



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

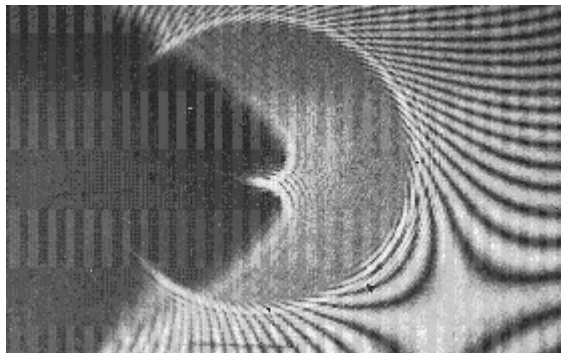
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΕΛΕΤΗ ΕΝΑΡΞΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΡΩΓΜΗΣ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ**

ΜΙΧΑΗΛ Γ. ΒΕΡΥΚΟΚΚΟΣ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Γ. Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ
ΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ : Δ. ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ
: Β. Γ. ΒΑΔΑΛΟΥΚΑ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ ΜΑΡΤΙΟΣ 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο (ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ)	
1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	8
1.2 ΓΕΝΙΚΑ	9
1.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ WESTERGAARD	11
1.4 ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ	14
1.5 ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ-I	15
1.6 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ-II	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο (ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ)	
2.1 ΓΕΝΙΚΑ	23
2.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΠΤΙΚΟΥ ΔΡΟΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ	25
2.3 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ	30
2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ	35
2.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο (ΠΕΙΡΑΜΑ)	
3.1 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ	52
3.2 ΜΑΡΤΥΡΑΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ	55
3.3 FRAMES ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ	57
3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ K_I	67
3.5 ΛΟΓΟΣ ΕΛΑΤΤΩΣΗΣ ΤΟΥ $K_I^{πειρ}$	71
3.6 D_t, D_ℓ ΚΑΙ Ο ΛΟΓΟΣ ΤΟΥΣ D_t/D_ℓ	76

3.7	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ	80
3.7	ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	82
3.8	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	83

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό από τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου σώματος ότι στο άκρο της ρωγμής συγκεντρώνονται τάσεις που θεωρητικά έχουν άπειρη τιμή. Τα σημεία αυτά λέγονται **ιδιόμορφα σημεία (singular points)**. Η τάξη της ιδιομορφίας κυμαίνεται από -0.5 (άκρο ρωγμής) έως 0 (κορυφή κυρτής γωνίας 180°). Σ' αυτά τα σημεία επικεντρώνεται το ενδιαφέρον του μηχανικού, διότι είναι γνωστό ότι η αστοχία στοιχείου της κατασκευής προέρχονται από την ύπαρξη τέτοιου είδους ιδιόμορφων σημείων. Ο υπολογισμός των τάσεων σε ιδιόμορφα σημεία γίνεται με θεωρητικές μεθόδους όπως οι υπολογιστικές μέθοδοι, πεπερασμένα στοιχεία, ολοκληρωτικές εξισώσεις και αναλυτικές συναρτήσεις. Πειραματικά ο υπολογισμός των τάσεων γίνεται με τις γνωστές **οπτικές μεθόδους**.

Ο υπολογισμός του εντατικού πεδίου μπορεί να γίνει είτε θεωρητικά είτε πειραματικά. Μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί πολλές και κομψές θεωρητικές μέθοδοι υπολογισμού των τάσεων όπως οι αναλυτικές και οι υπολογιστικές μέθοδοι. Οι θεωρητικές μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται στη μαθηματική ανάλυση, έχουν αρκετές παραδοχές και έτσι πολλές φορές τα αποτελέσματα απέχουν πολύ των πραγματικών καταστάσεων μιας κατασκευής. Αντιθέτως οι πειραματικές μέθοδοι εφαρμόζονται είτε απ' ευθείας στην κατασκευή είτε σε προσομοιώματα (μοντέλα) της κατασκευής από τα υλικά που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή. Οι πειραματικές μέθοδοι προσφέρουν στον ερευνητή μεγαλύτερη ευελιξία σε σύγκριση με τις θεωρητικές στον υπολογισμό των εντατικών καταστάσεων

που επικρατούν σε τμήματα μιας κατασκευής ή στον υπολογισμό της συμπεριφοράς ενός υλικού υπό ορισμένες εξωτερικές φορτίσεις. Οι πειραματικές μέθοδοι σκοπό έχουν να υπολογίσουν τις τάσεις σε κάθε ιδιόμορφο σημείο του σώματος υπολογίζοντας πειραματικά είτε τους συντελεστές εντάσεις των τάσεων K_I, K_{II}, K_{III} είτε τις μετατοπίσεις και εξ αυτών τις παραμορφώσεις και τάσεις.

Οι πειραματικές μέθοδοι με τις οποίες υπολογίζονται οι συντελεστές έντασης των τάσεων είναι:

- α) των **Καυστικών**
- β) της **Φωτοελαστικότητας**
- γ) των **Ισοπαχών**.

Από αυτές εμείς θα ασχοληθούμε με αυτή των **Καυστικών**.

Γενικότερα για την οπτική μέθοδο των Καυστικών έχουμε να πούμε πως βασίζεται στην κλασική καυστική η οποία είναι μια ιδιόμορφη καμπύλη που σχηματίζεται από τη συγκέντρωση των αποκλινόντων ανακλώμενων ακτινών που προέρχονται από την πρόσπτωση φωτεινής δέσμης πάνω σε ένα κοίλο ή κυρτό κάτοπτρο. Έτσι η μηχανική ιδιομορφία γύρω από το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάση των νομών της οπτικής σε οπτική ιδιομορφία δηλαδή σε μια φωτεινή καμπύλη στο χώρο, την καυστική. Το μέγεθος και η μορφή της καυστικής, η οποία προβάλλεται πάνω σε πέραςμα αναφοράς εξαρτάται από τη συγκέντρωση των τάσεων και τις οπτικές ιδιότητες του υλικού. Κατόπιν απλής μαθηματικής ανάλυσης υπολογίζεται ο συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων γύρω

από τα άκρα της ρωγμής. Με τη μέθοδο των καυστικών μελετάται μόνο η εγγύς του άκρου της ρωγμής περιοχή η οποία δε δύναται να μελετηθεί με άλλη πειραματική μέθοδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

1.ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ

1.ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Αξιοσημείωτος μεταβολή στην περιοχή της θεωρίας των ρωγμών έγινε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα από τον **Inglis** με την επίλυση του προβλήματος της κατανομής των τάσεων εντός απείρου ελαστικού σώματος μετ' ελλειπτικής οπής φορτιζόμενο με ομοιόμορφες τάσεις. Αργότερα ο **Muskhelishvili** έλυσε το γενικό πρόβλημα του απείρου ελαστικού σώματος μετ' οπών. Η εξέλιξη της θεωρίας των ρωγμών τελικά οφείλεται στις εργασίες του **Griffith** ο οποίος συνέδεσε τις ρωγμές με τις δυνάμεις που εξασκούνται στο σώμα και από τη μεταβολή της ενέργειας του σώματος υπολογίζει το κρίσιμο φορτίο διάδοσης της ρωγμής. Πάνω στις εργασίες του **Griffith** εργάστηκαν πολλοί ερευνητές όπως οι : **Wolf, Obreimov, Westergaard, Sneddon, Elliot** και **Williams**.

Σημαντική πρόοδος στην περιοχή της Μηχανικής των θραύσεων των ψαθυρών και όλκιμων υλικών επετεύχθη από τους **Irwin** και **Orowan**. Ο **Irwin** μελέτησε και εισήγαγε τους τρεις τύπους παραμορφώσεως των ρωγμών ήτοι:

α) τον εφελκυστικό τύπο (I) με συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_I ,

β) το συνεπίπεδο διατμητικό τύπο (II) με συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_{II} και

γ) τον εγκάρσιο διατμητικό τύπο (III) με συντελεστή εντάσεως των τάσεων K_{III} .

Θεωρητικές μελέτες επίλυσης προβλημάτων ρωγμών έγιναν το 1977 από το Liebowitz και τους συνεργάτες του. Η πειραματική μέθοδος των Καυστικών έλυσε πολλά προβλήματα ρωγμών και έδωσε ακριβέστερα αποτελέσματα από άλλες πειραματικές μεθόδους κυρίως για την παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή.

2.ΓΕΝΙΚΑ

Η Μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος ασχολείται με τη μελέτη της συμπεριφοράς των σωμάτων που υπόκεινται σε εξωτερικές φορτίσεις. Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και οι τάσεις σε κάθε σημείο του σώματος. Όπως έχει πειραματικά αποδειχθεί όταν τα εξωτερικά φορτία είναι μικρά τότε οι παραμορφώσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των εξωτερικών φορτίων. Η ιδιότητα αυτή των σωμάτων χαρακτηρίζεται **γραμμική ελαστικότητα**. Όταν τα εξωτερικά φορτία αυξηθούν τότε παύει η γραμμική εξάρτηση των παραμορφώσεων από τα εξωτερικά φορτία οπότε παρουσιάζονται μεγάλες παραμορφώσεις και ελαστοπλαστική και πλαστική συμπεριφορά των σωμάτων. Η ιδιότητα αυτή των σωμάτων στις μεγάλες παραμορφώσεις χαρακτηρίζεται ως **μη γραμμική ελαστικότητα και πλαστικότητα**. Στα πλαίσια της **θεωρίας της ελαστικότητας** θα αντιμετωπισθεί η **Μηχανική των Θραύσεων** των υλικών και κυρίως των **επιπέδων προβλημάτων ρωγμών**.

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στη κλασική θεωρία ελαστικότητας, για καταστάσεις που αντιστοιχούν μακριά

της θραύσης ή της ρηγματώσης των υλικών, πραγματοποιείται δια ανάγωγης του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή κατάσταση του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα. Τα εφαρμοσμένα φορτία προκαλούν μικρές παραμορφώσεις των συνόρων, έτσι ώστε τα μόρια του ευρίσκοντο πλησίον των συνόρων να παραμένουν και πάλι πλησίον μετά τη φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες να ανάγονται στα απαραμόρφωτα σύνορα του σώματος.

Μετά από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου εμφανίζονται ρωγμές οι οποίες αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος των μετατοπίσεων. Τα σύνορα του σώματος άλλαξαν και έτσι ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος διότι ανάλογα με το πρόβλημα απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες που οδηγούν στο καθορισμό των συνόρων.

3.ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ WESTERGAARD

Τα δισδιάστατα προβλήματα των ρωγμών μπορεί να επιλυθούν κατά τον Westergaard, εφόσον η τασική συνάρτηση Airy ορισθεί δια της σχέσης:

$$F = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (3.1)$$

όπου Z αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$, και:

$$Z = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (3.2)$$

Εκ των σχέσεων Cauchy-Riemann συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = \operatorname{Re} Z \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} \bar{Z}) = -\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \operatorname{Im} Z \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 (\operatorname{Re} \bar{Z}) = \nabla^2 (\operatorname{Im} \bar{Z}) = 0 \quad (3.5)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτουν:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} Z, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = y \operatorname{Re} Z \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = y \operatorname{Re} Z' \quad (3.8)$$

όποτε δια αντικατάστασης προκύπτουν οι τάσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (3.9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad (3.10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (3.11)$$

Επομένως, η μέθοδος Westergaard ανάγεται στην εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης Z , με εξαίρεση το υπό της ρωγμής οριζόμενο διάστημα, με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι:

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.12)$$

η οποία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι συνάρτηση Westergaard για τη ρωγμή:

$$-\alpha < x < \alpha, \quad y=0 \quad (3.13)$$

εντός απείρου σώματος υπο διαξονική φόρτιση σ στο άπειρο με μήκος ρωγμής $2a$.

Άλλες μορφές της τασικής συνάρτησης Airy είναι:

$$F = -y \operatorname{Re} \bar{Z} \quad (3.14)$$

που περιγράφει το δεύτερο τύπο παραμόρφωσης και ομοίως αποδεικνύεται ότι οι τάσεις παρέχονται από τις σχέσεις:

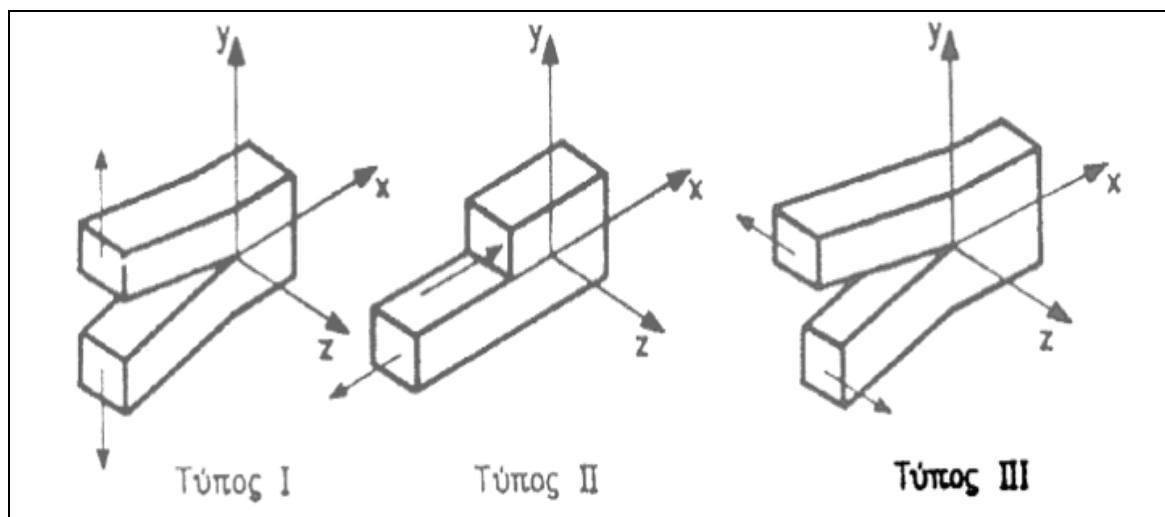
$$\sigma_{xx} = 2 \operatorname{Im} Z + y \operatorname{Re} Z' \quad (3.15)$$

$$\sigma_{yy} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (3.16)$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (3.17)$$

4. ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Ο G.R. Irwin, με την προϋπόθεση ότι οι ρωγμές εντός των στερεών δύναται να θεωρηθούν ως επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος της μετατόπισης, παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακίνησης των χειλέων της ρωγμής. Οι τρεις αυτοί τύποι παραμόρφωσης παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 1.1. Οι τρεις βασικοί τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής.

5. ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -I

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο -I δίνεται από τη σχέση (3.12). Μεταφέροντας τη συνάρτηση αυτή σε σύστημα αξόνων δια του άκρου της ρωγμής, αντί τοποθετημένου στο μέσο της ρωγμής και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό:

$$\zeta = z - a \quad (5.1)$$

προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{\sigma(\zeta + a)}{\sqrt{\zeta} \cdot \sqrt{\zeta + 2a}} \quad (5.2)$$

Η ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{\zeta + 2a}}$ αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων του ζ κατά Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta + 2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2a} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{\zeta}{2a} \right)^2 - \dots \right] \quad (5.3)$$

όποτε η σχέση (5.2) γίνεται:

$$Z_I = \frac{\sigma(\zeta + a)}{\sqrt{\zeta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2a} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{\zeta}{2a} \right)^2 - \dots \right] \quad (5.4)$$

Για προσεγγιστική λύση παραλείπονται οι δυνάμεις του $\left(\frac{\zeta}{a} \right)$, εφόσον το ζ είναι πολύ μικρό σε σχέση προς το a , οπότε προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad (5.5)$$

Θέτοντας:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.6)$$

στη σχέση (5.5) προκύπτει:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad (5.7)$$

Η σταθερά K_I είναι χαρακτηριστική του τύπου $-I$ και ονομάζεται εφελκυστικός συντελεστής έντασης των τάσεων (stress intensity factor). Επίσης ο K_I δύναται να προκύψει από τη σχέση:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi} \sqrt{z-a} \sigma_{yy} \quad (5.8)$$

Θέτοντας :

$$\zeta = re^{i\theta} \quad (5.9)$$

Και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3.9)-(3.11), προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.10)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (5.12)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.13)$$

Η προσεγγιστική αυτή λύση ισχύει για $0 < r/a \ll 1$.

Από το νόμο του Hooke προκύπτουν οι μετατοπίσεις u και v :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (5.15)$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις σ_{xx} και σ_{yy} από τις σχέσεις (5.10) –(5.12) στις σχέσεις (5.14)-(5.15) αντίστοιχα προκύπτουν οι μετατοπίσεις κατόπιν ολοκλήρωσης.

Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση ισχύει:

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (5.16)$$

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (5.17)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (5.18)$$

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση ισχύει

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.19)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.20)$$

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I προκύπτει από τη σχέση:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi} \sqrt{z-a} \sigma_{yy} = \lim \sqrt{2\pi} \sqrt{\zeta} \lim \sigma_{yy} = \lim \sqrt{2\pi} \sqrt{re^{i\theta}} \sigma_{yy} \Big|_{\theta=0} =$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} \quad (5.21)$$

6. ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -II

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν η μια σχετικά προς την άλλη προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ίδιου επιπέδου. Η φασική συνάρτηση Wastergaard για τον τύπο -II δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{με} \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (6.1)$$

όπου η σταθερά K_{II} είναι η χαρακτηριστική του τύπου-II και ονομάζεται συνεπιπεδος συντελεστής έντασης των τάσεων. Από τις σχέσεις (3.15)-(3.17) προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες:

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (6.2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (6.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (6.4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{με} \quad 0 < \frac{r}{a} \ll 1 \quad (6.5)$$

Οι μετατοπίσεις υπολογίζονται όπως και στο τύπο-I από το νόμο του

Hooke. Για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι:

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.6)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.7)$$

και για την επίπεδη εντατική κατάσταση είναι:

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.8)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\nu-1}{\nu+1} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.9)$$

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_{II} προκύπτει από τη σχέση:

$$K_{II} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \quad (6.10)$$

Στο τρίτο τύπο παραμόρφωσης της ρωγμής δεν θα αναφερθούμε αφού τέτοιος τύπος ρωγμής δεν θα συναντηθεί στο πείραμα μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

2. ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

1. ΓΕΝΙΚΑ

Στα προβλήματα ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και πλησίον της μικρής αυτής περιοχής οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες, το γεγονός αυτό καθιστά δυσχερή την επίλυση του προβλήματος δια των κλασικών μεθόδων πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων.

Κατά την δεκαετία του 70 αναπτύχθηκε πειραματική μέθοδος από τους Manogg και Π.Θεοχαρη, η οποία κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής παρά το άκρο της ρωγμής ιδιόμορφης περιοχής. Η πειραματική αυτή μέθοδος καλείται Οπτική Μέθοδος των Καυστικών και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής.

Με την πειραματική αυτή μέθοδο η επικρατούσα ιδιομορφία (**singularity**) των τάσεων παρά το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία η οποία μετρούμενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία για τη

μελέτη της παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται από τη συγκέντρωση επί της ιδιόμορφης στο χώρο καμπύλης, η οποία καλείται Κουστική, των ακτινών Φώτος που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη παρά το άκρο της ρωγμής περιοχής. Η Κουστική αυτή λαμβάνεται πάνω σε πέτασμα και αφού βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή επιτρέπει τη μελέτη αυτή.

Η οπτική μέθοδος των κουστικών δύναται να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά , διαφανή και μη διαφανή αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο μοναδική για τη μελέτη των ρωγμών.

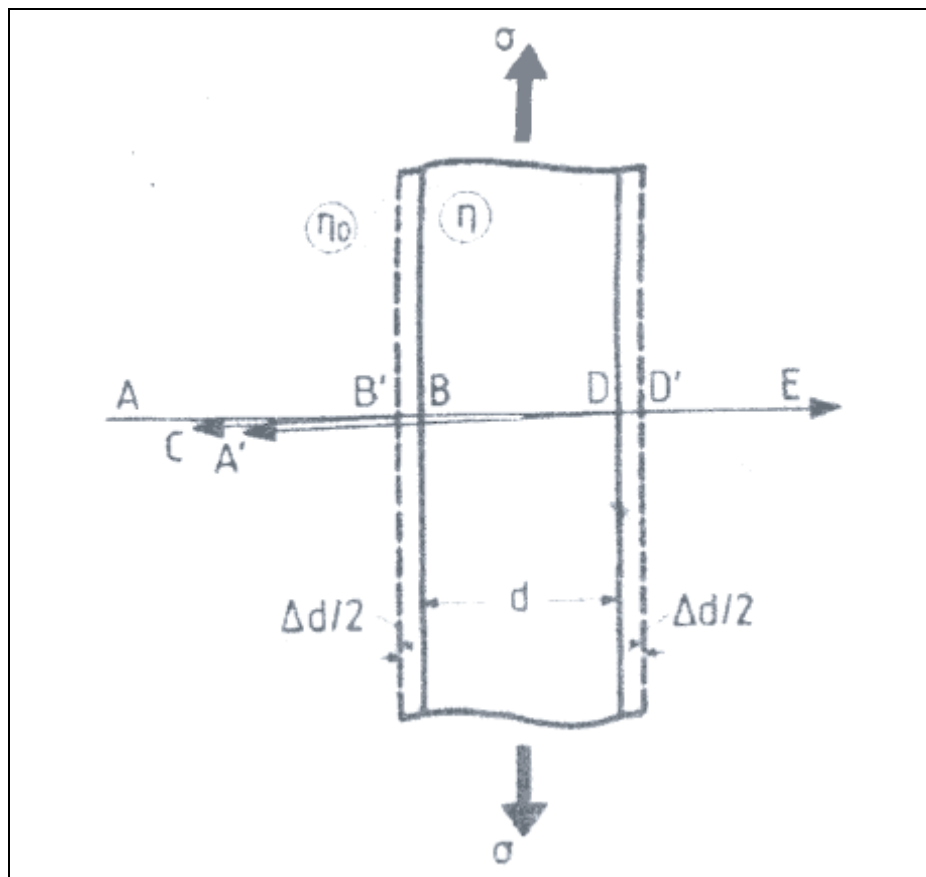
2. ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΠΤΙΚΟΥ **ΔΡΟΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΩΝ** **ΑΚΤΙΝΩΝ**

Θεωρούμε φωτεινή ακτίνα ABDE Σχ 2.1 πολωμένη κατά τη διεύθυνση είτε της κύριας τάσης σ_1 είτε της κύριας τάσης σ_2 και προσπίπτουσα καθέτως επί της πλευρικής επιφάνειας της πλάκας ευρισκόμενης υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Για την περίπτωση της ανάκλασης της φωτεινής ακτίνας από την πίσω ενιφάνεια της πλάκας, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των σημείων αναφοράς A και A' της φωτεινής ακτίνας ABDA' ($AB=A'B$) όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη είναι:

$$s_A = 2(AB)\eta_o + 2d\eta \quad (2.1)$$

όπου d είναι το πάχος της πλάκας, η_o είναι ο δείκτης διάθλασης του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο βρίσκεται η πλάκα μέσου και η είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού της αφόρτιστης πλάκας. Όταν η πλάκα φορτιστεί, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των σημείων, A και A', είναι:

$$S_{L1,2} = 2 \left(AB - \frac{\Delta d}{2} \right) \eta_o + 2(d + \Delta d) \eta_{1,2} \quad (2.2)$$



Σχημα 2.1:Κάθετη πρόσπτωση ακτίνας επί της πλάκας.

όπου Δd είναι η μεταβολή του πάχους της πλάκας που οφείλεται στη φόρτιση και $\eta_{1,2}$ είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού, της φορτισμένης πλάκας κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$, αντιστοίχως.

Θέτοντας:

$$\eta_{1,2} = \eta + \Delta\eta_{1,2} \quad (2.3)$$

όπου $\Delta\eta_{1,2}$ είναι η μεταβολή του δείκτη διάθλασης, η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας ABDA', που οφείλεται στη φόρτιση, δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta S_{r1,2} = S_{L1,2} - S_A = 2 \left[(\eta_{1,2} - \eta)d + \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \Delta d \right] \quad (2.4)$$

Ομοίως, για την οπτική ακτίνα ABDE τη διερχόμενη δια της πλάκας η μεταβολή του οπτικού δρόμου που οφείλεται στη φόρτιση είναι:

$$\Delta S_t = (\eta_{1,2} - \eta)d + (\eta - \eta_o)\Delta d \quad (2.5)$$

Για τη φωτεινή ακτίνα ABC την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου είναι:

$$\Delta S_f = -\eta_o \Delta d \quad (2.6)$$

Ο αριθμός των κροσσών $N_{1,2}$ του λαμβανομένου συμβολογραμματος από τη συμβολή των ακτινών DA' και BC ανακλώμενων από την πίσω και την εμπρός επιφάνεια της πλάκας αντιστοίχως, σχετίζεται με τη διάφορα των οπτικών δρόμων $\delta_{1,2}$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_{1,2} = (\Delta S_{r1,2} - \Delta S_f) = 2[(\eta_{1,2} - \eta)d + \eta\Delta d] \quad (2.7)$$

δια μέσου της σχέσης:

$$N_{1,2} = \delta_{1,2} / \lambda \quad (2.8)$$

όπου λ είναι το μήκος του χρησιμοποιούμενου μονοχρωματικού φωτός.

Οι μεταβολές του δείκτη διάθλασης η κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 , στο επίπεδο τασικό πρόβλημα, δίνονται από το φωτοτασεοπτικό νόμο των Neumann-Maxwell:

$$\Delta\eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1\varepsilon_{1,2} + b_2(\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_3) \quad (2.9)$$

όπου b_1, b_2 σταθερές και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες παραμορφώσεις. Από την παραπάνω σχέση καθώς και τις (2.7) και (2.8) και λαμβάνοντας υπόψη το νόμο του Hooke προκύπτει για τον αριθμό των κροσσών:

$$N_{1,2} = 2d(\alpha^* \sigma_{1,2} + b^* \sigma_{2,1}) \quad (2.10)$$

όπου οι σταθερές α^*, b^* δίνονται από τις σχέσεις:

$$\alpha^* = \frac{1}{E\lambda}(b_1 - 2\nu b_2 - \nu\eta) \quad (2.11)$$

$$b^* = \frac{1}{E\lambda}(b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu\eta) \quad (2.12)$$

Ομοίως η μεταβολή των οπτικών δρόμων των φωτεινών ακτινών ABDA' και ABDE που οφείλονται στη φόρτιση δίνονται από τις συνθήκες Favre(για τα οπτικώς ισότροπα υλικά):

$$b_1 = b_2 = b \quad (2.13)$$

$$\Delta s_{r1} = \Delta s_{r2} = 2c_r(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (2.14)$$

$$\Delta s_{t1} = \Delta s_{t2} = c_t(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (2.15)$$

$$a_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[(1 - 2\nu)b - \nu \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (2.16)$$

$$a_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu)b - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (2.17)$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$c_r = c_t - \frac{\nu\eta_o}{2E} \quad (2.18)$$

όπου οι τασεοπτικές σταθερές c_r, c_t υπολογίζονται πειραματικά με τη

Συμβολομετρική μέθοδο και θεωρητικά από την παρακάτω σχέση:

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2} \quad (2.1)$$

3. ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

Οι φωτεινές ακτίνες $r_{1,2}$ οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας σχηματίζουν κυματικά μέτωπα:

$$S(x, y, z) = \text{σταθ} \quad (3.1)$$

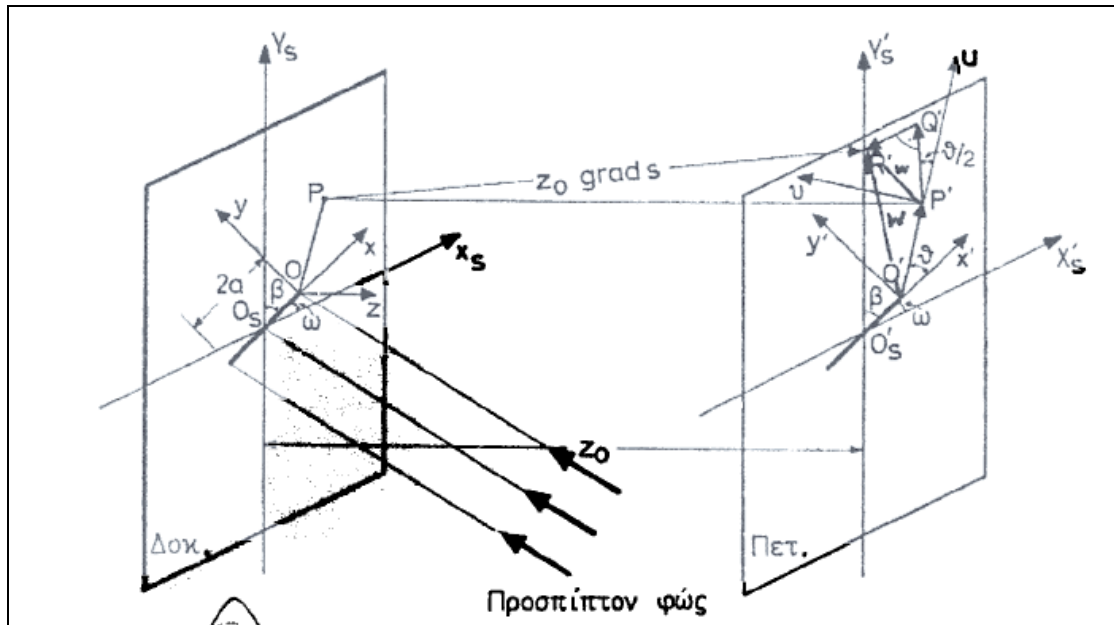
Εάν $s(x, y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντίστοιχης φωτεινής ακτίνας μεταξύ επιπέδων παράλληλων προς το μέσο επίπεδο της φορτισμένης πλάκας και κειμένων επί των παράπλευρων επιφανειών της πλάκας τότε ισχύει η σχέση:

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) \quad (3.2)$$

και από αυτή προκύπτει

$$\text{grad}S(x, y, z) = k - \frac{\partial s}{\partial x} i - \frac{\partial s}{\partial y} j \quad (3.3)$$

όπου i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογωνιου συστήματος συντεταγμένων του οποίου η αρχή O συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας Ox συμπίπτει με τον άξονα της ρωγμής, ο άξονας Oz είναι κάθετος είναι στη πλάκα και ο οπτικός δρόμος από την πλάκα σε τυχαίο σημείο P είναι $s(x, y)$. (Σχ. 2.2)



Σχήμα 2.2 : Γεωμετρία της ρηγματωμενης πλάκας και σχετική θέση της πλάκας και του πετάματος αναφοράς.

Η απόκλιση των ανακλώμενων φωτεινών ακτινών σε απόσταση z_0 από το μέσο του επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα w επί του επιπέδου $z = z_0$ και δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία της Εικονικής από τη σχέση :

$$w = -z_0 \text{grad}S(x, y, z) \tag{3.4}$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2) και (3.3) προκύπτει:

$$w = -z_o \text{grad}s(x, y) = -z_o \left(\frac{\partial s}{\partial x} i + \frac{\partial s}{\partial y} j \right) \quad (3.5)$$

Δεδομένου ότι τα κυματικά μέτωπα των προσπιπτουσών φωτεινών ακτινών επί του μέσου επιπέδου της πλάκας είναι παράλληλα προς το επίπεδο αυτό, ισχύει η σχέση:

$$s(x, y) = s_o + \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (3.6)$$

όπου s_o παριστάνει σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο από την πλάκα και η οποία απαλείφεται κατά τον υπολογισμό των κλίσεων και $\Delta s_{r,t}$ παριστάνει τη μεταβολή του οπτικού δρόμου δια της πλάκας που δίνεται από τις σχέσεις (2.14)–(2.15). Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.3) στη σχέση (3.5) προκύπτει:

$$W = -z_o \text{grad}\Delta s_{r,t}(x, y) \quad (3.7)$$

Οι αιχμές του διανύσματος w καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z = z_o$ περιβάλλουσα (**καυστική**), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες. Αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση (3.7) στις (2.14)-

(2.15) προκύπτει το διάνυσμα απόκλισης για τη περίπτωση των οπτικώς ισότροπων υλικών με τα οποία θα ασχοληθούμε στη παρούσα εργασία.

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας έχουμε:

$$W = -2z_o dc_r grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.8)$$

Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη από τη πλάκα:

$$W = -z_o dc_t grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.9)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν γενικά να γράφουν:

$$W = -\varepsilon_o dc_{r,t} grad(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.10)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση φ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με το νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\alpha \quad (3.11)$$

και η γωνία α δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \text{grad} \frac{\Delta d}{2} = -\text{grad} \left[\frac{\nu d}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (3.12)$$

οπότε η γωνία ϕ είναι:

$$\phi = -\frac{\nu d}{E} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.13)$$

όπου:

$$c_f = \frac{\nu}{E} \quad (3.14)$$

είναι η τασεοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης w , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέταμα σε απόσταση z_o από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση:

$$w = -z_o dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.15)$$

Οι σχέσεις (3.10) και (3.15) γενικά μπορούν να γράφουν:

$$w = -\varepsilon_o dc_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.16)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα στη πλάκα φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα (+), η συγκλίνουσα (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_m = \frac{z_o \pm z_i}{z_i} \quad (3.17)$$

όπου z_o είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα (δοκίμιο). Θέτοντας:

$$C^*_{r,t,f} = -\frac{\varepsilon z_o dc_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (3.18)$$

η σχέση (3.16) για τα οπτικώς ισότροπα υλικά, δύναται να γράφει:

$$w = C^*_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.19)$$

4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ

Κατά την επίλυση του επιπέδου εντατικού προβλήματος με τη μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2 = 4 \operatorname{Re} \phi(z) \quad (4.1)$$

όπου $\phi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Έστω ότι η $\phi(z)$ είναι της μορφής:

$$\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (4.2)$$

όπου $u(x, y)$ και $v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x, y που ικανοποιούν τις σχέσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.3)$$

Από τις σχέσεις (4.3) συμπεραίνεται ότι οι συναρτήσεις u, v ικανοποιούν την αρμονική συνάρτηση Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (4.4)$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα οπτικώς ισότροπα υλικά δίνεται από τη σχέση:

$$w = C^*_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C^*_{r,t,f} \text{grad Re}\phi(z) = 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \quad (4.5)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$w = 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.6)$$

Το διάνυσμα w εκφράζει η σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ τυχόντος σημείου P , στη γειτονία του άκρου της ρωγμής, της πλάκας και της εικόνας του πάνω στο πέρασμα αναφοράς τοποθετημένου σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Εάν η απόκλιση αυτή αναφερθεί στην αρχή O' του συστήματος συντεταγμένων $O'x'\psi'z'$ επί του πετάματος αναφοράς (Σχ.2.3), τότε το διάνυσμα απόκλισης εκφράζεται ως $W = w + z$.

Στο μιγαδικό επίπεδο γράφεται:

$$W = w + z = x + iy + 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.7)$$

Το διάνυσμα w στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στο πέρασμα αναφοράς, γράφεται:

$$W = x' + iy' \quad (4.8)$$

οπότε η σχέση (4.6) γράφεται:

$$x' + y' = \left(x + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left(y + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.9)$$

και από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$x' = x + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$y' = y + 4C^*_{r,t,f} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.11)$$

Η ποσότητα W παριστάνει την προβολή επί του πετάσματος των αποκλίσεων των ακτινών. Η απόκλιση των ακτινών στην πλαστικοποιημένη περιοχή γύρω από το άκρο της ρωγμής εξαρτάται από τη μεταβολή του πάχους και του δείκτη διάθλασης του υλικού. Οι αποκλίνουσες ακτίνες συγκεντρώνονται πάνω σε μια οριακή καμπύλη η οποία φωτίζεται έντονα. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **ΚΑΥΣΤΙΚΗ**. Η οριακή αυτή περιβάλλουσα παριστάνει ιδιόμορφη καμπύλη για το μέγεθος W . Οι συνθήκες για την ύπαρξη ιδιομορφίας πληρούνται με το μηδενισμό της Ιακωβιανής διακρινουσας:

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = 0 \quad (4.12)$$

η οποία γράφεται λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.10) και (4.11) και αναπτύσσοντας την:

$$1 + 4C^*_{r,t,f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C^{*2}_{r,t,f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας στη παραπάνω σχέση την εξίσωση Laplace προκύπτει η σχέση:

$$1 + 16C^{*2}_{r,t,f} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.14)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ δυο φορές ως προς x , προκύπτει:

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.15)$$

Όμως $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ άρα η παραπάνω σχέση (4.15) γίνεται:

$$\phi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (4.16)$$

Το μέτρο της (4.16) είναι :

$$|\phi''(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (4.17)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψη την εξίσωση $\nabla^2 u = 0$ προκύπτει:

$$|\phi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.18) στη σχέση (4.14) προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f} * \phi''(z)|^2 = 1 \quad (4.19)$$

και από αυτή προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f} * \phi''(z)| = 1 \quad (4.20)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής.

Αφού ισχύει:

$$\overline{\phi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.21)$$

η σχέση (4.7) γίνεται:

$$W = z + 4C^*_{r,t,f} \overline{\phi'(z)} \quad (4.22)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση της καυστικής.

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard Z , η οποία συνδέεται με την $\phi(z)$ με τη σχέση $2\phi(z) = Z$ η σχέση (4.20) εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται:

$$|2C^*_{r,t,f} Z''(z)| = 1 \quad (4.23)$$

η δε εξίσωση της καυστικής (4.22), άμα λάβουμε υπόψη και το συντελεστή μεγενθυσης λ_m , γίνεται:

$$W = \lambda_m \left[z + 2C^*_{r,t,f} \overline{Z'(z)} \right] \quad (4.24)$$

5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ

Η συνάρτηση Westergaard για ρωγή μήκους $2a$ εντός απείρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}, K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.1)$$

που σ είναι η ομοιόμορφη τάση κάθετη προς τον άξονα της ρωγμής

και ζ είναι η μιγαδική μεταβλητή η οποία δίνεται από τη σχέση $\zeta = re^{i\theta}$. Παραγωγίζοντας τη σχέση (5.1) προκύπτει:

$$Z_1'(\zeta) = \frac{dZ_1}{d\zeta} = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \zeta^{-3/2} \quad (5.2)$$

$$\overline{Z_1'(\zeta)} = \overline{Z_1'(\bar{\zeta})} = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \bar{\zeta}^{-3/2} \quad (5.3)$$

$$Z_1''(\zeta) = \frac{d^2 Z_1}{d\zeta^2} = \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \quad (5.4)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4) στη σχέση (4.23) της αρχικής καμπύλης προκύπτει:

$$\left| 2C^*_{r,t,f} \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \right| = 1 \quad (5.5)$$

από την οποία προκύπτει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης:

$$|\zeta| = r_o = \left(\frac{3}{2} C^*_{r,t,f} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5} \quad (5.6)$$

και θέτοντας:

$$|C_{r,t,f}| = \frac{|C_{r,t,f}^* K_I|}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\varepsilon z_o d c_{r,t,f} K_I}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} \quad (5.7)$$

η σχέση που εκφράζει την ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής γράφεται:

$$|\zeta| = r_o = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f} \right)^{2/5} \quad (5.8)$$

δηλαδή η αρχική καμπύλη είναι κύκλος ακτίνας r_o , η οποία ορίζεται από την παραπάνω σχέση.

Για την εξίσωση της καυστικής, από τη σχέση (4.24) προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = \zeta + C_{r,t,f} \bar{\zeta}^{-3/2} \quad (5.9)$$

και χρησιμοποιώντας την πολική μορφή της ζ από τη σχέση:

$$\zeta = r e^{iu}, \bar{\zeta} = r e^{-iu} \quad (5.10)$$

η σχέση (5.9) γράφεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r e^{i\theta} + C^*_{r,t,f} r^{-3/2} e^{3i\theta/2} \quad (5.11)$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.8), η σχέση (5.11) γίνεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{3i\theta/2} \right) \quad (5.12)$$

Ισχύει όμως ότι:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, e^{3i\theta/2} = \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \quad (5.13)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (5.12) προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + i r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.14)$$

και θέτοντας το $W = x'_{r,t,f} + i y'_{r,t,f}$ συγκρίνοντας με τη τελευταία σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών:

$$x'_{r,t,f} = \lambda_m r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.15)$$

$$y'_{r,t,f} = \lambda_m r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.16)$$

Οι παραπάνω δυο σχέσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της λαμβανομένης παρά τα άκρα της ρωγμής καυστικής, η οποία είναι μια συμμετρική καμπύλη με άξονα συμμετρίας τον άξονα της ρωγμής. Από τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής συμπεραίνεται ότι αυτή είναι καμπύλη κλειστή, περατωμένη, και περιοδική με περίοδο 4π .

Η καυστική είναι ο γεωμετρικός τύπος των σημείων K με συντεταγμένες $((x', y'))$. Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής φαίνεται στο Σχ.2.3(α). Οι συντεταγμένες του σημείου K της καυστικής είναι:

$$x' = (OA) + (AB) = r_o \cos \theta + \frac{2}{3} r_o \cos \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.17)$$

$$y' = (B\Gamma) + (\Gamma K) = r_o \sin \theta + \frac{2}{3} r_o \sin \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.18)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ίδιες με τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής. Εκτός της καυστικής αυτής (εξωτερική καυστική) σχηματίζεται καυστική εσωτερικά της αρχικής καμπύλης (εσωτερική καυστική) όπως φαίνεται στο Σχ 2.3(α). Η γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής αυτής προκύπτει από τις συντεταγμένες των σημείων K :

$$x' = (O\Delta) = (OA) - (\Delta A) = r_o \cos \theta - \frac{2}{3} r_o \cos \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.19)$$

$$y' = (\Delta K) = (A\Gamma) - (A'\Gamma') = r_o \sin \theta - \frac{2}{3} r_o \sin \frac{3\theta}{2} = r_o \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.20)$$

Επομένως προκύπτει ότι για τη γεωμετρική σχεδίαση της καυστικής, αρκεί από το άκρο ο' της ρωγμής, Σχ.2.3(β), να αχθεί ως προς τον άξονα συμμετρίας της καυστικής ακτίνας Ο'Ρ μήκους r_o που καθορίζονται από τη σχέση (5.8), υπό γωνία θ και ακολούθως από το σημείο Ρ διάνυσμα (το διάνυσμα απόκλισης) ΡΚ (για την εξωτερική καυστική) η ΡΚ (για την εσωτερική καυστική) μήκους $\frac{2r_o}{3}$ υπό γωνία $\frac{\theta}{2}$ ως προς Ο'Ρ'.

Η ακτίνα ρ της καυστικής δίνεται από τις σχέσεις:

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} = r_o \sqrt{\frac{13}{9} + \frac{4}{3} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (5.21)$$

Τα ακρότατα της ακτίνας αυτής υπολογίζονται από τη συνθήκη: $\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$, η οποία Ισχύει για τιμές της γωνίες θ :

$$\theta_l^{\max} = 0, 2\pi, \dots \quad (5.22)$$

Από τις τιμές αυτές προκύπτει ότι η καυστική παρουσιάζει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στον άξονα συμμετρίας της. Οι τιμές είναι (Σχ.2.3(β)):

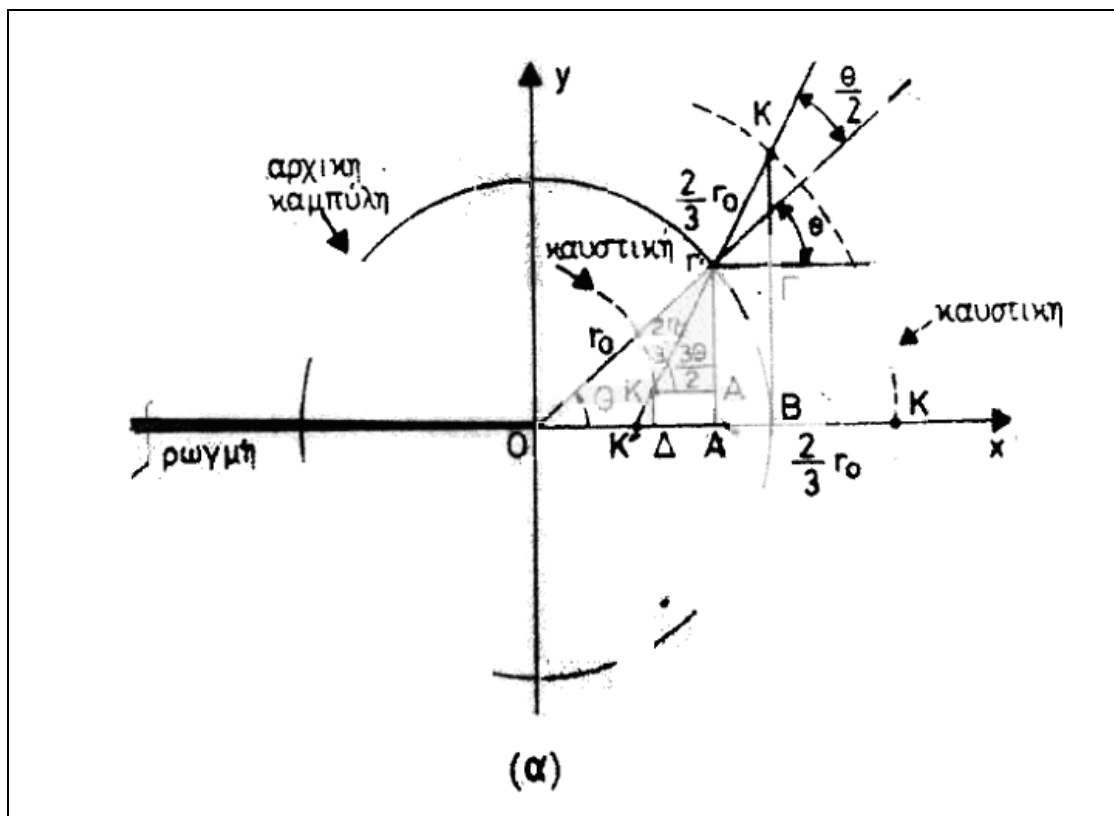
$$\text{Για } \theta_{l(1)}^{\max} = 0 \rightarrow \rho_{\max} = \frac{5}{3} r_o \lambda_m \quad (5.23)$$

Για

$$\theta_{l(2)}^{\max} = 0 \rightarrow \rho_{\max} = \frac{1}{3} r_o \lambda_m \quad (5.24)$$

Ο άξονας συμμετρίας $O'x'$ τέμνει τη καυστική σε δυο σημεία που απέχουν απόσταση:

$$D_l^{\max} = 3r_o \lambda_m \quad (5.25)$$

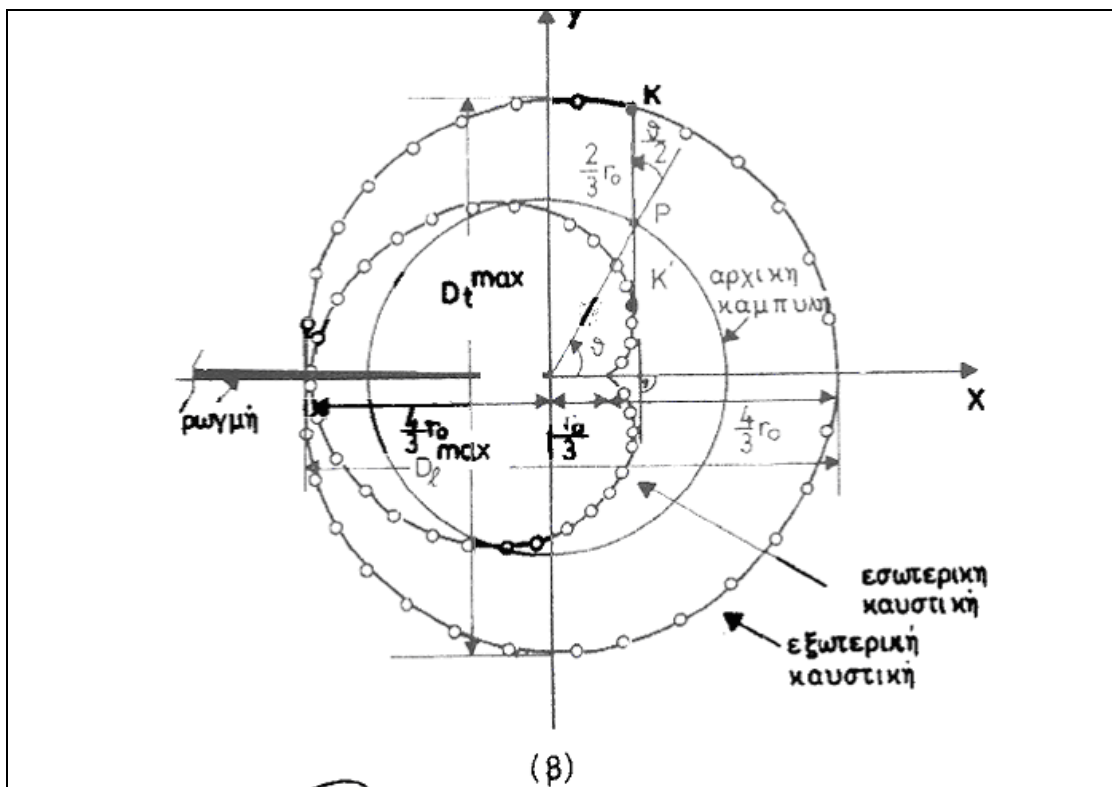


Σχήμα 2.3: (α) Η γεωμετρική σχεδίαση των καυστικών

Η οποία παριστάνει τη μέγιστη διάμετρο της καυστικής κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της, $O'x'$.

Ο υπολογισμός της μέγιστης εγκάρσιας διαμέτρου, D_t^{\max} , της καυστικής προκύπτει από τη συνθήκη: $\frac{\partial y'}{\partial \theta} = 0$, η οποία Ισχύει για τις γωνίες θ :

$$\theta_t^{\max} = 72^\circ \tag{5.26}$$



Σχήμα 2.3 (β): Τα γεωμετρικά στοιχεία των καυστικών

Και από τη τιμή αυτή της γωνίας προκύπτει:

$$D_t^{\max} = 2y' = 3.1702r_o\lambda_m \quad (5.27)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις αποτελούν χαρακτηριστικές αναλλοίωτες της καυστικής.

Θέτοντας:

$$\delta_l^{\max} = 3.00, \delta_t^{\max} = 3.1702 \quad (5.28)$$

οι σχέσεις (5.25) και (5.27) μπορούν να γράφουν:

$$D_l^{\max} = \lambda_m r_o \delta_l^{\max} \quad (5.29)$$

$$D_t^{\max} = \lambda_m r_o \delta_t^{\max} \quad (5.30)$$

όπου $\delta_{l,t}^{\max}$ καλούνται συντελεστές διόρθωσης (correction factors) των διαμέτρων $D_{l,t}^{\max}$ της καυστικής.

Από τις σχέσεις (5.7), (5.8), (5.29), (5.30) υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\varepsilon z_o d \lambda_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{\max}}{\delta_{l,t}^{\max}} \right)^{5/2} \quad (5.31)$$

Από τη σχέση (5.31) υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I , για τον τύπο-I (εφελκυστικό τύπο) της παραμόρφωσης της ρωγμής, από τις διαμέτρους της καυστικής που σχηματίζεται παρά τα άκρα της ρωγμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΠΕΙΡΑΜΑ

3. ΠΕΙΡΑΜΑ

1. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

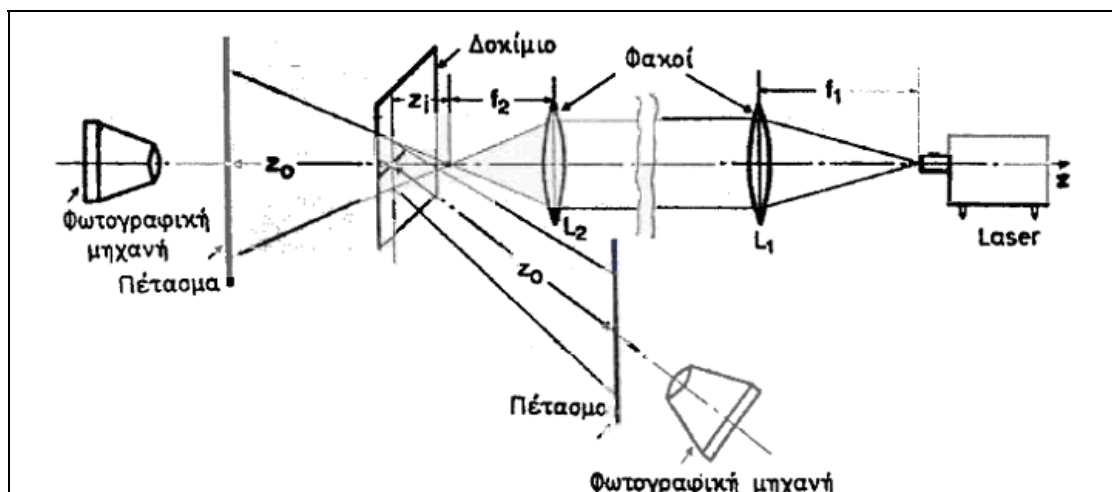
Η πειραματική διάταξη για το σχηματισμό των καυστικών είναι απλή όπως φαίνεται στο Σχ.3.1. Για την πειραματική αυτή διάταξη απαιτούνται:

- Πηγή Φωτός (Laser He-Ne)
- Ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του Laser
- Δυο συγκλίνοντες οπτικοί φακοί εστίασης $f=1\text{m}$ για να δημιουργηθεί συγκλίνουσα η αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη.
- Ένα πέτασμα αναφοράς (θαμπόγυαλο) πάνω στο οποίο προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές.
- Μια High Speed Camera για τη βιντεοσκόπηση των καυστικών.

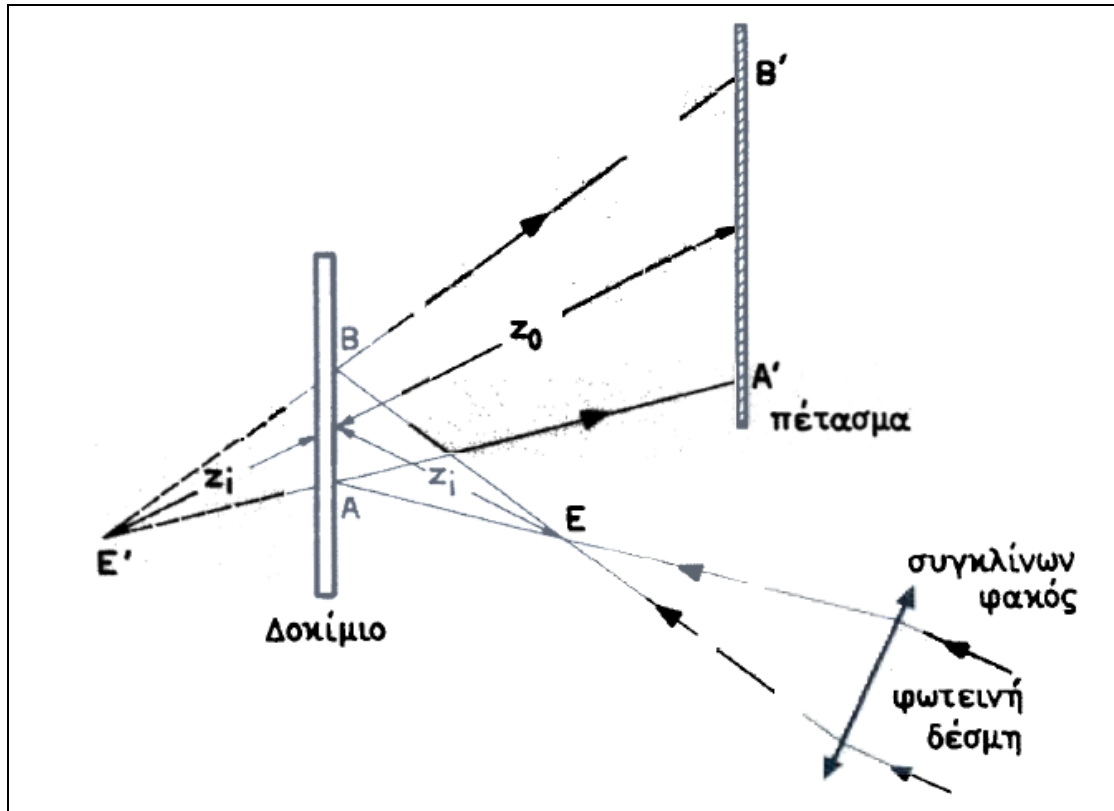
Το πέτασμα αναφοράς τοποθετείται πίσω από το δοκίμιο στο οποίο λαμβάνεται η καυστική διέλευσης. Η εστία της φωτεινής δέσμης τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο σε απόσταση z_i .

Η οπτική διάταξη για αποκλίνουσα δέσμη η οποία τοποθετείται εμπρός από το δοκίμιο για διαφανή υλικά, έχει συντελεστή μεγέθυνσης λ_m . Ο συντελεστής μεγέθυνσης υπολογίζεται σύμφωνα με τη γεωμετρική οπτική. Για αποκλίνουσα δέσμη, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Σχ 3.2, ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι:

$$\lambda_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_o + z_i}{z_i}$$



Σχήμα 3.1 : Σχηματική παράσταση της οπτικής διάταξης των καυστικών



Σχήμα 3.2 : Γεωμετρία αποκλίνουσα φωτεινής δέσμης.

2. ΜΑΡΤΥΡΑΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Με τη βοήθεια του “μάρτυρα” μπορούμε να μετατρέψουμε τα pixels, με τα οποία μετράει το λογισμικό της High Speed Camera (**Motionscope PCI V.2.30, Redlake MASD,INC**) τις διαμέτρους, σε cm.

Η διαδικασία έχει ως εξής :

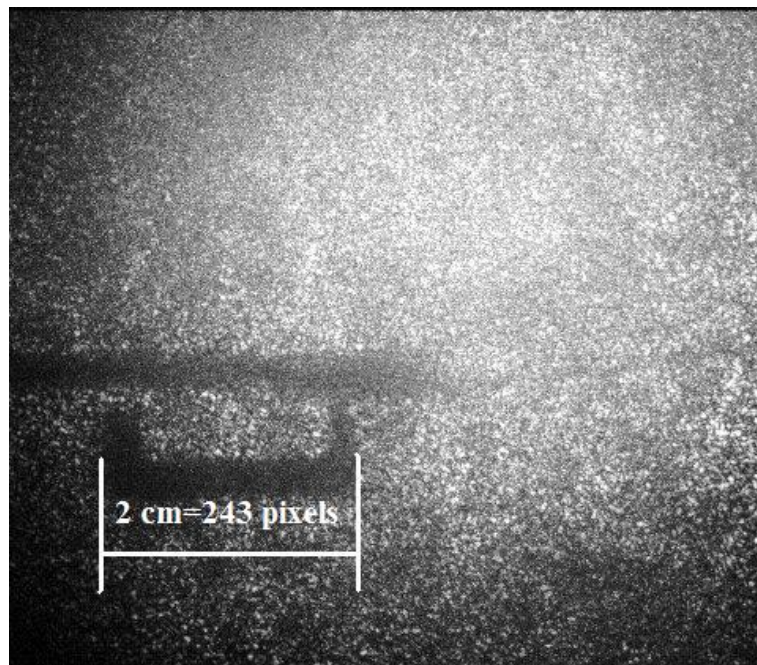
Στην αρχή του πειράματος έχουμε σημειώσει ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο πέτασμα το οποίο εμείς έχουμε επιλέξει να είναι 2 cm, το λεγόμενο “μάρτυρα”. Με τη βοήθεια του λογισμικού της High Speed Camera μπορούμε να μετρήσουμε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα αλλά σε pixels. Είναι πολύ βασικό να τονίσουμε ότι οι μετρήσεις πρέπει να γίνουν στην ίδια οθόνη. Είναι ευνόητο ότι οθόνες διαφορετικού μεγέθους και διαφορετικής ανάλυσης μας δίνουν διαφορετικό αριθμό pixels.

Επομένως έχοντας το “μάρτυρα” (και γνωρίζοντας το μήκος του σε cm) κάθε φορά που μετράμε τη διάμετρο της καυστικής σε pixels μπορούμε να την ανάγουμε και αυτή σε cm.

Παρακάτω βλέπουμε μια φωτογραφία του “μάρτυρα”. Πάνω από τη φωτογραφία υπάρχουν τα δεδομένα του συγκεκριμένου frame όπως αυτά μετρήθηκαν με το λογισμικό της High Speed Camera.

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ "ΜΑΡΤΥΡΑ"

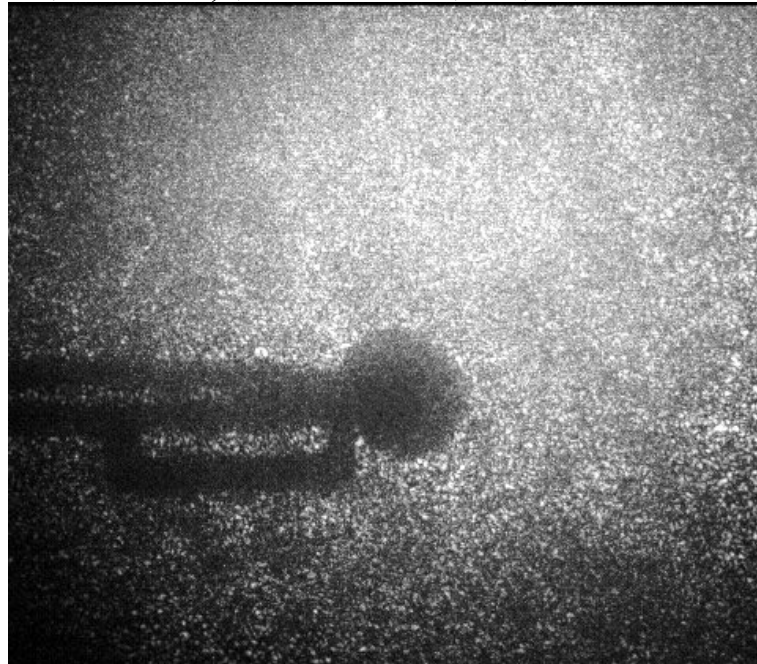
Άκρα ευθυγράμμου τμήματος	# Frame	Μήκος σε pixels
(87, 426)	Frame # 332	0
(330, 426)	Frame # 332	243



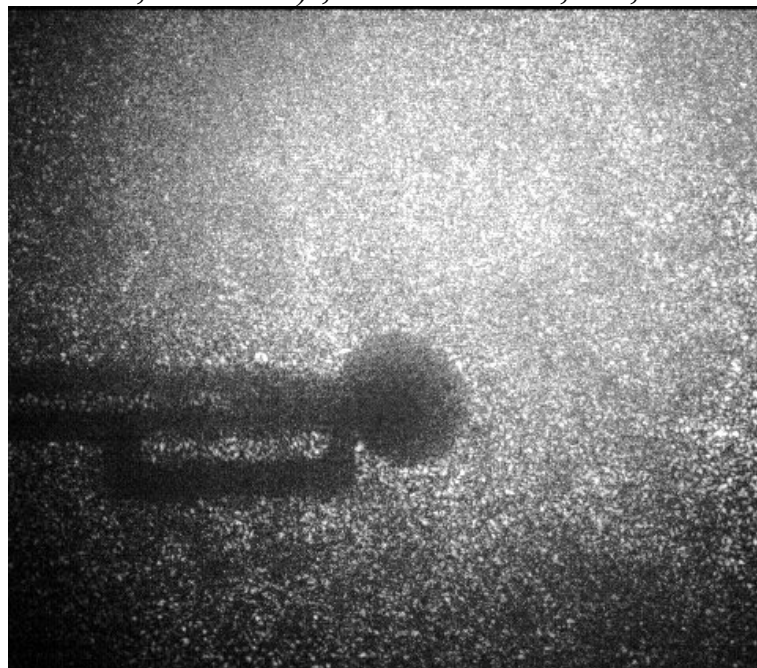
3. FRAMES ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ

Ακραία σημεία διαμέτρου καυστικής (Pixels)	Αριθμός frame	Χρόνος (sec)	$D_t^{πειρ}$	Ταχύτητα (pxl/sec)
--	------------------	-----------------	--------------	-----------------------

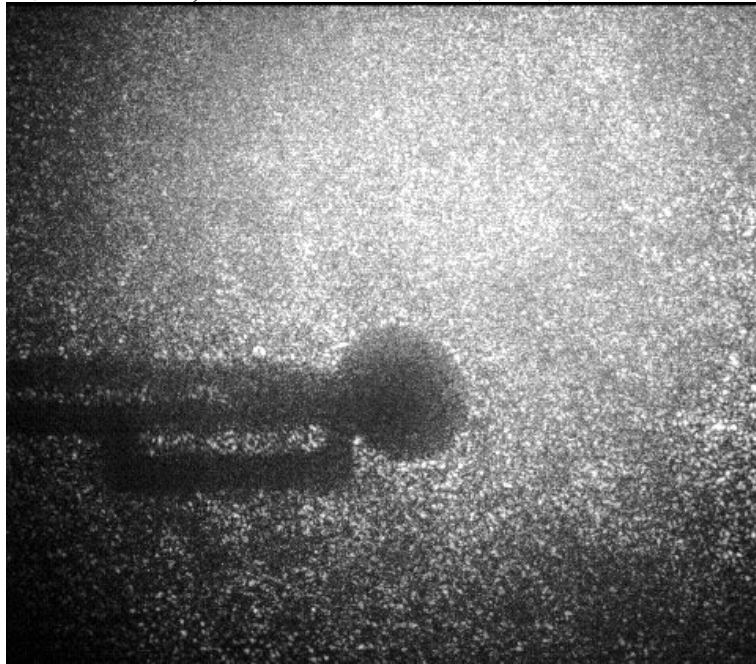
(374.000 , 308.000) , **Frame # 0**, 0 s, 0.000 , 0 pxl/s,
 (374.000 , 439.000) , **Frame # 0**, 0 s, **131.000000** , 0/s,



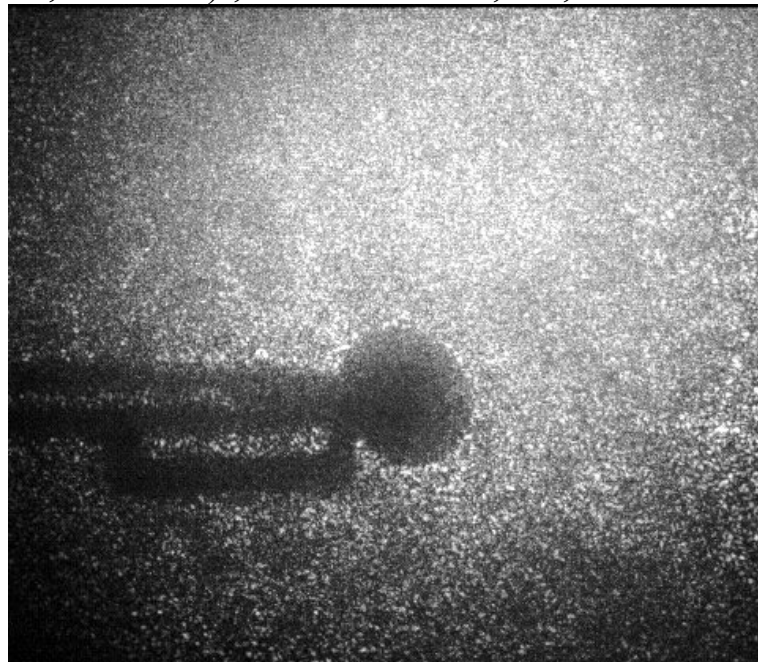
(370.000 , 308.000) , **Frame # 50**, 1.000 s, 0.000, 0 pxl/s,
 (370.000 , 439.000) , **Frame # 50**, 0 s, **131.000000** , 0/s,



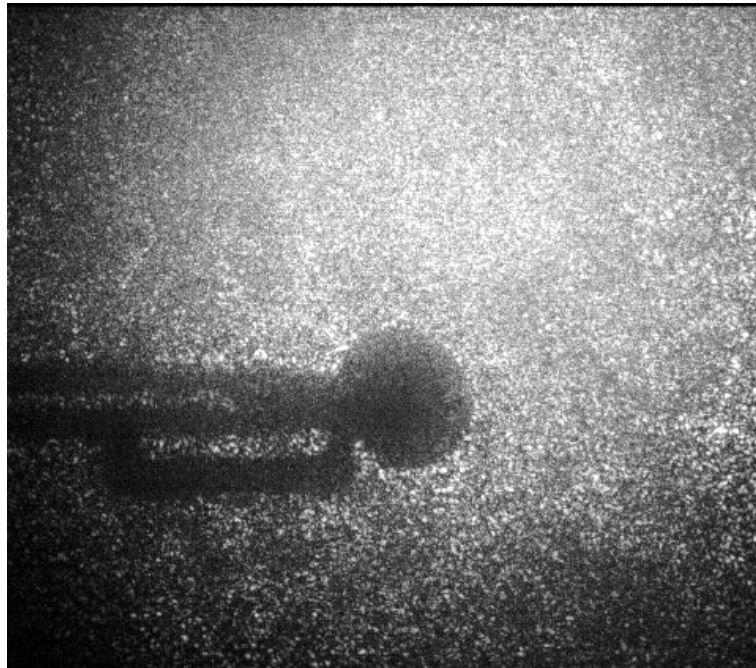
(372.000 , 308.000) , **Frame # 100**, 1.000 s, 0.000, 0 pxl/s,
 (372.000 , 440.000) , **Frame # 100**, 0 s, **132.000000** , 0/s,



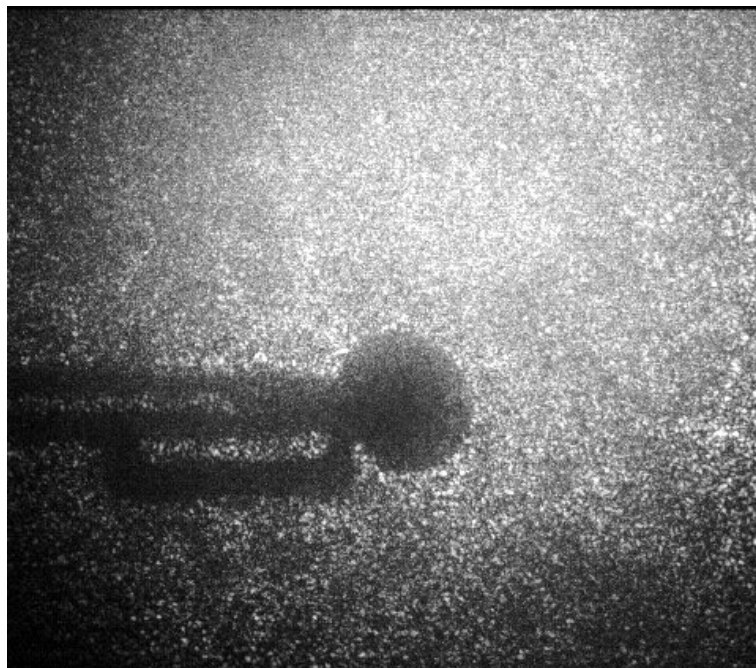
(372.000 , 301.000) , **Frame # 150**, 1.000 s, 0.000, 0 pxl/s,
 (372.000 , 443.000) , **Frame # 150**, 0 s, **142.000000** , 0/s,



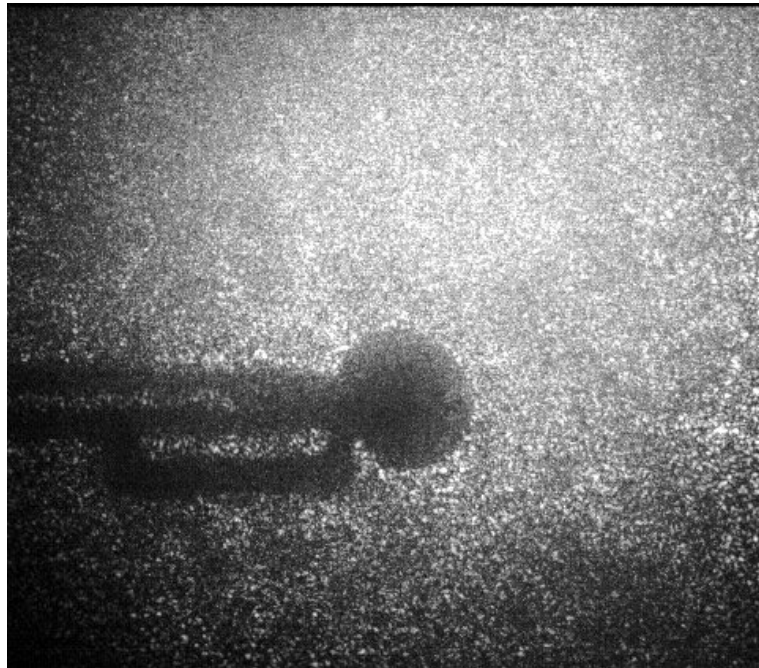
(372.000 , 308.000) , **Frame # 200**, 0 s, 0.000 , 0 pxl/s,
(372.000 , 446.000) , **Frame # 200**, 0 s, **138.000000** , 0/s,



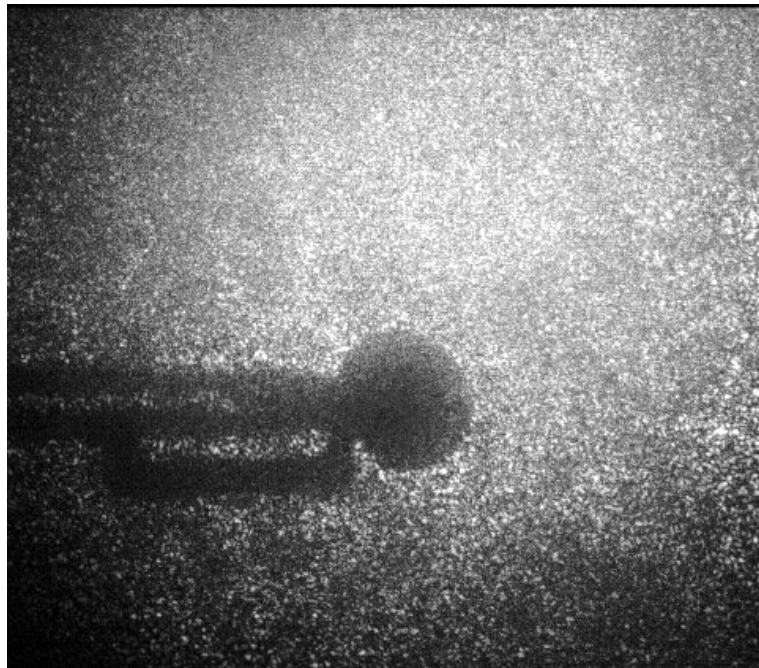
(371.000 , 307.000) , **Frame # 225**, 0.500 s, 0.000 , 0 pxl/s,
(371.000 , 444.000) , **Frame # 225**, 0 s, **137.000000** , 0/s,



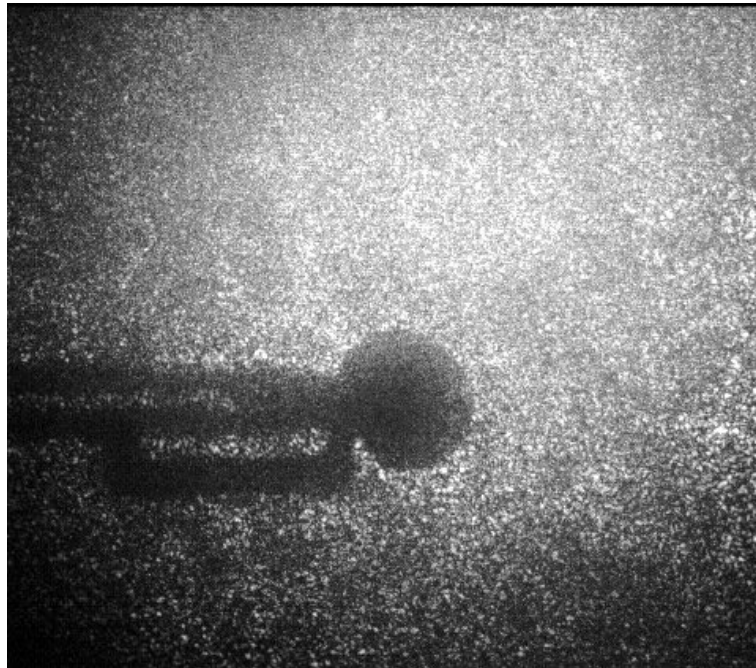
(374.000 , 307.000) , **Frame # 250**, 0.500 s, 0.000 , 0 pxl/s,
 (374.000 , 443.000) , **Frame # 250**, 0 s, **136.000000** , 0/s,



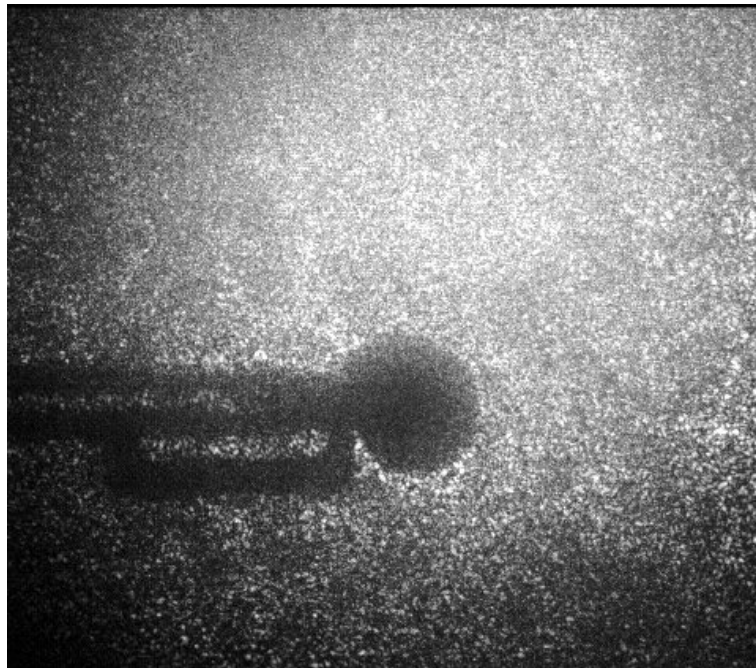
(375.000 , 306.000) , **Frame # 275**, 0.500 s, 0.000 , 0 pxl/s,
 (375.000 , 441.000) , **Frame # 275**, 0 s, **135.000000** , 0/s,



(374.000 , 311.000) , **Frame # 300**, 0.500 s, 0.000 , 0 pxl/s,
 (374.000 , 445.000) , **Frame # 300**, 0 s, **134.000000** , 0/s,

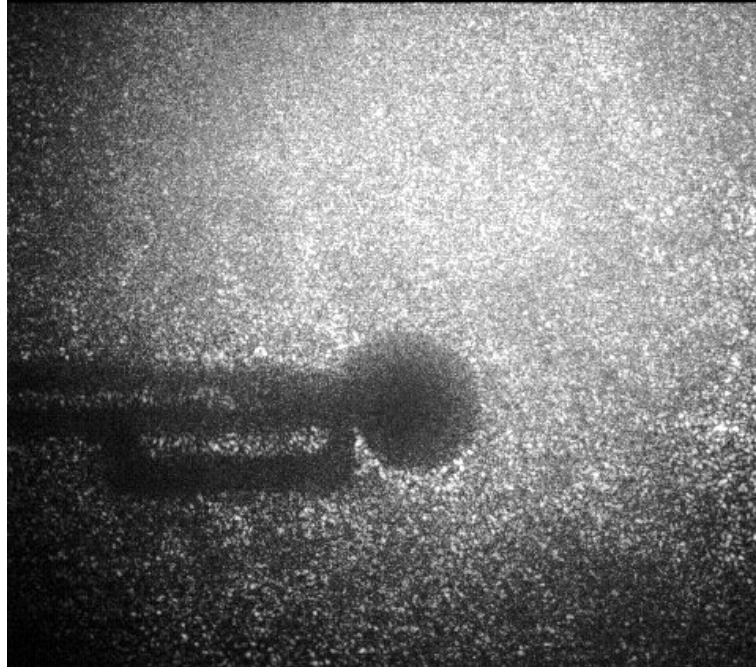


(378.000 , 313.000) , **Frame # 308**, 0.160 s, 0.000 , 0 pxl/s,
 (378.000 , 447.000) , **Frame # 308**, 0 s, **134.000000** , 0/s,



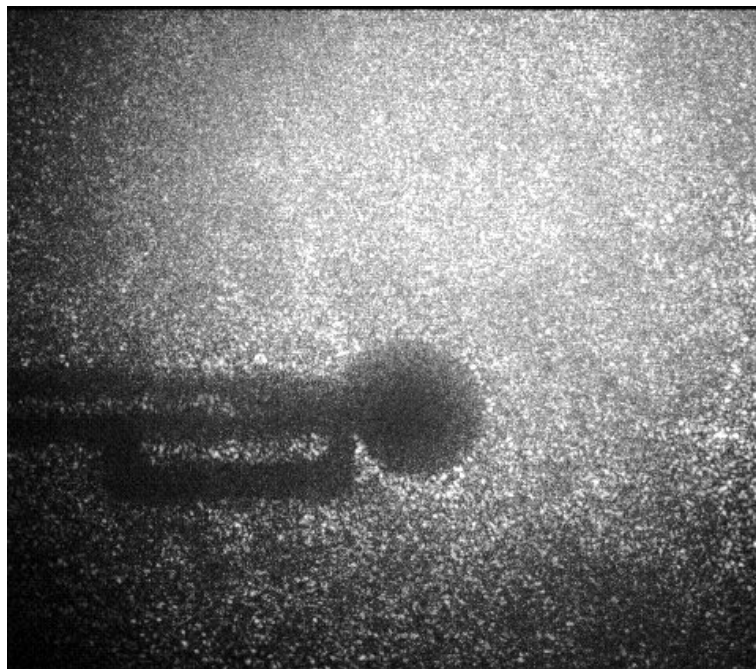
(379.000 , 313.000) , **Frame # 309**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(379.000 , 446.000) , **Frame # 309**, 0 s, **133.000000** , 0 m/s,



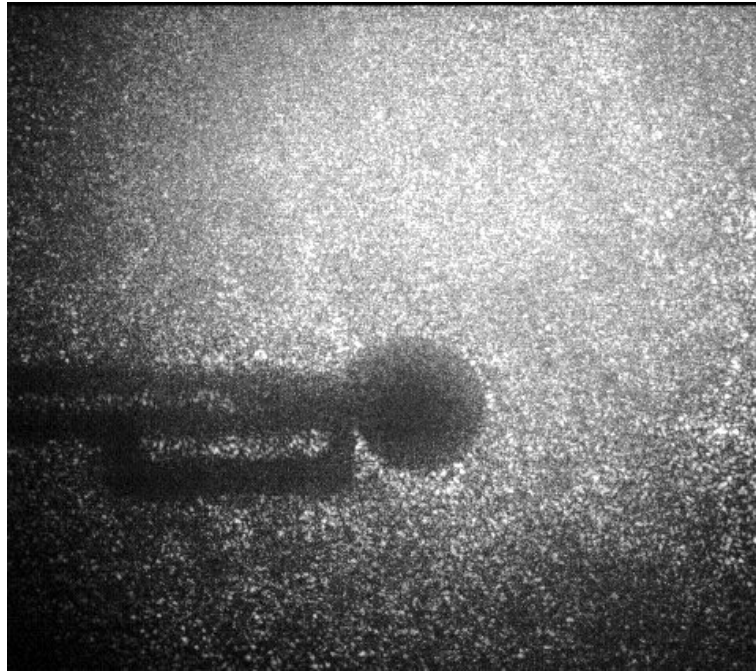
(384.000 , 315.000) , **Frame # 310**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(384.000 , 446.000) , **Frame # 310**, 0 s, **131.000000** , 0 m/s



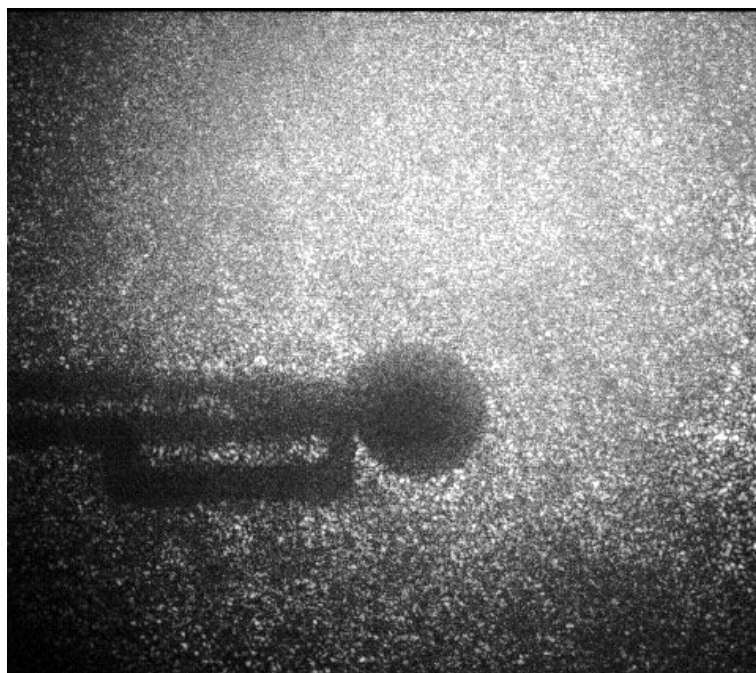
(386.000 , 315.000) , **Frame # 311**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(386.000 , 444.000) , **Frame # 311**, 0 s, **129.000000** , 0 m/s,



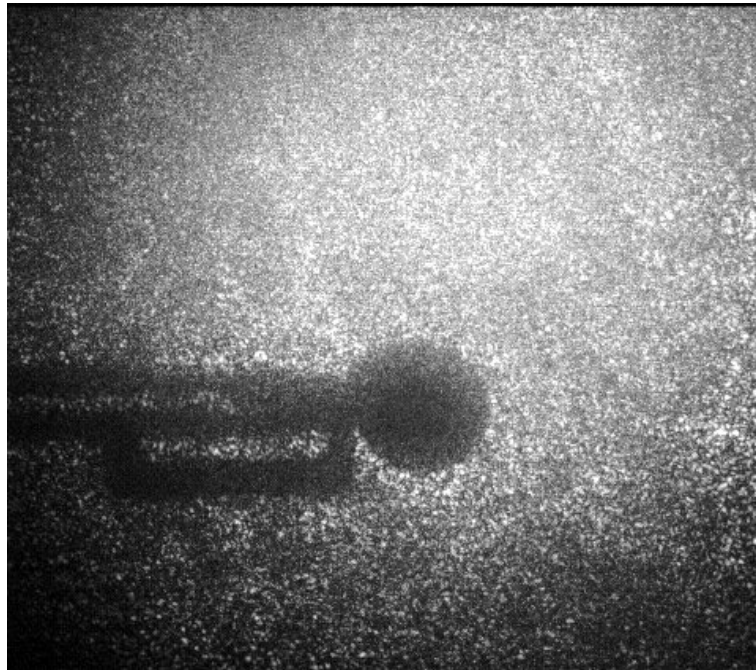
(389.000 , 316.000) , **Frame # 312**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(389.000 , 444.000) , **Frame # 312**, 0 s, **128.000000** , 0 m/s,



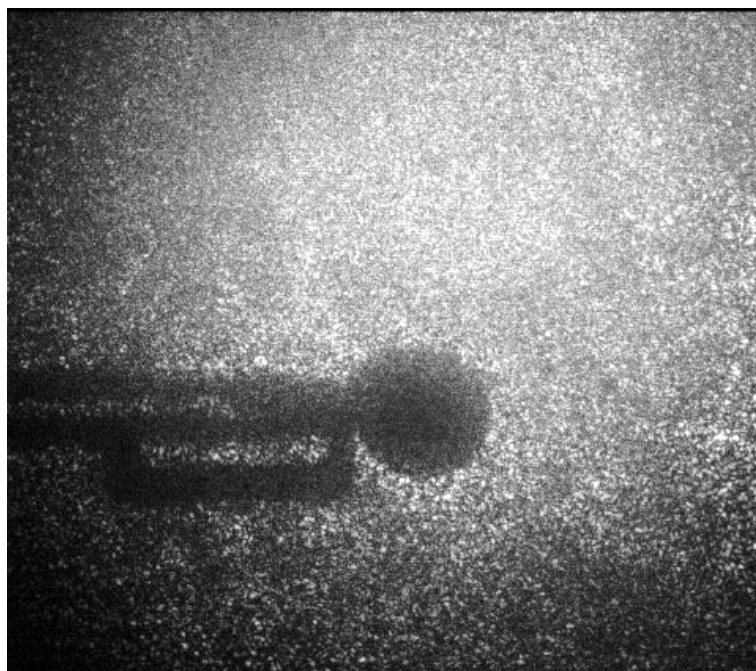
(390.000 , 317.000) , **Frame # 313**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(390.000 , 444.000) , **Frame # 313**, 0 s, **127.000000** , 0 m/s,



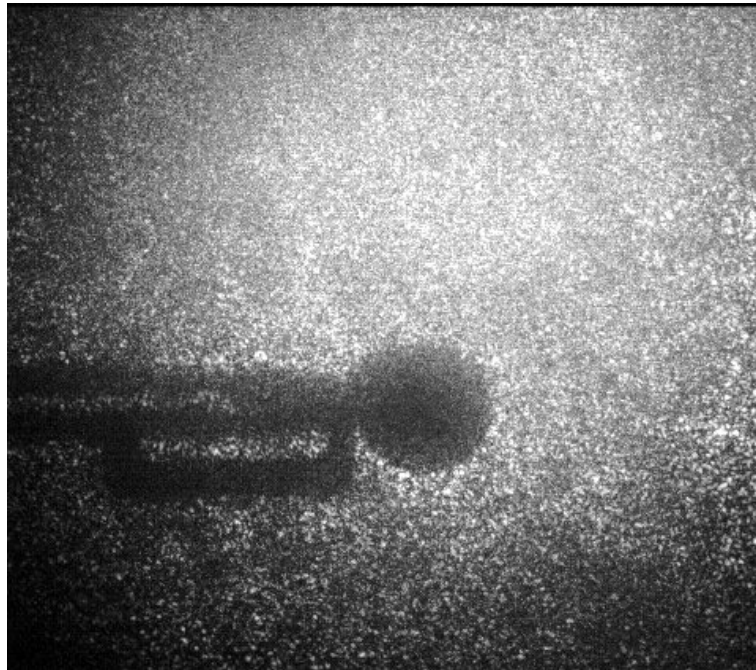
(393.000 , 319.000) , **Frame # 314**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(393.000 , 444.000) , **Frame # 314**, 0 s, **125.000000** , 0 m/s,



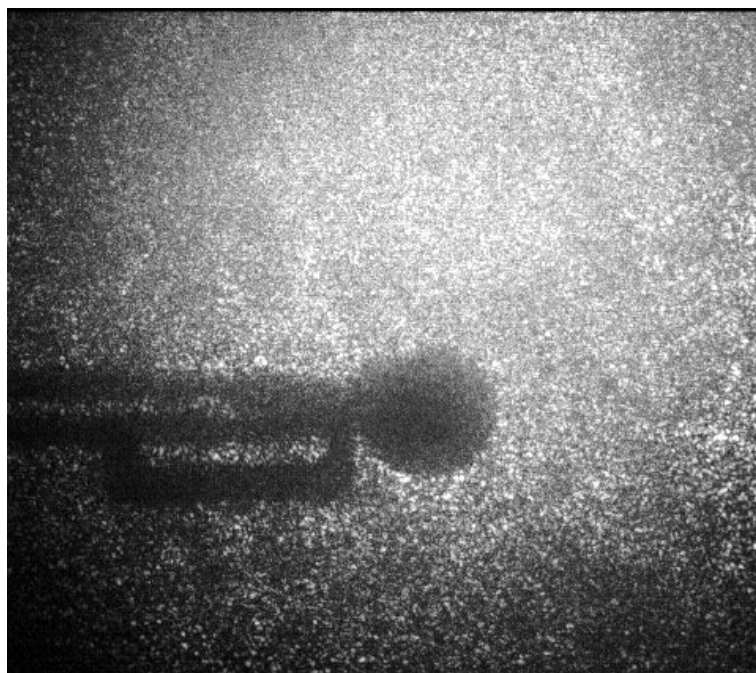
(393.000 , 321.000) , **Frame # 315**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(393.000 , 444.000) , **Frame # 315**, 0 s, **123.000000** , 0 m/s,

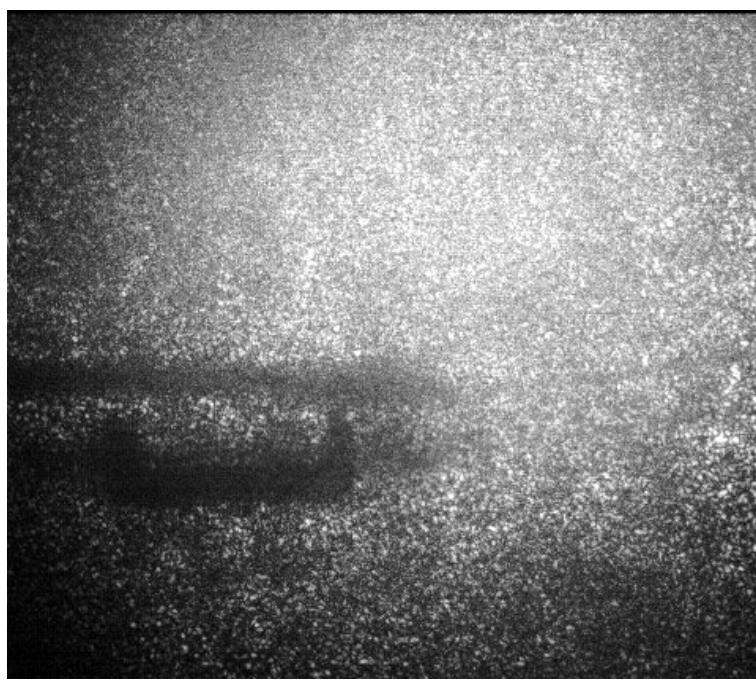


(396.000 , 315.000) , **Frame # 316**, 0.020 s, 0.000, 0 m/s,

(396.000 , 438.000) , **Frame # 316**, 0 s, **123.000000** , 0 m/s,



FRAME # 317 ΑΜΕΣΣΩΣ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΡΑΥΣΗ



4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ K_I

Στο συγκεκριμένο πείραμα έχουμε εγκάρσια εγκοπή.

Το πλάτος W του δοκιμίου είναι $W = 0,0796 \text{ m}$.

Το πάχος d του δοκιμίου είναι $d = 0,0026 \text{ m}$.

Το μήκος a της εγκοπής είναι $a = 0,0091 \text{ m}$.

Το φορτίο θραύσεως μετρήθηκε $P_{g\rho} = 120 \text{ Kp}$.

Αρχικά θα υπολογίσω το θεωρητικό συντελεστή εντάσεως των τάσεων δηλαδή το K_I^{th} .

Το K_I^{th} θα προκύψει από την εφαρμογή του παρακάτω τύπου :

$$K_I^{th} = C\left(\frac{\alpha}{W}\right) \sigma_{g\rho} \sqrt{\pi\alpha}$$

όπου $\sigma_{g\rho}$: η τάση θραύσεως για $P_{g\rho} = 120 \text{ Kp}$.

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει} \quad \sigma_{g\rho} &= \frac{P_{g\rho}}{A} = \frac{P_{g\rho}}{W \cdot d} = \frac{120 \cdot 9,81 \text{ Nt}}{0,0796 \cdot 0,0026 \text{ m}^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma_{g\rho} = 5605,7 \cdot 10^3 \text{ Nt/m}^2 \end{aligned}$$

Ακόμη έχουμε $\frac{\alpha}{W} = \lambda = 0,114$

Ο διορθωτικός συντελεστής $C\left(\frac{\alpha}{W}\right)$ για την περίπτωση της ακραίας εγκάρσιας ρωγμής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$C\left(\frac{\alpha}{W}\right) = C(\lambda) = 1,12 - 0,231 \cdot \lambda + 10,55 \cdot \lambda^2 - 21,72 \cdot \lambda^3 + 30,39 \cdot \lambda^4, \quad (\text{για } \lambda \leq 0,6)$$

Έτσι λοιπόν για $\frac{\alpha}{W} = \lambda = 0,114$ έχουμε :

$$C\left(\frac{\alpha}{W}\right) = C(0,114) = 1,12 - 0,231 \cdot 0,114 + 10,55 \cdot 0,114^2 - 21,72 \cdot 0,114^3 + 30,39 \cdot 0,114^4 = \\ = 1,12 - 0,0263 + 0,1371 - 0,0322 + 0,0051 = 1,2037$$

$$\text{και } \sqrt{\pi \cdot \alpha} = \sqrt{3,14 \cdot 0,0091} = \sqrt{0,028574} = 0,169 .$$

Επομένως τελικά ο συντελεστής προκύπτει :

$$K_I^{th} = 1,2037 \cdot 5605,7 \cdot 10^3 \cdot 0,169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_I^{th} = 1.140.341,2 \frac{Nt}{m^{3/2}}$$

Τώρα με τη βοήθεια της $D_t^{\theta\rho}$ (τελευταίας διαμέτρου πριν τη θραύση) θα υπολογίσουμε την πειραματική τιμή του συντελεστή εντάσεως των τάσεων , δηλαδή του $K_I^{\text{πειρ}}$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο τύπος με τη βοήθεια του οποίου θα υπολογίσουμε το $K_I^{\text{πειρ}}$ είναι ο παρακάτω :

$$K_I^{\text{πειρ}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot \varepsilon \cdot z_o \cdot d \cdot \lambda_m^{3/2} \cdot c_{r,t,f}} \cdot \left(\frac{D_{l,t}^{\theta\rho}}{\delta_{l,t}^{\theta\rho}} \right)^{5/2}$$

Έχουμε λοιπόν $\varepsilon=1$ για την πρώτη διερχόμενη δια της πλάκας ακτίνα ,
(t).

Τα z_o και z_i έχουν μετρηθεί κατά τη διάρκεια του πειράματος και είναι ίσα με $z_o=0,635\text{ m}$ και $z_i=0,335\text{ m}$.

Επομένως ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης που δίνεται από τη σχέση $\lambda_m = \frac{z_o + z_i}{z_i}$ είναι :

$$\lambda_m = \frac{z_o + z_i}{z_i} = \frac{0,635 + 0,335}{0,335} = 2,8955 \quad \text{και}$$

$$\text{συνεπώς } \lambda_m^{3/2} = 4,927$$

Για υλικό Plexiglas (PMMA) του δοκιμίου με το οποίο έγινε το πείραμα η στατική τιμή της ταυροοπτικής σταθεράς είναι :

$$c_i^s = -1,21 \times 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{Nt}$$

Για να υπολογίσουμε όμως το $K_I^{\text{πειρ}}$ θα χρησιμοποιήσουμε το $|c_i^s|$.

Επειδή θα μετρήσουμε τη $D_t^{\theta\rho}$ (τελευταία εγκάρσια διάμετρος πριν τη θραύση) θα χρησιμοποιήσουμε το συντελεστή διόρθωσης $\delta_t^{\theta\rho}$ της διαμέτρου $D_t^{\theta\rho}$ της καυστικής.

Ισχύει $\delta_t^{\theta\rho} = 3,1702$ για εγκάρσια διάμετρο.

Το $d = 0,0026\text{ m}$ όπως είπαμε και προηγουμένως.

Τώρα από το **video1-28-5-08** θα μετρήσω τη $D_t^{\theta\rho}$. Τη διάμετρο δηλαδή της καυστικής ένα frame πριν τη θραύση.

Χρησιμοποιώ το πρόγραμμα **Motionscope PCI version 2.30** της **Redlake MASD, INC**. Όμως το πρόγραμμα μετράει τα μήκη σε

pixels γι' αυτό θα πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση σε μονάδες μήκους.

Έχουμε σημειώσει γι' αυτό το λόγο ένα προμετρημένο ευθύγραμμο τμήμα μήκους 2 cm. Αν αυτό το αντιστοιχίσουμε σε pixels θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε το μήκος της διαμέτρου της καυστικής σε cm.

Από την επεξεργασία του **video1-28-5-08** προκύπτει ότι ο "μάρτυρας" των 2 cm μετρήθηκε 243 pixels.

Μετρώντας τη διάμετρο $D_t^{\theta\rho}$ (τη διάμετρο δηλ. της καυστικής στο τελευταίο frame πριν τη θραύση, frame #316) την βρίσκουμε 123 pixels.

Δηλαδή τελικά είναι : $D_t^{\theta\rho} = \frac{123 \cdot 2}{243} = 1,0123 \text{ cm} = 0,010123 \text{ m}$

Τελικά έχουμε : $K_1^{\text{πειρ}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot \varepsilon \cdot z_o \cdot d \cdot \lambda_m^{3/2} \cdot |c_{r,t,f}|} \cdot \left(\frac{D_{l,t}^{\theta\rho}}{\delta_{l,t}^{\theta\rho}} \right)^{5/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow K_1^{\text{πειρ}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3,14}}{3 \cdot 1 \cdot 0,635 \cdot 0,0026 \cdot 4,927 \cdot 1,21 \cdot 10^{-10}} \cdot \left(\frac{0,010123}{3,1702} \right)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1^{\text{πειρ}} = \frac{2 \cdot 2,506}{0,0295 \cdot 10^{-10}} \cdot (0,003193)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1^{\text{πειρ}} = \frac{5,012}{0,0295} \cdot 0,000000576 \cdot 10^{10} = \frac{28874,09351}{0,0295} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1^{\text{πειρ}} = 978.090,378 \frac{Nt}{m^{3/2}}$$

5. ΛΟΓΟΣ ΕΛΑΤΤΩΣΗΣ ΤΟΥ $K_I^{πειρ}$

Είναι πολύ χρήσιμο να υπολογίσουμε την ελάττωση του $K_I^{πειρ}$ από τη στιγμή της έναρξης της θραύσης έως και το τέλος της. Γι' αυτό θα υπολογίσω το $K_I^{πειρ}$ στο frame #308. Αυτό θα γίνει με όμοιο τρόπο όπως παραπάνω.

Μετρώντας τη διάμετρο D_t^{308} (τη διάμετρο δηλ. της καυστικής στο frame #308) την βρίσκουμε 134 pixels.

Δηλαδή τελικά είναι : $D_t^{308} = \frac{134 \cdot 2}{243} = 1,1029 \text{ cm} = 0,011029 \text{ m}$

$$\text{Τελικά έχουμε : } K_I^{πειρ} = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot \varepsilon \cdot z_o \cdot d \cdot \lambda_m^{3/2} \cdot |c_{r,t,f}|} \cdot \left(\frac{D_{l,t}^{308}}{\delta_{l,t}^{308}} \right)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_I^{πειρ} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3,14}}{3 \cdot 1 \cdot 0,635 \cdot 0,0026 \cdot 4,927 \cdot 1,21 \cdot 10^{-10}} \cdot \left(\frac{0,011029}{3,1702} \right)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_I^{πειρ} = \frac{2 \cdot 2,506}{0,0295 \cdot 10^{-10}} \cdot (0,003479)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_I^{πειρ} = \frac{5,012}{0,0295} \cdot 0,000000713 \cdot 10^{10} = \frac{35780,56006}{0,0295} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_I^{πειρ} = 1.212.900,341 \frac{Nt}{m^{3/2}}$$

Ο τύπος που θα μας δώσει την ελάττωση του $K_I^{\text{πειρ}}$ είναι ο εξής :

$$\Delta K_I^{\text{πειρ}} = \frac{K_I^{\text{πειρ}}(\#308) - K_I^{\text{πειρ}}(\theta\rho)}{K_I^{\text{πειρ}}(\#308)}$$

Άρα τελικά έχουμε :

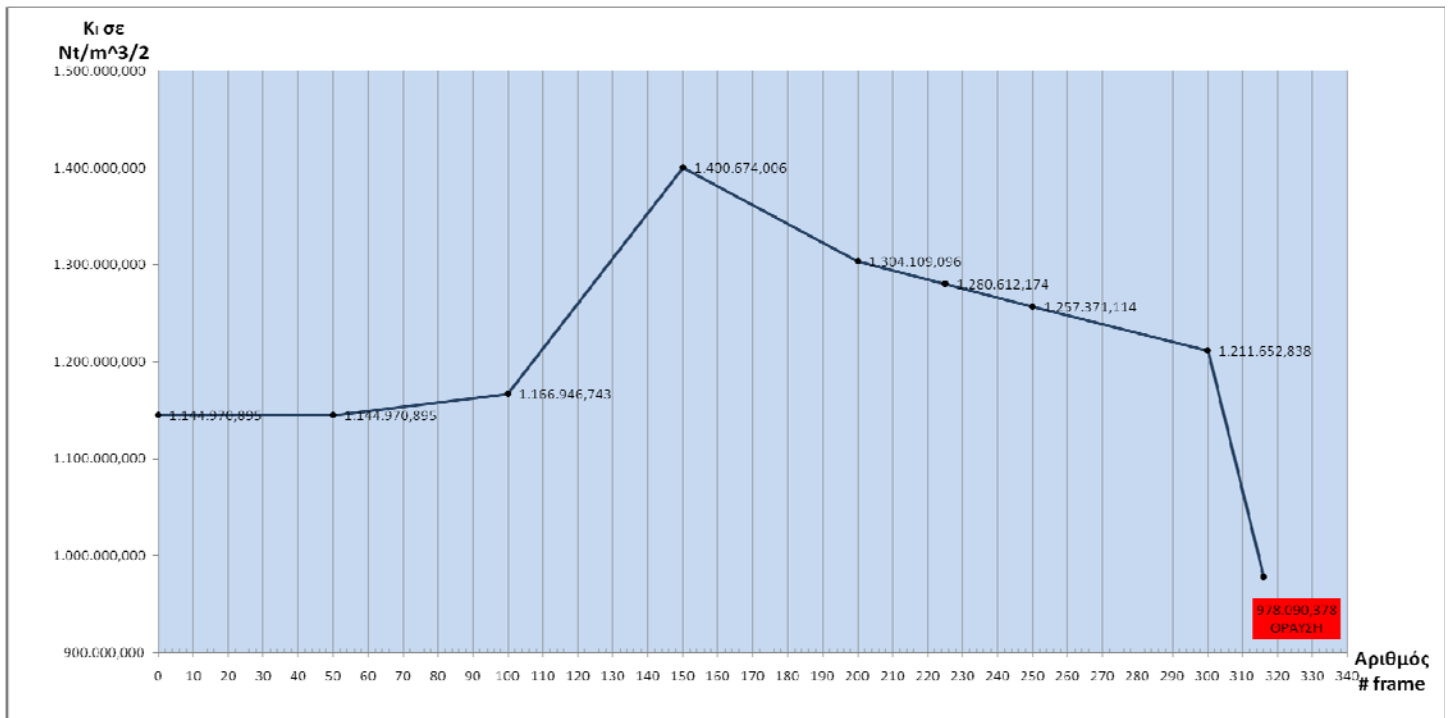
$$\Delta K_I^{\text{πειρ}} = \frac{1.212.900,341 - 978.090.378}{1.212.900,341} * 100\% \Rightarrow$$

$$\Delta K_I^{\text{πειρ}} = 0,1936 * 100\% = 19.36\%$$

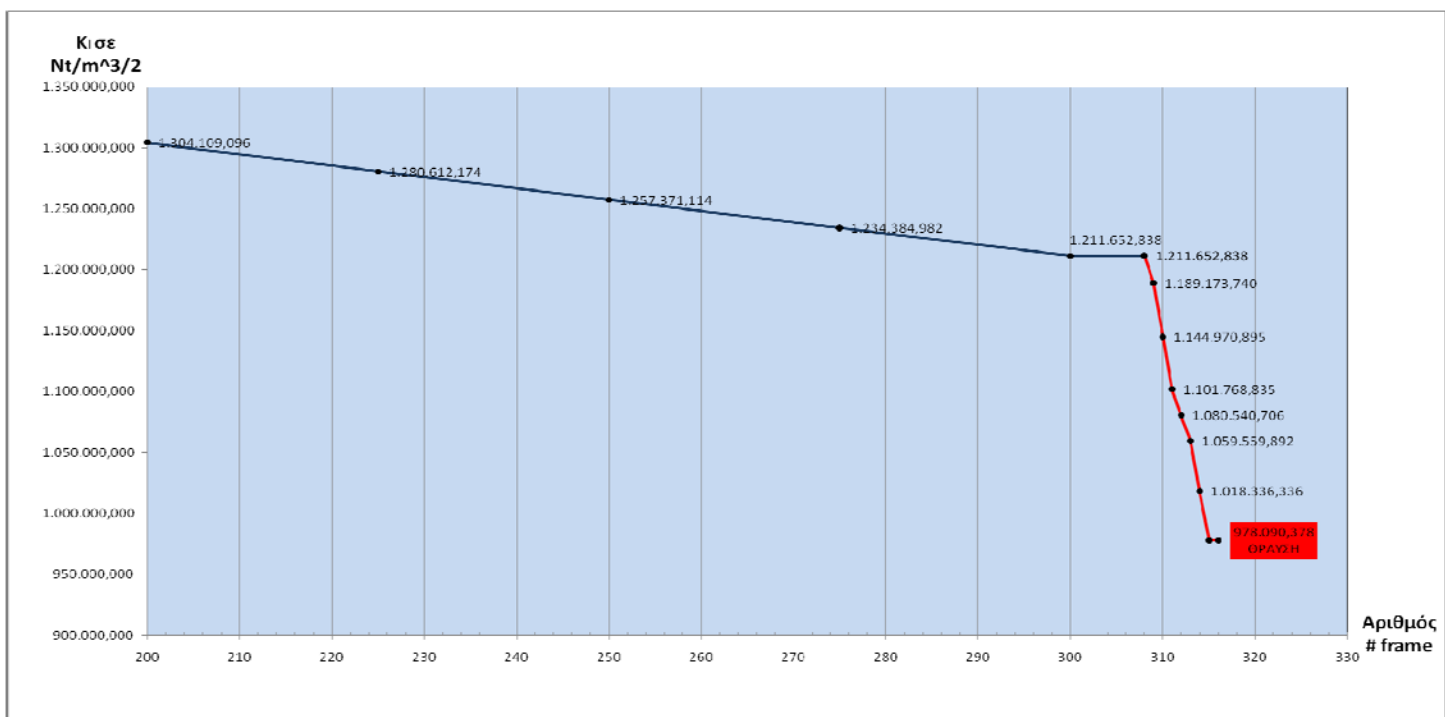
$$K_I^{πειρ} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \pi}}{3 \cdot \varepsilon \cdot z_o \cdot d \cdot \lambda_m^{3/2} \cdot c_{r,t,f}} \cdot \left(\frac{D_{l,t}^{\theta\rho}}{\delta_{l,t}^{\theta\rho}} \right)^{5/2}$$

# frame	D_t (pixels)	D_t (m)	$K_I^{πειρ}$
0	131	0,010782	1.144.970,895
50	131	0,010782	1.144.970,895
100	132	0,010864	1.166.946,743
150	142	0,011687	1.400.674,006
200	138	0,011358	1.304.109,096
225	137	0,011276	1.280.612,174
250	136	0,011193	1.257.371,114
275	135	0,011111	1.234.384,982
300	134	0,011029	1.211.652,838
308	134	0,011029	1.211.652,838
309	133	0,010947	1.189.173,740
310	131	0,010782	1.144.970,895
311	129	0,010617	1.101.768,835
312	128	0,010535	1.080.540,706
313	127	0,010453	1.059.559,892
314	125	0,010288	1.018.336,336
315	123	0,010123	978.090,378
316	123	0,010123	978.090,378

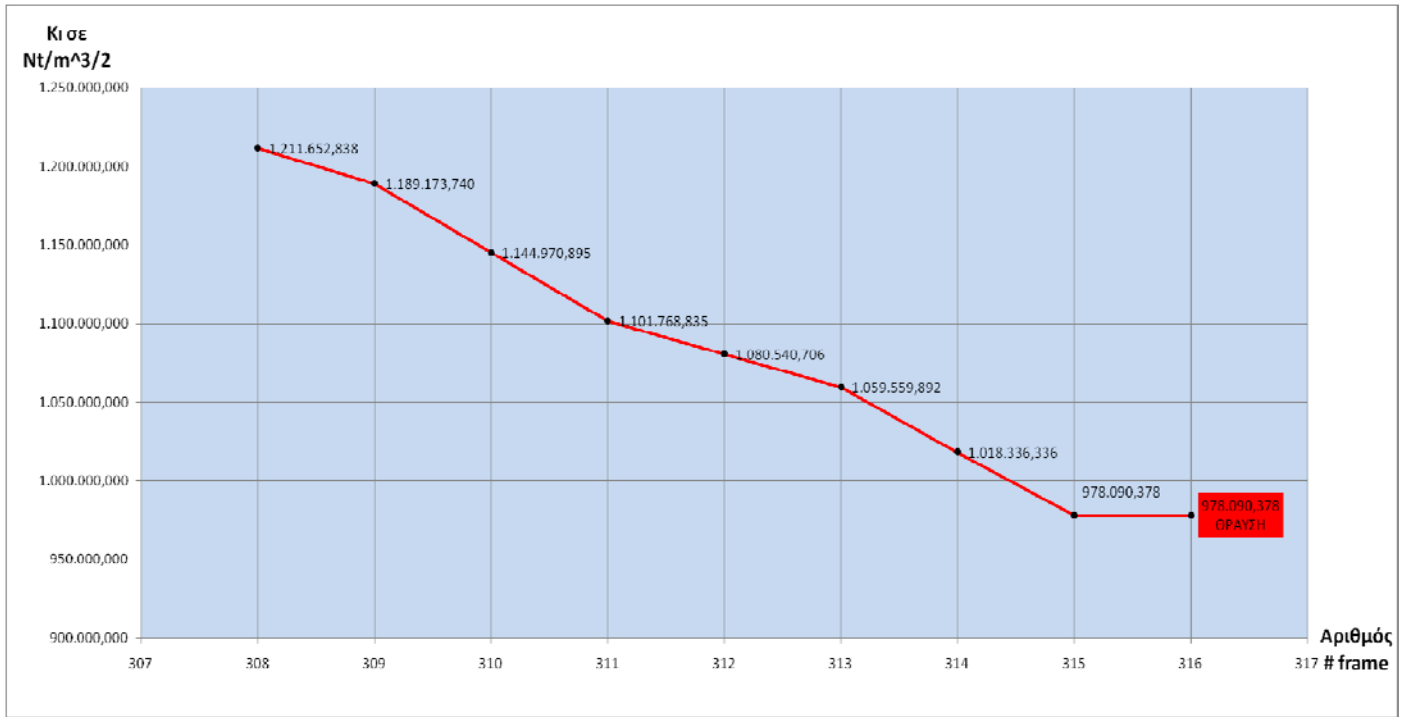
Γράφημα της K_i από frame #0 - ΘΡΑΥΣΗ



Γράφημα της K_i από frame #200 - ΘΡΑΥΣΗ



Γράφημα της K_i στην περιοχή της θραύσης

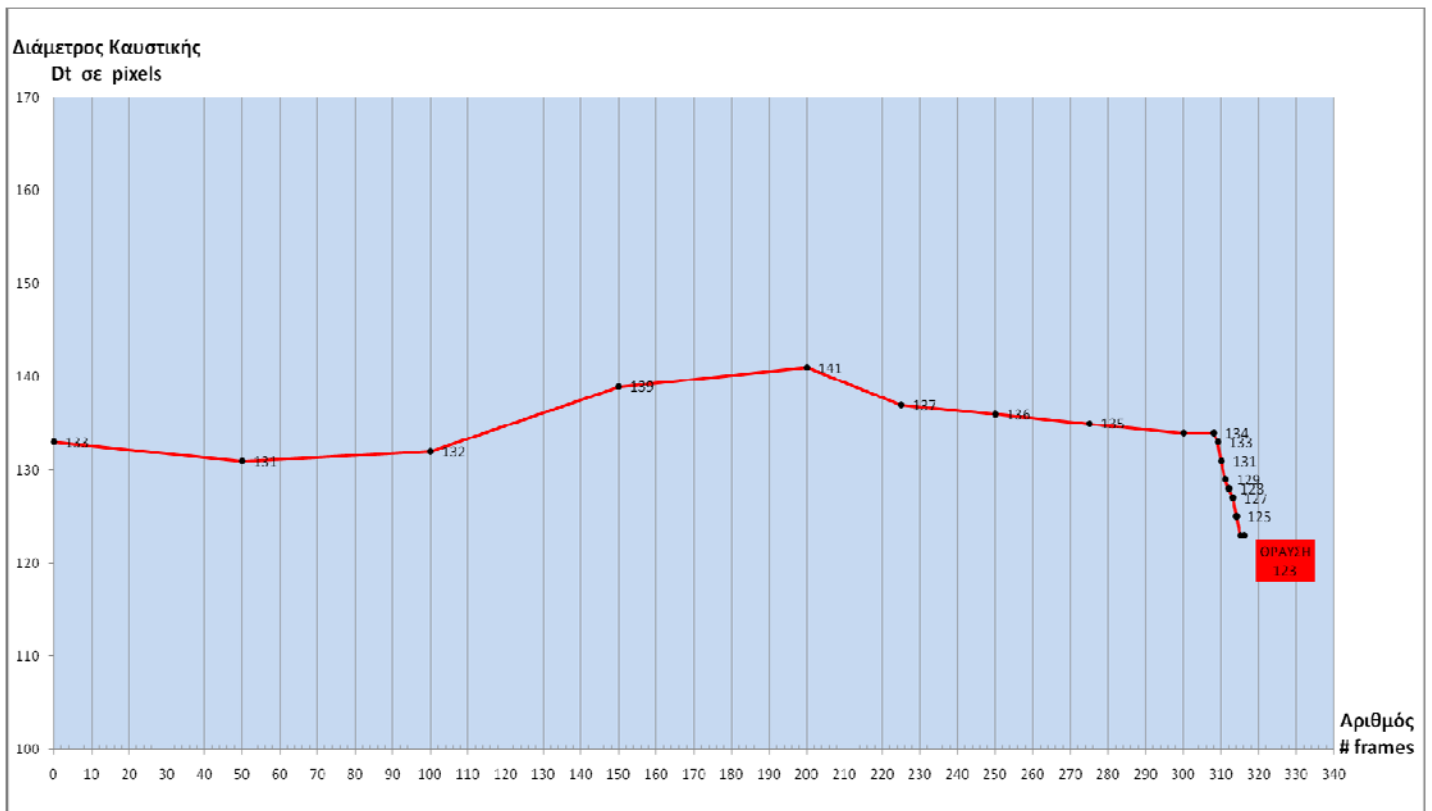


6. D_t , D_ℓ ΚΑΙ Ο ΛΟΓΟΣ ΤΟΥΣ D_t/D_ℓ

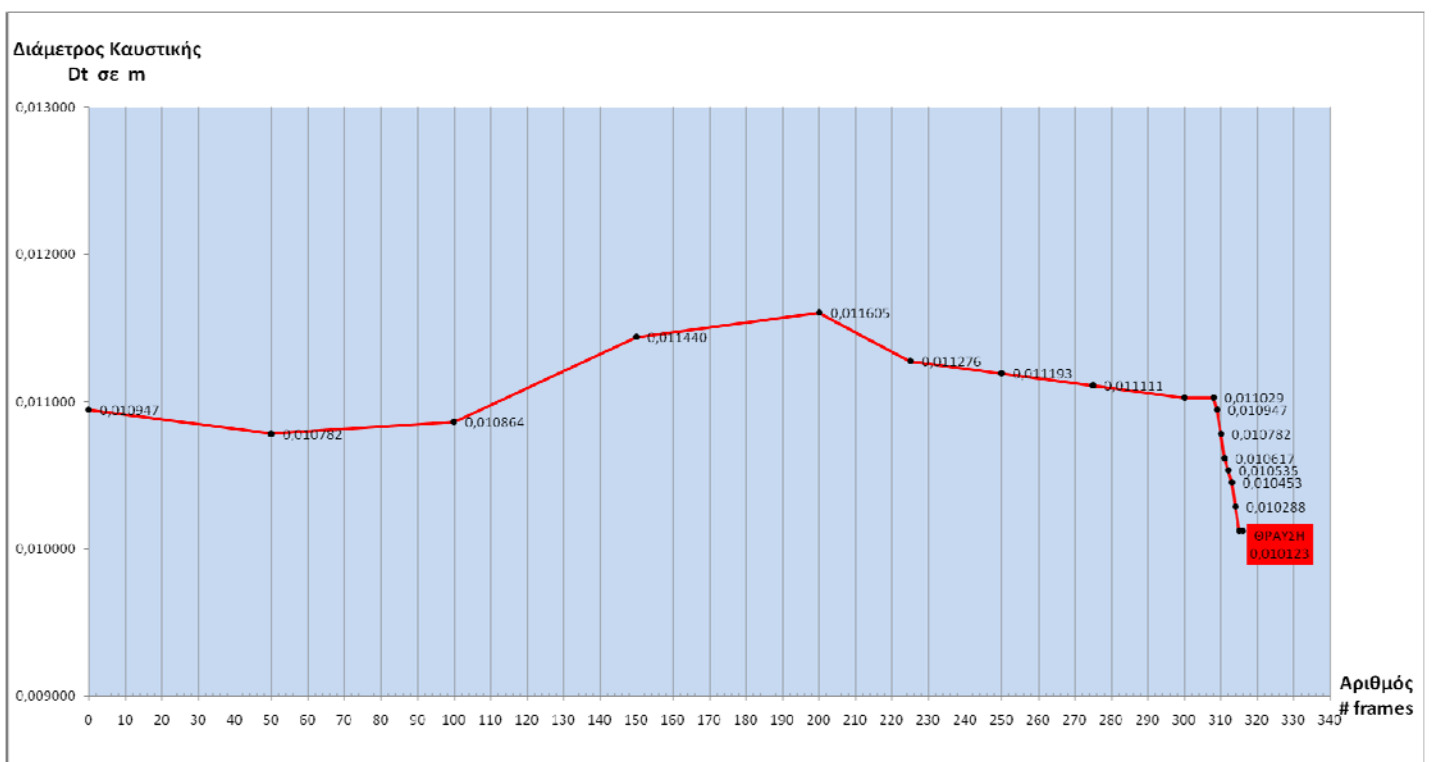
Εκτός από την κατακόρυφη διάμετρο D_t της καυστικής μπορούμε να μετρήσουμε και την εγκάρσια D_ℓ . Αυτό θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε το σχήμα της καυστικής. Παρατηρούμε δηλαδή πως μεταβάλλεται το αρχικό στρογγυλό της σχήμα σε έλλειψη. Ο λόγος των 2 διαμέτρων μας βοηθάει να αντιληφθούμε πιο εύκολα αυτή τη μεταβολή. Όσο δηλ. πιο κοντά στη μονάδα είναι ο λόγος των 2 διαμέτρων το σχήμα της καυστικής τείνει προς τον κύκλο.

# frames	D_t (pixels)	D_t (m)	D_ℓ (pixels)	D_ℓ (m)	D_t/D_ℓ
0	133	0,010947	125	0,010288	1,064000
50	131	0,010782	126	0,010370	1,039683
100	132	0,010864	128	0,010535	1,031250
150	139	0,011440	130	0,010700	1,069231
200	141	0,011605	132	0,010864	1,068182
225	137	0,011276	130	0,010700	1,053846
250	136	0,011193	133	0,010947	1,022556
275	135	0,011111	133	0,010947	1,015038
300	134	0,011029	131	0,010782	1,022901
308	134	0,011029	136	0,011193	0,985294
309	133	0,010947	136	0,011193	0,977941
310	131	0,010782	138	0,011358	0,949275
311	129	0,010617	136	0,011193	0,948529
312	128	0,010535	136	0,011193	0,941176
313	127	0,010453	139	0,011440	0,913669
314	125	0,010288	140	0,011523	0,892857
315	123	0,010123	141	0,011605	0,872340
316	123	0,010123	145	0,011934	0,848276

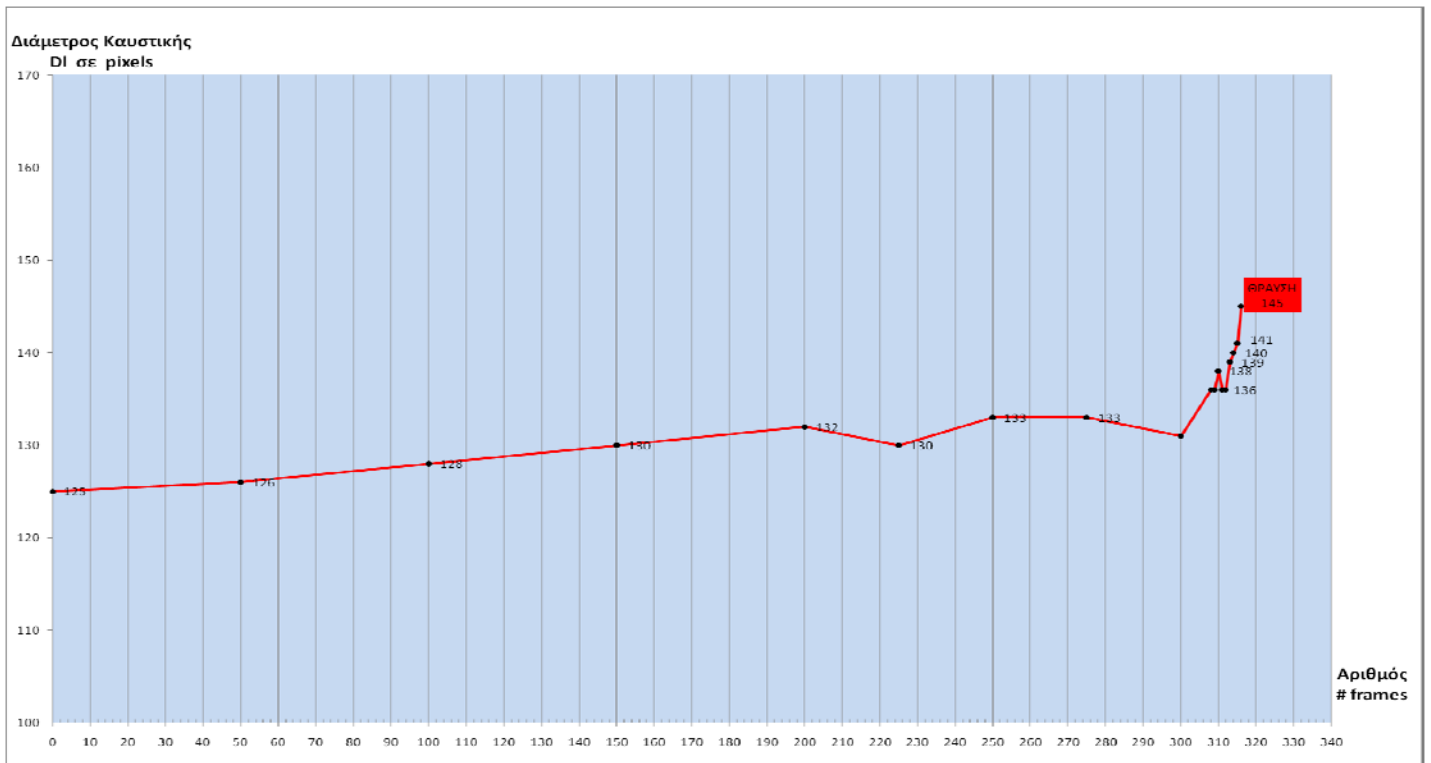
Γράφημα της D_t από frame #0 - θραύση



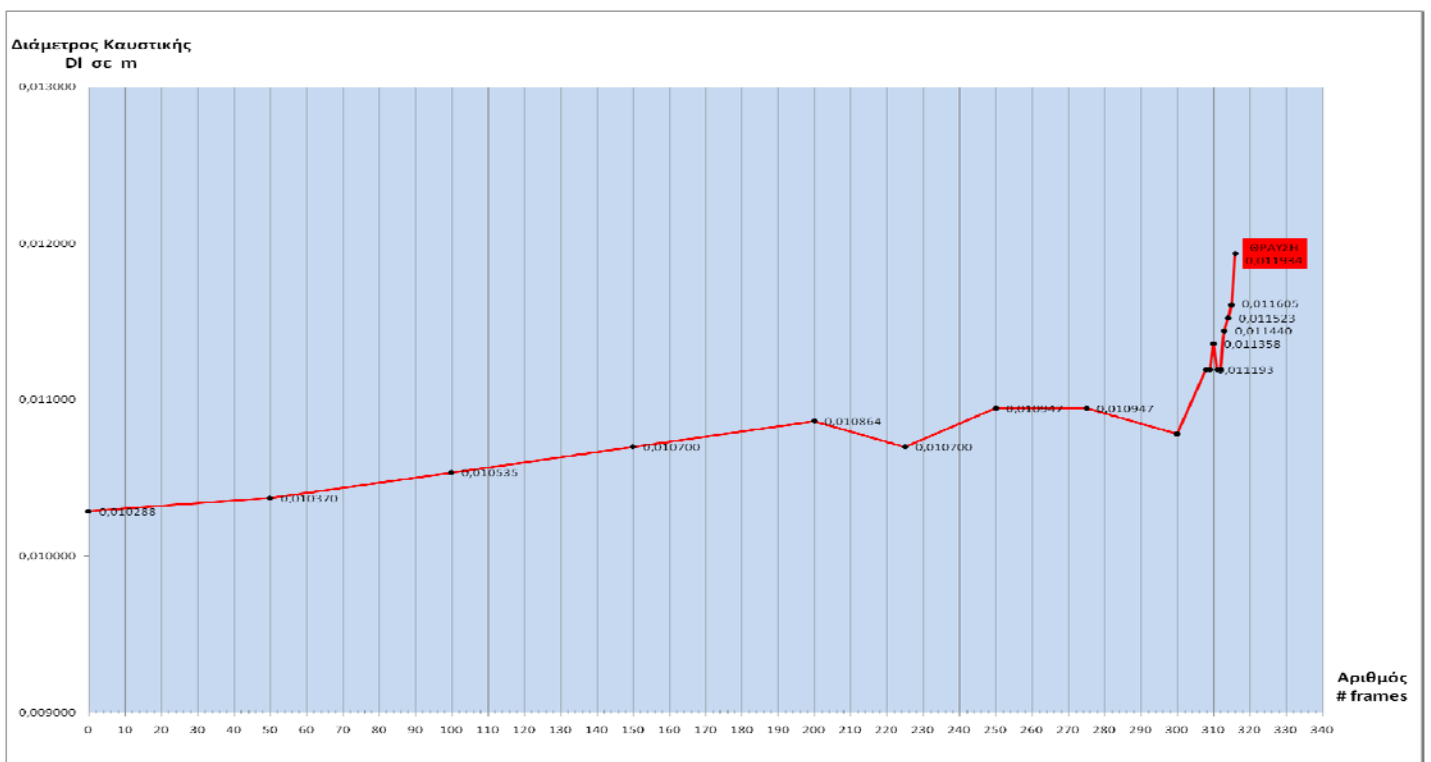
Γράφημα της D_t από frame #0 - θραύση



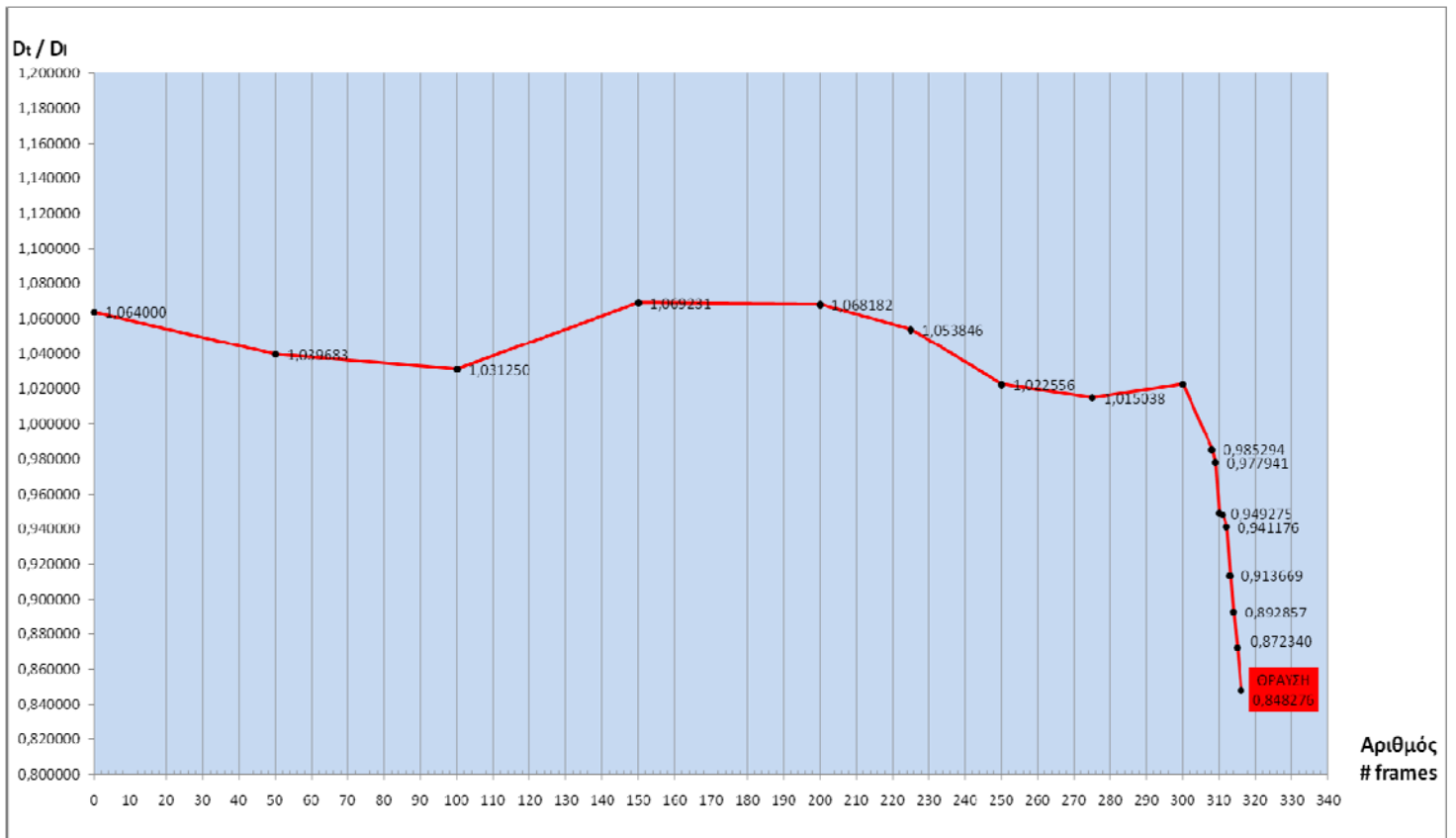
Γράφημα της D_ℓ από frame #0 - θραύση



Γράφημα της D_ℓ από frame #0 - θραύση



Γράφημα της D_t/D_l

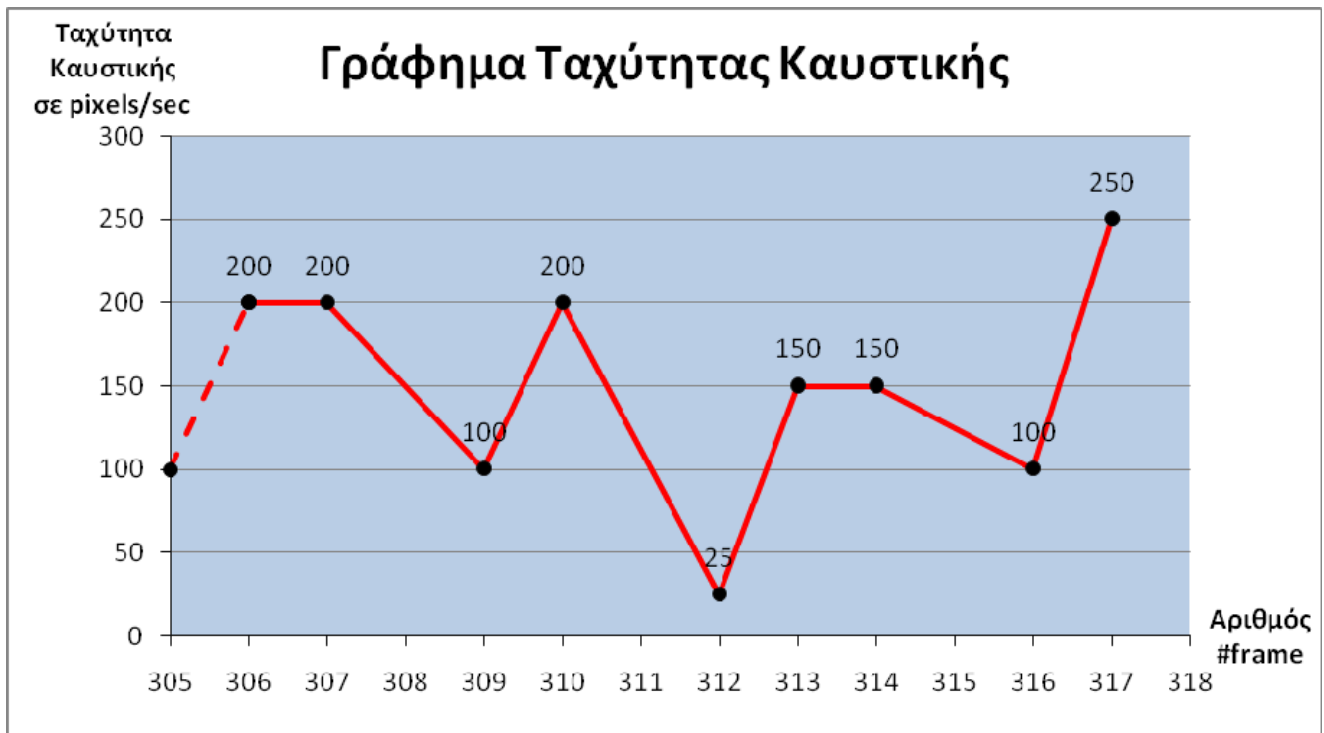


7. ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ

Ορίζουμε σαν ταχύτητα Καυστικής την προς τα δεξιά μετατόπιση του δεξιότερου σημείου της καυστικής προς τη μονάδα του χρόνου.

Στα δεδομένα που ακολουθούν φαίνεται το δεξιότερο σημείο της Καυστικής (μέσα σε παρένθεση), το αντίστοιχο frame (με **Bold**), ο χρόνος (σε sec), η μετατόπιση του δεξιότερου σημείου (σε pxls) και τέλος η ταχύτητα σε (pxl/sec).

Συντεταγμένες ακραίου σημείου	# Frame	Χρόνος (sec)	Δx (pixels)	$\Delta x/\Delta t$ (pixels/sec)	$\Delta x/\Delta t$ (m/sec)
(450.000 , 383.000)	Frame # 305	0.0 s	0.0 pxl		
(454.000 , 383.000)	Frame # 306	0.020 s	4.0 pxl	200 pxl/s	0,01646 m/s
(458.000 , 383.000)	Frame # 307	0.020 s	4.0 pxl	200 pxl/s	0,01646 m/s
(461.000 , 383.000)	Frame # 308	0.020 s	3.0 pxl	150 pxl/s	0,01235 m/s
(463.000 , 383.000)	Frame # 309	0.020 s	2.0 pxl	100 pxl/s	0,00823 m/s
(466.000 , 383.000)	Frame # 310	0.020 s	4.0 pxl	200 pxl/s	0,01646 m/s
(466.000 , 383.000)	Frame # 311	0.020 s	0.0 pxl	125 pxl/s	0,01029 m/s
(467.000 , 383.000)	Frame # 312	0.020 s	1.0 pxl	25 pxl/s	0,00206 m/s
(470.000 , 383.000)	Frame # 313	0.020 s	3.0 pxl	150 pxl/s	0,01235 m/s
(473.000 , 383.000)	Frame # 314	0.020 s	3.0 pxl	150 pxl/s	0,01235 m/s
(476.000 , 383.000)	Frame # 315	0.020 s	3.0 pxl	125 pxl/s	0,01029 m/s
(478.000 , 383.000)	Frame # 316	0.020 s	2.0 pxl	100 pxl/s	0,00823 m/s
(483.000 , 383.000)	Frame # 317	0.020 s	5.0 pxl	250 pxl/s	0,02058 m/s



7. ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρατηρώντας το φαινόμενο της διάδοσης της ρωγμής καταλήγουμε σε κάποια πολύ χρήσιμα συμπεράσματα. Ενώ υπάρχει το K_I^{KP} που αντιστοιχεί στο μέγιστο φορτίο που εφαρμόζουμε θα έπρεπε να έχουμε απότομη διάδοση της ρωγμής. Στην πραγματικότητα για το υλικό Plexiglass που χρησιμοποιήσαμε στο πείραμα όπως διαπιστώνουμε δεν ισχύει η παραπάνω θεώρηση.

Στην πραγματικότητα συμβαίνει το εξής :

Ενώ φτάνουμε την κρίσιμη τιμή του K_I που αντιστοιχεί στο μέγιστο φορτίο η ρωγμή δε διαδίδεται. Αντίθετα διαδίδεται σε ένα μικρότερο K_I το οποίο θεωρούμε ότι είναι ένα K_I έναρξης διάδοσης της ρωγμής (frame #316). Αυτό οφείλεται στη μικρή πλαστική ζώνη που αναπτύσσεται μπροστά στο άκρο της ρωγμής. Δηλ. έχουμε έντονη και γρήγορη παραμόρφωση, την οποία δεν μπορεί να παρακολουθήσει το φορτίο της μηχανής (δηλ. το φορτίο πέφτει).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1.** Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος : Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων (Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων) Εκδόσεις Κλειδάριθμος
- 2.** Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος : Ειδικά Κεφάλαια Μηχανικής (Πειραματικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων)
- 3.** Γεώργιος Α. Παπαδόπουλος – Δ.Ε. Παναγιωτουνάκος : Εισαγωγή Στη Μηχανική Στατική (Εκδόσεις Φούντας)
- 4.** Τσαμασφυρος Γ.Τ : Μηχανική Παραμορφωσιμου Σώματος Ι . Εκδόσεις Συμμετρία
- 5.** Papadopoulos GA , FRACTURE MECHANICS . The Experimental Method of Caustics and the Det.-criterion of Fracture Springer-Verlag ,London , England 1993.
- 6.** Σπανδαγος Βαγγέλης : Μιγαδικές Συναρτήσεις . Εκδόσεις Αίθρα
- 7.** Σπανδαγος Βαγγέλης : Ολοκληρωτικός Λογισμός . Εκδόσεις Αίθρα

