναι ο κυριότερος διεγερτικός μηχανισμός, ενώ κατά τα μεταβατικά φαινόμενα, η παραγωγή ήχου ρυθμίζεται σχεδόν εξ' ολοκλήρου από τις ταλαντώσεις της δέσμης.

3.9 Αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων

Μπορούμε να λύσουμε αριθμητικά τις διαφορικές εξισώσεις που προέκυψαν, με χρήση σχημάτων πεπερασμένων διαφορών, ώστε να μετατραπούν σε αλγεβρικές ως προς το χρόνο [G]. Οι υπολογισμοί

γίνονται προς μία κατεύθυνση, χωρίς να απαιτούνται χρονοβόρες επιλύσεις συστημάτων, σε έναν κύριο βρόχο. Σε όλους τους μετασχηματισμούς διαφορικών εξισώσεων που θα ακολουθήσουν, αρκούμαστε σε ακρίβεια 1^{ης} τάξης, αφού απ' τη μία το χρονικό βήμα υπολογισμού θα ληφθεί ικανοποιητικά μικρό και απ' την άλλη, διαφορές 2^{ης} τάξης θα αύξαναν ραγδαία το χρόνο υπολογισμού.

Σε κάθε βήμα n , χρονικής διάρκειας Δt , υπολογίζουμε τη νέα ταχύτητα της δέσμης U_j^n από την εξίσωση Bernoulli (3.1). Με σχήμα πίσω διαφοράς παίρνουμε:

$$p_f - p_m = \rho_0 l_c \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \rho_0 (U_j^n)^2 \quad (3.48)$$

Η εξίσωση τώρα είναι ένα τριώνυμο ως προς U_j^n . Απ' τις δύο δυνατές λύσεις κρατούμε τη θετική, καθώς η φορά της ταχύτητας της δέσμης παραμένει αμετάβλητη (σχήμα 3.1). Τελικά:

$$U_j^n = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.49)$$

με

$$A = \frac{1}{2} \rho_0, \quad B = \frac{\rho_0 l_c}{\Delta t}, \quad C = -\rho_0 l_c \frac{U_j^{n-1}}{\Delta t} - p_f^{n-1} + p_m^{n-1}$$

όπου η τιμή της πίεσης πνοής p_f και της πίεσης στόματος p_m λαμβάνονται απ' το προηγούμενο βήμα. Ειδικά η p_f μπορεί να ληφθεί και από το τρέχον βήμα. Προσδιορίζεται έτσι η ροή της δέσμης για αυτό το χρονικό βήμα n :

$$Q_j^n = hHU_j^n \quad (3.50)$$

Η ακουστική ταχύτητα v_m στο τέλος της γραμμής καθυστέρησης της δέσμης, πρέπει να φιλτραριστεί ώστε να καθορισθεί η μετατόπιση της δέσμης στο άνω χείλος. Από τη συνάρτηση μεταφοράς (3.18) του ζωνοπερατού φίλτρου:

$$\frac{\eta(s)}{v_m(s)} = \frac{a_1 s}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

μπορούμε εύκολα να πάρουμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του στο πεδίο του χρόνου:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2 \eta = a_1 \frac{dv_m}{dt} \quad (3.51)$$

όπου $\eta(t)$ είναι η χρονική μετατόπιση της δέσμης ως προς το labium. Η εξίσωση (3.51) με πίσω διαφορά 1^{ης} τάξης γίνεται:

$$\frac{\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}}{\Delta t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{\Delta t} + \omega_0^2 \eta^n = a_1 \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\Delta t}$$

και τελικά η νέα τιμή της μετατόπισης είναι:

$$\eta^n = \frac{a_1 \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\Delta t} + \left(\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{\omega_0}{Q\Delta t} \right) \eta^{n-1} - \frac{1}{\Delta t^2} \eta^{n-2}}{\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\omega_0}{Q\Delta t} + \omega_0^2} \quad (3.52)$$

Από τη σχέση (3.9) παίρνουμε:

$$Q_1^n = bHU_j^n \left[1 + \tanh \left(\frac{\eta^n - y_0}{b} \right) \right] \quad (3.53)$$

όπου για την κεντρική ταχύτητα U_0 χρησιμοποιούμε την υπολογισμένη από πριν U_j^n .

Έτσι είναι δυνατός ο υπολογισμός του άλματος πίεσης Δp_{jd} , που σχετίζεται με τον jet-drive μηχανισμό:

$$\Delta p_{jd}^n = -\frac{\rho_0 \delta_d}{S_m} \frac{Q_1^n - Q_1^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.54)$$

Μαζί με το άλμα πίεσης του jet-drive μηχανισμού μπορούμε να προσθέσουμε τα άλματα λόγω διάχυσης δινών και τυρβώδους θορύβου:

$$\Delta p = \Delta p_{jd} + \Delta p_a + \Delta p_{ir} + \Delta p_t \quad (3.55)$$

Η νέα τιμή του εξερχόμενου σήματος $p_0^n(0)$ στην είσοδο του ακουστικού σωλήνα υπολογίζεται τώρα απ' τη σχέση (3.47), αφού τη μετασχηματίσουμε στο κατάλληλο αλγεβρικό σχήμα:

$$p_0^n(0) = \left[(g_3 - g_1 g_2 - 1) p_i^n(0) + (2g_1 g_2 - g_3) (p_i^{n-1}(0) - p_o^{n-1}(0)) + (g_1 g_2) (p_o^{n-2}(0) - p_i^{n-2}(0)) - g_1 (Q_j^n - 2Q_j^{n-1} + Q_j^{n-2}) + g_4 (Q_j^n - Q_j^{n-1}) + \Delta p \right] / (1 - g_1 g_2 + g_3) \quad (3.56)$$

όπου

$$g_1 = \frac{\rho_0}{4\pi c_0 \Delta t^2}, \quad g_2 = \frac{S_p}{\rho_0 c_0}, \quad g_3 = \frac{\delta_m S_p}{S_m c_0 \Delta t}, \quad g_4 = \frac{\rho_0 \delta_{out}}{S_m \Delta t} \quad (3.57)$$

Το εισερχόμενο κύμα $p_i(0)$ έχει τιμή αυτή που βρίσκουμε στο τέλος της γραμμής καθυστέρησης. Όπως αναφέρθηκε, το συνολικό ακουστικό κύμα στην είσοδο του συντονιστή είναι σε αυτή τη χρονική στιγμή:

$$p_p^n(0) = p_0^n(0) + p_i^n(0) \quad (3.58)$$

Ενώ στην έξοδο του συντονιστή είναι:

$$p_p^n(L_p) = p_0^n(L_p) + p_i^n(L_p) \quad (3.59)$$

Για τη νέα τιμή τώρα του σήματος πίεσης $p_0(0)$, η ροή $Q_p(0)$ στην είσοδο του ακουστικού σωλήνα υπολογίζεται απ' τη σχέση (3.29):

$$Q_p^n(0) = \frac{S_p}{\rho_0 c_0} [p_0^n(0) - p_i^n(0)] \quad (3.60)$$

Υπολογίζουμε τώρα τη νέα τιμή της v_m απ' την (3.12):

$$v_m^n = \frac{2}{\pi} \frac{Q_p^n(0)}{S_m} - \frac{0,38 Q_1'}{S_m} \quad (3.61)$$

Όπου:

$$Q_1' = Q_j^n - \frac{1}{2} bHU_j^n \quad (3.62)$$

Τη νέα τιμή της v_m την τοποθετούμε στην αρχή της γραμμής καθυστέρησης της δέσμης, αναπαριστώντας τη διάδοση της.

Η σχέση (3.5) τώρα με χρήση της ισότητας (3.6) μπορεί να μετασχηματισθεί με πίσω διαφορά, για να μας δώσει σε κάθε βήμα την τιμή της πίεσης p_m όταν είναι γνωστά τα υπόλοιπα μεγέθη:

$$p_m = p_p + \frac{\rho_0 \delta_{in}}{S_m} \frac{Q_{in}(0)^n - Q_{in}(0)^{n-1}}{\Delta t} - \Delta p = p_p + \frac{\rho_0 \delta_{in}}{S_m} \frac{Q_p(0)^n - Q_p(0)^{n-1}}{\Delta t} - \Delta p \quad (3.63)$$

Η νέα τιμή του σήματος $p_o(0)$, που υπολογίστηκε απ' την εξίσωση (3.51) τοποθετείται στην είσοδο της γραμμής καθυστέρησης του συντονιστή, αναπαριστώντας τη διάδοση του κύματος στο σωλήνα, ενώ οι pointers μετατοπίζονται κατά ένα κελί, για να προσομοιώσουν τη διάδοση του κύματος. Τέλος, τα σήματα πίεσης $p_o(L_p)$ και $p_i(0)$ φιλτράρονται και στα δύο άκρα του συντονιστή, για να ληφθούν υπ' όψη οι θερμικές και συνεκτικές απώλειες, που προκύπτουν καθώς διανύεται ένα μήκος σωλήνα. Στο παθητικό άκρο του σωλήνα, το σήμα πίεσης $p_o(L_p)$ (που το βρίσκουμε στο τέλος της γραμμής καθυστέρησης) μπορεί να δώσει απ' τη σχέση (3.32) το ανακλώμενο προς τα πίσω σήμα $p_i(L_p)$. Με χρήση πεπερασμένων διαφορών παίρνουμε μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των p_i και p_o . Χρειάζεται προσοχή στην εκλογή της έκφρασης των πεπερασμένων διαφορών. Αν διαλέξουμε εμπρός παραγωγή, το προκύπτον φίλτρο είναι ασταθές. Με πίσω διαφορά, τάξης Δt , λαμβάνουμε:

$$p_0^n + p_i^n = \frac{-r_p^2}{4c_0^2 \Delta t^2} \left[(p_0^n - p_i^n) - 2(p_0^{n-1} - p_i^{n-1}) + (p_0^{n-2} - p_i^{n-2}) \right] + \frac{\delta_p}{c_0 \Delta t} \left[(p_0^n - p_i^n) - (p_0^{n-1} - p_i^{n-1}) \right] \quad (3.64)$$

Λύνοντας ως προς p_i^n έχουμε τελικά για το άκρο L_p :

$$p_i^n(L_p) = \left[(g_5 + g_6 - 1)p_0^n(L_p) - (2g_5 + g_6)p_0^{n-1}(L_p) + g_5 p_0^{n-2}(L_p) + (2g_5 + g_6)p_i^{n-1}(L_p) - g_5 p_i^{n-2}(L_p) \right] / (1 + g_5 + g_6) \quad (3.65)$$

όπου

$$g_5 = \frac{-r_p^2}{4c_0^2 \Delta t^2} \quad \text{και} \quad g_6 = \frac{\delta_p}{c_0 \Delta t}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω φίλτρου στο πεδίο z είναι:

$$H(z) = \frac{p_i(z)}{p_o(z)} = \frac{(g_5 + g_6 - 1) - (2g_5 + g_6)z^{-1} + g_5 z^{-2}}{(g_5 + g_6 + 1) - (2g_5 + g_6)z^{-1} + g_5 z^{-2}} \quad (3.66)$$

Η θέση των πόλων της συνάρτησης εξαρτάται από την εκλογή της διατομής S_p του σωλήνα και της συχνότητας δειγματοληψίας (ή του χρόνου υπολογισμού) Δt . Αν κάνουμε τις πράξεις για μηδενισμό του παρονομαστή, θα διαπιστώσουμε ότι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου μόνο όταν:

$$\Delta t > \frac{0,47r_p}{c_0}$$

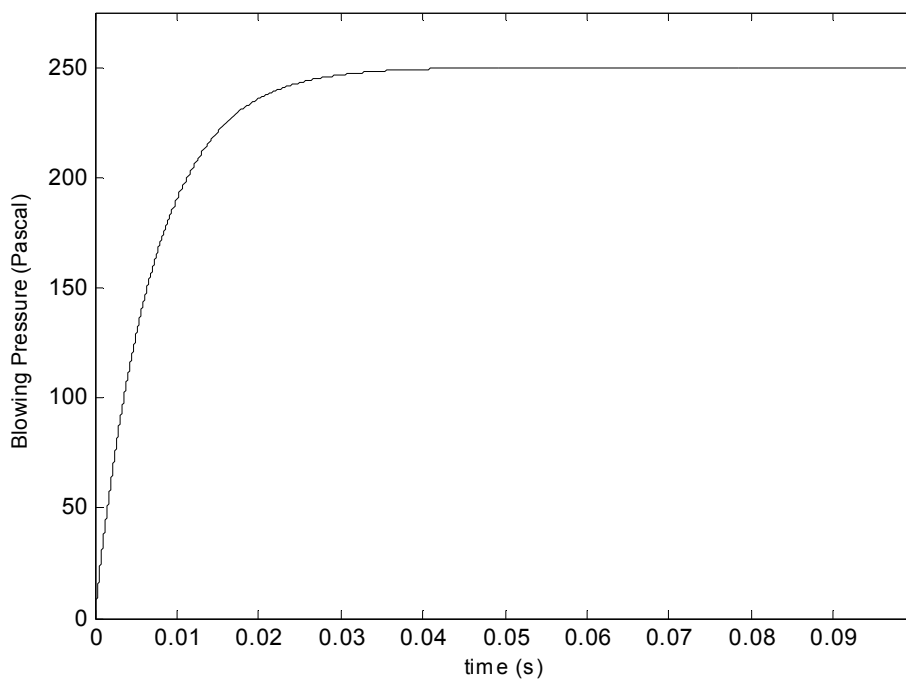
Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί κριτήριο για την εκλογή του χρονικού βήματος υπολογισμών. Έτσι διασφαλίζεται ότι το φίλτρο της σχέση (3.59) είναι ευσταθές. Κατόπιν αυτών, το σύστημα είναι έτοιμο για την επόμενη επανάληψη.

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιήθηκε σε γλώσσα Fortran 77. Ο κώδικας αυτός, που διατίθεται σε κάθε ενδιαφερόμενο, υπολογίζει τη μεταβολή της ταχύτητας της δέσμης, της μετατόπισής της, της ακουστικής πίεσης και άλλων μεγεθών γράφοντας τις σε αντίστοιχα αρχεία txt. Ωστόσο, χρειάζονται ακόμη πολλές τροποποιήσεις και διορθώσεις, ώστε να είναι το πρόγραμμα άμεσα εφαρμόσιμο για μεγάλο εύρος γεωμετριών.

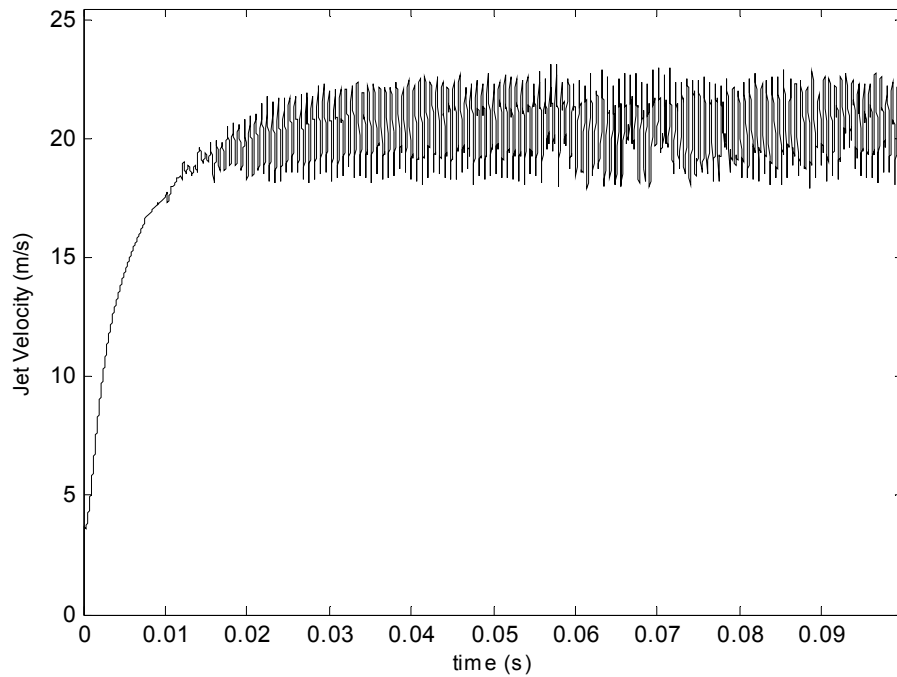
3.10 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Ένα πρόγραμμα γραμμένο σε περιβάλλον Matlab επεξεργάζεται τα αρχεία που δημιουργεί ο προηγούμενος κώδικας. Το script αυτό σχεδιάζει τα γραφήματα των μεγεθών που τυπώθηκαν στα αρχεία, εκτελεί ταχύ μετασχηματισμό Fourier και ανάλυση συχνοτήτων της ηχητικής πίεσης, ενώ τέλος συνθέτει το ηχητικό αποτέλεσμα του μοντέλου με την εντολή sound. Παρατίθεται μία σειρά διαγραμμάτων για έναν αυλό αντίστοιχο με αυτόν του Verge [83], δηλαδή μήκους $L_p = 283$ mm, διατομής $S_p = 20 \times 20$ mm, απόστασης σχισμής-labium $W=4$ mm, πάχους σχισμής $h=1$ mm, Jet offset $y_0 = 0$ mm και συντελεστή b ίσο με $0,39h$. Επίσης λήφθηκε $\delta_d = 3,5$ mm. Στα διαγράμματα (b) έως (d) φαίνεται η μεταβατική συμπεριφορά του αυλού για τη μεταβολή της πίεσης (a), ενώ στο (e) απεικονίζεται το μέτρο του ταχύ μετασχηματισμού Fourier για τη μόνιμη κατάσταση (που αποκαθίσταται στα 0,06 sec και έπειτα). Το τελευταίο αυτό διάγραμμα μας δίνει τη συχνοτική ανάλυση της μόνιμης κατάστασης. Καθώς το πρόγραμμα δεν λειτουργεί ακόμη σε αξιόπιστο επίπεδο, βλέπουμε πως η θεμελιώδης συχνότητα δεν είναι η αναμενόμενη (περίπου $342/(2 \cdot 0,283) = 600$ Hz), αλλά πολύ πιο χαμηλά από αυτή.

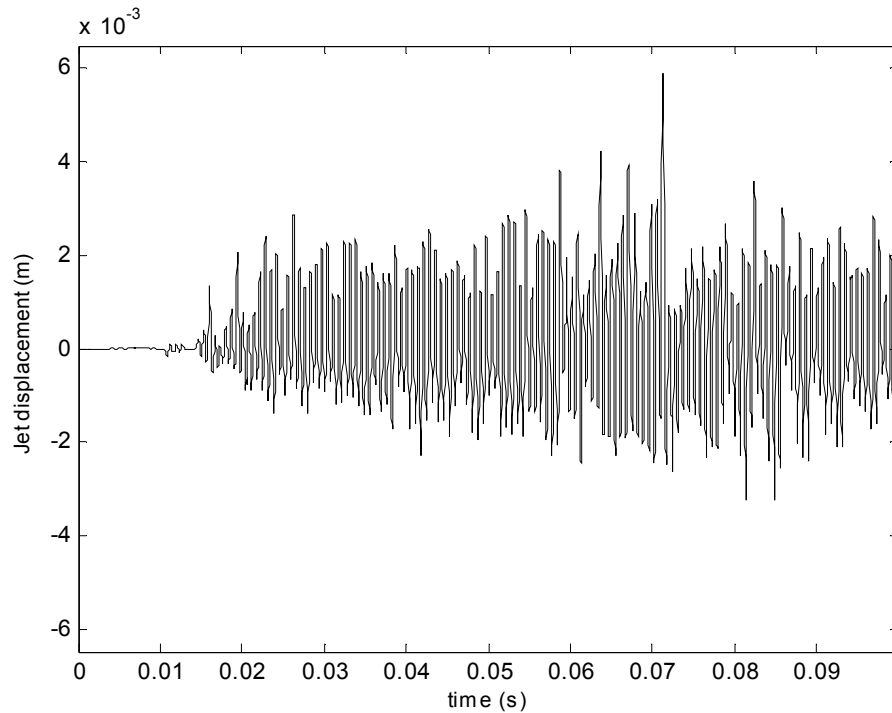
(a) Μεταβολή πίεσης πνοής



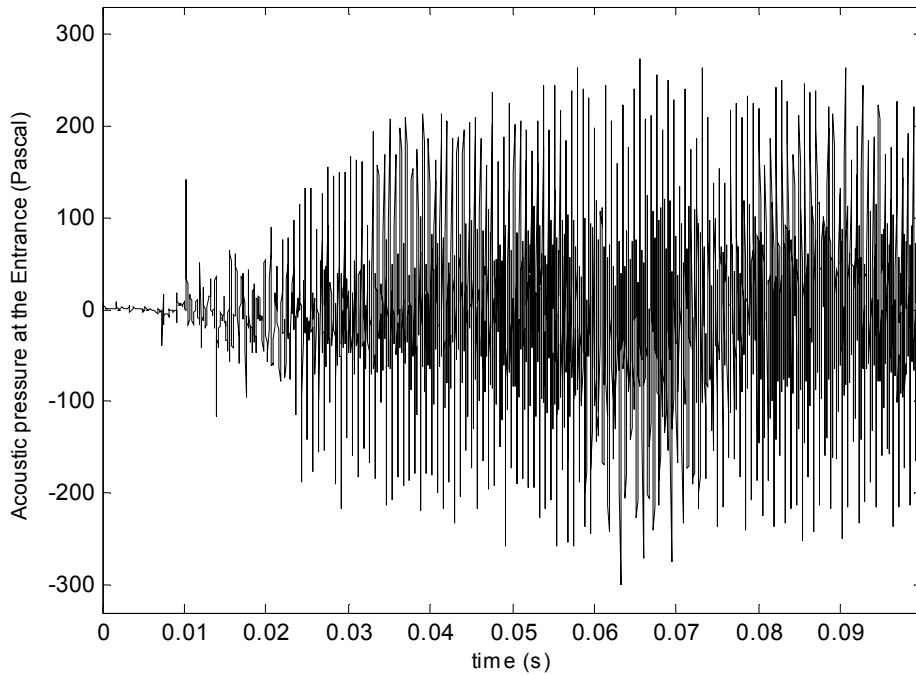
(b) Μεταβολή ταχύτητας δέσμης



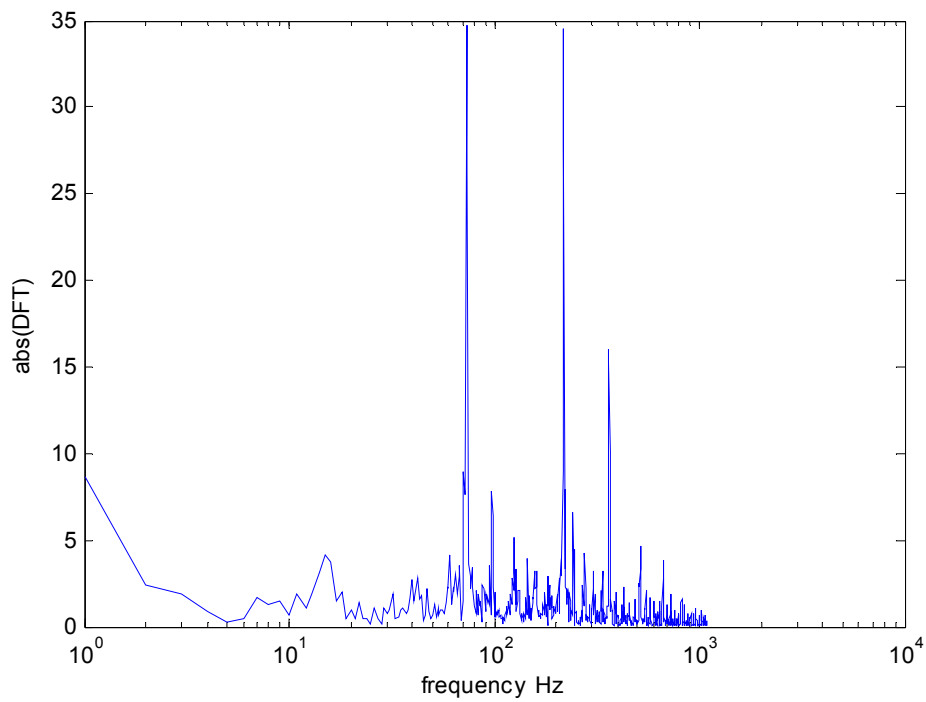
(c) Μεταβολή μετατόπισης δέσμης στο labium



(d) Μεταβολή ακουστικής πίεσης στην είσοδο του συντονιστή



(e) Συχνотικό φάσμα της μόνιμης κατάστασης του αυλού, από εφαρμογή FFT



Μέρος IV

Πειραματική Μελέτη

1

Πειραματική μελέτη Ηχητικού Φάσματος Αυλού

Στο μέρος αυτό κατασκευάζουμε ένα μοντέλο αυλού μεταβλητής γεωμετρίας και μετρούμε το παραγόμενο ηχητικό φάσμα για διάφορους συνδυασμούς διαστάσεων, με ανεξάρτητη μεταβλητή την πίεση πνοής p_f στο πόδι του οργάνου. Όπως αναφέρθηκε, ο αυλός παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα υπόλοιπα air-jet πνευστά, τόσο για θεωρητική όσο και για πειραματική μελέτη, καθότι διαθέτει απλή μορφή και περιορίζει τους βαθμούς ελευθερίας σε έναν. Εκτός αυτού, ο αυλός είναι η κύρια μονάδα του pipe organ, ένα λαμπρό, εντυπωσιακό όργανο, εξαιρετικά διαδεδομένο στο Δυτικό κόσμο. Κάτι που πρέπει να σημειωθεί είναι πως σχεδόν όλες οι πειραματικές μελέτες [32], [81], [XX], [EEE] κ.α., χρησιμοποιούν τετραγωνικής διατομής αυλό και όχι κυκλικής, παρόλο που ο κυλινδρικός είναι το κύριο είδος στην πράξη. Οι λόγοι είναι αφενός για την ευκολία κατασκευής, αφετέρου για άμεση τροποποίηση των διαστάσεων. Επειδή τα αποτελέσματα από το ένα είδος αυλού στο άλλο δεν διαφέρουν σχεδόν καθόλου, μπορούμε και εμείς να χρησιμοποιήσουμε τετραγωνικό αυλό και μάλιστα έχοντας για οδηγό το σχήμα 4.6 (Μέρος II). Εξάλλου, ο εγκάρσιος αυλός που προτείνεται στη συνέχεια λειτουργεί με τετραγωνική διατομή.

1.1 Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για να μπορέσουμε να πάρουμε ποικιλία διαστάσεων στο μοντελάκι του πειράματός μας, φτιάχνουμε ένα κανάλι τριών πλευρών από κομμάτια Plexiglas πάχους 3mm, με τις παρακάτω εσωτερικές διαστάσεις (φωτό 1):

Μήκος: 380 mm

Ύψος: 32 mm

Πλάτος: 19 mm

Το Plexiglas είναι ιδανικό υλικό για τέτοιες εργασίες. Κατεργάζεται εύκολα και με ακρίβεια, είναι καθαρό, άκαμπτο (σε ανάλογα πάχη) και διαφανές, κάτι που μπορεί να χρησιμεύει από μία απλή εμποπτεία του «εσωτερικού» του οργάνου μέχρι την πολύ διαδομένη διαδικασία οπτικοποίησης της ροής (flow visualization) [EEE], [63], [85].

Κατόπιν διαθέτουμε ένα κομμάτι (283 mm) x (19 mm) x (3 mm), απ' το ίδιο υλικό, το οποίο εισέρχεται μέσα στο κανάλι, στο ύψος που θέλουμε, για να δημιουργήσει ένα σωλήνα (συντονιστή) μεταβλητής διατομής. Ένα ακόμη κομμάτι (11 mm) x (19 mm) x (3 mm) εισέρχεται επίσης στο κανάλι για να δημιουργήσει το πόδι του αυλού. Τέλος, διάφορα μικρά τακάκια, σαν αυτά της φωτο 2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διαχωριστεί το πόδι από το συντονιστή σχηματίζοντας τη σχισμή (flue exit).

Με τις παραπάνω διαστάσεις, είμαστε πολύ κοντά στο πειραματικό μοντέλο του Verge [EEE] ή [81], ώστε να μπορούμε προσεγγιστικά να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Εκτός απ' το κανάλι του οποίου οι τρεις πλευρές είναι κολλημένες, όλα τα υπόλοιπα τεμάχια στερεώνονται ακλόνητα με μικρά σφικτηράκια στις επιθυμητές θέσεις. Η συναρμολόγηση φαίνεται στη φωτο 3. Το επάνω, κινητό, μέρος του συντονιστή είναι διαμορφωμένο απ' τη μία πλευρά σε αιχμηρό άκρο γωνίας 15°, συνιστώντας εν' τέλει το labium. Στη βάση του καναλιού διανοίχτηκαν οπές διαμέτρου 1 mm σε όλο το μήκος, όπως είναι διακριτό απ' τις φωτογραφίες για τη μέτρηση της πίεσης. Τελικά παρέμειναν ανοικτές μόνο οι οπές στο πόδι, για να είναι εφικτή η μέτρηση της Blowing Pressure και οι υπόλοιπες κλείστηκαν με διαφανή ταινία, γιατί έστω και μία τόσο μικρή διάμετρος οπής διαπιστώθηκε ότι επηρεάζει το συντονισμό της αέρας στήλης του συντονιστή.

Για τη μέτρηση της πίεσης πνοής θεωρούμε ότι αυτή παραμένει στατική εντός του ποδιού, όπως άλλωστε έχουν θεωρήσει κατά καιρούς οι διάφοροι μελετητές [32], [XX], [EEE]. Έτσι, ένα κοινό μικρομανόμετρο πετρελαίου είναι κατάλληλο για το απλό αυτό πείραμα (φωτό 4). Στο επιθυμητό σημείο μέτρησης προσαρμόζουμε ένα σωληνάκι μπρούντζου που το οδηγούμε μέσω εύκαμπτου πλαστικού λεπτού σωλήνα στο μανόμετρο.

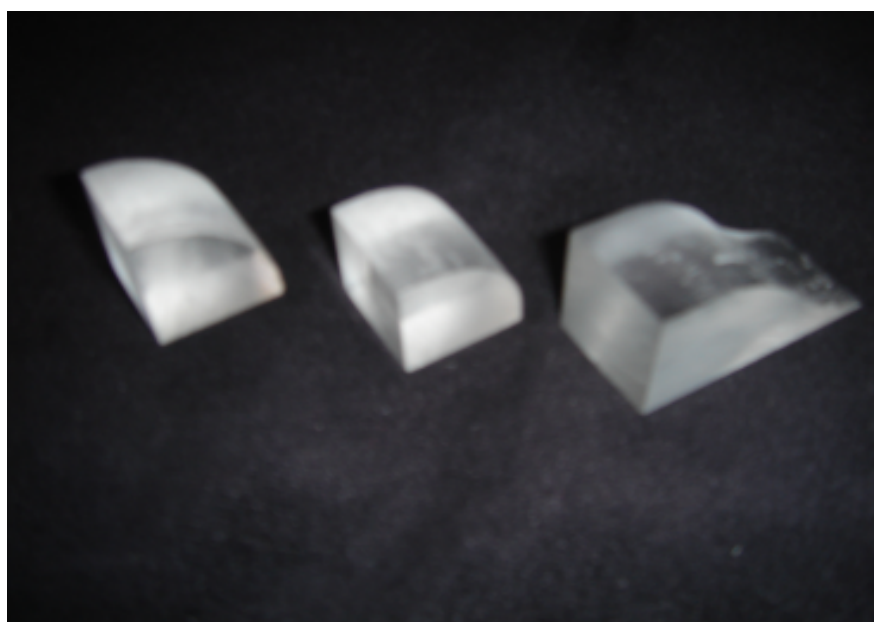
Η πίεση τροφοδοτείται στο πόδι από ένα μικρό ηλεκτρικό συμπιεστή, μέσω ενός κοινού λάστιχου ποτίσματος μήκους 11 m. Δύο λόγοι οδηγούν στην επιλογή αυτού του μεγάλου μήκους. Ο πρώτος εί-

ναι για να υπάρχει αρκετή πτώση πίεσης από τις μεγάλες τιμές (1 bar και άνω) που παράγει ο συμπιεστής. Ο δεύτερος είναι για να απομακρύνουμε όσο μπορούμε το ηχηρό αυτό μηχάνημα από το



Φωτό 1

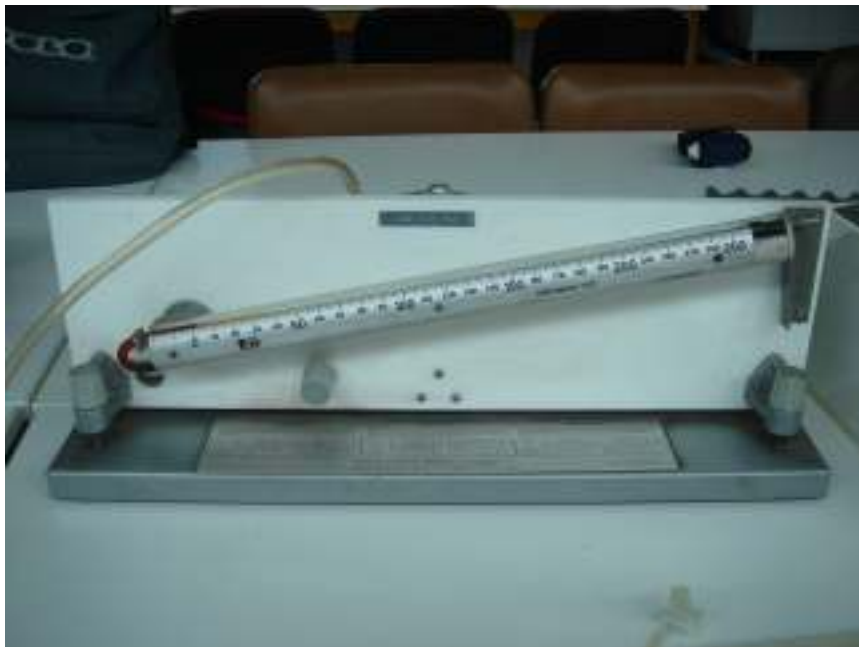
Το κανάλι από Plexiglas, που χρησιμοποιήσαμε στα πειράματα με αυλό μεταβλητής γεωμετρίας





Φωτό 3

Το μοντελάκι του αυλού συναρμολογημένο με σφικτηράκια, για μία από τις επιθυμητές γεωμετρίες.



χώρο μετρήσεων. Μετά το λάστιχο εφαρμόζουμε έναν χαλκοσωλήνα στον οποίο περνάμε έναν άλλο σωλήνα από πλαστικό, ελαφρά φαρδύτερο, οποίος εισέρχεται τελικά στο πόδι του αυλού. Για να στε-

γανοποιήσουμε την επαφή του πλαστικού αυτού σωλήνα με το πόδι, χρησιμοποιούμε πλαστελίνη. Στο στόμιο του πλαστικού σωλήνα εντός του ποδιού προσαρμόζουμε γάζα για την απόσβεση των ταλαντώσεων της πίεσης απ' το συμπιεστή.

Για τις ηχητικές μετρήσεις αρκούμαστε σε ένα θορυβόμετρο HD 9019 της Delta Ohm που μας δείχνει το ολικό SPL με στάθμιση φίλτρου και σε ένα δυναμικό μικρόφωνο AKG, υψηλής ποιότητας με το οποίο περνάμε το ηχητικό φάσμα σε ένα PC. Το φάσμα μπορούμε το αναλύσουμε με FFT χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Cool Edit Pro και να πάρουμε τα σχετικά πλάτη των αρμονικών. Το μικρόφωνο αυτό το συνδέουμε στο PC μέσω ενός προενισχυτή σήματος.

Με απλά μέσα λοιπόν έχουμε έναν εξοπλισμό υπεραρκετό για το πείραμά μας. Δύο ακόμα στοιχεία προέκυψαν κρίσιμα για την εκτέλεση. Το πρώτο ήταν η έλλειψη καλού ελέγχου της πίεσης από τη βάνα του συμπιεστή. Τοποθετήσαμε μία βάνα ακριβείας στο λάστιχο κοντά στο μοντελάκι (φωτό 5).



Φωτό 5

Βάνα ακριβείας για τη ρύθμιση της πίεσης σε υποδιαιρέσεις Pascal.

Για την ηχομόνωση λοιπόν του κουτιού μετρήσεων, αρκεστήκαμε στην πενιχρή ικανότητα μόνωσης του χαρτονιού μακετών και στη... διακριτικότητα των κινήσεών μας!

Η τοποθέτηση του εξοπλισμού φαίνεται στη φωτό 7.

Το δεύτερο ήταν η υψηλή αντήχηση της αίθουσας του εργαστηρίου και οι πάσης φύσεως θόρυβοι. Μία πρόχειρη κατασκευή ενός κουτιού από χαρτόνι για μακέτες και εσωτερική επένδυση από αφρώδη πολυορεθάνη μας βοήθησε στη λήψη καθαρότερων μετρήσεων (φωτό 6). Η αφρώδης πολυορεθάνη είναι ένα από τα καλύτερα ηχοαπορροφητικά υλικά για επένδυση των εσωτερικών τοίχων των Studio, μειώνοντας τις ανακλάσεις των ηχητικών σημάτων και τους συντονισμούς του αέρα του χώρου [AA]. Συνηθίζεται στην Ελλάδα να λέγεται Ricofon, από την εταιρεία Ricomex που το πρωτοκατασκεύασε στη χώρα μας. Πρέπει να σημειωθεί ότι ένα ηχοαπορροφητικό υλικό δεν μπορεί να εμποδίσει την είσοδο θορύβων από έξω. Τη δουλειά αυτή την κάνει καλά ο πετροβάμβακας (rockwool), το οποίο όμως είναι υλικό δύσκολο στο χειρισμό και ανθυγιεινό όταν μένει εκτεθειμένο.



Φωτό 6

Ένα κουτί-Studio εντός του οποίου γίνεται η ακουστική μέτρηση του οργάνου. Το κάτω μικρόφωνο είναι του θορυβόμετρου και το πάνω του PC.



Φωτό 7

Σύνδεση του μοντέλου στην παροχή αέρα υπό πίεση (άσπρος σωλήνας) και τοποθέτησή του στο κουτί μετρήσεων. Η πίεση μετράται αμέσως πίσω από το τακάκι που σχηματίζει τη σχισμή. Το μοντέλο δεν έχει ακόμα συσφιχθεί στην τελική γεωμετρία.

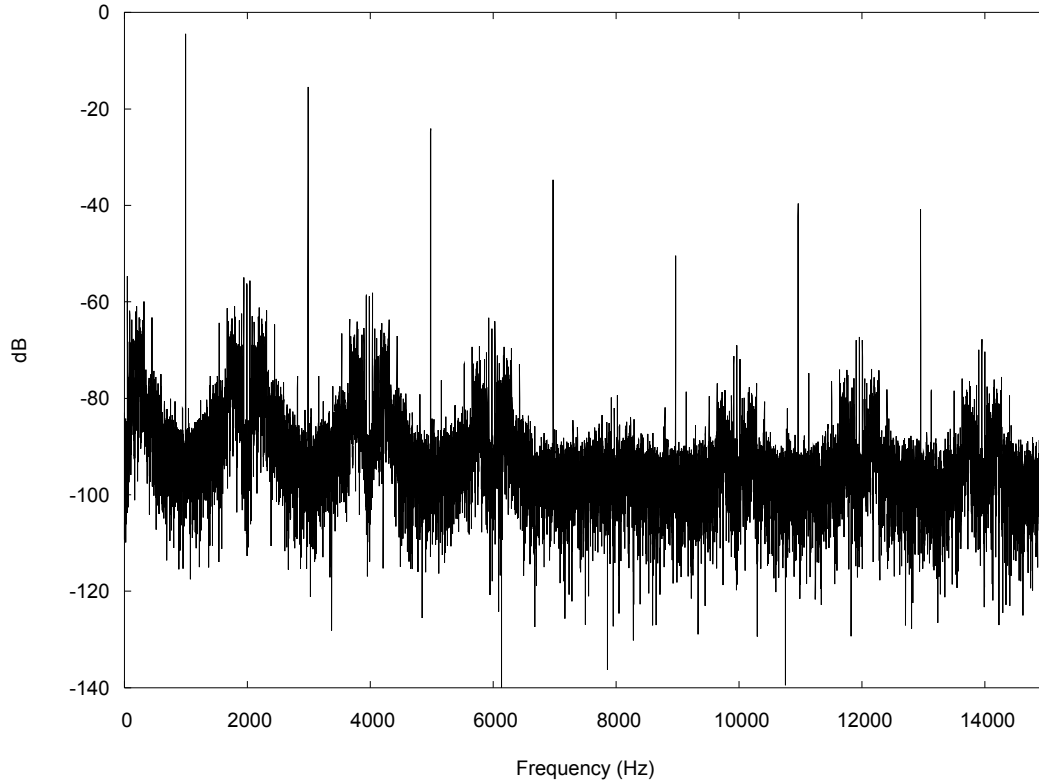
Έλεγχος του εξοπλισμού

Σύμφωνα με τις οδηγίες χρήσεως του θορυβομέτρου, τοποθετήσαμε στο μικρόφωνό του τη γεννήτρια παραγωγής τόνου συχνότητας 1000 Hz και έντασης 94 dB ή 140 dB ακουστικής πίεσης, που φέρει στη συσκευασία του, για να δούμε αν πραγματικά η ένδειξη της έντασης συμπίπτει με την αναγραφόμενη στη γεννήτρια. Το θορυβόμετρο έδωσε για την επιλογή 140 dB, ένταση 139,7 dB, που μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητική.

Χρησιμοποιώντας την ίδια γεννήτρια, ελέγξαμε την αξιοπιστία του λογισμικού Cool Edit Pro και τις μικροφωνικές σύνδεσης. Την τοποθετήσαμε κοντά στο AKG μικρόφωνο, ηχογραφήσαμε τον ήχο και πήραμε το φάσμα ανάλυσης συχνοτήτων από FFT ακρίβειας 65536 δειγμάτων, του σχήματος 1.1. Η θεμελιώδης συχνότητα του φάσματος προέκυψε 996.5 Hz πολύ κοντά στα 1000 Hz και μέσα στο 5 % της επιτρεπόμενης απόκλισης για πειραματικές μετρήσεις.

1.2 Εκτέλεση των μετρήσεων

Πειράματα έγιναν με δύο βασικές γεωμετρίες αυλού. Η πρώτη είναι η συμβατική οριζόντια γεωμετρία, όπως έχει αναλυθεί στα κεφάλαια 4 και 5 του μέρους II και όπως εικονίζεται στις προηγούμενες φωτογραφίες. Η δεύτερη είναι μία καινοτομική γεωμετρία στην οποία η ροή δεν εισέρχεται παράλληλα στον άξονα του σωλήνα αλλά κάθετα και μπορούμε να τη βαφτίσουμε *εγκάρσια*. Υπάρχουν συγκεκριμένα σημεία όπου η γεωμετρία αυτή διαφέρει εκτός απ' το συμβατικό αυλό και από το φλάουτο και από τον αυλό του Πανός. Η δοκιμή αυτή αποτελεί ένα μόνο πρώτο βήμα στο δύσκολο αλλά ελκυστικό εγχείρημα της δημιουργίας ενός πνευστού οργάνου που θα διεγείρεται απ' τον άνεμο και θα παράγει καθαρούς μουσικούς ήχους, σε αντιδιαστολή με τα υπάρχοντα αιολικά μουσικά όργανα που διεγείρονται ασθενώς και δεν παράγουν αμιγείς μουσικούς φθόγγους (Κεφάλαιο 7, Μέρος II).



Σχήμα 1.1

Φάσμα ανάλυσης συχνοτήτων FFT από το πρόγραμμα Cool Edit Pro για τη γεννήτρια σήματος 1000 Hz του θορυβόμετρου. Τα δεδομένα περάστηκαν σε αρχείο txt και κατόπιν στο λογισμικό γραφημάτων Gnuplot.

Τα πλάτη των συχνοτήτων που εμφανίζει το πρόγραμμα κατά την ανάλυση Fourier δεν είναι σε dB ακουστικής πίεσης αλλά ηλεκτρικού σήματος και αυτό είναι λογικό καθώς το μικρόφωνο μεταφέρει ηλεκτρικά σήματα στον υπολογιστή τα οποία εξάλλου εξαρτώνται και από την προενίσχυση και από την ένταση ηχογράφησης.

Ανεξάρτητα από το ποιο είναι το μέγεθος αναφοράς με το οποίο ο υπολογιστής υπολογίζει τα dB (ενδεχομένως να είναι ηλεκτρική τάση) μπορούμε να βρούμε τους λόγους των πλατών των υψηλών αρμονικών προς το πλάτος της θεμελιώδους. Κατά τα γνωστά για τα dB μίας οποιοδήποτε μέτρησης ισχύει:

$$dB = 10 \log_{10} \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{X}{X_0} \right) \quad (1.1)$$

όπου X είναι το μετρούμενο μέγεθος και X_0 η τιμή αναφοράς του μεγέθους αυτού. Όταν γνωρίζουμε τα decibel dB_1 και dB_2 δύο ποσοτήτων του ίδιου μεγέθους (ηλεκτρικής τάσης, ακουστικής πίεσης κλπ), τότε μπορούμε να έχουμε και το λόγο των απόλυτων τιμών των ποσοτήτων:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\sqrt{10^{dB_2/10}}}{\sqrt{10^{dB_1/10}}} \quad (1.2)$$

Επειδή θεωρούμε ότι οι αρμονικές αποτελούν αμιγή ημιτονοειδή κύματα με πλάτη a_1, a_2, a_3, \dots μπορούμε να γράψουμε την παρακάτω σχέση μεταξύ των πλατών των πρώτων (και πιο ισχυρών αρμονικών) και της συνολικής έντασης σε dB:

$$L_{pTotal} = \sqrt{p_{m,1}^2 + p_{m,2}^2 + p_{m,3}^2 + p_{m,4}^2 + \dots} = p_{m,1} \sqrt{1 + \left(\frac{p_{m,2}}{p_{m,1}} \right)^2 + \left(\frac{p_{m,3}}{p_{m,1}} \right)^2 + \left(\frac{p_{m,4}}{p_{m,1}} \right)^2 + \dots} \quad (1.3)$$

Καθώς μετρούμε σε κάθε μεταβολή της πίεσης την ολική ένταση L_{pTotal} και αφού γνωρίζουμε τους λόγους των πρώτων αρμονικών (1.2), υπολογίζουμε το πλάτος $p_{m,1}$ της πρώτης αρμονικής από τη σχέση (1.3). Έπειτα μπορούμε να έχουμε το πλάτος κάθε άλλης αρμονικής με χρήση του λόγου (1.2):

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{p_{m,2}}{p_{m,1}}, \quad \frac{X_3}{X_1} = \frac{p_{m,3}}{p_{m,1}}, \quad \frac{X_4}{X_1} = \frac{p_{m,4}}{p_{m,1}}, \text{ κλπ} \quad (1.4)$$

όπου μόνο τα πλάτη $p_{m,1}$, $p_{m,2}$, $p_{m,3}$, ... είναι άγνωστα. Γνωρίζοντας τώρα κάθε πλάτος δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο SPL (Κεφάλαιο 5, Μέρος I):

$$SPL_1 = \log_{10} \left(\frac{p_{rms,1}}{p_0} \right)^2 = \log_{10} \left(\frac{p_{m,1}}{p_0 \sqrt{2}} \right)^2 \quad (1.5)$$

Τη διαδικασία αυτή θα ακολουθήσουμε για να κατασκευάσουμε στη συνέχεια τις καμπύλες μεταβολής της έντασης των αρμονικών, ως προς τη μεταβολή της πίεσης πνοής.

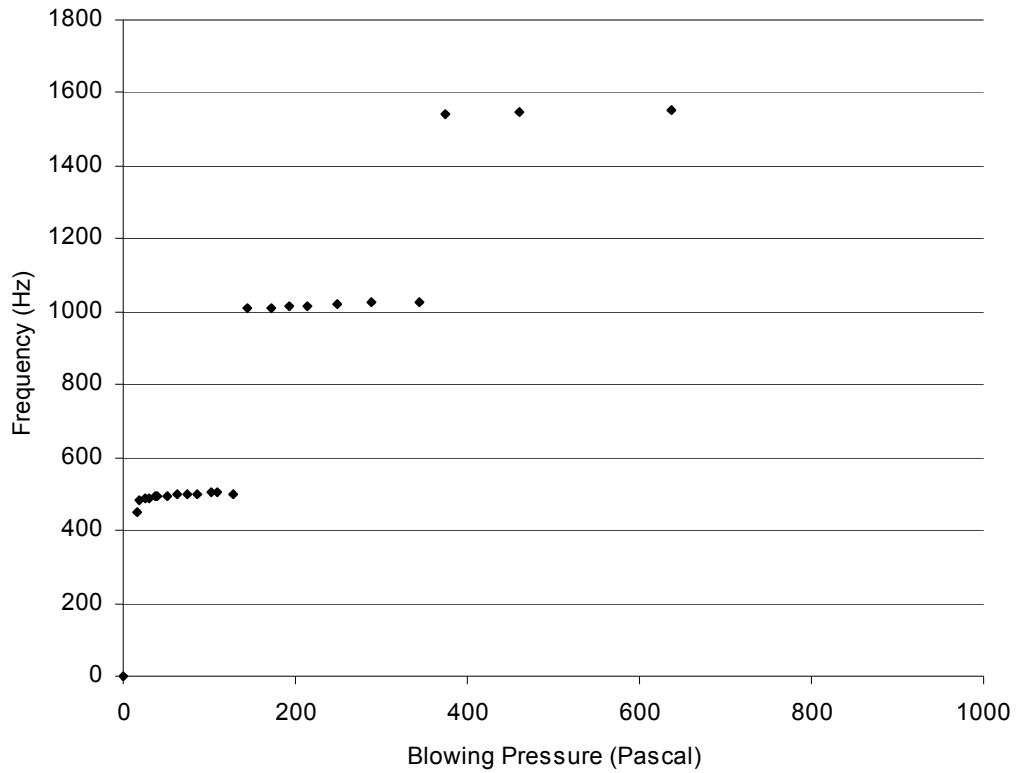
1.3 Πείραμα με οριζόντιο αυλό τετραγωνικής διατομής

Το μήκος του συντονιστή παραμένει πάντα το ίδιο και ίσο με 283 mm. Επίσης η διατομή του οργάνου είναι τετραγωνική με εσωτερική πλευρά $H = 19$ mm. Μεταβάλλουμε τη θέση του labium (Jet offset) y_0 , το πάχος της σχισμής h και την απόσταση σχισμής – labium l (όπως συνηθίζει να συμβολίζει ο Fletcher) ή W (όπως συνηθίζει να συμβολίζει ο Verge). Ένα πολύ σημαντικό θέμα υπάρχει όσον αφορά στη διόρθωση μήκους. Καθώς όλη η γεωμετρία σχηματίζεται από τη μετακίνηση των τεμαχίων ενός του καναλιού από Plexiglas, παραμένει πάντα περιθώριο όπως φαίνεται στη φωτο 3. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διαφορετική επίδραση στην ακτινοβολία του ήχου τόσο απ' το στόμα όσο και απ' το παθητικό άκρο (ενότητα 4.10, Μέρος II). Για την εξαγωγή των συμπερασμάτων μας, μπορούμε να αμελήσουμε την πρόσθετη διόρθωση μήκους στο περιθώριο του παθητικού άκρου, χωρίς αυτό όμως να είναι απόλυτα σωστό. Επίσης, καθώς το ολικό εσωτερικό ύψος του καναλιού είναι 32 mm, γύρω απ' το στόμα θα σχηματίζονται αυτιά (ears) ύψους $32 - 19 = 13$ mm, όπως φαίνεται καθαρά στις φωτο 3 ή 7, τα οποία μεταβάλλουν τη διόρθωση μήκους στο στόμα, κατά τα όσα γράφθηκαν στην ενότητα 4.11 του Μέρους II.

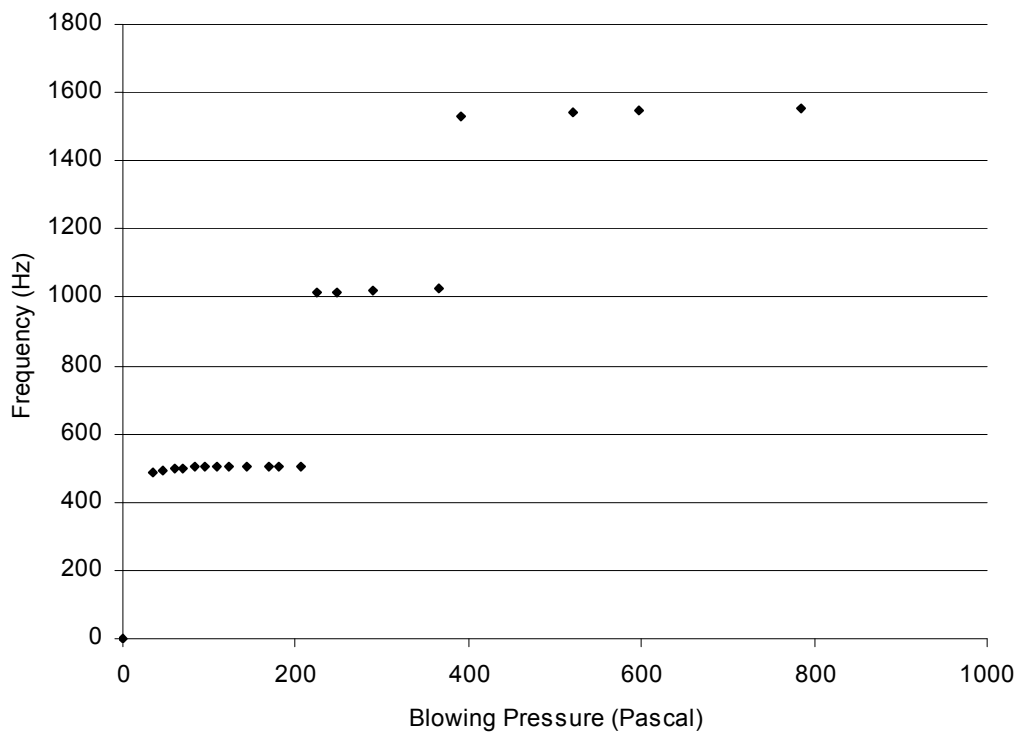
Σε όλες τις μετρήσεις το μικρόφωνο τοποθετείται σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο. Θα ξεκινήσουμε με ένα σχετικά μεγάλο πάχος σχισμής $h = 2$ mm, για δύο διαφορετικά jet-offset $y_0 = 0$ mm και $y_0 = 0,5h$ mm.

Γεωμετρία με $y_0 = 0$ mm και $h = 2$ mm

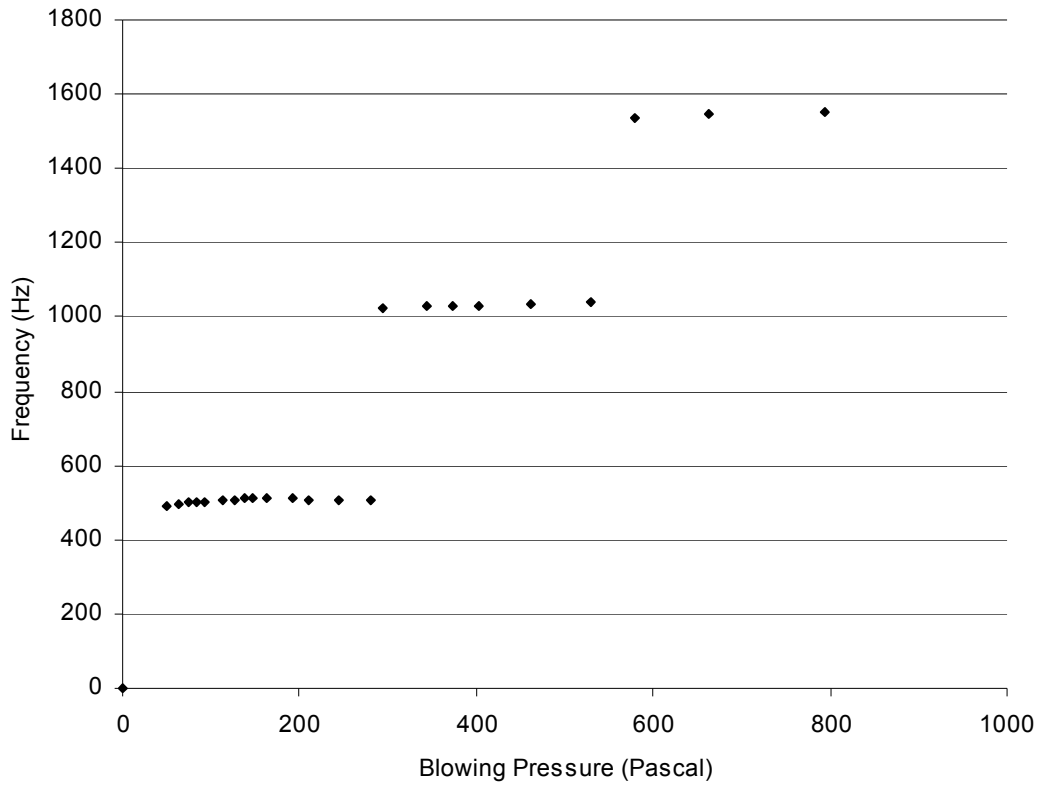
Όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 5 του μέρους II, η θέση του Labium είναι $y_0 = 0$ mm, όταν το αιχμηρό άκρο βρίσκεται ακριβώς στη μέση του πάχους της σχισμής. Για πάχος σχισμής σταθερό $h = 2$ mm μετακινούμε διαδοχικά το labium σε θέσεις $W=4$ mm, $W=5$ mm, $W=6$ mm και $W=10$ mm. Τα διαγράμματα 1.1 έως 1.4 δείχνουν τη μεταβολή της θεμελιώδους συχνότητας ήχησης του οργάνου ως συνάρτηση της πίεσης πνοής. Αυτή η σειρά των μετρήσεων είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, καθώς το πάχος $h = 2$ mm είναι σχετικά μεγάλο για διατομή $S_p = 19 \times 19 \text{ mm}^2$. Η ισοδύναμη ακτίνα του αντίστοιχου κυλινδρικού αυλού είναι: $r_p = \sqrt{S_p / \pi} = 0,11 \text{ m}$. Από τη σχέση (6.6) του κεφαλαίου 6 του μέρους II, μπορούμε να βρούμε ότι το ποσοστό του πλάτους H του στόματος ως προς την περιφέρεια είναι $a=0,27$, πολύ κοντά στο συνηθισμένο για αυλούς εκκλησιαστικών οργάνων. Από τη σχέση (6.8) όμως διαπιστώνουμε ότι το κλάσμα του πάχους h προς το πλάτος H είναι 0,1, πολύ μεγαλύτερο από τη συνηθισμένη τιμή 0,03.



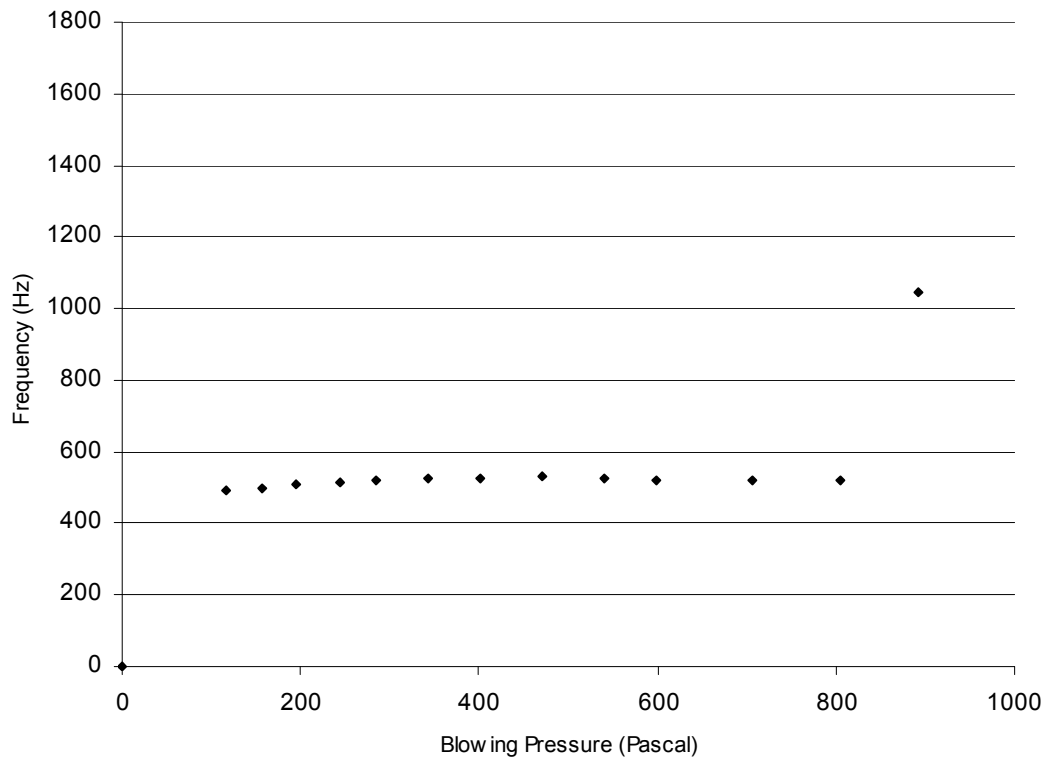
Διάγραμμα 1.1: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=4$ mm



Διάγραμμα 1.2: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=5$ mm



Διάγραμμα 1.3: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=6$ mm



Διάγραμμα 1.4: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=10$ mm

Τρέχοντας τον κώδικα που προτείνεται στην ενότητα 4.11, του μέρους II μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του ακουστικού σωλήνα του μοντέλου μας για ταχύτητα ήχου $c=342$ m/s, ύψος αυτιών (ears) 12 mm και απόσταση σχισμής labium διαδοχικά για $W=4$ mm, $W=5$ mm, $W=6$ mm και $W=10$ mm. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 1.1. Το πρόγραμμα μας δίνει ενεργό μήκος συντονιστή (συμπεριλαμβανομένων διορθώσεων στο άκρο και στο στόμα) ίσο με 296 mm.

Πίνακας 4.1

Ιδιοσυχνότητες του παθητικού ακουστικού σωλήνα του μοντέλου, με παράμετρο την απόσταση W .

Κανονικοί τρόποι	Ιδιοσυχνότητες (Hz)			
	$W=4$ mm	$W=5$ mm	$W=6$ mm	$W=10$ mm
1	537	545	552	571
2	1079	1094	1106	1143
3	1630	1648	1664	1715
4	2189	2208	2225	2287
5	2754	2772	2791	2860
6	3324	3341	3360	3434
7	3897	3914	3931	4008
8	4473	4489	4505	4584
9	5051	5065	5081	5160
10	5631	5644	5659	5736

Σύμφωνα με τις ενότητες 4.10 και 4.11 του μέρους II, με την αύξηση της απόστασης W αυξάνεται και το άνοιγμα του στόματος. Αυτό συνεπάγεται μείωση της διόρθωσης μήκους λόγω του στόματος και άρα αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων. Η συμπεριφορά αυτή είναι έκδηλη στον πίνακα 1.1 και φαίνεται και στα πειραματικά αποτελέσματα των διαγραμμάτων 1.1 έως 1.4, παρόλο που οι μετρημένες θεμελιές συχνότητες συντονισμού είναι μικρότερες από αυτές του πίνακα 1.1, εξ' αιτίας της σύζευξης μεταξύ διεγέρτη και συντονιστή (mode locking) [34] που κλειδώνει τους συντονισμούς σε συχνότητες διαφορετικές από τις ιδιοσυχνότητες του παθητικού ακουστικού σωλήνα (ενότητα 4.10, Μέρος II, χαρακτηριστικό 2).

Η πρώτη βασική διαπίστωση που μπορούμε να κάνουμε για τα διαγράμματα είναι η εξάρτηση της συχνότητας από την πίεση πνοής, όχι μόνο σε σχέση με τις μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων συντονισμού, αλλά και μέσα στην κάθε κατάσταση. Στα διαγράμματα φαίνεται το κατώφλι πίεσης πάνω απ' το οποίο το όργανο εκπέμπει ακουστό ήχο. Όπως και στα πειράματα του Fletcher [28, 32], του Verge [EEE, 81], του Coltman, για το φλάουτο [18, 22] και άλλων πολλών, έτσι και εδώ, το όργανο αρχίζει να ηχεί απότομα καθώς η πίεση διαβαίνει το προαναφερθέν κατώφλι. Αλλά και ύστερα, η θεμελιώδης συχνότητα (άρα και οι αρμονικές) αυξάνεται με ελαφρά κλίση μέχρι να σταθεροποιηθεί κάπως λίγο πριν τη μετάβαση στη δεύτερη κατάσταση συντονισμού. Επαληθεύονται λοιπόν όλα όσα περιγράφησαν στο κεφ. 5 του μέρους II για την εξάρτηση της συχνότητας από την πίεση.

Όπως προβλέπεται και από τη θεωρία (κεφάλαιο 5, Μέρος II), καθώς μεγαλώνει η απόσταση W , το όργανο παραμένει συντονισμένο στον πρώτο τρόπο για μεγαλύτερο εύρος Blowing Pressure. Για απόσταση σχισμής – άνω χείλους ίση με 4 mm, η μετάβαση από τον πρώτο στο δεύτερο τρόπο συντονισμού συμβαίνει κάτω από 180 περίπου Pascal. Ο λόγος $W/h = 2$. Για απόσταση σχισμής – άνω χείλους ίση με 10 mm, το overblowing συμβαίνει με μεγάλη δυσκολία από 900 Pascal και άνω.

Μπορούμε σ' αυτό το σημείο να πάρουμε και τη μεταβολή του αριθμού Ising, που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 5 του δεύτερου μέρους, ως προς την πίεση και τη θεμελιώδη συχνότητα. Ο αριθμός Ising προορίζεται να προβλέψει τη μετάβαση από τον πρώτο στο δεύτερο τρόπο συντονισμού και όχι για παραπέρα μεταβάσεις (απ' τον δεύτερο στον τρίτο, κοκ). Προκύπτουν έτσι τα διαγράμματα 1.5 έως 1.8 που αφορούν την περιοχή του πρώτου συντονισμού. Παρατηρούμε ότι στα τρία πρώτα διαγράμματα το κάτω όριο του αριθμού Ising συμφωνεί με τα όσα ελέγχθησαν στην ενότητα 5.10, δηλαδή με την τιμή 2. Η αύξησή του όμως θα έπρεπε να γίνεται με τέτοιο ρυθμό, ώστε να φτάσει την τιμή 3 κατά τη μετάβαση από τον πρώτο στο δεύτερο τρόπο συντονισμού. Εδώ η αύξηση γίνεται πολύ γοργότερα, γεγονός που μας δημιουργεί επιφυλάξεις για την αξιοπιστία του κριτηρίου. Στο διάγραμμα 1.8 το κάτω όριο

βρίσκεται σε τιμή κάτω του 1,5, ενώ η αύξηση του αριθμού πλησιάζει την αναμενόμενη από τη θεωρία της ενότητας 5.10.

Στο διάγραμμα 1.9 απεικονίζεται η ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, όπως λήφθηκε από το μικρόφωνο του νεσιμπελόμετρου, το οποίο τοποθετήθηκε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure με σταθερά τα $y_0 = 0$ mm και $h = 2$ mm. Παράμετρος των διαγραμμάτων είναι η απόσταση W του labium από τη flue σχισμή. Στο διάγραμμα είναι εμφανής η προοδευτική αύξηση του επίπεδου SPL για αυξανόμενη απόσταση W στην περιοχή του πρώτου τρόπου συντονισμού. Για πίεση 300 έως 400 περίπου Pascal ($V_j=22$ m/s) η γεωμετρία $W=10$ mm δίνει έναν πολύ δυνατό και καθαρό ήχο θεμελιώδους συχνότητας περίπου 525 Hz. Καταλήγουμε λοιπόν πρόχειρα, ότι αυξάνοντας την απόσταση W , το όργανο ηχεί καλά σε μεγαλύτερη πίεση και η ήχησή του δίνει μεγαλύτερο SPL.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις εντάσεις των έξι πρώτων αρμονικών για κάθε έναν από τους τρεις τρόπους συντονισμού. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα διαγράμματα 1.10 έως 1.12. Με μπλε χρώμα χαρακτηρίζεται πάντα η θεμελιώδης συχνότητα του τρόπου, δηλ. η πρώτη αρμονική. Παρατηρούμε στο δεξί μέρος των διαγραμμάτων 1.10 και 1.11 την απότομη άνοδο της δεύτερης αρμονικής (κόκκινο χρώμα) η οποία γίνεται θεμελιώδης αρμονική (μπλε χρώμα) στην αμέσως επόμενη κατάσταση συντονισμού (overblowing), αφού ενισχύεται από την ιδιοσυχνότητα του αμέσως επόμενου κανονικού τρόπου ταλάντωσης (ενότητα 4.10, μέρος II). Στο διάγραμμα 4.13 φαίνεται η μεταβολή των αρμονικών συχνοτήτων ως συνάρτηση της πίεσης πνοής σε όλο το διάστημα και των τριών τρόπων συντονισμού για τη γεωμετρία $W=6$ mm. Όπως είδαμε στο υπολογιστικό μέρος και θα φανεί και αργότερα στα συχνοτικά φάσματα κατά το overblowing από τον πρώτο τρόπο στον δεύτερο, οι περιττές αρμονικές εξασθενούν και οι άρτιες μεγαλώνουν ώστε να αποτελέσουν τις νέες περιττές και άρτιες αρμονικές στη δεύτερη κατάσταση συντονισμού.

Σχέση του M. S. Howe για τα κατώφλια συντονισμού

Ο Howe το 1981 προσπάθησε, με μία γραμμική θεώρηση του φαινομένου της διέγερσης δέσμης, να καταλήξει σε μία αναλυτική σχέση που μας δίνει την ταχύτητα πνοής πάνω από την οποία ένας αυλός μεταβαίνει στην κατάσταση του n τρόπου συντονισμού, όταν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του οργάνου και οι ιδιότητες του αέρα είναι γνωστά [49]:

$$\frac{V}{c} \geq \frac{V_n}{c} = \frac{n^2 \pi^2 WH}{3,68L^2} + \frac{\pi^{3/2} W}{1,84H} \left(\frac{2nL}{cH^2} \right)^{1/2} \left[v^{1/2} + (\gamma - 1) \chi^{1/2} \right] \quad (1.6)$$

Στη σχέση αυτή:

c είναι η ταχύτητα του ήχου,

L το ενεργό μήκος του συντονιστή,

H η πλευρά του τετραγωνικού συντονιστή

W η απόσταση σχισμής labium,

γ ο λόγος poisson,

ν η κινηματική συνεκτικότητα του αέρα ίση με $15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ και

χ η θερμική αγωγιμότητα του αέρα ίση με $21 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.

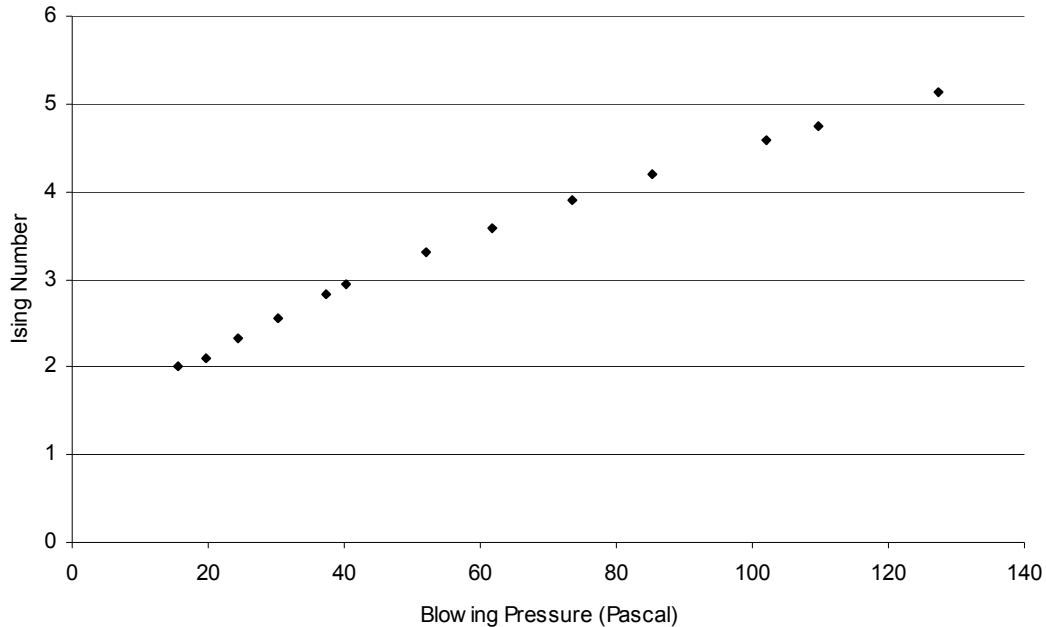
Αντικαθιστώντας όλα τα μεγέθη στη σχέση (1.6) παίρνουμε τον πίνακα 1.2 για τα κατώφλια των πέντε πρώτων καταστάσεων συντονισμού.

Πίνακας 1.5

Οι ταχύτητες και οι πιέσεις δέσμης πάνω από τις οποίες έχουμε μετάβαση στις διάφορες καταστάσεις συντονισμού Howe [49].

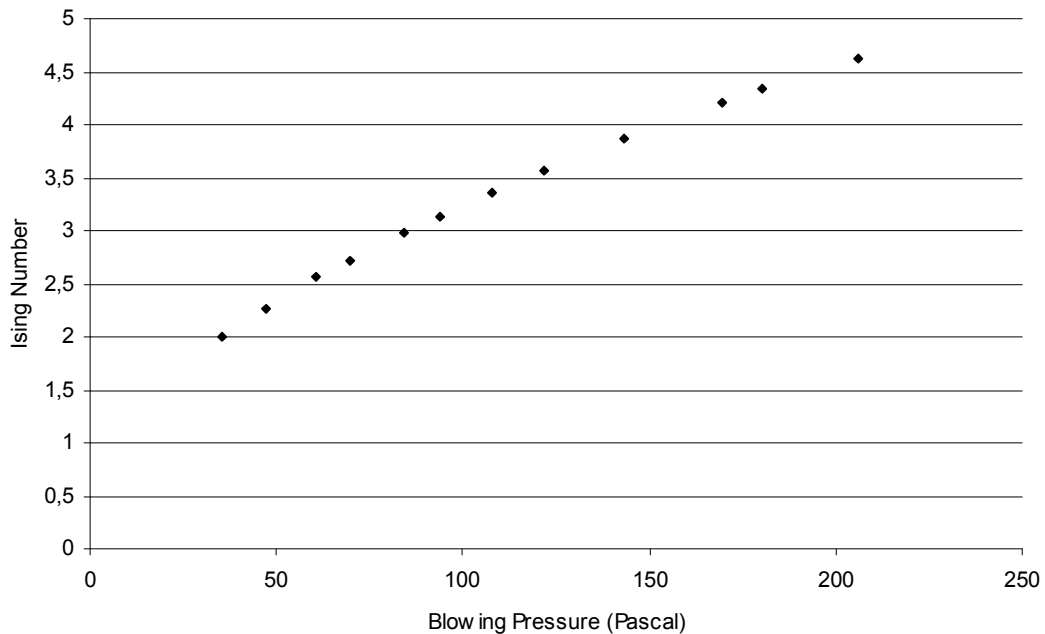
Κανονικοί Τρόποι	V_j (m/s) / p_f (Pascal)							
	$W=4$ mm		$W=5$ mm		$W=6$ mm		$W=10$ mm	
1	3,518	7,569	4,398	11,826	5,277	17,029	8,795	47,304
2	7,033	30,244	8,791	47,256	10,549	68,049	17,582	189,025
3	11,876	86,247	14,845	134,761	17,814	194,056	29,690	539,045
4	18,175	201,997	22,719	315,620	27,262	454,492	45,437	1262,48

Όπως και να έχει το πράγμα, η σχέση αδυνατεί να εκτιμήσει ούτε κατά προσέγγιση τα κατώφλια των διαγραμμάτων 1.1 έως 1.4. Παρά το ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο [49] η γραμμική ανάλυση του Howe δε λαμβάνει υπ' όψη της σημαντικές παραμέτρους, όπως το πάχος της σχισμής ή το jet offset. Ωστόσο, επειδή ο Howe θέτει ως περιορισμό ότι το πάχος της σχισμής είναι πολύ μικρότερο της πλευράς του συντονιστή, ας διατηρήσουμε μία επιφύλαξη για τις αδυναμίες τις καθώς προορίζεται για πάχη δέσμης πολύ μικρότερα της διατομής του συντονιστή.



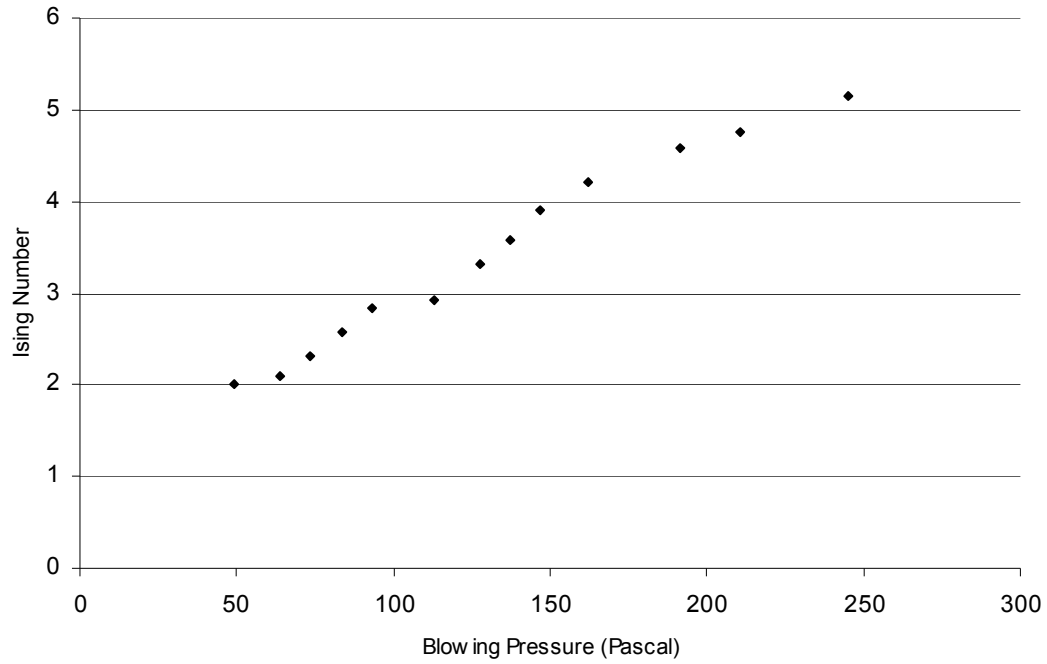
Διάγραμμα 1.5

Μεταβολή του αριθμού Ising ως προς την πίεση πνοής για τον πρώτο τρόπο συντονισμού $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=4$ mm.

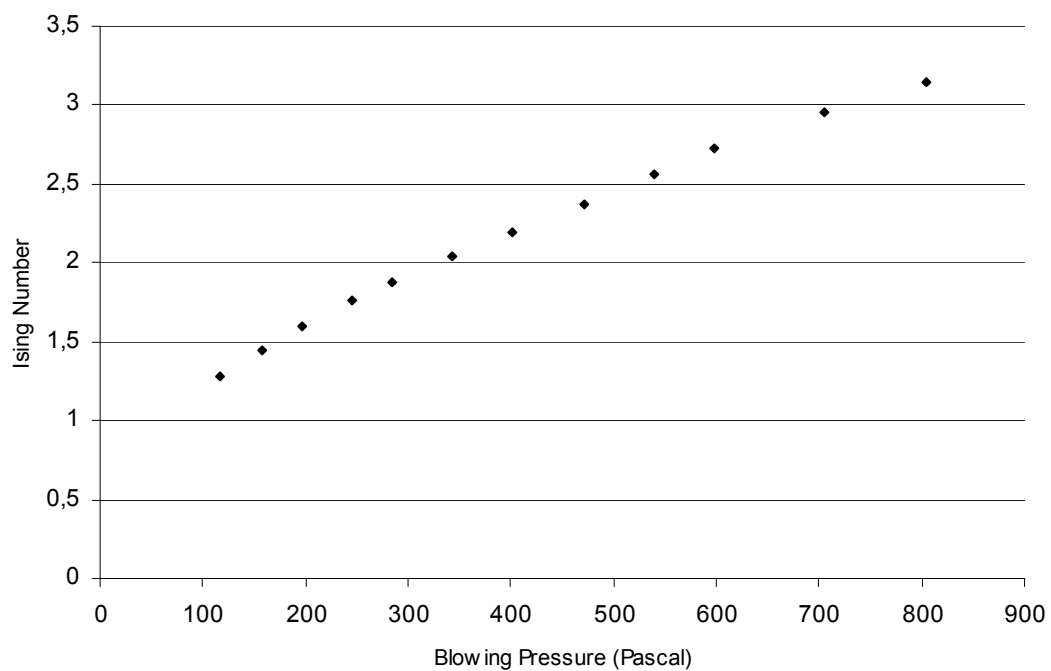


Διάγραμμα 1.6

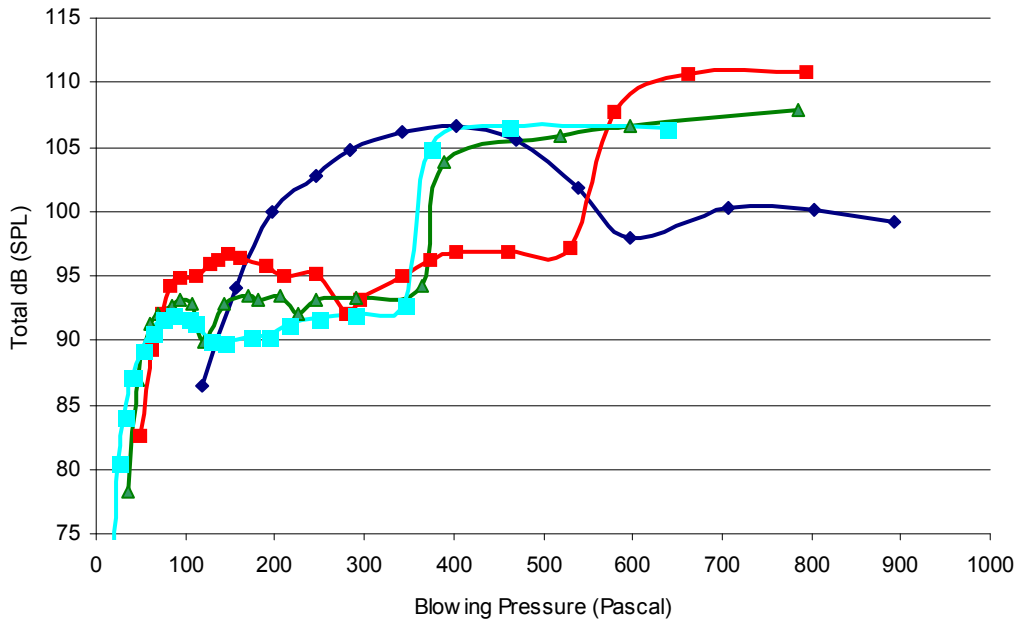
Μεταβολή του αριθμού Ising ως προς την πίεση πνοής για τον πρώτο τρόπο συντονισμού $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=5$ mm.

**Διάγραμμα 1.7**

Μεταβολή του αριθμού Ising ως προς την πίεση πνοής για τον πρώτο τρόπο συντονισμού $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=6$ mm.

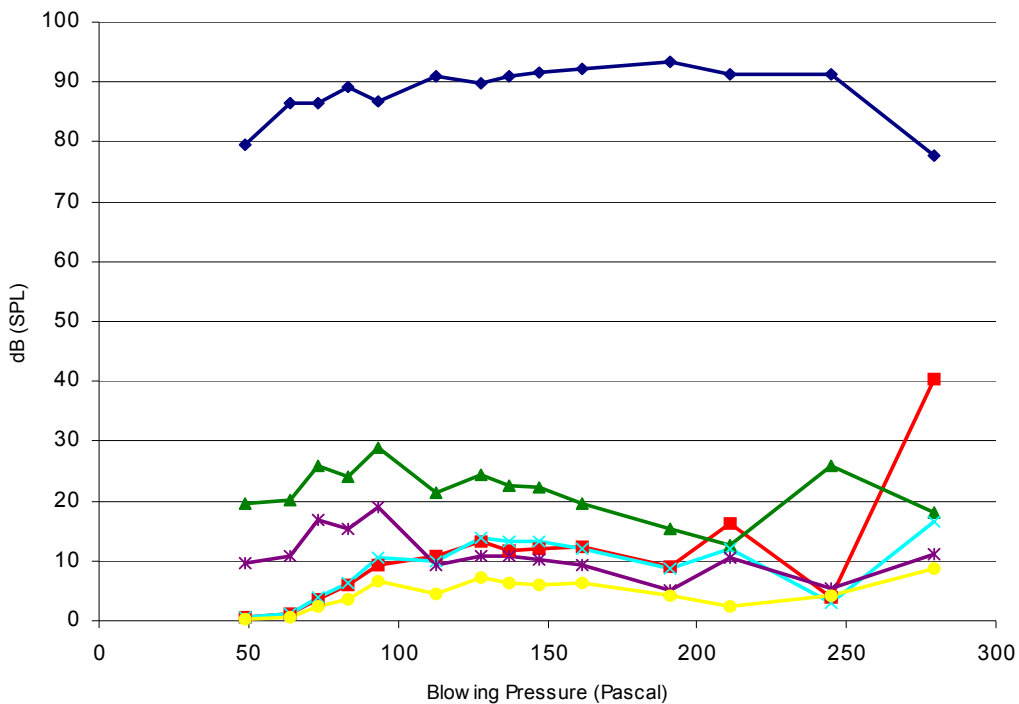
**Διάγραμμα 1.8**

Μεταβολή του αριθμού Ising ως προς την πίεση πνοής για τον πρώτο τρόπο συντονισμού $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=10$ mm.



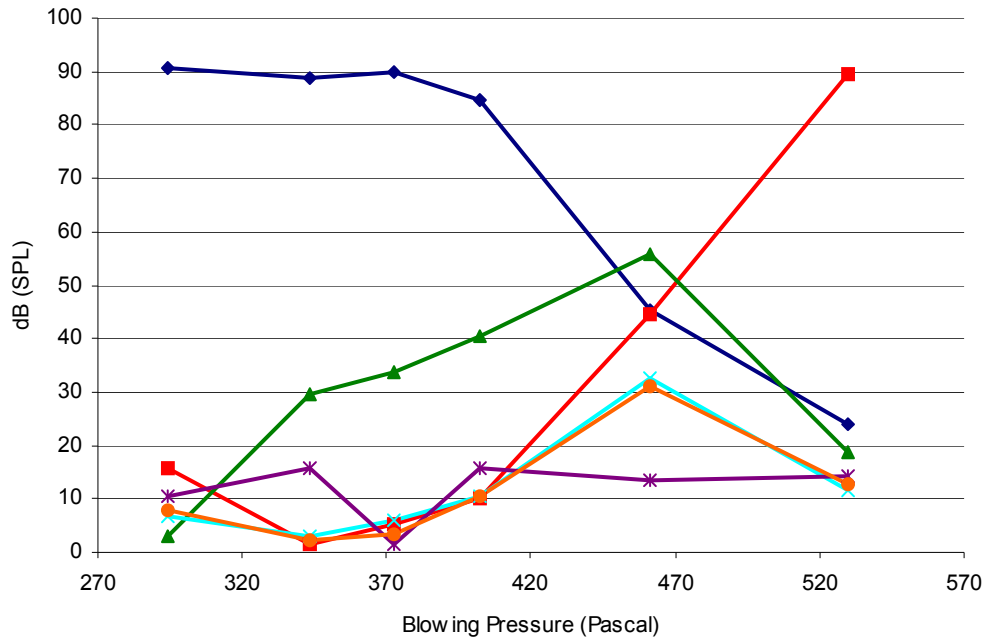
Διάγραμμα 1.9

Ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure με σταθερά τα $y_0 = 0$ mm και $h = 2$ mm. Γαλάζια γραμμή: W=4 mm, Πράσινη γραμμή: W=5 mm, Κόκκινη γραμμή: W=6 mm και Μπλε γραμμή: W=10 mm.



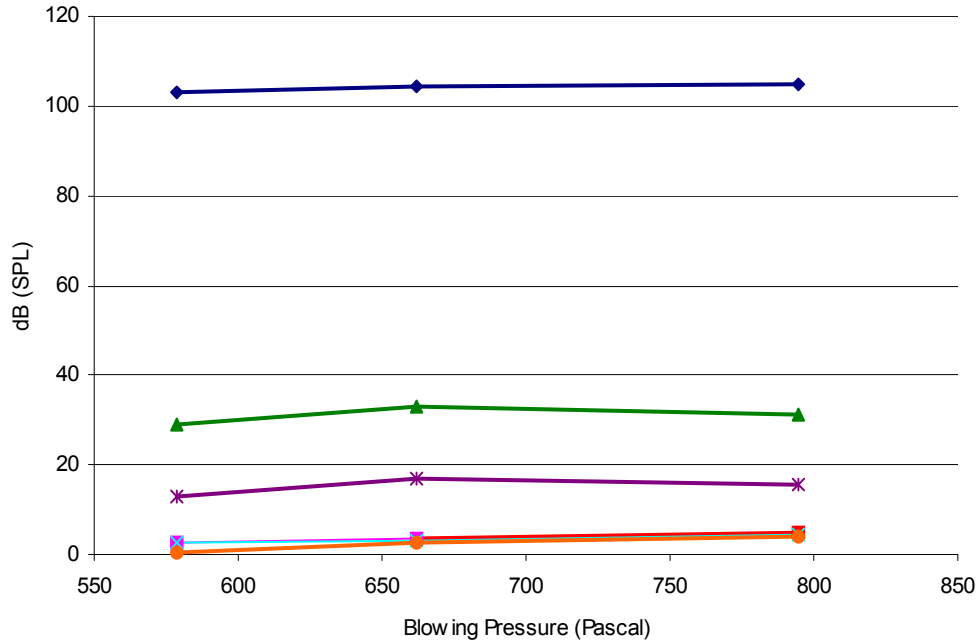
Διάγραμμα 1.10

Κατάσταση πρώτου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 0$, W=6 mm, h=2 mm.



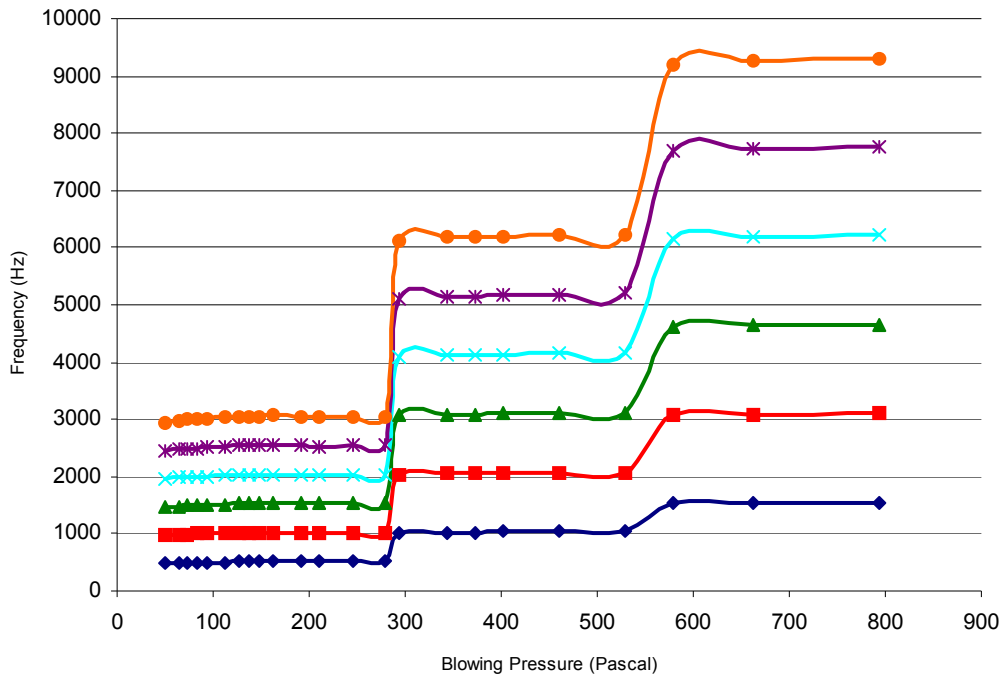
Διάγραμμα 1.11

Κατάσταση δεύτερου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 0$, $W=6$ mm, $h=2$ mm.



Διάγραμμα 1.12

Κατάσταση τρίτου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 0$, $W=6$ mm, $h=2$ mm.



Διάγραμμα 1.13

Μεταβολή συχνότητας των 6 πρώτων αρμονικών για τους τρεις πρώτους τρόπους συντονισμού ως συνάρτηση της Blowing Pressure. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 0$, $W=6$ mm, $h=2$ mm.

Simulation

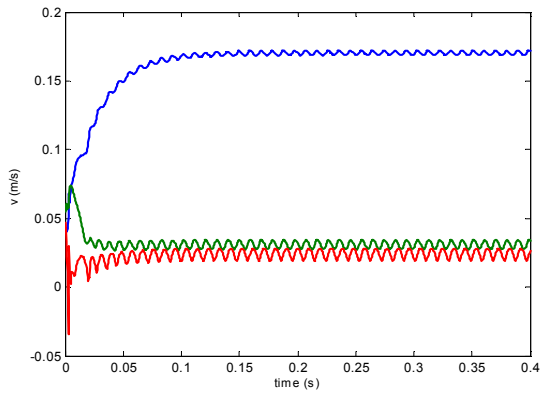
Μπορούμε να αντιπαραβάλλουμε τα πειραματικά αποτελέσματα με αυτά που προβλέπει η υπολογιστική θεωρία του Fletcher, όπως την τροποποιήσαμε στο κεφ. 2 του ΙΙΙ Μέρους. Ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά των τρόπων ταλάντωσης σε μερικές συγκεκριμένες τιμές της blowing pressure, κυρίως δηλαδή τότε υπερσχύει σε SPL η κάθε μία, που συνεπάγεται αλλαγή καταστάσεως συντονισμού. Η παράμετρος a του παράγοντα αύξησης επιλέγεται ίση με 0,2. Ο αριθμός των όρων κρατείται στο 5. Στην παρούσα φάση επιλέγουμε να εργαστούμε με τρεις τρόπους συντονισμού, τις ιδιοσυχνότητες των οποίων λαμβάνουμε απ' τον πίνακα 1.1.

Τα αποτελέσματα του κώδικα φαίνονται στα διαγράμματα 1.14 έως 1.29 για γεωμετρία $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=4$ mm. Σε μπλε χρώμα αντιστοιχεί ο πρώτος τρόπος, σε πράσινο ο δεύτερος και σε κόκκινο ο τρίτος. Μπορούμε να αρχίσουμε με την παρατήρηση ότι το υπολογιστικό μοντέλο δίνει πολύ σύντομη μεταβατική κατάσταση (transient state). Για πίεση 65 Pascal ο αυλός αποκρίνεται στη θεμελιώδη κατάσταση συντονισμού και η μόνιμη του κατάσταση επιτυγχάνεται έπειτα από 0,15 περίπου sec. Οι καμπύλες των τρόπων εμφανίζουν ταλαντωτική συμπεριφορά μικρού πλάτους, που για την εξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων για τη συμπεριφορά του οργάνου, μπορούν να παραβλεφθούν. Η ασταθής κατάσταση μεταξύ πρώτης και δεύτερης κατάστασης συντονισμού εμφανίζεται για πίεση 100 Pascal, όπου πλέον τα πλάτη ταλαντώσεων των καμπυλών των τρόπων δεν μπορούν να αμεληθούν και οδηγούν στο χαρακτηριστικό άκουσμα (σαν τρέμολο), παρόμοιο με αυτό τον διακριτημάτων [TT]. Βλέπουμε ότι οι ταχύτητες πρώτου και δεύτερου τρόπου έχουν παραπλήσια μεγέθη. Η μετάβαση εμφανίζεται κατά 50 περίπου Pascal χαμηλότερα από ότι στο μετρημένο διάγραμμα 1.14. Κατάσταση δεύτερου τρόπου συντονισμού (overblowing) έχουμε για πίεση 200 Pascal, κατά 20 περίπου Pascal περισσότερο από το διάγραμμα 1.14. Όπως είδαμε και για τον αυλό της ενότητας 2.5 του Μέρους ΙΙΙ, οι μεταβάσεις που προβλέπει η υπολογιστική θεωρία του Fletcher εκτείνονται σε μεγαλύτερο εύρος πιέσεων από ότι παρατηρείται στην πράξη. Για πίεση 400 Pascal ο αυλός μεταβαίνει στην τρίτη κατάσταση συντονισμού, κατά συμφωνία με το διάγραμμα 1.14. Μπορούμε να συγκρίνουμε το ολικό SPL της γεωμετρίας, για κάθε πίεση, με τη γαλάζια καμπύλη του διαγράμματος 1.9. Οι αποκλίσεις από τα πειραματικά δεδομένα δεν είναι μεγάλες.

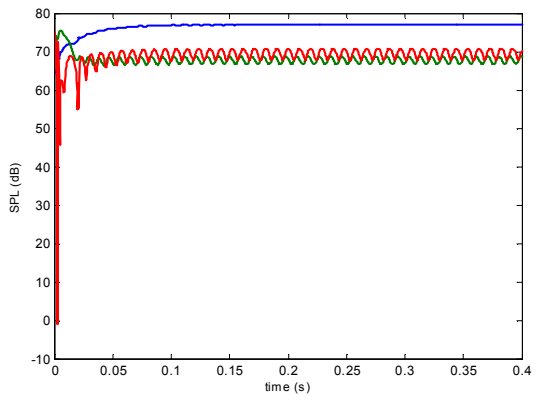
Υπολογίζουμε έπειτα τη συμπεριφορά της γεωμετρίας $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=6$ mm για σύγκριση με το διάγραμμα 1.10.

Γεωμετρία $y_0 = 0 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ mm}$, $W = 4 \text{ mm}$

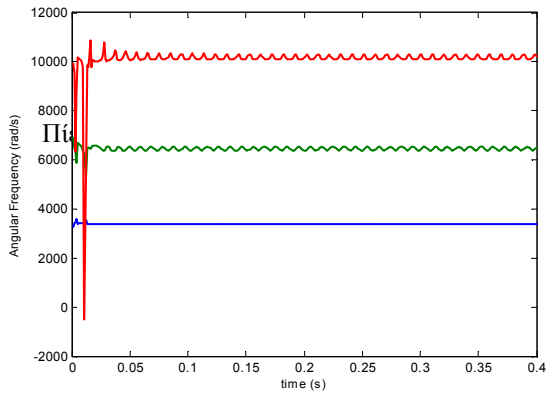
Πίεση 65 Pascal



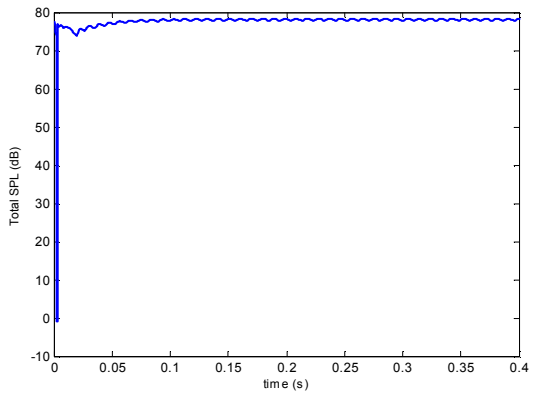
Διάγραμμα 1.14



Διάγραμμα 1.15

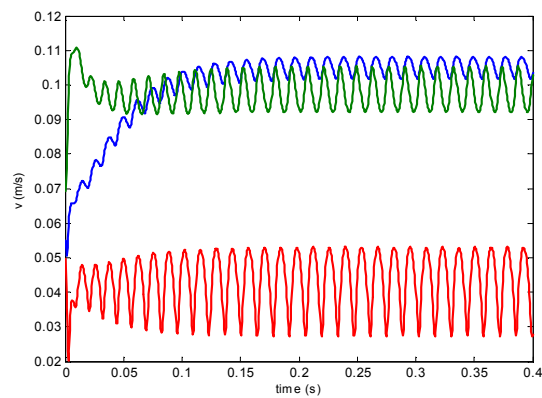


Διάγραμμα 1.16

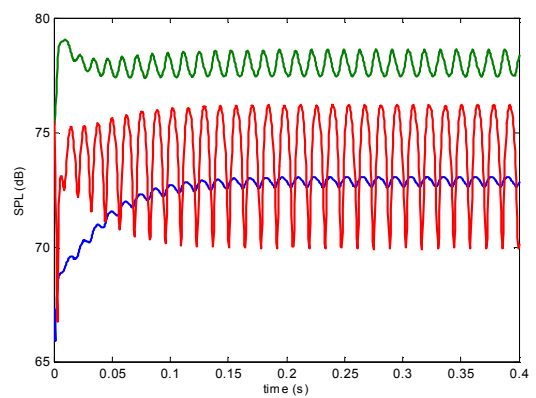


Διάγραμμα 1.17

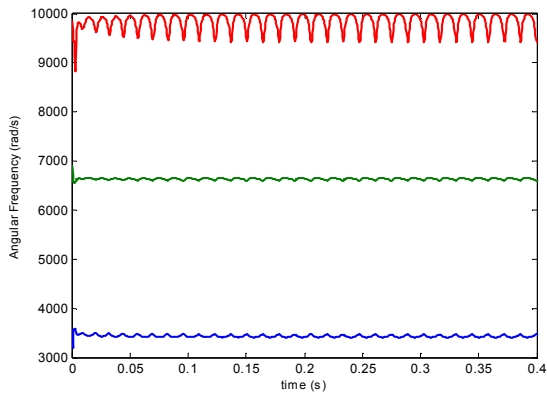
Πίεση 100 Pascal



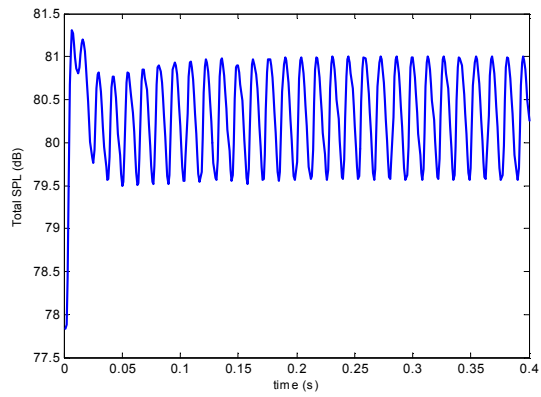
Διάγραμμα 1.18



Διάγραμμα 1.19

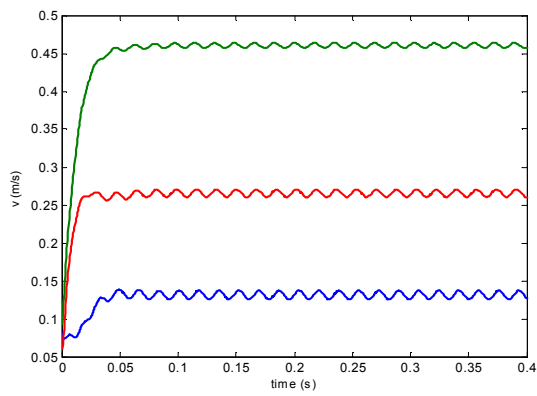


Διάγραμμα 1.20

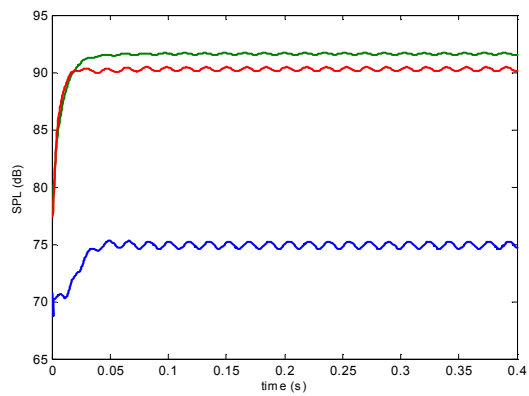


Διάγραμμα 1.21

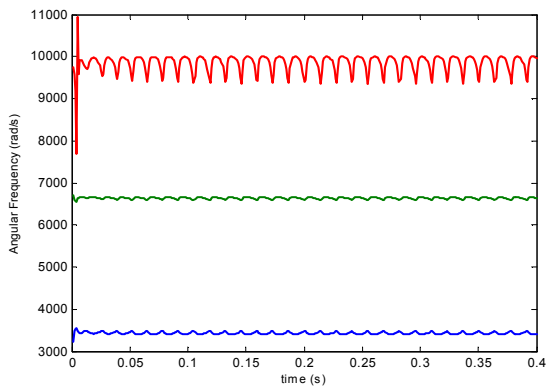
Πίεση 200 Pascal



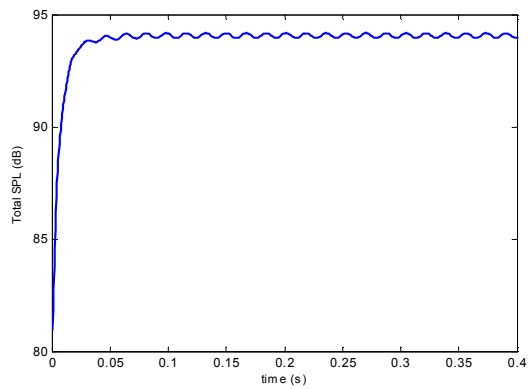
Διάγραμμα 1.22



Διάγραμμα 1.23

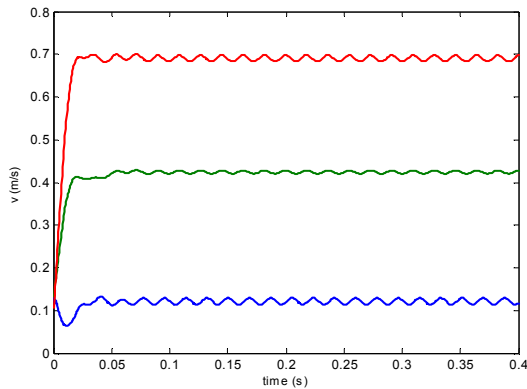


Διάγραμμα 1.24

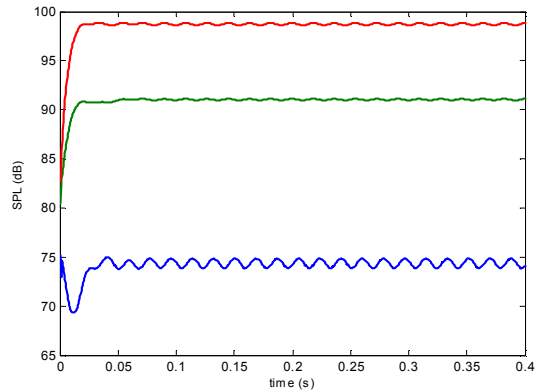


Διάγραμμα 1.25

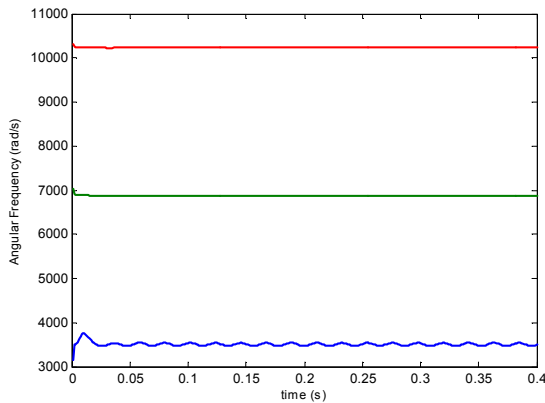
Πίεση 400 Pascal



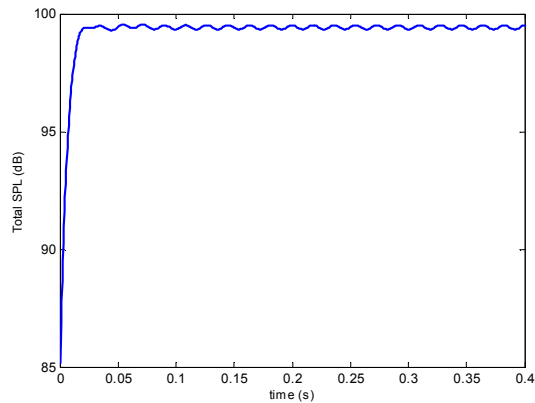
Διάγραμμα 1.26



Διάγραμμα 1.27



Διάγραμμα 1.28



Διάγραμμα 1.29

Γεωμετρία $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W = 6$ mm

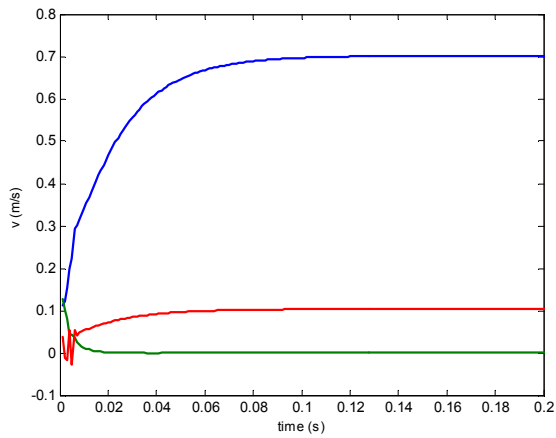
Οι αριθμητικοί υπολογισμοί δίνουν ένα σχετικά μεγάλο κατώφλι πίεσης (150 Pascal) για ήχηση στην θεμελιώδη κατάσταση συντονισμού (διαγρ. 1.30 έως 1.33). Αυξανόμενης της πίεσης (200 Pascal), ο δεύτερος τρόπος συντονισμού εμφανίζει μία ελαφρά ασταθή συμπεριφορά (διαγρ. 1.34 έως 1.37). Γενικά, σε όλο το εύρος της πρώτης κατάστασης, ο πρώτος τρόπος εμφανίζεται κατά πολύ ισχυρότερος των άλλων δύο, με ακόλουθο τον τρίτο και έπειτα τον δεύτερο. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα 1.32 και 1.36 με το 1.10, παρατηρούμε ότι το SPL του πρώτου τρόπου έχει προβλεφθεί σωστά, ενώ του τρίτου τρόπου, μολονότι είναι μικρότερο του πρώτου, εντούτοις είναι αρκετά μεγαλύτερο απ' το πειραματικό. Το ολικό τώρα SPL είναι πολύ κοντά στο πειραματικό αποτέλεσμα (περίπου 95 dB), όπως θα παρατηρήσουμε με μία παραβολή των διαγραμμάτων 1.33 και 1.37 με το 1.9.

Στα 330 Pascal εμφανίζεται η μετάβαση από την πρώτη στη δεύτερη κατάσταση συντονισμού (διαγρ. 1.38 έως 1.41), σε συμφωνία με το διάγραμμα 1.3.

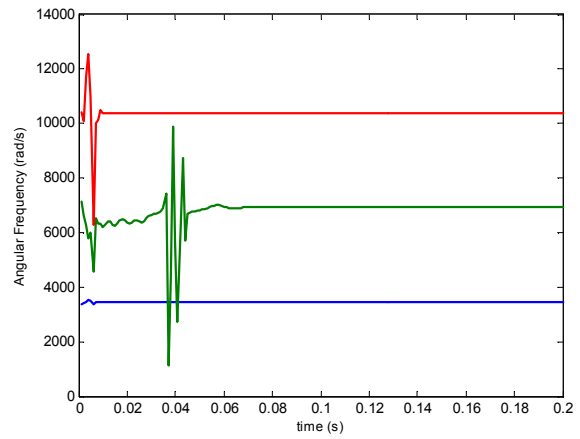
Για πίεση 400 Pascal το όργανο βρίσκεται πλέον σε κατάσταση overblowing (διαγρ. 1.42 έως 1.43). Ο πρώτος και ο τρίτος τρόπος θα έπρεπε να εξαφανιστούν, αλλά το μοντέλο δεν προβλέπει σωστά αυτή τη συμπεριφορά. Η ένταση του πρώτου τρόπου είναι η αναμενόμενη, όπως και το ολικό SPL (διαγρ. 1.9).

Τρίτη κατάσταση συντονισμού εμφανίζεται σε πίεση 800 Pascal, σημαντικά μεγαλύτερη της πειραματικής (διαγρ. 1.3). Το υπολογισμένο ολικό SPL για αυτή την πίεση (διαγρ. 1.45) είναι πολύ κοντά με το μετρημένο (1.9).

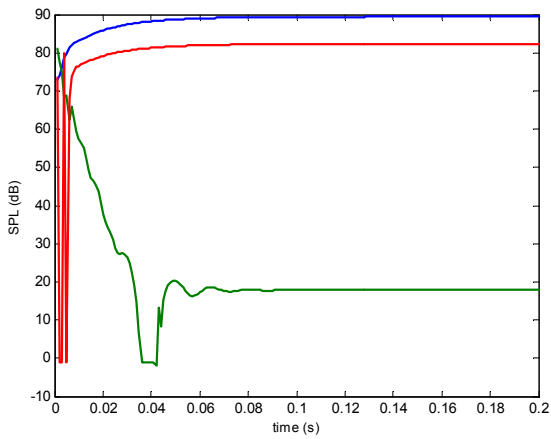
Πίεση 150 Pascal



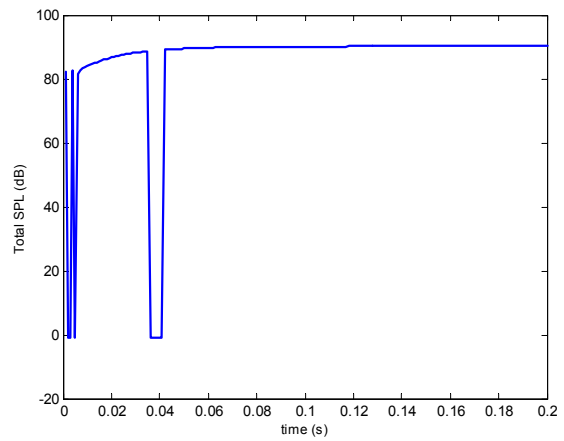
Διάγραμμα 1.30



Διάγραμμα 1.31

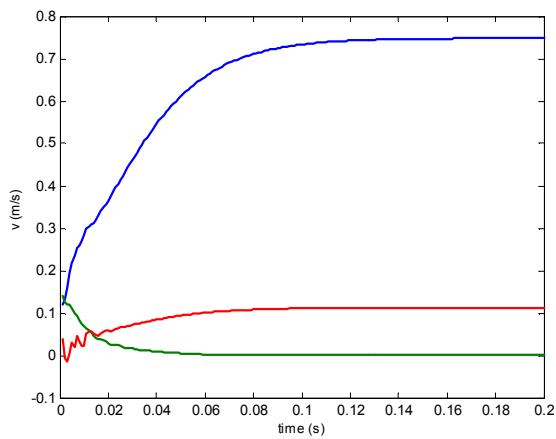


Διάγραμμα 1.32

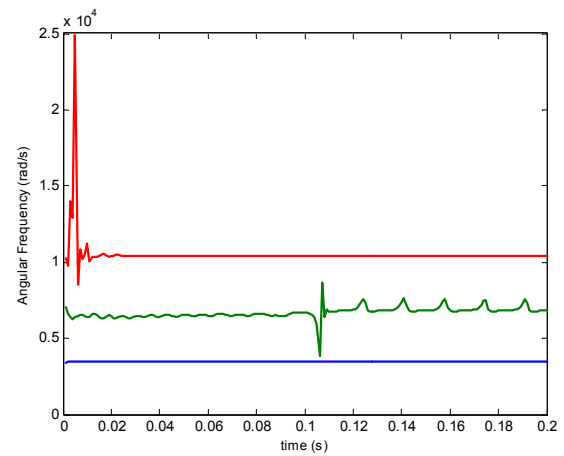


Διάγραμμα 1.33

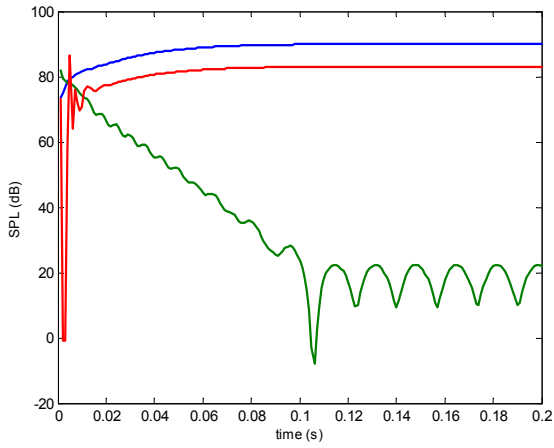
Πίεση 200 Pascal



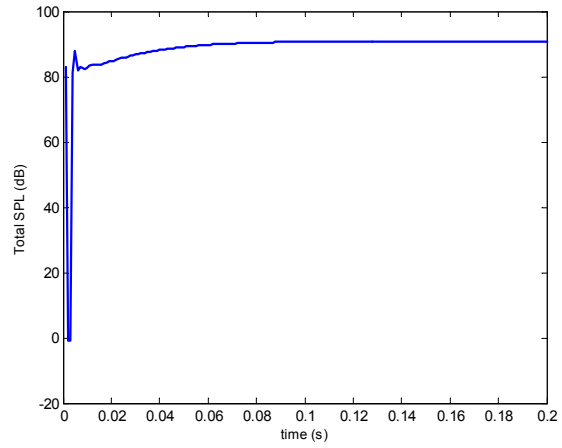
Διάγραμμα 1.34



Διάγραμμα 1.35

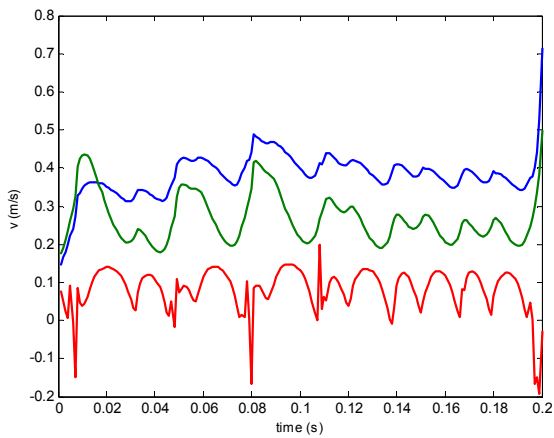


Διάγραμμα 1.36

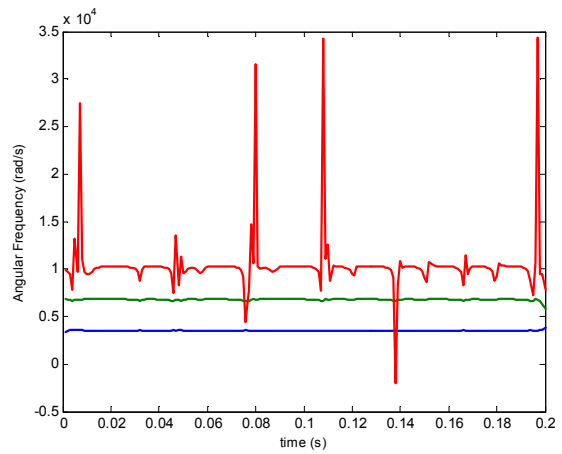


Διάγραμμα 1.37

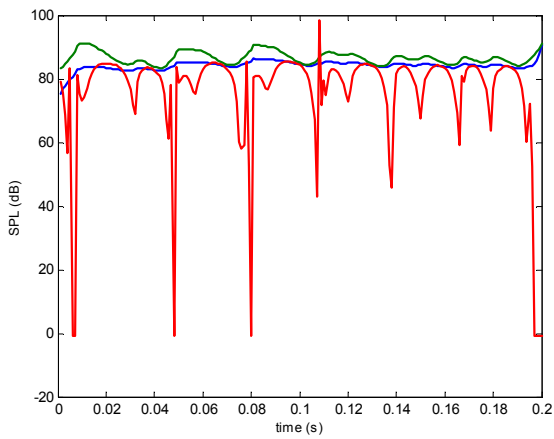
Πίεση 330 Pascal



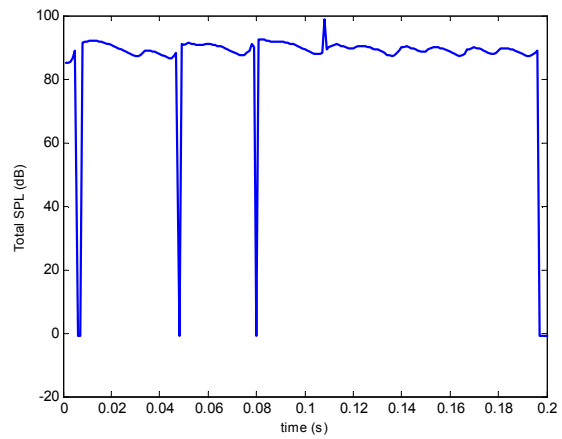
Διάγραμμα 1.38



Διάγραμμα 1.39

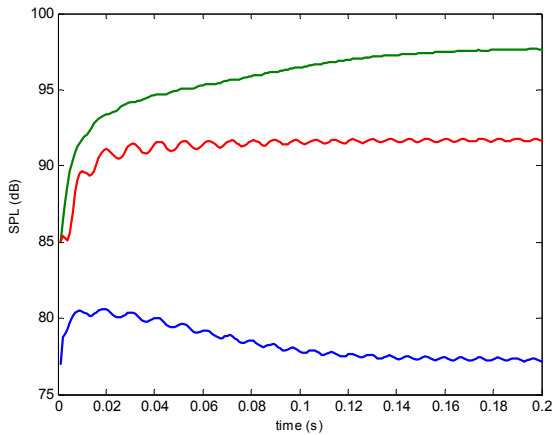


Διάγραμμα 1.40

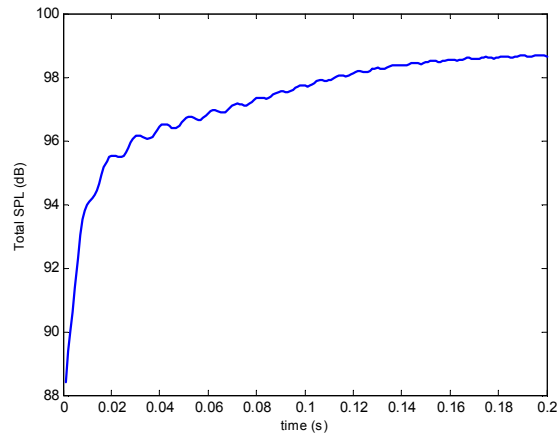


Διάγραμμα 1.41

Πίεση 400 Pascal

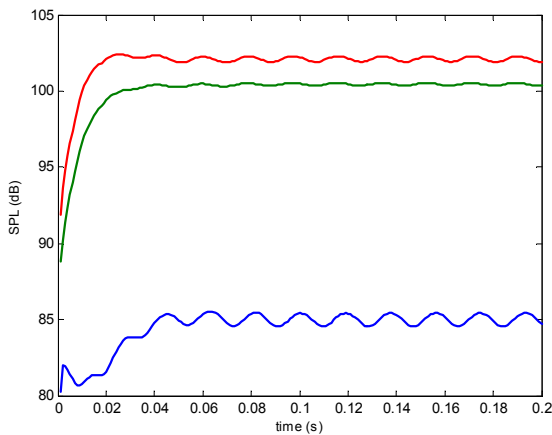


Διάγραμμα 1.42

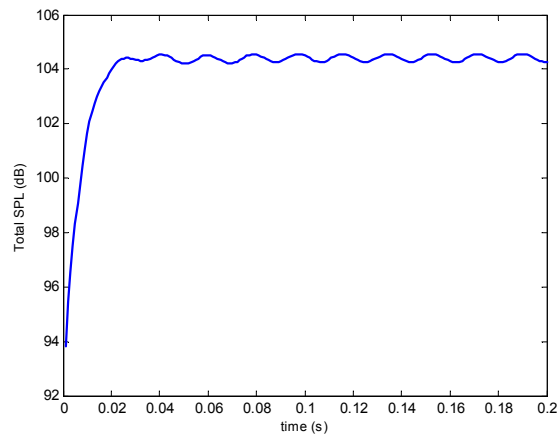


Διάγραμμα 1.43

Πίεση 800 Pascal



Διάγραμμα 1.44



Διάγραμμα 1.45

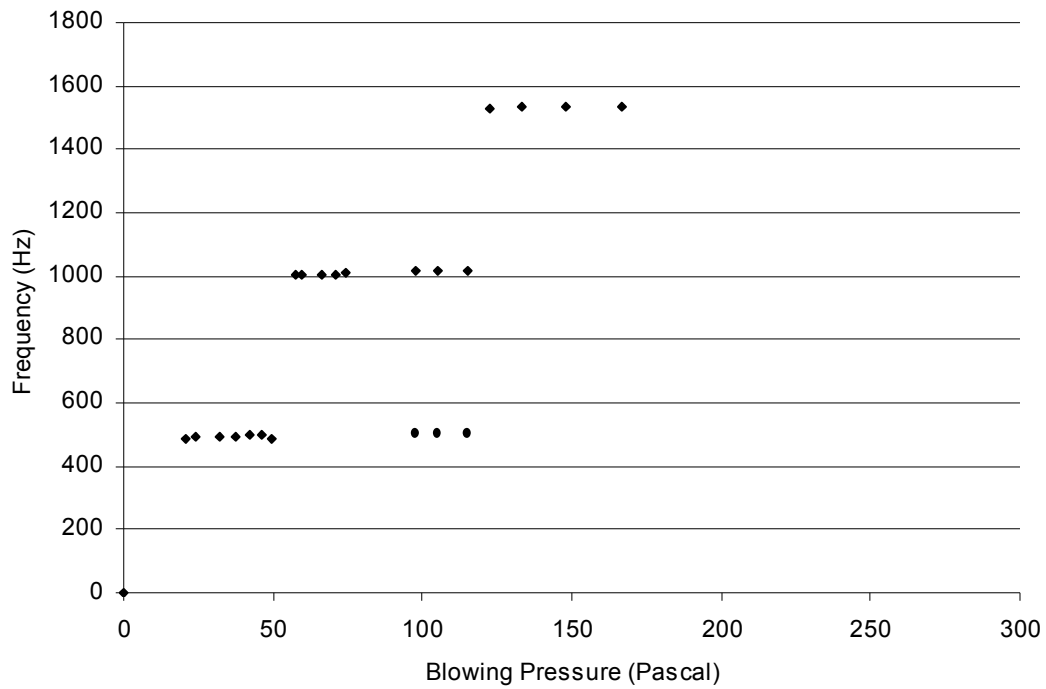
Γεωμετρία με $y_0 = 0,5h$ mm και $h = 2$ mm

Οι μετρήσεις επαναλαμβάνονται με jet-offset $y_0 = 0,5h$, δηλαδή το labium βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το κάτω μέρος της flue σχισμής. Αυτή τη φορά οι αποστάσεις του labium από τη σχισμή είναι $W=3$ mm, $W=4$ mm, $W=5$ mm και $W=6$ mm. Η μεταβολή της θεμελιώδους συχνότητας συντονισμού ($1^{η}$ αρμονικής) με την blowing pressure φαίνεται στα διαγράμματα 1.30 έως 1.33.

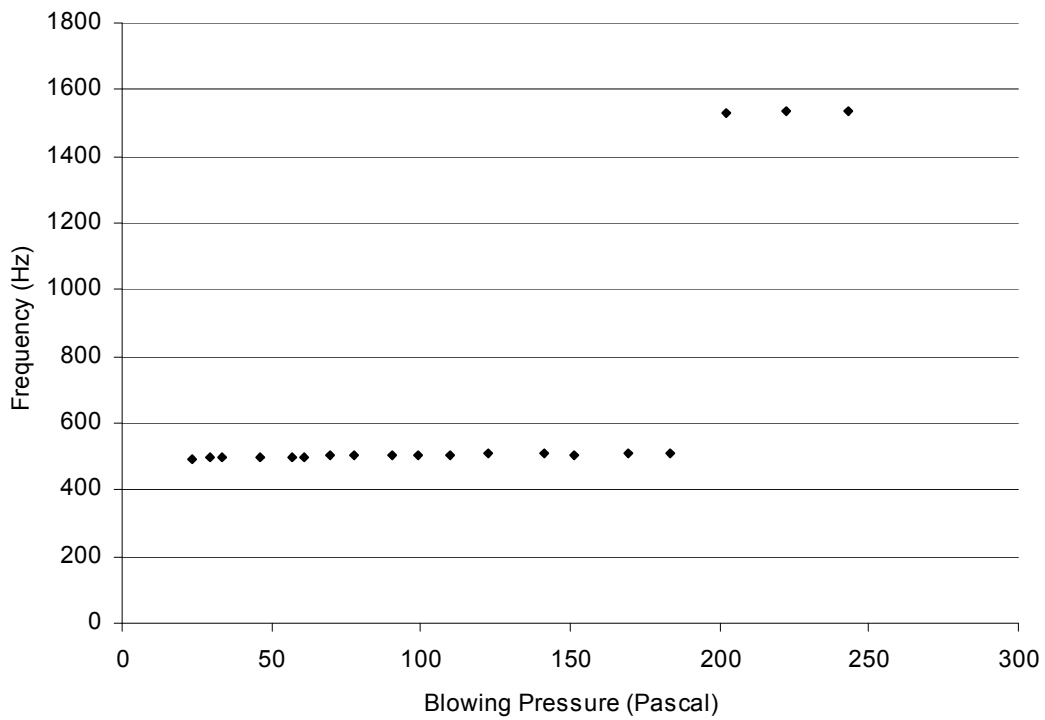
Στο διάγραμμα 1.30 μεταξύ του εύρους πιέσεων 90 έως 120 περίπου Pascal το άκουσμα του οργάνου εμφανίζει πολυφωνία. Δηλαδή, ενώ έχουμε μετάβαση από τον πρώτο στο δεύτερο τρόπο συντονισμού, η πρώτη αρμονική εξακολουθεί να είναι αρκετά ισχυρή ώστε να συνηχεί με τη δεύτερη αρμονική η οποία για πίεση 120 Pascal και άνω γίνεται εν τέλει η θεμελιώδης αρμονική ($1^{η}$) της τρίτης κατάστασης συντονισμού. Το φαινόμενο είναι συνηθισμένο στους μεταλλικούς διαπασών αυλούς (ενότητα 4.6, μέρος II), οι οποίοι έχουν ισχυρή δεύτερη αρμονική, αλλά και μία πρώτη που ηχεί εξίσου δυνατά. Πολλές θεωρητικές και πειραματικές μελέτες έχουν θίξει το φαινόμενο αυτό [CC,EEE,42,81] και μία μαθηματική εξήγηση εδόθη στην ενότητα 2.2 του Υπολογιστικού Μέρους.

Στην παρούσα γεωμετρία, μόνο για απόσταση $W=3$ mm συμβαίνει μετάβαση και στους τρεις τρόπους συντονισμού, και βέβαια δεν διαχωρίζονται πλήρως μεταξύ τους. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, ο αυλός δείχνει να μεταβαίνει στη δεύτερη κατάσταση συντονισμού για το εύρος πιέσεων που φαίνεται

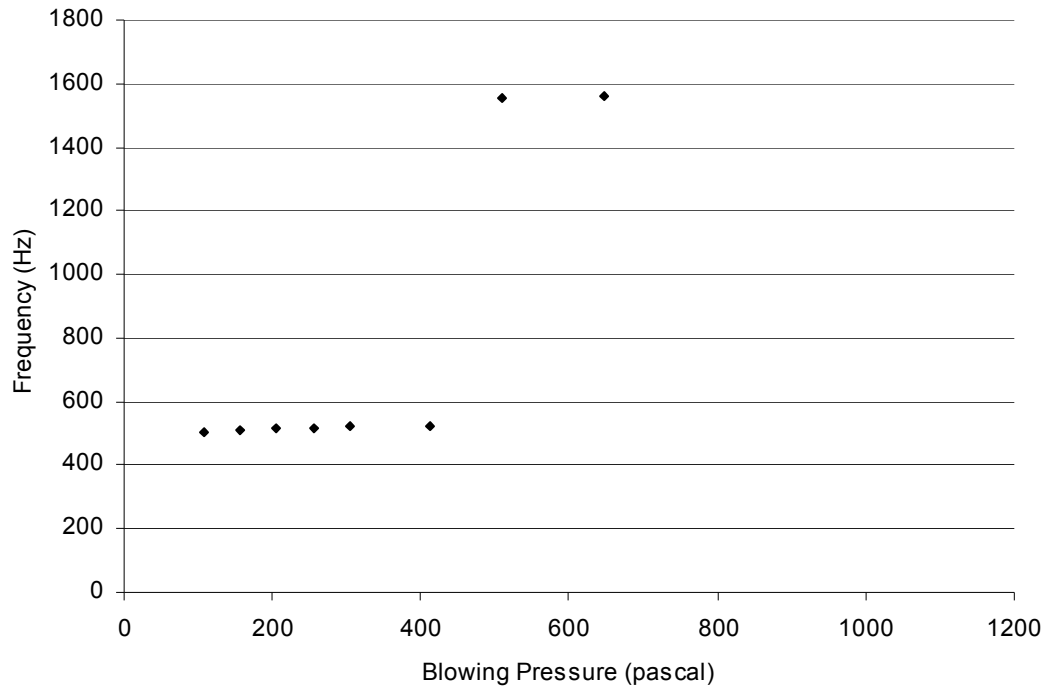
στο σχήμα, ενώ πέρα από αυτό το εύρος πιέσεων η ηχητική του εκπομπή εξασθενεί, ώστε να ακούγεται κυρίως η στροβιλότητα και η ορμή της αέριας δέσμης, δίχως όμως αυτή να μπορεί να συζευχθεί με τον ακουστικό σωλήνα.



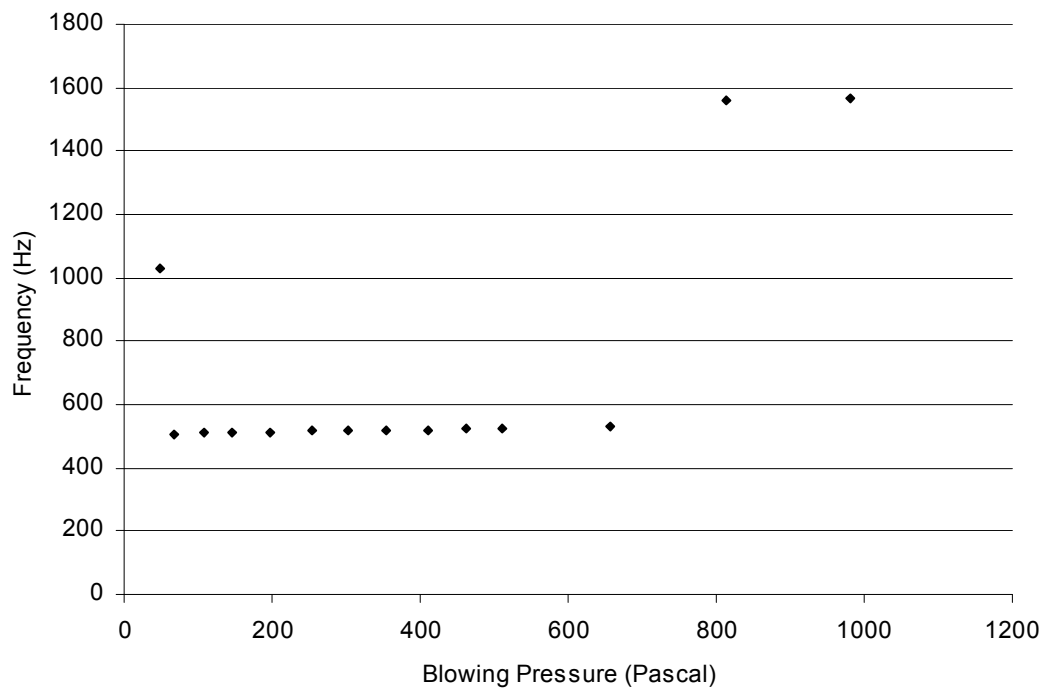
Διάγραμμα 1.46: $y_0 = 1 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ mm}$, $W=3 \text{ mm}$



Διάγραμμα 1.47: $y_0 = 1 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ mm}$, $W=4 \text{ mm}$



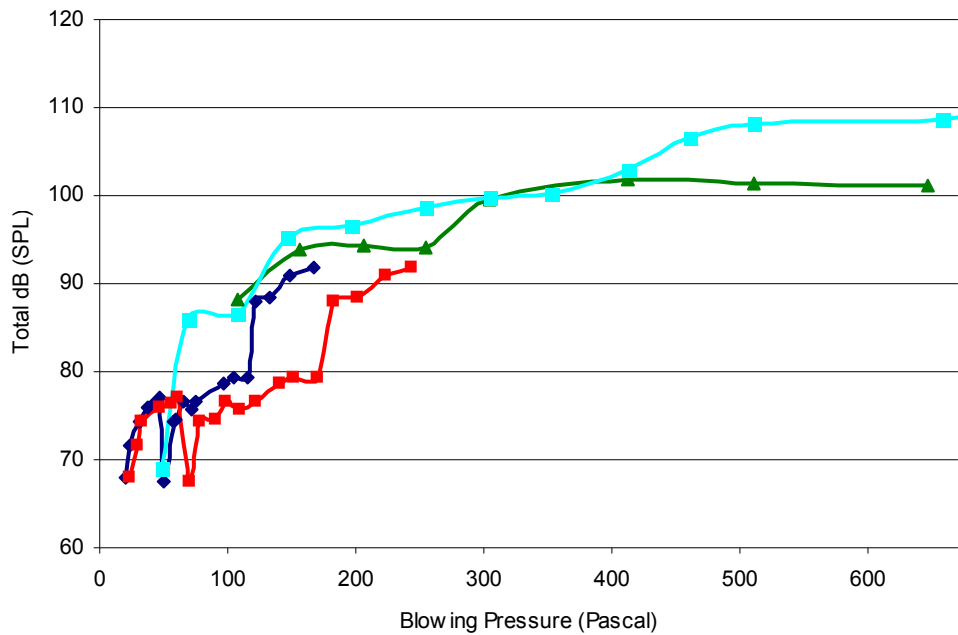
Διάγραμμα 1.48: $y_0 = 1$ mm, $h = 2$ mm, $W = 5$ mm



Διάγραμμα 1.49: $y_0 = 1$ mm, $h = 2$ mm, $W = 6$ mm

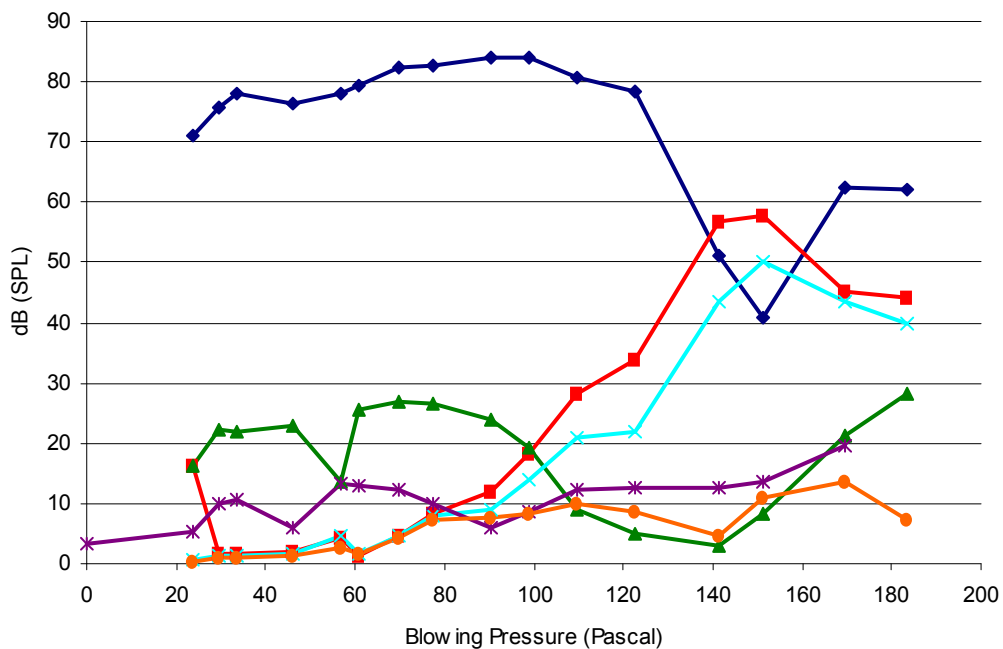
Στο διάγραμμα 1.50 παρουσιάζεται η μεταβολή της ολικής έντασης του οργάνου, ως συνάρτηση της πίεσης, για τις διάφορες αποστάσεις W , κατ' αναλογία με την προηγούμενη ενότητα. Για μεγαλύτερη απόσταση W , η ολική ένταση αυξάνεται σημαντικά και η γεωμετρία αυτή, μαζί με την προηγούμενη, επαληθεύουν πλήρως τη θεωρία [28]. Τα διαγράμματα 1.35 έως 1.37 παρουσιάζουν τη συμπερι-

φορά των 6 πρώτων αρμονικών με τη μεταβολή της πίεσης, ως προς τα επίπεδα ακουστικής τους πίεσης.



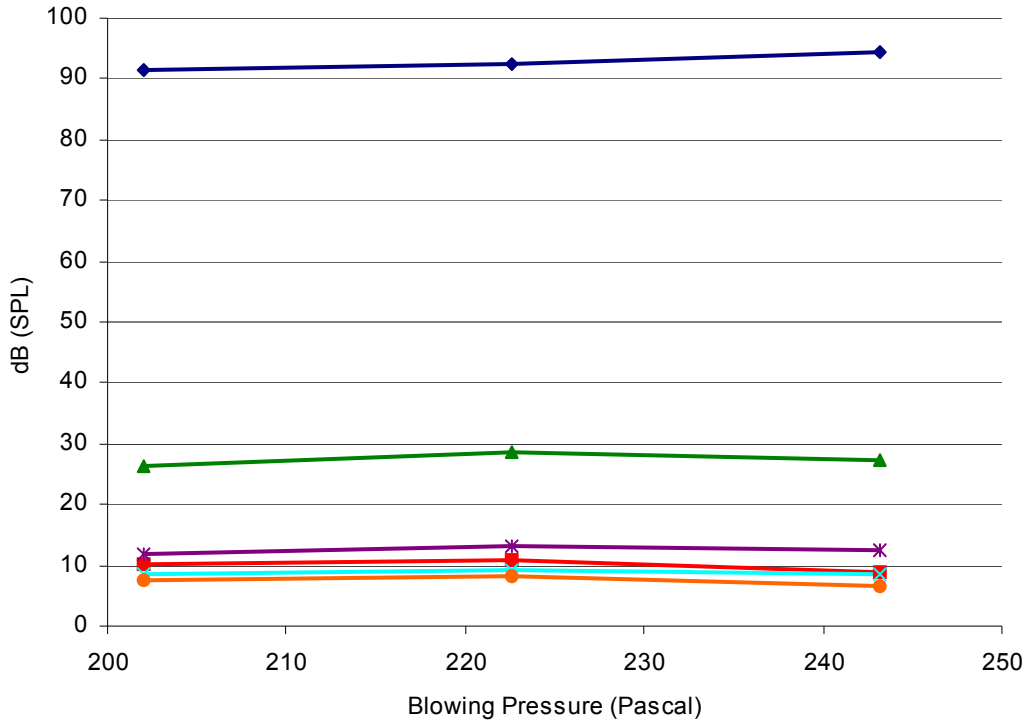
Διάγραμμα 1.50

Ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure με σταθερά τα $y_0 = 1$ mm και $h = 2$ mm. Γαλάζια γραμμή: W=6 mm, Πράσινη γραμμή: W=5 mm, Κόκκινη γραμμή: W=4 mm και Μπλε γραμμή: W=3 mm.



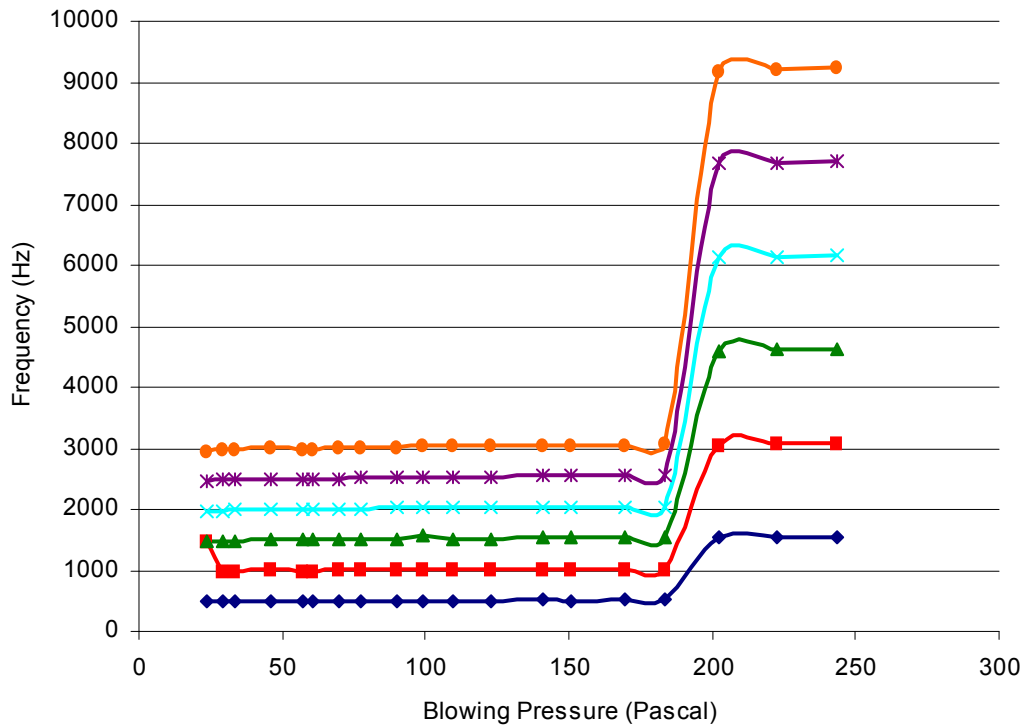
Διάγραμμα 1.51

Κατάσταση πρώτου και δεύτερου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 1$ mm, W=4 mm, h=2 mm.



Διάγραμμα 1.52

Κατάσταση τρίτου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 1 \text{ mm}$, $W=6 \text{ mm}$, $h=2 \text{ mm}$.

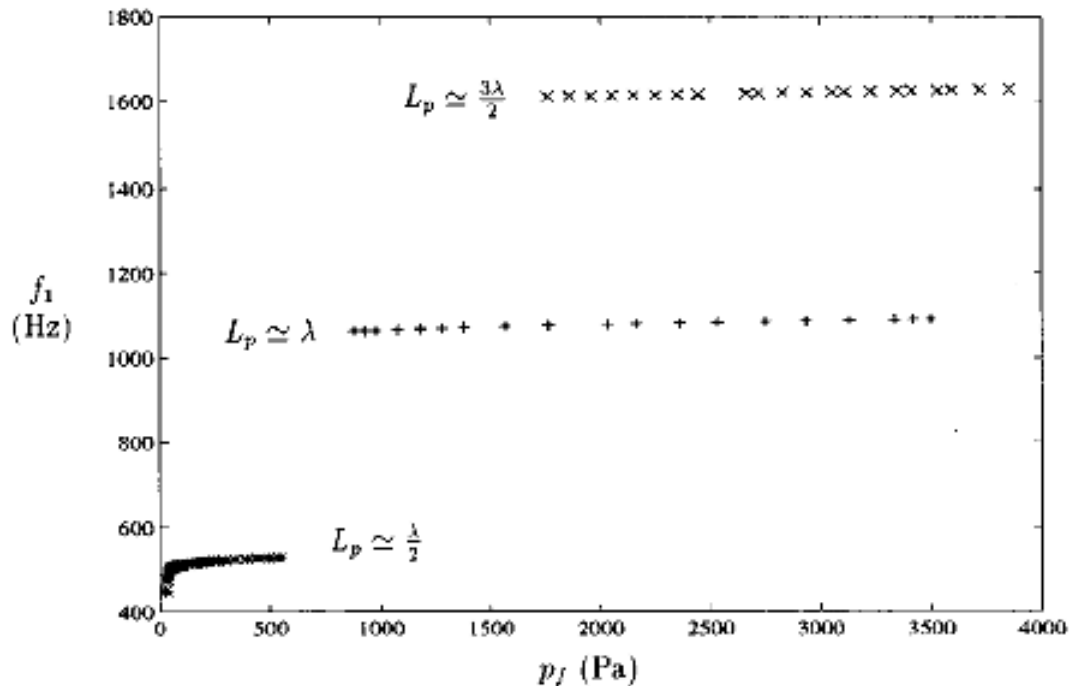


Διάγραμμα 1.53

Μεταβολή συχνότητας των 6 πρώτων αρμονικών για τους τρεις πρώτους τρόπους συντονισμού ως συνάρτηση της Blowing Pressure. . Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $y_0 = 1 \text{ mm}$, $W=6 \text{ mm}$, $h=2 \text{ mm}$.

Γεωμετρία με $y_0 = 0,5h$ mm και $h = 1$ mm

Με τη γεωμετρία αυτή μπορούμε να συγκρίνουμε τις μετρήσεις μας με τις μετρήσεις του Verge [81], που εκτελέστηκαν σε έναν αυλό ίδιων διαστάσεων κατασκευασμένο από χαλκό. Το διάγραμμα 1.38 τη μεταβολή της θεμελίου συχνότητας σε σχέση με την πίεση πνοής. Στη γεωμετρία αυτή το labium είναι στην ίδια ευθεία με το κάτω μέρος της σχισμής, οπότε $y_0 = 0,5h$ και η απόσταση labium σχισμής είναι $W=4$ mm.



Διάγραμμα 1.54

Μεταβολή θεμελιώδους συχνότητας ως συνάρτηση της πίεσης πνοής για ένα χάλκινο μοντέλο αυλού με γεωμετρία ακριβώς όμοια με τη δική μας [Verge, 81]. Το labium είναι στην ίδια ευθεία με το κάτω μέρος της σχισμής (jet-offset $y_0 = 0,5h$). $W=4$ mm. L_p είναι το μήκος του ακουστικού σωλήνα (συντονιστή).

Οι δικές μας μετρήσεις εκτελέστηκαν για $W=4$ mm και $W=6$ mm. Τα αποτελέσματα φαίνονται αντιστοίχως στα διαγράμματα 1.39 και 1.40. Είναι αξιοσημείωτη η μεγάλη διαφορά στο εύρος πιέσεων όπου εμφανίζονται οι τρεις πρώτες καταστάσεις συντονισμού. Επίσης οι μετρήσεις του Verge οδήγησαν σε πολυφωνία μεταξύ 1700 έως 4000 περίπου Pascal, όπου ο δεύτερος με τον τρίτο τρόπο συνηχούν. Πολλοί αστάθμητοι παράγοντες μπορεί να συμβάλλουν στην τόσο μεγάλη ασυμφωνία των διαγραμμάτων. Ωστόσο, για τη μελέτη μας είναι ενθαρρυντικό το γεγονός ότι το δικό μας μοντέλο λειτουργεί με πολύ χαμηλότερες πιέσεις πνοής.

Παρατηρούμε ξανά ότι με αύξηση της απόστασης W από 4 σε 6 mm, αφενός η συχνότητα που εκπέμπεται αυξάνεται, αφετέρου η κατάσταση overblown, δηλαδή η μετάβαση στον δεύτερο τρόπο συντονισμού, μετατοπίζεται προς πολύ μεγαλύτερη πίεση. Άρα ο αυλός για $W=6$ mm έχει σταθερή ηχητική συμπεριφορά στο θεμελιώδη τρόπο για μεγαλύτερο εύρος πιέσεων.

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση του Howe (1.6) για την παρούσα γεωμετρία θα πάρουμε τον πίνακα 1.3, που συμπίπτει με τον πίνακα 1.2 για $W=4$ mm και $W=6$ mm, καθώς το αναλυτικό του μοντέλο αμελεί το πάχος της δέσμης που από 2 mm (πίνακας 1.2) έγινε 1 mm.

Στο σύνθετο τώρα συχνοτικό φάσμα των μετρήσεων, εμφανίζονται και συνιστώσες που δεν υπακούουν σε αρμονική ή υποαρμονική σχέση, με την έννοια που ορίστηκε η τελευταία στην ενότητα 4.10 του μέρους II. Αυτές κατά κανόνα είναι πολύ μικρότερου πλάτους από τις υποαρμονικές (πόσο μάλλον από τις αρμονικές) και η συχνότητά του συμβαίνει να είναι το $1/3$ ή τα $2/3$ της αρμονικής που ακολουθεί. Κάποιες φορές το πλάτος μίας τέτοιας συνιστώσας ξεπερνά την πλησιέστερη υποαρμονική ($1/2$ της αρμονικής συχνότητας) και τότε μπορούμε να θεωρούμε αυτή ως υποαρμονική. Στο διάγραμμα

1.58 η συνιστώσα με συχνότητα 1034 Hz στην πίεση 372 Pascal είναι περίπου τα 2/3 της αρμονικής 1544 Hz του πρώτου τρόπου, με σημαντική παρουσία στο φάσμα.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι υποαρμονικές δεν διατηρούνται καθ' όλο το εύρος πιέσεων αλλά σε μικρά τμήματα του και μάλιστα η συμπεριφέρονται σχεδόν παράλληλα. Η ύπαρξή τους μεταβάλλει την ποιότητα του ακτινοβολούμενου ήχου, άλλες φορές θετικά και άλλες αρνητικά.

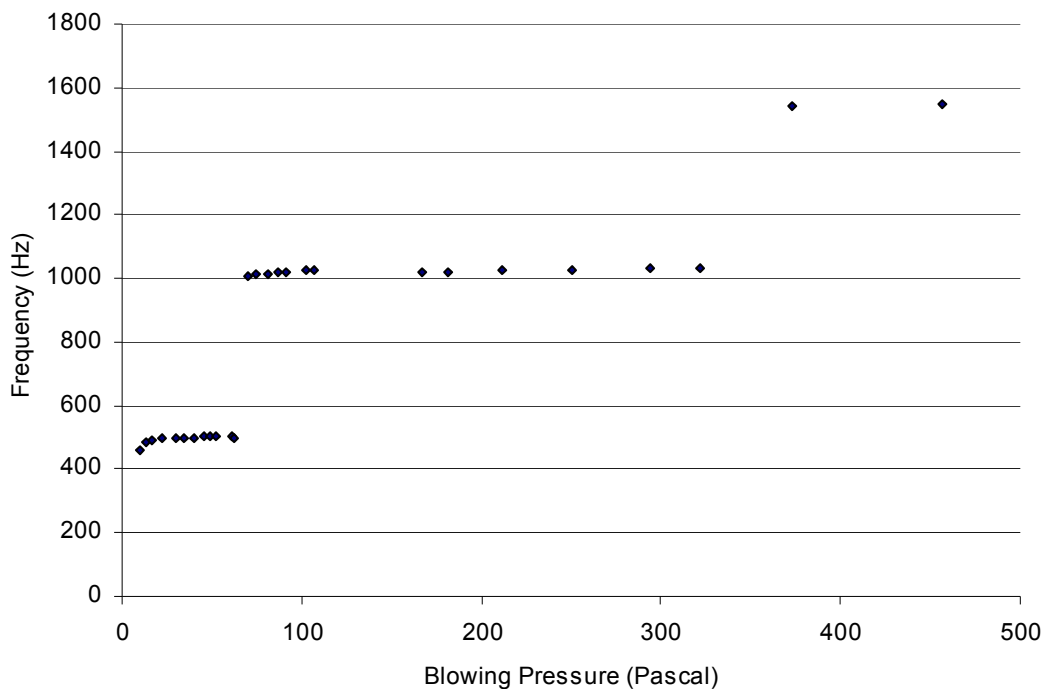
Πίνακας 1.3

Ταχύτητες και πιέσεις δέσμης πάνω απ' τις οποίες έχουμε μετάβαση στις διάφορες καταστάσεις συντονισμού κατά Howe [49].

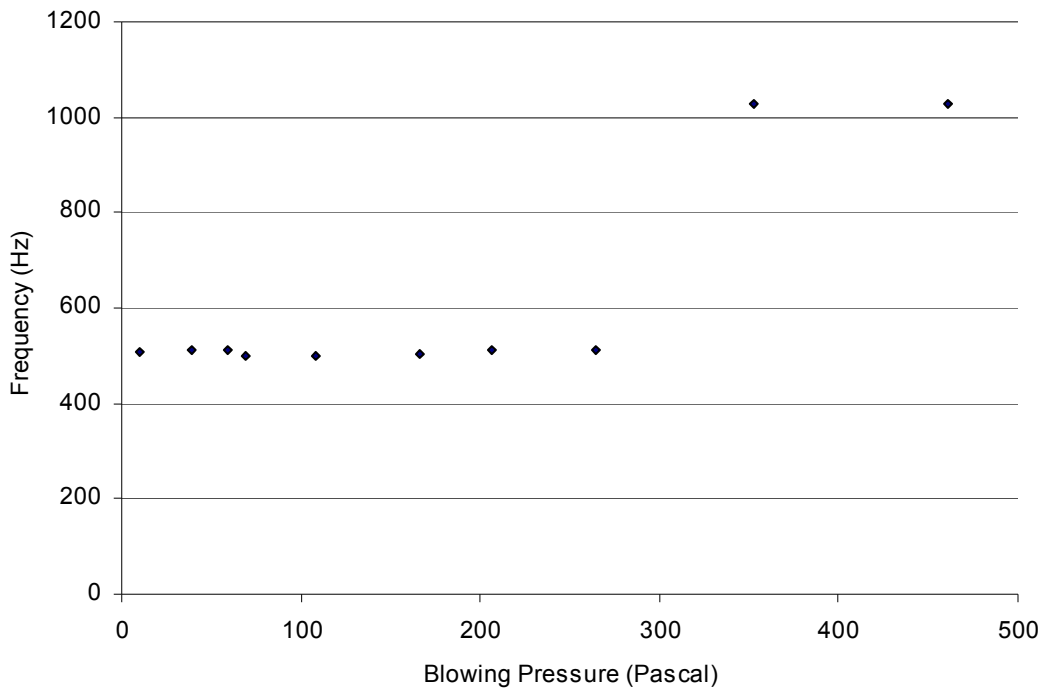
Κανονικοί Τρόποι	V_j (m/s) / p_f (Pascal)			
	$W=4$ mm		$W=6$ mm	
1	3,518	7,569	5,277	17,029
2	7,033	30,244	10,549	68,049
3	11,876	86,247	17,814	194,056
4	18,175	201,997	27,262	454,492

Simulation

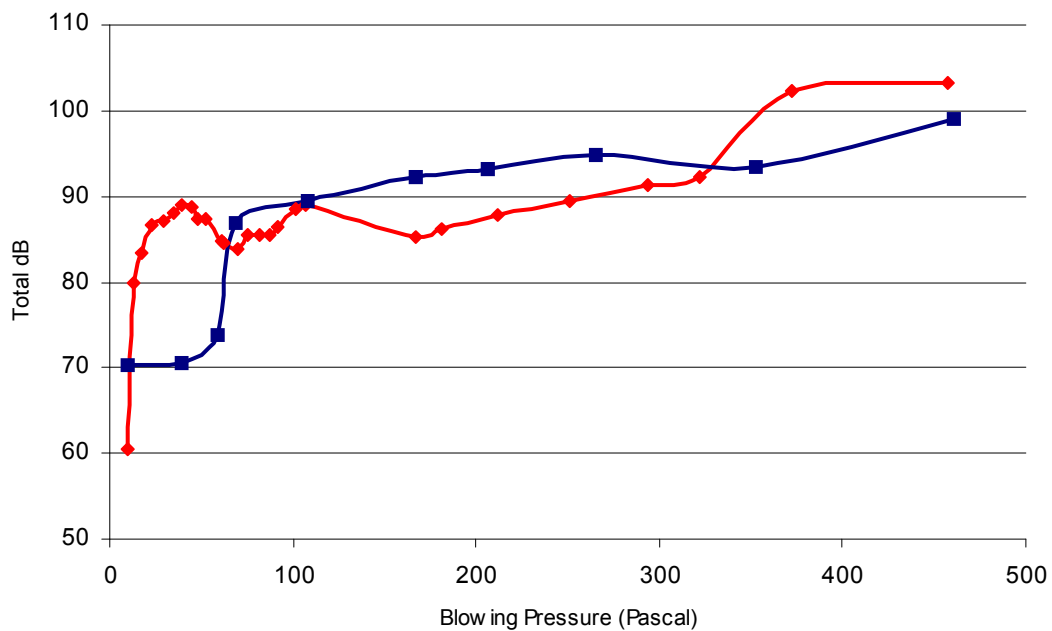
Στα διαγράμματα 1.59 έως 1.74 εκτελούμε υπολογισμούς με τον αλγόριθμο της ενότητας 2.9 του μέρους III για τη γεωμετρία $y_0 = 0,5$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm. Οι προβλέψεις απέχουν αρκετά από τα πειραματικά δεδομένα αλλά υποδεικνύουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του οργάνου. Οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων συντονισμού είναι μετατοπισμένες δεξιά από τα πειραματικά αποτελέσματα. Το κατώφλι πίεσης της θεμελιώδους κατάστασης συντονισμού υπολογίζεται στα 120 Pascal (διαγρ. 1.59 έως 1.62). Η ασταθής περιοχή μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κατάστασης συντονισμού εμφανίζεται στα 150 Pascal (διαγρ. 1.63 έως 1.66), ενώ σταθερό overblowing έχουμε για 180 Pascal. Τρίτη κατάσταση συντονισμού εμφανίζεται στα 500 Pascal.



Διάγραμμα 1.55: $y_0 = 0,5$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm

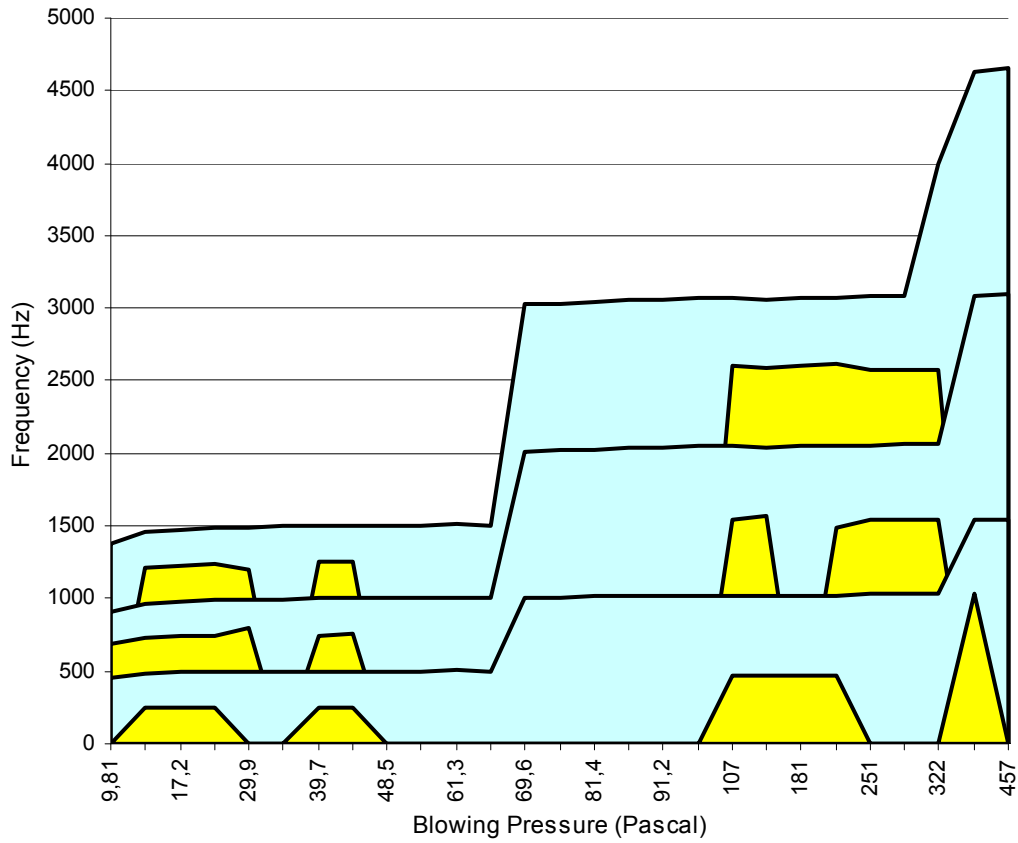


Διάγραμμα 1.56: $y_0 = 0,5$ mm, $h = 1$ mm, $W=6$ mm



Διάγραμμα 1.57

Ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure με σταθερά τα $y_0 = 0,5$ mm και $h = 1$ mm. Μπλε γραμμή: $W=4$ mm και κόκκινη γραμμή: $W=6$ mm.

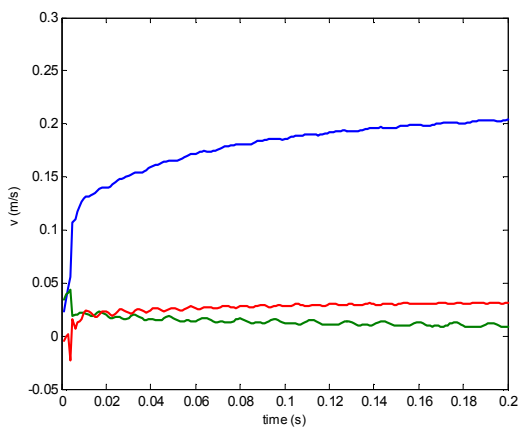


Διάγραμμα 1.58

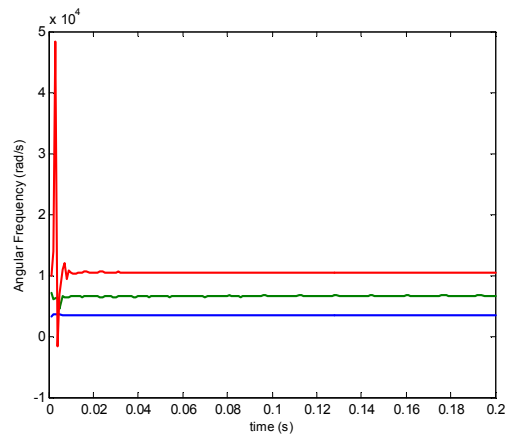
Μεταβολή των τριών πρώτων αρμονικών (γαλάζιες περιοχές) και των υποαρμονικών (κίτρινες περιοχές) του αυλού γεωμετρίας $y_0 = 0,5 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ mm}$, $W=4 \text{ mm}$, ως συνάρτηση της πίεσης πνοής.

Γεωμετρία $y_0 = 0 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ mm}$, $W=4 \text{ mm}$

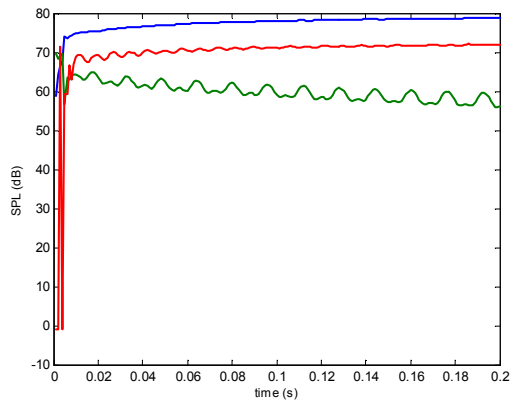
Πίεση 80 Pascal



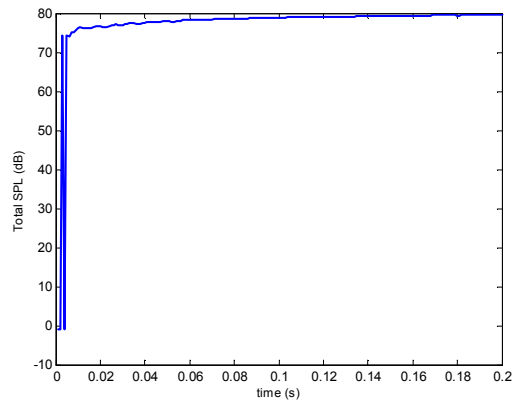
Διάγραμμα 1.59



Διάγραμμα 1.60

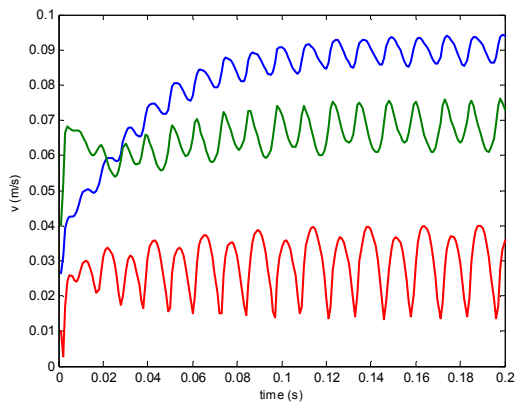


Διάγραμμα 1.61

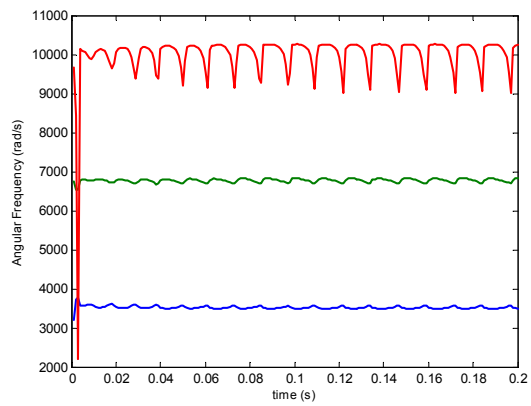


Διάγραμμα 1.62

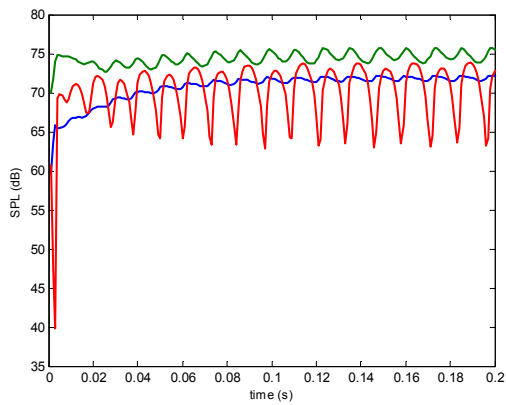
Πίεση 150 Pascal



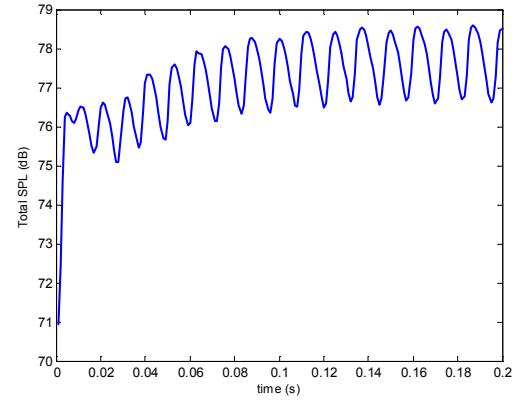
Διάγραμμα 1.63



Διάγραμμα 1.64

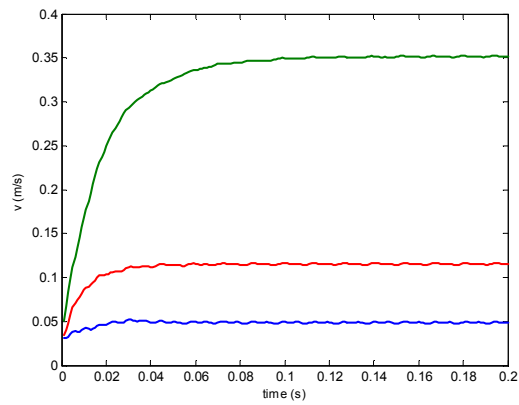


Διάγραμμα 1.65

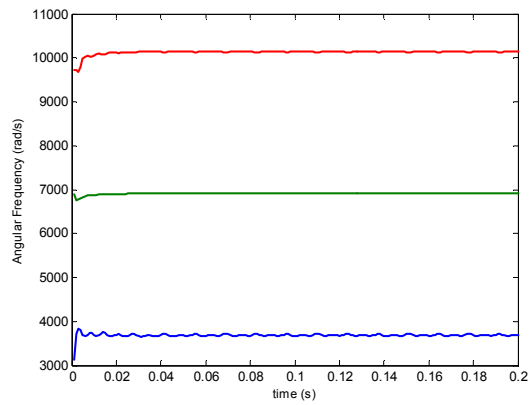


Διάγραμμα 1.66

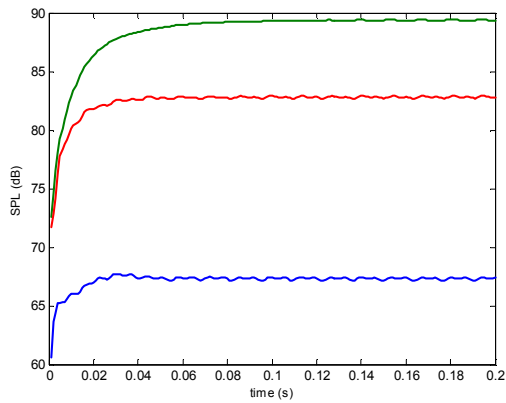
Πίεση 180 Pascal



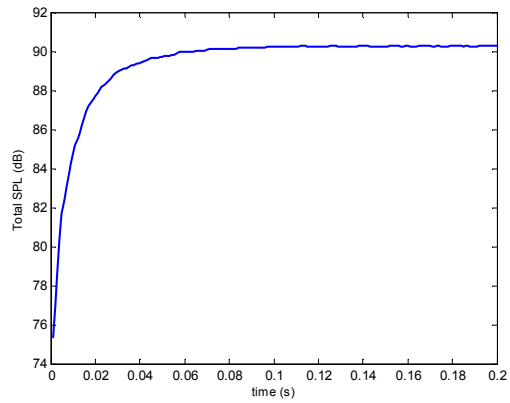
Διάγραμμα 1.67



Διάγραμμα 1.68

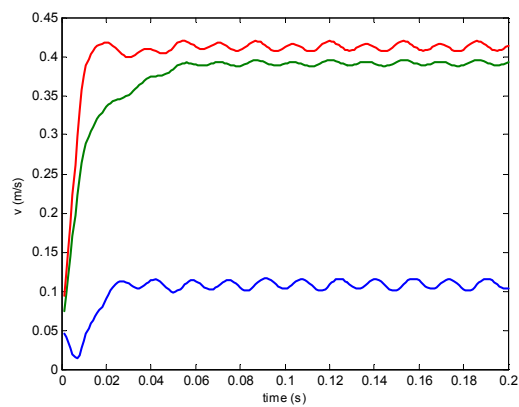


Διάγραμμα 1.69

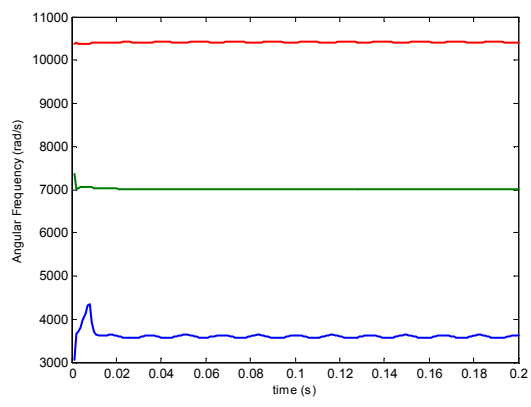


Διάγραμμα 1.70

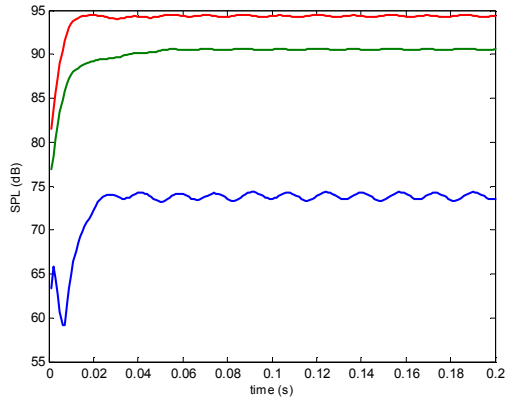
Πίεση 500 Pascal



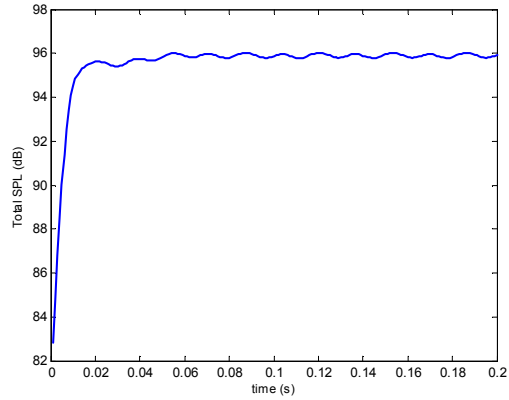
Διάγραμμα 1.71



Διάγραμμα 1.72



Διάγραμμα 1.73



Διάγραμμα 1.74

1.4 Πείραμα με οριζόντιο αυλό ορθογωνικής διατομής

Η διατομή του συντονιστή σε αυτή την περίπτωση είναι 19 cm x 30 cm και η διάταξη φαίνεται στη φωτο 8. Αρχικά διεξάγουμε μία σειρά μετρήσεων σε γεωμετρία με $y_0 = 0$ mm, $h = 1$ mm και $W = 4$ mm και έπειτα τέσσερις σειρές μετρήσεων σε γεωμετρία με $y_0 = 0$ mm και $h = 2$ mm και διαδοχικές αποστάσεις σχισμής labium: $W = 4$ mm, $W = 5$ mm, $W = 6$ mm και $W = 10$ mm. Δηλαδή επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις που εκτελέστηκαν και για τα διαγράμματα 1.1 έως 1.4 με άλλη διατομή συντονιστή.

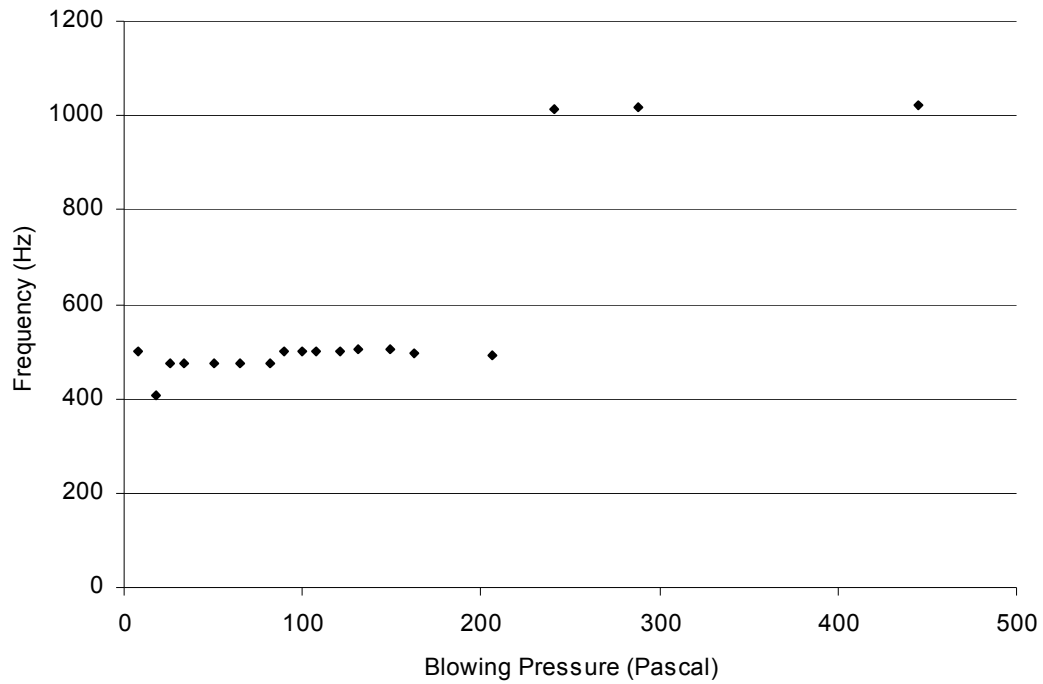
Τέλος, λαμβάνουμε μία ακόμα σειρά μετρήσεων για γεωμετρία με $y_0 = 0,5$ h mm και $h = 0,5$ mm. Οι μεταβάσεις στις ανώτερες καταστάσεις συντονισμού είναι ελαφρώς μετατοπισμένες σε χαμηλότερες πιέσεις πνοής.



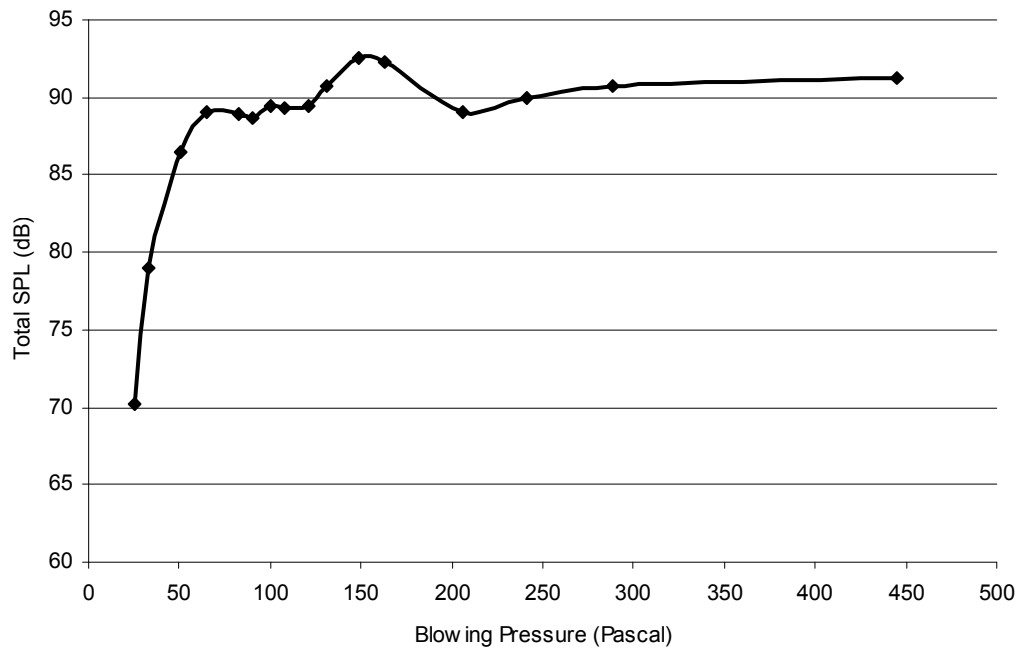
Φωτό 8

Διάταξη οριζόντιου αυλού ορθογωνικής διατομής 19 cm x 30 cm.

Γεωμετρία με $y_0 = 0$ mm και $h = 1$ mm



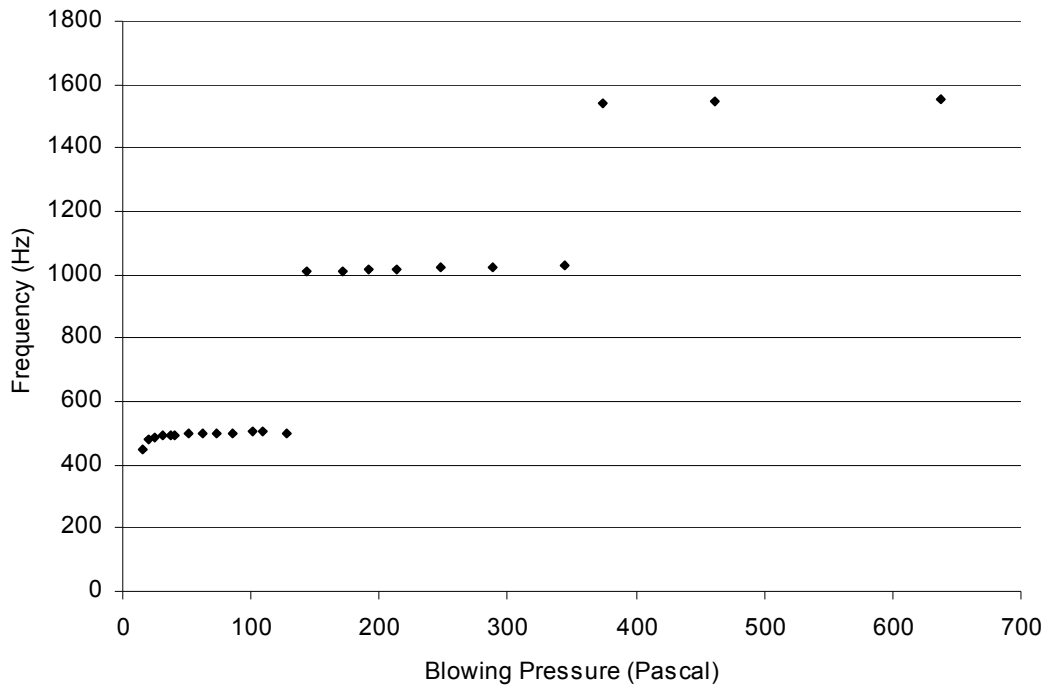
Διάγραμμα 1.75: $y_0 = 0$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm



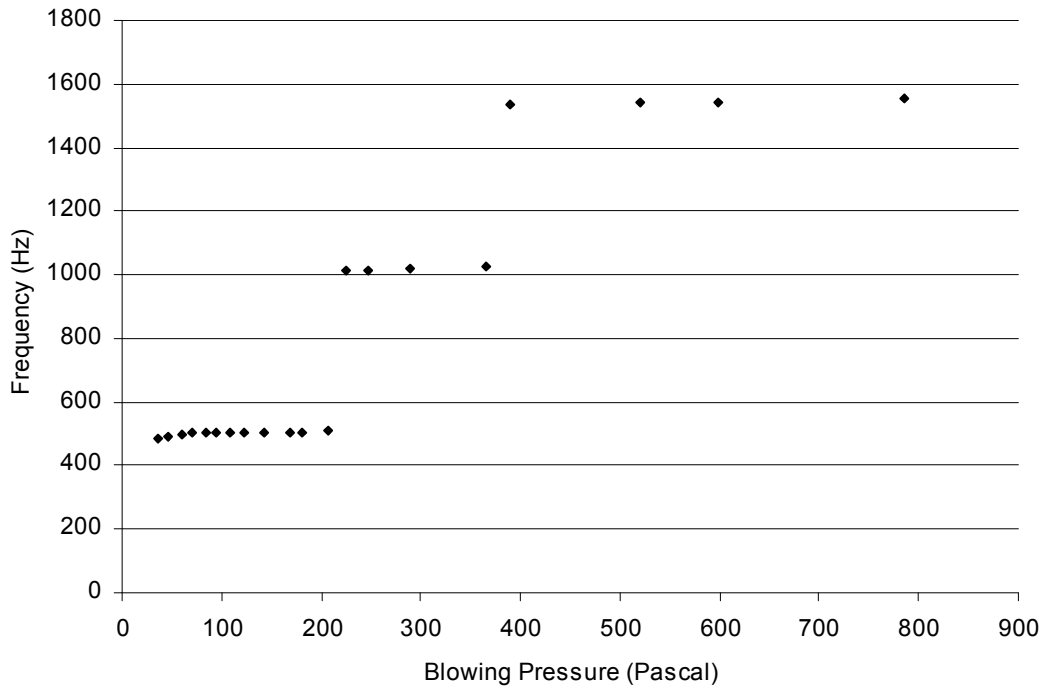
Διάγραμμα 1.76

Μεταβολή του ολικού SPL ως συνάρτηση της πίεσης πνοής για τη γεωμετρία $y_0 = 0$ mm, $h = 1$ mm
 $W=4$ mm.

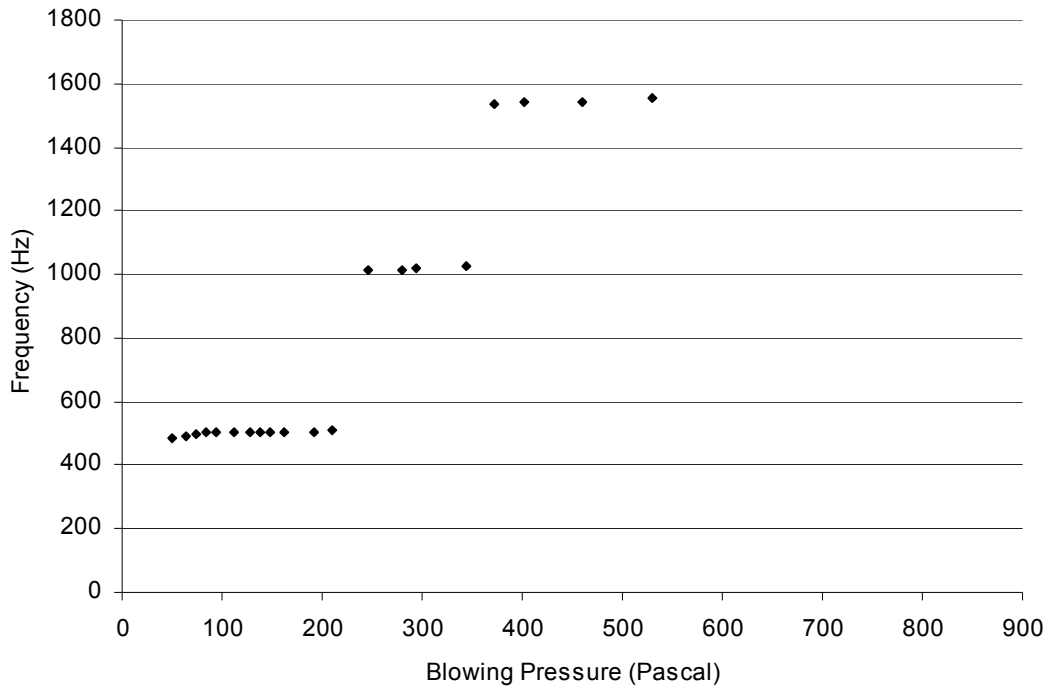
Γεωμετρία με $y_0 = 0$ mm και $h = 2$ mm



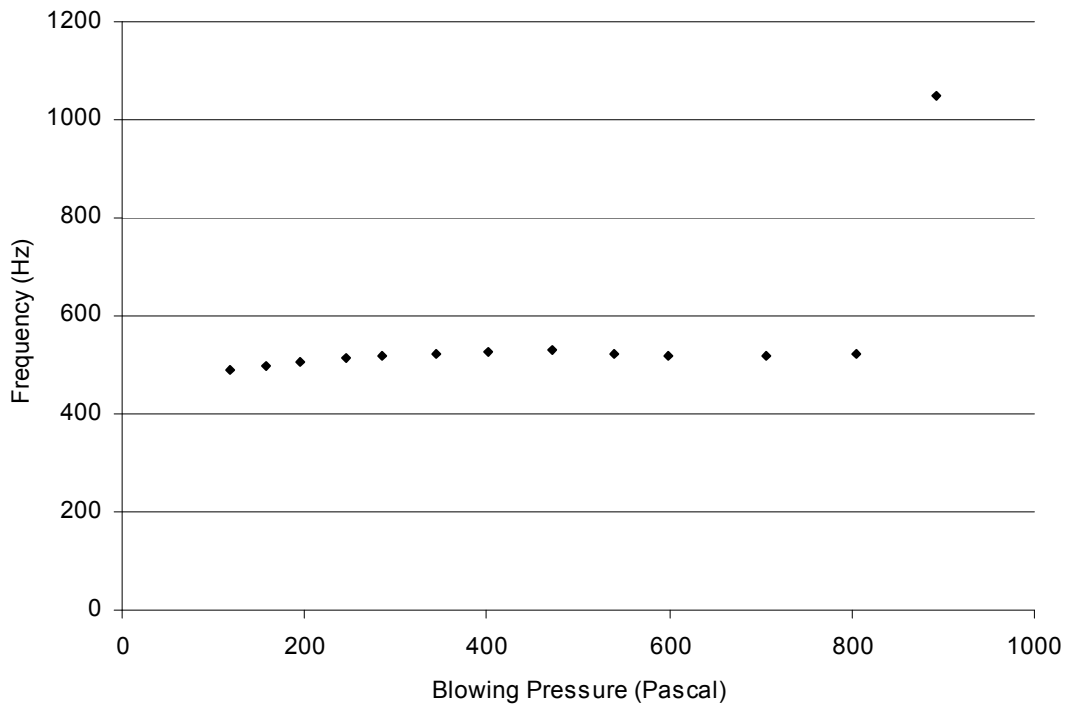
Διάγραμμα 1.77: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=4$ mm



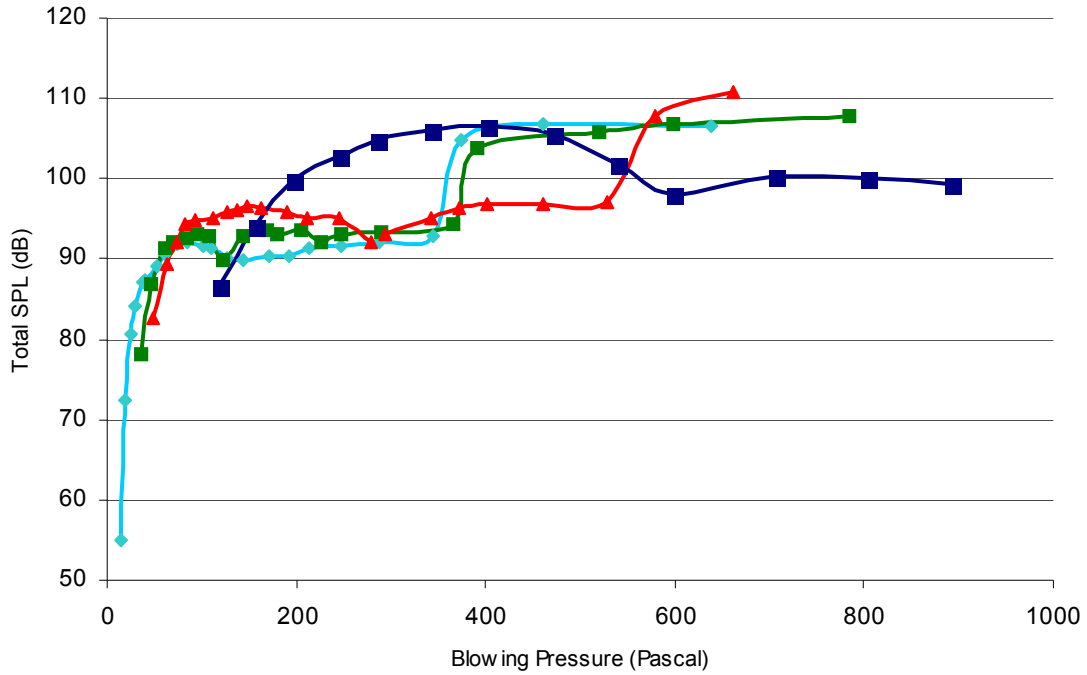
Διάγραμμα 1.78: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=5$ mm



Διάγραμμα 1.79: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=6$ mm



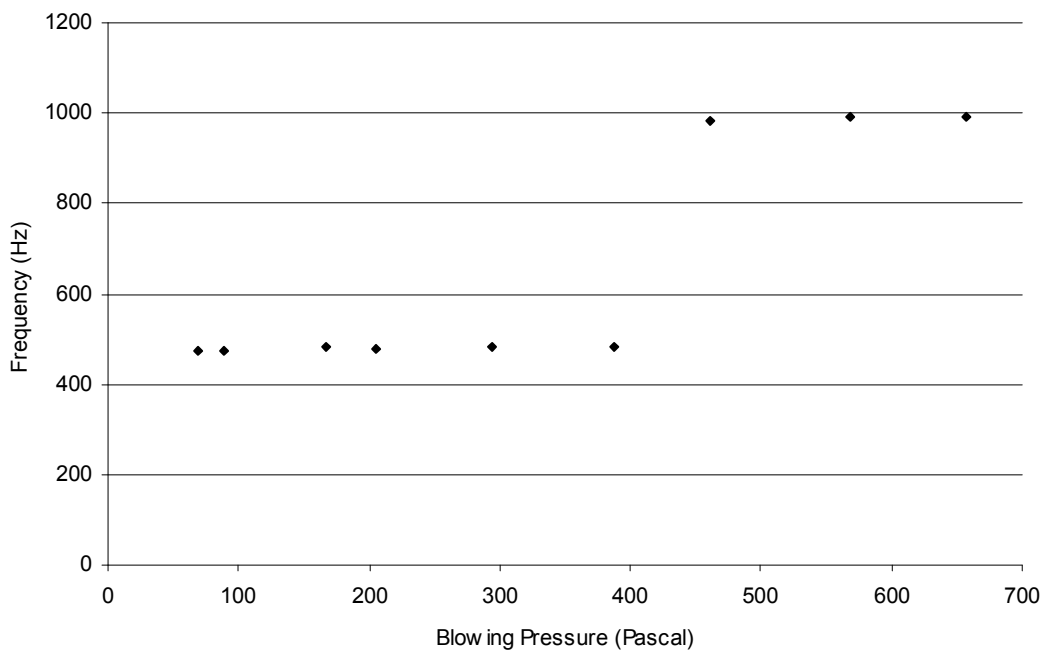
Διάγραμμα 1.80: $y_0 = 0$ mm, $h = 2$ mm, $W=10$ mm



Διάγραμμα 1.81

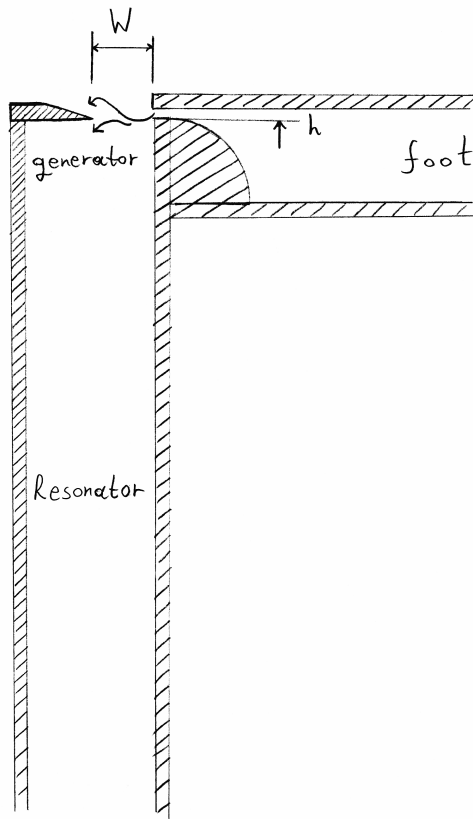
Ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure με σταθερά τα $y_0 = 0$ mm και $h = 2$ mm. Γαλάζια γραμμή: W=4 mm, Πράσινη γραμμή: W=5 mm, Κόκκινη γραμμή: W=6 mm και Μπλε γραμμή: W=10 mm.

Γεωμετρία με $y_0 = 0,5$ h mm και $h = 0,5$ mm



Διάγραμμα 1.82: $y_0 = 0,5$ h mm, $h = 0,5$ mm, W=4 mm

1.5 Πείραμα με Εγκάρσιο Αυλό διατομής 19 mm x 25 mm



Σχήμα 1.2

αρμονικών, ανεξάρτητη από την προηγούμενη. Κατά συνέπεια, μπορούμε να διακρίνουμε εκ νέου περιττές και άρτιες αρμονικές της κατάστασης overblowing. Η παρουσία της καμπύλης θορύβου ευρέως φάσματος είναι εντονότερη στο σχήμα 1.4 απ' ό,τι στο 1.3. Ένας λόγος είναι η αυξημένη ταχύτητα δέσμης που επάγει και μία αυξημένη ροή αέρα στο παθητικό άκρο του συντονιστή [12]. Τα πλάτη των συνιστωσών είναι σε dB του λογισμικού Cool Edit και όχι ακουστικής πίεσης. Παρόλα αυτά, για τα σχήματα αυτά μας ενδιαφέρουν τα σχετικά μεγέθη τους.

Στα διαγράμματα 1.83 και 1.84 παρουσιάζεται η μεταβολή της συχνότητας ως προς την πίεση πνοής. Το όργανο αδυνατεί να φτάσει σε τρίτη κατάσταση συντονισμού και παραδόξως μεταβαίνει απ' ευθείας στην τέταρτη κατάσταση για πίεση περίπου 550 Pascal.

Δημιουργούμε επίσης ένα διάγραμμα αντίστοιχο με το 1.58 για τη μελέτη των υποαρμονικών συνιστωσών με τη μεταβολή της πίεσης (διαγρ. 1.85). Παρατηρούμε ότι η εμφάνισή τους σπανίζει καθώς το φάσμα εξελίσσεται. Φαίνεται πως παίζουν κύριο ρόλο λίγο μετά την αποκατάσταση των καταστάσεων συντονισμού (πρώτος και δεύτερος). Καθώς το όργανο συνεχίζει να ηχεί σε κάθε μία από αυτές τις καταστάσεις, οι υποαρμονικές χάνονται.

Η μεταβολή της ολικής στάθμης ακουστικής πίεσης (SPL) για τις δύο αποστάσεις $W=4$ mm και $W=6$ mm φαίνεται στο διάγραμμα 1.86, ενώ η αντίστοιχη μεταβολή των αρμονικών συχνοτήτων της πρώτης και δεύτερης κατάστασης συντονισμού αντίστοιχα για τη γεωμετρία με $W=6$ mm, φαίνεται στα διαγράμματα 1.87 και 1.88, τα οποία μεγεθύνθηκαν πολύ για να μπορέσουμε να παρατηρήσουμε τη σύνθετη διαδρομή των αρμονικών καθώς αυξάνεται η πίεση. Παρόμοια συμπεριφορά είδαμε και στον οριζόντιο αυλό. Αν οι μετρήσεις μας ήταν πολύ περισσότερες, η τεθλασμένη γραμμή ενδέχεται να προσέγγιζε μία ασύμμετρη καμπύλη. Στο διάγραμμα 1.88 η δεύτερη αρμονική στην κατάσταση overblown αρχίζει να αυξάνεται απότομα σε πίεση περίπου 520 Pascal και για 550 Pascal έχει πλέον ξεπεράσει την πρώτη αρμονική ώστε να οδηγούμαστε σε μία μετάβαση απευθείας στην τέταρτη κατάσταση συντονισμού χωρίς μεσολάβηση της τρίτης.

Προχωρούμε στην ενότητα αυτή σε σειρές μετρήσεων με το μοντέλο του σκαριφήματος στο σχήμα 1.2. Η αέρια δέσμη σε αυτή την περίπτωση κατευθύνεται κάθετα και όχι παράλληλα με τον άξονα του συντονιστή. Ένα επιπρόσθετο πόδι στο υπάρχον μοντέλο από Plexiglas, όπως μπορεί κανείς να δει στις φωτο 9 και 10, μας βοήθησε για αυτό τον σκοπό.

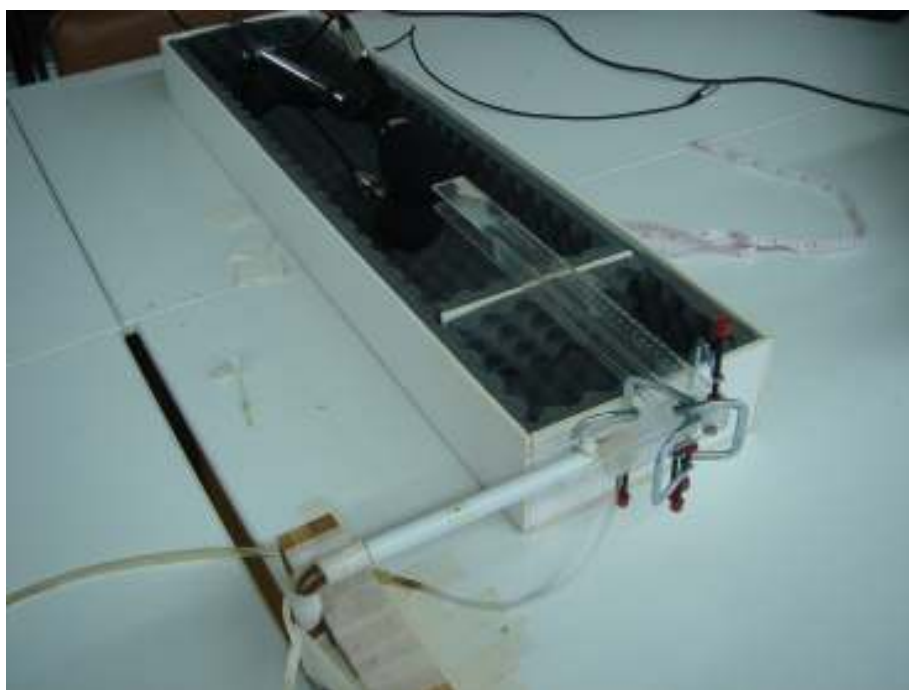
Λήφθηκαν αρχικά μετρήσεις με γεωμετρία $y_0 = 0,5h$ mm, $h=1$ mm, $W=4$ mm και έπειτα $W=6$ mm. Το συχνοτικό φάσμα του οργάνου για $W=4$ mm όταν η πίεση στο πόδι ισούται με 70 Pascal φαίνεται στο σχήμα 1.3. Το σύστημα για αυτή την πίεση βρίσκεται σε κατάσταση πρώτου τρόπου συντονισμού. Παρατηρούμε πολλά από τα χαρακτηριστικά που περιγράφονται στην ενότητα 4.10 του μέρους 4. Οι άρτιες αρμονικές εμφανίζονται πολύ ασθενέστερες από τις περιττές. Η παρουσία ωστόσο των υποαρμονικών συνιστωσών δεν είναι έντονη, παρατηρώντας το μέσον του συχνοτικού διαστήματος μεταξύ δύο αρμονικών. Είναι σαφής η παρουσία θορύβου ευρέως φάσματος στις βάσεις των αρμονικών. Μεταβαίνοντας σε υψηλότερες συχνοότητες, οι αρμονικές είναι λιγότερο καθαρές, λόγω της διέγερσης των εγκάρσιων τρόπων του συντονιστή (Κεφ. 4, Μέρος II).

Στο φάσμα του σχήματος 1.4 ο αυλός τροφοδοτείται με πίεση 284 Pascal και για την ίδια γεωμετρία ηχεί σε κατάσταση overblowing. Οι περιττές αρμονικές της θεμελιώδους κατάστασης έχουν σιωπήσει και οι άρτιες έχουν μεγαλώσει τόσο, ώστε να συνιστούν από μόνες του μία νέα σειρά



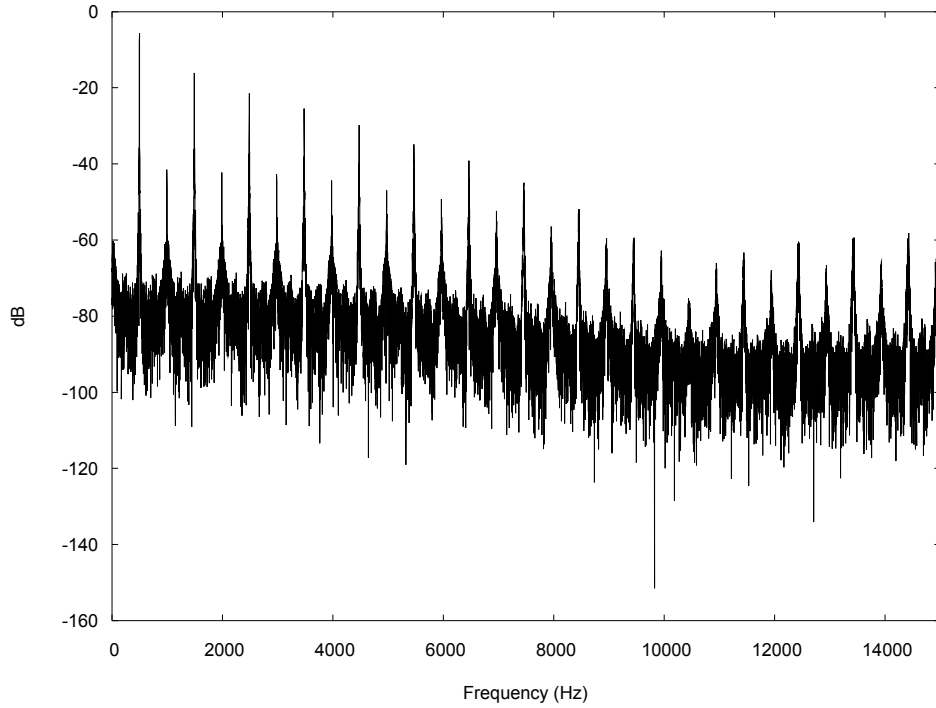
Φωτό 9

Όψη του μοντέλου εγκάρσιου αυλού που χρησιμοποιήθηκε στις μετρήσεις.

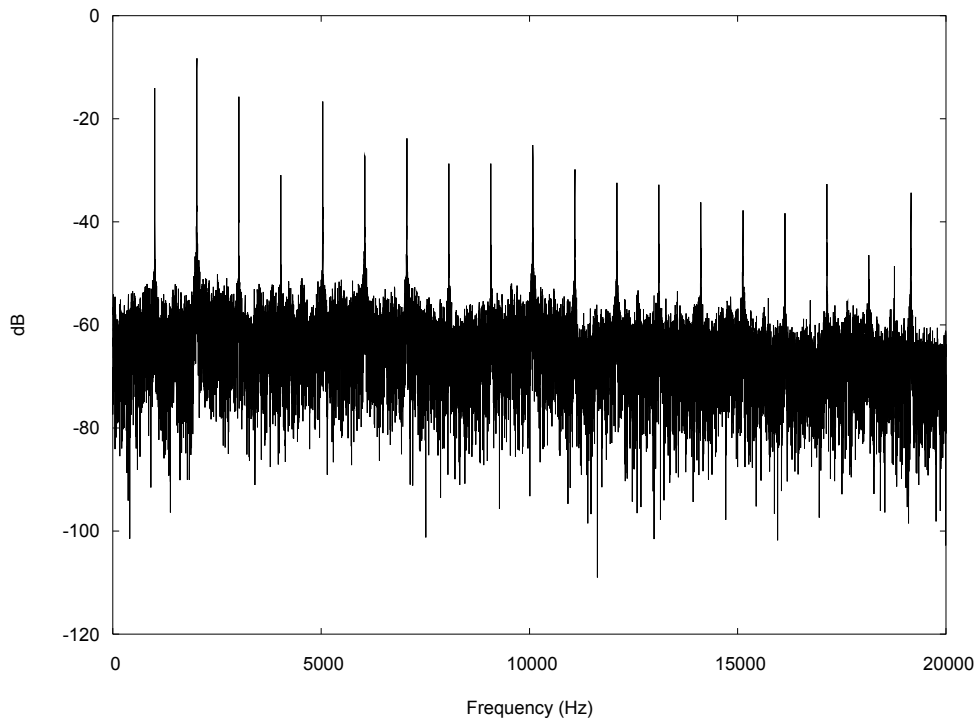


Φωτό 10

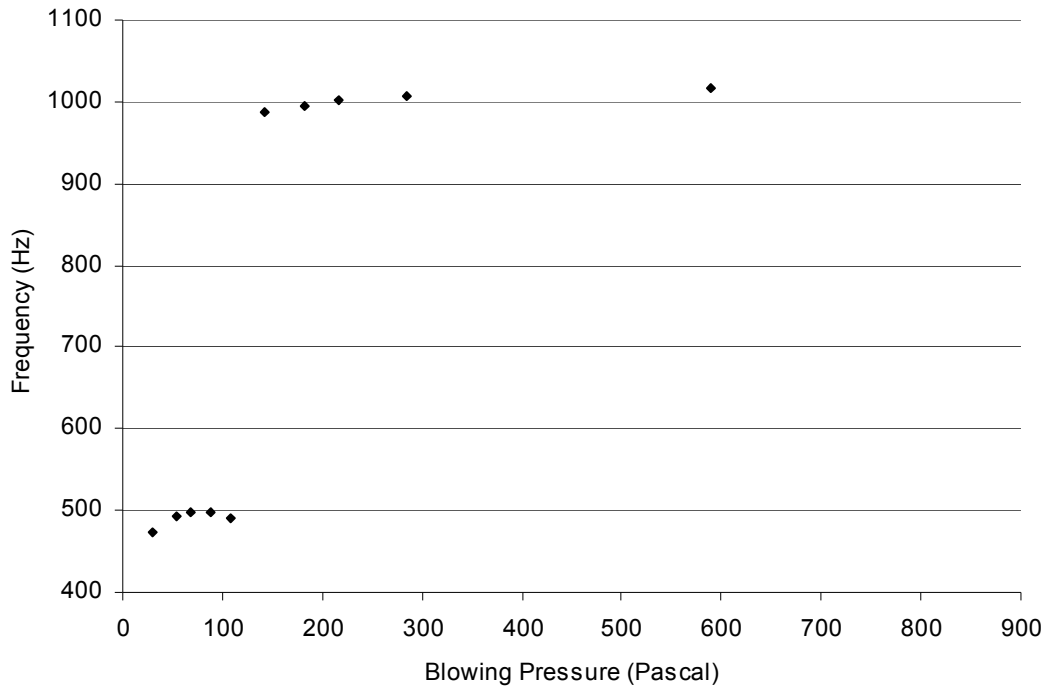
Διάταξη για τη μέτρηση του φάσματος του εγκάρσιου αυλού.

**Σχήμα 1.3**

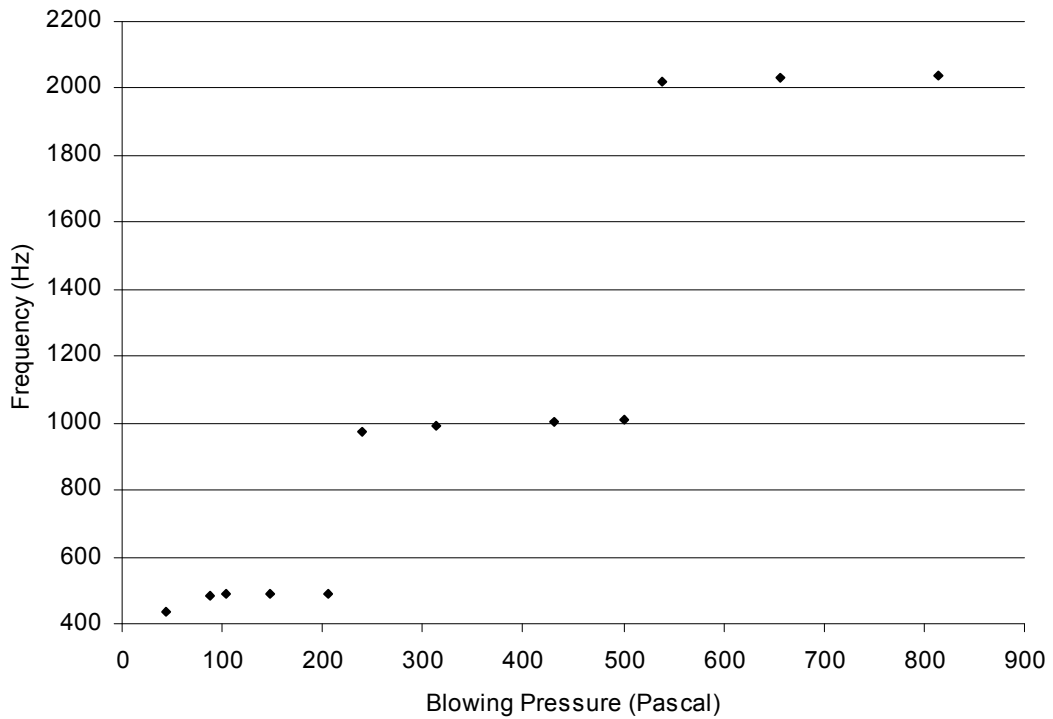
Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x25 mm, για $\gamma_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm και πίεση πνοής $P=70$ Pascal. Θεμελιώδης κατάσταση συντονισμού.

**Σχήμα 1.4**

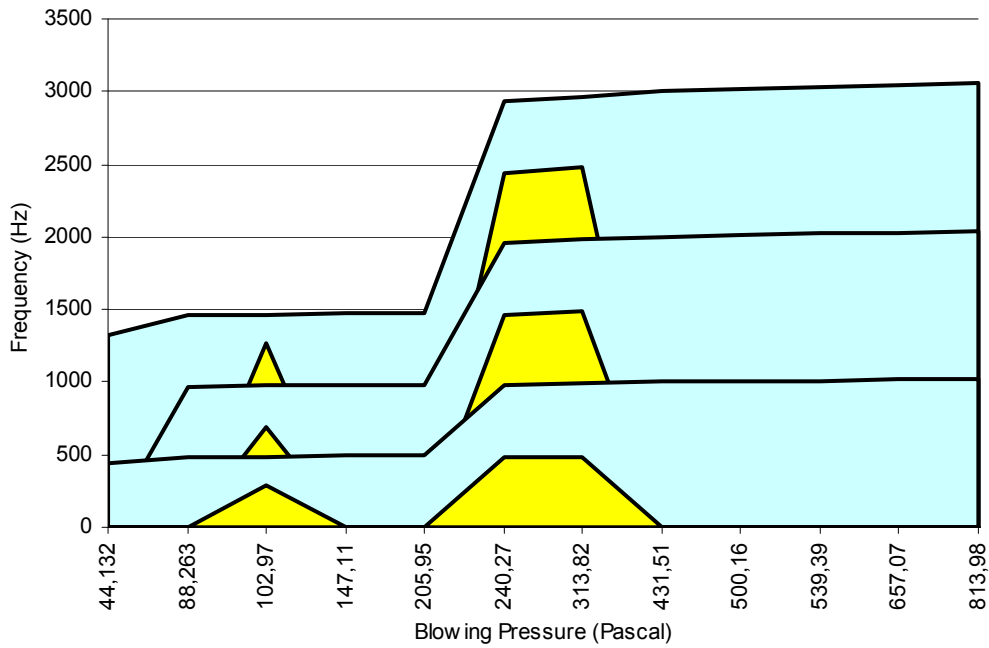
Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x25 mm, για $\gamma_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm και πίεση πνοής $P=284$ Pascal. Κατάσταση Overblowing.



Διάγραμμα 1.83: $y_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm

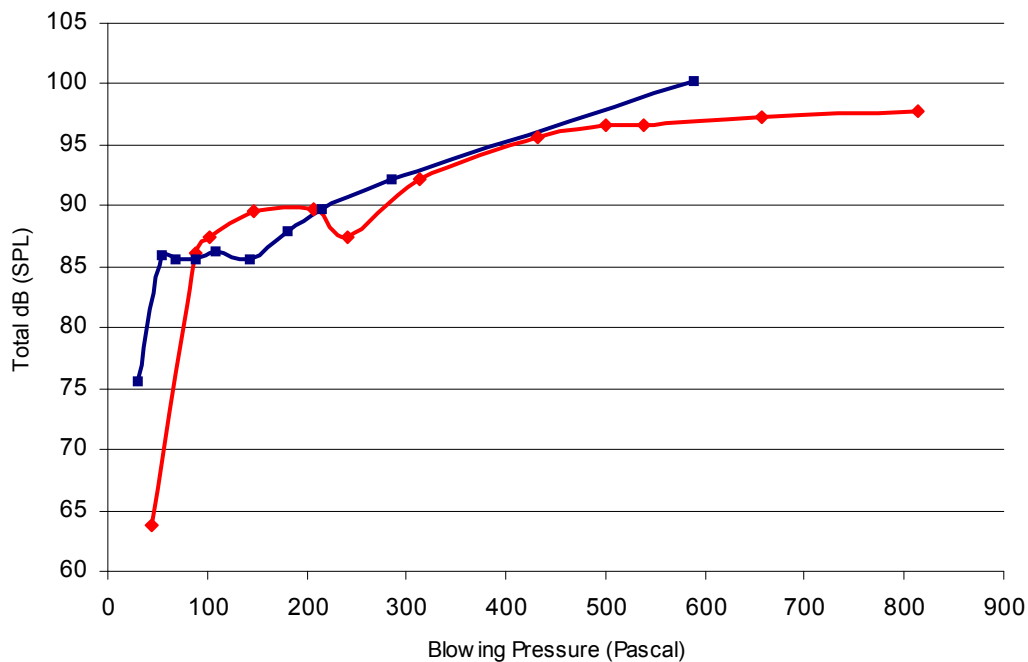


Διάγραμμα 1.84: $y_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W=6$ mm



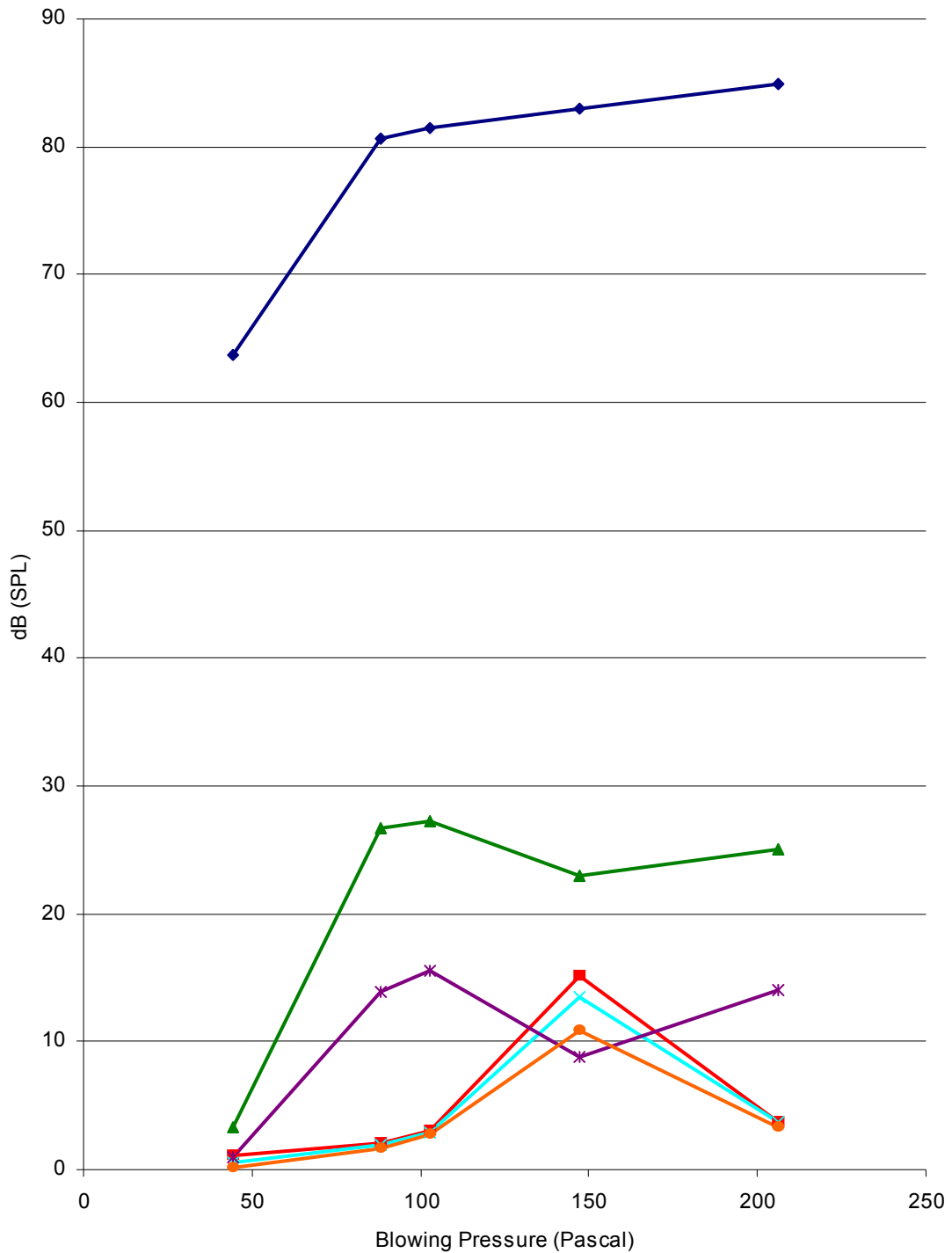
Διάγραμμα 1.85

Μεταβολή των τριών πρώτων αρμονικών (γαλάζιες περιοχές) και των υποαρμονικών (κίτρινες περιοχές) του αυλού γεωμετρίας $\gamma_0 = 0,5 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ mm}$, $W=4 \text{ mm}$, ως συνάρτηση της πίεσης πνοής.



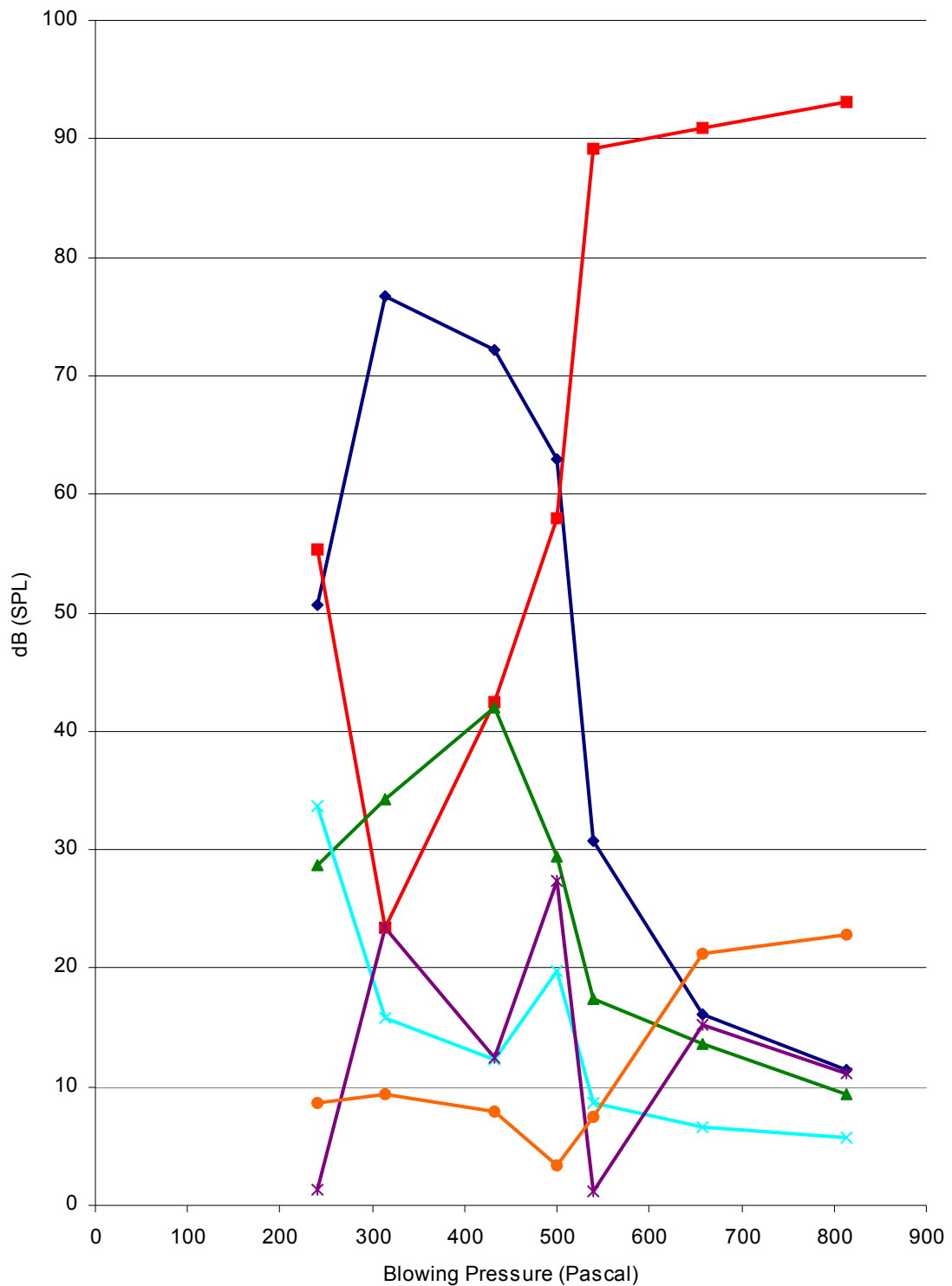
Διάγραμμα 1.86

Ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure με σταθερά τα $\gamma_0 = 0,5 \text{ mm}$ και $h = 1 \text{ mm}$. Μπλε γραμμή: $W=4 \text{ mm}$ και κόκκινη γραμμή: $W=6 \text{ mm}$.



Διάγραμμα 1.87

Κατάσταση πρώτου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $\gamma_0 = 0,5 \text{ mm}$, $W=6 \text{ mm}$, $h=1 \text{ mm}$.



Διάγραμμα 1.88

Κατάσταση δεύτερου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $\gamma_0 = 0,5$, $W=6$ mm, $h=1$ mm.

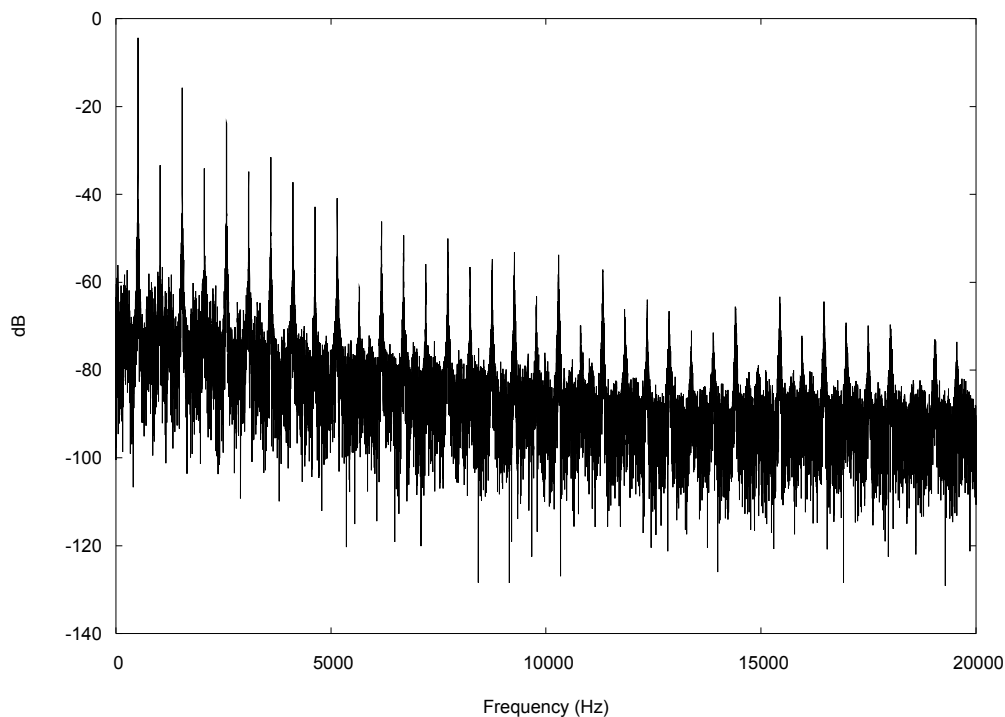
1.6 Πείραμα με Εγκάρσιο Αυλό διατομής 19 mm x 19 mm

Ο συντονιστής του αυλού αυτού είναι ακριβώς ο ίδιος με του οριζόντιου που μελετήθηκε στην ενότητα 1.4. Τα σχήματα 1.5 και 1.6 παρουσιάζουν το φάσμα του οργάνου για πιέσεις πνοής 45 και 168 Pascal αντίστοιχα για γεωμετρία διεγέρτη $y_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W = 4$ mm. Στο σχήμα 1.5 έχουμε κατάσταση θεμελιώδους τρόπου ενώ στο 1.6 overblown. Όπως και στα φάσματα της προηγούμενης γεωμετρίας, έτσι και εδώ, στην κατάσταση overblown εμφανίζονται πολύ μικρότερες κορυφές ανάμεσα στις αιχμηρές και έντονες αρμονικές, ενώ οι υποαρμονικές είναι πιο ξεκάθαρες. Γενικά το φάσμα στο overblown είναι πιο καθαρό και αυτό έχει άμεση επίδραση στο άκουσμα, το οποίο γίνεται σκληρότερο και πιο λιτό.

Συγκρίνοντας τη μεταβολή της συχνότητας για τη γεωμετρία $y_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W = 4$ mm του εγκάρσιου αυλού (διαγρ. 1.89) με την αντίστοιχη του συμβατικού οριζόντιου (1.55), παρατηρούμε ότι η κατάσταση overblown καθυστερεί να εμφανιστεί στον εγκάρσιο και είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι διαρκεί για πολύ μικρό εύρος πιέσεων (κάτω των 150 Pascal). Παράλληλα ο οριζόντιος συνεχίζει να ηχεί στη δεύτερη κατάσταση μέχρι μία πίεση 380 περίπου Pascal, υπό την οποία μεταβαίνει στην τρίτη κατάσταση. Ερχόμαστε πίσω πάλι στον εγκάρσιο αυλό, για να παρατηρήσουμε ξανά το φαινόμενο της απ' ευθείας μετάβασης στο τέταρτο τρόπο (πίεση περίπου 170 Pascal). Η κατάσταση αυτή διατηρείται για ένα σημαντικό εύρος πιέσεων.

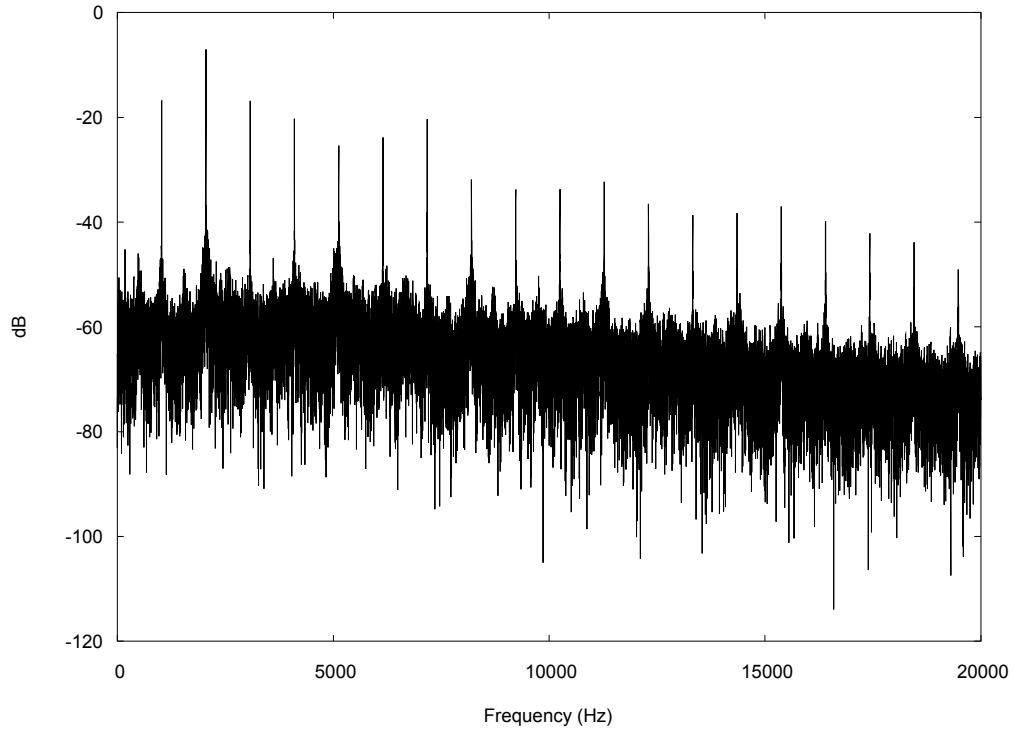
Η μεταβολή της ολικής έντασης SPL είναι παραπλήσια με τη μεταβολή του αντίστοιχου οριζόντιου αυλού, μολονότι στον εγκάρσιο είναι λιγότερο ομαλή από τον οριζόντιο. Στο διάγραμμα 1.91 εικονίζεται η μεταβολή των εντάσεων των έξι πρώτων αρμονικών του πρώτου τρόπου συντονισμού. Η δεύτερη αρμονική στα 65 περίπου Pascal αρχίζει να γίνεται ολοένα ισχυρότερη υποδηλώνοντας τη μετάβαση στο δεύτερο τρόπο συντονισμού, ο οποίος παρουσιάζεται στο διάγραμμα 1.92. η κόκκινη τεθλασμένη του διαγράμματος 1.92 έγινε τώρα μπλε, καθώς πλέον αποτελεί την πρώτη αρμονική της καταστάσεως overblowing. Λίγο μετά τα 150 Pascal η νέα δεύτερη αρμονική αρχίζει να ισχυροποιείται, ώστε κάπου στα 200 Pascal έχει καταπνίξει την πρώτη, οδηγώντας τον αυλό να ηχήσει στην τέταρτη κατάσταση συντονισμού.

Τέλος στο διάγραμμα 1.93 ο αριθμός Ising (κεφ. 4, Μέρος II) εξελίσσεται από 1 σε 2, πράγμα ασύμφωνο με τη θεωρία, που επιβάλλει μία μεταβολή από 2, για τη θεμελιώδη κατάσταση, σε 3, για τη κατάσταση overblowing.



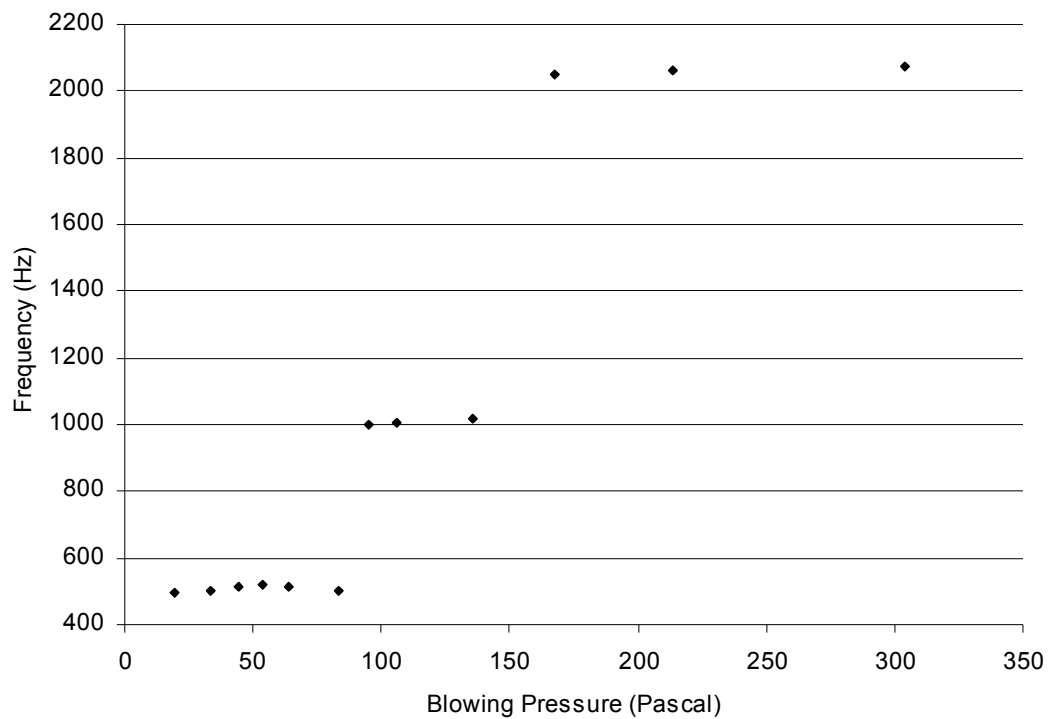
Σχήμα 1.5

Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x19 mm, για $y_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W = 4$ mm και πίεση πνοής $P = 45$ Pascal. Θεμελιώδης κατάσταση συντονισμού.



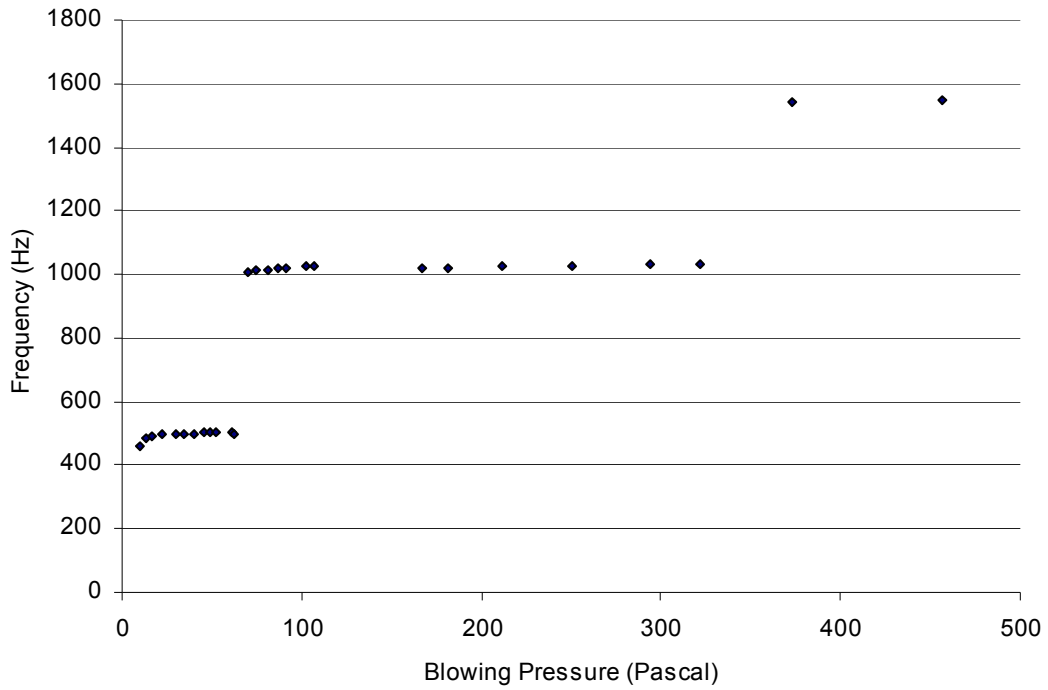
Σχήμα 1.6

Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x19 mm, για $y_0 = 0,5h$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm και πίεση πνοής $P=168$ Pascal. Κατάσταση Overblowing.

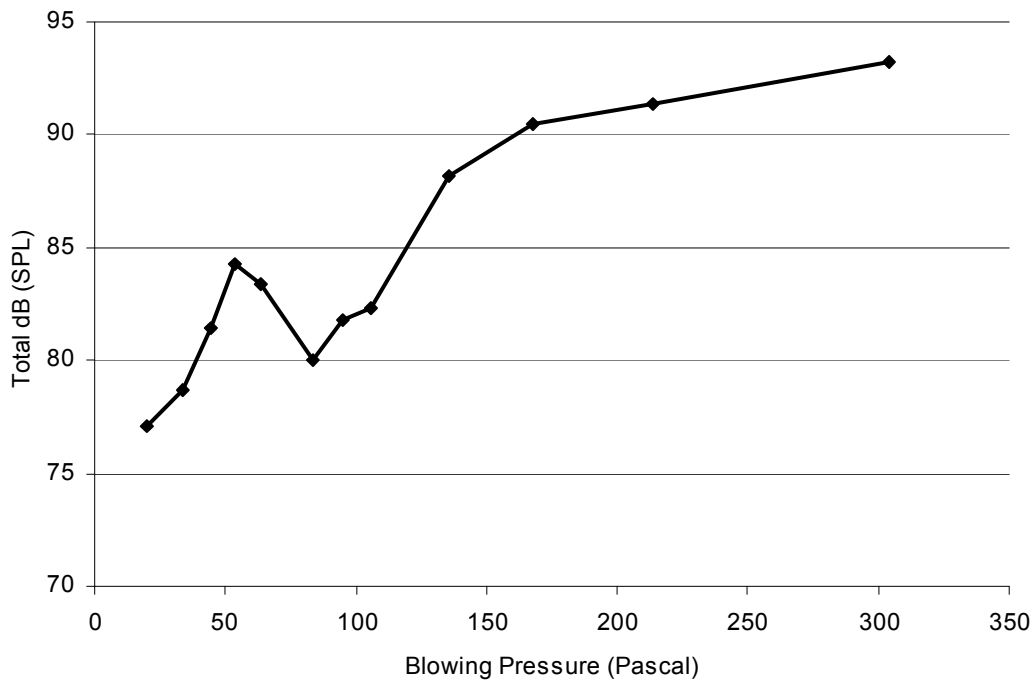


Διάγραμμα 1.89

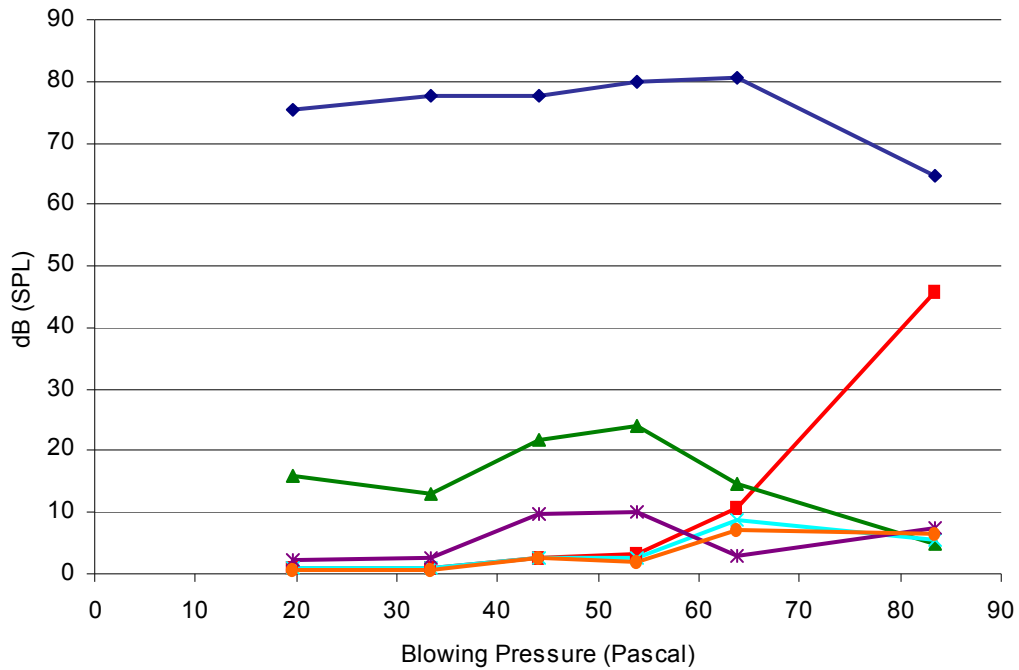
Εγκάρσιος αυλός . $y_0 = 0,5$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm



Διάγραμμα 1.55
 Οριζόντιος αυλός. $y_0 = 0,5 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ mm}$, $W=4 \text{ mm}$

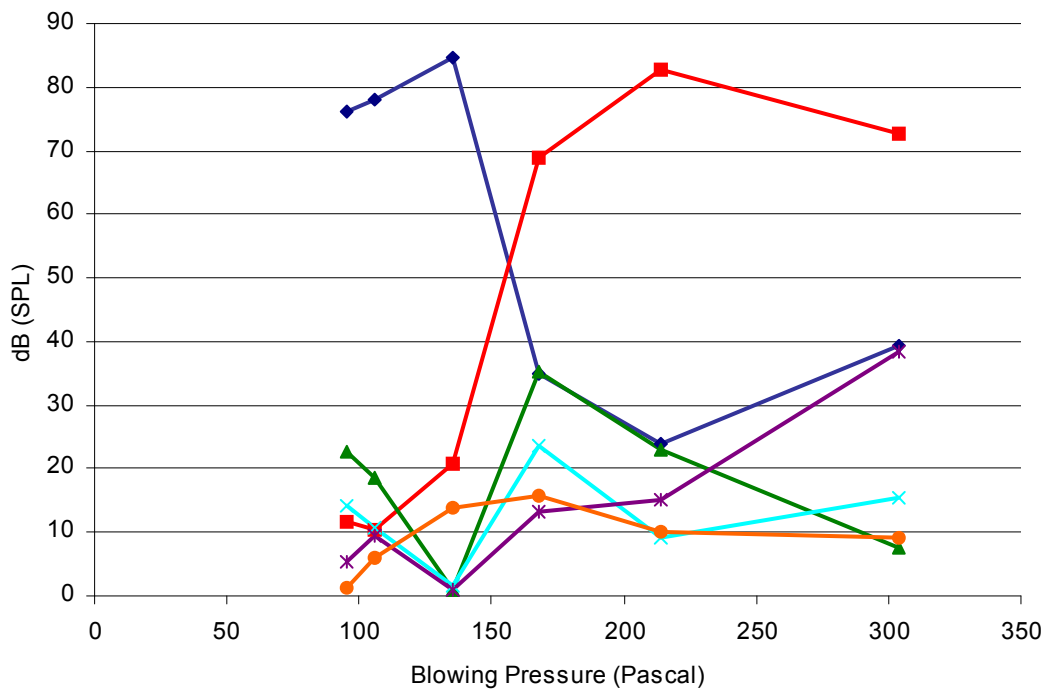


Διάγραμμα 1.90
 Ολική ένταση του οργάνου, σε dB ακουστικής πίεσης, σε απόσταση 16 cm από το παθητικό άκρο του συντονιστή, ως συνάρτηση της Blowing Pressure για $y_0 = 0,5 \text{ mm}$ και $h = 1 \text{ mm}$ και $W=4 \text{ mm}$.



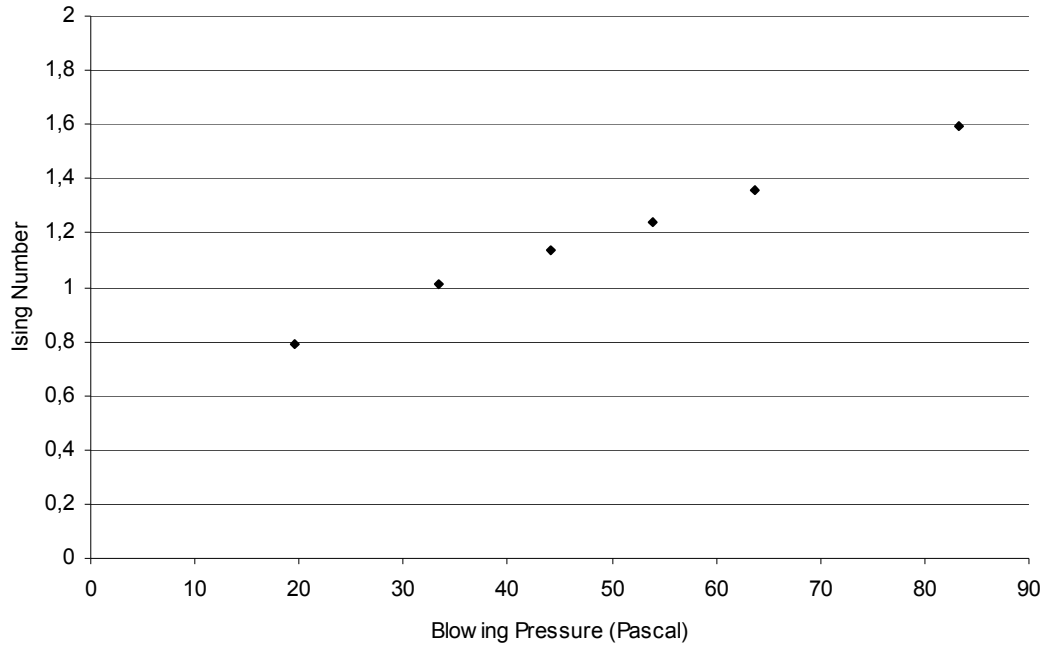
Διάγραμμα 1.91

Κατάσταση πρώτου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $\gamma_0 = 0,5$, $W=4$ mm, $h=1$ mm.



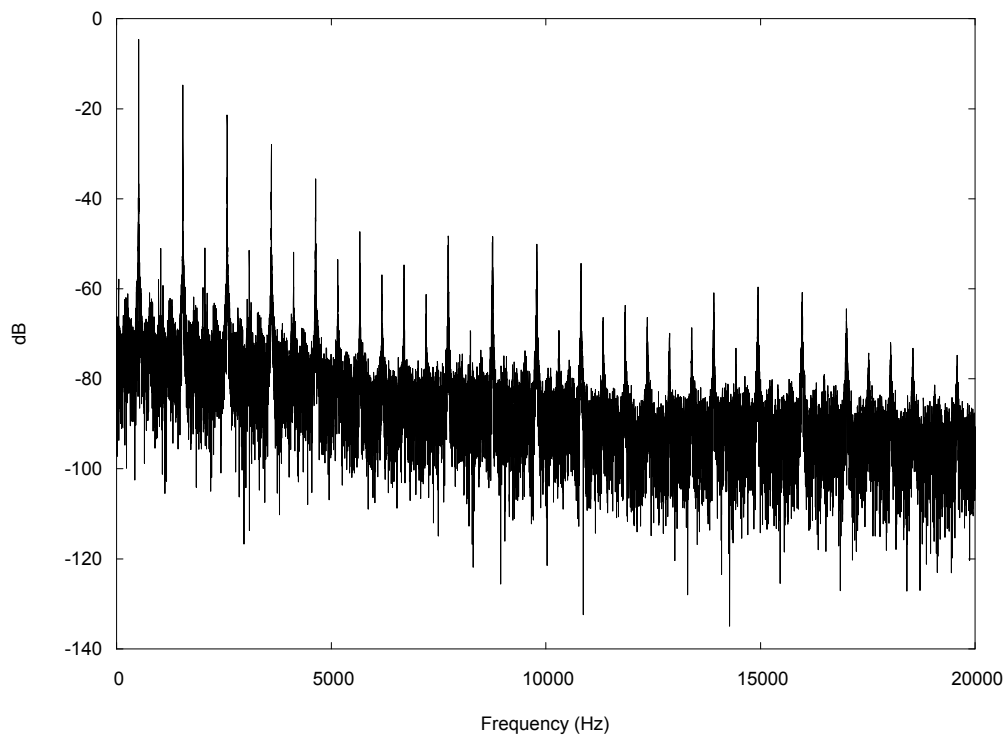
Διάγραμμα 1.92

Κατάσταση δεύτερου τρόπου συντονισμού. Μπλε: 1^η Αρμονική, κόκκινο: 2^η Αρμονική, Πράσινο: 3^η Αρμονική, Γαλάζιο: 4^η Αρμονική, Μοβ: 5^η Αρμονική, Πορτοκαλί: 6^η Αρμονική. Γεωμετρία: $\gamma_0 = 0,5$, $W=4$ mm, $h=1$ mm.

**Διάγραμμα 1.93**

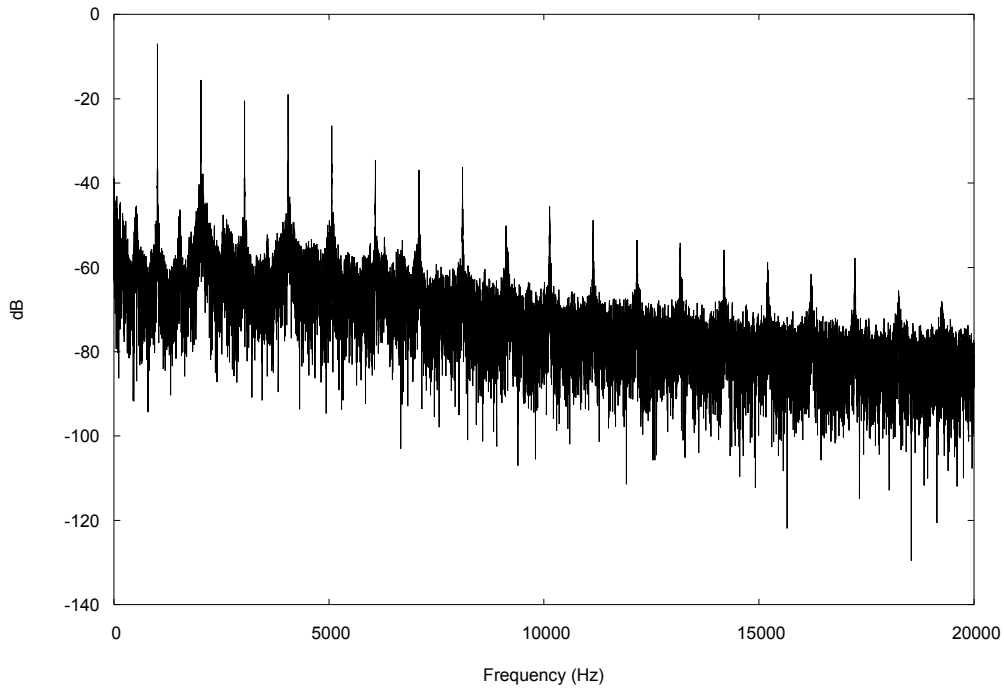
Μεταβολή του αριθμού Ising ως προς την πίεση πνοής για τον πρώτο τρόπο συντονισμού $y_0 = 0,5$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm.

Γεωμετρία με $y_0 = 0$ mm και $h = 1$ mm

**Σχήμα 1.7**

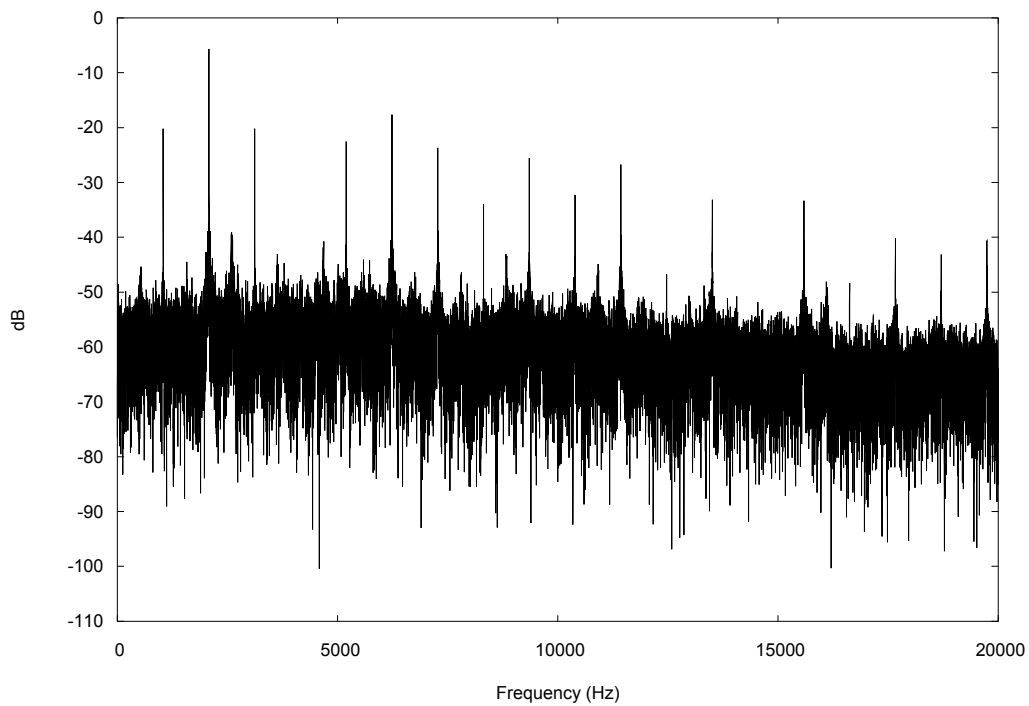
Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x19 mm, για $y_0 = 0$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm και πίεση πνοής $P=65$ Pascal. Θεμελιώδης κατάσταση συντονισμού.

Διατηρώντας όλες τις διαστάσεις ίδιες με πριν μηδενίζουμε μονάχα το y_0 . Παρατηρούμε στο φάσμα της θεμελιώδους καταστάσεως (σχήμα 1.7) τη σημαντική μείωση των άρτιων αρμονικών, όπως προβλέπεται και από η θεωρία (κεφ. 5, Μέρος II).



Σχήμα 1.8

Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x19 mm, για $y_0 = 0$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm και πίεση πνοής $P=132$ Pascal. Κατάσταση Overblowing.



Εικόνα 7

Φάσμα εγκάρσιου αυλού διατομής 19x19 mm, για $y_0 = 0$ mm, $h = 1$ mm, $W=4$ mm και πίεση πνοής $P=352$ Pascal. Κατάσταση Overblowing στον τρίτο τρόπο.

2

Συγκρότημα εγκάρσιων αυλών

Εφαρμόζοντας μερικά από τα βασικά στοιχεία της μέχρι τώρα μελέτης, προσπαθούμε να καταλήξουμε σε κάποιο αποτέλεσμα σχετικά με την κατασκευή ενός οργάνου αυλών ανέμου. Θα ήταν σκέτη ουτοπία να πιστεύει κάποιος ότι μέσα στα πλαίσια μίας διπλωματικής είναι εφικτό να αρχίσει και να ολοκληρώσει τη μελέτη ενός τόσο πολύπλοκου και πολυδιάστατου θέματος, το οποίο εξάλλου συνδυάζει γνώσεις από γενική ακουστική, ακουστική χώρων, μουσική ακουστική, ρευστομηχανική, αιολική ενέργεια, υπολογιστικές διαδικασίες, μουσική θεωρία, αρμονία και αντίστιξη [C,D,F,EE].

Τροποποιούμε τη γεωμετρία του εγκάρσιου αυλού, που προτάθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ώστε να μπορεί να διεγείρεται ελεύθερα από τον άνεμο. Προχωρούμε στην κατασκευή οκτώ όμοιων εγκάρσιων αυλών διαφορετικών μηκών, με χρήση της θεωρίας κλιμάκωσης (pipe scaling), ώστε να πάρουμε διαφορετικό φθόγγο απ' τον καθένα και προτείνονται διάφορες χωροθετήσεις. Στη συνέχεια δοκιμάζουμε και άλλες γεωμετρίες.

2.1 Κατασκευή συγκροτήματος εγκάρσιων αυλών

Στο μοντέλο του σχήματος 1.2 μπορούμε να αφαιρέσουμε το πόδι (foot) και στη θέση του να προσαρμόσουμε έναν συγκεντρωτή, ώστε να σχηματίζεται πάλι η flue σχισμή, όπως στο σχήμα 2.1. Συγκεντρωτές ανέμου μπορεί κανείς να συναντήσει στους σύγχρονους ανεμοκινητήρες [I], όπου είναι επιθυμητή η αύξηση τοπικά της πίεσης του ρεύματος αέρα ώστε να προσδίδει μεγαλύτερη ισχύ στην έλικα. Ωστόσο, οι διατάξεις των ανεμοκινητήρων είναι πολύ μεγαλύτερης κλίμακας από τους αυλούς και το ίδιο συμβαίνει και με τους συγκεντρωτές τους. Στην μικρή κλίμακα των αυλών η αύξηση της πίεσης προ της σχισμής λόγω της γεωμετρίας μας είναι ελάχιστη. Αυτές οι καμπυλόμορφες επιφάνειες περισσότερο χρειάζονται για να διατηρούν μία πιο στρωτή ροή του ρεύματος αέρα και να αποφεύγεται μεγάλη στροβιλότητα κατά την είσοδο του μέσα από τη σχισμή.

Χρησιμοποιούμε τώρα πλάκες ξύλου από συμπιεσμένο ξυλοκονίαμα (MTF), υλικό εύκολα κατεργάσιμο και υψηλής ακριβείας, για να κατασκευάσουμε οκτώ αυλούς του τύπου του σκαριφήματος 2.1. Οι αυλοί θα έχουν μεταβαλλόμενο μήκος, ώστε να σχηματίζουν όλοι μαζί την κλίμακα G major (Σολ μείζονα). Από τη θεωρία της μουσικής [C], οι φθόγγοι που θα χρειαστούμε για αυτήν την κλίμακα είναι οι G3, A3, B3, C4, D4, E4, F#4, G4. Στο σχήμα 2.2 (κεφ. 2, μέρος II) βρίσκουμε τις αντιστοιχίες των φθόγγων αυτών με τις θεμελιώδεις τους συχνότητες.

Pipe scaling

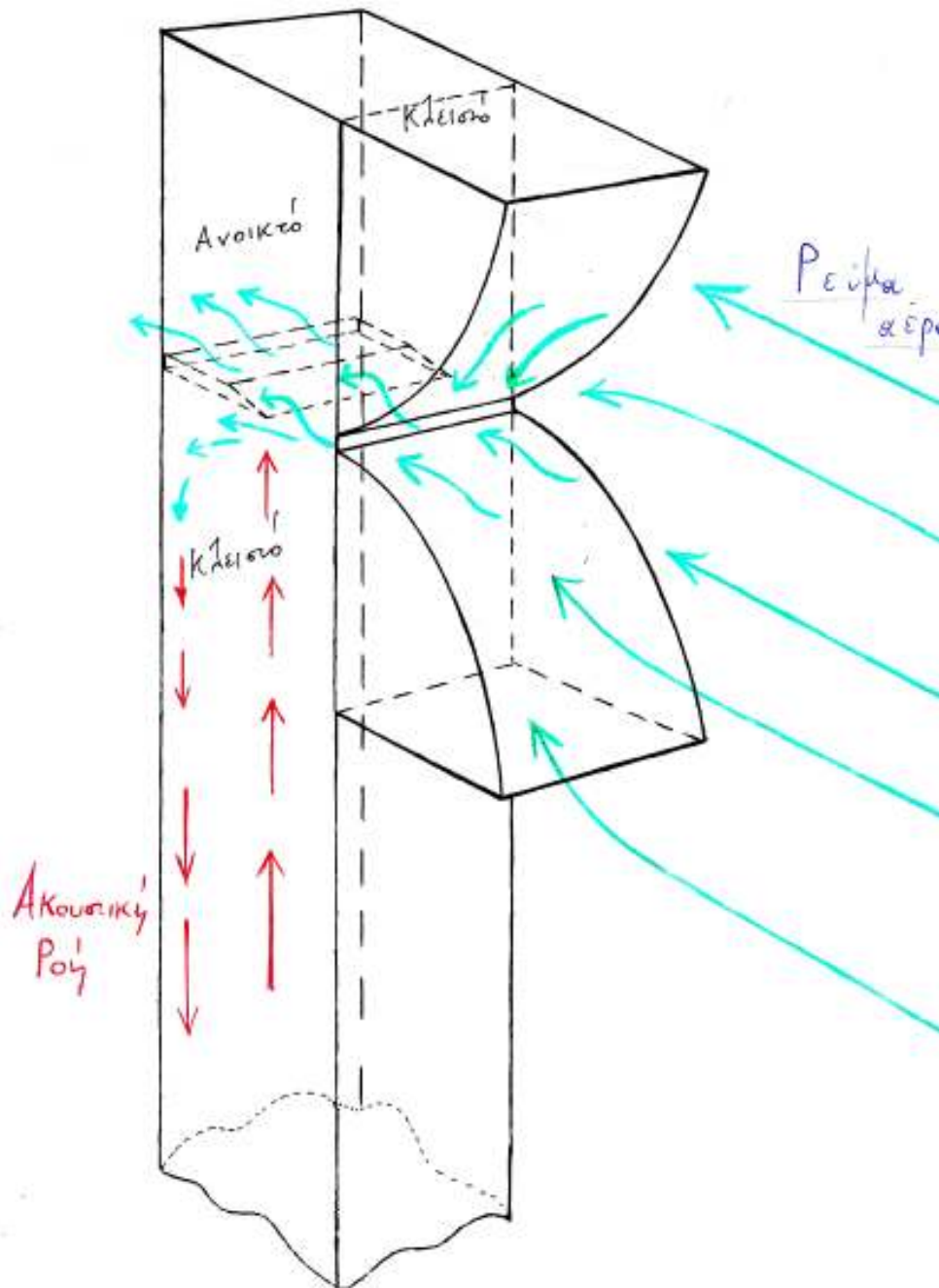
Σύμφωνα με το κεφάλαιο 6 στο μέρος II πρέπει να διαλέξουμε έναν πρότυπο αυλό (αυλό αναφοράς) και με βάση αυτόν να υπολογίσουμε τις διαστάσεις των υπόλοιπων αυλών για ομοιόμορφη ακουστική συμπεριφορά [33].

Γνωρίζοντας την ισοδύναμη διάμετρο του πρότυπου αυλού, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισοδύναμη διάμετρο κάθε άλλου, με παράμετρο τη συχνότητα που του αντιστοιχεί, εφαρμόζοντας τη σχέση:

$$D = D_0 \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^x \quad (2.1)$$

όπου D η (ισοδύναμη) διάμετρος του αυλού που θέλουμε να υπολογίσουμε, f_1 η συχνότητά του, D_0 η (ισοδύναμη) διάμετρος του πρότυπου αυλού και f_0 η συχνότητά του. Ο εκθέτης x θα πρέπει να κυμαίνεται, όπως αναλύθηκε στο κεφ. 6, μεταξύ 0,75 και 0,83.

Επιλέγουμε ως πρότυπο αυλό τον C4, όπως συνήθως συμβαίνει και στο σχεδιασμό των pipe organs. Θα πρέπει πρώτα απ' όλα να καθορίσουμε πλήρως τον αυλό αυτόν. Επιλέγουμε την ισοδύναμη



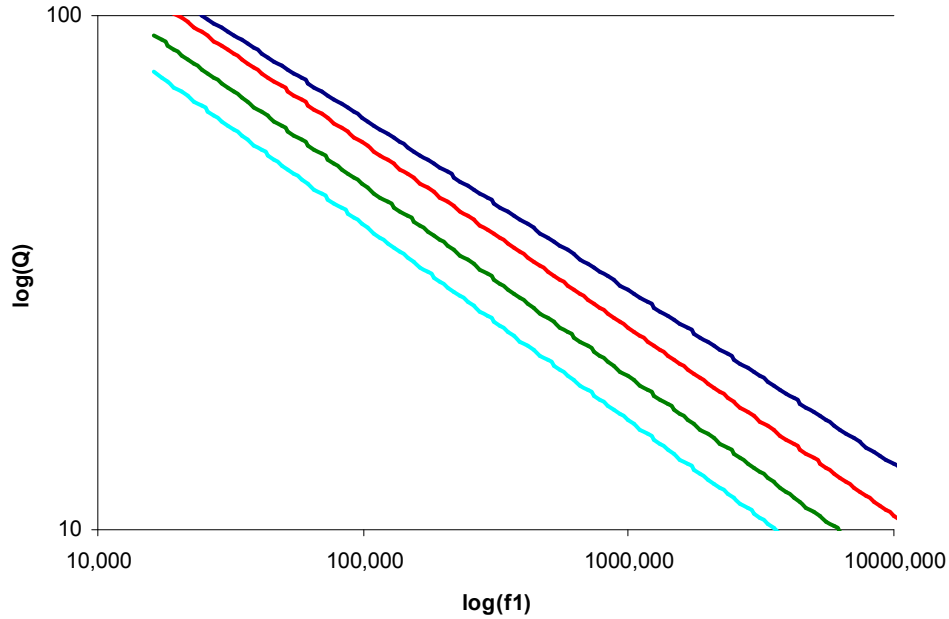
Σχήμα 2.1

Σκαρίφημα του αυλού που χρησιμοποιούμε για τη διέγερση του συντονιστή από τον άνεμο. Εφαρμογή θεωρίας εγκάρσιου αυλού (Κεφ. 1, Μέρος IV). Στη θέση του ποδιού του εγκάρσιου αυλού τοποθετήθηκε συγκεντρωτής της ροής του αέρα.

διάμετρό του να είναι 6,00 cm. Επειδή ο αυλός είναι τετραγωνικής διατομής η πλευρά του θα είναι 5,30 cm. Από το εύρος των προτεινόμενων τιμών για τον εκθέτη x , δίνουμε την τιμή 0,80, που αποτελεί μία εν γένει μεγάλη κλιμάκωση, δίνοντας ισχυρούς μπάσους φθόγγους. Σύμφωνα με την ανάλυση της ενότητας 6.2 μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα όμοιο με τα a έως e , για κλιμάκωση 0,80, που παρεμβάλλεται μεταξύ των κλιμακώσεων 0,75 και 0,83 (διαγράμματα c και d). Το διάγραμμα 2.1 παρουσιάζει τη μεταβολή του μεγέθους

$$Q_i \approx \frac{1}{3 \cdot 10^{-9} i f_1^2 D^2 L^{-1} + 1,4 i^{-1/2} f_1^{-1/2} D^{-1}} \quad (2.2)$$

για τους τέσσερις πρώτους τρόπους συντονισμούς i , ως συνάρτηση της θεμελιώδους συχνότητας f_1 του κάθε αυλού. Η διάμετρος D δίνεται από τη σχέση (2.1). Όπως ήταν αναμενόμενο, οι τρόποι ακολουθούν μία ενδιάμεση συμπεριφορά μεταξύ των κλιμακώσεων 0,75 και 0,83, πλησιάζοντας περισσότερο τη συμπεριφορά για κλιμάκωση 0,83, για την οποία έχουμε μία αρκετά ομοιόμορφη συμπεριφορά.



Διάγραμμα 2.1

Συμπεριφορά των παραγόντων ποιότητας των τεσσάρων πρώτων τρόπων συντονισμού, για συστοιχία αυλών, με εκθετική κλιμάκωση 0,80, ως συνάρτηση της συχνότητας. Μπλε: 1^{ος} τρόπος, κόκκινο: 2^{ος} τρόπος, πράσινο: 3^{ος} τρόπος και γαλάζιο: 4^{ος} τρόπος.

Οι ισοδύναμες διάμετροι και των οκτώ αυλών είναι τώρα καθορισμένες. Έτσι, είναι καθορισμένες και οι τετραγωνικές πλευρές τους.

Για να βρούμε το μήκος του συντονιστή κάθε αυλού, ώστε να αποδίδεται η αντίστοιχη συχνότητα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον κλασικό τύπο (Κεφ. 7, Μέρος I):

$$f = \frac{c}{2L_p} \Rightarrow L_p = \frac{c}{2f} \quad (2.3)$$

όπου L_p το μήκος του συντονιστή. Το μήκος του συντονιστή που θα προκύψει θα είναι λίγο μεγαλύτερο από αυτό που πραγματικά χρειάζεται, ώστε να παραχθεί η επιθυμητή συχνότητα, καθώς δεν έχει ληφθεί υπ' όψη καμία διόρθωση μήκους. Έτσι το L_p είναι το ενεργό μήκος. Αν αμελήσουμε τη διόρθωση μήκους στο στόμα, τότε μόνον η διόρθωση στο ανοικτό παθητικό άκρο θα συνυπολογιστεί. Κατά τη σχέση του Verge [EEE, 81], η διόρθωση είναι:

$$\delta_p = 0,82 \sqrt{\frac{H^2}{\pi}} = 0,82 \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} \quad (2.4)$$

όπου H η τετραγωνική πλευρά και S_p η διατομή του συντονιστή. Τελικά το γεωμετρικό μήκος θα είναι:

$$L_p = \frac{c}{2f} - \delta_p \quad (2.5)$$

Για να είμαστε ασφαλείς, μπορούμε να διατηρήσουμε το μήκος του συντονιστή ίδιο με το ενεργό μήκος και να δημιουργήσουμε ένα συρταρωτό καπάκι στο παθητικό άκρο το οποίο θα έχει μήκος πολύ περισσότερο απ' το δ_p , ώστε να συμπεριληφθεί και η διόρθωση λόγω στόματος και να μπορούμε εν τέλει να ρυθμίζουμε με ακρίβεια το τονικό ύψος κάθε αυλού. Αυτό είναι απαραίτητο όταν θέλουμε να αναρμονίζουμε πολλούς αυλούς μαζί. Το ρυθμιστικό καπάκι φαίνεται στην εικόνα 2.1. Είναι εφαρμο-



Εικόνα 2.1

Κυλιόμενο καπάκι ρύθμισης συχνότητας στο κάτω μέρος του συντονιστή.

στό ώστε να μπορεί να κυλιέται πάνω – κάτω και να στέκεται εκεί όπου το αφήνουμε. Η λειτουργία του καπακιού αναπληρώνει τη λειτουργία του tuning scroll (Κεφ. 4, Μέρος II).

Ο συντονιστής κάθε αυλού είναι τώρα πλήρως καθορισμένος. Το πάχος της σχισμής h και το άνοιγμα του στόματος W , θα είναι μεταβλητά. Αυτό θα το πετύχουμε αν το επάνω μέρος του συγκεντρωτή (σχήμα 2.1) και το labium είναι κινητά κομμάτια. Στην εικόνα 2.2 στα αριστερά φαίνεται το επάνω μέρος του συντονιστή, πάνω δεξιά το labium τοποθετημένο πάνω στον συντονιστή και κάτω δεξιά το επάνω μέρος του συγκεντρωτή τοποθετημένο στη θέση του. Σημειώστε ότι ο συγκεντρωτής διαφέρει πολύ απ' το σχήμα 2.1. Η ακτίνα καμπυλότητάς του είναι πολύ μικρότερη. Ο πίνακας 2.1 δίνει τα γεωμετρικά στοιχεία των αυλών, όπως προέκυψαν από τα προαναφερθέντα. Αναγράφεται και το προτεινόμενο πάχος σχισμής h , ως ποσοστό 5 % του πλάτους του στόματος (= τετραγωνική πλευρά).



Εικόνα 2.2

Αριστερά: το επάνω μέρος του συντονιστή. Πάνω δεξιά το labium τοποθετημένο πάνω στον συντονιστή. Κάτω δεξιά: ο αυλός σε πλήρη μορφή, με το επάνω μέρος του συγκεντρωτή τοποθετημένο στη θέση του.

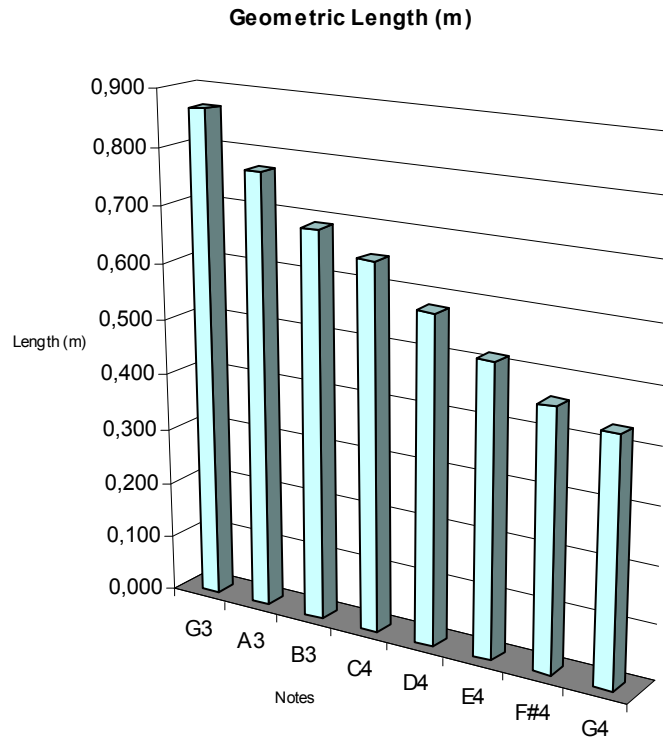
Πίνακας 2.1

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των οκτώ αλλών του συγκροτήματος

Φθόγγος	Συχνότητα (Hz)	Μήκος κύματος (m)	Γεωμετρικό μήκος, ίδιο με το ενεργό (m)	Ισοδύναμη διάμετρος (cm)	Τετραγωνική πλευρά (cm)	δ_p (cm)	Μήκος καπακίου (cm)	Ελάχιστο γεωμετρικό μήκος	h (mm)
G3	195,998	1,736	0,868	7,560	6,7	3,10	7	79,800	3,350
A3	220,000	1,547	0,774	6,892	6,1	2,83	6	71,350	3,054
B3	246,942	1,378	0,689	6,284	5,6	2,58	6	62,900	2,784
C4	261,626	1,301	0,651	6,000	5,3	2,46	5	60,050	2,659
D4	293,665	1,159	0,580	5,470	4,8	2,24	5	52,950	2,424
E4	329,628	1,032	0,516	4,987	4,4	2,04	5	46,600	2,210
F#4	369,994	0,92	0,460	4,547	4,0	1,86	4	42,000	2,015
G4	391,995	0,868	0,434	4,342	3,8	1,78	4	39,400	1,924

Η οξύτητα του labium κάθε αυλού είναι 15° .

Η μεταβολή στα μήκη των συντονιστών ως συνάρτηση της συχνότητας φαίνεται στο διάγραμμα 2.2. Στην εικόνα 2.3 παρουσιάζονται οι επτά από τους οκτώ αυλούς όπως κατασκευάστηκαν από ξυλοκονίαμα MTF.



Διάγραμμα 2.2

Μεταβολή στα μήκη των συντονιστών, ως συνάρτηση της συχνότητας.



Εικόνα 2.3

Οι επτά από τους οκτώ αυλούς του συγκροτήματος, κατασκευασμένοι από ξυλοκονίαμα MTF.

Δοκιμές στην αεροδυναμική σήραγγα και το περιβάλλον

Οι εγκάρσιοι αυλοί της εικόνας μπορούν άμεσα να εκτεθούν στον άνεμο. Οι παραγόμενοι τόνοι εξαρτώνται από πολλές παραμέτρους. Από την ένταση του ανέμου, το πάχος της σχισμής h και την απόσταση W , σε αντιστοιχία με τις πειραματικές μετρήσεις του προηγούμενου κεφαλαίου. Από τους οκτώ αυλούς διαλέξαμε τρεις. Τον C4, τον E4 και τον G4. Η συνήχηση των αυλών αυτών μας δίνει, ως γνωστόν από τη μουσική αρμονία [D,E], τη συγχορδία Cmajor ή Nτο μείζονος τρίτης. Το άκουσμά της είναι ευχάριστο και δίνει αίσθηση πληρότητας και χαράς.

Με τους τρεις αυλούς εκτελέστηκαν μερικές δοκιμές στη μικρή αεροδυναμική σήραγγα του εργαστηρίου αεροδυναμικής (εικόνα 2.4). Δυστυχώς χρειάστηκε μεγάλη ένταση ανέμου για να



Εικόνα 2.4

Δοκιμή των αυλών C4, E4 και G4 στη μικρή αεροδυναμική σήραγγα με τον Καθ. Γ. Μπεργελέ.

πάρουμε σταθερούς τόνους διαρκείας. Όταν η απόσταση W είναι μικρή, το όργανο ηχεί με χαμηλότερη πίεση πνοής και άρα χαμηλότερη ταχύτητα ανέμου. Η παραγόμενη έντασή του μικραίνει. Επίσης, είναι πιο εύκολη η μετάβαση στον επόμενο τρόπο συντονισμού (overblowing). Αυξάνοντας την απόσταση αυτή, το όργανο ηχεί σε μεγαλύτερες πιέσεις πνοής και ο ήχος είναι δυνατότερος. Ο πρώτος τρόπος συντονισμού διαρκεί για μεγαλύτερο εύρος πιέσεων.

Αν οι αυλοί εκτεθούν στον πραγματικό άνεμο, δεν είναι λίγες οι φορές που θα ηχίσουν έστω και με λίγα Beaufort (5 –7). Το όργανο ηχεί δυνατά με τις δυνατές ριπές του ανέμου [1]. Η ριπή, δηλαδή η απότομη και τοπική αύξηση της ταχύτητας του ανέμου δεν διαρκεί πολύ και αυτό έχει ως συνέπεια ο συντονισμός του οργάνου να διαρκεί λίγα δευτερόλεπτα. Αυτό φαινομενικά είναι πρό-

βλημα. Ωστόσο, με μία πιο προσεκτική ανάλυση της φύσης της ίδιας της μουσικής, θα διαπιστώσει κανείς ότι αυτές οι στοχαστικές και πολυποικίλες μεταβολές του ανέμου μπορούν να δώσουν εξαιρετικά αποτελέσματα, καθώς οι φθόγγοι στα μουσικά κομμάτια δεν διαρκούν πάντα πολύ ή τουλάχιστο δεν είναι απαραίτητο να διαρκούν πολύ. Μελωδίες μπορούν να παιχτούν τόσο από self-sustained μουσικά όργανα, όσο και από όργανα με συντομότατη απόκριση, όπως το ξυλόφωνο ή η τσελέστα. Η ουσία του πράγματος είναι να μπορεί να αξιοποιηθεί η συμπεριφορά του ανέμου.

Και οι οκτώ αυλοί δοκιμάστηκαν στον εξωτερικό αέρα στην οροφή μίας πολυκατοικίας εντός της πόλης. Οι μπάσοι αυλοί (οι C4, B3, A3 και G3) ήχησαν ευκολότερα από τους υψηλής συχνότητας. Είναι σημαντικό το ότι οι μπάσοι αυλοί διαθέτουν μεγαλύτερη πλευρά και μεγαλύτερο μέτωπο στον αέρα. Το γεγονός αυτό θα μας οδηγήσει στη συνέχεια σε μία ουσιαστική τροποποίηση.

Χωροθέτηση

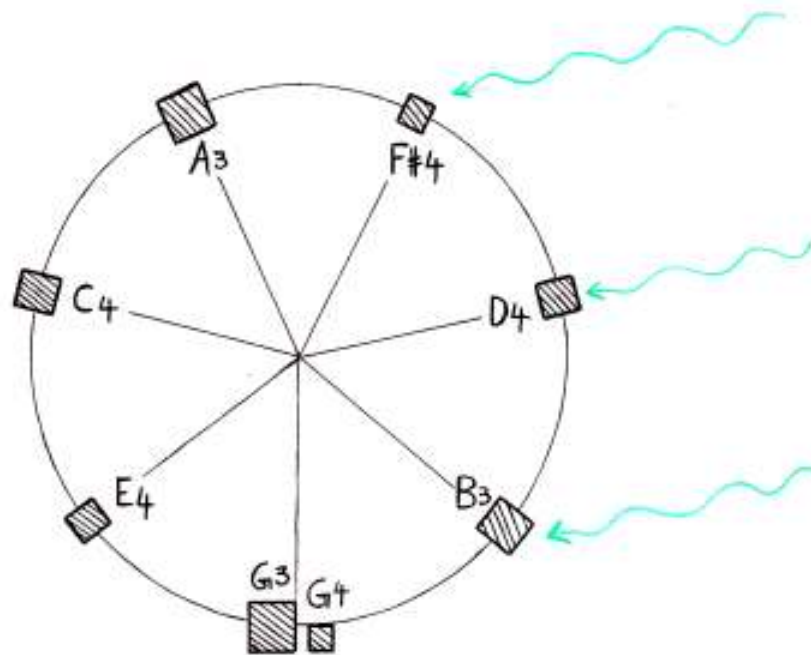
Οι οκτώ αυλοί θα μπορούσαν θεωρητικά να διαταχθούν σύμφωνα με το σχήμα 2.2, όπου βλέπουμε την κάτοψή τους, με τις σχισμές (και τους συγκεντρωτές τους) στραμμένες προς το εξωτερικό μέρος του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου χωροθέτησης στην πραγματικότητα θα πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη απ' όσο φαίνεται στο σχήμα, τέτοια ώστε με κάθε κατεύθυνση του ανέμου να ενεργοποιούνται δύο έως τρεις αυλοί. Με τον τρόπο αυτόν θα παράγονται συνηχήσεις σύμφωνων μουσικών διαστημάτων (δύο φθόγγοι σε απόσταση $3^{1/5}$) ή τρίφωνες συγχορδίες (τρεις φθόγγοι). Όπως θα έχει γίνει κατανοητό μέχρι τώρα κάθε αυλός μπορεί να ηχεί είτε στη θεμελιώδη συχνότητα είτε σε μία υψηλότερη, αναλόγως του συνδυασμού των γεωμετρικών του χαρακτηριστικών με την πίεση πνοής. Για την ακόλουθη ανάπτυξη, θεωρούμε τέτοιες τις αποστάσεις W , ώστε όλοι οι αυλοί να ηχούν στο θεμελιώδη τρόπο.

Οι αυλοί G3 και G4 θα ηχούν πάντα μαζί σε διάστημα οκτάβας (Κεφ. 1, Μέρος II). Έτσι, όταν συμπεριλαμβάνονται και αυτοί στη συνήχηση, θα έχουμε ή ελλιπή τρίφωνη συγχορδία [D,E], στην οποία λείπει το διάστημα $5^{1/5}$, ή τετράφωνη, αν έχει ενεργοποιηθεί ο αυλός D4 ή ο E4. Αναλυτικά, τα μουσικά διαστήματα που μπορούν να παραχθούν είναι [D,E]:

B3 – D4 (3^η μικρή)
 D4 – F#4 (3^η μεγάλη)
 F#4 – A3 (3^η μικρή)
 A3 – C4 (3^η μικρή)
 C4 – E4 (3^η μεγάλη)

Ενώ οι συγχορδίες είναι:

G3 – G4 – B3 (οκτάβα και 3^η μεγάλη)
 G3 – G4 – B3 – D4 (οκτάβα, 3^η μεγάλη και 5^η καθαρή)
 B3 – D4 – F#4 (3^η μικρή και 5^η καθαρή)
 D4 – F#4 – A3 (3^η μεγάλη και 5^η καθαρή)
 F#4 – A3 – C4 (3^η μικρή και 5^η ελαττωμένη)
 A3 – C4 – E4 (3^η μικρή και 5^η καθαρή)
 E4 – G3 – G4 (3^η μικρή και οκτάβα)
 E4 – G3 – G4 – B3 (3^η μικρή, οκτάβα και 5^η καθαρή)



Σχήμα 2.2

Κάτοψη προτεινόμενης χοροθέτησης των οκτώ αυλών. Οι σχισμές με τους συγκεντρωτές είναι στραμμένες προς το εξωτερικό μέρος του κύκλου. Η ακτίνα είναι τέτοια ώστε με κάθε δυνατή κατεύθυνση του ανέμου να ενεργοποιούνται δύο ή τρεις αυλοί, δίνοντας συνηχήσεις σύμφωνων μουσικών διαστημάτων ή τρίφωνες συγχορδίες.

Όλες οι συνηχήσεις είναι αποδεκτές από άποψη μουσικής συμφωνίας. Επίσης, αυτή η χοροθέτηση μας δίνει μία αλληλουχία συγχορδιών, που συνάδει με την κλασική αρμονία [D,E,EE]. Σύμφωνα με αυτή, οι συνδέσεις μεταξύ δύο διαδοχικών τρίφωνων συγχορδιών πρέπει να γίνονται με έναν τουλάχιστο κοινό φθόγγο. Παρατηρώντας κανείς τη λίστα των συγχορδιών, θα δει ότι ο κανόνας εφαρμόζεται πλήρως. Οι αυλοί G3 και G4 τοποθετήθηκαν για να μπορέσει να ισχύσει ο κανόνας αυτός.

Ποικίλα θέματα προκύπτουν απ' τη μελέτη του σχήματος 2.2:

Σταθερό και περιστρεφόμενο σύστημα

Το κυκλικό σύστημα με τους αυλούς θα μπορούσε είτε να είναι σταθερό είτε να περιστρέφεται κατά τον κατακόρυφο άξονά του.

Αν ήταν σταθερό, θα αφηνόταν στην πλήρη στοχαστική συμπεριφορά του ανέμου και η κατασκευή του θα ήταν απλούστερη. Τότε θα μπορούσαν κάλλιστα να παρεμβληθούν και άλλοι αυλοί μεταξύ των ήδη υπάρχοντων, για να αυξηθεί η πιθανότητα ενεργοποίησης κάποιων από αυτών σε δεδομένο χρονικό διάστημα.

Το περιστρεφόμενο σύστημα προβάλλει ελκυστικό, καθώς μεταβάλλει τη γωνία του μετώπου των αυλών με την κατεύθυνση του ανέμου, με συνεχή τρόπο (ενώ στο σταθερό σύστημα είναι διακριτές οι τιμές της). Έστω ότι μία ριπή του ανέμου διατηρεί κάποια στιγμή την κατεύθυνση του σχήματος 2.2 για 3 δευτερόλεπτα. Αν το σύστημα έχει ακτίνα 5 m και περιστρέφεται ωρολογιακά, με γωνιακή ταχύτητα 18 RPM, τότε η περιφερειακή ταχύτητα των αυλών θα είναι:

$$V = \omega \cdot r = 0,3 \cdot 5 \Rightarrow V = 1,5 \text{ m/s} \quad (2.6)$$

Το τόξο που θα διανύσει κάθε ένας από τους αυλούς B3, D4 και F#4 σε χρόνο $t = 3 \text{ sec}$ θα είναι:

$$S = V \cdot t \Rightarrow S = 4,5 \text{ m} \quad (2.7)$$

Αυτή η μετακίνηση αντιστοιχεί σε γωνία:

$$\phi = \frac{S}{r} \Rightarrow \phi = 0,9 \text{ rad} \Rightarrow \phi = 51,5^\circ \quad (2.8)$$

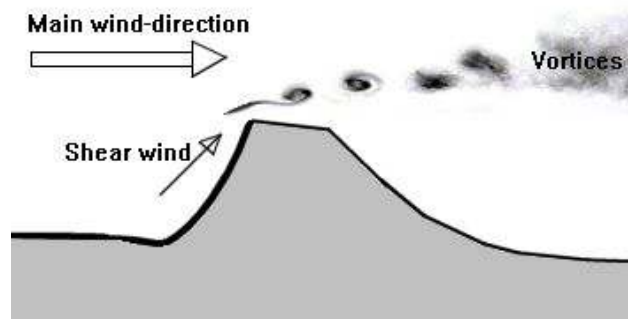
Αλλά αυτή είναι και η γωνία χωροθέτησης των αυλών στο σχήμα. Άρα σε 3 sec ο άνεμος θα ενεργοποιεί τους αυλούς D4, F#4 και A3, αντί για τους B3, D4 και F#4. Έτσι, με την αλλαγή ενός και μόνο φθόγγου, θα έχει αλλάξει και η συγχορδία και το άκουσμα. Αν πάλι ο άνεμος φυσούσε δυνατά για 2 sec, σταματούσε και φυσούσε πάλι δυνατά, στην ίδια κατεύθυνση, μετά από 4 sec, θα είχαν προλάβει να έρθουν στο μέτωπό του οι αυλοί F#4, A3, C4. Η τελική εντύπωση στον ακροατή θα ήταν οι αλληλουχία συγχορδιών B3 - D4 - F#4 και F#4 - A3 - C4.

Ένα ερώτημα μπορεί να τεθεί τώρα για το ποιος θα είναι ο κινητήριος περιστροφικός μηχανισμός. Η προφανέστερη απάντηση θα ήταν ένας θόρυβος ηλεκτροκινητήρας, τροφοδοτούμενος από ρεύμα δικτύου ή ηλιακό ρεύμα. Μία πιο ενδιαφέρουσα προοπτική θα ήταν ένας ανεμοκινητήρας τύπου Savonius ή Darrieus [I], προσαρμοσμένος απευθείας στον άξονα του συστήματος. Θα μπορούσε ένα αιολικό πάρκο τέτοιων κινητήρων να τροφοδοτούνταν με αυλούς, για έναν εντυπωσιακό συνδυασμό παραγωγής ρεύματος και μουσικής.

Τοποθεσία και μετατροπές

Η μελέτη της τοποθέτησης ενός αιολικού οργάνου αυλών φαίνεται να είναι σε πολλά πράγματα όμοια με την τοποθέτηση ανεμογεννητριών [I]. Το σχήμα 2.3 δείχνει τη συμπεριφορά του ανέμου σε πλαγιές, που αποτελούν μία υποσχόμενη τοποθεσία για το μουσικό μας όργανο. Άλλες περιπτώσεις είναι οι παραλίες, οι κοιλάδες, οι οροφές ψηλών κτηρίων, τα στάδια και οι μεγάλες αστικές χαράδρες. Γενικά πρέπει να επιλέγεται τόπος στον οποίο οι άνεμοι πνέουν δυνατοί και έχουν στρωτή ροή. Για τη συμπεριφορά των ανέμων μπορεί κανείς να συμβουλευτεί τις βιβλιογραφικές αναφορές [H, I]. Εξάλλου είδαμε στα αιολικά όργανα (Κεφ. 7, Μέρος II) ότι τα φλάουτα τύπου Helmholtz τοποθετούνταν σε χαρταετούς για φτάσουν ψηλά όπου τα αέρια ρεύματα είναι πιο δυνατά και πιο στρωτά.

Επίσης όπως καθίσταται πλέον προφανές, μέσα από την ανάλυση της διπλωματικής, ούτε τα ripe organs, ούτε και τα απλοϊκά αιολικά φλάουτα χαρταετών ή περιστεριών αρκούνται μόνο σε ένα μέλος, όταν επιζητούμε μεγάλη ένταση εκπομπής. Έχουμε δει ότι για να αυξήσουμε την ένταση



Εικόνα 2.3

Συμπεριφορά του ανέμου σε πλαγιές.

ενός φθόγγου, θα πρέπει να προσθέσουμε σε αυτόν την ηχητική εκπομπή ενός ίδιου φθόγγου ή ακόμα καλύτερα των αρμονικών του. Λόγω των εξαιρετικά πολλών αυλών που απαρτίζουν τα stops (Κεφ. 4, Μέρος II), ένα pipe organ έχει τόσο επιβλητικό και δυνατό ήχο.

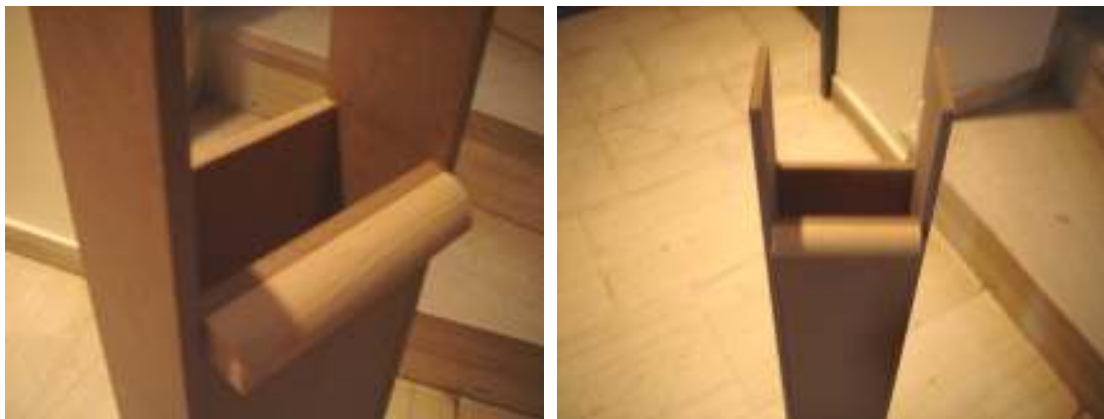
Μπορεί να μοιάζει ουτοπιστικό, αλλά είναι συνάμα ελκυστικό το εγχείρημα της κατασκευής ενός αιολικού οργάνου αυλών σαν αυτό του σχήματος 2.4. Σε έναν μεγάλο πεζόδρομο, σε ανοικτό χώρο μίας πόλης, όπως στο επάνω μέρος της βυθισμένης Αττικής οδού, στο ύψος των Βριλησίων, μπορεί να τοποθετηθεί ένας τρούλος και πάνω του εκατοντάδες αυλοί, στραμμένοι σε πολλές διαφορετικές κατευθύνσεις του ανέμου. Με αφετηρία το σχήμα 2.4, μπορούμε να πούμε τα εξής:

- * Ο τρούλος πρώτα απ' όλα στηρίζει όλο το συγκρότημα των αυλών, των οποίων τα παθητικά άκρα διαπερνούν το κέλυφός του κατά ένα μικρό ποσοστό του μήκους τους.
- * Οι ακροατές μπορούν να διέρχονται μέσα απ' τον τρούλο και να βρίσκονται ακριβώς κάτω από τα παθητικά άκρα των αυλών, δηλαδή στο πεδίο της ηχητικής τους ακτινοβολήσης.
- * Σύμφωνα με τη μηχανική των ρευστών [N], όταν το ρεύμα αέρα συναντήσει τον τρούλο, θα οδηγηθεί στην κορυφή του και η ταχύτητά του τοπικά θα αυξηθεί. Το γεγονός αυτό θα ενεργοποιήσει ευκολότερα τους αυλούς.
- * Η κοιλότητα που σχηματίζεται στο εσωτερικό μέρος του τρούλου λειτουργεί ως αντηχείο και συντονιστής πολλών συχνοτήτων, ώστε να ενισχύει τα παραγόμενα ηχητικά κύματα.
- * Εξάλλου, ο τρούλος απομονώνει κάποιους από τους θορύβους τόσο του περιβάλλοντος όσο και της επίδρασης του ανέμου με τους αυλούς.

2.2 Κατασκευή ορθογώνιου εγκάρσιου αυλού

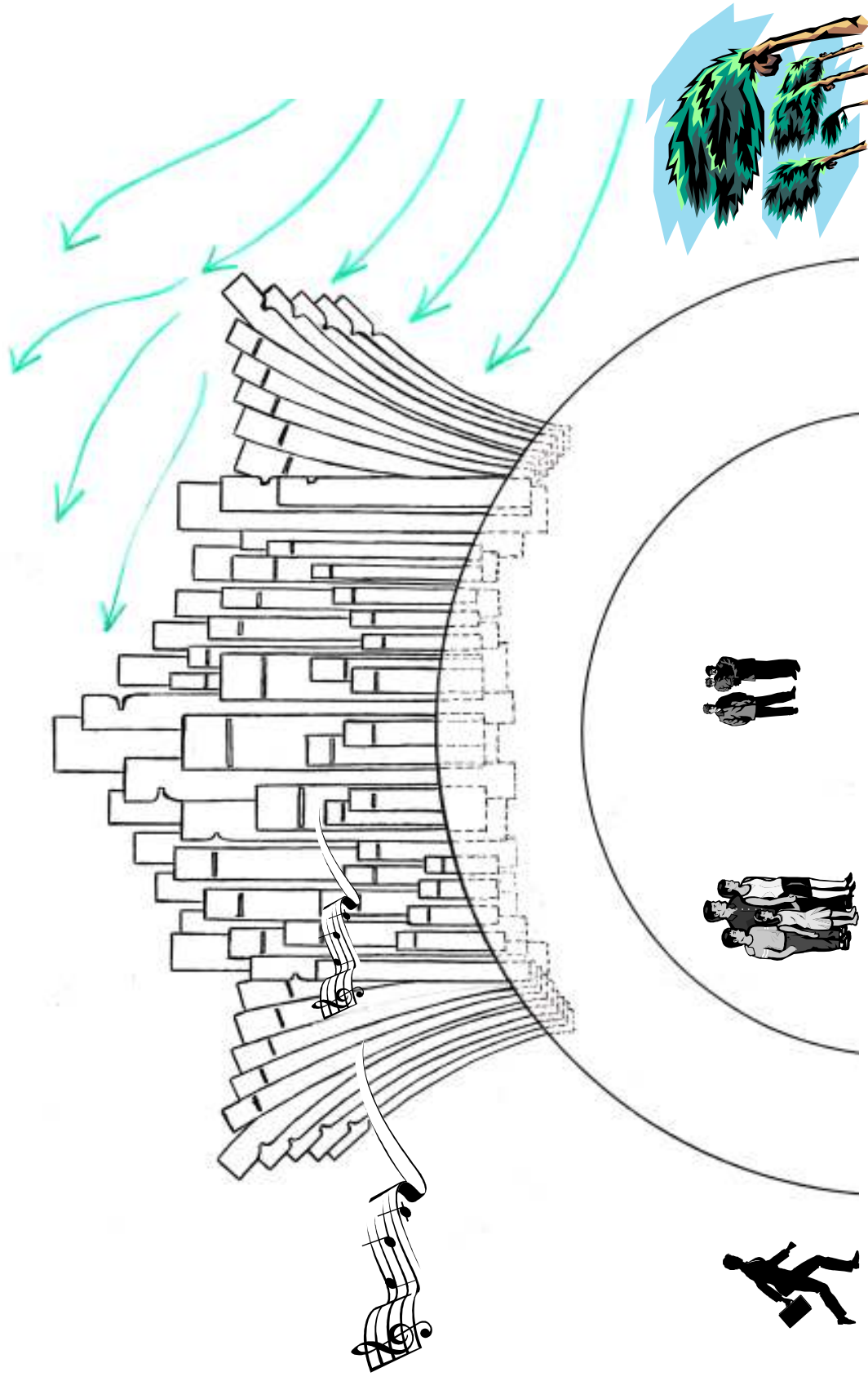
Στο προηγούμενο κεφάλαιο εκτελέστηκε μία σειρά μετρήσεων σε εγκάρσιο αυλό με διατομή συντονιστή 19 mm x 23 mm και πλάτος στόματος ίδιο με τη μικρότερη πλευρά, δηλ. 19 mm. Πλέον ξέρουμε με ασφάλεια ότι αυξάνοντας τη διατομή αυξάνουμε την παραγόμενη ένταση [28,32]. Για έναν αυλό που εκτίθεται στον άνεμο είναι επιθυμητό να αυξηθεί η ένταση για τη μικρότερη δυνατή πίεση πνοής, δηλαδή ταχύτητα αέρα. Επίσης είδαμε ότι οι μπάσοι αυλοί ηχούν καλύτερα και ένας λόγος είναι πιθανόν το αυξημένο μέτωπο τους στον αέρα. Με άλλα λόγια μεγαλύτερη παροχή εισέρχεται από σχισμή μεγαλύτερου πλάτους και πάχους.

Αυτή τη φορά μπορούμε να προχωρήσουμε ένα βήμα παραπέρα και να κατασκευάσουμε έναν ορθογώνιο εγκάρσιο αυλό στον οποίο το στόμα θα αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πλευρά του. Μάλιστα διαλέγουμε το σχέδιο του αυλού C4 και διπλασιάζουμε τη διατομή του. Τώρα ο αυλός θα έχει πλευρές 5,3 cm και 10,6 cm. Και ίδιο μήκος συντονιστή. Το στόμα θα έχει πλάτος 10,6 cm (ίδιο με το πλάτος της flue σχισμής). Επίσης προσθέτουμε έναν συγκεντρωτή με μεγαλύτερη καμπυλότητα από αυτόν του αυλού C4. Το επάνω μέρος του συντονιστή φαίνεται στην εικόνα 2.4, προτού τοποθετηθούν τα υπόλοιπα στοιχεία.



Εικόνα 2.4

Το επάνω μέρος του συντονιστή του ορθογώνιου εγκάρσιου αυλού.



Σχήμα 2.4

Ένα pipe organ εκτεθημένο στον άνεμο. Μόνο με μεγάλο αριθμό αυλών θα μπορούσαμε να επιτύχουμε ένα επιβλητικό αποτέλεσμα στον ανοικτό χώρο, όπου η ηχητική διασπορά είναι μέγιστη. Η συνήχηση πολλών αυλών ταυτόχρονα θα έδινε πλούσιο και σφιγρό ήχο ιδίως αν γινόταν σε αρμονική σχέση, όπως στα συμβατικά pipe organs. Ο τρούλος θα υπηρέτούσε πολλαπλές λειτουργίες. Ως σκελετός στηρίξης, ως τεχνητή πλαγιά, όπου θα επιταχύνονταν οι άνεμοι, ως αντηχέιο και ως θωράκιση από τους εξωτερικούς θορύβους.

Στην εικόνα 2.5 αριστερά φαίνεται η τοποθέτηση του labium, το οποίο επιλέχθηκε να είναι αρκετά αιχμηρό, δηλ. 10° και δεξιά το επάνω μέρος του συγκεντρωτή πριν τοποθετηθεί για να σχηματίσει τη σχισμή.



Εικόνα 2.5

Αριστερά: Το labium τοποθετημένο πάνω στο συντονιστή. Δεξιά: Το επάνω μέρος του συγκεντρωτή πριν τοποθετηθεί.

Το επόμενο βήμα είναι η τοποθέτηση του επάνω μέρους του συγκεντρωτή και ο σχηματισμός της σχισμής. Στην εικόνα 2.6 αριστερά φαίνεται ο αυλός στην πλήρη του μορφή και δεξιά η σχισμή όπως φαίνεται από το πίσω μέρος του αυλού, χωρίς να έχει τοποθετηθεί το labium.



Εικόνα 2.6

Αριστερά: Ο ορθογώνιος εγκάρσιος αυλός πλήρως συναρμολογημένος. Δεξιά: Η flue σχισμή όπως φαίνεται απ' το πίσω μέρος του αυλού. Το labium δεν είναι τοποθετημένο.

Η μία πλευρά του συντονιστή, που περιλαμβάνει και το κάτω μέρος του συγκεντρωτή, αρχικά δεν κολλήθηκε με το υπόλοιπο σώμα ώστε να γίνουν κάποιες δοκιμές με μεταβλητή διατομή και έναν μεταβλητό λόγο πλάτους στόματος – σχισμής προς διατομή. Η αρχική συναρμολόγηση του αυλού φαίνεται στην εικόνα 2.7, όπου η διατομή ήταν 3 cm x 10,6 cm.

Δοκιμές

Ο αυλός δοκιμάστηκε στον περιβάλλον αέρα, όπως οι οκτώ αυλοί της ενότητας 2.1, αρχικά με διατομή 3 cm x 10,6 cm και διάφορες θέσεις του labium, με μεταβαλλόμενο πάχος σχισμής. Τα αποτελέσματα ήταν κάπως αναμενόμενα από τη θεωρία. Ο αυλός φαίνεται να δυσκολεύεται πολύ στο

να ενεργοποιηθεί με έναν τόσο μεγάλο λόγο πλάτους στόματος προς διατομή. Όταν ο αυλός καταφέρνει να παράγει ήχο, τότε η έντασή του είναι αρκετά χαμηλή. Ίσως τελικά να μην είναι ο λόγος πλάτους στόματος προς διατομή το πρόβλημα, όσο το ότι πρέπει να υπάρχει ένα ελάχιστο πάχος στη διατομή κάθε αυλού που να επιτρέπει στη δέσμη αέρα (μετά τη flue σχισμή) να ταλαντωθεί ελεύθερα.

Δοκιμάζοντας τον αυλό με την τελική του γεωμετρία (εικόνα 2.6, αριστερά), τα αποτελέσματα είναι πολύ ενθαρρυντικά. Για να πετύχουμε την ίδια ένταση ήχου με τον αντίστοιχο τετραγωνικό αυλό C4 τοποθετούμε το labium σε μικρότερη απόσταση από τη flue σχισμή. Τούτο αυτομάτως μεταφράζεται σε χαμηλότερη ταχύτητα ανέμου. Άρα ο αυλός μπορεί να ηχεί σε μεγαλύτερο εύρος Beaufort. Στην προκειμένη περίπτωση, με ριπές ανέμου σε μία κατάσταση 4 Beaufort η συμπεριφορά ήταν καλή. Εκτός αυτού, η μεγαλύτερη παροχή αέρα, που εισέρχεται εντός του οργάνου φαίνεται να λειτουργεί θετικά. Όταν η ένταση του ανέμου αυξάνεται, έχοντας σταθερή την απόσταση W , συμβαίνουν ασθενή overblowing. Αν όμως η απόσταση W αυξηθεί καθώς αυξάνεται και η ένταση του ανέμου, ο παραγόμενος ήχος έχει ένα πολύ καλό επίπεδο έντασης.

Σύμφωνα με το κεφ. 7, του μέρους I, ο ορθογώνιος εγκάρσιος αυλός εμφανίζει συμπεριφορά κυματοδηγού. Με χρήση των σχέσεων (7.37) μπορούμε να βρούμε τις ιδιοσυχνότητες των τρόπων που αντιστοιχούν στη μεγάλη πλευρά της ορθογώνιας διατομής:

$$f = \frac{nc}{2l} = \frac{n342}{2 \cdot 0,106} \Rightarrow f = n1613 \text{ Hz}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Όπως αναλύθηκε στο κεφ. 4 του II μέρους, ο θόρυβος λόγω στροβιλότητας της ροής της δέσμης, το edge tone φαινόμενο (κεφ. 5, μέρος II) και άλλες συνιστώσες ενεργοποιούν τους εγκάρσιους τρόπους στον ακουστικό σωλήνα (συντονιστή) του αυλού. Ο αυλός C4 αντιστοιχεί σε θεμελιώδη συχνότητα 261,626 Hz και η θεμελιώδης συχνότητα των εγκάρσιων τρόπων θα βρίσκεται κοντά στον 6^ο διαμήκη τρόπο του ακουστικού σωλήνα, αφού: $1613/261,626=6,17$. Τούτο σημαίνει ότι στο φάσμα συχνοτήτων η 6^η αρμονική θα φαίνεται ενισχυμένη. Αλλά και ανάμεσα στις υψηλότερες αρμονικές θα εμφανίζονται εμβόλιμες κορυφές εξαιτίας των εγκάρσιων τρόπων. Αυτό ενδεχομένως να βλάπτει το ηχόχρωμα. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν παρατηρήθηκε άμεσα κατά τη δοκιμή του αυλού στον άνεμο. Η διατομή του συντονιστή μπορεί να αυξηθεί περισσότερο, αυξάνοντας το πλάτος των μεγάλων πλευρών (10,6 cm). Έτσι το μέτωπο του αυλού προς τον άνεμο θα αυξηθεί, αλλά συνάμα και η παραγόμενη ένταση. Όσο δοκιμάζουμε κάτι τέτοιο, πρέπει συνεχώς να ελέγχουμε την ποιότητα του ήχου λόγω του συντονισμού των εγκάρσιων τρόπων, όπως αναλύθηκε που «λερώνουν» το φάσμα συχνοτήτων.

2.3 Simulation

Η εγκάρσια γεωμετρία απαιτεί την τροποποίηση της θεωρίας που παρουσιάστηκε στο κεφ. 4 του Μέρους II, ώστε να συμπεριληφθεί η αλλαγή κατεύθυνσης της δέσμης ως προς τον άξονα του συντονιστή, που εν τέλει επηρεάζει τον τρόπο που επιδρά το ακουστικό πεδίο πάνω στη δέσμη και αντίστροφα. Για τις συνοπτικές διαδικασίες που ακολουθούμε στο κεφάλαιο αυτό, μπορούμε να δεχθούμε την επίδραση του ακουστικού πεδίου στον εγκάρσιο αυλό ίδια με του οριζώντιου και να χρησιμοποιήσουμε για άλλη μία φορά το τροποποιημένο μοντέλο του Fletcher (ενότητα 2.9, Μέρος III) για μία πρώτη εκτίμηση της συμπεριφοράς του αυλού C4, με τις διαστάσεις που δίνονται στον πίνακα 2.1. Με τον κώδικα της ενότητας 4.11 του Μέρους II, βρίσκουμε για τις τρεις πρώτες γωνιακές συχνότητες: 1422 rad/s, 2872 rad/s και 4359 rad/s. Επιλέγουμε μικρή απόσταση $W=10$ mm.

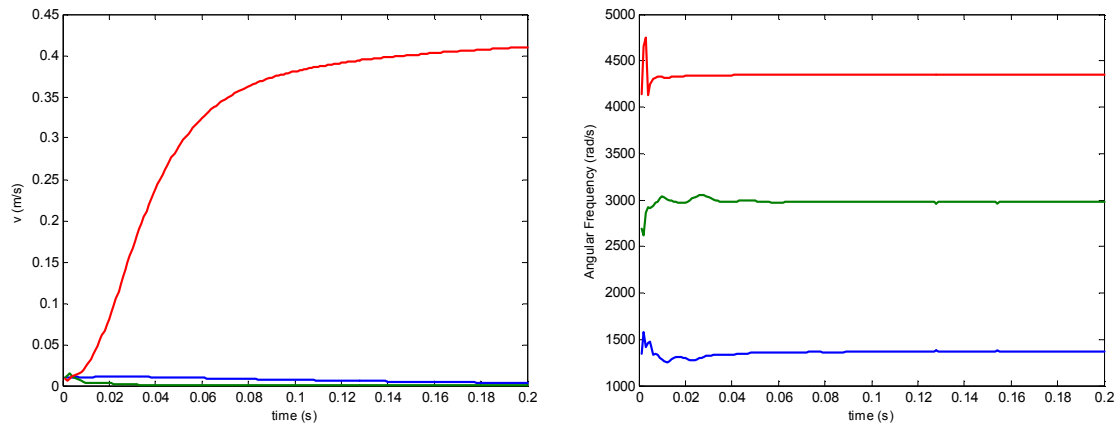


Εικόνα 2.7

Γεωμετρία αυλού με μεγάλο λόγο πλάτους στόματος-σχισμής προς διατομή 3 cm x 10,6 cm.

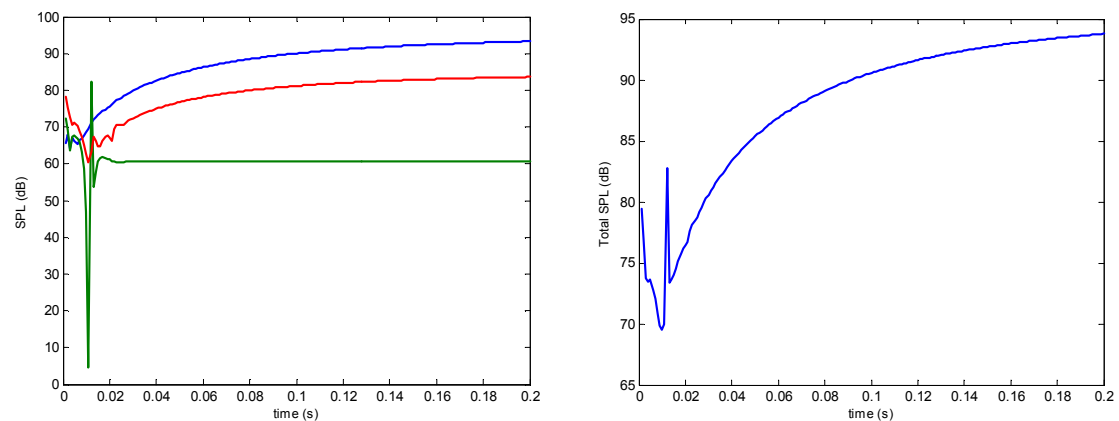
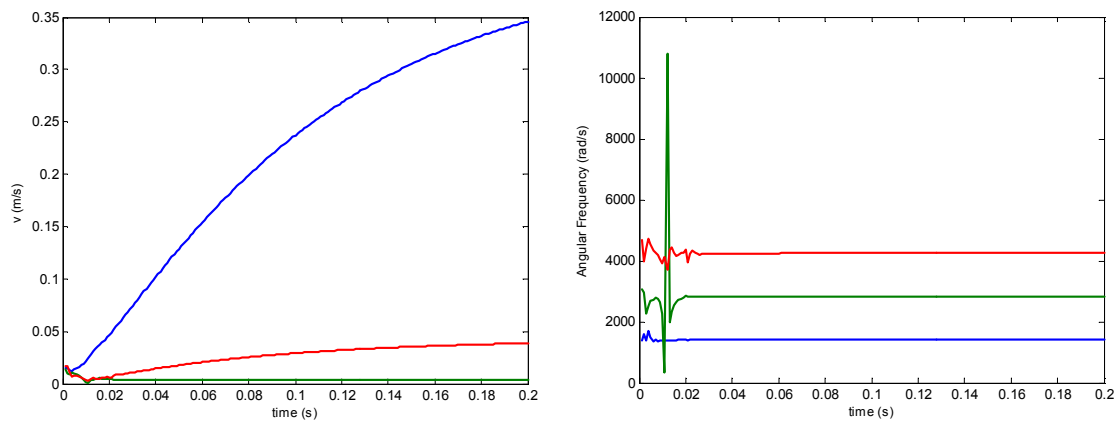
Υπολογίζουμε την απόκριση του αυλού για μικρές ταχύτητες ανέμου. Ανατρέχοντας στον πίνακα 7.1 του Μέρους II, βρίσκουμε τις αντιστοιχίες σε Beaufort [1].

Ταχύτητα 7 m/s



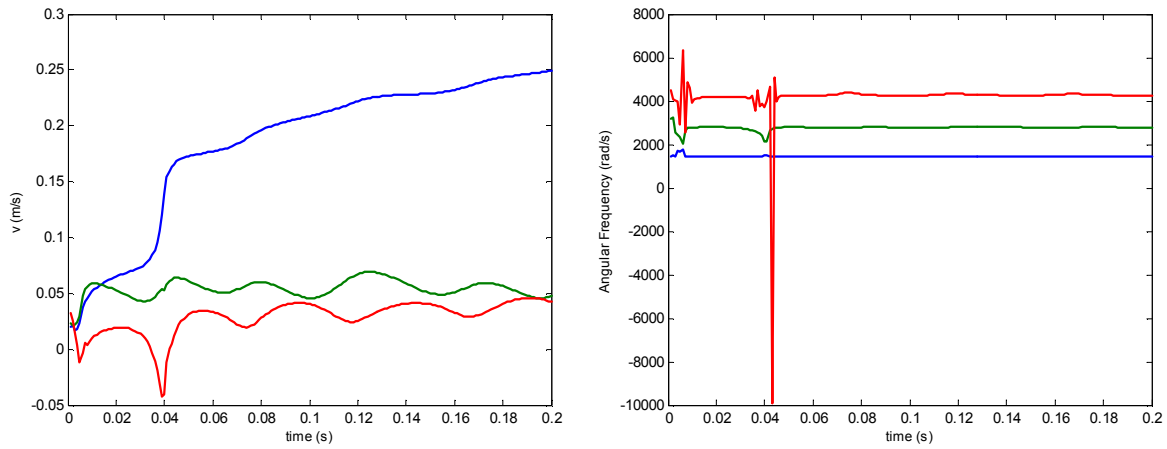
Στη μικρή αυτή ταχύτητα ο αυλός εμφανίζει έναν πολύ ισχυρό τρίτο τρόπο συντονισμού, που γρήγορα θα υποχωρήσει, όπως έχει παρατηρηθεί και πειραματικά [32].

Ταχύτητα 11 m/s



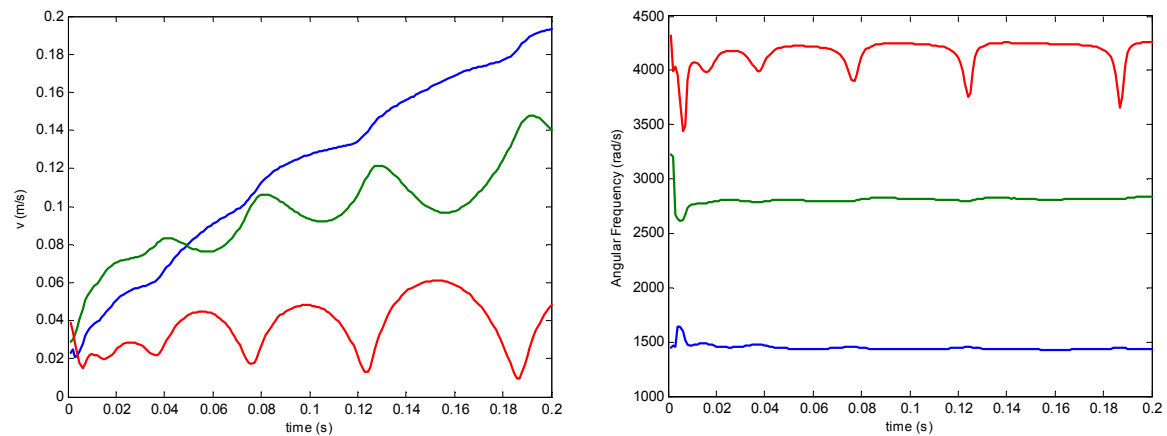
Για μία ταχύτητα της τάξεως των 6 Beaufort ο αυλός φαίνεται να ηχεί καλά στη θεμελιώδη του συχνότητα.

Ταχύτητα 15 m/s

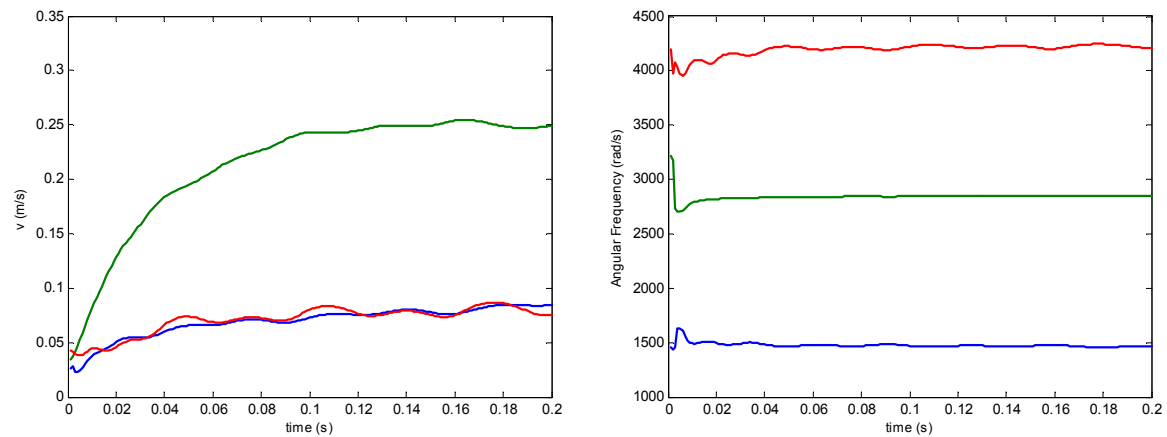


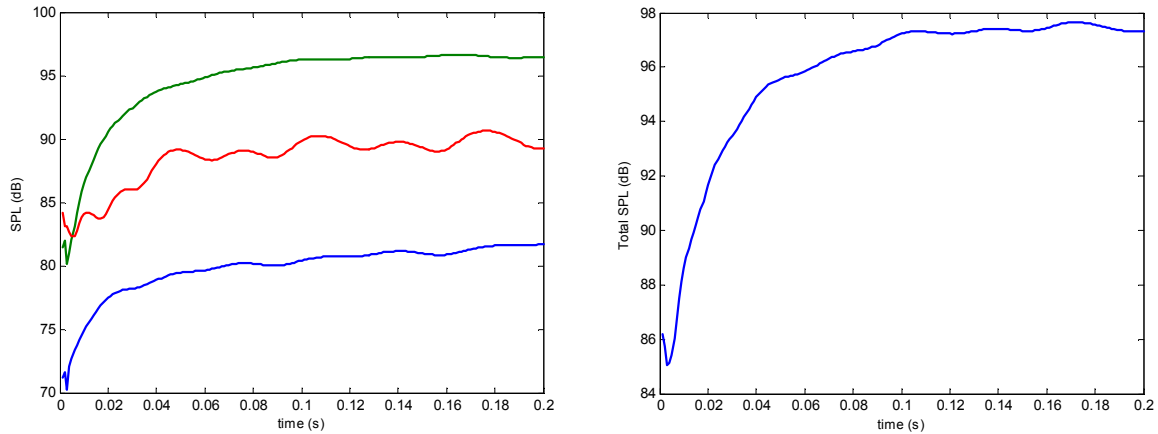
Στα 7 Beaufort εμφανίζεται η αστάθεια της μετάβασης από την πρώτη κατάσταση στη δεύτερη.

Ταχύτητα 18 m/s



Ταχύτητα 20 m/s



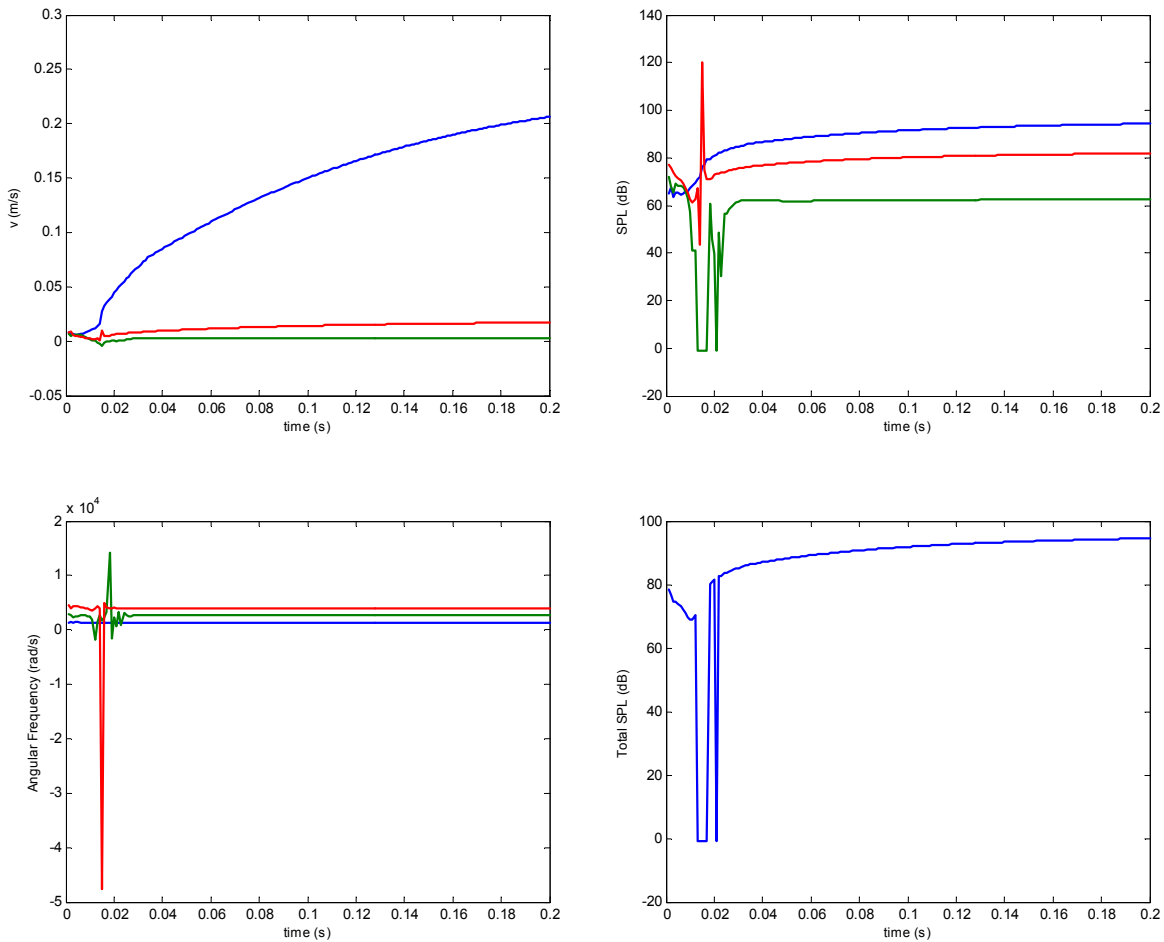


Στα 9 Beaufort, όπου ο άνεμος είναι πολύ ισχυρός και προσβάλλει ελαφρές κατασκευές [1], ο αυλός έχει μεταβεί σε κατάσταση overblowing ηχώνας στο φθόγγο C5 (μία οκτάβα ψηλότερα).

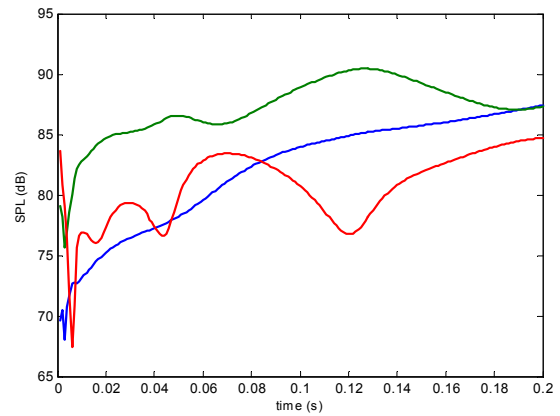
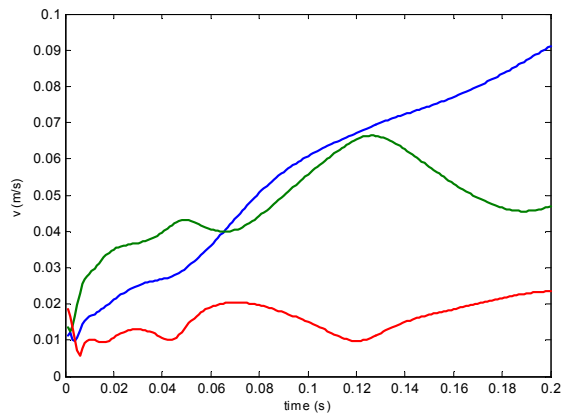
Ο υπολογισμός αυτός είναι ενδεικτικός. Πολλές παραλλαγές διαστάσεων μπορούν να εισαχθούν για τον ίδιο αυλό, όπως και παραλλαγές στη μεταβολή ης πίεσης.

Για τον ορθογώνιο αυλό ο συντονιστής θα έχει ελαφρά χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες καθώς αυξάνεται η διατομή και μεγαλώνει η διόρθωση μήκους. Με τον κώδικα της 4.11 (Μέρος II) παίρνουμε: 1334 rad/s, 2734 rad/s και 4198 rad/s. Εκτελούμε τους υπολογισμούς για τις ίδιες ταχύτητες ανέμου.

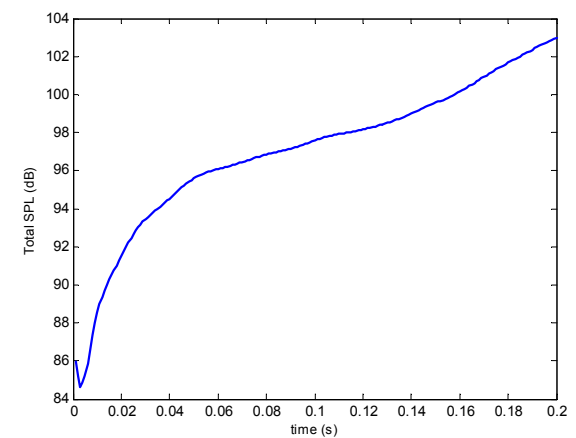
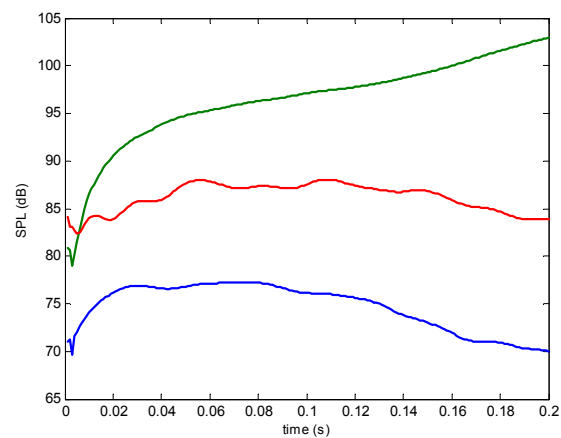
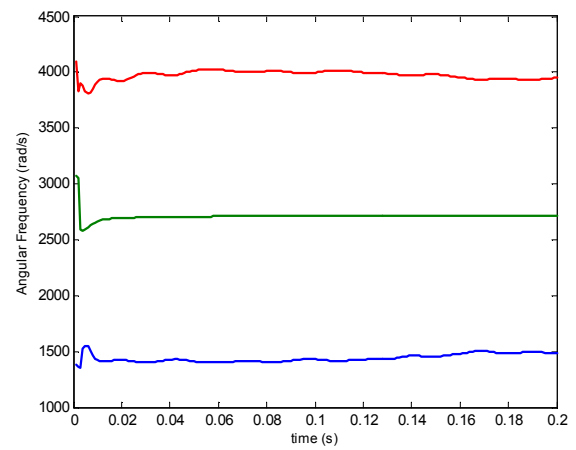
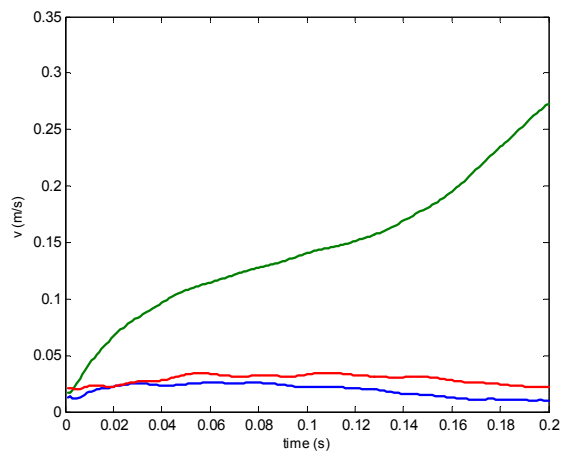
Ταχύτητα 11 m/s



Ταχύτητα 18 m/s



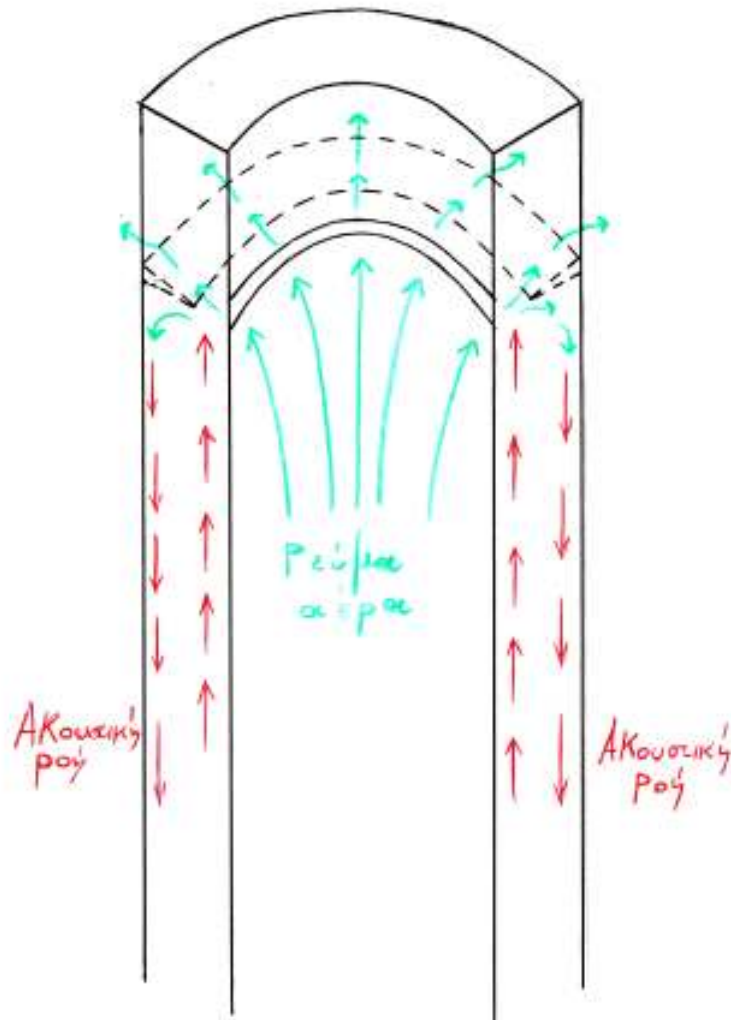
Ταχύτητα 20 m/s



2.4 Κοίλος εγκάρσιος αυλός

Προχωρώντας ακόμη ένα βήμα. Ο ορθογώνιος αυλός της προηγούμενης ενότητας θα μπορούσε να είχε κοίλες τις μεγάλες του πλευρές, ώστε να λάμβανε τη μορφή του σχήματος 2.5. Τα τόξα των μεγάλων τμημάτων θα ήταν πολύ μεγαλύτερα από τα πλάτη των πλευρών του ορθογώνιου αυλού, με

αποτέλεσμα η διατομή του συντονιστή να ήταν πολύ μεγαλύτερη, αλλά σε ένα πιο αισθητικό αποτέλεσμα. Η κοιλότητα που θα δημιουργείτο θα εγκλωβίζε το ρεύμα αέρα, αυξάνοντας τοπικά την πίεση προ του συγκεντρωτή και προ της flue σχισμής. Η κυρτότητα των κοίλων επιφανειών και άρα της διατομής θα έπρεπε να είναι μικρού βαθμού, ώστε να μην σχηματίζεται στα άκρα της σχισμής μεγάλη γωνία μεταξύ του μετώπου τους και της κατεύθυνσης του ανέμου.



Σχήμα 2.5

Κοίλος εγκάρσιος αυλός. Οι μεγάλες πλευρές του ορθογώνιου εγκάρσιου αυλού αντικαταστάθηκαν με κοίλα τμήματα.

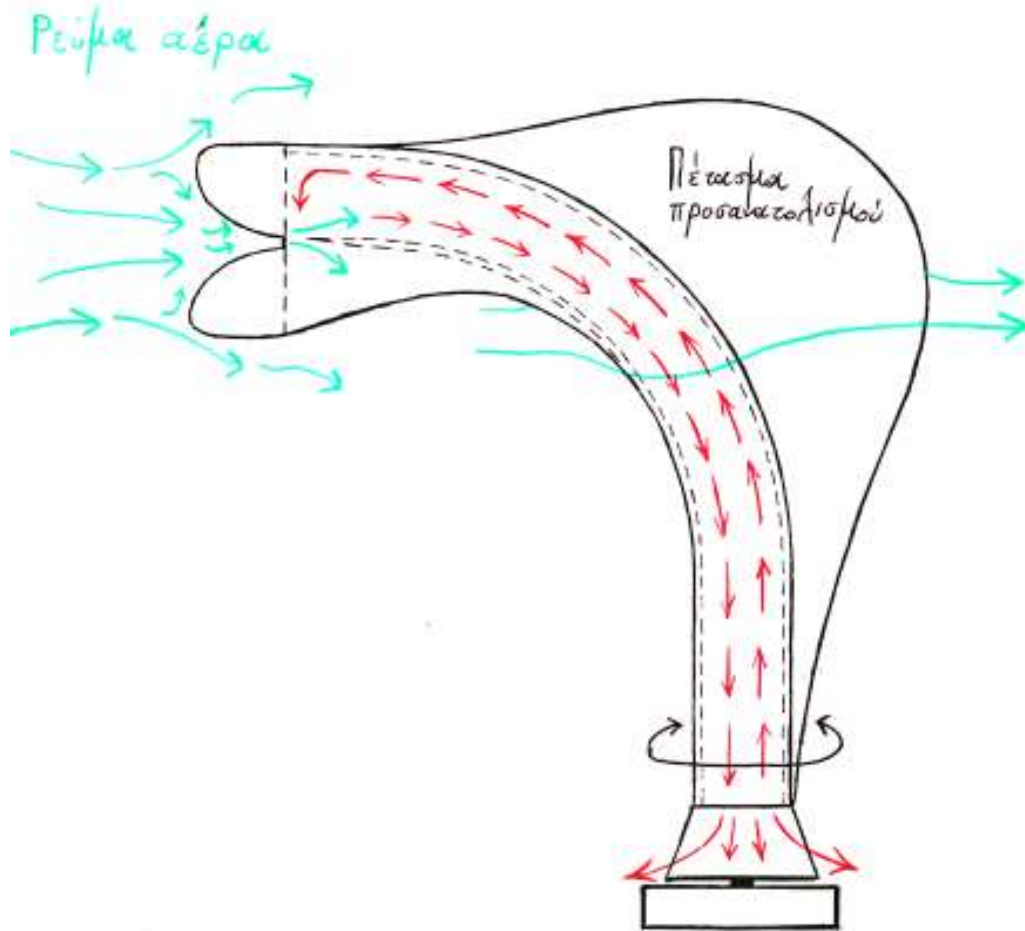
2.5 Συζήτηση και περαιτέρω εργασία

Όπως ήταν αναμενόμενο, το θέμα της κατασκευής ενός μουσικού πνευστού οργάνου, που θα διεγείρεται από τη στοχαστική συμπεριφορά του ανέμου, δεν μπόρεσε να εξαντληθεί στα πλαίσια μίας διπλωματικής, που θίγει τα βασικά μόνο ζητήματα. Ωστόσο, τα βήματα είναι πολύ σημαντικά πάνω απ' όλα ως προς τη γνώση που αποκτήθηκε σχετικά με τη λειτουργία των air-jet πνευστών, αλλά και γενικότερα των μουσικών οργάνων. Ύστερα και από τα πειράματα και τις δοκιμές μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής:

* Κάποιος θα μπορούσε να μετατρέψει το πόδι ενός οριζόντιου αυλού σε συγκεντρωτή αέρα και να εκθέσει το όργανο παράλληλα με την κατεύθυνση του ανέμου. Τότε όμως το παθητικό άκρο θα έπρεπε να είχε τη μορφή του σχήματος 2.6, αν θέλαμε η ηχητική του ακτινοβολία να στρέφεται προς τα κάτω και όχι παράλληλα με το έδαφος. Το πλεονέκτημα σε μία τέτοια περίπτωση είναι ότι θα κερδί-

ζαμε επιπλέον την ακτινοβολήση από το στόμα, αν το άνοιγμά του ήταν προς τα κάτω. Το σύστημα θα μπορούσε να περιστρέφεται με τη βοήθεια πετάσματος – πτερυγίου προσανατολισμού.

* Πειραματικές μετρήσεις μπορούν να γίνουν με ορθογώνιους εγκάρσιους αυλούς μεταβλητής διατομής, τόσο ως προς το μέγεθος, όσο και ως προς τη μορφή (σχήμα 2.5). Η διατομή μπορεί να είναι επίσης και τριγωνική, αλλά ποτέ κυκλική.



Σχήμα 2.6

Οριζόντιος αυλός στραμμένος κατά τη φορά του ανέμου για παραγωγή ήχου, του οποίου η ακτινοβολήση γίνεται τόσο από το παθητικό άκρο, όσο και απ' το στόμα. Ο αυλός θα μπορούσε να διαθέτει έβρασμα (πτερύγιο) προσανατολισμού.

- * Μία πιο αναλυτική εργασία θα περιλάμβανε ακριβή υπολογιστικά μοντέλα όλων αυτών των σχημάτων, ώστε να μελετηθεί η συμπεριφορά τους.
- * Ανεμολογικά δεδομένα [I] θα ήταν απαραίτητο να συλλεχθούν αν επρόκειτο να εγκατασταθεί ένα συγκρότημα αυλών σε μία συγκεκριμένη τοποθεσία.
- * Τμήματα όπως το labium, ή η flue exit θα μπορούσαν να είναι κινητά από αυτοματοποιημένο σύστημα ώστε να χαλιναγωγούν όσο πιο αποδοτικά γίνεται την πνοή του ανέμου, αυξομειώνοντας την ένταση όποτε είναι επιθυμητό, μεταβαίνοντας κατά βούληση σε overblowing, εμπλουτίζοντας αρμονικά τον ήχο κ.α.
- * Εφαρμογή των αρχών της *συνδυαστικής ανάλυσης* και χρήση φίλτρων που αποκλείουν μη αποδεκτούς από τη μουσική αρμονία συνδυασμούς, θα διευκόλυναν το σχεδιασμό διατάξεων πολύπλοκων συγκροτημάτων αυλών .

Βιβλιογραφική αναφορά

Το βιβλιογραφικό υλικό έχει ταξινομηθεί αλφαβητικά σύμφωνα με το επώνυμο του (κύριου) συγγραφέα και χρονολογικά για υλικό του ίδιου συγγραφέα.

Βιβλία – Πραγματείες

Ελληνόγλωσσα

- [A] Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, «Αριθμητική ανάλυση για μηχανικούς», Εκδόσεις ΕΜΠ, 2^η έκδοση (Αθήνα 2002).
- [B] Α. Καλαμπάκας, «Σκέψεις για τη μουσική», Εκδόσεις Φοίβος (Αθήνα 1992).
- [C] Μ. Καλομοίρης, «Τα θεωρητικά της μουσικής, τεύχος πρώτο, στοιχειώδης θεωρία», Μουσικός και εκδοτικός οίκος ΓΑΪΤΑΝΟΥ, (Αθήνα 1991), (1^η έκδοση 1924).
- [D] Μ. Καλομοίρη, «Αρμονία», Εκδόσεις «ΓΑΪΤΑΝΟΥ» ΚΟΚΟΝΕΤΣΗ, 2^η έκδοση (Αθήνα 1993), (1^η έκδοση 1933).
- [E] Χ. Κουρής, «Αρμονία», Εκδοτικός οίκος Η Ευρώπη, 5^η έκδοση (Αθήνα 1995), (1^η έκδοση: Αθήνα 1987).
- [F] Ν. Ι. Κρικέλης, «Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο», Εκδόσεις Συμμετρία, 3^η έκδοση (Αθήνα 2000), (1^η έκδοση: Αθήνα 1980).
- [G] Γ. Μπεργελές, «Υπολογιστική ρευστομηχανική», Εκδόσεις Συμεών, 2^η έκδοση (Αθήνα 2000), (1^η έκδοση: Αθήνα 1993).
- [H] Γ. Μπεργελές, «Πηγές, διασπορά και έλεγχος ατμοσφαιρικής ρύπανσης», Εκδόσεις ΕΜΠ (Αθήνα 2003).
- [I] Γ. Μπεργελές, «Ανεμοκινητήρες», Εκδόσεις Συμεών, 2^η έκδοση (Αθήνα 2005), (1^η έκδοση: Αθήνα 1995).
- [J] Ε. Παπαδόπουλος, «Εισαγωγή στα ηλεκτρικά κυκλώματα και συστήματα», Εκδόσεις ΕΜΠ (Αθήνα 2000).
- [K] Χ. Π. Παρνάσας, «Το υδραυλικόν όργανον του Κτησίβιου», Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχ. Μηχ. ΕΜΠ (Αθήνα 2003).
- [L] Χ. Σπυρίδης, «Μουσική ακουστική», Σ. & Μ. Γιαχούδης – Σ. Γιαπούλης Ο. Ε. (Αθήνα 2000).
- [M] Ν. Σταυρακάκης, «Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις», Παπασωτηρίου (Αθήνα 1997).
- [N] Σ. Τσαγγάρης, «Μηχανική των ρευστών», Εκδόσεις Συμεών (Αθήνα 1995).
- [O] Κ. Ψυχαλινός, «Εισαγωγή στα ηλεκτρονικά φίλτρα», Παραδόσεις μαθήματος του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών, εργαστήριο ηλεκτρονικής (Πάτρα 2005).

Ξενόγλωσσα

- [P] P. G. Andersen, “Organ building and design”, translated by J. Curnutt, George Allen and Unwin (London 1969).
- [Q] J. Backus, “The Acoustical Foundations of Music”, Norton (New York 1969).
- [R] A. H. Benade, “Fundamentals of Musical Acoustics”, Oxford University Press (New York 1976).
- [S] D. Blackstock, “Fundamentals of physical acoustics”, John Wiley & Sons, Inc. (Texas 2000).
- [T] T. Boehm, “The flute and flute playing”, translated D. C. Miller (reprinted 1964, New York: Dover).
- [U] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, “Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations”, Hindustan Publication Corporation (India), Delhi, and Gordon and Breach (New York 1961).
- [V] A. Carse, “Musical Wind Instruments”, Macmillan, London 1939 and Da Capo, New York 1965.
- [W] I. B. Crandall, “Theory of Vibrating Systems and Sound”, Van Nostrand (New York 1927).
- [X] L. Cremer, M. Heckl, E. E. Ungar, “Structure-borne sound”, 2nd English edition, Springer-Verlag (Heidelberg 1988).
- [Y] N. S. Dougherty, B. L. Liu, J. M. O’Farrell, “Numerical simulation of the edge tone phenomenon”, prepared for George C. Marshall space flight center under contract NAS8-38550 (1994).
- [Z] J. M. Eargle, “Music, Sound and Technology”, Van Nostrand (New York 1990).
- [AA] F. Alton Everest, “The Master Handbook of Acoustics”, 3rd edition, TAB Books (United states of america 1994).
- [BB] F. Fahy, “Engineering Acoustics”, 2nd edition, Academic Press (London 2003). (1st edition: 2001).
- [CC] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, “The physics of musical instruments”, Springer-Verlag (New York 1991).
- [DD] C. Gasquet and P. Witomski, “Fourier Analysis and Applications”, Translated by R. Ryan, Springer (Paris 1998).
- [EE] C. Headington, “Ιστορία της δυτικής μουσικής”, τόμοι I & II, έκδοση στα ελληνικά, Εκδόσεις Gutenberg (Αθήνα 1990).
- [FF] F. V. Hunt, “Origins in Acoustics”, New Haven, CT: Yale University Press. Reprinted 1992, Woodbury, NY: Acoustical Society of America. (1st edition 1978).
- [GG] D. W. Jordan & P. Smith, “Nonlinear ordinary differential equations”, 7th edition, Oxford University Press (New York 2006). (1st edition: 1977).
- [HH] E. L. Kent, “Musical Acoustics: Piano and Wind instruments”, Dowden, Hutchinson & Ross. (Stroudsburg 1977).
- [II] G. Lindfield and J. Penny, “Numerical Methods Using MATLAB”, Ellis Horwood (Great Britain 1995).

- [JJ] R. B. Lindsay, “Acoustics: Historical and Philosophical Development”, Stroudsburg, PA: Dowden, Hutchinson and Ross, 1972.
- [KK] C. Mahrenholz, “The calculation of organ pipe scales”, Positif Press (Oxford 1975).
- [LL] J. H. McClellan, R. W. Schafer, M. A. Yoder, “DSD FIRST, a multimedia approach”, Matlab curriculum series, Prentice hall (United States of America 1999).
- [MM] J. Meyer, “Acoustics and the Performance of Music”, Verlag Das Musikinstrument (Stroudsburg 1978).
- [NN] R. E. Mickens, “An Introduction to Nonlinear Oscillations”, Cambridge University Press (Cambridge 1981).
- [OO] N. Minorsky, “Non-linear oscillations”, Van Nostrand (Princeton 1962).
- [PP] P. M. Morse, “Vibration and sound”, 5th edition, Acoustical society of America, American Institute of Physics (1995). (1st edition: 1936).
- [QQ] P. M. Morse & K. U. Ingard, “Theoretical Acoustics” McGraw Hill (New York: 1968).
- [RR] C. J. Nederveen, “Acoustical aspects of woodwind instruments”, 2nd edition, Northern Illinois University press (1998). (1st edition: 1969).
- [SS] A. D. Pierce, “Acoustics: an Introduction to its Physical Principles and Applications”, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1981. Also available from the Acoustical Society of America.
- [TT] D. R. Raichel, “The science and applications of acoustics”, Springer-Verlag (New York 2000).
- [UU] Lord Rayleigh, “The theory of sound”, vol. 2, pp. 376-414 (1894).
- [VV] Lord Rayleigh, “Scientific papers”, vol. 1, Dover, pp. 360-371 (New York 1894).
- [WW] T. D. Rossing, “The Science of sound”, Addison Wesley (New York 1990).
- [XX] V. Rioux, “Sound Quality of Flue Organ Pipes, An Interdisciplinary Study on the Art of Voicing”, Department of Applied Acoustics, Chalmers University of Technology, Goteborg (Sweden 2001).
- [YY] W. A. Sethares, “Tuning, Timbre, Spectrum, Scale”, Springer (London 1998).
- [ZZ] P. Skordos, “Modeling flue pipes: Subsonic flow Lattice Boltzmann and parallel distributed computers”, Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, MIT, Cambridge, MA (1995).
- [AAA] E. Skudrzyk, “The foundations of acoustics, basic mathematics and basic acoustics”, Springer-Verlag (New York 1971).
- [BBB] I. S. Sokolnikoff and R. M. Redheffer, “Μαθηματικά για φυσικούς και μηχανικούς”, Μετάφραση: Θ. Γραμμένος και Α. Σπανού, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π. (Αθήνα 2001).
- [CCC] W. J. Strong and G. R. Plitnik, “Music, Speech and High Fidelity”, Soundprint (Salt Lake City 1983).
- [DDD] J. Sundberg, “The significance of the scaling in open flue pipes”, Studia musicologica, Upsaliensia, N. S. 3. University of Uppsala, Uppsala 1966.

- [EEE] M. P. Verge, “Aeroacoustics of confined jets, with applications to the physical modeling of recorder-like instruments”, Ph. D. Thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands (1995).
- [FFF] F. Verhulst, “Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems”, Springer-Verlag, Third edition (Berlin Heidelberg 1990). First edition: 1985.
- [GGG] J. Woodhouse, “Self-sustained musical oscillators, Dynamics of Musical Instruments” edited by A. Hirschberg, J. Kergomard and G. Weinreich, Springer (New York 1995), pp. 185-228.

Δημοσιευμένα άρθρα

Ξενόγλωσσα

- [1] A. B. C. Anderson, “Dependence of pfeifenton (pipe tone) frequency on pipe length, orifice diameter, and gas discharge pressure”, J. Acoust. Soc. Am. 24, 675-681 (1952).
- [2] A. B. C. Anderson, “A Circular-Orifice Number describing dependency of primary pfeifenton frequency on differential pressure, gas density, and orifice geometry”, J. Acoust. Soc. Amer. 25, 626-631 (1953).
- [3] A. B. C. Anderson, “Structure and Velocity of the periodic Vortex-Ring Flow Pattern of a primary pfeifenton (pipe tone) jet”, J. Acoust. Soc. Am. 27, 1048-1053 (1955).
- [4] S. Adachi, “Principles of sound production in wind instruments” Acoust. Sci. & Tech. 25, 400-405 (2004).
- [5] J. Angster and A. Miklos, “Transient sound spectra of a variable length organ pipe”, Int. Symp. on Musical Acoustics, Tokyo 1992, 159-162.
- [6] J. Angster and A. Miklos, “Sound radiation of open labial organ pipes and the effect of the size of the openings on the format structure”, Int. Symp. on Musical Acoustics (ISMA '98 Leavenworth), Acoust. Soc. Amer. and Catgut Ac. Soc. Leavenworth, Washington, 267-272 (1998).
- [7] J. Backus, “Input impedance curves for the reed woodwind instruments”, J. Acoust. Soc. Am 56, 1266-1279 (1974).
- [8] R. Bader, “Turbulent k - ϵ model of flute-like musical instrument sound production”, University of Hamburg, Institute of musicology.
- [9] A. H. Benade, “On woodwind instrument bores”, J. Acoust. Soc. Am. 31, 137-146 (1959).
- [10] A. H. Benade, “On the mathematical theory of woodwind finger holes”, J. Acoust. Soc. Am. 32, 1591-1608 (1960).
- [11] A. H. Benade & D. J. Gans, “Sound production in wind instruments”, Annals of the New York Academy of science 155, 247-263 (1968).
- [12] A. H. Benade, “On the propagation of sound waves in a cylindrical conduit”, J. Acoust. Soc. Am. 44, 616-623 (1968).
- [13] A. H. Benade, “On plane and spherical waves in horns with nonuniform flare”, Acustica 31, 80-98 (1974).

- [14] A. H. Benade, “The physics of brasses”, *Sci. Am.* 229 (1) 24-35 (1973), Reprinted in Kent (1977), 121–132.
- [15] W. G. Bickley, “The plane jet”, *Philos Mag.* 28, 727-731 (1937).
- [16] G. B. Brown, “On vortex motion in gaseous jets and the origin of their sensitivity to sound”, *Proc. Phys. Soc. London* 47, 703-732 (1935).
- [17] R. C. Chanaud, “Aerodynamic whistles”, *Scientific American*, 222 (1), 40-46 (1970).
- [18] J. W. Coltman, “Sounding mechanism of the flute and organ pipe”, *J. Acoust. Soc. Am.* 44, 983-992 (1968).
- [19] J. W. Coltman, “Jet drive mechanism in edge tones and organ pipes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 60, 725-733 (1976).
- [20] J. W. Coltman, “Momentum transfer in jet excitation of flutelike instruments”, *J. Acoust. Soc. Am.* 69, 1164-1168 (1981).
- [21] J. W. Coltman, “Time-domain simulation of the flute”, *J. Acoust. Soc. Am.* 92, 69-73 (1992).
- [22] J. W. Coltman, “Jet offset, harmonic content, and warble in the flute”, *J. Acoust. Soc. Am.* 120, 2312-2319 (2006).
- [23] L. Cremer and H. Ising, “Die selbsterregten Schwingungen von Orgelpfeifen”, *Acustica* 19, 143-153 (1967/68).
- [24] P. G. Drazin and L. Howard, “The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow”, *J. Fluid Mech.* 14, 257-284 (1962).
- [25] S. A. Elder, “On the mechanism of sound production in organ pipes”, *J. Acoust. Am.* 54, 1554-1564 (1973).
- [26] S. A. Elder, “Edgetones versus pipetones”, *J. Acoust. Am.* 64, 1721-1723 (1978).
- [27] B. Fabre, A. Hirschberg, and A. P. J. Wijnands, “Vortex shedding in steady oscillations of a flue organ pipe”, *Acustica* 82, 863-867 (1996).
- [28] N. H. Fletcher, “Nonlinear interactions in organ flue pipes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 56, 645-652 (1974).
- [29] N. H. Fletcher, “Acoustical correlates of flute performance technique”, *J. Acoust. Soc. Am.* 57, 233-237 (1974).
- [30] N. H. Fletcher, “jet-drive mechanism in organ pipes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 60, 481-483 (1976).
- [31] N. H. Fletcher, “Transients in the speech of organ flue pipes – a theoretical study”, *J. Acoust. Soc. Am.* 34, 224-233 (1976).
- [32] N. H. Fletcher, “Sound production by organ flue pipes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 60, 926-936 (1976).
- [33] N. H. Fletcher, “Scaling rules for organ flue pipe ranks”, *J. Acoust. Soc. Am.* 37, 131-138 (1977).
- [34] N. H. Fletcher, “Mode locking in nonlinearly excited inharmonic musical oscillators”, *J. Acoust. Soc. Am.* 64, 1566-1569 (1978).
- [35] N. H. Fletcher and S. Thwaites, “Wave propagation on a perturbed jet”, *Acustica* 42, 323-334 (1979).

- [36] N. H. Fletcher, “Air flow and sound generation in musical wind instruments”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 11, 123-146 (1979).
- [37] N. H. Fletcher, “Excitation in woodwind and brass instruments”, *J. Acoust. Soc. Am.* 43, 63-72 (1979).
- [38] N. H. Fletcher and L. M. Douglas, “Harmonic generation in organ pipes, recorders and flutes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 68, 767-771 (1980).
- [39] N. H. Fletcher, “Nonlinear theory of musical wind instruments”, *J. Applied Acoustics* 30, 85-115 (1990).
- [40] N. H. Fletcher, “Acoustic and aerodynamic determinants of the sound quality of flutes”, Meeting of Acoust. Soc. Am. June 6-10 1994.
- [41] N. H. Fletcher, “Woodwind instruments”, *Encyclopedia of acoustics*, edited by Malcom J. Crocker, 1635-1642, John Wiley & Sons, Inc. (1997).
- [42] N. H. Fletcher, “The nonlinear physics of musical instruments”, *Rep. Prog. Phys.* 62, 723-764 (1999).
- [43] N. H. Fletcher, “Materials for musical instruments”, *Acoustics Australia*, 27, 1-5 – 1-9 (1999).
- [44] N. H. Fletcher, “The Winds of music – Art and science”, Research School of Physical Sciences and Engineering, Australian National University (Canberra October 2000).
- [45] N. H. Fletcher, “Inharmonicity, nonlinearity and music”, *The physicist*, 37, 171-175 (2000).
- [46] N. H. Fletcher, “Stopped-pipe wind instruments: Acoustics of the panpipes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 117, 370-374 (2005).
- [47] R. J. Higgins, “Fast Fourier transform: An introduction with some minicomputer experiments”, *Amer. J. Phys.* 44, 766 (1976).
- [48] A. Hirschberg and S. W. Rienstra, “An introduction to aeroacoustics”, Eindhoven University of Technology (Version: 18-07-2004).
- [49] M. S. Howe, “The role of displacement thickness fluctuations in hydroacoustics, and the jet drive mechanism of the flue organ pipe”, *Proc. R. Soc. Lond. A.* 374, 543-568 (1981).
- [50] U. Ingard and H. Ising, “Acoustic nonlinearity of an orifice”, *J. Acoust. Soc. Am.* 42, 6-17 (1967).
- [51] E. L. Kent, “Musical acoustics: Piano and Wind instruments, Benchmark papers in acoustics”, Vol. 9, Stroudsburg, PA: Dowden, Hutchinson & Ross, 367 pp. (1977).
- [52] H. Kuhnelt, “Simulating the mechanisms of sound generation in flutes using the Lattice Boltzmann method”, Proceedings of the Stockholm music acoustics conference, August 6-9 2003, Stockholm, Sweden.
- [53] H. Levine and J. Schwinger, “On the radiation of sound from an unflanged pipe”, *Phys. Rev.* 7 383-496 (1948).
- [54] V. Lough, “On the beating tones of overblown organ pipes”, *Phil. Mag.* 143, 72 (1922).
- [55] G. E. Mattingly and W. O. Criminale, “Disturbance characteristics in a plane jet”. *Phys. Fluids* 14, 2258-2264 (1971).

- [56] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher and J. Woodhouse, "On the oscillations of musical instruments", *J. Acoust. Soc. Am.* 74, 1325-1345 (1983).
- [57] D. M. A. Mercer, "The voicing of organ flue pipes", *J. Acoust. Soc. Am.* 23, 45-54 (1950).
- [58] D. M. A. Mercer, "The physics of the organ flue pipe", *J. Acoust. Soc. Am.* , 376-386 (1952).
- [59] A. Miklos and J. Angster, "Properties of the Sound of Flue Organ Pipes", *Acustica-acta acustica* 86, 611-622 (2000).
- [60] A. W. Nolle, "Flue organ pipes: Adjustments affecting steady wave-form" *J. Acoust. Soc. Am.* 73, 1821-1832 (1983).
- [61] A. W. Nolle and T. L. Finch, "Starting transients of flue organ pipes in relation to pressure rise time", *J. Acoust. Soc. Am.* 91, 2190-2202 (1992).
- [62] A. W. Nolle, "Sinuous instability of a planar air jet: Propagation parameters and acoustic excitation", *J. Acoust. Soc. Am.* 103, 3690-3705 (1998).
- [63] G. Paal, J. Angster, W. Garen, A. Miklos, "A Combined LDA and flow-visualization study on flue organ pipes", Springer-Verlag, published online 10 May 2006.
- [64] C. Padgham, "The Scaling of the Timbre of the Pipe Organ", *Acustica* 60, 189-204 (1986).
- [65] M. Peters, "Aeroacoustic Sources in Internal Flows", PhDThesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands (1993).
- [66] M. C. A. M. Peters, A. Hirschberg, A. J. Reijnen, A. P. J. Wignands, "Damping and reflection coefficient measurements for an open pipe at low mach and low Helmholtz numbers", *J. Fluid Mech.* 256, 499-535 (1993).
- [67] J. D. Polack, X. Menial, J. Kergomard, C. Cosnard and M. Bruneau, "Reflection function of a plane wave in a cylindrical tube", *Rev. Phys. Appl.* 22, 331-337 (1987).
- [68] A. Powell, "On edge tones and associated phenomena", *Acustica* 3, 233-243 (1953).
- [69] A. Powell, "On the edgetone", *J. Acoust. Soc. Am.* 33, 395-409 (1961).
- [70] R. L. Pratt, S. J. Elliott, J. M. Bowsher, "The measurement of the acoustic impedance of brass instruments", *Acustica* 38, 236-246 (1977).
- [71] E. G. Richardson, "The Transient tones of wind instruments", *J. Acoust. Soc. Am.* 26, 960-962 (1954).
- [72] P. Savic, "On acoustically effective vortex motion in gaseous jets", *Philos mag.* 32, 245-252 (1941).
- [73] R. T. Schumacher, "Self-sustained Oscillations of Organ Flue Pipes: An Integral Equation Solution", *Acustica* 39, 225-238 (1978).
- [74] J. J. Servaas and M. F. Kokkelmans, "Acoustic behavior of chimney pipes", *J. Acoust. Soc. Am.* 105, 546-551 (1990).
- [75] O. H. Shuck and R. W. Young, "Observations on the vibrations of piano strings", *J. Acoust. Soc. Am.* 15, 1-11 (1943)
- [76] W. Strong and M. Clark, "Synthesis of Wind-Instrument Tones", *J. Acoust. Soc. Am.* 41, 39-52 (1967).

- [77] W. Strong and M. Clark, “Perturbations of Synthetic Orchestral Wind-Instrument Tones”, *J. Acoust. Soc. Am.* 41, 277-285 (1967).
- [78] S. Thwaites & N. H. Fletcher, “Wave propagation on turbulent jets”, *Acustica* 45, 175-179 (1980) & *Acustica* 51, 44-49 (1982).
- [79] V. Valimaki, J. Pakarinen, C. Erkut and M. Karjalainen, “Discrete-time modelling of musical instruments”. *Rep. Prog. Phys.* 69 1-78 (2006).
- [80] M. P. Verge, B. Fabre *et al.*, “Jet oscillations and jet drive in recorder-like instruments”, *Acta Acoustica* 2, 403-419 (1994).
- [81] M. P. Verge, B. Fabre *et al.*, “Jet formation and jet velocity fluctuations in a flue organ pipe”, *J. Acoust. Soc. Am.* 95(2), 1119-1132 (1994).
- [82] M. P. Verge and B. Fabre, A. Hirschberg, A. P. J. Wijnards, “Sound production in recorderlike instruments. I. Dimensionless amplitude of the internal acoustic field”, *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 2914-2924 (1997).
- [83] M. P. Verge, A. Hirschberg, R. Causse, “Sound production in recorderlike instruments. II. A simulation model”, *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 2925-2939 (1997).
- [84] S. Yoshikawa and J. Saneyoshi, “Feedback excitation mechanism in organ pipes”, *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)* 1, 175-191 (1980).
- [85] S. Yoshikawa, “Jet-wave amplification in organ pipes”, *J. Acoust. Soc. Am.* 103, 2706-2717 (1998).

Διαδίκτυο

- | | |
|--|--|
| [a] www.chrysalis-foundation.org | [i] www.organstops.org |
| [b] www.die-orgelseite.de/pfeifenarten-e.htm | [j] www.pasiorgans.com |
| [c] N. H. Fletcher, προσωπική επικοινωνία | [k] www.pipedreams.publicradio.org |
| [d] www.foxtail.com | [l] www.pipeorgan.com |
| [e] www.ibp.fraunhofer.de/akustik | [m] www.rwgiangiulio.com |
| [f] www.keyboardtrader.com | [n] www.unsw.edu.au |
| [g] www.die-orgelseite.de | [o] www.wikipedia.com |
| [h] www.organworks.com | [p] http://woodgears.ca/organ-tour/ |