



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

σχολη αγρονομων & τοπογραφων μηχανικων

τομεας τοπογραφιας

εργαστηριο ανωτερης γεωδαισιας

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ GPS ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΒΟΙΑ

Διπλωματική Εργασία: Ξάνθος Παπανικολάου

Αθήνα
Μάρτιος 2009

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τις Καθηγήτριες κυρίες Χριστιάνα Μητσακάκη και Καλλιόπη Παπαζήση για την ανάθεση και επίβλεψη της διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τις καίριες διορθώσεις και βοήθειά τους.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την υποψήφια διδάκτορα Αγγελική Μαρίνου, για την βοήθεια, την υποστήριξη και καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας, όπως επίσης και για τον πολύτιμο χρόνο της που αφειδώς μου διέθεσε. Η συμβολή της ήταν καταλυτική για την περάτωση της διπλωματικής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνεργάτη του Εργαστηρίου Ιορδάνη Γαλάνη και τον υποψήφιο διδάκτορα Βαγγέλη Ζαχαρή για τις πολύτιμες συμβουλές τους, όπως επίσης τους υποψήφιους διδάκτορες Κυριάκο Φράγκο και Αλεξία Καραμάνου για την άψογη συνεργασία μας στο χώρο του εργαστηρίου και κυρίως την προθυμία και προσφορά τους για βοήθεια.

Περίληψη

Οι μέθοδοι του δορυφορικού εντοπισμού θέσης, έχουν αντικαταστήσει αυτές του επίγειου προσδιορισμού σε μία σειρά εργασιών, από συνήθεις τοπογραφικές εργασίες μικρής κλίμακας, έως εφαρμογές ακριβείας μεταξύ σταθμών που μπορεί να βρίσκονται σε διαφορετικές ηπείρους (π.χ. υλοποίηση συστημάτων αναφοράς). Η μεταβολή αυτή, έχει επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό και τις διαδικασίες συνόρθωσης, αφού πλέον οι παρατηρήσεις αφορούν αποκλειστικά μετρήσεις μηκών (είτε με την επεξεργασία κώδικα, είτε με μετρήσεις φάσεων) και επίσης αποτελούν πλήρως αυτοματοποιημένες διεργασίες (με την ανάπτυξη κατάλληλων λογισμικών πακέτων).

Στις εφαρμογές ακριβείας, όπου οι απαιτήσεις είναι υψηλές και ο όγκος των δεδομένων μεγάλος, η επεξεργασία τους με κάποιο λογισμικό πακέτο, θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, καθώς οι (στατιστικές) υποθέσεις αλλά και οι αριθμητικές μέθοδοι που ακολουθούνται, μπορούν να οδηγήσουν σε δυσλειτουργίες της διαδικασίας συνόρθωσης.

Η παρούσα διπλωματική εργασία, αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο, επιχειρείται μία συνοπτική παρουσίαση των μεθόδων εκτίμησης, που χρησιμοποιούνται σε γεωδαιτικές εφαρμογές δορυφορικού (στατικού) εντοπισμού (Κεφάλαιο 2). Δίνεται ιδιαίτερο βάρος στην μέθοδο της απαλοιφής παραμέτρων και αυτής των διαδοχικών συνορθώσεων (Κεφάλαιο 3). Οι δύο αυτές μέθοδοι, είναι ιδιαίτερα βοηθητικές στην αντιμετώπιση του προβλήματος του πολύ μεγάλου όγκου δεδομένων σε εφαρμογές ακριβείας.

Στο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 4), παρουσιάζονται οι διαδικασίες εφαρμογής των μεθόδων που αναφέρθηκαν, μέσω του επιστημονικού πακέτου επεξεργασίας δορυφορικών παρατηρήσεων BERNESSE v4.2.

Στο δεύτερο μέρος, ακολουθεί η πρακτική εφαρμογή των μεθόδων συνόρθωσης που αναφέρθηκαν, για την επίλυση δύο δικτύων διαφορετικών εποχών. Και τα δύο δίκτυα εκτείνονται στις περιοχές Βόρειας Πελοποννήσου, Αττικής και Εύβοιας και αφορούν παρατηρήσεις G.P.S., που έχουν λάβει χώρα από την 30 Σεπτεμβρίου, έως την 10 Οκτωβρίου 1997 (Κεφάλαιο 5) και από την 27 Σεπτεμβρίου έως την 6 Οκτωβρίου 2005 (Κεφάλαιο 6) αντίστοιχα. Η επίλυση έγινε με τέσσερεις διαφορετικούς τρόπους (Λύσεις Α, Β, Γ και Δ).

Στο τελευταίο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 7), γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν και για τα δύο δίκτυα, από τις διαφορετικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν. Φαίνεται ότι οι αποκλίσεις στις εκτιμήσεις των συντεταγμένων είναι πολύ μικρές (μικρότερες των 3 mm με εξαίρεση ένα σημείο όπου φτάνουν το 1 cm στην οριζοντιογραφία, ενώ για το υψόμετρο περιορίζονται σε τιμές μικρότερες του 1 cm με μέγιστη τιμή τα 3 dm για ένα σημείο). Σε μεμονωμένα σημεία, προκαλούνται δυσλειτουργίες από κάποιες μεθόδους, χωρίς πάντως να παρουσιάζονται και εδώ μεγάλες διαφορές.

Για τις εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων, όπου ο μεγάλος όγκος δεδομένων προκαλεί υπερεκτίμηση της ποιότητας συνόρθωσης, η μέθοδος με τα βέλτιστα αποτελέσματα είναι αυτή που απαιτεί την παρεμβολή του χρήστη (Λύση Α). Διαπιστώνεται πάντως, μία σχέση μεταξύ των συγκεκριμένων εκτιμήσεων και αυτών που υπολογίζονται από μία εκ των μεθόδων επίλυσης (Λύση Δ).

Στο τελευταίο κεφάλαιο (8), διατυπώνονται κάποια γενικά συμπεράσματα και αναφέρονται μερικές προτάσεις, που προέκυψαν από την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Δίνονται επίσης κατευθύνσεις προς περαιτέρω ανάλυση και έρευνα.

Abstract

Ground surveying has been replaced by satellite geodesy methods in a series of applications, ranging from plane surveying projects to high accuracy applications on the large scale for stations situated on different continents (e.g. realization of reference frames or monitoring the tectonic behaviour of the earth's crust). This transition however, has greatly affected the adjustment procedure, since a large amount of observations consisting of only length measurements (either by code or phase differences) are available, while the process has been fully automated due to the development of the relevant software packages that deal with the data.

In the case of high accuracy applications, where precision demands are high and the data are numerous, the processing should be done with great care, since statistical assumptions and computational aspects of the implemented methods, could lead to problems in the adjustment procedure.

This thesis consists of two parts. In the first, an attempt is made to introduce the estimation methods used in high accuracy satellite geodesy applications (Chapter 2). Special care is given to the methods of parameter elimination and sequential adjustment (Chapter 3). Both these methods are helpful in the case of very large observation equations systems, occurring often in such applications.

In Chapter 4, the implementation of the above methods is described, in the case of the BERNESE v4.2 software for GPS observations.

The second part of the thesis consists of a case study, of the methods introduced in Chapter 3, concerning the adjustment of two separate networks. Both of them extend over the regions of Northern Peloponnesus, Attica and Evoia and are comprised of a number of points GPS observations were carried out in two epochs, namely between the 30th of September until the 6th of October of year 1997 and 27th of September until 6th of October 2005 respectively.

A comparison of the results obtained from the above networks, using the various methods described before (solutions A, B, C and D) appear in Chapter 7. The differences of the coordinate estimations between solutions are very small (smaller than 3mm with the exception of one point reaching a value of 1cm in the case of its plane coordinates, whereas the height discrepancies rarely exceed 1cm with a maximum value of 3dm for a single point). Some deficiencies inherent in some of the methods applied were revealed in the case of a few points although no significant discrepancies were observed.

Realistic estimations of the standard deviations, which are known to be influenced by the big number of observations, are determined a in the case the user intervenes in the automated procedure provided by the Bernese software (solution A). Even so, a linear relationship between the standard deviations of solution A and the ones computed from the automated procedure for solution D was detected for both networks.

Finally, in Chapter 8, some general conclusions due to the experience gained while elaborating and composing this thesis and some remarks are made, concerning aspects of further investigation on the subject.

Περιεχόμενα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	I
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	III
ABSTRACT.....	V
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	VII
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	XI
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	XIII
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΤΗΣ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ	1
1.2 ΑΝΑΓΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ	2

ΜΕΡΟΣ Α : στοιχεία απο τη θεωρία

2 ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ GAUSS – MARKOFF.....	7
2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ	7
2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ GAUSS-MARKOFF	7
2.3 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ GAUSS – MARKOFF ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ	9
2.4 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.....	10
2.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.....	11
2.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΒΑΡΟΥΣ	14
2.7 ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ GAUSS-MARKOFF	16
2.8 ΆΛΛΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.....	17
2.9 Η ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ	17
3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΟΡΘΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΜΕΓΑΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	21
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	21
3.2 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	21
3.2.1 Χρησιμότητα της μεθόδου.....	21
3.2.2 Μαθηματικό μοντέλο απαλοιφής	22
3.2.3 Εφαρμογές.....	28
3.2.4 Προσθήκη παραμέτρων.....	32
3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΘΩΣΕΩΝ ΑΠΟ ΠΡΟΣΘΗΚΗ Η ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	34
3.3.1 Εισαγωγή	34
3.3.2 Ισοδυναμία Διαδοχικών Συνορθώσεων και ταυτόχρονης συνορθώσης.....	35
3.3.3 Προσέγγιση κατά Kalman	43
3.3.4 Εκτίμηση τυπικού σφάλματος για ομάδες παραμέτρων	45
4 ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ BERNESE V4.2	51
4.1 ΓΕΝΙΚΑ	51
4.2 ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΕ ΑΝΑ ΗΜΕΡΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ (ΛΥΣΗ Α).....	54
4.3 ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΗ ΕΠΙΛΥΣΗ (ΛΥΣΗ Β).....	55
4.3.1 Γενικά.....	55

4.3.2	Μεθοδολογία.....	59
4.3.3	Πλεονεκτήματα και περιορισμοί	61
4.4	ΜΕΙΩΣΗ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (ΛΥΣΗ Γ).....	62
4.4.1	Γενικά.....	62
4.4.2	Μεθοδολογία.....	64
4.4.3	Πλεονεκτήματα και περιορισμοί	64
4.5	ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ-ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ (ΛΥΣΗ Δ).....	65
4.5.1	Γενικά.....	65
4.5.2	Μεθοδολογία.....	66
4.5.3	Πλεονεκτήματα και περιορισμοί	67

ΜΕΡΟΣ Β: εφαρμογή σε δίκτυα παρακολούθησης

5	ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΕΠΟΧΗΣ 1997.76	71
5.1	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ.....	71
5.2	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	73
5.3	ΥΠΟΔΙΚΤΥΟ Α΄ ΤΑΞΗΣ.....	75
5.3.1	Γενικά.....	75
5.3.2	Επίλυση με ανά ημέρα συντεταγμένες (Λύση Α)	77
5.3.3	Επίλυση με χωρισμό σε υποπεριόδους (Λύση Β).....	80
5.3.4	Επίλυση με μείωση του όγκου των κανονικών εξισώσεων (Λύση Γ)	86
5.3.5	Επίλυση με χρήση του προγράμματος COMPAR (Λύση Δ).....	90
5.3.6	Συγκρίσεις επιλύσεων	92
5.4	ΥΠΟΔΙΚΤΥΟ Β΄ ΤΑΞΗΣ.....	98
5.5	ΥΠΟΔΙΚΤΥΟ Γ΄ ΤΑΞΗΣ	101
6	ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΕΠΟΧΗΣ 2005.76	103
6.1	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ.....	103
6.2	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	103
6.3	ΥΠΟΔΙΚΤΥΟ Α΄ ΤΑΞΗΣ	104
6.3.1	Γενικά.....	104
6.3.2	Επίλυση με ανά ημέρα συντεταγμένες (Λύση Α)	107
6.3.3	Επίλυση με χωρισμό σε υποπεριόδους (Λύση Β).....	109
6.3.4	Επίλυση με μείωση του όγκου των κανονικών εξισώσεων (Λύση Γ)	113
6.3.5	Επίλυση με χρήση του προγράμματος COMPAR (Λύση Δ).....	117
6.3.6	Συγκρίσεις.....	121
6.4	ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ Β΄ ΤΑΞΗΣ.....	127
7	ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ	129
8	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	133
8.1	ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ	133
8.2	ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ	134
8.3	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	134

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	137
A. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΕΠΟΧΗΣ 1997.76	137
1. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α.	137
2. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β.	138
3. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ.	139
4. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ.	140
5. Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Α (ADDNEQ).	141
6. Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Β (COMPAR).	143
7. Συντεταγμένες υποδικτύου Γ' τάξης (ADDNEQ).	145
B. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΕΠΟΧΗΣ 2005.76	146
1. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α.	146
2. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β.	147
3. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ.	148
4. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ.	149
5. Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης.	150
C. ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΚΥΡΙΩΝ ΕΞΑΓΟΜΕΝΩΝ ΑΡΧΕΙΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	151
1. Πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας	151
2. Αρχεία αποτελεσμάτων του προγράμματος COMPAR	151
3. Αρχεία σχεδίασης .PLT.....	153
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	157

Περιεχόμενα Σχημάτων

Σχήμα 1.1-1 Δίκτυο σταθμών της υπηρεσίας I.G.S. πηγή: I.G.S.	1
Σχήμα 2.5-1: Γεωμετρική ερμηνεία της M.E.T.	11
Σχήμα 4.1-1: Διάγραμμα ροής επεξεργασίας με το λογισμικό BERNESE v4.2	52
Σχήμα 4.3-1: Αρχική φάση παραγωγής συνδυασμένης επίλυσης στο CODE, πηγή: [Hugentobler et al. 2001]	56
Σχήμα 4.3-2: Δυνατότητες προγράμματος ADDNEQ πηγή [Brockman 1996]	58
Σχήμα 4.3-3: Σύγκριση συνδυασμένης επίλυσης και μέσης τιμής πηγή [Brockman 1996]	59
Σχήμα 4.3-4: Παραγωγή συνδυασμένης επίλυσης με το πρόγραμμα ADDNEQ	60
Σχήμα 4.5-1: : Μενού επιλογών προγράμματος COMPAR	66
Σχήμα 5.1-1: Μέρος δικτύου εποχής 1997.76	71
Σχήμα 5.1-2: Ευρωπαϊκοί σταθμοί υπηρεσίας I.G.S. πηγή: I.G.S.	72
Σχήμα 5.2-1: Πορεία επίλυσης δικτύου εποχής 1997.76	73
Σχήμα 5.3-1: Υποδίκτυο Α' τάξης	75
Σχήμα 5.3-2: Διάγραμμα υπολογισμού των διαφορετικών λύσεων υποδικτύου Α' τάξης	77
Σχήμα 5.3-3: Οριζοντιογραφικές αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων από την μέση τιμή όλων των σημείων του υποδικτύου Α	78
Σχήμα 5.3-4: Υψομετρικές αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων από την μέση τιμή όλων των σημείων του υποδικτύου Α	78
Σχήμα 5.3-5: Διάγραμμα τυπικών σφαλμάτων υποδικτύου Α' τάξης από λύση Α	80
Σχήμα 5.3-6: Αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων και διαφορετικών λύσεων	82
Σχήμα 5.3-7: Αποκλίσεις λύσεων Α - Β	83
Σχήμα 5.3-8: Αποκλίσεις λύσεων Γ - Β και Γ - Α	88
Σχήμα 5.3-9: Σχέση τυπικών σφαλμάτων λύσης Α με RMS2 λύσης Δ	91
Σχήμα 5.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες	97
Σχήμα 5.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες	98
Σχήμα 5.5-1: Σημεία υποδικτύου Γ' τάξης	101
Σχήμα 6.2-1: Πορεία επίλυσης δικτύου εποχής 2005.76	104
Σχήμα 6.3-1: Σημεία υποδικτύου Α' τάξης	105
Σχήμα 6.3-2: Διάγραμμα υπολογισμού των διαφορετικών λύσεων υποδικτύου Α' τάξης	106
Σχήμα 6.3-3: : Οριζοντιογραφικές και υψομετρικές αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων από την μέση τιμή	107
Σχήμα 6.3-4: Τυπικά σφάλματα από λύση Α	107
Σχήμα 6.3-5: Αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων και διαφορετικών λύσεων	109
Σχήμα 6.3-6: Αποκλίσεις λύσεων Β - Γ και Α - Γ	113
Σχήμα 6.3-7: Αποκλίσεις λύσεων Α - Γ συναρτήσει των ημερών παρατήρησης	115
Σχήμα 6.3-8: Αποκλίσεις λύσεων Γ - Δ συναρτήσει των ημερών παρατήρησης	117
Σχήμα 6.3-9: Σχέση τυπικών σφαλμάτων λύσης Α με RMS2 λύσης Δ	120
Σχήμα 6.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες	122
Σχήμα 6.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες	122
Σχήμα 6.4-1: Σημεία υποδικτύου Β' τάξης	127
Σχήμα 7-1: Αποκλίσεις λύσεων και των δύο δικτύων	130
Σχήμα C-1: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .COV	151
Σχήμα C-2: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .OUT με αρχεία εισαγωγής	152
Σχήμα C-3: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .OUT με στοιχεία σύγκρισης ανά ημέρα λύσεων	152
Σχήμα C-4: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .OUT με στοιχεία βάσεων	153
Σχήμα C-5: Λεπτομέρεια εξαγόμενων αρχείων σχεδίασης τύπου .OUT α) από COMPAR και β) από ADDNEQ.	153
Σχήμα C-6: Λεπτομέρεια εξαγόμενων αρχείων σχεδίασης τύπου .OUT από ADDNEQ, με αποκλίσεις μεταξύ διαφορετικών ημερών.	154
Σχήμα C-7: Γραφική απεικόνιση πληροφορίας των αρχείων .PLT για τον σταθμό DION (Διόνυσος).	154

Περιεχόμενα Πινάκων

Πίνακας 4.1-1: Ακρίβειες επίλυσης με το λογισμικό BERNESE, πηγή: [Hugentobler et all.]	51
Πίνακας 4.5-1: Στοιχεία εισαγωγής των προγραμμάτων συνόρθωσης	65
Πίνακας 5.3-1: Σημεία υποδικτύου Α' τάξης με τις ημέρες παρατήρησης	76
Πίνακας 5.3-2: Τυπικά σφάλματα υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α	79
Πίνακας 5.3-3: Αποκλίσεις μεταξύ συνορθώσεων των δύο υποπεριόδων (Λύση Β)	81
Πίνακας 5.3-4: Αποκλίσεις λύσεων Α - Β	84
Πίνακας 5.3-5: Τυπικά σφάλματα από λύση Β	85
Πίνακας 5.3-6: Σύγκριση μεγεθών, πριν και μετά την απαλοιφή	86
Πίνακας 5.3-7: Αποκλίσεις λύσεων Β - Γ και Α - Γ	87
Πίνακας 5.3-8: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Γ	89
Πίνακας 5.3-9: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Δ	90
Πίνακας 5.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες (συνέχεια)	94
Πίνακας 5.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες (συνέχεια)	96
Πίνακας 5.4-1: Σημεία υποδικτύου Β' τάξης	99
Πίνακας 5.4-2: Στατιστικά στοιχεία επίλυσης υποδικτύου Β' τάξης	100
Πίνακας 5.5-1: Στατιστικά στοιχεία επίλυσης υποδικτύου Γ' τάξης	102
Πίνακας 5.5-2: Σημεία υποδικτύου Γ' τάξης	102
Πίνακας 6.3-1: Σημεία υποδικτύου Α' τάξης	106
Πίνακας 6.3-2: Τυπικά σφάλματα από λύση Α	108
Πίνακας 6.3-3: Αποκλίσεις μεταξύ των συνορθώσεων των δύο υποπεριόδων	110
Πίνακας 6.3-4: Αποκλίσεις λύσεων Α - Β	111
Πίνακας 6.3-5: Τυπικά σφάλματα επίλυσης Β	112
Πίνακας 6.3-6: Αποκλίσεις λύσεων Β - Γ και Α - Γ	114
Πίνακας 6.3-7: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Γ (συνέχεια)	116
Πίνακας 6.3-8: Αποκλίσεις λύσεων Γ - Δ	118
Πίνακας 6.3-9: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Δ (συνέχεια)	120
Πίνακας 6.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες (συνέχεια)	124
Πίνακας 6.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες (συνέχεια)	126
Πίνακας 6.4-1: Σημεία υποδικτύου Β' τάξης	128
Πίνακας Α-1: : Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α	137
Πίνακας Α-2: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β	138
Πίνακας Α-3: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ	139
Πίνακας Α-4: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ	140
Πίνακας Α-5: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Α (ADDNEQ) (συνέχεια)	142
Πίνακας Α-6: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Β (COMPAR) (συνέχεια)	144
Πίνακας Α-7: Συντεταγμένες υποδικτύου Γ' τάξης (ADDNEQ)	145
Πίνακας Β-1: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α	146
Πίνακας Β-2: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β	147
Πίνακας Β-3: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ	148
Πίνακας Β-4: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ	149
Πίνακας Β-5: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης	150

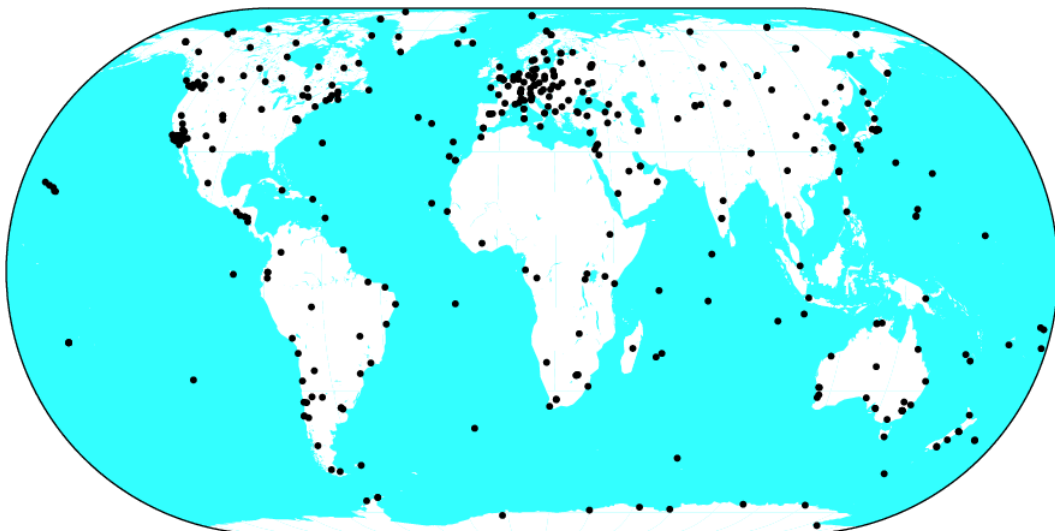
1 Εισαγωγή

1.1 Σύγχρονα δεδομένα στον τομέα της δορυφορικής γεωδαισίας

Η ραγδαία ανάπτυξη κατά τα τελευταία χρόνια, των δορυφορικών μεθόδων εντοπισμού (καθώς και μία σειρά συγγενών επιστημονικών τομέων), έχει οδηγήσει στην σταδιακή αντικατάσταση των συμβατικών μεθόδων επίγειου εντοπισμού, σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, από μεθόδους της δορυφορικής γεωδαισίας. Τέτοιες μέθοδοι χρησιμοποιούνται πλέον τόσο σε καθημερινές, τοπογραφικές εργασίες, όσο και σε απαιτητικές εφαρμογές ακριβείας, μεγάλης έκτασης. Στην τελευταία μάλιστα περίπτωση, οι δορυφορικές μέθοδοι αποτελούν την μοναδική επιλογή.

Ανάμεσα στα δορυφορικά συστήματα εντοπισμού (GNSS) που έχουν αναπτυχθεί, κυρίαρχο ρόλο διαδραματίζει το Παγκόσμιο Σύστημα προσδιορισμού Θέσης NAVSTAR GPS (NAVigation by Timing and Ranging Global Positioning System). Η συνεχής εξέλιξή του, εγγυάται σήμερα την κάλυψη οποιουδήποτε σημείου στην γήινη επιφάνεια, από τουλάχιστο τέσσερις έως οκτώ δορυφόρους.

Σημαντική είναι επίσης, η συνεισφορά της διεθνούς υπηρεσίας I.G.S. (International GNSS Service), ειδικά σε εφαρμογές ακριβείας, καθώς η συγκεκριμένη υπηρεσία συλλέγει, αρχειοθετεί και διανέμει δορυφορικά δεδομένα ακριβείας, από επίγεια Κέντρα Ανάλυσης ανά τον κόσμο. Με τα δεδομένα αυτά, παράγονται εφημερίδες ακριβείας, παράμετροι γήινης περιστροφής, συντεταγμένες και ταχύτητες σταθμών, πληροφορία χρόνου για τους δορυφόρους και τους σταθμούς, καθώς και πληροφορία για την ιονόσφαιρα. Τα προϊόντα αυτά, έχουν συμβάλει τα μέγιστα, στην μεγάλη αύξηση της ποιότητας του δορυφορικού εντοπισμού.



ISM7 2009 Nov 6 16:59:21

Σχήμα 1.1-1 Δίκτυο σταθμών της υπηρεσίας I.G.S. πηγή: I.G.S.

Τέλος, μία ακόμη παράμετρος που έχει συμβάλει στην αύξηση της ποιότητας των δορυφορικών (και όχι μόνο) μεθόδων, είναι η συνεχής εξέλιξη και πρόοδος των

χρησιμοποιούμενων Συστημάτων Αναφοράς. Μέσω της υπηρεσίας IERS (International Earth Rotation and Reference System Service), προσφέρονται πλέον υψηλής ακρίβειας συστήματα αναφοράς, που ανανεώνονται και αναθεωρούνται ανά διαστήματα (ITRF).

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό, ότι προϊόντα και πληροφορίες από τις παραπάνω υπηρεσίες (IGS, IERS), όπως και από διάφορα κέντρα ανάλυσης δορυφορικών δεδομένων (GPS), όπως η CODE (Center for Orbit Determination in Europe), προσφέρονται δωρεάν στο διαδίκτυο. Η διεκπεραίωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήταν αδύνατη χωρίς την άντληση πληροφορίας από τις πηγές που αναφέρθηκαν.

1.2 Ανάγκες και προβλήματα δορυφορικών εφαρμογών ακριβείας

Η συνεχώς αυξανόμενη ακρίβεια των δορυφορικών μεθόδων και κυρίως του συστήματος GPS, οφείλεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στην ποιότητα και τον όγκο των δεδομένων. Η συλλογή πληροφορίας, είναι πλέον πολύ εύκολη, τόσο μέσω παρατηρήσεων (με δέκτες GPS), όσο και μέσω διαφόρων υπηρεσιών που δραστηριοποιούνται στον τομέα. Η επεξεργασία του συνόλου των δεδομένων, γίνεται από κατάλληλα σχεδιασμένα για το σκοπό αυτό λογισμικά πακέτα.

Ο μεγάλος όγκος δεδομένων όμως, παρά τα πλεονεκτήματα που προσφέρει, θέτει σημαντικά προβλήματα, που αφορούν τόσο στη διαχείριση, όσο και στις υπολογιστικές διεργασίες που ακολουθούνται, από τα λογισμικά επεξεργασίας δορυφορικών παρατηρήσεων.

Το πρόβλημα γίνεται εντονότερο, σε περιπτώσεις στατικού δορυφορικού εντοπισμού, σε εφαρμογές ακριβείας, όπου οι ώρες παρατήρησης είναι πολλές και μπορούν να διαρκέσουν μάλιστα αρκετές ημέρες (π.χ. στο δίκτυο εποχής 1997.76, ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι 1637476! Κεφάλαιο 5.3.4).

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος διαχείρισης του μεγάλου όγκου δεδομένων, έχουν αξιοποιηθεί τα τελευταία χρόνια διάφορες μεθοδολογίες και αλγόριθμοι, ενώ έχουν τροποποιηθεί και επαναχρησιμοποιηθεί στατιστικές μέθοδοι, γνωστές από το παρελθόν (όπως π.χ. οι διαδοχικές συνορθώσεις). Η εφαρμογή βέβαια των μεθόδων αυτών, συνοδεύεται πολλές φορές από υποθέσεις (π.χ. στατιστικής ανεξαρτησίας) και αριθμητικούς υπολογισμούς (π.χ. επιλογή μεθόδου και χρονική στιγμή που θα πρέπει να γίνει η αντιστροφή πινάκων), των οποίων η επίδραση στις εκτιμήσεις, αν και πολύ μικρή, ίσως να μην μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα σε ορισμένες εφαρμογές.

Τέλος, ένα σημαντικό πρόβλημα που προκαλείται από τον μεγάλο όγκο των παρατηρήσεων, είναι η εκτίμηση ρεαλιστικών μέτρων ποιότητας (κυρίως τυπικών σφαλμάτων και τυπικών σφαλμάτων μονάδας βάρους). Όπως είναι γνωστό, η τιμή των συγκεκριμένων ποσοτήτων, επηρεάζεται (αντιστρόφως ανάλογα) από τον αριθμό των παρατηρήσεων που συμμετέχουν στην συνόρθωση, με συνέπεια τα κριτήρια ακριβείας να μην ανταποκρίνονται πλήρως στην πραγματικότητα. Πολλές φορές γίνεται διόρθωση των συγκεκριμένων τιμών, είτε χρησιμοποιώντας στατιστικά μοντέλα (π.χ. variance component estimation), είτε διεξάγοντας συγκρίσεις με προηγούμενες, παρεμφερείς μελέτες ή μεθόδους.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται μία πολύ εισαγωγική παρουσίαση μεθόδων αντιμετώπισης του προβλήματος του μεγάλου όγκου δεδομένων (παρατηρήσεων), που βρίσκουν εφαρμογή στο λογισμικό πακέτο επεξεργασίας BERNESE v4.2. Στο πρώτο μέρος, επιχειρείται η ανάλυσή τους με βάση τις μαθηματικές (στατιστικές) τους αρχές, ενώ στο δεύτερο γίνεται χρήση των μεθόδων για την επίλυση δύο δικτύων διαφορετικών εποχών, καθώς επίσης και η σύγκρισή τους.

ΜΕΡΟΣ Α :

- **στοιχεία απο τη θεωρια**
-

2 Εκτιμήσεις με το μοντέλο Gauss – Markoff.

2.1 Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, προϋποθέτει την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων I από τις εκτιμήσεις \hat{I} των αναμενόμενων τιμών $E\{I\}$ (οι οποίες όπως φαίνεται παρακάτω, είναι συναρτήσεις των αγνώστων παραμέτρων). Συνεπώς, θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ο όρος $(I - \hat{I})^T (I - \hat{I})$. Η μέθοδος μπορεί να γενικευθεί, αν θεωρήσουμε τον θετικά ορισμένο πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων $V_I = \sigma_0^2 P^{-1}$ των παρατηρήσεων, οπότε η προς ελαχιστοποίηση ποσότητα γίνεται η τετραγωνική μορφή $(I - \hat{I})^T P (I - \hat{I})$.

2.2 Μοντέλο Gauss-Markoff

Ένα από τα ευρύτερα χρησιμοποιούμενα στατιστικά μοντέλα συνόρθωσης, είναι το γραμμικό μοντέλο *Gauss-Markoff*. Το μοντέλο αυτό, δεν είναι άλλο από τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων, η οποία ανάλογα με την περίπτωση μπορεί να μετασχηματιστεί ή να της επιβληθούν δεσμεύσεις, όπως θα φανεί παρακάτω.

Έστω A , ένας $n \times m$ πίνακας (γνωστών) συντελεστών, x το $m \times 1$ διάνυσμα των αγνώστων σταθερών παραμέτρων, I το $n \times 1$ τυχαίο διάνυσμα των παρατηρήσεων και $V_I = \sigma_0^2 P^{-1}$ ο $n \times n$ πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του I , με τον P γνωστό και το σ_0^2 (a priori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους) αυθαίρετα ορισμένο. Έστω επίσης, ότι ο A είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή $rank A = m$ (αφού $n \geq m$) και ο P θετικά ορισμένος. Τότε:

$$Ax = E\{I\} \text{ με } V_I = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (2.2-1)$$

ονομάζεται μοντέλο *Gauss-Markoff* πλήρους βαθμού.

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι οι αναμενόμενες τιμές των παρατηρήσεων, μπορούν να αναπαρασταθούν από γραμμικές σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές και τις άγνωστες παραμέτρους. Οι σχέσεις αυτές συνήθως δεν εξάγονται άμεσα αλλά μετά από κατάλληλη γραμμικοποίηση (συνήθως κατά Taylor) των μη-γραμμικών σχέσεων (όπως συμβαίνει και στις δορυφορικές παρατηρήσεις).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με $rank A = m$, το μοντέλο είναι πλήρους βαθμού και συνεπάγεται ότι $n \geq m$. Συνήθως βέβαια και ειδικά στις δορυφορικές παρατηρήσεις,

ο αριθμός των εξισώσεων n , είναι μεγαλύτερος του αριθμού των αγνώστων παραμέτρων m .

Για $n > m$ όμως, το σύστημα $Ax = l$, γίνεται αδύνατο (αν $R(A)$ είναι ο χώρος στηλών του πίνακα A , τότε $\dim R(A) = \text{rank} A = m$ ενώ γενικά $l \in \mathfrak{R}^n$ και άρα $l \notin R(A)$). Έτσι, προσθέτουμε το $n \times 1$ διάνυσμα v των πιθανών σφαλμάτων του l , οπότε το παραπάνω μοντέλο γίνεται:

$$Ax = l + v \quad \text{με} \quad E\{v\} = 0 \quad \text{και} \quad V_l = \sigma^2 P^{-1} \quad (2.2-2)$$

αφού από την σχέση $Ax = E\{l\}$ προκύπτει ότι $E\{v\} = 0$. Συνεπώς, η παραπάνω σχέση (2.2-2) αποτελεί εναλλακτική απλώς μορφή του μοντέλου (2.2-1).

Το μοντέλο (2.2-1) ή ισοδύναμα το (2.2-2), φέρει το όνομα *Gauss-Markoff*, αφού με την διατύπωση αυτού του μοντέλου και μέσω της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας ο Gauss κατέληξε στην μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Έδειξε επίσης ότι η συγκεκριμένη μέθοδος οδηγεί στην βέλτιστη εκτίμηση. Ο Markoff, προσδιόρισε τις παραμέτρους του ίδιου μοντέλου, μέσω της μεθόδου της βέλτιστης ανεπηρέαστης εκτίμησης. Στα πλαίσια της προσαρμογής με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η εκτίμηση με το μοντέλο *Gauss-Markoff* καλείται συνόρθωση εμμέσων παρατηρήσεων.

Ο πίνακας P , θεωρείται θετικά ορισμένος και άρα ο αντίστροφός του P^{-1} υπάρχει και είναι και αυτός θετικά ορισμένος. Ουσιαστικά, ο πίνακας αυτός είναι ο πίνακας βαρών των παρατηρήσεων l . Συχνά, στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, θέτουμε $P^{-1} = Q$, που συνεπάγεται την $V_l = \sigma_0^2 Q$, όπου ο πίνακας Q συμβολίζει τον πίνακα των συντελεστών βάρους (*matrix of cofactors* ή *matrix of weight coefficients*).

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα των μοντέλων (2.2-1) και (2.2-2), είναι η ομοιοσκέδαση (*homoscedasticity*). Αυτό σημαίνει, ότι οποιοδήποτε από τις δύο μορφές του παραπάνω μοντέλου, μπορεί να μετατραπεί στο απλούστερο μοντέλο:

$$Ax = E\{l\} \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_0^2 I \quad (2.2-3)$$

με I τον μοναδιαίο πίνακα κατάλληλων διαστάσεων, όπου δηλαδή οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες και ισοβαρείς.

Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα βοηθητική, καθώς το μοντέλο (2.2-3) είναι πιο εύχρηστο και απλουστευμένο, οπότε μπορούμε να μεταχειριστούμε αυτό για την εξαγωγή συμπερασμάτων και να επιστρέψουμε στην αρχική μορφή $\bar{A}x = \bar{l} + \bar{v}$ με $V_{\bar{l}} = \sigma_0^2 P^{-1}$ ή $\bar{A}x = E\{\bar{l}\}$ με $V_{\bar{l}} = \sigma_0^2 P^{-1}$, με τον απλό μετασχηματισμό:

$$A = G^T \bar{A}, \quad l = G^T \bar{l} \quad \text{και} \quad v = G^T \bar{v} \quad (2.2-4)$$

όπου $P = GG^T$ είναι η κατά *Cholesky* παραγοντοποίηση του πίνακα των βαρών P .

Αφού ο πίνακας των βαρών P είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, υπάρχει αντιστρέψιμος, κάτω τριγωνικός πίνακας G , τέτοιος ώστε : $P = GG^T$.

2.3 Εκτίμηση στο μοντέλο Gauss - Markoff με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων

Για να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους στο μοντέλο Gauss-Markoff (2.2-2), με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, σχηματίζεται η εκτιμήτρια του διάνυσματος x από τις σχέσεις: $E\{I\} = Ax$ και $(I - \hat{I})^T P(I - \hat{I})$ (Κεφάλαιο 2.1).

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις και υπολογισμούς [Α.Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου 2004], όπου καταλήγουμε στη σχέση:

$$(A^T A)x - A^T I = 0 \quad (2.3-1)$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται *Κανονικές Εξισώσεις (normal equations)*.

Η λύση του μοντέλου Gauss-Markoff για ισοβαρείς παρατηρήσεις με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T I \quad (2.3-2)$$

Επισημαίνεται ότι στον ίδιο τύπο ακριβώς καταλήγουμε αν αντί της μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων, χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Βέλτιστης Γραμμικής Ανεπηρέαστης Εκτίμησης (*Best Linear Unbiased Estimation*), όπως επίσης και με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (*Maximum-Likelihood Method*) με την προϋπόθεση ότι οι παρατηρήσεις ακολουθούν την Κανονική Κατανομή (Κατανομή Gauss).

Τα παραπάνω αφορούν την περίπτωση ισοβαρών παρατηρήσεων. Λόγω της ιδιότητας της ομοιοσκεδαστικότητας όμως, η μεταφορά των συμπερασμάτων στο γενικό μοντέλο της μορφής (2.2-2) είναι πολύ εύκολη. Χρησιμοποιώντας τους τύπους μετατροπής (2.2-4) που δόθηκαν παραπάνω, φτάνουμε για το γενικό μοντέλο στην τετραγωνική μορφή $(I - A\hat{x})^T P(I - A\hat{x})$, όπου P είναι ο πίνακας βαρών.

Οι καλύτερες τιμές (οι εκτιμήσεις δηλαδή των αναμενόμενων τιμών $E\{I\}$) για το διάνυσμα των παρατηρήσεων I , προκύπτουν από την σχέση $\hat{I} = A\hat{x}$, όπου δηλαδή στο αρχικό μοντέλο έχουν αντικατασταθεί οι άγνωστες παράμετροι με τις εκτιμήσεις τους.

Για διάνυσμα των υπολοίπων (ή διορθώσεων) v , η καλύτερη τιμή (εκτίμηση), προκύπτει από τον τύπο:

$$\hat{v} = \hat{I} - I \quad \text{όπου} \quad \hat{I} = A\hat{x} \quad (2.3-3)$$

Προκύπτει προφανώς ότι $\hat{v} = A\hat{x} - l$, οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψη και την προηγούμενη απόδειξη (ότι δηλαδή όταν $x = \hat{x}$ το $S^2(x) = v^T P v$ γίνεται ελάχιστο), φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι: η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων για το μοντέλο *Gauss-Markoff* ελαχιστοποιεί την τετραγωνική μορφή των υπολοίπων $\hat{v}^T P \hat{v}$, ή για το απλοποιημένο μοντέλο (2.2-3) την $\hat{v}^T \hat{v}$. Το ίδιο συμβαίνει κι αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Βέλτιστης Γραμμικής Ανεπηρέαστης Εκτίμησης (*Best Linear Unbiased Estimation*).

2.4 Μη γραμμικές περιπτώσεις

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στις δορυφορικές παρατηρήσεις όπως και σε πολλές άλλες συνήθεις εφαρμογές, οι σχέσεις που συνδέουν τις άγνωστες παραμέτρους x και το διάνυσμα των παρατηρήσεων l , δεν είναι γραμμικές. Στην περίπτωση αυτή έχουν την παρακάτω μορφή:

$$f(x_1, \dots, x_m) = l + v \quad (2.4-1)$$

όπου τα f , l και v , είναι οι πίνακες που δηλώνουν αντίστοιχα: τις πραγματικές και διαφορίσιμες συναρτήσεις των αγνώστων παραμέτρων x_i , τις παρατηρήσεις και τα σφάλματα (ή υπόλοιπα)

Οι εξισώσεις στην περίπτωση αυτή μπορούν να γραμμικοποιηθούν με ανάπτυγμα κατά *Taylor* κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης [A.M. Αγατζά-Μπαλοδήμου 2004].

Έτσι λοιπόν, προκύπτει και στην περίπτωση των μη γραμμικών σχέσεων, μετά από κατάλληλη επεξεργασία, ένα γραμμικό μοντέλο της μορφής (2.2-1) ή (2.2-2). Οι εξισώσεις (2.5-1) δηλαδή, γράφονται ως: $E\{\Delta l\} = A\Delta x$, όπου:

$$\Delta l = \begin{bmatrix} l_1 - h_1(x_{10}, \dots, x_{m0}) \\ \vdots \\ l_n - h_n(x_{10}, \dots, x_{m0}) \end{bmatrix} \quad \Delta x = [\Delta x_1, \dots, \Delta x_m]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \dots & \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_m} \right|_{x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial h_n}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \dots & \left. \frac{\partial h_n}{\partial x_m} \right|_{x_0} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας σχεδιασμού A είναι ο *Ιακωβιανός* του αρχικού συστήματος εξισώσεων, υπολογιζόμενος στο σημείο x_0 (προσεγγιστική λύση).

Οι *Κανονικές Εξισώσεις* που προκύπτουν, έχουν την ίδια μορφή με αυτές της εξίσωσης (2.3-1):

$$A^T \Delta l - A^T A \Delta \hat{x} = 0 \quad (2.4-2)$$

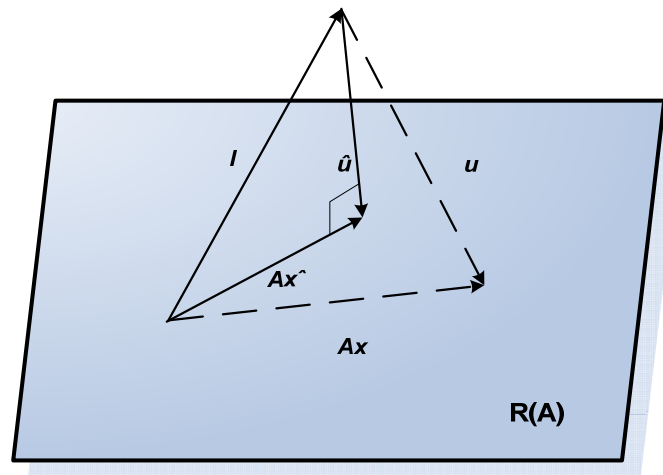
οπότε και οι τελικές εκτιμήσεις των x και l θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{l} = \Delta \hat{l} + f(x_{10}, \dots, x_{m0}) \quad \text{και} \quad \hat{x} = \Delta \hat{x} + x|_{x_0} \quad (2.4-3)$$

Είναι απαραίτητο, οι προσεγγιστικές τιμές x_{10}, \dots, x_{m0} , να είναι αρκετά κοντά (στην τελική εκτίμηση) ώστε να μπορεί η μη γραμμική συνάρτηση να προσεγγιστεί με ανάπτυγμα *Taylor* πρώτου βαθμού. Αν αυτό δεν συμβαίνει, θα πρέπει να γίνουν επαναλήψεις, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τις τελικά εκτιμώμενες ποσότητες ως προσωρινές τιμές. Κριτήριο για την παύση των επαναλήψεων (σύγκλιση) και επιλογή της τελικής λύσης, αποτελεί συνήθως το μέγεθος των διορθώσεων $\Delta \hat{x}$ και τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματά τους.

2.5 Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων

Οι εκτιμήσεις της μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων, μπορούν να ερμηνευθούν και με γεωμετρικό τρόπο. Ο χώρος των στηλών του πίνακα A , ορίζεται ως ο χώρος $R(A) = \{z \mid z = Ax\}$ και επειδή $\text{rank} A = m$, ορίζει έναν m -διάστατο Ευκλείδειο χώρο E^m μέσα στον οποίο πρέπει να εκτιμηθεί το Ax .



Σχήμα 2.5-1: Γεωμετρική ερμηνεία της Μ.Ε.Τ.

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα των παρατηρήσεων, δεν ανήκει στον χώρο αυτό, αλλά σε ένα n -διάστατο χώρο. Ας υποθέσουμε (σε μία εξιδανικευμένη περίπτωση) ότι ο χώρος E^m είναι δισδιάστατος, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 2.5-1). Η εκτίμηση \hat{x} ορίζεται έτσι, ώστε το $A\hat{x}$ να αποτελεί την ορθογώνια προβολή του διανύσματος των παρατηρήσεων $l \in E^n$ πάνω στον χώρο των στηλών του πίνακα A , $R(A)$.

Αν υποθέσουμε ότι το H συμβολίζει τον τελεστή της ορθογώνιας προβολής, τότε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω θα ισχύει:

$$Hl = A\hat{x} \quad \text{όπου} \quad H = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (2.5-1)$$

Απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} Hl &= A\hat{x} \Rightarrow \\ A(A^T A)^{-1} A^T l &= A\hat{x} \Rightarrow \\ A^T A(A^T A)^{-1} A^T l &= A^T A\hat{x} \Rightarrow \\ (A^T A)^{-1} A^T A(A^T A)^{-1} A^T l &= (A^T A)^{-1} A^T A\hat{x} \Rightarrow \\ \hat{x} &= (A^T A)^{-1} A^T l \end{aligned}$$

φτάνουμε δηλαδή στον ίδιο τύπο για την εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων με παραπάνω (2.3-2), όπου είχαμε ελαχιστοποιήσει την ποσότητα $S^2(x) = v^T P v$.

Ο τελεστής της ορθογώνιας προβολής τώρα του πίνακα A , πάνω στον συμπληρωματικό του χώρου των στηλών χώρο $R(A)^\perp$ (στο σχήμα ο χώρος αυτός είναι ο χώρος στον οποίο βρίσκεται το διάνυσμα \hat{v}), ορίζεται ως $I - H$. Το διάνυσμα λοιπόν των παρατηρήσεων, μπορεί να παρασταθεί μονοσήμαντα ως το άθροισμα δύο διανυσμάτων, το ένα από τα οποία είναι η προβολή του στον χώρο $R(A)$ και το άλλο στον $R(A)^\perp$. Το διάνυσμα l δηλαδή, γράφεται ως:

$$l = Hl + (I - H)l \quad (2.5-2)$$

απ' όπου παίρνουμε $l - Hl = (I - H)l$, αλλά $Hl = A\hat{x} = \hat{l}$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.5-1) και (2.3-3). Οπότε έχουμε $l - \hat{l} = (I - H)l$ και αφού $\hat{v} = \hat{l} - l$ από (2.5-1), παίρνουμε τελικά:

$$\hat{v} = -(I - H)l \quad (2.5-3)$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται, ότι το διάνυσμα των υπολοίπων, ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου των στηλών $R(A)^\perp$. Έχουμε δηλαδή $A\hat{x} \in R(A)$ και $\hat{v} \in R(A)^\perp$. Μεταξύ των δύο διανυσμάτων λοιπόν έχουμε καθετότητα, που εκφράζεται με τη μορφή του εσωτερικού γινομένου ως $(A\hat{x})^T \cdot \hat{v} = 0$ ή $\hat{x}^T A^T \hat{v} = 0$. Ακόμη, επειδή σχεδόν πάντα ισχύει ότι $l \neq 0$, αντικαθιστώντας για το \hat{x} στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{x}^T A^T \hat{v} &= 0 \Rightarrow \\ \{(A^T A)^{-1} A^T l\}^T A^T \hat{v} &= 0 \Rightarrow \\ l^T A(A^T A)^{-1} A^T \hat{v} &= 0 \Rightarrow \\ A^T A(A^T A)^{-1} A^T \hat{v} &= 0 \Rightarrow \\ A^T \hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5-4)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός ($(A^T A)^T = A^T A$).

Αν επεκτείνουμε λίγο την παραπάνω σχέση (2.5-4) και αναλύσουμε το διάνυσμα των υπολοίπων $\hat{\upsilon}$, παίρνουμε: $A^T (A\hat{x} - I) = 0 \Rightarrow A^T A\hat{x} - A^T I = 0$, που είναι το σύστημα των *Κανονικών Εξισώσεων*, στο οποίο είχαμε καταλήξει και παραπάνω. Η σχέση (2.5-4) είναι αυτή που έχει δώσει μάλιστα το όνομα στις εξισώσεις αυτές (ο όρος *normal* εκτός από κανονικές σημαίνει και ορθογώνιες). Φυσικά από τις Κανονικές εξισώσεις μπορούμε να εξαγάγουμε την εκτίμηση για το \hat{x} (όπως έγινε παραπάνω (2.3-2)).

Έχοντας δείξει ότι τα διανύσματα $\hat{l} = A\hat{x}$ και $\hat{\upsilon}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, προκύπτει ότι $I^T I = \hat{l}^T \hat{l} + \hat{\upsilon}^T \hat{\upsilon}$. Το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\upsilon}^T \hat{\upsilon}$ των υπολοίπων παίζει σημαντικό ρόλο στις εκτιμήσεις, τόσο για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, όσο και σε τεστ υποθέσεων.

Η μεταβολή των παραπάνω σχέσεων για την περίπτωση μη ισοβαρών παρατηρήσεων είναι πολύ εύκολη μέσω των σχέσεων (2.2-4) που αναφέρθηκαν παραπάνω. Έτσι, η (2.5-4) γίνεται $A^T P \hat{\upsilon}$, ενώ από την (2.5-3) παίρνουμε:

$$\hat{\upsilon} = -(I - H)l \Rightarrow \hat{\upsilon} = -(I - A(A^T A)^{-1} A^T)l \stackrel{(2.2-4)}{\mapsto} \hat{\upsilon} = -(I - A(A^T P A)^{-1} A^T P)l. \quad (2.5-5)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω σχέση $\hat{\upsilon} = -(I - A(A^T A)^{-1} A^T)l$ (ισοβαρές μοντέλο), μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του διανύσματος των υπολοίπων $\hat{\upsilon}$.

Για το ισοβαρές μοντέλο, έχουμε $V_l = \sigma_0^2 I$. Παρατηρούμε επίσης, ότι ο πίνακας $I - A(A^T A)^{-1} A^T$, έχει την ιδιότητα να είναι ίσος με το τετράγωνό του. Εφαρμόζοντας τώρα το νόμο μετάδοσης συμμεταβλητοτήτων, έχουμε:

$$V_{\hat{\upsilon}} = (I - A(A^T A)^{-1} A^T) \sigma_0^2 I (I - A(A^T A)^{-1} A^T) \Rightarrow V_{\hat{\upsilon}} = \sigma_0^2 (I - A(A^T A)^{-1} A^T) \quad (2.5-6)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις παρακάτω ιδιότητες:

- Αν ο πίνακας X είναι ταυτοδύναμος*, τότε $rank X = tr X$ και
- Αν ο $n \times n$ πίνακας X με $rank X = r$ είναι ταυτοδύναμος, τότε ο πίνακας $I - X$ έχει επίσης αυτή την ιδιότητα και $rank(I - X) = n - r$

έχουμε ότι $rank(A(A^T A)^{-1} A^T) = tr(A(A^T A)^{-1} A^T) = m$ και συνεπάγεται ότι:

$$rank V_{\hat{\upsilon}} = n - m \quad \text{και} \quad tr V_{\hat{\upsilon}} = \sigma^2 (n - m) \quad (2.5-7)$$

* Ο πίνακας X ονομάζεται ταυτοδύναμος, αν ισχύει ότι: $X^2 = X$

Ο αριθμός $n - m$ ονομάζεται βαθμός ελευθερίας (συμβολίζεται συνήθως με r) και χρησιμοποιείται συχνά στη θεωρία εκτίμησης (π.χ. υπολογισμός μεταβλητότητας μονάδας βάρους). Φαίνεται ακόμη από την σχέση (2.5-7), ότι ο πίνακας $V_{\hat{\delta}}$ δεν είναι πλήρους βαθμού και συνεπώς μη αντιστρέψιμος (*singular*).

Κατά τα γνωστά, για το γενικό, ανισοβαρές μοντέλο με $V_l = \sigma_0^2 P$, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$V_{\hat{\delta}} = \sigma_0^2 (P - A(A^T P A)^{-1} A^T) \quad \text{και} \quad \text{rank} V_{\hat{\delta}} = n - m \quad (2.5-8)$$

2.6 Εκτίμηση μεταβλητότητας της μονάδας βάρους

Η εκτίμηση της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0^2$ στο μοντέλο *Gauss-Markoff*, προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος των εκτιμήσεων των υπολοίπων $\hat{\nu}^T \hat{\nu}$, το οποίο όπως έχει αναφερθεί, ελαχιστοποιείται με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων (ή αντίστοιχα το $\hat{\nu}^T P \hat{\nu}$ για το γενικό μοντέλο). Αν συμβολίσουμε το γινόμενο αυτό με Ω , τότε θα έχουμε για την ισοβαρή και μη ισοβαρή περίπτωση αντίστοιχα:

$$\Omega = \hat{\nu}^T \hat{\nu} \quad \text{και} \quad \Omega = \hat{\nu}^T P \hat{\nu} \quad (2.6-1)$$

Έχουμε ήδη δείξει, ότι για τις εκτιμήσεις των υπολοίπων ισχύουν οι σχέσεις (2.5-5), δηλαδή (ισοβαρής και μη ισοβαρής περίπτωση αντίστοιχα):

$$\hat{\nu} = -(I - A(A^T A)^{-1} A^T) l \quad \text{και} \quad \hat{\nu} = -(I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) l \quad (2.6-2)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις σχέσεις αυτές, προκύπτει για την ισοβαρή περίπτωση:

$$\Omega = l^T (I - A(A^T A)^{-1} A^T) l \quad (2.6-3)$$

ενώ για την γενική, ανισοβαρή περίπτωση:

$$\begin{aligned} \Omega &= \hat{\nu}^T P \hat{\nu} \Rightarrow \\ \Omega &= \left[-(I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) l \right]^T P \left[-(I - A(A^T P A)^{-1} A^T P) l \right] \\ &= l^T P l - l^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P l - l^T (A(A^T P A)^{-1} A^T P)^T P l \\ &\quad + l^T (A(A^T P A)^{-1} A^T P)^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P l \end{aligned}$$

αλλά οι πίνακες P και $A(A^T P A)^{-1} A^T$ είναι συμμετρικοί, οπότε

$$\begin{aligned} \Omega &= l^T P l - 2 l^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P l + l^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P l \\ &= l^T P l - l^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P l \Rightarrow \\ \Omega &= l^T (P - P A (A^T P A)^{-1} A^T P) l \quad (2.6-4) \end{aligned}$$

Επειδή και για τα δύο μοντέλα (ισοβαρές ανισοβαρές), το Ω είναι συμμετρικό και έχει την ιδιότητα $\Omega^2 = \Omega$, συνεπάγεται ότι είναι θετικά ημιορισμένο, δηλαδή:

$$\Omega \geq 0$$

Κάνοντας την αντικατάσταση των εκτιμήσεων \hat{x} από τους τύπους (2.3-2) στις σχέσεις (2.6-3) και (2.6-4), παίρνουμε (για το ισοβαρές και ανισοβαρές μοντέλο αντίστοιχα):

$$\Omega = I^T I - I^T A \hat{x} \quad \text{και} \quad \Omega = I^T P I - I^T P A \hat{x} \quad (2.6-5)$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$E\{\Omega\} = \sigma_0^2 (n - m) + \underbrace{(Ax)^T (I - A(A^T A)^{-1} A^T)}_{\hat{0}} \underbrace{Ax}_{\hat{I}} \xrightarrow{A\hat{x} \perp \hat{u}} E\{\Omega\} = \sigma_0^2 (n - m) \quad (2.6-6)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι τα διανύσματα $\hat{I} = A\hat{x}$ και \hat{u} είναι ορθογώνια μεταξύ τους, όπως έχει δείχθει παραπάνω.

Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι η ανεπηρέαστη εκτίμηση της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους (και για τα δύο μοντέλα (2.2-2) και (2.2-3)), είναι η ποσότητα:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{n - m} \quad (2.6-7)$$

Αναφέρεται απλά, ότι υπό την προϋπόθεση της Κανονικής Κατανομής των παρατηρήσεων, η εκτίμηση αυτή της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους είναι επίσης βέλτιστη. Η εκτίμηση της αντίθετα με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας, είναι μη ανεπηρέαστη (biased).

Η μεταβλητότητα της μονάδας βάρους που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται και *a posteriori* μεταβλητότητα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0^2$, σε αντίθεση με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε αρχικά που ονομάζεται *a priori* σ_0^2 .

Χρησιμοποιώντας τώρα την *a posteriori* μεταβλητότητα της μονάδας βάρους, που συνήθως αποτελεί πιο ρεαλιστική ποσότητα από την *a priori* (συνήθως επιλέγεται αυθαίρετα), μπορούμε να επανεκτιμήσουμε τους πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των παρατηρήσεων I και των εκτιμήσεων \hat{x} και \hat{I} , λαμβάνοντας υπ' όψη την ποιότητα της συνόρθωσης.

Παίρνουμε έτσι, από την εξίσωση (2.3-2), την:

$$\hat{V}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T A)^{-1} \quad (2.6-8)$$

και για το διάνυσμα των παρατηρήσεων από τις σχέσεις (2.2-3) και (2.5-1) με το νόμο μετάδοσης συμμεταβλητοτήτων:

$$\hat{V}_l = \hat{\sigma}_0^2 I \quad \text{και} \quad \hat{V}_i = \hat{\sigma}_0^2 A(A^T A)^{-1} A^T \quad (2.6-9)$$

Προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις, ότι $tr\hat{V}_l = \hat{\sigma}_0^2 n \geq tr\hat{V}_i = \hat{\sigma}_0^2 m$ αφού $n \geq m$.

2.7 Τυπολόγιο χρήσης των Ελαχίστων Τετραγώνων στο μοντέλο Gauss-Markoff

Παρακάτω αναγράφονται οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες σχέσεις στην εκτίμηση με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, εφαρμοσμένη στο γενικό, ανισοβαρές μοντέλο Gauss-Markoff.

Κανονικές Εξισώσεις:

$$(A^T P A)\hat{x} = A^T P l \quad (2.7-1)$$

Εκτιμήσεις:

$$\text{του } \hat{x}: \hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (2.7-2)$$

$$\text{του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας: } V_x = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (2.7-3)$$

$$\text{των παρατηρήσεων: } \hat{l} = A\hat{x} = Hl \quad (2.7-4)$$

$$\text{των υπολοίπων: } \hat{v} = \hat{l} - l = -H^\perp l \quad (2.7-5)$$

$$\text{της τετραγωνικής μορφής: } \Omega = \hat{v}^T P \hat{v} = l^T P l - l^T P A \hat{x} \quad (2.7-6)$$

$$\text{της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους: } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{n - m} \quad (2.7-7)$$

Βαθμός Ελευθερίας / Πλεονασμού (*Redundancy*):

$$r = n - m = tr(F) \quad (2.7-8)$$

$$F = P Q_{\hat{x}} = I - P A Q_{\hat{x}} A^T \quad (2.7-9)$$

Πίνακες Κανονικών Εξισώσεων:

$$A^T P A, A^T P l \quad \text{και} \quad l^T P l \quad (2.7-10)$$

Πίνακες (αλγεβρικών) συμπληρωμάτων:

$$Q_{\hat{x}} = \Sigma_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} \quad (2.7-11)$$

$$Q_i = A Q_{\hat{x}} A^T = H P^{-1} H^T = H P^{-1} = P^{-1} H^T \quad (2.7-12)$$

$$Q_{\hat{v}} = P^{-1} - A Q_{\hat{x}} A^T = H^\perp P^{-1} H^{\perp T} = H^\perp P^{-1} = P^{-1} H^{\perp T} \quad (2.7-13)$$

Ορθογώνιες προβολές:

$$H = A(A^T P A)^{-1} A^T P^{-1} \quad (2.7-14)$$

$$H^\perp = I - H \quad (2.7-15)$$

Βασικές ιδιότητες:

$$A^T P \hat{\beta} = 0 \quad (2.7-16)$$

$$H A = A \quad (2.7-17)$$

$$H^\perp A = 0 \quad (2.7-18)$$

$$\Omega \rightarrow \min \quad (2.7-19)$$

2.8 Άλλα στατιστικά μοντέλα

Όλα τα παραπάνω, αφορούν το μοντέλο *Gauss-Markoff* πλήρους βαθμού (δηλαδή $\text{rank}A = m$), που είναι και η πλέον συνήθης περίπτωση κατά τη συνόρθωση δορυφορικών παρατηρήσεων. Το μοντέλο αυτό, είναι ουσιαστικά το μοντέλο των εμμέσων παρατηρήσεων.

Το μοντέλο αυτό, μπορεί να πάρει και άλλες μορφές, ανάλογα με την περίπτωση (π.χ. μη πλήρους βαθμού), με πιο συνηθισμένη την περίπτωση επιβολής δεσμεύσεων στις παρατηρήσεις. Η μέθοδος ονομάζεται και μέθοδος των εμμέσων συμβατικών παρατηρήσεων.

Αν με C συμβολίσουμε τον $s \times m$ (όπου $s < m$) πίνακα των συντελεστών (που αφορούν στις εξισώσεις των δεσμεύσεων) και g το $m \times 1$ διάνυσμα των σταθερών όρων, τότε το μοντέλο παίρνει τη μορφή:

$$E\{l\} = Ax \quad \text{με} \quad g = Cx \quad \text{και} \quad V_l = \sigma_0^2 P \quad (2.8-1)$$

Δεν θα αναφερθούμε περαιτέρω στο μοντέλο, του οποίου τα χαρακτηριστικά και οι εκτιμήσεις, μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία (π.χ. Α.Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου, *Θεωρία Σφαλμάτων και Συνορθώσεις II*)

Πάντως, η επιβολή δεσμεύσεων πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, καθώς μπορεί να οδηγήσει σε «παραμόρφωση» του δικτύου (αν οι δεσμεύσεις δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ή την περιγράφουν με μειωμένη μόνο ακρίβεια). Έτσι, είναι πολλές φορές ασφαλέστερο αντί της επιβολής δεσμεύσεων, να αναθεωρούμε τα βάρη των παρατηρήσεων που αντιστοιχούν σε αυτές.

Τέλος, άλλα σημαντικά στατιστικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές συνορθώσεων, είναι το γενικό μοντέλο *Gauss-Helmert* και το φίλτρο *Bucy-Kalman*.

2.9 Η γενική μέθοδος

Παρακάτω, θα γίνει μία επιγραμματική παρουσίαση των βασικών αρχών της γενικής μεθόδου, λόγω της χρησιμότητάς της σε πλήθος γεωδαιτικών εφαρμογών.

Η συνήθης μέθοδος συνόρθωσης, που ακολουθείται σε γεωδαιτικές εφαρμογές, είναι αυτή των εμμέσων παρατηρήσεων (προκύπτει από το μοντέλο Gauss-Markoff, όταν εφαρμοστούν οι αρχές της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων). Η μέθοδος αυτή όμως, αποτελεί μία ειδική περίπτωση της γενικευμένης αντιμετώπισης.

Η γενική μέθοδος, εφαρμόζεται όταν ορισμένες από τις ανεξάρτητες παραμέτρους μετρούνται άμεσα και ενδιαφέρει ο προσδιορισμός παραμέτρων που δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν. Τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζονται σε προβλήματα προσαρμογής γραμμών ή επιφανειών σε μετρήσεις, όπως επίσης και σε προβλήματα μετατροπών συστημάτων αναφοράς.

Η μορφή του συστήματος των εξισώσεων συνθήκης για την γενικευμένη περίπτωση, θα είναι:

$$A\hat{x} + B(l + v) = k \quad (2.9-1)$$

όπου:

A : ο πίνακας των συντελεστών των παραμέτρων ενδιαφέροντος,

B : ο πίνακας των συντελεστών των μετρημένων στοιχείων,

\hat{x} : το διάνυσμα των εκτιμήσεων (καλύτερων τιμών) των παραμέτρων,

l : το διάνυσμα των παρατηρήσεων,

k : το διάνυσμα των σταθερών όρων.

Θέτοντας $w = k - Bl$ (διάνυσμα σφάλματος κλεισίματος), η σχέση (2.9-1) μετατρέπεται στην:

$$A\hat{x} + Bv = w \quad (2.9-2)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, προκύπτει για την εκτίμηση των παραμέτρων x [Α. Μ. Αγατζά – Μπαλοδήμου 2005]:

$$\hat{x} = \{A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} A\}^{-1} A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} w \quad (2.9-3)$$

Σημειώνεται ότι, από τη σχέση (2.9-2) προκύπτει η λύση με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων, αν τεθεί:

$$B = -I \text{ και } w = \delta l \quad (2.9-4)$$

οπότε θα έχουμε:

$$\hat{x} = (A^T PA)^{-1} A^T P \delta l \quad (2.9-5)$$

που είναι ίδια με την σχέση (2.7-2).

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των μετρήσεων είναι: $V_l = \sigma_0^2 P^{-1}$, προκύπτει (από το νόμο μετάδοσης μεταβλητοτήτων) ότι:

$$V_{\hat{x}} = \sigma_0^2 N_a^{-1} \quad (2.9-6)$$

με

$$N_a = A^T P_a A \text{ και } P_a = (B P^{-1} B^T)^{-1} \quad (2.9-7)$$

Περισσότερες πληροφορίες και αναλυτική περιγραφή του εν λόγω μοντέλου, μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [Α. Μ. Αγατζά – Μπαλοδήμου 2005].

Οι εφαρμογές του μοντέλου είναι, όπως αναφέρθηκε, αρκετές στην γεωδαισία. Επίσης, είναι εύκολη η μετάβαση, σε μοντέλα και φίλτρα που βρίσκουν ευρεία χρήση, τόσο σε εφαρμογές εκτίμησης παραμέτρων, όσο και παρεμβολής ή πρόβλεψης (*least squares collocation, model for prediction and filtering* κ.τ.λ.).

3 Μέθοδοι συνορθώσεων για μεγάλα συστήματα

3.1 Εισαγωγή

Η συνεχής τεχνολογική πρόοδος στον τομέα της δορυφορικής γεωδαισίας και ο ολοένα αυξανόμενος αριθμός μόνιμων σταθμών δορυφορικών παρατηρήσεων ανά τον κόσμο (με τα πλεονεκτήματα που επιφέρει σε μία σειρά τομέων, όπως π.χ. στα συστήματα αναφοράς), καθιστά πλέον ικανή και πολλές φορές μάλιστα μοναδική επιλογή τη χρήση δορυφορικών μετρήσεων σε μία σειρά εφαρμογών ακριβείας.

Η χρήση βέβαια τέτοιων μεθόδων (δορυφορικών), επιφέρει σημαντικές τροποποιήσεις σε σχέση με τις συμβατικές μεθόδους επίγειου εντοπισμού. Είναι πλέον πολύ εύκολη η συλλογή παρατηρήσεων πολύ μεγάλου όγκου (ειδικά σε εφαρμογές στατικού εντοπισμού), οι οποίες αφορούν αποκλειστικά μετρήσεις αποστάσεων. Τα δεδομένα αυτά μάλιστα, δεν είναι εύκολα και άμεσα αντιληπτά.

Για την επεξεργασία της πληροφορίας αυτής, είναι αναγκαία η χρήση λογισμικών πακέτων. Ο μεγάλος όγκος δεδομένων, έχει φέρει στο προσκήνιο την ανάγκη ανάπτυξης αριθμητικών μεθόδων διαχείρισης και επίλυσης μεγάλων συστημάτων, που κάθε άλλο παρά εύκολη είναι ακόμη και με τις σύγχρονες υπολογιστικές δυνατότητες.

Παρακάτω, θα γίνει μία προσπάθεια παρουσίασης λίγων μόνο τέτοιων μεθόδων, που βρίσκουν εφαρμογή κυρίως στο λογισμικό πακέτο επεξεργασίας BERNESE v4.2 (Κεφάλαιο 4.1).

3.2 Απαλοιφή παραμέτρων

3.2.1 Χρησιμότητα της μεθόδου

Η χρήση του συστήματος δορυφορικών παρατηρήσεων (G.P.S.), ειδικά σε εφαρμογές υψηλής ακρίβειας (όπως οι τεκτονικές), όπου οι ώρες παρατήρησης είναι αρκετές, οδηγεί όπως αναφέρθηκε ήδη, στην ανάγκη συνόρθωσης μεγάλων συστημάτων κανονικών εξισώσεων. Συμβαίνει συχνά, να μην μας ενδιαφέρουν όλες οι προς εκτίμηση ποσότητες, αλλά μόνο μία συγκεκριμένη ομάδα από αυτές. Οι υπόλοιπες (ονομάζονται *nuisance parameters*) είναι σκόπιμο να απαλειφθούν από το σύστημα, ώστε οι διαστάσεις αυτού να μειωθούν.

Είναι εξαιρετικά σημαντικό το γεγονός, ότι η απαλοιφή παραμέτρων δεν οδηγεί σε περαιτέρω απώλεια πληροφορίας, εκτός φυσικά από τις ίδιες τις παραμέτρους που απαλείφονται. Η μέθοδος υπολογίζει την επίδραση των προς απαλοιφή παραμέτρων στις υπόλοιπες στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων, το οποίο και τροποποιείται.

(Συνεπώς, η μέθοδος δεν συνίσταται στην απλή διαγραφή των παραμέτρων και των αντίστοιχων σειρών και στηλών τους στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων, κάτι που θα οδηγούσε σε απώλεια πληροφορίας και συνεπώς σε χαμηλότερης αξιοπιστίας εκτίμηση).

3.2.2 Μαθηματικό μοντέλο απαλοιφής

Αν υποθέσουμε ότι από ολόκληρο το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων x , μας ενδιαφέρει μόνο μία συγκεκριμένη ομάδα, έστω η x_1 και $x = [x_1 \ x_2]^T$. Θεωρώντας το σύστημα $Ax = l + v$ με $V_l = \sigma_0^2 P^{-1}$, μπορούμε να το τροποποιήσουμε στη μορφή:

$$[A_1 \ A_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = l + v \quad (3.2-1)$$

και το σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων $A^T P A \hat{x} = A^T P l$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} [A_1 \ A_2]^T P [A_1 \ A_2] \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= [A_1 \ A_2]^T P l \\ \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P [A_1 \ A_2] \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P l \\ \begin{bmatrix} A_1^T P A_1 & A_1^T P A_2 \\ A_2^T P A_1 & A_2^T P A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P l \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

Και θέτοντας $\begin{bmatrix} A_1^T P A_1 & A_1^T P A_2 \\ A_2^T P A_1 & A_2^T P A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.2-3)$$

Για να απαλείψουμε το διάνυσμα \hat{x}_2 από το σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη σειρά της εξίσωσης (3.2-3), με τον όρο $-N_{12}N_{22}^{-1}$, οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ -N_{12}N_{22}^{-1}N_{21} & -N_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -N_{12}N_{22}^{-1}b_2 \end{bmatrix} \quad (3.2-4)$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} N_{11}\hat{x}_1 + N_{12}\hat{x}_2 = \mathbf{b}_1 \\ -N_{12}N_{22}^{-1}N_{21}\hat{x}_1 - N_{12}\hat{x}_2 = -N_{12}N_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 \end{cases}$$

Και προσθέτοντας τις δύο σχέσεις:

$$(N_{11} - \underbrace{N_{12}N_{22}^{-1}N_{21}}_{\alpha})\hat{x}_1 = \mathbf{b}_1 - \underbrace{N_{12}N_{22}^{-1}\mathbf{b}_2}_{\beta} \quad (3.2-5)$$

$$\text{Που μπορεί να γραφεί στη μορφή*}: \tilde{N}_{11}\hat{x}_1 = \tilde{\mathbf{b}}_1 \quad (3.2-6)$$

Είναι φανερό, ότι το νέο σύστημα Κανονικών Εξισώσεων που σχηματίστηκε, είναι απαλλαγμένο από το διάνυσμα \hat{x}_2 . Λόγω όμως των όρων α και β , το νέο σύστημα περιέχει όλη την σχετιζόμενη με το \hat{x}_2 πληροφορία (N_{12} , N_{22} και \mathbf{b}_2).

Είναι πολύ βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου, ότι τόσο ο πίνακας των βαρών \mathbf{P} , όσο και το διάνυσμα των παρατηρήσεων \mathbf{I} , δεν αλλάζουν.

Η τετραγωνική μορφή $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ που προκύπτει για το νέο σύστημα, θα είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Omega}} &= \mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

*Ο πολλαπλασιασμός της δεύτερης σειράς του συστήματος $\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ με τον όρο

$-N_{12}N_{22}^{-1}$, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό ολόκληρου του συστήματος με τον πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$

από τα αριστερά, όπου $\mathbf{Z} = N_{12}N_{22}^{-1}$. Παίρνουμε έτσι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21} & N_{12} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{22} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 - N_{12}N_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow (N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21})\hat{x}_1 &= (\mathbf{b}_1 - N_{12}N_{22}^{-1}\mathbf{b}_2) \end{aligned}$$

που είναι η σχέση στην οποία καταλήξαμε με τον πρώτο τρόπο, δηλαδή η $\tilde{N}_{11}\hat{x}_1 = \tilde{\mathbf{b}}_1$. Φυσικά και για τις υπόλοιπες παραμέτρους τα αποτελέσματα είναι ίδια, με

$$N_{22}\hat{x}_2 = (\mathbf{b}_2 - N_{21}\hat{x}_1)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την: $l^T PA = [A^T Pl]^T \stackrel{(3.2-3)}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T = [b_1^T \quad b_2^T]$

Από τη δεύτερη των εξισώσεων του συστήματος (3.2-3), έχουμε:

$$\begin{aligned} N_{21}\hat{x}_1 + N_{22}\hat{x}_2 &= b_2 \\ \hat{x}_2 &= N_{22}^{-1}(b_2 - N_{21}\hat{x}_1) \end{aligned} \quad (3.2-8)$$

Συνεχίζοντας και αντικαθιστώντας την σχέση (3.2-8) στην (3.2-7), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= l^T Pl - b_1^T \hat{x}_1 - b_2^T N_{22}^{-1}(b_2 - N_{21}\hat{x}_1) \\ &= l^T Pl - b_1^T \hat{x}_1 - b_2^T N_{22}^{-1}b_2 + b_2^T N_{22}^{-1}N_{21}\hat{x}_1 \end{aligned} \quad (3.2-9)$$

Το $b_1^T \hat{x}_1$, είναι απλά το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\langle b_1, \hat{x}_1 \rangle$, και άρα $\langle b_1, \hat{x}_1 \rangle = b_1^T \hat{x}_1 = \hat{x}_1^T b_1$. Λαμβάνοντας υπ' όψη τις σχέσεις (3.2-2) και (3.2-3), $N_{22} = A_2^T PA_2 = (A_2^T PA_2)^T = N_{22}^T$, δηλαδή ο πίνακας N_{22} είναι συμμετρικός. Επίσης, έχουμε $N_{21} = A_2^T PA_1 \Rightarrow N_{21}^T = (A_2^T PA_1)^T = A_1^T PA_2 = N_{12}$. Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.2-9), έχουμε:

$$\tilde{\Omega} = l^T Pl - \underbrace{\hat{x}_1^T (b_1^T - N_{12}N_{22}^{-1}b_2)}_{\tilde{\Omega}} - \underbrace{b_2^T N_{22}^{-1}b_2}_c \quad (3.2-10)$$

Όπου η τετραγωνική μορφή $\tilde{\Omega}$, η οποία είναι αυτή που αντιστοιχεί στο τροποποιημένο σύστημα Κανονικών Εξισώσεων (3.2-1), διορθώνεται κατά τον όρο $c = -b_2^T N_{22}^{-1}b_2$.

Όσο για τον πίνακα συντελεστών βάρους (ουσιαστικά είναι ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, αν η μεταβλητότητα της μονάδας βάρους τεθεί ίση με 1) $Q_{\hat{x}_1}$, από την εξίσωση (3.2-6) συγκρίνοντάς την με την σχέση (2.7-11) παίρνουμε:

$$Q_{\hat{x}_1} = \tilde{N}_{11}^{-1} = (N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21})^{-1} \quad (3.2-11)$$

Αν παρουσιασθεί η ανάγκη εκτίμησης και των υπολοίπων παραμέτρων x_2 , αυτό μπορεί να γίνει εύκολα. Εφόσον έχουν ήδη υπολογισθεί οι ποσότητες N_{22} και N_{21} (έχουν ήδη υπολογισθεί γιατί είναι απαραίτητα σε προηγούμενα στάδια) και έχει εκτιμηθεί το \hat{x}_1 , μπορούμε να εκτιμήσουμε το x_2 από τη δεύτερη των εξισώσεων του συστήματος (3.2-3) ως: $\hat{x}_2 = N_{22}^{-1}(b_2 - N_{21}\hat{x}_1)$, απ' όπου προκύπτει επίσης, με χρήση του νόμου μετάδοσης συμμεταβλητοτήτων ότι: $Q_{\hat{x}_2} = N_{22}^{-1} + N_{22}^{-1}N_{21}(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21})^{-1}N_{12}N_{22}^{-1}$ (όπως έχει δειχθεί, ο πίνακας N_{22} είναι συμμετρικός και ισχύει ότι $N_{21}^T = N_{12}$).

Αξίζει να σημειωθεί επίσης, ότι η εκτίμηση των παραμέτρων ενδιαφέροντος x_1 , μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\hat{x}_1 = (A_1^T \tilde{P} A_1)^{-1} A_1^T \tilde{P} l, \quad \text{όπου} \quad \tilde{P} = P - P A_2 (A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T P \quad (3.2-12)$$

Από την σχέση (3.2-6), έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{11} \hat{x}_1 &= \tilde{b}_1 \\ \hat{x}_1 &= \tilde{N}_{11}^{-1} \tilde{b}_1 \end{aligned} \quad (3.2-13)$$

Και κάνοντας τις αντικαταστάσεις, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21})^{-1} (b_1 - N_{12} N_{22}^{-1} b_2) \\ &= (A_1^T P A_1 - A_1^T P A_2 (A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T P A_1)^{-1} (A_1^T P l - A_1^T P A_2 (A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T P l) \\ &= [A_1^T \underbrace{(P - P A_2 (A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T P)}_{\tilde{P}} A_1]^{-1} [A_1^T \underbrace{(P - P A_2 (A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T P)}_{\tilde{P}} l] \Rightarrow \\ &\hat{x}_1 = (A_1^T \tilde{P} A_1)^{-1} A_1^T \tilde{P} l \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

Σε αυτή τη μορφή, είναι φανερό η ομοιότητα της σχέσης με την σχέση που δίνει την εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων στην «κλασική» μορφή της ($\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l$). Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε εδώ τον πίνακα \tilde{P} , ως ένα πίνακα μετασχηματισμού του αρχικού πίνακα βαρών P , που επιτρέπει την εκτίμηση των παραμέτρων ενδιαφέροντος x_1 , χωρίς την (ταυτόχρονη ή προηγούμενη) εκτίμηση των υπόλοιπων παραμέτρων x_2 .

Ο υπολογισμός των μερικών πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας (δηλαδή των πινάκων που αντιστοιχούν στις παραμέτρους ενδιαφέροντος), από τον αντίστροφο του αρχικού πίνακα των Κανονικών Εξισώσεων (3.2-3), είναι εύκολο να υπολογιστεί. Αποδεικνύεται ότι [Koch 1997]:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &\begin{bmatrix} N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} N_{12} (N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} N_{21} N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1} N_{12} (N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} \\ -(N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} N_{21} N_{11}^{-1} & (N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2-15)$$

Το στοιχείο στην είσοδο (1,1) του παραπάνω πίνακα, είναι ο πίνακας συντελεστών βάρους $N_{\hat{x}_1}^{-1}$, καθώς αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα πινάκων:

$$(A - B D^{-1} C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} \quad (3.2-16)$$

η σχέση (3.2-11) μετασχηματίζεται στην:

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}_1} = \mathbf{N}_{11}^{-1} + \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} (\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1} \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \quad (3.2-17)$$

Άρα με μία απλή διαγραφή των περιπτώσεων σειρών και στηλών, μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των παραμέτρων που τελικά επιλέγουμε προς εκτίμηση.

Αν αντί του \hat{x}_2 επιλέγαμε να απαλείψουμε την άλλη ομάδα αγνώστων παραμέτρων \hat{x}_1 , θα προέκυπταν (κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο) εντελώς ανάλογα αποτελέσματα (π.χ. θα έχουμε $\hat{x}_2 = (\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1)$). Για το λόγο αυτό, οι εξισώσεις παρατήρησης που προκύπτουν από την απαλοιφή κάθε φορά μιας (από τις δύο) ομάδας παρατηρήσεων, ονομάζονται *ισοδύναμες εξισώσεις παρατήρησης* (*equivalent observation equations*), ενώ το γενικότερο σύστημα από το οποίο αυτές προκύπτουν, ονομάζεται σύστημα εξισώσεων ισοδύναμης απαλοιφής (*equivalently eliminated equation system*).

Οι εξισώσεις παρατήρησης που αντιστοιχούν σε κάθε ομάδα αγνώστων, προκύπτουν εύκολα ξεκινώντας από τις σχέσεις στις οποίες έχουμε καταλήξει για κάθε μία από αυτές. Έτσι, για τις παραμέτρους ενδιαφέροντος έχουμε σύμφωνα με την (3.2-5):

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{21}) \hat{x}_1 &= (\mathbf{b}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1) \hat{x}_1 &= (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{l}) \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}) \mathbf{A}_1 \hat{x}_1 &= \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}) \mathbf{l} \end{aligned}$$

$$\text{και αν θέσουμε } \mathbf{J} = \mathbf{A}_2 \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \quad (3.2-18)$$

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{A}_1 \hat{x}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{l} \quad (3.2-19)$$

Οι πίνακες \mathbf{J} και $(\mathbf{I} - \mathbf{J})$ είναι ταυτοδύναμοι, ενώ ο πίνακας $(\mathbf{I} - \mathbf{J})^T \mathbf{P}$ είναι συμμετρικός. Μπορούμε συνεπώς, να μετασχηματίσουμε τις παραπάνω σχέσεις:

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{A}_1 \quad (3.2-20)$$

και

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{l} = \mathbf{A}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (3.2-21)$$

Άρα και η σχέση (3.2-19), γίνεται: $\mathbf{A}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{A}_1 \hat{x}_1 = \mathbf{A}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} \mathbf{l}$, της οποίας η ομοιότητα με τις Κανονικές Εξισώσεις είναι φανερή. Εύκολα λοιπόν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι Εξισώσεις Παρατήρησης, θα είναι της μορφής:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{J}) \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{l} - \mathbf{v}_1, \text{ με πίνακα βαρών } \mathbf{P} \quad (3.2-22)$$

Κατά εντελώς όμοιο τρόπο, προκύπτουν οι Εξισώσεις Παρατήρησης για το διάνυσμα \hat{x}_2 , οι οποίες είναι:

$$(I - K)A_2x_2 = l - v_2, \text{ με πίνακα βαρών } P \quad (3.2-23)$$

όπου $K = A_1N_{11}^{-1}A_1^T P$.

Και εδώ είναι φανερό το σημαντικό πλεονέκτημα της χρήσης των όμοιων εξισώσεων παρατήρησης (3.2-22) και (3.2-23), με σημαντικά μειωμένες τις διαστάσεις τους σε σχέση με το αρχικό σύστημα ενώ οι πίνακες βαρών P και παρατηρήσεων l , δεν τροποποιούνται.

Είναι προφανές, ότι η σχέση $A_1^T P(I - J)A_1 \hat{x}_1 = A_1^T P(I - J)l$ με $J = A_2N_{22}^{-1}A_2^T P$, είναι ταυτόσημη με την μορφή στην οποία είχαμε καταλήξει παραπάνω: $(A_1^T \tilde{P}A_1)\hat{x}_1 = A_1^T \tilde{P}l$ με $\tilde{P} = P - PA_2(A_2^T PA_2)^{-1}A_2^T P$.

Συμπλήρωμα Schur

Αν υποθέσουμε ότι ο τετραγωνικός πίνακας A , μπορεί να γραφεί ως

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

όπου ο πίνακας A_{11} είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας αυτός (A), παρουσιάζει μία σειρά ιδιοτήτων, που βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην Στατιστική. Οι ιδιότητες αυτές, βασίζονται και εξαρτώνται από τον πίνακα

$$Z = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

που ονομάζεται το συμπλήρωμα Schur (Schur complement) του υποπίνακα A_{11} .

Η περαιτέρω ανάλυση των ιδιοτήτων και της χρησιμότητας του όρου, θα ξέφευγε από τον σκοπό της παρούσας εργασίας, είναι όμως ενδεικτική του ευρέως φάσματος των εφαρμογών του, η χρήση του τόσο στη σχέση (3.2-17), όσο και στην εκτίμηση του \hat{x}_2 . Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το συμπλήρωμα Schur, μπορούν να αναζητηθούν στη βιβλιογραφία [Gentle J.E. 2007].

3.2.3 Εφαρμογές

- Παράδειγμα 1^ο

Η μέθοδος της απαλοιφής παραμέτρων, βρίσκει ευρεία εφαρμογή κατά την επεξεργασία δορυφορικών παρατηρήσεων, σε διάφορα στάδια της. Μία απλή εφαρμογή της, είναι ότι μπορεί να αντικαταστήσει τη δημιουργία απλών διαφορών (και όχι μόνο), αφού τα σφάλματα των χρονομέτρων των δορυφόρων (που είναι ο κύριος λόγος δημιουργίας τους) μπορούν να απαλειφθούν.

Έστω ότι έχουμε κοινές παρατηρήσεις, από τρεις σταθμούς $i1$, $i2$ και $i3$, προς n δορυφόρους $k1, \dots, kn$. Χωρίζουμε το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων x , σε δύο ομάδες x_1 και x_2 , όπου το x_1 συμβολίζει τα σφάλματα των χρονομέτρων των δορυφόρων (πολλαπλασιασμένα με την ταχύτητα του φωτός για ευκολία στον σχηματισμό των εξισώσεων). Οι αρχικές εξισώσεις παρατήρησης μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} I & B_{i1} \\ I & B_{i2} \\ I & B_{i3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{i1} \\ l_{i2} \\ l_{i3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Συγκρίνοντας με τη σχέση (3.2-1), έχουμε τις αντιστοιχίες:

$$A_1 = I_{3 \times 1}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ B_{i3} \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_{i1} \\ l_{i2} \\ l_{i3} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad v = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix}.$$

Εδώ θέλουμε να εκτιμήσουμε (κατ' αρχήν τουλάχιστο) το διάνυσμα x_2 , οπότε για να βρούμε τις Εξισώσεις Παρατήρησης που του αντιστοιχούν, αντικαθιστούμε τις ποσότητες στο σύστημα (3.2-23). Έχουμε δηλαδή:

$$N_{11} = A_1^T P A_1 \Rightarrow$$

$$N_{11} = [I \quad I \quad I] P \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$N_{11} = \frac{3}{\sigma_0^2} I$$

Επίσης: $K = A_1 N_{11}^{-1} A_1^T P$, οπότε:

$$K = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \end{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{3} [I \quad I \quad I] P \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

$$I - K = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2I & -I & -I \\ -I & 2I & -I \\ -I & -I & 2I \end{bmatrix}$$

και

$$(I - K)A_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 2B_2 & -B_3 \\ -B_1 & -B_2 & 2B_3 \end{bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα των Εξισώσεων Παρατήρησης που προκύπτει για το διάνυσμα των αγνώστων ενδιαφέροντος x_2 , θα είναι:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 2B_2 & -B_3 \\ -B_1 & -B_2 & 2B_3 \end{bmatrix} x_2 = l - \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$$

όπου το διάνυσμα των υπολοίπων είναι διαφορετικό του αρχικού, έχουν όμως παραμείνει τα ίδια ο πίνακας βαρών και το διάνυσμα των παρατηρήσεων.

Εύκολα τώρα μπορούμε να πάρουμε το σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων, είτε κατευθείαν από τις Εξισώσεις Παρατήρησης, είτε αντικαθιστώντας στις σχέσεις που έχουν ήδη εξαχθεί παραπάνω. Αυτές λοιπόν θα είναι της μορφής:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 2B_2 & -B_3 \\ -B_1 & -B_2 & 2B_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 2B_2 & -B_3 \\ -B_1 & -B_2 & 2B_3 \end{bmatrix} \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 2B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 2B_2 & -B_3 \\ -B_1 & -B_2 & 2B_3 \end{bmatrix} l$$

Εναλλακτικά, αν χρησιμοποιούσαμε τις απλές διαφορές, αυτές θα σχηματίζονταν αν πολλαπλασιάσαμε το αρχικό σύστημα με τον πίνακα:

$$C = \begin{bmatrix} -I & I & 0 \\ 0 & -I & I \end{bmatrix}$$

Θα άλλαζε όμως και ο πίνακας P , καθώς οι παρατηρήσεις πλέον δεν είναι ανεξάρτητες. Σύμφωνα με το νόμο μετάδοσης μεταβλητοτήτων, παίρνουμε:

$$V_i = CPC^T = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 2I & I \\ I & 2I \end{bmatrix}$$

Και ο νέος πίνακας βαρών P' , θα είναι:

$$P' = \frac{1}{3\sigma_0^2} \begin{bmatrix} 2I & I \\ I & 2I \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημα του μη διαγώνιου πίνακα βαρών (ύπαρξη συμμεταβλητοτήτων), εμφανίζεται όταν σχηματίζονται οι διαφορές μεταξύ περισσότερων των δύο σημείων (και εξαρτάται από το πως σχηματίζονται οι μεταξύ τους βάσεις). Το πρόβλημα αυτό είναι σημαντικό, κάνοντας τους υπολογισμούς αρκετά δυσχερέστερους και πιο χρονοβόρους. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας την απαλοιφή παραμέτρων, ο πίνακας βαρών δεν αλλάζει, παραμένει διαγώνιος προσφέροντας έτσι σημαντικό πλεονέκτημα.

Οι εξισώσεις παρατήρησης που προκύπτουν με χρήση των απλών διαφορών, δίνονται από το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} B_2 - B_1 \\ B_3 - B_2 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} l_2 - l_1 \\ l_3 - l_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \end{bmatrix}$$

Και το σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων που προκύπτει (συνεπώς και οι εκτιμήσεις), είναι το ίδιο με αυτό που σχηματίστηκε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απαλοιφής παραμέτρων.

Εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής παραμέτρων, γίνεται σε διάφορα στάδια επεξεργασίας δορυφορικών δεδομένων. Στο λογισμικό BERNESSE v4.2 για παράδειγμα, η μέθοδος παίζει καίριο ρόλο στην εκτίμηση των ασαφειών φάσης.

- Παράδειγμα 2^ο

Η εφαρμογή που ακολουθεί, παρουσιάζει την διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου απαλοιφής παραμέτρων, κατά τον υπολογισμό της συνδυασμένης επίλυσης από πολλές ημέρες παρατήρησης (π.χ. όπως διεξάγεται από τα προγράμματα συνόρθωσης ADDNEQ και COMPAR του λογισμικού BERNESSE v4.2).

Οι εξισώσεις παρατήρησης κάθε σειράς παρατηρήσεων, μπορούν να γραφούν ως:

$$A_i x + Z_i \gamma_i = l_i + v_i \quad \text{με} \quad V_i = \sigma_i^2 P_i^{-1}$$

όπου ο δείκτης \cdot_i υποδεικνύει την σειρά παρατηρήσεων. Με τη μορφή αυτή μπορεί να γίνει διάκριση των παραμέτρων, ώστε το διάνυσμα x να περιέχει τις κοινές σε όλες τις σειρές παρατηρήσεων παραμέτρους (π.χ. συντεταγμένες), ενώ το διάνυσμα γ_i περιέχει μόνο παραμέτρους που σχετίζονται με τη σειρά παρατηρήσεων i (π.χ. τροποσφαιρικές παράμετροι).

Θεωρώντας τις υποθέσεις ανεξαρτησίας μεταξύ των δύο σειρών και χρήσης ίδιων προσεγγιστικών τιμών, μπορούν να εφαρμοστούν οι σχέσεις και διαδικασίες που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3.2.

Αν έχουμε δύο τέτοιες σειρές παρατηρήσεων, σχηματίζεται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} A_1 & Z_1 & 0 \\ A_2 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Από το οποίο προκύπτουν οι Κανονικές Εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 & A_1^T P_1 Z_1 & A_2^T P_2 Z_2 \\ Z_1^T P_1 A_1 & Z_1^T P_1 Z_1 & 0 \\ Z_2^T P_2 A_2 & 0 & Z_2^T P_2 Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 \\ Z_1^T P_1 l_1 \\ Z_2^T P_2 l_2 \end{bmatrix}$$

Για την απαλοιφή των παραμέτρων $\hat{\gamma}_1$ και $\hat{\gamma}_2$, ακολουθούμε την διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.2.2. Έτσι λοιπόν, ξεκινώντας με το $\hat{\gamma}_1$ προκύπτει (αν θεωρήσουμε σαν πίνακα N τον υποπίνακα $\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 & A_1^T P_1 Z_1 \\ Z_1^T P_1 A_1 & Z_1^T P_1 Z_1 \end{bmatrix}$), σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2-4) και (3.2-5)

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 - A_1^T P_1 Z_1 (Z_1^T P_1 Z_1)^{-1} Z_1^T P_1 A_1 & A_2^T P_2 Z_2 \\ Z_2^T P_2 A_2 & Z_2^T P_2 Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 - A_1^T P_1 Z_1 (Z_1^T P_1 Z_1)^{-1} Z_1^T P_1 l_1 \\ Z_2^T P_2 l_2 \end{bmatrix}$$

Με τον ίδιο τρόπο προχωρούμε και στην απαλοιφή των παραμέτρων $\hat{\gamma}_2$, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left| A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 - A_1^T P_1 Z_1 (Z_1^T P_1 Z_1)^{-1} Z_1^T P_1 A_1 - A_2^T P_2 Z_2 (Z_2^T P_2 Z_2)^{-1} Z_2^T P_2 A_2 \right| \hat{x} = \\ & = \left| A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 - A_1^T P_1 Z_1 (Z_1^T P_1 Z_1)^{-1} Z_1^T P_1 l_1 - A_2^T P_2 Z_2 (Z_2^T P_2 Z_2)^{-1} Z_2^T P_2 l_2 \right| \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται (Κεφάλαιο 3.3), ότι οι εκτιμήσεις που υπολογίζονται αν γίνει ταυτόχρονη συνόρθωση όλων των παρατηρήσεων, είναι ακριβώς οι ίδιες που υπολογίζονται αν επιλύσουμε κάθε σειρά παρατηρήσεων ξεχωριστά και έπειτα συνδυάσουμε τα αποτελέσματα (εκτιμήσεις ή Κανονικές Εξισώσεις). Στην περίπτωση αυτή, θα είχαμε για κάθε σειρά παρατηρήσεων το σύστημα Κανονικών Εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i A_i & A_i^T P_i Z_i \\ Z_i^T P_i A_i & Z_i^T P_i Z_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{\gamma}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^T P_i l_i \\ Z_i^T P_i l_i \end{bmatrix}$$

οπότε απαλοίφοντας τις παραμέτρους $\hat{\gamma}_i$ και υπολογίζοντας την εκτίμηση του x_i , προκύπτει:

$$\hat{x}_i = (A_i^T P_i A_i - A_i^T P_i Z_i (Z_i^T P_i Z_i)^{-1} Z_i^T P_i A_i)^{-1} (A_i^T P_i l_i - A_i^T P_i Z_i (Z_i^T P_i Z_i)^{-1} Z_i^T P_i l_i)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.2 (δημιουργία συστήματος ψευδοπαρατηρήσεων και συνδυασμένη εκτίμηση), υπολογίζουμε ακριβώς την ίδια εκτίμηση για τις παραμέτρους x με αυτή που εξάχθηκε παραπάνω.

Εξαιρετικής σημασίας είναι το γεγονός, ότι παρόλη την απαλοιφή των παραμέτρων $\hat{\gamma}_i$ και άρα την σημαντική μείωση του όγκου των εξισώσεων (ειδικά αν πρόκειται για τροποσφαιρικές παραμέτρους), δεν έχουμε μείωση της αρχικής πληροφορίας. Η ιδιότητα αυτή γίνεται φανερή στην σχέση που δίνει την τελική εκτίμηση του x , όπου συμπεριλαμβάνονται όλοι οι πίνακες που υπήρχαν στις αρχικές εξισώσεις παρατήρησης.

3.2.4 Προσθήκη παραμέτρων

Στην περίπτωση επεξεργασίας δεδομένων GPS από πολλές ημέρες εργασιών υπαίθρου, είναι δυνατόν, να δημιουργηθεί ανάγκη προσδιορισμού νέων παραμέτρων (που δεν έχουν συμπεριληφθεί στις αρχικές κανονικές εξισώσεις). Η χρήση αυτής της μεθόδου σε συνδυασμό με την μέθοδο της απαλοιφής παραμέτρων, προσφέρει διέξοδο στα προβλήματα που δημιουργούνται συχνά, λόγω του μεγάλου όγκου παρατηρήσεων.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι υπάρχει μία σχέση που συνδέει τις ήδη υπάρχουσες παραμέτρους x_i , με αυτές που θέλουμε να προσθέσουμε δ_1 και δ_2 , που εκφράζεται ως:

$$x_i = f(\delta_1) + g(\delta_2) \quad (3.2-24)$$

όπου όπως και στα προηγούμενα, ο δείκτης i με $i = 1, 2, \dots, m$ δηλώνει την σειρά των παρατηρήσεων.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραμμικοποιηθεί (αν φυσικά είναι μη-γραμμική):

$$x_i = F_i \delta_1 + G_i \delta_2 + c_i \quad (3.2-25)$$

$$\text{Ή σε μορφή πινάκων: } x = \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + c = B\delta + c \quad (3.2-26)$$

Οι εξισώσεις παρατήρησης θα πάρουν τη μορφή:

$$A(B\delta + c) = l + v \Rightarrow AB\delta = l + v - Ac \quad (3.2-27)$$

και συνεπώς παίρνουμε το σύστημα Κανονικών Εξισώσεων:

$$(AB)^T P(AB)\hat{\delta} = (AB)^T P(l - Ac) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} A^T P A \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \hat{\delta} = \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} A^T P(l - Ac) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} F_i^T A^T P A F_i & F_i^T A^T P A G_i \\ G_i^T A^T P A F_i & G_i^T A^T P A G_i \end{bmatrix} \hat{\delta} = \begin{bmatrix} F_i^T A^T P(l - Ac) \\ G_i^T A^T P(l - Ac) \end{bmatrix} \quad (3.2-28)$$

Και αν χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό συμβολισμό: $A^T P A = N$ και $A^T P l = b$, οι παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} F_i^T N F_i & F_i^T N G_i \\ G_i^T N F_i & G_i^T N G_i \end{bmatrix} \hat{\delta} = \begin{bmatrix} F_i^T (b_i - N_i c_i) \\ G_i^T (b_i - N_i c_i) \end{bmatrix} \quad (3.2-29)$$

Αν για παράδειγμα έχουμε δύο σειρές παρατηρήσεων, η τελική εκτίμηση προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση (3.2-29):

$$\begin{bmatrix} F_1^T N_1 F_1 + F_2^T N_2 F_2 & F_1^T N_1 G_1 + F_2^T N_2 G_2 \\ G_1^T N_1 F_1 + G_2^T N_2 F_2 & G_1^T N_1 G_1 + G_2^T N_2 G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^T (b_1 - N_1 c_1) + F_2^T (b_2 - N_2 c_2) \\ G_1^T (b_1 - N_1 c_1) + G_2^T (b_2 - N_2 c_2) \end{bmatrix} \quad (3.2-30)$$

Μία από τις πιο συχνές εφαρμογές της παραπάνω μεθόδου, είναι η εκτίμηση (τεκτονικών) ταχυτήτων σημείων, από δορυφορικές παρατηρήσεις (προσφέρεται στο λογισμικό BERNESE v4.2, μέσω του προγράμματος ADDNEQ).

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε $i = 1, 2, \dots, m$ σειρές παρατηρήσεων. Για κάθε μία από αυτές, οι προς εκτίμηση παράμετροι x_i είναι συντεταγμένες όπως παρατηρήθηκαν την συγκεκριμένη εποχή t_i . Μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα γραμμικό μοντέλο συναρτήσεως του χρόνου, της μορφής:

$$x_i = x_{t_0} + \Delta t_i v_{t_0} \quad (3.2-31)$$

όπου ως t_0 ορίζουμε την εποχή αναφοράς (που μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα), x_{t_0} είναι οι συντεταγμένες για την εποχή αναφοράς (νέες άγνωστες παράμετροι), Δt_i είναι η διαφορά μεταξύ της εποχής κάθε σειράς παρατηρήσεων και της εποχής αναφοράς (γνωστές παράμετροι) και v_{t_0} είναι οι ταχύτητες των σημείων για την εποχή αναφοράς (νέες άγνωστες παράμετροι).

Έχουμε λοιπόν αντικαταστήσει το αρχικό διάνυσμα αγνώστων x_i , με το διάνυσμα

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_{t_0} \\ v_{t_0} \end{bmatrix}$. Συγκρίνοντας τώρα με την σχέση (3.2-25), μπορούμε να κάνουμε τις

αντικαταστάσεις:

$$c_i = 0, \quad F_i = I, \quad G_i = \Delta t_i I \quad (3.2-32)$$

Φυσικά, για να γίνει εκτίμηση των ταχυτήτων απαιτούνται τουλάχιστο δύο σειρές παρατηρήσεων (δύο διαφορετικές εποχές). Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε δύο τέτοιες σειρές (θεωρούμε δηλαδή για λόγους απλότητας ότι $m = 2$), κάνοντας τις αντικαταστάσεις στο σύστημα (3.2-30), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 & \Delta t_1 (A_1^T P_1 A_1) + \Delta t_2 (A_2^T P_2 A_2) \\ \Delta t_1 (A_1^T P_1 A_1) + \Delta t_2 (A_2^T P_2 A_2) & \Delta t_1^2 (A_1^T P_1 A_1) + \Delta t_2^2 (A_2^T P_2 A_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{t_0} \\ \hat{v}_{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 \\ \Delta t_1 (A_1^T P_1 l_1) + \Delta t_2 (A_2^T P_2 l_2) \end{bmatrix} \quad (3.2-33)$$

Τέλος, σημειώνεται ότι στην παραπάνω εφαρμογή, θεωρείται ότι σε όλη τη χρονική διάρκεια των παρατηρήσεων κάθε μίας σειράς, η επίδραση των ταχυτήτων είναι αμελητέα. Η υπόθεση αυτή σαφώς ισχύει για τις τεκτονικές εφαρμογές, όπου οι σειρές παρατηρήσεων διαρκούν λίγες ημέρες και εκτιμούνται ταχύτητες με παρατηρήσεις που καλύπτουν μεγάλο χρονικό διάστημα (συνήθως μήνες ή και χρόνια).

Η προσθήκη νέων παραμέτρων, με τυπικό παράδειγμα την εκτίμηση ταχυτήτων που αναπτύχθηκε παραπάνω, ανήκει σε ένα γενικότερο πλαίσιο εφαρμογών, που βασίζονται στον μετασχηματισμό των παραμέτρων (*parameter transformation*). Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιείται πολύ συχνά στο λογισμικό BERNESSE v4.2, για την υποστήριξη διάφορων εφαρμογών και προγραμμάτων.

3.3 Μέθοδος Διαδοχικών συνορθώσεων από προσθήκη ή αφαίρεση παρατηρήσεων

3.3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των διαδοχικών συνορθώσεων, έχει γίνει ευρέως γνωστή και χρησιμοποιούμενη σε μεγάλο πλήθος γεωδαιτικών εφαρμογών. Αναπτύχθηκε αρχικά από τον Helmert (περί τα 1872) και πολλές εφαρμογές που στηρίζονται στην μέθοδο (ειδικά στον τομέα της γεωδαισίας) είναι γνωστές με την ονομασία *Helmert blocking*.

Παλιότερα, λόγω της έλλειψης ισχυρών υπολογιστικών μηχανών, η μέθοδος ήταν ιδιαίτερα σημαντική. Τον ίδιο καίριο ρόλο συνεχίζει να παίζει και σήμερα, όπου η

συνεχής ανάπτυξη των δορυφορικών μεθόδων παρατήρησης (και ιδιαίτερα του G.P.S.), έχει οδηγήσει σε μαθηματικά μοντέλα εξαιρετικά μεγάλου μεγέθους.

Η ιδιότητα που δίνει στην συγκεκριμένη μέθοδο την μεγάλη της χρησιμότητα, είναι ότι τα αποτελέσματα που θα παίρναμε αν επεξεργαζόμασταν όλες τις μετρήσεις ταυτόχρονα, σε ένα βήμα, είναι τα ίδια με αυτά στα οποία θα καταλήγαμε, αν χωρίζαμε τις παρατηρήσεις, τις επεξεργαζόμασταν ξεχωριστά και τελικά συνδυάζαμε τα επιμέρους αποτελέσματα σε μία τελική εκτίμηση (φυσικά όλα τα παραπάνω γίνονται με την μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε, ότι η μέθοδος των διαδοχικών συνορθώσεων με χρήση της μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων που θα παρουσιασθούν παρακάτω, ισχύουν μόνο στην περίπτωση όπου όλα τα συστήματα Κανονικών Εξισώσεων που εμπλέκονται, βασίζονται στις ίδιες προσωρινές (a priori) τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους. Αν η υπόθεση αυτή δεν ικανοποιείται, επιβάλλεται ο μετασχηματισμός των Κανονικών Εξισώσεων, ο οποίος πάντως είναι απλός και βασίζεται σε έναν απλό γραμμικό μετασχηματισμό του διάνυσματος των αγνώστων παραμέτρων.

Ας υποθέσουμε ότι οι Κανονικές Εξισώσεις, που σχηματίστηκαν με βάση τις προσωρινές τιμές $x|_0$, πρέπει να μετασχηματιστούν σύμφωνα με τις νέες προσωρινές τιμές $x|_{0c} = x|_0 + dx$. Η εξίσωση μετασχηματισμού για τις άγνωστες παραμέτρους x , θα είναι της μορφής:

$$\Delta \hat{x} = \Delta \tilde{x} + dx \quad (3.3-1)$$

και συνεπώς, οι Κανονικές Εξισώσεις θα είναι:

$$A^T P A \Delta \tilde{x} = A^T P \Delta \tilde{l} \quad \text{με} \quad \Delta \tilde{l} = \Delta l - A dx \quad (3.3-2)$$

Σε κάθε περίπτωση πάντως, οι εκτιμήσεις \hat{x} πρέπει να είναι ανεξάρτητες της επιλογής των προσωρινών τιμών.

3.3.2 Ισοδυναμία Διαδοχικών Συνορθώσεων και ταυτόχρονης συνόρθωσης

Για να δείξουμε την ισοδυναμία των δύο μεθόδων (ταυτόχρονης και διαδοχικής συνόρθωσης), θα εκτιμήσουμε πρώτα τις παραμέτρους σύμφωνα με την κλασική, ταυτόχρονη μέθοδο και έπειτα θα επιβεβαιώσουμε ότι φτάνουμε στην ίδια εκτίμηση χρησιμοποιώντας την μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων.

Έστω λοιπόν, ότι έχουμε τις Εξισώσεις Παρατήρησης:

$$A_1 x_c = l_1 + v_1 \quad \text{με} \quad V_{l_1} = \sigma_1^2 P_1^{-1} \quad (3.3-3)$$

$$A_2 x_c = l_2 + v_2 \quad \text{με} \quad V_{l_2} = \sigma_2^2 P_2^{-1}$$

όπου δηλαδή, έχουμε διαιρέσει το διάνυσμα των παρατηρήσεων σε δύο ομάδες l_1 και l_2 , οι οποίες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες (η υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι

σημαντική) και θέλουμε να εκτιμήσουμε το διάνυσμα x_c , το οποίο είναι κοινό για τις δύο εξισώσεις.

Η θεώρηση δύο ομάδων παρατηρήσεων είναι αρκετή, ώστε με την απόδειξη της ισοδυναμίας των μεθόδων, να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα για περισσότερες ομάδες, θεωρώντας ότι μία (ή και οι δύο) από τις ομάδες είναι προϊόν προηγούμενης συνόρθωσης διαφορετικών ομάδων.

1. Ταυτόχρονη συνόρθωση

Σε μορφή πινάκων, το παραπάνω σύστημα εξισώσεων (3.3-3), γράφεται:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x_c = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_c^2 \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}$$

ή

$$A_c x_c = l_c + v_c \quad \text{με} \quad V_{l_c} = \sigma_c^2 P_c^{-1} \quad (3.3-4)$$

Εδώ φαίνεται, από την μορφή του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, η ανεξαρτησία των δύο ομάδων παρατηρήσεων που θέσαμε σαν προϋπόθεση παραπάνω.

Αντικαθιστώντας τις κατάλληλες τιμές στο μοντέλο των Κανονικών Εξισώσεων, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \hat{x}_c = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$$(A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2) \hat{x}_c = A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 \quad (3.3-5)$$

και άρα η εκτίμηση των παραμέτρων θα είναι:

$$\hat{x}_c = (A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2)^{-1} (A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2) \quad (3.3-6)$$

2. Διαδοχική συνόρθωση

Με τη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων, γίνονται δύο ξεχωριστές συνορθώσεις με βάση την κάθε ομάδα παρατηρήσεων. Έπειτα, υπολογίζεται η τελική εκτίμηση, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες επιλύσεις.

Ξεκινώντας πάλι από ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής (3.3-3), έχουμε

$$A_1 x_1 = l_1 + v_1 \quad \text{με} \quad V_{l_1} = \sigma_1^2 P_1^{-1}$$

$$A_2 x_2 = l_2 + v_2 \quad \text{με} \quad V_{l_2} = \sigma_2^2 P_2^{-1}$$

με τη μόνη διαφορά, ότι εδώ έχουμε δύο ξεχωριστά διανύσματα x_1 και x_2 , το καθένα από τα οποία ικανοποιεί μόνο τις αντίστοιχες παρατηρήσεις (δηλαδή τις l_1 και l_2 αντίστοιχα).

Το παραπάνω σύστημα, μπορεί να γραφεί και στην πιο περιεκτική μορφή:

$$A_i x_i = l_i + v_i \quad \text{με} \quad V_i = \sigma_i^2 P_i^{-1} \quad \text{όπου } i = 1, 2 \quad (3.3-7)$$

Επιλύοντας ξεχωριστά για κάθε μία από τις δύο εξισώσεις και λαμβάνοντας υπ' όψη όσα έχουν προαναφερθεί παραπάνω, θα έχουμε:

$$\hat{x}_i = (A_i^T P_i A_i)^{-1} A_i^T P_i l_i \quad \text{με} \quad \hat{V}_{\hat{x}_i} = \hat{\sigma}_i^2 (A_i^T P_i A_i)^{-1} = \hat{\sigma}_i^2 N_i^{-1} \quad (3.3-8)$$

Για να υπολογίσουμε την τελική, συνδυασμένη εκτίμηση, θα σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τις επιμέρους εκτιμήσεις, ένα σύστημα ψευδο-παρατηρήσεων, της μορφής:

$$A_l x_c = l_l + v_l \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_c^2 P_l^{-1} \quad (3.3-9)$$

ή πιο αναλυτικά:

$$\begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \hat{x}_c = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{l1} \\ v_{l2} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_c^2 \begin{bmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ 0 & N_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.3-10)$$

Ο όρος ψευδο-παρατήρηση, χρησιμοποιείται εδώ, ακριβώς γιατί το διάνυσμα των παρατηρήσεων l_l δεν αποτελείται από μετρημένες ποσότητες, αλλά από τις ήδη υπολογισμένες επιμέρους εκτιμήσεις. Σαν συνέπεια αυτού, οι πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των επιμέρους εκτιμήσεων, έχουν συνδυαστεί για να δώσουν τον συνολικό πίνακα βαρών.

Από το σύστημα αυτό των Εξισώσεων Παρατήρησης, προκύπτει το σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων, που είναι:

$$\begin{aligned} (A_l^T P_l A_l) \hat{x}_c &= A_l^T P_l l_l \\ [I \quad I] \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \hat{x}_c &= [I \quad I] \cdot \begin{bmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ 0 & N_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \\ (N_1 + N_2) \hat{x}_c &= N_1^{-1} \hat{x}_1 + N_2^{-1} \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (3.3-11)$$

αλλά $N_i = (A_i^T P_i A_i)$, οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε την:

$$(A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2) \hat{x}_c = A_1^T P_1 A_1 \hat{x}_1 + A_2^T P_2 A_2 \hat{x}_2 \quad (3.3-12)$$

και χρησιμοποιώντας τις επιμέρους Κανονικές Εξισώσεις $(A_i^T P_i A_i) \hat{x}_i = A_i^T P_i l_i$ για $i = 1, 2$

$$(A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2) \hat{x}_c = A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 \quad (3.3-13)$$

Καταλήξαμε δηλαδή, στο ίδιο σύστημα Κανονικών Εξισώσεων (και άρα και στις ίδιες εκτιμήσεις) με αυτό στο οποίο είχαμε καταλήξει χρησιμοποιώντας όλες τις παρατηρήσεις ταυτόχρονα.

Αν έχουμε περισσότερες ομάδες παρατηρήσεων l_i με $i = 1, 2, \dots, k$, με την προϋπόθεση ότι οι ομάδες παρατηρήσεων είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, το σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων θα γίνει:

$$\left(\sum_{i=1}^k A_i^T P_i A_i \right) \hat{x}_c = \sum_{i=1}^k A_i^T P_i l_i \quad (3.3-14)$$

Προφανώς, η μέθοδος επιτρέπει να γίνονται οι υπολογισμοί είτε μετά από κάθε περίοδο μετρήσεων (εποχή), είτε όλοι μαζί στο τέλος. Αυτή η τελευταία πάντως επιλογή, μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα βοηθητική, αν η επίλυση δεν είναι σταθερή στο ξεκίνημά της (αν δηλαδή η λύση δεν συγκλίνει γρήγορα) [Xu 2007].

Η εκτίμηση της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους στην περίπτωση της ταυτόχρονης συνόρθωσης, θα είναι για την γενική περίπτωση k ομάδων παρατηρήσεων:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{\Omega_c}{r_c} = \frac{\hat{v}_c^T P_c \hat{v}_c}{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{v}_{ic}^T P_{ic} \hat{v}_{ic}}{r_c} \quad (3.3-15)$$

όπου:

\cdot_c : δείκτης που δηλώνει την συνδυασμένη επίλυση,

$\hat{v}_c = [\hat{v}_{1c}, \dots, \hat{v}_{kc}]^T$: τα υπόλοιπα που προκύπτουν από την συνδυασμένη επίλυση,

$n_c = \sum_{i=1}^k n_i$: αριθμός παρατηρήσεων όλων των ομάδων,

$r_c = n_c - m_c$: βαθμός ελευθερίας του συνδυασμένου μοντέλου.

Για κάθε ένα σύστημα της μορφής (3.3-3), η εκτίμηση της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, θα είναι κατά τα γνωστά:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\Omega_i}{r_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} \hat{v}_i^T P_i \hat{v}_i}{r_i} \quad (3.3-16)$$

όπου:

\cdot_i : δείκτης που δηλώνει το μοντέλο με διάνυσμα παρατηρήσεων l_i ,

$\hat{v}_i = A_i \hat{x}_i - l_i$: τα υπόλοιπα που προκύπτουν από την σειρά παρατηρήσεων i ,

n_i : αριθμός παρατηρήσεων της σειράς i ,

$r_i = n_i - m_i$: βαθμός ελευθερίας του μοντέλου της σειράς παρατηρήσεων i .

Γενικά, θα ισχύει ότι $\hat{v}_{ic} \neq \hat{v}_i$, οπότε και $\hat{\sigma}_c \neq \sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i$, δηλαδή η εκτίμηση του τυπικού

σφάλματος της μονάδας βάρους στην περίπτωση της ταυτόχρονης συνόρθωσης όλων των παρατηρήσεων, δεν ισούται (στην γενική περίπτωση) με το άθροισμα των τυπικών σφαλμάτων των μονάδων βάρους όλων των ομάδων παρατηρήσεων. Μπορούμε όμως, να εκφράσουμε το $\hat{\sigma}_c$ συναρτήσει των $\hat{\sigma}_i$:

Ας υποθέσουμε ότι τα υπόλοιπα της ταυτόχρονης συνόρθωσης \hat{v}_{ic} , μπορούν να εκφραστούν ως συνδυασμός των υπολοίπων κάθε σειράς παρατηρήσεων \hat{v}_i συν ένα διάνυσμα διορθωτικών όρων $\Delta \hat{v}_{ic}$.

$$\hat{v}_{ic} = \hat{v}_i + \Delta \hat{v}_{ic} \quad (3.3-17)$$

και αφού για τα υπόλοιπα ισχύει: $\hat{v}_{ic} = A_i \hat{x}_c - l_i$ και $\hat{v}_i = A_i \hat{x}_i - l_i$, προκύπτει :

$$\Delta \hat{v}_{ic} = A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i) \quad (3.3-18)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{ic}^T P_i \hat{v}_{ic} &= (\hat{v}_i + \Delta \hat{v}_{ic})^T P_i (\hat{v}_i + \Delta \hat{v}_{ic}) \\ &= \hat{v}_i^T P_i \hat{v}_i + \hat{v}_i^T P_i \Delta \hat{v}_{ic} + \Delta \hat{v}_{ic}^T P_i \hat{v}_i + \Delta \hat{v}_{ic}^T P_i \Delta \hat{v}_{ic} \\ &= \hat{v}_i^T P_i \hat{v}_i + \hat{v}_i^T P_i A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i) + (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T A_i^T P_i \hat{v}_i + (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T A_i^T P_i A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i) \end{aligned} \quad (3.3-19)$$

όπως έχει δειχθεί παραπάνω όμως, ισχύει ότι:

$$A_i^T P_i \hat{v}_i = 0 \Rightarrow (A_i^T P_i \hat{v}_i)^T = 0 \Rightarrow \hat{v}_i^T P_i A_i = 0,$$

οπότε από την σχέση (3.3-19) παίρνουμε:

$$\hat{v}_{ic}^T P_i \hat{v}_{ic} = \hat{v}_i^T P_i \hat{v}_i + (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T A_i^T P_i A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i) \quad (3.3-20)$$

ή σε πιο συμπυκνωμένη μορφή:

$$\Omega_{ic} = \Omega_i + (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T A_i^T P_i A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i) \quad (3.3-21)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις σχέσεις (3.3-15) και (3.3-16):

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^m \hat{v}_{ic}^T P_c \hat{v}_{ic} = \sum_{i=1}^m \Omega_{ic}$$

και

$$\Omega_i = \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^T P_i \hat{v}_i = r_i \hat{\sigma}_i^2$$

προκύπτει ότι:

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^m \Omega_{ic} = \sum_{i=1}^m \Omega_i + \sum_{i=1}^m (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T A_i^T P_i A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i) \quad (3.3-22)$$

Η εκτίμηση λοιπόν του τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους για την ταυτόχρονη συνόρθωση $\hat{\sigma}_c$, ως συνάρτηση αυτής των διαδοχικών συνορθώσεων $\hat{\sigma}_i$, είναι:

$$\hat{\sigma}_c = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i) \cdot r_i + \sum_{i=1}^m (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T A_i^T P_i A_i (\hat{x}_c - \hat{x}_i)}{r_c}} \quad (3.3-23)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτει από τις ξεχωριστές επιλύσεις για κάθε ομάδα παρατηρήσεων, ενώ ο δεύτερος, είναι ένας διορθωτικός όρος, που επιβάλλεται λόγω του ότι τα τυπικά σφάλματα του πρώτου όρου δεν αναφέρονται στην συνδυασμένη επίλυση.

Μένοντας στην εκτίμηση του τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους για την ταυτόχρονη συνόρθωση, μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα ακόμη ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Ξεκινώντας από το σύστημα ψευδο-παρατηρήσεων (3.3-10) και επαυξάνοντάς το ώστε να περιέχει m σειρές παρατηρήσεων, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \vdots \\ v_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \hat{x}_c \quad \mu\epsilon \quad P_I = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (3.3-24)$$

ή

$$A_I x = l_I + v_I$$

Τα υπόλοιπα λοιπόν, στο σύστημα αυτό, θα είναι:

$$\begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \vdots \\ v_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \hat{x}_c - \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \vdots \\ v_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_c - \hat{x}_1 \\ \hat{x}_c - \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_c - \hat{x}_m \end{bmatrix} \quad (3.3-25)$$

Υπολογίζοντας την τετραγωνική μορφή Ω_I του συστήματος, προκύπτει:

$$\begin{aligned}\Omega_I &= \hat{\mathbf{v}}_I^T \mathbf{P}_I \hat{\mathbf{v}}_I \\ &= [(\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_1)^T \quad (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_2)^T \quad \dots \quad (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_m)^T] \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_m \end{bmatrix} \\ &= (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_1)^T N_1 (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_1) + (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_2)^T N_2 (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_2) + \dots + (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_m)^T N_m (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_m) \\ &= \sum_{i=1}^m (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_i)^T N_i (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_i) \quad (3.3-26)\end{aligned}$$

Καταλήξαμε δηλαδή, στη σχέση: $\Omega_I = \sum_{i=1}^m (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_i)^T N_i (\hat{\mathbf{x}}_c - \hat{\mathbf{x}}_i)$, η οποία όμως είναι ο δεύτερος όρος της εκτίμησης του τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους για την ταυτόχρονη συνόρθωση (3.3-23) και αντίστοιχα της (3.3-21). Αναδιατυπώνοντας λοιπόν την έκφραση (3.3-21), μπορούμε να γράψουμε:

$$\Omega_{ic} = \Omega_i + \Omega_{ii} \quad \text{και} \quad \Omega_c = \sum_{i=1}^m (\Omega_i + \Omega_{ii}) \quad (3.3-27)$$

Η τετραγωνική μορφή Ω_I , μπορεί να υπολογιστεί και από τον τύπο (2.7-6):

$$\begin{aligned}\Omega_I &= \mathbf{l}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{l}_I - \mathbf{l}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{A}_I \hat{\mathbf{x}}_c \\ &= \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{x}}_i^T N_i \hat{\mathbf{x}}_i - \sum_{i=1}^m (\hat{\mathbf{x}}_i^T N_i) \hat{\mathbf{x}}_c \\ &= \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{x}}_i^T N_i (\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_c) \\ &= \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_c) \quad (3.3-28)\end{aligned}$$

Σχόλιο: Το λογισμικό BERNSE v4.2, χρησιμοποιεί στις περισσότερες των περιπτώσεων, τους Πίνακες Κανονικών Εξισώσεων (Κεφάλαιο 2.7) $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ και $\mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$. Για να υπολογίσει λοιπόν το a-posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους για τη συνδυασμένη επίλυση, υπολογίζει τις ποσότητες:

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{l}_i - \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_c \quad (3.3-29)$$

και

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{\Omega_c}{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^m l_i^T P_i l_i - \sum_{i=1}^m l_i^T P_i A_i \hat{x}_c}{r_c} \quad (3.3-30)$$

Τέλος, θα αναφέρουμε δύο ακόμη χρήσιμες σχέσεις οι οποίες απαντώνται συχνά στη βιβλιογραφία. Η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων, στην περίπτωση της ταυτόχρονης συνόρθωσης m σειρών παρατηρήσεων, προκύπτει όπως είδαμε από τη σχέση:

$$\hat{x}_c = \left(\sum_{i=1}^m A_i^T P_i A_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m A_i^T P_i l_i \right) \quad (3.3-31)$$

Απ' όπου φαίνεται ότι ο πίνακας συντελεστών βάρους είναι ίσος με:

$$Q_{\hat{x}_c} = N_{\hat{x}_c}^{-1} = \left(\sum_{i=1}^m A_i^T P_i A_i \right)^{-1} \quad (3.3-32)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα πινάκων:

$$(D + ACB)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}AKBD^{-1} \quad \mu\epsilon \quad K = (C^{-1}BD^{-1}A)^{-1} \quad (3.3-33)$$

και θεωρώντας την περίπτωση όπου έχουμε δύο σειρές παρατηρήσεων ($m = 2$), μπορούμε να μετασχηματίσουμε την έκφραση του πίνακα συντελεστών βάρους ως:

$$\begin{aligned} Q_{\hat{x}_c} &= (A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2)^{-1} \\ &= (A_1^T P_1 A_1)^{-1} - (A_1^T P_1 A_1)^{-1} A_2^T K A_2 (A_1^T P_1 A_1)^{-1} \\ &= Q_1 - Q_1 A_2^T K A_2 Q_1 \\ &= (I - Q_1 A_2^T K A_2) Q_1 \quad \mu\epsilon \quad K = (P_2^{-1} + A_2 Q_1 A_2^T)^{-1} \end{aligned} \quad (3.3-34)$$

οπότε και η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων, μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \hat{x}_c &= (A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2)^{-1} (A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2) \\ &= Q_{\hat{x}_c} (A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2) \\ &= (Q_1 - Q_1 A_2^T K A_2 Q_1) (A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2) \\ &= Q_1 A_1^T P_1 l_1 + Q_1 A_2^T P_2 l_2 - Q_1 A_2^T K A_2 Q_1 A_1^T P_1 l_1 - Q_1 A_2^T K A_2 Q_1 A_2^T P_2 l_2 \\ &= (Q_1 A_1^T P_1 l_1 - Q_1 A_2^T K A_2 Q_1 A_1^T P_1 l_1) + (I - Q_1 A_2^T K A_2) Q_1 A_2^T P_2 l_2 \\ &\quad \xrightarrow{\hat{x}_1 = Q_1 A_1^T P_1 l_1} \\ \hat{x}_c &= (I - Q_1 A_2^T K A_2) \hat{x}_1 + Q_{\hat{x}_c} A_2^T P_2 l_2 \end{aligned} \quad (3.3-35)$$

Μαθηματικά, οι δύο σχέσεις που αναπτύχθηκαν παραπάνω για την εκτίμηση της συνδυασμένης επίλυσης στην περίπτωση διαδοχικών σειρών παρατηρήσεων

$\hat{x}_c = \left(\sum_{i=1}^m A_i^T P_i A_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m A_i^T P_i l_i \right)$ (λέγεται και *accumulation of least squares*) και

$\hat{x}_c = (I - Q_1 A_2^T K A_2) \hat{x}_1 + Q_{\hat{x}_c} A_2^T P_2 l_2$ είναι ισοδύναμες. Στην πράξη όμως, η εφαρμογή των τύπων συνεπάγεται σφάλματα στρογγυλοποίησης, που αναπόφευκτα

επιδρούν (λιγότερο ή περισσότερο) στην ποιότητα των εκτιμήσεων και δυστυχώς διογκώνονται όσο προχωρούν οι υπολογισμοί. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από τους δύο παραπάνω τύπους, προκύπτει [G. Xu 2007] ότι η σχέση $\hat{x}_e = (I - Q_1 A_2^T K A_2) \hat{x}_1 + Q_{\hat{x}_e} A_2^T P_2 l_2$ προκαλεί ολίσθηση των αποτελεσμάτων, η οποία μάλιστα δεν είναι αμελητέα μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα.

3.3.3 Προσέγγιση κατά Kalman

Η παραπάνω αντιμετώπιση του προβλήματος των διαδοχικών συνορθώσεων, ακολουθείται συνήθως όταν ο αριθμός των προστιθέμενων στο αρχικό σύστημα παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερος από τις άγνωστες καθοριστικές παραμέτρους m . Όταν ισχύει το αντίστροφο (όταν δηλαδή $n_2 \leq m$), ακολουθείται συνήθως η λεγόμενη *αντιμετώπιση κατά Kalman*, που προκύπτει από την εφαρμογή των αρχών του *φίλτρου Kalman*. Δεν θα αναφερθούμε διεξοδικά στις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν το εν λόγω φίλτρο, είναι όμως χρήσιμη η παράθεση ορισμένων βασικών στοιχείων του.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη παράξει μία συνδυασμένη επίλυση, βασισμένη σε $m-1$ σειρές παρατηρήσεων, ώστε όλοι οι πίνακες που αναφέρονται σε αυτήν θα συμβολίζονται με τον δείκτη \cdot_{m-1} . Λαμβάνοντας υπ' όψη την m -οστή σειρά παρατηρήσεων l_m προκύπτουν οι Κανονικές Εξισώσεις σύμφωνα με τη σχέση (3.3-14):

$$(A_{m-1}^T P_{m-1} A_{m-1} + A_m^T P_m A_m) \hat{x}_m = A_{m-1}^T P_{m-1} l_{m-1} + A_m^T P_m l_m \quad (3.3-36)$$

Από το σύστημα αυτό, μπορούν προκύψουν δύο διαφορετικά συστήματα Εξισώσεων Παρατήρησης:

1. το «κλασικό» σύστημα που εμφανίζεται στον τύπο (3.3-4)

$$Ax_m = l + v \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_0^2 P^{-1}$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} A_{m-1} \\ A_m \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_{m-1} \\ l_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_l = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} P_{m-1}^{-1} & 0 \\ 0 & P_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.3-37)$$

2. και αυτό που προκύπτει, όταν αντί των παρατηρήσεων, χρησιμοποιήσουμε τις υπολογισμένες εκτιμήσεις και τους αντίστοιχους πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας. Δηλαδή:

$$Ax_m = l + v \quad \text{με} \quad V_l = \sigma_0^2 P^{-1}$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ A_m \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} \hat{x}_{m-1} \\ l_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_l = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} A_{m-1}^T P_{m-1} A_{m-1} & 0 \\ 0 & P_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.3-38)$$

όπου δηλαδή, στην πρώτη εξίσωση φαίνεται ότι θεωρούμε τις εκτιμήσεις \hat{x}_m ίσες με τις προηγούμενες \hat{x}_{m-1} συν κάποιο σφάλμα.

Με περαιτέρω ανάλυση των σχέσεων που προκύπτουν από το σύστημα αυτό και λαμβάνοντας υπ' όψη και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε με την παραπάνω μέθοδο, καταλήγουμε σε μία σειρά τύπων, οι σημαντικότεροι των οποίων φαίνονται παρακάτω:

$$\hat{x}_m = \hat{x}_{m-1} + F_m v_m \quad (\text{λέγονται και εξισώσεις συστήματος}) \quad (3.3-39\alpha)$$

$$\Sigma_m = \Sigma_{m-1} - F_m A_m N_{m-1}^{-1} \quad (3.3-39\beta)$$

$$\Omega_m = \Omega_{m-1} + \bar{v}_m^T \bar{P} \bar{v}_m \quad (3.3-39\gamma)$$

όπου:

$$\bar{v}_m = l_m - A_m \hat{x}_{m-1} \quad (3.3-39\delta)$$

$$F_m = N_{m-1}^{-1} A_m^T \bar{P} \quad (\text{πίνακας κέρδους Kalman gain matrix}) \quad (3.3-39\epsilon)$$

$$N_{m-1}^{-1} = (A_{m-1}^T P_{m-1} A_{m-1})^{-1} \quad (3.3-39\sigma\tau)$$

$$\bar{P} = (P_m^{-1} + A_m N_{m-1}^{-1} A_m^T)^{-1} \quad (3.3-39\zeta)$$

Ουσιαστικά, οι τύποι αυτοί αντιστοιχούν στο βήμα ενημέρωσης (*update step*) του φίλτρου Kalman. Όταν οι παράμετροι \hat{x}_m (στην ορολογία του φίλτρου Kalman ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης- *state vector*) είναι ανεξάρτητοι του χρόνου και ο θόρυβος θεωρείται αμελητέος, οι εξισώσεις του φίλτρου Kalman για την εκτίμηση του \hat{x}_m είναι ίδιες με αυτές που περιγράφηκαν παραπάνω (για τη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων). Όταν όμως οι διαστάσεις του συστήματος είναι αρκετά μεγάλες (πολλές παρατηρήσεις), η εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών συνορθώσεων, είναι ευκολότερη.

Εάν οι σειρές παρατηρήσεων l_{m-1} και l_m έχουν συνορθωθεί με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων και ακολουθήσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων σχηματίζοντας το σύστημα ψεύδο-παρατηρήσεων όπως περιγράφηκε στη σχέση (3.3-10) μεταβάλλοντας τους συμβολισμούς ανάλογα με αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν στη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{array}{l|l} \hat{x}_m = \hat{x}_c & N_m^{-1} = N_c^{-1} \\ \hat{x}_{m-1} = \hat{x}_1 & N_{m-1}^{-1} = N_1^{-1} \\ l_m = \hat{x}_2 & \Omega_m = \Omega_c \\ A_m = I & \Omega_{m-1} = \Omega_1 \\ P_m^{-1} = N_2^{-1} & v_m = \hat{x}_2 - \hat{x}_1 \end{array}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις ποσότητες αυτές στις σχέσεις (3.3-39), θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{x}_c &= \hat{x}_1 + N_1^{-1} (N_1^{-1} + N_2^{-1})^{-1} (\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \\ N_c^{-1} &= N_1^{-1} - N_1^{-1} (N_1^{-1} + N_2^{-1})^{-1} N_1^{-1} \\ \Omega_c &= \Omega_1 + (\hat{x}_2 - \hat{x}_1)^T (N_1^{-1} + N_2^{-1})^{-1} (\hat{x}_2 - \hat{x}_1)\end{aligned}\quad (3.3-40)$$

Μετασχηματίζοντας τους παραπάνω πίνακες, προκύπτουν όμοιες σχέσεις με αυτές της προηγούμενης μεθόδου (των διαδοχικών συνορθώσεων). Οι πίνακες των σχέσεων (3.3-39), βρίσκουν εφαρμογή στη συνόρθωση εμμέσων παρατηρήσεων με δεσμεύσεις, καθώς καθιστούν εύκολη την εύκολο τον προσδιορισμό της επίδρασης μιας δέσμευσης στη λύση καθώς και την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή την απαλοιφή των δεσμεύσεων και τον υπολογισμό της μη-δεσμευμένης λύσης.

3.3.4 Εκτίμηση τυπικού σφάλματος για ομάδες παραμέτρων

Για να αποκτήσουμε καλύτερη αίσθηση της ποιότητας εκτίμησης μιας συγκεκριμένης ομάδας αγνώστων παραμέτρων, είναι δυνατόν να διακρίνουμε τη συνολική εκτίμηση της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, σε εκτιμήσεις που προκύπτουν από συγκεκριμένες ομάδες. Η μέθοδος αυτή, πλησιάζει την γενικότερη τεχνική της *εκτίμησης της συνιστώσας της μεταβλητότητας* (variance component estimation), που σκοπεύει στην εξαγωγή πιο αντιπροσωπευτικών και ρεαλιστικών πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας.

Παρόμοια με τη μέθοδο που αναλύθηκε παραπάνω, αυτή των διαδοχικών συνορθώσεων, μπορούμε να σχηματίσουμε ένα σύστημα ψευδο-παρατηρήσεων, όπου πλέον διαιρείται το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων σε ομάδες παραμέτρων.

Για να γίνει ο παραπάνω διαχωρισμός σαφέστερος, αναφέρουμε ένα παράδειγμα. Αν είχαμε δορυφορικές παρατηρήσεις τριών ημερών, θα μπορούσαμε (συνήθης πρακτική) να συνορθώσουμε κάθε ημέρα ξεχωριστά και έπειτα να σχηματίσουμε ένα σύστημα ψευδο-παρατηρήσεων, όπου ουσιαστικά το διάνυσμα των παρατηρήσεων θα απαρτιζόταν από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις, της μορφής (3.3-10) και έπειτα να υπολογίζαμε τη συνδυασμένη επίλυση \hat{x}_c . Υπάρχει όμως η δυνατότητα να προχωρήσουμε ένα βήμα παραπέρα και έχοντας το σύστημα των ψευδο-παρατηρήσεων, να ανακατατάξουμε τις εξισώσεις, ώστε να δημιουργήσουμε ομάδες παραμέτρων (π.χ. συντεταγμένες, παραμέτρους τροπόσφαιρας, κ.τ.λ.).

Το τυπικό σφάλμα που προκύπτει έτσι, για ομάδες παραμέτρων, συνιστά αξιόλογη ποιοτική πληροφορία που μάλιστα έχει σχέση με αυτό που υπολογίζεται από τις επαναληπτικότητες (ανά εποχή εμφανίσεις των εκτιμημένων παραμέτρων).

Αν υποθέσουμε ότι χωρίζουμε τις άγνωστες παραμέτρους σε δύο ομάδες, τότε σύμφωνα με τις σχέσεις (3.3-14) και (3.3-29) θα έχουμε:

$$\hat{x}_c = (A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2)^{-1} (A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2) \quad (3.3-41)$$

$$\Omega_c = l_1^T P_1 l_1 + l_2^T P_2 l_2 - (l_1^T P_1 A_1 + l_2^T P_2 A_2) \hat{x}_c \quad (3.3-42)$$

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{\Omega_c}{r_c} \quad (3.3-43)$$

Για κάθε ομάδα παρατηρήσεων, η μεταβλητότητα της μονάδας βάρους είναι:

$$\Omega_{1c} = \hat{\boldsymbol{v}}_{1c}^T \mathbf{P}_{1c} \hat{\boldsymbol{v}}_{1c} \neq \Omega_{1c} \quad \text{με} \quad \hat{\sigma}_{1c}^2 = \frac{\Omega_{1c}}{r_{1c}} \quad (3.3-44)$$

$$\Omega_{2c} = \hat{\boldsymbol{v}}_{2c}^T \mathbf{P}_{2c} \hat{\boldsymbol{v}}_{2c} \neq \Omega_{2c} \quad \text{με} \quad \hat{\sigma}_{2c}^2 = \frac{\Omega_{2c}}{r_{2c}}$$

όπου η μη ισότητα προκύπτει από τη σχέση (3.3-21) και το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{v}}_{1c}$ αναφέρεται στην συνδυασμένη επίλυση και διαφέρει (γενικά) από το $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ (όπως ακριβώς και σε όσα αναπτύχθηκαν στη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων).

Επίσης, από τη σχέση (3.3-22), προκύπτει ότι:

$$\Omega_c = \Omega_{1c} + \Omega_{2c} \quad \text{και} \quad r_c = r_{1c} + r_{2c} \quad (3.3-45)$$

Θα πρέπει εδώ να δοθεί προσοχή στο γεγονός, ότι $r_1 \neq r_{1c}$ και $r_2 \neq r_{2c}$. Η μη ισότητα αυτή, προκύπτει από εφαρμογή του τύπου (2.7-9), όπου αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3-46)$$

οπότε:

$$r_{1c} = \text{tr}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_1^T) = n_1 - \text{tr}(\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_1^T) \quad (3.3-47)$$

$$r_{2c} = \text{tr}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_2^T) = n_2 - \text{tr}(\mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_c} \mathbf{A}_2^T)$$

σε αντίθεση με τους βαθμούς ελευθερίας r_i , όπου είχαμε: $r_i = \text{tr}(\mathbf{I}_i - \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}_i} \mathbf{A}_i^T) = n_i - \text{tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T) = n_i - m_i$, επειδή ο πίνακας $\mathbf{T} = \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T$ είναι ταυτοδύναμος και άρα $\text{rank}(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T})$.

• Εφαρμογές:

Η μέθοδος εκτίμησης μεταβλητότητας για συγκεκριμένες ομάδες παραμέτρων, βρίσκει πολλές εφαρμογές, ειδικά στις μέρες μας όπου οι υπολογισμοί με ηλεκτρονικούς υπολογιστές, έχουν γίνει σαφώς γρηγορότεροι. Εκτός από τους συνήθεις τύπους παραμέτρων (π.χ. συντεταγμένες, παραμέτρους τροπόσφαιρας, ασάφειες, κτλ), συχνά χρησιμοποιείται και για ομάδες παραμέτρων δέσμησης.

1. Εκτίμηση μεταβλητότητας ομάδας ενός συγκεκριμένου είδους παραμέτρων

Η εκτίμηση μεταβλητότητας μιας ομάδας ίδιων παραμέτρων, θα μπορούσε να αφορά σε μία συνιστώσα συγκεκριμένου σημείου μετρημένου σε διαφορετικές σειρές παρατηρήσεων. Ας υποθέσουμε ότι μετασχηματίζουμε το διάνυσμα των παρατηρήσεων, ώστε όλες οι παράμετροι ενός συγκεκριμένου τύπου να περιέχονται στο διάνυσμα I_{2c} (στο σύστημα των ψευδο-παρατηρήσεων), ενώ όλες οι υπόλοιπες στο I_{c1} . Συμβολίζοντας με τον δείκτη \cdot_k τον συγκεκριμένο τύπο παραμέτρων, θα έχουμε:

$$I_2 = [\hat{x}_{1k}, \dots, \hat{x}_{n_2k}]^T, \quad A_2 = [1, \dots, 1]^T, \quad P_2 = \begin{bmatrix} N_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{n_2k} \end{bmatrix}$$

και

(3.3-48)

$$\hat{v}_{2c} = [\hat{x}_{ck} - \hat{x}_{1k}, \dots, \hat{x}_{ck} - \hat{x}_{n_2k}]^T$$

Για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, παίρνουμε:

$$\Omega_{2c} = \hat{v}_{2c}^T P_{2c} \hat{v}_{2c} = \sum_{i=1}^{n_2} (\hat{x}_{ck} - \hat{x}_{ik})^2 (A_i^T P_i A_i)_k \quad (3.3-49)$$

$$r_{2c} = \text{tr}(I_2 - P_2 A_2 Q_{\hat{x}_{ck}} A_2^T) = n_2 - Q_{\hat{x}_{ck}} \sum_{i=1}^{n_2} (A_i^T P_i A_i)_k \quad (3.3-50)$$

$$\hat{\sigma}_{2c}^2 = \frac{\Omega_{2c}}{r_{2c}} \quad (3.3-51)$$

Στην περίπτωση όπου οι παράμετροι \hat{x}_{ik} με $i=1,2,\dots,n_2$ είναι ανεξάρτητοι όλων των υπόλοιπων παραμέτρων, τότε προφανώς στον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας που θα προκύψει από τη συνδυασμένη συνόρθωση, ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες παραμέτρους θα είναι τριγωνικός και

θα έχουμε: $N_{\hat{x}_{ck}}^{-1} = \sum_{i=1}^{n_2} ((A_i^T P_i A_i)_k)^{-1}$, οπότε $r_{2c} = n_2 - 1$ και $\hat{\sigma}_{2c} = \sqrt{\frac{\Omega_{2c}}{n_2 - 1}}$. Η

σχέση αυτή όμως, είναι το μέσο ανηγμένο τυπικό σφάλμα της παραμέτρου.

Σχόλιο: Η ποσότητα που υπολογίζεται με τη συγκεκριμένη μέθοδο στο πακέτο επεξεργασίας BERNESE v4.2, ονομάζεται RMS2 και δίνεται για κάθε συνιστώσα.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι τιμές αυτές πλησιάζουν περισσότερο την πραγματική ακρίβεια συνόρθωσης, σε σχέση με τα τυπικά σφάλματα (RMS) που υπολογίζονται με τον συμβατικό τρόπο (χαρακτηρίζονται και ως «εσωτερική» ακρίβεια). Η θεμελιώδης διαφορά τους έγκειται στην χρήση διαφορετικού βαθμού ελευθερίας: για τα τυπικά σφάλματα (που υπολογίζονται συμβατικά - RMS), ο βαθμός ελευθερίας υπολογίζεται με βάση τον συνολικό αριθμό παρατηρήσεων, ενώ για τα RMS2, ο βαθμός ελευθερίας πλησιάζει τον αριθμό εμφανίσεων της συγκεκριμένης παραμέτρου στην συνδυασμένη επίλυση (επαναληπτικότητα).

Η σχέση $\hat{\sigma}_{2c} = \sqrt{\frac{\Omega_{2c}}{n_2 - 1}}$, καταδεικνύει την σύνδεση μεταξύ της εκτίμησης της

μεταβλητότητας της μονάδας βάρους μίας παραμέτρου με το τυπικό σφάλμα που υπολογίζεται από τις επαναληπτικότητες.

2. Εκτίμηση μεταβλητότητας ομάδας μιας κατηγορίας παραμέτρων

Μία συχνά χρησιμοποιούμενη τέτοια ομάδα παραμέτρων είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου, ή όλες οι συντεταγμένες που συμμετέχουν στη συνόρθωση. Η μεταβλητότητα που υπολογίζεται με τον συγκεκριμένο τρόπο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως a posteriori μεταβλητότητα μόνο για τη συγκεκριμένη ομάδα παραμέτρων, οδηγώντας έτσι σε ρεαλιστικότερες εκτιμήσεις ακρίβειας (για την ομάδα αυτή). Αν ως ομάδα παραμέτρων θεωρηθούν οι συντεταγμένες, τότε η υπολογιζόμενη τιμή μπορεί να ερμηνευθεί ως μεταβλητότητα μονάδας βάρους των συντεταγμένων (ενώ αυτή που υπολογίζεται από τη συνδυασμένη συνόρθωση είναι ουσιαστικά η a posteriori μεταβλητότητα μονάδας βάρους των αρχικών παρατηρήσεων φάσης).

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με το προηγούμενο παράδειγμα, αν στις σειρές παρατηρήσεων εμπλέκονται u_c συντεταγμένες, θα έχουμε:

$$l_2 = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n_2}]_{n_2 \cdot u_c \times u_c}^T, \quad A_2 = [1, \dots, 1]_{n_2 \cdot u_c \times u_c}^T, \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{n_2} \end{bmatrix}_{n_2 \cdot u_c \times n_2 \cdot u_c}$$

και (3.3-52)

$$\hat{v}_{2c} = [\hat{x}_c - \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_c - \hat{x}_{n_2}]_{n_2 \cdot u_c \times u_c}^T$$

Για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, παίρνουμε:

$$\Omega_{2c} = \sum_{i=1}^{n_2} (\hat{x}_c - \hat{x}_i)^T (A_i^T P_i A_i) (\hat{x}_c - \hat{x}_i) \quad (3.3-53)$$

$$r_{2c} = n_2 - \sum_{k=1}^{u_c} \sum_{i=1}^{n_2} (A_i^T P_i A_i Q_{\hat{x}_c}) \quad (3.3-54)$$

$$\hat{\sigma}_{2c}^2 = \frac{\Omega_{2c}}{r_{2c}} \quad (3.3-55)$$

Σχόλιο: Στο λογισμικό BERNESE v4.2, προβλέπεται ο υπολογισμός τέτοιας μεταβλητότητας, όπου ομάδα παραμέτρων θεωρούνται οι συντεταγμένες, τόσο στο πρόγραμμα ADDNEQ όσο και στο COMPAR. Στο ADDNEQ υπολογίζεται μόνο όταν γίνεται απαλοιφή των υπόλοιπων παραμέτρων που συμμετέχουν στη συνδυασμένη συνόρθωση και ονομάζεται *Sigma of Coordinate Group*. Στο COMPAR αντίθετα υπολογίζεται πάντα και ονομάζεται *RMS of unit weight for Coordinate Comparison*.

4 Συνόρθωση με το λογισμικό BERNESE v4.2

4.1 Γενικά

Το λογισμικό BERNESE v4.2, αποτελεί ένα σύγχρονο, επιστημονικών προδιαγραφών πακέτο επεξεργασίας δορυφορικών (και όχι μόνο) παρατηρήσεων. Δημιουργήθηκε και ανανεώνεται συνεχώς από το Αστρονομικό Ινστιτούτο του Πανεπιστημίου της Βέρνης (*Astronomical Institute University of Berne*), ώστε να πληρεί τις προϋποθέσεις των πιο απαιτητικών γεωδαιτικών εφαρμογών ακριβείας. Το εν λόγω λογισμικό, χρησιμοποιείται από διάφορες υπηρεσίες ανά τον κόσμο, για εργασίες όπως η υλοποίηση παγκόσμιων συστημάτων αναφοράς (όπως και του Ευρωπαϊκού EUREF), ο προσδιορισμός των δορυφορικών τροχιών και των παραμέτρων γήινης περιστροφής και πολλές ακόμα εργασίες ακριβείας.

Από το 1993 και μετά, οπότε και η διεθνής υπηρεσία I.G.S. διαθέτει ελεύθερα την πληροφορία για τις δορυφορικές τροχιές ακριβείας που παράγει, έγινε δυνατή η επίτευξη ακριβειών μικρότερων του εκατοστού στην οριζοντιογραφία και περίπου ενός εκατοστού στο υψόμετρο, ακόμη και σε περιφερειακά δίκτυα μεγέθους μερικών εκατοντάδων χιλιομέτρων. Παράλληλα, η συνεχής πρόοδος τόσο στον τομέα της τεχνολογίας (δέκτες, δορυφόροι, υπολογιστικά μέσα, κ.τ.λ.), όσο και του θεωρητικού υπόβαθρου (βελτιωμένα συστήματα αναφοράς, μοντέλα και παραμετροποίηση επιδράσεων και σφαλμάτων, κ.τ.λ.), ωθούν σε ακόμη υψηλότερα επίπεδα ποιότητας.

Μία ενδεικτική εικόνα της ακρίβειας που μπορούμε να επιτύχουμε με το λογισμικό BERNESE v4.2, φαίνεται στον Πίνακα 4.1-1, όπου αναγράφονται τα αποτελέσματα των επιλύσεων για μία σειρά εργασιών, διεξαγόμενων από διαφορετικούς φορείς [Hugentobler et all. 2001]. Οι τυπικές αβεβαιότητες είναι πάντα αρκετά αισιόδοξες, πολλές φορές μάλιστα πέρα από τα όρια μιας ρεαλιστικής εκτίμησης. Οι «πραγματικές» ακρίβειες, προέρχονται είτε από επίγειες μετρήσεις (καμπάνια *Turtman*), είτε από σύγκριση με άλλες μεθόδους δορυφορικής γεωδαισίας, όπως η VLBI ή SLR. Σημειώνεται επίσης, ότι οι επιλύσεις για τις καμπάνιες CODE και EUREF παράγονται σε εβδομαδιαία βάση.

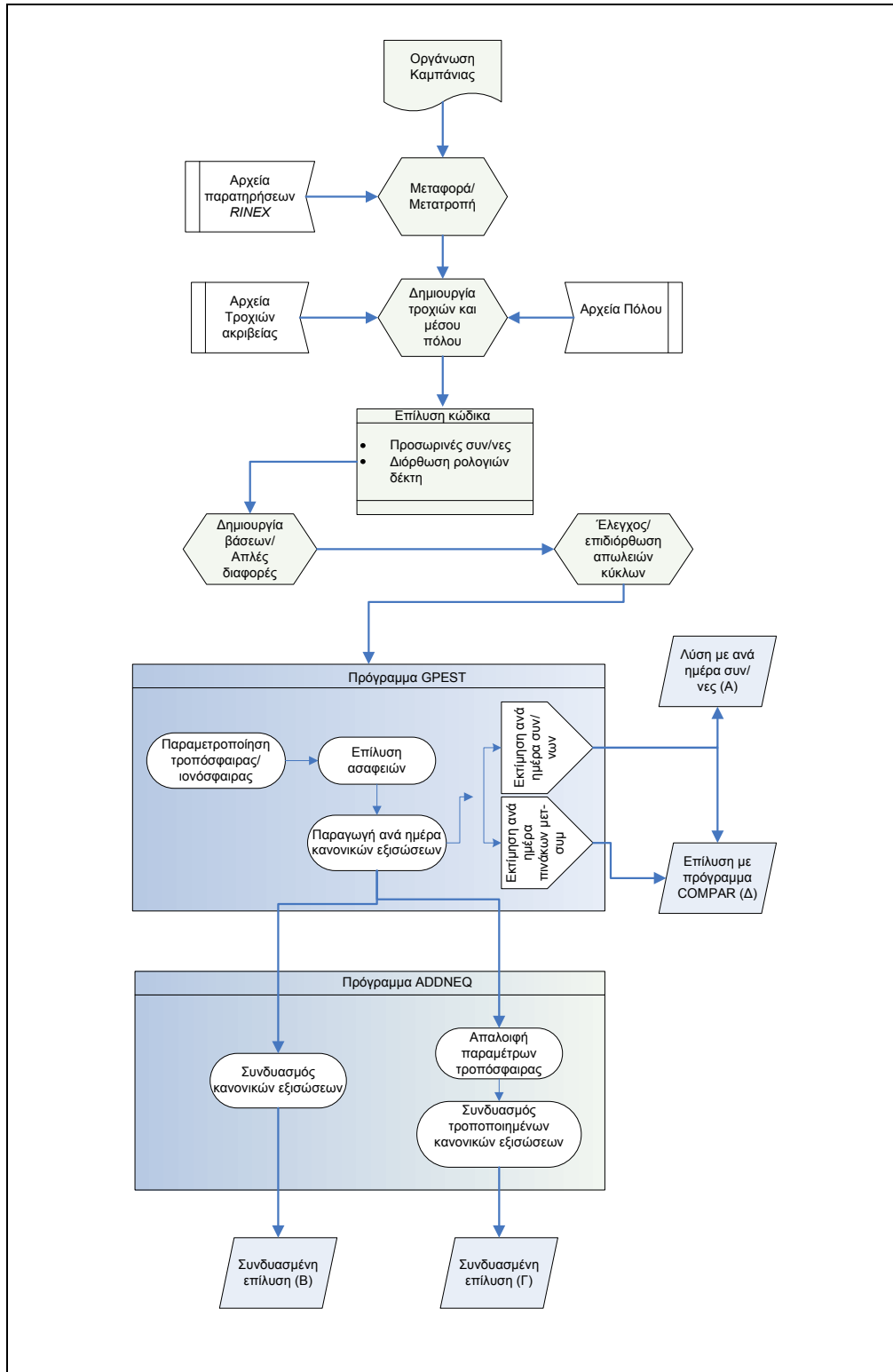
Όνομα Καμπάνιας	Έτος	Φορέας Υλοποίησης	Αριθμός σταθμών	Μέγεθος (km)	Ακρίβεια (m)	
					formal	actual
Turtman	1994	<i>Swiss Geodetic Commission</i>	8	4x6	0.001	0.001
Swiss Network	1986-1995	<i>Federal Office of Topography</i>	300	180x180	0.001	-
CODE	1992- ...	<i>Center for Orbit Determination (Europe)</i>	100	Παγκόσμιο	0.001	0.004
EUREF	1996- ...	<i>EUREF Commission</i>	75	4000x2000	0.001	0.004
IGEX	1998- ...	<i>CODE/BKG</i>	28	Παγκόσμιο	0.002	0.010

Πίνακας 4.1-1: Ακρίβειες επίλυσης με το λογισμικό BERNESE, πηγή: [Hugentobler et all.]

Τα βήματα της επεξεργασίας που ακολουθούνται, μπορεί να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον σκοπό και τις απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής. Παρακάτω

4 Συνόρθωση με το λογισμικό Bernese v4.2

απεικονίζεται ένα γενικό πλάνο της πορείας της επεξεργασίας (Σχήμα 4.1-1), όταν το ζητούμενο είναι η εκτίμηση συντεταγμένων σε μεγάλα δίκτυα (>10 km). Η τελική εκτίμηση φυσικά, αρκεί να γίνει με μία από τις τέσσερις μεθόδους που περιγράφονται.



Σχήμα 4.1-1: Διάγραμμα ροής επεξεργασίας με το λογισμικό BERNESE v4.2

Φυσικά αυτό το διάγραμμα ροής δεν είναι δεσμευτικό και έγκειται στον χρήστη να παραλείψει, να διαφοροποιήσει ή να προσθέσει ένα ή περισσότερα βήματα.

Εκτενή στοιχεία για την επεξεργασία των παρατηρήσεων με το λογισμικό BERNESSE v4.2, μπορεί κανείς να βρει στην βιβλιογραφία [Hugentobler et all. 2001]. Στην παρούσα εργασία, θα αναφερθούμε στα προγράμματα GPEST, ADDNEQ και COMPAR, μέσω των οποίων γίνεται (κυρίως) η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων*. Τα δύο πρώτα είναι σε θέση να διαχειριστούν οποιοδήποτε τύπο παραμέτρων, ενώ με το COMPAR εκτιμούνται μόνο συντεταγμένες.

Με το πρόγραμμα GPEST, εκτιμούνται (συνήθως) οι παράμετροι τροπόσφαιρας και ιονόσφαιρας, επιλύονται (όσο είναι δυνατόν) οι ασάφειες φάσης, σχηματίζονται οι κανονικές εξισώσεις και μπορεί να γίνει και η ανά ημέρα εκτίμηση των συντεταγμένων (που συμμετέχουν στις κανονικές εξισώσεις). Η σειρά των παραπάνω εργασιών ακολουθεί αυτή που φαίνεται στο σχεδιάγραμμα (Σχήμα 4.1-1).

Το πρόγραμμα ADDNEQ, αναπτύχθηκε ώστε να καλύψει τις ανάγκες της υπηρεσίας CODE (*Center for Orbit Determination in Europe*). Η βασική του ιδιότητα, που το καθιστά ιδιαίτερα σημαντικό, είναι ότι μπορεί να συνδυάσει επιμέρους συστήματα κανονικών εξισώσεων, για να παράξει μία τελική, συνδυασμένη επίλυση. Η επίλυση αυτή, μπορεί να αφορά οποιοδήποτε είδους παραμέτρους, βασίζεται δε στο μαθηματικό μοντέλο των διαδοχικών συνορθώσεων (μία περιγραφή του συγκεκριμένου μοντέλου έχει ήδη αναπτυχθεί στο *Κεφάλαιο 3.3*). Διατίθεται επίσης, ένα ευρύ φάσμα δυνατοτήτων (όπως η απαλοιφή ή προσθήκη νέων παραμέτρων), που προσφέρουν μία πλήρη «εργαλειοθήκη» για την όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση κάθε είδους προβλήματος συνόρθωσης. Επειδή το πρόγραμμα έχει αναπτυχθεί ακριβώς για την επίλυση συστημάτων που προκύπτουν από πολύ μεγάλο όγκο (δορυφορικών) δεδομένων, η χρήση του είναι εύκολη σε περιπτώσεις όπου η περίοδος μετρήσεων ξεπερνά την μία ημέρα.

Το τρίτο πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση παραμέτρων, είναι το COMPAR. Εδώ όμως, οι προς εκτίμηση παράμετροι περιορίζονται αυστηρά σε συντεταγμένες. Η βασική του λειτουργία είναι ίδια με αυτή του ADDNEQ, ο συνδυασμός δηλαδή επιμέρους εκτιμήσεων για την παραγωγή μίας (στατιστικά συμβιβαστής) τελικής εκτίμησης. Η συνόρθωση στηρίζεται στις ίδιες μαθηματικές αρχές, το πρόγραμμα όμως δεν δέχεται σαν δεδομένα εισόδου τις ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις (όπως το ADDNEQ), αλλά τις ανά ημέρα εκτιμήσεις των συντεταγμένων και τους αντίστοιχους πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας. Οι μεθοδολογίες των δύο προγραμμάτων είναι θεωρητικά ισοδύναμες και οι διαφορές τους οφείλονται σε επιλογές στρατηγικής κατά τους υπολογισμούς (ποια δεδομένα και σε ποια μορφή αποθηκεύονται, ποιοι υπολογισμοί και σε ποιο στάδιο γίνονται κ.τ.λ.). Το πρόγραμμα είναι πολύ εύχρηστο, γεγονός όμως που αντισταθμίζεται από την έλλειψη περαιτέρω επιλογών και δυνατοτήτων, όπως αυτές που εμφανίζονται στο πρόγραμμα ADDNEQ.

Θα πρέπει να αναφερθεί, ότι όλες οι μέθοδοι συνόρθωσης που θα περιγραφούν παρακάτω, χρησιμοποιώντας τα προγράμματα που έχουν ήδη αναφερθεί, αφορούν σε επιλύσεις ανεξάρτητων βάσεων και όχι (συνολικά των) δικτύων. Είναι γνωστό, ότι η θεώρηση αυτή (των ανεξάρτητων βάσεων δηλαδή) δεν προτυποποιεί κατά τον ορθότερο τρόπο τις συσχετίσεις μεταξύ των βάσεων, προσφέρει όμως αρκετά πλεονεκτήματα. Για πληροφορίες σχετικά με τις διαφοροποιήσεις που μπορεί να εμφανίζονται όταν επιλέγεται η μέθοδος συνόρθωσης δικτύων, καθώς και συγκρίσεις

* Σημειώνεται εδώ, ότι στην έκδοση v4.2 του BERNESSE εμπεριέχεται και το πρόγραμμα συνόρθωσης ADDNEQ2, το οποίο σχεδιάζεται μελλοντικά να αντικαταστήσει το ADDNEQ, με κύριο στόχο μια πιο ενιαία μεταχείριση των διαφορετικών τύπων παραμέτρων. Στην συγκεκριμένη έκδοση όμως, είναι σε πειραματικό στάδιο και για τον λόγο αυτό δεν αναφέρεται στο παρών εδάφιο.

μεταξύ των δύο μεθόδων μπορεί κανείς να βρει στη βιβλιογραφία [Hugentobler et all. 2001] και [Brockmann 1996].

4.2 Συνόρθωση με ανά ημέρα συντεταγμένες (Λύση A).

Όπως φαίνεται από το σχεδιάγραμμα (Σχήμα 4.1-1), η συνόρθωση με χρήση των ανά ημέρα συντεταγμένων, προκύπτει από το πρόγραμμα GPEST. Μέσω του προγράμματος αυτού, είναι δυνατόν να γίνει η εκτίμηση τόσο των ανά ημέρα συντεταγμένων, όσο και των αντίστοιχων (ανά ημέρα) πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας. Φυσικά, οι εκτιμήσεις αυτές προκύπτουν από τον σχηματισμό και την επίλυση των συστημάτων κανονικών εξισώσεων, με τη μέθοδο αυτή όμως τα συστήματα αυτά δεν χρειάζεται να αποθηκευτούν, εξοικονομώντας έτσι υπολογιστικό χώρο και χρόνο.

Η εκτίμηση θα πρέπει να γίνει για κάθε περίοδο μετρήσεων (*session*) ξεχωριστά. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τις εν λόγω εκτιμήσεις, υπολογίζουμε μία μέση τιμή για κάθε συνιστώσα κάθε σημείου. Πιο αναλυτικά, οι τελικές συντεταγμένες προκύπτουν από τις γνωστές σχέσεις:

$$\bar{x}_{TR} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{TR_i}}{n_{TR}}, \quad \bar{y}_{TR} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{TR_i}}{n_{TR}}, \quad \bar{z}_{TR} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{TR_i}}{n_{TR}} \quad (4.2-1)$$

όπου το n αναπαριστά τον συνολικό αριθμό περιόδων που εμφανίζεται το συγκεκριμένο σημείο (π.χ. το TR).

Είναι εμφανές ότι η τελική λύση δεν αποτελεί συνόρθωση με την συμβατική έννοια, αλλά είναι απλά η μέση τιμή των ανά ημέρα εκτιμήσεων. Δεν λαμβάνεται δηλαδή υπ' όψη η πληροφορία σχετικά με την ποιότητα των επιλύσεων, οι οποίες συνεπώς θεωρούνται ισοβαρείς και ανεξάρτητες.

Όπως αναφέρθηκε, μέσω του προγράμματος GPEST, μπορούμε να υπολογίσουμε και τους ανά ημέρα πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας. Τα αποτελέσματα όμως που εξάγονται δεν είναι ρεαλιστικά. Είναι υπεραισιόδοξα και αναφέρονται στην λεγόμενη «εσωτερική» ακρίβεια και όχι στην «πραγματική». Έτσι, αν και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως βάρη στον υπολογισμό της μέσης τιμής, δεν διαφοροποιούν σημαντικά τα αποτελέσματα και δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι την «διορθώνουν».

Το σημαντικότερο ίσως αποτέλεσμα που παίρνουμε από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις, είναι τα τυπικά σφάλματα των συντεταγμένων. Αυτά υπολογίζονται (από τον χρήστη και όχι αυτόματα) με τις γνωστές σχέσεις:

$$\sigma_{\bar{x}_{TR}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{TR_i} - \bar{x}_{TR})^2}{n_{TR} - 1}}, \quad \sigma_{\bar{y}_{TR}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_{TR_i} - \bar{y}_{TR})^2}{n_{TR} - 1}}, \quad \sigma_{\bar{z}_{TR}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_{TR_i} - \bar{z}_{TR})^2}{n_{TR} - 1}} \quad (4.2-2)$$

Τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται με αυτόν τον τρόπο, δίνουν μία πολύ κατατοπιστική εικόνα για τις «πραγματικές» ακρίβειες που επιτυγχάνονται, αντίθετα

από αυτά που προκύπτουν από τις υπόλοιπες μεθόδους συνόρθωσης (που θα παρουσιαστούν παρακάτω). Μπορούν έτσι να χρησιμοποιηθούν και σαν μέτρο σύγκρισης για τις ακρίβειες που υπολογίζονται από το λογισμικό με χρήση των προγραμμάτων GPEST, ADDNEQ και COMPAR.

Βέβαια, δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι τιμές των συντεταγμένων έχουν προκύψει από τον αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής, θεωρώντας ανεξάρτητες και ισοβαρείς παρατηρήσεις, γεγονός που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται με τη συγκεκριμένη μέθοδο (όπου σαν συνέπεια των παραπάνω, δεν συνυπολογίζεται ο πίνακας βαρών), δεν ανταποκρίνονται πλήρως στην ποιότητα των εκτιμήσεων που προκύπτουν από συνόρθωση. Η υπόθεση αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι η τιμή που υπολογίζεται σύμφωνα με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, αποτελεί τη βέλτιστη, ανεπηρέαστη εκτίμηση (*best linear unbiased estimator*) και συνεπώς αποτελεί πιο αξιόπιστη εκτίμηση από αυτή που υπολογίζουμε με τη (χωρίς βάρη) μέση τιμή.

Τα τυπικά σφάλματα λοιπόν, που υπολογίζονται από τις παραπάνω σχέσεις, δίνουν μεν μία πολύ αντιπροσωπευτική εικόνα της πραγματικής ακρίβειας που επιτυγχάνεται, συνήθως όμως είναι λίγο χειρότερα από την ποιότητα των εκτιμήσεων που προκύπτουν από συνόρθωση.

Θα μπορούσαμε συμπερασματικά να πούμε, ότι οι συντεταγμένες που προκύπτουν από τη μέθοδο αυτή, χρησιμοποιούνται κυρίως σαν μέτρο σύγκρισης και ανάλυσης, για τις εκτιμήσεις που προκύπτουν από τα προγράμματα συνόρθωσης. Τα τυπικά σφάλματα από την άλλη, αν και θεωρητικά δεν αντιπροσωπεύουν την ακρίβεια που πραγματικά επιτυγχάνεται, είναι αυτά που την πλησιάζουν περισσότερο.

4.3 Συνόρθωση με συνδυασμένη επίλυση (Λύση Β).

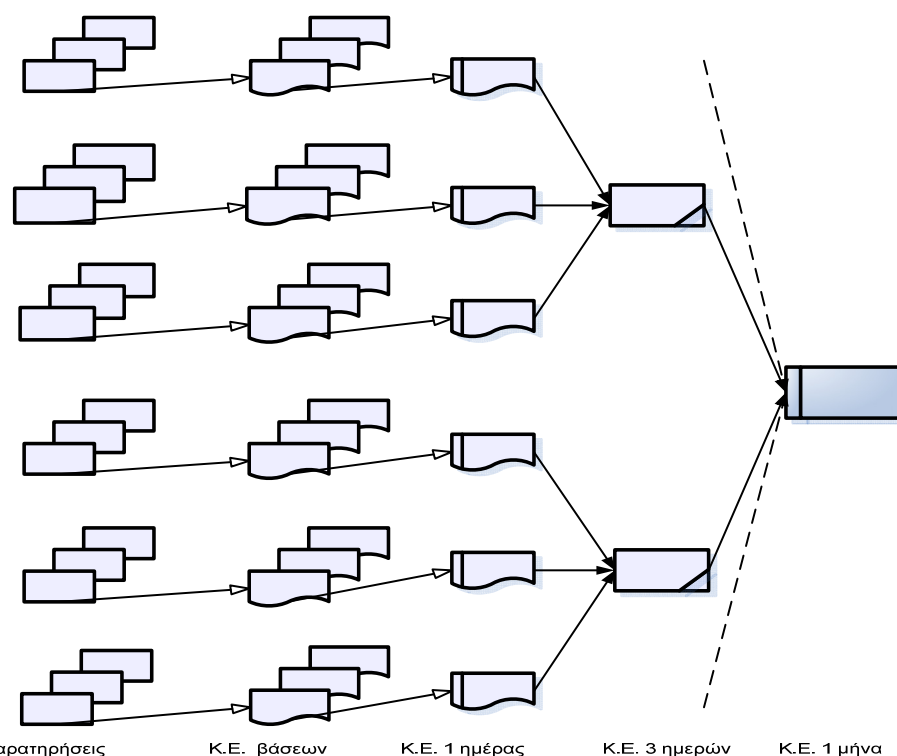
4.3.1 Γενικά

Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο πρόγραμμα συνόρθωσης στο λογισμικό BERNESE v4.2, είναι το ADDNEQ. Το πρόγραμμα αυτό, εμπεριέχεται στο λογισμικό από την έκδοση 3.5 και μετά. Συντάχθηκε αρχικά, ώστε να καλυφθούν οι ανάγκες του Ευρωπαϊκού φορέα CODE και της I.G.S. (*International G.P.S. Service for Geodynamics*). Η βασική του λειτουργία, συνίσταται στην υπέρθεση επιμέρους συστημάτων κανονικών εξισώσεων και τον συνδυασμό τους ώστε να παραχθεί μία τελική, στατιστικά συμβιβαστή συνδυασμένη εκτίμηση.

Ο αυξανόμενος αριθμός μόνιμων σταθμών δορυφορικών παρατηρήσεων ανά τον κόσμο και οι ολοένα και αυξανόμενες ανάγκες ακρίβειας σε εφαρμογές δορυφορικού εντοπισμού, έχουν επαναφέρει στο προσκήνιο τη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων (η μέθοδος περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.3).

Τα σύγχρονα δεδομένα στον τομέα της ανώτερης και δορυφορικής γεωδαισίας, επιβάλλουν λύσεις που βασίζονται σε ανάλυση δεδομένων (παρατηρήσεων) συλλεγμένων επί μακρύ χρονικό διάστημα (από ημέρες έως και χρόνια για τους μόνιμους σταθμούς). Είθισται η επεξεργασία τέτοιων δεδομένων (ή των

σχηματιζόμενων από αυτά δικτύων και/ή βάσεων) να γίνεται ανεξάρτητα για κάθε ημέρα. Θεωρώντας λοιπόν ότι δεν υπάρχει συσχέτιση (στατιστικά) μεταξύ παρατηρήσεων που διεξήχθησαν σε διαφορετικές ημέρες (υπόθεση που είναι μάλλον ορθή), μπορούμε να υπολογίσουμε μία τελική, «συνδυασμένη» επίλυση βασισμένη στις ανά ημέρα εκτιμήσεις (ή συστήματα κανονικών εξισώσεων), που σύμφωνα με τη θεωρία είναι ίδια με αυτή που θα υπολογίζαμε αν επεξεργαζόμασταν όλες τις παρατηρήσεις ταυτόχρονα. Η συνδυασμένη αυτή επίλυση, βασίζεται στη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων που αναπτύχθηκε αρχικά από τον *Helmert*.



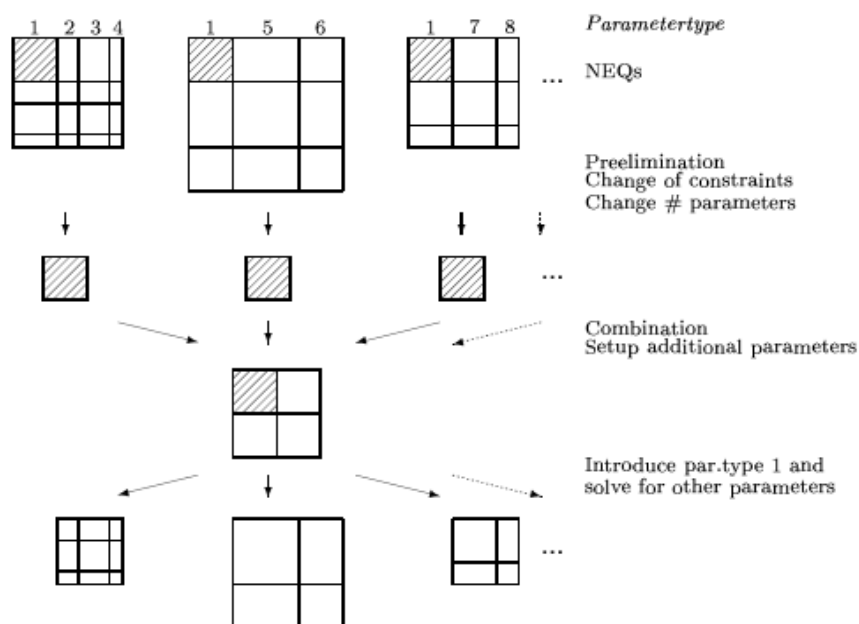
Σχήμα 4.3-1: Αρχική φάση παραγωγής συνδυασμένης επίλυσης στο CODE, πηγή: [Hugentobler et al. 2001]

Το πρόγραμμα ADDNEQ, προσφέρει πολλές επιλογές για την εκτίμηση της τελικής λύσης. Αρχικά είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι μπορεί να διαχειριστεί οποιοδήποτε είδους παραμέτρους. Έτσι εκτός από εκτίμηση συντεταγμένων, μπορούμε να επιχειρήσουμε εκτιμήσεις παραμέτρων τροπόσφαιρας, τροχιών, γήινης περιστροφής κ.τ.λ.. Προσφέρεται ακόμη μία σειρά δυνατοτήτων και επιλογών, οι σημαντικότερες των οποίων είναι:

- Διαχείριση οπουδήποτε είδους παραμέτρων: (αναφέρθηκε παραπάνω),
- Απαλοιφή παραμέτρων: Πολλές φορές λόγω διαφόρων παραγόντων (π.χ. υπολογιστικού χρόνου ή χώρου), κρίνεται σκόπιμη η απαλοιφή συγκεκριμένων παραμέτρων οι οποίοι δεν εκτιμούνται κατά την τελική επίλυση. Παρόλα αυτά, η επίδρασή τους συνεκτιμάται και μπορεί να γίνει εκ των υστέρων εκτίμησή τους. Αναλυτικά στοιχεία σχετικά με τη μέθοδο παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 3.2 και 4.3.

- Προσθήκη και εκτίμηση νέων παραμέτρων: Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μπορούμε να εκτιμήσουμε εκ των υστέρων τις παραμέτρους που απαλείφθηκαν από την συνδυασμένη επίλυση. Δίνεται όμως και η δυνατότητα, να προστεθούν στην τελική λύση νέες παράμετροι (που δεν υπήρχαν στις ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις), οι οποίες και εκτιμώνται. Παραδείγματα τέτοιων παραμέτρων, μπορεί να είναι ταχύτητες σημείων, παράμετροι μετασχηματισμού *Helmert*, κ.τ.λ..
- Εισαγωγή δεσμεύσεων: Η εισαγωγή εξισώσεων δέσμευσης αποτελεί ευρέως διαδεδομένη τακτική σε γεωδαιτικές εφαρμογές και ως τέτοια δεν θα μπορούσε να παραλείπεται. Οι επιλογές που αφορούν στις εξισώσεις δέσμευσης, όπως και στον τρόπο εισαγωγής και διαχείρισης τους, είναι πολλαπλές και αναφέρονται διεξοδικά στη βιβλιογραφία [Hugentobler et all. 2001] και [Brockmann 1996]. Αξίζει μόνο να σημειωθεί εδώ, ότι όταν θεωρούνται σταθερές οι συντεταγμένες ενός σημείου με το συγκεκριμένο πρόγραμμα κατά τη συνόρθωση, οι συντεταγμένες αυτές δεν αφαιρούνται από το διάλυμα των αγνώστων παραμέτρων. Αντίθετα γίνεται η εκτίμησή τους, αλλά με a priori μεταβλητότητα $\sigma^2 = 0.01\text{mm}$, τους δίνεται δηλαδή μεγαλύτερο βάρος.
- Μείωση του αριθμού των παραμέτρων: Η μείωση του αριθμού των παραμέτρων διαφέρει από την απαλοιφή παραμέτρων που παρουσιάστηκε παραπάνω. Εδώ, μέσω των πλαισίων αλληλεπίδρασης (*Panels*) του προγράμματος, δίνεται η δυνατότητα επιλογής (για συγκεκριμένες παραμέτρους), του αριθμού των παραμέτρων που θα δημιουργηθούν στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, ενδείκνυται η εκτίμηση δώδεκα παραμέτρων τροπόσφαιρας ανά σημείο για κάθε ημέρα. Ο αριθμός αυτός όμως δεν είναι δεσμευτικός και ανάλογα με τις ανάγκες της εφαρμογής και την κρίση του χρήστη μπορεί να μειωθεί σε 1, 2, 3, 4, 5, ή 6.

Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.3-2), είναι ενδεικτικό της πολυπλοκότητας της χρήσης, σε σχέση με τις εμπλεκόμενες παραμέτρους, του προγράμματος ADDNEQ. Αφού σχηματιστούν οι ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις, μπορεί να ακολουθήσει απαλοιφή ή απλά μείωση του αριθμού των παραμέτρων. Εν συνεχεία ακολουθεί η συνδυασμένη εκτίμηση, όπου όμως προστίθενται προς εκτίμηση νέες παράμετροι (π.χ. τεκτονικές ταχύτητες σημείων). Μπορούμε έπειτα, να επανέλθουμε στην ανά ημέρα επίλυση, εκτιμώντας τις παραμέτρους που απαλείφθηκαν ή προστέθηκαν στα προηγούμενα βήματα.

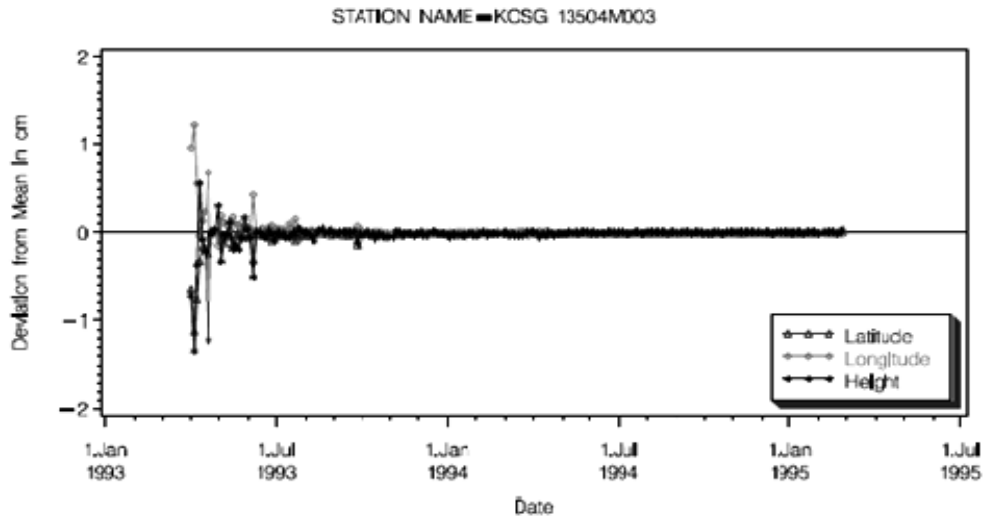


Σχήμα 4.3-2: Δυνατότητες προγράμματος ADDNEQ πηγή [Brockman 1996]

Αξίζει στο σημείο αυτό, να αναφέρουμε δύο σημαντικά στοιχεία, των οποίων η επίδραση κατά τη συνόρθωση δεν θα πρέπει να αμελείται:

A. Η προσθήκη νέων παρατηρήσεων, ακόμη και ίδιας ποιότητας με τις αρχικές, δεν συνεπάγεται την επ' άπειρον αύξηση της ακρίβειας της συνδυασμένης επίλυσης. Κατά τα αρχικά στάδια προσθήκης νέας πληροφορίας (συνήθως για μερικές εβδομάδες έως και λίγους μήνες), η βελτίωση της ποιότητας της λύσης είναι αισθητή. Η βελτίωση αυτή όμως, γρήγορα ατονεί και έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα δεν παρατηρείται σημαντική διόρθωση στην τελική εκτίμηση. Έτσι η συνδυασμένη επίλυση τείνει όλο και περισσότερο και τελικά σχεδόν συγκλίνει στην μέση τιμή. Το φαινόμενο αυτό, έρχεται σε συμφωνία με το θεώρημα του *Tschebyscheff* που επισημαίνει ότι τα αποτελέσματα (εκτιμήσεις) επηρεάζονται όλο και λιγότερο από τους πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, όσο αυξάνονται τα δεδομένα [Brockman 1996].

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, γίνονται εμφανή στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 4.3-3), για τον μόνιμο σταθμό της I.G.S. στην Ολλανδία **KOSG**. Κάθε σημείο αναπαριστά την λύση που προκύπτει (για την εκτίμηση των συντεταγμένων) συνδυάζοντας όλες τις μέχρι την συγκεκριμένη ημερομηνία παρατηρήσεις. Η απόκλιση από το μηδέν, εκφράζει την διαφορά μεταξύ της μέσης τιμής και της συνδυασμένης επίλυσης.



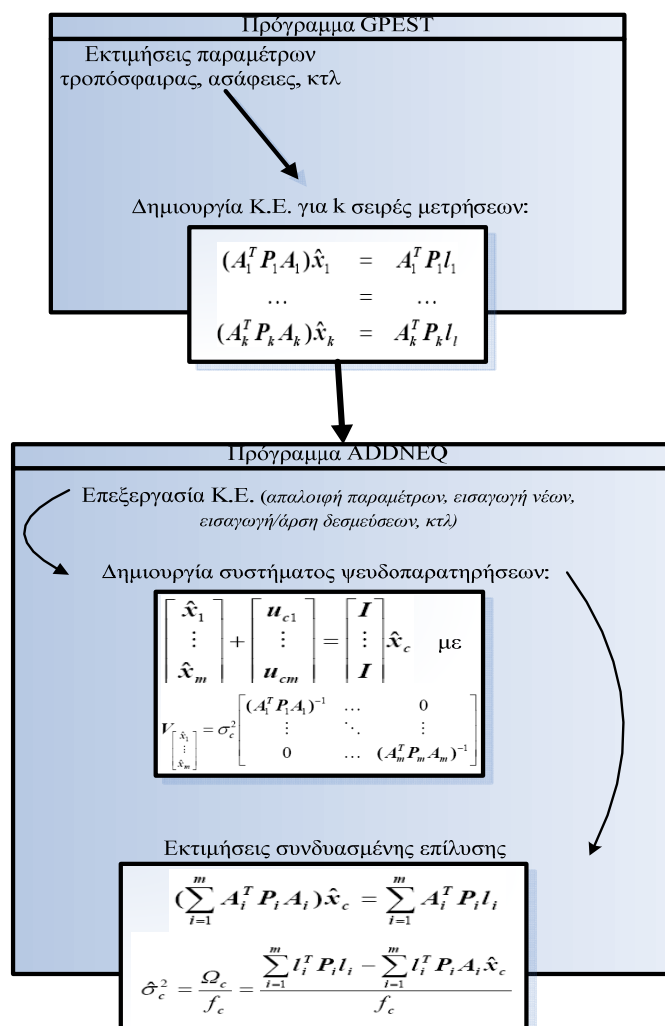
Σχήμα 4.3-3: Σύγκριση συνδυασμένης επίλυσης και μέσης τιμής πηγή [Brockman 1996]

Β. Συνήθως, η επεξεργασία των μετρήσεων, γίνεται ανά βάση (όπως έχει γίνει και για τις παρατήσεις των περιόδων 1997 και 2005 που παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 5 και 6) και όχι συνολικά για το δίκτυο. Οι βάσεις θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους και οι συσχετίσεις (συμμεταβλητότητες) των παρατηρήσεων διαφορετικών βάσεων (σχεδόν) αμελούνται ή τουλάχιστο δεν λαμβάνονται πλήρως υπ' όψη. Το γεγονός αυτό, επιδρά στην εκτίμηση του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας της τελικής επίλυσης, προκαλώντας (συνήθως) μία ροπή προς πολύ «αισιόδοξες» ακρίβειες. Το πρόβλημα αυτό είναι ήδη γνωστό και γίνονται προσπάθειες για την αντιμετώπισή του. Στην βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει πλήθος τέτοιων μελετών. Ενδεικτικά αναφέρουμε, ότι για το BERNESE, προτείνεται [Mao et al. 1999] και [Kashani et al. 2004] η επιβολή ενός συντελεστή για τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, που ποικίλει από την τιμή 3.0 έως και 30.0, με μικρή συσχέτιση με τους χρόνους παρατήρησης. Για τις εκτιμήσεις πάντως των συντεταγμένων, η επιλογή μεταξύ επεξεργασίας βάσεων ή δικτύων, δεν φαίνεται να επιφέρει ουσιαστική διαφορά [Brockmann 1996].

Σε κάθε περίπτωση πάντως, η επεξεργασία βάσεων προσφέρει το σημαντικό πλεονέκτημα της οικονομίας υπολογιστικού χώρου και κυρίως χρόνου. Ο χρόνος επεξεργασίας (για το BERNESE) αυξάνει μόνο γραμμικά σε σχέση με τον αριθμό των βάσεων και σε κάθε περίπτωση ο απαιτούμενος χρόνος συνόρθωσης ολόκληρου του δικτύου είναι τουλάχιστο δύο με τρεις φορές μεγαλύτερος. Τέλος, η επεξεργασία βάσεων προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία και δυνατότητες παρεμβολής και ελέγχου από τον χρήστη (ο σχηματισμός δικτύων συνήθως ακολουθεί κάποια από τις μεθόδους που διαθέτει το λογισμικό).

4.3.2 Μεθοδολογία

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συνδυασμένη επίλυση, βασίζεται στη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων. Παράγεται δηλαδή μία τελική λύση, η οποία βασίζεται σε επιμέρους σειρές παρατηρήσεων. Στις εφαρμογές ακριβείας, οι σειρές παρατηρήσεων υλοποιούνται συνήθως σε διάρκεια αρκετών ημερών.



Σχήμα 4.3-4: Παραγωγή συνδυασμένης επίλυσης με το πρόγραμμα ADDNEQ

Σύμφωνα με τη θεωρία (Κεφάλαιο 3.3), η συνόρθωση όλων των παρατηρήσεων ταυτόχρονα, ισοδυναμεί με την επίλυση που υπολογίζεται, αν γίνουν ξεχωριστές εκτιμήσεις για κάθε σειρά παρατηρήσεων και έπειτα αυτές συνδυαστούν κατάλληλα (δημιουργία συστήματος ψευδοπαρατηρήσεων), ώστε να παραχθεί μία τελική, συνδυασμένη επίλυση. Είναι ιδιαίτερης σημασίας το γεγονός ότι οι σειρές θεωρούνται ανεξάρτητες. Η υπόθεση αυτή δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα, εάν ως σειρές μετρήσεων θεωρηθούν διαφορετικές ημέρες.

Υπολογιστικά, για την εκτίμηση με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, το λογισμικό BERNSE v4.2, συνήθως περιορίζεται στην αποθήκευση και εκτίμηση των πινάκων Κανονικών Εξισώσεων, δηλαδή στους πίνακες: $A^T P A$, $A^T P l$ και $l^T P l$. Οι πίνακες αυτοί είναι στην πλειονότητα των περιπτώσεων αρκετοί για την επίτευξη της λύσης. Η μέθοδος των διαδοχικών συνορθώσεων δεν αποτελεί εξαίρεση και για το λόγο αυτό καλείται και Υπέρθωση Κανονικών Εξισώσεων (*stacking* ή *superposition of normal equations*).

Η πορεία της επεξεργασίας, από τη δημιουργία των Κανονικών Εξισώσεων έως την παραγωγή της συνδυασμένης επίλυσης, είναι η ακόλουθη:

- Δημιουργία με το πρόγραμμα GPEST των Κανονικών Εξισώσεων για κάθε σειρά παρατηρήσεων (ημέρα). Η διεργασία αυτή, ισοδυναμεί με την

δημιουργία και αποθήκευση των πινάκων $A^T P A$ και $A^T P l$ και του διανύσματος των αγνώστων, που σημειωτέων μπορεί να περιλαμβάνει οποιονδήποτε τύπο παραμέτρου. Η λύση του συστήματος δεν υπολογίζεται, εκτός αν ζητηθεί (π.χ. για τον υπολογισμό της επίλυσης τύπου A, Σχήμα 4.1-1). Λόγω του μεγάλου αριθμού των παρατηρήσεων και αγνώστων, το μέγεθος των αρχείων που περιλαμβάνουν τις Κανονικές Εξισώσεις είναι συνήθως αρκετά μεγάλο (Κεφάλαιο 5.3-4). Συνήθως, με επιλογή του χρήστη, αποφεύγεται η επιλογή σταθερών σημείων, καθώς αυτό συνεπάγεται την μη εμφάνιση των αντίστοιχων συντεταγμένων στο σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων και άρα στερεί την δυνατότητα περαιτέρω επεξεργασίας τους (σε επόμενα βήματα).

- Τα συστήματα των Κανονικών Εξισώσεων κάθε σειράς παρατηρήσεων, εισάγονται στο πρόγραμμα ADDNEQ, όπου μπορεί να γίνει περαιτέρω επεξεργασία, είτε για κάθε σειρά, είτε για τη συνδυασμένη επίλυση. Η επεξεργασία μπορεί να περιλαμβάνει οποιαδήποτε από τις επιλογές που αναφέρθηκαν παραπάνω, δηλαδή απαλοιφή, προσθήκη ή διαγραφή παραμέτρων, εισαγωγή, απαλοιφή ή τροποποίηση των δεσμεύσεων κ.τ.λ.. Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι το πρόγραμμα προβλέπει για τα σημεία που κρατούνται σταθερά κατά τη συνόρθωση, να περιλαμβάνονται στο διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων, όπου τους επιβάλλεται a priori μεταβλητότητα $\sigma^2 = 0.01 \text{mm}$. Το πρόγραμμα υπολογίζει την τελική εκτίμηση σύμφωνα με τη μεθοδολογία και σχέσεις που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3.3. Πολλές φορές, λόγω του μεγάλου όγκου ετερόκλητων παραμέτρων του διανύσματος των αγνώστων, είναι αδύνατη η εκτίμηση της μεταβλητότητας για συγκεκριμένες ομάδες παραμέτρων (Κεφάλαιο 3.3.4).

4.3.3 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί

Τα πλεονεκτήματα της συνδυασμένης επίλυσης, που προσφέρονται στο BERNESE v4.2 μέσω του προγράμματος ADDNEQ είναι πολλαπλά για τα περισσότερα έχει γίνει ήδη λόγος στα παραπάνω.

Αρχικά, το μεγαλύτερο προσόν του προγράμματος (και φυσικά της μεθόδου) είναι ακριβώς ο λόγος για τον οποίο σχεδιάστηκε, δηλαδή η υπέρθεση πολλών συστημάτων Κανονικών Εξισώσεων, που προέρχονται από επεξεργασία διαφορετικών σειρών παρατηρήσεων, για την εκτίμηση μίας κοινής, στατιστικά συμβιβαστής λύσης. Με τον τρόπο αυτό, αποφεύγεται η ταυτόχρονη επεξεργασία όλων των παρατηρήσεων, που φυσικά για πολλές εφαρμογές δεν θα ήταν δυνατή, λόγω του μεγάλου όγκου τους.

Το πρόγραμμα έχει σχεδιαστεί έτσι, ώστε να γίνεται η μεγαλύτερη δυνατή οικονομία υπολογιστικού χώρου και χρόνου. Για την συνδυασμένη εκτίμηση χρειάζεται η αποθήκευση μόνο των απολύτως απαραίτητων στοιχείων κάθε σειράς παρατηρήσεων (συγκεκριμένα αποθηκεύονται και εκτιμούνται οι πίνακες $A^T P A$, $A^T P l$, $l^T P l$, οι αριθμοί των εξισώσεων n και αγνώστων m και οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων $x|_{x_0}$) και δίνεται επίσης η δυνατότητα απαλοιφής παραμέτρων, αν κριθεί ότι αυτές δεν ενδιαφέρουν και η μη εκτίμησή τους δεν επηρεάζει την επίλυση. Αυτή η μέθοδος αυτή διαχείρισης, αναφέρεται στη βιβλιογραφία [Brockman 1996] ως πιο «οικονομική» από άλλες προσεγγίσεις (π.χ. από τη συνδυασμένη επίλυση με

χρήση των ανά ημέρα συντεταγμένων και αντίστοιχων πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας που αναφέρεται στο Κεφάλαιο 4.4).

Ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί, στην όσο το δυνατόν πιο ορθολογιστική διαχείριση των παραμέτρων. Έτσι ο χρήστης, λαμβάνοντας υπ' όψη τις ιδιαιτερότητες κάθε εφαρμογής, μπορεί να κάνει χρήση των δυνατοτήτων που προσφέρονται και αφορούν στην προσθήκη και εκτίμηση νέων παραμέτρων (πλέον αυτών που ήδη υπάρχουν στις Κανονικές Εξισώσεις των σειρών παρατηρήσεων), στην εισαγωγή και τροποποίηση εξισώσεων δέσμευσης ή την άρση τους αν έχουν ήδη εισαχθεί σε προηγούμενο βήμα επεξεργασίας, την μείωση του αριθμού τους ή την αλλαγή των βαρών που τους έχουν δοθεί.

Βέβαια, οι δυνατότητες του προγράμματος δεν είναι απεριόριστες. Για παράδειγμα δεν επιτρέπεται η επίλυση ασαφειών φάσης (γίνεται με το πρόγραμμα GPEST), όπως και η αλλαγή του βασικού τύπου των παρατηρήσεων (π.χ. εναλλαγή μεταξύ συχνοτήτων).

Θα πρέπει ακόμη να σημειώσουμε, ότι όπως είναι λογικό, υπάρχουν περιορισμοί υπολογιστικού χώρου. Ο μέγιστος όγκος των εξισώσεων (και παραμέτρων) που μπορεί να διαχειριστεί το πρόγραμμα, είναι συγκεκριμένος*. Αν ο όγκος των Κανονικών Εξισώσεων που σχηματίζονται από τις σειρές των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερος του ορίου αυτού, η χρήση του προγράμματος μπορεί να γίνει με εναλλακτικές μεθόδους (Κεφάλαιο 5).

Τέλος, λόγω του μεγάλου πλήθους και κυρίως της ετερογένειας των προς εκτίμηση παραμέτρων, δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός μιας εκτίμησης για την μεταβλητότητα μόνο των συντεταγμένων, σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3.3.4 (αντίθετα από το πρόγραμμα COMPAR).

4.4 Μείωση όγκου των Κανονικών Εξισώσεων (Λύση Γ).

4.4.1 Γενικά

Η μείωση του όγκου των Κανονικών Εξισώσεων που σχηματίζονται από τις διαδοχικές σειρές παρατηρήσεων, γίνεται μέσω της μεθόδου της απαλοιφής παραμέτρων που έχει ήδη αναλυθεί στο Κεφάλαιο 3.2.

Στο λογισμικό BERNESE v4.2, η απαλοιφή παραμέτρων μπορεί να γίνει είτε μέσω του προγράμματος GPEST, είτε μέσω του ADDNEQ. Στην πρώτη περίπτωση οι επιλογές είναι περιορισμένες και στο στάδιο αυτό γίνεται συνήθως απαλοιφή των ασαφειών φάσης. Πάντως το βήμα αυτό είναι καίριας σημασίας λόγω του εξαιρετικά μεγάλου όγκου των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν (στα συστήματα κανονικών εξισώσεων για κάθε σειρά παρατηρήσεων, οι παράμετροι που αφορούν σε ασάφειες φάσης αποτελούν με πολύ μεγάλη διαφορά την πιο πολυπληθή ομάδα παραμέτρων).

* Το μέγιστο όριο διαχειρίσιμου όγκου, ποικίλει ανάλογα με το πρόγραμμα εκτίμησης και την τροποποίηση ή όχι κάποιων παραμέτρων του λογισμικού. Ενδεικτικά, για το πρόγραμμα ADDNEQ, ο μέγιστος αριθμός παραμέτρων σε ταυτόχρονη συνόρθωση μπορεί να φτάσει τις 2120.

Η δυνατότητα απαλοιφής παραμέτρων, διατίθεται όπως αναφέρθηκε και στο πρόγραμμα ADDNEQ. Εδώ, λόγω της μεγάλης διαχειριστικής ικανότητας του προγράμματος σε σχέση με τις παραμέτρους, οι επιλογές που προσφέρονται είναι περισσότερες και κυρίως μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιονδήποτε τύπο παραμέτρου. Επειδή στην συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι περισσότεροι παράμετροι ασαφειών φάσης έχουν ήδη απαλειφθεί στο προηγούμενο βήμα της επεξεργασίας (πρόγραμμα GPEST), μεγάλο ρόλο παίζουν πλέον οι παράμετροι που αφορούν το μοντέλο της τροποσφαιρικής επίδρασης (αποτελούν στο βήμα αυτό την πλειοψηφία των προς εκτίμηση παραμέτρων).

Επειδή ένα από τα πιο απαιτητικά στάδια της επεξεργασίας είναι ο υπολογισμός των αντιστρόφων των πινάκων (κυρίως του $A^T PA$), το λογισμικό ξεχωρίζει δύο τρόπους απαλοιφής ανάλογα με το αν αυτή εφαρμόζεται πριν (BI - Before Inversion) ή μετά την αντιστροφή (AI - After Inversion).

➤ Απαλοιφή πριν την αντιστροφή (*Before Inversion BI*)

εφαρμόζεται κυρίως για τις παραμέτρους ασαφειών κατά την επεξεργασία με το πρόγραμμα GPEST, αν τέτοιες παράμετροι έχουν μείνει απροσδιόριστες σε προηγούμενο στάδιο επεξεργασίας με το ίδιο πρόγραμμα. Χρησιμοποιείται επίσης, για τροποσφαιρικές παραμέτρους (αν αυτές έχουν προηγουμένως αποθηκευτεί στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων) με το πρόγραμμα ADDNEQ, για να μειωθεί ο όγκος της επεξεργασίας στο στάδιο της συνδυασμένης επίλυσης.

➤ Απαλοιφή μετά την αντιστροφή (*After Inversion AI*)

χρησιμοποιείται και αυτό και από τα δύο προγράμματα (GPEST και ADDNEQ), ώστε στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων να αποθηκευτούν μόνο οι παράμετροι που ενδιαφέρουν. Για παράδειγμα, οι παράμετροι ασαφειών πρέπει να απαλειφθούν με την συγκεκριμένη επιλογή αν επιλεγεί η αποθήκευση του συστήματος των Κανονικών Εξισώσεων.

Υπάρχει τέλος και η επιλογή της απαλοιφής, μετά από κάθε περίοδο μετρήσεων (EP - Each Epoch), που χρησιμοποιείται όμως κυρίως για τον προσδιορισμό ταχυτήτων (σημείων), ή στοχαστικών ιονοσφαιρικών παραμέτρων.

Το πρόγραμμα ADDNEQ, θέτει περιορισμούς στον αριθμό των παραμέτρων που μπορεί να επιλύσει. Έτσι όταν η εφαρμογή απαιτεί συνόρθωση πολλών σειρών παρατηρήσεων συχνά μάλιστα μεγάλης διάρκειας (π.χ. ημερήσιας), είναι αδύνατος ο υπολογισμός συνδυασμένης επίλυσης χωρίς κάποια τροποποίηση των Κανονικών Εξισώσεων. Η τροποποίηση αυτή, μεταφράζεται συνήθως σε απαλοιφή κάποιων εκ των παραμέτρων (εναλλακτικά μπορεί να γίνει και χωρισμός σε υποπεριόδους Κεφάλαιο 5.3-3).

Σε εφαρμογές ακριβείας, ο μεγαλύτερος παράγοντας μείωσης της ποιότητας των αποτελεσμάτων, είναι η επίδραση της τροπόσφαιρας. Για το λόγο αυτό, η επίδραση αυτή πρέπει να διατυπώνεται σε μοντέλο όσο το δυνατόν ακριβέστερα, γεγονός που συνεπάγεται όμως την κατακόρυφη αύξηση του όγκου των εξισώσεων παρατήρησης και άρα των κανονικών εξισώσεων. Έτσι, (μετά την απαλοιφή των ασαφειών) οι Κανονικές Εξισώσεις κάθε σειράς παρατηρήσεων που εισάγονται στο πρόγραμμα ADDNEQ, καταλαμβάνουν μεγάλο υπολογιστικό χώρο, κυρίως λόγω των τροποσφαιρικών παραμέτρων (μία σύγκριση του αριθμού των παραμέτρων υπάρχει στο Κεφάλαιο 5.3-4). Αν ο σκοπός της εφαρμογής αφορά εκτίμηση συντεταγμένων

(π.χ. τεκτονικές εφαρμογές), τότε οι τροποσφαιρικές παράμετροι μπορούν να απαλειφθούν με (συνήθως) αμελητέα επίδραση στις εκτιμήσεις. Αυτό οφείλεται στο ότι παρόλο που οι τροποσφαιρικές παράμετροι δεν εκτιμούνται, η πληροφορία που υπήρχε στις αντίστοιχες εξισώσεις δεν χάνεται, αλλά αντίθετα λαμβάνεται υπ' όψη στην τελική εκτίμηση των συντεταγμένων (Κεφάλαιο 3.2).

Από τα παραπάνω, γίνεται προφανής η σημασία της απαλοιφής των τροποσφαιρικών παραμέτρων από τις Κανονικές Εξισώσεις κάθε σειράς παρατηρήσεων, καθώς μπορεί να επιτρέψει την «παράκαμψη» των ορίων που θέτει το πρόγραμμα ADDNEQ (όσο αφορά στον όγκο εξισώσεων και παραμέτρων) με ταυτόχρονη διατήρηση της ακρίβειας σε πολύ υψηλά επίπεδα.

Θα πρέπει να επισημανθεί πάντως, ότι το πρόγραμμα ADDNEQ δεν είναι το μόνο που μπορεί να εκτιμήσει τροποσφαιρικές παραμέτρους. Μάλιστα, τέτοιες εκτιμήσεις έχουν ήδη παραχθεί σε προηγούμενα βήματα επεξεργασίας με το πρόγραμμα GPEST.

4.4.2 Μεθοδολογία

Το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου απαλοιφής παραμέτρων, έχει ήδη παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3.2. Η απαλοιφή μπορεί να γίνει τόσο στις ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις, όσο σε αυτές που δημιουργούνται από τον συνδυασμό τους. Για το BERNESE v4.2 δηλαδή, τόσο στο πρόγραμμα GPEST όσο και στο ADDNEQ, με το δεύτερο βέβαια να προσφέρει περισσότερες επιλογές.

4.4.3 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί

Το σημαντικότερο πλεονέκτημα που προσφέρει η απαλοιφή παραμέτρων, είναι η οικονομία σε χώρο και χρόνο. Το πρόβλημα του υπολογιστικού χώρου παρουσιάζεται πολύ έντονα, ειδικά σε εφαρμογές ακριβείας, όπου απαιτούνται πολύωρες σειρές παρατηρήσεων (συνήθως ημερήσιες) για αρκετές ημέρες ή και μήνες για περιπτώσεις μόνιμων σταθμών. Γίνεται λοιπόν επιτακτική η ανάγκη απαλοιφής κάποιων παραμέτρων, ώστε ο όγκος των εξισώσεων να είναι διαχειρίσιμος. Πολλές φορές μάλιστα, η χρήση της μεθόδου αποτελεί τη μόνη στατιστικά ορθή εναλλακτική λύση, σε περιπτώσεις όπου ο όγκος των παρατηρήσεων ξεπερνά τα όρια που θέτει το λογισμικό επίλυσης.

Επίσης, λόγω της χρησιμοποίησης όλης της διατιθεμένης αρχικής πληροφορίας, η μέθοδος δεν συνεπάγεται (ή τουλάχιστο όχι σημαντική) μείωση της ακρίβειας της τελικής λύσης.

Βέβαια, η επιλογή των παραμέτρων που πρόκειται να απαλειφθούν, όπως και το στάδιο επεξεργασίας κατά το οποίο θα εφαρμοστεί η μέθοδος θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή και με γνώμονα πάντα, τον σκοπό και τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής. Ειδικά όταν πρόκειται για τροποσφαιρικές παραμέτρους, καθώς όπως είναι γνωστό, η τροπόσφαιρα είναι ίσως ο σημαντικότερος παράγοντας εισαγωγής σφαλμάτων στις δορυφορικές παρατηρήσεις.

Τέλος, υπενθυμίζεται εδώ, ότι το πρόγραμμα ADDNEQ δεν είναι το μόνο που πραγματοποιεί εκτιμήσεις τροποσφαιρικών παραμέτρων. Τέτοιες εκτιμήσεις έχουν

λάβει χώρα (συνήθως) και σε προηγούμενα στάδια επεξεργασίας, κυρίως με το πρόγραμμα GPEST (Σχήμα 4.4-1). Για πολλές εφαρμογές, οι εκτιμήσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν επαρκείς.

4.5 Συνόρθωση με χρήση των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας (Λύση Δ)

4.5.1 Γενικά

Η μέθοδος αυτή, είναι απλά μία παραλλαγή της συνδυασμένης επίλυσης. Βασίζεται στην μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων ώστε να εκτιμηθεί μία τελική, συνδυασμένη επίλυση, λαμβάνοντας υπ' όψη τις εκτιμήσεις κάθε σειράς παρατηρήσεων.

Για το λογισμικό BERNESE v4.2, η εφαρμογή της μεθόδου γίνεται μέσω του προγράμματος COMPAR. Το πρόγραμμα αυτό είναι συγγενικό του ADDNEQ, με δύο σημαντικές διαφοροποιήσεις:

1. διαχειρίζεται (και εκτιμά) μόνο συντεταγμένες ως παραμέτρους και
2. προϋποθέτει την εισαγωγή διαφορετικής μορφής πληροφορίας (σε σχέση με το ADDNEQ).

Το πρόγραμμα COMPAR λοιπόν, αποτελεί μια εναλλακτική επιλογή για την επίτευξη συνδυασμένης συνόρθωσης, περιορίζεται όμως σε αυστηρά «γεωδαιτικές» εφαρμογές, καθώς επιτρέπει μόνο την εκτίμηση συντεταγμένων. Οι υπόλοιπες παράμετροι απαλείφονται (η διαδικασία αυτή γίνεται αυτόματα χωρίς την επέμβαση του χρήστη).

Συνδυασμένη Επίλυση βάσει των:	
<i>Κανονικών Εξισώσεων (ADDNEQ)</i>	<i>Πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας (COMPAR)</i>
$A^T P A$	$(A^T P A)^{-1}$
$A^T P l$	\hat{x}
$l^T P l$	$\hat{\sigma}_0^2$
$n, m, x _{x_0}$	$n, m,$

Πίνακας 4.5-1: Στοιχεία εισαγωγής των προγραμμάτων συνόρθωσης

Οι δύο μέθοδοι συνδυασμένης επίλυσης, δηλαδή με χρήση των Κανονικών εξισώσεων και με χρήση των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας (που στο λογισμικό BERNESE v4.2 μεταφράζονται στα προγράμματα ADDNEQ και COMPAR αντίστοιχα), είναι θεωρητικά ισοδύναμες. Βέβαια οι δυνατότητες που προσφέρει το ADDNEQ δεν είναι δυνατές με το πρόγραμμα COMPAR, που περιορίζεται σε

συγκεκριμένου είδους εφαρμογές. Οι ελλείψεις όμως αυτές, ισοσκελίζονται από την απλότητα και ευχρηστία του προγράμματος.

5.4.1	SERVICES: COORD. COMPARISON		
CAMPAIGN	>	<	(blank for selection list)
Input Files:			
COORDINATES	> SELECTED	<	(blank for selection list)
COVARIANCES	> NO	<	(NO, SAME, blank for selection list)
A PRIORI COORD	> NO	<	(NO, blank for selection list)
BASEL. DEFINITIONS	> NO	<	(NO, blank for selection list)
Use Plot Skeleton	> NO	<	(YES or NO) Name: U:\INP\COMPARP.INP
Output Files:			
COORDINATES	> NO	<	(NO, if not to be created)
COVARIANCES	> NO	<	(NO, if not to be created)
PLOT FILE	> NO	<	(NO, if not to be created)
WEEKLY SUMMARY	> NO	<	(NO, if not to be created)

Σχήμα 4.5-1: : Μενού επιλογών προγράμματος COMPAR

Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι με το πρόγραμμα COMPAR, δεν είναι δυνατή η άρση ή αλλαγή των δεσμεύσεων που έχουν επιβληθεί σε προηγούμενο στάδιο επεξεργασίας (πρόγραμμα GPEST). Αδύνατη είναι και η αλλαγή γεωδαιτικού πλαισίου αναφοράς (*Datum*), όπως επίσης και η εκτίμηση παραμέτρων μετασχηματισμού *Helmert*. Είναι συνεπώς σημαντικό να δίνεται προσοχή, ώστε οι ομάδες συντεταγμένων που εισάγονται στο πρόγραμμα (για την παραγωγή συνδυασμένης επίλυσης), να έχουν εκτιμηθεί με βάση τους ίδιους σταθερούς σταθμούς (σημεία).

4.5.2 Μεθοδολογία

Αναφέρθηκε ήδη, ότι το πρόγραμμα COMPAR βασίζεται στη μέθοδο των διαδοχικών συνορθώσεων (Κεφάλαιο 3.3). Η κύρια διαφορά του από το πρόγραμμα ADDNEQ, είναι ο τρόπος εισαγωγής και ανάκτησης της απαραίτητης πληροφορίας, για τον υπολογισμό της συνδυασμένης επίλυσης (Σχήμα 4.5-1).

Συγκεκριμένα, η απαραίτητη πληροφορία για κάθε σειρά παρατηρήσεων που πρέπει να εισαχθεί στα δύο προγράμματα, φαίνεται στον Πίνακα 4.5-1. Τα στοιχεία αυτά είναι επαρκή, ώστε να γίνουν οι υπολογισμοί της συνδυασμένης επίλυσης και των αντίστοιχων εκτιμήσεων της ποιότητάς της (μεταβλητότητα μονάδας βάρους και πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας).

Για το πρόγραμμα ADDNEQ, η εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να γίνει με βάση τις δύο πρώτες σειρές του Πίνακα 4.5-1, σύμφωνα με τη σχέση: (3.3-14). Η εκτίμηση της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, προκύπτει από τους τύπους (3.3-30) και (3.3-29), όπου οι πίνακες $l_i^T P_i A_i$ υπολογίζονται ως $l_i^T P_i A_i = \hat{x}_i^T A_i^T P_i A_i$ και r_c ο συνολικός βαθμός ελευθερίας (για όλες τις σειρές παρατηρήσεων).

Με το COMPAR, οι αντίστοιχες εκτιμήσεις της συνδυασμένης επίλυσης, μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις: για τις συντεταγμένες (3.3-11), με $N_i = (A_i^T P_i A_i)$ και για τη μεταβλητότητα της μονάδας βάρους με την (3.3-23). Η χρήση των παραπάνω

σχέσεων δεν είναι δεσμευτική. Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3.3, μπορεί να χρησιμοποιηθεί πλήθος σχέσεων για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που ενδιαφέρουν.

Η μέθοδος των διαδοχικών συνορθώσεων (όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3.3), βασίζεται στη χρήση των ίδιων προσωρινών τιμών, σε όλες τις σειρές παρατηρήσεων. Για το λόγο αυτό, με το πρόγραμμα ADDNEQ είναι υποχρεωτική η αποθήκευσή τους. Με το COMPAR αντίθετα, κάτι τέτοιο δεν χρειάζεται. Αφού αποθηκεύονται οι εκτιμήσεις \hat{x}_i , μπορεί να επαναπροσδιοριστούν (όποτε είναι απαραίτητο) οι πίνακες $A_i^T P_i I_i$ σύμφωνα με τον τύπο:

$$A_i^T P_i I_i = A_i^T P_i A_i (\hat{x}_i - x|_{arb}) \quad (4.5-1)$$

όπου όμως θα πρέπει να διασφαλίζεται ότι η επιλογή των τιμών $x|_{arb}$, δεν ακυρώνει την εγκυρότητα της γραμμικοποίησης κατά *Taylor* και η επίδραση στον υπολογισμό των πινάκων σχεδιασμού είναι αμελητέα. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η διατήρηση και χρήση των ίδιων προσωρινών τιμών είναι καίριας σημασίας, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε ανάγκη περαιτέρω υπολογισμών και επαναληπτικών διαδικασιών. Το γεγονός αυτό, επιβαρύνει το πρόγραμμα COMPAR (σε σχέση με το ADDNEQ) όσο αφορά στις απαιτήσεις υπολογιστικού χρόνου.

Η απαλοιφή των παραμέτρων (όλων πλην αυτών που αφορούν συντεταγμένες), ακολουθεί τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3.2. Υπάρχει όμως και εδώ μία σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προγραμμάτων.

Με το πρόγραμμα ADDNEQ, σχηματίζεται κατευθείαν από τα εισαγόμενα στοιχεία το σύστημα: (3.2-3)

$$\text{με } \begin{bmatrix} A_1^T P A_1 & A_1^T P A_2 \\ A_2^T P A_1 & A_2^T P A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P I. \quad (4.5-2)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.2, η εκτίμηση του πίνακα συντελεστών βάρους των παραμέτρων ενδιαφέροντος x_1 , απαιτεί τον υπολογισμό της ποσότητας που δίνεται από την σχέση (3.2-17).

Στο πρόγραμμα COMPAR όμως, δεν εισάγεται ο πίνακας $\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$, αλλά ο αντίστροφός του (όπως φαίνεται στην πρώτη σειρά του Πίνακα 4.5-1): (3.2-15). Είναι όμως προφανές, ότι το στοιχείο στην είσοδο (1,1) του παραπάνω πίνακα, είναι ο πίνακας συντελεστών βάρους των παραμέτρων ενδιαφέροντος $Q_{\hat{x}_1}$.

4.5.3 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί

Το πρόγραμμα COMPAR, διαθέτει το βασικό πλεονέκτημα να είναι ιδιαίτερα εύχρηστο και άμεσο για τον χρήστη. Χρειάζεται την εισαγωγή βασικής μόνο

πληροφορίας (εκτιμήσεις συντεταγμένων που προκύπτουν για κάθε σειρά παρατηρήσεων και τους αντίστοιχους πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας), που είναι μάλιστα πλήρως κατανοητή, ελεγχόμενη και τετριμμένη σε κλασικές γεωδαιτικές εφαρμογές. Αποφεύγεται επίσης (ή τουλάχιστο δεν είναι απαραίτητη) η χρήση του προγράμματος ADDNEQ, που αποτελεί μία πολύπλοκη και σχετικά χρονοβόρα διαδικασία.

Αναφέρθηκε παραπάνω, ότι το πρόγραμμα μπορεί να χειριστεί μόνο παραμέτρους συντεταγμένων. Το γεγονός αυτό περιορίζει μεν το COMPAR σε ένα μικρό φάσμα εφαρμογών, προσφέρει όμως μια σειρά πλεονεκτημάτων: i) Μπορούν να συνορθωθούν σειρές παρατηρήσεων μεγαλύτερου χρόνου, σε σχέση με το ADDNEQ. Βέβαια, αν εφαρμοστεί η μέθοδος απαλοιφής παραμέτρων στο πρόγραμμα (ADDNEQ), τότε τα όρια του όγκου παρατηρήσεων θεωρητικά θα συμπίπτουν. Στην περίπτωση αυτή όμως, ο χρόνος επεξεργασίας θα είναι μικρότερος για το COMPAR, αφού εδώ η απαλοιφή γίνεται αυτόματα. ii) Είναι δυνατή η εκτίμηση της μεταβλητότητας μονάδας βάρους, μόνο για τις συντεταγμένες σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.3.4. Το λογισμικό ονομάζει αυτή την ποσότητα *sigma of coordinate group* και υπολογίζεται αυτόματα. iii) Η χρονική διάρκεια της επεξεργασίας είναι πιο σύντομη από αυτή που απαιτείται με το ADDNEQ. Ο όγκος των εξισώσεων είναι σαφώς μικρότερος και η απαλοιφή των παραμέτρων γίνεται αυτόματα (αντίθετα στο ADDNEQ η απαλοιφή παραμέτρων συνεπάγεται ένα ακόμη βήμα επεξεργασίας επιβλεπόμενης από τον χρήστη).

Βέβαια, το πλήθος των επιλογών που διατίθεται στο ADDNEQ, δεν υπάρχει στο COMPAR, όπου μάλιστα η συνόρθωση δεσμεύεται από τα προηγούμενα βήματα επεξεργασίας. Συγκεκριμένα δεν είναι δυνατή η αλλαγή ή η άρση των εξισώσεων δέσμευσης που έχουν ήδη επιβληθεί με το πρόγραμμα GPEST.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι το COMPAR εξάγει αυτόματα σημαντικά αποτελέσματα σε σχέση με τα εκτιμημένα μήκη των βάσεων. Υπολογίζει το μήκος για κάθε σειρά παρατηρήσεων και στατιστικά στοιχεία που προκύπτουν από τις συγκρίσεις τους (μέση τιμή, τυπική απόκλιση κ.τ.λ.).

ΜΕΡΟΣ Β΄:

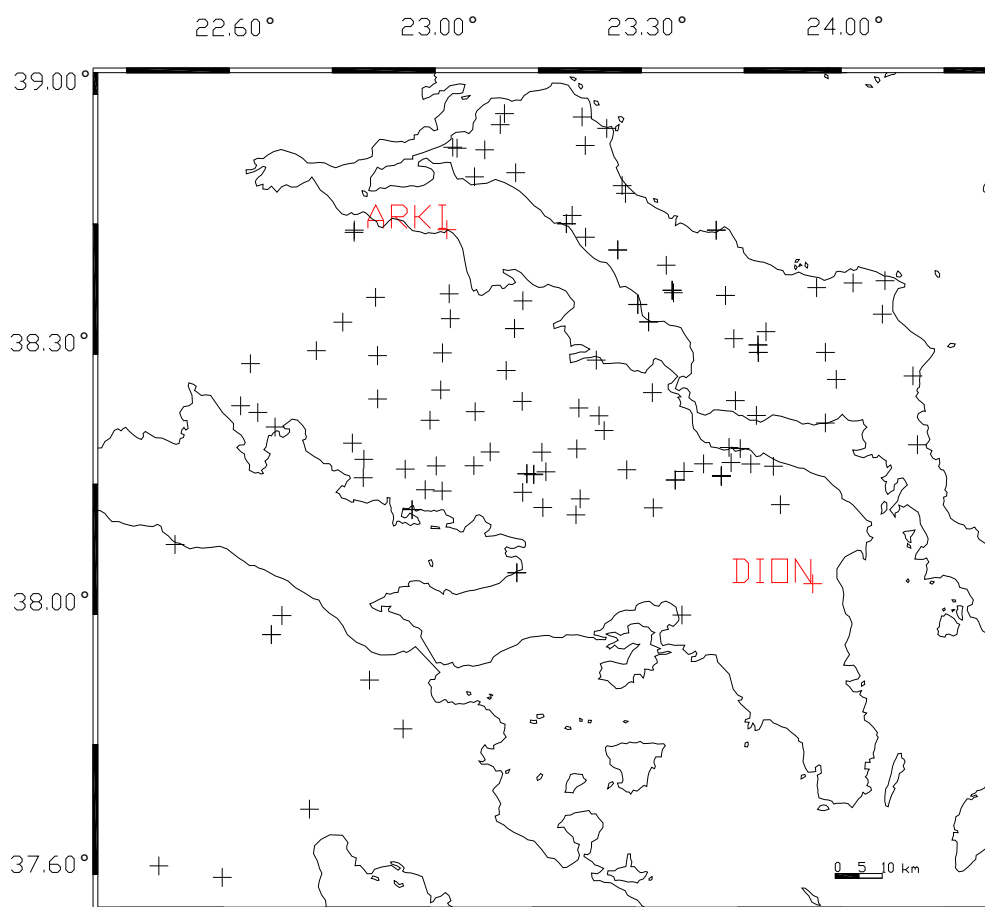
- εφαρμογή σε δίκτυα παρακολούθησης

5 Επίλυση δικτύου εποχής 1997.76

5.1 Περιγραφή του δικτύου

Το δίκτυο της εποχής 1997.76, αποτελείται από 150 (+ 7 σταθμούς της I.G.S.) σημεία, η πλειοψηφία των οποίων βρίσκεται στην γεωγραφική ζώνη που οριοθετείται από της περιοχές της Αττικής, Εύβοιας και Βόρειας Πελοποννήσου (Σχήμα 5.1-1)*. Πολλά από τα σημεία αυτά, ανήκουν στο δίκτυο που ιδρύθηκε και παρακολουθείται από την Γ.Υ.Σ. (η ονομασία τους είναι της μορφής: ΡΧΧΧ) ενώ τα περισσότερα των υπολοίπων, ανήκουν σε γενικότερα δίκτυα σημείων που παρακολουθούνται τόσο από εγχώριους όσο και από φορείς του εξωτερικού, για την μελέτη της τεκτονικής συμπεριφοράς της ευρύτερης περιοχής.

Οι απαιτούμενες μετρήσεις έγιναν με δορυφορικές παρατηρήσεις (G.P.S.), με χρήση διαφόρων τύπων δεκτών. Διήρκεσαν 11 ημέρες και συγκεκριμένα από την 30 Σεπτεμβρίου 1997, έως την 10 Οκτωβρίου του ίδιου έτους. Σημειώνεται ότι οι ημέρες και ώρες παρατήρησης διαφέρουν σημαντικά μεταξύ των σημείων και αποτελούν το βασικό κριτήριο διαχωρισμού σε περαιτέρω υποδίκτυα (Κεφάλαιο 5.2).



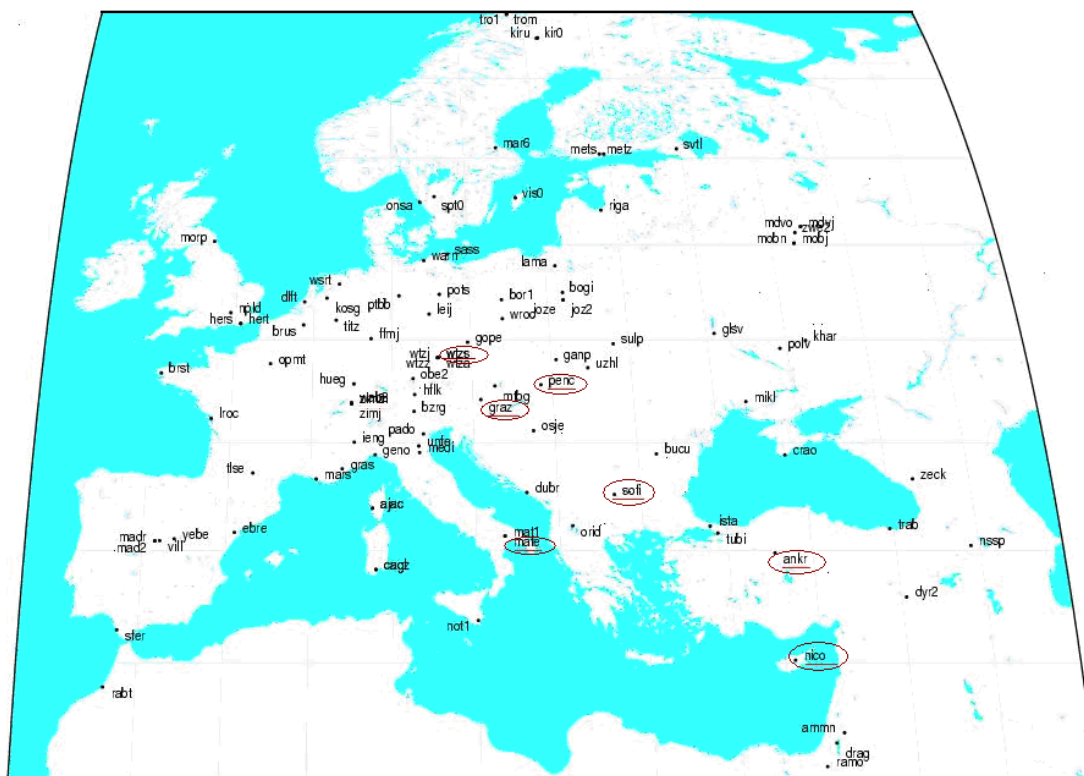
Σχήμα 5.1-1: Μέρος δικτύου εποχής 1997.76

* Για λόγους ευκρίνειας, οι ονομασίες και κάποια από τα σημεία δεν απεικονίζονται. Αναλυτικά διαγράμματα για κάθε υποπερίοδο, υπάρχουν στα αντίστοιχα Κεφάλαια.

Το δίκτυο εξαρτήθηκε από επιλεγμένους μόνιμους σταθμούς της I.G.S.. Οι σταθμοί που επιλέχτηκαν είναι οι:

1. Ankara (ANKR)
2. Graz (GRAZ)
3. Matera (MATE)
4. Nicosia (NICO)
5. Penc (PENC)
6. Sofia (SOFI)
7. Wettzell (WTZR)

Στο Σχήμα 5.1-2, φαίνεται η θέση των σταθμών αυτών, όπως και όλων των υπόλοιπων μόνιμων Ευρωπαϊκών σταθμών της υπηρεσίας I.G.S.. (Οι σταθμοί που χρησιμοποιήθηκαν σημειώνονται με κόκκινο χρώμα).



Σχήμα 5.1-2: Ευρωπαϊκοί σταθμοί υπηρεσίας I.G.S. πηγή: I.G.S.

Για την επιλογή των μόνιμων Ευρωπαϊκών σταθμών της IGS, λήφθηκαν υπ' όψη:

- Η «γεωμετρία» του δικτύου. Γενικά προτιμάται οι σταθμοί να είναι όσο το δυνατόν ισοδύναμα κατανομημένοι στην περιοχή, για την βέλτιστη υλοποίηση του συστήματος αναφοράς. Δυστυχώς, υπάρχει έλλειψη σταθμών στο Νότο.
- Επειδή στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας επιλύθηκαν δύο δίκτυα διαφορετικών εποχών (1997.76 και 2005.76), κρίθηκε σκόπιμο οι σταθεροί σταθμοί που θα χρησιμοποιηθούν να είναι οι ίδιοι και στις δύο περιπτώσεις, ώστε οι συγκρίσεις να είναι άμεσες. Επιλέχθηκαν λοιπόν σταθμοί, για τους οποίους υπήρχε διαθέσιμη πληροφορία και για τις δύο εποχές.

Όπως προβλέπει η συνόρθωση με το πρόγραμμα ADDNEQ, οι σταθμοί I.G.S. συμμετείχαν με μεγάλα βάρη.

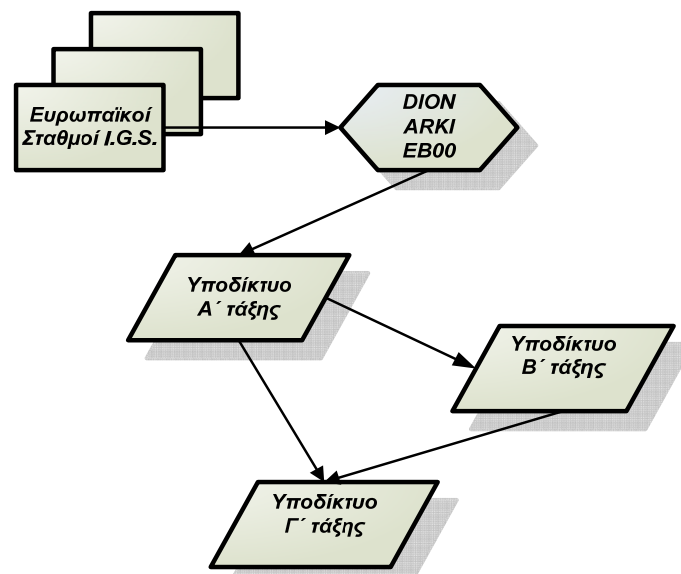
5.2 Διαδικασία επίλυσης

Η επεξεργασία των δεδομένων σε όλα τα στάδια που θα περιγραφούν παρακάτω, έγινε με το λογισμικό BERNESE v4.2, μία σύντομη περιγραφή του οποίου γίνεται στο Κεφάλαιο 4.1. Το κυρίως κομμάτι της επεξεργασίας, γίνεται ανά βάση (π.χ. διατύπωση συγκεκριμένου μοντέλου με προσδιορισμό των παραμέτρων της τροπόσφαιρας, επίλυση ασαφειών κ.τ.λ.), ενώ η συνόρθωση γίνεται συνολικά, για επιλεγμένο αριθμό βάσεων διαφορετικών ημερών (Κεφάλαιο 4).

Η επίλυση του δικτύου, έγινε στο σύστημα αναφοράς I.T.R.F. 2000 για την μέση εποχή των μετρήσεων 1997.76 (οι μεταβολές των συντεταγμένων μεταξύ των ημερών παρατήρησης είναι αμελητέες).

Με βάση τους επιλεγμένους σταθμούς της I.G.S., έγινε η επίλυση των βασικών (πρωτευόντων) σημείων του δικτύου. Ως τέτοια, επιλέχθηκαν τα DION και ARKI. Πρόκειται για τον μόνιμο σταθμό δορυφορικών παρατηρήσεων του Ε.Μ.Π. στον Διόνυσο και τον επίσης μόνιμο σταθμό που βρίσκεται στον φάρο της Αρκίτσας αντίστοιχα. Τα κριτήρια επιλογής των δύο αυτών σημείων ως σταθμών αναφοράς, είναι κυρίως η υπεροχή τους σε όγκο δεδομένων (τόσο σε ημέρες όσο και σε ώρες ανά ημέρα), όπως επίσης και τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν ως μόνιμοι σταθμοί (ποιότητα παρατηρήσεων, δυνατότητες ελέγχου με χρονοσειρές).

Επιλύθηκε επίσης σε αυτό το στάδιο και το σημείο EB00, που όμως δεν χρησιμοποιήθηκε στα επόμενα στάδια της επεξεργασίας (ως σημείο αναφοράς), καθώς αποτελεί έκκεντρο σημείο στον σταθμό της Αρκίτσας.



Σχήμα 5.2-1: Πορεία επίλυσης δικτύου εποχής 1997.76

Η επίλυση των ασαφειών έγινε με τον αλγόριθμο Q.I.F. (Quasi-Ionosphere-Free) και στην συνόρθωση, που έγινε σύμφωνα με τη μέθοδο της συνδυασμένης επίλυσης (Κεφάλαιο 4.3), συμμετείχαν οι βάσεις με ποσοστό επίλυσης (ασαφειών) μεγαλύτερο του 65%. Λόγω των πολύ μεγάλων αποστάσεων (έως και 1512 km), έγινε και διατύπωση συγκεκριμένου μοντέλου με προσδιορισμό των παραμέτρων για την επίδραση της ιονόσφαιρας.

Για την επίλυση του (κυρίως) δικτύου, ήταν απαραίτητος ο χωρισμός του σε επιμέρους υποδίκτυα (Α', Β' και Γ' τάξης), επειδή:

- ο όγκος των δεδομένων (άρα και των σχηματιζόμενων από αυτές κανονικών εξισώσεων) ήταν τεράστιος και συνεπώς μη διαχειρίσιμος από τα προγράμματα συνδυασμένης συνόρθωσης ADDNEQ και COMPAR,
- οι μεγάλες διαφορές όγκου και ποιότητας δεδομένων για κάθε σημείο, δημιούργησε ανομοιομορφία στην επεξεργασία των βάσεων (π.χ. αλγόριθμοι επίλυσης ασαφειών φάσης), με αποτέλεσμα να μη είναι ούτε δυνατή αλλά ούτε και σκόπιμη η συνδυασμένη επίλυσή τους.

Έτσι λοιπόν, το δίκτυο χωρίστηκε σε:

1. Υποδίκτυο Α' τάξης: περιλαμβάνει όλα εκείνα τα σημεία, για τα οποία διατίθενται παρατηρήσεις για περισσότερες από μία ημέρες*¹.
2. Υποδίκτυο Β' τάξης: περιλαμβάνει τα σημεία εκείνα, τα οποία έχουν παρατηρηθεί μόνο για μία ημέρα και λίγα (8) σημεία, τα οποία έχουν παρατηρήσεις δύο ημερών, με λίγες όμως ώρες παρατήρησης (Πίνακας 5.4-1). Στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι παρατηρήσεις των σημείων του υποδικτύου αυτού, δεν ξεπερνούν σε διάρκεια τις δύο ώρες. Πάντως και εδώ (όπως στους πρωτεύοντες σταθμούς και σε αυτούς του υποδικτύου Α) οι ασάφειες έχουν επιλυθεί σύμφωνα με τον αλγόριθμο Q.I.F..
3. Υποδίκτυο Γ' τάξης: εδώ καταταχθήκαν τα σημεία που διέθεταν παρατηρήσεις μίας μόνο ημέρας και η επίλυση των ασαφειών τους ήταν δυνατή μόνο με τον αλγόριθμο SIGMA*². Πολλά από τα σημεία αυτά, έχουν μετρηθεί με δέκτες μίας μόνο συχνότητας (L_1).

Το υποδίκτυο Α' τάξης παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αφού η επαναληπτικότητα των σημείων που μετρήθηκαν, επιτρέπει τη σύγκριση των αποτελεσμάτων (που αφορούν κυρίως στην ποιότητα των εκτιμήσεων). Επίσης περιλαμβάνει όλα εκείνα τα σημεία που είναι κοινά με το δίκτυο της περιόδου 2005.76. Όπως γίνεται φανερό από τα κριτήρια διαχωρισμού των υποδικτύων, οι αναμενόμενες ακρίβειες επίλυσης, είναι μεγαλύτερες για το υποδίκτυο Α' τάξης, λίγο χειρότερες για αυτό της Β' τάξης και ακόμη μικρότερες για το υποδίκτυο Γ' τάξης.

Οι συντεταγμένες που υπολογίστηκαν με χρήση όλων των μεθόδων που θα αναφερθούν παρακάτω, αναγράφονται στο Παράρτημα ().

Η επίλυση του δικτύου που σχηματίζεται από τους πρωτεύοντες σταθμούς και τους σταθμούς της I.G.S., έγινε στα πλαίσια του Μαθήματος Θέματος «Εφαρμογές Ανώτερης και Δορυφορικής Γεωδαισίας» υπό τον τίτλο "Σύνδεση βασικών σημείων

*¹ Στην πραγματικότητα, οι ημέρες παρατήρησης κάθε σημείου είναι τουλάχιστο τέσσερις (Πίνακας 5.3-1)

*² Ο αλγόριθμος SIGMA χρησιμοποιεί πιο χαλαρά στατιστικά όρια αποδοχής των επιλύσεων (ακέραιων ασαφειών) από τον αλγόριθμο Q.I.F..

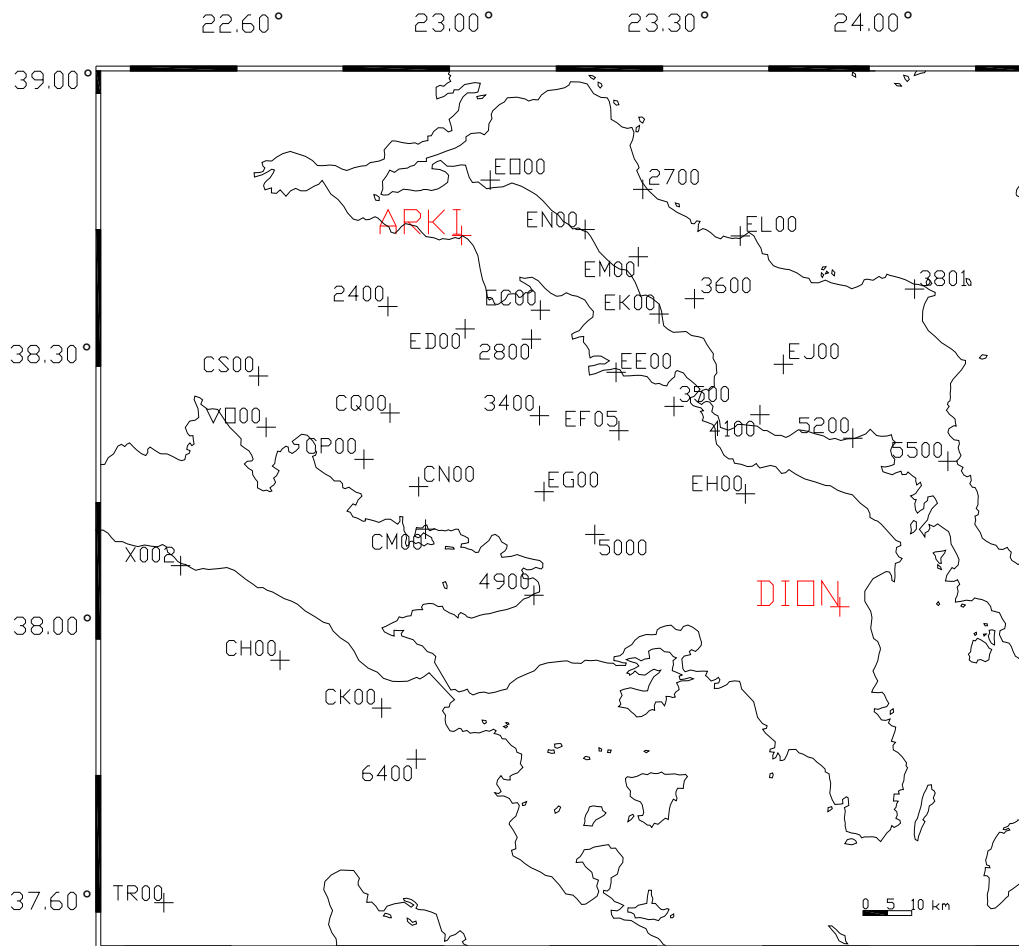
του περιφερειακού Δικτύου GPS της Εύβοιας με Ευρωπαϊκούς σταθμούς IGS", όπου αναγράφονται αναλυτικά στοιχεία.

5.3 Υποδίκτυο Α' τάξης

5.3.1 Γενικά

Το υποδίκτυο Α' τάξης αποτελείται από 35 σημεία (Πίνακας 5.3-1), τα οποία ικανοποιούν τα κριτήρια που τέθηκαν παραπάνω. Είναι δηλαδή μετρημένα πλέον της μίας ημέρας και οι ασάφειές του έχουν επιλυθεί με τον αλγόριθμο Q.I.F..

Η πορεία της επεξεργασίας, μέχρι και το σχηματισμό των ανά ημέρα κανονικών εξισώσεων, ήταν η ίδια για όλες τις βάσεις, σύμφωνα με όσα προτείνονται από τη συντακτική ομάδα του λογισμικού BERNESSE v4.2 [Hugentobler et all. 2001].



Σχήμα 5.3-1: Υποδίκτυο Α' τάξης

Για την επίλυση του υποδικτύου, σχηματίστηκαν βάσεις μεταξύ των σημείων που το αποτελούν και ενός εκ των σταθμών DION ή ARKI με κριτήριο την μικρότερη απόστασή τους από αυτούς, οι οποίες και υποβλήθηκαν σε αυτόνομη (μεταξύ τους) επεξεργασία. Εδώ, όπως και στα υπόλοιπα υποδίκτυα, δεν θεωρήθηκε σκόπιμη η επίλυση για προσδιορισμό παραμέτρων της ιονοσφαιρικής επίδρασης. Ως κατώτατο όριο λυμένων ασαφειών για την συμμετοχή μιας βάσης στην συνόρθωση, τέθηκε το 65%.

Σημεία υποδικτύου Α' τάξης									
Σημείο	Ώρες παρ/σης	Σημείο	Ώρες παρ/σης	Σημείο	Ώρες παρ/σης	Σημείο	Ώρες παρ/σης	Σημείο	Ώρες παρ/σης
2400	6	4100	6	CK00	6	ED00	7	EL00	4
2700	6	4900	4	CM00	4	EE00	6	EM00	7
2800	8	5000	6	CN00	5	EF05	4	EN00	6
3400	7	5200	8	CP00	7	EG00	5	EO00	5
3500	5	5500	5	CQ00	5	EH00	5	TR00	5
3600	7	6400	6	CS00	6	EJ00	5	V000	6
3801	5	CH00	11	EC00	7	EK00	5	X002	5
Σύνολο σημείων: 35									

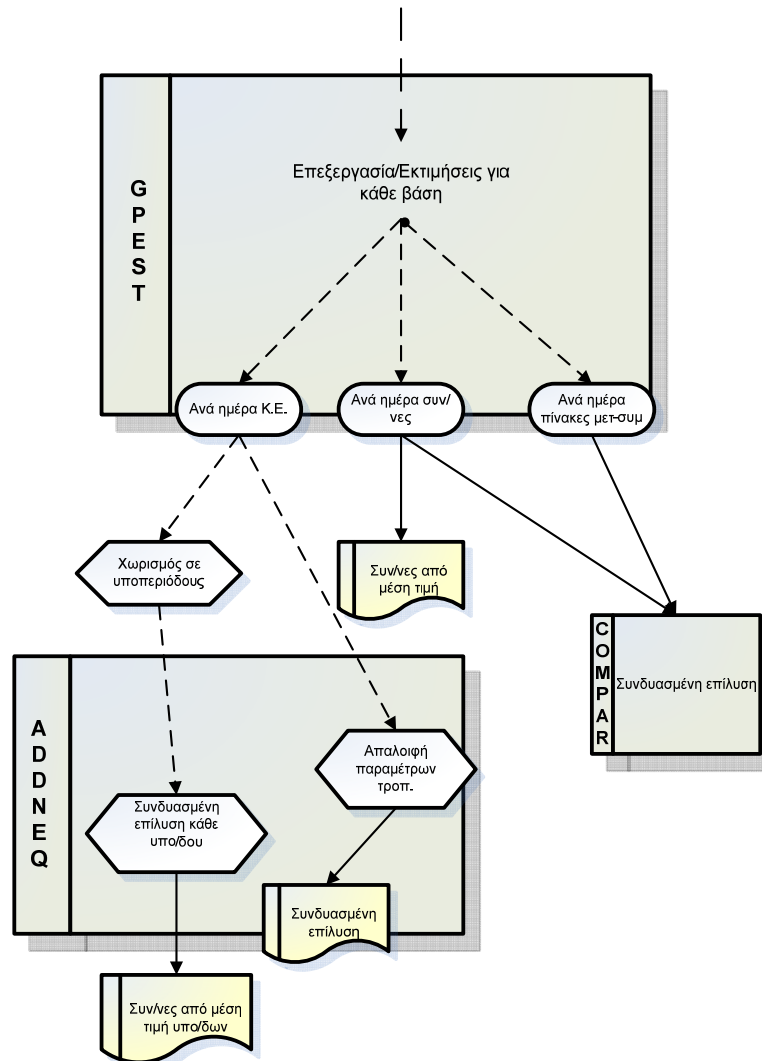
Πίνακας 5.3-1: Σημεία υποδικτύου Α' τάξης με τις ημέρες παρατήρησης

Αφού λοιπόν σχηματίστηκαν οι ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις, επιχειρήθηκε η συνδυασμένη επίλυση κατά τον συνήθη τρόπο (πρόγραμμα ADDNEQ χωρίς απαλοιφή παραμέτρων), η οποία όμως στάθηκε αδύνατη λόγω του μεγάλου όγκου των δεδομένων. Για την παράκαμψη του προβλήματος αυτού, ακολουθήθηκαν δύο εναλλακτικές οδοί:

1. Η συνολική διάρκεια των 11 ημερών παρατηρήσεων χωρίστηκε σε δύο υποπεριόδους (6 και 5 ημερών αντίστοιχα). Σε κάθε μία από αυτές έγινε συνόρθωση με την συνδυασμένη επίλυση (πρόγραμμα ADDNEQ), από όπου προέκυψαν δύο συνορθωμένες τιμές, μία για κάθε υποπερίοδο. Ως τελική εκτίμηση, θεωρήθηκε η μέση τιμή των δύο.
2. Ο μεγάλος όγκος των ανά ημέρα κανονικών εξισώσεων, οφείλεται σε μεγάλο ποσοστό στις παραμέτρους και εξισώσεις που αφορούν στην τροπόσφαιρα, παράμετροι της οποίας όμως, έχουν ήδη προσδιορισθεί σε προηγούμενα βήματα επεξεργασίας (πρόγραμμα GPEST). Θεωρώντας λοιπόν ότι η μέχρι τώρα αντιμετώπισή της είναι αρκετή για τις ανάγκες της εφαρμογής, έγινε απαλοιφή (σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο Κεφάλαιο 4.4) των τροποσφαιρικών παραμέτρων από τις ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις (με χρήση του προγράμματος ADDNEQ). Οι νέες, τροποποιημένες κανονικές εξισώσεις ήταν σημαντικά μικρότερου μεγέθους και ο συνδυασμός τους ήταν δυνατός.

Υπολογίστηκαν επίσης, κυρίως για ανάγκες σύγκρισης και εξαγωγής συμπερασμάτων και οι μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των ανά ημέρα συντεταγμένων, που προκύπτουν άμεσα από το πρόγραμμα GPEST (Κεφάλαιο 4.1).

Τέλος, επιχειρήθηκε συνδυασμένη συνόρθωση και με το πρόγραμμα COMPAR. Εδώ ο υπολογισμός των εκτιμήσεων έγινε με χρήση των ανά ημέρα συντεταγμένων και των ανά ημέρα πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας. Αναλυτικά στοιχεία για τη μέθοδο αναφέρονται στο Κεφάλαιο 4.5.



Σχήμα 5.3-2: Διάγραμμα υπολογισμού των διαφορετικών λύσεων υποδικτύου Α' τάξης

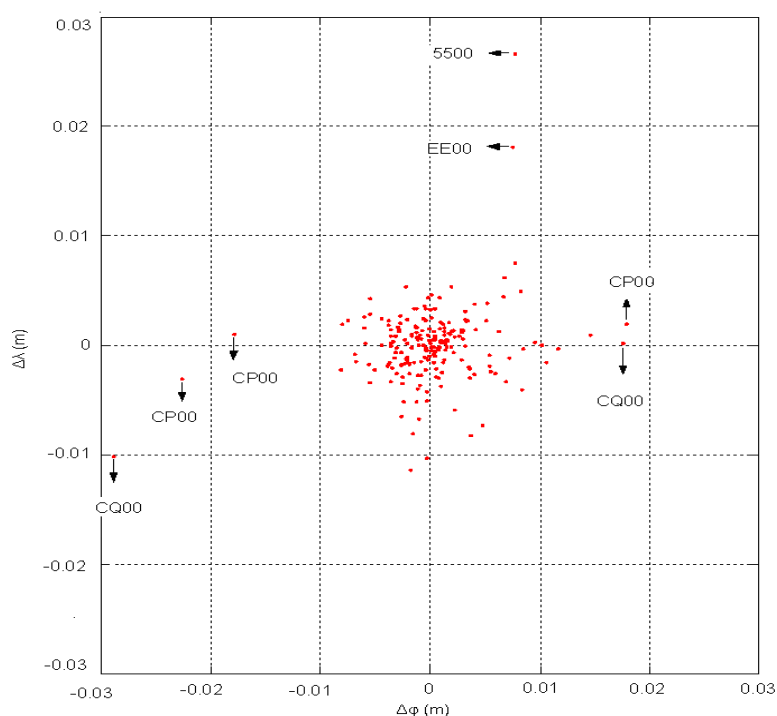
5.3.2 Επίλυση με ανά ημέρα συντεταγμένες (Λύση Α)

Η επίλυση αυτού του τύπου, προκύπτει από το πρόγραμμα GPEST, χωρίς την συμμετοχή των κύριων προγραμμάτων συνόρθωσης ADDNEQ και COMPAR (Σχήμα 5.3-2).

Στη συγκεκριμένη μέθοδο, θεωρούμε ως τελικές συντεταγμένες αυτές που υπολογίζονται ως μέση τιμή των (αντίστοιχων) ανά ημέρα εκτιμήσεων των συντεταγμένων. Όλες οι εκτιμήσεις θεωρούνται ανεξάρτητες και ισοβαρείς. Είναι λοιπόν προφανές, ότι το προϊόν της μεθόδου δεν προκύπτει από συνόρθωση, όπως στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, η μέθοδος προσφέρεται σαν μέτρο σύγκρισης για τις επιλύσεις που θα παρουσιαστούν παρακάτω, τόσο για καθ' αυτές τις τιμές των συντεταγμένων, όσο κυρίως για τα μέτρα ακρίβειας που υπολογίζονται από το λογισμικό (τυπικά σφάλματα).

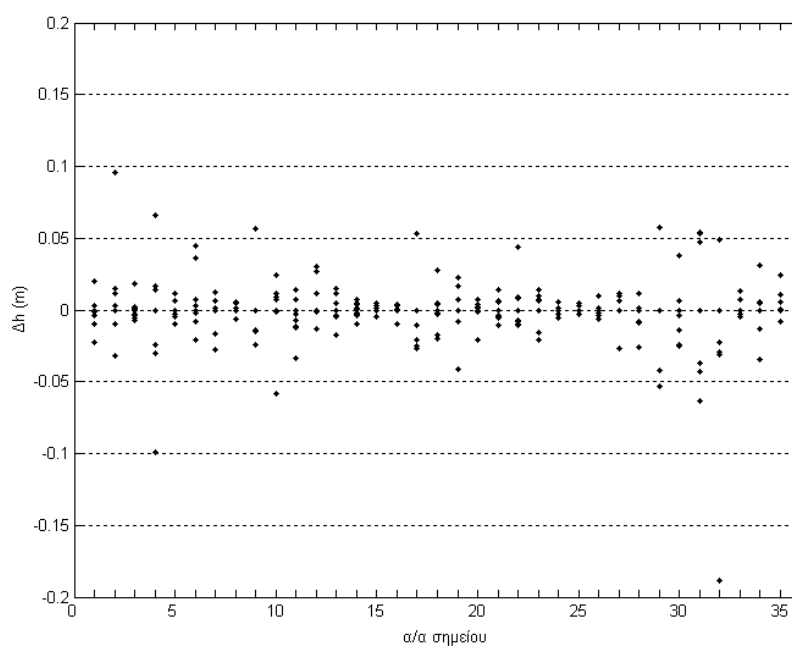
Μία εποπτική εικόνα των αποκλίσεων των ανά ημέρα συντεταγμένων από τις μέσες τιμές τους, παρουσιάζεται στα διαγράμματα 5.3-3 και 5.3-4 για όλα τα σημεία του

υποδικτύου Α' τάξης. Οι αποκλίσεις είναι γενικά πολύ μικρές (μικρότερες του 1cm σε ποσοστό 93.6% για την οριζοντιογραφία), γεγονός που δηλώνει την καλή ποιότητα των δεδομένων.



Σχήμα 5.3-3: Οριζοντιογραφικές αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων από την μέση τιμή όλων των σημείων του υποδικτύου Α

Το αντίστοιχο διάγραμμα (Σχήμα 5.3-4) για την υψομετρία, προδίδει την μεγάλη διαφορά ακριβείας μεταξύ οριζοντιογραφικού και υψομετρικού προσδιορισμού, στις δορυφορικές εφαρμογές.



Σχήμα 5.3-4: Υψομετρικές αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων από την μέση τιμή όλων των σημείων του υποδικτύου Α

Από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις των συντεταγμένων, μπορεί να υπολογιστεί το τυπικό σφάλμα κάθε παραμέτρου (συντεταγμένης), σύμφωνα με τη σχέση (4.2-2).

Είναι γνωστό ότι τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται συνήθως από πακέτα επεξεργασίας δορυφορικών δεδομένων, είναι υπεραισιόδοξα καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι πολύ μεγάλος (πόσο μάλλον στις περιπτώσεις συνδυασμένης επίλυσης, όταν συνδυάζονται παρατηρήσεις πολλών ωρών και ημερών). Οι εκτιμήσεις της ποιότητας λοιπόν που προκύπτουν από τις ανά ημέρα εξισώσεις, είναι ίσως το πιο ρεαλιστικό μέτρο ακρίβειας που διαθέτουμε και ως τέτοιες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέτρο σύγκρισης για τους υπόλοιπους τύπους επιλύσεων.

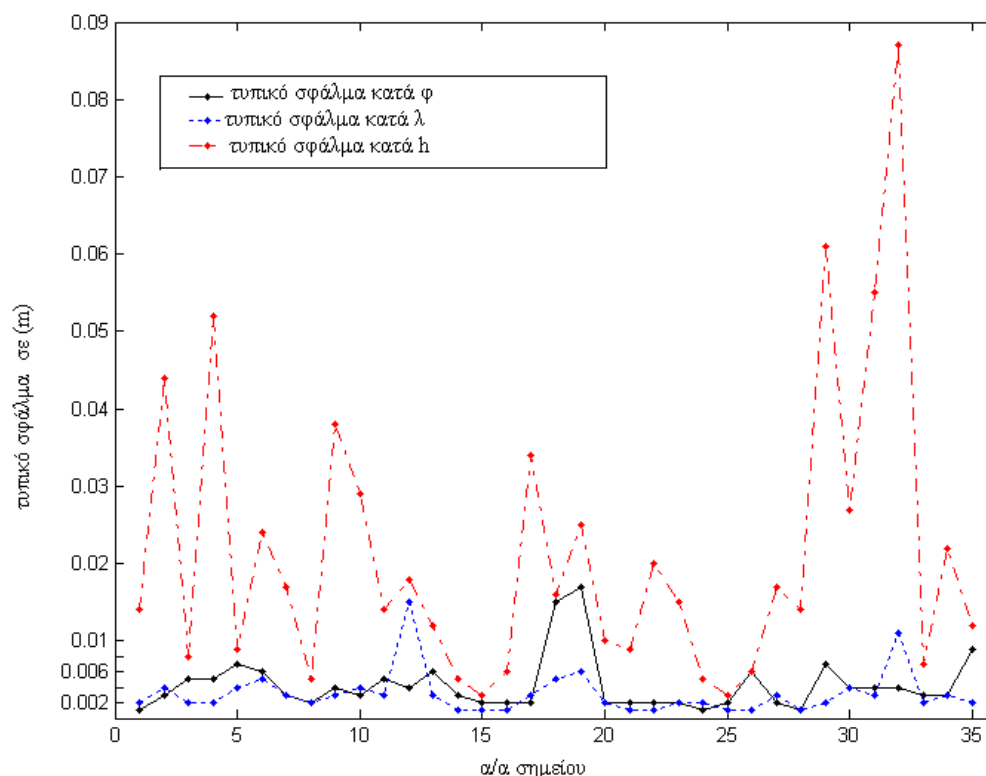
Αναλυτικά τα τυπικά σφάλματα για κάθε σημείο, φαίνονται παρακάτω (Πίνακας 5.3-2):

α/α	Σημείο	Τυπικό σφάλμα σε (mm)					
		$\pm \sigma_x$	$\pm \sigma_y$	$\pm \sigma_z$	$\pm \sigma_\phi$	$\pm \sigma_\lambda$	$\pm \sigma_h$
1	2400	9.9	4.5	9.6	1.3	2.3	14.3
2	2700	31.8	15.4	26.2	2.5	4.4	43.7
3	2800	8.2	3.6	3.1	4.6	2.0	8.0
4	3400	36.8	16.6	32.8	5.3	1.7	51.7
5	3500	8.4	4.5	7.1	6.8	3.9	8.9
6	3600	19.7	10.8	10.7	6.3	4.6	23.7
7	3801	11.2	5.7	11.6	2.8	3.4	16.6
8	4100	4.0	3.5	3.0	2.4	2.4	5.1
9	4900	27.1	10.0	24.5	3.6	2.8	37.6
10	5000	18.2	11.7	20.1	2.7	3.8	29.2
11	5200	12.9	5.4	6.2	4.7	2.6	14.3
12	5500	11.1	18.7	10.9	4.4	15.3	18.4
13	6400	6.4	5.0	11.0	6.3	2.7	11.9
14	CH00	4.2	2.2	2.8	2.6	0.9	4.8
15	CK00	2.8	1.4	2.7	1.9	1.1	3.5
16	CM00	3.8	2.0	5.0	1.5	0.7	6.4
17	CN00	23.8	10.8	21.6	1.9	3.0	33.7
18	CP00	14.1	9.5	14.2	14.7	5.0	15.9
19	CQ00	19.7	10.0	22.2	17.4	5.9	25.4
20	CS00	6.7	4.8	6.6	2.1	2.4	10.1
21	EC00	5.8	2.0	6.3	1.8	1.3	8.5
22	ED00	14.4	6.5	11.9	1.5	1.1	19.7
23	EE00	9.6	4.7	10.3	1.6	2.1	14.6
24	EF05	3.8	1.3	3.6	1.4	1.8	4.9
25	EG00	1.9	0.7	3.7	2.3	0.7	3.5
26	EH00	7.1	3.1	3.9	6.1	1.0	6.1
27	EJ00	11.6	8.3	9.3	2.4	3.1	16.6
28	EK00	10.3	5.0	7.6	1.2	0.9	13.7
29	EL00	39.7	17.3	43.3	6.7	1.6	60.9
30	EM00	18.9	8.4	17.9	4.4	3.6	26.8
31	EN00	37.4	17.8	37.0	4.0	2.5	55.3
32	EO00	59.8	35.7	53.2	4.3	10.7	86.9
33	TR00	6.3	4.3	2.7	2.8	1.7	7.5
34	V000	16.2	6.0	14.7	3.2	2.6	22.4
35	X002	12.2	6.2	5.8	8.6	2.3	12.0
Μέση Τιμή		15.3	8.1	13.8	4.2	3.1	21.2

Πίνακας 5.3-2: Τυπικά σφάλματα υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α

Τα τυπικά σφάλματα για τις καρτεσιανές συντεταγμένες, παρουσιάζουν μεγάλο εύρος τιμών, από λίγα χιλιοστά μέχρι και έξι εκατοστά (σημείο **EO00**). Αντίθετα, αυτά που αναφέρονται στις γεωδαιτικές συντεταγμένες είναι αισθητά μικρότερα για την οριζοντιογραφία και περιορίζονται σε λίγα χιλιοστά εκτός από τα σημεία **5500**, **EO00**,

CP00 και **CQ00**. Για το υψόμετρο, όπως αναμένεται είναι τουλάχιστο μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερα (Σχήμα 5.3-5).



Σχήμα 5.3-5: Διάγραμμα τυπικών σφαλμάτων υποδικτύου Α' τάξης από λύση Α

Παράλληλα με τις εκτιμήσεις των συντεταγμένων, το λογισμικό υπολογίζει και τους ανά ημέρα πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, με την ιδιομορφία ότι δίνεται ξεχωριστά η εκτίμηση της a posteriori μεταβλητότητας της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0^2$ και ο πίνακας συντελεστών των βαρών ($\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{N}_{\hat{x}}^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$). Οι τιμές αυτές όμως είναι πάρα πολύ μικρές και δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Συγκεκριμένα, στην μεγάλη πλειοψηφία τους, περιορίζονται σε λίγα δέκατα του χιλιοστού, ενώ σε καμία περίπτωση δεν ξεπερνούν τα 2 mm.

5.3.3 Επίλυση με χωρισμό σε υποπεριόδους (Λύση Β)

Η συγκεκριμένη μέθοδος επίλυσης, αναπτύχθηκε για την αντιμετώπιση του προβλήματος του πολύ μεγάλου όγκου πληροφορίας, πρόβλημα που δεν επέτρεπε την διεξαγωγή της συνήθους συνόρθωσης με το πρόγραμμα ADDNEQ (Κεφάλαιο 4.3). Έτσι λοιπόν, η συνολική περίοδος μετρήσεων (11 ημέρες) χωρίστηκε σε δύο υποπεριόδους. Η πρώτη περιλαμβάνει τις ημέρες από 30/9/1997 έως και 5/10/1997, ενώ η δεύτερη τις ημέρες από 6/10/1997 έως και 10/10/1997. Το δίκτυο συνορθώθηκε ξεχωριστά για κάθε μία υποπερίοδο και έπειτα ως τελικές συντεταγμένες των σημείων, θεωρήθηκαν οι μέσες τιμές που προέκυψαν από τις δύο συνορθώσεις. Η συνόρθωση κάθε υποπεριόδου διεξήχθη με τη μέθοδο της συνδυασμένης επίλυσης (πρόγραμμα ADDNEQ).

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε, ότι τα αποτελέσματα των δύο συνορθώσεων, θεωρούνται ανεξάρτητα και ισοβαρή. Η υπόθεση αυτή όμως (που προφανώς δεν

ανταποκρίνεται πλήρως στην πραγματικότητα), μπορεί να προκαλέσει σοβαρές δυσλειτουργίες και αποκλίσεις από την ακριβή τιμή. Έτσι, είναι σημαντικό να βρεθούν οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται μεταξύ των συνορθώσεων των δύο υποπεριοδών (Πίνακας 5.3-3).

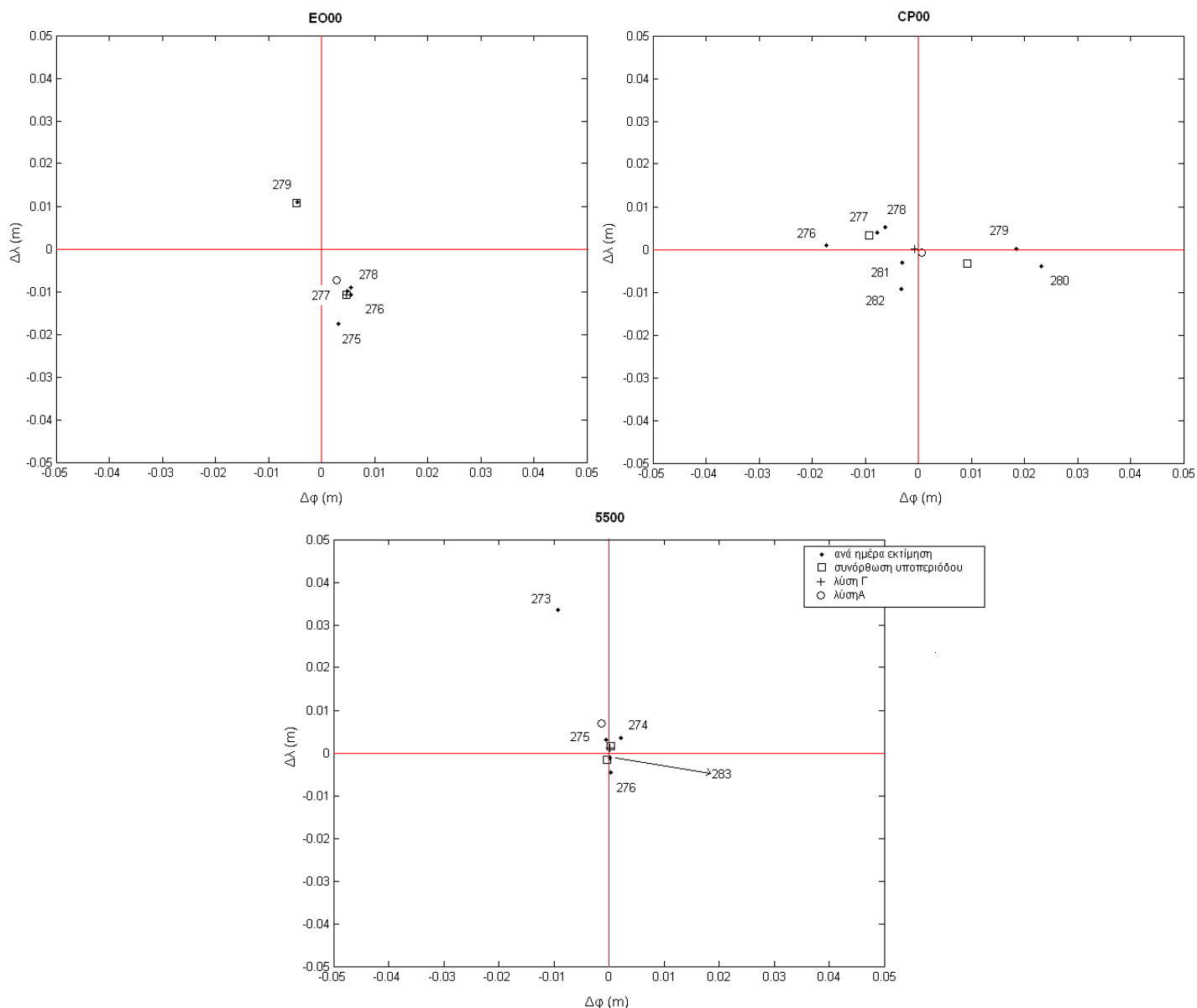
α/α	Σημείο	Αποκλίσεις των συνορθώσεων για τις δύο υποπεριοδούς					
		ΔX (mm)	ΔY (mm)	ΔZ (mm)	$\Delta \phi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	Δh (mm)
1	2400						
2	2700	10.7	3.5	8.3	1.2	7.5	11.8
3	2800	2.3	0.2	3.1	3.7	1.1	0.3
4	3400	21.0	6.9	12.1	4.2	1.9	24.8
5	3500						
6	3600	2.2	3.1	1.3	1.0	2.0	3.4
7	3801	3.0	4.7	10.3	5.1	3.1	10.1
8	4100						
9	4900	22.0	9.8	17.4	1.2	0.3	29.7
10	5000	19.0	11.2	21.4	3.3	2.7	30.4
11	5200	21.1	6.3	4.5	10.0	2.8	19.9
12	5500	16.7	11.0	16.5	0.7	3.2	25.7
13	6400	3.8	3.8	7.7	9.1	2.0	0.8
14	CH00	3.5	2.5	1.8	4.0	1.0	2.2
15	CK00	3.2	2.0	3.9	0.8	0.6	5.3
16	CM00						
17	CN00						
18	CP00	13.4	13.0	10.0	18.6	6.8	7.4
19	CQ00	14.3	9.3	2.9	8.2	3.0	15.0
20	CS00	0.7	4.7	1.7	0.2	4.1	3.0
21	EC00	5.6	1.2	4.0	0.4	1.1	6.9
22	ED00	5.9	3.0	2.2	2.4	0.5	6.5
23	EE00	14.7	6.5	14.6	1.4	0.1	21.7
24	EF05						
25	EG00						
26	EH00	10.6	5.8	3.7	10.4	1.0	7.2
27	EJ00						
28	EK00	16.5	8.1	12.8	1.5	0.8	22.3
29	EL00						
30	EM00	4.6	0.3	11.4	6.3	2.1	10.3
31	EN00	68.4	34.5	69.9	6.6	4.6	103.4
32	EO00	66.7	51.8	53.7	9.4	21.5	97.3
33	TR00	9.5	5.6	1.3	5.6	1.6	9.4
34	V000	1.1	3.8	11.3	7.3	3.1	9.0
35	X002	5.1	6.5	3.3	7.0	4.1	3.6
Μέση Τιμή		14.1	8.4	12.0	4.8	3.1	18.1

Πίνακας 5.3-3: Αποκλίσεις μεταξύ συνορθώσεων των δύο υποπεριοδών (Λύση Β)

Φαίνεται λοιπόν, ότι οι διαφορές μεταξύ των συνορθώσεων των δύο υποπεριοδών, δεν είναι αμελητέες. Αντίθετα είναι της τάξης των τυπικών αποκλίσεων που υπολογίστηκαν από τις ανά ημέρες συντεταγμένες.

Πιο αναλυτικά, οι αποκλίσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι γενικά κοντά στο ένα εκατοστό, εκτός από τα σημεία **EN00** και **EO00**, όπου αγγίζει τα επτά εκατοστά. Για να πάρουμε μία καλύτερη εικόνα των οριζοντιογραφικών αποκλίσεων, οι συντεταγμένες έχουν μετατραπεί σε γεωδαιτικές, απ' όπου φαίνεται ότι οι αποκλίσεις σε ϕ και λ είναι ακόμη μικρότερες, της τάξης περίπου των λίγων χιλιοστών. Εξαιρέση αποτελούν τα σημεία **EO00** και **CP00** τα οποία παρουσιάζουν αποκλίσεις σε λ και ϕ

αντίστοιχα κοντά στα δύο εκατοστά. Επίσης φαίνεται ότι οι μεγάλες αποκλίσεις που παρουσιάζει το σημείο **EN00** σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οφείλονται στο $\Delta h=0.103$ m.



Σχήμα 5.3-6: Αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων και διαφορετικών λύσεων (το (0,0) αναπαριστά την λύση Β)¹

Εξετάζοντας αναλυτικά τις παραπάνω αποκλίσεις (και σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους επίλυσης), φαίνεται ότι οι μεγαλύτερες από αυτές προκαλούνται από δύο κυρίως παράγοντες, που αποτελούν και τα μεγαλύτερα μειονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθόδου επίλυσης:

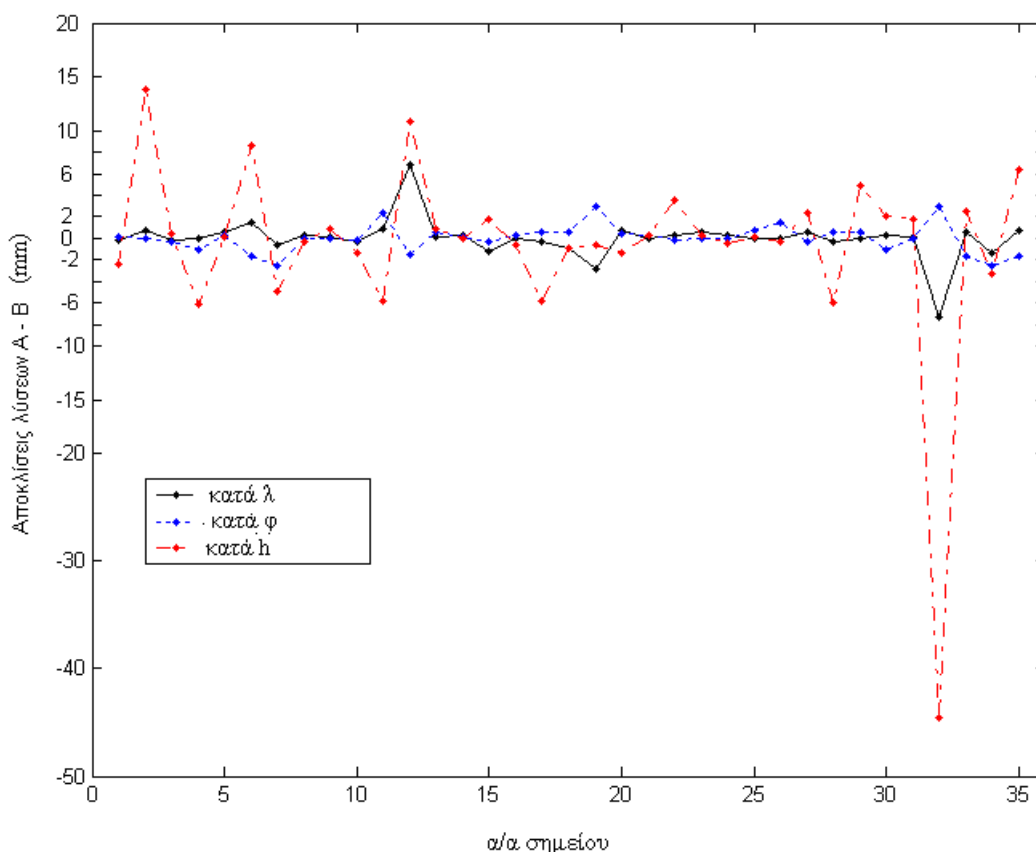
1. Ο χωρισμός της συνολικής περιόδου μετρήσεων, προκαλεί άνιση κατανομή των ημερών παρατήρησης για κάποια σημεία, μεταξύ των δύο υποπεριοδών. Για παράδειγμα, το σημείο **5500** (μεταξύ άλλων), έχει τέσσερις ημέρες

¹ Στα διαγράμματα 5.3-6, χρησιμοποιείται για τις ημερομηνίες παρατήρησης, ο αύξων αριθμός της ημέρας του χρόνου. Έτσι, οι ημέρες παρατήρησης, διαρκούν από την ημέρα 273 έως και την 283, ενώ η πρώτη υποπερίοδος περιλαμβάνει τις 273 έως και 278.

παρατήρησης στην πρώτη υποπερίοδο ενώ στην δεύτερη μόλις μία. Έτσι, το αποτέλεσμα της μίας εκ των δύο υποπεριοδών, επηρεάζεται ισχυρά (αν όχι ταυτίζεται) από ελάχιστες μόνο παρατηρήσεις, γεγονός που προκαλεί πολλές φορές απόκλιση μεταξύ των δύο συνορθώσεων. Η θεώρηση μάλιστα ανεξάρτητων και ισοβαρών παρατηρήσεων, μεγεθύνει το πρόβλημα.

Η κατάσταση γίνεται ακόμη χειρότερη, όταν οι ελάχιστες αυτές παρατηρήσεις είναι προφανώς εσφαλμένες. Για παράδειγμα, το σημείο **EO00**, διαθέτει μόνο μία παρατήρηση στην δεύτερη υποπερίοδο, η οποία απέχει αρκετά από το κύριο «νέφος» των υπόλοιπων σημείων, τα οποία όμως ανήκουν στην πρώτη υποπερίοδο. Το παράδειγμα αυτό σχετίζεται άμεσα και με το δεύτερο σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου:

2. Όσο λιγότερες παρατηρήσεις διαθέτει μία υποπερίοδος, τόσο δυσκολότερη είναι η αποδοτική λειτουργία του ελέγχου για χονδροειδή σφάλματα, που διεξάγει το λογισμικό. Όταν μάλιστα διατίθεται μόνο μία ή δύο παρατηρήσεις (σε κάποια από τις δύο υποπεριοδούς), ο έλεγχος αυτός είναι (σχεδόν) αδύνατος. Για παράδειγμα στο σημείο **CP00**, ο έλεγχος αυτός έδωσε διαφορετικά αποτελέσματα απ' ότι στις υπόλοιπες μεθόδους επίλυσης, προκαλώντας έτσι απόκλιση της τελικής εκτίμησης από τις εκτιμήσεις που υπολογίστηκαν με τις υπόλοιπες μεθόδους.



Σχήμα 5.3-7: Αποκλίσεις λύσεων A - B

Αναλυτικά οι αποκλίσεις για τα σημεία, μεταξύ της επίλυσης με χωρισμό σε υποπεριοδούς και της επίλυσης από τις ανά ημέρα συντεταγμένες, φαίνονται στον Πίνακα 5.3-4.

α/α	Σημείο	Μέση τιμή υποπεριόδων – Μέση τιμή ανά ημέρα εκτιμήσεων					
		ΔX (mm)	ΔY (mm)	ΔZ (mm)	$\Delta \phi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	Δh (mm)
1	2400	-1.6	-0.9	-1.4	0.1	0.2	-2.3
2	2700	9.5	4.9	8.6	0.0	0.7	13.7
3	2800	0.6	0.0	-0.2	-0.5	-0.2	0.3
4	3400	-3.8	-1.7	-4.6	-1.1	-0.1	-6.1
5	3500	-0.3	0.5	0.2	0.2	0.6	0.0
6	3600	6.5	4.5	4.0	-1.7	1.5	8.6
7	3801	-1.8	-1.6	-5.1	-2.6	-0.7	-5.0
8	4100	-0.4	0.2	-0.2	0.0	0.3	-0.4
9	4900	0.6	0.4	0.7	0.0	0.1	1.0
10	5000	-0.7	-0.6	-1.0	-0.3	-0.3	-1.3
11	5200	-5.9	-1.6	-1.9	2.3	0.9	-5.9
12	5500	5.7	10.1	5.6	-1.4	6.9	10.8
13	6400	0.4	0.3	0.8	0.4	0.1	0.8
14	CH00	-0.3	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
15	CK00	1.9	-0.5	0.6	-0.5	-1.2	1.6
16	CM00	-0.7	-0.3	-0.2	0.3	0.1	-0.7
17	CN00	-4.4	-2.2	-3.3	0.5	-0.3	-5.9
18	CP00	-0.6	-1.2	-0.1	0.6	-0.8	-0.9
19	CQ00	-1.0	-3.6	1.9	2.9	-2.9	-0.6
20	CS00	-1.6	0.1	-0.6	0.4	0.7	-1.5
21	EC00	0.0	0.0	0.3	0.3	0.0	0.2
22	ED00	2.6	1.3	2.1	-0.1	0.2	3.5
23	EE00	-0.1	0.5	0.1	0.0	0.5	0.1
24	EF05	-0.3	0.1	-0.4	-0.1	0.2	-0.4
25	EG00	-0.3	-0.1	0.6	0.7	0.0	0.1
26	EH00	-1.0	-0.5	0.8	1.4	-0.0	-0.4
27	EJ00	1.7	1.3	1.2	-0.4	0.5	2.4
28	EK00	-4.4	-2.4	-3.4	0.5	-0.5	-6.1
29	EL00	3.2	1.4	3.6	0.6	-0.0	4.9
30	EM00	2.0	1.2	0.5	-1.1	0.3	2.1
31	EN00	1.3	0.6	1.0	-0.1	0.1	1.7
32	EO00	-30.7	-21.0	-25.7	3.0	-7.3	-44.5
33	TR00	2.5	1.6	0.1	-1.7	0.5	2.5
34	V000	-0.4	-1.6	-4.1	-2.6	-1.3	-3.3
35	X002	5.3	2.8	2.7	-1.6	0.7	6.4
Μέση τιμή		-0.5	-0.2	-0.5	0.0	0.0	-0.7
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών*		3.0	2.0	2.5	0.9	0.9	4.2

Πίνακας 5.3-4: Αποκλίσεις λύσεων Α - Β

Εκτός από τις συντεταγμένες, το λογισμικό υπολογίζει και τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματα (τα τυπικά σφάλματα δίνονται μαζί με τις τιμές των συντεταγμένων,

* Η τιμή αυτή, προκύπτει (π.χ. για την συνιστώσα ΔX) ως $(\sum_{i=1}^n \|\Delta X_i\|) / n$, όπου για το συγκεκριμένο δίκτυο $n = 35$. Το ίδιο ισχύει για όπου αναφέρεται παρακάτω.

μπορούν όμως να υπολογιστούν και από το χρήστη μέσω των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας αν ενεργοποιηθεί η εντολή υπολογισμού τους).

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα από επίλυση B		
		$\pm \sigma_x$ (mm)	$\pm \sigma_y$ (mm)	$\pm \sigma_z$ (mm)
1	2400	0.3	0.1	0.2
2	2700	0.5	0.3	0.5
3	2800	0.5	0.2	0.4
4	3400	0.5	0.3	0.5
5	3500	0.3	0.2	0.3
6	3600	0.4	0.2	0.4
7	3801	0.7	0.3	0.6
8	4100	0.2	0.1	0.2
9	4900	0.6	0.3	0.6
10	5000	0.6	0.3	0.5
11	5200	0.7	0.4	0.6
12	5500	0.7	0.3	0.5
13	6400	0.4	0.2	0.4
14	CH00	0.3	0.1	0.2
15	CK00	0.4	0.2	0.4
16	CM00	0.3	0.1	0.2
17	CN00	0.3	0.1	0.2
18	CP00	0.5	0.2	0.4
19	CQ00	0.9	0.4	0.7
20	CS00	0.7	0.3	0.6
21	EC00	0.5	0.3	0.4
22	ED00	0.5	0.2	0.4
23	EE00	0.4	0.2	0.4
24	EF05	0.3	0.1	0.2
25	EG00	0.2	0.1	0.2
26	EH00	0.5	0.2	0.4
27	EJ00	0.2	0.1	0.2
28	EK00	0.8	0.4	0.7
29	EL00	0.3	0.1	0.2
30	EM00	0.5	0.2	0.4
31	EN00	0.5	0.3	0.5
32	EO00	1.7	1.5	1.3
33	TR00	0.9	0.4	0.8
34	V000	0.7	0.4	0.7
35	X002	0.7	0.3	0.6
Μέση τιμή		0.5	0.3	0.4

Πίνακας 5.3-5: Τυπικά σφάλματα από λύση B

Τα μεγέθη αυτά είναι φανερό ότι δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα και δεν συνιστούν αξιόπιστη αξιολόγηση των εκτιμήσεων (συντεταγμένες)*. Επίσης, γενικά δεν ακολουθούν την πορεία των τυπικών σφαλμάτων που βρέθηκαν από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις.

Αναφέρεται απλά, ότι τα τυπικά σφάλματα, δίνονται και σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες σε μέτρα, αλλά όπως και τα παραπάνω δεν ανταποκρίνονται στην

* Εκτός από τα τυπικά σφάλματα υπολογίζονται και οι ποσότητες RMS2, όπως και στις επόμενες λύσεις. Ο αλγόριθμος υπολογισμού τους, όμως καθιστά τον συνδυασμό τους για τις δύο υποπεριόδους πολύπλοκο και μάλλον άνευ νοήματος.

πραγματική ποιότητα της επίλυσης. Τα σ_ϕ και σ_λ δεν ξεπερνούν τα 0.2 – 0.3 mm, ενώ και για το υψόμετρο η μέγιστη τιμή είναι 1.4 mm. Εξαιρέση αποτελεί μόνο το σημείο **Ε000** στην δεύτερη υποπερίοδο, όπου το τυπικό σφάλμα φτάνει τα 1.6, 0.9 και 4.8 mm, για τα ϕ , λ και h αντίστοιχα. Φαίνεται λοιπόν ότι και το λογισμικό κατατάσσει την εκτίμηση της ημέρας 279 ως χαμηλής ποιότητας, η οποία όμως συμμετέχει κατά το ήμισυ στην τελική μέση τιμή.

5.3.4 Επίλυση με μείωση του όγκου των κανονικών εξισώσεων (Λύση Γ)

Όπως έχει αναφερθεί, η μείωση του όγκου των (ανά ημέρα) κανονικών εξισώσεων, επιτυγχάνεται με την απαλοιφή των παραμέτρων της τροπόσφαιρας, κατά το τελευταίο βήμα της επεξεργασίας με το λογισμικό (θεωρούμε δηλαδή ότι η εκτίμηση που έχει ήδη γίνει είναι αρκετή). Με τον τρόπο αυτό, έχουμε σημαντική ελάττωση τόσο του απαιτούμενου υπολογιστικού χώρου, όσο και των προς εκτίμηση παραμέτρων. Για παράδειγμα, για το συγκεκριμένο δίκτυο είχαμε:

Μέθοδος	Λύση Β		Λύση Γ
	1 ^η	2 ^η	-
Υποπερίοδος	1 ^η	2 ^η	-
Αριθμός συν/νων	96	99	105
Παράμετροι τροπόσφαιρας	1512	1212	0
Συνολικός αριθμός προς επίλυση παραμέτρων	1608	1311	105
Αριθμός παρατηρήσεων	920495	716981	1637476
Μέγεθος αρχείων ανά ημέρα Κ.Ε. (μέσος όρος)	495 Kb		40 Kb

Πίνακας 5.3-6: Σύγκριση μεγεθών, πριν και μετά την απαλοιφή

Η μείωση του αριθμού τόσο των αγνώστων (προς επίλυση) παραμέτρων, όσο και του μεγέθους των αρχείων των κανονικών εξισώσεων είναι πολύ μεγάλη. Μειονέκτημα της μεθόδου ωστόσο, είναι ότι χρειάζεται περισσότερος χρόνος επεξεργασίας από τον χρήστη, ώστε να γίνει η τροποποίηση των αρχείων (των κανονικών εξισώσεων).

Είναι γνωστό ότι η τροπόσφαιρα είναι ίσως ο μεγαλύτερος παράγοντας δημιουργίας σφαλμάτων, στις δορυφορικές παρατηρήσεις. Για το λόγο, αυτό και κυρίως σε εφαρμογές υψηλών απαιτήσεων ακρίβειας, καθίσταται καίρια η αντιμετώπιση των επιδράσεων που προκαλεί. Στη συγκεκριμένη μέθοδο λοιπόν, δεν αγνοείται η επίδραση της τροπόσφαιρας, αλλά i) θεωρούμε ότι η διατύπωση ενός μοντέλου σε προηγούμενα στάδια (πρόγραμμα GPEST) είναι επαρκής και ii) η πληροφορία που αφορά στις παραμέτρους τροπόσφαιρας και βρίσκεται στις κανονικές εξισώσεις δεν χάνεται, αλλά λαμβάνεται υπ' όψη στη συνόρθωση μέσω της τροποποίησής τους (αναλυτικά η μέθοδος απαλοιφής παραμέτρων αναφέρεται στα Κεφάλαια 3.2 και 4.4).

Τόσο η τροποποίηση των κανονικών εξισώσεων, όσο και η συνδυασμένη επίλυσή τους, γίνεται με το πρόγραμμα ADDNEQ.

Οι αποκλίσεις των συντεταγμένων που υπολογίζουμε με τη μέθοδο αυτή, σε σχέση με αυτές που παρουσιάστηκαν παραπάνω (Λύσεις Α και Β), φαίνονται στο παρακάτω Πίνακα (5.3-7).

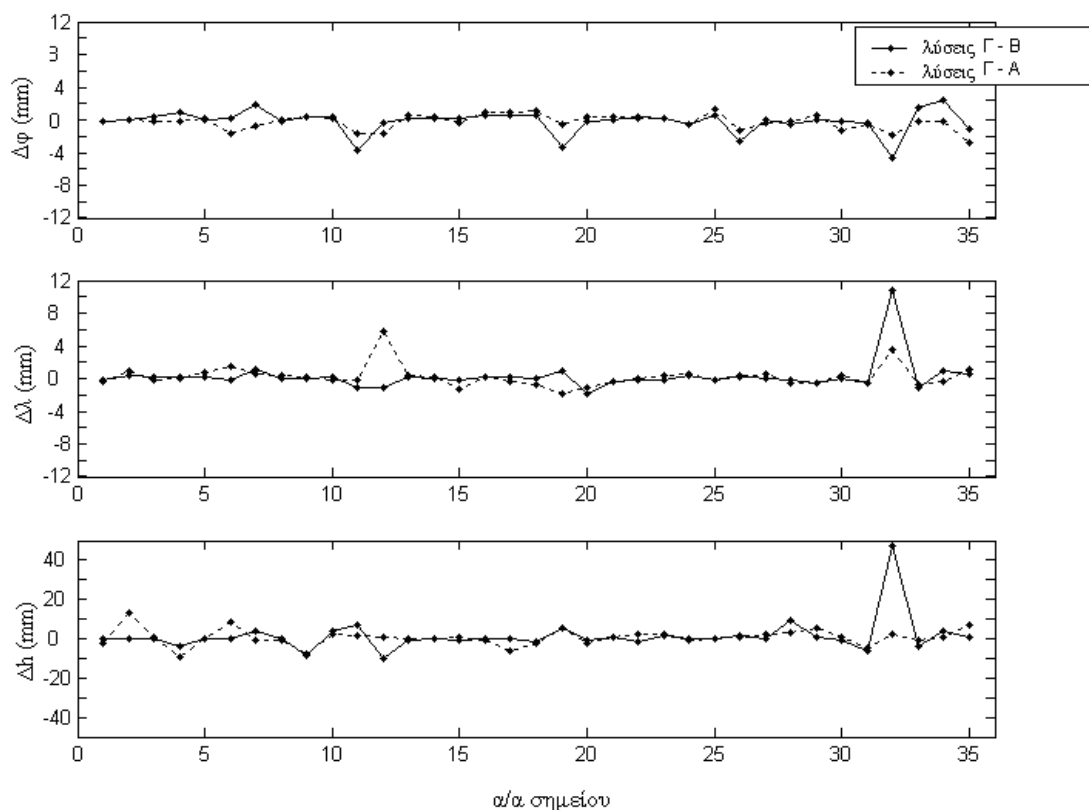
α/α	Σημείο	Απόκλιση Λύσεων Γ - Β			Απόκλιση Λύσεων Γ - Α		
		Δφ(mm)	Δλ(mm)	Δh(mm)	Δφ(mm)	Δλ(mm)	Δh(mm)
1	2400	-0.2	-0.2	0.1	-0.2	-0.4	-2.2
2	2700	0.0	0.3	-0.2	0.0	1.0	13.5
3	2800	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.1	0.5
4	3400	0.9	0.1	-3.5	-0.1	0.0	-9.6
5	3500	0.0	0.1	0.0	0.2	0.7	0.1
6	3600	0.1	-0.1	-0.1	-1.6	1.4	8.4
7	3801	1.8	1.2	4.1	-0.8	0.5	-0.9
8	4100	-0.1	0.0	-0.1	0.0	0.3	-0.4
9	4900	0.3	0.0	-8.9	0.3	0.2	-7.9
10	5000	0.4	0.2	3.5	0.2	-0.1	2.2
11	5200	-3.8	-1.1	7.2	-1.6	-0.2	1.3
12	5500	-0.3	-1.2	-9.7	-1.7	5.7	1.1
13	6400	0.2	0.2	-0.7	0.6	0.3	0.1
14	CH00	0.1	0.0	-0.1	0.3	0.2	-0.2
15	CK00	0.2	-0.1	-0.8	-0.3	-1.3	0.9
16	CM00	0.6	0.1	-0.1	0.9	0.2	-0.9
17	CN00	0.6	0.1	-0.1	1.0	-0.3	-6.0
18	CP00	0.6	0.0	-1.7	1.2	-0.8	-2.6
19	CQ00	-3.4	1.0	5.8	-0.5	-1.8	5.2
20	CS00	-0.1	-1.9	-1.1	0.3	-1.2	-2.6
21	EC00	0.0	-0.3	0.8	0.3	-0.3	1.0
22	ED00	0.4	-0.1	-1.3	0.2	0.0	2.3
23	EE00	0.2	-0.1	1.8	0.2	0.4	2.0
24	EF05	-0.5	0.3	-0.1	-0.6	0.5	-0.5
25	EG00	0.6	-0.2	-0.2	1.3	-0.2	0.0
26	EH00	-2.6	0.3	1.3	-1.3	0.2	0.9
27	EJ00	0.0	0.0	0.0	-0.4	0.5	2.4
28	EK00	-0.5	-0.1	9.0	-0.1	-0.5	2.9
29	EL00	0.0	-0.5	0.5	0.6	-0.6	5.5
30	EM00	-0.2	0.0	-1.0	-1.3	0.3	1.1
31	EN00	-0.4	-0.5	-6.0	-0.5	-0.5	-4.3
32	EO00	-4.7	10.7	47.0	-1.8	3.5	2.4
33	TR00	1.5	-1.2	-3.5	-0.2	-0.7	-1.1
34	V000	2.5	0.9	4.0	-0.1	-0.4	0.7
35	X002	-1.2	0.5	0.8	-2.7	1.1	7.1
Μέση τιμή		-0.2	0.2	1.3	-0.2	0.2	0.6
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών		0.8	0.7	3.6	0.7	0.8	2.9

Πίνακας 5.3-7: Αποκλίσεις λύσεων Β – Γ και Α - Γ

Οι αποκλίσεις που παρουσιάζουν οι προηγούμενες μέθοδοι με την παρούσα, είναι σαφώς πολύ μικρές. Επίσης παρατηρούμε, ότι η μέθοδος απέχει εξίσου (κατά μέσο όρο) από τις δύο προηγούμενες σε φ και λ , ενώ για το υψόμετρο h , οι εκτιμήσεις είναι πιο κοντά σε αυτές που παίρνουμε με τη μέση τιμή των ανά ημέρα εκτιμήσεων. Βέβαια, θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι μέσες τιμές που αναγράφονται στον πίνακα ίσως είναι παραπλανητικές, αφού αν τις επαναυπολογίσουμε χωρίς να λάβουμε υπ' όψη το σημείο **EO00**, τότε η μέση τιμή της απόκλισης των υψομέτρων μεταξύ των λύσεων Β και Γ πέφτει στα 0 mm, ενώ η μέση τιμή για τις απόλυτες αυτές διαφορές στα 2.3 mm. Στην πραγματικότητα λοιπόν, οι εκτιμήσεις των υψομέτρων με τη

μέθοδο μείωσης του όγκου των κανονικών εξισώσεων είναι πιο κοντά σε αυτές που παίρνουμε με τη μέθοδο του χωρισμού σε υποπεριόδους.

Μια πιο εποπτική εικόνα των αποκλίσεων που παρουσιάστηκαν, παίρνουμε από την γραφική απεικόνισή τους:



Σχήμα 5.3-8: Αποκλίσεις λύσεων Γ – Β και Γ - Α

Σημαντική πάντως είναι η διαπίστωση, ότι η χρήση της μεθόδου μείωσης του όγκου των κανονικών εξισώσεων, δεν φαίνεται να επηρεάζει με συστηματικό τρόπο την εκτίμηση των συντεταγμένων, ούτε καν στο υψόμετρο. Φαίνεται λοιπόν, τουλάχιστο σε αυτή την περίπτωση, ότι η αντιμετώπιση της τροποσφαιρικής επίδρασης, όπως έγινε μέχρι το στάδιο της δημιουργίας των κανονικών εξισώσεων και τον μετασχηματισμό αυτών με την απαλοιφή των αντίστοιχων παραμέτρων, είναι επαρκής.

Για τον ποιοτικό έλεγχο των εκτιμήσεων, δίνονται τα τυπικά σφάλματα (RMS) και τα RMS2 (Κεφάλαιο 3.3.4) για κάθε συνιστώσα (Πίνακας 5.3-8). Όπως και παραπάνω (λύση Β), τα τυπικά σφάλματα είναι πολύ αισιόδοξα και δεν παρέχουν ουσιαστική πληροφορία για την ποιότητα των εκτιμήσεων. Τα RMS2 φαίνεται να είναι πιο κοντά στην τάξη μεγέθους των ακριβειών που προσεγγίζουν την πραγματικότητα. Δεν διαπιστώνεται όμως καμία συσχέτιση μεταξύ αυτών και των τυπικών σφαλμάτων που παίρνουμε από τις ανά ημέρα συντεταγμένες, οπότε είναι δύσκολο να αποφανθούμε για το αν αντικατοπτρίζουν την πραγματική εικόνα της ποιότητας της συνόρθωσης.

α/α	Σημείο	Τυπικό σφάλμα			RMS2		
		$\pm \sigma_x$ (mm)	$\pm \sigma_y$ (mm)	$\pm \sigma_z$ (mm)	RMS2 _x (mm)	RMS2 _y (mm)	RMS2 _z (mm)
1	2400	0.3	0.2	0.3	1.5	1.3	1.3
2	2700	0.4	0.2	0.4	2.2	1.5	2.0
3	2800	0.4	0.2	0.4	5.6	2.5	3.1
4	3400	0.4	0.2	0.4	3.6	1.6	1.7
5	3500	0.5	0.2	0.4	6.9	3.7	7.6
6	3600	0.3	0.1	0.2	1.3	0.7	0.8
7	3801	0.4	0.2	0.4	5.2	3.4	5.1
8	4100	0.5	0.2	0.4	3.2	1.3	1.2
9	4900	0.5	0.2	0.4	7.8	3.8	8.4
10	5000	0.4	0.2	0.4	5.0	2.2	4.0
11	5200	0.5	0.2	0.4	6.7	2.5	5.8
12	5500	0.5	0.2	0.4	4.3	2.0	4.0
13	6400	0.4	0.2	0.3	1.1	0.7	1.3
14	CH00	0.6	0.3	0.5	3.7	2.0	3.6
15	CK00	0.5	0.3	0.5	8.7	5.7	9.6
16	CM00	0.6	0.3	0.5	4.1	2.5	3.4
17	CN00	0.6	0.3	0.5	7.8	3.2	7.2
18	CP00	0.5	0.2	0.4	14.5	6.3	13.6
19	CQ00	0.4	0.2	0.4	4.8	2.5	4.3
20	CS00	0.5	0.3	0.4	14.5	5.3	13.3
21	EC00	0.5	0.2	0.4	19.9	8.4	21.5
22	ED00	0.5	0.3	0.5	15.5	7.9	15.8
23	EE00	0.4	0.2	0.4	20.0	9.5	17.5
24	EF05	0.4	0.2	0.3	2.7	2.0	5.0
25	EG00	0.5	0.2	0.4	1.9	0.9	2.3
26	EH00	0.5	0.2	0.5	12.0	5.4	11.0
27	EJ00	0.5	0.2	0.4	4.8	3.2	5.1
28	EK00	0.5	0.2	0.4	2.3	0.8	2.5
29	EL00	0.4	0.2	0.4	4.0	2.1	4.1
30	EM00	0.5	0.2	0.4	1.8	0.7	1.4
31	EN00	0.4	0.2	0.4	1.0	0.5	1.4
32	EO00	0.4	0.2	0.4	2.9	1.3	1.3
33	TR00	0.4	0.2	0.4	5.4	3.8	4.3
34	V000	0.5	0.2	0.4	4.0	2.0	2.9
35	X002	0.5	0.2	0.4	2.8	1.9	1.3
Μέση τιμή		0.5	0.2	0.4	6.1	3.0	5.7

Πίνακας 5.3-8: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Γ

Ακόμη ένα ενδιαφέρον στατιστικό στοιχείο, είναι το τυπικό σφάλμα μονάδας βάρους που υπολογίζει το λογισμικό. Υπολογίζεται για όλες τις παραμέτρους ($\hat{\sigma}_0 = 1.3$ mm) όπως επίσης και ένα μόνο για τις συντεταγμένες ($\hat{\sigma}_{CRD} = 20.1$ mm), σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο Κεφάλαιο 3.3.4. Η μεγάλη διαφορά των δύο, υποδεικνύει ακριβώς την υπερεκτίμηση των τυπικών σφαλμάτων. Τέλος, η χρήση του $\hat{\sigma}_{CRD}$ (αντί του $\hat{\sigma}_0$) για τον επανυπολογισμό των τυπικών σφαλμάτων, δεν προσφέρει σημαντική βελτίωση της πληροφορίας τους (αν και αυξάνονται, παραμένουν σχεδόν ίσα σε μέγεθος για όλα τα σημεία).

5.3.5 Επίλυση με χρήση του προγράμματος COMPAR (Λύση Δ)

Η επίλυση αυτή επιτυγχάνεται με χρήση των ανά ημέρα εκτιμήσεων και των αντίστοιχων πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4.5. Και αυτή η μέθοδος αποτελεί συνδυασμένη επίλυση, γίνεται όμως μέσω του προγράμματος COMPAR.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα με την μέθοδο μείωσης του όγκου των κανονικών εξισώσεων – Λύση Γ (η μέγιστη απόκλιση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι ± 0.1 mm), αποτέλεσμα μάλλον λογικό, αφού όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 5.3-6, οι μόνες παράμετροι που τελικά εκτιμώνται στην μέθοδο αυτή (μετά την απαλοιφή των τροποσφαιρικών παραμέτρων) είναι οι συντεταγμένες.

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα			RMS2			λ
		$\pm \sigma_x$ (mm)	$\pm \sigma_y$ (mm)	$\pm \sigma_z$ (mm)	RMS2 _x (mm)	RMS2 _y (mm)	RMS2 _z (mm)	
1	2400	0.5	0.2	0.4	4.3	2.0	4.0	9.5
2	2700	0.5	0.3	0.5	7.7	3.1	7.2	13.4
3	2800	0.5	0.2	0.4	3.2	1.2	1.2	5.1
4	3400	0.5	0.2	0.4	14.5	6.3	13.5	31.4
5	3500	0.6	0.3	0.5	3.6	2.0	3.6	6.6
6	3600	0.4	0.2	0.4	5.6	2.5	3.1	11.4
7	3801	0.4	0.2	0.4	4.7	2.4	4.3	11.5
8	4100	0.3	0.2	0.3	1.5	1.3	1.3	5.3
9	4900	0.5	0.2	0.4	14.5	5.4	13.3	29.8
10	5000	0.5	0.2	0.5	8.7	5.6	9.6	21.5
11	5200	0.4	0.2	0.4	3.6	1.6	1.7	7.1
12	5500	0.4	0.2	0.4	5.2	3.4	5.1	14.3
13	6400	0.4	0.2	0.3	2.7	2.0	5.0	11.1
14	CH00	0.3	0.1	0.2	1.3	0.7	0.8	5.1
15	CK00	0.4	0.2	0.3	1.1	0.6	1.3	3.4
16	CM00	0.5	0.2	0.4	1.9	0.9	2.3	4.7
17	CN00	0.5	0.2	0.4	12.0	5.4	11.0	26.2
18	CP00	0.5	0.2	0.4	4.7	3.2	5.0	12.6
19	CQ00	0.5	0.2	0.4	7.8	3.8	8.4	18.5
20	CS00	0.4	0.2	0.4	2.2	1.5	2.0	6.0
21	EC00	0.5	0.2	0.4	2.3	0.8	2.4	4.9
22	ED00	0.4	0.2	0.4	5.0	2.2	4.0	11.2
23	EE00	0.4	0.2	0.4	4.0	2.1	4.1	10.3
24	EF05	0.5	0.2	0.4	1.9	0.6	1.4	3.4
25	EG00	0.4	0.2	0.4	1.0	0.4	1.4	2.7
26	EH00	0.4	0.2	0.4	2.9	1.3	1.2	5.6
27	EJ00	0.4	0.2	0.4	5.4	3.8	4.3	14.4
28	EK00	0.5	0.2	0.4	4.0	2.0	2.9	8.4
29	EL00	0.5	0.2	0.4	19.9	8.4	21.5	45.2
30	EM00	0.4	0.2	0.4	6.9	3.7	7.6	18.3
31	EN00	0.5	0.2	0.5	15.5	7.9	15.8	34.0
32	EO00	0.4	0.2	0.3	20.0	9.5	17.5	51.9
33	TR00	0.5	0.2	0.4	2.7	1.9	1.3	6.1
34	V000	0.5	0.2	0.4	6.7	2.5	5.8	13.5
35	X002	0.6	0.3	0.5	4.0	2.4	3.2	7.0
Μέση τιμή		0.4	0.2	0.4	6.1	3.0	5.7	14.0

Πίνακας 5.3-9: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Δ

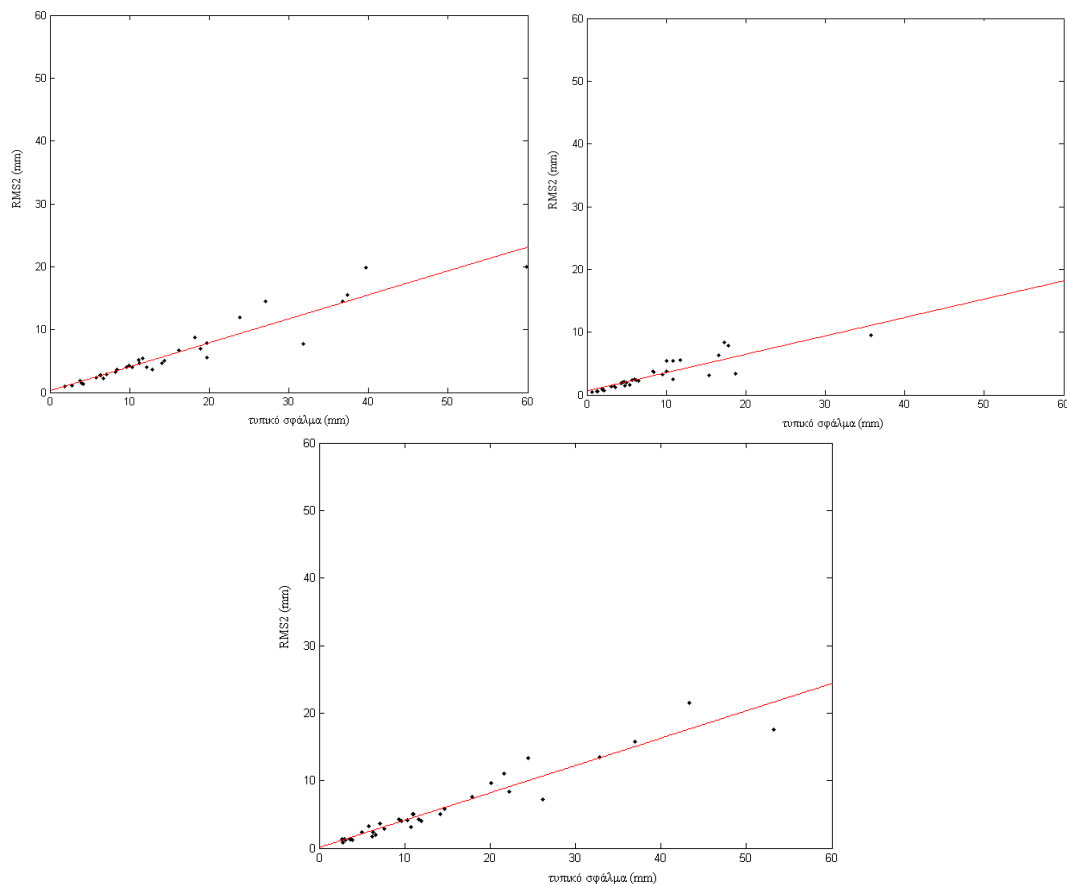
Παρά την σύμπτωση των δύο μεθόδων για τις τιμές των συντεταγμένων, οι μέθοδοι διαφέρουν στην εκτίμηση της ποιότητας της λύσης. Τα τυπικά σφάλματα και τα RMS2 που προκύπτουν από τη μέθοδο με χρήση των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας φαίνονται στον Πίνακα 5.3-9.

Η τελευταία στήλη, είναι ο μέσος λόγος των RMS2/(τυπικό σφάλμα), δηλαδή:

$$\lambda = \left[\sum \frac{RMS2_i}{RMS_i} \right] / 3 \text{ με } i = x, y, z. \text{ Ο λόγος αυτός, δείχνει την υπερεκτίμηση του τυπικού σφάλματος (RMS) για κάθε σημείο.}$$

Τα a posteriori τυπικά σφάλματα μονάδας βάρους, είναι $\hat{\sigma}_0 = 1.2 \text{ mm}$ και $\hat{\sigma}_{CRD} = 13.1 \text{ mm}$ (a posteriori μεταβλητότητα μονάδα βάρους που αφορά μόνο στις συντεταγμένες).

Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι τα RMS2 που υπολογίζονται με τη συγκεκριμένη μέθοδο παρουσιάζουν έντονη συσχέτιση με τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται από τις ανά ημέρα συντεταγμένες. Η συσχέτιση αυτή μάλιστα, φαίνεται να είναι γραμμική (Σχήμα 5.3-9).



Σχήμα 5.3-9: Σχέση τυπικών σφαλμάτων λύσης A με RMS2 λύσης Δ

Εφαρμόζοντας για τα παραπάνω το μοντέλο μιας απλής γραμμικής προσαρμογής (εξίσωση ευθείας) $y = ax + b$, όπου y η τυπική απόκλιση και x η τιμή του τυπικού σφάλματος (από την Λύση A), φαίνεται ότι για όλες τις συνιστώσες το a κυμαίνεται μεταξύ του 3 και 4, ενώ ο όρος b είναι περίπου 0.5 mm.

Οι αποκλίσεις μεταξύ των τυπικών σφαλμάτων (από τις ανά ημέρα συντεταγμένες) και των RMS2 είναι σημαντικές, αφού μπορούν να φτάσουν μέχρι και λίγα εκατοστά. Είναι όμως σημαντικό το γεγονός, ότι ενυπάρχει μεταξύ των δύο μία αναγνωρίσιμη, γραμμική συσχέτιση και άρα πλέον μπορούμε να εξαγάγουμε πιο αξιόπιστα συμπεράσματα σχετικά με την ποιότητα της λύσης. Άλλωστε, όλες οι προηγούμενες λύσεις όπως είδαμε, δεν προσέφεραν ουσιαστική πληροφορία για την ακρίβεια των εκτιμήσεων. Θα πρέπει βέβαια η σχέση αυτή να επιβεβαιωθεί με περαιτέρω ευρήματα.

5.3.6 Συγκρίσεις επιλύσεων

Παρακάτω παρατίθενται αναλυτικοί πίνακες (Πίνακες 5.3-10 και 5.3-11), με τις αποκλίσεις που παρουσιάζονται μεταξύ των εκτιμήσεων των συντεταγμένων, που υπολογίστηκαν σύμφωνα τις μεθόδους επίλυσης που παρουσιάστηκαν (Λύσεις Α, Β, Γ και Δ).

Οι αποκλίσεις μεταξύ των εκτιμήσεων (φαίνονται και στα διαγράμματα Σχήμα 5.3-10 και Σχήμα 5.3-11) είναι πολύ μικρές και για τις περισσότερες των περιπτώσεων, μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Επίσης είναι μέσα στα όρια των τυπικών σφαλμάτων (εκτός από το υψόμετρο του σημείου **E000**) και παρουσιάζουν τυχαίο χαρακτήρα. Οι τιμές τους δεν φαίνεται να σχετίζονται με τις ημέρες παρατήρησης, το μικρό μέγεθος του δείγματος όμως και ο περιορισμός των ημερών παρατήρησης σε μικρό μόνο εύρος (από 4 έως 11 ημέρες), δεν επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Εστιάζοντας στα σημεία όπου παρατηρούνται οι μέγιστες αποκλίσεις, φαίνεται ότι αυτές οφείλονται κυρίως σε δυσλειτουργίες των λύσεων Α ή/και Β. Τα μειονεκτήματα της επίλυσης με χωρισμό σε υποπεριόδους, έχουν ήδη επισημανθεί στο Κεφάλαιο 5.3.3. Όσο αφορά στην λύση Α, είναι γνωστό ότι η μέση τιμή μπορεί να επηρεαστεί από εκτιμήσεις που θεωρούνται ισοβαρείς και συνεπώς μπορεί να απέχουν αρκετά από την ακριβή τιμή, ειδικά σε περιπτώσεις όπου το δείγμα είναι μικρό (π.χ. σημείο **5500**).

Και οι δύο αυτές λύσεις, προφανώς επηρεάζονται δυσμενώς από την υπόθεση ισοβαρών και ανεξάρτητων παρατηρήσεων. Επομένως η χρήση ένας αλγορίθμου επιλογής βαρών, χρησιμοποιώντας ήδη υπολογισμένα στοιχεία (π.χ. αξιοποιώντας την στατιστική πληροφορία από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις), ίσως να οδηγούσε σε ρεαλιστικότερα αποτελέσματα.

Για τις λύσεις Γ και Δ, οι εκτιμήσεις που υπολογίζονται συμπίπτουν (± 0.1 mm). Σημαντικό είναι το γεγονός, ότι δείχνουν να μην επηρεάζονται από την απαλοιφή των τροποσφαιρικών παραμέτρων (τουλάχιστο κατά συστηματικό τρόπο). Επίσης διαθέτουν το πλεονέκτημα να αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του μεγάλου όγκου δεδομένων (φυσικά και εδώ υπάρχουν δεδομένα όρια στις δυνατότητες του λογισμικού).

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε γεωδαιτικές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh
1	2400	-0.1	0.2	2.3	0.2	0.4	2.2	0.2	0.3	2.2	0.2	0.2	-0.1	0.3	0.1	-0.2	0.0	-0.1	0.0
2	2700	0.0	-0.7	-13.7	0.0	-1.0	-13.5	0.0	-1.0	-13.5	0.0	-0.3	0.2	0.0	-0.3	0.2	0.0	0.0	0.0
3	2800	0.5	0.2	-0.3	0.1	0.1	-0.5	0.1	0.1	-0.5	-0.3	-0.2	-0.1	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.0	0.0
4	3400	1.1	0.1	6.1	0.1	0.0	9.6	0.1	0.0	9.6	-0.9	-0.1	3.5	-0.9	-0.1	3.5	0.0	0.0	0.0
5	3500	-0.2	-0.6	0.0	-0.2	-0.7	-0.1	-0.2	-0.6	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0
6	3600	1.7	-1.5	-8.6	1.6	-1.4	-8.4	1.7	-1.5	-8.4	-0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.0	-0.1	0.0
7	3801	2.6	0.7	5.0	0.8	-0.5	0.9	0.8	-0.4	0.9	-1.8	-1.2	-4.1	-1.8	-1.1	-4.1	0.0	0.1	0.0
8	4100	-0.1	-0.3	0.4	0.0	-0.3	0.4	-0.1	-0.3	0.4	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	-0.1
9	4900	0.0	-0.1	-1.0	-0.3	-0.2	7.9	-0.3	-0.2	7.9	-0.3	0.0	8.9	-0.3	0.0	8.9	0.0	0.0	0.0
10	5000	0.3	0.3	1.3	-0.2	0.1	-2.2	-0.2	0.0	-2.1	-0.4	-0.2	-3.5	-0.5	-0.3	-3.4	-0.1	0.0	0.1
11	5200	-2.3	-0.9	5.9	1.6	0.2	-1.3	1.6	0.2	-1.3	3.8	1.1	-7.2	3.8	1.1	-7.2	0.0	0.0	0.0
12	5500	1.4	-6.9	-10.8	1.7	-5.7	-1.1	1.7	-5.6	-1.0	0.3	1.2	9.7	0.2	1.2	9.8	-0.1	0.1	0.1
13	6400	-0.4	-0.1	-0.8	-0.6	-0.3	-0.1	-0.6	-0.2	-0.1	-0.2	-0.2	0.7	-0.2	-0.1	0.7	0.0	0.1	0.0
14	CH00	-0.2	-0.2	0.1	-0.3	-0.2	0.2	-0.3	-0.2	0.2	-0.1	0.0	0.1	-0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
15	CK00	0.5	1.2	-1.6	0.3	1.3	-0.9	0.3	1.3	-0.9	-0.2	0.1	0.8	-0.2	0.1	0.8	0.0	0.0	0.0
16	CM00	-0.3	-0.1	0.7	-0.9	-0.2	0.9	-0.9	-0.2	0.9	-0.6	-0.1	0.1	-0.6	-0.1	0.1	0.0	0.0	0.0
17	CN00	-0.5	0.3	5.9	-1.0	0.3	6.0	-0.9	0.2	6.0	-0.6	-0.1	0.1	-0.5	-0.2	0.1	0.1	-0.1	0.0
18	CP00	-0.6	0.8	0.9	-1.2	0.8	2.6	-1.2	0.8	2.6	-0.6	0.0	1.7	-0.6	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0
19	CQ00	-2.9	2.9	0.6	0.5	1.8	-5.2	0.5	1.8	-5.2	3.4	-1.0	-5.8	3.4	-1.0	-5.8	0.0	0.0	0.0
20	CS00	-0.4	-0.7	1.5	-0.3	1.2	2.6	-0.2	1.2	2.7	0.1	1.9	1.1	0.1	1.9	1.2	0.1	0.0	0.1
21	EC00	-0.3	0.0	-0.2	-0.3	0.3	-1.0	-0.3	0.3	-1.0	0.0	0.3	-0.8	0.0	0.3	-0.8	0.0	0.0	0.0
22	ED00	0.1	-0.2	-3.5	-0.2	0.0	-2.3	-0.2	0.0	-2.3	-0.4	0.1	1.3	-0.4	0.1	1.3	0.0	0.0	0.0
23	EE00	0.0	-0.5	-0.1	-0.2	-0.4	-2.0	-0.1	-0.4	-1.9	-0.2	0.1	-1.8	-0.1	0.1	-1.8	0.1	0.0	0.1
24	EF05	0.1	-0.2	0.4	0.6	-0.5	0.5	0.6	-0.5	0.5	0.5	-0.3	0.1	0.5	-0.3	0.1	0.0	0.0	0.0
25	EG00	-0.7	0.0	-0.1	-1.3	0.2	0.0	-1.3	0.2	0.1	-0.6	0.2	0.2	-0.6	0.2	0.2	0.1	0.0	0.1
26	EH00	-1.4	0.0	0.4	1.3	-0.2	-0.9	1.2	-0.2	-1.0	2.6	-0.3	-1.3	2.5	-0.3	-1.4	-0.1	0.0	-0.1
27	EJ00	0.4	-0.5	-2.4	0.4	-0.5	-2.4	0.3	-0.5	-2.3	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.1	-0.1	0.0	0.1
28	EK00	-0.5	0.5	6.1	0.1	0.5	-2.9	0.0	0.5	-2.8	0.5	0.1	-9.0	0.5	0.0	-8.9	-0.1	0.0	0.1
29	EL00	-0.6	0.0	-4.9	-0.6	0.6	-5.5	-0.6	0.6	-5.5	0.0	0.5	-0.5	0.0	0.5	-0.5	0.0	0.0	0.0
30	EM00	1.1	-0.3	-2.1	1.3	-0.3	-1.1	1.4	-0.3	-1.2	0.2	0.0	1.0	0.3	0.0	0.9	0.1	0.0	-0.1

Πίνακας 5.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε γεωδαιτικές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh
31	EN00	0.1	-0.1	-1.7	0.5	0.5	4.3	0.5	0.5	4.3	0.4	0.5	6.0	0.4	0.5	6.0	0.0	0.0	0.0
32	EO00	-2.9	7.3	44.6	1.8	-3.5	-2.4	1.8	-3.5	-2.4	4.7	-10.7	-47.0	4.8	-10.7	-46.9	0.1	0.0	0.1
33	TR00	1.7	-0.5	-2.4	0.2	0.7	1.1	0.3	0.7	1.0	-1.5	1.2	3.5	-1.4	1.2	3.4	0.1	0.0	-0.1
34	V000	2.6	1.3	3.3	0.1	0.4	-0.7	0.1	0.4	-0.7	-2.5	-0.9	-4.0	-2.5	-0.9	-4.0	0.0	0.0	0.0
35	X002	1.6	-0.6	-6.3	2.7	-1.1	-7.1	2.7	-1.1	-7.1	1.2	-0.5	-0.8	1.2	-0.5	-0.8	0.0	0.0	0.0
Μέση τιμή		0.0	0.0	0.7	0.2	-0.2	-0.6	0.2	-0.2	-0.6	0.2	-0.2	-1.3	0.2	-0.2	-1.3	0.0	0.0	0.0
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών		0.9	0.9	4.2	0.7	0.8	2.9	0.7	0.8	2.9	0.8	0.7	3.6	0.8	0.7	3.6	0.0	0.0	0.0

Πίνακας 5.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες (συνέχεια)

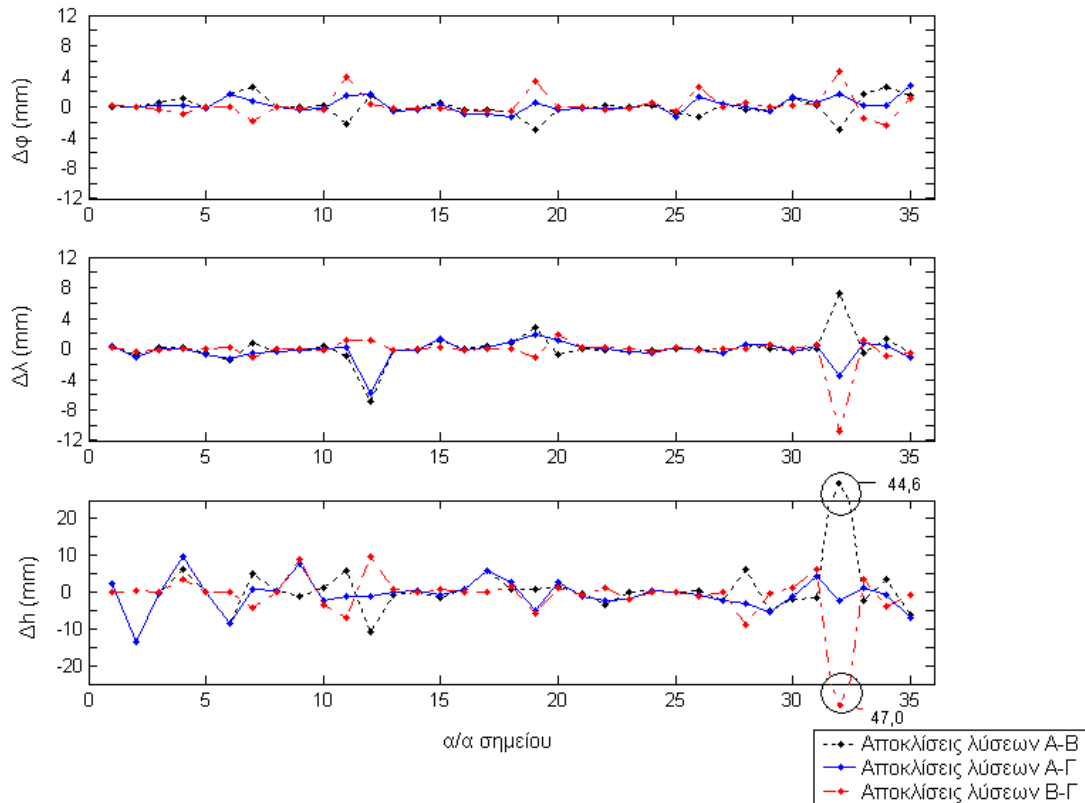
α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ
1	2400	1.6	0.9	1.4	1.4	1.0	1.5	1.4	0.9	1.5	-0.3	0.1	0.1	-0.3	0.9	1.5	0.0	-0.1	0.0
2	2700	-9.5	-4.9	-8.6	-9.3	-5.1	-8.5	-9.3	-5.1	-8.5	0.3	-0.2	0.1	0.3	-5.1	-8.5	0.0	0.0	0.0
3	2800	-0.6	0.0	0.2	-0.5	-0.1	-0.2	-0.5	-0.1	-0.2	0.1	-0.1	-0.3	0.1	-0.1	-0.2	0.0	0.0	0.0
4	3400	3.8	1.7	4.6	6.9	3.0	6.1	6.9	3.0	6.1	3.1	1.2	1.4	3.1	3.0	6.1	0.0	0.0	0.0
5	3500	0.3	-0.5	-0.2	0.3	-0.6	-0.2	0.3	-0.5	-0.2	0.0	-0.1	0.0	0.0	-0.5	-0.2	0.0	0.1	0.0
6	3600	-6.5	-4.5	-4.0	-6.4	-4.3	-4.0	-6.4	-4.4	-4.0	0.1	0.1	0.0	0.1	-4.4	-4.0	0.0	-0.1	0.0
7	3801	1.8	1.6	5.1	0.4	-0.4	1.2	0.4	-0.3	1.2	-1.4	-1.9	-3.9	-1.4	-0.3	1.2	0.0	0.1	0.0
8	4100	0.4	-0.2	0.2	0.4	-0.2	0.3	0.4	-0.2	0.2	0.0	0.0	0.1	0.0	-0.2	0.2	0.0	0.0	-0.1
9	4900	-0.6	-0.4	-0.7	6.0	2.4	4.7	6.0	2.4	4.7	6.6	2.8	5.3	6.6	2.4	4.7	0.0	0.0	0.0
10	5000	0.7	0.6	1.0	-1.5	-0.6	-1.5	-1.4	-0.6	-1.5	-2.2	-1.2	-2.5	-2.1	-0.6	-1.5	0.1	0.0	0.0
11	5200	5.9	1.6	1.9	-1.9	-0.6	0.4	-1.9	-0.6	0.4	-7.8	-2.2	-1.4	-7.8	-0.6	0.4	0.0	0.0	0.0
12	5500	-5.7	-10.1	-5.6	0.5	-6.0	0.7	0.6	-5.9	0.7	6.2	4.1	6.2	6.3	-5.9	0.7	0.1	0.1	0.0
13	6400	-0.4	-0.3	-0.8	0.4	-0.1	-0.6	0.4	0.0	-0.6	0.7	0.1	0.3	0.7	0.0	-0.6	0.0	0.1	0.0
14	CH00	0.3	-0.1	-0.1	0.4	-0.1	-0.1	0.4	-0.1	-0.1	0.1	0.1	0.0	0.1	-0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0
15	CK00	-1.9	0.5	-0.6	-1.3	0.9	-0.3	-1.3	0.9	-0.3	0.6	0.4	0.3	0.6	0.9	-0.3	0.0	0.0	0.0
16	CM00	0.7	0.3	0.2	1.2	0.3	-0.2	1.2	0.3	-0.2	0.5	0.1	-0.4	0.5	0.3	-0.2	0.0	0.0	0.0
17	CN00	4.4	2.2	3.3	4.8	2.3	2.9	4.8	2.2	3.0	0.4	0.1	-0.4	0.4	2.2	3.0	0.0	-0.1	0.1
18	CP00	0.6	1.2	0.1	2.2	1.9	0.7	2.2	1.9	0.7	1.6	0.7	0.6	1.6	1.9	0.7	0.0	0.0	0.0
19	CQ00	1.0	3.6	-1.9	-4.7	0.0	-2.8	-4.7	0.0	-2.8	-5.8	-3.6	-0.9	-5.8	0.0	-2.8	0.0	0.0	0.0
20	CS00	1.6	-0.1	0.6	1.6	2.0	1.4	1.6	2.0	1.5	0.0	2.1	0.8	0.0	2.0	1.5	0.0	0.0	0.1
21	EC00	0.0	0.0	-0.3	-0.7	0.0	-0.8	-0.7	0.0	-0.8	-0.7	0.0	-0.5	-0.7	0.0	-0.8	0.0	0.0	0.0
22	ED00	-2.6	-1.3	-2.1	-1.5	-0.7	-1.6	-1.5	-0.7	-1.6	1.1	0.6	0.5	1.1	-0.7	-1.6	0.0	0.0	0.0
23	EE00	0.1	-0.5	-0.1	-1.2	-0.9	-1.4	-1.2	-0.9	-1.3	-1.3	-0.4	-1.3	-1.3	-0.9	-1.3	0.0	0.0	0.1
24	EF05	0.3	-0.1	0.4	0.2	-0.5	0.8	0.2	-0.5	0.8	-0.1	-0.4	0.4	-0.1	-0.5	0.8	0.0	0.0	0.0
25	EG00	0.3	0.1	-0.6	0.7	0.5	-1.0	0.7	0.5	-0.9	0.4	0.4	-0.4	0.4	0.5	-0.9	0.0	0.0	0.1
26	EH00	1.0	0.5	-0.8	-1.3	-0.8	0.4	-1.3	-0.8	0.3	-2.3	-1.3	1.3	-2.3	-0.8	0.3	0.0	0.0	-0.1
27	EJ00	-1.7	-1.3	-1.2	-1.7	-1.3	-1.2	-1.6	-1.3	-1.2	0.0	0.0	0.0	0.1	-1.3	-1.2	0.1	0.0	0.0
28	EK00	4.4	2.4	3.4	-2.3	-0.4	-1.8	-2.2	-0.4	-1.8	-6.7	-2.9	-5.2	-6.6	-0.4	-1.8	0.1	0.0	0.0
29	EL00	-3.2	-1.4	-3.6	-3.8	-1.1	-3.9	-3.8	-1.1	-3.9	-0.6	0.3	-0.3	-0.6	-1.1	-3.9	0.0	0.0	0.0
30	EM00	-2.0	-1.2	-0.5	-1.4	-0.9	0.3	-1.5	-0.9	0.3	0.6	0.3	0.8	0.5	-0.9	0.3	-0.1	0.0	0.0

Πίνακας 5.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
31	EN00	-1.3	-0.6	-0.9	2.6	1.6	3.1	2.6	1.6	3.1	3.9	2.2	4.0	3.9	1.6	3.1	0.0	0.0	0.0
32	EO00	30.7	21.0	25.7	-1.4	-4.4	-0.2	-1.4	-4.4	-0.1	-32.2	-25.4	-25.8	-32.2	-4.4	-0.1	0.0	0.0	0.1
33	TR00	-2.6	-1.6	-0.2	0.4	0.9	0.8	0.3	0.9	0.8	3.0	2.5	1.0	2.9	0.9	0.8	-0.1	0.0	0.0
34	VO00	0.4	1.6	4.1	-0.8	0.1	-0.3	-0.8	0.1	-0.3	-1.2	-1.5	-4.4	-1.2	0.1	-0.3	0.0	0.0	0.0
35	X002	-5.2	-2.8	-2.7	-6.3	-3.8	-2.2	-6.3	-3.8	-2.2	-1.1	-1.0	0.4	-1.1	-3.8	-2.2	0.0	0.0	0.0
Μέση τιμή		0.5	0.2	0.5	-0.5	-0.4	-0.2	-0.5	-0.4	-0.2	-1.0	-0.7	-0.7	-0.1	-0.1	-0.2	0.0	0.0	0.0
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών		3.0	2.1	2.5	2.2	1.4	1.7	2.2	1.4	1.7	2.6	1.7	2.0	2.6	1.4	1.7	0.0	0.0	0.0

Πίνακας 5.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες (συνέχεια)

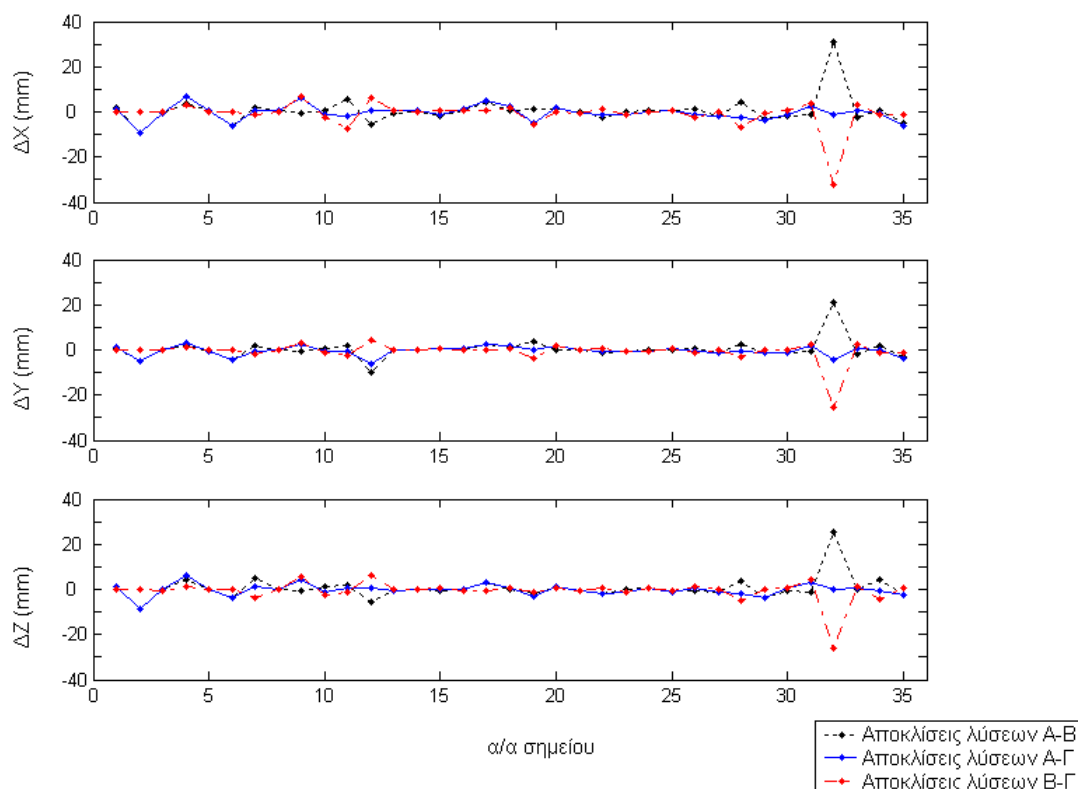
Οι εκτιμήσεις των συντεταγμένων προφανώς, θα πρέπει να συνοδεύονται από πληροφορία για την ακρίβειά τους. Ο μεγάλος όγκος δεδομένων (παρατηρήσεων) όμως, καθιστά δύσκολη την ρεαλιστική εκτίμησή της. Έτσι, τα κοντινότερα στην πραγματικότητα τυπικά σφάλματα, είναι αυτά που υπολογίζονται (από τον χρήστη) από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις (επαναληπτικότητα).



Σχήμα 5.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες

Σημαντικά σε αυτόν τον τομέα, είναι τα αποτελέσματα που υπολογίζονται από την λύση Δ (RMS2). Αν επαληθευτεί η σχέση μεταξύ αυτών και των τυπικών σφαλμάτων που προκύπτουν από τη λύση Α, που διαπιστώνεται στο Σχήμα 1.3-9, η εκτίμηση της ποιότητας θα μπορεί να γίνεται αξιόπιστα σε μικρότερο χρόνο.

Οι απαιτούμενοι χρόνοι επεξεργασίας για κάθε λύση, δεν διαφέρουν σημαντικά. Μικρό μόνο προβάδισμα προσφέρει η επίλυση με χρήση των ανά ημέρα πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας (Λύση Δ).



Σχήμα 5.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες

5.4 Υποδίκτυο Β' τάξης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το υποδίκτυο Β' τάξης περιέχει όλα εκείνα τα σημεία, τα οποία έχουν παρατηρήσεις μόνο μίας ημέρας (εκτός από τα οκτώ που ήδη αναφέρθηκαν) και οι ασάφειές τους έχουν λυθεί με τον αλγόριθμο Q.I.F.. Το υποδίκτυο αυτό, περιέχει τη συντριπτική πλειοψηφία των σημείων ολόκληρου του δικτύου.

Για την επίλυση του δικτύου, σχηματίστηκαν βάσεις μεταξύ των συγκεκριμένων σημείων και αυτών του υποδικτύου Α' τάξης ή ενός εκ των σταθμών του Διονύσου ή της Αρκίτσας, με κριτήριο την μικρότερη απόστασή τους από αυτούς (οι μικροί χρόνοι παρατήρησης, συνήθως κάτω των δύο ωρών, έδιναν στην επιλογή αυτή καίρια σημασία). Ως κατώτατο όριο επίλυσης ασαφειών θεσπίστηκε το 60%.

Σημεία υποδικτύου Β' τάξης			
P077	2600	P125	4600
5204	P429	P189	P112
2000	P514	P219	P314
2747	1500	P039	P387
P026	P144	P094	P974
P220	P631	P449	PDOM
P273	P705	P120	1228
P345	P948	P133	2100
P373	P018	P257	KNIM
P390	P024	P307	P592
P450	P027	P651	P215
P490	P321	P795	P216
1700	P209	Q144	P761
P017	P211	Q273	VA64
P023	P662	P033	5100
P025	3700	P170	5800
P115	5300	P894	P107
P354	P067	Q096	P327
P395	P119	Q321	P402
P519	P341	Q327	CGOO
P146	P528	3800	P195
Σύνολο Σημείων: 84			

Πίνακας 5.4-1: Σημεία υποδικτύου Β' τάξης

Για τις ανάγκες της συνόρθωσης, κρατήθηκαν σταθερές οι συντεταγμένες του υποδικτύου Α' τάξης που προέκυψαν από την Λύση Β (χωρισμός σε υποπεριόδους).

Η συνόρθωση επιχειρήθηκε τόσο με το πρόγραμμα ADDNEQ (χωρίς απαλοιφή παραμέτρων ή χωρισμό σε υποπεριόδους) όσο και με το COMPAR. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, προέκυψε ότι:

1. Τα δύο προγράμματα (μέθοδοι), δίνουν ακριβώς τις ίδιες εκτιμήσεις (μέγιστη διαφορά ± 0.1 mm σε καρτεσιανές συντεταγμένες) για τις συντεταγμένες.
2. Τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται από το λογισμικό συμπίπτουν (μέγιστη απόκλιση ± 0.2 mm).
3. Τα a posteriori τυπικά σφάλματα μονάδας βάρους είναι $\hat{\sigma}_0 = 0.0011$ m και για τα δύο προγράμματα, ενώ για το COMPAR υπολογίζεται και το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους για συντεταγμένες: $\hat{\sigma}_{CRD} = 0.0016$ m. Σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του υποδικτύου Α' τάξης, η μεταβλητότητα αυτή ($\hat{\sigma}_{CRD}$) είναι μικρή και αρκετά κοντά στην (συμβατική) μεταβλητότητα ($\hat{\sigma}_0$).
4. Τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται και με τα δύο προγράμματα, είναι (κατά τη μέση τιμή τους) μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερα, από αυτά που υπολογίστηκαν για το υποδίκτυο Α' τάξης (για όλες τις λύσεις που παρουσιάστηκαν).

Είναι πιθανό, η ακρίβεια της επίλυσης, να επηρεάζεται από το γεγονός της υπερδέσμευσης του δικτύου (χρήση πολλών σταθερών σημείων). Προκύπτει έτσι το ερώτημα, αν τα αποτελέσματα αυτά θα ήταν ίδια, σε περίπτωση που είχε γίνει χρήση των ελάχιστων εξωτερικών δεσμεύσεων (δηλαδή να κρατηθεί ένα μόνο σημείο σταθερό).

Για τα οκτώ σημεία που έχουν παρατηρήσεις για δύο ημέρες, έχουν υπολογιστεί και τα RMS2, όπως φαίνονται στον Πίνακα 5.4-2:

Συνιστώσα X		ADDNEQ		COMPAR	
	Σημείο	$\pm \sigma_x$ (mm)	RMS2 _x (mm)	$\pm \sigma_x$ (mm)	RMS2 _x (mm)
	P026	1.3	2.9	1.2	0.3
	2100	1.2	2.3	1.1	2.3
	2600	1.4	11.6	1.3	11.7
	3700	1.3	30.1	1.2	26.2
	4600	1.3	2.5	1.3	2.4
	P024	1.5	10.6	1.5	11.3
	P354	1.4	1.4	1.4	1.4
	Q273	0.8	24.2	0.7	24.4

Συνιστώσα Y		ADDNEQ		COMPAR	
	Σημείο	$\pm \sigma_y$ (mm)	RMS2 _y (mm)	$\pm \sigma_y$ (mm)	RMS2 _y (mm)
	P026	0.5	2.8	0.5	0.2
	2100	0.5	0.8	0.5	0.8
	2600	0.6	7.5	0.6	4.6
	3700	0.6	13.4	0.6	12.0
	4600	0.6	0.9	0.6	0.9
	P024	0.7	3.1	0.7	2.2
	P354	0.7	6.3	0.7	4.8
	Q273	0.4	19.2	0.4	19.0

Συνιστώσα Z		ADDNEQ		COMPAR	
	Σημείο	$\pm \sigma_z$ (mm)	RMS2 _z (mm)	$\pm \sigma_z$ (mm)	RMS2 _z (mm)
	P026	1.0	14.7	1.0	15.0
	2100	0.9	5.2	0.9	5.2
	2600	1.1	7.0	1.1	6.6
	3700	1.1	30.9	1.1	29.9
	4600	1.2	4.4	1.2	4.4
	P024	1.2	9.2	1.2	11.6
	P354	1.3	3.1	1.3	2.0
	Q273	0.6	16.9	0.6	17.2

Πίνακας 5.4-2: Στατιστικά στοιχεία επίλυσης υποδικτύου Β' τάξης

Τα τυπικά σφάλματα των δύο προγραμμάτων είναι ίσα (± 0.1 mm), ενώ για τα RMS2 υπάρχουν αποκλίσεις έως και 3 mm (τα RMS2 που υπολογίζονται από το ADDNEQ είναι συνήθως λίγο μεγαλύτερα από του COMPAR. Η αντιστοιχία όμως αυτή αντιστρέφεται αν λάβουμε υπ' όψη το $\hat{\sigma}_{CRD}$).

Λαμβάνοντας υπ' όψη λοιπόν τα παραπάνω σημεία (1-3), είναι εμφανές ότι:

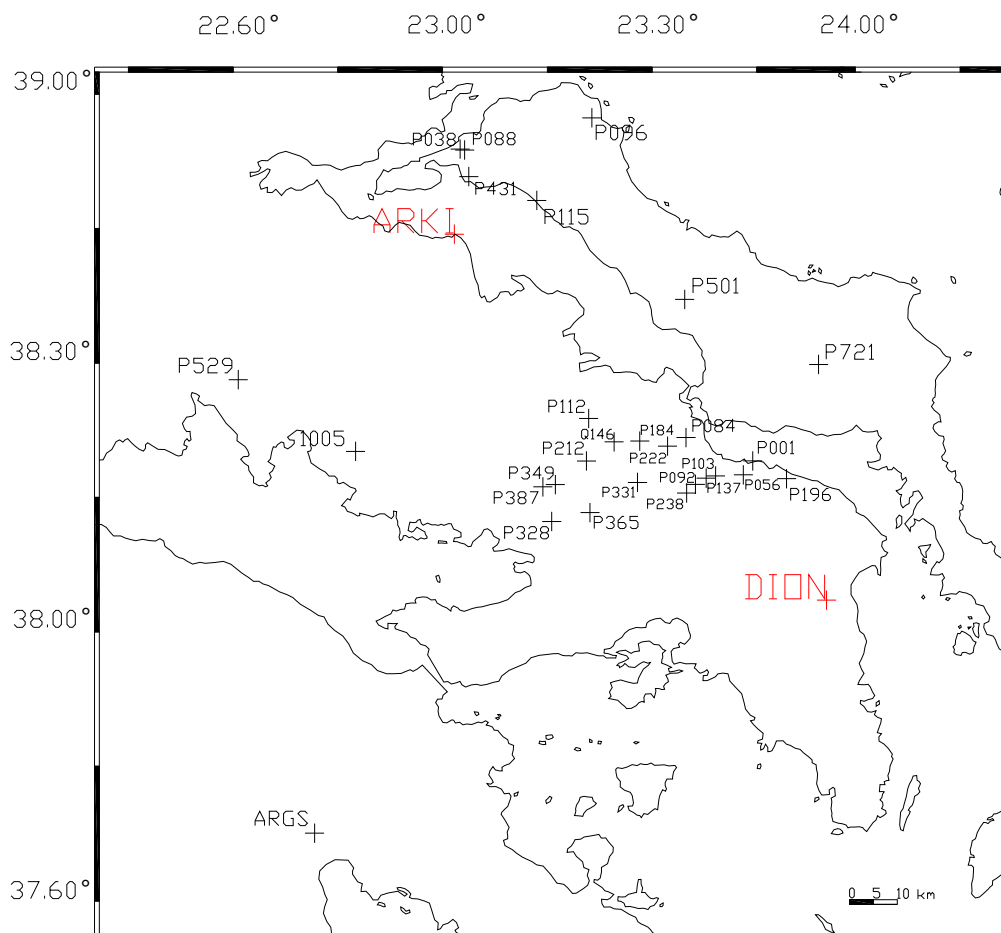
- Η απαλοιφή των παραμέτρων της τροπόσφαιρας κατά την τελική συνόρθωση (που γίνεται αυτόματα στο πρόγραμμα COMPAR, Κεφάλαιο 4.5), δεν προκαλεί σφάλμα στην εκτίμηση των συντεταγμένων (τουλάχιστο στην συγκεκριμένη περίπτωση και για τις δεδομένες ακρίβειες).

- Η έλλειψη επαναληπτικότητας, εξισώνει απόλυτα τα δύο προγράμματα (μεθόδους) και στερεί από το COMPAR την δυνατότητα εκτίμησης (σχετικά) ρεαλιστικών τυπικών σφαλμάτων.

5.5 Υποδίκτυο Γ' τάξης

Τα σημεία του υποδικτύου Γ' τάξης, διαχωρίζονται από τα υπόλοιπα σημεία του δικτύου από τη μέθοδο επίλυσης των ασαφειών φάσης. Για τα συγκεκριμένα σημεία, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος SIGMA (στα δύο προηγούμενα υποδίκτυα είχε γίνει χρήση του αλγορίθμου Q.I.F.).

Η επίλυση με τη μέθοδο αυτή, γίνεται συνήθως ανεξάρτητα για τις δύο συχνότητες, στο συγκεκριμένο υποδίκτυο δε, έγινε μόνο για την συχνότητα L_1 (η συχνότητα L_2 άλλωστε πολλές φορές δεν ήταν διαθέσιμη). Το κατώτατο όριο επίλυσης ασαφειών, ήταν το 60% (βέβαια λόγω του πολύ χαλαρού στατιστικού ελέγχου της μεθόδου SIGMA οι επιλύσεις ήταν μεγαλύτερου ποσοστού). Οι πολύ σύντομοι χρόνοι παρατήρησης (μικρότεροι της μίας ώρας), καθιστούσαν μη – εφαρμόσιμο τον αλγόριθμο Q.I.F..



Σχήμα 5.5-1: Σημεία υποδικτύου Γ' τάξης

Για την επίλυση του υποδικτύου Γ' τάξης, θεωρήθηκαν σταθερές οι συντεταγμένες των υποδικτύων Α' τάξης που έχουν προκύψει από την Λύση Β (συνδυασμένη επίλυση με υποπεριόδους) και Β' τάξης που έχουν προκύψει με το πρόγραμμα ADDNEQ. Η συνόρθωση έγινε με το πρόγραμμα ADDNEQ (συνδυασμένη επίλυση). Φυσικά στην συγκεκριμένη περίπτωση, η χρήση της συνδυασμένης μεθόδου δεν επιβάλλεται (οι ίδιες εκτιμήσεις θα προέκυπταν από τις ανά ημέρα εξισώσεις) και γίνεται κυρίως για σκοπούς που αφορούν στον υπολογιστικό χρόνο, ομοιομορφία και ποικιλία των αποτελεσμάτων, κ.τ.λ.. Τα στατιστικά στοιχεία που προέκυψαν για τα τυπικά σφάλματα, αναγράφονται στον Πίνακα 5.5-1.

Αποτελέσματα τυπικών σφαλμάτων υποδικτύου Γ' τάξης			
συνιστώσα	Μέση τιμή	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή
$\pm \sigma_x$ (m)	0.14	0.40	0.05
$\pm \sigma_y$ (m)	0.07	0.23	0.02
$\pm \sigma_z$ (m)	0.10	0.25	0.04
a-posteriori τυπικό σφάλμα μονάδας βάρους: $\hat{\sigma}_0 = 0.1180$ m			

Πίνακας 5.5-1: Στατιστικά στοιχεία επίλυσης υποδικτύου Γ' τάξης

Προφανώς η ποιότητα επίλυσης του συγκεκριμένου υποδικτύου είναι πολύ χαμηλότερη των άλλων δύο (Α' και Β' τάξης), είναι όμως αναμενόμενη αν αναλογιστούμε το μήκος των βάσεων, τους μικρούς χρόνους παρατήρησης και τη χρήση μόνο μίας συχνότητας (L_1).

Σημεία υποδικτύου Β' τάξης				
P529	P184	P038	Q146	P092
Q307	P056	P088	P328	P196
P431	P103	P001	P331	P721
P112	P137	P212	P365	P387
P222	P238	P349	P501	P084
1005	P096	P115	ARGS	
Σύνολο σημείων: 29				

Πίνακας 5.5-2: Σημεία υποδικτύου Γ' τάξης

6 Επίλυση δικτύου εποχής 2005.76

6.1 Περιγραφή του δικτύου

Το δίκτυο της περιόδου 2005.76, αποτελείται από 71 (+7 σταθμούς I.G.S.) σημεία και εκτείνεται στις περιοχές Βόρειας Αττικής, Βόρειας Πελοποννήσου και Εύβοιας. Μεγάλο μέρος του δικτύου είναι όμοιο με αυτό της εποχής 1997.76 και περιέχει σημεία που παρακολουθούνται τακτικά, για την μελέτη της τεκτονικής συμπεριφοράς της ευρύτερης περιοχής.

Οι παρατηρήσεις έλαβαν χώρα από την 27 Σεπτεμβρίου 2005, έως και την 6 Οκτωβρίου της ίδιας χρονιάς (10 ημέρες) και διεξήχθησαν με δορυφορικά μέσα (G.P.S.) με χρήση διαφόρων τύπων δεκτών. Οι χρόνοι και ημέρες παρατήρησης για κάθε σημείο ποικίλουν (από 24 ώρες παρατήρησης για κάθε ημέρα στους σταθμούς αναφοράς, έως μία ώρα για μία μόλις ημέρα).

Το δίκτυο εξαρτήθηκε από τους επτά Ευρωπαϊκούς σταθμούς της I.G.S., που είχαν χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση του δικτύου της εποχής 1997.76. Συγκεκριμένα οι σταθμοί που επιλέχτηκαν είναι οι:

1. Ankara (ANKR)
2. Graz (GRAZ)
3. Matera (MATE)
4. Nicosia (NICO)
5. Penc (PENC)
6. Sofia (SOFI)
7. Wettzell (WTZR)

Η επίλυση του δικτύου, έγινε στο σύστημα αναφοράς ITRF 2000, για την μέση εποχή των μετρήσεων (2005.76).

6.2 Διαδικασία επίλυσης

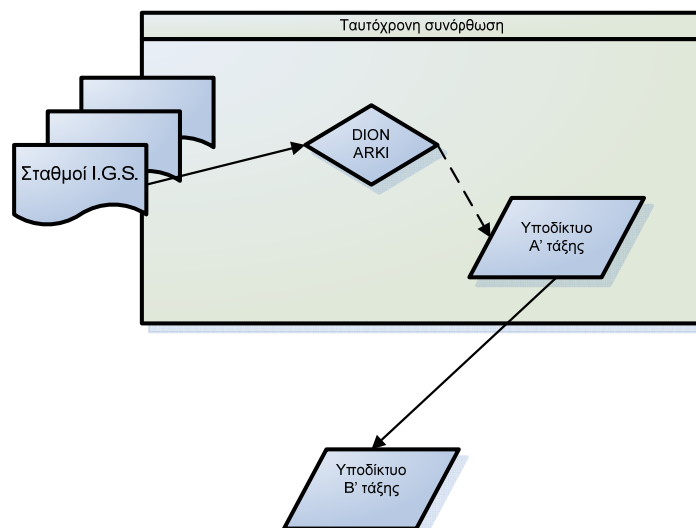
Η διαδικασία επίλυσης του δικτύου, ακολουθεί διαφορετική πορεία από αυτή που παρουσιάστηκε για το δίκτυο της περιόδου 1997.76. Αιτία είναι η μεγάλη διαφορά του όγκου των παρατηρήσεων (το δίκτυο της περιόδου 1997.76 είναι σαφώς ογκωδέστερο).

Τα καίρια σημεία διαφοροποίησης είναι:

1. Το δίκτυο χωρίστηκε σε δύο επιμέρους υποδίκτυα Α' και Β' τάξης. Η διάκριση γίνεται (και εδώ) λόγω αδυναμίας ταυτόχρονης διαχείρισης από το λογισμικό του συνολικού όγκου των παρατηρήσεων. Έτσι τα σημεία με πλέον της μίας ημέρας παρατηρήσεων κατατάσσονται στο υποδίκτυο Α' τάξης, ενώ τα υπόλοιπα στο υποδίκτυο Β' τάξης.
2. Αντίθετα με την διαδικασία που ακολουθήθηκε στο δίκτυο της περιόδου 1997.76, η συνόρθωση του υποδικτύου Α' τάξης και των βάσεων μεταξύ των πρωτεύοντων σημείων και των Ευρωπαϊκών σταθμών εξάρτησης, έγινε

ταυτόχρονα (σε ένα «τρέξιμο»). Συνεπώς στα παρακάτω, οι πρωτεύοντες σταθμοί θα περιλαμβάνονται στο υποδίκτυο Α' τάξης.

3. Όλες οι ασάφειες φάσεις έχουν λυθεί με τον αλγόριθμο Q.I.F. (όλες οι παρατηρήσεις έχουν διεξαχθεί με δέκτες δύο συχνοτήτων).



Σχήμα 6.2-1: Πορεία επίλυσης δικτύου εποχής 2005.76

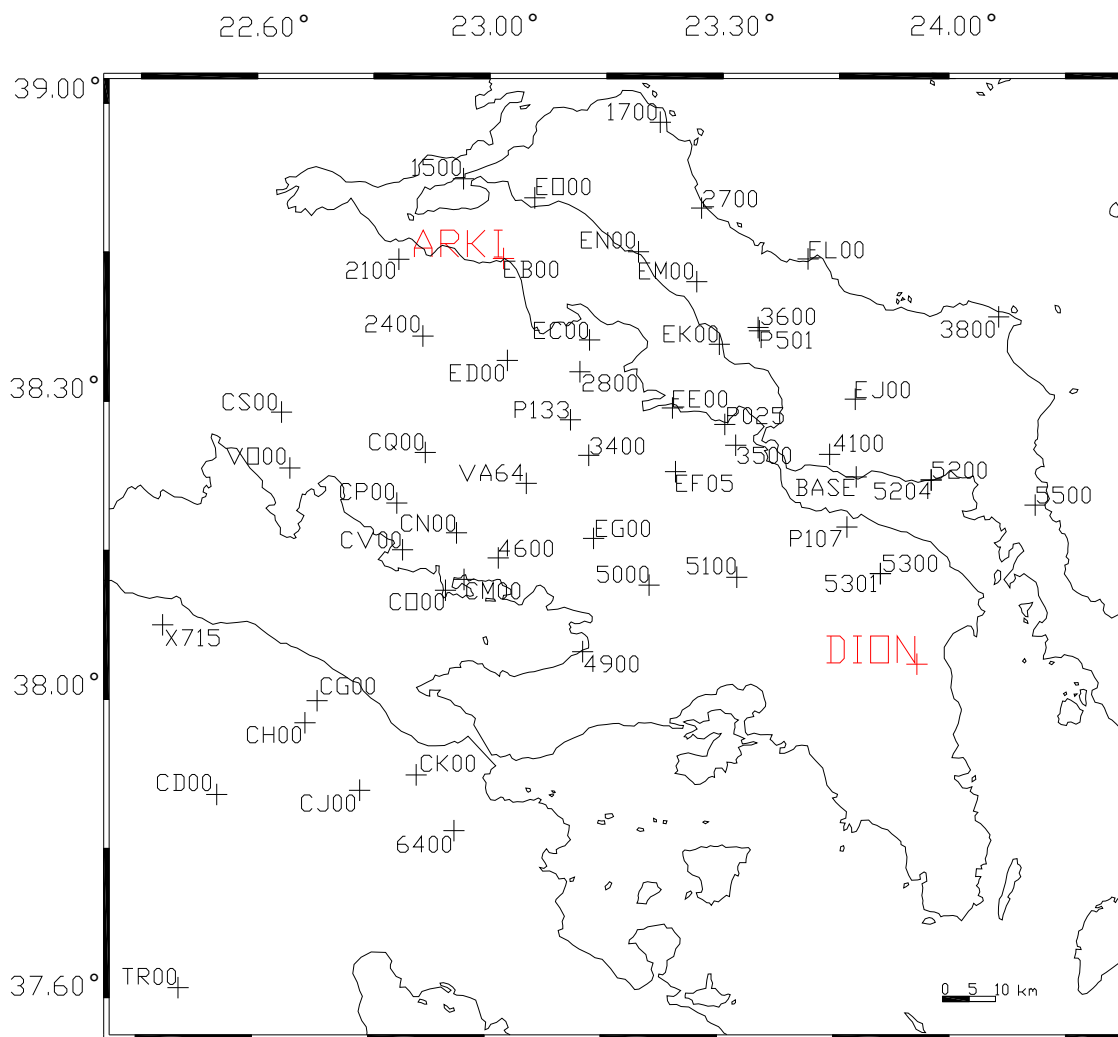
Ως πρωτεύοντες σταθμοί, επιλέχθηκαν οι DION και ARKI (εφαρμόζοντας τα ίδια κριτήρια επιλογής με το δίκτυο της περιόδου 1997.76). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, πρόκειται για τον μόνιμο σταθμό δορυφορικών παρατηρήσεων του Ε.Μ.Π. στον Διόνυσο και τον επίσης μόνιμο σταθμό που βρίσκεται στον φάρο της Αρκίτσας.

Οι συντεταγμένες που υπολογίστηκαν με χρήση όλων των μεθόδων που θα αναφερθούν παρακάτω, αναγράφονται στο Παράρτημα Β (Συντεταγμένες δικτύου εποχής 2005.76).

6.3 Υποδίκτυο Α' τάξης

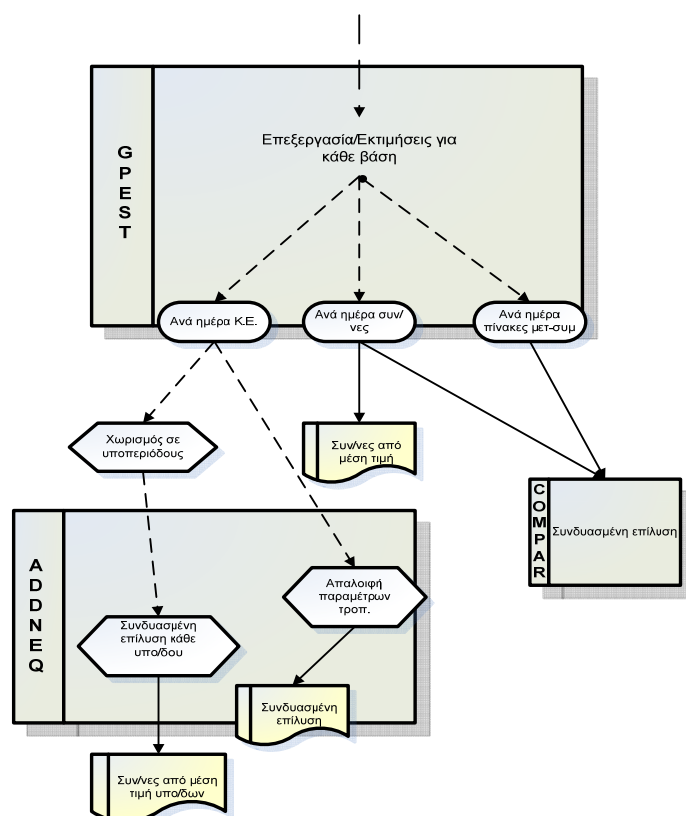
6.3.1 Γενικά

Η διαδικασία επίλυσης του υποδικτύου Α' τάξης, ακολούθησε σε γενικά πλαίσια την πορεία που ακολουθήθηκε στην αντίστοιχη επίλυση για το δίκτυο της περιόδου 1997.76, με τη μόνη διαφορά ότι η συνόρθωση έγινε ταυτόχρονα για τους πρωτεύοντες σταθμούς και τα υπόλοιπα σημεία του υποδικτύου Α' τάξης. Σχηματίστηκαν δηλαδή οι βάσεις από τους επιλεγμένους Ευρωπαϊκούς σταθμούς I.G.S. προς τους σταθμούς της Αρκίτσας και Διονύσου, όπως και αυτές μεταξύ των υπόλοιπων σημείων (του υποδικτύου) και των πρωτευόντων σταθμών. Ως κατώτατα όρια επίλυσης ασαφειών φάσης (διεξήχθη με τον αλγόριθμο Q.I.F) για τη συμμετοχή στην συνόρθωση, τέθηκαν τα 70% και 65% αντίστοιχα.



Σχήμα 6.3-1: Σημεία υποδικτύου Α' τάξης

Χρησιμοποιώντας τις βάσεις με αποδεκτό ποσοστό λυμένων ασαφειών, σχηματίστηκαν οι ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις από τις οποίες προέκυψαν οι λύσεις τύπου Α, Β Γ και Δ, ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία που περιγράφηκε για το δίκτυο της περιόδου 1997.76.



Σχήμα 6.3-2: Διάγραμμα υπολογισμού των διαφορετικών λύσεων υποδικτύου Α' τάξης

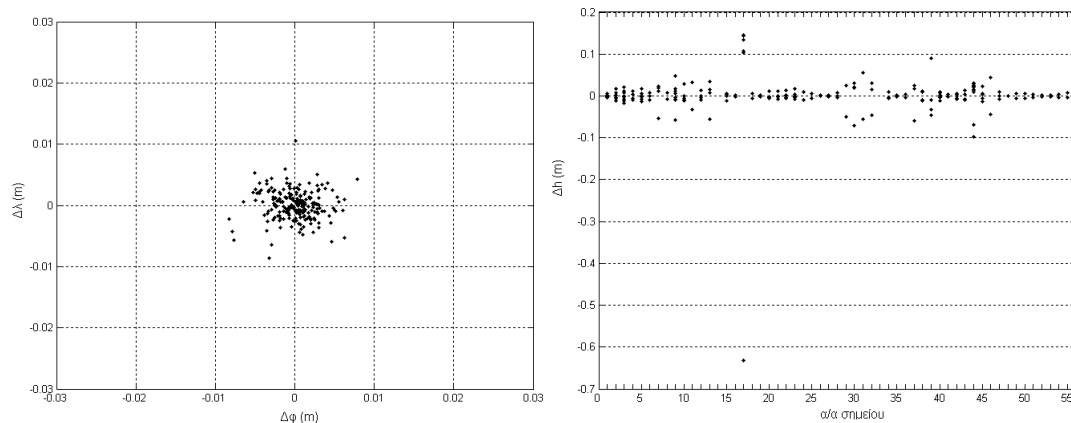
Παρακάτω, θα εστιάσουμε κυρίως στα αποτελέσματα κάθε μεθόδου επίλυσης, καθώς αναλυτικά στοιχεία για την μεθοδολογία και τα προγράμματα που εμπλέκονται σε κάθε μία, έχουν είδη περιγραφεί στα Κεφάλαια 3 και 5.3.

Υποδίκτυο Α' τάξης					
Σημείο	Ημέρες παρ/σης	Σημείο	Ημέρες παρ/σης	Σημείο	Ημέρες παρ/σης
ARKI	9	2100	4	CP00	4
DIONYSOS	7	2700	4	EC00	8
4100	9	3400	6	EE00	3
CS00	4	3800	7	EF05	7
3600	7	4600	2	EG00	4
5200	3	4900	2	EJ00	10
EM00	4	5100	2	EK00	6
CH00	2	5300	2	P133	2
5500	9	EL00	4	TR00	3
2800	5	EN00	3	VA64	2
CQ00	2	EO00	4	5301	2
ED00	5	P025	2	BASE	2
V000	4	P107	3	CD00	2
CK00	4	6400	3	CJ00	2
3500	2	1500	2	CO00	2
5000	6	CG00	2	CV00	2
5204	2	CM00	4	X715	3
1700	2	CN00	4	EB00	3
Σύνολο σημείων: 54					

Πίνακας 6.3-1: Σημεία υποδικτύου Α' τάξης

6.3.2 Επίλυση με ανά ημέρα συντεταγμένες (Λύση Α)

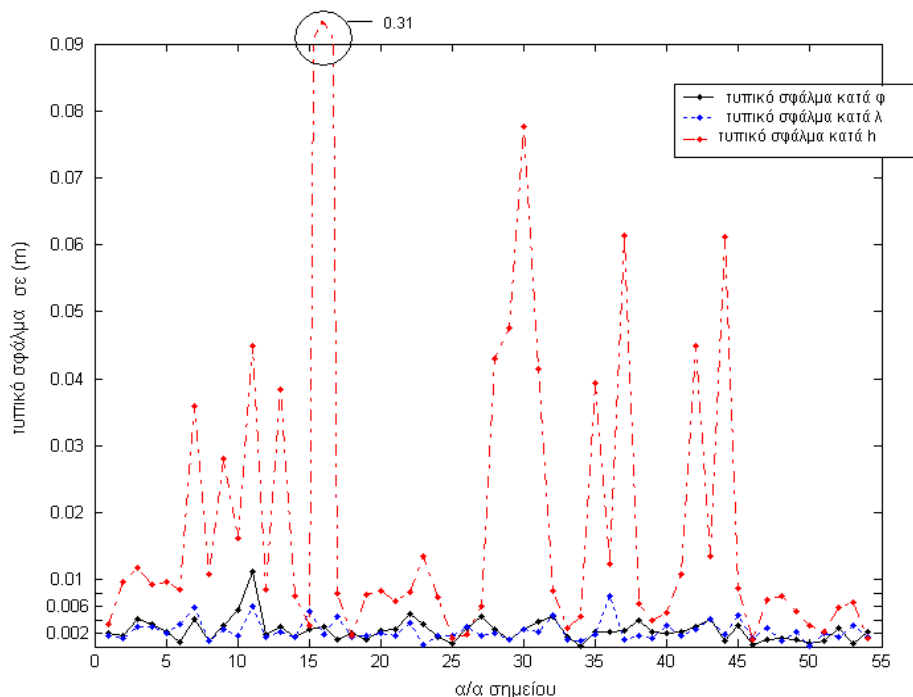
Στα παρακάτω διαγράμματα (Σχήμα 6.3-3), δίνεται μία εικόνα της ποιότητας των δεδομένων. Είναι φανερή η πολύ μικρή διασπορά από την ανά σημείο μέση τιμή (το γεγονός αυτό 'εξηγεί' τις μικρές αποκλίσεις της μέσης τιμής από τις συνορθωμένες τιμές που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 5.3 και θα φανούν και παρακάτω).



Σχήμα 6.3-3: : Οριζοντιογραφικές και υψομετρικές αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων από την μέση τιμή

Γίνεται επίσης εμφανής, η μεγάλη διαφορά μεταξύ οριζοντιογραφικής και υψομετρικής ακρίβειας.

Ίσως το πιο σημαντικό στοιχείο που υπολογίζεται από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις των συντεταγμένων, είναι τα τυπικά σφάλματα για κάθε σημείο, αφού αυτά που υπολογίζονται από το λογισμικό για τις υπόλοιπες λύσεις, δεν απεικονίζουν την πραγματική ακρίβεια συνόρθωσης. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.4-2), προέκυψαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στον Πίνακα 6.3-2.



Σχήμα 6.3-4: Τυπικά σφάλματα από λύση Α

6 Επίλυση δικτύου εποχής 2005.76

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα σε (mm)					
		$\pm \sigma_x$	$\pm \sigma_y$	$\pm \sigma_z$	$\pm \sigma_\varphi$	$\pm \sigma_\lambda$	$\pm \sigma_h$
1	ARKI	2.4	1.7	3.1	2.0	1.7	3.3
2	DIONYSOS	6.4	3.3	6.8	1.7	1.3	9.7
3	4100	8.3	5.4	8.0	4.0	2.9	11.7
4	CS00	6.1	0.9	8.3	3.4	3.0	9.3
5	3600	7.2	3.2	6.2	2.3	2.1	9.6
6	5200	7.1	1.2	5.9	0.8	3.4	8.6
7	EM00	22.4	16.0	24.1	4.1	5.8	35.9
8	CH00	8.8	2.7	5.9	0.9	0.9	10.8
9	5500	19.5	10.3	17.8	3.1	2.5	28.0
10	2800	10.2	3.7	13.4	5.4	1.7	16.2
11	CQ00	23.7	16.5	36.7	11.2	6.0	44.9
12	ED00	6.2	2.7	5.7	1.8	1.3	8.6
13	V000	29.6	10.6	22.3	2.9	2.1	38.3
14	CK00	6.4	1.8	4.4	1.5	1.5	7.6
15	3500	5.8	3.2	0.1	2.6	5.2	3.1
16	5000	224.6	95.4	191.7	3.0	1.8	310.4
17	5204	6.9	1.8	5.7	1.0	4.4	8.0
18	1700	0.6	1.3	2.5	2.0	1.4	1.5
19	2100	5.6	1.4	5.4	1.0	1.6	7.7
20	2700	5.0	3.9	6.4	2.4	2.0	8.4
21	3400	4.4	2.8	5.3	2.6	1.7	6.8
22	3800	8.3	5.0	2.6	4.8	3.4	8.1
23	4600	11.7	4.7	5.7	3.3	0.3	13.5
24	4900	5.2	0.4	5.7	1.5	1.6	7.4
25	5100	1.3	1.1	1.1	0.4	1.5	1.3
26	5300	1.6	4.0	1.1	2.7	3.0	1.8
27	EL00	2.4	2.4	6.8	4.4	1.7	6.0
28	EN00	31.3	15.5	25.4	2.5	2.0	43.1
29	EO00	34.3	15.4	29.4	1.1	1.0	47.7
30	P025	55.2	21.2	50.3	2.6	2.6	77.6
31	P107	27.3	13.3	28.5	3.7	2.3	41.5
32	6400	6.7	7.8	1.6	4.4	4.6	8.3
33	1500	3.2	0.3	0.7	1.4	1.0	2.8
34	CG00	2.8	2.1	2.8	0.1	0.8	4.4
35	CM00	29.4	12.6	23.1	2.1	1.9	39.4
36	CN00	6.7	10.1	8.1	2.1	7.6	12.3
37	CP00	43.3	17.6	39.8	2.4	1.1	61.3
38	EC00	5.4	1.9	5.2	3.8	1.7	6.5
39	EE00	1.9	0.8	4.2	2.2	1.2	3.9
40	EF05	4.4	3.5	2.8	1.9	3.2	5.1
41	EG00	7.1	3.0	8.0	2.2	1.7	10.7
42	EJ00	32.2	14.1	28.2	2.9	2.6	44.9
43	EK00	13.2	2.9	5.8	4.2	4.1	13.5
44	P133	43.8	20.7	37.4	0.9	1.8	61.2
45	TR00	2.8	6.2	7.8	3.3	4.6	8.6
46	VA64	1.0	0.8	0.8	0.3	1.2	1.0
47	5301	5.6	0.5	5.1	1.0	2.7	7.0
48	BASE	6.6	1.9	3.7	1.3	0.9	7.6
49	CD00	2.4	3.5	4.0	1.0	2.3	5.3
50	CJ00	2.1	0.7	2.3	0.5	0.1	3.1
51	CO00	1.8	1.5	2.1	0.9	2.1	2.1
52	CV00	6.4	1.1	1.4	2.8	1.5	5.8
53	X715	4.3	4.0	4.5	0.5	3.2	6.6
54	EB00	2.0	1.2	1.6	2.2	1.4	1.2
Μέση τιμή		15.4	7.3	13.8	2.4	2.4	21.5

Πίνακας 6.3-2: Τυπικά σφάλματα από λύση A

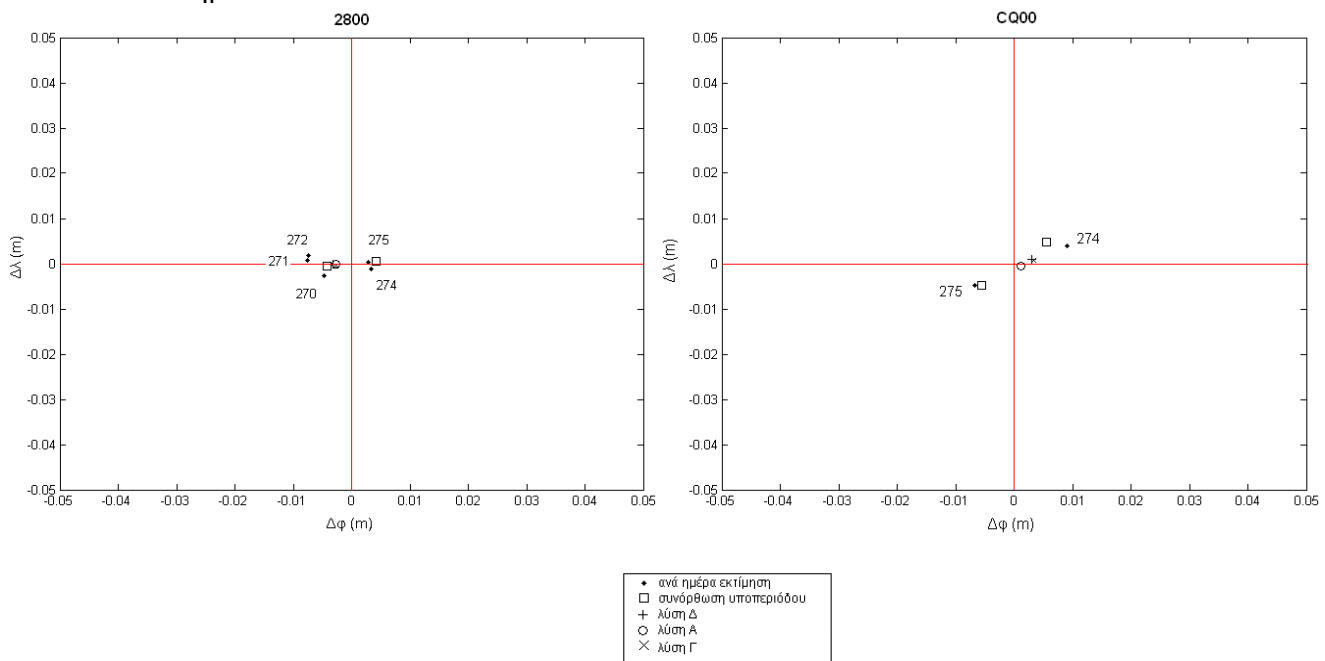
Είναι εμφανές, ότι η ποιότητα των παρατηρήσεων είναι πολύ καλή (λίγο καλύτερη από το αντίστοιχο υποδίκτυο της περιόδου 1997.76). Το μεγαλύτερο τυπικό σφάλμα

κατά ϕ παρουσιάζεται στο σημείο **CQ00** (περίπου 1 cm), που μάλιστα είναι διπλάσιο της ακριβώς προηγούμενης μεγαλύτερης τιμής (0.5 cm). Κατά λ , το μεγαλύτερο τυπικό σφάλμα υπολογίστηκε στο σημείο **CN00** (περίπου 0.8 mm), ενώ για το υψόμετρο τα αποτελέσματα είναι μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερα, με μέγιστη τιμή στο σημείο **5000** (30 cm).

6.3.3 Επίλυση με χωρισμό σε υποπεριόδους (Λύση B)

Για την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου, η συνολική περίοδος μετρήσεων (10 ημέρες) χωρίστηκε σε δύο υποπεριόδους. Η πρώτη περιλαμβάνει τις ημέρες από 27/9/2005 έως και 1/10/2005, ενώ η δεύτερη τις ημέρες από 2/10/2005 έως και 6/10/2005. Το δίκτυο συνορθώθηκε ξεχωριστά για κάθε μία υποπερίοδο χρησιμοποιώντας την συνδυασμένη επίλυση (πρόγραμμα ADDNEQ) και έπειτα ως τελικές συντεταγμένες των σημείων, θεωρήθηκαν οι μέσες τιμές που προέκυψαν από τις δύο συνορθώσεις. Τα αποτελέσματα των δύο συνορθώσεων, θεωρήθηκαν ισοβαρή και ανεξάρτητα κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής.

Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις παρατηρούνται στο σημείο **CQ00**, και φτάνουν το 1cm για την οριζοντιογραφία. Το σημείο αυτό έχει παρατηρηθεί για δύο ημέρες, που ανήκουν όμως σε διαφορετικές υποπεριόδους. Όπως φαίνεται και από τα ανά ημέρα τυπικά σφάλματα (Πίνακας 6.3-2), οι αποκλίσεις των εκτιμήσεων μεταξύ των δύο αυτών ημερών είναι μεγάλες (Σχήμα 6.3-5) – σημειώνεται ότι η σύγκλιση των Λύσεων Γ και Δ προς την εκτίμηση της ημέρας 274, προδίδει την αυξημένη ακρίβειά της, σε σχέση με αυτήν της ημέρας 275. Μεγάλη απόκλιση εμφανίζει και η συνιστώσα λ για το σημείο **2800**.



Σχήμα 6.3-5: Αποκλίσεις ανά ημέρα εκτιμήσεων και διαφορετικών λύσεων* (το (0,0) αναπαριστά την λύση B)

* Στα διαγράμματα 6.3-5, χρησιμοποιείται για τις ημερομηνίες παρατήρησης, ο αύξων αριθμός της ημέρας του χρόνου. Έτσι, οι ημέρες παρατήρησης, διαρκούν από την ημέρα 270 έως και την 279, ενώ η πρώτη υποπερίοδος περιλαμβάνει τις 270 έως και 274.

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις των συνορθώσεων για τις δύο υποπεριόδους (απόλυτες τιμές)					
		ΔX (mm)	ΔY (mm)	ΔZ (mm)	$\Delta\phi$ (mm)	$\Delta\lambda$ (mm)	Δh (mm)
1	ARKI	2.6	0.1	3.0	0.9	0.8	3.8
2	DIONYSOS	8.0	4.9	10.8	1.2	2.8	14.0
3	4100	2.8	4.1	5.0	2.6	6.5	0.2
4	CS00	10.9	1.6	11.3	2.7	2.2	15.4
5	3600	6.8	1.6	3.5	1.3	1.6	7.6
6	5200						
7	EM00	21.2	11.8	25.9	2.4	5.1	35.0
8	CH00						
9	5500	27.4	13.7	22.4	1.3	1.4	37.9
10	2800	9.8	3.2	2.4	0.9	8.3	6.5
11	CQ00	27.7	21.9	41.2	9.4	11.1	52.3
12	ED00	10.5	6.0	7.4	1.4	1.7	14.0
13	V000	37.3	17.0	28.8	1.4	2.9	50.0
14	CK00						
15	3500						
16	5000	547.2	233.9	464.3	2.2	3.3	754.8
17	5204						
18	1700						
19	2100	8.0	5.4	5.0	1.9	2.0	10.5
20	2700	7.9	7.8	5.4	4.0	2.3	11.5
21	3400	1.2	0.2	3.7	0.3	2.2	3.2
22	3800	5.7	0.8	9.7	3.1	4.5	9.9
23	4600						
24	4900						
25	5100						
26	5300						
27	EL00						
28	EN00	53.7	23.3	46.4	0.1	0.5	74.7
29	EO00	52.2	25.3	40.0	2.8	5.2	70.2
30	P025						
31	P107	45.2	23.8	43.8	3.6	2.8	67.1
32	6400						
33	1500						
34	CG00						
35	CM00	41.2	12.9	35.1	4.2	1.0	55.5
36	CN00	6.1	0.7	11.6	3.0	5.8	11.4
37	CP00	11.5	5.8	17.9	0.9	6.1	21.2
38	EC00	0.7	1.8	1.4	1.4	1.9	0.2
39	EE00						
40	EF05	1.2	4.0	0.3	4.1	0.5	0.2
41	EG00	30.4	16.5	27.5	3.2	0.2	44.1
42	EJ00	12.6	2.3	9.4	3.0	0.4	15.6
43	EK00	12.7	6.8	3.7	1.2	6.1	13.5
44	P133						
45	TR00						
46	VA64						
47	5301						
48	BASE						
49	CD00						
50	CJ00						
51	CO00	3.3	1.3	1.3	0.1	3.2	2.0
52	CV00						
53	X715						
54	EB00	1.8	1.3	1.3	1.9	0.3	1.7
Μέση τιμή		34.7	15.8	30.7	2.3	3.2	48.4

Πίνακας 6.3-3: Αποκλίσεις μεταξύ των συνορθώσεων των δύο υποπεριόδων

α/α	Σημείο	Μέση τιμή υποπεριόδων – Μέση τιμή ανά ημέρα εκτιμήσεων					
		ΔX (mm)	ΔY(mm)	ΔZ (mm)	Δφ(mm)	Δλ (mm)	Δh (mm)
1	ARKI	-0.3	-0.1	-0.7	-0.4	0.0	-0.7
2	DIONYSOS	0.1	1.0	1.9	1.2	0.9	1.5
3	4100	0.9	0.3	0.5	-0.2	-0.1	1.0
4	CS00	0.6	1.0	-0.6	-1.1	0.6	0.4
5	3600	0.3	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2	0.1
6	5200	0.7	0.7	2.1	1.0	0.4	2.1
7	EM00	2.7	2.3	3.7	0.8	1.1	4.9
8	CH00	1.1	0.9	-0.2	-1.0	0.4	1.0
9	5500	-3.1	-1.3	-2.7	0.0	0.1	-4.3
10	2800	-3.7	-1.4	0.3	2.7	0.2	-2.9
11	CQ00	-3.7	-1.1	-4.4	-1.1	0.4	-5.7
12	ED00	-1.3	-0.2	-1.5	-0.3	0.3	-1.9
13	V000	2.2	2.3	0.4	-1.5	1.3	2.5
14	CK00	-2.0	-0.5	-3.2	-1.0	0.1	0.3
15	3500	0.8	0.5	-0.6	1.0	-2.4	4.2
16	5000	3.4	-1.1	3.3	1.0	0.9	-254.1
17	5204	-184.2	-78.6	-156.4	0.2	0.7	2.3
18	1700	1.2	1.4	1.5	0.1	0.0	-1.6
19	2100	-1.2	-0.5	-0.9	-1.2	0.6	0.8
20	2700	1.0	1.0	-0.4	0.1	-0.4	-2.9
21	3400	-2.0	-1.3	-1.7	0.2	-0.3	0.3
22	3800	0.3	-0.2	0.4	-0.6	0.5	-5.9
23	4600	-4.1	-1.2	-4.1	0.0	0.3	-1.8
24	4900	-1.4	-0.3	-1.1	-0.1	0.2	-0.2
25	5100	-0.2	0.1	-0.2	1.9	-0.6	3.4
26	5300	1.6	0.0	3.6	0.8	-0.9	-1.3
27	EL00	-1.1	-1.4	-0.1	-1.0	-0.9	-0.9
28	EN00	0.3	-0.8	-1.3	-1.0	0.9	-13.6
29	EO00	-9.5	-3.1	-9.3	-1.1	0.9	-8.9
30	P025	-6.1	-1.6	-6.4	2.0	-1.6	7.2
31	P107	4.6	0.3	6.0	-0.1	-0.8	-12.4
32	6400	-8.5	-4.6	-7.8	0.9	-0.7	-3.3
33	1500	3.2	1.1	4.3	0.2	0.2	-1.4
34	CG00	-2.7	-1.9	-1.3	-0.9	1.3	0.2
35	CM00	-1.1	-0.3	-0.7	-1.2	0.7	-5.5
36	CN00	0.2	1.4	-0.6	-1.4	0.7	-0.8
37	CP00	-3.6	-0.7	-4.3	-1.3	0.1	-11.2
38	EC00	0.0	0.7	-1.6	-0.4	-0.2	0.7
39	EE00	-7.4	-3.0	-8.0	1.0	-1.2	0.5
40	EF05	0.8	0.2	0.2	-0.2	-0.4	0.2
41	EG00	0.2	-1.2	1.1	-1.2	1.7	17.0
42	EJ00	0.4	-0.2	0.0	0.0	0.5	-6.9
43	EK00	12.3	7.1	9.7	0.5	0.2	-1.2
44	P133	-5.1	-1.8	-4.3	2.7	-1.9	-8.0
45	TR00	-1.3	-0.3	-0.3	-1.1	-0.4	-1.3
46	VA64	-6.6	-4.9	-2.8	1.2	-1.4	2.7
47	5301	-0.2	-0.5	-1.6	1.9	-0.2	1.7
48	BASE	1.8	-0.8	2.6	-0.1	0.4	-6.7
49	CD00	0.2	-0.1	2.6	-0.4	0.2	-2.4
50	CJ00	-4.9	-1.8	-4.2	-0.9	1.0	-0.5
51	CO00	-1.6	-0.5	-1.9	-1.1	1.5	-0.6
52	CV00	-0.3	1.0	-1.1	0.1	0.1	-0.7
53	X715	-0.4	1.4	-1.2	-0.4	0.4	1.7
54	EB00	-0.6	-0.1	-0.4	-1.3	0.8	-0.2
Μέση τιμή		-4.2	-1.7	-3.6	0.0	0.1	-5.8
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών		5.7	2.6	5.2	0.8	0.7	7.9

Πίνακας 6.3-4: Αποκλίσεις λύσεων Α – Β

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της Λύσης Α, παρατηρείται ότι οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές και μετά βίας φτάνουν τα 3 mm για την οριζοντιογραφία. Οι υψομετρικές αποκλίσεις, είναι μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερες (για το σημείο **5000**) φτάνουν τα 0.25 m).

Η μεγάλη υψομετρική απόκλιση που παρουσιάζεται για το υψόμετρο του σημείου **5000**, οφείλεται σε κακή λειτουργία της λύσης Β (η πρώτη υποπερίοδος περιλαμβάνει μόλις μία ημέρα, της οποίας η εκτίμηση του υψομέτρου απέχει πολύ από τις υπόλοιπες).

Τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται από το λογισμικό, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (6.3-5). Είναι και πάλι φανερό, η αποτυχία απεικόνισης της πραγματικής ακρίβειας που επιτυγχάνεται με τη συνόρθωση, αφού σαφώς τα τυπικά σφάλματα είναι πολύ αισιόδοξα και δεν σχετίζονται με αυτά που προέκυψαν από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις.

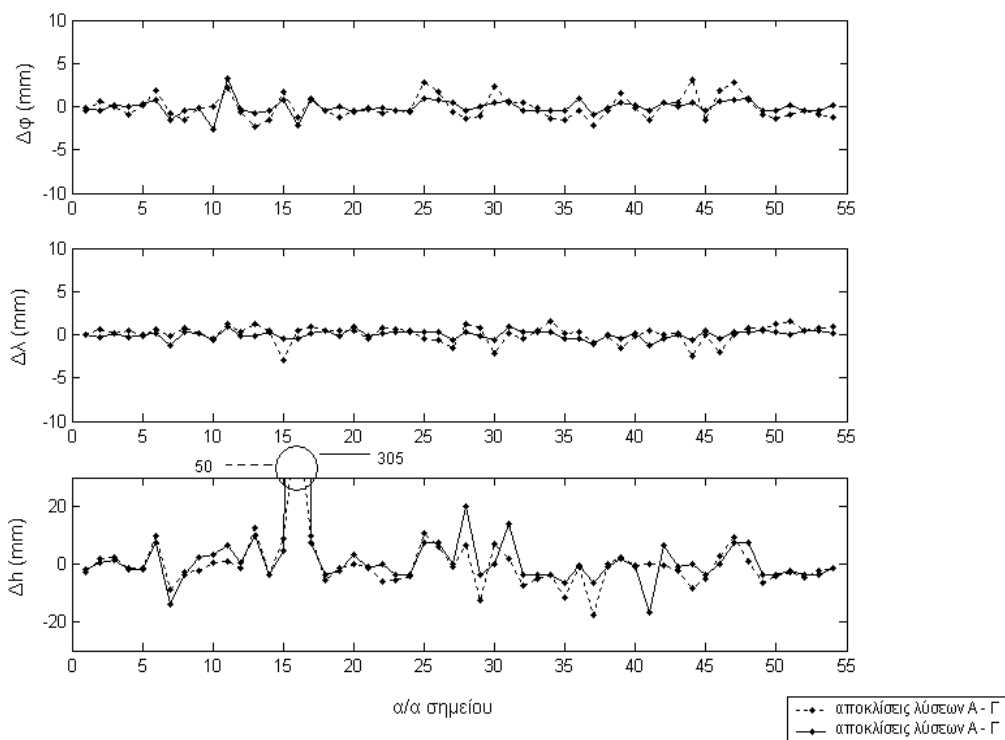
Τυπικά σφάλματα σε (mm)									
α/α	Σημείο	$\pm \sigma_x$	$\pm \sigma_y$	$\pm \sigma_z$	α/α	Σημείο	$\pm \sigma_x$	$\pm \sigma_y$	$\pm \sigma_z$
1	ARKI	0.1	0.1	0.1	28	EN00	0.8	0.4	0.7
2	DIONYSOS	0.2	0.1	0.1	29	EO00	0.5	0.3	0.5
3	4100	0.4	0.2	0.3	30	P025	0.9	0.4	0.8
4	CS00	0.5	0.3	0.5	31	P107	0.9	0.4	0.8
5	3600	0.4	0.2	0.4	32	6400	0.7	0.3	0.5
6	5200	0.6	0.3	0.5	33	1500	0.9	0.4	0.8
7	EM00	0.8	0.4	0.7	34	CG00	0.9	0.4	0.8
8	CH00	0.7	0.3	0.6	35	CM00	0.7	0.3	0.5
9	5500	0.4	0.2	0.3	36	CN00	0.7	0.3	0.6
10	2800	0.8	0.3	0.7	37	CP00	0.6	0.3	0.5
11	CQ00	1.1	0.5	0.9	38	EC00	0.4	0.2	0.3
12	ED00	0.5	0.2	0.4	39	EE00	0.6	0.3	0.5
13	V000	0.7	0.3	0.6	40	EF05	0.4	0.2	0.4
14	CK00	0.5	0.2	0.5	41	EG00	0.9	0.4	0.8
15	3500	1.4	0.6	1.2	42	EJ00	0.4	0.2	0.3
16	5000	0.8	0.4	0.7	43	EK00	0.5	0.2	0.4
17	5204	0.9	0.4	0.8	44	P133	1.0	0.4	0.8
18	1700	0.9	0.4	0.8	45	TR00	0.3	0.2	0.3
19	2100	0.5	0.3	0.5	46	VA64	1.0	0.5	0.8
20	2700	0.7	0.3	0.6	47	5301	1.0	0.5	0.8
21	3400	0.5	0.3	0.5	48	BASE	1.2	0.6	1.1
22	3800	0.4	0.2	0.4	49	CD00	1.0	0.5	0.8
23	4600	1.0	0.4	0.8	50	CJ00	0.9	0.4	0.8
24	4900	0.7	0.3	0.6	51	CO00	1.0	0.5	0.8
25	5100	1.0	0.5	0.8	52	CV00	1.0	0.5	0.8
26	5300	0.8	0.4	0.7	53	X715	0.6	0.3	0.5
27	EL00	0.1	0.1	0.1	54	EB00	0.8	0.4	0.7
Μέση τιμή		0.7	0.3	0.6					

Πίνακας 6.3-5: Τυπικά σφάλματα επίλυσης Β

6.3.4 Επίλυση με μείωση του όγκου των κανονικών εξισώσεων (Λύση Γ)

Η διαδικασία μείωσης του όγκου των κανονικών εξισώσεων, ακολουθεί την ίδια ακριβώς πορεία που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 5.3-4. Αφορά λοιπόν τις τροποσφαιρικές παραμέτρους, οι οποίες απαλείφονται από τις ανά ημέρα κανονικές εξισώσεις με χρήση του πρόγραμματος ADDNEQ.

Και εδώ η μείωση του όγκου είναι σημαντική, επιτρέποντας έτσι την ταυτόχρονη επεξεργασία όλων των ανά ημέρα (τροποποιημένων πλέον) κανονικών εξισώσεων. Είδαμε ήδη, ότι η εφαρμογή της μεθόδου στο υποδίκτυο Α' τάξης της εποχής 1997.76, δεν επέφερε σημαντικές αποκλίσεις σε σχέση με τις λύσεις Α και Β, ενώ είχε ταυτόσημα αποτελέσματα με την λύση Δ (Κεφάλαιο 5.3).



Σχήμα 6.3-6: Αποκλίσεις λύσεων Β – Γ και Α - Γ

Οι αποκλίσεις μεταξύ των λύσεων για την οριζοντιογραφία, είναι και εδώ πολύ μικρές, με μέγιστη τιμή τα 3 mm στα σημεία **P133** και **3500** για τα ϕ και λ αντίστοιχα. Από το Σχήμα και τις μέσες τιμές των αποκλίσεων, γίνεται φανερός ο τυχαίος χαρακτήρας τους.

Οι αποκλίσεις για τις εκτιμήσεις των υψομέτρων αντίθετα, παρουσιάζουν πολύ μεγαλύτερες διαφορές (της τάξης των λίγων εκατοστών). Και εδώ όμως, δεν φαίνεται κάποια από τις λύσεις να αποκλίνει συστηματικά από τις υπόλοιπες.

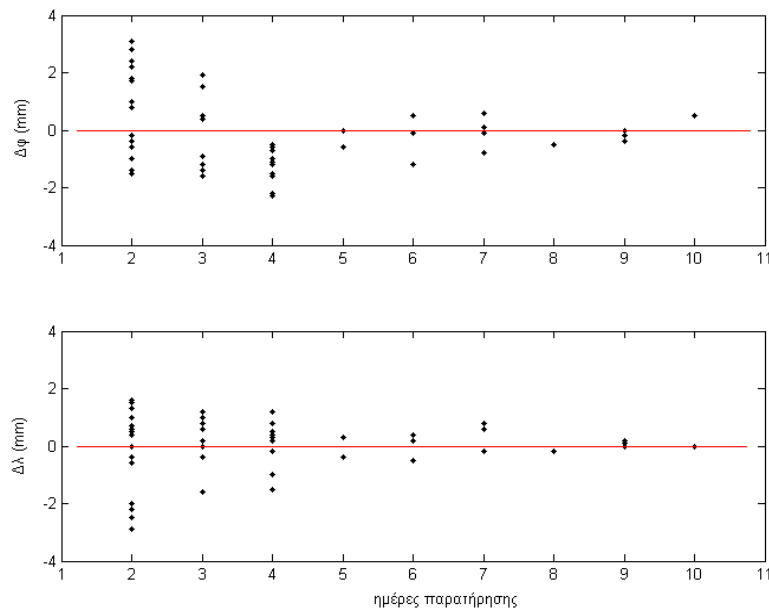
6 Επίλυση δικτύου εποχής 2005.76

α/α	Σημείο	Απόκλιση Λύσεων Α - Γ			Απόκλιση Λύσεων Β - Γ		
		Δφ(mm)	Δλ(mm)	Δh(mm)	Δφ(mm)	Δλ(mm)	Δh(mm)
1	ARKI	-0.4	0.0	-2.8	-0.1	0.0	-2.0
2	DIONYSOS	0.6	0.6	2.0	-0.5	-0.3	0.5
3	4100	0.0	0.1	2.4	0.2	0.1	1.4
4	CS00	-1.0	0.4	-1.4	0.0	-0.3	-1.8
5	3600	0.1	-0.2	-1.6	0.3	0.0	-1.7
6	5200	1.9	0.6	9.6	0.8	0.2	7.5
7	EM00	-0.7	-0.2	-8.9	-1.5	-1.3	-13.8
8	CH00	-1.5	0.7	-3.0	-0.5	0.3	-3.9
9	5500	-0.2	0.2	-2.1	-0.2	0.2	2.2
10	2800	0.0	-0.4	0.3	-2.7	-0.6	3.2
11	CQ00	2.2	1.3	0.8	3.3	0.9	6.6
12	ED00	-0.6	0.3	-1.6	-0.3	-0.1	0.3
13	V000	-2.3	1.2	12.5	-0.8	-0.1	9.9
14	CK00	-1.5	0.5	-3.6	-0.5	0.3	-3.9
15	3500	1.7	-2.9	9.0	0.8	-0.5	4.8
16	5000	-1.2	0.4	50.5	-2.1	-0.4	304.6
17	5204	1.0	1.0	9.7	0.8	0.2	7.5
18	1700	-0.4	0.4	-5.4	-0.5	0.4	-3.8
19	2100	-1.2	0.4	-1.4	0.0	-0.2	-2.2
20	2700	-0.5	0.5	0.2	-0.6	1.0	3.1
21	3400	-0.1	-0.5	-0.9	-0.3	-0.2	-1.2
22	3800	-0.8	0.8	-6.0	-0.2	0.2	-0.1
23	4600	-0.4	0.6	-5.7	-0.5	0.3	-3.9
24	4900	-0.6	0.5	-4.2	-0.5	0.3	-3.9
25	5100	2.8	-0.4	10.9	0.9	0.3	7.6
26	5300	1.7	-0.6	6.2	0.8	0.3	7.5
27	EL00	-0.6	-1.5	-1.0	0.4	-0.6	-0.2
28	EN00	-1.4	1.2	6.5	-0.5	0.3	20.1
29	EO00	-1.1	0.8	-12.5	0.0	-0.1	-3.5
30	P025	2.4	-2.2	7.0	0.4	-0.6	-0.2
31	P107	0.5	0.2	1.7	0.6	1.0	14.1
32	6400	0.4	-0.4	-7.3	-0.5	0.3	-3.9
33	1500	-0.2	0.5	-5.3	-0.4	0.3	-3.9
34	CG00	-1.4	1.6	-3.7	-0.5	0.3	-3.9
35	CM00	-1.6	0.2	-11.8	-0.4	-0.5	-6.3
36	CN00	-0.5	0.3	-1.1	1.0	-0.4	-0.3
37	CP00	-2.2	-1.0	-17.9	-0.9	-1.1	-6.6
38	EC00	-0.5	-0.2	-0.2	-0.1	0.0	-1.0
39	EE00	1.5	-1.6	2.2	0.5	-0.4	1.7
40	EF05	-0.1	-0.2	-0.6	0.1	0.2	-0.8
41	EG00	-1.6	0.5	0.2	-0.5	-1.2	-16.8
42	EJ00	0.5	0.0	-0.4	0.4	-0.5	6.5
43	EK00	0.5	0.2	-2.2	0.0	0.0	-1.0
44	P133	3.1	-2.5	-8.2	0.4	-0.6	-0.2
45	TR00	-1.6	0.0	-5.2	-0.5	0.4	-3.9
46	VA64	1.8	-2.0	2.7	0.6	-0.5	0.1
47	5301	2.8	0.0	9.2	0.8	0.3	7.5
48	BASE	0.8	0.7	0.7	0.9	0.3	7.4
49	CD00	-1.0	0.6	-6.3	-0.5	0.4	-3.9
50	CJ00	-1.4	1.3	-4.4	-0.5	0.3	-3.9
51	CO00	-1.0	1.5	-2.7	0.1	0.0	-2.1
52	CV00	-0.4	0.5	-4.6	-0.5	0.4	-3.9
53	X715	-0.9	0.8	-2.2	-0.5	0.4	-3.9
54	EB00	-1.2	1.0	-1.6	0.1	0.2	-1.5
Μέση τιμή		-0.1	0.1	-0.1	-0.1	0.0	5.7
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών		1.1	0.7	5.4	0.6	0.4	10.0

Πίνακας 6.3-6: Αποκλίσεις λύσεων Β – Γ και Α - Γ

Το μεγαλύτερο εύρος σε ημέρες παρατήρησης (σε σχέση με το δίκτυο της εποχής

1997.76), επιτρέπει εδώ την παρατήρηση ότι: Οι διαφορές μεταξύ των λύσεων Α και Γ (δηλαδή μέσης τιμής και συνδυασμένης επίλυσης με απαλοιφή παραμέτρων), φαίνεται να τείνουν στο μηδέν, όσο αυξάνουν οι ημέρες παρατήρησης (Σχήμα 6.3-7).



Σχήμα 6.3-7: Αποκλίσεις λύσεων Α – Γ συναρτήσει των ημερών παρατήρησης

Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι η εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τόσο περιορισμένο δείγμα είναι επισφαλής, η συγκεκριμένη ιδιότητα όμως είναι ήδη γνωστή και έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 4.3-2.

Τα τυπικά σφάλματα που υπολογίζονται από το λογισμικό, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 6.3-6):

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα σε (mm)					
		$\pm \sigma_x$	RMS2 _x	$\pm \sigma_y$	RMS2 _y	$\pm \sigma_z$	RMS2 _z
1	ARKI	0.1	2.0	0.1	1.2	0.1	2.5
2	DIONYSOS	0.4	2.8	0.2	1.9	0.3	2.7
3	4100	0.5	3.4	0.2	0.4	0.5	4.6
4	CS00	0.4	2.8	0.2	1.3	0.4	2.0
5	3600	0.6	5.7	0.3	2.1	0.5	6.4
6	5200	0.5	11.5	0.3	8.3	0.5	13.0
7	EM00	0.8	7.0	0.3	1.8	0.6	6.1
8	CH00	0.4	7.1	0.2	4.0	0.3	6.7
9	5500	0.5	4.8	0.3	1.7	0.5	6.4
10	2800	1.0	17.5	0.5	11.4	0.9	25.5
11	CQ00	0.5	3.3	0.2	1.3	0.4	3.1
12	ED00	0.7	12.8	0.3	4.2	0.6	10.4
13	V000	0.6	2.9	0.3	0.7	0.5	2.8
14	CK00	1.3	6.3	0.6	2.1	1.2	7.0
15	3500	0.5	69.8	0.2	29.1	0.4	62.2
16	5000	0.9	8.4	0.4	3.9	0.8	8.3
17	5204	1.0	3.3	0.4	1.3	0.9	3.5
18	1700	0.5	3.2	0.2	0.9	0.5	3.5
19	2100	0.5	2.7	0.3	1.8	0.5	3.6
20	2700	0.5	1.5	0.2	1.1	0.4	1.9

Πίνακας 6.3-7: Τυπικά σφάλματα και RMS2 Λύσης Γ

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα σε (mm)					
		$\pm \sigma_x$	RMS2 _x	$\pm \sigma_y$	RMS2 _y	$\pm \sigma_z$	RMS2 _z
21	3400	0.4	2.3	0.2	1.7	0.4	1.7
22	3800	1.0	8.4	0.5	3.3	0.9	4.5
23	4600	0.8	5.5	0.4	0.8	0.7	6.1
24	4900	1.0	6.6	0.5	2.5	0.8	9.2
25	5100	0.8	4.1	0.4	3.1	0.7	5.2
26	5300	0.6	1.2	0.3	1.4	0.5	2.6
27	EL00	0.6	14.5	0.3	7.4	0.6	12.0
28	EN00	0.5	19.7	0.2	8.7	0.5	17.0
29	EO00	0.9	38.7	0.4	15.0	0.7	35.6
30	P025	0.8	15.6	0.4	7.2	0.7	15.9
31	P107	0.7	4.3	0.3	3.7	0.6	2.7
32	6400	0.9	3.6	0.4	0.9	0.8	2.7
33	1500	1.0	3.6	0.5	1.5	0.8	4.3
34	CG00	0.6	16.6	0.3	6.9	0.5	13.0
35	CM00	0.6	3.7	0.3	4.2	0.5	3.9
36	CN00	0.5	15.1	0.2	5.7	0.5	13.4
37	CP00	0.4	1.6	0.2	0.6	0.3	2.0
38	EC00	0.6	1.6	0.3	0.9	0.5	3.2
39	EE00	0.4	1.6	0.2	1.5	0.3	1.1
40	EF05	0.5	3.6	0.2	1.7	0.4	3.7
41	EG00	0.4	10.2	0.2	4.7	0.3	9.1
42	EJ00	0.5	4.9	0.2	1.3	0.4	2.2
43	EK00	0.9	30.3	0.4	14.1	0.8	26.1
44	P133	0.7	2.1	0.3	2.7	0.5	4.3
45	TR00	1.0	1.8	0.5	1.5	0.8	3.1
46	VA64	1.0	7.3	0.5	2.2	0.8	9.6
47	5301	1.2	4.6	0.6	1.5	1.1	2.9
48	BASE	1.1	4.6	0.5	2.6	0.9	5.2
49	CD00	1.0	3.6	0.4	0.5	0.8	4.4
50	CJ00	1.0	2.2	0.5	1.2	0.8	2.6
51	CO00	1.0	4.9	0.5	1.0	0.9	2.4
52	CV00	0.7	3.3	0.3	2.4	0.6	3.8
53	X715	0.7	0.8	0.3	1.1	0.6	2.1
54	EB00	0.1	2.0	0.1	1.2	0.1	2.5
Μέση τιμή		0.7	8.0	0.3	3.7	0.6	7.8

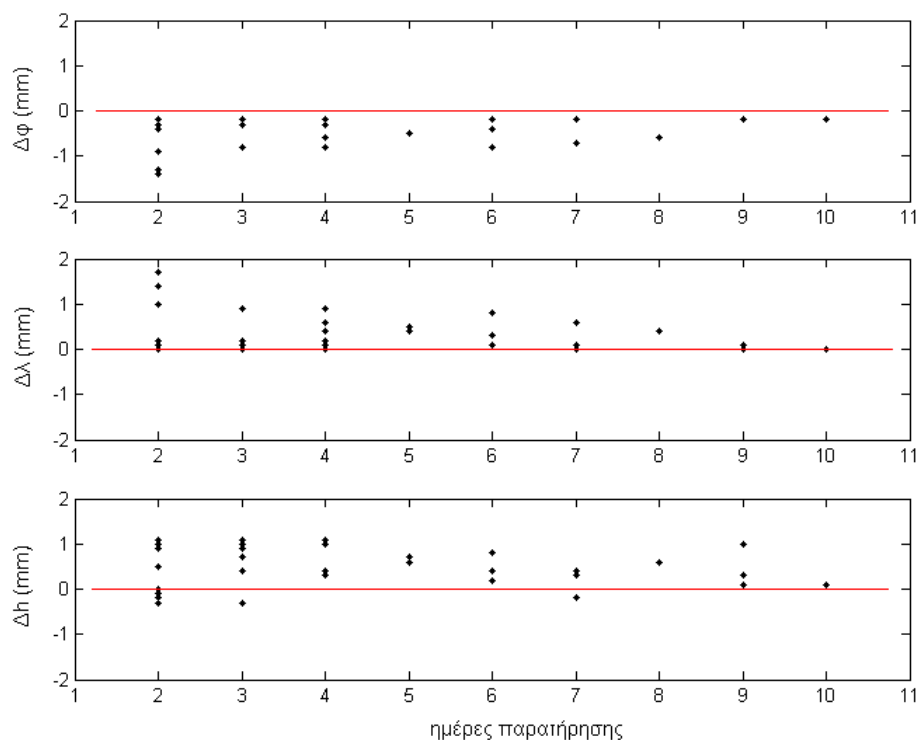
Πίνακας 6.3-7: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Γ (συνέχεια)

Το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους, είναι $\hat{\sigma}_0 = 1.5$ mm, ενώ αυτό που υπολογίζεται μόνο για τις εκτιμήσεις συντεταγμένων, είναι $\hat{\sigma}_{CRD} = 25.4$ mm. Τα τυπικά σφάλματα (και εδώ) αποτυγχάνουν να απεικονίσουν την πραγματική ποιότητα της συνόρθωσης. Για τα RMS2, ισχύει ότι ακριβώς και για την αντίστοιχη εφαρμογή στο προηγούμενο δίκτυο: είναι δηλαδή πιο κοντά στην πραγματική τάξη μεγέθους των ακριβειών, δεν ακολουθούν όμως (στο σύνολό τους) τα υπολογισμένα από την Λύση A τυπικά σφάλματα.

6.3.5 Επίλυση με χρήση του προγράμματος COMPAR (Λύση Δ)

Η διαδικασία επίλυσης, ακολουθεί τα όσα έχουν ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 5.3.5. Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι αντίθετα με ότι συμβαίνει στο δίκτυο της περιόδου 1997.76 (όπου οι λύσεις Γ και Δ δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα), εδώ οι λύσεις Γ και Δ αποκλίνουν έως και 1.7 mm (τόσο σε καρτεσιανές όσο και σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες) στο σημείο **VA64**.

Σε κάθε περίπτωση όμως, οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές (ακόμη και για τις εκτιμήσεις των υψομέτρων), γεγονός που προδίδει την όμοια συμπεριφορά των δύο μεθόδων συνόρθωσης (Πίνακας 6.3-8).



Σχήμα 6.3-8: Αποκλίσεις λύσεων Γ – Δ συναρτήσει των ημερών παρατήρησης

Εξετάζοντας τις αποκλίσεις μεταξύ των δύο λύσεων, παρατηρείται συσχέτισή τους με τις ημέρες παρατήρησης. Είναι επίσης σημαντικό, ότι οι αποκλίσεις φαίνεται να έχουν συστηματικό χαρακτήρα. Συγκεκριμένα, η μέθοδος (λύση Δ) δείχνει να υπερεκτιμά το πλάτος (ϕ) και να δίνει μικρότερες εκτιμήσεις για το μήκος (λ).

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις λύσεων Γ - Δ					
		ΔX(mm)	ΔY(mm)	ΔZ(mm)	Δφ(mm)	Δλ(mm)	Δh(mm)
1	ARKI	-0.8	-0.4	-0.5	-0.2	0.1	1.0
2	DIONYSOS	0.0	0.0	0.3	-0.2	0.0	-0.2
3	4100	-0.3	-0.2	0.0	-0.2	0.1	0.3
4	CS00	-0.8	-0.5	-0.5	-0.2	0.2	1.0
5	3600	-0.4	-0.8	0.4	-0.7	0.6	0.3
6	5200	0.1	0.0	0.3	-0.2	0.0	-0.3
7	EM00	-0.3	-0.8	0.3	-0.6	0.6	0.3
8	CH00	-0.8	-0.6	-0.5	-0.2	0.2	1.1
9	5500	-0.2	-0.1	0.1	-0.2	0.0	0.1
10	2800	-0.6	-0.8	-0.1	-0.5	0.5	0.7
11	CQ00	-0.9	-0.5	-0.4	-0.3	0.1	1.1
12	ED00	-0.5	-0.7	0.0	-0.5	0.4	0.6
13	V000	-0.8	-0.5	-0.5	-0.2	0.2	1.0
14	CK00	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.1	1.0
15	3500	-0.1	-0.2	0.4	-0.4	0.1	-0.1
16	5000	-0.4	-0.3	-0.1	-0.2	0.1	0.4
17	5204	0.0	-0.1	0.3	-0.3	0.1	-0.2
18	1700	-0.8	-0.5	-0.5	-0.2	0.1	1.0
19	2100	-0.9	-0.5	-0.5	-0.3	0.1	1.1
20	2700	-0.5	-0.7	0.2	-0.6	0.4	0.4
21	3400	-0.3	-1.0	0.5	-0.8	0.8	0.2
22	3800	-0.3	-0.2	0.0	-0.2	0.1	0.3
23	4600	-0.9	-0.5	-0.4	-0.3	0.1	1.1
24	4900	-0.8	-0.6	-0.4	-0.3	0.2	1.0
25	5100	0.1	0.0	0.3	-0.2	0.0	-0.3
26	5300	0.0	0.0	0.3	-0.2	0.0	-0.2
27	EL00	-0.4	-1.2	0.4	-0.8	0.9	0.4
28	EN00	-0.9	-0.5	-0.5	-0.3	0.1	1.1
29	EO00	-0.9	-0.5	-0.5	-0.3	0.1	1.1
30	P025	-0.5	-1.7	0.7	-1.3	1.4	0.5
31	P107	-0.6	-0.4	-0.2	-0.3	0.1	0.7
32	6400	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.1	1.0
33	1500	-0.9	-0.5	-0.5	-0.3	0.1	1.1
34	CG00	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.2	1.0
35	CM00	-0.9	-0.4	-0.5	-0.2	0.0	1.1
36	CN00	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.1	1.0
37	CP00	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.2	1.0
38	EC00	-0.6	-0.7	0.1	-0.6	0.4	0.6
39	EE00	-0.4	-1.1	0.4	-0.8	0.9	0.4
40	EF05	-0.4	-0.8	0.3	-0.7	0.6	0.4
41	EG00	-0.8	-0.5	-0.5	-0.2	0.1	1.0
42	EJ00	-0.2	-0.1	0.1	-0.2	0.0	0.1
43	EK00	-0.7	-0.6	-0.2	-0.4	0.3	0.8
44	P133	-0.5	-1.3	0.4	-0.9	1.0	0.5
45	TR00	-0.8	-0.5	-0.5	-0.2	0.2	1.0
46	VA64	-0.2	-1.9	1.1	-1.4	1.7	0.0
47	5301	0.1	0.0	0.3	-0.2	0.0	-0.3
48	BASE	-0.1	0.0	0.3	-0.3	0.0	-0.1
49	CD00	-0.8	-0.4	-0.4	-0.2	0.1	0.9
50	CJ00	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.2	1.0
51	CO00	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	0.1	1.0
52	CV00	-0.8	-0.5	-0.5	-0.2	0.2	1.0
53	X715	-0.8	-0.4	-0.4	-0.2	0.1	0.9
54	EB00	-0.9	-0.5	-0.5	-0.3	0.1	1.1
Μέση τιμή		-0.6	-0.5	-0.1	-0.4	0.7	0.6

Πίνακας 6.3-8: Αποκλίσεις λύσεων Γ - Δ

Όσο αφορά τώρα στις εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων, το λογισμικό υπολογίζει τις παρακάτω ποσότητες (Πίνακας 6.3-9):

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα σε (mm)						
		$\pm \sigma_x$	RMS2 _x	$\pm \sigma_y$	RMS2 _y	$\pm \sigma_z$	RMS2 _z	λ^*
1	ARKI	0.1	0.8	0.1	0.5	0.1	0.9	7.3
2	DIONYSOS	0.2	1.5	0.1	1.0	0.1	2.0	12.5
3	4100	0.4	2.8	0.2	1.9	0.3	2.6	8.4
4	CS00	0.5	3.3	0.2	0.4	0.5	4.5	5.9
5	3600	0.4	2.8	0.2	1.3	0.4	2.0	6.2
6	5200	0.6	3.5	0.3	0.7	0.5	3.0	4.7
7	EM00	0.5	11.4	0.3	8.3	0.5	12.9	25.4
8	CH00	0.8	5.6	0.3	1.7	0.6	3.8	6.3
9	5500	0.4	7.1	0.2	4.0	0.3	6.7	20.0
10	2800	0.5	4.7	0.2	1.7	0.5	6.4	10.2
11	CQ00	1.0	15.9	0.5	10.3	0.9	23.8	21.0
12	ED00	0.5	3.2	0.2	1.3	0.4	3.0	6.8
13	V000	0.7	12.7	0.3	4.2	0.6	10.4	16.5
14	CK00	0.6	2.5	0.3	0.7	0.5	1.8	3.4
15	3500	1.4	3.8	0.6	2.1	1.2	0.0	2.1
16	5000	0.5	69.8	0.2	29.1	0.4	62.2	146.9
17	5204	0.9	4.8	0.4	1.2	0.8	4.0	4.4
18	1700	1.0	0.0	0.4	1.0	0.9	2.5	1.8
19	2100	0.5	3.0	0.2	0.9	0.5	3.2	5.6
20	2700	0.5	2.7	0.2	1.8	0.5	3.4	7.1
21	3400	0.5	1.5	0.2	1.0	0.4	1.8	4.2
22	3800	0.4	2.0	0.2	1.6	0.4	0.8	5.0
23	4600	1.0	7.8	0.5	3.1	0.9	3.2	5.9
24	4900	0.8	3.3	0.4	0.3	0.7	3.6	3.3
25	5100	1.0	0.9	0.5	0.8	0.8	0.8	1.2
26	5300	0.8	1.1	0.4	2.8	0.7	0.7	3.1
27	EL00	0.6	1.2	0.3	1.3	0.5	2.6	3.8
28	EN00	0.6	14.2	0.3	7.4	0.6	11.9	22.7
29	EO00	0.5	19.6	0.2	8.7	0.5	17.0	38.9
30	P025	0.9	38.7	0.4	15.0	0.7	35.5	43.7
31	P107	0.8	15.5	0.4	7.2	0.7	15.9	20.0
32	6400	0.7	3.4	0.3	3.7	0.6	0.7	6.1
33	1500	0.9	1.7	0.4	0.0	0.8	0.3	0.8
34	CG00	1.0	1.9	0.5	1.4	0.8	1.9	2.4
35	CM00	0.6	16.4	0.3	6.9	0.5	12.7	25.2
36	CN00	0.6	3.3	0.3	4.1	0.6	3.6	8.4
37	CP00	0.5	14.8	0.2	5.6	0.5	13.0	27.9
38	EC00	0.3	1.6	0.2	0.6	0.3	2.0	5.0
39	EE00	0.6	1.0	0.3	0.5	0.5	2.2	2.6
40	EF05	0.4	1.6	0.2	1.5	0.3	1.1	5.1
41	EG00	0.5	3.3	0.2	1.4	0.4	3.6	7.5
42	EJ00	0.4	10.2	0.2	4.7	0.3	9.1	26.4
43	EK00	0.5	4.9	0.2	1.2	0.4	2.2	7.1
44	P133	0.9	30.3	0.4	14.1	0.8	25.9	33.8

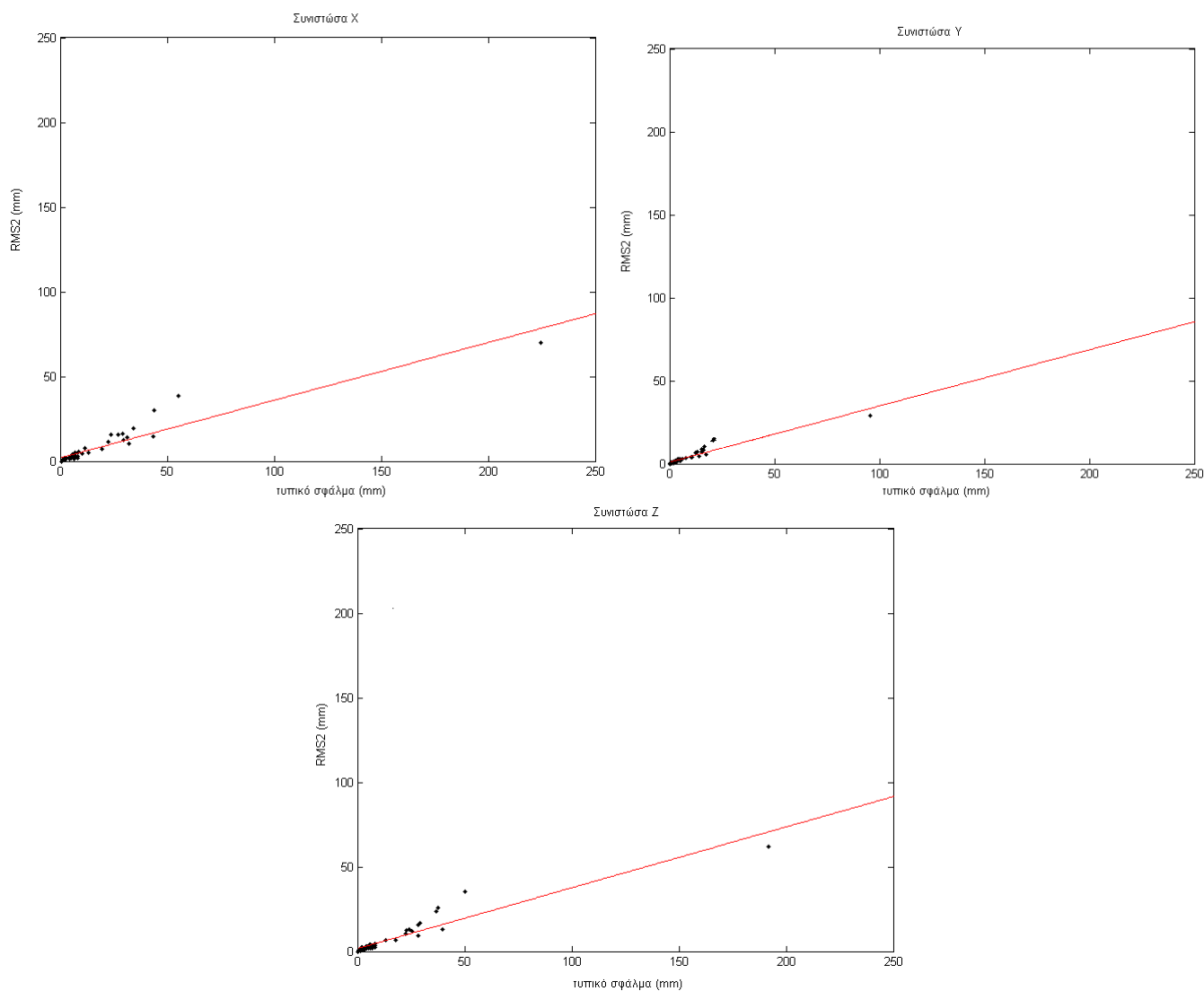
Πίνακας 6.3-9: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Δ

* Υπολογίζεται ως $\lambda = \left[\sum \frac{RMS2_i}{RMS_i} \right] / 3$ με $i = x, y, z$, όπως στο Κεφάλαιο 5.3.5

α/α	Σημείο	Τυπικά σφάλματα σε (mm)						
		$\pm \sigma_x$	RMS2 _x	$\pm \sigma_y$	RMS2 _y	$\pm \sigma_z$	RMS2 _z	λ
45	TR00	0.7	1.3	0.3	2.7	0.5	3.8	6.2
46	VA64	1.0	0.7	0.4	0.6	0.8	0.6	1.0
47	5301	1.0	3.7	0.5	0.3	0.8	3.5	2.9
48	BASE	1.2	4.6	0.6	1.3	1.1	2.6	2.8
49	CD00	1.1	1.7	0.5	2.4	0.9	2.8	3.2
50	CJ00	1.0	1.4	0.4	0.5	0.8	1.6	1.6
51	CO00	1.0	1.8	0.5	0.9	0.8	2.3	2.2
52	CV00	1.0	4.0	0.5	0.6	0.9	0.2	1.8
53	X715	0.7	2.6	0.3	2.4	0.6	2.8	5.5
54	EB00	0.7	0.7	0.3	0.7	0.6	1.4	1.9
Μέση τιμή		0.7	7.1	0.3	3.4	0.6	6.5	12.3

Πίνακας 6.3-9: Τυπικά σφάλματα και RMS2 λύσης Δ (συνέχεια)

Συμπληρώνοντας τα στατιστικά στοιχεία που υπολογίζονται από το λογισμικό, δίνεται το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0 = 1.5$ mm (όσο δηλαδή και για την Λύση Γ) και το a posteriori τυπικό σφάλμα που αφορά μόνο στις συντεταγμένες $\hat{\sigma}_{CRD} = 23.9$ mm.



Σχήμα 6.3-9: Σχέση τυπικών σφαλμάτων λύσης Α με RMS2 λύσης Δ

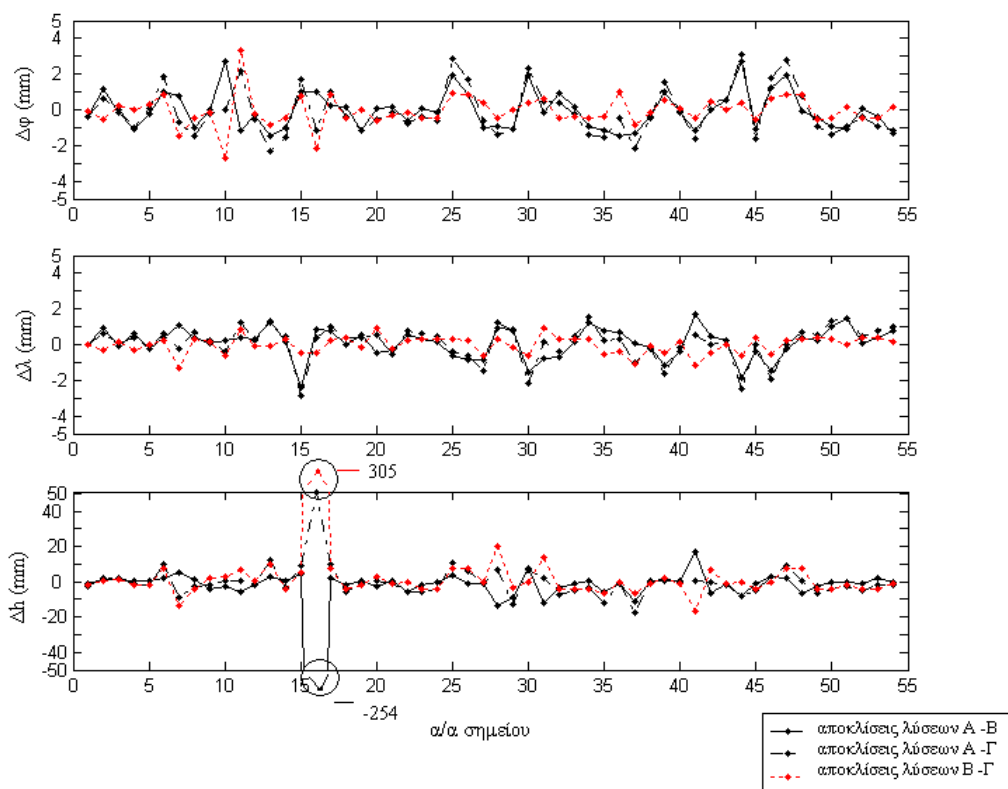
Παρόλο που τα τυπικά σφάλματα και με αυτή τη μέθοδο, έχουν μικρή σχέση με την πραγματική ποιότητα της συνόρθωσης, παρατηρείται (και πάλι) συσχέτιση των RMS2 με τα τυπικά σφάλματα που υπολογίστηκαν από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις (Λύση Α). Το γεγονός αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα (6.3-9).

Μάλιστα, η συσχέτιση αυτή δείχνει να ακολουθεί την γραμμική σχέση που διαπιστώθηκε στο Κεφάλαιο 5.3.5. Εφαρμόζοντας και πάλι ένα μοντέλο γραμμικής προσαρμογής (εξίσωση ευθείας) $y = ax + b$ όπου y η τυπική απόκλιση και x η τιμή του τυπικού σφάλματος (από την Λύση Α), φαίνεται ότι για όλες τις συνιστώσες το a κυμαίνεται μεταξύ του 3 και 4 (όπως και στο αντίστοιχο μοντέλο για το δίκτυο της εποχής 1997.76), ενώ ο όρος b κυμαίνεται μεταξύ 1 και 1.8 (λίγο μεγαλύτερος απ' όσο υπολογίστηκε για το δίκτυο της εποχής 1997.76).

6.3.6 Συγκρίσεις

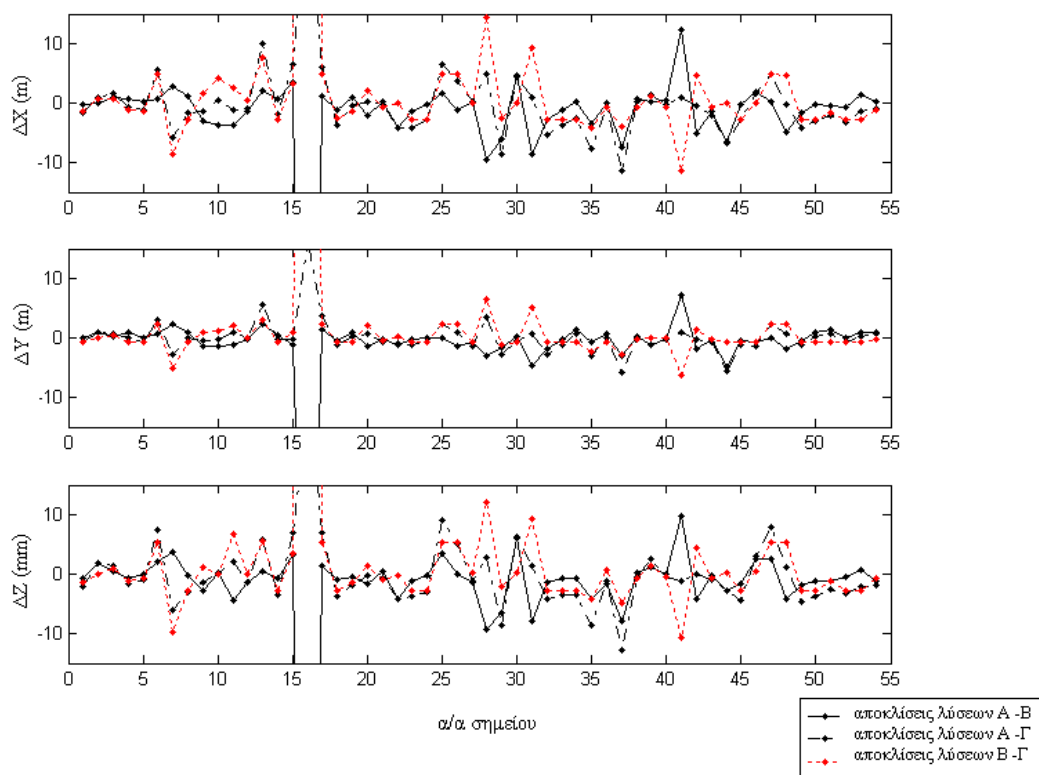
Οι αποκλίσεις μεταξύ των λύσεων, είναι (όπως και στο δίκτυο της εποχής 1997.76) πολύ μικρές και για τα περισσότερα σημεία αμελητέες. Για την οριζοντιογραφία περιορίζονται στην συντριπτική πλειοψηφία τους, σε αποκλίσεις της τάξης του ενός χιλιοστού (1 mm) ή και μικρότερες, ενώ πολύ σπάνια και μόνο για συγκεκριμένα σημεία ξεπερνούν τα 2 mm.

Όπου αυτό συμβαίνει, οφείλεται είτε δυσλειτουργίες των λύσεων Α ή Β (οι οποίες έχουν ήδη αναφερθεί), όπως π.χ. στο σημείο **2800**, είτε σε μεγάλη απόκλιση των ανά ημέρα εκτιμήσεων, όταν αυτές συμβαίνει να είναι μόνο δύο π.χ. σημείο **CQ00**. Στην περίπτωση αυτή, η μέση τιμή (λύση Α) απέχει από τις υπόλοιπες, αφού δεν συμπεριλαμβάνει πληροφορία ποιότητας (εκτιμάται δηλαδή στο μέσο των δύο ανά ημέρα εκτιμήσεων, ενώ οι υπόλοιπες λύσεις προσεγγίζουν περισσότερο την ακριβέστερη των δύο). Αν τυγχάνει οι δύο αυτές ημέρες να ανήκουν σε διαφορετικές υποπεριόδους, τότε προφανώς αποκλίνει και η λύση Β από τις Γ και Δ.



Σχήμα 6.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες

Οι υψομετρικές αποκλίσεις, είναι μεγαλύτερες περίπου κατά μία τάξη μεγέθους. Για το σημείο 5000, φτάνει έως και τα 3 dm, είναι όμως προφανές ότι η απόκλιση αυτή οφείλεται σε σφάλμα της λύσης Β.



Σχήμα 6.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε γεωδαιτικές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh
1	ARKI	-0.4	0.0	-0.7	-0.4	0.0	-2.8	-0.6	0.1	-1.7	-0.1	0.0	-2.0	-0.2	0.1	-1.0	-0.2	0.1	1.0
2	DIONYSOS	1.2	0.9	1.5	0.6	0.6	2.0	0.4	0.6	1.9	-0.5	-0.3	0.5	-0.8	-0.3	0.3	-0.2	0.0	-0.2
3	4100	-0.2	-0.1	1.0	0.0	0.1	2.4	-0.2	0.1	2.7	0.2	0.1	1.4	0.0	0.2	1.6	-0.2	0.1	0.3
4	CS00	-1.1	0.6	0.4	-1.0	0.4	-1.4	-1.2	0.5	-0.4	0.0	-0.3	-1.8	-0.2	-0.1	-0.8	-0.2	0.2	1.0
5	3600	-0.2	-0.2	0.1	0.1	-0.2	-1.6	-0.7	0.4	-1.3	0.3	0.0	-1.7	-0.4	0.6	-1.4	-0.7	0.6	0.3
6	5200	1.0	0.4	2.1	1.9	0.6	9.6	1.7	0.7	9.3	0.8	0.2	7.5	0.6	0.3	7.2	-0.2	0.0	-0.3
7	EM00	0.8	1.1	4.9	-0.7	-0.2	-8.9	-1.3	0.4	-8.6	-1.5	-1.3	-13.8	-2.1	-0.7	-13.5	-0.6	0.6	0.3
8	CH00	-1.0	0.4	1.0	-1.5	0.7	-3.0	-1.7	1.0	-1.9	-0.5	0.3	-3.9	-0.7	0.5	-2.9	-0.2	0.2	1.1
9	5500	0.0	0.1	-4.3	-0.2	0.2	-2.1	-0.4	0.2	-2.0	-0.2	0.2	2.2	-0.4	0.2	2.3	-0.2	0.0	0.1
10	2800	2.7	0.2	-2.9	0.0	-0.4	0.3	-0.4	0.1	1.1	-2.7	-0.6	3.2	-3.2	-0.1	4.0	-0.5	0.5	0.7
11	CQ00	-1.1	0.4	-5.7	2.2	1.3	0.8	1.9	1.4	1.9	3.3	0.9	6.6	3.0	1.0	7.6	-0.3	0.1	1.1
12	ED00	-0.3	0.3	-1.9	-0.6	0.3	-1.6	-1.0	0.7	-1.0	-0.3	-0.1	0.3	-0.7	0.4	0.9	-0.5	0.4	0.6
13	V000	-1.5	1.3	2.5	-2.3	1.2	12.5	-2.5	1.4	13.5	-0.8	-0.1	9.9	-1.0	0.1	11.0	-0.2	0.2	1.0
14	CK00	-1.0	0.1	0.3	-1.5	0.5	-3.6	-1.8	0.6	-2.6	-0.5	0.3	-3.9	-0.7	0.5	-2.9	-0.3	0.1	1.0
15	3500	1.0	-2.4	4.2	1.7	-2.9	9.0	1.3	-2.7	8.9	0.8	-0.5	4.8	0.4	-0.3	4.7	-0.4	0.1	-0.1
16	5000	1.0	0.9	-254.1	-1.2	0.4	50.5	-1.4	0.5	50.9	-2.1	-0.4	304.6	-2.4	-0.3	305.0	-0.2	0.1	0.4
17	5204	0.2	0.7	2.3	1.0	1.0	9.7	0.8	1.1	9.6	0.8	0.2	7.5	0.6	0.3	7.3	-0.3	0.1	-0.2
18	1700	0.1	0.0	-1.6	-0.4	0.4	-5.4	-0.6	0.6	-4.4	-0.5	0.4	-3.8	-0.7	0.5	-2.8	-0.2	0.1	1.0
19	2100	-1.2	0.6	0.8	-1.2	0.4	-1.4	-1.4	0.5	-0.3	0.0	-0.2	-2.2	-0.3	0.0	-1.1	-0.3	0.1	1.1
20	2700	0.1	-0.4	-2.9	-0.5	0.5	0.2	-1.1	1.0	0.7	-0.6	1.0	3.1	-1.2	1.4	3.6	-0.6	0.4	0.4
21	3400	0.2	-0.3	0.3	-0.1	-0.5	-0.9	-1.0	0.3	-0.6	-0.3	-0.2	-1.2	-1.1	0.6	-1.0	-0.8	0.8	0.2
22	3800	-0.6	0.5	-5.9	-0.8	0.8	-6.0	-1.0	0.8	-5.7	-0.2	0.2	-0.1	-0.4	0.3	0.1	-0.2	0.1	0.3
23	4600	0.0	0.3	-1.8	-0.4	0.6	-5.7	-0.7	0.7	-4.6	-0.5	0.3	-3.9	-0.8	0.4	-2.9	-0.3	0.1	1.1
24	4900	-0.1	0.2	-0.2	-0.6	0.5	-4.2	-0.9	0.7	-3.1	-0.5	0.3	-3.9	-0.8	0.6	-2.9	-0.3	0.2	1.0
25	5100	1.9	-0.6	3.4	2.8	-0.4	10.9	2.7	-0.3	10.7	0.9	0.3	7.6	0.7	0.3	7.3	-0.2	0.0	-0.3
26	5300	0.8	-0.9	-1.3	1.7	-0.6	6.2	1.4	-0.6	6.0	0.8	0.3	7.5	0.6	0.3	7.3	-0.2	0.0	-0.2
27	EL00	-1.0	-0.9	-0.9	-0.6	-1.5	-1.0	-1.5	-0.5	-0.6	0.4	-0.6	-0.2	-0.5	0.3	0.2	-0.8	0.9	0.4
28	EN00	-1.0	0.9	-13.6	-1.4	1.2	6.5	-1.7	1.3	7.6	-0.5	0.3	20.1	-0.7	0.4	21.2	-0.3	0.1	1.1
29	EO00	-1.1	0.9	-8.9	-1.1	0.8	-12.5	-1.3	0.9	-11.4	0.0	-0.1	-3.5	-0.2	0.0	-2.4	-0.3	0.1	1.1

Πίνακας 6.3-10: : Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε γεωδαιτικές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh	Δφ	Δλ	Δh
30	P025	2.0	-1.6	7.2	2.4	-2.2	7.0	1.1	-0.8	7.5	0.4	-0.6	-0.2	-0.9	0.8	0.3	-1.3	1.4	0.5
31	P107	-0.1	-0.8	-12.4	0.5	0.2	1.7	0.2	0.3	2.4	0.6	1.0	14.1	0.3	1.1	14.8	-0.3	0.1	0.7
32	6400	0.9	-0.7	-3.3	0.4	-0.4	-7.3	0.1	-0.2	-6.3	-0.5	0.3	-3.9	-0.8	0.5	-2.9	-0.3	0.1	1.0
33	1500	0.2	0.2	-1.4	-0.2	0.5	-5.3	-0.5	0.6	-4.2	-0.4	0.3	-3.9	-0.7	0.4	-2.8	-0.3	0.1	1.1
34	CG00	-0.9	1.3	0.2	-1.4	1.6	-3.7	-1.7	1.7	-2.7	-0.5	0.3	-3.9	-0.7	0.5	-3.0	-0.3	0.2	1.0
35	CM00	-1.2	0.7	-5.5	-1.6	0.2	-11.8	-1.8	0.2	-10.7	-0.4	-0.5	-6.3	-0.6	-0.5	-5.2	-0.2	0.0	1.1
36	CN00	-1.4	0.7	-0.8	-0.5	0.3	-1.1	-0.7	0.4	-0.1	1.0	-0.4	-0.3	0.7	-0.3	0.7	-0.3	0.1	1.0
37	CP00	-1.3	0.1	-11.2	-2.2	-1.0	-17.9	-2.4	-0.8	-16.9	-0.9	-1.1	-6.6	-1.1	-0.9	-5.7	-0.3	0.2	1.0
38	EC00	-0.4	-0.2	0.7	-0.5	-0.2	-0.2	-1.1	0.2	0.4	-0.1	0.0	-1.0	-0.7	0.4	-0.4	-0.6	0.4	0.6
39	EE00	1.0	-1.2	0.5	1.5	-1.6	2.2	0.7	-0.8	2.6	0.5	-0.4	1.7	-0.3	0.4	2.1	-0.8	0.9	0.4
40	EF05	-0.2	-0.4	0.2	-0.1	-0.2	-0.6	-0.7	0.4	-0.2	0.1	0.2	-0.8	-0.6	0.8	-0.4	-0.7	0.6	0.4
41	EG00	-1.2	1.7	17.0	-1.6	0.5	0.2	-1.8	0.7	1.3	-0.5	-1.2	-16.8	-0.7	-1.1	-15.8	-0.2	0.1	1.0
42	EJ00	0.0	0.5	-6.9	0.5	0.0	-0.4	0.3	0.0	-0.3	0.4	-0.5	6.5	0.2	-0.5	6.6	-0.2	0.0	0.1
43	EK00	0.5	0.2	-1.2	0.5	0.2	-2.2	0.1	0.5	-1.3	0.0	0.0	-1.0	-0.4	0.3	-0.2	-0.4	0.3	0.8
44	P133	2.7	-1.9	-8.0	3.1	-2.5	-8.2	2.2	-1.5	-7.7	0.4	-0.6	-0.2	-0.5	0.4	0.3	-0.9	1.0	0.5
45	TR00	-1.1	-0.4	-1.3	-1.6	0.0	-5.2	-1.8	0.2	-4.1	-0.5	0.4	-3.9	-0.7	0.5	-2.9	-0.2	0.2	1.0
46	VA64	1.2	-1.4	2.7	1.8	-2.0	2.7	0.4	-0.3	2.8	0.6	-0.5	0.1	-0.8	1.2	0.1	-1.4	1.7	0.0
47	5301	1.9	-0.2	1.7	2.8	0.0	9.2	2.6	0.1	9.0	0.8	0.3	7.5	0.7	0.3	7.2	-0.2	0.0	-0.3
48	BASE	-0.1	0.4	-6.7	0.8	0.7	0.7	0.5	0.7	0.6	0.9	0.3	7.4	0.6	0.3	7.3	-0.3	0.0	-0.1
49	CD00	-0.4	0.2	-2.4	-1.0	0.6	-6.3	-1.2	0.6	-5.4	-0.5	0.4	-3.9	-0.7	0.4	-2.9	-0.2	0.1	0.9
50	CJ00	-0.9	1.0	-0.5	-1.4	1.3	-4.4	-1.7	1.5	-3.5	-0.5	0.3	-3.9	-0.7	0.5	-2.9	-0.3	0.2	1.0
51	CO00	-1.1	1.5	-0.6	-1.0	1.5	-2.7	-1.2	1.6	-1.8	0.1	0.0	-2.1	-0.1	0.1	-1.1	-0.3	0.1	1.0
52	CV00	0.1	0.1	-0.7	-0.4	0.5	-4.6	-0.6	0.6	-3.6	-0.5	0.4	-3.9	-0.7	0.6	-2.9	-0.2	0.2	1.0
53	X715	-0.4	0.4	1.7	-0.9	0.8	-2.2	-1.1	0.8	-1.2	-0.5	0.4	-3.9	-0.7	0.4	-3.0	-0.2	0.1	0.9
54	EB00	-1.3	0.8	-0.2	-1.2	1.0	-1.6	-1.4	1.1	-0.5	0.1	0.2	-1.5	-0.1	0.3	-0.3	-0.3	0.1	1.1
Μέση τιμή		0.0	0.1	-5.8	-0.1	0.1	-0.1	-0.5	0.4	0.6	-0.1	0.0	5.7	-0.4	0.3	6.4	-0.4	0.3	0.6
Μέση τιμή απόλυτων διαφορών		0.8	0.6	7.9	1.1	0.7	5.4	1.2	0.7	5.4	0.6	0.4	10.0	0.7	0.4	10.0	0.4	0.3	0.7

Πίνακας 6.3-10: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε γεωδαιτικές συντεταγμένες (συνέχεια)

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ
1	ARKI	-0.3	-0.1	-0.7	-1.7	-0.7	-2.0	-0.9	-0.3	-1.5	-1.4	-0.6	-1.3	-0.6	-0.2	-0.8	0.8	0.4	0.5
2	DIONYSOS	0.1	1.0	1.9	0.9	1.0	1.8	0.9	1.0	1.5	0.8	0.0	-0.1	0.8	0.0	-0.4	0.0	0.0	-0.3
3	4100	0.9	0.3	0.5	1.7	0.8	1.5	2.0	1.0	1.5	0.8	0.5	1.0	1.1	0.7	1.0	0.3	0.2	0.0
4	CS00	0.6	1.0	-0.6	-0.6	0.1	-1.7	0.2	0.6	-1.2	-1.2	-0.8	-1.1	-0.4	-0.3	-0.6	0.8	0.5	0.5
5	3600	0.3	-0.1	-0.1	-1.1	-0.7	-0.9	-0.7	0.1	-1.3	-1.4	-0.6	-0.8	-1.0	0.2	-1.2	0.4	0.8	-0.4
6	5200	0.7	0.7	2.1	5.5	3.1	7.4	5.4	3.1	7.1	4.8	2.4	5.3	4.7	2.4	5.0	-0.1	0.0	-0.3
7	EM00	2.7	2.3	3.7	-5.9	-2.8	-6.1	-5.5	-2.0	-6.4	-8.5	-5.1	-9.8	-8.2	-4.3	-10.1	0.3	0.8	-0.3
8	CH00	1.1	0.9	-0.2	-1.6	0.1	-3.0	-0.8	0.7	-2.5	-2.7	-0.8	-2.8	-1.9	-0.2	-2.3	0.8	0.6	0.5
9	5500	-3.1	-1.3	-2.7	-1.5	-0.4	-1.5	-1.3	-0.3	-1.6	1.6	0.9	1.2	1.8	1.0	1.1	0.2	0.1	-0.1
10	2800	-3.7	-1.4	0.3	0.4	-0.3	0.2	1.0	0.5	0.3	4.1	1.1	-0.1	4.7	1.9	0.0	0.6	0.8	0.1
11	CQ00	-3.7	-1.1	-4.4	-1.1	0.9	2.2	-0.3	1.4	2.7	2.5	2.0	6.7	3.4	2.5	7.1	0.9	0.5	0.4
12	ED00	-1.3	-0.2	-1.5	-0.9	-0.1	-1.5	-0.4	0.6	-1.5	0.4	0.1	0.0	0.9	0.8	0.0	0.5	0.7	0.0
13	V000	2.2	2.3	0.4	9.9	5.5	5.9	10.7	5.9	6.4	7.7	3.1	5.5	8.5	3.6	6.0	0.8	0.5	0.5
14	CK00	0.8	0.5	-0.6	-1.9	-0.3	-3.4	-1.1	0.2	-3.0	-2.7	-0.8	-2.8	-1.9	-0.3	-2.4	0.8	0.5	0.4
15	3500	3.4	-1.1	3.3	6.6	-0.3	6.9	6.7	0.0	6.6	3.2	0.9	3.6	3.3	1.1	3.2	0.1	0.2	-0.4
16	5000	-184.2	-78.6	-156.4	36.9	16.4	30.3	37.3	16.7	30.4	221.1	95.0	186.7	221.5	95.3	186.8	0.4	0.3	0.1
17	5204	1.2	1.4	1.5	6.0	3.8	6.9	6.0	3.9	6.5	4.8	2.4	5.3	4.8	2.5	5.0	0.0	0.1	-0.3
18	1700	-1.2	-0.5	-0.9	-3.8	-1.2	-3.7	-3.1	-0.7	-3.2	-2.6	-0.7	-2.8	-1.8	-0.2	-2.3	0.8	0.5	0.5
19	2100	1.0	1.0	-0.4	-0.5	0.2	-1.8	0.4	0.7	-1.3	-1.5	-0.8	-1.4	-0.6	-0.3	-0.9	0.9	0.5	0.5
20	2700	-2.0	-1.3	-1.7	0.2	0.7	-0.3	0.7	1.4	-0.5	2.2	2.0	1.5	2.7	2.7	1.3	0.5	0.7	-0.2
21	3400	0.3	-0.2	0.4	-0.3	-0.7	-0.6	0.0	0.3	-1.1	-0.6	-0.5	-1.0	-0.3	0.5	-1.5	0.3	1.0	-0.5
22	3800	-4.1	-1.2	-4.1	-4.2	-1.0	-4.3	-3.9	-0.8	-4.3	-0.1	0.2	-0.2	0.2	0.4	-0.2	0.3	0.2	0.0
23	4600	-1.4	-0.3	-1.1	-4.1	-1.1	-3.8	-3.2	-0.6	-3.4	-2.7	-0.8	-2.8	-1.8	-0.3	-2.4	0.9	0.5	0.4
24	4900	-0.2	0.1	-0.2	-2.9	-0.7	-3.0	-2.1	-0.1	-2.6	-2.7	-0.8	-2.8	-1.9	-0.2	-2.4	0.8	0.6	0.4
25	5100	1.6	0.0	3.6	6.4	2.4	9.0	6.3	2.4	8.7	4.8	2.4	5.4	4.7	2.4	5.1	-0.1	0.0	-0.3
26	5300	-1.1	-1.4	-0.1	3.8	1.0	5.2	3.8	1.0	4.9	4.8	2.4	5.3	4.8	2.4	5.0	0.0	0.0	-0.3
27	EL00	0.3	-0.8	-1.3	0.2	-1.5	-1.1	0.6	-0.3	-1.5	-0.1	-0.7	0.2	0.3	0.5	-0.2	0.4	1.2	-0.4
28	EN00	-9.5	-3.1	-9.3	5.0	3.5	2.9	5.9	4.0	3.4	14.5	6.6	12.2	15.4	7.1	12.7	0.9	0.5	0.5
29	EO00	-6.1	-1.6	-6.4	-8.6	-2.9	-8.6	-7.7	-2.3	-8.1	-2.5	-1.2	-2.2	-1.6	-0.7	-1.7	0.9	0.5	0.5
30	P025	4.6	0.3	6.0	4.5	-0.4	6.2	5.0	1.3	5.5	-0.1	-0.7	0.2	0.4	1.0	-0.5	0.5	1.7	-0.7

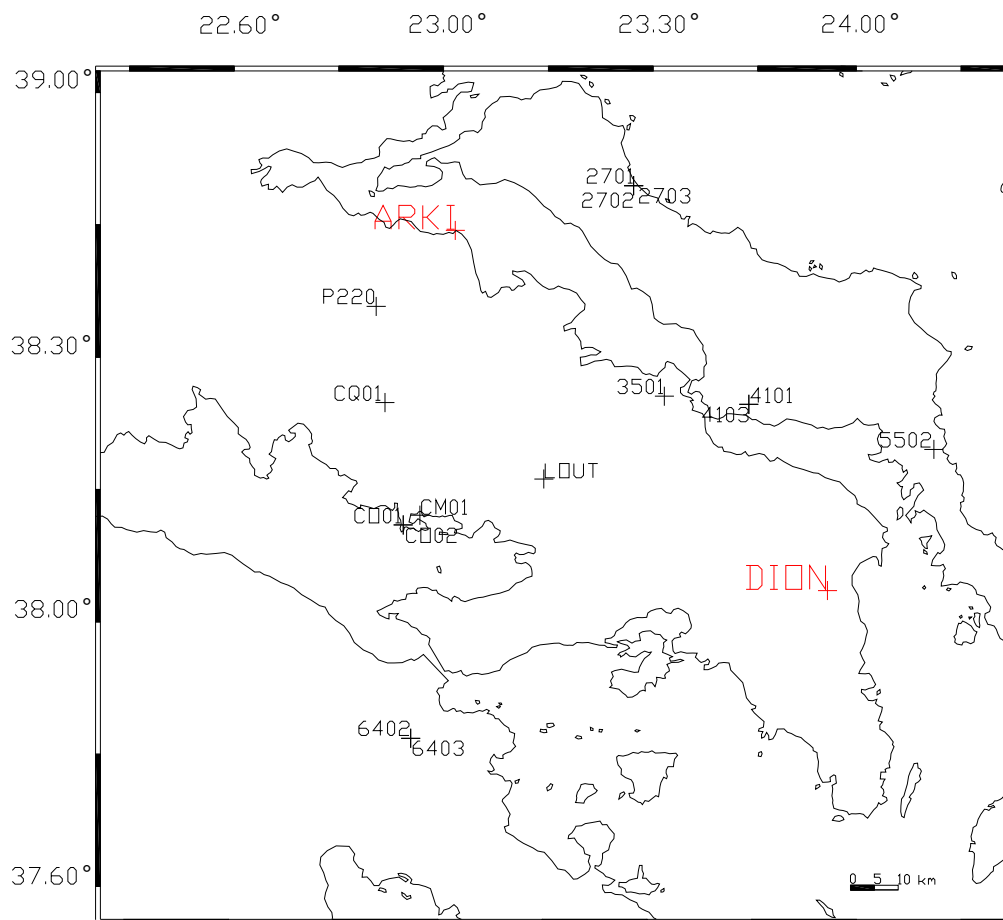
Πίνακας 6.3-11: : Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες

α/α	Σημείο	Αποκλίσεις μεταξύ επιλύσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες σε (mm)																	
		Α - Β			Α - Γ			Α - Δ			Β - Γ			Β - Δ			Γ - Δ		
		ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ	ΔΧ	ΔΥ	ΔΖ
31	P107	-8.5	-4.6	-7.8	0.9	0.6	1.4	1.5	1.0	1.6	9.4	5.2	9.2	10.0	5.6	9.4	0.6	0.4	0.2
32	6400	-2.7	-1.9	-1.3	-5.4	-2.7	-4.1	-4.6	-2.2	-3.7	-2.7	-0.8	-2.8	-1.9	-0.3	-2.4	0.8	0.5	0.4
33	1500	-1.1	-0.3	-0.7	-3.8	-1.1	-3.5	-2.9	-0.6	-3.0	-2.7	-0.8	-2.8	-1.8	-0.3	-2.3	0.9	0.5	0.5
34	CG00	0.2	1.4	-0.6	-2.5	0.6	-3.4	-1.7	1.1	-3.0	-2.7	-0.8	-2.8	-1.9	-0.3	-2.4	0.8	0.5	0.4
35	CM00	-3.6	-0.7	-4.3	-7.7	-3.0	-8.5	-6.8	-2.6	-8.0	-4.1	-2.3	-4.2	-3.2	-1.9	-3.7	0.9	0.4	0.5
36	CN00	0.0	0.7	-1.6	-0.6	0.0	-1.1	0.2	0.5	-0.7	-0.6	-0.7	0.6	0.2	-0.2	1.0	0.8	0.5	0.4
37	CP00	-7.4	-3.0	-8.0	-11.3	-5.8	-12.8	-10.5	-5.3	-12.4	-3.9	-2.8	-4.8	-3.1	-2.3	-4.4	0.8	0.5	0.4
38	EC00	0.8	0.2	0.2	0.2	-0.1	-0.5	0.8	0.6	-0.6	-0.6	-0.3	-0.7	0.0	0.4	-0.8	0.6	0.7	-0.1
39	EE00	0.2	-1.2	1.1	1.3	-1.2	2.6	1.7	-0.1	2.2	1.1	0.0	1.5	1.5	1.1	1.1	0.4	1.1	-0.4
40	EF05	0.4	-0.2	0.0	-0.3	-0.3	-0.4	0.1	0.5	-0.7	-0.7	-0.1	-0.4	-0.3	0.7	-0.7	0.4	0.8	-0.3
41	EG00	12.3	7.1	9.7	0.9	1.0	-1.1	1.7	1.5	-0.6	-11.4	-6.2	-10.8	-10.6	-5.7	-10.3	0.8	0.5	0.5
42	EJ00	-5.1	-1.8	-4.3	-0.5	-0.3	0.1	-0.3	-0.2	0.0	4.6	1.5	4.4	4.8	1.6	4.3	0.2	0.1	-0.1
43	EK00	-1.3	-0.3	-0.3	-2.0	-0.6	-0.9	-1.3	0.0	-0.7	-0.7	-0.3	-0.6	0.0	0.3	-0.4	0.7	0.6	0.2
44	P133	-6.6	-4.9	-2.8	-6.7	-5.6	-2.7	-6.2	-4.2	-3.0	-0.1	-0.7	0.2	0.4	0.6	-0.2	0.5	1.3	-0.4
45	TR00	-0.2	-0.5	-1.6	-2.9	-1.2	-4.4	-2.1	-0.7	-3.9	-2.7	-0.7	-2.8	-1.9	-0.2	-2.3	0.8	0.5	0.5
46	VA64	1.8	-0.8	2.6	1.7	-1.4	3.1	1.9	0.5	2.0	-0.1	-0.6	0.5	0.1	1.3	-0.6	0.2	1.9	-1.1
47	5301	0.2	-0.1	2.6	5.0	2.3	7.9	4.9	2.3	7.6	4.8	2.4	5.3	4.7	2.4	5.0	-0.1	0.0	-0.3
48	BASE	-4.9	-1.8	-4.2	-0.3	0.7	1.1	-0.1	0.7	0.8	4.7	2.4	5.3	4.8	2.4	5.0	0.1	0.0	-0.3
49	CD00	-1.6	-0.5	-1.9	-4.3	-1.2	-4.7	-3.5	-0.8	-4.2	-2.7	-0.7	-2.8	-1.9	-0.3	-2.4	0.8	0.4	0.4
50	CJ00	-0.3	1.0	-1.1	-3.0	0.2	-3.8	-2.2	0.7	-3.5	-2.7	-0.8	-2.8	-1.9	-0.3	-2.4	0.8	0.5	0.4
51	CO00	-0.4	1.4	-1.2	-2.0	0.7	-2.5	-1.2	1.2	-2.0	-1.6	-0.7	-1.2	-0.8	-0.2	-0.8	0.8	0.5	0.4
52	CV00	-0.6	-0.1	-0.4	-3.3	-0.8	-3.2	-2.5	-0.4	-2.7	-2.7	-0.7	-2.8	-1.9	-0.2	-2.3	0.8	0.5	0.5
53	X715	1.3	1.0	0.7	-1.4	0.3	-2.1	-0.6	0.7	-1.7	-2.7	-0.7	-2.8	-1.9	-0.3	-2.4	0.8	0.4	0.4
54	EB00	0.3	1.0	-1.1	-0.9	0.7	-1.9	0.0	1.2	-1.4	-1.2	-0.3	-0.8	-0.3	0.2	-0.3	0.9	0.5	0.5
Μέση τιμή		-4.2	-1.7	-3.6	0.0	0.1	-0.1	0.5	0.6	0.0	4.2	1.8	3.5	4.7	2.3	3.6	0.6	0.5	0.1
Μέση τιμή Απόλυτων διαφορών		5.6	2.6	5.1	3.6	1.6	3.9	3.4	1.6	3.7	7.0	3.1	6.4	6.8	3.1	6.0	0.5	0.5	0.4

Πίνακας 6.3-11: Αποκλίσεις λύσεων υποδικτύου Α' τάξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες (συνέχεια)

6.4 Επίλυση υποδικτύου Β' τάξης

Όπως αναφέρθηκε ήδη, στο υποδίκτυο Β' τάξης συμμετέχουν όλα εκείνα τα σημεία, τα οποία διαθέτουν παρατηρήσεις μόνο μίας ημέρας (Πίνακας 6.4-1).



Σχήμα 6.4-1: Σημεία υποδικτύου Β' τάξης

Τα σημεία αυτά έχουν μικρούς χρόνους παρατήρησης (συνήθως κάτω των 2 ωρών) και βρίσκονται διεσπαρμένα σε μικρή απόσταση (< 10 km) γύρω από σημεία του υποδικτύου Α' τάξης.

Για την επίλυση του υποδικτύου, σχηματίστηκαν βάσεις μεταξύ των σημείων που το αποτελούν και αυτών του υποδικτύου Α' τάξης, με κριτήριο την μικρότερη απόσταση. Οι ασάφεις φάσης εκτιμήθηκαν με τον αλγόριθμο Q.I.F., ενώ κατά τη συνόρθωση θεωρήθηκαν σταθερές οι συντεταγμένες του υποδικτύου Α' τάξης, που έχουν προκύψει με τη Λύση Β.

Η συνόρθωση διεξήχθη με την συνδυασμένη επίλυση (πρόγραμμα ADDNEQ). Φυσικά ίδια αποτελέσματα θα προέκυπταν και από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις, γίνεται όμως χρήση του προγράμματος ADDNEQ για λόγους ομοιομορφίας (των αποτελεσμάτων) και υπολογιστικού χρόνου.

Υποδίκτυο Β' τάξης				
α/α	Σημείο	$\pm \sigma_x$ (mm)	$\pm \sigma_y$ (mm)	$\pm \sigma_z$ (mm)
1	3501	5.0	2.6	4.2
2	4101	5.5	2.8	4.5
3	4103	6.1	3.1	5.6
4	5502	6.1	2.8	4.7
5	2701	3.6	2.1	4.1
6	2702	6.2	2.7	5.2
7	2703	3.6	1.7	3.6
8	CM01	4.6	2.0	3.5
9	CQ01	8.2	3.9	8.4
10	CO01	6.2	2.8	5.8
11	CO02	37.0	12.6	33.0
12	P220	4.7	1.6	3.4
13	LOUT	4.0	2.7	3.8
14	6402	3.8	1.8	3.0
15	6403	4.6	2.0	3.4
16	2400	5.7	1.4	3.7
17	P501	2.5	1.3	2.4
Μέση τιμή		7.0	3.0	6.1

Πίνακας 6.4-1: Σημεία υποδικτύου Β' τάξης

Η ακρίβεια των εκτιμήσεων είναι μικρότερη από αυτή του υποδικτύου Α' τάξης, λόγω της μεγάλης διαφοράς που παρουσιάζεται σε όγκο δεδομένων (τόσο σε ημέρες όσο και σε ώρες παρατήρησης).

7 Συγκρίσεις

Όπως είδαμε στα Κεφάλαια 5 και 6, οι αποκλίσεις μεταξύ των διαφορετικών μεθόδων επίλυσης (Λύσεις Α, Β, Γ και Δ) είναι πάρα πολύ μικρές. Στα παρακάτω, θα διαχωρίσουμε την οριζοντιογραφική από την υψομετρική ακρίβεια, λόγω της μεγάλης διαφοράς που παρουσιάζουν στην ποιότητα των εκτιμήσεων.

Οι αποκλίσεις στην οριζοντιογραφία μεταξύ των λύσεων, είναι ουσιαστικά αμελητέες και περιορίζονται σε ένα εύρος τιμών από 0 έως 3 mm. Ουσιαστικά αποκλίσεις μεγαλύτερες των 2 mm προκύπτουν σπάνια και μόνο για μεμονωμένα σημεία. Στις περιπτώσεις αυτές μάλιστα, γίνεται προφανές ότι αυτές οφείλονται σε δυσλειτουργίες που παρουσιάζονται στις λύσεις Β και/ή Α. Συνοψίζοντας, οι δυσλειτουργίες αυτές οφείλονται στις παρακάτω αιτίες:

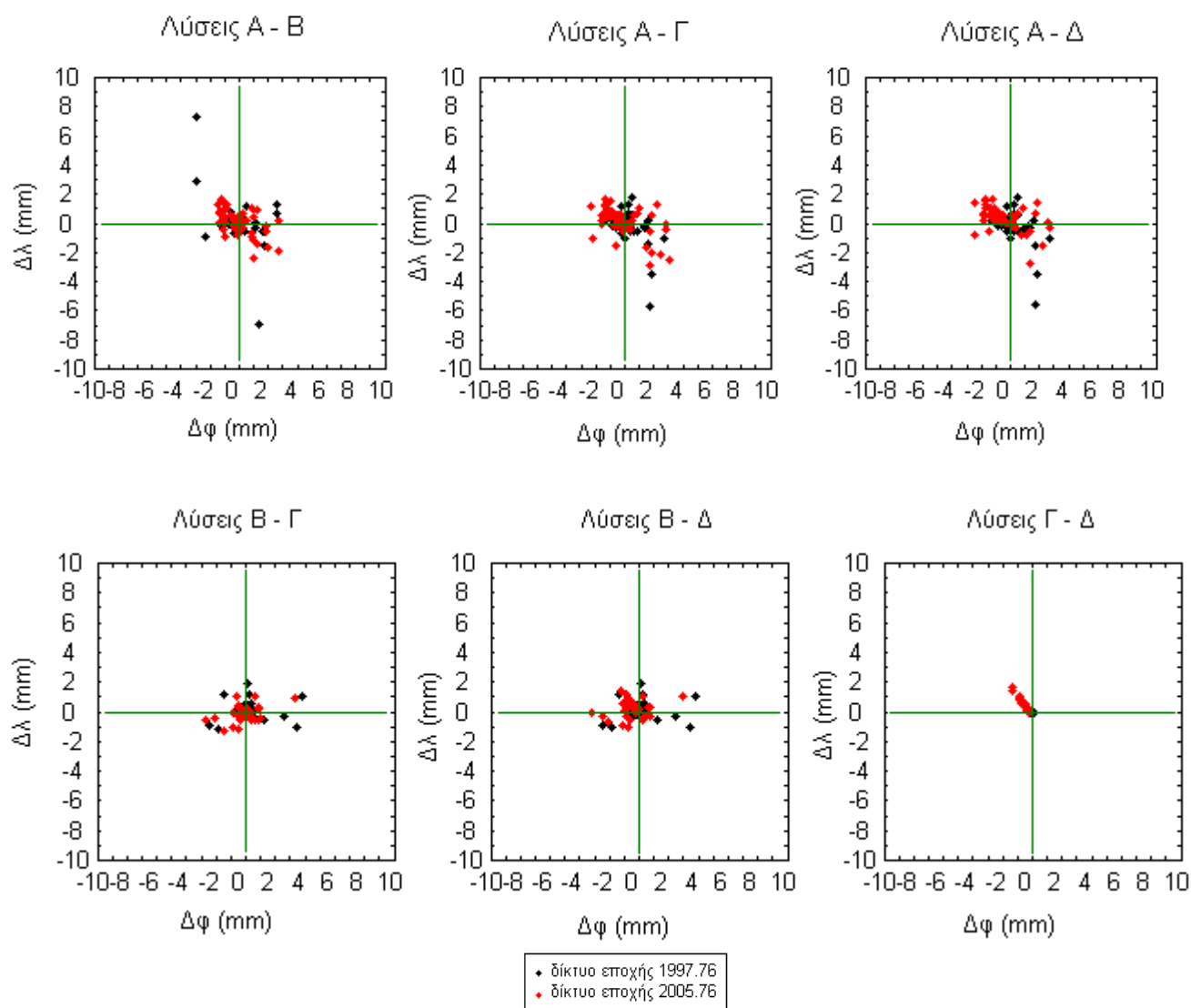
- I. Άνιση κατανομή των ημερών παρατήρησης κάθε σημείου, μεταξύ των υποπεριόδων (Λύση Β).
- II. Θεώρηση των αποτελεσμάτων (κάθε ημέρας για τη Λύση Α και κάθε υποπεριόδου για την Λύση Β) ως ισοβαρών.
- III. Παρεμπόδιση (λόγω του σημείου i) της ορθής λειτουργίας του αλγόριθμου εντοπισμού χονδροειδών σφαλμάτων, που γίνεται αυτόματα από το λογισμικό (Λύση Β).
- IV. Η Λύση Α, όπου δεν γίνεται έλεγχος για την παρουσία χονδροειδών σφαλμάτων και ο υπολογισμός της τελικής εκτίμησης δεν περιλαμβάνει την πληροφορία ποιότητας για κάθε εκτίμηση (οι εκτιμήσεις υπολογίζονται από τον χρήστη ως μέσος όρος), μπορεί να επηρεαστεί ισχυρά από παρουσία εκτιμήσεων που απέχουν από την ακριβή τιμή ή αποτελούν χονδροειδή σφάλματα. Η επίδραση αυτή είναι ιδιαίτερα ισχυρή, όταν οι ημέρες παρατήρησης είναι λίγες.

Εξαίρεση αποτελούν τα σημεία: **5500** και **EO00** του δικτύου της εποχής 1997.76, όπου παρουσιάζονται αποκλίσεις που ξεπερνούν τα 5 mm και φτάνουν έως και το 1 cm. Όπως φαίνεται στα αντίστοιχα διαγράμματα (Σχήμα 5.3-6), οι αποκλίσεις αυτές προκαλούνται από τα μειονεκτήματα και τις υποθέσεις που υπεισέρχονται στις λύσεις Α και Β.

Σημειώνεται επίσης, ότι οι αποκλίσεις μεταξύ των επιλύσεων, με εξαίρεση το σημείο **EO00**, είναι μικρότερες των τυπικών σφαλμάτων που υπολογίζονται από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις (Λύση Α).

Οι υψομετρικές αποκλίσεις είναι (κατά μέση τιμή) μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερες, περιορίζονται δηλαδή συνήθως σε λίγα χιλιοστά. Και εδώ βέβαια, παρατηρούνται σε κάποια σημεία μεγαλύτερες αποκλίσεις, που φτάνουν μέχρι και τα 3 dm (σημείο **5000** για το δίκτυο εποχής 2005.76). Στην συντριπτική τους πλειοψηφία πάντως, οι αποκλίσεις δεν ξεπερνούν το 1 cm.

Όσο αφορά στον «χαρακτήρα» των αποκλίσεων, φαίνεται (Σχήμα 6.4-1) ότι οι αποκλίσεις παρουσιάζουν τυχαίο χαρακτήρα, εκτός από αυτές των λύσεων Γ – Δ. Όπως διαπιστώθηκε στο Κεφάλαιο 6.3.5, οι αποκλίσεις των εκτιμήσεων που προκύπτουν από τις δύο αυτές λύσεις, εξαρτώνται από τις ημέρες παρατήρησης. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις δείχνουν να συγκλίνουν όσο αυξάνονται οι ημέρες παρατήρησης (το μικρό δείγμα των δεδομένων βέβαια, δεν επιτρέπει την διεξαγωγή «ασφαλών» συμπερασμάτων).



Σχήμα 7-1: Αποκλίσεις λύσεων και των δύο δικτύων

Είδαμε ότι οι λύσεις Γ και Δ ταυτίζονται στο δίκτυο της εποχής 1997.76, ενώ παρουσιάζουν λίγο μεγαλύτερες αποκλίσεις σε αυτό της εποχής 2005.76. Το γεγονός αυτό, μπορεί να οφείλεται εν μέρει (εκτός από τις διαφορές στις ημέρες παρατήρησης) και στην διαδικασία που ακολουθήθηκε, για την συνόρθωση του υποδικτύου Α' τάξης στα δύο δίκτυα, καθώς όπως έχει ήδη αναφερθεί (Κεφάλαιο 4), τα δύο προγράμματα (ADDNEQ και COMPAR) χρησιμοποιούν διαφορετική a priori πληροφορία.

Στο Κεφάλαιο 6.3.4, διαπιστώθηκε επίσης μία «χαλαρή» τάση των εκτιμήσεων της λύσης Γ (συνεπώς και της Δ), να συγκλίνουν με αυτές που προκύπτουν από τη λύση Α, όσο αυξάνονται οι ημέρες παρατήρησης. Η ιδιότητα αυτή βέβαια είναι ήδη γνωστή και έχει επισημανθεί στο Κεφάλαιο 4.3.1.

Από το υποδίκτυο Β' τάξης της εποχής 1997.76 (Κεφάλαιο 5.4), φάνηκε ότι οι λύσεις Γ και Δ συμπίπτουν απόλυτα, τόσο στις εκτιμήσεις συντεταγμένων όσο και σε αυτές των τυπικών σφαλμάτων, όταν υπάρχει απουσία επαναληπτικότητας (κάθε σημείο συμμετέχει σε μόλις μία ημέρα παρατήρησης).

Επίσης, θα πρέπει να αναφερθεί ότι η απαλοιφή των τροποσφαιρικών παραμέτρων (όπως γίνεται στις λύσεις Γ και Δ), δεν φαίνεται να επιδρά με συστηματικό τρόπο στις εκτιμήσεις των μεθόδων αυτών.

Οι σημαντικότερες δυσλειτουργίες, εντοπίστηκαν στις λύσεις Α και Β. Η πρώτη, ως μέση τιμή, είναι γνωστό ότι μπορεί να επηρεαστεί ισχυρά από εκτιμήσεις που απέχουν από το κύριο «νέφος» των υπόλοιπων εκτιμήσεων, κυρίως όταν οι ημέρες παρατήρησης είναι λίγες. Τα μειονεκτήματα της λύσης Β (Κεφάλαιο 5.3.3), σχετίζονται κυρίως με την άνιση κατανομή των ημερών παρατήρησης κάθε σημείου σε κάθε υποπερίοδο. Το γεγονός αυτό μπορεί να προκαλέσει προβλήματα τόσο στην εκτίμηση των συντεταγμένων όσο και στον στατιστικό έλεγχο που διεξάγεται (αυτόματα) από το λογισμικό.

Όσο αφορά στις εκτιμήσεις ποιότητας (τυπικά σφάλματα), παρουσιάζονται μεταξύ των μεθόδων μεγάλες αποκλίσεις. Η μέθοδος που αναπαριστά περισσότερο αξιόπιστα την πραγματική ακρίβεια συνόρθωσης, είναι η λύση Α. Οι λύσεις Β και Γ, δεν δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα, ενώ για την λύση Δ, διαπιστώθηκε συσχέτιση των $RMS2$ με τα τυπικά σφάλματα που υπολογίστηκαν από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις.

Από την άποψη του υπολογιστικού χρόνου, η λύση Δ είναι η πιο οικονομική. Οι λύσεις Α και Β είναι οι πιο χρονοβόρες, αφού η πρώτη απαιτεί τον υπολογισμό από τον χρήστη των τελικών αποτελεσμάτων, ενώ η δεύτερη την εκ νέου επεξεργασία των ανά ημέρα κανονικών εξισώσεων.

8 Συμπεράσματα και προτάσεις

8.1 Εκτιμήσεις συντεταγμένων

Σε εφαρμογές ακριβείας, όπου οι ώρες και ημέρες παρακολούθησης των σημείων ενδιαφέροντος είναι αρκετές, οι αποκλίσεις που παρουσιάζουν οι μέθοδοι συνόρθωσης, είναι συνήθως αμελητέες. Βέβαια, θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψη δύο παράγοντες, που πιθανότατα επηρεάζουν τα αποτελέσματα: i) την ποιότητα των δεδομένων (πολύωρες παρατηρήσεις, στατικού σχετικού εντοπισμού) και ii) την έκταση του δικτύου. Τα μήκη των σχηματιζόμενων βάσεων, κυμαίνονται από λίγες δεκάδες μέτρα, έως 150 km. Η αποδοχή του μοντέλου τροπόσφαιρας που προβλέπει το πρόγραμμα GPEST, πιθανώς να μην αρκεί σε περιπτώσεις μεγάλων βάσεων, όπως αυτές που σχηματίζονται μεταξύ των πρωτεύοντων σημείων και των σταθμών IGS.

Ένα σημείο που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής, είναι τα μοντέλα που αποδέχονται στατιστική ανεξαρτησία και κυρίως ισοβαρείς παρατηρήσεις. Όπως είναι φανερό, οι υποθέσεις αυτές μπορεί να επηρεάσουν δυσμενώς τα αποτελέσματα των επιλύσεων (Λύσεις A και B) και όπου είναι δυνατόν θα πρέπει να αποφεύγονται. Η πληροφορία ποιότητας θα πρέπει να περιέχεται στην διαδικασία της συνόρθωσης, παρόλα τα προβλήματα που διαπιστώνονται στον προσδιορισμό της, στην περίπτωση των δορυφορικών παρατηρήσεων (*Εκτιμήσεις ακρίβειας*).

Σημαντικά είναι τα πλεονεκτήματα, που προσφέρει η μέθοδος των διαδοχικών συνορθώσεων. Η ενοποιημένη και ομοιογενής επεξεργασία όλου του όγκου των δεδομένων, σε συνδυασμό με την αντίστοιχη πληροφορία ακρίβειας, προσφέρει ποιοτικά και στατιστικά αξιόπιστα αποτελέσματα.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί, ότι η μέθοδος των διαδοχικών συνορθώσεων, προσφέρει το σημαντικό πλεονέκτημα να είναι (γενικά) ανεξάρτητη της μεθόδου συλλογής δεδομένων. Επιτρέπει δηλαδή την συνδυασμένη συνόρθωση εκτιμήσεων που έχουν προκύψει από διαφορετικές τεχνικές, επίγειες ή δορυφορικές (GPS, SLR, VLBI, DORIS)

Για το λογισμικό BERNESE v4.2, η χρήση της μεθόδου, μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικά προγράμματα (COMPAR και ADDNEQ). Παρόλο που και τα δύο βασίζονται στην ίδια μέθοδο, απαιτούν διαφορετικά στοιχεία εισαγωγής και ακολουθούν ελαφρώς διαφορετική πορεία αριθμητικών υπολογισμών, γεγονός που μπορεί να προκαλέσει μικρές αποκλίσεις.

Αν ο όγκος των δεδομένων δεν επιτρέπει την ταυτόχρονη επεξεργασία τους, η μέθοδος μπορεί να συνδυαστεί με αυτή της απαλοιφής παραμέτρων. Στις δορυφορικές εφαρμογές ακριβείας, οι παράμετροι που καταλαμβάνουν τον μεγαλύτερο όγκο, είναι αυτές που αφορούν την τροπόσφαιρα και τις ασάφειες φάσης. Και οι δύο τύποι παραμέτρων όμως, επηρεάζουν σημαντικά την ποιότητα των τελικών εκτιμήσεων. Έτσι η χρήση της μεθόδου θα πρέπει να γίνεται με προσοχή και αφού συνυπολογιστούν οι ιδιαίτερες ανάγκες και συνθήκες κάθε εφαρμογής (π.χ. έκταση δικτύου, σκοπός εφαρμογής, ζητούμενη ακρίβεια).

Τέλος, γίνεται φανερό (σύμφωνα με όσα διαπιστώθηκαν στα Κεφάλαια 5 και 6), η τάση σύγκλισης των εκτιμήσεων που υπολογίζονται από τη μέθοδο των διαδοχικών

συνορθώσεων (τόσο με το πρόγραμμα COMPAR όσο και με το ADDNEQ), και από την χρήση του αλγορίθμου της μέσης τιμής (Λύση Α).

8.2 Εκτιμήσεις ακρίβειας

Έχει ήδη αναφερθεί, ότι ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα του δορυφορικού εντοπισμού, είναι η αδυναμία υπολογισμού ρεαλιστικών τυπικών σφαλμάτων. Το γεγονός αυτό, οφείλεται κατά κύριο λόγο στον μεγάλο όγκο παρατηρήσεων και πολλές φορές επιτείνεται από υπολογιστικές δυσκολίες ή πολύ συχνά από την επιλογή επεξεργασίας βάσεων και όχι συνολικά του δικτύου.

Τα τυπικά σφάλματα λοιπόν, που δίνονται από τα λογισμικά επεξεργασίας δορυφορικών δεδομένων, είναι υπερεκτιμημένα και θα πρέπει να αντιμετωπίζονται με σκεπτικισμό. Ο έλεγχός τους, σε περιπτώσεις συνόρθωσης βάσεων (και όχι δικτύων) είναι σχεδόν αδύνατος, όταν διατίθεται μία μόνο σειρά παρατηρήσεων για κάθε σημείο και περιορίζεται σε εφαρμογή «πρακτικών» κανόνων (που έχουν δηλαδή προκύψει από συγκρίσεις ή παλαιότερες συγκρίσεις/μελέτες).

Σημαντική βοήθεια μπορεί να προσφέρει η δυνατότητα επανάληψης των μετρήσεων των σημείων. Στις περιπτώσεις αυτές, είναι δυνατόν να υπολογιστούν τυπικά σφάλματα, που βασίζονται στα αποτελέσματα κάθε σειράς παρατηρήσεων. Συνήθως βέβαια, η διαδικασία αυτή διεξάγεται με επιλογή του χρήστη (όπως και στο BERNESE v4.2 για τη Λύση Α).

Τέλος, σημαντική είναι και η συμβολή της μεθόδου εκτίμησης της συνιστώσας της μεταβλητότητας (variance component estimation). Η συγκεκριμένη μέθοδος, επιτρέπει τον υπολογισμό τυπικών σφαλμάτων των σημείων και τυπικών σφαλμάτων μονάδας βάρους, που βασίζονται μόνο σε συγκεκριμένα είδη παραμέτρων (π.χ. συντεταγμένες, ή συντεταγμένες ενός μόνο σημείου κ.τ.λ.). Με τον τρόπο αυτό, περιορίζεται σημαντικά ο όγκος των παρατηρήσεων που συμμετέχουν στον υπολογισμό της ποιότητας, με συνέπεια οι εκτιμήσεις αυτές να είναι περισσότερο αντιπροσωπευτικές για την επιλεγμένη ομάδα. Βέβαια, ο αλγόριθμος υπολογισμού είναι αρκετά πολύπλοκος και αν η μέθοδος δεν προσφέρεται από το λογισμικό επεξεργασίας, η εφαρμογή του από τον χρήστη είναι ιδιαίτερα επίπονη.

8.3 Προτάσεις

Η παρούσα διπλωματική εργασία, αποτελεί ένα πρώτο, εισαγωγικό μόνο βήμα, σε ένα τομέα όπου οι εξελίξεις και τα σύγχρονα δεδομένα αλλάζουν με γρήγορους ρυθμούς. Συνεπώς, υπάρχει μία σειρά σημείων τα οποία χρειάζονται περαιτέρω διερεύνησης και που αφορούν τόσο το συγκεκριμένο λογισμικό, όσο και γενικότερα τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους:

- Η απαλοιφή των τροποσφαιρικών παραμέτρων και για τα δύο δίκτυα, δεν επέφερε συστηματική απόκλιση των συντεταγμένων, σε σχέση αυτές που υπολογίστηκαν από τις υπόλοιπες λύσεις. Το γεγονός αυτό όμως, μπορεί να οφείλεται σε μεγάλο ποσοστό στην έκταση του δικτύου και δεν είναι σίγουρο αν η μέθοδος θα ήταν το ίδιο αποτελεσματική, σε περίπτωση όπου είχαμε αρκετά μεγαλύτερες βάσεις.

- Σημαντική ήταν η γραμμική σχέση που διαπιστώθηκε μεταξύ των τυπικών σφαλμάτων που υπολογίζονται από τις ανά ημέρα εκτιμήσεις και αυτές που δίνονται από το λογισμικό με τη Λύση Δ (RMS2). Ωστόσο, είναι σκόπιμη η περαιτέρω διερεύνηση του φαινομένου, τόσο γιατί αφορούσε σε ένα σχετικά περιορισμένο δείγμα, αλλά και διότι είναι πιθανό να διαφοροποιείται ανάλογα με τη γεωμετρία του δικτύου.

Επίσης, θα μπορούσε να γίνει προσπάθεια ανάπτυξης διαφόρων αλγορίθμων, ώστε να γίνεται ενσωμάτωση της πληροφορίας ποιότητας, στις εκτιμήσεις των Λύσεων Α και Β, για την αποφυγή μεγάλων αποκλίσεων που προκαλούνται ακριβώς από την έλλειψή της.

Παράρτημα

A. Συντεταγμένες δικτύου εποχής 1997.76

1. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	2400	4597863.594	1938509.059	3959991.210
2	2700	4563037.500	1980600.796	3978750.175
3	2800	4589879.488	1967399.846	3955033.796
4	3400	4597929.408	1972797.478	3942758.754
5	3500	4585749.342	1997779.315	3944379.232
6	3600	4571812.436	1996184.872	3961739.301
7	3801	4552114.902	2037147.521	3963188.386
8	4100	4579632.045	2014445.419	3943140.970
9	4900	4619102.085	1980972.583	3914066.207
10	5000	4607401.237	1989498.780	3924138.914
11	5200	4574393.828	2033129.082	3939302.394
12	5500	4569149.830	2052266.610	3935686.822
13	6400	4647892.711	1967179.582	3887940.795
14	CH00	4647810.963	1936368.398	3903597.152
15	CK00	4644625.217	1957928.501	3895847.326
16	CM00	4620304.424	1957004.699	3924374.272
17	CN00	4616424.725	1953711.379	3931560.961
18	CP00	4617908.561	1942020.756	3935945.341
19	CQ00	4610013.695	1944405.694	3943029.038
20	CS00	4617086.797	1917831.011	3949180.190
21	EC00	4585706.244	1967547.359	3959602.379
22	ED00	4594247.147	1954347.758	3956666.391
23	EE00	4586663.167	1985080.983	3949794.550
24	EF05	4593547.114	1988773.905	3940825.497
25	EG00	4606465.680	1977620.284	3930748.550
26	EH00	4589899.564	2015760.700	3930480.910
27	EJ00	4571844.319	2016289.355	3951201.358
28	EK00	4576273.219	1990168.212	3959051.814
29	EL00	4560432.695	2001465.610	3971495.082
30	EM00	4571473.880	1983354.313	3968236.903
31	EN00	4572626.393	1971835.129	3972460.911
32	EO00	4574954.286	1951420.255	3980383.264
33	TR00	4684774.985	1926595.351	3864292.940
34	V000	4621884.276	1921702.203	3940613.951
35	X002	4644367.498	1912393.441	3917944.444

Πίνακας Α-1: : Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α

2. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	2400	4597863.593	1938509.058	3959991.208
2	2700	4563037.510	1980600.801	3978750.184
3	2800	4589879.488	1967399.846	3955033.796
4	3400	4597929.404	1972797.476	3942758.749
5	3500	4585749.342	1997779.316	3944379.232
6	3600	4571812.442	1996184.876	3961739.305
7	3801	4552114.900	2037147.519	3963188.381
8	4100	4579632.045	2014445.420	3943140.970
9	4900	4619102.085	1980972.583	3914066.208
10	5000	4607401.236	1989498.779	3924138.913
11	5200	4574393.822	2033129.081	3939302.392
12	5500	4569149.835	2052266.620	3935686.828
13	6400	4647892.711	1967179.582	3887940.796
14	CH00	4647810.963	1936368.399	3903597.153
15	CK00	4644625.219	1957928.500	3895847.326
16	CM00	4620304.423	1957004.699	3924374.271
17	CN00	4616424.721	1953711.376	3931560.958
18	CP00	4617908.561	1942020.755	3935945.341
19	CQ00	4610013.694	1944405.691	3943029.040
20	CS00	4617086.795	1917831.011	3949180.190
21	EC00	4585706.244	1967547.359	3959602.379
22	ED00	4594247.150	1954347.759	3956666.393
23	EE00	4586663.167	1985080.984	3949794.550
24	EF05	4593547.113	1988773.905	3940825.497
25	EG00	4606465.680	1977620.284	3930748.551
26	EH00	4589899.563	2015760.699	3930480.911
27	EJ00	4571844.321	2016289.356	3951201.359
28	EK00	4576273.214	1990168.210	3959051.810
29	EL00	4560432.699	2001465.612	3971495.085
30	EM00	4571473.882	1983354.314	3968236.904
31	EN00	4572626.394	1971835.129	3972460.912
32	EO00	4574954.256	1951420.234	3980383.239
33	TR00	4684774.988	1926595.352	3864292.940
34	V000	4621884.275	1921702.202	3940613.947
35	X002	4644367.503	1912393.444	3917944.447

Πίνακας Α-2: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β

3. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	2400	4597863.593	1938509.058	3959991.208
2	2700	4563037.510	1980600.802	3978750.184
3	2800	4589879.488	1967399.846	3955033.797
4	3400	4597929.401	1972797.475	3942758.748
5	3500	4585749.342	1997779.316	3944379.232
6	3600	4571812.442	1996184.876	3961739.305
7	3801	4552114.901	2037147.521	3963188.385
8	4100	4579632.045	2014445.420	3943140.970
9	4900	4619102.079	1980972.580	3914066.203
10	5000	4607401.238	1989498.781	3924138.915
11	5200	4574393.830	2033129.083	3939302.394
12	5500	4569149.829	2052266.616	3935686.822
13	6400	4647892.711	1967179.582	3887940.796
14	CH00	4647810.963	1936368.399	3903597.153
15	CK00	4644625.218	1957928.500	3895847.326
16	CM00	4620304.423	1957004.699	3924374.272
17	CN00	4616424.721	1953711.376	3931560.959
18	CP00	4617908.559	1942020.754	3935945.341
19	CQ00	4610013.700	1944405.694	3943029.041
20	CS00	4617086.795	1917831.009	3949180.189
21	EC00	4585706.244	1967547.359	3959602.379
22	ED00	4594247.149	1954347.758	3956666.393
23	EE00	4586663.169	1985080.984	3949794.552
24	EF05	4593547.114	1988773.906	3940825.496
25	EG00	4606465.679	1977620.284	3930748.551
26	EH00	4589899.566	2015760.701	3930480.910
27	EJ00	4571844.321	2016289.356	3951201.359
28	EK00	4576273.221	1990168.212	3959051.815
29	EL00	4560432.699	2001465.611	3971495.085
30	EM00	4571473.881	1983354.314	3968236.903
31	EN00	4572626.390	1971835.127	3972460.908
32	EO00	4574954.288	1951420.259	3980383.265
33	TR00	4684774.985	1926595.350	3864292.939
34	V000	4621884.277	1921702.203	3940613.952
35	X002	4644367.505	1912393.445	3917944.446

Πίνακας Α-3: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ

4. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΥΠΟΔΙΚΤΥΟΥ Α' ΤΑΞΗΣ ΑΠΟ ΛΥΣΗ Δ.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	2400	4597863.593	1938509.058	3959991.208
2	2700	4563037.510	1980600.802	3978750.184
3	2800	4589879.488	1967399.846	3955033.797
4	3400	4597929.401	1972797.475	3942758.748
5	3500	4585749.342	1997779.316	3944379.232
6	3600	4571812.442	1996184.876	3961739.305
7	3801	4552114.901	2037147.521	3963188.385
8	4100	4579632.045	2014445.420	3943140.970
9	4900	4619102.079	1980972.580	3914066.203
10	5000	4607401.238	1989498.781	3924138.915
11	5200	4574393.830	2033129.083	3939302.394
12	5500	4569149.829	2052266.616	3935686.822
13	6400	4647892.711	1967179.582	3887940.796
14	CH00	4647810.963	1936368.399	3903597.153
15	CK00	4644625.218	1957928.500	3895847.326
16	CM00	4620304.423	1957004.699	3924374.272
17	CN00	4616424.721	1953711.376	3931560.958
18	CP00	4617908.559	1942020.754	3935945.341
19	CQ00	4610013.700	1944405.694	3943029.041
20	CS00	4617086.795	1917831.009	3949180.189
21	EC00	4585706.244	1967547.359	3959602.379
22	ED00	4594247.149	1954347.758	3956666.393
23	EE00	4586663.169	1985080.984	3949794.552
24	EF05	4593547.114	1988773.906	3940825.496
25	EG00	4606465.679	1977620.284	3930748.551
26	EH00	4589899.566	2015760.701	3930480.910
27	EJ00	4571844.321	2016289.356	3951201.359
28	EK00	4576273.221	1990168.212	3959051.815
29	EL00	4560432.699	2001465.611	3971495.085
30	EM00	4571473.882	1983354.314	3968236.903
31	EN00	4572626.390	1971835.127	3972460.908
32	EO00	4574954.288	1951420.259	3980383.264
33	TR00	4684774.985	1926595.350	3864292.939
34	V000	4621884.277	1921702.203	3940613.952
35	X002	4644367.505	1912393.445	3917944.446

Πίνακας Α-4: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ

5. Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Α (ADDNEQ).

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	P077	4571123.927	2039100.485	3940101.604
2	5204	4574408.267	2033118.713	3939295.429
3	2000	4604106.506	1918649.712	3962297.047
4	2747	4595236.938	1950642.060	3958295.452
5	P026	4584418.379	1951864.672	3968455.238
6	P220	4599187.217	1937575.448	3958734.838
7	P273	4570766.995	2052369.603	3933980.460
8	P345	4567102.862	2048125.155	3940516.479
9	P373	4598136.602	2002374.502	3928046.081
10	P390	4567880.806	1971622.341	3978291.749
11	P450	4590502.048	1942337.351	3966791.483
12	P490	4564841.040	1974511.122	3980369.133
13	1228	4619139.794	1945223.764	3933468.115
14	1700	4556996.759	1969383.053	3991140.120
15	2100	4591931.372	1930877.852	3971480.554
16	2600	4571271.311	1972601.821	3974038.399
17	3700	4567938.156	2006907.458	3960889.955
18	3800	4552114.884	2037147.513	3963188.382
19	4600	4615566.503	1961954.919	3927646.177
20	5100	4599894.556	2004287.457	3925360.459
21	5300	4588486.697	2028895.832	3925877.648
22	5800	4610054.570	2015493.617	3907135.626
23	KNIM	4592218.314	1930955.703	3971126.566
24	P017	4582996.747	2009928.956	3941193.427
25	P018	4588264.457	1959870.895	3960101.721
26	P023	4585463.771	1988937.238	3948921.996
27	P024	4577378.256	1993180.309	3956112.162
28	P025	4584291.650	1994856.801	3947310.167
29	P027	4566033.714	1953485.685	3988771.418
30	P033	4563714.097	1981689.189	3977516.541
31	P039	4564296.138	1953670.264	3990596.435
32	P067	4557395.308	1974499.187	3988280.497
33	P094	4603145.790	1964118.864	3940930.249
34	P107	4585870.241	2020825.174	3932472.890
35	P112	4593868.504	1984219.649	3941711.996
36	P115	4572568.256	1962823.046	3976833.470
37	P119	4598809.161	1954544.453	3950716.329
38	P314	4572719.641	1976332.625	3970346.679
39	P321	4556458.378	2038463.836	3957656.249
40	P327	4606927.037	1969355.461	3934315.546
41	P341	4561600.547	1971351.562	3985658.349
42	P354	4561608.803	1962399.925	3989909.573
43	P387	4605901.319	1979066.793	3930763.826
44	P395	4610571.086	1943127.110	3943128.451
45	P402	4609993.738	1966885.015	3932095.165
46	P429	4607618.578	1943147.732	3946599.002
47	P449	4559034.898	2024245.060	3962160.555
48	P514	4563200.317	1963039.886	3988003.836
49	P519	4614772.229	1928150.696	3945745.654
50	P528	4609473.709	1929864.997	3951077.612
51	P592	4620945.268	1945897.672	3930001.853
52	1500	4577903.785	1938012.017	3982736.940
53	CG00	4644473.057	1937384.938	3906731.246
54	P120	4602388.247	1979402.079	3934266.597
55	P125	4579530.454	2019317.825	3940599.468
56	P133	4595547.368	1967970.162	3947888.655
57	P144	4560295.473	2036312.964	3954080.154
58	P146	4567458.760	2041038.699	3943436.522
59	P170	4608058.593	1955753.804	3939480.752

Πίνακας Α-5: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Α (ADDNEQ)

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
60	P189	4604667.610	1942011.806	3950177.984
61	P195	4588907.597	1997183.834	3941082.895
62	P209	4591115.761	1952714.920	3960635.248
63	P211	4621986.762	1925788.917	3937999.230
64	P215	4569923.960	2008074.364	3957495.898
65	P216	4572230.976	2010795.045	3953473.065
66	P219	4603534.994	1933409.649	3955735.159
67	P257	4568337.362	2033008.673	3946724.156
68	P307	4568675.522	2016703.100	3954715.391
69	P631	4564152.843	1967353.133	3984980.889
70	P651	4553109.958	2035039.601	3963759.010
71	P662	4566279.645	2029534.472	3951513.235
72	P705	4565589.806	1964060.662	3985083.008
73	P761	4571115.281	1959349.159	3981266.562
74	P795	4680726.330	1939623.816	3862427.829
75	P894	4610911.263	1947600.720	3941343.424
76	P948	4616449.738	1921468.180	3947724.938
77	P974	4613658.377	1959648.024	3932333.426
78	PD0M	4616882.991	1958581.521	3927893.851
79	Q096	4603441.716	1956212.310	3944494.352
80	Q144	4570471.905	1951851.897	3984623.973
81	Q273	4570942.351	2015869.043	3952479.921
82	Q321	4609028.332	1977830.330	3927633.612
83	Q327	4561300.457	2047765.246	3947342.362
84	VA64	4605599.190	1963313.035	3938594.249

Πίνακας Α-5: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Α (ADDNEQ) (συνέχεια)

6. Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Β (COMPAR).

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	P077	4571123.927	2039100.485	3940101.604
2	5204	4574408.267	2033118.713	3939295.429
3	2000	4604106.506	1918649.712	3962297.047
4	2747	4595236.938	1950642.060	3958295.452
5	P026	4584418.379	1951864.672	3968455.238
6	P220	4599187.217	1937575.448	3958734.838
7	P273	4570766.995	2052369.603	3933980.460
8	P345	4567102.862	2048125.155	3940516.479
9	P373	4598136.602	2002374.502	3928046.081
10	P390	4567880.806	1971622.341	3978291.749
11	P450	4590502.048	1942337.351	3966791.483
12	P490	4564841.040	1974511.122	3980369.133
13	1228	4619139.794	1945223.764	3933468.115
14	1700	4556996.759	1969383.053	3991140.120
15	2100	4591931.372	1930877.852	3971480.554
16	2600	4571271.311	1972601.821	3974038.399
17	3700	4567938.156	2006907.458	3960889.954
18	3800	4552114.884	2037147.513	3963188.382
19	4600	4615566.503	1961954.919	3927646.177
20	5100	4599894.556	2004287.457	3925360.459
21	5300	4588486.697	2028895.832	3925877.648
22	5800	4610054.570	2015493.617	3907135.626
23	KNIM	4592218.314	1930955.703	3971126.566
24	P017	4582996.747	2009928.956	3941193.427
25	P018	4588264.457	1959870.895	3960101.721
26	P023	4585463.771	1988937.238	3948921.996
27	P024	4577378.256	1993180.309	3956112.162
28	P025	4584291.650	1994856.801	3947310.167
29	P027	4566033.714	1953485.685	3988771.418
30	P033	4563714.097	1981689.189	3977516.541
31	P039	4564296.138	1953670.264	3990596.435
32	P067	4557395.308	1974499.187	3988280.497
33	P094	4603145.790	1964118.864	3940930.249
34	P107	4585870.241	2020825.174	3932472.890
35	P112	4593868.504	1984219.649	3941711.996
36	P115	4572568.256	1962823.046	3976833.470
37	P119	4598809.161	1954544.453	3950716.329
38	P314	4572719.641	1976332.625	3970346.679
39	P321	4556458.378	2038463.836	3957656.249
40	P327	4606927.037	1969355.461	3934315.546
41	P341	4561600.547	1971351.562	3985658.349
42	P354	4561608.803	1962399.925	3989909.573
43	P387	4605901.319	1979066.793	3930763.826
44	P395	4610571.086	1943127.110	3943128.451
45	P402	4609993.738	1966885.015	3932095.165
46	P429	4607618.578	1943147.732	3946599.002
47	P449	4559034.898	2024245.060	3962160.555
48	P514	4563200.317	1963039.886	3988003.836
49	P519	4614772.229	1928150.696	3945745.654
50	P528	4609473.709	1929864.997	3951077.612
51	P592	4620945.268	1945897.672	3930001.853
52	1500	4577903.785	1938012.017	3982736.940
53	CG00	4644473.057	1937384.938	3906731.246
54	P120	4602388.247	1979402.079	3934266.597
55	P125	4579530.454	2019317.825	3940599.468
56	P133	4595547.368	1967970.162	3947888.655
57	P144	4560295.473	2036312.964	3954080.154
58	P146	4567458.760	2041038.699	3943436.522
59	P170	4608058.593	1955753.804	3939480.752

Πίνακας Α-6: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Β (COMPAR)

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
60	P189	4604667.610	1942011.806	3950177.984
61	P195	4588907.597	1997183.834	3941082.895
62	P209	4591115.761	1952714.920	3960635.248
63	P211	4621986.762	1925788.917	3937999.230
64	P215	4569923.960	2008074.364	3957495.898
65	P216	4572230.976	2010795.045	3953473.065
66	P219	4603534.994	1933409.649	3955735.159
67	P257	4568337.362	2033008.673	3946724.156
68	P307	4568675.522	2016703.100	3954715.391
69	P631	4564152.843	1967353.133	3984980.889
70	P651	4553109.958	2035039.601	3963759.010
71	P662	4566279.645	2029534.472	3951513.235
72	P705	4565589.806	1964060.661	3985083.008
73	P761	4571115.281	1959349.159	3981266.562
74	P795	4680726.330	1939623.816	3862427.829
75	P894	4610911.263	1947600.720	3941343.424
76	P948	4616449.738	1921468.180	3947724.938
77	P974	4613658.377	1959648.024	3932333.426
78	PD0M	4616882.991	1958581.521	3927893.851
79	Q096	4603441.716	1956212.310	3944494.352
80	Q144	4570471.905	1951851.897	3984623.973
81	Q273	4570942.351	2015869.043	3952479.921
82	Q321	4609028.332	1977830.330	3927633.612
83	Q327	4561300.457	2047765.246	3947342.362
84	VA64	4605599.190	1963313.035	3938594.249

Πίνακας Α-6: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης από Λύση Β (COMPAR) (συνέχεια)

7. Συντεταγμένες υποδικτύου Γ' τάξης (ADDNEQ).

α/α	Σημείο	X (m)	$\pm \sigma_x$ (m)	Y (m)	$\pm \sigma_y$ (m)	Z (m)	$\pm \sigma_z$ (m)
1	P529	4618739.152	0.229	1914845.024	0.135	3947586.184	0.154
2	1005	4617805.093	0.141	1941353.528	0.056	3936560.685	0.114
3	P001	4584903.039	0.092	2017909.022	0.038	3934907.472	0.080
4	P038	4572872.216	0.177	1945385.045	0.114	3984949.870	0.151
5	P056	4587359.158	0.152	2016863.314	0.072	3932685.829	0.095
6	P084	4587879.567	0.097	2003914.253	0.039	3938699.070	0.089
7	P088	4572654.890	0.344	1946301.295	0.203	3984835.693	0.181
8	P092	4592566.821	0.084	2008163.451	0.042	3931128.815	0.071
9	P096	4558146.232	0.183	1969057.297	0.078	3990157.017	0.099
10	P103	4589891.665	0.096	2011598.164	0.037	3932505.150	0.072
11	P112	4593868.251	0.404	1984219.583	0.219	3941711.760	0.254
12	P115	4572565.278	0.064	1962822.681	0.034	3976830.074	0.050
13	P328	4609158.812	0.067	1982558.419	0.036	3925123.072	0.053
14	P331	4597394.020	0.050	1997010.476	0.026	3931552.125	0.043
15	P349	4604578.636	0.139	1981330.133	0.054	3931125.395	0.093
16	P365	4604947.397	0.098	1989463.060	0.050	3926623.719	0.080
17	P387	4605900.890	0.108	1979066.464	0.056	3930763.608	0.077
18	P431	4575657.164	0.107	1948597.045	0.050	3980770.894	0.083
19	P501	4572067.242	0.122	1996572.758	0.056	3961272.773	0.116
20	ARGS	4664986.841	0.108	1952963.772	0.044	3873902.121	0.079
21	P137	4590967.772	0.131	2009903.050	0.052	3932174.055	0.104
22	P184	4592254.835	0.289	1995258.777	0.235	3938153.884	0.151
23	P196	4584247.037	0.102	2025398.441	0.056	3932159.409	0.090
24	P212	4599090.212	0.094	1986059.215	0.036	3934899.110	0.070
25	P222	4590542.506	0.118	2000850.575	0.119	3937378.806	0.106
26	P238	4594423.817	0.133	2006957.603	0.053	3929820.245	0.122
27	P721	4568523.815	0.178	2025741.430	0.053	3950979.231	0.122
28	Q146	4594492.847	0.076	1990341.176	0.035	3937976.092	0.067
29	Q307	4605053.458	0.085	1985571.820	0.038	3928362.915	0.072

Πίνακας Α-7: Συντεταγμένες υποδικτύου Γ' τάξης (ADDNEQ)

B. Συντεταγμένες δικτύου εποχής 2005.76

1. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	ARKI	4583365.580	1948697.057	3971175.017
2	DIONYSOS	4595216.477	2039453.041	3912626.738
3	4100	4579632.025	2014445.494	3943140.884
4	CS00	4617086.760	1917831.098	3949180.153
5	3600	4571812.413	1996184.956	3961739.241
6	5200	4574393.829	2033129.163	3939302.308
7	EM00	4571473.824	1983354.405	3968236.808
8	CH00	4647811.000	1936368.490	3903597.058
9	5500	4569149.834	2052266.689	3935686.718
10	2800	4589879.459	1967399.935	3955033.731
11	CQ00	4610013.657	1944405.750	3943028.957
12	ED00	4594247.114	1954347.851	3956666.339
13	V000	4621884.243	1921702.273	3940613.919
14	CK00	4644625.172	1957928.548	3895847.162
15	3500	4585749.347	1997779.406	3944379.166
16	5000	4607401.327	1989498.893	3924138.906
17	5204	4574408.307	2033118.796	3939295.355
18	1700	4556996.796	1969383.197	3991140.139
19	2100	4591931.293	1930877.937	3971480.486
20	2700	4563037.495	1980600.919	3978750.134
21	3400	4597929.394	1972797.559	3942758.697
22	3800	4552111.403	2037142.581	3963193.610
23	4600	4615566.518	1961955.000	3927646.131
24	4900	4619102.084	1980972.654	3914066.113
25	5100	4599894.598	2004287.542	3925360.405
26	5300	4588486.764	2028895.940	3925877.607
27	EL00	4560432.645	2001465.693	3971494.983
28	EN00	4572626.354	1971835.228	3972460.844
29	EO00	4574954.242	1951420.370	3980383.231
30	P025	4584291.650	1994856.891	3947310.100
31	P107	4585870.196	2020825.235	3932472.766
32	6400	4647892.672	1967179.619	3887940.630
33	1500	4577903.733	1938012.136	3982736.909
34	CG00	4644473.006	1937384.982	3906731.095
35	CM00	4620304.428	1957004.774	3924374.216
36	CN00	4616424.713	1953711.437	3931560.902
37	CP00	4617908.577	1942020.855	3935945.335
38	EC00	4585706.212	1967547.443	3959602.313
39	EE00	4586663.153	1985081.070	3949794.482
40	EF05	4593547.091	1988773.984	3940825.415
41	EG00	4606465.667	1977620.339	3930748.383
42	EJ00	4571844.339	2016289.455	3951201.290
43	EK00	4576273.187	1990168.300	3959051.744
44	P133	4595547.383	1967970.258	3947888.619
45	TR00	4684774.946	1926595.391	3864292.780
46	VA64	4605599.143	1963313.088	3938594.145
47	5301	4588478.994	2028900.773	3925885.702
48	BASE	4579820.520	2020030.112	3939714.727
49	CD00	4661660.812	1924282.453	3892693.944
50	CJ00	4650774.515	1948963.469	3893765.174
51	CO00	4622893.068	1954313.389	3922802.076
52	CV00	4622080.814	1945068.261	3928852.852
53	X715	4647937.218	1907017.881	3917488.041
54	EB00	4583364.659	1948696.435	3971176.420

Πίνακας Β-1: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Α

2. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	ARKI	4583365.580	1948697.057	3971175.017
2	DIONYSOS	4595216.477	2039453.039	3912626.736
3	4100	4579632.025	2014445.494	3943140.883
4	CS00	4617086.759	1917831.097	3949180.154
5	3600	4571812.413	1996184.956	3961739.241
6	5200	4574393.829	2033129.162	3939302.305
7	EM00	4571473.821	1983354.403	3968236.804
8	CH00	4647810.999	1936368.489	3903597.058
9	5500	4569149.837	2052266.690	3935686.720
10	2800	4589879.463	1967399.936	3955033.731
11	CQ00	4610013.660	1944405.751	3943028.962
12	ED00	4594247.115	1954347.851	3956666.340
13	V000	4621884.241	1921702.271	3940613.919
14	CK00	4644625.172	1957928.548	3895847.163
15	3500	4585749.344	1997779.407	3944379.163
16	5000	4607401.511	1989498.972	3924139.062
17	5204	4574408.306	2033118.795	3939295.353
18	1700	4556996.797	1969383.197	3991140.140
19	2100	4591931.292	1930877.936	3971480.487
20	2700	4563037.497	1980600.920	3978750.136
21	3400	4597929.394	1972797.559	3942758.696
22	3800	4552111.407	2037142.582	3963193.614
23	4600	4615566.519	1961955.001	3927646.132
24	4900	4619102.084	1980972.654	3914066.113
25	5100	4599894.596	2004287.542	3925360.402
26	5300	4588486.765	2028895.942	3925877.607
27	EL00	4560432.645	2001465.694	3971494.984
28	EN00	4572626.363	1971835.231	3972460.853
29	EO00	4574954.248	1951420.372	3980383.237
30	P025	4584291.646	1994856.891	3947310.094
31	P107	4585870.204	2020825.239	3932472.774
32	6400	4647892.675	1967179.621	3887940.631
33	1500	4577903.734	1938012.137	3982736.910
34	CG00	4644473.005	1937384.981	3906731.095
35	CM00	4620304.432	1957004.774	3924374.220
36	CN00	4616424.713	1953711.437	3931560.903
37	CP00	4617908.584	1942020.858	3935945.343
38	EC00	4585706.211	1967547.443	3959602.313
39	EE00	4586663.153	1985081.072	3949794.481
40	EF05	4593547.090	1988773.984	3940825.415
41	EG00	4606465.655	1977620.331	3930748.373
42	EJ00	4571844.344	2016289.457	3951201.294
43	EK00	4576273.188	1990168.300	3959051.744
44	P133	4595547.390	1967970.263	3947888.622
45	TR00	4684774.946	1926595.392	3864292.782
46	VA64	4605599.141	1963313.089	3938594.142
47	5301	4588478.994	2028900.773	3925885.699
48	BASE	4579820.525	2020030.114	3939714.731
49	CD00	4661660.814	1924282.453	3892693.946
50	CJ00	4650774.515	1948963.468	3893765.175
51	CO00	4622893.068	1954313.388	3922802.077
52	CV00	4622080.815	1945068.261	3928852.853
53	X715	4647937.217	1907017.880	3917488.040
54	EB00	4583364.659	1948696.434	3971176.421

Πίνακας Β-2: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Β

3. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	ARKI	4583365.582	1948697.058	3971175.019
2	DIONYSOS	4595216.476	2039453.040	3912626.737
3	4100	4579632.024	2014445.493	3943140.882
4	CS00	4617086.761	1917831.098	3949180.155
5	3600	4571812.414	1996184.957	3961739.242
6	5200	4574393.824	2033129.160	3939302.300
7	EM00	4571473.829	1983354.408	3968236.814
8	CH00	4647811.002	1936368.490	3903597.061
9	5500	4569149.836	2052266.689	3935686.719
10	2800	4589879.459	1967399.935	3955033.731
11	CQ00	4610013.658	1944405.750	3943028.955
12	ED00	4594247.115	1954347.851	3956666.340
13	V000	4621884.233	1921702.268	3940613.914
14	CK00	4644625.174	1957928.548	3895847.166
15	3500	4585749.341	1997779.406	3944379.159
16	5000	4607401.290	1989498.877	3924138.876
17	5204	4574408.301	2033118.792	3939295.348
18	1700	4556996.799	1969383.198	3991140.143
19	2100	4591931.294	1930877.937	3971480.488
20	2700	4563037.494	1980600.918	3978750.135
21	3400	4597929.395	1972797.560	3942758.697
22	3800	4552111.408	2037142.582	3963193.615
23	4600	4615566.522	1961955.001	3927646.135
24	4900	4619102.086	1980972.655	3914066.116
25	5100	4599894.591	2004287.540	3925360.396
26	5300	4588486.760	2028895.939	3925877.602
27	EL00	4560432.645	2001465.694	3971494.984
28	EN00	4572626.349	1971835.225	3972460.841
29	EO00	4574954.250	1951420.373	3980383.240
30	P025	4584291.646	1994856.891	3947310.094
31	P107	4585870.195	2020825.234	3932472.764
32	6400	4647892.678	1967179.622	3887940.634
33	1500	4577903.737	1938012.138	3982736.912
34	CG00	4644473.008	1937384.982	3906731.098
35	CM00	4620304.436	1957004.777	3924374.225
36	CN00	4616424.713	1953711.437	3931560.903
37	CP00	4617908.588	1942020.861	3935945.348
38	EC00	4585706.212	1967547.443	3959602.314
39	EE00	4586663.152	1985081.072	3949794.480
40	EF05	4593547.091	1988773.984	3940825.416
41	EG00	4606465.667	1977620.338	3930748.384
42	EJ00	4571844.339	2016289.455	3951201.290
43	EK00	4576273.189	1990168.300	3959051.745
44	P133	4595547.390	1967970.263	3947888.622
45	TR00	4684774.949	1926595.392	3864292.785
46	VA64	4605599.142	1963313.089	3938594.142
47	5301	4588478.989	2028900.770	3925885.694
48	BASE	4579820.521	2020030.111	3939714.726
49	CD00	4661660.817	1924282.454	3892693.949
50	CJ00	4650774.518	1948963.469	3893765.177
51	CO00	4622893.070	1954313.388	3922802.078
52	CV00	4622080.817	1945068.261	3928852.856
53	X715	4647937.220	1907017.881	3917488.043
54	EB00	4583364.660	1948696.435	3971176.422

Πίνακας Β-3: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Γ

4. Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	ARKI	4583365.581	1948697.057	3971175.018
2	DIONYSOS	4595216.476	2039453.040	3912626.737
3	4100	4579632.024	2014445.493	3943140.882
4	CS00	4617086.760	1917831.097	3949180.154
5	3600	4571812.414	1996184.956	3961739.243
6	5200	4574393.824	2033129.160	3939302.300
7	EM00	4571473.829	1983354.407	3968236.814
8	CH00	4647811.001	1936368.489	3903597.060
9	5500	4569149.836	2052266.689	3935686.719
10	2800	4589879.458	1967399.934	3955033.731
11	CQ00	4610013.657	1944405.749	3943028.955
12	ED00	4594247.114	1954347.850	3956666.340
13	V000	4621884.233	1921702.268	3940613.913
14	CK00	4644625.174	1957928.548	3895847.165
15	3500	4585749.340	1997779.406	3944379.160
16	5000	4607401.289	1989498.876	3924138.875
17	5204	4574408.301	2033118.792	3939295.348
18	1700	4556996.799	1969383.198	3991140.142
19	2100	4591931.293	1930877.936	3971480.488
20	2700	4563037.494	1980600.917	3978750.135
21	3400	4597929.395	1972797.559	3942758.698
22	3800	4552111.407	2037142.582	3963193.615
23	4600	4615566.521	1961955.001	3927646.135
24	4900	4619102.086	1980972.655	3914066.115
25	5100	4599894.592	2004287.540	3925360.397
26	5300	4588486.760	2028895.939	3925877.602
27	EL00	4560432.645	2001465.693	3971494.984
28	EN00	4572626.348	1971835.224	3972460.840
29	EO00	4574954.250	1951420.372	3980383.239
30	P025	4584291.645	1994856.890	3947310.095
31	P107	4585870.194	2020825.234	3932472.764
32	6400	4647892.677	1967179.621	3887940.634
33	1500	4577903.736	1938012.137	3982736.912
34	CG00	4644473.007	1937384.981	3906731.098
35	CM00	4620304.435	1957004.776	3924374.224
36	CN00	4616424.712	1953711.437	3931560.902
37	CP00	4617908.588	1942020.861	3935945.348
38	EC00	4585706.211	1967547.443	3959602.314
39	EE00	4586663.151	1985081.070	3949794.480
40	EF05	4593547.091	1988773.983	3940825.416
41	EG00	4606465.666	1977620.337	3930748.383
42	EJ00	4571844.339	2016289.455	3951201.290
43	EK00	4576273.188	1990168.300	3959051.744
44	P133	4595547.389	1967970.262	3947888.622
45	TR00	4684774.948	1926595.392	3864292.784
46	VA64	4605599.141	1963313.087	3938594.143
47	5301	4588478.989	2028900.770	3925885.694
48	BASE	4579820.521	2020030.111	3939714.726
49	CD00	4661660.816	1924282.454	3892693.949
50	CJ00	4650774.517	1948963.468	3893765.177
51	CO00	4622893.069	1954313.388	3922802.078
52	CV00	4622080.817	1945068.261	3928852.855
53	X715	4647937.219	1907017.880	3917488.043
54	EB00	4583364.659	1948696.434	3971176.422

Πίνακας Β-4: Συντεταγμένες υποδικτύου Α' τάξης από Λύση Δ

5. Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης.

α/α	Σημείο	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	3501	4585748.227	1997775.390	3944381.511
2	4101	4579629.131	2014445.715	3943143.772
3	4103	4579634.529	2014443.136	3943139.247
4	5502	4569148.960	2052269.224	3935687.474
5	2701	4563042.507	1980592.401	3978749.330
6	2702	4563035.857	1980598.610	3978752.998
7	2703	4563035.265	1980601.955	3978751.096
8	CM01	4620294.454	1957008.483	3924382.619
9	CQ01	4610010.927	1944401.235	3943036.138
10	CO01	4622886.864	1954319.885	3922806.660
11	CO02	4622893.631	1954323.984	3922796.031
12	P220	4599187.224	1937575.546	3958734.801
13	LOUT	4605901.605	1979066.978	3930762.961
14	6402	4647890.089	1967182.302	3887941.623
15	6403	4647895.068	1967177.658	3887939.119
16	2400	4597865.063	1938510.145	3959988.660
17	P501	4572067.278	1996572.843	3961272.711

Πίνακας Β-5: Συντεταγμένες υποδικτύου Β' τάξης

C. Επεξήγηση κύριων εξαγόμενων αρχείων αποτελεσμάτων

1. Πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας

Τα αρχεία που περιέχουν την πληροφορία των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, εξαγονται με την κατάληξη «**.COV**». Μπορούν να υπολογιστούν από όλα τα προγράμματα εκτίμησης παραμέτρων (GPEST, ADDNEQ, COMPAR και ADDNEQ2) και έχουν τη μορφή που φαίνεται παρακάτω:

COMBINED SOLUTION WITH PRECISE COORDINATES					13-OCT-08 12:15
UPPER TRIANGULAR PART OF VARIANCE-COVARIANCE MATRIX FOR COORDINATES:					
RMS OF UNIT WEIGHT: 0.0015		# OBS: 3260308	# UNKNOWNNS: 5538		
STATION 1	XYZ	STATION 2	XYZ	MATRIX ELEMENT	
ANKR	X	ANKR	X	0.1250000014D-08	a posteriori τυπικό σφάλμα μονάδας βάρους
ANKR	Y	ANKR	X	-0.7954287212D-17	
ANKR	Y	ANKR	Y	0.1250000024D-08	
ANKR	Z	ANKR	X	-0.1207350355D-16	
ANKR	Z	ANKR	Y	-0.2644414215D-17	
ANKR	Z	ANKR	Z	0.1250000016D-08	
DIONYSOS	X	ANKR	X	0.1805209735D-10	
DIONYSOS	X	ANKR	Y	-0.7582254339D-11	
DIONYSOS	X	ANKR	Z	0.1193062366D-10	
DIONYSOS	X	DIONYSOS	X	0.1035187310D-01	
DIONYSOS	Y	ANKR	X	0.1483175569D-12	
DIONYSOS	Y	ANKR	Y	0.2058108057D-10	
DIONYSOS	Y	ANKR	Z	0.1918290806D-11	
DIONYSOS	Y	DIONYSOS	X	0.4636520816D-02	
DIONYSOS	Y	DIONYSOS	Y	0.2403701232D-02	
DIONYSOS	Z	ANKR	X	-0.7851744584D-11	
DIONYSOS	Z	ANKR	Y	-0.1456699816D-10	
DIONYSOS	Z	ANKR	Z	0.4223788022D-10	
DIONYSOS	Z	DIONYSOS	X	0.8684868670D-02	
DIONYSOS	Z	DIONYSOS	Y	0.3872505191D-02	
DIONYSOS	Z	DIONYSOS	Z	0.7937105434D-02	
GRAZ	X	ANKR	X	0.1097130129D-16	
GRAZ	X	ANKR	Y	-0.6246715675D-17	
GRAZ	X	ANKR	Z	-0.9368144003D-17	
GRAZ	X	DIONYSOS	X	0.4658283015D-11	

Σχήμα C-1: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .COV

Οι τιμές που αναγράφονται, αποτελούν το άνω τριγωνικό τμήμα του πίνακα $N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$ σε μέτρα. Συνεπώς, για να βρεθεί το τυπικό σφάλμα κάθε σημείου (για κάποια συνιστώσα), όπως αναγράφεται στα αρχεία **.OUT**, πρέπει να γίνει ο υπολογισμός (π.χ. της συνιστώσας X του σταθμού DION):

$$\sigma_{DION_{xx}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{N^{-1}_{DION_{xx}}}$$

2. Αρχεία αποτελεσμάτων του προγράμματος COMPAR

Τα συγκεκριμένα αρχεία, περιέχουν μεγάλη ποσότητα πληροφορίας, μέρος της οποίας είναι ίδιο με αυτό που εξαγεται από το πρόγραμμα ADDNEQ. Παρακάτω θα εστιάσουμε κυρίως στα διαφορετικά κομμάτια.

LIST OF COORDINATE FILES			
NUMBER OF COORDINATE FILES: 10			
FILE	FILE NAME	#STA	TITLE
1	P:\EVIA2005\STA\RC_270.CRD	18	
2	P:\EVIA2005\STA\RC_271.CRD	27	
3	P:\EVIA2005\STA\RC_272.CRD	33	
4	P:\EVIA2005\STA\RC_273.CRD	31	
5	P:\EVIA2005\STA\RC_274.CRD	30	
6	P:\EVIA2005\STA\RC_275.CRD	35	
7	P:\EVIA2005\STA\RC_276.CRD	34	
8	P:\EVIA2005\STA\RC_277.CRD	25	
9	P:\EVIA2005\STA\RC_278.CRD	26	
10	P:\EVIA2005\STA\RC_279.CRD	21	

αρχεία συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση

LIST OF COVARIANCE FILES			
NUMBER OF COVARIANCE FILES: 10			
FILE	FILE NAME	RMS	#STA TITLE
1	P:\EVIA2005\OUT\RC_270.COV	0.0018	12
2	P:\EVIA2005\OUT\RC_271.COV	0.0020	22
3	P:\EVIA2005\OUT\RC_272.COV	0.0018	26
4	P:\EVIA2005\OUT\RC_273.COV	0.0021	24
5	P:\EVIA2005\OUT\RC_274.COV	0.0025	24
6	P:\EVIA2005\OUT\RC_275.COV	0.0020	28
7	P:\EVIA2005\OUT\RC_276.COV	0.0018	27
8	P:\EVIA2005\OUT\RC_277.COV	0.0018	18
9	P:\EVIA2005\OUT\RC_278.COV	0.0021	19
10	P:\EVIA2005\OUT\RC_279.COV	0.0021	14

αρχεία πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση

Σχήμα C-2: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .OUT με αρχεία εισαγωγής

Και τα δύο είδη αρχείων (.CRD και .COV), έχουν παραχθεί με το πρόγραμμα GPEST σε προηγούμενο στάδιο επεξεργασίας και αποτελούν τα στοιχεία εισαγωγής για το πρόγραμμα COMPAR. Πάντως, η εισαγωγή των αρχείων που περιέχουν τους πίνακες μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, δεν είναι απαραίτητη.

COMPARISON OF COORDINATES (IN NORTH, EAST, AND HEIGHT COMPONENT)																
RMS: UNWEIGHTED RMS OF THE ESTIMATION OF ONE COORDINATE COMPONENT IN MM																
NUM	STATION	#FIL	C	RMS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	ANKR	8	N	0.0	0.0			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
			E	0.0	0.0			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
			U	0.0	0.0			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
119	EF05	7	N	2.1	0.6	0.3	2.3	-3.4					-2.7	-1.2	-0.6	
			E	3.3	0.8	-3.9	-3.9	0.2						3.4	3.4	3.0
			U	5.1	-3.6	5.5	-5.8	7.1						-5.1	-0.1	0.4
122	EJ00	10	N	2.9	2.0	2.9	5.1	-0.9	-4.4	0.0	-0.4	-0.3	1.2	-4.1		
			E	2.9	2.2	-0.9	-2.6	3.5	2.9	-5.1	-0.3	0.7	3.6	1.7		
			U	44.4	-21.3	-25.7	-15.6	68.2	-31.3	-18.6	-12.9	-9.7	97.8	23.6		
123	EK00	6	N	4.2	-0.8	-2.8	-0.5					-4.0	1.2	7.8		
			E	4.2	5.4	-1.8	-2.8						-3.0	-0.6	6.2	
			U	13.6	-5.4	11.4	11.7						4.6	-6.6	-23.7	
8	ARKI	9	N	2.1		2.7	2.0	-1.9	-3.1	1.1	-1.9	-1.7	-1.7	-0.3		
			E	1.7		-2.4	-2.4	-0.1	2.5	0.5	0.8	0.8	2.0	-0.8		
			U	3.7		2.0	2.4	0.2	-0.3	-1.0	-6.4	-0.1	-6.5	-3.6		
17	5500	9	N	3.1		-3.9	4.0	-1.0	-3.4	2.4	3.0	0.4	-3.4	-2.5		
			E	2.5		-3.1	-1.7	4.6	0.2	0.0	2.9	1.1	-2.3	-1.0		
			U	27.5		7.7	6.2	56.2	-14.1	-9.5	-8.5	1.4	-49.1	1.9		
24	3500	2	N	3.2		3.2	-0.5									
			E	6.5		1.0	-6.4									

ημέρα παρατήρησης

τυπικό σφάλμα σημείου σε τοποκεντρικές συν/νες

Σχήμα C-3: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .OUT με στοιχεία σύγκρισης ανά ημέρα λύσεων

Στο παραπάνω κομμάτι (Σχήμα C.3), φαίνονται οι αποκλίσεις των ανά ημέρα εκτιμήσεων από την συνδυασμένη επίλυση, σε τοποκεντρικές συντεταγμένες, σε μονάδες mm (υπάρχει και στα εξαγόμενα αρχεία του ADDNEQ). Από τις αποκλίσεις αυτές, υπολογίζεται το τυπικό σφάλμα που αναγράφεται στην πέμπτη στήλη (για τον υπολογισμό αυτό, όλες οι αποκλίσεις θεωρούνται ισοβαρείς), το οποίο και χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων.

C. Επεξήγηση εξαγόμενων αρχείων αποτελεσμάτων

BASELINE : 2100 TO EN00														
FILE	Dx(M)	DDx(M)	Dy(M)	DDy(M)	Dz(M)	DDz(M)	BASE.LENGTH	DDL(M)	DDL(PPM)	CODE	YYDD05	STATION 1	STATION 2	
5	-19304.8954	0.0434	40957.3108	0.0197	980.3948	0.0366	45289.5293	0.0002	0.0034	_BL_	RC_274	2100	EN00	
6	-19304.9601	-0.0213	40957.2809	-0.0102	980.3410	-0.0172	45289.5287	-0.0005	-0.0104	_BL_	RC_275	2100	EN00	
7	-19304.9608	-0.0220	40957.2815	-0.0096	980.3388	-0.0194	45289.5295	0.0003	0.0071	_BL_	RC_276	2100	EN00	
3	-19304.9388	0.0376	40957.2911	0.0171	980.3582	0.0317	45289.5292	0.0004	0.0092	_TT_		2100	EN00	

BASELINE : 2100 TO EG00														
FILE	Dx(M)	DDx(M)	Dy(M)	DDy(M)	Dz(M)	DDz(M)	BASE.LENGTH	DDL(M)	DDL(PPM)	CODE	YYDD05	STATION 1	STATION 2	
5	14534.3743	-0.0018	46742.3997	-0.0022	-40732.1063	-0.0038	63680.4872	0.0004	0.0068	_BL_	RC_274	2100	EG00	
6	14534.3761	0.0000	46742.4037	0.0018	-40732.1001	0.0034	63680.4866	-0.0002	-0.0029	_BL_	RC_275	2100	EG00	
7	14534.3778	0.0017	46742.4023	0.0004	-40732.1010	0.0035	63680.4865	-0.0002	-0.0039	_BL_	RC_276	2100	EG00	
3	14534.3761	0.0018	46742.4019	0.0020	-40732.1025	0.0034	63680.4868	0.0004	0.0059	_TT_		2100	EG00	

BASELINE : 2100 TO C000														
FILE	Dx(M)	DDx(M)	Dy(M)	DDy(M)	Dz(M)	DDz(M)	BASE.LENGTH	DDL(M)	DDL(PPM)	CODE	YYDD05	STATION 1	STATION 2	
5	30961.7817	-0.0032	23435.4549	0.0026	-48678.4042	-0.0038	62269.0895	-0.0004	-0.0068	_BL_	RC_274	2100	C000	
6	30961.7754	-0.0032	23435.4497	-0.0026	-48678.4118	-0.0038	62269.0904	0.0004	0.0068	_BL_	RC_275	2100	C000	
3	30961.7754	0.0035	23435.4549	0.0026	-48678.4118	-0.0038	62269.0904	0.0004	0.0068	_BL_	RC_275	2100	C000	

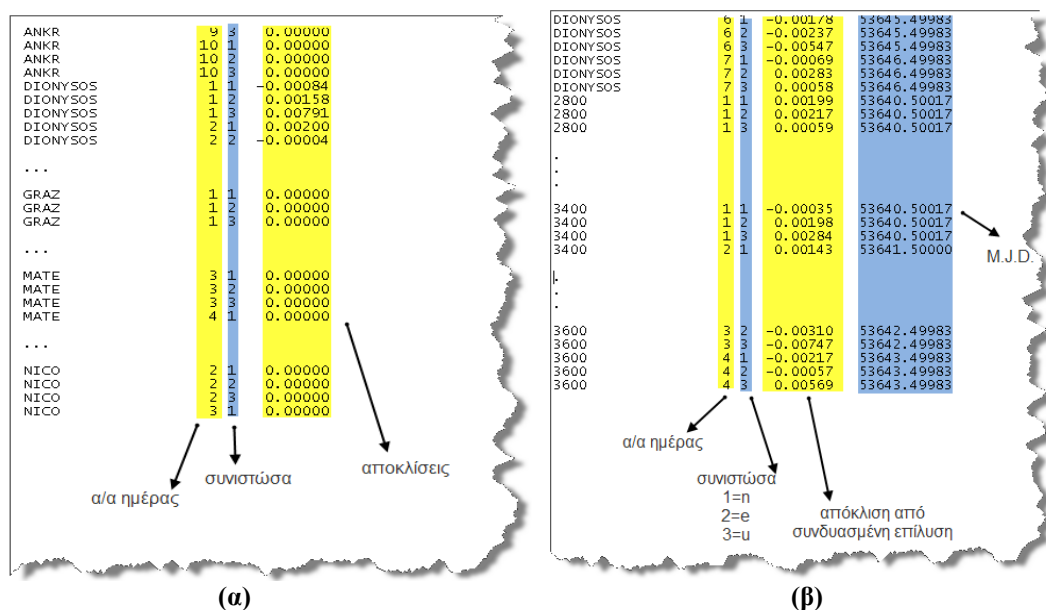
Σχήμα C-4: Λεπτομέρεια εξαγόμενου αρχείου κειμένου τύπου .OUT με στοιχεία βάσεων

Τέλος, το πρόγραμμα COMPAR υπολογίζει (αυτόματα) τα μήκη όλων των βάσεων που σχηματίζονται από τα σημεία που συμμετέχουν στη συνόρθωση, καθώς και μία σειρά στατιστικών στοιχείων και αποκλίσεων για την κάθε μία.

3. Αρχεία σχεδίασης .PLT

Τα αρχεία με προέκταση .PLT, εξάγονται με επιλογή του χρήστη, από τα προγράμματα εκτίμησης ADDNEQ και COMPAR. Περιέχουν τα υπόλοιπα που υπολογίζονται για κάθε σημείο, από την συνδυασμένη εκτίμηση και τις ανά ημέρα εκτιμήσεις σε τοποκεντρικές συντεταγμένες.

Τα αρχεία που εξάγονται από τα δύο προγράμματα, διαφέρουν στον συμβολισμό της ημέρας: το COMPAR χρησιμοποιεί τον αύξων αριθμό της ημέρας, υπολογισμένο με βάση την πρώτη ημέρα που συμμετέχει στην συνόρθωση, ενώ στο ADDNEQ οι ημέρες αναπαριστούνται και με την μέση Ιουλιανή ημερομηνία (MJD Mean Julian Date).



Σχήμα C-5: Λεπτομέρεια εξαγόμενων αρχείων σχεδίασης τύπου .OUT α) από COMPAR και β) από ADDNEQ.

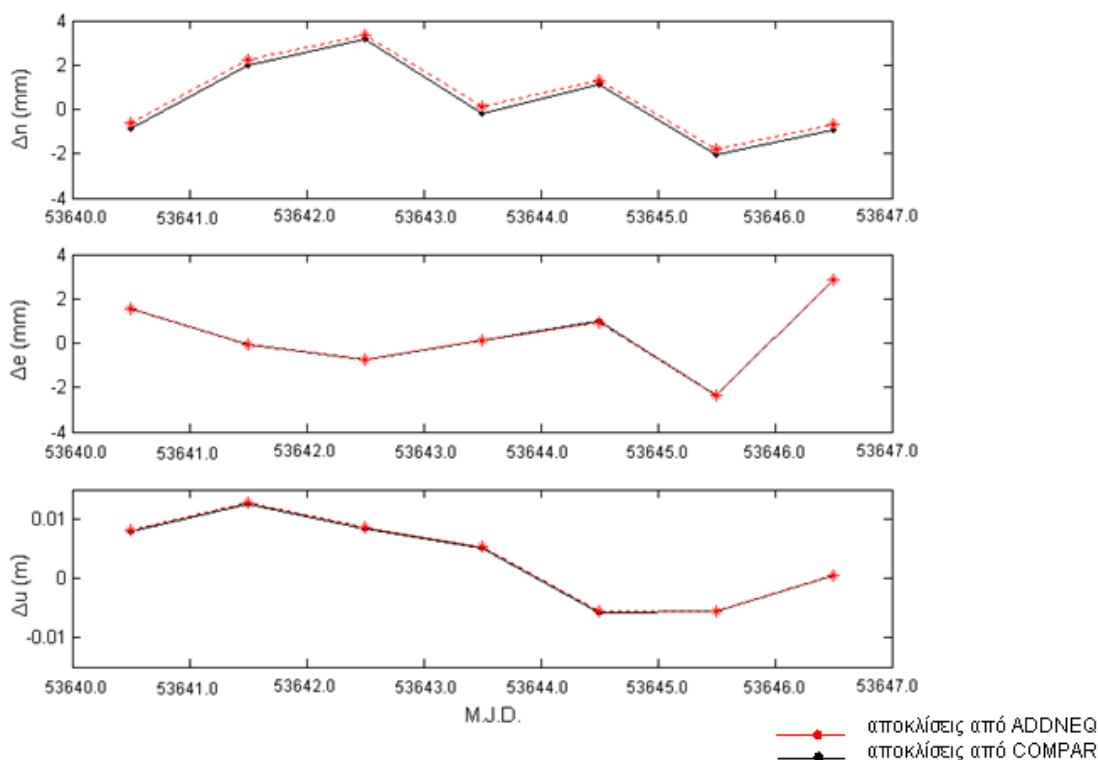
Επίσης, στα αρχεία που εξάγονται από το πρόγραμμα ADDNEQ, αναγράφονται κατά όμοιο τρόπο και οι αποκλίσεις μεταξύ των εκτιμήσεων των διαφορετικών ημερών (για κάθε σημείο).

```

...
CH00          10 3      0.00476  53649.49983
/* SOLUTION COMPARISONS BETWEEN FILES */
DIONYSOS     1      2 1      0.00285  53640.50017
DIONYSOS     1      2 2     -0.00159  53640.50017
DIONYSOS     1      2 3      0.00473  53640.50017
2800         1      2 1      0.00294  53640.50017
2800         1      2 2     -0.00342  53640.50017
2800         1      2 3      0.01201  53640.50017
3400         1      2 1      0.00178  53640.50017
3400         1      2 2     -0.00317  53640.50017
3400         1      2 3      0.00076  53640.50017
3600         1      2 1     -0.00269  53640.50017
3600         1      2 2     -0.00437  53640.50017
...
EC00         1      2 3      0.00300  53640.50017
EE00         1      2 1      0.00384  53640.50017
EE00         1      2 2     -0.00101  53640.50017
EE00         1      2 3      0.00735  53640.50017
EF05         1      2 1     -0.00033  53640.50017
EF05         1      2 2     -0.00471  53640.50017
EF05         1      2 3      0.00910  53640.50017
EJ00         1      2 1      0.00084  53640.50017
EJ00         1      2 2     -0.00307  53640.50017
EJ00         1      2 3     -0.00430  53640.50017
EK00         1      2 1     -0.00202  53640.50017
EK00         1      2 2     -0.00711  53640.50017
EK00         1      2 3      0.01671  53640.50017
DIONYSOS     1      3 1      0.00396  53640.50017
DIONYSOS     1      3 2     -0.00229  53640.50017
DIONYSOS     1      3 3      0.00997  53640.50017
...

```

Σχήμα C-6: Λεπτομέρεια εξαγόμενων αρχείων σχεδίασης τύπου .OUT από ADDNEQ, με αποκλίσεις μεταξύ διαφορετικών ημερών.



Σχήμα C-7: Γραφική απεικόνιση πληροφορίας των αρχείων .PLT για τον σταθμό DION (Διόνυσος).

Με χρήση των στοιχείων που αναγράφονται στα συγκεκριμένα αρχεία, είναι εύκολη και άμεση η απεικόνιση των ανά ημέρα αποκλίσεων σε σχέση με τη συνδυασμένη επίλυση που υπολογίζεται από κάθε πρόγραμμα (π.χ. για τον εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων).

Στο Σχήμα C-7, έχουν σχεδιαστεί ενδεικτικά, οι αποκλίσεις των ανά ημέρα εκτιμήσεων από την συνδυασμένη συνόρθωση (με τα προγράμματα ADDNEQ και COMPAR), για τον σταθμό DION (Διόνυσος).

Βιβλιογραφία

ΑΓΑΤΖΑ – ΜΠΑΛΟΔΗΜΟΥ Α. Μ. «Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις I» Αθήνα 2004

ΑΓΑΤΖΑ – ΜΠΑΛΟΔΗΜΟΥ Α. Μ. «Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις II» Αθήνα 2004

ΑΓΑΤΖΑ – ΜΠΑΛΟΔΗΜΟΥ Α. Μ. «Διαδοχικές συνορθώσεις» σημειώσεις ΔΠΜΣ Γεωπληροφορική, Αθήνα 2006 - 7

ΒΕΗΣ Γ., ΜΠΙΛΛΗΡΗΣ Χ., ΠΑΠΑΖΗΣΗ Κ. «Κεφάλαια ανώτερης γεωδαισίας» Αθήνα 2004

BROCKMANN ELMAR «Combination of solutions for geodetic and geodynamic applications of the Global Positioning System (G.P.S.)» Βέρνη 1996

GENTLE J. E. «Matrix algebra: Theory, Computations and applications in statistics» Springer – Verlag 2007

HUGENTOBLE U., SCHAER S., FRIDEZ P. «Bernese GPS Software Version 4.2» Φεβρουάριος 2001

KASHANI I., WIELGOSZ P., GREJNER – BRZEZINSKA D. A. «On the reliability of the VCV matrix: A case study based on GAMIT and Bernese GPS software» GPS Solutions, Vol. 8, December 2004

KOCH KARL – RUDOLF «Parameter estimation and hypothesis testing in linear models» Springer – Verlag 1999

ΠΑΡΑΔΕΙΣΗΣ Δ. «Σημειώσεις δορυφορικής γεωδαισίας» Αθήνα 2000

XU GUOCHANG «GPS theory, algorithms and applications» Springer-Verlag 2007

- Αντλήθηκαν επίσης πληροφορίες, από τις διαδικτυακές σελίδες μίας σειράς υπηρεσιών:

Υπηρεσία	Διαδικτυακός Τόπος
I.G.S. (International GNSS Service)	http://igsceb.jpl.nasa.gov/
I.E.R.S. (International Earth Rotation and Reference System Service)	http://www.iers.org/
I.T.R.F. (International Terrestrial Reference Frame)	http://itrf.ensg.ign.fr/
Ιστοσελίδα για το λογισμικό Bernese GPS Software*	http://www.bernese.unibe.ch/

* Υπό τη διεύθυνση των CODE (Center for Orbit Determination in Europe) και AIUB (Astronomical Institute University of Bern).