



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

---

**ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ  
ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ:  
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΤΟΥ**

**ΑΡΗ Π. ΠΑΝΤΟΥ**

**Επιβλέπων:**  
**Νικόλαος Γ. Τσούβαλης, Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ**

**ΑΘΗΝΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009**



# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μέρος του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Έχει ως σκοπό τη μελέτη του φαινομένου του λυγισμού σε κατασκευές από σύνθετα υλικά (π.χ. πολυεστερικά σκάφη) υπό την επίδραση της ύπαρξης γεωμετρικών ατελειών. Πέραν της χρήσης του υπάρχοντος θεωρητικού υπόβαθρου για τον αναλυτικό υπολογισμό των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, που είναι και το ζητούμενο σε αυτές τις περιπτώσεις, έγινε επίσης ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και αντίστοιχη πειραματική διερεύνηση του φαινομένου.

Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκαν μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για την προσομοίωση του λυγισμού πολύστρωτων δοκών και πλακών με γεωμετρικές ατέλειες προκειμένου να εκπονηθούν αντίστοιχες παραμετρικές μελέτες. Στόχος αυτών των παραμετρικών μελετών είναι να οδηγήσουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τη λυγισμική συμπεριφορά αυτών των κατασκευαστικών φορέων και την επίδραση που έχει σε αυτή, η ενδεχόμενη ύπαρξη γεωμετρικών ατελειών. Επιπλέον, σε αντιστοιχία της παραμετρικής μελέτης λυγισμού των πολύστρωτων πλακών, έγινε και πειραματική διερεύνηση του φαινομένου, με διεξαγωγή κατάλληλων πειραματικών δοκιμών. Οι πειραματικές αυτές δοκιμές αποτελούν ταυτόχρονα μέρος μιας ευρύτερης διαπανεπιστημιακής μελέτης, στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού Δικτύου Αριστείας MARSTRUCT (Network of Excellence in Marine Structures), με απότερο σκοπό τη μελέτη του φαινομένου ως προς τη λυγηρότητα των αντίστοιχων πλακών.

Η προεργασία και γενικά όλη η προετοιμασία της πειραματικής διαδικασίας έγινε στο Εργαστήριο Ναυπηγικής Τεχνολογίας (ENT) της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Η διεξαγωγή των πειραματικών δοκιμών έγινε στις εργαστηριακές εγκαταστάσεις του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του συνεργαζόμενου Πολυτεχνείου της Δανίας (DTU).

Ευχαριστώ θερμά το δάσκαλό μου και επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ, κύριο Νικόλαο Τσούβαλη, για την ουσιαστική καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές του και την εξαιρετική συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας μελέτης. Επίσης, εκφράζω ευχαριστίες στο προσωπικό του ENT και ιδιαίτερα στους κυρίους Θανάση Μαρκουλή και Χάρη Ξάνθη, για τη σημαντική συμβολή τους στην προετοιμασία και διεξαγωγή των πειραματικών δοκιμών.

Η δημιουργική συνεργασία όλων μας αποτέλεσε για μένα μια ξεχωριστή εμπειρία.

Αθήνα, Ιανουάριος 2009

Άρης Π. Πάντος



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## *Κεφάλαιο 1*

### **ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

1.1 ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ .....	1
1.2 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ .....	3
1.3 ΑΤΕΛΕΙΕΣ ΣΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	5
1.4 ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	6

## *Κεφάλαιο 2*

### **ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ**

2.1 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ.....	9
2.2 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ (ΔΟΚΩΝ) ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ.....	10
2.3 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ (ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ).....	16
2.3.1 Ιδιότητες ορθοτροπικής στρώσης .....	17
2.3.2 Αντοχή στρώσης και κριτήρια αστοχίας.....	19
2.3.3 Ιδιότητες πολύστρωτων.....	21
2.3.4 Αντοχή και αστοχία πολύστρωτου.....	22
2.3.5 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού ορθοτροπικών δοκών .....	23
2.3.6 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού ορθοτροπικών πλακών .....	24
2.4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΑΤΕΛΕΙΕΣ .....	25
2.4.1 Μέθοδος Southwell.....	25
2.4.2 Μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων.....	27

## *Κεφάλαιο 3*

### **ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	29
3.2 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	30
3.3 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	32

3.4	ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	33
3.4.1	Περιγραφή και παράμετροι του προβλήματος .....	33
3.4.2	Διαδικασία μοντελοποίησης.....	34
3.4.3	Μη γραμμική ανάλυση και σύγκριση των αποτελεσμάτων .....	36

## **Κεφάλαιο 4**

### **ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ**

4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	41
4.2	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ.....	41
4.2.1	Γενική περιγραφή της μελέτης .....	41
4.2.2	Παράμετροι της μελέτης.....	42
4.2.3	Παράμετροι της μοντελοποίησης .....	43
4.2.4	Αποτελέσματα και σχολιασμός.....	46
4.2.5	Συμπεράσματα.....	54
4.3	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ.....	56
4.3.1	Γενική περιγραφή της μελέτης .....	56
4.3.2	Παράμετροι της μελέτης.....	57
4.3.3	Παράμετροι της μοντελοποίησης .....	61
4.3.4	Αποτελέσματα και σχολιασμός.....	64
4.3.5	Συμπεράσματα.....	74

## **Κεφάλαιο 5**

### **ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ**

5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	75
5.2	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ.....	76
5.2.1	Υλικά & μέθοδος κατασκευής των δοκιμών.....	76
5.2.2	Γεωμετρία των δοκιμών .....	79
5.2.3	Προετοιμασία και κατασκευή των δοκιμών.....	81
5.2.4	Μετρήσεις και τελικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δοκιμών .....	85
5.2.5	Διαδικασία και παράμετροι των δοκιμών .....	90

5.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ .....	95
5.3.1	Επιβαλλόμενο φορτίο και φορτίο αστοχίας των δοκιμίων .....	96
5.3.2	Πλάγιες μετατοπίσεις στο κέντρο των δοκιμίων (LVDT-A, ARAMIS) ....	97
5.3.3	Πειραματική εκτίμηση κρίσιμων φορτίων λυγισμού μέσω των πλάγιων μετατοπίσεων ( $\sigma_{cr-A}$ ).....	100
5.3.4	Αναλυτικός υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού των επίπεδων πλακών .....	104
5.3.5	Πλάγιες μετατοπίσεις της επιφάνειας των δοκιμίων (LVDT-A, B, C).....	106
5.3.6	Διαμήκης θλιπτική μετατόπιση (LVDT-D) .....	109
5.3.7	Διαμήκεις παραμορφώσεις των δοκιμίων .....	110
5.3.8	Πειραματική και θεωρητική εκτίμηση της διαμήκουσ ακαμψίας των δοκιμίων ( $E_x$ ) .....	119
5.3.9	Σύγκριση των παραμορφώσεων μεταξύ των δοκιμίων.....	121
5.3.10	Διαγράμματα Southwell.....	126
5.3.11	Τύπος (μορφή) αστοχίας .....	131
5.4	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΠΣ & ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	132
5.5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	134

## ***Κεφάλαιο 6***

### **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ**

6.1	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	137
6.2	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ .....	139

<b><i>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</i></b> .....	141
----------------------------------	-----





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Σύνθετα υλικά και χρήσεις τους στη ναυπηγική

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει σημειωθεί ραγδαία αύξηση στη χρήση των σύνθετων υλικών σε ποικίλες κατασκευαστικές εφαρμογές και πλέον τα σύνθετα υλικά καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα νέων τεχνολογιών σε πολλούς τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Εισάγοντας μια νέα φιλοσοφία σχεδίασης των κατασκευών με απεριόριστες δυνατότητες βελτιστοποίησής τους, τα σύνθετα υλικά αποτελούν σήμερα την αιχμή του δόρατος στην τεχνολογία των σύγχρονων κατασκευών.

Χαρακτηριστικά όπως το χαμηλό βάρος, η υψηλή αντοχή, οι αντιδιαβρωτικές ιδιότητες, οι πολύ καλές θερμικές, ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες, η εξαιρετική συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγμών, οι σχετικά εύκολες μέθοδοι κατασκευής, καθώς και το χαμηλό κόστος συντήρησης είναι μερικοί απ' τους παράγοντες που οδήγησαν τα σύνθετα υλικά στην πρώτη θέση μεταξύ όλων των κατασκευαστικών υλικών, σε ένα μεγάλο πεδίο εφαρμογών της ναυπηγικής και αεροπορικής βιομηχανίας. Επίσης, κάποια αρχικά μειονεκτήματα, όπως τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανικές φθορές, η ιδιαίτερη και πολλές φορές ευαίσθητη συμπεριφορά σε δύσκολες συνθήκες περιβάλλοντος (θαλάσσιο περιβάλλον, υψηλές θερμοκρασίες, χημικό περιβάλλον, κλπ), το αρκετά υψηλό αρχικό τους κόστος, καθώς και η δυσκολία επιθεώρησής τους, γίνονται ολοένα και μικρότερης σημασίας, λόγω των συνεχών βελτιώσεων στην παραγωγή νέων και καλύτερων ινών, υλικών μήτρας και μεθόδων κατασκευής και επιθεώρησης. [Tsouvalis-1993]

Το μέγεθος και η φύση του αναμενόμενου τασικού πεδίου, οι περιβαλλοντικές συνθήκες, το κόστος και η εμφάνιση του τελικού προϊόντος είναι μερικοί από τους παράγοντες που καθορίζουν την επιλογή του καταλληλότερου συστήματος σύνθετων υλικών μιας κατασκευής. Προς το παρόν, η πλειοψηφία των σκαφών από σύνθετα υλικά κατασκευάζονται κυρίως από απλά και φθηνά πλαστικά (πολυμερή) υλικά ενισχυμένα με ίνες (Fiber Reinforced Plastics – FRP), χρησιμοποιώντας ως επί το πλείστον πολυεστερικές ρητίνες και ενισχυτικές ίνες γυαλιού (Glass Reinforced Plastics – GRP). Ωστόσο, ανάλογα με την κρισιμότητα καθενός από τους παράγοντες που προαναφέρθηκαν, ο σχεδιαστής έχει τη δυνατότητα να επιλέξει ένα συγκεκριμένο είδος ινών (γυαλιού, άνθρακα, γραφίτη, aramid, kevlar, κλπ), συγκεκριμένο είδος συστήματος μήτρας (πολυεστερική ρητίνη, εποξειδική, βινυλεστερική, κλπ), τη μέθοδο πολυμερισμού, την πυκνότητα και το είδος πλέξης των ενισχυτικών ινών, τον αριθμό και τον προσανατολισμό των στρώσεων του τελικού πολύστρωτου, καθώς και τη

μέθοδο κατασκευής, έχοντας έτσι πληθώρα επιλογών για την παραγωγή του τελικού προϊόντος [Tsouvalis-1993].

Στη ναυπηγική βιομηχανία, η χρήση των σύνθετων υλικών αυξάνεται συνεχώς από τις αρχές της δεκαετίας του 1950. Αρχικά, η εφαρμογή της χρήσης τους έγινε κυρίως σε μικρά σκάφη, όπως σωσίβιες λέμβοι και σκάφη αναψυχής, αλλά σταδιακά η πρόοδος της τεχνολογίας των ναυπηγικών κατασκευών έφτασε στο σημείο να παράγει κατασκευές με μάζα εκατοντάδων τόνων. Πλέον, το εύρος των πιθανών εφαρμογών είναι μεγάλο, περιλαμβάνοντας από μικρά κατασκευαστικά στοιχεία, όπως θόλους ραντάρ, κατάρτια και σωληνώσεις, μέχρι κατασκευές μεγαλύτερης κλίμακας, όπως γάστρες και υπερκατασκευές διαφόρων τύπων πλοίων και υποβρυχίων, ή τμήματα υποθαλάσσιων και παράκτιων κατασκευών.

Το μεγαλύτερο εύρος ναυπηγικών εφαρμογών των FRP εντοπίζεται σήμερα κυρίως στα μικρά σκάφη, όπως βοηθητικές και σωστικές λέμβοι, κανό, ταχύπλοα, θαλαμηγοί, και άλλοι τύποι μικρών σκαφών, όπως αλιευτικά (με μήκος μικρότερο των 25 m) τα οποία στο μεγαλύτερο ποσοστό τους είναι κατασκευασμένα από GRP. Ακόμη, η χρήση προηγμένων σύνθετων υλικών έχει βρει εφαρμογή στην κατασκευή αγωνιστικών ιστιοπλοϊκών και ταχύπλοων σκαφών υπερ-υψηλής απόδοσης (Σχήμα 1.1), όπου οι τεράστιες χορηγίες μεγάλων βιομηχανικών ή εμπορικών εταιριών φέρνουν το συνολικό κόστος των σκαφών αυτών σε δεύτερη προτεραιότητα. Τέτοιου είδους εφαρμογές ωθούν την τεχνολογία των σύνθετων υλικών στα όριά της παρέχοντας, μέσω της αποτίμησης των αστοχιών αλλά και των επιτυχιών, πολύτιμη τεχνογνωσία, η οποία ακολούθως εφαρμόζεται στη σχεδίαση κοινών σκαφών [Tsouvalis-1993].



**Σχήμα 1.1:** Αγωνιστικά ιστιοπλοϊκά σκάφη υπερ-υψηλής απόδοσης, πεδίο εφαρμογής καινοτομιών της τεχνολογίας των σύνθετων υλικών.

Οι μεγαλύτερες σε μέγεθος ναυπηγικές κατασκευές σύνθετων υλικών αυτή τη στιγμή είναι τα σκάφη ναρκοπολέμου (Σχήμα 1.2), που κατασκευάζονται από το 1960 για το πολεμικό ναυτικό πολλών εθνών. Οι αντιμαγνητικές ιδιότητες των FRP ήταν ο βασικός λόγος χρήσης τους στην κατασκευή αυτών των σκαφών, σε συνδυασμό με την

καλύτερη συμπεριφορά τους έναντι του ξύλου, που ήταν το παραδοσιακό υλικό κατασκευής τους. Με μήκος που ξεπερνά τα 50 μέτρα, και εκτόπισμα που ξεπερνά τους 500 τόνους, τα σκάφη αυτά αποτελούν ένα σημαντικό πειραματικό πεδίο για την επέκταση της χρήση των FRP σε μεγάλα φορτηγά και επιβατηγά πλοία [Tsouvalis-1993].



**Σχήμα 1.2:** Σκάφος ναρκοπολέμου του Αμερικανικού Πολεμικού Ναυτικού, κλάσης Osprey, κατασκευασμένο από GRP.

## 1.2 Το φαινόμενο του λυγισμού σε κατασκευές από σύνθετα υλικά

Το φαινόμενο του λυγισμού είναι μια μορφή αστάθειας που παρατηρείται σε κατασκευαστικά στοιχεία όπως δοκοί, κύλινδροι ή επίπεδα ελάσματα (πλάκες), και είναι αποτέλεσμα αξονικών ή συνεπίπεδων αντίστοιχα θλιπτικών φορτίσεων που ασκούνται σε αυτά (Σχήμα 1.3). Εξ ορισμού, το φαινόμενο του λυγισμού είναι η απότομη εμφάνιση εγκάρσιων (πλάγιων) μετατοπίσεων ενός κατασκευαστικού στοιχείου, χωρίς σημαντική αύξηση της αξονικής ή συνεπίπεδης θλιπτικής φόρτισης που εφαρμόζεται σε αυτό.



**Σχήμα 1.3:** Σχηματική αναπαράσταση του φαινομένου του λυγισμού σε αμφίπακτη δοκό.

Σε ιδανικές συνθήκες, όπου ένας ιδανικός κατασκευαστικός φορέας δεν έχει καθόλου αρχικές ατέλειες (π.χ. τελείως ευθεία δοκός ή εντελώς επίπεδο έλασμα) και όπου το κέντρο εφαρμογής του θλιπτικού φορτίου συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής, χωρίς την ύπαρξη εγκάρσιων φορτίων, θεωρητικά δεν υπάρχει καμία εγκάρσια μετατόπιση της κατασκευής, όσο το φορτίο που ασκείται είναι μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, παρά μόνο συνεπίπεδες παραμορφώσεις. Στην πραγματικότητα όμως, επειδή οι παραπάνω προϋποθέσεις είναι αδύνατες, κατά την εφαρμογή αξονικού / συνεπίπεδου θλιπτικού φορτίου σε έναν κατασκευαστικό πρισματικό φορέα, παρατηρείται βέλος κάμψης ακόμα και αν το φορτίο είναι μικρότερο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού [Καρύδης-2000].

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του εκάστοτε κατασκευαστικού στοιχείου εξαρτάται κυρίως από το μήκος του, σε σχέση με τις διαστάσεις του, το υλικό κατασκευής και τη γεωμετρική μορφή της εγκάρσιας διατομής του. Έτσι, ο σχεδιαστής μιας κατασκευής καλείται να προσδιορίσει τα στοιχεία αυτής (υλικό, διαστάσεις, γεωμετρική μορφή), όχι μόνο με κριτήριο την αντοχή του υλικού των κατασκευαστικών στοιχείων ως προς το αναμενόμενο τασικό πεδίο, αλλά και με κριτήριο την αποφυγή της εμφάνισης λυγισμού, όταν το φορτίο είναι θλιπτικό.

Στις ναυπηγικές κατασκευές, ο μεγαλύτερος κίνδυνος εμφάνισης λυγισμού παρουσιάζεται τόσο στα ελάσματα της γάστρας των πλοίων και κυρίως σε αυτά του πυθμένα, των καταστρωμάτων και των πλευρικών τοιχωμάτων, όσο και στα διαμήκη ενισχυτικά, λόγω των πρωτεύουσών τάσεων που δημιουργούνται από τις καταστάσεις hogging και sagging. Ειδικά στις κατασκευές από σύνθετα υλικά, όπως για παράδειγμα στα πολυεστερικά σκάφη όπου η μεγάλη αντοχή των υλικών επιτρέπει τη σχεδίαση λεπτότερων τοιχωμάτων της γάστρας και λεπτότερων ενισχυτικών απ' ότι με χρήση συμβατικών (μεταλλικών) υλικών, ο κίνδυνος εμφάνισης λυγισμού είναι ακόμα πιο μεγάλος, λόγω της μικρής καμπτικής δυσκαμψίας των κατασκευαστικών στοιχείων, η οποία οφείλεται και στα μικρά μέτρα ελαστικότητας των σύνθετων υλικών. Είναι

λοιπόν προφανής η επιτακτική ανάγκη εξέτασης της πιθανής εμφάνισης του φαινομένου του λυγισμού σε κατασκευές σκαφών από FRP.

Το μεγαλύτερο μέρος της γάστρας ενός σκάφους κατασκευασμένου από FRP, αποτελείται από ορθογώνιες πολύστρωτες πλάκες, οι οποίες οριοθετούνται από τις διαμήκεις και εγκάρσιες ενισχυτικές δοκούς. Οι συνοριακές συνθήκες των πλακών αυτών θεωρούνται κατά κανόνα πακτωμένες, χωρίς όμως αυτό να είναι πάντα ακριβές, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με τις πλάκες που είναι παρακείμενες στην ακμή της γάστρας (chine). Σε κάθε περίπτωση όμως, είναι γενικά ικανοποιητικό να αγνοείται το γεγονός αυτό και να θεωρούνται οι ακμές αυτές ως πακτωμένες. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι πλάκες μιας γάστρας με καμπυλότητα (π.χ. ενός ιστιοπλοϊκού) είναι εκ φύσεως ανθεκτικότερες και πιο δύσκαμπτες από τυχόν ισοδύναμες επίπεδες πλάκες και, επομένως, η χρήση των θεωριών επίπεδων πλακών στις περιπτώσεις αυτές οδηγεί σε συντηρητικά αποτελέσματα [Τσούβαλης-1998].

Όπως προαναφέρθηκε, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ενός κατασκευαστικού φορέα επηρεάζεται σημαντικά από την ύπαρξη εγκάρσιων φορτίων, από την τυχόν εκκεντρότητα του αξονικού / συνεπίπεδου φορτίου, καθώς και από την ύπαρξη αρχικών παραμορφώσεων (ατελειών) του φορέα. Στην παρούσα εργασία, κύριο αντικείμενο μελέτης αποτελεί η ύπαρξη γεωμετρικών ατελειών σε διάφορα κατασκευαστικά στοιχεία και η επίδρασή τους στο φαινόμενο του λυγισμού. Στην παράγραφο που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι μορφές και τα είδη πιθανών ατελειών (γεωμετρικών κ.α.) που παρατηρούνται σε αντίστοιχες κατασκευές.

### 1.3 Ατέλειες σε κατασκευές από σύνθετα υλικά

Ατέλεια μιας κατασκευής θεωρείται οποιοδήποτε ελάττωμα αυτής, το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα την απόκλιση του τελικού προϊόντος της σχεδίασης από το επιθυμητό - αναμενόμενο. Γενικά, υπάρχουν ατέλειες σε όλων των ειδών και υλικών τις κατασκευές και συνήθως οι αιτίες τους εντοπίζονται σε πιθανά σφάλματα που γίνονται κατά το στάδιο παραγωγής τους. Ειδικά στην περίπτωση των σύνθετων υλικών, λόγω της πολυπλοκότητας του υλικού αλλά και της διαδικασίας παραγωγής, παρατηρούνται ατέλειες πολλών διαφορετικών ειδών, οι οποίες δεν είναι πιθανό να εμφανισθούν σε συμβατικά υλικά, τα οποία είναι κατά κανόνα ομογενή και ισοτροπικά. Επιπλέον, οι περισσότερες από αυτές τις ατέλειες είναι αρκετά δύσκολο να επιδιορθωθούν, λόγω της φύσης των σύνθετων υλικών, τα οποία μετά το στάδιο της κατασκευής δεν είναι εύκολο να υποστούν επεξεργασία, όπως γίνεται με τα υπόλοιπα συμβατικά υλικά (π.χ. περαιτέρω κατεργασία χαλύβδινων κατασκευαστικών στοιχείων).

Τα διάφορα είδη ατελειών μπορούν να εμφανισθούν σε διάφορες κλίμακες. Έτσι, κάθε είδος ατέλειας, σε συνδυασμό και με το μέγεθος της κλίμακάς του, έχει προφανώς και διαφορετική επίδραση στη συμπεριφορά μιας κατασκευής. Γενικότερα, αλλά και ειδικά στην περίπτωση των σύνθετων υλικών, τα είδη των ατελειών μιας κατασκευής μπορούν να διαχωριστούν σε δυο βασικές κατηγορίες: σε ατέλειες που

οφείλονται σε σφάλματα της διαδικασίας παραγωγής και ατέλειες που οφείλονται σε ελαττώματα λόγω γήρανσης ή λόγω έκθεσης σε περιβαλλοντικές συνθήκες [Κουρουπάκη-1999]. Στην πρώτη κατηγορία ατελειών (λόγω κατασκευαστικών σφαλμάτων), η οποία είναι και η πιο σημαντική, συμπεριλαμβάνονται τα εξής είδη (υποκατηγορίες) ατελειών:

- ατέλειες της δομής του υλικού (π.χ. ανεπαρκής δεσμός μεταξύ ινών και μήτρας, αποκόλληση στρώσεων, μικρορηγματώσεις),
- ατέλειες της σύστασης του υλικού (π.χ. κενά αέρα, μεγάλη ή μικρή περιεκτικότητα ινών/ρητίνης, μη στερεοποιημένη ρητίνη),
- ατέλειες της διάταξης των συστατικών του (π.χ. κακή ευθυγράμμιση των ινών),
- ατέλειες της γεωμετρίας (π.χ. γεωμετρικές ανωμαλίες, κύρτωση επιφάνειας).

Όλα τα παραπάνω είδη ατελειών, ανάλογα και με το μέγεθος της εμφάνισής τους, μπορεί να έχουν σημαντική επίδραση στη συμπεριφορά μιας κατασκευής. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα οι γεωμετρικές ατέλειες, καθώς θεωρείται ότι η ύπαρξη τέτοιου είδους ατελειών σε μεγάλη κλίμακα είναι πιθανό να επηρεάσει σημαντικά τη συμπεριφορά μιας κατασκευής, ειδικά σε περιπτώσεις όπου ασκούνται συνεπίπεδα ή αξονικά φορτία, με συνέπεια την αυξημένη επικινδυνότητα εμφάνισης λυγισμού.

Οι πιθανότητες εμφάνισης γεωμετρικών ατελειών είναι ιδιαίτερα αυξημένες στις περιπτώσεις πολύστρωτων που κατασκευάζονται με τη μέθοδο “επίστρωσης με το χέρι” (hand lay up), όπου οι γεωμετρικές ανωμαλίες θεωρούνται πρακτικά σχεδόν αναπόφευκτες. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η πιο συνήθης μορφή γεωμετρικής ατέλειας, ειδικά σε παχιά πολύστρωτα που κατασκευάζονται με αυτή τη μέθοδο, είναι η κύρτωση της πολύστρωτης πλάκας, που μπορεί να συμβεί κατά τη διαδικασία σκλήρυνσης (curing), η οποία είναι συνήθως εξώθερμη διαδικασία [Eckold-1994].

Είναι προφανές ότι στις παραπάνω περιπτώσεις μεγάλο ρόλο στη διαμόρφωση του τελικού προϊόντος παίζουν η εμπειρία και η επιδεξιότητα του τεχνίτη, στοιχεία που μπορούν να περιορίσουν σημαντικά τις γεωμετρικές ατέλειες, όμως η εμφάνισή τους, έστω και σε μικρή κλίμακα, είναι πάντα αναμενόμενη. Για το λόγο αυτό, οι γεωμετρικές ατέλειες αποτελούν αντικείμενο ειδικής μελέτης στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας και θα γίνει προσπάθεια εκτίμησης της επίδρασης των ατελειών αυτών στη λυγισμική συμπεριφορά κατασκευών από σύνθετα υλικά.

## 1.4 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του φαινομένου του λυγισμού σε κατασκευές από σύνθετα υλικά (πολύστρωτα FRP) που παρουσιάζουν έντονες γεωμετρικές ατέλειες. Συγκεκριμένα, γίνεται μελέτη τόσο για κατασκευαστικές δοκούς, όσο και για ορθογώνιες πλάκες, με συνοριακές συνθήκες πάκτωσης, αφού όπως ήδη αναφέρθηκε, τέτοιου είδους

κατασκευαστικά στοιχεία αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος της γάστρας ενός σκάφους από FRP και επομένως, ο ορθολογικός σχεδιασμός αυτών των στοιχείων μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικό περιορισμό του συνολικού βάρους μιας κατασκευής. Με χρήση αναλυτικών αλλά και αριθμητικών μεθόδων, γίνεται προσέγγιση της λυγισμικής συμπεριφοράς (εκτίμηση κρίσιμου φορτίου λυγισμού) αυτών των κατασκευαστικών στοιχείων (δοκοί & πλάκες), ενώ για την εκτίμηση της επίδρασης των γεωμετρικών ατελειών στη συμπεριφορά αυτή, διενεργούνται αντίστοιχες παραμετρικές μελέτες με χρήση της μεθόδου αριθμητικής μοντελοποίησης πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method – FEM), χρησιμοποιώντας ως παραμέτρους την κλίμακα, την έκταση, αλλά και το σημείο εμφάνισης της ατέλειας. Τέλος, μεγάλο μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η προσπάθεια πειραματικής διερεύνησης της συμπεριφοράς σε λυγισμό πακτωμένων ορθογώνιων πολύστρωτων πλακών από FRP, που παρουσιάζουν σημαντικές γεωμετρικές ατέλειες.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

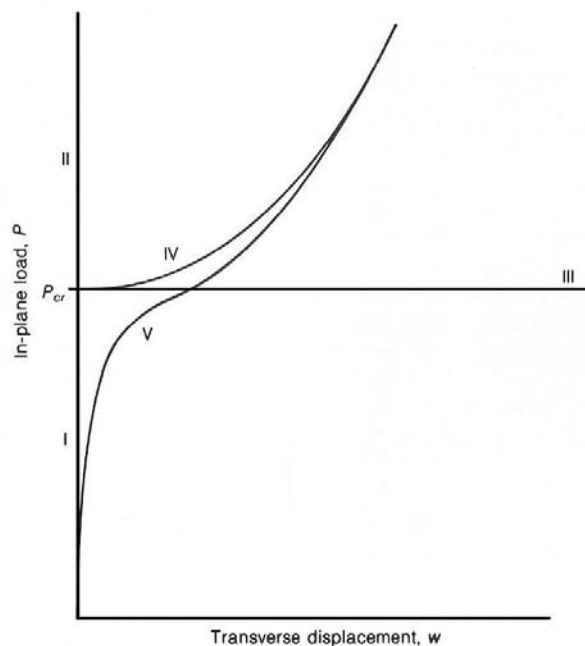
### ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ

#### 2.1 Γενική περιγραφή του φαινομένου του λυγισμού

Όπως προαναφέρθηκε στο εδάφιο 1.2, ο λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας που εμφανίζεται σε κατασκευαστικούς φορείς (δοκούς ή πλάκες), ως αποτέλεσμα αξονικών ή συνεπίπεδων αντίστοιχα θλιπτικών φορτίσεων. Η κλασική θεωρία λυγισμού βασίζεται στη μελέτη της καμπύλης λυγισμού, δηλαδή του διαγράμματος του αξονικού ή συνεπίπεδου φορτίου, ως προς την εγκάρσια ή πλάγια αντίστοιχα μετατόπιση ενός αντιπροσωπευτικού σημείου της δοκού ή της πλάκας, που συνήθως αυτό λαμβάνεται ως το μέσον του μήκους της δοκού ή το κέντρο της επιφάνειας της πλάκας αντίστοιχα. [Turvey et al.-1995].

Με αναφορά στο διάγραμμα (καμπύλη λυγισμού) του Σχήματος 2.1 [Turvey et al.-1995], η κλασική θεωρία ελαστικού λυγισμού βασίζεται στην ασταθή λυγισμική συμπεριφορά (bifurcational behavior) που σχηματίζεται μέσω των τμημάτων I, II και III του διαγράμματος αυτού. Με αύξηση δηλαδή του αξονικού / συνεπίπεδου φορτίου από μηδενική τιμή μέχρι το σημείο του κρίσιμου φορτίου ( $P_{cr}$ ), δεν υπάρχει καμία εγκάρσια / πλάγια μετατόπιση και η καμπύλη ακολουθεί το τμήμα I του διαγράμματος. Μόλις το φορτίο φτάσει την κρίσιμη τιμή ( $P_{cr}$ ), που είναι και το σημείο αστάθειας (bifurcation point), η καμπύλη θεωρητικά μπορεί είτε να συνεχίσει στη μεταλυγισμική περιοχή κατά τον ίδιο τρόπο προς τα πάνω στο τμήμα II, είτε να ακολουθήσει την καμπύλη λυγισμού. Εάν θεωρήσουμε τη γραμμική εξιδανίκευση του φαινομένου, η καμπύλη αυτή θα είναι οριζόντια (τμήμα III), αλλά σε μια μη-γραμμική ανάλυση (μεγάλων μετατοπίσεων) θα έχει αυξανόμενη κλίση (τμήμα IV). Αυτή η μεταλυγισμική συμπεριφορά είναι πολύ σημαντική για τους διάφορους κατασκευαστικούς φορείς, γιατί τους επιτρέπει να παραλάβουν επιπλέον φορτία, μεγαλύτερα του φορτίου λυγισμού ( $P_{cr}$ ), πριν την τελική τους κατάρρευση [Turvey et al.-1995].

Όπως εξεξηγήθηκε και στο εδάφιο 1.2, τα παραπάνω ισχύουν για ιδανικές περιπτώσεις φορέων (τελείως ευθειών δοκών ή εντελώς επίπεδων πλακών), όπου το κέντρο εφαρμογής του θλιπτικού φορτίου συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής και όπου δεν επιδρούν άλλα (εγκάρσια) φορτία. Αυτές οι συνθήκες όμως πρακτικά δε συναντώνται πουθενά και έτσι, για ρεαλιστικές περιπτώσεις κατασκευαστικών στοιχείων που υπόκεινται σε λυγισμό, η αντίστοιχη καμπύλη του διαγράμματος του Σχήματος 2.1 θα είχε τη μορφή της καμπύλης V [Turvey et al.-1995].



Σχήμα 2.1: Αντιπροσωπευτικές καμπύλες λυγισμού.

## 2.2 Λυγισμός ισοτροπικών πρισματικών φορέων (δοκών) και πλακών

### α) Πρισματικοί φορείς (δοκοί)

Σύμφωνα με τη γενικευμένη μαθηματική θεωρία του Euler για τη συμπεριφορά ισοτροπικών, τελείως ελαστικών, πρισματικών φορέων (δοκών) σχετικά μεγάλου μήκους υπό θλιπτικές φορτίσεις με διάφορες συνοριακές συνθήκες, το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού ( $P_E$ ) δίνεται μέσω της ακόλουθης σχέσης [Pignataro et al.-1991]:

$$P_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_E^2} \quad [2.1]$$

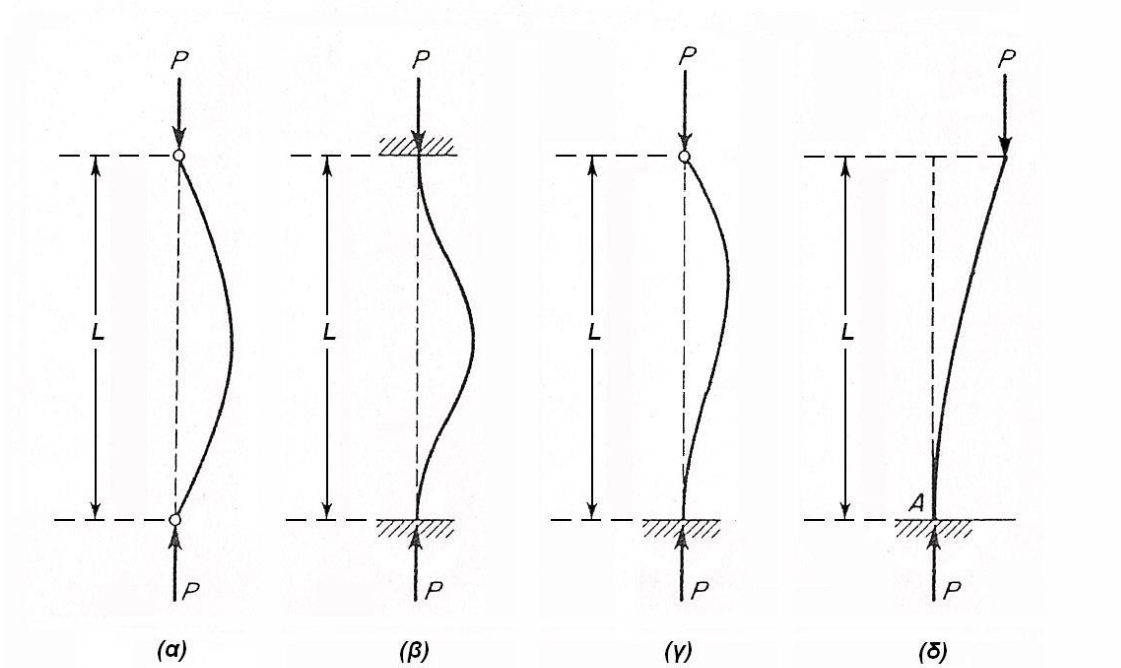
όπου:  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

$I$  είναι η ροπή αδράνειας της διατομής περί τον άξονα κάμψης

$L_E$  είναι το ισοδύναμο μήκος λυγισμού

Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού ( $L_E$ ) του εκάστοτε πρισματικού φορέα υπολογίζεται συναρτήσει των συνοριακών συνθηκών των δύο άκρων του, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.2, ως εξής:

- Περίπτωση (α) – Απλά εδρασμένα άκρα:  $L_E = L$
- Περίπτωση (β) – Πάκτωμένα άκρα:  $L_E = 0.5 L$
- Περίπτωση (γ) – Πάκτωμένο άκρο - απλά εδρασμένο άκρο:  $L_E = 0.7 L$
- Περίπτωση (δ) – Πάκτωμένο άκρο - ελεύθερο άκρο:  $L_E = 2 L$



Σχήμα 2.2: Περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών λυγισμού δοκών.

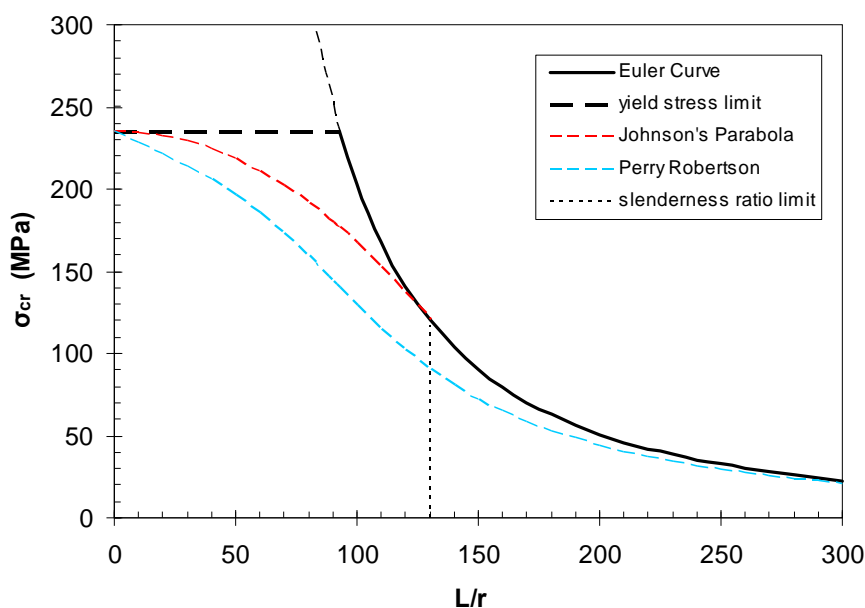
Διαιρώντας τα δυο μέλη της σχέσης 2.1 με το εμβαδόν της διατομής ( $A$ ) και εισάγοντας το μέγεθος της ακτίνας αδράνειας της διατομής  $r = \sqrt{I/A}$ , καταλήγουμε στη σχέση για την κρίσιμη τάση ελαστικού λυγισμού:

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L_E}{r}\right)^2} \quad [2.2]$$

όπου ο λόγος  $\left(\frac{L_E}{r}\right)$  καλείται βαθμός λυγηρότητας του πρισματικού φορέα.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 2.3, όπου παρουσιάζεται γραφικά η κρίσιμη τάση λυγισμού ενός πρισματικού φορέα συναρτήσει του βαθμού λυγηρότητάς του, φαίνεται η γνωστή καμπύλη του Euler για υλικό κοινού ναυπηγικού χάλυβα ( $E = 206 \text{ GPa}$ ). Όπως προαναφέρθηκε και λόγω της παραδοχής πλήρως ελαστικής συμπεριφοράς, φαίνεται από το διάγραμμα αυτό (Σχήμα 2.3) ότι η καμπύλη του Euler έχει εφαρμογή μόνο σε πρισματικούς φορείς με σχετικά μεγάλο μήκος και αντίστοιχα μεγάλο βαθμό λυγηρότητας ( $L/r > 100$  περίπου), αφού παρατηρείται ότι για μικρούς βαθμούς λυγηρότητας ( $L/r < 100$  περίπου), η κρίσιμη τάση ελαστικού λυγισμού κατά Euler

περιορίζεται από την τάση διαρροής του υλικού ( $\sigma_y = 235$  MPa). Στην πραγματικότητα, για μικρούς βαθμούς λυγηρότητας, η συμπεριφορά του φορέα παύει να είναι ελαστική, καθώς αρχίζουν να αναπτύσσονται πλαστικές ζώνες σε κρίσιμα σημεία του [Καρύδης-2000]. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι ένας φορέας μικρού βαθμού λυγηρότητας αναμένεται να καταρρεύσει πλαστικά, χωρίς να εμφανιστεί φαινόμενο ελαστικού λυγισμού. Για το λόγο αυτό, έχουν προταθεί ορισμένες σχέσεις που περιγράφουν τον ελαστοπλαστικό λυγισμό πρισματικών φορέων, όπως η εξίσωση Perry Robertson και η παραβολή του Johnson, οι γραφικές απεικονίσεις των οποίων φαίνονται επίσης στο διάγραμμα του Σχήματος 2.3, ενώ οι μαθηματικές τους εκφράσεις δίνονται στη συνέχεια [Καρύδης-2000].



**Σχήμα 2.3:** Καμπύλη Euler και καμπύλες ελαστοπλαστικού σχεδιασμού ισοτροπικών πρισματικών φορέων.

- Εξίσωση Perry Robertson:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2} [\sigma_y + (1 + \eta)\sigma_E] - \sqrt{\frac{1}{4} [\sigma_y + (1 + \eta)\sigma_E]^2 - \sigma_y \sigma_E} \quad [2.3]$$

όπου:  $\sigma_y$  είναι η τάση διαρροής του υλικού (yield stress)

$\sigma_E$  είναι η κρίσιμη τάση ελαστικού λυγισμού κατά Euler

$\eta = 0.003 (L/r)$  είναι γεωμετρικός συντελεστής της διατομής

- Παραβολή του Johnson:

$$\text{για } \sigma_E \leq \frac{\sigma_y}{2} : \sigma_{cr} = \sigma_E \quad [2.4\alpha]$$

$$\text{για } \sigma_E > \frac{\sigma_y}{2} : \sigma_{cr} = \sigma_y \left( 1 - \frac{\sigma_y}{4 \cdot \sigma_E} \right) \quad [2.4\beta]$$

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα του Σχήματος 2.3, η εξίσωση Perry Robertson λαμβάνει υπόψη την πλαστική συμπεριφορά των φορέων κάθε βαθμού λυγηρότητας, ενώ η παραβολή του Johnson κάνει το ίδιο μόνο για φορείς με βαθμό λυγηρότητας μικρότερο από ένα συγκεκριμένο όριο ( $L/r < 130$  περίπου για το ναυπηγικό χάλυβα), δίνοντας έτσι λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα.

### β) Επίπεδοι φορείς (πλάκες)

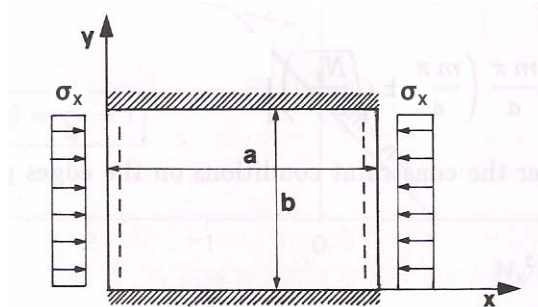
Στην περίπτωση μονοαξονικής, συνεπίπεδης, ομοιόμορφης, θλιπτικής φόρτισης ισοτροπικών πλακών διαφόρων συνοριακών συνθηκών με διαστάσεις ( $a \times b$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4 και πάχος  $t$ , το κρίσιμο φορτίο (τάση) ελαστικού λυγισμού μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης του Bryan [Καρύδης-2000]:

$$\sigma_{cr} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot t} \quad [2.5]$$

όπου:  $D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$  είναι η καμπτική δυσκαμψία της πλάκας.

$k$  είναι ο συντελεστής λυγισμού που εξαρτάται από το λόγο πλευρών και δίνεται από το διάγραμμα του Σχήματος 2.5 [Pignataro et al.-1991] για διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών.

$\nu$  είναι ο λόγος poisson του υλικού (0.3 για ναυπηγικό χάλυβα).



Σχήμα 2.4: Πλάκα υπό μονοαξονική, συνεπίπεδη, ομοιόμορφη, θλιπτική φόρτιση.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 2.5, ο διαχωρισμός των διαφόρων περιπτώσεων ως προς τις συνοριακές συνθήκες των αφόρτιστων πλευρών της εκάστοτε υπό εξέταση πλάκας έχει ως εξής:

Περίπτωση Α : Και οι δύο αφόρτιστες πλευρές πακτωμένες.

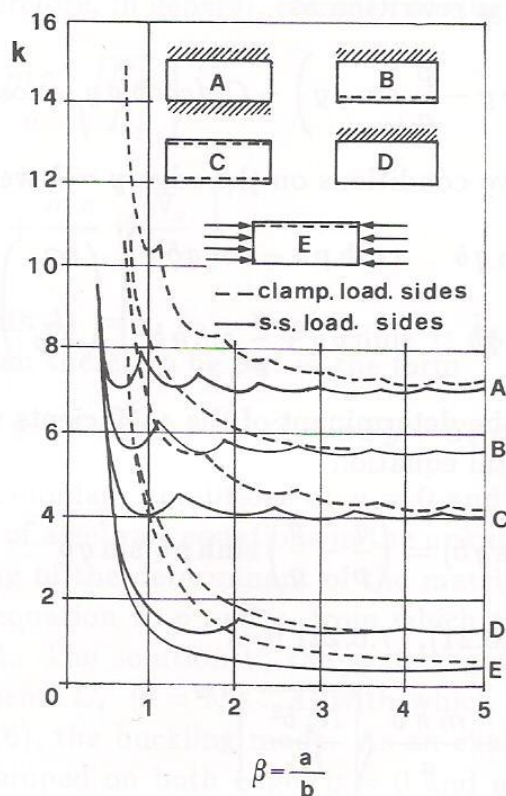
Περίπτωση Β : Η μία αφόρτιστη πλευρά πακτωμένη και η άλλη απλά εδρασμένη.

Περίπτωση C : Και οι δύο αφόρτιστες πλευρές απλά εδρασμένες.

Περίπτωση D : Η μία αφόρτιστη πλευρά πακτωμένη και η άλλη ελεύθερη.

Περίπτωση E : Η μία αφόρτιστη πλευρά απλά εδρασμένη και η άλλη ελεύθερη.

Ο περαιτέρω διαχωρισμός των παραπάνω περιπτώσεων ως προς τις συνοριακές συνθήκες των φορτιζόμενων πλευρών γίνεται με διαφορετικό είδος γραμμών, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, δηλαδή οι καμπύλες διακεκομμένης γραμμής αντιστοιχούν στην περίπτωση πακτωμένων φορτιζόμενων άκρων, ενώ οι καμπύλες συνεχούς γραμμής αντιστοιχούν στην περίπτωση απλά εδρασμένων φορτιζόμενων άκρων.



**Σχήμα 2.5:** Συντελεστής λυγισμού ισοτροπικών πλακών  $k$ , συναρτήσει του λόγου πλευρών  $\beta = a/b$ , για διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών.

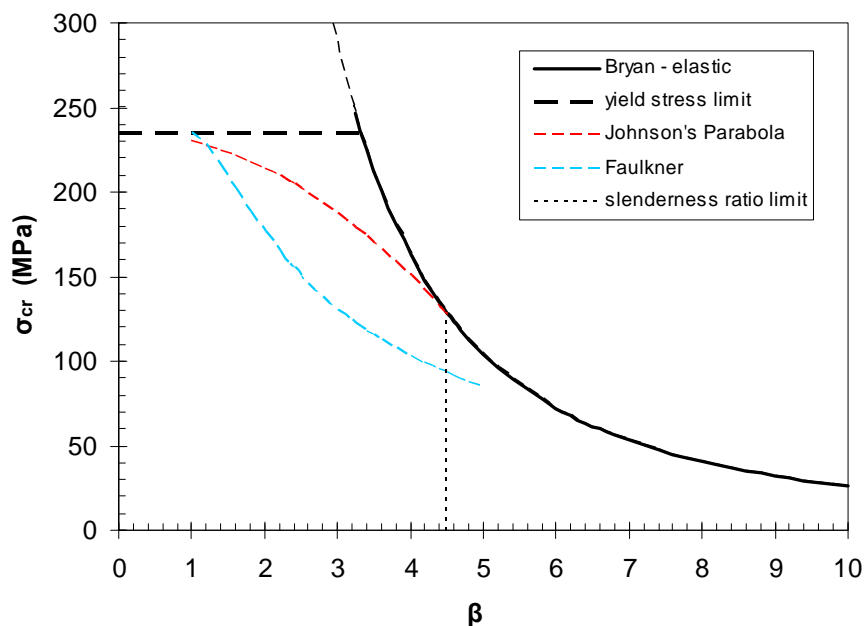
Το μέγεθος της λυγηρότητας μιας ισοτροπικής πλάκας ορίζεται ως εξής:

$$\beta = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad [2.6]$$

Έτσι, η σχέση του Bryan (σχέση 2.5), μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα με χρήση των σχέσεων ορισμού των μεγεθών καμπτικής ακαμψίας ( $D$ ) και λυγηρότητας ( $\beta$ ), ώστε να παραχθεί η ακόλουθη σχέση που δίνει το κρίσιμο φορτίο (τάση) ελαστικού λυγισμού ορθοτροπικών πλακών συναρτήσει της λυγηρότητας αυτών:

$$\sigma_{cr} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot \sigma_y}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \beta^2} \quad [2.5']$$

Στο διάγραμμα του Σχήματος 2.6 που ακολουθεί, παρουσιάζεται γραφικά αυτή η σχέση, για ελάσματα από υλικό κοινού ναυπηγικού χάλυβα ( $E=206 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ), για την ενδεικτική περίπτωση όπου οι πλευρές φόρτισης του ελάσματος είναι πακτωμένες, ενώ οι άλλες δύο πλευρές είναι απλά εδρασμένες, με λόγο πλευρών  $a/b=1$  ( $k \cong 6.6$  από Σχήμα 2.5).



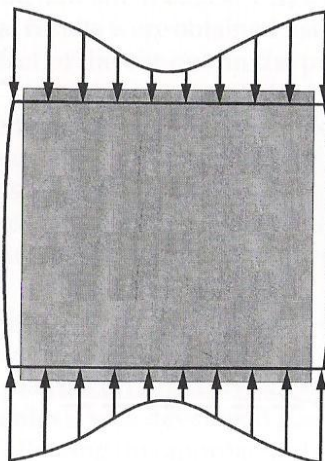
**Σχήμα 2.6:** Ενδεικτική καμπύλη Bryan και καμπύλες ελαστοπλαστικού σχεδιασμού ελασμάτων (περίπτωση τετράγωνου ελάσματος κοινού ναυπηγικού χάλυβα, με τις φορτιζόμενες πλευρές πακτωμένες και τις αφόρτιστες απλά εδρασμένες,  $k=6.6$ ).

Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται ότι, όπως και με την καμπύλη του Euler για ελαστικές δοκούς, έτσι και η σχέση του Bryan έχει εφαρμογή μόνο σε λεπτές πλάκες μεγάλης λυγηρότητας (στη συγκεκριμένη περίπτωση για  $\beta > 4.5$  ή  $t < b/130$  περίπου), αφού σε ελάσματα με μικρότερη λυγηρότητα, προηγείται τοπική πλαστικοποίηση του υλικού σε κρίσιμες περιοχές, πριν τον ελαστικό λυγισμό. Αυτές οι κρίσιμες περιοχές εμφανίζονται συνήθως κατά μήκος των αφόρτιστων πλευρών [Καρύδης-2000], λόγω της κατανομής των τάσεων, η οποία έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 2.7.

Έτσι, προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η ελαστοπλαστική συμπεριφορά των ελασμάτων, κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση των δοκών, μπορεί να εφαρμοσθεί η παραβολή του Johnson (σχέσεις 2.4α και 2.4β), ή η σχέση του Faulkner, η μαθηματική

έκφραση της οποίας δίνεται ακολούθως [Καρύδης-2000] και ισχύει για ελάσματα μικρής λυγηρότητας ( $\beta < 5$ ), όπως φαίνεται και στην εφαρμογή του Σχήματος 2.6.

- Σχέση Faulkner: 
$$\sigma_{cr} = \sigma_y \cdot \left( \frac{2}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) \quad [2.7]$$



Σχήμα 2.7: Κατανομή των τάσεων λυγισμού πλάκας.

### 2.3 Λυγισμός πολύστρωτων δοκών και πλακών (από σύνθετα υλικά)

Σε αυτό το εδάφιο θα γίνει αρχικά μια σύντομη αναφορά στις βασικές εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά των ορθοτροπικών και των πολύστρωτων υλικών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στις αναλυτικές μεθόδους εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού πολύστρωτων δοκών και πλακών. Οι αναλυτικές αυτές μέθοδοι που αναφέρονται στη συνέχεια, βασίζονται σε υπολογισμούς της κλασικής θεωρίας πολύστρωτων - ΚΘΠ (classical lamination theory - CLT).

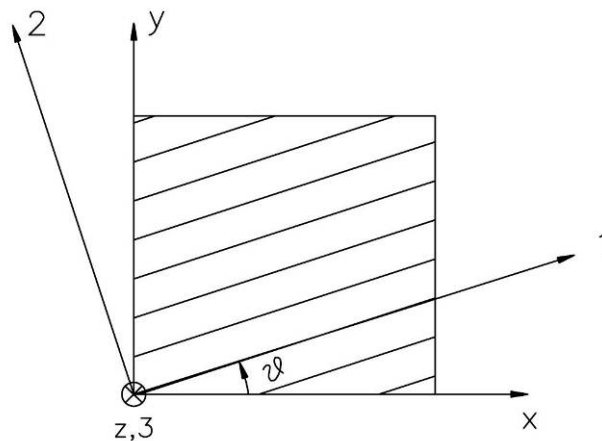
Οι δύο βασικές παραδοχές της ΚΘΠ είναι η ύπαρξη επίπεδης εντατικής κατάστασης και η ισχύς της υπόθεσης Kirchhoff. Η μεν επίπεδη εντατική κατάσταση αγνοεί τις εγκάρσιες διατμητικές τάσεις και τις ορθές τάσεις που αναπτύσσονται κατά το πάχος θεωρώντας τις ως αμελητέες σε σχέση με τις υπόλοιπες, η δε υπόθεση Kirchhoff απαιτεί δύο συνθήκες. Πρώτον, θεωρείται ότι ένα γραμμικό στοιχείο κάθετο στη μέση επιφάνεια δεν επιμηκύνεται ούτε μικραίνει υπό την επίδραση της φόρτισης, έτσι ώστε να μπορούν να αγνοηθούν οι παραμορφώσεις που είναι κάθετες στο μέσο επίπεδο. Δεύτερον, θεωρείται ότι γραμμές που είναι αρχικά ευθείες και κάθετες στη μέση επιφάνεια, παραμένουν ευθείες και κάθετες σε αυτήν υπό την επίδραση της φόρτισης, αγνοούνται δηλαδή οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις. [Τσούβαλης-1998]



Στην ουσία, οι παραπάνω απλοποιητικές υποθέσεις της ΚΘΠ ερμηνεύουν την γραμμική κατά το πάχος μεταβολή των παραμορφώσεων, κάτι που ισχύει γενικά μόνο σε λεπτά πολύστρωτα. Σε πιο παχιές κατασκευές, όπου η μορφή της κατά το πάχος μεταβολής των παραμορφώσεων απέχει αρκετά από τη γραμμική, υπάρχει σημαντική ανάπτυξη διαστρωματικών τάσεων, κυρίως στα ελεύθερα άκρα των πολύστρωτων, που μπορούν να έχουν σημαντική επίδραση στη συμπεριφορά και την αντοχή τους. Οι υπολογισμοί αυτών των διαστρωματικών τάσεων γίνονται συνήθως για συγκεκριμένες περιπτώσεις (γεωμετρία και ακολουθία των στρώσεων) και βασίζονται τόσο σε αριθμητικές όσο και σε αναλυτικές μεθόδους [Agarwal-1990], που δε θα αναφερθούν στην παρούσα διπλωματική εργασία.

### 2.3.1 Ιδιότητες ορθοτροπικής στρώσης

Βάση για την ΚΘΠ αποτελεί η μελέτη μιας μεμονωμένης στρώσης ορθοτροπικού υλικού, της οποίας το γεωμετρικό και κύριο σύστημα αξόνων του υλικού ορίζονται στο Σχήμα 2.8.



**Σχήμα 2.8:** Γεωμετρικό (x,y,z) και κύριο (1,2,3) σύστημα αξόνων του υλικού ορθοτροπικής στρώσης.

Με την παραδοχή επίπεδης εντατικής κατάστασης που διέπει την ΚΘΠ, το μητρώο δυσκαμψίας της στρώσης ως προς το κύριο σύστημα αξόνων του υλικού έχει ως εξής:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad [2.8]$$

όπου οι δυσκαμψίες  $Q_{ij}$  δίνονται συναρτήσει των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού, επίσης ως προς το κύριο σύστημα αξόνων του υλικού, από τις σχέσεις:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \quad [2.9\alpha]$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = Q_{21} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \quad [2.9\beta]$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \quad [2.9\gamma]$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad [2.9\delta]$$

Έτσι, με αναφορά στο κύριο σύστημα αξόνων του υλικού, οι σχέσεις συνεπίπεδων τάσεων - παραμορφώσεων μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad [2.10]$$

Αντίστοιχα, σε ένα διαφορετικό σύστημα αξόνων, όπως το γεωμετρικό, η σχέση τάσεων - παραμορφώσεων είναι:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [2.11]$$

όπου οι όροι  $\bar{Q}_{ij}$  ονομάζονται ανηγμένες δυσκαμψίες.

Το μητρώο των ανηγμένων δυσκαμψιών μιας ορθοτροπικής στρώσης, με το κύριο σύστημα αξόνων του υλικού προσανατολισμένο κατά γωνία  $\theta$  ως προς το γεωμετρικό σύστημα αξόνων (Σχήμα 2.8), ονομάζεται μητρώο ανηγμένης δυσκαμψίας και δίνεται από τη σχέση:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T] \quad [2.12]$$

όπου τα μητρώα  $[T]$  και  $[T]^{-1}$  είναι:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & -2 \cdot m \cdot n \\ -m \cdot n & m \cdot n & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}, \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 2 \cdot m \cdot n \\ m \cdot n & -m \cdot n & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad [2.13]$$

με  $m = \cos \theta$  και  $n = \sin \theta$ .

### 2.3.2 Αντοχή στρώσης και κριτήρια αστοχίας

Σε μια στρώση ορθοτροπικού υλικού, οι βασικές αντοχές ως προς τις κύριες διευθύνσεις του υλικού καθορίζονται με απλές τυποποιημένες πειραματικές δοκιμές και είναι οι εξής:

- $X_t$  : Αντοχή σε εφελκυσμό στη διεύθυνση 1
- $X_c$  : Αντοχή σε θλίψη στη διεύθυνση 1
- $Y_t$  : Αντοχή σε εφελκυσμό στη διεύθυνση 2
- $Y_c$  : Αντοχή σε θλίψη στη διεύθυνση 2
- $S$  : Αντοχή σε διάτμηση στο επίπεδο 1-2

Επειδή όμως το τασικό πεδίο είναι συνήθως πολύπλοκο και οι κατασκευές υπόκεινται σε διαξονικές εντατικές καταστάσεις, ο έλεγχος της αντοχής τους γίνεται με χρήση κάποιων κριτηρίων αστοχίας, γνωρίζοντας τις αντοχές μονοαξονικής εντατικής κατάστασης. Προφανώς, για να γίνει χρήση αυτών των κριτηρίων, χρειάζεται η γνώση του τασικού πεδίου στις κύριες διευθύνσεις του υλικού, που μπορεί να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad [2.14]$$

Τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα κριτήρια αστοχίας είναι το κριτήριο μέγιστης τάσης, το κριτήριο μέγιστης παραμόρφωσης και το κριτήριο Tsai-Wu [Spyrakos et al.-1999], που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

#### α) Κριτήριο μέγιστης τάσης

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, παρουσιάζεται αστοχία σε μία στρώση όταν οποιαδήποτε από τις τάσεις στις κύριες διευθύνσεις του υλικού υπερβεί την αντίστοιχη αντοχή, όταν δηλαδή παύει να ικανοποιείται κάποια από τις παρακάτω συνθήκες:

$$X_t < \sigma_1 < X_c \quad [2.15\alpha]$$

$$Y_t < \sigma_2 < Y_c \quad [2.15\beta]$$

$$|\tau_{12}| < S \quad [2.15\gamma]$$

#### β) Κριτήριο μέγιστης παραμόρφωσης

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, παρουσιάζεται αστοχία σε μία στρώση όταν οποιαδήποτε από τις παραμορφώσεις στις κύριες διευθύνσεις του υλικού υπερβεί την αντίστοιχη επιτρεπόμενη τιμή. Εάν το υλικό θεωρηθεί γραμμικά ελαστικό μέχρι τη θραύση, οι επιτρεπόμενες τιμές των παραμορφώσεων ορίζονται ως το πηλίκο της εκάστοτε αντοχής σε μια διεύθυνση (ή επίπεδο) προς το αντίστοιχο μέτρο

ελαστικότητας (ή διάτμησης). Επομένως, θεωρείται ότι η αστοχία επέρχεται όταν παύει να ικανοποιείται κάποια από τις παρακάτω συνθήκες:

$$\frac{X_t}{E_1} < \varepsilon_1 < \frac{X_c}{E_1} \quad [2.16\alpha]$$

$$\frac{X_t}{E_2} < \varepsilon_2 < \frac{X_c}{E_2} \quad [2.16\beta]$$

$$|\gamma_{12}| < \frac{S}{G_{12}} \quad [2.16\gamma]$$

### γ) Κριτήριο Tsai-Wu

Το κριτήριο αυτό είναι ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα “quadratic” κριτήρια (δεύτερης τάξης), τα οποία σε αντίθεση με τα κριτήρια μέγιστης τάσης και μέγιστης παραμόρφωσης, λαμβάνουν υπόψη την αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφόρων συνιστωσών της τάσης, η οποία μπορεί να επηρεάσει την αστοχία του υλικού. Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο Tsai-Wu, στην περίπτωση μιας ορθοτροπικής στρώσης σε συνθήκες επίπεδης εντατικής κατάστασης, παρουσιάζεται αστοχία όταν παύει να ικανοποιείται η σχέση:

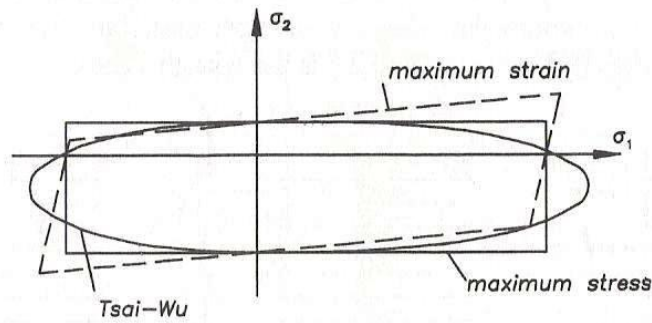
$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 < 1 \quad [2.17]$$

$$\text{όπου: } F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} \quad , \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \quad [2.18\alpha]$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t \cdot X_c} \quad , \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t \cdot Y_c} \quad [2.18\beta]$$

$$F_{12} = -\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \quad , \quad F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad [2.18\gamma]$$

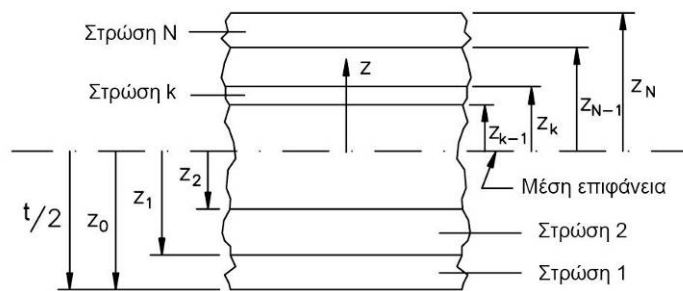
Στο Σχήμα 2.9 [Spyrakos et al.-1999] που ακολουθεί, φαίνεται γραφικά η σύγκριση των τριών κριτηρίων αστοχίας που παρουσιάστηκαν σε αυτό το εδάφιο, για την περίπτωση μιας μονοαξονικής στρώσης. Παρατηρείται ότι οι αντοχές μονοαξονικής φόρτισης στις κύριες διευθύνσεις του υλικού είναι ίδιες σύμφωνα με όλα τα κριτήρια, αλλά σε διαφορετικές καταστάσεις συνδυασμένης διαξονικής φόρτισης υπάρχουν σχετικές αποκλίσεις.



Σχήμα 2.9: Σύγκριση κριτηρίων αστοχίας μιας μονοαξονικής στρώσης στο χώρο των τάσεων.

### 2.3.3 Ιδιότητες πολύστρωτων

Η αρίθμηση των στρώσεων που ακολουθείται κατά την ανάλυση ενός πολύστρωτου, φαίνεται στο Σχήμα 2.10 που ακολουθεί, όπου με  $N$  συμβολίζεται ο συνολικός αριθμός των στρώσεων, ενώ με  $k$  συμβολίζεται μια τυχαία στρώση ( $k \leq N$ ).



Σχήμα 2.10: Εγκάρσια τομή ενός πολύστρωτου που αποτελείται από  $N$  στρώσεις.

Οι δυσκαμψίες ενός πολύστρωτου εκφράζονται μέσω των μητρώων δυσκαμψίας του  $[A]$ ,  $[B]$  και  $[D]$ , που ονομάζονται μητρώο εκτατικής δυσκαμψίας (extensional stiffness matrix), μητρώο σύζευξης (coupling matrix) και μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας (bending stiffness matrix) αντίστοιχα:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \quad [2.19]$$

Ο υπολογισμός των στοιχείων των παραπάνω μητρώων δυσκαμψίας γίνεται μέσω των σχέσεων:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad [2.20\alpha]$$

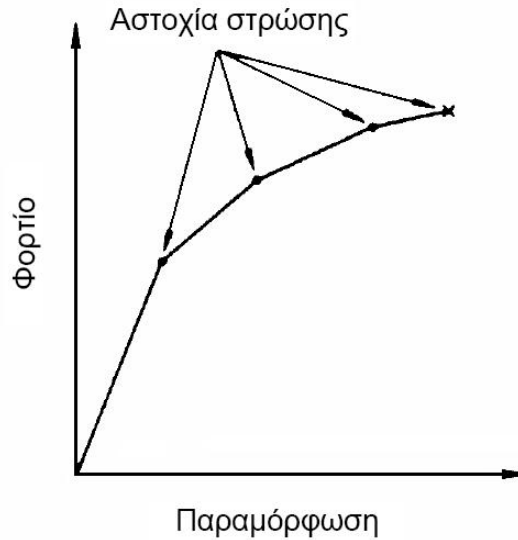
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad [2.20\beta]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad [2.20\gamma]$$

### 2.3.4 Αντοχή και αστοχία πολύστρωτου

Τα κριτήρια αστοχίας που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο 2.3.2 αναφέρονται στην αντοχή μιας μεμονωμένης στρώσης που υποβάλλεται σε κάποιο τασικό πεδίο. Έτσι, στην περίπτωση ενός πολύστρωτου και με δεδομένη τη φόρτιση, μπορεί να υπολογισθεί το αν θα αστοχήσει κάποια από τις στρώσεις του, σύμφωνα με τις αντοχές και τον προσανατολισμό των ινών της κάθε μίας. Αντίστροφα, μπορεί να υπολογισθεί το φορτίο για το οποίο θα αστοχήσει η πρώτη στρώση του πολύστρωτου, και να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο αστοχίας ενός πολύστρωτου, γνωστό ως “αστοχία πρώτης στρώσης” (first ply failure) [Τσούβαλης-1998].

Επειδή όμως η αστοχία της πρώτης στρώσης μπορεί να συμβεί σε σχετικά μικρά φορτία, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση μιας μονοαξονικής στρώσης με διεύθυνση ινών κάθετα στη διεύθυνση φόρτισης, το πολύστρωτο μπορεί να μην κινδυνεύει πραγματικά να αστοχήσει ολοκληρωτικά, έχοντας ακόμα τη δυνατότητα να παραλάβει φορτία. Σε αυτήν την περίπτωση, η αστοχία μιας στρώσης έχει ως αποτέλεσμα την, έστω και μικρή, μείωση της δυσκαμψίας του πολύστρωτου, η οποία όμως γίνεται σημαντική καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στρώσεων που έχουν αστοχήσει. Σαν αποτέλεσμα, η απόκριση του πολύστρωτου αποκλίνει σταδιακά από την αρχική γραμμική συμπεριφορά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11 [Agarwal-1990], όπου κάθε “γόνατο” της καμπύλης αντιστοιχεί και σε μία αστοχία στρώσης. Ο υπολογισμός αυτής της προοδευτικής αστοχίας (progressive failure) ενός πολύστρωτου γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή των ανηγμένων δυσκαμψιών των στρώσεων που έχουν αστοχήσει, θεωρώντας ως μια συντηρητική προσέγγιση το μηδενισμό των μηχανικών ιδιοτήτων αυτών των στρώσεων [Τσούβαλης-1998].



**Σχήμα 2.11:** Προοδευτική αστοχία πολύστρωτου (progressive failure).

Με βάση την παραπάνω ανάλυση προοδευτικής αστοχίας (progressive failure analysis), εναλλακτικό κριτήριο αστοχίας ενός πολύστρωτου, σε αντιστοιχία με το κριτήριο αστοχίας πρώτης στρώσης, μπορεί να θεωρηθεί η αστοχία της τελευταίας στρώσης (last ply failure), ως το απώτατο όριο αντοχής, αφού μέχρι και αυτό το σημείο, το πολύστρωτο έχει τη δυνατότητα να φέρει κάποια φορτία [Shenoi-1993].

Το βασικό μειονέκτημα των παραπάνω κριτηρίων αστοχίας για τα πολύστρωτα, είναι η ανικανότητά τους να λάβουν υπόψη τους άλλες μορφές αστοχίας, όπως η αποκόλληση των στρώσεων (delamination) που οφείλονται σε υψηλές διαστρωματικές τάσεις, κυρίως στα άκρα του πολύστρωτου.

### 2.3.5 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού ορθοτροπικών δοκών

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ανά μονάδα μήκους επιβολής  $N_{x,cr}$  (N/mm) μιας ορθοτροπικής δοκού αποδεικνύεται [Eckold-1994] ότι μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση:

$$N_{x,cr} = \frac{B_{11}^2 - A_{11} \cdot D_{11}}{A_{11}} \cdot \left( \frac{\pi}{L_E} \right)^2 \quad [2.21]$$

όπου  $L_E$  είναι το ισοδύναμο μήκος λυγισμού, ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες της δοκού, όπως έχει ήδη παρουσιασθεί στο εδάφιο 2.2 για το λυγισμό ισοτροπικών δοκών, με αναφορά στο Σχήμα 2.2.

Στην περίπτωση που ο όρος  $B_{11}$  είναι μηδενικός, πράγμα που συμβαίνει στα συμμετρικά πολύστρωτα με μητρώο σύζευξης  $[B]=0$ , η παραπάνω σχέση απλοποιείται, και γίνεται αντίστοιχη αυτής των ισοτροπικών δοκών (σχέση 2.1).

### 2.3.6 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού ορθοτροπικών πλακών

Το κρίσιμο φορτίο (τάση) λυγισμού ομογενών ορθοτροπικών πλακών μπορεί να υπολογισθεί [Eckold-1994] σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_{x,cr} = k \frac{\pi^2}{t \cdot b^2} \cdot \sqrt{D_{11} \cdot D_{22}} \quad [2.22]$$

όπου:  $D_{ij}$  είναι στοιχεία του μητρώου καμπτικής δυσκαμψίας του πολύστρωτου

$t$  είναι το πάχος του πολύστρωτου

$b$  είναι το μήκος των φορτιζόμενων πλευρών

$k$  είναι ο συντελεστής λυγισμού που εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες και οι τιμές του δίνονται από τα διαγράμματα των Σχημάτων 2.12(α&β) [Eckold-1994], συναρτήσει των αδιάστατων παραμέτρων  $[\alpha]$  και  $[\beta]$ .

Οι παράμετροι  $[\alpha]$  (γενικευμένος λόγος ορθοτροπικότητας – generalized rigidity ratio) και  $[\beta]$  (φαινόμενος λόγος πλευρών – affine aspect ratio) ορίζονται ως εξής:

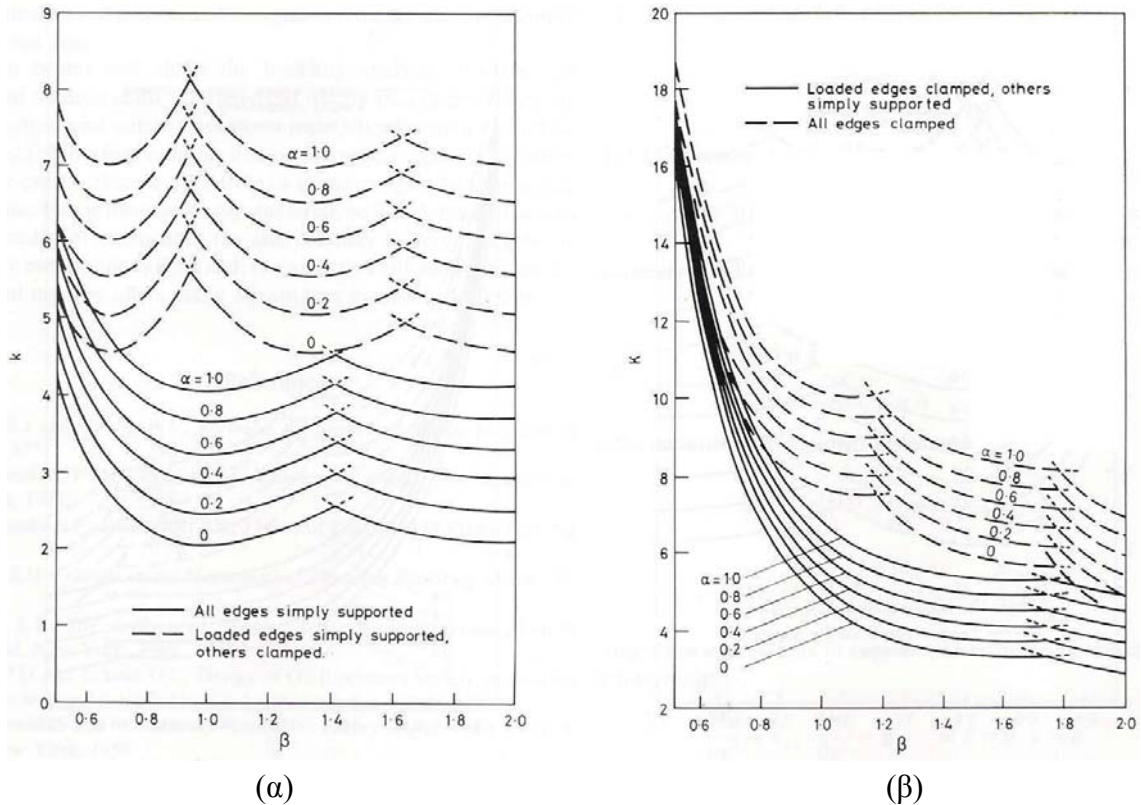
$$\alpha = \frac{D_{12} + 2 \cdot D_{66}}{\sqrt{D_{11} \cdot D_{22}}} \quad , \quad \beta = \left( \frac{a}{b} \right) \cdot \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \quad [2.23\alpha,\beta]$$

όπου:  $a$  είναι το μήκος των αφόρτιστων πλευρών

$b$  είναι το μήκος των φορτιζόμενων πλευρών, όπως έχει ήδη επισημανθεί

Σημείωση: Στη σχέση 2.22, καθώς και στη σχέση 2.23β έχουν γίνει διορθώσεις ως προς τις αντίστοιχες σχέσεις της βιβλιογραφικής αναφοράς [Eckold-1994], αφού εντοπίστηκαν τυπογραφικά λάθη σε αυτές. Συγκεκριμένα, οι διορθώσεις είναι: ( $\pi^2$ ) αντί ( $\pi$ ) στη σχέση 2.22 και “τέταρτη” ρίζα αντί “τετραγωνική” του λόγου των ακαμψιών ( $D_{22}/D_{11}$ ) στη σχέση 2.23β.





Σχήμα 2.12: Διαγράμματα υπολογισμού του συντελεστή λυγισμού  $k$  ορθοτροπικών πλακών.

## 2.4 Μέθοδοι πειραματικής εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού φορέων με ατέλειες

Στις περιπτώσεις φορέων με γεωμετρικές ατέλειες, είτε αυτοί είναι δοκοί, είτε πλάκες, η εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, τόσο για ισοτροπικά, όσο και για ορθοτροπικά υλικά, δεν είναι εφικτή μέσω αναλυτικών μεθόδων. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί ορισμένες εναλλακτικές μέθοδοι με αυτό το σκοπό. Στη συνέχεια παρουσιάζονται δυο τέτοιες μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται σε πειραματικές μετρήσεις των πλάγιων μετατοπίσεων σε κάποιο κρίσιμο σημείο του φορέα που υπόκειται σε λυγισμό, κατά τη διάρκεια μιας πειραματικής δοκιμής. Συνήθως, αυτό το κρίσιμο σημείο επιλέγεται ως το μέσον της δοκού ή το κέντρο της πλάκας αντίστοιχα.

### 2.4.1 Μέθοδος Southwell

Η μέθοδος Southwell χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κυρίως σε δοκούς αλλά κατά προέκταση και σε πλάκες, βάσει πειραματικών μετρήσεων. Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο στην ελαστική περιοχή φόρτισης του εκάστοτε φορέα και βασική της προϋπόθεση είναι

η διατήρηση της ίδιας ιδιομορφής λυγισμού κατά τη διάρκεια του πειράματος. Σε φορείς με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί και αντίστροφα, δηλαδή να δώσει μια εκτίμηση για το μέγεθος της αρχικής ατέλειας του εκάστοτε φορέα.

Από τις εξισώσεις ισορροπίας μιας δοκού, με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και μέσω της παραδοχής ότι η εγκάρσια μετατόπιση έχει ημιτονοειδή μορφή κατά μήκος του φορέα, προκύπτει η παρακάτω σχέση για την εγκάρσια μετατόπιση στο κέντρο αυτού [Καρύδης-2000]:

$$\delta = \frac{w_0}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} \Rightarrow \frac{\delta}{P} = \frac{1}{P_{cr}} (\delta + w_0) \quad [2.24]$$

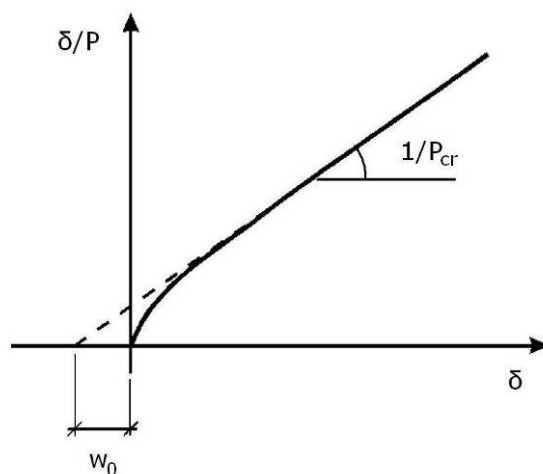
όπου:  $\delta$  είναι η εγκάρσια μετατόπιση στο κέντρο του φορέα

$w_0$  είναι το μέγεθος της αρχικής ατέλειας

$P$  είναι το φορτίο επιβολής

$P_{cr}$  είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού

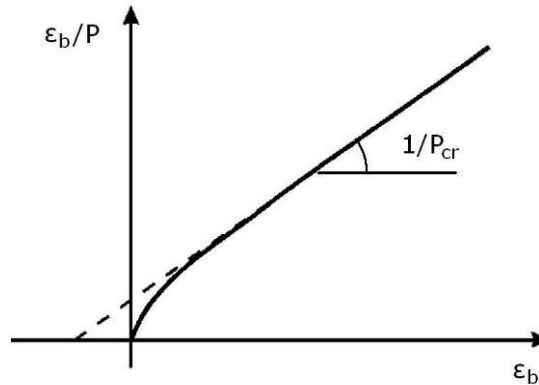
Μέσω αυτής της σχέσης, μπορεί εύκολα να κατασκευασθεί το λεγόμενο διάγραμμα Southwell, που αναπαριστά τη σχέση μεταξύ των μεγεθών  $(\delta/P)$  και  $(\delta)$ , η οποία καταλήγει σε γραμμική μορφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.13. Η αντιστροφή της κλίσης της εφαπτομένης της καμπύλης αυτής δίνει όπως φαίνεται την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ( $P_{cr}$ ), ενώ η τομή της με τον άξονα των μετατοπίσεων ( $\delta$ ), δίνει το μέγεθος της αρχικής ατέλειας ( $w_0$ ).



**Σχήμα 2.13:** Χαρακτηριστική μορφή διαγράμματος Southwell- $\delta$ .

Το διάγραμμα αυτό θα αναφέρεται ως διάγραμμα “Southwell- $\delta$ ”, εφόσον βασίζεται στη μέτρηση του μεγέθους της εγκάρσιας μετατόπισης ( $\delta$ ), καθώς στη συνέχεια παρουσιάζεται μια εναλλακτική μορφή της μεθόδου, η οποία βασίζεται στη μέτρηση του μεγέθους της καμπτικής παραμόρφωσης ( $\epsilon_b$ ). Εν προκειμένω,

παρατηρείται ότι η μορφή του διαγράμματος καμπτικής παραμόρφωσης ( $\varepsilon_b$ ) στο κέντρο του φορέα, ως προς το επιβαλλόμενο φορτίο, είναι παρόμοια με αυτή του αντίστοιχου διαγράμματος της εγκάρσιας μετατόπισης ( $\delta$ ) στο ίδιο σημείο (στο κέντρο). Έτσι, η μέθοδος Southwell μπορεί να εφαρμοσθεί κατ' αντιστοιχία, για την κατασκευή ενός διαγράμματος που αναπαριστά τη σχέση μεταξύ των μεγεθών ( $\varepsilon_b/P$ ) και ( $\varepsilon_b$ ), και βασίζεται στην ίδια αρχή λειτουργίας για την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός φορέα (δοκού ή πλάκας), όπως φαίνεται στο ενδεικτικό διάγραμμα του Σχήματος 2.14.

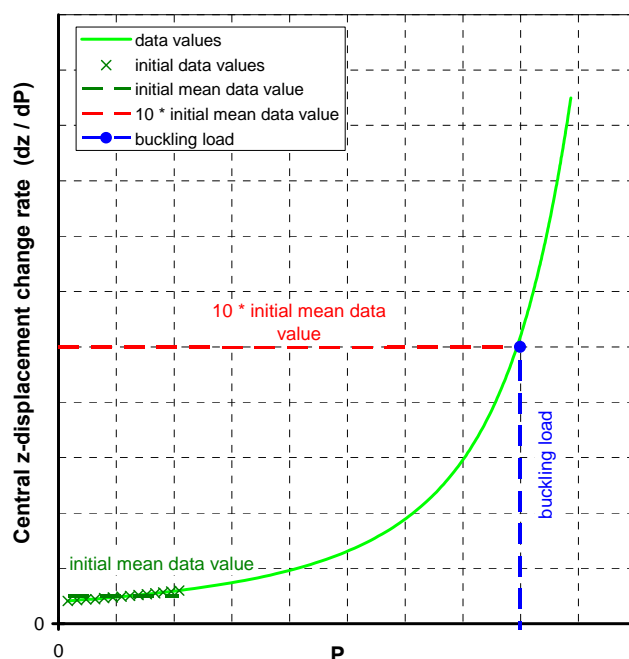


Σχήμα 2.14: Χαρακτηριστική μορφή διαγράμματος Southwell- $\varepsilon_b$ .

#### 2.4.2 Μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων

Η συγκεκριμένη μέθοδος αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας για μια πρώτη προσέγγιση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μέσω πειραματικών μετρήσεων σε φορείς που υπόκεινται σε αξονικά ή συνεπίπεδα θλιπτικά φορτία. Είναι σχετικά απλή στην εφαρμογή της και βασίζεται στον ορισμό του φαινομένου του λυγισμού, δηλαδή στον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου, με το οποίο εμφανίζονται έντονες πλάγιες μετατοπίσεις χωρίς σημαντική περαιτέρω αύξηση αυτού. Συγκεκριμένα, προσδιορίζεται η τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου, για την οποία ο ρυθμός αύξησης της πλάγιας μετατόπισης ως προς το επιβαλλόμενο φορτίο (displacement change rate,  $dz/dP$ ), σε ένα κρίσιμο σημείο του φορέα γίνεται πολύ μεγαλύτερος από αυτόν που παρατηρήθηκε κατά το αρχικό στάδιο του πειράματος (initial mean change rate). Το αρχικό αυτό στάδιο του πειράματος ορίζεται ως ένα μικρό αρχικό εύρος φορτίου, που συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό ενός φορτίου αναφοράς. Αυτό το φορτίο αναφοράς μπορεί να είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της αντίστοιχης τέλει δοκού, εάν αυτό είναι ήδη γνωστό, π.χ. από ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού. Όπως προαναφέρθηκε, το κρίσιμο σημείο ενός φορέα είναι συνήθως το μέσον μιας δοκού, ή το κέντρο μιας πλάκας, όπου κατά βάση παρατηρείται απότομη αύξηση του ρυθμού μεταβολής της πλάγιας μετατόπισης.

Πιο αναλυτικά, η εφαρμογή αυτής της μεθόδου, όπως φαίνεται και στο ενδεικτικό διάγραμμα του Σχήματος 2.15, συνίσταται στην κατασκευή της καμπύλης του ρυθμού μεταβολής της εγκάρσιας / πλάγιας μετατόπισης στο κρίσιμο σημείο, συναρτήσεως του επιβαλλόμενου φορτίου, και μέσω αυτής στον εντοπισμό του φορτίου για το οποίο ο ρυθμός αυτός έχει γίνει πολλαπλάσιος του αρχικού κατά έναν συντελεστή. Η επιλογή αυτού του συντελεστή, αλλά και του εύρους του αρχικού φορτίου, παίζουν σημαντικό ρόλο στα αποτελέσματα της συγκεκριμένης μεθόδου. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, μετά από σχετική μελέτη αποδείχθηκε ότι η επιλογή ενός εύρους αρχικού φορτίου από 0 έως 20% του κρίσιμου φορτίου λυγισμού της αντίστοιχης (ίδιου πάχους) τέλειας δοκού, και μια τιμή του εν λόγω συντελεστή ίση με 10 αποδίδουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Έτσι, μπορεί να γίνει μια εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ακόμα και σε περιπτώσεις κατασκευαστικών φορέων με γεωμετρικές ατέλειες, των οποίων το διάγραμμα μεταξύ του επιβαλλόμενου φορτίου και των πλάγιων μετατοπίσεων δεν δίνει άμεσα (εμφανή) αποτελέσματα.



**Σχήμα 2.15:** Ενδεικτικό διαγράμματα εφαρμογής της μεθόδου υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, μέσω του ρυθμού μεταβολής των πλάγιων μετατοπίσεων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

#### 3.1 Εισαγωγή

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ) - Finite Element Method (FEM) - είναι μια αριθμητική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μηχανικής, όπως προβλήματα στατικής και δυναμικής συμπεριφοράς στερεών κατασκευών, προβλήματα μεταφοράς θερμότητας, ηλεκτρομαγνητισμού και ρευστομηχανικής. Γενικώς, τα προβλήματα μηχανικής είναι μαθηματικά μοντέλα φυσικών καταστάσεων, τα οποία αποτελούνται από διαφορικές εξισώσεις με τις κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις προέρχονται από την εφαρμογή των θεμελιωδών φυσικών νόμων και αρχών σε ένα σύστημα ή έναν όγκο ελέγχου, βάσει των ισοζυγίων μάζας, δύναμης και ενέργειας.

Η ΜΠΣ βασίζεται στη διακριτοποίηση της υπό μελέτη γεωμετρικής δομής σε πολλά (αλλά πεπερασμένου αριθμού) μικρά τμήματα (στοιχεία - elements), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τις κατάλληλες εξισώσεις συνέχειας. Με τον ορισμό των παραμέτρων του φυσικού μοντέλου, όπως τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των υλικών, γίνεται ο υπολογισμός ενός γενικευμένου μητρώου δυσκαμψίας (global stiffness matrix) της συνολικής γεωμετρικής δομής, που χρησιμοποιείται στην εξίσωση ισορροπίας του συνολικού δομικού συστήματος, με τη γενικευμένη έκφραση:

$$F = K \cdot U$$

όπου:  $K$  είναι το γενικευμένο μητρώο δυσκαμψίας

$F$  είναι το διάνυσμα των κομβικών φορτίων

$U$  είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων και περιστροφών που αντιπροσωπεύουν τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος

Με αυτό τον τρόπο, γνωρίζοντας τις φορτίσεις που δέχεται μια στερεά κατασκευή, καθώς και τις συνοριακές της συνθήκες, είναι δυνατός ο υπολογισμός της απόκρισής της, είτε στατικά είτε δυναμικά, ανάλογα με τη φύση του προβλήματος.

### 3.2 Γενική περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

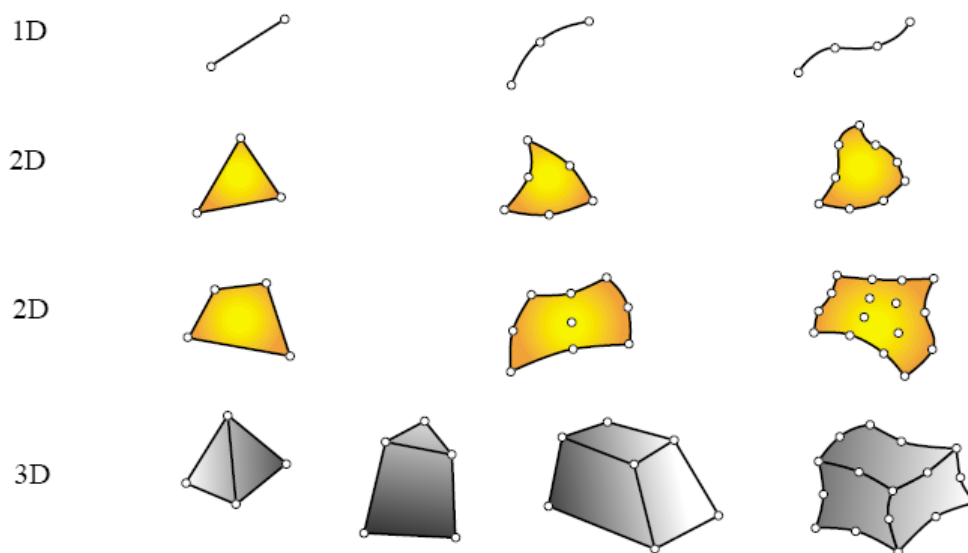
Η διαδικασία επίλυσης ενός φυσικού προβλήματος με τη ΜΠΣ μπορεί να διαχωριστεί στα εξής τρία βασικά στάδια:

- Προεπεξεργασία (Preprocessing)
- Επίλυση (Solution)
- Μετεπεξεργασία (Postprocessing)

Κάθε ένα από τα στάδια αυτά περιλαμβάνει συγκεκριμένες ενέργειες που περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια.

#### α) Προεπεξεργασία (Preprocessing)

Στο στάδιο της προεπεξεργασίας ορίζονται ουσιαστικά οι παράμετροι της υπό μελέτη γεωμετρικής δομής. Συγκεκριμένα, ορίζεται η γεωμετρική της μορφή και με την κατάλληλη επιλογή του είδους των στοιχείων (elements) γίνεται η διακριτοποίησή της (meshing) σε μικρά τμήματα, είτε αυτόματα είτε προσαρμοσμένα, σύμφωνα με τις απαιτήσεις του χρήστη. Στα στοιχεία αυτά προσδίδονται οι κατάλληλες μηχανικές και άλλες ιδιότητες που σχετίζονται με τη σύσταση και τη συμπεριφορά τους, προκειμένου να επιτευχθεί όσο το δυνατόν καλύτερη προσομοίωση του φυσικού προβλήματος. Στο Σχήμα 3.1 που ακολουθεί, φαίνονται διάφορα είδη τέτοιων στοιχείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά περίπτωση, ανάλογα με τη μορφή της εκάστοτε γεωμετρικής δομής που πρόκειται να μοντελοποιηθεί.



**Σχήμα 3.1:** Διάφοροι τύποι στοιχείων μοντελοποίησης της γεωμετρικής δομής.

Είναι προφανές ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται άμεσα από τη μορφή και τη λεπτομέρεια της διακριτοποίησης, αφού με ένα σχετικά πυκνό πλέγμα προκύπτουν πιο ακριβή αποτελέσματα από ότι με ένα σχετικά αραιό. Η πύκνωση όμως

του πλέγματος της διακριτοποίησης έχει επίσης ως άμεση συνέπεια την αύξηση της απαιτούμενης υπολογιστικής ισχύος, άρα και του αντίστοιχου υπολογιστικού χρόνου. Για το λόγο αυτό, είναι πάντα σκόπιμο να γίνεται μελέτη σύγκλισης της λύσης ως προς την πυκνότητα του πλέγματος της διακριτοποίησης, έτσι ώστε με την επιλογή του κατάλληλου πλέγματος να επιτυγχάνονται αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας με χρήση όσο το δυνατόν μικρότερης υπολογιστικής ισχύος, δηλαδή στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

### β) Επίλυση (Solution)

Στο στάδιο της επίλυσης ορίζονται οι συνθήκες φόρτισης και στήριξης (συνοριακές συνθήκες) του γεωμετρικού μοντέλου, προκειμένου να επιλυθούν οι απαραίτητες εξισώσεις ισορροπίας και να προκύψει η λύση του προβλήματος, δηλαδή η απόκριση της κατασκευής. Επίσης, ορίζεται και ο τύπος της ανάλυσης που θα πραγματοποιηθεί, π.χ. εάν θα είναι στατική ή δυναμική, γραμμική ή μη γραμμική κλπ.

Η μη γραμμικότητα (non-linearity) ενός φυσικού προβλήματος, μπορεί να οφείλεται στο υλικό (μη γραμμική σχέση τάσεων - παραμορφώσεων), τη γεωμετρία (λόγω διαφορετικής προσέγγισης μεταξύ μικρών ή μεγάλων μετατοπίσεων), ή τις συνοριακές συνθήκες. Σε κάθε περίπτωση, μια γραμμική ανάλυση μπορεί να δώσει απλά μια ένδειξη της απόκρισης του μοντέλου, αλλά δεν είναι σε θέση να δώσει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας. Η λογική της μη γραμμικής ανάλυσης (non-linear analysis) βασίζεται στην τμηματοποίηση της επιβαλλόμενης φόρτισης και σταδιακή εφαρμογή της σε βήματα, με επαναπροσδιορισμό του γενικευμένου μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στη νέα παραμορφωσιακή κατάσταση μετά από κάθε βήμα (στάδιο επιβολής τμήματος του φορτίου), κάτι που οδηγεί σε ρεαλιστικότερη προσέγγιση της απόκρισης της υπό μελέτη κατασκευής. Φυσικά, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται στην περίπτωση μιας μη γραμμικής ανάλυσης είναι πολύ μεγαλύτερος σε σχέση με μια αντίστοιχη γραμμική ανάλυση και προφανώς εξαρτάται κυρίως από την επιλογή του αριθμού των βημάτων της επίλυσης.

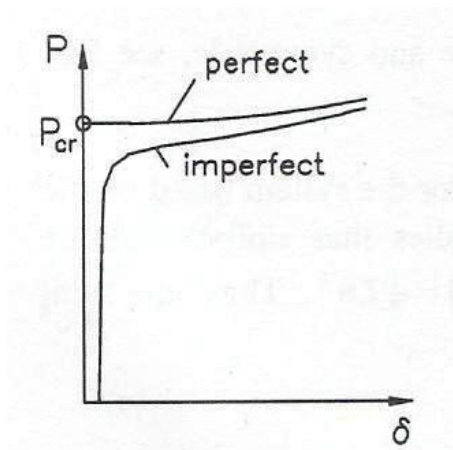
### γ) Μετεπεξεργασία (Postprocessing)

Σε αυτό το στάδιο, το πρόβλημα έχει επιλυθεί και το εκάστοτε υπολογιστικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων είναι σε θέση να δώσει στο χρήστη τα αποτελέσματα της ανάλυσης, όπως τάσεις, παραμορφώσεις, μετατοπίσεις κλπ., σε οποιοδήποτε κομβικό σημείο της διακριτοποιημένης γεωμετρικής μορφής ζητηθεί. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να ληφθούν είτε με σχηματική αναπαράσταση σε ορισμένο γραφικό περιβάλλον, είτε σε πινακοποιημένη μορφή, για περαιτέρω επεξεργασία. Μάλιστα, στην περίπτωση μη γραμμικής ανάλυσης μπορούν να ληφθούν αποτελέσματα συναρτήσεων της επιβαλλόμενης φόρτισης, που είναι πολύ χρήσιμα αφού μπορούν να συγκριθούν με αντίστοιχα αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων.

### 3.3 Διαδικασία αριθμητικής προσομοίωσης λυγισμού πολύστρωτης πλάκας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, έγινε χρήση του λογισμικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων “ANSYS 10.0 Multiphysics”, για την ανάλυση λυγισμού ορθοτροπικών, πολύστρωτων δοκών και πλακών από σύνθετα υλικά, άλλοτε τέλειες γεωμετρικής μορφής και άλλοτε με ορισμένες γεωμετρικές ατέλειες.

Για τις περιπτώσεις κατασκευαστικών φορέων με τέλεια γεωμετρική μορφή, είναι δυνατή η ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού (eigenvalue buckling analysis), έτσι ώστε να υπολογισθεί η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του εκάστοτε φορέα. Στις περιπτώσεις όμως κατασκευαστικών φορέων που εμφανίζουν αρχική ατέλεια στη γεωμετρική τους μορφή, η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού δε μπορεί να υπολογισθεί άμεσα. Έτσι, μέσω της μη γραμμικής ανάλυσης (non-linear analysis), προκύπτει η καμπύλη λυγισμού (επιβαλλόμενο φορτίο – πλάγια μετατόπιση στο κέντρο), η μελέτη της οποίας μπορεί να δώσει μια εκτίμηση για την τιμή του αντίστοιχου κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Ωστόσο, όπως είναι ήδη γνωστό από τη θεωρία, κανένας φορέας δεν είναι γεωμετρικά τέλειος. Επομένως, ακόμα και ο λυγισμός των θεωρητικά τέλειων γεωμετρικά φορέων, μπορεί επίσης να μοντελοποιηθεί κατά τον ίδιο τρόπο, με την υπόθεση ύπαρξης αρχικής γεωμετρικής ατέλειας πολύ μικρής κλίμακας, η οποία είναι απαραίτητη για να προκαλέσει την αρχική αστάθεια και την ανάπτυξη πλάγιων μετατοπίσεων. Αυτή η τεχνική θα επιτρέψει την άμεση σύγκριση της μη γραμμικής συμπεριφοράς λυγισμού μεταξύ των θεωρητικά τέλειων και γεωμετρικά ατελών φορέων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2 [Spyrakos et al.-1997].



**Σχήμα 3.2:** Μη γραμμική συμπεριφορά λυγισμού τέλειου και ατελούς φορέα.

Για να γίνει αυτό που μόλις περιγράφηκε, δηλαδή η μη γραμμική ανάλυση λυγισμού ενός “σχεδόν τέλειου” γεωμετρικά φορέα, ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- Ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού της γεωμετρικά τέλειας μορφής, απ’ όπου αποκτάται η 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού.



- Παραμόρφωση της τέλειας γεωμετρικής μορφής, σε σχήμα όμοιο με εκείνο της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής, με χρήση πολύ μικρού συντελεστή μέγιστης παραμόρφωσης (π.χ. 0.01).
- Εφαρμογή μη γραμμικής ανάλυσης λυγισμού του ελαφρώς παραμορφωμένου φορέα.

### 3.4 Επιβεβαίωση εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

Σε αυτό το εδάφιο θα γίνει επιβεβαίωση της εφαρμογής της ΜΠΣ και συγκεκριμένα του υπολογιστικού πακέτου “ANSYS 10.0 Multiphysics”, μέσω επαλήθευσης αποτελεσμάτων από συγκεκριμένη βιβλιογραφική πηγή, ώστε να αποδειχθεί η ορθή χρήση του, προκειμένου να ακολουθήσει η παραμετρική μελέτη του Κεφαλαίου 4, με χρήση του συγκεκριμένου υπολογιστικού πακέτου.

#### 3.4.1 Περιγραφή και παράμετροι του προβλήματος

Το παράδειγμα της βιβλιογραφίας που επιλέχθηκε [Ovesy & Assaee-2005], έχει ως αντικείμενο τη μη γραμμική ανάλυση λυγισμού τετράγωνης, απλά εδρασμένης, γεωμετρικά τέλειας, λεπτής, συμμετρικής, πολύστρωτης πλάκας με διασταυρούμενες στρώσεις, υπό την επιβολή ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης στη μία πλευρά (uniform end shortening). Τα βιβλιογραφικά αποτελέσματα έχουν προέλθει από δύο μεθόδους ανάλυσης: μια ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (FEM), και μάλιστα με χρήση του ίδιου υπολογιστικού πακέτου (ANSYS), και μια ανάλυση πεπερασμένων λωρίδων (Finite Strip Method - FSM).

Οι παράμετροι του προβλήματος συνοψίζονται ως εξής:

##### Διαστάσεις πολύστρωτης πλάκας:

Μήκος (L) = 200 mm	( $0 \leq x \leq 200$ mm )
Πλάτος (b) = 200 mm	( $0 \leq y \leq 200$ mm )
Πάχος (t) = 1 mm	( $0 \leq z \leq 1$ mm )

##### Συνοριακές συνθήκες:

Όλες οι πλευρές είναι απλά εδρασμένες.

##### Φόρτιση:

Επιβάλλεται ομοιόμορφη θλιπτική μετατόπιση (uniform end shortening) στη μία πλευρά της πλάκας.

Μηχανικές ιδιότητες υλικού:

(Μονοαξονική στρώση ινών άνθρακα υψηλής αντοχής, προεμποτισμένες με εποξειδική ρητίνη – UD high strength carbon / epoxy pre-impregnated ply)

$E_1 = 140.0 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.30$	$G_{12} = 5.0 \text{ GPa}$
$E_2 = 10.0 \text{ GPa}$	$\nu_{13} = 0.30$	$G_{13} = 5.0 \text{ GPa}$
$E_3 = 10.0 \text{ GPa}$	$\nu_{23} = 0.02$	$G_{23} = 3.2 \text{ GPa}$

Πάχος μεμονωμένης στρώσης:

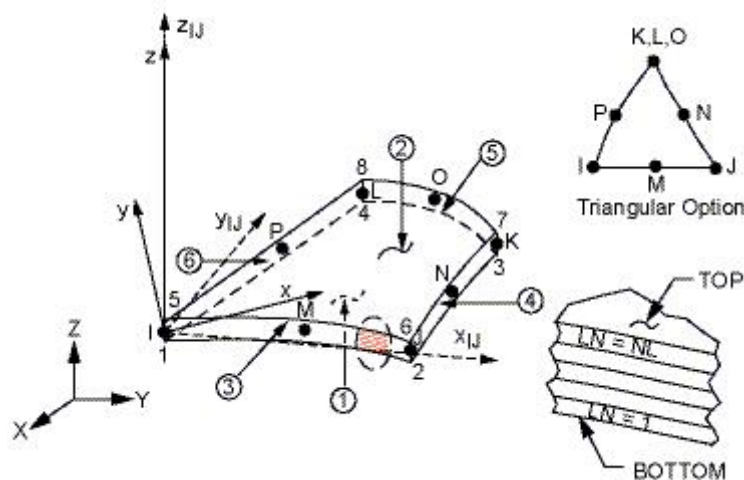
$t_i = 0.125 \text{ mm}$

Ακολουθία στρώσεων (8 στρώσεις):

$[(0/90)_2]_s$

**3.4.2 Διαδικασία μοντελοποίησης**

Για τη μοντελοποίηση της πολύστρωτης πλάκας, χρησιμοποιήθηκε το στοιχείο SHELL99 της βιβλιοθήκης στοιχείων του ANSYS, το οποίο είναι ένα οκτακομβικό τρισδιάστατο κελυφοειδές στοιχείο (shell element) μοντελοποίησης πολύστρωτων κατασκευών, με έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο του, όπως φαίνεται και στην απεικόνιση του Σχήματος 3.3 [Documentation for ANSYS].

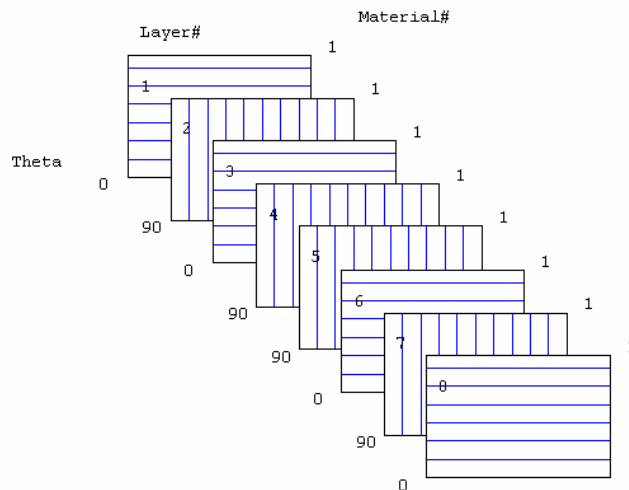


**Σχήμα 3.3:** Γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχείου SHELL99.

Στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων της βιβλιογραφικής πηγής, οι συγγραφείς έχουν κάνει χρήση ενός άλλου στοιχείου της βιβλιοθήκης του ANSYS, με ονομασία SHELL91, το οποίο όμως είναι παρόμοιο με αυτό που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα ανάλυση (SHELL99). Τα δύο αυτά είδη στοιχείων διαφέρουν κυρίως στο γεγονός ότι το στοιχείο SHELL91 είναι πιο κατάλληλο για τις περιπτώσεις

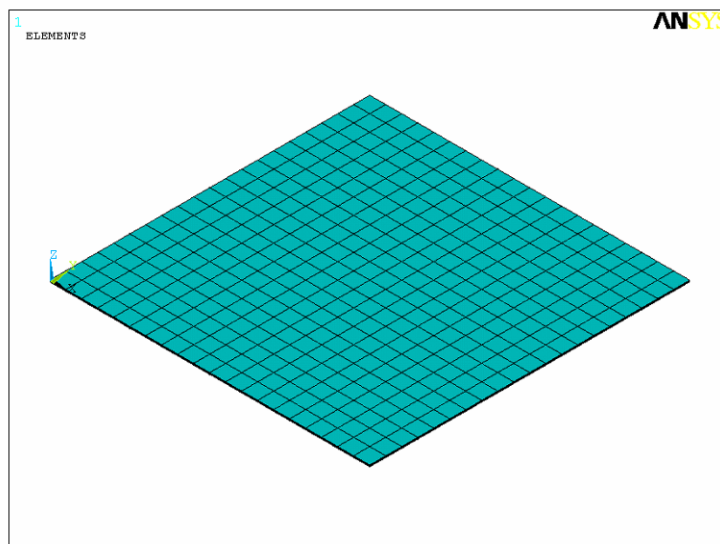
μεγάλων παραμορφώσεων, έχοντας όμως με το μειονέκτημα της απαίτησης πολλαπλάσιου υπολογιστικού χρόνου σε σχέση με το SHELL99, όταν πρόκειται για πολύστρωτα αρκετών στρώσεων ( $N \geq 3$ ). Μελέτη σύγκλισης της λύσης, που έγινε στα πλαίσια της βιβλιογραφικής πηγής, αναφέρει ότι η χρήση 400 τετράγωνων στοιχείων με ομοιόμορφες διαστάσεις ( $10 \times 10$  mm), οδηγεί σε πλήρως ικανοποιητικά αποτελέσματα, οπότε προκειμένου να γίνει άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων θα χρησιμοποιηθούν οι ίδιες παράμετροι διακριτοποίησης και στην παρούσα ανάλυση.

Έτσι, μετά την επιλογή του κατάλληλου τύπου στοιχείου (element), προσδόθηκαν σε αυτό τα διάφορα χαρακτηριστικά του, όπως ο αριθμός των στρώσεων, το πάχος και ο προσανατολισμός της κάθε στρώσης, καθώς και το υλικό με τις αντίστοιχες ορθοτροπικές μηχανικές του ιδιότητες, όπως φαίνεται στην ανάλυση ενός τυχαίου στοιχείου στο Σχήμα 3.4.



**Σχήμα 3.4:** Ακολουθία στρώσεων της πολύστρωτης πλάκας:  $[(0/90)_2]_s$ .

Με τη δημιουργία της γεωμετρικής μορφής της πλάκας και τη διακριτοποίησή της σε 400 τετράγωνα στοιχεία όμοιων διαστάσεων  $10 \times 10$  mm, όπως ήδη αποφασίσθηκε, προκύπτει το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Στη συνέχεια, εφαρμόζονται στο μοντέλο αυτό οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης, και η φόρτιση με τη μορφή ομοιόμορφης επιβαλλόμενης θλιπτικής μετατόπισης στη μία πλευρά ( $x=200$  mm) κατά τη διεύθυνση  $x$ , προκειμένου να γίνει η επίλυση του προβλήματος.



Σχήμα 3.5: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.

### 3.4.3 Μη γραμμική ανάλυση και σύγκριση των αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, προκειμένου να γίνει η μη γραμμική ανάλυση της γεωμετρικά τέλει πλάκας, πρέπει πρώτα να γίνει η ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού αυτής. Η ανάλυση αυτή θα μας δώσει μια εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, αλλά και την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού, σύμφωνα με την οποία θα προσδοθεί στην πλάκα μια ελάχιστη αρχική παραμόρφωση (μέγιστη πλάγια μετατόπιση του κέντρου ίση με  $1\%t=0.01 \text{ mm}$ ), ώστε να ακολουθήσει η μη γραμμική ανάλυση της σχεδόν (αλλά όχι εντελώς πλέον) επίπεδης πλάκας.

Εφαρμόζοντας λοιπόν την ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού στο μοντέλο που δημιουργήθηκε, αποκτήθηκε η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, και η αντίστοιχη κρίσιμη τιμή της διαμήκου θλιπτικής μετατόπισης της πλευράς ( $x=200 \text{ mm}$ ) στην οποία αυτή επιβλήθηκε:

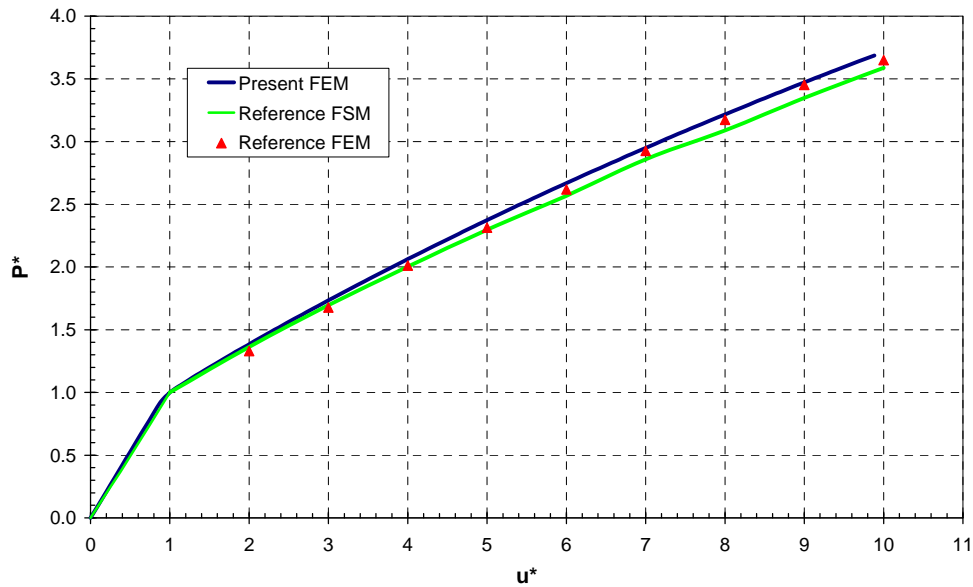
- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού:  $P_{cr} = 725.2 \text{ N}$
- Κρίσιμη τιμή διαμήκου θλιπτικής μετατόπισης:  $u_{cr} = 0.010 \text{ mm}$

Στη συνέχεια, ακολουθεί η μη γραμμική ανάλυση, με σταδιακή επιβολή της διαμήκου θλιπτικής μετατόπισης, απ' όπου προκύπτουν τα επιθυμητά αποτελέσματα σε πινακοποιημένη και γραφική μορφή.

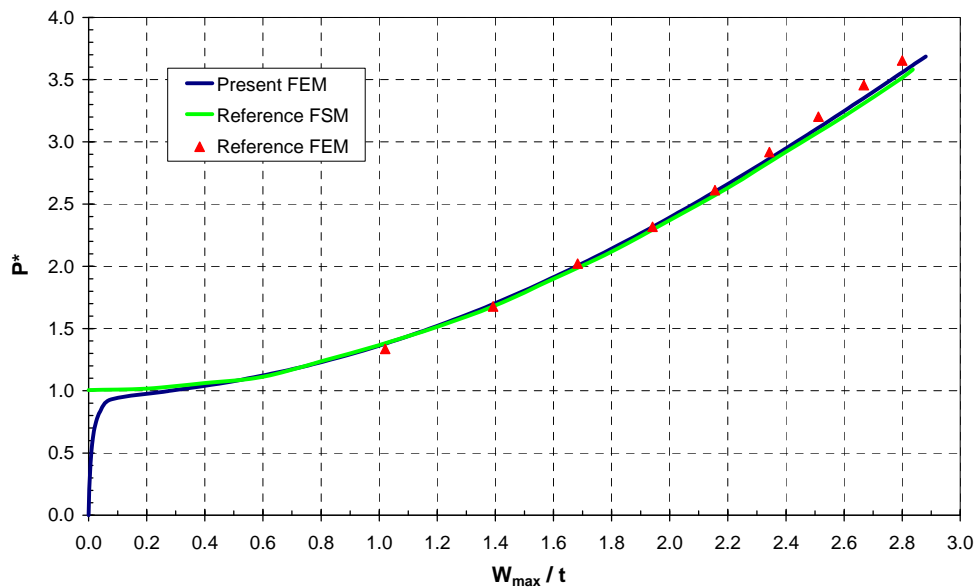
Για την παρουσίαση των καμπυλών λυγισμού, έχουν χρησιμοποιηθεί από την αντίστοιχη βιβλιογραφική πηγή οι αδιάστατες τιμές του αναπτυσσόμενου (εμμέσως επιβαλλόμενου) φορτίου ( $P^*$ ) και της ομοιόμορφης επιβαλλόμενης θλιπτικής μετατόπισης ( $u^*$ ), με αναφορά στις αντίστοιχες κρίσιμες τιμές λυγισμού αυτών των μεγεθών που προκύπτουν από την ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού, δηλαδή:

$$P^* = \frac{P}{P_{cr}} \quad \text{και} \quad u^* = \frac{u}{u_{cr}}$$

Έτσι, προκύπτουν οι καμπύλες λυγισμού των Σχημάτων 3.6 και 3.7, όπου φαίνεται η πολύ καλή σύμπτωση των αποτελεσμάτων της παρούσας ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων (Present FEM), με τα αντίστοιχα που παρέχονται από τις δύο μεθόδους ανάλυσης της βιβλιογραφικής πηγής, δηλαδή την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (Reference FEM) και την ανάλυση πεπερασμένων λωρίδων (Reference FSM).



Σχήμα 3.6: Καμπύλη αδιαστατοποιημένου φορτίου ( $P^*$ ) συναρτήσει της αδιαστατοποιημένης διαμήκουσ ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης ( $u^*$ ).

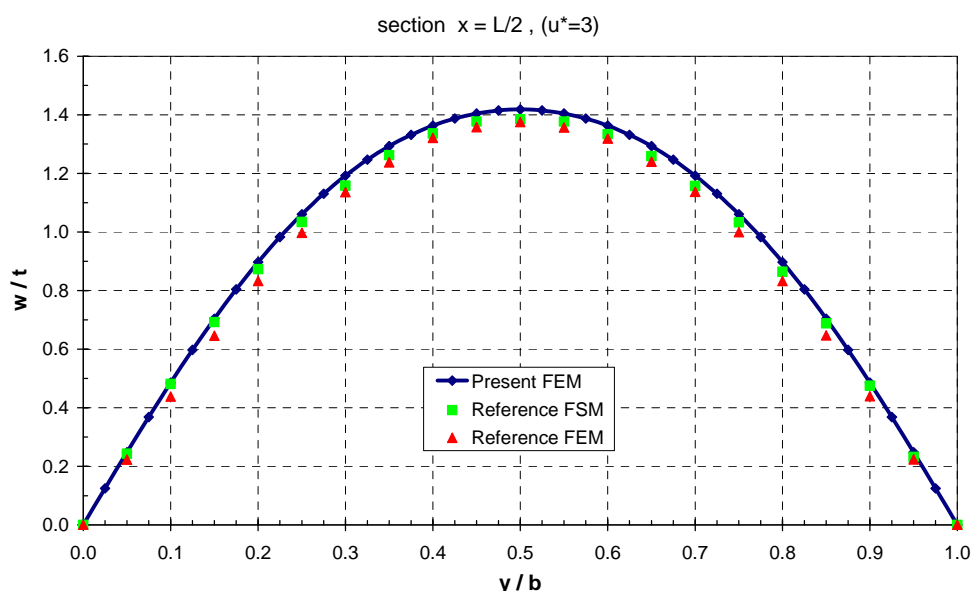


Σχήμα 3.7: Καμπύλη αδιαστατοποιημένου φορτίου ( $P^*$ ) συναρτήσει της αδιαστατοποιημένης πλάγιας μετατόπισης του κέντρου της πλάκας ( $w_{max}/t$ ).

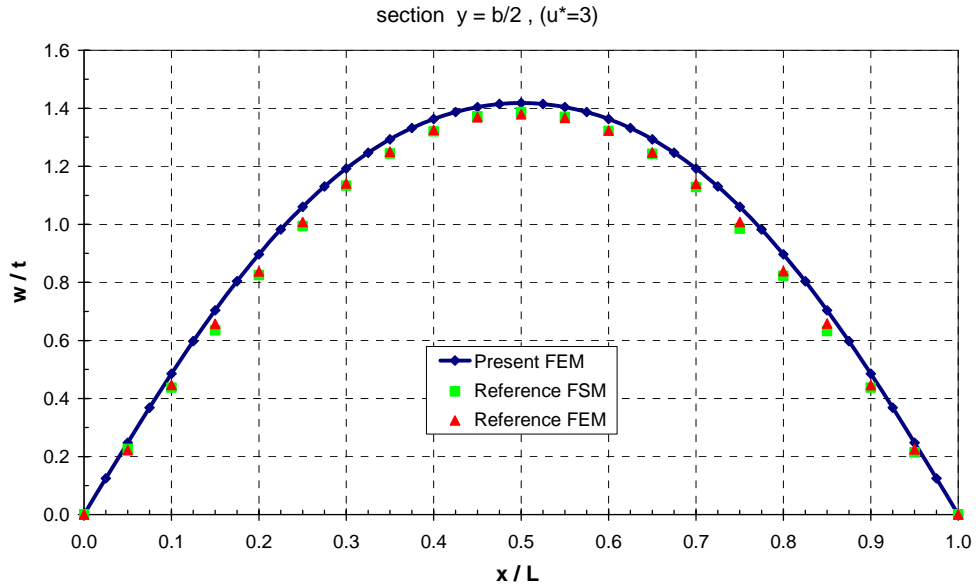
Εκτός των παραπάνω καμπύλων λυγισμού, διαθέσιμα προς σύγκριση από τη βιβλιογραφική πηγή είναι επίσης και ορισμένα αποτελέσματα των μετατοπίσεων της πλάκας ( $u, v, w$ ) ως προς τις τρεις διευθύνσεις ( $x, y, z$ , αντίστοιχα), κατανομημένων κατά μήκος και πλάτος της πλάκας. Οι μετατοπίσεις αυτές ( $u, v, w$ ) παρουσιάζονται σε αδιαστατοποιημένη μορφή και σε κάθε περίπτωση αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη τιμή αδιάστατης διαμήκουσ ομοιόμορφης επιβαλλόμενης θλιπτικής μετατόπισης:

$$u^* = 3 \Rightarrow \frac{u}{u_{cr}} = 3 \Rightarrow u = 3 \times 0.010 \Rightarrow u = 0.030 \text{ mm}$$

Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα του Σχήματος 3.8 παρουσιάζεται η κατανομή της αδιαστατοποιημένης πλάγιας μετατόπισης της πλάκας ( $w/t$ ) κατά μήκος της εγκάρσιας μέσης τομής ( $x = L/2$ ), ενώ σε αυτό του Σχήματος 3.9 παρουσιάζεται πάλι η κατανομή της αδιαστατοποιημένης πλάγιας μετατόπισης της πλάκας ( $w/t$ ), αυτή τη φορά όμως κατά μήκος της διαμήκουσ μέσης τομής ( $y = b/2$ ). Όπως φαίνεται και σε αυτά τα διαγράμματα, παρατηρείται αρκετά καλή σύμπτωση των αποτελεσμάτων της παρούσας ανάλυσης με τα βιβλιογραφικά αποτελέσματα.

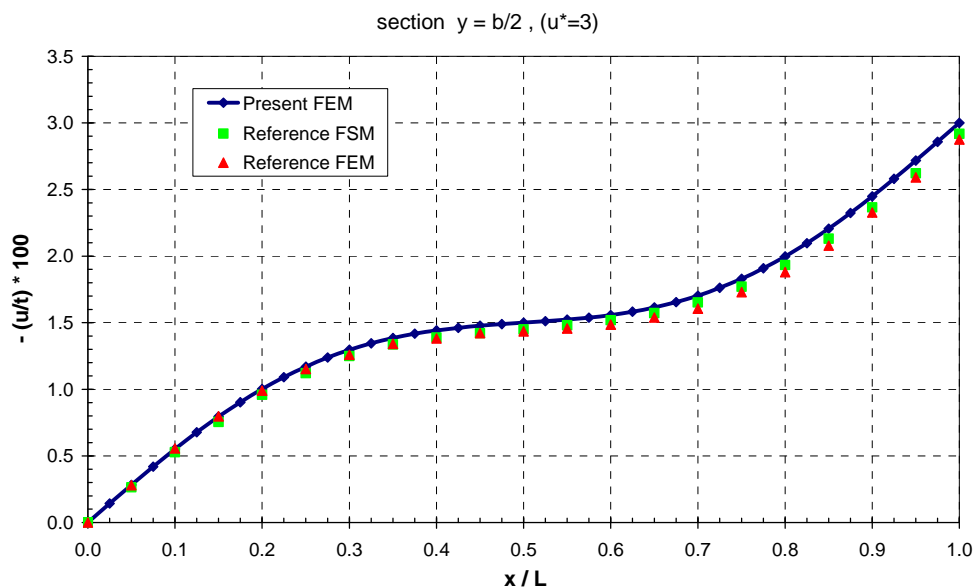


**Σχήμα 3.8:** Αδιαστατοποιημένες πλάγιες μετατοπίσεις της εγκάρσιας μέσης τομής ( $x = L/2$ ), σε φορτίο  $u^* = 3$ .

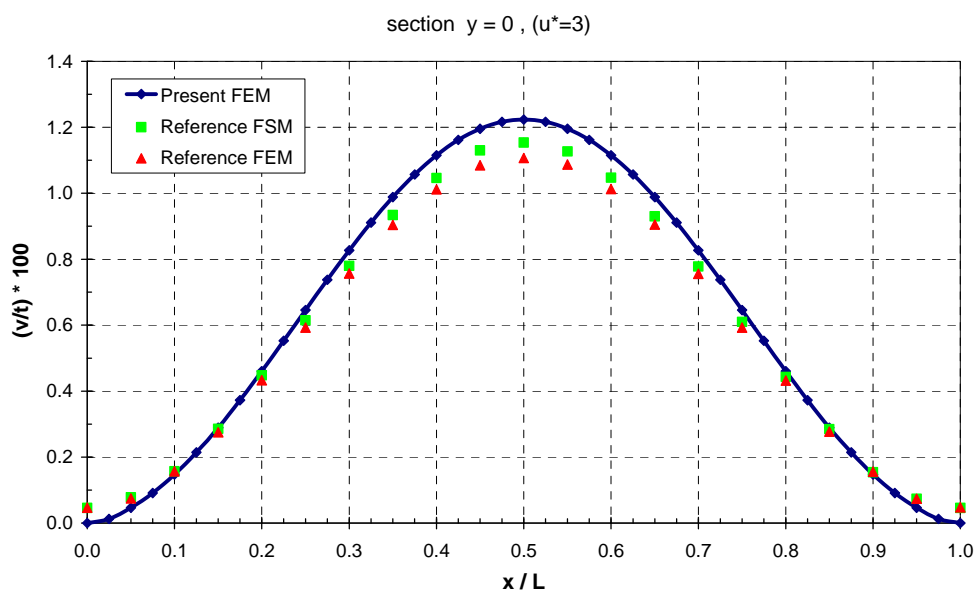


**Σχήμα 3.9:** Αδιαστατοποιημένες πλάγιες μετατοπίσεις της διαμήκουσ μέσης τομής ( $y = b/2$ ), σε φορτίο  $u^* = 3$ .

Ακόμη, στο διάγραμμα του Σχήματος 3.10 παρουσιάζεται η διακύμανση της συνεπίπεδης διαμήκουσ μετατόπισης ( $u$ ), στην αδιαστατοποιημένη μορφή  $[-(u/t) \cdot 100]$ , κατά μήκος της διαμήκουσ μέσης τομής ( $y = b/2$ ), για το ίδιο φορτίο ( $u^* = 3$ ), ενώ στο διάγραμμα του Σχήματος 3.11 παρουσιάζεται η διακύμανση της συνεπίπεδης εγκάρσιας μετατόπισης ( $v$ ), επίσης σε αδιαστατοποιημένη μορφή  $[(v/t) \cdot 100]$ , κατά μήκος μιας εκ των αφόρτιστων πλευρών της πλάκας ( $y = 0$ ). Η σύμπτωση των αποτελεσμάτων είναι κι εδώ αρκετά ικανοποιητική, με μέγιστες αποκλίσεις της τάξης του 5%, που θεωρούνται γενικά αποδεκτές.



**Σχήμα 3.10:** Διαμήκης, συνεπίπεδη, αδιαστατοποιημένη μετατόπιση  $[-(u/t) \cdot 100]$  κατά μήκος της διαμήκουσ μέσης τομής ( $y = b/2$ ), σε φορτίο  $u^* = 3$ .



**Σχήμα 3.11:** Εγκάρσια, συνεπίπεδη, αδιαστατοποιημένη μετατόπιση  $[(v/t) \cdot 100]$ , κατά μήκος μιας εκ των αφόρτιστων πλευρών ( $y = 0$ ), σε φορτίο  $u^* = 3$ .

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, φαίνεται ότι έχει γίνει μια επιβεβαίωση της ορθής χρήσης του λογισμικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ANSYS για τη μοντελοποίηση λυγισμού πολύστρωτων πλακών και επομένως μπορεί να ακολουθήσει η διενέργεια της παραμετρικής μελέτης λυγισμού του Κεφαλαίου 4, αναμένοντας αξιόπιστα αποτελέσματα.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΑΚΩΝ

### 4.1 Εισαγωγή

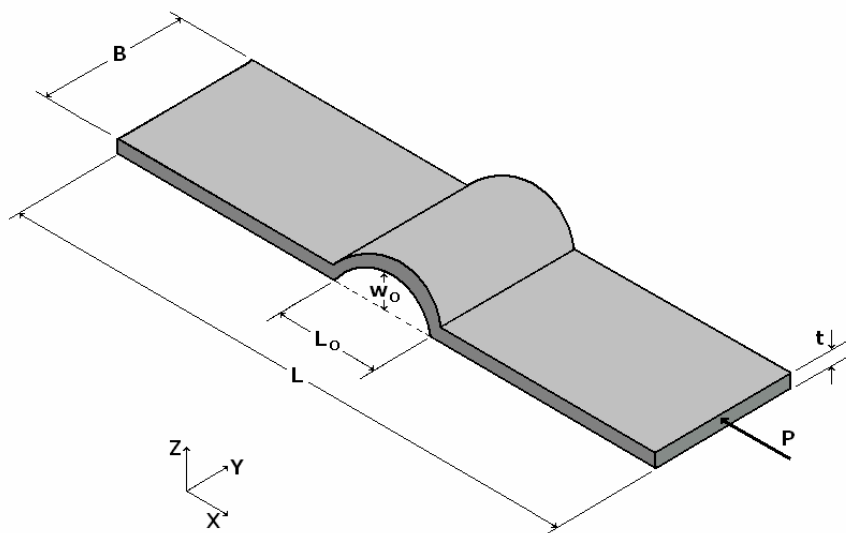
Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η διερεύνηση της λυγισμικής συμπεριφοράς πολύστρωτων δοκών και πλακών, υπό την επίδραση της ύπαρξης γεωμετρικών ατελειών. Με χρήση του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ANSYS, διεξάγεται παραμετρική μελέτη λυγισμού, τόσο για δοκούς όσο και για πλάκες, με σκοπό την εκτίμηση της επίδρασης που έχει η ύπαρξη μιας γεωμετρικής ατέλειας και το μέγεθος αυτής, στη συμπεριφορά ενός κατασκευαστικού φορέα που υπόκειται σε λυγισμό. Επιπλέον, στην παραμετρική μελέτη που γίνεται για τις πολύστρωτες πλάκες, εξετάζονται και άλλες παράμετροι της γεωμετρικής ατέλειας που ενδέχεται να επηρεάζουν το φαινόμενο του λυγισμού, όπως η έκταση της ατέλειας επάνω στην επιφάνεια της πλάκας, αλλά και η θέση της, εφόσον πρόκειται για τοπική ατέλεια, με σκοπό να αποκτηθεί μια γενική εικόνα του φαινομένου.

### 4.2 Παραμετρική μελέτη λυγισμού πολύστρωτων δοκών με γεωμετρικές ατέλειες

#### 4.2.1 Γενική περιγραφή της μελέτης

Σε αυτή τη μελέτη, θα μοντελοποιηθεί με χρήση του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων “ANSYS”, ο λυγισμός πολύστρωτης δοκού με πακτωμένα άκρα, που παρουσιάζει γεωμετρική ατέλεια τοξοειδούς μορφής στο μέσο του μήκους της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1, υπό την επιβολή ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης του ενός άκρου της (uniform end shortening). Σκοπός είναι να διερευνηθεί η επίδραση της γεωμετρικής ατέλειας και του μεγέθους της, στη λυγισμική συμπεριφορά της δοκού. Έτσι, με σταθερό το μήκος της ατέλειας ( $L_0$ ), δηλαδή το μήκος της χορδής του τόξου της, θα γίνει προσομοίωση λυγισμού με μεταβλητή παράμετρο το μέγεθος της ατέλειας ( $w_0$ ), δηλαδή το βέλος του τόξου της. Οι δοκιμές λυγισμού θα γίνουν με μη γραμμική ανάλυση (σταδιακή επιβολή της φόρτισης) σε μοντέλα δοκών ίδιων (σταθερών) εξωτερικών διαστάσεων (μήκους  $L$  και πλάτους  $B$ ),

αλλά για τρεις διαφορετικές τιμές πάχους ( $t$ ), που προσεγγίζουν τις ναυπηγικές εφαρμογές (6, 8 και 10 mm). Προφανώς, για λόγους σύγκρισης και αναφοράς, θα εξεταστούν επίσης οι περιπτώσεις των αντίστοιχων, γεωμετρικά τέλειων δοκών, για τις οποίες μάλιστα, εκτός της μη γραμμικής ανάλυσης λυγισμού είναι εφικτή και η ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού, από την οποία προκύπτουν άμεσα οι ακριβείς τιμές των αντίστοιχων κρίσιμων φορτίων λυγισμού.



Σχήμα 4.1: Γεωμετρία δοκού με ατέλεια τοξοειδούς μορφής.

#### 4.2.2 Παράμετροι της μελέτης

Οι παράμετροι του προβλήματος συνοψίζονται παρακάτω:

Διαστάσεις πολύστρωτης δοκού:

Μήκος ( $L$ ) : 200 mm

Πλάτος ( $B$ ) : 50 mm

Πάχος ( $t$ ) : 6 / 8 / 10 mm

Διαστάσεις τοξοειδούς γεωμετρικής ατέλειας:

Μήκος ατέλειας (χορδή του τόξου,  $L_0$ ) : 40 mm

Μέγεθος ατέλειας (βέλος του τόξου,  $w_0$ ) : 0 / 0.5t / t / 1.5t

Περιορισμός (για προσέγγιση ρεαλιστικών περιπτώσεων) :  $w_0 \leq L_0 / 4 = 10$  mm

Σύμφωνα με αυτές τις παραμέτρους που έχουν ορισθεί, οι περιπτώσεις που θα εξετασθούν συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1 που ακολουθεί.

**Πίνακας 4.1:** Εξεταζόμενες περιπτώσεις παραμετρικής μελέτης λυγισμού πολύστρωτων δοκών.

Περίπτωση	Πάχος δοκού (t)	Μέγεθος ατέλειας ( $w_0$ )
Case 1: [06-00]	6 mm	-
Case 2: [06-03]		3 mm
Case 3: [06-06]		6 mm
Case 4: [06-09]		9 mm
Case 5: [08-00]	8 mm	-
Case 6: [08-04]		4 mm
Case 7: [08-08]		8 mm
Case 8: [10-00]	10 mm	-
Case 9: [10-05]		5 mm
Case 10: [10-10]		10 mm

Συνοριακές συνθήκες και φόρτιση:

Και τα δύο άκρα της δοκού ( $x = 0$  και  $x = 200$  mm) θεωρούνται πακτωμένα, με περιορισμένους όλους τους βαθμούς ελευθερίας, εκτός της μετατόπισης κατά τη διεύθυνση  $x$ , του ενός άκρου ( $x = 200$  mm), όπου επιβάλλεται η φόρτιση με τη μορφή ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης.

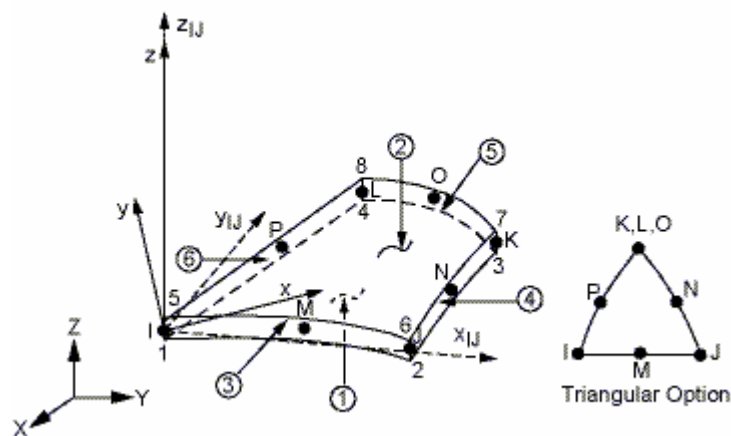
Υλικό και μηχανικές ιδιότητες αυτού:

Θεωρείται ότι οι δοκοί είναι κατασκευασμένες από σύστημα εποξειδικής ρητίνης ενισχυμένης με ίνες γυαλιού τύπου E, με μηχανικές ιδιότητες πολύστρωτου τις παρακάτω:

$$\begin{array}{lll}
 E_x = 18000 \text{ MPa} & \nu_{xy} = 0.38 & G_{xy} = 1200 \text{ MPa} \\
 E_y = 18000 \text{ MPa} & \nu_{yz} = 0.32 & G_{yz} = 2200 \text{ MPa} \\
 E_z = 3280 \text{ MPa} & \nu_{xz} = 0.32 & G_{xz} = 2200 \text{ MPa}
 \end{array}$$

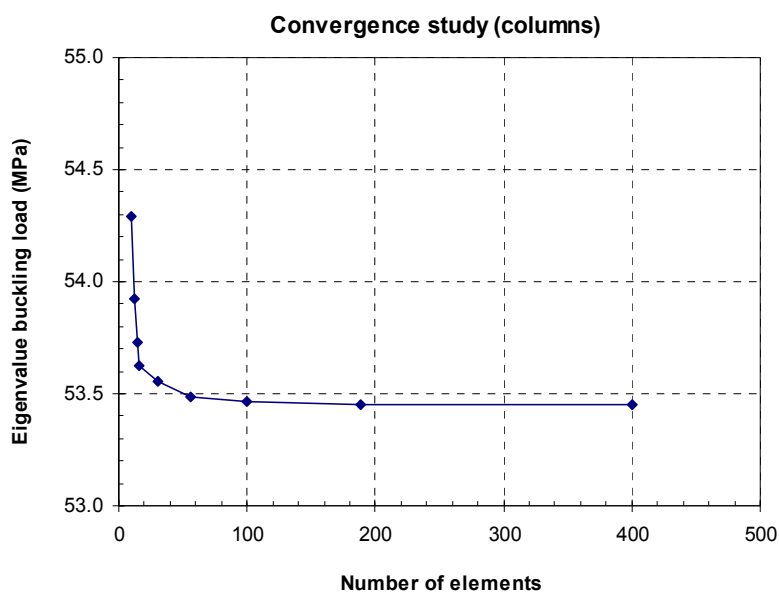
**4.2.3 Παράμετροι της μοντελοποίησης**

Η μοντελοποίηση του πολύστρωτου γίνεται μακροσκοπικά, σαν μια στρώση ισοδύναμου πάχους, με τις αντίστοιχες μηχανικές ιδιότητές της, δηλαδή ουσιαστικά χωρίς να γίνεται ανάλυση πολύστρωτου, αλλά ενός ορθοτροπικού υλικού. Έτσι, για τη μοντελοποίηση της κατασκευής χρησιμοποιήθηκε το στοιχείο SHELL93 της βιβλιοθήκης στοιχείων του ANSYS, το οποίο είναι οκτακομβικό, τρισδιάστατο στοιχείο μοντελοποίησης κελυφών, με έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, όπως φαίνεται στην απεικόνιση του Σχήματος 4.2 [Documentation for ANSYS].

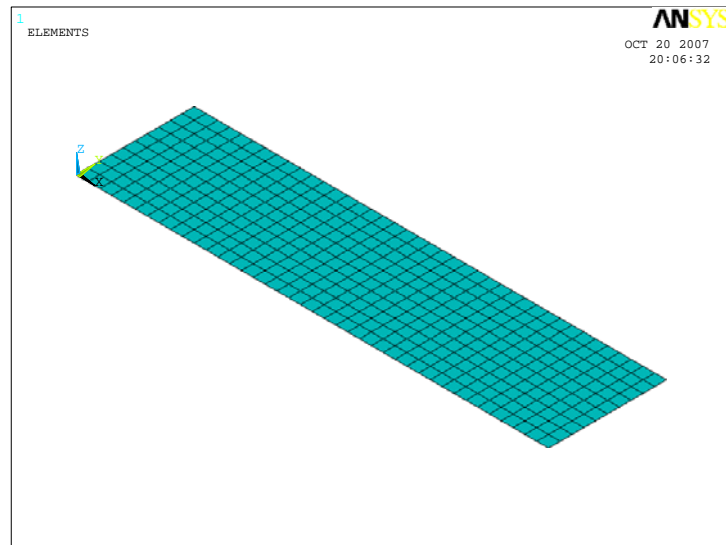


Σχήμα 4.2: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχείου SHELL93.

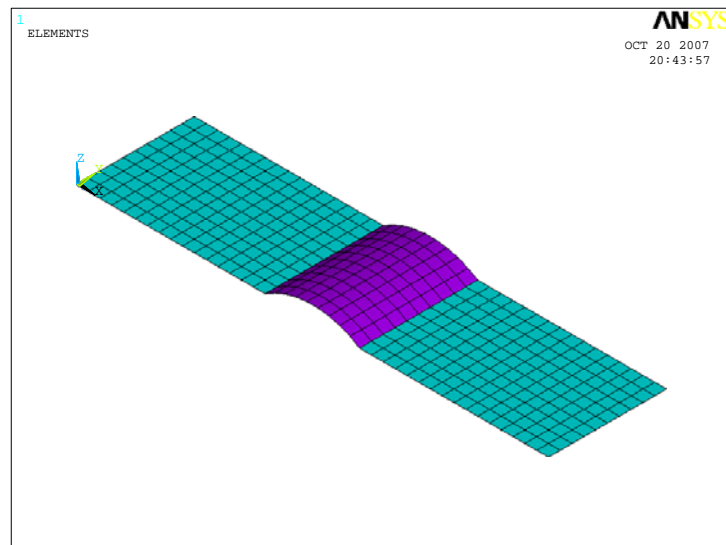
Μετά από μελέτη σύγκλισης που έγινε για την περίπτωση ανάλυσης ιδιοτιμών λυγισμού της αντίστοιχης, γεωμετρικά τέλειας δοκού, πάχους  $t = 6 \text{ mm}$ , όπως φαίνεται στο διάγραμμα του Σχήματος 4.3, επιλέχθηκε η χρήση 400 στοιχείων με ομοιόμορφες διαστάσεις ( $5 \times 5 \text{ mm}$ ) για την περίπτωση των γεωμετρικά τέλειων δοκών (Σχήμα 4.4). Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι η σύγκλιση της λύσης για το γεωμετρικά τέλειο μοντέλο είναι αρκετά ικανοποιητική ακόμα και με χρήση 100 στοιχείων, όμως η συγκεκριμένη διακριτοποίηση θα ήταν “φτωχή” για τη μοντελοποίηση της τοξοειδούς γεωμετρικής ατέλειας και έτσι επιλέχθηκε η χρήση 400 στοιχείων. Βέβαια, στις περιπτώσεις όπου υπάρχει γεωμετρική ατέλεια (Σχήμα 4.5), ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει ελάχιστα, λόγω της αύξησης της επιφάνειας στην περιοχή του τόξου της ατέλειας, και ανάλογα με το μήκος αυτού, ο αριθμός των στοιχείων γίνεται είτε 410 είτε 420 κατά περίπτωση.



Σχήμα 4.3: Μελέτη σύγκλισης της λύσης ιδιοτιμών λυγισμού σε γεωμετρικά τέλεια δοκό πάχους  $t = 6 \text{ mm}$ .



**Σχήμα 4.4:** Μοντελοποίηση γεωμετρικά τέλειας δοκού, με χρήση 400 στοιχείων (Case 1: [06-00]).



**Σχήμα 4.5:** Μοντελοποίηση γεωμετρικά ατελούς δοκού, με χρήση 410 στοιχείων (Case 3: [06-06]).

Κατά τη μη γραμμική ανάλυση λυγισμού των μοντέλων, η συνολική ομοιόμορφη μετατόπιση που επιβλήθηκε στο ένα άκρο αυτών ήταν ίδια για όλες τις περιπτώσεις και ίση με 5 mm. Μετά από δοκιμές επιλέχθηκε η τμηματοποίηση αυτής της μετατόπισης σε 250 βήματα, που θεωρούνται αρκετά προκειμένου να ληφθούν ακριβή αποτελέσματα για τις καμπύλες λυγισμού των αντίστοιχων δοκών.

#### 4.2.4 Αποτελέσματα και σχολιασμός

##### Αποτελέσματα ανάλυσης ιδιοτιμών λυγισμού:

Όπως προαναφέρθηκε, η ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού είναι εφικτή μόνο σε γεωμετρικά τέλειους φορείς, οπότε εφαρμόστηκε μόνο στα μοντέλα των δοκών χωρίς γεωμετρικές ατέλειες (Cases 1, 5 & 8), απ' όπου προέκυψαν οι αντίστοιχες τιμές των κρίσιμων τάσεων λυγισμού αυτών, όπως φαίνονται στον Πίνακα 4.2.

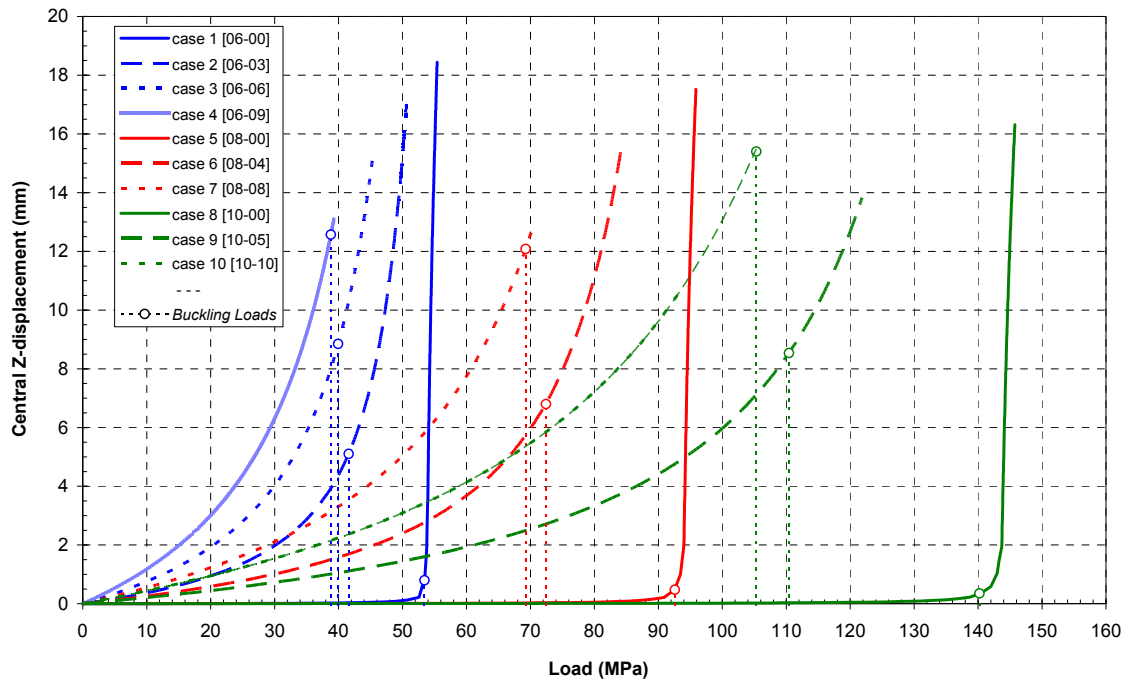
**Πίνακας 4.2:** Αποτελέσματα ανάλυσης ιδιοτιμών λυγισμού δοκών χωρίς ατέλειες.

Περίπτωση	Πάχος δοκού (t)	Κρίσιμες τάσεις λυγισμού ( $\sigma_{cr}$ )	Μεταβολή	
			t	$\sigma_{cr}$
Case 1: [06-00]	6 mm	53.5 MPa	-	-
Case 5: [08-00]	8 mm	92.6 MPa	+33%	+73%
Case 8: [10-00]	10 mm	140.2 MPa	+25%	+51%

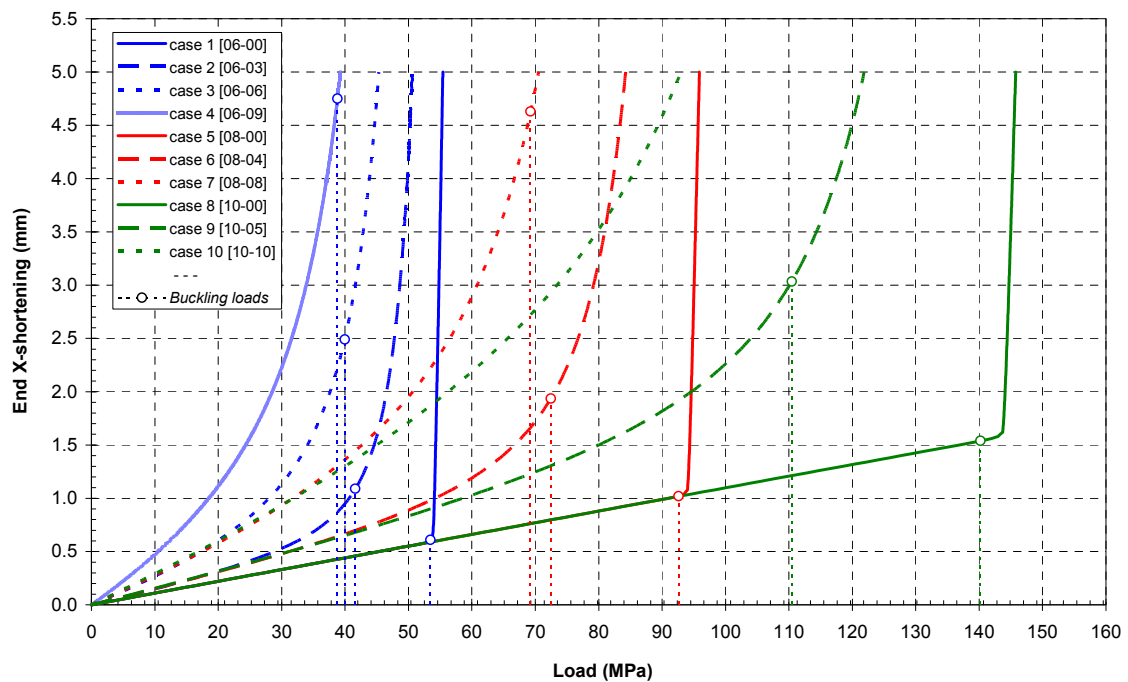
Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα είναι προφανές ότι οι κρίσιμες τάσεις λυγισμού αυξάνονται καθώς αυξάνεται το πάχος των δοκών. Φαίνεται μάλιστα ότι η ποσοστιαία αύξηση των κρίσιμων τάσεων λυγισμού είναι υπερδιπλάσια εκείνης του πάχους.

##### Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης λυγισμού:

Τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν από τη μη γραμμική ανάλυση λυγισμού των 10 μοντέλων-δοκών παρουσιάζονται στη διαγραμματική μορφή των Σχημάτων 4.6 και 4.7, όπου φαίνονται συναρτήσει της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης, η πλάγια μετατόπιση του κέντρου της κάθε δοκού και η επιβαλλόμενη διαμήκης ομοιόμορφη θλιπτική μετατόπιση, αντίστοιχα. Η αναπτυσσόμενη τάση, που είναι αποτέλεσμα της επιβαλλόμενης διαμήκους ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης, μπορεί να εκφραστεί από τη μέση τιμή της, παρόλο που η κατανομή της δεν είναι ομοιόμορφη κατά το πλάτος της πλάκας (βλ. Σχήμα 2.7). Αυτή η μέση αναπτυσσόμενη τάση υπολογίζεται μέσω της x-συνιστώσας της συνολικής δύναμης αντίδρασης που εμφανίζεται στο πλήρως πακτωμένο άκρο της πλάκας ( $x=0$ ) και λαμβάνεται από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων σε κάθε βήμα της προσομοίωσης.



Σχήμα 4.6: Πλάγια μετατόπιση του κέντρου κάθε μοντέλου, συναρτήσει της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης.



Σχήμα 4.7: Διαμήκης επιβαλλόμενη ομοιόμορφη θλιπτική μετατόπιση του άκρου ( $x = 200$  mm) κάθε μοντέλου, συναρτήσει της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης.

Στα δύο αυτά διαγράμματα διακρίνεται και ο προσδιορισμός των κρίσιμων τάσεων λυγισμού, όπως αυτές εκτιμήθηκαν με εφαρμογή της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων που έχει περιγραφεί στο εδάφιο 2.4.2, εκτός των

περιπτώσεων των γεωμετρικά τέλειων δοκών (Cases 1, 5 και 8), για τις οποίες οι τιμές των κρίσιμων τάσεων λυγισμού προέρχονται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης ιδιοτιμών λυγισμού που ήδη παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 4.2. Στις περιπτώσεις αυτές, όπου πρόκειται για γεωμετρικά τέλειες δοκούς, είναι εμφανές ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού μπορεί να εντοπιστεί και οπτικά εύκολα από την αλλαγή της κλίσης των καμπυλών και των δύο διαγραμμάτων. Αυτή όμως η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη μόνο σε περιπτώσεις με μικρή ή χωρίς γεωμετρική ατέλεια, οπότε δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στις υπόλοιπες περιπτώσεις των εξεταζόμενων δοκών της παρούσας παραμετρικής μελέτης.

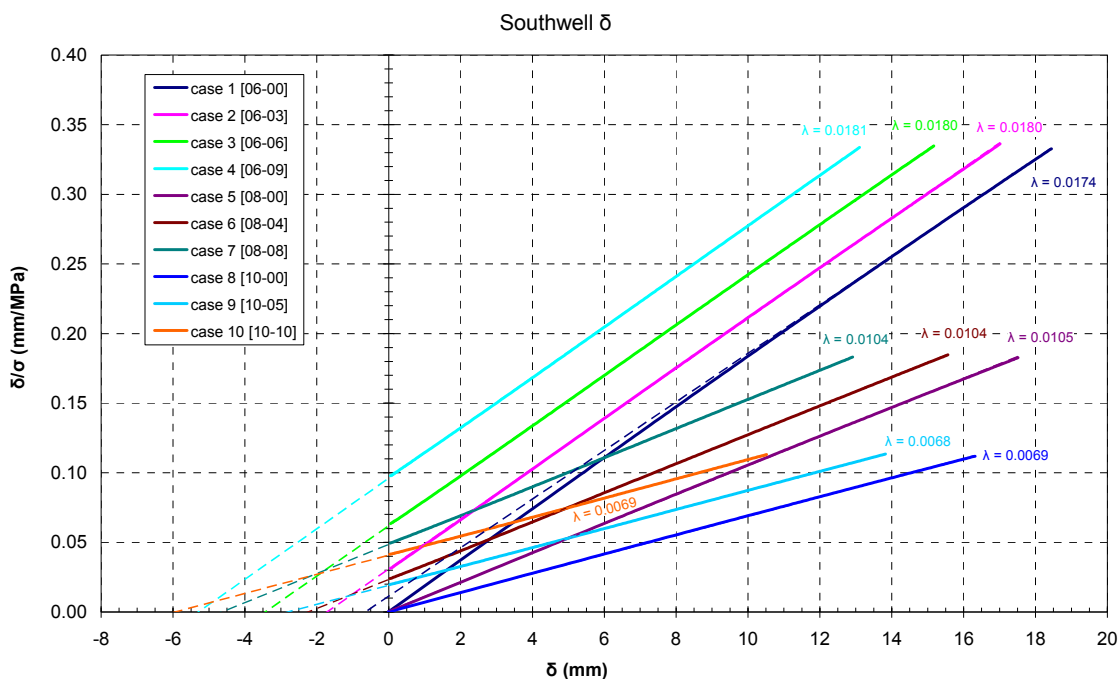
Για την εφαρμογή της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων έγιναν για κάθε δοκό δύο προσεγγίσεις, με αναφορά στη μετατόπιση δύο κρίσιμων σημείων αντίστοιχα. Η 1<sup>η</sup> προσέγγιση αντιστοιχεί στην πλάγια μετατόπιση του κέντρου της εκάστοτε δοκού (central z-displacement), ενώ η 2<sup>η</sup> προσέγγιση αντιστοιχεί στην διαμήκη μετατόπιση του φορτιζόμενου άκρου της (end x-displacement). Έτσι, το αποτέλεσμα εφαρμογής της μεθόδου προκύπτει ως η μέση τιμή των δύο αυτών προσεγγίσεων. Ως εύρος αρχικού φορτίου χρησιμοποιήθηκε το 20% του φορτίου αναφοράς, το οποίο ελήφθη ως το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της αντίστοιχης (όμοιου πάχους) τέλειας δοκού. Πρέπει να σημειωθεί ότι για την ακραία περίπτωση (Case 10: [10-10]) η μέθοδος δεν ήταν δυνατό να εφαρμοσθεί άμεσα χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα αποτελέσματα, αφού στο εύρος της επιβαλλόμενης μετατόπισης (5 mm) που έχει μελετηθεί, ο ρυθμός μεταβολής των μετατοπίσεων δεν αυξάνει ιδιαίτερα σε σχέση με την αρχική του τιμή σε κανένα από τα δύο κρίσιμα σημεία. Έτσι, έγινε μια πολυωνυμική προσέγγιση 6<sup>ου</sup> βαθμού των καμπυλών της μεθόδου για το συγκεκριμένο μοντέλο και με προέκτασή τους, έγινε εκτίμηση της κρίσιμης τάσης λυγισμού όπως και στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζονται αριθμητικά στον Πίνακα 4.3, που ακολουθεί.



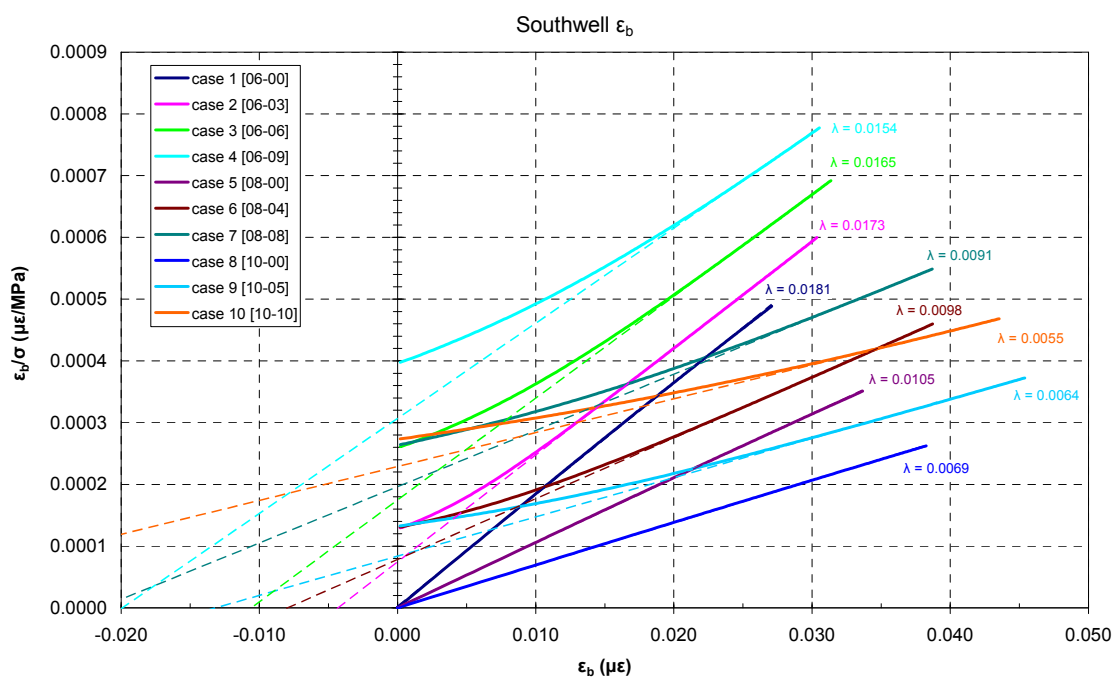
**Πίνακας 4.3:** Αποτελέσματα αρχικής εκτίμησης κρίσιμων τάσεων λυγισμού (μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων).

Μέθοδος Περίπτωση		Κρίσιμες τάσεις λυγισμού (MPa)			
		<i>Central z-displ/ment</i>	<i>Longitudinal x- displ/ment</i>	<b>Average values</b>	<b>FEM Eigenvalues</b>
<b>1: [06-00]</b>	-	-	-	<b>53.5</b>	
<b>2: [06-03]</b>	39.6	43.6	<b>41.6</b>	-	
<b>3: [06-06]</b>	39.7	40.2	<b>40.0</b>	-	
<b>4: [06-09]</b>	39.1	38.5	<b>38.8</b>	-	
<b>5: [08-00]</b>	-	-	-	<b>92.6</b>	
<b>6: [08-04]</b>	68.9	76.0	<b>72.5</b>	-	
<b>7: [08-08]</b>	69.0	69.5	<b>69.3</b>	-	
<b>8: [10-00]</b>	-	-	-	<b>140.2</b>	
<b>9: [10-05]</b>	104.8	116.1	<b>110.5</b>	-	
<b>10: [10-10]</b>	104.2	106.5	<b>105.4</b>	-	

Στη συνέχεια, στα Σχήματα 4.8 και 4.9 παρουσιάζεται και η εφαρμογή των δύο εναλλακτικών μεθόδων Southwell (Southwell- $\delta$  / Southwell- $\epsilon_b$ ) που έχουν περιγραφεί στο εδάφιο 2.4.1, για την εκτίμηση των κρίσιμων τάσεων λυγισμού, προκειμένου να γίνει μια σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των μεθόδων. Για την κατασκευή του διαγράμματος της 1<sup>ης</sup> μεθόδου (Southwell- $\delta$ ) χρειάζεται η γνώση της πλάγιας μετατόπισης ( $\delta$ ) στο κέντρο της κάθε δοκού συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου, ενώ για την κατασκευή του διαγράμματος της 2<sup>ης</sup> μεθόδου (Southwell- $\epsilon_b$ ) χρειάζεται η γνώση της διαμήκουσ κάμπτικής παραμόρφωσης ( $\epsilon_b$ ) στο ίδιο σημείο, επίσης συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου. Τα στοιχεία αυτά λαμβάνονται άμεσα από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων συναρτήσει της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης σε κάθε βήμα της ανάλυσης και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των αντίστοιχων διαγραμμάτων, όπως φαίνονται στη συνέχεια.



Σχήμα 4.8: Εφαρμογή της μεθόδου Southwell-δ για την εκτίμηση των κρίσιμων τάσεων λυγισμού.



Σχήμα 4.9: Εφαρμογή της μεθόδου Southwell-ε<sub>b</sub> για την εκτίμηση των κρίσιμων τάσεων λυγισμού.

Από την εφαρμογή των δύο εναλλακτικών μεθόδων Southwell, μέσω αντιστροφής της τιμής της κλίσης κάθε καμπύλης, προκύπτει κατά τα γνωστά η τιμή της κρίσιμης τάσης λυγισμού της αντίστοιχης δοκού. Παρατηρώντας οπτικά τα δύο

διαγράμματα, διακρίνονται εύκολα τρεις ομάδες καμπύλων σε αυτά. Η κάθε ομάδα περιλαμβάνει καμπύλες περίπου ίδιας κλίσης που αντιστοιχούν σε μοντέλα δοκών με ίδιο πάχος, τα οποία προφανώς έχουν και παραπλήσιες τιμές κρίσιμων τάσεων λυγισμού. Τα αποτελέσματα εφαρμογής των δύο μεθόδων Southwell παρουσιάζονται αριθμητικά στον Πίνακα 4.4 που ακολουθεί.

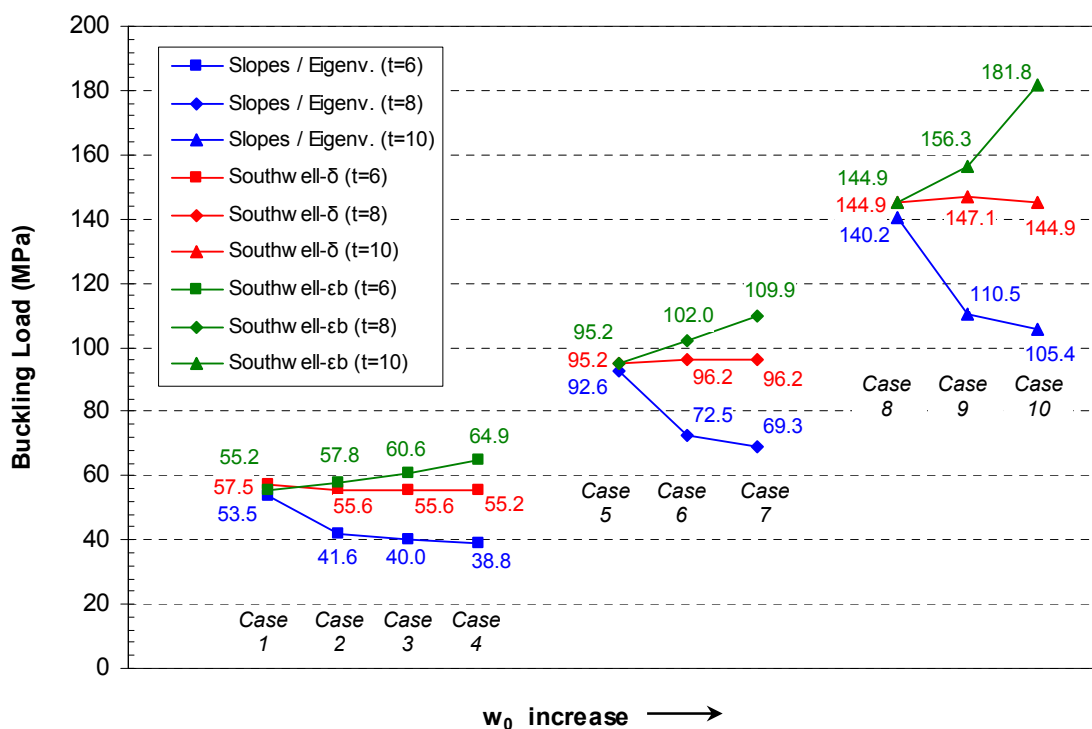
**Πίνακας 4.4:** Αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου Southwell.

Περίπτωση	<i>south-δ</i> (λ)	<b>Crit. Load-δ</b> (MPa)	<i>south-ε<sub>b</sub></i> (λ)	<b>Crit. Load-ε<sub>b</sub></b> (MPa)
<b>1: [06-00]</b>	0.0174	<b>57.5</b>	0.0181	<b>55.2</b>
<b>2: [06-03]</b>	0.0180	<b>55.6</b>	0.0173	<b>57.8</b>
<b>3: [06-06]</b>	0.0180	<b>55.6</b>	0.0165	<b>60.6</b>
<b>4: [06-09]</b>	0.0181	<b>55.2</b>	0.0154	<b>64.9</b>
<b>5: [08-00]</b>	0.0105	<b>95.2</b>	0.0105	<b>95.2</b>
<b>6: [08-04]</b>	0.0104	<b>96.2</b>	0.0098	<b>102.0</b>
<b>7: [08-08]</b>	0.0104	<b>96.2</b>	0.0091	<b>109.9</b>
<b>8: [10-00]</b>	0.0069	<b>144.9</b>	0.0069	<b>144.9</b>
<b>9: [10-05]</b>	0.0068	<b>147.1</b>	0.0064	<b>156.3</b>
<b>10: [10-10]</b>	0.0069	<b>144.9</b>	0.0055	<b>181.8</b>

Προκειμένου να συγκριθούν τα αποτελέσματα αυτά, με εκείνα της αρχικής εκτίμησης (Πίνακας 4.3), ακολουθεί ο συγκεντρωτικός Πίνακας 4.5 και το αντίστοιχο διάγραμμα του Σχήματος 4.10 για τη γραφική απεικόνιση όλων των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 4.5: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα μεθόδων εκτίμησης κρίσιμων τάσεων λυγισμού.

Μέθοδος Περίπτωση	Μέθοδος ρυθμού μετατοπ/ων	FEM Eigenvalue	Crit. Load- $\delta$ (MPa)	Crit. Load- $\epsilon_b$ (MPa)
1: [06-00]	-	53.5	57.5	55.2
2: [06-03]	41.6	-	55.6	57.8
3: [06-06]	40.0	-	55.6	60.6
4: [06-09]	38.8	-	55.2	64.9
5: [08-00]	-	92.6	95.2	95.2
6: [08-04]	72.5	-	96.2	102.0
7: [08-08]	69.3	-	96.2	109.9
8: [10-00]	-	140.2	144.9	144.9
9: [10-05]	110.5	-	147.1	156.3
10: [10-10]	105.4	-	144.9	181.8



Σχήμα 4.10: Συγκριτικό διάγραμμα απεικόνισης αποτελεσμάτων μεθόδων εκτίμησης των κρίσιμων τάσεων λυγισμού.

Από την παρατήρηση των παραπάνω αποτελεσμάτων, φαίνεται ότι μόνο η μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων δίνει λογικά αποτελέσματα σύμφωνα με τα αναμενόμενα, δηλαδή μείωση της κρίσιμης τάσης λυγισμού ( $\sigma_{cr}$ ) με αύξηση του μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0$ ) σε ομάδες μοντέλων ίδιου πάχους.

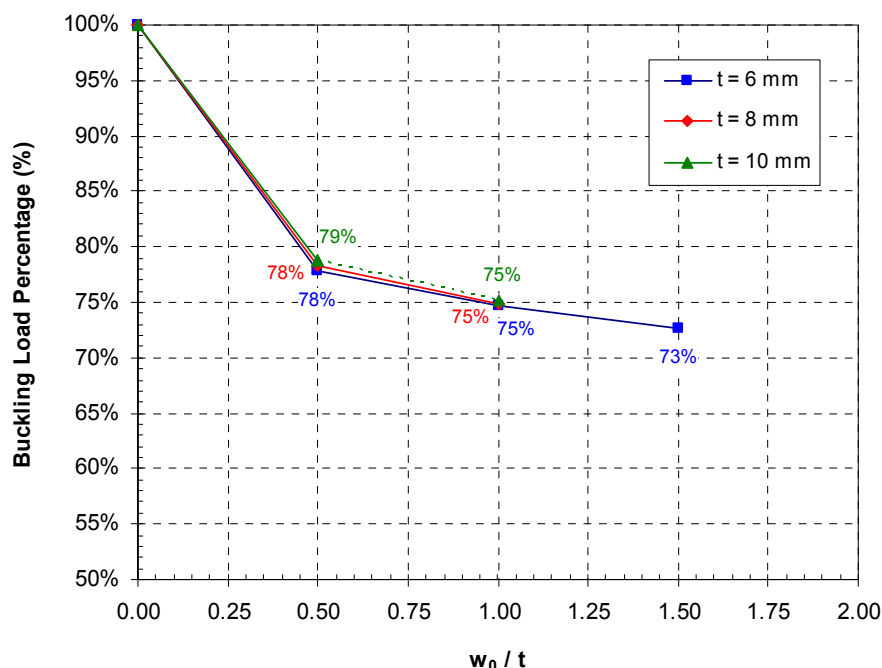
Αντιθέτως, φαίνεται ότι η μέθοδος Southwell δε μπορεί να εκτιμήσει την επίδραση που έχει στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού μιας δοκού η ύπαρξη και το μέγεθος μιας γεωμετρικής ατέλειας. Συγκεκριμένα, θα λέγαμε ότι στις περιπτώσεις των μοντέλων των δοκών με γεωμετρική ατέλεια, η εκτίμηση που δίνεται από τη μέθοδο Southwell-δ προσεγγίζει αυτήν που αντιστοιχεί στο γεωμετρικά τέλειο μοντέλο του αντίστοιχου πάχους, ενώ η μέθοδος Southwell-ε<sub>β</sub> δίνει εντελώς παράλογα αποτελέσματα αφού σύμφωνα με αυτήν, η αύξηση του μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας προκαλεί αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, κάτι που είναι θεωρητικά αδύνατον. Επομένως, μόνο τα αποτελέσματα της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων κρίνονται αξιόπιστα και μόνο αυτά θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

Στον Πίνακα 4.6 που ακολουθεί φαίνονται τα ποσοστά των κρίσιμων τάσεων λυγισμού ( $\sigma_{cr}$ ) κάθε μοντέλου με γεωμετρική ατέλεια, ως προς την κρίσιμη τάση λυγισμού του αντίστοιχου τέλειου μοντέλου ( $\sigma_{cr-Perf}$ ) ίδιου πάχους. Όπως προαναφέρθηκε, τα στοιχεία αυτά βασίζονται μόνο στις εκτιμήσεις των ιδιοτιμών λυγισμού (για τα μοντέλα τέλειων δοκών) και της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων (για τα υπόλοιπα μοντέλα), δηλαδή στα αποτελέσματα του Πίνακα 4.3, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα αποτελέσματα της μεθόδου Southwell, που αποδείχθηκαν αναξιόπιστα.

**Πίνακας 4.6:** Ποσοστά κρίσιμων τάσεων λυγισμού ως προς την τέλεια περίπτωση.

Περίπτωση	$w_0 / t$	$\sigma_{cr}$ (MPa)	$\sigma_{cr} / \sigma_{cr-Perf}$ (%)
<b>1: [06-00]</b>	0.0	53.5	100 %
<b>2: [06-03]</b>	0.5	41.6	78 %
<b>3: [06-06]</b>	1.0	40.0	75 %
<b>4: [06-09]</b>	1.5	38.8	73 %
<b>5: [08-00]</b>	0.0	92.6	100 %
<b>6: [08-04]</b>	0.5	72.5	78 %
<b>7: [08-08]</b>	1.0	69.3	75 %
<b>8: [10-00]</b>	0.0	140.2	100 %
<b>9: [10-05]</b>	0.5	110.5	79 %
<b>10: [10-10]</b>	1.0	105.4	75 %

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.11 φαίνεται η διαγραμματική απεικόνιση αυτών των στοιχείων συναρτήσει του αδιάστατου μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0 / t$ ).



**Σχήμα 4.11:** Ποσοστό κρίσιμης τάσης λυγισμού συναρτήσει του αδιάστατου μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας.

Από τα παραπάνω στοιχεία, είναι εμφανής η επίδραση που έχει η ύπαρξη και το μέγεθος μιας τοξοειδούς γεωμετρικής ατέλειας στη λυγισμική συμπεριφορά μιας πολύστρωτης δοκού. Για μικρές σχετικά ατέλειες τάξης μεγέθους ίσου με το πάχος του πολύστρωτου, η μείωση της κρίσιμης τάσης λυγισμού είναι σημαντική και φτάνει το 25% περίπου. Επιπρόσθετα, η μείωση της κρίσιμης τάσης λυγισμού καθώς το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας αυξάνεται μένει σταθερή σε όλες τις περιπτώσεις, ανεξάρτητα από το πάχος της δοκού.

#### 4.2.5 Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας, τα βασικότερα συμπεράσματα της παραπάνω παραμετρικής μελέτης είναι τα εξής:

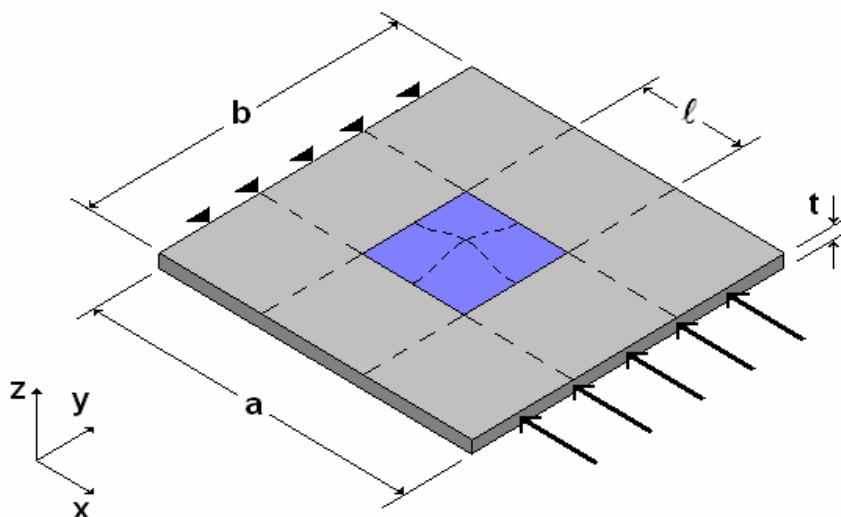
- Τα αποτελέσματα της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων είναι παρόμοια για τις δύο περιπτώσεις κρίσιμων σημείων εφαρμογής: “central z-displacement” και “end x-displacement”
- Τα αποτελέσματα των μεθόδων Southwell συμπίπτουν με τα αναμενόμενα (ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού και μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων) μόνο για τις περιπτώσεις δοκών χωρίς (ή με μικρή) γεωμετρική ατέλεια.

- Για τις περιπτώσεις δοκών με γεωμετρική ατέλεια, τα αποτελέσματα της μεθόδου Southwell-δ δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη ή το μέγεθος αυτής, ενώ τα αποτελέσματα της μεθόδου Southwell-ε<sub>b</sub> είναι εντελώς παράλογα.
- Αποδεκτά εμφανίζονται μόνο τα αποτελέσματα της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων (“central z-displacement” και “end x-displacement”).
- Παρουσιάζεται σημαντική μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ( $\sigma_{cr}$ ) όταν αυξάνεται το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0$ ).
- Η ανωτέρω συμπεριφορά είναι ανεξάρτητη του πάχους της δοκού.

### 4.3 Παραμετρική μελέτη λυγισμού πολύστρωτων πλακών με γεωμετρικές ατέλειες

#### 4.3.1 Γενική περιγραφή της μελέτης

Στη μελέτη αυτή θα μοντελοποιηθεί με χρήση του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων “ANSYS” ο λυγισμός πλήρως πακτωμένων, τετραγωνικών, συμμετρικών, πολύστρωτων πλακών που παρουσιάζουν τοπική ή γενική γεωμετρική ατέλεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.12 (περίπτωση τοπικής ατέλειας στο κέντρο), υπό την επιβολή ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης του ενός άκρου τους (uniform end shortening). Σκοπός είναι να διερευνηθεί η επίδραση της ύπαρξης μιας γεωμετρικής ατέλειας στη λυγισμική συμπεριφορά της πλάκας, αλλά παράλληλα να εκτιμηθεί και η επίδραση που έχουν στο φαινόμενο, τόσο η έκταση, όσο και η θέση της γεωμετρικής ατέλειας στην επιφάνεια της πλάκας. Έτσι, σε μια πολύστρωτη πλάκα σταθερών διαστάσεων (μήκος, πλάτος και πάχος) και με συγκεκριμένη ακολουθία στρώσεων, θα γίνει προσομοίωση λυγισμού με παράμετρο το μέγεθος ( $\ell$ ) και τη θέση της γεωμετρικής ατέλειας. Επίσης, για λόγους σύγκρισης και αναφοράς, θα εξετασθεί προφανώς και η περίπτωση της αντίστοιχης γεωμετρικά τέλειας πλάκας. Οι διαστάσεις, το υλικό και οι μηχανικές του ιδιότητες, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες των πλακών που περιγράφονται στη συνέχεια, έχουν προέλθει από τα στοιχεία της πειραματικής μελέτης που παρουσιάζεται αργότερα στο Κεφάλαιο 5.



Σχήμα 4.12: Γεωμετρική μορφή πλάκας με τοπική γεωμετρική ατέλεια στο κέντρο.



#### 4.3.2 Παράμετροι της μελέτης

Οι παράμετροι του προβλήματος συνοψίζονται παρακάτω:

Διαστάσεις πολύστρωτης πλάκας:

Μήκος (a) : 320 mm

Πλάτος (b) : 320 mm

Πάχος (t) : 15.14 mm

Υλικό και μηχανικές ιδιότητες αυτού:

Το πολύστρωτο θεωρείται ότι είναι κατασκευασμένο από σύστημα εποξειδικής ρητίνης ενισχυμένης με μονοαξονικές (UD) στρώσεις ινών γυαλιού τύπου E, με τις εξής μηχανικές ιδιότητες στρώσης:

$$\begin{array}{lll} E_1 = 35205 \text{ MPa} & \nu_{12} = 0.268 & G_{12} = 2531 \text{ MPa} \\ E_2 = 9835 \text{ MPa} & \nu_{23} = 0.375 & G_{23} = 2329 \text{ MPa} \\ E_3 = 9835 \text{ MPa} & \nu_{13} = 0.268 & G_{13} = 2531 \text{ MPa} \end{array}$$

Ακολουθία και πάχη των στρώσεων:

Η ακολουθία των στρώσεων του πολύστρωτου, έχει ως εξής:

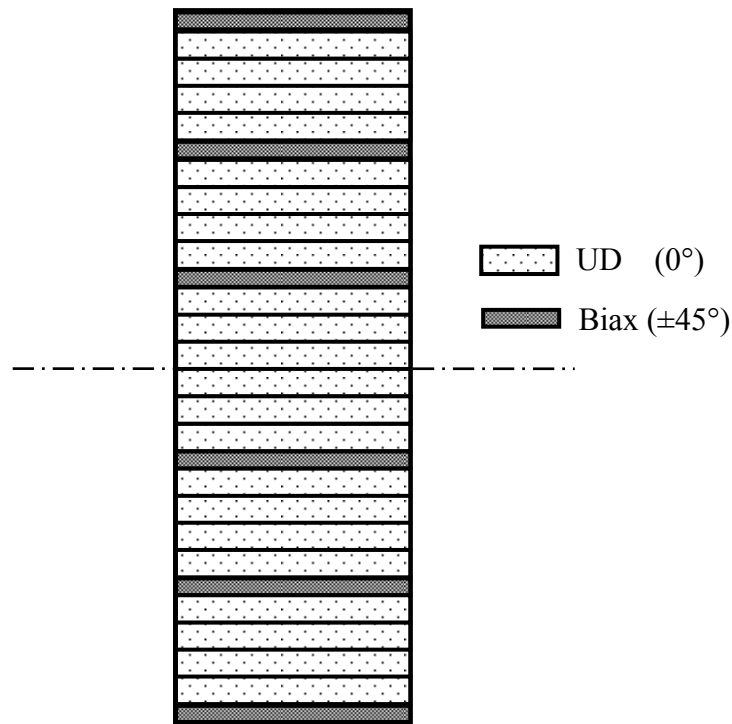
$$[Biax / 4UD / Biax / 4UD / Biax / 6UD / Biax / 4UD / Biax / 4UD / Biax]$$

όπου ως “UD” συμβολίζονται οι μονοαξονικές (unidirectional) στρώσεις, ενώ ως “Biax” οι διαξονικές (Biaxial) στρώσεις, οι οποίες στην ουσία αποτελούνται από δύο αλληπάλλληλες λεπτές στρώσεις μονοαξονικών ινών με προσανατολισμό +45° και -45° αντίστοιχα, όπως φαίνεται στην αναπαράσταση του Σχήματος 4.13. Συγκεκριμένα, τα πάχη των μεμονωμένων στρώσεων έχουν ως εξής:

$$t_{(UD)} = t_1 = 0.59 \text{ mm/στρώση}$$

$$t_{(Biax)} = t_2 = 0.36 \text{ mm/στρώση}$$

Σημειώνεται ότι κατά τη μοντελοποίηση του πολύστρωτου, για λόγους εξοικονόμησης της απαιτούμενης από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων υπολογιστικής ισχύος, κάθε ομάδα αλληπάλλληλων μονοαξονικών στρώσεων θεωρείται ως μία μόνο στρώση ισοδύναμου πάχους. Έτσι προκύπτει μοντελοποίηση 17 στρώσεων, έναντι 34 που είναι ο πραγματικός αριθμός των στρώσεων του πολύστρωτου.



Σχήμα 4.13: Ακολουθία στρώσεων της πολύστρωτης πλάκας.

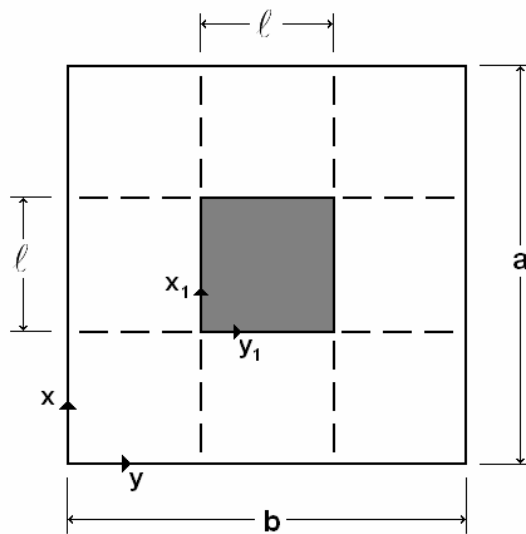
Παράμετροι της γεωμετρικής ατέλειας:

Η μορφή της γεωμετρικής ατέλειας είναι τετραγωνική και περιγράφεται σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $Ox_1Y_1$  (τοπικό σύστημα συντεταγμένων της ατέλειας), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.14, από την παρακάτω σχέση:

$$z = w_0 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x_1}{\ell}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot y_1}{\ell}\right) , \quad 0 \leq x_1 \leq \ell , \quad 0 \leq y_1 \leq \ell \quad [4.1]$$

όπου:  $w_0$  είναι η μέγιστη τιμή της γεωμετρικής ατέλειας

$\ell$  είναι το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας



**Σχήμα 4.14:** Τοπικό σύστημα συντεταγμένων της ατέλειας.

Στα πλαίσια της παραμετρικής μελέτης που θα διενεργηθεί, επιλέχθηκε σταθερή μέγιστη τιμή της γεωμετρικής ατέλειας  $w_0$ , ως ποσοστό του πλάτους της πολύστρωτης πλάκας:

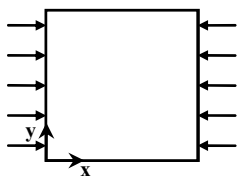
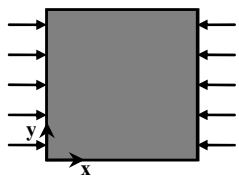
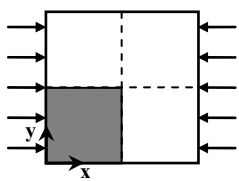
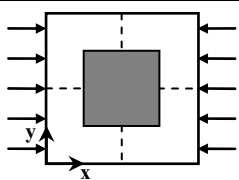
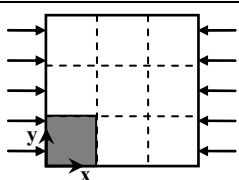
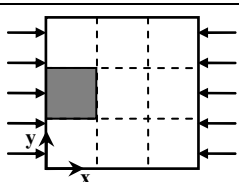
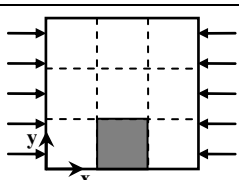
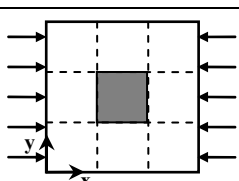
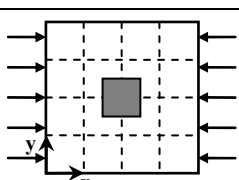
$$w_0 = 1 \% \times b = 3.2 \text{ mm}$$

ενώ για το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας επιλέχθηκαν οι εξής τέσσερις τιμές:

- $\ell = a$
- $\ell = a / 2$
- $\ell = a / 3$
- $\ell = a / 4$

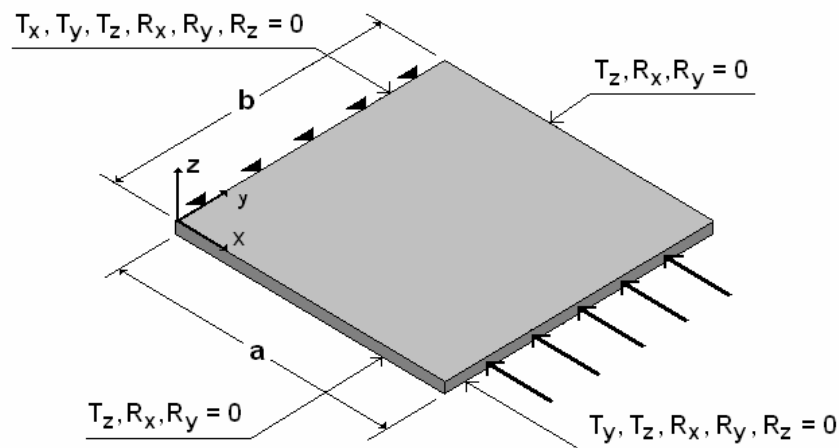
Για κάθε μία τιμή του μεγέθους  $\ell$  της γεωμετρικής ατέλειας, έχουν επιλεγθεί κάποιες υπο-περιπτώσεις, ως προς τη θέση της στην επιφάνεια της πλάκας. Σε κάποιες από αυτές, η θέση της ατέλειας είναι στο κέντρο της επιφάνειας, ενώ στις υπόλοιπες είναι σε άλλες θέσεις, εφαπτομενικά των πλευρών της. Όλες οι υπό μελέτη περιπτώσεις συνοψίζονται στον πίνακα 4.7 που ακολουθεί.

**Πίνακας 4.7:** Εξεταζόμενες περιπτώσεις παραμετρικής μελέτης πλακών.

Περίπτωση	Μέγεθος ατέλειας ( $\ell$ )	Θέση ατέλειας
Case 0: [0-0] (χωρίς ατέλεια)	-	
Case 1: [1-0] (γενική ατέλεια)	$\ell = a$	
Case 2: [2-1]	$\ell = a / 2$	
Case 3: [2-C] (κεντρική ατέλεια)		
Case 4: [3-1]	$\ell = a / 3$	
Case 5: [3-2]		
Case 6: [3-3]		
Case 7: [3-C] (κεντρική ατέλεια)		
Case 8: [4-C] (κεντρική ατέλεια)	$\ell = a / 4$	

Συνοριακές συνθήκες και φόρτιση:

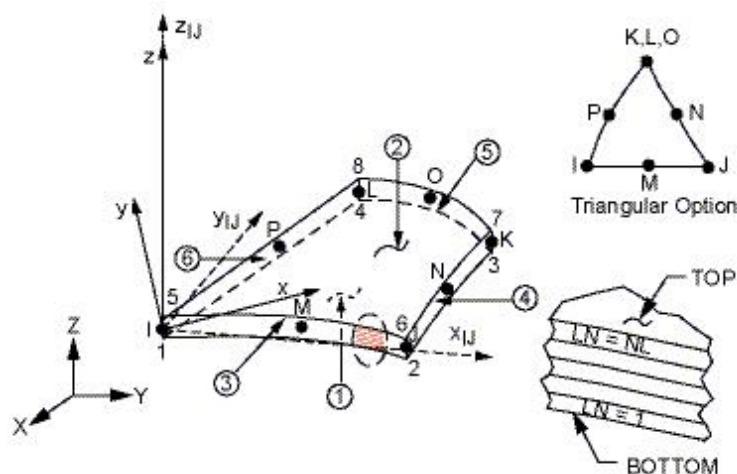
Η πολύστρωτη πλάκα θεωρείται πακτωμένη σε όλες τις πλευρές της. Ωστόσο, επιτρέπεται η συνεπίπεδη μετατόπιση των αφόρτιστων πλευρών της, με ελευθέρωση των αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας, προκειμένου να προσομοιωθούν καλύτερα οι συνοριακές συνθήκες ενός πραγματικού προβλήματος. Επίσης, για τον ίδιο λόγο επιτρέπεται η μετακίνηση κατά τη διεύθυνση  $x$ , όλων των πλευρών, εκτός της πλήρως πακτωμένης ( $x = 0$ ), προκειμένου να είναι εφικτή η δοκιμή με επιβολή ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης στην απέναντι πλευρά ( $x = 320$  mm). Οι ακριβείς συνοριακές συνθήκες κάθε πλευράς, με αναφορά στους περιορισμούς των βαθμών ελευθερίας της κάθε μίας, φαίνονται στο Σχήμα 4.15, όπου με “T” συμβολίζονται οι μετατοπίσεις (translations) και με “R” οι περιστροφές (rotations). Όπως αναφέρθηκε, η φόρτιση έχει τη μορφή ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης του ενός άκρου ( $x = 320$  mm).



Σχήμα 4.15: Συνοριακές συνθήκες της πολύστρωτης πλάκας.

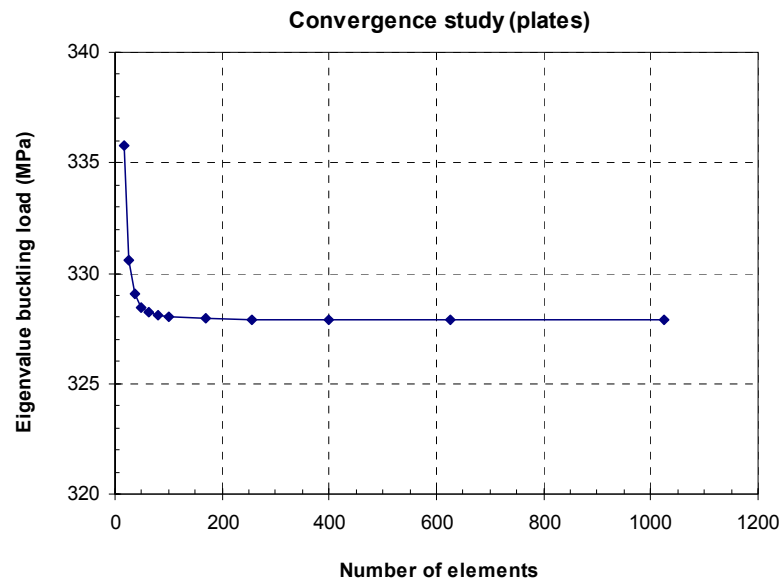
**4.3.3 Παράμετροι της μοντελοποίησης**

Για τη μοντελοποίηση πεπερασμένων στοιχείων της πολύστρωτης πλάκας, χρησιμοποιήθηκε το στοιχείο SHELL99 της βιβλιοθήκης στοιχείων του ANSYS, το οποίο είναι οκτακομβικό, τρισδιάστατο στοιχείο μοντελοποίησης πολύστρωτων κελυφών, με έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, όπως φαίνεται στην απεικόνιση του Σχήματος 4.16 [Documentation for ANSYS].

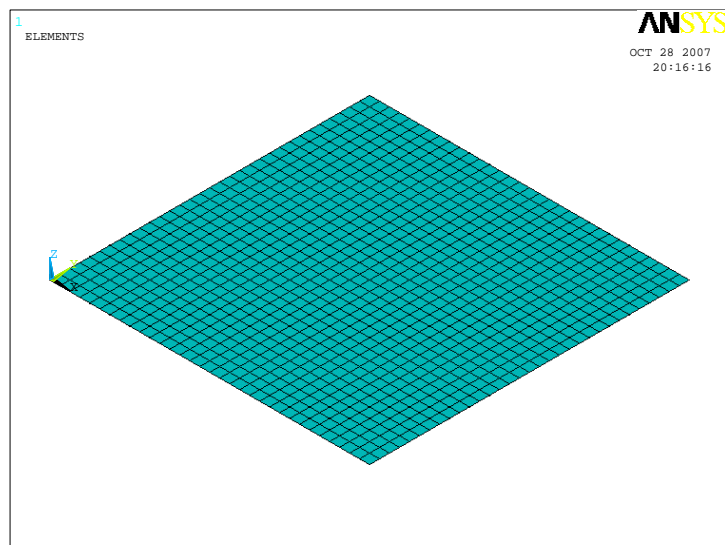


Σχήμα 4.16: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχείου SHELL99.

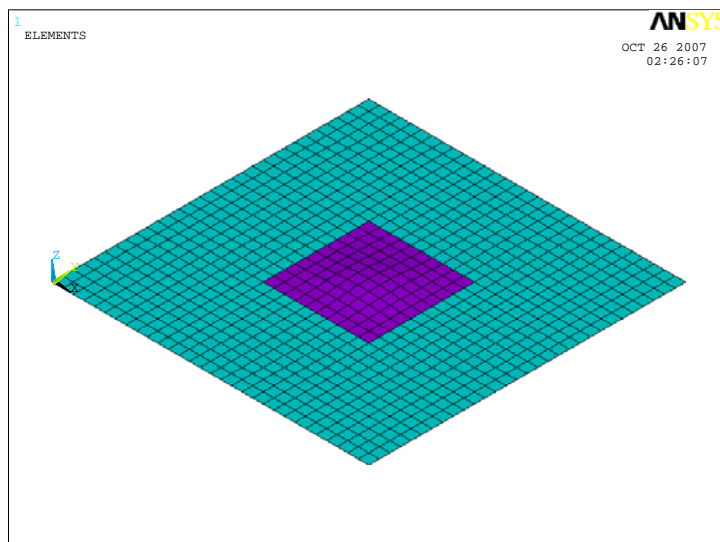
Μετά από μελέτη σύγκλισης που έγινε για την ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού της αντίστοιχης γεωμετρικά τέλειας πλάκας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του Σχήματος 4.17, επιλέχθηκε η χρήση 1024 τετραγωνικών στοιχείων για την περίπτωση των γεωμετρικά τέλειων πλακών (Σχήμα 4.18). Όπως και στην περίπτωση της παραμετρικής μελέτης πολύστρωτων δοκών, έτσι και εδώ, η σύγκλιση της λύσης για την περίπτωση της τέλειας πλάκας φαίνεται να επιτυγχάνεται για πολύ μικρότερο αριθμό στοιχείων από αυτόν που επιλέχθηκε (περίπου 100). Ωστόσο, όπως επεξηγήθηκε και στην προηγούμενη περίπτωση, το πλέγμα της διακριτοποίησης επιλέχθηκε αρκετά πυκνό, έτσι ώστε να είναι ικανοποιητικό για την περιοχή της γεωμετρικής ατέλειας. Ειδικά για τις περιπτώσεις 4, 5, 6 και 7, όπου  $\ell = a/3$ , επιλέχθηκε η χρήση 900 στοιχείων (Σχήμα 4.19) και όχι 1024, για καθαρά πρακτικούς λόγους της γεωμετρικής μοντελοποίησης, προκειμένου δηλαδή να γίνει ο κατάλληλος διαχωρισμός της επιφάνειας της πλάκας σε υποπεριοχές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.14 που έχει ήδη παρουσιασθεί.



Σχήμα 4.17: Μελέτη σύγκλισης της λύσης ιδιοτιμών λυγισμού σε γεωμετρικά τέλεια δοκό πάχους  $t = 6$  mm.



Σχήμα 4.18: Μοντελοποίηση γεωμετρικά τέλειας πλάκας (Case 0: [0-0]), με χρήση 1024 στοιχείων.



**Σχήμα 4.19:** Μοντελοποίηση γεωμετρικά ατελούς πλάκας (Case 7: [3-C]), με χρήση 900 στοιχείων, όπου διακρίνεται η περιοχή της γεωμετρικής ατέλειας.

Κατά τη μη γραμμική ανάλυση λυγισμού των μοντέλων, η συνολική ομοιόμορφη μετατόπιση που επιβλήθηκε στο ένα άκρο αυτών ήταν ίδια σε όλες τις περιπτώσεις και ίση με 10 mm. Μετά από δοκιμές, επιλέχθηκε η τμηματοποίηση αυτής της μετατόπισης σε 50 βήματα, με δυνατότητα περαιτέρω αυτόματης υποδιαίρεσης αυτών (bisection) από το υπολογιστικό πρόγραμμα, προκειμένου να εξασφαλισθεί η σύγκλιση της λύσης.

#### 4.3.4 Αποτελέσματα και σχολιασμός

##### Αποτελέσματα ανάλυσης ιδιοτιμών λυγισμού:

Για την περίπτωση της γεωμετρικά τέλειας πλάκας (Case 0: [0-0]) έγινε ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού με τα εξής αποτελέσματα:

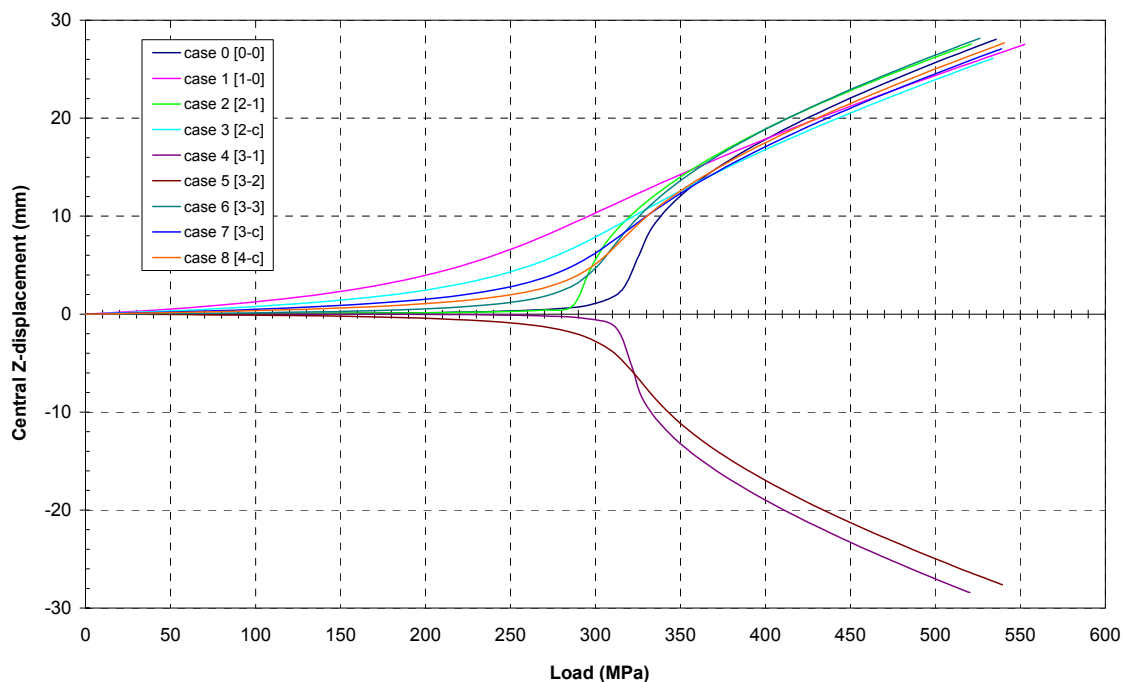
- Κρίσιμη τάση λυγισμού:  $\sigma_{cr} = 327.9 \text{ MPa}$
- Κρίσιμη τιμή διαμήκους επιβαλλόμενης μετατόπισης:  $u_{cr} = 3.313 \text{ mm}$

##### Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης λυγισμού:

Τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν από τη μη γραμμική ανάλυση λυγισμού των συνολικά 9 μοντέλων (περιπτώσεων) παρουσιάζονται στη διαγραμματική μορφή των Σχημάτων 4.20, 4.22 και 4.23. Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα του Σχήματος 4.20 φαίνεται η πλάγια μετατόπιση του κέντρου της κάθε πλάκας συναρτήσει της μέσης θλιπτικής τάσης. Το κέντρο της κάθε πλάκας επιλέχθηκε ως το κρίσιμο σημείο της,



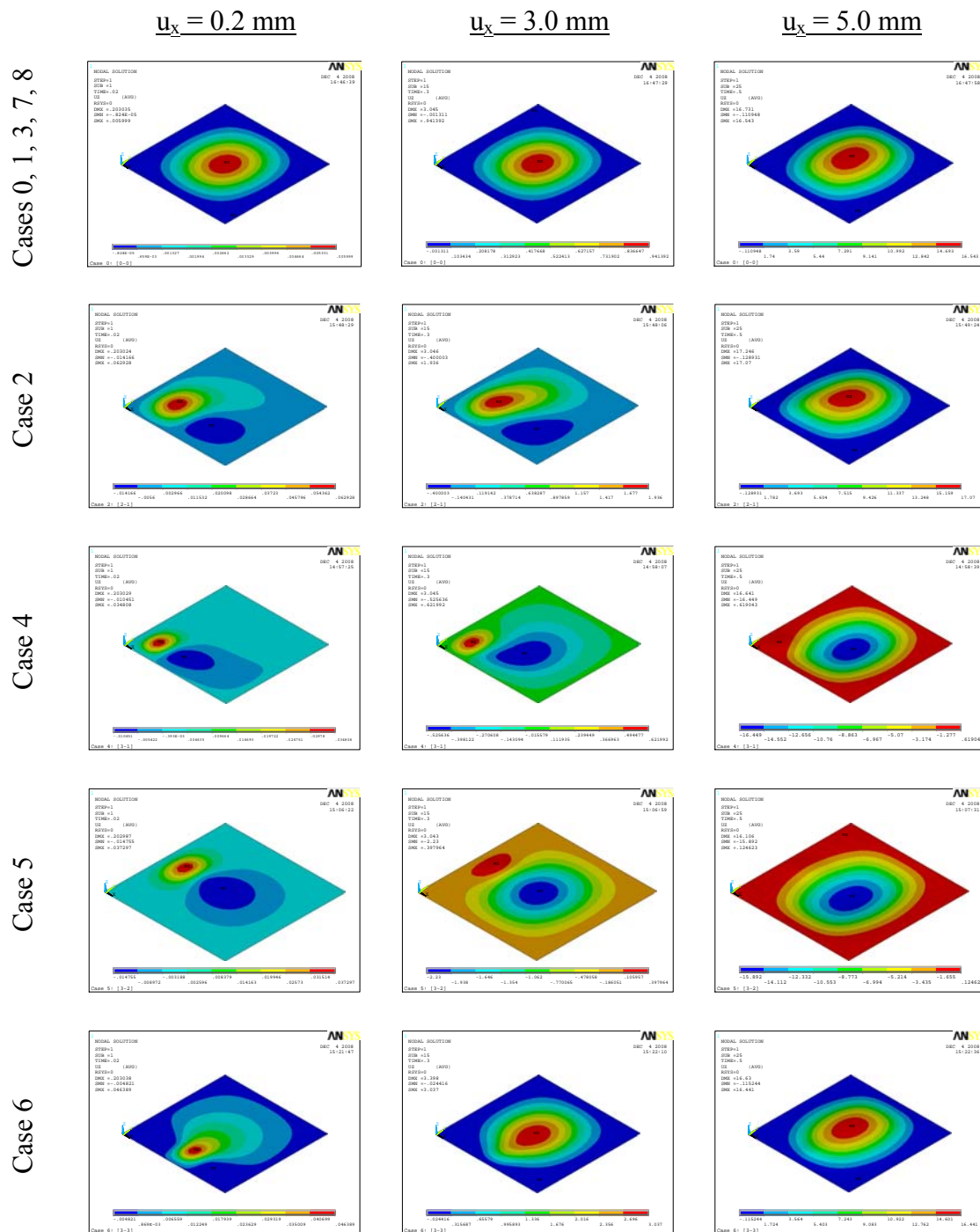
αφού σε αυτό το σημείο εμφανίζεται η μέγιστη τιμή της πλάγιας μετατόπισης κάθε μοντέλου και όχι στο κέντρο της αντίστοιχης ατέλειας, όπως φαίνεται και αργότερα στις εικόνες του Σχήματος 4.21 που δείχνουν την εξέλιξη του φαινομένου για κάθε περίπτωση. Όπως και στην περίπτωση των δοκών, το επιβαλλόμενο φορτίο που είναι αποτέλεσμα της ομοιόμορφης διαμήκου θλιπτικής μετατόπισης, μπορεί να εκφραστεί από τη μέση τάση που αναπτύσσεται σε κάθε πλάκα. Αυτή η μέση αναπτυσσόμενη τάση λαμβάνεται σε κάθε βήμα της προσομοίωσης από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων μέσω της  $x$ -συνιστώσας της συνολικής δύναμης αντίδρασης που εμφανίζεται στο πλήρως πακτωμένο άκρο αυτής ( $x = 0$ ).



**Σχήμα 4.20:** Πλάγια μετατόπιση του κέντρου της κάθε πλάκας, συναρτήσει της μέσης επιβαλλόμενης τάσης.

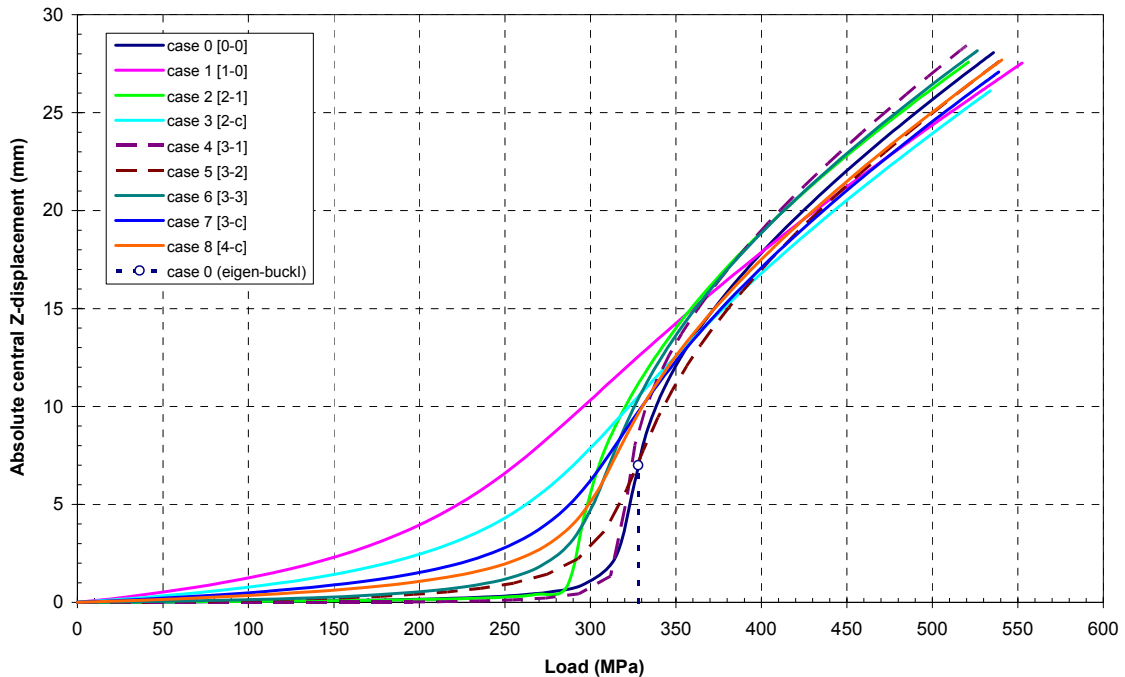
Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, στις περιπτώσεις “Case 4: [3-1]” και “Case 5: [3-2]”, η πλάγια μετατόπιση έγινε προς την αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με τη μορφή της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας. Αυτό γίνεται σαφές και στη συνέχεια, μέσω των φωτογραφικών στιγμιότυπων του Σχήματος 4.21, που έχουν ληφθεί από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις σε συγκεκριμένα στάδια της επιβαλλόμενης θλιπτικής μετατόπισης ( $u_x = 0.2, 3.0, 5.0$  mm). Σε αυτά τα στιγμιότυπα απεικονίζεται η παραμόρφωση της κάθε πλάκας και η κλίμακα χρωμάτων συμβολίζει τη διακύμανση της πλάγιας μετατόπισης ( $z$ -displacement) από το αλγεβρικό ελάχιστο (μπλε χρώμα) έως το αλγεβρικό μέγιστο (κόκκινο χρώμα). Το πρώτο στιγμιότυπο κάθε περίπτωσης ( $u_x = 0.2$  mm) αντιστοιχεί στο αρχικό στάδιο της δοκιμής, το δεύτερο στιγμιότυπο ( $u_x = 3.0$  mm) αντιστοιχεί στο στάδιο όπου συνήθως αρχίζει να εμφανίζεται το φαινόμενο του λυγισμού, δηλαδή

αρχίζουν να αναπτύσσονται έντονες πλάγιες μετατοπίσεις, ενώ το τρίτο στιγμιότυπο ( $u_x = 5.0$  mm) αντιστοιχεί στο μεταλυσισμικό στάδιο της δοκιμής. Οι περιπτώσεις “1, 3, 7 και 8” έχουν ομαδοποιηθεί μαζί με την περίπτωση “0”, αφού οι αντίστοιχες πλάκες είχαν παρόμοια συμπεριφορά με αυτή που αντιστοιχεί στην τέλεια πλάκα.



Σχήμα 4.21: Στιγμιότυπα απεικόνισης της πλάγιας μετατόπισης (z-displacement) των πλακών σε διάφορα στάδια της εξέλιξης του φαινομένου.

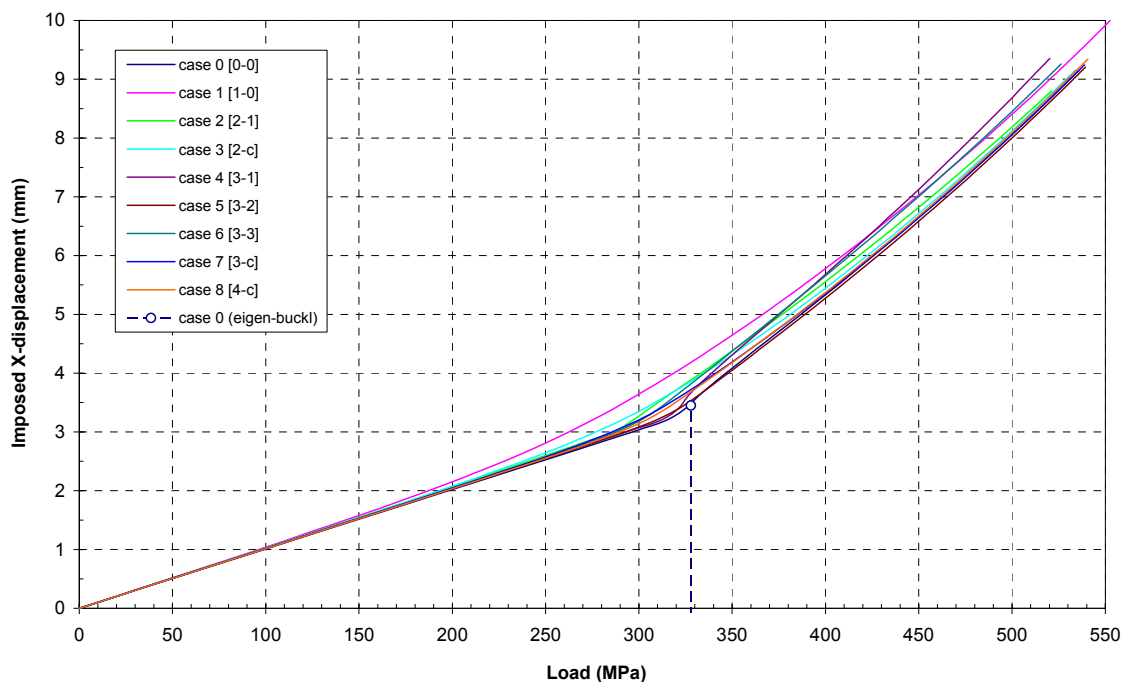
Για ευκολότερη σύγκριση των διαγραμματικών αποτελεσμάτων του Σχήματος 4.20, ακολουθεί το διάγραμμα του Σχήματος 4.22, όπου έχει γίνει αντιστροφή των καμπύλων των δύο περιπτώσεων (Case 4 και Case 5) και εμφανίζονται πλέον με διακεκομμένη γραμμή. Επίσης, στο διάγραμμα αυτό έχει ενταχθεί και η κρίσιμη τάση λυγισμού του γεωμετρικά τέλειου μοντέλου (Case 0: [0-0]), όπως υπολογίστηκε από την ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού.



**Σχήμα 4.22:** Απόλυτη τιμή πλάγιας μετατόπισης του κέντρου της κάθε πλάκας, συναρτήσει της μέσης επιβαλλόμενης τάσης.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.23 φαίνεται η επιβαλλόμενη διαμήκης, ομοιόμορφη, θλιπτική μετατόπιση του φορτιζόμενου άκρου κάθε μοντέλου, συναρτήσει της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης, καθώς και η κρίσιμη τάση λυγισμού του γεωμετρικά τέλειου μοντέλου (Case 0: [0-0]), όπως υπολογίστηκε από την ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού.

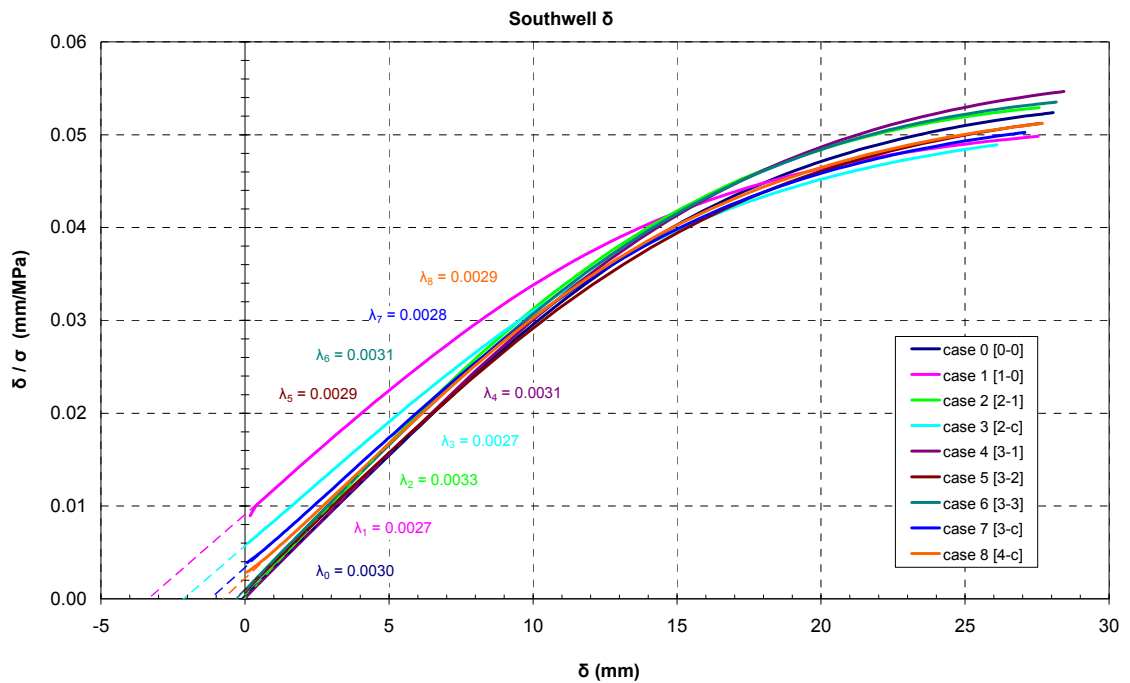
Εκ πρώτης όψεως, από την παρατήρηση των δύο αυτών διαγραμμάτων (Σχήματα 4.22 και 4.23) είναι εμφανές το γεγονός ότι η τάση λυγισμού κάθε μοντέλου είναι μικρότερη από εκείνη της γεωμετρικά τέλειας πλάκας (Case 0: [0-0]). Ωστόσο, η εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού μέσω της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων, που έχει περιγραφεί στο εδάφιο 2.4.2, αποδείχτηκε μη εφαρμόσιμη στη συγκεκριμένη περίπτωση, αφού παρατηρήθηκε ότι προέκυπταν φορτία λυγισμού που ήταν ασύμβατα με τη λογική των θεωρητικώς αναμενόμενων αποτελεσμάτων (π.χ. αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού με αύξηση του μεγέθους της κεντρικής γεωμετρικής ατέλειας, κάτι που είναι εντελώς παράλογο).



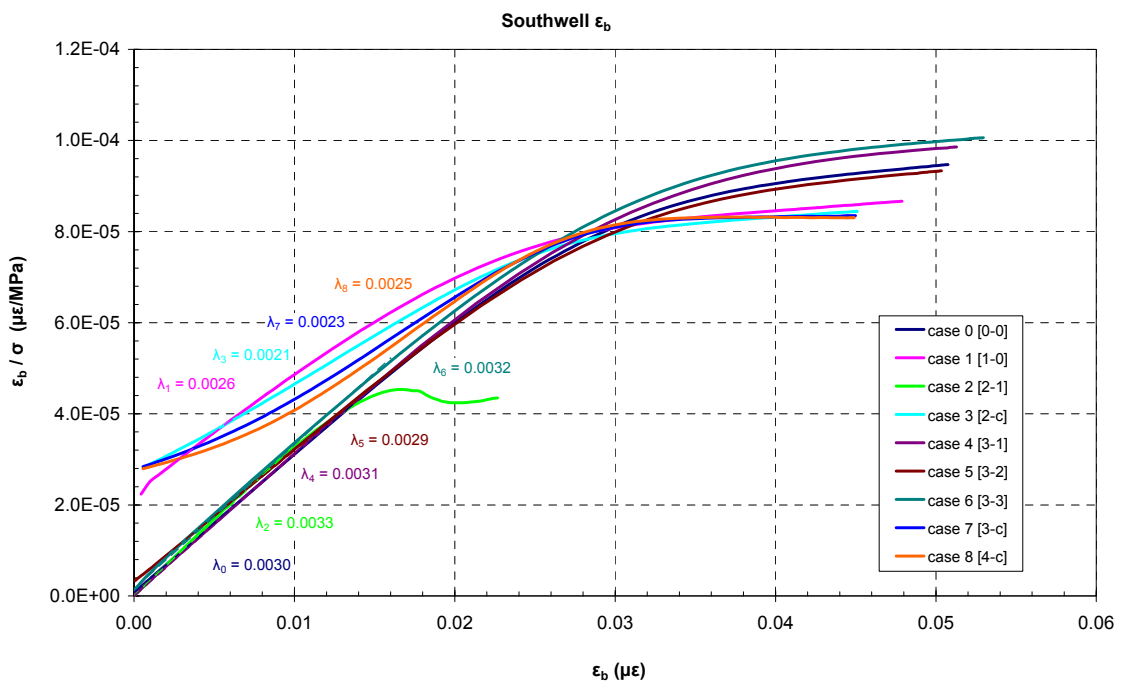
**Σχήμα 4.23:** Διαμήκης επιβαλλόμενη ομοιόμορφη θλιπτική μετατόπιση του άκρου ( $x = 320$  mm) της κάθε πλάκας, συναρτήσει της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.23 είναι εμφανής η αλλαγή της κλίσης κάθε καμπύλης, η οποία υποδεικνύει και το αντίστοιχο φορτίο λυγισμού. Αυτό όμως είναι σχετικά ακριβές μόνο στην περίπτωση της τέλει πλάκας (Case 0: [0-0]), όπως συνέβη και στην αντίστοιχη παραμετρική μελέτη λυγισμού των δοκών (εδάφιο 4.2.4). Βέβαια, στην περίπτωση των πλακών της παρούσας μελέτης, η μέγιστη τιμή της αδιάστατης γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0/t$ ) είναι σχετικά μικρή ( $\sim 0.21$ ) σε σύγκριση με εκείνη των δοκών (0.5 - 1.5), οπότε ακόμα και τα αποτελέσματα των υπολοίπων περιπτώσεων εδώ είναι ποιοτικά καλύτερα, χωρίς όμως πάλι να οδηγούν σε ακριβείς εκτιμήσεις των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.

Έτσι, απομένει η εφαρμογή της μεθόδου Southwell, που έχει περιγραφεί στο εδάφιο 2.4.1 και παρουσιάζεται στη συνέχεια, μέσω των διαγραμμάτων 4.24 και 4.25. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τιμές των πλάγιων μετατοπίσεων στο κέντρο ( $\delta$ ) και των διαμήκων καμπτικών παραμορφώσεων επίσης στο κέντρο ( $\epsilon_b$ ), έχουν αντιστραφεί στις περιπτώσεις “Case 4: [3-1]” και “Case 5: [3-2]”, έτσι ώστε να υπάρχει άμεση σύγκριση μεταξύ των καμπλών των 9 περιπτώσεων στα διαγράμματα Southwell. Για κάθε μία από τις καμπύλες των διαγραμμάτων Southwell φαίνεται επίσης και η αντίστοιχη τιμή της κλίσης του γραμμικού τμήματός της, η αντιστροφή της οποίας δίνει την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.8 στη συνέχεια.



Σχήμα 4.24: Εφαρμογή της μεθόδου Southwell- $\delta$  για την εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των πλακών.



Σχήμα 4.25: Εφαρμογή της μεθόδου Southwell- $\epsilon_b$  για την εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των πλακών.

**Πίνακας 4.8:** Αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου Southwell.

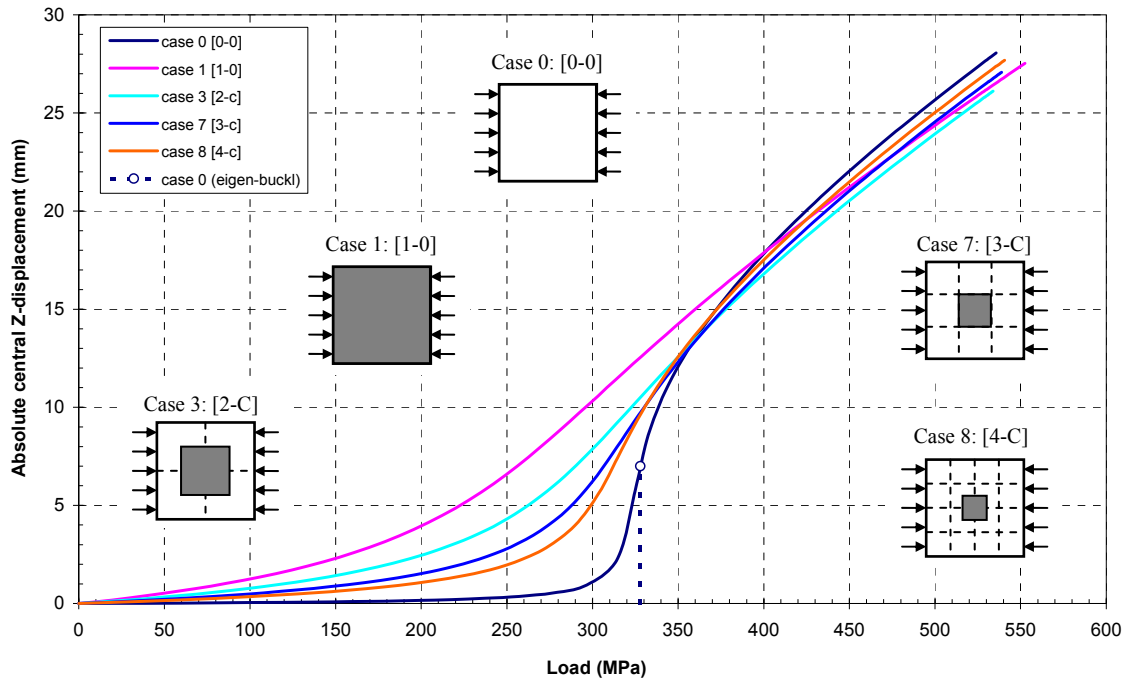
Case	Eigenvalue	Southwell - $\delta$		Southwell - $\epsilon_b$	
	$\sigma_{cr-eigen}$ (MPa)	$\lambda$ ( $\delta$ )	$\sigma_{cr-\delta}$ (MPa)	$\lambda$ ( $\epsilon_b$ )	$\sigma_{cr-\epsilon b}$ (MPa)
<b>0: [0-0]</b>	<b>327.9</b>	<i>0.0030</i>	<b>333.3</b>	<i>0.0030</i>	<b>333.3</b>
<b>1: [1-0]</b>	-	<i>0.0027</i>	<b>370.4</b>	<i>0.0026</i>	<b>384.6</b>
<b>2: [2-1]</b>	-	<i>0.0033</i>	<b>303.0</b>	<i>0.0033</i>	<b>303.0</b>
<b>3: [2-C]</b>	-	<i>0.0027</i>	<b>370.4</b>	<i>0.0021</i>	<b>476.2</b>
<b>4: [3-1]</b>	-	<i>0.0031</i>	<b>322.6</b>	<i>0.0031</i>	<b>322.6</b>
<b>5: [3-2]</b>	-	<i>0.0029</i>	<b>344.8</b>	<i>0.0029</i>	<b>344.8</b>
<b>6: [3-3]</b>	-	<i>0.0031</i>	<b>322.6</b>	<i>0.0032</i>	<b>312.5</b>
<b>7: [3-C]</b>	-	<i>0.0028</i>	<b>357.1</b>	<i>0.0023</i>	<b>434.8</b>
<b>8: [4-C]</b>	-	<i>0.0029</i>	<b>344.8</b>	<i>0.0025</i>	<b>400.0</b>

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο εναλλακτικών μεθόδων Southwell φαίνεται ότι γενικά υπάρχει αρκετά καλή σύμπτωση μεταξύ αυτών, εκτός των περιπτώσεων τοπικής κεντρικής ατέλειας (Cases 3, 7 και 8). Ωστόσο, είναι εμφανές ότι η μέθοδος Southwell δίνει μια αρκετά καλή εκτίμηση μόνο για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της γεωμετρικά τέλειας πλάκας (Case 0: [0-0]). Στις περισσότερες από τις υπόλοιπες περιπτώσεις των μοντέλων-πλακών με γεωμετρικές ατέλειες, η μέθοδος υπερεκτιμά τα κρίσιμα φορτία λυγισμού, αφού οι τιμές τους είναι παρόμοιες ή και μεγαλύτερες από την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του γεωμετρικά τέλειου μοντέλου, κάτι που είναι θεωρητικά αδύνατον. Έτσι, όπως και στην περίπτωση των δοκών, καταλήγουμε σε αδυναμία ασφαλούς εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού πλακών με γεωμετρικές ατέλειες μέσω της μεθόδου Southwell.

Σχετικά με την ιδιότητα του διαγράμματος Southwell- $\delta$  ως προς την εκτίμηση (ή επιβεβαίωση) του ήδη γνωστού μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας  $w_0$ , παρατηρείται μέσω του Σχήματος 4.24 ότι αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση “Case 1: [1-0]”, όπου η ατέλεια δεν είναι τοπική και εκτείνεται σε όλη την επιφάνεια της πλάκας. Στις περιπτώσεις πλακών με κεντρική αλλά μικρότερης έκτασης γεωμετρική ατέλεια, η εκτίμηση για το μέγεθος της μέσω του διαγράμματος Southwell- $\delta$  δίνει μικρότερες τιμές, ποιοτικά ανάλογες με το μήκος της γεωμετρικής ατέλειας ( $\ell$ ). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις πλακών με γεωμετρική ατέλεια εκτός του κέντρου της πλάκας, η μέθοδος Southwell- $\delta$  δίνει μηδενικές τιμές για το μέγεθος αυτής.

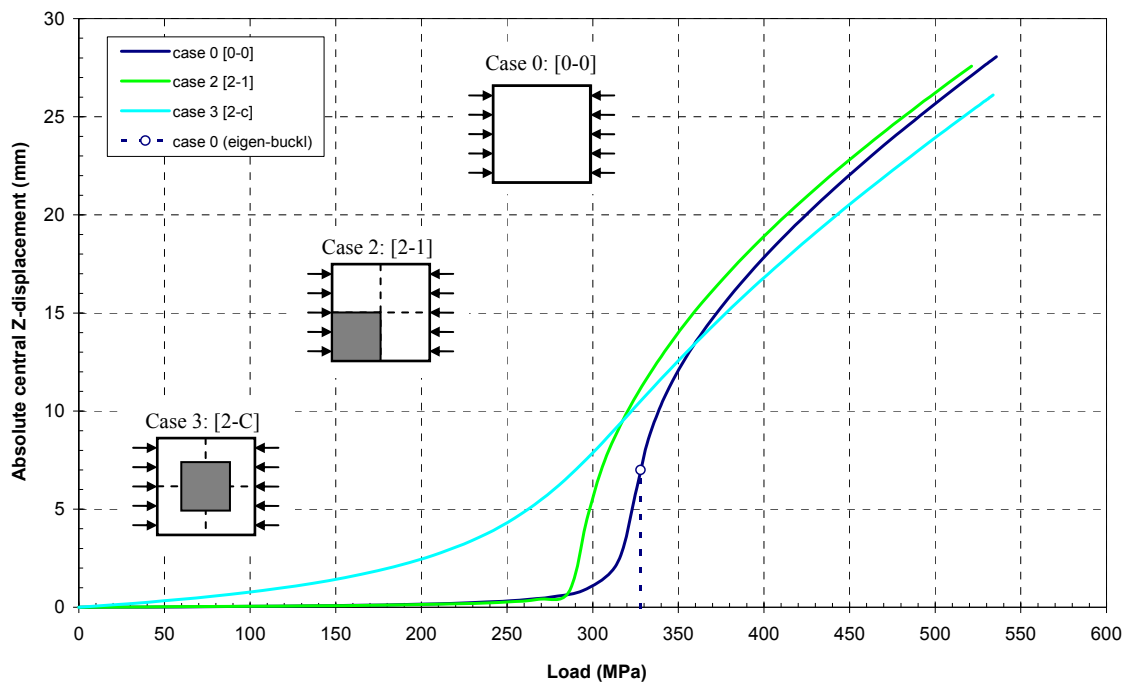
Εφόσον λοιπόν δεν προκύπτουν συγκεκριμένα αριθμητικά αποτελέσματα για τα κρίσιμα φορτία λυγισμού της κάθε περίπτωσης, δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν ποσοτικά συμπεράσματα όσον αφορά στην επίδραση του μεγέθους και της θέσης της ατέλειας στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Για το λόγο αυτό, στα διαγράμματα των σχημάτων που ακολουθούν γίνεται ομαδοποίηση μερικών αποτελεσμάτων από τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στο διάγραμμα του Σχήματος 4.22 για σύγκριση αυτών και εξαγωγή ορισμένων ποιοτικών συμπερασμάτων.

Στο Σχήμα 4.26 ομαδοποιούνται οι καμπύλες λυγισμού όλων των περιπτώσεων που έχουν κεντρική ατέλεια, οπότε η διαφορά μεταξύ αυτών των μοντέλων-πλακών έγκειται στο μέγεθος (την έκταση) της ατέλειας. Από το συγκριτικό αυτό διάγραμμα, φαίνεται ότι όσο μικρότερη είναι η έκταση της ατέλειας, τόσο πιο πολύ πλησιάζει η αντίστοιχη καμπύλη αυτήν της τέλειας περίπτωσης, όπως θα ήτανε και λογικά αναμενόμενο.

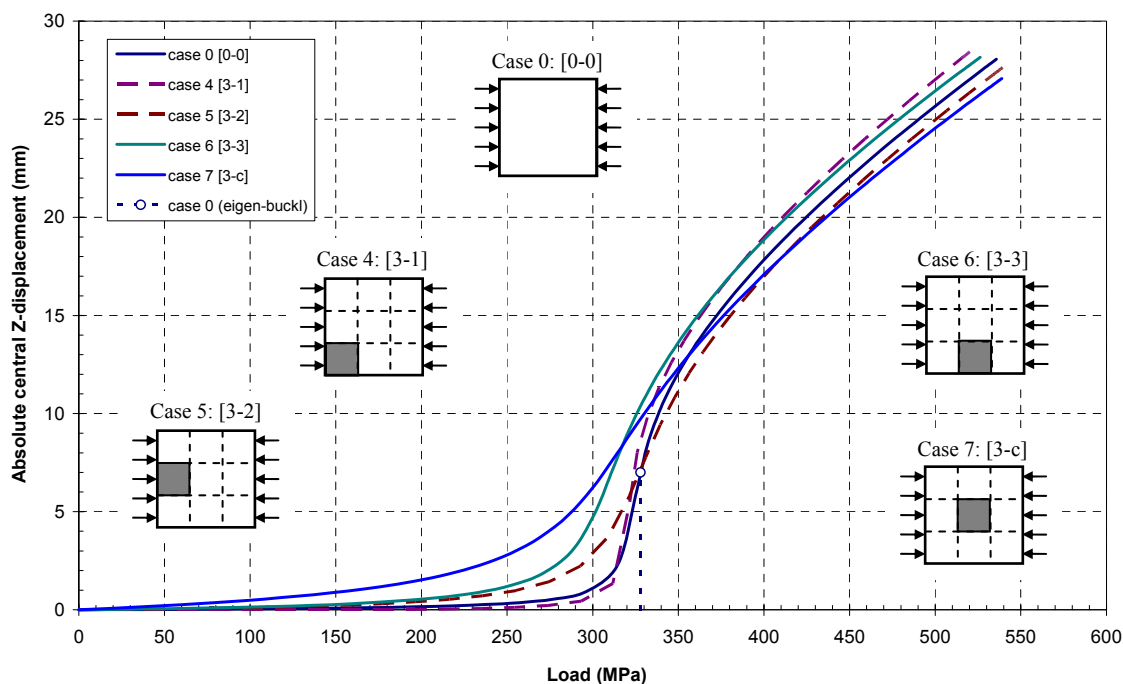


Σχήμα 4.26: Περιπτώσεις πλακών, όλες με κεντρική ατέλεια, αλλά διαφορετικής έκτασης.

Στη συνέχεια, στα Σχήματα 4.27 και 4.28 γίνεται ομαδοποίηση περιπτώσεων με ίδια έκταση (μήκος) ατέλειας, αλλά σε διαφορετική θέση κάθε φορά. Από τα συγκριτικά αυτά διαγράμματα, φαίνεται ότι μια γεωμετρική ατέλεια στο κέντρο της πλάκας οδηγεί σε μεγάλες πλάγιες μετατοπίσεις, που αυξάνονται σταδιακά από την αρχή της δοκιμής, ενώ μια ατέλεια μακριά απ' το κέντρο της οδηγεί σε συμπεριφορά πλησιέστερη σε αυτή της τέλειας πλάκας, με σχετικά απότομη αύξηση της πλάγιας μετατόπισης (ασταθής συμπεριφορά – bifurcational behavior).



Σχήμα 4.27: Περιπτώσεις ίδιου μεγέθους ατέλειας ( $l/2$ ), αλλά διαφορετικής θέσης.

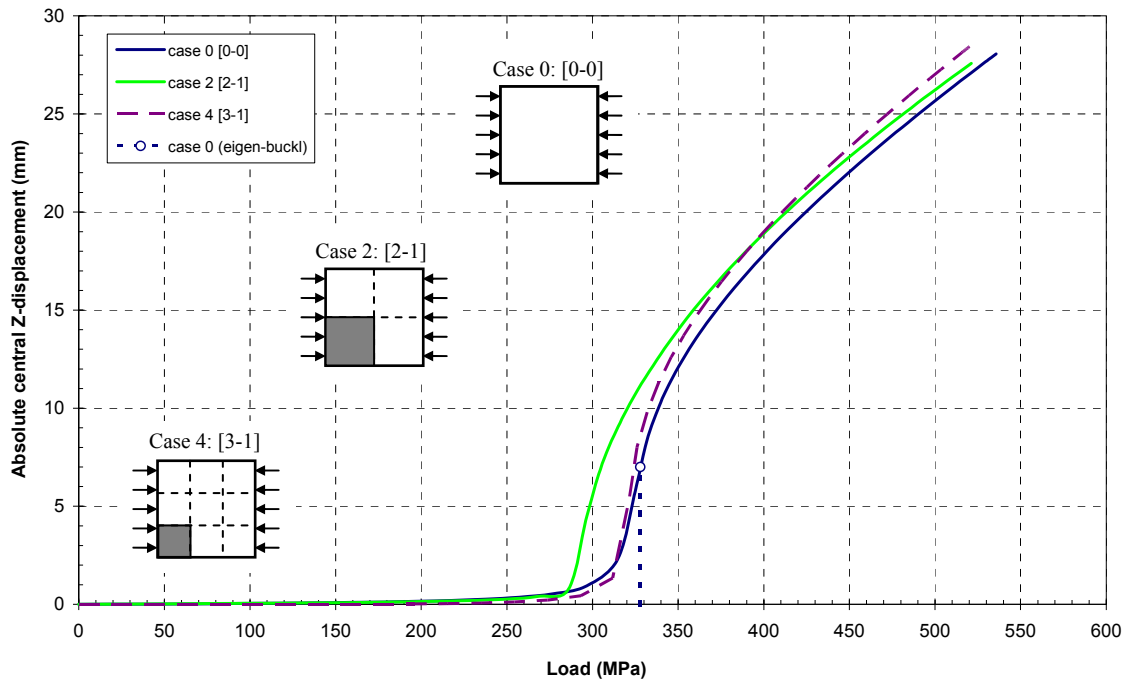


Σχήμα 4.28: Περιπτώσεις ίδιου μεγέθους ατέλειας ( $l/3$ ), αλλά διαφορετικής θέσης.

Παρατηρώντας το Σχήμα 4.28, φαίνεται ότι η περίπτωση “Case 4: [3-1]” έχει αποτελέσματα όμοια με αυτά της τέλειας πλάκας (Case 0: [0-0]), οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι οι μικρής εκτάσεως γεωμετρικές ατέλειες που βρίσκονται μακριά απ’ το κέντρο μιας πολύστρωτης πλάκας δεν επηρεάζουν αισθητά τη λυγισμική της συμπεριφορά.

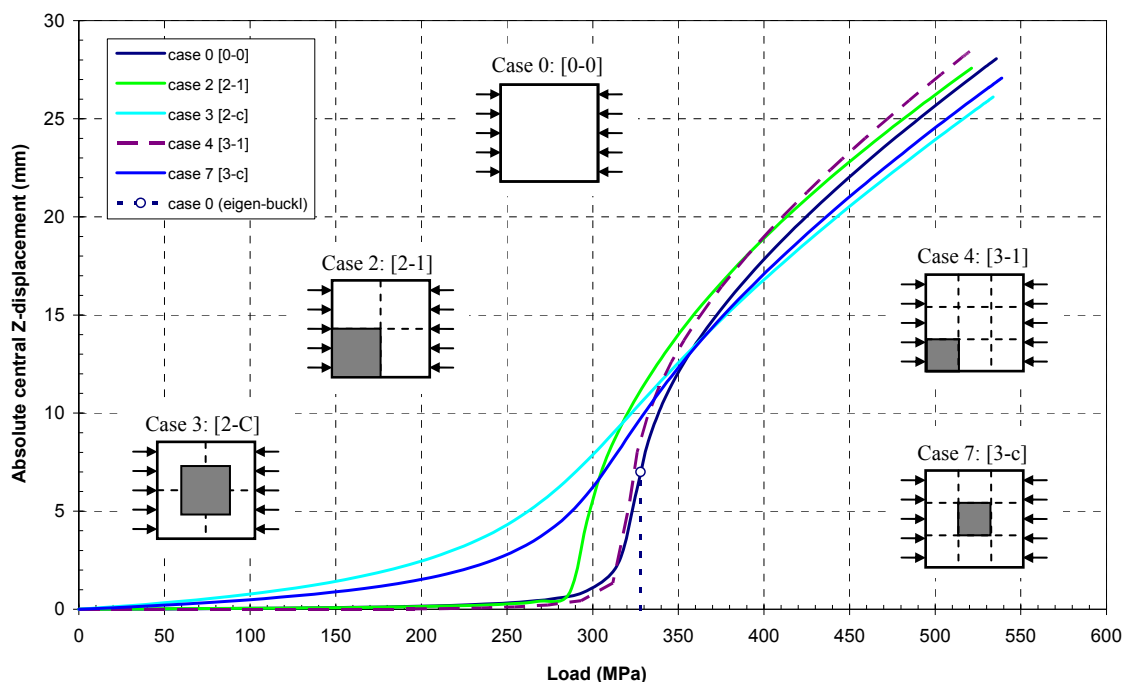


Στο Σχήμα 4.29 συγκρίνονται δυο περιπτώσεις μη κεντρικής ατέλειας, η οποία μάλιστα εφάπτεται σε δύο ακμές της πλάκας, αλλά σε κάθε περίπτωση, η έκταση αυτής είναι διαφορετική. Φαίνεται λοιπόν η επίδραση της έκτασης (του μήκους) της γεωμετρικής ατέλειας, αφού είναι εμφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η έκταση της ατέλειας, τόσο μικρότερο είναι το φορτίο εμφάνισης έντονης πλάγιας μετατόπισης.



**Σχήμα 4.29:** Περιπτώσεις γωνιακής γεωμετρικής ατέλειας, αλλά διαφορετικής έκτασης.

Τέλος, στο Σχήμα 4.30 συγκρίνονται δύο περιπτώσεις κεντρικής ατέλειας με δύο περιπτώσεις μη κεντρικής ατέλειας, εφαιπτόμενης σε δύο ακμές της πλάκας. Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται για ακόμα μια φορά ότι οι κεντρικές γεωμετρικές ατέλειες οδηγούν σε άμεση και γρηγορότερη ανάπτυξη πλάγιων μετατοπίσεων μιας πολύστρωτης πλάκας που υπόκειται σε λυγισμό, ενώ οι ατέλειες αντίστοιχης έκτασης, που όμως βρίσκονται μακριά απ' το κέντρο της πλάκας δεν επηρεάζουν αισθητά τη λυγισμική της συμπεριφορά.



Σχήμα 4.30: Σύγκριση μεταξύ περιπτώσεων κεντρικής και γωνιακής γεωμετρικής ατέλειας.

#### 4.3.5 Συμπεράσματα

Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων της παραπάνω παραμετρικής μελέτης σχετικά με τη λυγισμική συμπεριφορά πλήρως πακτωμένων, τετραγωνικών, συμμετρικών, πολύστρωτων πλακών, διαπιστώθηκε η αδυναμία εφαρμογής των δύο μεθόδων πειραματικής εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο 2.4, δηλαδή της μεθόδου του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων και της μεθόδου των διαγραμμάτων Southwell. Έτσι, προκύπτουν μόνο τα εξής ποιοτικά συμπεράσματα:

Τόσο η έκταση, όσο και η θέση μιας γεωμετρικής ατέλειας είναι παράγοντες που επιδρούν σημαντικά στη λυγισμική συμπεριφορά μιας πολύστρωτης πλάκας, και πιο συγκεκριμένα:

- Όσο πιο μεγάλη είναι η έκταση μιας γεωμετρικής ατέλειας, τόσο μεγαλύτερη είναι η μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού σε σχέση με εκείνο της τέλειας πλάκας.
- Όταν μία γεωμετρική ατέλεια βρίσκεται κοντά στο κέντρο της επιφάνειας μιας τετραγωνικής ( $a/b \cong 1$ ) πολύστρωτης πλάκας, αυξάνεται σημαντικά η αρνητική επίδραση που έχει αυτή στη λυγισμική συμπεριφορά της πλάκας, δηλαδή μειώνεται ακόμα περισσότερο το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Αυτό σημαίνει ότι οι κεντρικές ατέλειες είναι οι πιο δυσμενείς περιπτώσεις ως προς το φαινόμενο του λυγισμού. Ειδικότερα, η αρνητική επίδραση μιας γεωμετρικής ατέλειας μειώνεται με την απομάκρυνσή της, κυρίως προς τις φορτιζόμενες πλευρές της πλάκας (Cases 4 & 5) και ιδιαίτερα προς τα άκρα αυτών (Case 4 - γωνιακή ατέλεια).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

#### 5.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, έγιναν πειραματικές δοκιμές λυγισμού σε πλάκες από σύνθετα υλικά (εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες γυαλιού), οι οποίες κατασκευάστηκαν στη Μονάδα Σύνθετων Υλικών του Εργαστηρίου Ναυπηγικής Τεχνολογίας (ENT) της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται οι πλάκες-δοκίμια, η διαδικασία κατασκευής τους και οι δοκιμές λυγισμού που έγιναν σε αυτές. Συγκεκριμένα, οι πλάκες χωρίζονται σε 3 ομάδες, με 3 πλάκες ανά ομάδα (συνολικά 9 πλάκες), όλες ίδιων ονομαστικών βασικών διαστάσεων (μήκος, πλάτος, πάχος), εκ των οποίων η 1<sup>η</sup> ομάδα περιλαμβάνει 3 πλάκες εντελώς επίπεδης (τέλειας) γεωμετρίας, ενώ η 2<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> ομάδα περιλαμβάνουν από 3 πλάκες με “μικρή” και “μεγάλη” αντίστοιχα τεχνητή γεωμετρική ατέλεια.

Βασικός σκοπός αυτών των πειραματικών δοκιμών είναι να διερευνηθεί η επίδραση διάφορων μεγεθών γεωμετρικής ατέλειας στη λυγισμική συμπεριφορά πλακών κατασκευασμένων από σύνθετα υλικά. Παράλληλα, οι πειραματικές αυτές δοκιμές αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης διαπανεπιστημιακής μελέτης, στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού δικτύου αριστείας MARSTRUCT (Network of Excellence in Marine Structures). Σκοπός είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ τριών ομάδων δοκιμών-πλακών, κάθε μία από τις οποίες περιλαμβάνει πλάκες συγκεκριμένου λόγου λυγηρότητας, ο οποίος εξαρτάται ουσιαστικά μόνο από το πάχος τους, αφού όλα τα δοκίμια (και των τριών ομάδων) έχουν ίδιες εξωτερικές διαστάσεις, αντίστοιχη γεωμετρική μορφή και αντίστοιχο υλικό κατασκευής. Απώτερος στόχος της συγκριτικής αυτής μελέτης είναι η διερεύνηση της επίδρασης των γεωμετρικών ατελειών στη λυγισμική συμπεριφορά πλακών από σύνθετα υλικά, με αναφορά στον αντίστοιχο λόγο λυγηρότητάς τους.

Οι τεχνητές γεωμετρικές ατέλειες δημιουργήθηκαν κατά την κατασκευή των πλακών, χρησιμοποιώντας κατάλληλα διαμορφωμένα καλούπια αλουμινίου, όπως περιγράφεται αργότερα στο εδάφιο 5.2.3. Μετά την κατασκευή των πλακών και τις απαραίτητες μετρήσεις που έγιναν σε αυτές, ακολούθησαν οι δοκιμές λυγισμού των 9 δοκιμών. Λόγω έλλειψης κατάλληλης μηχανής δοκιμών στο ENT, οι δοκιμές αυτές διεξήχθησαν στην Κοπεγχάγη, σε εργαστήριο του συνεργαζόμενου Πολυτεχνείου της Δανίας (Denmark Technical University - DTU), κατά την περίοδο 21 έως 25 Μαΐου 2007, με τη βοήθεια του προσωπικού του εργαστηρίου.

## 5.2 Περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας

### 5.2.1 Υλικά & μέθοδος κατασκευής των δοκιμίων

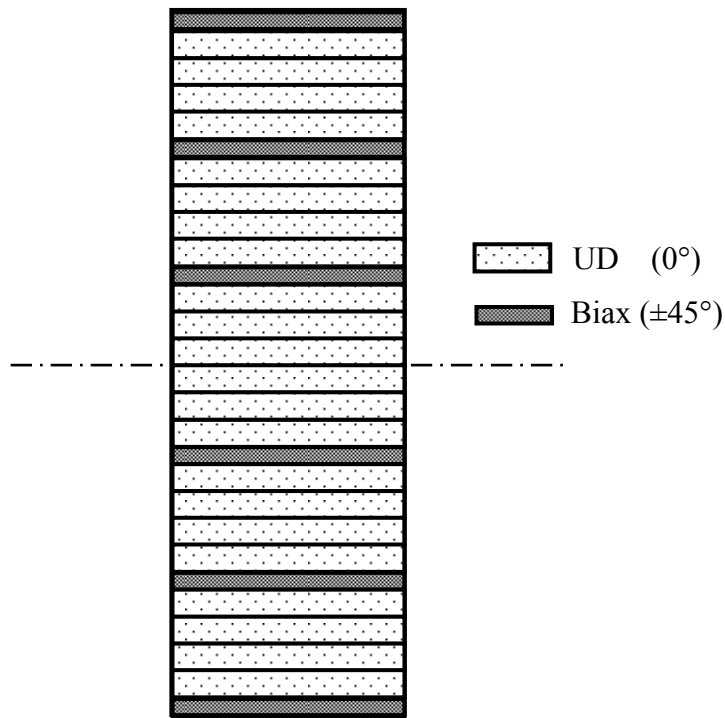
Τα βασικά υλικά κατασκευής των δοκιμίων ήταν:

- Εποξειδική ρητίνη (λεπτόρρευστη) της εταιρείας “Dow”, τύπου “D.E.R. 358” (ιξώδες στους 25°C: 600 – 750 mPa·s).
- Αργός σκληρυντής της εταιρείας “PO.INT.ER S.r.l.”, τύπου “EPAMINE PC13” (ιξώδες στους 25°C: 70 – 140 mPa·s, pot life ποσότητας 150 g στους 25°C: 50 min).
- Ύφασμα ενισχυτικών ινών γυαλιού τύπου E, μονοαξονικής πλέξης (unidirectional), με επιφανειακό βάρος 623 g/m<sup>2</sup> (567 g/m<sup>2</sup> at 0° & 50 g/m<sup>2</sup> at 90°) της εταιρείας “Owens Corning”, τύπου “UNI-CD-600”.
- Πεπλεγμένο ύφασμα ενισχυτικών ινών γυαλιού τύπου E, με προσανατολισμό ινών ±45° (biaxial), χωρίς πλέξη μεταξύ των δυο στρώσεων ινών διαφορετικού προσανατολισμού (non-woven – knitted fabric), με συνολικό επιφανειακό βάρος 306 g/m<sup>2</sup> και ισοσταθμισμένη (balanced) διαμόρφωση ινών στις δύο διευθύνσεις (150 g/m<sup>2</sup> @ +45°, 150 g/m<sup>2</sup> @ -45° & 6 g/m<sup>2</sup> ίνες πλέξης), της εταιρείας “Gavazzi”, τύπου “BXE300 1250 STD”.

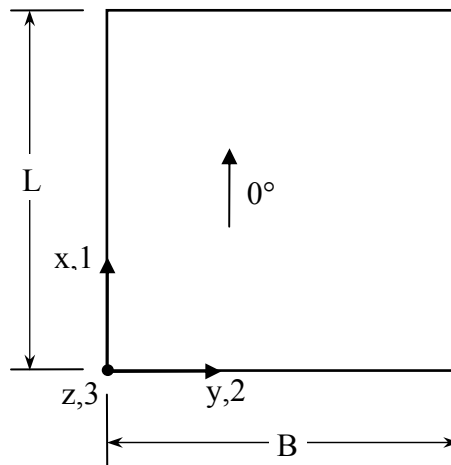
Η ακολουθία στρώσεων είναι ίδια και για τα 9 δοκίμια που κατασκευάστηκαν και επιλέχθηκε έτσι ώστε να δημιουργηθούν συμμετρικά πολύστρωτα, με ποσοστό μονοαξονικών ινών (UD) 88% κατά βάρος και συνολικό πάχος περίπου 15 mm. Συμβολίζοντας με UD τις μονοαξονικές στρώσεις (0°) και με BIAX τις διαξονικές (±45°), η ακολουθία των στρώσεων που αναπαρίσταται στο Σχήμα 5.1, σύμφωνα και με τη διάταξη αξόνων του Σχήματος 5.2, έχει ως εξής:

$$[BIAX/4 \times UD/BIAX/4 \times UD/BIAX/6 \times UD/BIAX/4 \times UD/BIAX/4 \times UD/BIAX]$$

Ως μέθοδος κατασκευής των δοκιμίων-πλακών χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος επίστρωσης με το χέρι (hand lay-up), σε συνδυασμό με τη μέθοδο “μορφοποίησης με σάκο κενού” (vacuum bag moulding) προκειμένου να αυξηθεί η περιεκτικότητα σε ίνες και να μειωθούν τα κενά αέρα στις πολύστρωτες πλάκες. Τα στάδια της κατασκευής περιγράφονται αναλυτικά στο εδάφιο 5.2.3.



**Σχήμα 5.1:** Ακολουθία στρώσεων των δοκιμίων.



**Σχήμα 5.2:** Γεωμετρικό (x, y, z) και κύριο σύστημα αξόνων του υλικού (1, 2, 3) των δοκιμίων.

Η αρχική εκτίμηση του πάχους καθενός από τα 2 είδη στρώσεων (UD & BIAx), έγινε με κατασκευή και παχυμέτρηση 2 μικρών δοκιμαστικών πολύστρωτων πλακών, μια με 22 μονοαξονικές στρώσεις (22×UD) και μια με 6 διαξονικές στρώσεις (6×BIAx), χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια μέθοδο κατασκευής που χρησιμοποιήθηκε και για την κατασκευή των δοκιμίων. Έτσι, προέκυψαν οι παρακάτω μέσες τιμές πάχους ανά στρώση:

$$t_{UD} = 0.59 \text{ mm/στρώση}$$

$$t_{BIAX} = 0.36 \text{ mm/στρώση}$$

Επομένως, βάσει των παραπάνω τιμών, αναμένεται να προκύψει πολύστρωτο 28 συνολικά στρώσεων (22 UD και 6 BIAx), του οποίου το συνολικό πάχος θα είναι κατά προσέγγιση:

$$t_{TOT} = 22 \cdot t_{UD} + 6 \cdot t_{BIAX} = 15.14 \text{ mm}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι, όπως και στην περίπτωση της παραμετρικής μελέτης λυγισμού πολύστρωτων πλακών του εδαφίου 4.3 όπου έγινε μοντελοποίηση του ίδιου ακριβώς υλικού, κάθε στρώση BIAx μπορεί να θεωρηθεί ως δύο λεπτές μονοαξονικές στρώσεις πάχους  $t_{BIAX}/2$  η κάθε μία, με προσανατολισμό  $+45^\circ$  και  $-45^\circ$  αντίστοιχα, ενώ οι αλληπάλληλες μονοαξονικές στρώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως μια ισοδύναμη μονοαξονική στρώση αντίστοιχου πάχους. Αυτή η θεώρηση θα χρησιμοποιηθεί και στη συνέχεια για τη μοντελοποίηση του υλικού στην εφαρμογή της κλασικής θεωρίας πολύστρωτων - ΚΘΠ (classical lamination theory - CLT).

Για τις θεωρητικές μηχανικές ιδιότητες και αντοχές του υλικού κατασκευής (εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με μονοαξονικές ίνες γυαλιού τύπου E), λαμβάνοντας υπόψη και τη μέθοδο κατασκευής (hand lay up & vacuum bag moulding), ελήφθησαν αντίστοιχες τιμές από στοιχεία βιβλιογραφίας [Short et al.-2002], οι οποίες φαίνονται στους Πίνακες 5.1α και 5.1β αντίστοιχα που ακολουθούν.

**Πίνακας 5.1α**

Θεωρητικές Μηχανικές Ιδιότητες Υλικού (UD E-Glass / Epoxy)		
$E_{11} =$	46.0	GPa
$E_{22} =$	13.0	GPa
$E_{33} =$	13.0	GPa
$\nu_{12} =$	0.30	
$\nu_{23} =$	0.42	
$\nu_{13} =$	0.30	
$G_{12} =$	5.0	GPa
$G_{23} =$	4.6	GPa
$G_{13} =$	5.0	GPa

**Πίνακας 5.1β**

Θεωρητικές Αντοχές Υλικού (UD E-Glass / Epoxy)		
$X_T =$	1000	MPa
$X_C =$	680	MPa
$Y_T =$	30	MPa
$Y_C =$	140	MPa
$Z_T =$	30	MPa
$Z_C =$	140	MPa
$S_{XY} =$	60	MPa
$S_{YZ} =$	40	MPa
$S_{XZ} =$	40	MPa

### 5.2.2 Γεωμετρία των δοκιμίων

Όπως προαναφέρθηκε, η πειραματική διαδικασία περιλάμβανε συνολικά 9 δοκίμια:

- 3 δοκίμια εντελώς επίπεδης γεωμετρίας (P Series).
- 3 δοκίμια με “μικρή” γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series).
- 3 δοκίμια με “μεγάλη” γεωμετρική ατέλεια (IMP-2 Series).

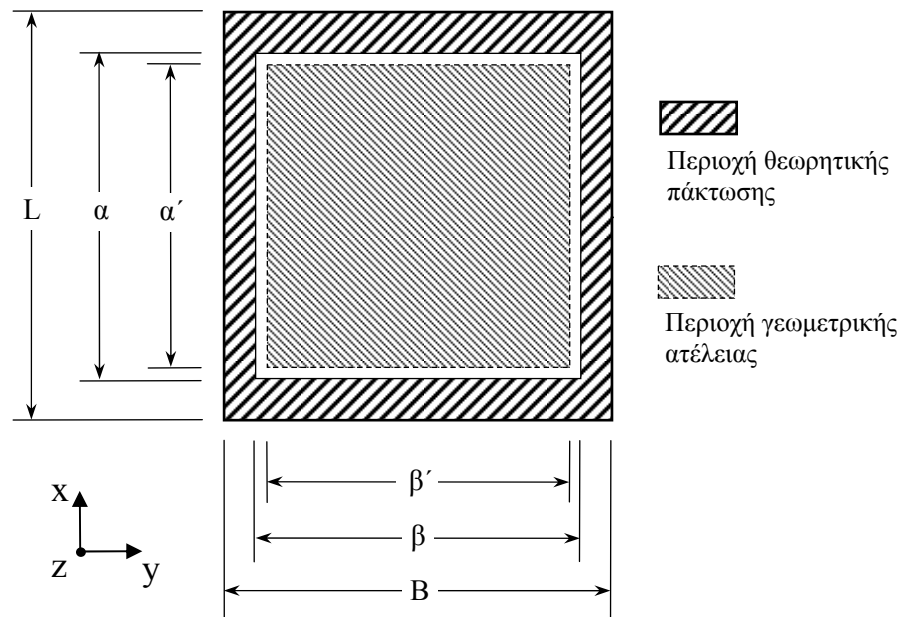
Οι κύριες ονομαστικές διαστάσεις όλων των δοκιμίων είναι οι εξής (βλ. Σχήμα 5.2):

Μήκος	(L)	:	400.00	mm
Πλάτος	(B)	:	380.00	mm
Πάχος	(t)	:	15.00	mm

Επιπλέον, ορίζεται το εμβαδόν της εγκάρσιας μέσης τομής κάθε δοκιμίου ως  $A = B \cdot t$ , με ονομαστική τιμή  $A = 380 \cdot 15 = 5700 \text{ mm}^2$ .

Οι διαστάσεις της ελεύθερης επιφάνειας των πλακών, μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3, αναμένεται θεωρητικά να είναι:

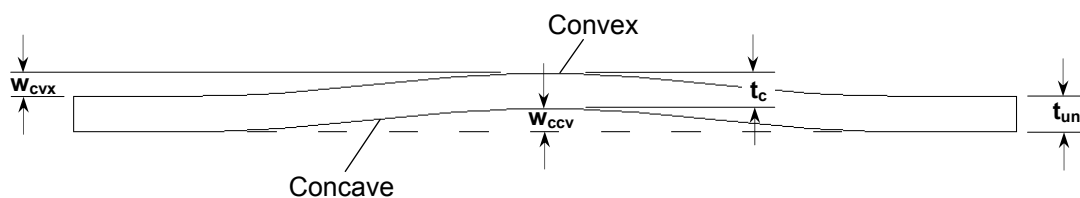
$$\alpha = \beta = 320 \text{ mm}$$



**Σχήμα 5.3:** Περιοχή της θεωρητικής πάκτωσης και περιοχή έκτασης της γεωμετρικής ατέλειας στην επιφάνεια της πλάκας.

Η μορφή της γεωμετρικής ατέλειας, στα δοκίμια όπου αυτή υπάρχει, αντιστοιχεί στην 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού της αντίστοιχης επίπεδης πακτωμένης πλάκας, διαστάσεων

ελεύθερης επιφάνειας  $\alpha' = \beta' = 300$  mm, ελαφρώς μικρότερων από τις πραγματικές (Σχήμα 5.3). Η αναπαραγωγή αυτής της ιδιομορφής λυγισμού βασίστηκε σε ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, με χρήση των θεωρητικών μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού (Πίνακας 5.1α), και η όλη διαδικασία κατασκευής της γεωμετρικής μορφής των ατελών δοκιμίων περιγράφεται αναλυτικά στο εδάφιο 5.2.3. Ο περιορισμός της έκτασης της γεωμετρικής ατέλειας σε  $300 \times 300$  mm (αντί  $320 \times 320$  mm που είναι η ελεύθερη επιφάνεια της πλάκας) θεωρείται ότι δεν επηρεάζει σημαντικά το τελικό αποτέλεσμα, και σκοπός του είναι η ύπαρξη μιας περιοχής επίπεδης γεωμετρικής μορφής στα άκρα της ελεύθερης επιφάνειας και κοντά στα σημεία εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών (Σχήμα 5.3), προκειμένου να εξασφαλισθούν κάποιες ανοχές για την τοποθέτηση των δοκιμίων στο πλαίσιο δοκιμών. Η τελική μορφή των δοκιμίων με γεωμετρική ατέλεια φαίνεται στο Σχήμα 5.4 που ακολουθεί, όπου διακρίνονται και τα βασικά μεγέθη της, τα οποία διευκρινίζονται ακολούθως. Η δημιουργία “μικρής” και “μεγάλης” γεωμετρικής ατέλειας έγινε ψηφιακά, ύστερα από κατάλληλη κλιμάκωση της εν λόγω γεωμετρικής μορφής, με μικρό και μεγάλο αντίστοιχα λόγο κλίμακας.



Σχήμα 5.4: Μορφή δοκιμίων με γεωμετρική ατέλεια.

Με αναφορά στη γεωμετρική μορφή των γεωμετρικά “ατελών” δοκιμίων, όπως αυτή φαίνεται στο Σχήμα 5.4, το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_{cvx}$ ) ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της κορυφής της γεωμετρικής ατέλειας, που βρίσκεται στο κέντρο της κυρτής (convex) επιφάνειας της πλάκας και του νοητού επιπέδου που δημιουργείται από τις 4 κορυφές των γωνιών της επιφάνειας αυτής. Η τιμή του μεγέθους αυτού ορίστηκε ως ποσοστό του ανυποστήρικτου πλάτους της πλάκας, που μετά από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών είναι  $\beta = 320$  mm. Έτσι, για το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας επιλέχθηκαν οι εξής ονομαστικές τιμές:

- περίπτωση “μικρής ατέλειας” (IMP-1 Series):  $w_{cvx(1)} = 1 \% \times 320 = 3.2$  mm
- περίπτωση “μεγάλης ατέλειας” (IMP-2 Series):  $w_{cvx(2)} = 3 \% \times 320 = 9.6$  mm

Τα υπόλοιπα μεγέθη του Σχήματος 5.4 ορίζονται ως εξής:

$t_{uni}$  είναι το μέσο πάχος της πλάκας

$t_c$  είναι το πάχος στο κέντρο της πλάκας

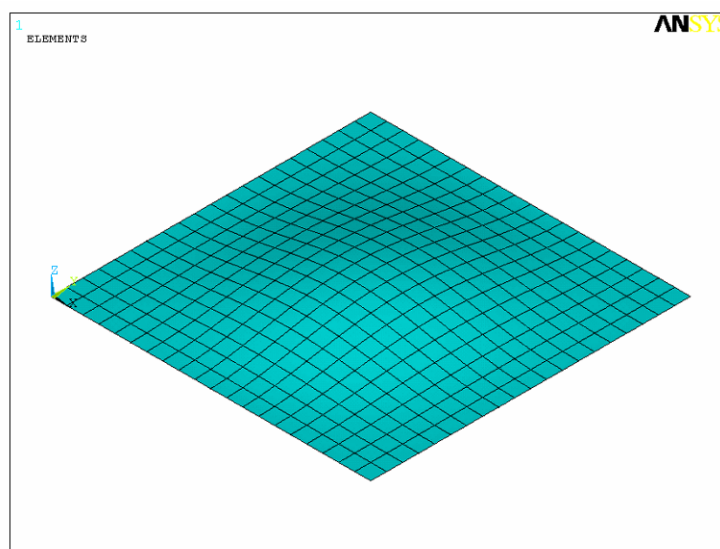
$w_{ccv}$  είναι το μέγεθος της κοιλότητας (concave) της ατέλειας



### 5.2.3 Προετοιμασία και κατασκευή των δοκιμών

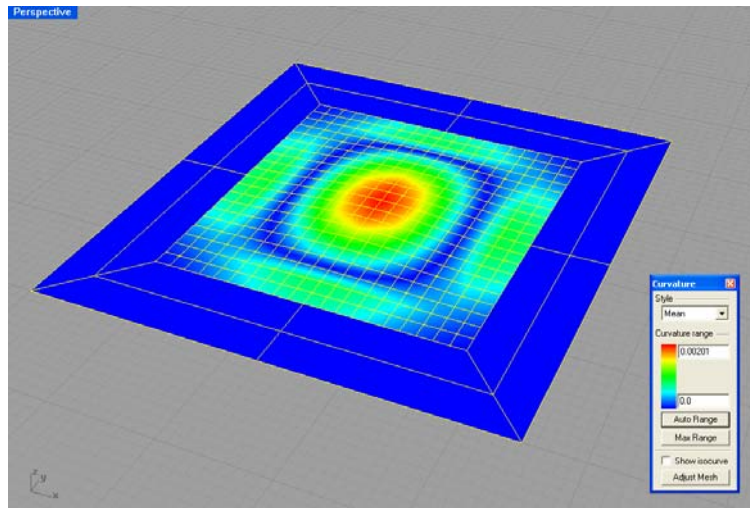
#### 1<sup>ο</sup> στάδιο – Κατασκευή των καλουπιών

Για την κατασκευή των καλουπιών των γεωμετρικά ατελών δοκιμών έγινε μοντελοποίηση σε πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων (ANSYS) μιας επίπεδης πλάκας με ελαφρώς μικρότερες διαστάσεις (300×300 mm) από τις πραγματικές (320×320 mm), για το λόγο που περιγράφηκε νωρίτερα στο εδάφιο 5.2.2. Συγκεκριμένα, έγινε ανάλυση λυγισμού με χρήση των θεωρητικών μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού (Πίνακας 5.1α) και των θεωρητικών συνοριακών συνθηκών πάκτωσης (βλ. Σχήμα 5.3), απ' όπου αποκτήθηκε η 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού της επίπεδης πλάκας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5.



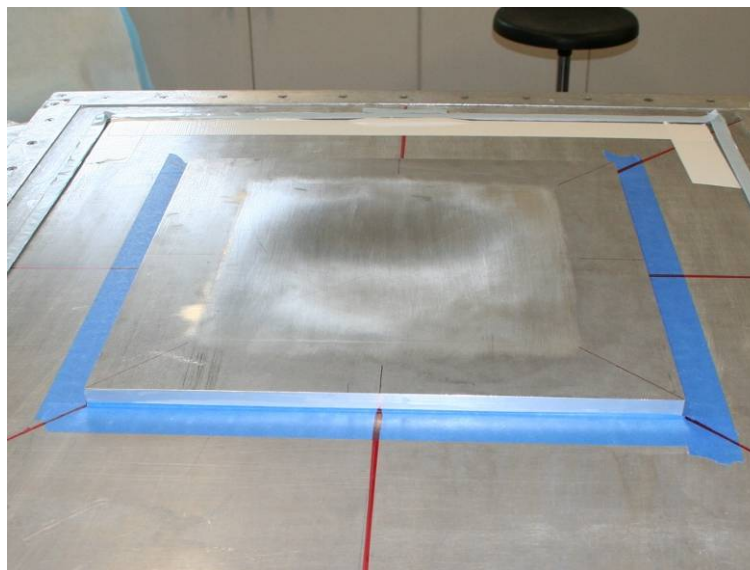
**Σχήμα 5.5:** Ανάλυση λυγισμού πεπερασμένων στοιχείων (1<sup>η</sup> ιδιομορφή).

Στη συνέχεια, η διακριτοποιημένη αυτή τρισδιάστατη επιφάνεια μεταφέρθηκε με τη μορφή κόμβων σε πρόγραμμα γεωμετρικής επεξεργασίας (Rhino 3D), με σκοπό την κατάλληλη κλιμάκωση της γεωμετρικής της μορφής, έτσι ώστε να δημιουργηθούν οι δυο επιφάνειες της “μικρής” και της “μεγάλης” παραμόρφωσης, χρησιμοποιώντας αντίστοιχα μικρό και μεγάλο λόγο κλίμακας. Έπειτα, με χρήση του ίδιου προγράμματος γεωμετρικής επεξεργασίας, οι επιφάνειες αυτές (διαστάσεων 300×300 mm) προεκτάθηκαν συμμετρικά, με προσθήκη επίπεδου πλαισίου πλάτους 75 mm γύρω από αυτές, έτσι ώστε οι επιφάνειες να αποκτήσουν τις τελικές τους διαστάσεις (450×450 mm), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6., για την κατασκευή των αντίστοιχων καλουπιών,



**Σχήμα 5.6:** Δημιουργία τελικής επιφάνειας καλουπιού, σε πρόγραμμα γεωμετρικής επεξεργασίας (RhinoCeros 3D), όπου φαίνεται χαρακτηριστικά η ανάλυση καμπυλότητας.

Τέλος, τα στοιχεία αυτά των τρισδιάστατων γεωμετρικών μορφών στάλθηκαν σε μηχανουργείο, όπου χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των δύο αντίστοιχων κοίλων (concave) καλουπιών αλουμινίου, συνολικών διαστάσεων 450×450 mm (Σχήμα 5.7) το καθένα, με χρήση μηχανής CNC.



**Σχήμα 5.7:** Καλούπι αλουμινίου κοίλης μορφής.

## 2<sup>ο</sup> στάδιο – Κατασκευή των δοκιμίων

Η κατασκευή των δοκιμίων έγινε όπως προαναφέρθηκε με τη μέθοδο “επίστρωσης με το χέρι” (hand lay up – Σχήμα 5.8), σε συνδυασμό με τη μέθοδο “μορφοποίησης με σάκο κενού” (vacuum bag moulding – Σχήμα 5.9).



**Σχήμα 5.8:** Κατασκευή πολύστρωτου με τη μέθοδο “επίστρωσης με το χέρι” (hand lay up).

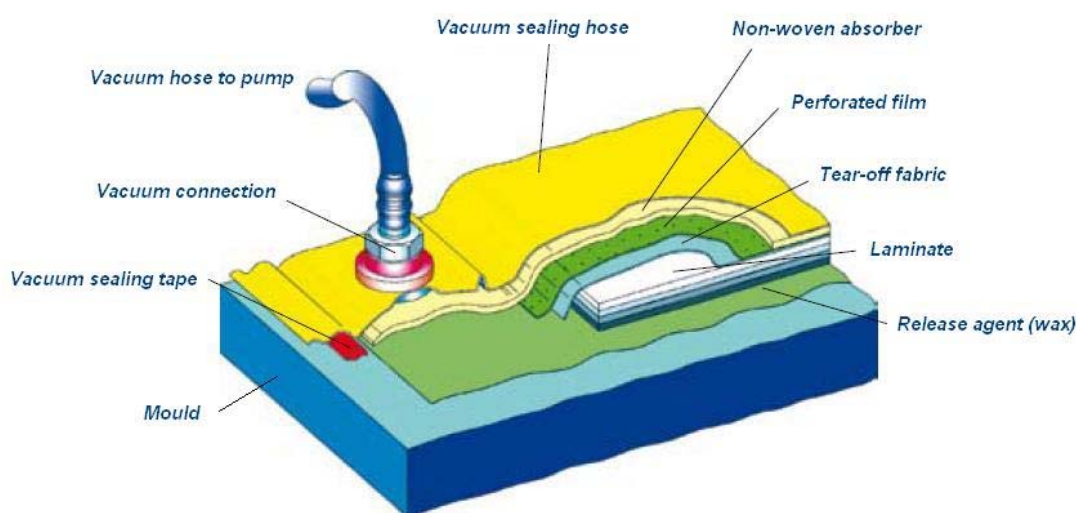


**Σχήμα 5.9:** Πολύστρωτο υπό συνθήκες πίεσης κενού (vacuum bag moulding).

Για την κατασκευή κάθε δοκιμίου, έγινε αρχικά το κόψιμο των υαλοϋφασμάτων σε μέγεθος 450×450 mm, λίγο μεγαλύτερο απ’ τις τελικές διαστάσεις των δοκιμίων που είναι 400×380 mm, προκειμένου να υποστούν στη συνέχεια μηχανουργική κατεργασία στα άκρα τους, έτσι ώστε να εξασφαλισθεί με ικανοποιητική ακρίβεια η ορθογωνικότητα των πλευρών τους. Επίσης, από μέρος της περίσσειας υλικού στα άκρα των δοκιμίων, έγιναν δοκιμές μέτρησης της περιεκτικότητάς τους κατά βάρος σε ίνες με την τεχνική της καύσης (calcination tests) που περιγράφεται στη συνέχεια (εδάφιο 5.2.4).

Η διαδικασία της κατασκευής ξεκινάει με επάλειψη του καλουπιού αλουμινίου με κατάλληλο αποκολλητικό κερί (release wax) και στη συνέχεια γίνεται επίστρωση των υαλοϋφασμάτων και του μίγματος ρητίνης με την τεχνική επίστρωσης με το χέρι (hand lay up - Σχήμα 5.8). Ακολούθως, το πολύστρωτο καλύπτεται με ένα ελαστικό

διάφραγμα (μονωτική μεμβράνη – vacuum sealing hose) και, μετά από στεγανοποίηση των άκρων του με ειδική ταινία στεγανοποίησης (vacuum sealing tape), αναρροφάται ο αέρας και η περίσσεια ρητίνης από το χώρο κάτω απ’ τη μεμβράνη με τη βοήθεια αντλίας κενού, έτσι ώστε το πολύστρωτο να φορτιστεί από ομοιόμορφη πίεση (~0.6 bar) (Σχήμα 5.9). Μεταξύ του πολύστρωτου και της στεγανοποιητικής μεμβράνης, τοποθετούνται με τη σειρά: αποκολλητική φόδρα (tear-off fabric), διάτρητη μεμβράνη (perforated film) και ειδικό απορροφητικό πανί (non-woven absorber), όπως φαίνονται και στο Σχήμα 5.10. Το δοκίμιο μένει στη συνέχεια σε συνθήκες πίεσης κενού για χρονικό διάστημα αρκετών ωρών, μέχρι να στερεοποιηθεί πλήρως το υλικό, και έπειτα γίνεται το ξεκαλούπωμά του.



**Σχήμα 5.10:** Διάταξη υλικών τεχνικής “vacuum bag moulding”.

Τέλος, το στάδιο της κατασκευής των δοκιμίων ολοκληρώνεται με τη μηχανουργική κατεργασία των άκρων των πλακών, έτσι ώστε να επιτευχθούν οι επιθυμητές διαστάσεις με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, αλλά και προκειμένου να εξασφαλισθεί η ορθογωνικότητα των πλευρών τους. Ιδιαίτερα, η εξασφάλιση της παραλληλότητας των φορτιζόμενων πλευρών κάθε πλάκας είναι πολύ σημαντική για τη σωστή εφαρμογή της φόρτισης κατά τη διαδικασία της δοκιμής. Η ονοματολογία των δοκιμίων που κατασκευάστηκαν φαίνεται στον Πίνακα 5.2 που ακολουθεί.

**Πίνακας 5.2:** Ονοματολογία των δοκιμίων.

Ομάδα δοκιμίων	Γεωμετρική ατέλεια ( $w_0$ )	Ονομασία
P Series	-	P1, P2, P3
IMP-1 Series	3.2 mm	IMP 1.1, IMP 1.2, IMP 1.4
IMP-2 Series	9.6 mm	IMP 2.1, IMP 2.2, IMP 2.3

### 5.2.4 Μετρήσεις και τελικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δοκιμίων

Κατά το στάδιο κατασκευής των δοκιμίων, μετά τη μηχανουργική κατεργασία των άκρων τους, έγιναν σε κάθε ένα από αυτά μετρήσεις των τελικών τους γεωμετρικών χαρακτηριστικών, καθώς και μετρήσεις της περιεκτικότητάς τους κατά βάρος σε ίνες γυαλιού. Αργότερα έγιναν και μετρήσεις προσδιορισμού των μηχανικών ιδιοτήτων και αντοχών του υλικού κατασκευής με την κατασκευή αντίστοιχων δοκιμίων. Τα τρία αυτά στάδια μετρήσεων αναλύονται ακολούθως.

#### α) Μετρήσεις τελικών γεωμετρικών χαρακτηριστικών των δοκιμίων

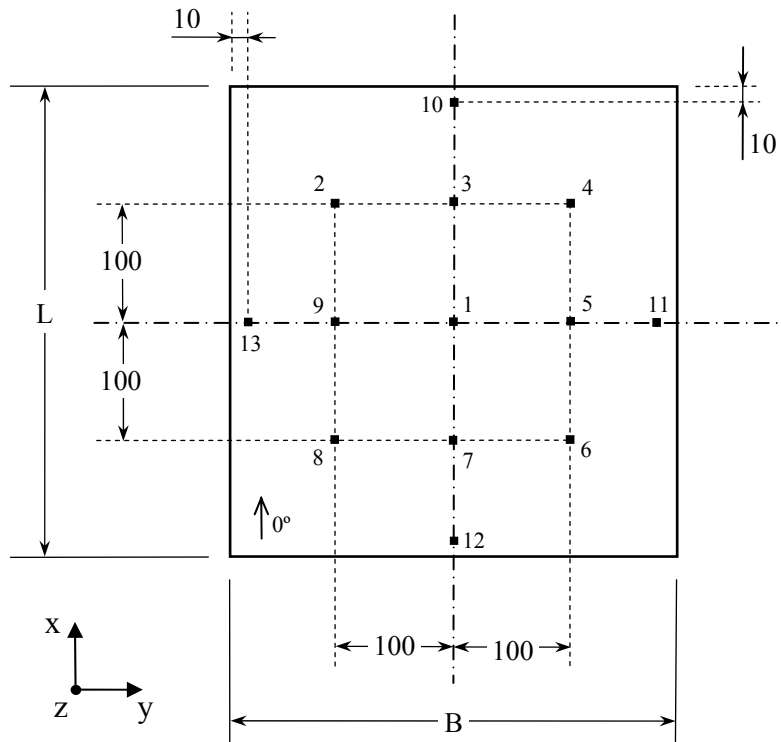
Μετά την κατασκευή των δοκιμίων-πλακών, έγιναν μετρήσεις για τον προσδιορισμό των ακριβών τελικών τους διαστάσεων, του πάχους, αλλά και του πραγματικού μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας του κάθε δοκιμίου. Η μέτρηση του πάχους κάθε δοκιμίου έγινε σε 13 αντιπροσωπευτικά σημεία, σύμφωνα με τη σκαριφηματική διάταξη του Σχήματος 5.11, με σκοπό την εκτίμηση του μέσου πάχους ( $t_{uni}$ ) της κάθε πλάκας. Τόσο οι μετρήσεις των κύριων διαστάσεων (L, B), όσο και οι μετρήσεις των παχών στα σημεία No 2 έως 13 έγιναν με χρήση συμβατικού παχύμετρου, ενώ για τη μέτρηση του πάχους στο σημείο No 1, δηλαδή στο κέντρο της πλάκας ( $t_c$ ), χρησιμοποιήθηκε ειδικό όργανο τρισδιάστατης ψηφιοποίησης επιφανειών (3D digitizer – Σχήμα 5.12). Το όργανο αυτό χρησιμοποιήθηκε επίσης και για τη μέτρηση του μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_{cvx}$ ) στην κυρτή πλευρά κάθε δοκιμίου (Σχήμα 5.4). Τέλος, το μέγεθος της κοιλότητας της ατέλειας ( $w_{ccv}$ ) εκτιμήθηκε μέσω των υπόλοιπων μεγεθών, από τη σχέση που εύκολα προκύπτει σύμφωνα με τη διάταξη του Σχήματος 5.4:

$$w_{ccv} = t_{uni} + w_{cvx} - t_c$$

Επιπλέον, υπολογίστηκε το εμβαδόν της εγκάρσιας μέσης τομής κάθε δοκιμίου:

$$A = B \cdot t_{uni}$$





Σχήμα 5.11: Διάταξη σημείων παχυμέτρησης των δοκιμίων (διαστάσεις σε mm).



Σχήμα 5.12: Μέτρηση δοκιμίου με όργανο ψηφιοποίησης (digitizer).

Οι ονομαστικές τιμές όλων των προαναφερθέντων γεωμετρικών μεγεθών, καθώς και οι ακριβείς τιμές τους, μετά τις κατάλληλες μετρήσεις και τους αντίστοιχους υπολογισμούς για κάθε δοκίμιο-πλάκα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.3 που ακολουθεί.

**Πίνακας 5.3:** Τελικές διαστάσεις των δοκιμίων και των γεωμετρικών τους ατελειών.

Ομάδα δοκιμίων	Δοκίμιο	L (mm)	B (mm)	$t_{uni}$ (mm)	$A = B \cdot t_{uni}$ (mm <sup>2</sup> )	$t_c$ (mm)	$W_{cvx}$ (mm)	$W_{ccv}$ (mm)
P Series	<i>nominal</i>	400.00	380.00	15.00	5700.0	15.00	-	-
	P1	399.90	380.53	15.63	5945.7	15.60	-	-
	P2	400.00	381.58	15.18	5790.4	15.10	-	-
	P3	399.93	380.63	15.35	5842.6	15.30	-	-
IMP-1 Series	<i>nominal</i>	400.00	380.00	15.00	5700.0	15.00	3.20	3.20
	IMP 1.1	400.00	381.15	15.01	5720.5	16.41	3.33	1.92
	IMP 1.2	400.00	379.80	14.66	5567.2	15.43	3.15	2.37
	IMP 1.4	399.88	379.93	14.29	5427.6	14.77	3.24	2.76
IMP-2 Series	<i>nominal</i>	400.00	380.00	15.00	5700.0	15.00	9.60	9.60
	IMP 2.1	400.13	379.85	14.81	5626.2	16.35	9.53	7.99
	IMP 2.2	399.98	379.73	15.65	5941.7	18.42	9.60	6.83
	IMP 2.3	400.00	379.65	14.36	5450.2	15.88	9.45	7.93

Από την παρατήρηση των τιμών του παραπάνω πίνακα, φαίνεται ότι οι κύριες διαστάσεις των δοκιμίων επιτεύχθηκαν με πολύ καλή ακρίβεια. Επιπλέον, ο έλεγχος της ορθογωνικότητας των πλευρών κάθε πλάκας, έδειξε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στον αντίποδα, παρατηρείται ότι τα μέσα πάχη των δοκιμίων διαφέρουν μεταξύ τους, παρουσιάζοντας είτε μικρότερες είτε μεγαλύτερες τιμές από την ονομαστική. Σε κάθε περίπτωση όμως, οι διαφορές αυτές περιορίζονται σε εύρος λίγων δέκατων του χιλιοστού και δικαιολογούνται από τη μέθοδο κατασκευής που χρησιμοποιήθηκε (επίστρωση με το χέρι – hand lay up).

Επιπλέον, σε όλες τις περιπτώσεις πλακών με γεωμετρική ατέλεια, παρατηρείται ότι το πάχος στο κέντρο τους ( $t_c$ ) είναι μεγαλύτερο σε σχέση με το μέσο πάχος ( $t_{uni}$ ) των πλακών αυτών, κάτι που δε συμβαίνει στις επίπεδες πλάκες. Αυτό οφείλεται προφανώς στον τρόπο κατασκευής των “γεωμετρικά ατελών” πλακών, αφού τα αντίστοιχα καλούπια είχαν κοίλη μορφή (Σχήμα 5.7), προκαλώντας έτσι τη συγκέντρωση περίσσειας ρητίνης στο κέντρο των πλακών. Το φαινόμενο αυτό θεωρείται αναμενόμενο, εφόσον η κατασκευή των πλακών αυτών έγινε με τη μέθοδο επίστρωσης με το χέρι (hand lay up) και όχι με κάποιο σύστημα προεμποτισμένων ινών (pre-pregs), και δεδομένου ότι τα καλούπια ήταν ανοικτής μορφής. Για το λόγο αυτό εφαρμόστηκε επιπρόσθετα και η τεχνική μορφοποίησης με σάκο κενού (vacuum bag moulding), που εκτιμάται ότι περιόρισε σε μεγάλο βαθμό την έκταση αυτού του φαινομένου.

### β) Μετρήσεις περιεκτικότητας κατά βάρος σε γυαλί των δοκιμίων

Η διαδικασία μετρήσεων περιεκτικότητας γυαλιού έγινε σύμφωνα με τη μέθοδο Α του προτύπου ISO 1172:1996, η οποία περιλαμβάνει καύση δοκιμίου σε πυρίμαχο σκεύος (δοχείο) μέσα σε φούρνο υψηλής θερμοκρασίας (500-600 °C), προκειμένου να μετρηθεί η ποσότητα του εναπομένοντος γυαλιού μετά την καύση της ρητίνης.

Συγκεκριμένα, γίνεται αρχικά μέτρηση της μάζας του δοχείου ( $m_1$ ), καθώς και της συνολικής μάζας του δοχείου μαζί με το προς καύση δοκίμιο ( $m_2$ ), πριν την εισαγωγή τους στο φούρνο. Μετά την καύση, γίνεται μέτρηση της μάζας του δοχείου μαζί με το εναπομένον υπόλειμμα γυαλιού ( $m_3$ ) και έτσι, το επί τοις εκατό (%) ποσοστό κατά βάρος των ιών γυαλιού στο δοκίμιο ( $W_f$ ) υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$W_f = \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \times 100$$

Για τις δοκιμές αυτές χρησιμοποιήθηκαν 2 κομμάτια υλικού (δοκίμια spec-a & spec-b) από τα άκρα κάθε πλάκας, μετά τη στερεοποίησή τους. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων αυτών, καθώς και το μέγεθος της πίεσης που εφαρμόστηκε από την αντλία κενού κατά τη διαδικασία κατασκευής κάθε πλάκας, φαίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 5.4.

**Πίνακας 5.4:** Περιεκτικότητα κατά βάρος σε γυαλί των δοκιμίων.

Δοκίμιο	Υπο-δοκίμιο	$W_f$ (%)	Average $W_f$ (%)	Vacuum (bar)
P1	spec-a	59.8	59.8	- 0.4
	spec-b	59.8		
P2	spec-a	61.4	60.7	- 0.4
	spec-b	60.0		
P3	spec-a	60.7	61.4	- 0.4
	spec-b	62.0		
IMP 1.1	spec-a	63.7	64.1	- 0.6
	spec-b	64.4		
IMP 1.2	spec-a	65.1	64.9	- 0.6
	spec-b	64.6		
IMP 1.4	spec-a	64.8	64.1	- 0.6
	spec-b	64.2		
IMP 2.1	spec-a	66.0	65.9	- 0.6
	spec-b	65.8		
IMP 2.2	spec-a	65.9	66.1	- 0.6
	spec-b	66.2		
IMP 2.3	spec-a	66.5	66.3	- 0.6
	spec-b	66.1		

Από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, φαίνεται ότι το μέγεθος της πίεσης που εφαρμόστηκε σε κάθε πλάκα έπαιξε ρόλο στην περιεκτικότητα ιών γυαλιού ( $W_f$ ) του κάθε δοκιμίου. Η αύξηση της πίεσης που ασκεί ο σάκος κενού έχει ως αποτέλεσμα τη μικρή αύξηση του ποσοστού ιών στο σύνθετο υλικό, καθώς αναρροφάται μεγαλύτερη ποσότητα αέρα και περίσσειας ρητίνης από το πολύστρωτο. Έτσι, παρατηρείται ότι το ποσοστό των ιών γυαλιού στις επίπεδες πλάκες κυμαίνεται γύρω στο 60%, ενώ στις υπόλοιπες (με γεωμετρικές ατέλειες), όπου εφαρμόστηκε μεγαλύτερη πίεση από την αντλία κενού, το ποσοστό αυτό είναι αντίστοιχα λίγο μεγαλύτερο, γύρω στο 65%.



γ) Μετρήσεις μηχανικών ιδιοτήτων και αντοχών του υλικού κατασκευής των δοκιμών

Για την εκτίμηση των πραγματικών μηχανικών ιδιοτήτων και αντοχών του υλικού που χρησιμοποιήθηκε, έγιναν αντίστοιχες δοκιμές χαρακτηρισμού σε εφελκυσμό, θλίψη και διάτμηση. Οι δοκιμές αυτές βασίστηκαν σε δοκίμια που κατασκευάστηκαν από το ίδιο ακριβώς υλικό, δηλαδή εποξειδική ρητίνη, ενισχυμένη με μονοαξονικές ίνες γυαλιού τύπου E (UD E-Glass / Epoxy) και με την ίδια ακριβώς μέθοδο κατασκευής (hand lay up & vacuum bag moulding) που χρησιμοποιήθηκε και για την κατασκευή των δοκιμών-πλακών. Η διεξαγωγή αυτών των δοκιμών έγινε από κοινού με το συνεργαζόμενο Πολυτεχνείο της Δανίας (DTU) και τα αποτελέσματά τους φαίνονται στους Πίνακες 5.5α και 5.5β. Πρέπει να σημειωθεί ότι περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων των δοκιμών χαρακτηρισμού του υλικού οδήγησε σε λίγο διαφορετικές τιμές από αυτές που παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες, χωρίς όμως να παρατηρηθούν αξιοσημείωτες διαφορές.

**Πίνακας 5.5α**

Μηχανικές Ιδιότητες Υλικού (UD E-Glass / Epoxy)		
$E_{11} =$	35205	MPa
$E_{22} =$	9835	MPa
$E_{33} =$	9835	MPa
$\nu_{12} =$	0.268	
$\nu_{23} =$	0.375	
$\nu_{13} =$	0.268	
$G_{12} =$	2531	MPa
$G_{23} =$	2329	MPa
$G_{13} =$	2531	MPa

**Πίνακας 5.5β**

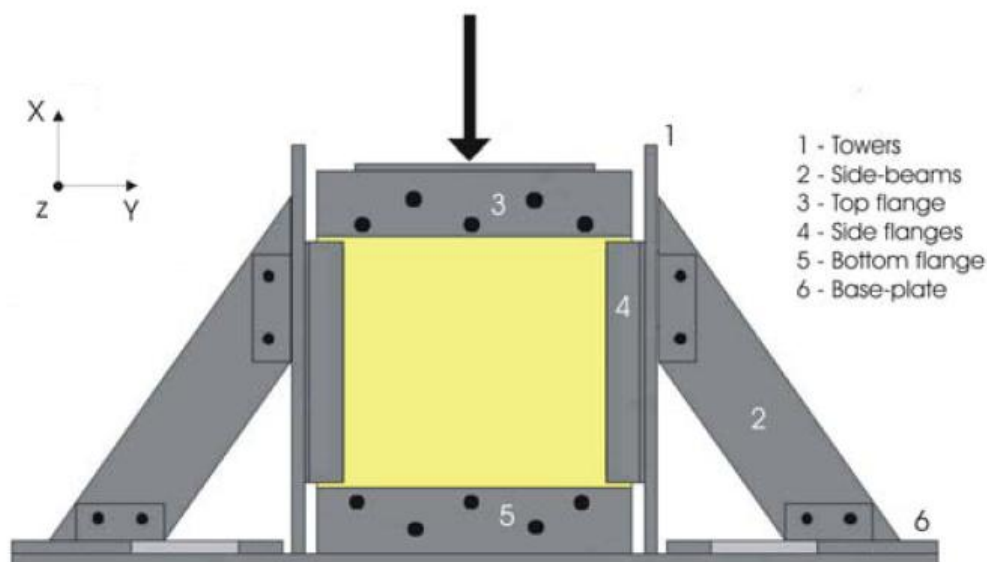
Αντοχές Υλικού (UD E-Glass / Epoxy)		
$X_T =$	697.5	MPa
$X_C =$	190.7	MPa
$Y_T =$	14.8	MPa
$Y_C =$	69.0	MPa
$Z_T =$	14.8	MPa
$Z_C =$	69.0	MPa
$S_{XY} =$	41.9	MPa
$S_{YZ} =$	27.9	MPa
$S_{XZ} =$	27.9	MPa

Συγκρίνοντας τις πραγματικές (μετρούμενες) μηχανικές ιδιότητες και αντοχές του υλικού κατασκευής (Πίνακες 5.5α και 5.5β) με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές τους (Πίνακες 5.1α και 5.1β) που χρησιμοποιήθηκαν κατά την αρχική μοντελοποίηση για την κατασκευή των καλουπιών, παρατηρείται αρκετά μεγάλη απόκλιση. Αυτό αποδεικνύει άμεσα ότι η ποιότητα ενός σύνθετου υλικού, ειδικά στην περίπτωση “επίστρωσης με το χέρι”, μπορεί να διαφέρει κατά πολύ από την αναμενόμενη, γι’ αυτό είναι απαραίτητη η διενέργεια δοκιμών χαρακτηρισμού ενός τέτοιου υλικού.

### 5.2.5 Διαδικασία και παράμετροι των δοκιμών

#### Πειραματική εγκατάσταση – εξοπλισμός

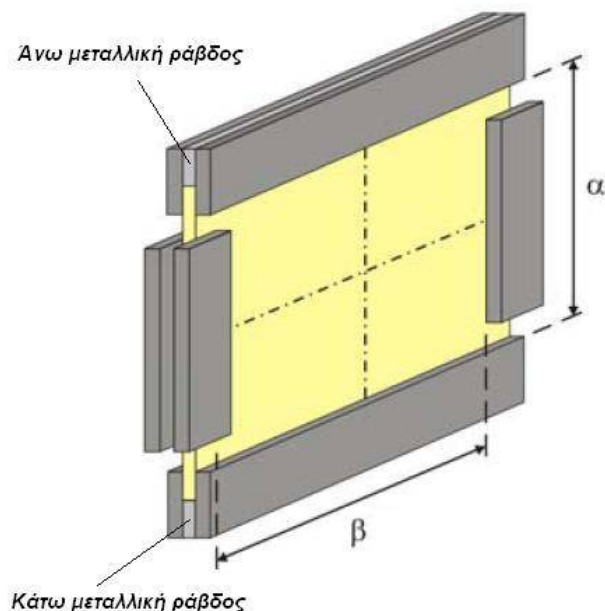
Όπως προαναφέρθηκε, οι δοκιμές των πειραμάτων λυγισμού έγιναν στην υδραυλική μηχανή δοκιμών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πολυτεχνείου της Δανίας (Technical University of Denmark), σε συνεργασία με το προσωπικό του εργαστηρίου. Η συγκεκριμένη υδραυλική μηχανή της εταιρίας “Instron” έχει δυνατότητα επιβολής μέγιστου φορτίου 5000 kN, ενώ για τις ανάγκες των δοκιμών ήταν εγκατεστημένο σε αυτήν ειδικά κατασκευασμένο πλαίσιο (test rig - Σχήμα 5.13 [Jensen-2006]) για την κατάλληλη τοποθέτηση των πλακών, ώστε να εφαρμοσθούν σε αυτές οι επιθυμητές συνοριακές συνθήκες κατά την επιβολή του φορτίου.



**Σχήμα 5.13:** Κατάλληλα διαμορφωμένο πλαίσιο δοκιμών (test rig).

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.13, το πλαίσιο δοκιμών αποτελείται από δύο κατακόρυφους στύλους (towers - No 1), οι οποίοι εδράζονται στο έλασμα βάσης (base plate - No 6), το οποίο με τη σειρά του είναι πακτωμένο στη βάση της υδραυλικής μηχανής. Η στήριξη των κατακόρυφων στύλων στο έλασμα βάσης γίνεται μέσω των πλευρικών δοκών (side beams - No 2). Τα δοκίμια τοποθετούνται μεταξύ των δυο πύργων, με τις πλευρές των 400 mm παράλληλες σε αυτούς (διεύθυνση ινών των μονοαξονικών στρώσεων παράλληλη στη διεύθυνση επιβολής του φορτίου) και πακτώνονται πλήρως στην πάνω και κάτω πλευρά τους από τις οριζόντιες μεταλλικές φλάντζες (top flange - No 3 & bottom flange - No 5). Οι κατακόρυφες πλευρές πακτώνονται σχεδόν στο μεγαλύτερο μήκος τους (αλλά όχι πλήρως – βλ. Σχήμα 5.14 [Jensen-2006]) από τις κατακόρυφες πλευρικές μεταλλικές φλάντζες (side flanges - No 4), με δυνατότητα ελεύθερης συνεπίπεδης κίνησης των πλευρών αυτών. Έτσι,

εφαρμόζονται συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες πάκτωσης και στις τέσσερις πλευρές των δοκιμίων. Το φορτίο μεταφέρεται από τη μηχανή στο δοκίμιο μέσω δύο οριζόντιων μεταλλικών ράβδων, που εφαρμόζονται στην πάνω και κάτω πλευρά φόρτισης του δοκιμίου, μεταξύ των οριζόντιων μεταλλικών φλαντζών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.14 [Jensen-2006].

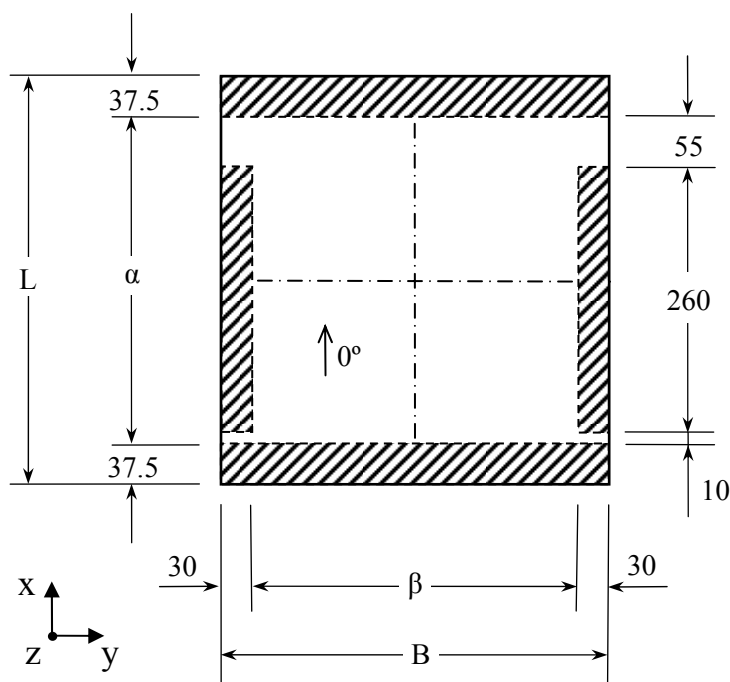


**Σχήμα 5.14:** Λεπτομέρειες πλαισίου δοκιμών (test rig).

### Συνοριακές συνθήκες

Οι ακριβείς συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται σε κάθε δοκίμιο κατά την τοποθέτησή του στο πλαίσιο της μηχανής φαίνονται στη σκαριφηματική διάταξη του Σχήματος 5.15, όπως μετρήθηκαν κατά τη διαδικασία των δοκιμών. Έτσι, οι πραγματικές διαστάσεις της ελεύθερης επιφάνειας ενός δοκιμίου, μετά την τοποθέτησή του στο πλαίσιο δοκιμών είναι, όπως προκύπτουν από το Σχήμα αυτό:

$$\alpha = 325 \text{ mm} , \beta = 320 \text{ mm}$$



Σχήμα 5.15: Ακριβείς συνοριακές συνθήκες των δοκιμίων.

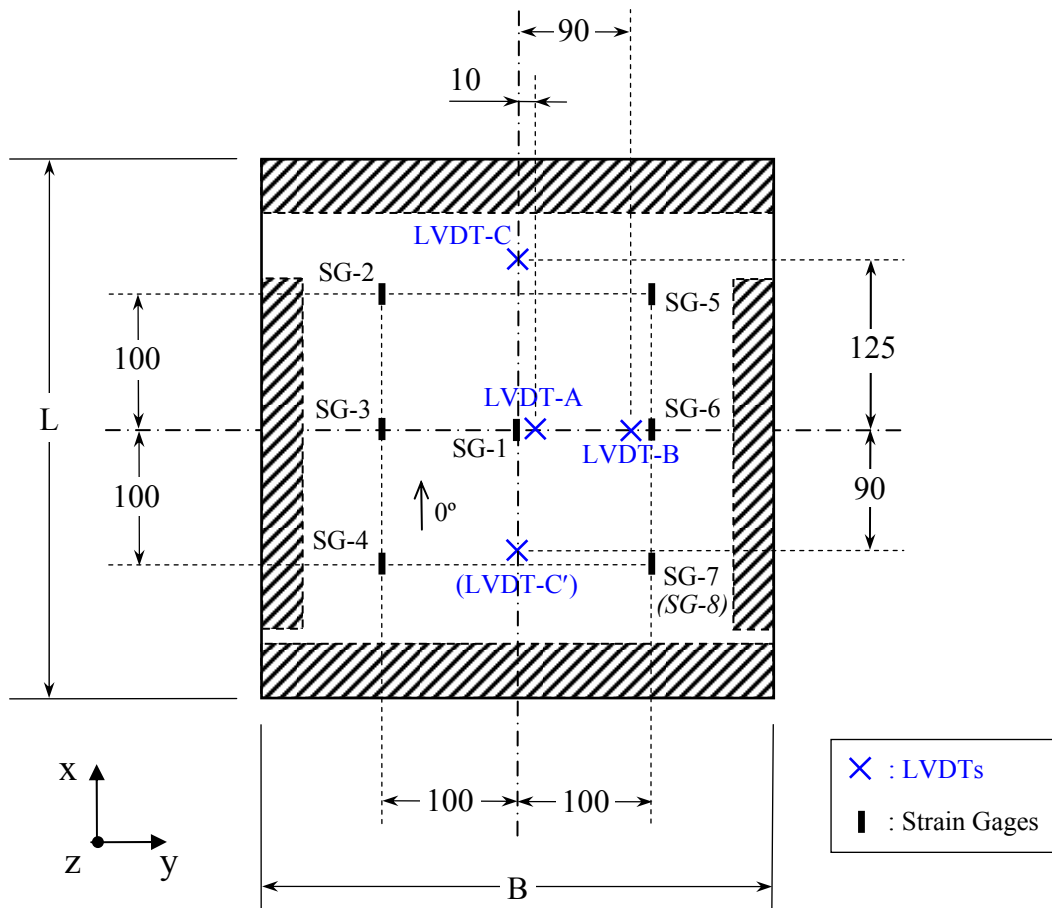
### Όργανα μετρήσεων

Κατά τη διάρκεια των δοκιμών, ελήφθησαν για κάθε δοκίμιο-πλάκα μετρήσεις διαφόρων μεγεθών. Συγκεκριμένα, ελήφθησαν μετρήσεις της επιβαλλόμενης (από το έμβολο της υδραυλικής μηχανής) κατακόρυφης θλιπτικής μετατόπισης, μετρήσεις των πλάγιων μετατοπίσεων των πλακών, καθώς και μετρήσεις των διαμήκων συνεπίπεδων παραμορφώσεών τους σε προκαθορισμένα σημεία. Για τις μετρήσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν τρία ξεχωριστά συστήματα μετρητικών οργάνων, τα οποία περιγράφονται στη συνέχεια.

Τέσσερα (4) όργανα μέτρησης μετατοπίσεων (LVDTs) χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της επιβαλλόμενης κατακόρυφης θλιπτικής μετατόπισης, καθώς και των πλάγιων μετατοπίσεων. Οκτώ (8) μονοδιευθυντικά επιμηκυνσιόμετρα (strain gages) χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση των συνεπίπεδων διαμήκων παραμορφώσεων της επιφάνειας κάθε δοκιμίου. Τα strain gages που χρησιμοποιήθηκαν ήταν της εταιρίας Kyowa, τύπου KFG-20-120-C1-11L3M2R, με μήκος αναφοράς (active gage length) 20 mm και ονομαστική αντίσταση 120 Ω. Επιπλέον, για την επιβεβαίωση των μετρήσεων των οργάνων αυτών, χρησιμοποιήθηκε παράλληλα ένα οπτικό σύστημα μέτρησης τρισδιάστατων μετατοπίσεων και παραμορφώσεων (ARAMIS), το οποίο περιλαμβάνει 2 κάμερες υψηλής συχνότητας λήψης (για τρισδιάστατη απεικόνιση), κατάλληλα φωτιστικά σώματα και υπολογιστικό σύστημα με το αντίστοιχο ειδικό λογισμικό.

Όπως φαίνεται στη διάταξη του Σχήματος 5.16, επτά (7) strain gages (SG-1 έως SG-7) καθώς και τρία (3) LVDTs (LVDT-A, LVDT-B και LVDT-C) τοποθετήθηκαν στην “πίσω” πλευρά των δοκιμίων-πλακών, την κοίλη για τα δοκίμια με γεωμετρική ατέλεια, για τη μέτρηση των διαμήκων συνεπίπεδων παραμορφώσεων και των πλάγιων

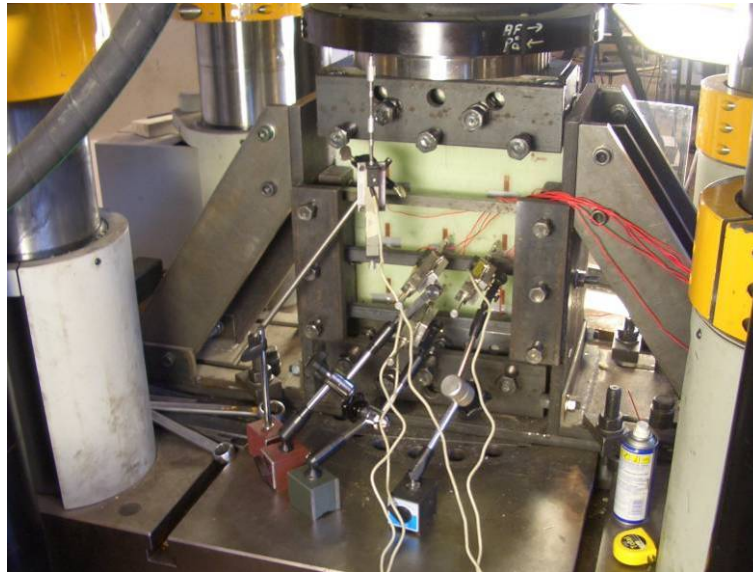
μετατοπίσεων αντίστοιχα της επιφάνειας του κάθε δοκιμίου. Σημειώνεται ότι μόνο για το δοκίμιο P1, η θέση του LVDT-C είναι διαφορετική απ' ότι στα υπόλοιπα δοκίμια και φαίνεται στη σκαριφηματική διάταξη του Σχήματος 5.16, ως θέση (LVDT-C'). Για επιβεβαίωση των μετρήσεων, το επιμηκυνσιόμετρο SG-8 τοποθετήθηκε στην αντίθετη πλευρά, δηλαδή στη “μπροστινή”, η οποία είναι η κυρτή για τα δοκίμια με γεωμετρική ατέλεια και συγκεκριμένα, τοποθετήθηκε σε σημείο με συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη θέση του SG-7. Σε αυτή την πλευρά (τη μπροστινή) εγκαταστάθηκε και το οπτικό σύστημα ARAMIS, ενώ το LVDT-D τοποθετήθηκε σε κατακόρυφη θέση, και σε επαφή με το έμβολο της υδραυλικής μηχανής, για τη μέτρηση της μετατόπισης αυτού (vertical piston displacement), ως επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων που ελήφθησαν απ' ευθείας απ' το σύστημα της ίδιας της μηχανής. Από το σύστημα αυτό της υδραυλικής μηχανής δοκιμών ελήφθη επίσης σήμα μέτρησης του επιβαλλόμενου φορτίου, συναρτήσει της επιβαλλόμενης μετατόπισης του εμβόλου.



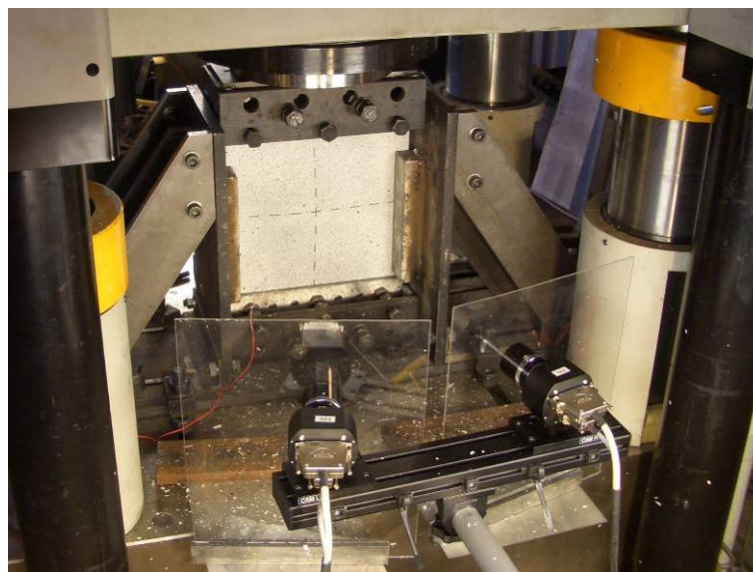
Σχήμα 5.16: Σημεία τοποθέτησης των strain gages & LDVTs στην πίσω (κοίλη) όψη των δοκιμίων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, λόγω έλλειψης επαρκούς αριθμού επιμηκυνσιόμετρων, στη δοκιμή της πλάκας IMP 2.3 τοποθετήθηκαν επιμηκυνσιόμετρα μόνο σε 4 από τις 8 προκαθορισμένες θέσεις, και συγκεκριμένα μόνο τα SG-1, SG-2, SG-3 και SG-8.

Στο Σχήμα 5.17 που ακολουθεί, φαίνεται η πίσω όψη (κοίλη πλευρά) μιας πλάκας, που είναι τοποθετημένη στο πλαίσιο δοκιμών της υδραυλικής μηχανής, στην οποία έχουν τοποθετηθεί όλα τα strain gages και LVDTs, ενώ στο Σχήμα 5.18 φαίνεται αντίστοιχα η μπροστινή όψη (κυρτή πλευρά) του δοκιμίου, όπου έχουν εγκατασταθεί οι κάμερες του οπτικού συστήματος ARAMIS.



**Σχήμα 5.17:** Πίσω πλευρά (κοίλη) δοκιμίου με strain gages & LDVTs, τοποθετημένο στο πλαίσιο της υδραυλικής μηχανής δοκιμών.



**Σχήμα 5.18:** Εγκατάσταση οπτικού συστήματος ARAMIS στη μπροστινή πλευρά (κυρτή) του δοκιμίου.

Όλα τα μετρητικά όργανα (strain gages και LVDTs), καθώς και το σύστημα της υδραυλικής μηχανής, συνδέθηκαν μέσω ενός συστήματος πρόσκτησης δεδομένων στο ίδιο υπολογιστικό σύστημα, για την καταγραφή των σημάτων των μετρήσεων. Η συχνότητα δειγματοληψίας του συστήματος πρόσκτησης δεδομένων, η οποία στην προκειμένη περίπτωση εξαρτιόταν από τον εκάστοτε αριθμό των μετρητικών οργάνων που είχαν συνδεθεί σε αυτό, ήταν για όλες τις δοκιμές 1.067 Hz με εξαίρεση τη δοκιμή της πλάκας IMP 2.3, όπου λόγω σύνδεσης λιγότερων μετρητικών οργάνων, η συχνότητα δειγματοληψίας ήταν 1.412 Hz.

Οι μετρήσεις των LVDT-A και SG-1, που βρίσκονται κοντά στο κέντρο του κάθε δοκιμίου, αναμένεται να μας δώσουν τα αποτελέσματα για τις καμπύλες λυγισμού των πλακών, ενώ τα υπόλοιπα μετρητικά όργανα τοποθετήθηκαν για αναφορά και πιθανή σύγκριση των αποτελεσμάτων με αποτελέσματα ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Ακόμη, τα αποτελέσματα των μετρητικών οργάνων θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή των διαγραμμάτων “Southwell”, τα οποία αναμένεται να δώσουν μια εκτίμηση για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού κάθε πλάκας. Τέλος, βάσει των πειραματικών μετρήσεων, θα γίνει μια εκτίμηση της δυσκαμψίας των πλακών, υπολογίζοντας το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας  $E_x$  μέσω των καμπύλων τάσης – παραμόρφωσης.

#### Ταχύτητα δοκιμών

Σε όλες τις δοκιμές, η επιβαλλόμενη φόρτιση είχε τη μορφή γραμμικά αυξανόμενης, κατακόρυφης, ομοιόμορφης, θλιπτικής μετατόπισης, με ταχύτητα ίση με 1 mm/λεπτό.

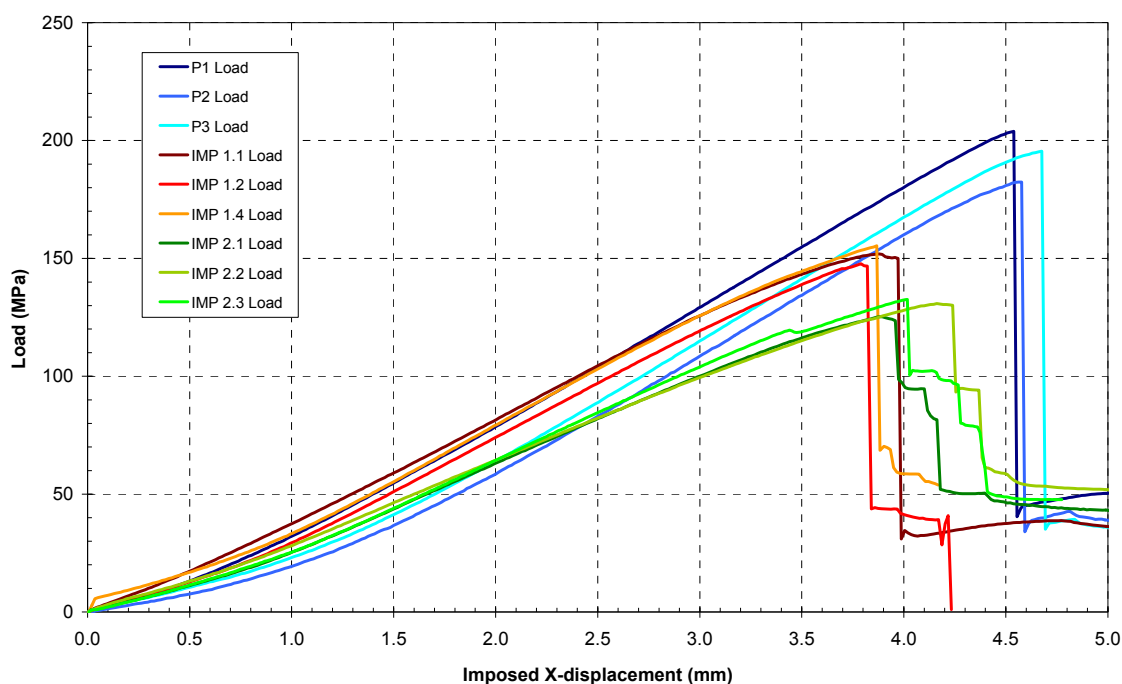
### **5.3 Αποτελέσματα και σχολιασμός**

Τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων παρουσιάζονται στη συνέχεια με τη μορφή διαγραμμάτων. Όλα τα μετρούμενα μεγέθη παρουσιάζονται διαγραμματικά συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου (Load), το οποίο επιβάλλεται μέσω της ομοιόμορφης διαμήκου θλιπτικής μετατόπισης κατά τη διεύθυνση  $x$ . Όπως έχει ήδη επεξηγηθεί στο εδάφιο 2.2 (βλ. Σχήμα 2.7), η τάση  $\sigma_x$  που αναπτύσσεται στη διατομή κάθε πλάκας δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά το πλάτος αυτής. Παρ’ όλ’ αυτά, το επιβαλλόμενο φορτίο μπορεί να αντιπροσωπευθεί από την τιμή της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης, ως το πηλίκο της επιβαλλόμενης δύναμης προς το εμβαδόν της διατομής της κάθε πλάκας ( $P_x/A_i$ ). Αυτή η παραδοχή γίνεται για λόγους ευκολότερης σύγκρισης των αποτελεσμάτων, καθώς τα πάχη των πλακών διαφέρουν (έστω και λίγο) μεταξύ τους και επομένως η τιμή της επιβαλλόμενης δύναμης  $P_x$  δεν θα ήταν ενδεικτική της αντίστοιχης μέσης αναπτυσσόμενης τάσης σε κάθε δοκίμιο.



### 5.3.1 Επιβαλλόμενο φορτίο και φορτίο αστοχίας των δοκιμίων

Η μέση αναπτυσσόμενη τάση που, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, αντιπροσωπεύει το επιβαλλόμενο φορτίο, παρουσιάζεται στο διάγραμμα του Σχήματος 5.19, συναρτήσει της επιβαλλόμενης διαμήκουσ ομοιόμορφης θλιπτικής μετατόπισης κατά τη διεύθυνση  $x$ , απ' όπου προκύπτουν και τα αντίστοιχα φορτία (τάσεις) αστοχίας, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια πινακοποιημένα στον Πίνακα 5.6.



**Σχήμα 5.19:** Διάγραμμα επιβαλλόμενου φορτίου (μέσης αναπτυσσόμενης τάσης).

Όπως φαίνεται λοιπόν στο Σχήμα 5.19, παρατηρείται διαφορετική συμπεριφορά για κάθε ομάδα δοκιμών. Συγκεκριμένα, στις επίπεδες πλάκες (P-Series) παρατηρείται σχετικά “απότομη” μορφή αστοχίας, με το φορτίο να αυξάνει συνεχώς (με σχεδόν σταθερό ρυθμό μετά τα 50 MPa περίπου) μέχρι το σημείο θραύσης. Αντίθετα, στις υπόλοιπες πλάκες παρατηρείται από νωρίς μια μείωση του φορτίου που παραλαμβάνει το δοκίμιο (μετά τα 120 MPa περίπου για τις IMP-1 Series και μετά τα 80 MPa περίπου για τις IMP-2 Series), που σημαίνει ότι από το σημείο αυτό τα δοκίμια έχουν αρχίσει να αστοχούν σταδιακά, μέχρι την τελική τους κατάρρευση.

Στον Πίνακα 5.6 που ακολουθεί, δίνονται τα φορτία (τάσεις) αστοχίας των δοκιμών-πλακών, καθώς και οι αντίστοιχες μέσες τιμές που προκύπτουν για κάθε ομάδα πλακών. Συγκρίνοντας αυτές τις τιμές κάθε ομάδας, με την αντίστοιχη της ομάδας επίπεδων πλακών (P Series), φαίνεται η επίδραση που έχουν οι γεωμετρικές ατέλειες κάθε ομάδας στην αντοχή (φορτίο-τάση αστοχίας) των πλακών. Στη μεν περίπτωση των πλακών με σχετικά μικρές γεωμετρικές ατέλειες (IMP-1 Series) η αντοχή τους μειώνεται κατά 22% περίπου, ενώ στην περίπτωση των πλακών με σχετικά



μεγάλες γεωμετρικές ατέλειες (IMP-2 Series) η αντοχή τους μειώνεται κατά 33% περίπου.

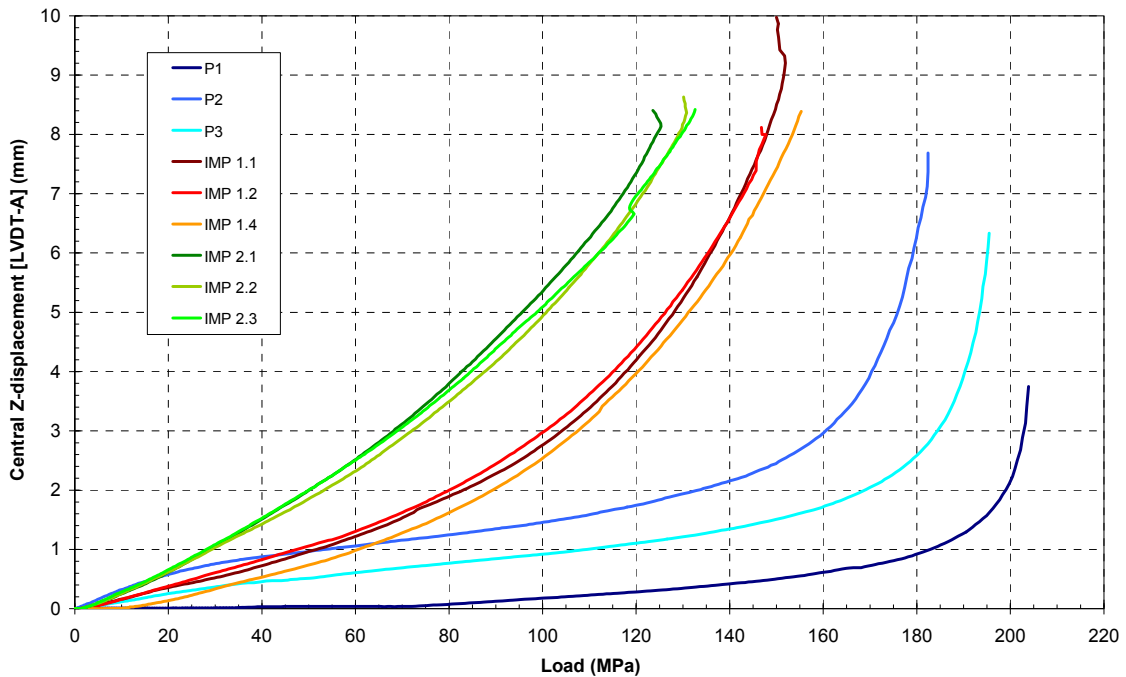
**Πίνακας 5.6:** Φορτία (τάσεις) αστοχίας των δοκιμών.

Δοκίμιο		$\sigma_u$ (MPa)	$\sigma_{u,av}$ (MPa)	Σύγκριση
P Series	P1	203.9		100.0 %
	P2	182.4	(5.6%)	
	P3	195.5		
IMP-1 Series	IMP 1.1	151.9	151.7 (2.5%)	78.2%
	IMP 1.2	147.8		
	IMP 1.4	155.3		
IMP-2 Series	IMP 2.1	125.3	129.6 (2.9%)	66.8 %
	IMP 2.2	130.8		
	IMP 2.3	132.6		

Οι αριθμοί εντός παρενθέσεων υποδεικνύουν το συντελεστή διασποράς (coefficient of variation).

### 5.3.2 Πλάγιες μετατοπίσεις στο κέντρο των δοκιμών (LVDT-A, ARAMIS)

Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.20 φαίνεται η πλάγια μετατόπιση του κέντρου της κάθε πλάκας μετρούμενη μέσω του LVDT-A, συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου και για τις εννέα πλάκες που υποβλήθηκαν σε δοκιμή.



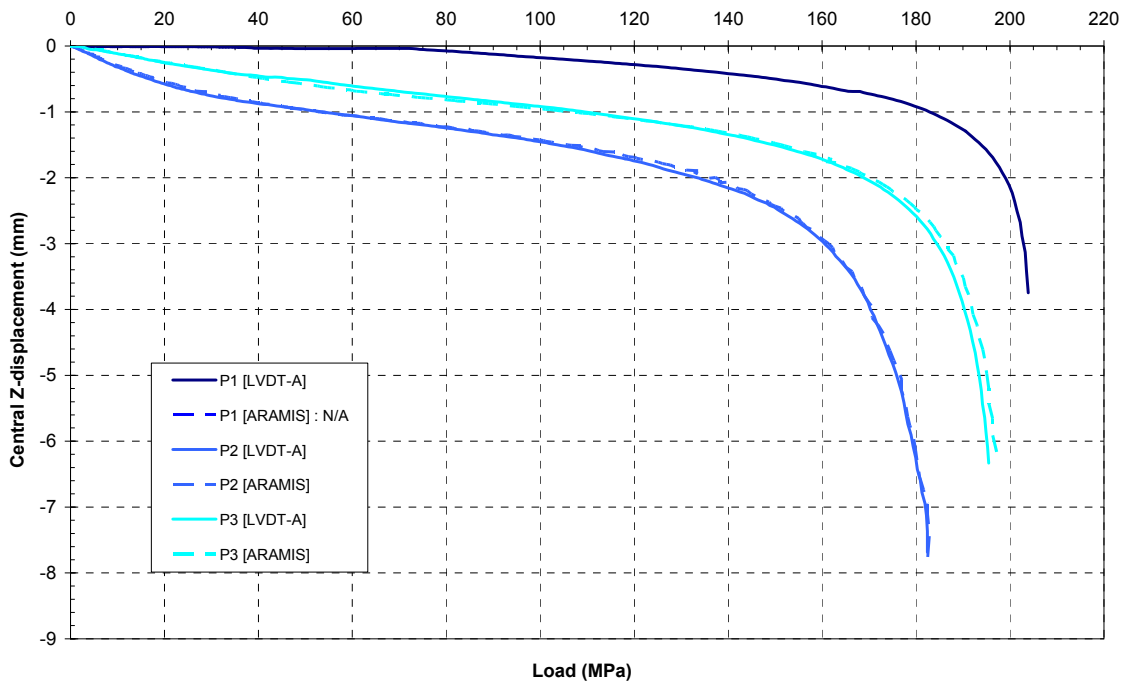
**Σχήμα 5.20:** Πλάγια μετατόπιση του κέντρου (LVDT-A), συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου (της μέσης αναπτυσσόμενης τάσης) σε κάθε δοκίμιο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τρεις πλάκες χωρίς γεωμετρική ατέλεια (P Series) εμφάνισαν πλάγια μετατόπιση του κέντρου τους προς την “πίσω” πλευρά, δηλαδή την πλευρά τοποθέτησης των μετρητικών οργάνων (strain gages & LVDTs), ενώ όλες οι υπόλοιπες πλάκες με μικρή (IMP-1 Series) και μεγάλη (IMP-2 Series) γεωμετρική ατέλεια λύγισαν προς την αντίθετη κατεύθυνση, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο σύμφωνα με την ήδη υπάρχουσα καμπυλότητα αυτών των πλακών. Επομένως, για ευκολότερη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών, έχουν καταγραφεί οι απόλυτες τιμές των πλάγιων μετατοπίσεων του κέντρου σε όλες τις πλάκες.

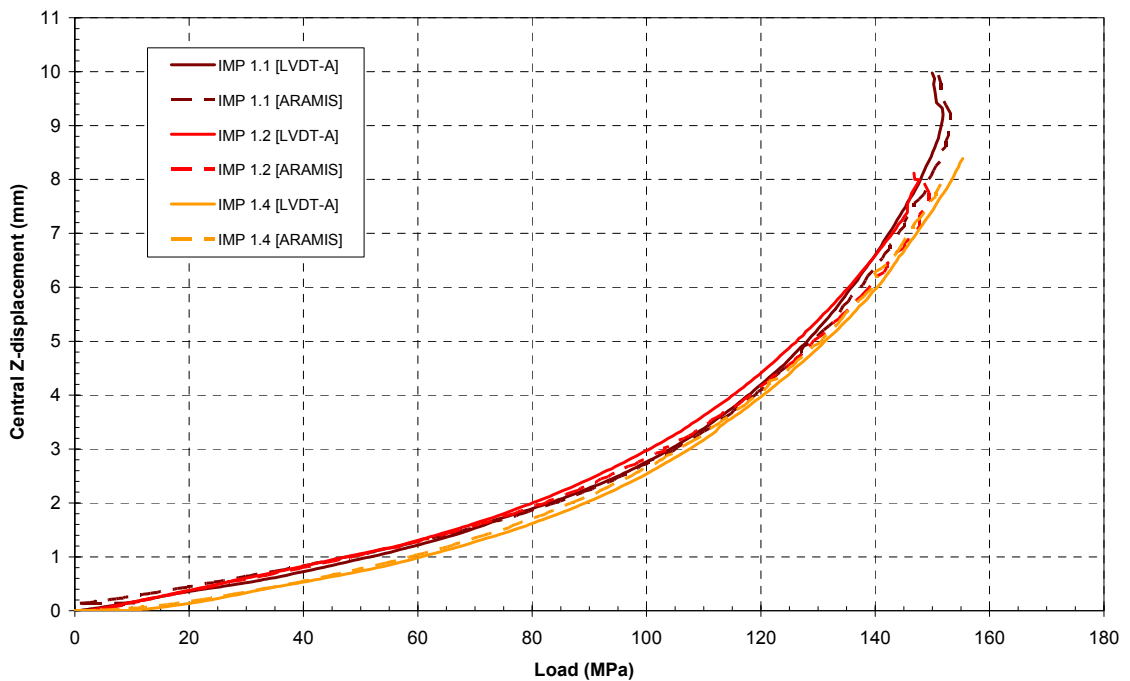
Όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.20, υπάρχει σαφής διαφοροποίηση ανάμεσα στις 3 ομάδες πλακών, τόσο στη μορφή των καμπυλών τους, όσο και στην τιμή του φορτίου αστοχίας τους. Επιπλέον, ενώ οι καμπύλες των 2 ομάδων πλακών με μικρή και μεγάλη γεωμετρική ατέλεια εμφανίζουν εξαιρετική ομοιομορφία, οι καμπύλες των επίπεδων πλακών παρουσιάζουν μεταξύ τους σημαντική απόκλιση. Συγκεκριμένα, με αναφορά στην καμπύλη της πλάκας P1 η οποία θεωρείται η πλησιέστερη στα θεωρητικά αναμενόμενα αποτελέσματα, οι καμπύλες των πλακών P2 και P3 παρουσιάζουν μια επιπλέον αύξηση της πλάγιας μετατόπισής τους από τα αρχικά κιάλας στάδια της δοκιμής (σε εύρος φόρτισης από 0 έως 50 MPa περίπου), η οποία όμως στη συνέχεια ομαλοποιείται και από εκεί και έπειτα οι μορφές των καμπυλών είναι παρόμοιες, έχοντας όμως αποκτήσει μια σημαντική απόκλιση μεταξύ τους. Η συμπεριφορά αυτή των δοκιμών P2 και P3 είναι μη αναμενόμενη και δύσκολα ερμηνεύσιμη, αφού η λυγισμική συμπεριφορά μιας τέλει πλάκας αναμένεται να έχει τη μορφή της καμπύλης P1, η οποία για το λόγο αυτό θεωρείται ως αντιπροσωπευτική της συγκεκριμένης ομάδας πλακών.

Όσον αφορά στη μορφή των καμπυλών των τριών ομάδων πλακών, παρατηρείται όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο, ότι στις πλάκες που έχουν γεωμετρικές ατέλειες, το φαινόμενο του λυγισμού δεν είναι ιδιαίτερα εμφανές, όπως συμβαίνει με τις επίπεδες πλάκες. Δεν υπάρχει δηλαδή απότομη ανάπτυξη πλάγιων μετατοπίσεων στο εύρος του επιβαλλόμενου φορτίου. Παρά το γεγονός ότι οι πλάγιες μετατοπίσεις σε αυτές τις πλάκες (IMP-1 & IMP-2 Series) είναι σημαντικά μεγαλύτερες σε όλο το εύρος του επιβαλλόμενου φορτίου από εκείνες των επίπεδων πλακών, η ανάπτυξή τους είναι αρκετά ομαλή, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει εμφανής ένδειξη συμπεριφοράς λυγισμού σε αυτά τα δοκίμια. Προφανώς, και κατά τα αναμενόμενα, το πρόβλημα αυτό είναι πιο έντονο στις πλάκες με μεγάλη γεωμετρική ατέλεια (IMP-2 Series), όπου η σχέση μεταξύ επιβαλλόμενου φορτίου και πλάγιας μετατόπισης του κέντρου φαίνεται να είναι σχεδόν γραμμική.

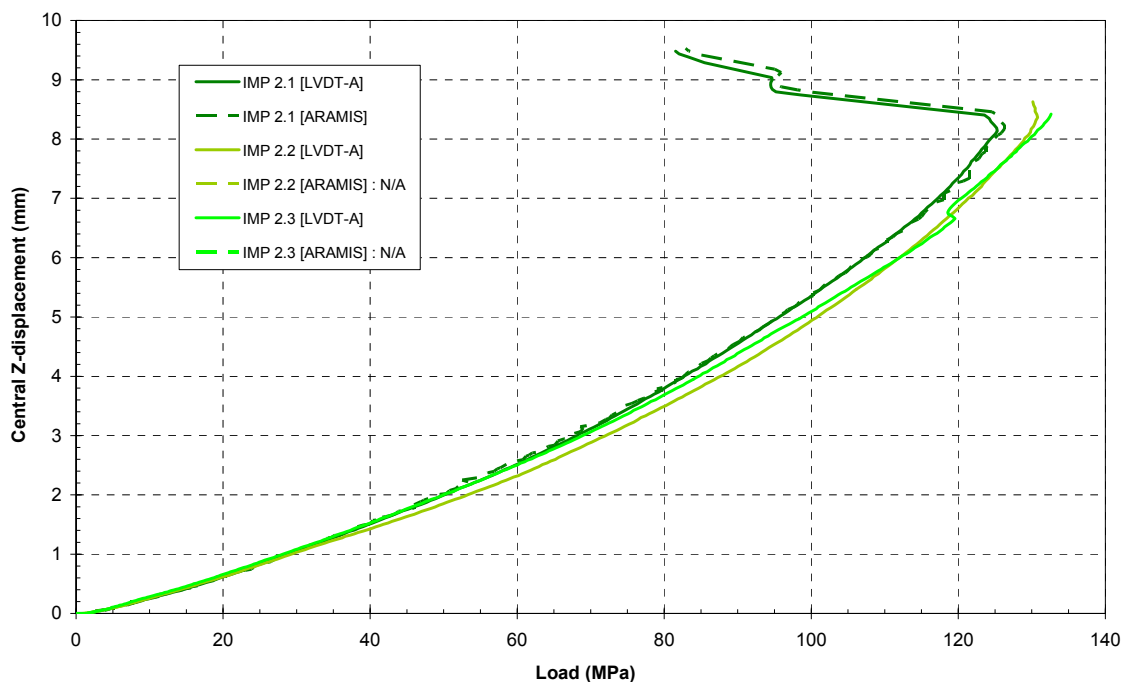
Όπως ήδη αναφέρθηκε νωρίτερα, έγινε επιβεβαίωση των παραπάνω μετρήσεων των LVDTs, χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του οπτικού συστήματος ARAMIS, όπως αυτές μας χορηγήθηκαν από το DTU. Έτσι, στα διαγράμματα των Σχημάτων 5.21, 5.22 και 5.23, κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί στις μετρήσεις μιας ομάδας πλακών, γίνεται η σύγκριση μεταξύ των δύο μετρητικών συστημάτων, με αναφορά στο κέντρο της κάθε πλάκας.



Σχήμα 5.21: Σύγκριση μεταξύ μετρήσεων ARAMIS και LVDT-A (P Series).



Σχήμα 5.22: Σύγκριση μεταξύ μετρήσεων ARAMIS και LVDT-A (IMP-1 Series).

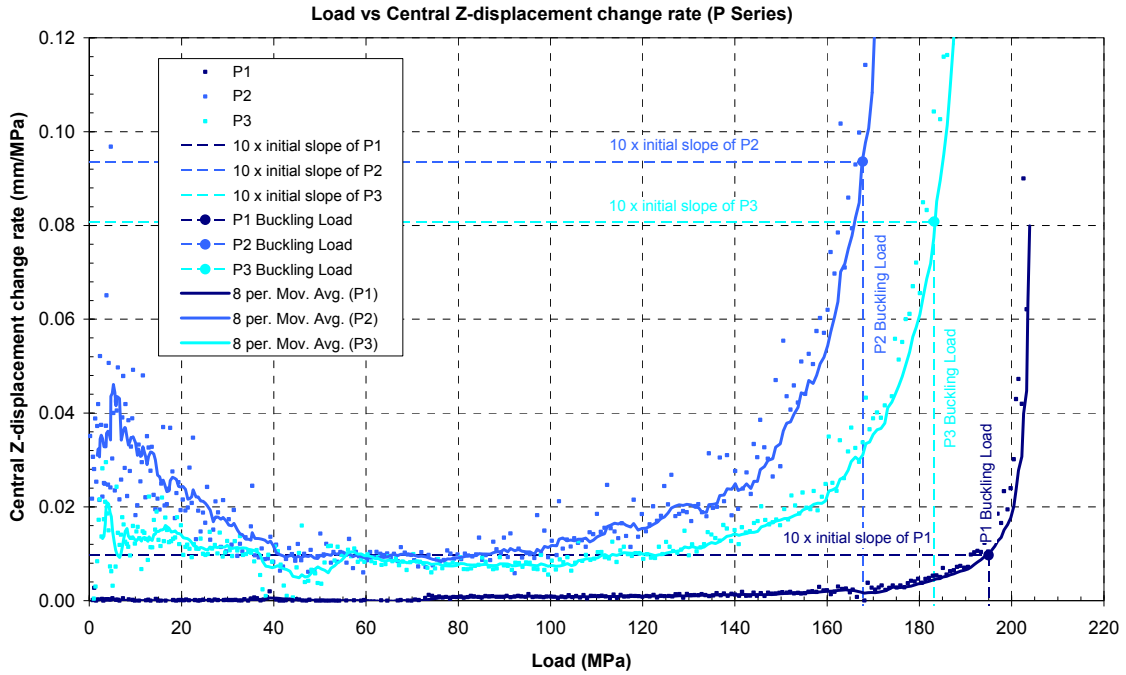


Σχήμα 5.23: Σύγκριση μεταξύ μετρήσεων ARAMIS και LVDT-A (IMP-2 Series).

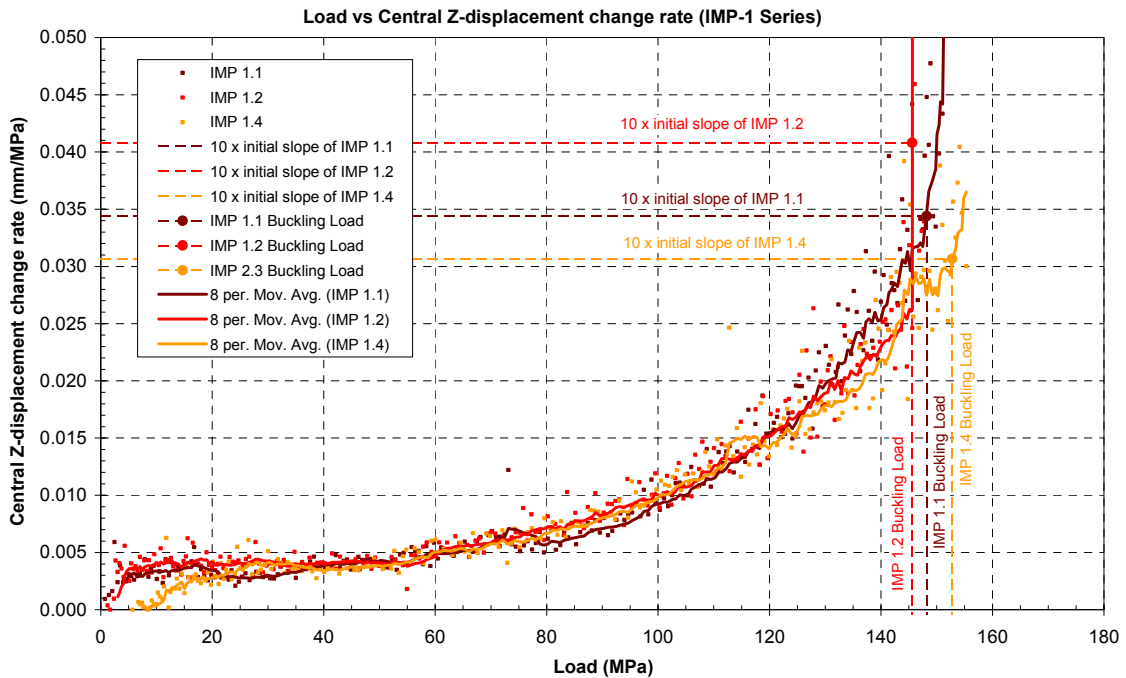
Από την παρατήρηση των παραπάνω διαγραμμάτων σύγκρισης μεταξύ των μετρήσεων των LVDTs και αυτών του οπτικού συστήματος ARAMIS φαίνεται μια γενικώς αρκετά καλή σύμπτωση των αποτελεσμάτων, η οποία υποδεικνύει την πολύ καλή ακρίβεια και των δυο μετρητικών συστημάτων. Έτσι, στο επόμενο εδάφιο γίνεται χρήση των μετρήσεων των LVDTs, οι οποίες είναι οι πληρέστερες, για την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κάθε δοκιμίου.

### 5.3.3 Πειραματική εκτίμηση κρίσιμων φορτίων λυγισμού μέσω των πλάγιων μετατοπίσεων ( $\sigma_{cr-A}$ )

Σε αυτό το εδάφιο γίνεται μια εκτίμηση για τα κρίσιμα φορτία λυγισμού των δοκιμίων, σύμφωνα με τη μέθοδο του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων που έχει ήδη παρουσιασθεί στο εδάφιο 2.4.2. Στα διαγράμματα των Σχημάτων 5.24 και 5.25 φαίνεται η εφαρμογή και τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου για τις επίπεδες πλάκες (P Series) και για αυτές με μικρή γεωμετρική ατέλεια αντίστοιχα (IMP-1 Series). Στις πλάκες με μεγάλη γεωμετρική ατέλεια (IMP-2 Series) η μέθοδος αυτή, όπως προφανώς και οποιαδήποτε άλλη μέθοδος δεν είναι εφαρμόσιμη, αφού όπως διαπιστώθηκε ήδη, οι πλάκες αυτές δεν παρουσιάζουν συμπεριφορά λυγισμού. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός αύξησης της πλάγιας μετατόπισης του κέντρου αυτών των πλακών είναι σχεδόν σταθερός, με αποτέλεσμα να μην αυξάνεται σημαντικά σε σχέση με την αρχική του τιμή.



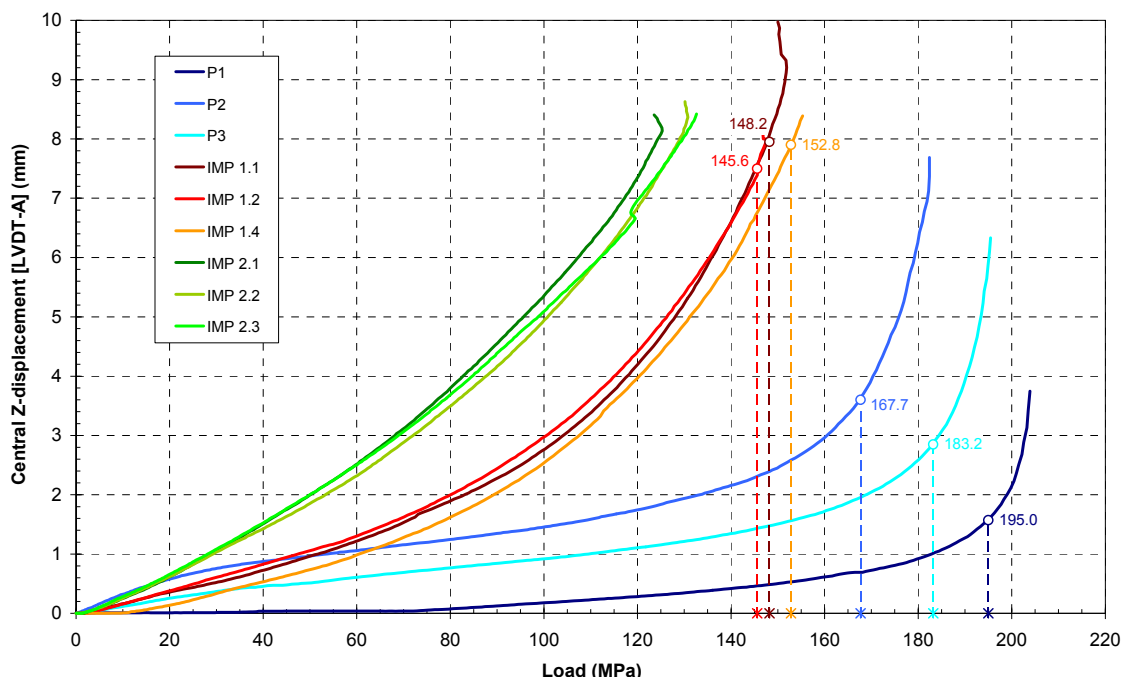
Σχήμα 5.24: Εφαρμογή μεθόδου εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού, μέσω του ρυθμού αύξησης των πλάγιων μετατοπίσεων, για τις επίπεδες πλάκες (P Series).



Σχήμα 5.25: Εφαρμογή μεθόδου εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού, μέσω του ρυθμού αύξησης των πλάγιων μετατοπίσεων, για τις πλάκες με μικρή γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series).

Τα αποτελέσματα εφαρμογής της παραπάνω μεθόδου εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού φαίνονται διαγραμματικά στο Σχήμα 5.26 που ακολουθεί,

ενώ στον Πίνακα 5.7 παρουσιάζονται οι τιμές τους ( $\sigma_{cr-A}$ ) πινακοποιημένες, σε σύγκριση και με τις τιμές των αντίστοιχων φορτίων αστοχίας ( $\sigma_u$ ). Στον ίδιο πίνακα, φαίνεται και ο συντελεστής διασποράς (coefficient of variation) για κάθε μέση τιμή, ο οποίος υποδεικνύει την απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των πλακών της πρώτης ομάδας (P Series).



Σχήμα 5.26: Διάγραμμα κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού των δοκιμίων.

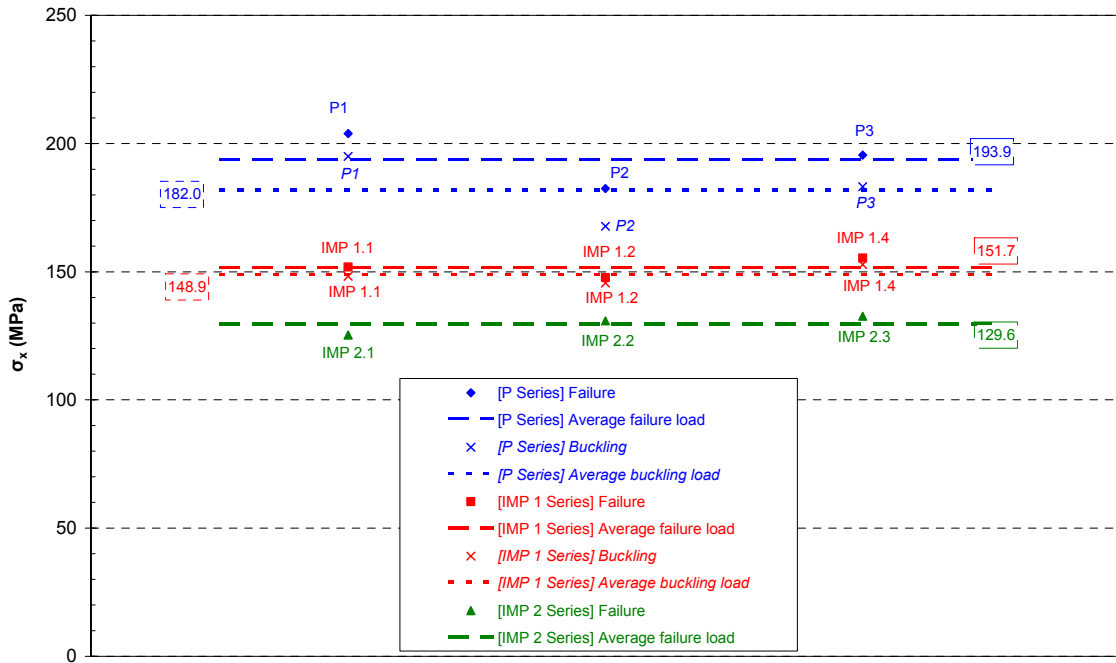
Πίνακας 5.7: Τιμές κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού & αστοχίας.

Δοκίμιο	Λυγισμός		Αστοχία	Σύγκριση
	$\sigma_{cr-A}$ (MPa)	$\sigma_{cr-A,av}$ (MPa)	$\sigma_{u,av}$ (MPa)	$\sigma_{cr-A}/\sigma_u$
P Series	P1	195.0	193.9	94%
	P2	167.7		
	P3	183.2		
IMP-1 Series	IMP 1.1	148.2	151.7	98%
	IMP 1.2	145.6		
	IMP 1.4	152.8		
IMP-2 Series	IMP 2.1	-	129.6	-
	IMP 2.2	-		
	IMP 2.3	-		

Οι αριθμοί εντός παρενθέσεων υποδεικνύουν το συντελεστή διασποράς (coefficient of variation).

Οι τιμές των κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού και αστοχίας του Πίνακα 5.7, παρουσιάζονται στη συνέχεια και σε διαγραμματική μορφή στο Σχήμα 5.27, απ’

όπου παρατηρείται και οπτικά η πολύ καλή επαναληψιμότητα μεταξύ των αποτελεσμάτων των δοκιμών της ίδιας ομάδας. Και σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται ότι οι μεγαλύτερες διακυμάνσεις παρουσιάζονται στα αποτελέσματα της ομάδας των γεωμετρικά τέλειων πλακών (P Series), όπου έχει ήδη επισημανθεί η απόκλιση στη συμπεριφορά τους.



Σχήμα 5.27: Τιμές κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού & αστοχίας των δοκιμών.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρείται ότι στις γεωμετρικά τέλειες πλάκες (P Series) ο λυγισμός επέρχεται σε φορτίο που αντιστοιχεί κατά μέσο όρο στο 94% του φορτίου αστοχίας τους. Για τις πλάκες με μικρή γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series) ο λυγισμός εμφανίζεται μόλις λίγο πριν την αστοχία τους (στο 98% του φορτίου αστοχίας), ενώ στις πλάκες με μεγάλη γεωμετρική ατέλεια, όπως ήδη διαπιστώθηκε, η αστοχία επέρχεται χωρίς την προηγούμενη εμφάνιση λυγισμικής συμπεριφοράς.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν έως τώρα, συγκρίνοντας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού πλακών με μικρή γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series), ως προς το αντίστοιχο των γεωμετρικά “τέλειων” πλακών (P Series), παρατηρείται ότι:

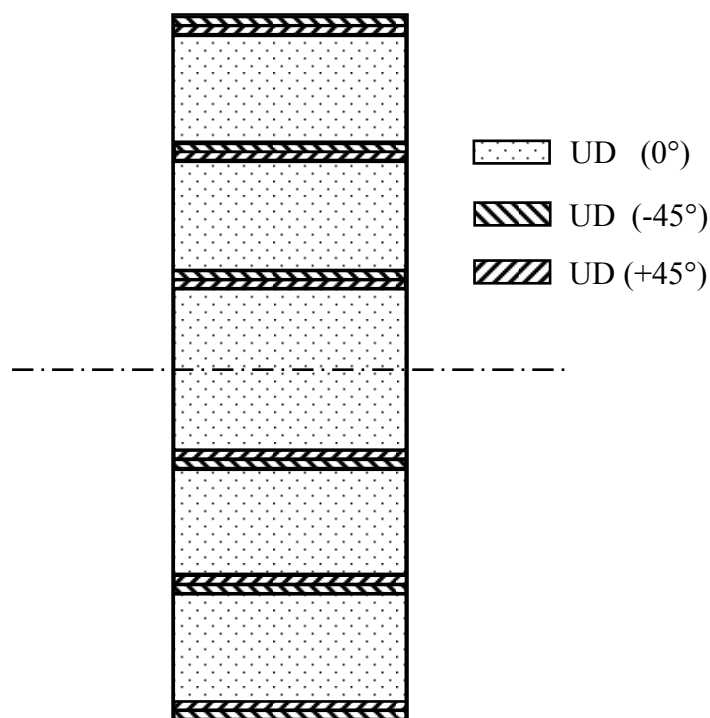
$$\frac{\sigma_{cr-A,av}^{IMP-1 \text{ Series}}}{\sigma_{cr-A,av}^{P \text{ Series}}} = \frac{148.9}{182.0} = 0.818 = 81.8\%$$

Επομένως, είναι εμφανές ότι η ύπαρξη γεωμετρικών ατελειών, έστω και σε “μικρή” κλίμακα, έχει σημαντική αρνητική επίδραση στα κρίσιμα φορτία (λυγισμού και αστοχίας) αυτών των πλακών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση των πλακών με σχετικά μικρή γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series), το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μειώνεται κατά 18% περίπου σε σχέση με αυτό των γεωμετρικά τέλειων πλακών (P Series).

### 5.3.4 Αναλυτικός υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού των επίπεδων πλακών

Στο σημείο αυτό, θεωρείται σκόπιμο να γίνει εφαρμογή μιας αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού αυτών των πλακών, προκειμένου να γίνει μια σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα, καθώς και με αντίστοιχα αποτελέσματα της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ). Λόγω μη ύπαρξης ενός κατάλληλου εργαλείου-μεθόδου που να λαμβάνει υπόψη την επίδραση ανάλογων γεωμετρικών ατελειών, θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος που αναφέρθηκε στο εδάφιο 2.3.6 [Eckold-1994], μόνο για επίπεδες, ορθοτροπικές πλάκες, και το αποτέλεσμά της θα συγκριθεί με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα των επίπεδων πλακών (P Series), καθώς και με αντίστοιχα αποτελέσματα της ΜΠΣ.

Όπως έχει προαναφερθεί, για απλοποίηση των υπολογισμών, η πλάκα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα πολύστρωτο 17 στρώσεων, θεωρώντας τις συνεχόμενες στρώσεις μονοαξονικών ινών ως μία στρώση αντίστοιχου πάχους και κάθε στρώση biaxial ως δύο μονοαξονικές στρώσεις με προσανατολισμό ινών  $+45^\circ$  και  $-45^\circ$  αντίστοιχα. Η μοντελοποίηση αυτή αναπαρίσταται στο Σχήμα 5.28 που ακολουθεί.



Σχήμα 5.28: Μοντελοποίηση πολύστρωτων πλακών - δοκιμίων.

Αρχικά, μέσω των πραγματικών (μετρούμενων) μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού (Πίνακας 5.5α), υπολογίζονται οι δυσκαμψίες μιας μονοαξονικής στρώσης του υλικού αυτού  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$  και  $Q_{66}$  (Σχέσεις 2.9α-δ) και στη συνέχεια οι ανηγμένες δυσκαμψίες  $\bar{Q}_{ij}$  της κάθε στρώσης, ανάλογα με τη γωνία προσανατολισμού αυτής (Σχέσεις 2.12). Έπειτα, μέσω της κλασικής θεωρίας πολύστρωτων (CLT), γίνεται ο



υπολογισμός των δυσκαμψιών  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  και  $D_{33}$  (Σχέσεις 2.20γ) και προκύπτουν οι εξής τιμές:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 9.20 \times 10^6 \text{ (N} \times \text{mm)} \\ D_{12} &= 1.22 \times 10^6 \text{ (N} \times \text{mm)} \\ D_{22} &= 3.21 \times 10^6 \text{ (N} \times \text{mm)} \\ D_{66} &= 1.32 \times 10^6 \text{ (N} \times \text{mm)} \end{aligned}$$

Έτσι, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη μέθοδο, γίνεται ο υπολογισμός των αδιάστατων παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ :

$$\alpha = \frac{D_{12} + 2 \cdot D_{66}}{\sqrt{D_{11} \cdot D_{22}}} = \dots = 0.709 \quad \beta = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} = \dots = 0.781$$

Πλέον, μπορεί να γίνει η εκτίμηση του συντελεστή λυγισμού  $k$  μέσω του αντίστοιχου διαγράμματος πλήρως πακτωμένων πλακών (Σχήμα 2.12β), από όπου προκύπτει:

$$k \cong 10.9$$

Τέλος, μέσω της σχέσης 2.22 γίνεται ο υπολογισμός της κρίσιμης τάσης λυγισμού ( $\sigma_{cr-E}^{P-Series}$ ):

$$\sigma_{cr-E}^{P-Series} = k \frac{\pi^2}{t \cdot b^2} \sqrt{D_{11} \cdot D_{22}} = \dots = 377.2 \text{ MPa}$$

Σχετικά παρόμοιο αποτέλεσμα (327.9 MPa) έχει ληφθεί μέσω της εφαρμογής της ΜΠΣ (ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού) στο εδάφιο 4.3.4, όπου μοντελοποιήθηκε ο λυγισμός πανομοιότυπης πλάκας με τις ίδιες παραμέτρους. Αντιθέτως, το αποτέλεσμα της αντίστοιχης πειραματικής διαδικασίας (182.0 MPa), που παρουσιάστηκε στο εδάφιο 5.3.3 αποκλίνει αρκετά από τα προηγούμενα, όπως φαίνεται στον συγκριτικό Πίνακα 5.8 που ακολουθεί.

**Πίνακας 5.8:** Σύγκριση αποτελεσμάτων των τριών μεθόδων εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού των επίπεδων (τέλειων) πλακών.

Μέθοδος	$\sigma_{cr}$ (MPa)	Διαφορά
Αναλυτική [Eckold-1994]	377.2	00.0 %
ΜΠΣ (ANSYS FEM)	327.9	- 13.1 %
Πειραματική	182.0	- 51.7 %

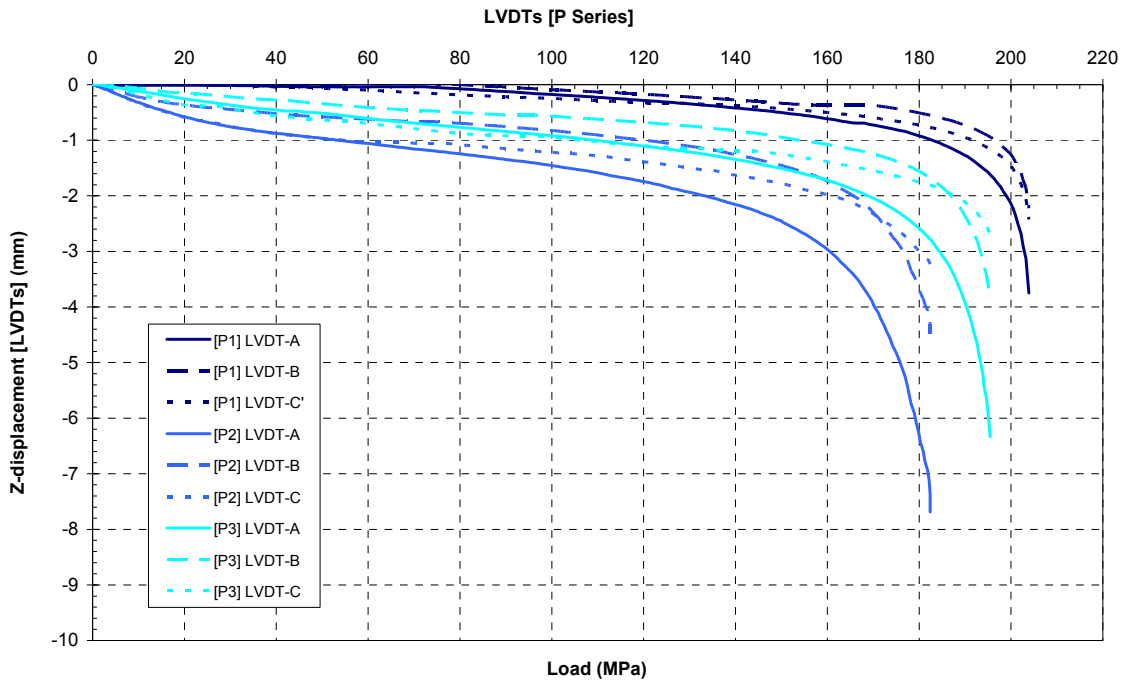
Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρείται ότι οι υπολογιστικές μέθοδοι (Αναλυτική και ΜΠΣ) οδηγούν σε αποτελέσματα που είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα όμως της πειραματικής διαδικασίας αποκλίνει σημαντικά από αυτά. Ο βασικότερος λόγος αυτής της απόκλισης εκτιμάται ότι είναι η ιδιομορφία (μη

γραμμικότητα) των συνοριακών συνθηκών της πειραματικής διαδικασίας, οι οποίες δεν ήταν δυνατόν να προσομοιωθούν επακριβώς μέσω της αναλυτικής μεθόδου και της ΜΠΣ. Συγκεκριμένα, μετά από επεξεργασία των μετρήσεων του οπτικού συστήματος ARAMIS, παρατηρήθηκε ότι κατά τη διάρκεια των πειραματικών δοκιμών εμφανίστηκε περιστροφή της άνω και κάτω οριζόντιας ακμής εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών, περί τον άξονα  $y$ , αλλά και μετατόπιση αυτών κατά τη διεύθυνση  $z$ . Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο 5.2.5, οι κατακόρυφες ακμές των δοκιμίων πακτώθηκαν μερικώς και όχι σε όλο το μήκος τους από τις κατακόρυφες πλευρικές μεταλλικές φλάντζες του πλαισίου δοκιμών (βλ. Σχήμα 5.15). Επομένως, οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στις πλάκες κατά τις δοκιμές απέχουν αρκετά από την κατάσταση της πλήρους πάκτωσης. Επίσης, η ποιότητα των υλικών και συγκεκριμένα της ρητίνης αποδείχθηκε υποδεέστερη της αναμενόμενης, όπως φαίνεται σε επόμενο εδάφιο (5.3.8), όπου παρατηρείται ότι η πειραματικά μετρούμενη διαμήκης ακαμψία ( $E_x$ ) των δοκιμίων βρέθηκε 8% μικρότερη από τη θεωρητικά υπολογισθείσα. Τέλος, είναι βέβαιο ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των δοκιμίων επηρεάστηκε σε κάποιο βαθμό και από την ανομοιομορφία του πάχους των πλακών, η οποία διαπιστώθηκε κατά τις αρχικές μετρήσεις της γεωμετρίας, ως αποτέλεσμα της μεθόδου κατασκευής τους (επίστρωση με το χέρι – hand lay-up).

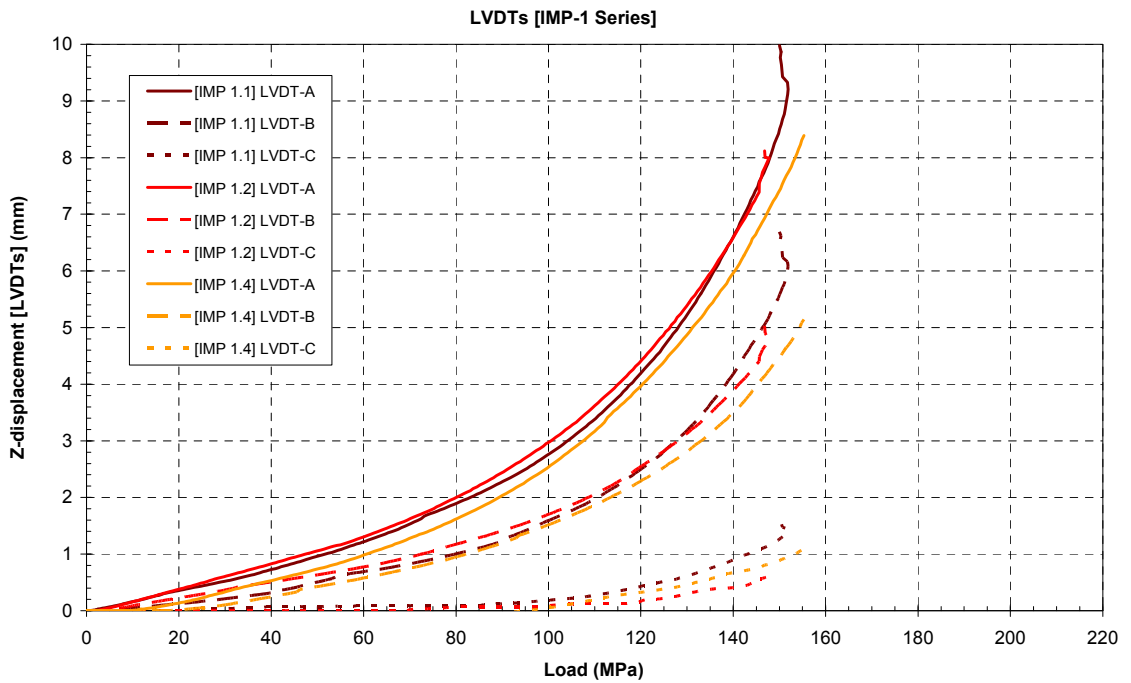
Οι παραπάνω παράγοντες βέβαια δεν επηρεάζουν τη διαφορά μεταξύ της αναλυτικής μεθόδου και της ΜΠΣ, αφού και οι δύο βασίστηκαν στις ίδιες μηχανικές ιδιότητες όπως αυτές μετρήθηκαν, καθώς και στις ίδιες συνοριακές συνθήκες και ίσως γι' αυτό τα αποτελέσματα αυτών δε διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους (13%).

### 5.3.5 Πλάγιες μετατοπίσεις της επιφάνειας των δοκιμίων (LVDT-A, B, C)

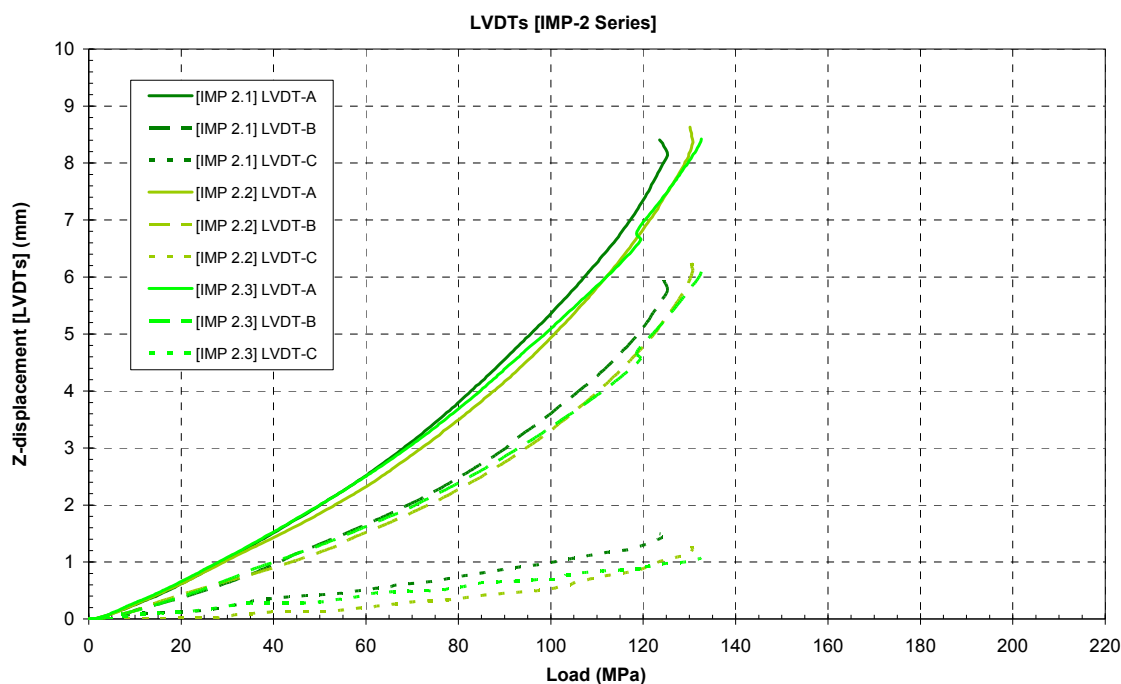
Στη συνέχεια παρατίθενται τα Σχήματα 5.29, 5.30 και 5.31, στα διαγράμματα των οποίων παρουσιάζονται ανά ομάδα πλακών (P, IMP-1 και IMP-2 Series αντίστοιχα), οι μετρήσεις όλων των LVDTs (A, B και C) που τοποθετήθηκαν στην επιφάνεια κάθε δοκιμίου (βλ. Σχήμα 5.16). Οι μετρήσεις αυτές εκφράζουν τις πλάγιες μετατοπίσεις σε κάθε προκαθορισμένο σημείο, συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου.



Σχήμα 5.29: Πλάγιες μετατοπίσεις των LVDTs (P Series).



Σχήμα 5.30: Πλάγιες μετατοπίσεις των LVDTs (IMP-1 Series).



Σχήμα 5.31: Πλάγιες μετατοπίσεις των LVDTs (IMP-2 Series).

Από την παρατήρηση του Σχήματος 5.29, που περιλαμβάνει μετρήσεις της ομάδας επίπεδων πλακών (P Series), είναι εμφανής για ακόμα μία φορά η απότομη ανάπτυξη των πλάγιων μετατοπίσεων σε όλα τα σημεία τοποθέτησης των LVDTs, που κάνουν σαφές το φαινόμενο του λυγισμού σε αυτές τις πλάκες. Στο Σχήμα 5.30, που περιλαμβάνει μετρήσεις της 2<sup>ης</sup> ομάδας πλακών (IMP-1 Series), η ανάπτυξη αυτών των πλάγιων μετατοπίσεων εμφανίζεται αρκετά πιο ομαλή, δίνοντας όμως επίσης μια ένδειξη συμπεριφοράς λυγισμού. Τέλος, στο Σχήμα 5.31, που περιλαμβάνει μετρήσεις της 3<sup>ης</sup> ομάδας πλακών (IMP-2 Series), η ανάπτυξη πλάγιων μετατοπίσεων και στα τρία σημεία τοποθέτησης των LVDTs είναι υπερβολικά ομαλή, πλησιάζοντας τη γραμμική συμπεριφορά, οπότε δεν υπάρχει καμία ένδειξη εμφάνισης του φαινομένου του λυγισμού, όπως έχει ήδη επισημανθεί για την περίπτωση αυτών των πλακών.

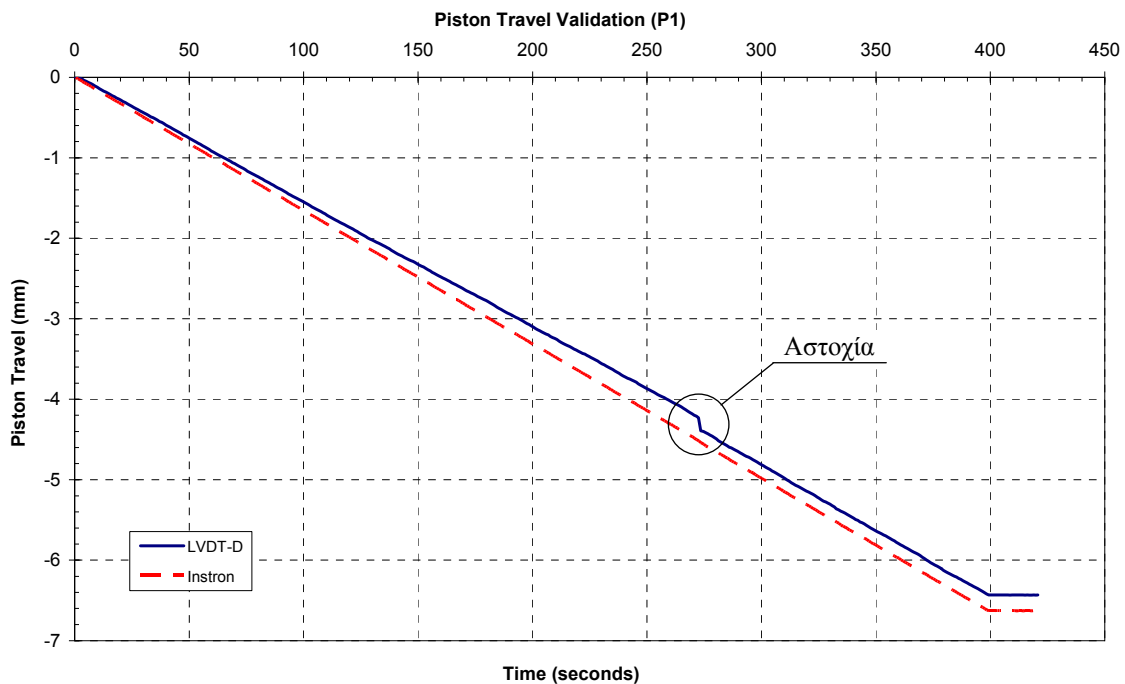
Όσον αφορά στην ομοιομορφία μεταξύ των αποτελεσμάτων των δοκιμών της ίδιας ομάδας πλακών, για ακόμα μια φορά διαπιστώνεται μια σχετική απόκλιση των μετρήσεων μόνο μεταξύ των δοκιμών της 1<sup>ης</sup> ομάδας (P-Series). Παρ' όλα αυτά, η σχετική θέση μεταξύ των καμπυλών LVDT-A, LVDT-B και LVDT-C κάθε πλάκας είναι η ίδια σε όλα τα δοκίμια της ομάδας αυτής, λαμβάνοντας υπόψη ότι στο δοκίμιο P1, η θέση του LVDT-C' είναι ελαφρώς διαφορετική, όπως έχει επισημανθεί (βλ. Σχήμα 5.16). Στα διαγράμματα κάθε μιας από τις άλλες δύο ομάδες πλακών (IMP-1 και IMP-2 Series), παρατηρείται αρκετά καλή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων, τα οποία συμπίπτουν πολύ ικανοποιητικά μεταξύ των δοκιμών ίδιας ομάδας.

Παρατηρείται επίσης από τα διαγράμματα της 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> ομάδας πλακών (IMP-1 και IMP-2 Series αντίστοιχα), ότι οι πλάγιες μετατοπίσεις στο σημείο B είναι πάντα αρκετά μεγαλύτερες από ότι στο σημείο C (LVDT-B > LVDT-C). Αυτό

θεωρείται λογικό και οφείλεται σε διάφορους παράγοντες όπως η διεύθυνση της επιβαλλόμενης φόρτισης, η ορθοτροπικότητα του πολύστρωτου, το οποίο εμφανίζει διαφορετικές καμπτικές δυσκαμψίες στην κάθε μία από τις κύριες διευθύνσεις του υλικού, αλλά και η απόσταση του κάθε σημείου από το κέντρο της πλάκας (βλ. Σχήμα 5.16), καθώς και οι ιδιόμορφες συνοριακές συνθήκες των δοκιμών. Παρ' όλα αυτά, στο διάγραμμα της 1<sup>ης</sup> ομάδας πλακών (P-Series) παρατηρείται ότι αυτό δε συμβαίνει σε όλο το εύρος του επιβαλλόμενου φορτίου, αλλά μόνο στη μεταλυγισμική περιοχή όπου η επίδραση της ακαμψίας του πλαισίου δοκιμών γίνεται περισσότερο σημαντική.

### 5.3.6 Διαμήκης θλιπτική μετατόπιση (LVDT-D)

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κατά τη διάρκεια των δοκιμών έγινε μέτρηση της μετατόπισης του εμβόλου της υδραυλικής μηχανής μέσω του LVDT-D, αλλά και μέσω του συστήματος πρόσκτησης δεδομένων της ίδιας της μηχανής, για επιβεβαίωση των μετρήσεων. Στο ενδεικτικό διάγραμμα του Σχήματος 5.32, φαίνεται η σύγκριση αυτών των μετρήσεων για το δοκίμιο P1, όπου παρατηρείται σύμπτωση των αποτελεσμάτων με μια ελαφρά απόκλιση μεταξύ τους.



Σχήμα 5.32: Μέτρηση της διαμήκουσ θλιπτικής μετατόπισης στο δοκίμιο P1.

Παρόμοια απόκλιση (ίδιας τάξης μεγέθους) παρατηρήθηκε σε όλες τις δοκιμές, με μέση τιμή απόκλισης 7% (μετρούμενη λίγο πριν τη χρονική στιγμή αστοχίας). Θεωρείται ότι η απόκλιση αυτή οφείλεται σε παραμόρφωση της ιδιοσυσκευής στερέωσης των δοκιμών στην υδραυλική μηχανή και για το λόγο αυτό, ως πιο

αντικειμενική θεωρείται η μέτρηση του LVDT-D. Ακόμη, μέσω της μέτρησης του LVDT-D, γίνεται σαφές το χρονικό σημείο αστοχίας του δοκιμίου και η αντίστοιχη μετατόπιση του εμβόλου, αφού στο σημείο αυτό η καμπύλη κάνει ένα χαρακτηριστικό “σκαλοπάτι”, λόγω της απότομης μείωσης της δυσκαμψίας του δοκιμίου (βλ. Σχήμα 5.32).

### 5.3.7 Διαμήκεις παραμορφώσεις των δοκιμίων

Στα διαγράμματα της ομάδας των σχημάτων που ακολουθούν (Σχήματα 5.33 έως 5.35 και 5.37 έως 5.42), παρουσιάζονται συναρτήσεις του επιβαλλόμενου φορτίου οι μετρήσεις των διαμήκων παραμορφώσεων της “πίσω” όψης των δοκιμίων που έγιναν με χρήση επιμηκυνσιόμετρων (strain gages) σε διάφορα σημεία, σύμφωνα με το Σχήμα 5.16 που έχει ήδη παρουσιασθεί. Στα πειραματικά αυτά αποτελέσματα, εκτός από τις μετρήσεις των επιμηκυνσιόμετρων, περιλαμβάνεται και υπολογισμός της ομοιόμορφης παραμόρφωσης (uniform/membrane strain)  $\varepsilon_{uni}$  της κάθε πλάκας, καθώς και της καμπτικής παραμόρφωσης (bending strain) στο κέντρο της  $\varepsilon_{b-1}$ . Το διάγραμμα της ομοιόμορφης παραμόρφωσης θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την πειραματική εκτίμηση της διαμήκου ακαμψίας του κάθε δοκιμίου  $E_x$ , ενώ μέσω της καμπτικής παραμόρφωσης θα γίνει στη συνέχεια άλλη μια εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, σύμφωνα με την εναλλακτική μέθοδο Southwell- $\varepsilon_b$  (βλ. εδάφιο 2.4.1).

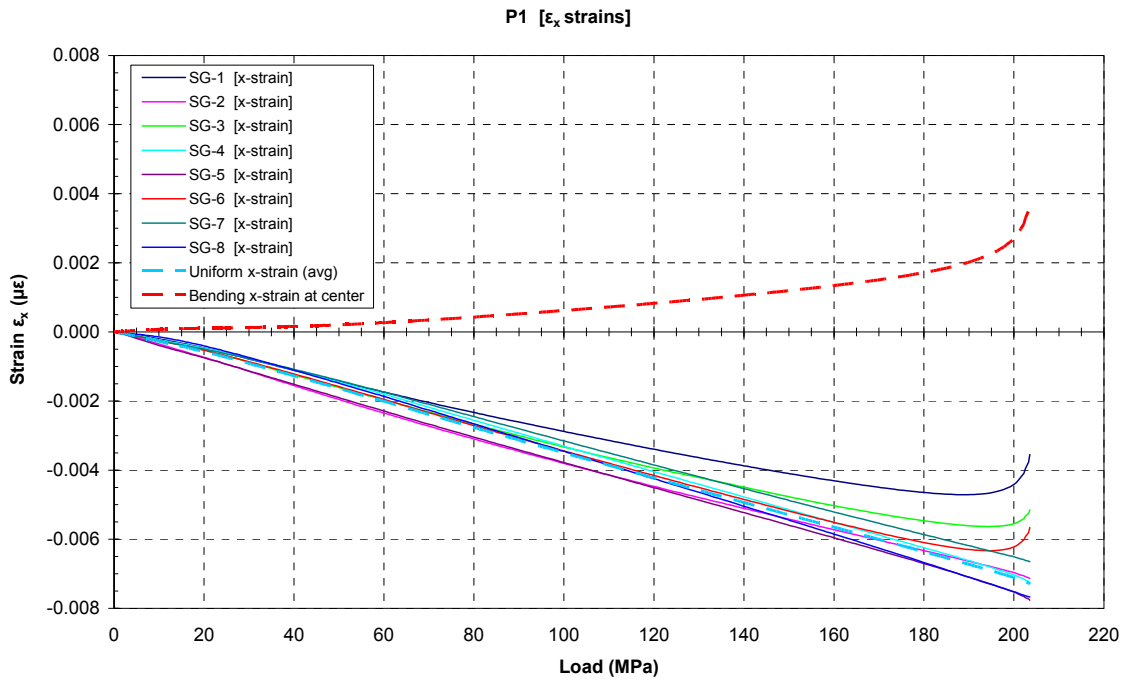
Ως ομοιόμορφη παραμόρφωση ( $\varepsilon_{uni}$ ) υπολογίστηκε η μέση τιμή των παραμορφώσεων των επιμηκυνσιόμετρων SG-2, SG-4, SG-5, SG-7 και SG-8, τα οποία βρίσκονται σχετικά μακριά από το κέντρο της πλάκας, όπου αναπτύσσεται η καμπτική παραμόρφωση. Θεωρείται ότι σε αυτά τα σημεία υπάρχει μόνο ομοιόμορφη παραμόρφωση και η καμπτική παραμόρφωση που οφείλεται στο φαινόμενο του λυγισμού είναι αμελητέα. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις μετρήσεις της παραμόρφωσης στα σημεία τοποθέτησης των εν λόγω επιμηκυνσιόμετρων, όπου εμφανίζεται κατά κανόνα γραμμική συμπεριφορά σε σχέση με το επιβαλλόμενο φορτίο. Έτσι, η εκτίμηση της μέσης ομοιόμορφης παραμόρφωσης έχει ως εξής:

$$\varepsilon_{uni} = average(\varepsilon_{SG-2}, \varepsilon_{SG-4}, \varepsilon_{SG-5}, \varepsilon_{SG-7}, \varepsilon_{SG-8})$$

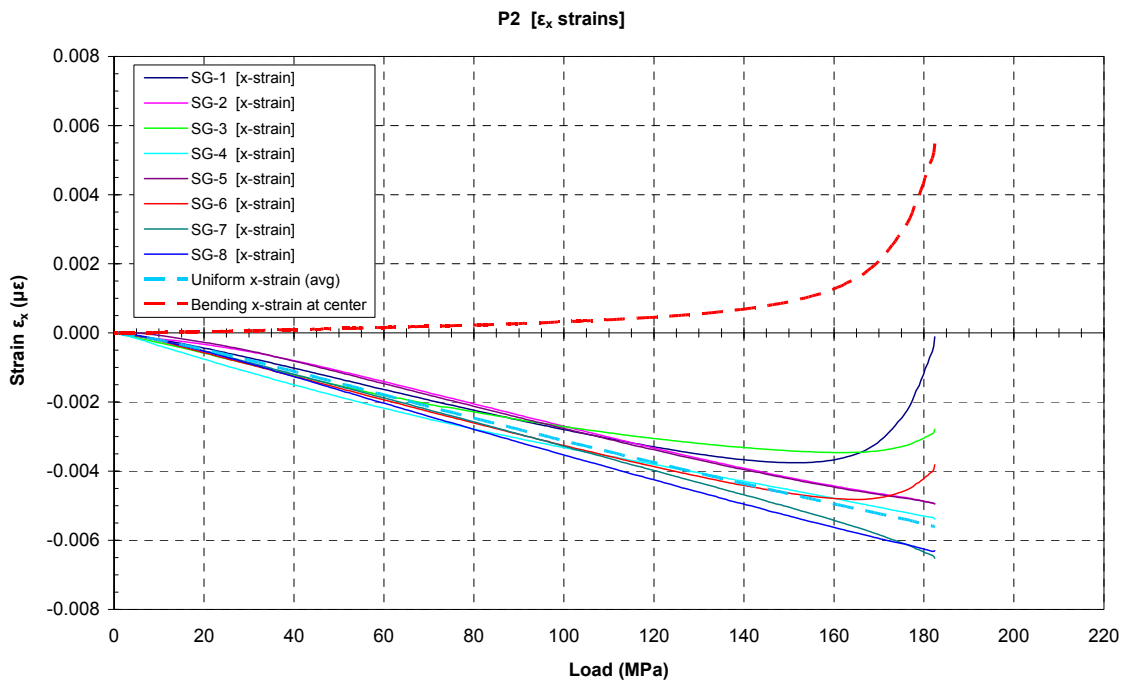
Έχοντας εκτιμήσει την ομοιόμορφη παραμόρφωση, είναι δυνατός πλέον ο υπολογισμός της καμπτικής παραμόρφωσης στο κέντρο της πλάκας ( $\varepsilon_{b-1}$ ), αφού η μέτρηση του επιμηκυνσιόμετρου που είναι τοποθετημένο σε αυτό το σημείο (SG-1) δίνει τη συνολική παραμόρφωση, η οποία είναι άθροισμα της ομοιόμορφης και της καμπτικής, οπότε:

$$\varepsilon_{SG-1} = \varepsilon_{uni} + \varepsilon_{b-1} \Rightarrow \varepsilon_{b-1} = \varepsilon_{SG-1} - \varepsilon_{uni}$$

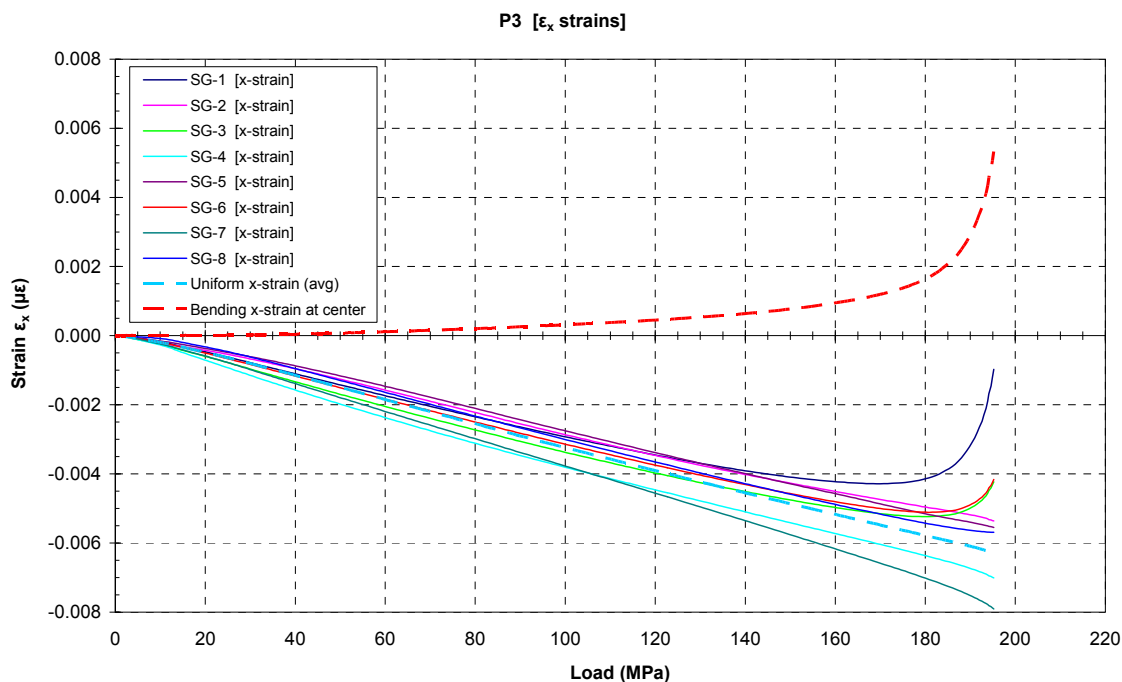
Τα διαγράμματα των μετρήσεων των επιμηκυνσιόμετρων συναρτήσεις του επιβαλλόμενου φορτίου για τα δοκίμια τέλει γεωμετρικής μορφής (P Series) παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.33, 5.34 και 5.35 που ακολουθούν.



Σχήμα 5.33: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου P1.



Σχήμα 5.34: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου P2.



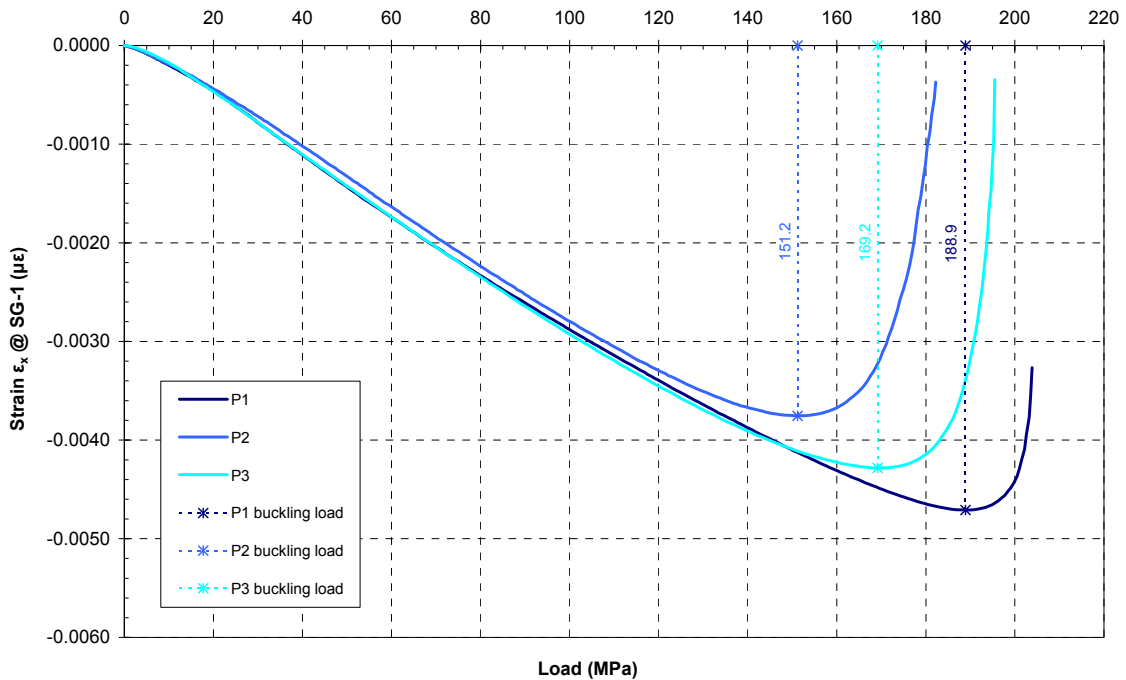
Σχήμα 5.35: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου P3.

Στα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων παρατηρούνται γενικά δύο μορφές καμπυλών. Η πρώτη μορφή καμπυλών, αντιστοιχεί στα σημεία SG-1, SG-3 και SG-6, οι θέσεις των οποίων βρίσκονται στη μέση τομή της πλάκας (βλ. Σχήμα 5.16). Στα σημεία αυτά, κατά την εμφάνιση του λυγισμού αναπτύσσονται έντονες καμπτικές παραμορφώσεις, οι οποίες στη συνέχεια αυξάνουν με μεγάλο ρυθμό, τείνοντας να αναιρέσουν την ομοιόμορφη θλιπτική παραμόρφωση που έχει ήδη αναπτυχθεί μέχρι εκείνο το σημείο. Σημειώνεται ότι οι καμπτικές παραμορφώσεις (λόγω λυγισμού) είναι εφελκυστικές, αφού, όπως έχει προαναφερθεί, ο λυγισμός στις επίπεδες πλάκες συμβαίνει προς την “πίσω” πλευρά αυτών, εκεί δηλαδή όπου έχουν επικολληθεί τα επιμηκυνσιόμετρα SG-1 έως SG-7. Η δεύτερη μορφή καμπυλών περιλαμβάνει όλα τα υπόλοιπα σημεία (SG-2, SG-4, SG-5, SG-7 και SG-8), τα οποία βρίσκονται σχετικά μακριά από το κέντρο της πλάκας (και μάλιστα απέχουν όλα ίση απόσταση από αυτό), όπου αναπτύσσεται μόνο ομοιόμορφη παραμόρφωση, η οποία έχει γραμμική μορφή σε σχέση με το επιβαλλόμενο φορτίο, αφού δεν αναπτύσσεται σημαντική καμπτική παραμόρφωση στις περιοχές αυτών των σημείων.

Από τα παραπάνω, παρατηρείται ότι μέσω των καμπύλων διαμήκους παραμόρφωσης για τα σημεία της μέσης τομής κάθε πλάκας, και ειδικά μέσω της καμπύλης SG-1 που αντιστοιχεί στο κέντρο τους, μπορεί να γίνει ακόμα μια εκτίμηση για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Δεδομένου ότι η έντονη καμπτική παραμόρφωση που προκαλεί ο λυγισμός αλλάζει απότομα τη μορφή της καμπύλης αυτής από φθίνουσα σε αύξουσα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ολικό ελάχιστο της καμπύλης αυτής, ως κριτήριο για τον εντοπισμό του κρίσιμου φορτίου (τάσης) λυγισμού ( $\sigma_{cr-1}$ ). Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής φαίνεται στο Σχήμα 5.36, ενώ στον Πίνακα 5.9 γίνεται η σύγκριση



των αποτελεσμάτων της με αυτά της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε αρχικά, βάσει του ρυθμού αύξησης των πλάγιων μετατοπίσεων ( $\sigma_{cr-A}$ ). Από τη σύγκριση αυτή φαίνεται ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου των “διαμήκων παραμορφώσεων” είναι κοντά σε αυτά της μεθόδου των “πλάγιων μετατοπίσεων”, αλλά λίγο πιο συντηρητικά (περίπου κατά 7%).



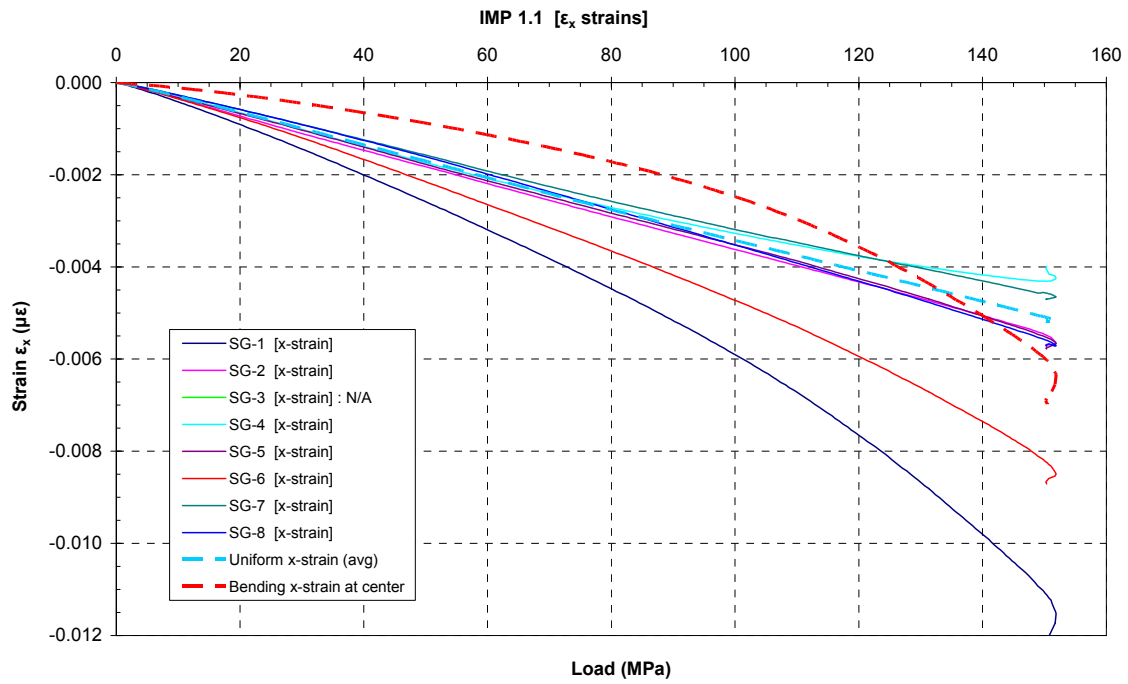
**Σχήμα 5.36:** Εφαρμογή μεθόδου πειραματικής εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού, μέσω του SG-1 για τις επίπεδες πλάκες (P Series).

**Πίνακας 5.9:** Σύγκριση μεθόδων πειραματικής εκτίμησης κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού για τις επίπεδες πλάκες (P Series).

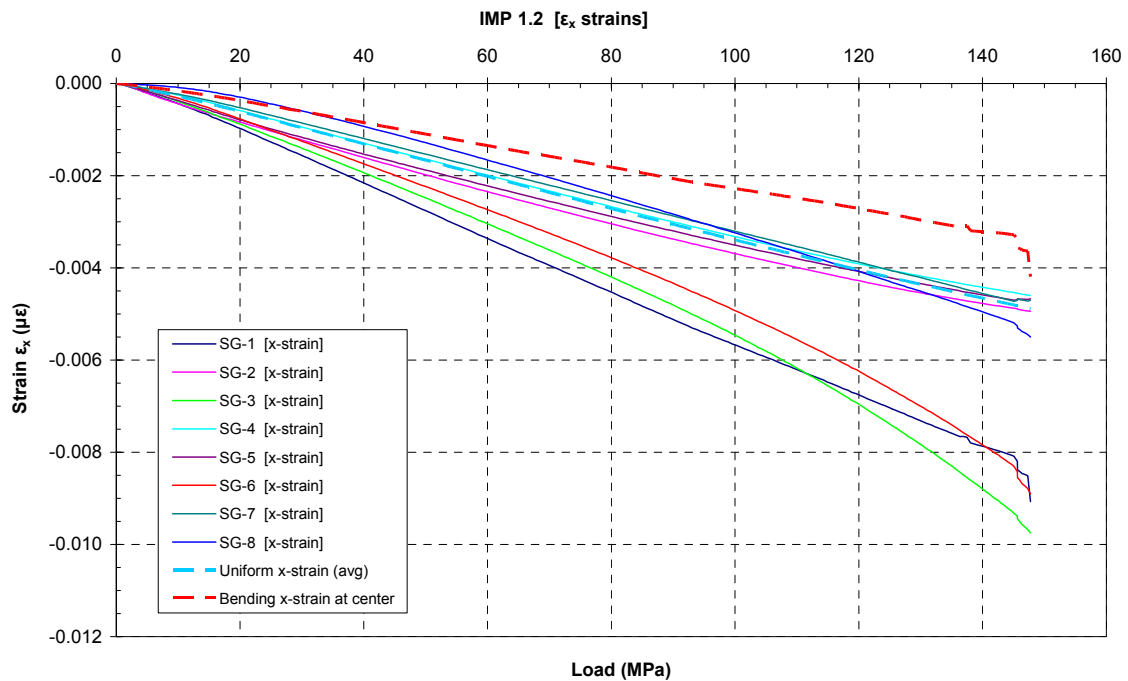
Δοκίμιο	Κρίσιμη τάση λυγισμού		Σύγκριση
	$\sigma_{cr-1}$ (MPa)	$\sigma_{cr-A}$ (MPa)	$\sigma_{cr-1} / \sigma_{cr-A}$ (%)
P1	188.9	195.0	96.9 %
P2	151.2	167.7	90.2 %
P3	169.2	183.2	92.4 %
Average	169.8 (11.0%)	182.0 (7.5%)	93.3 %

Οι αριθμοί εντός παρενθέσεων υποδεικνύουν το συντελεστή διασποράς (coefficient of variation).

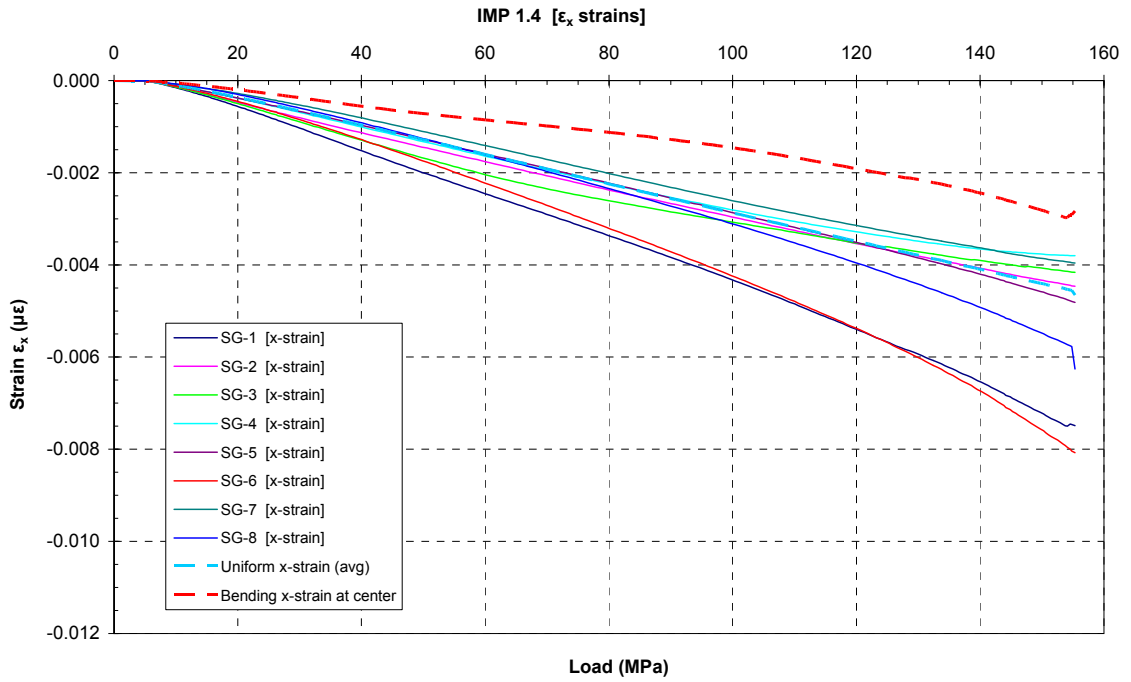
Στα διαγράμματα των σχημάτων που ακολουθούν (Σχήμα 5.37 έως 5.39 και 5.40 έως 5.42), παρουσιάζονται οι μετρήσεις των επιμηκυνσιόμετρων (strain gages) για τις πλάκες με μικρή και μεγάλη αντίστοιχα γεωμετρική ατέλεια.



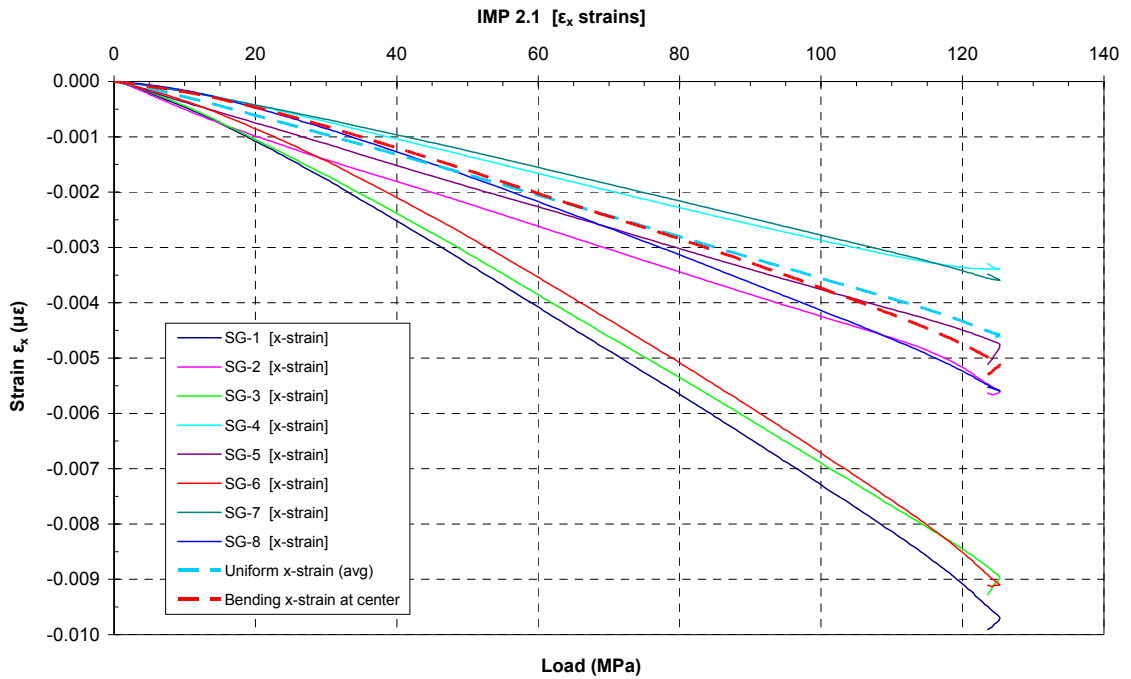
Σχήμα 5.37: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου IMP 1.1.



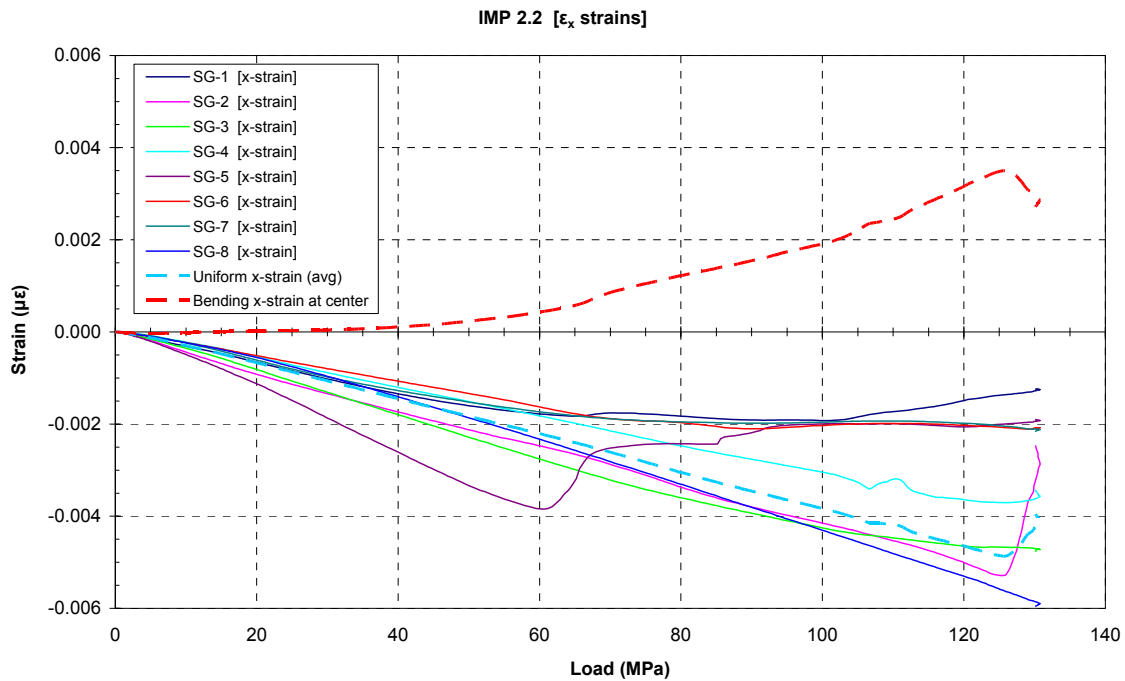
Σχήμα 5.38: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου IMP 1.2.



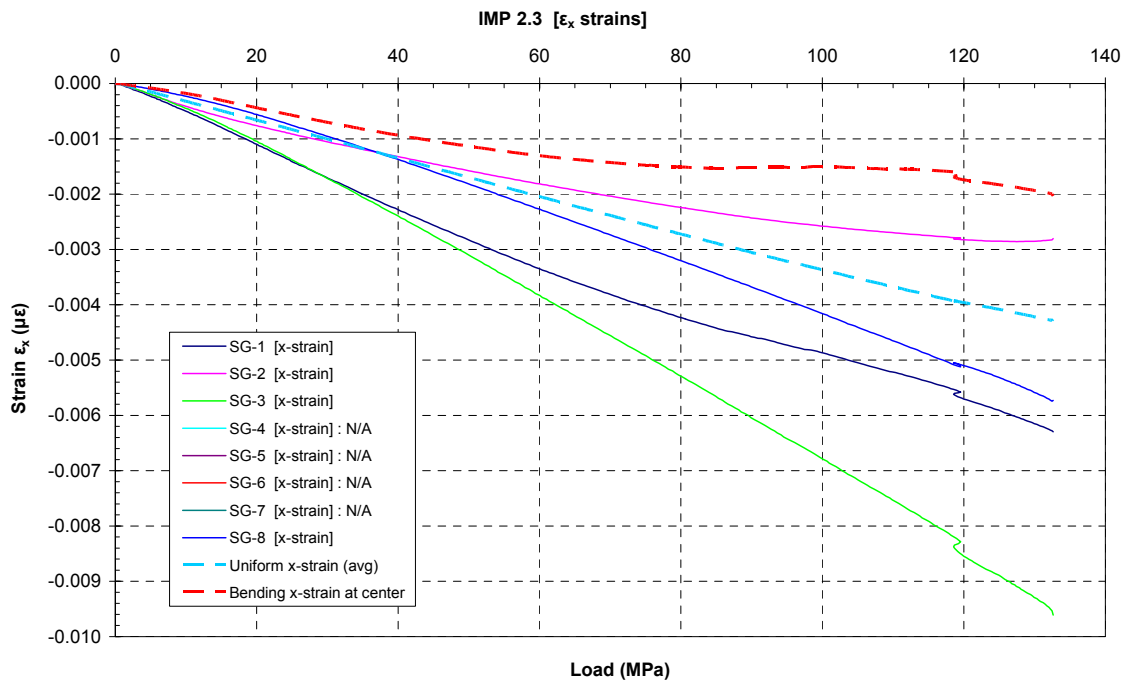
Σχήμα 5.39: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου IMP 1.4.



Σχήμα 5.40: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου IMP 2.1.



Σχήμα 5.41: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου IMP 2.2.

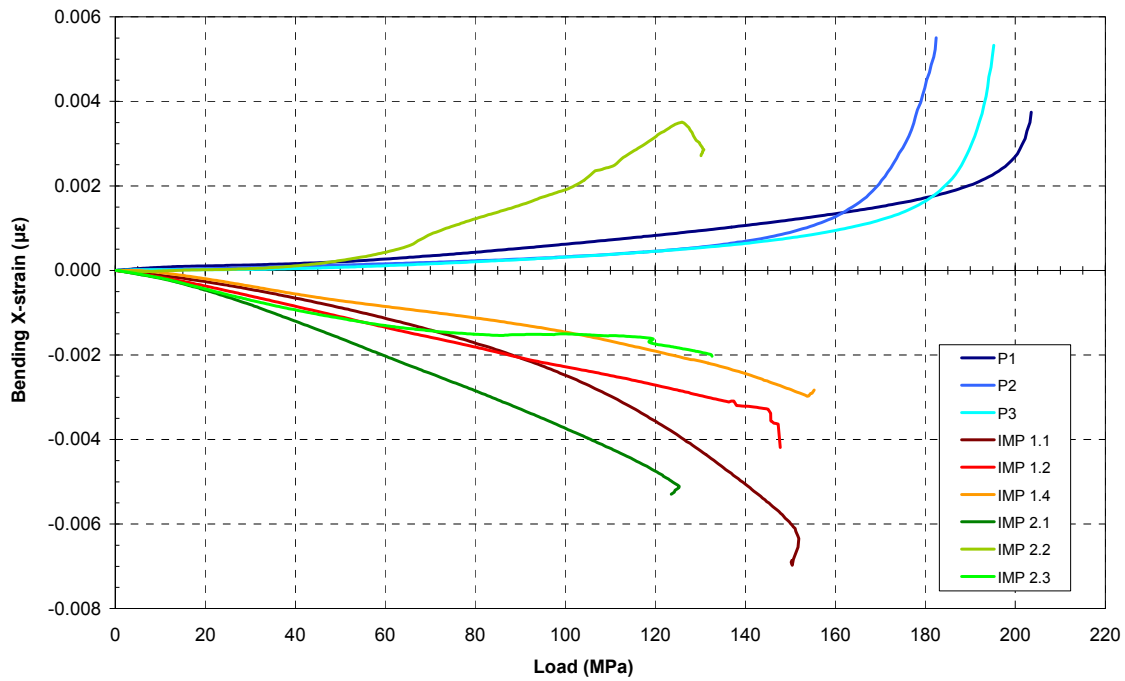


Σχήμα 5.42: Πειραματικές μετρήσεις παραμορφώσεων (strain gages) του δοκιμίου IMP 2.3.

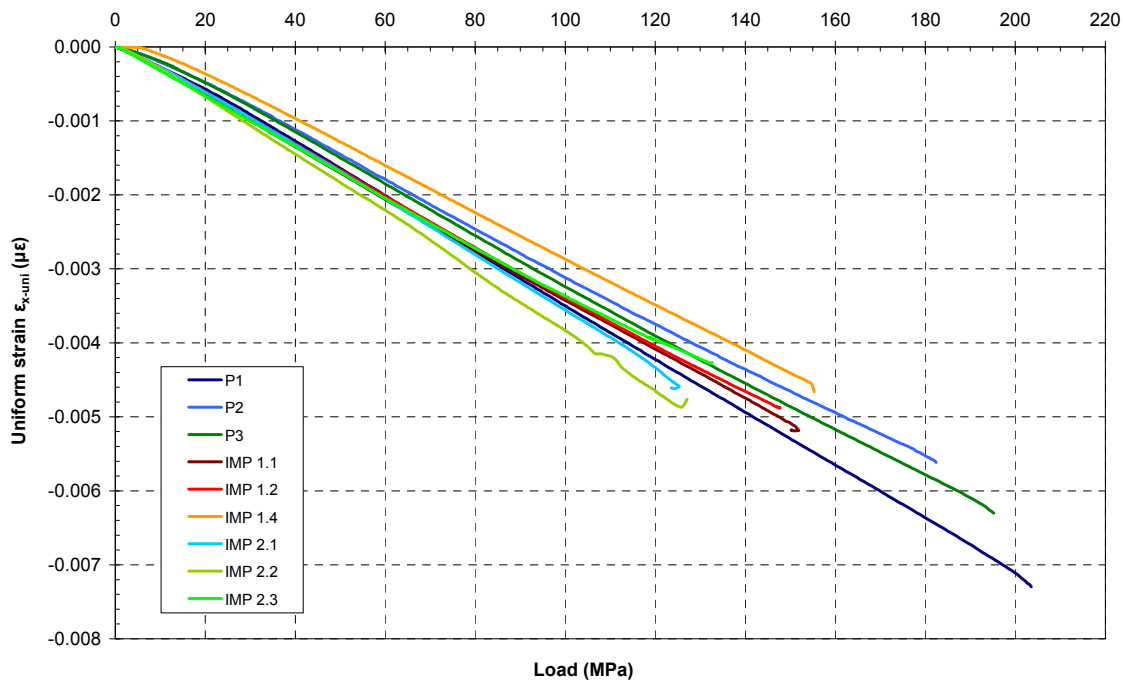
Στα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων για τις πλάκες με γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 και IMP-2 Series), παρατηρούνται ξανά οι δύο μορφές καμπυλών που παρατηρήθηκαν και στα διαγράμματα των γεωμετρικά τέλειων πλακών, με τη διαφορά ότι οι καμπτικές παραμορφώσεις εδώ είναι θλιπτικές και όχι εφελκυστικές (εκτός της πλάκας IMP 2.2), σε αντίθεση με τις επίπεδες πλάκες. Το γεγονός αυτό φαίνεται και στο διάγραμμα του Σχήματος 5.43, όπου παρουσιάζονται συγκριτικά οι καμπτικές παραμορφώσεις συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου για όλες τις πλάκες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι γεωμετρικά τέλειες πλάκες μετατοπίστηκαν προς της “πίσω όψη” τους (πλευρά τοποθέτησης των επιμηκυσσιόμετρων), ενώ όλες οι υπόλοιπες (εκτός της IMP 2.2) προς την “εμπρόσθια όψη”, όπως ήδη έχει επισημανθεί. Η εξαίρεση της πλάκας IMP 2.2 οφείλεται πιθανότατα σε λανθασμένες μετρήσεις των επιμηκυσσιόμετρων, όπως φαίνεται και από την ανώμαλη μορφή των καμπυλών του Σχήματος 5.41.

Χαρακτηριστικά διαγράμματα μετρήσεων των επιμηκυσσιόμετρων για τις ομάδες δοκιμίων IMP-1 και IMP-2 Series, είναι αυτά των Σχημάτων 5.38 (IMP 1.2) και 5.40 (IMP 2.1) αντίστοιχα για την κάθε ομάδα. Στα διαγράμματα αυτά, όπως και στα διαγράμματα των υπολοίπων δοκιμίων των ομάδων αυτών, παρατηρείται ότι γενικά οι καμπτικές παραμορφώσεις στις πλάκες με γεωμετρικές ατέλειες αναπτύσσονται αρκετά ομαλά, σχεδόν γραμμικά ως προς το επιβαλλόμενο φορτίο, σε αντίθεση με τις επίπεδες πλάκες, κάτι που επίσης είναι θεωρητικώς αναμενόμενο. Ακριβώς γι’ αυτό το λόγο, η μορφή των καμπυλών παραμόρφωσης του SG-1 σε αυτές τις πλάκες δεν επηρεάζεται έντονα από την ομαλή (και ομόσημη) καμπτική παραμόρφωση, και έτσι είναι αδύνατη στις πλάκες αυτές η εφαρμογή της μεθόδου εκτίμησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που βασίζεται στη διαμήκη παραμόρφωση του κέντρου της πλάκας, μέσω του SG-1. Το παραπάνω συμπέρασμα φαίνεται και στο Σχήμα 5.43 όπου παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα των καμπτικών παραμορφώσεων στο κέντρο των 9 δοκιμίων.

Στη συνέχεια, ακολουθεί το συγκριτικό διάγραμμα του Σχήματος 5.44 με την ανάπτυξη της ομοιόμορφης παραμόρφωσης των 9 δοκιμίων συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου. Η περίπτωση σταθερή τιμή της κλίσης όλων των καμπύλων ομοιόμορφης παραμόρφωσης υποδηλώνει ότι όλες οι πλάκες είχαν περίπου την ίδια αξονική ακαμψία, η εκτίμηση της οποίας γίνεται στο επόμενο εδάφιο.



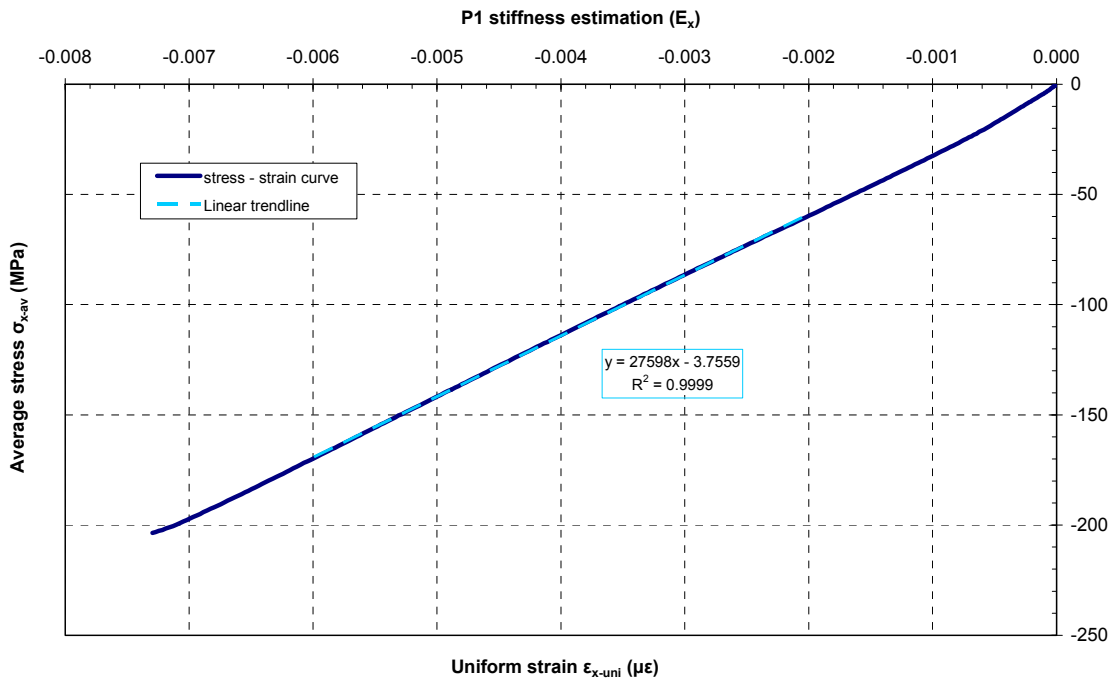
Σχήμα 5.43: Καμπτική παραμόρφωση στο κέντρο κάθε δοκιμίου.



Σχήμα 5.44: Μέση ομοιόμορφη θλιπτική παραμόρφωση των δοκιμίων ( $\epsilon_{x-uni}$ ).

### 5.3.8 Πειραματική και θεωρητική εκτίμηση της διαμήκουσ ακαμψίας των δοκιμίων ( $E_x$ )

Όπως προαναφέρθηκε, μέσω των καμπυλών μέσης επιβαλλόμενης τάσης ( $\sigma_{x-av}$ ) – διαμήκουσ ομοιόμορφης παραμόρφωσης ( $\epsilon_{x-uni}$ ) του Σχήματος 5.44, μπορεί να γίνει η πειραματική εκτίμηση της διαμήκουσ ακαμψίας ( $E_{x-exp}$ ) του κάθε δοκιμίου. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.45 που ακολουθεί, φαίνεται η πολύ καλή προσέγγιση του σχεδόν γραμμικού τμήματος της καμπύλης μέσης επιβαλλόμενης τάσης – διαμήκουσ ομοιόμορφης παραμόρφωσης για το δοκίμιο P1, από μία ευθεία, η κλίση της οποίας αντιστοιχεί στο μέτρο ελαστικότητας  $E_x$  του δοκιμίου αυτού (27.6 GPa). Με τον ίδιο τρόπο έγινε η πειραματική εκτίμηση της ακαμψίας για κάθε πλάκα. Τα αποτελέσματα, καθώς και η μέση τιμή της πειραματικά μετρούμενης διαμήκουσ ακαμψίας όλων των δοκιμίων-πλακών (28.9 GPa) φαίνονται στον Πίνακα 5.10.



Σχήμα 5.45: Εκτίμηση της διαμήκουσ ακαμψίας  $E_x$  του δοκιμίου P1.

**Πίνακας 5.10:** Πειραματικές μετρήσεις διαμήκους ακαμψίας  $E_x$  των δοκιμίων.

Ομάδα δοκιμίων	Δοκίμιο	$E_{x\text{-exp}}$ (GPa)	$E_{x\text{-exp-av}}$ (GPa)	Σύγκριση %	$E_{x\text{-exp-av-all}}$ (GPa)
P Series	P1	27.6	29.4 (5.8%)	100%	28.9
	P2	31.0			
	P3	29.6			
IMP 1 Series	IMP 1.1	29.2	30.0 (5.8%)	102%	
	IMP 1.2	28.8			
	IMP 1.4	32.0			
IMP 2 Series	IMP 2.1	27.0	27.3 (6.1%)	93%	
	IMP 2.2	25.8			
	IMP 2.3	29.1			

Οι αριθμοί εντός παρενθέσεων υποδεικνύουν το συντελεστή διασποράς (coefficient of variation).

Στη συνέχεια, μέσω της κλασικής θεωρίας πολύστρωτων (CLT), υπολογίζεται θεωρητικά η διαμήκης και η εγκάρσια ακαμψία ( $E_x$  και  $E_y$  αντίστοιχα) των δοκιμίων, λαμβάνοντας υπόψη τις πραγματικές μηχανικές ιδιότητες του υλικού (Πίνακας 5.5α), καθώς και την ακολουθία και τον προσανατολισμό των στρώσεων του πολύστρωτου. Το θεωρητικό υπόβαθρο αυτών των υπολογισμών έχει αναπτυχθεί στο Κεφάλαιο 2 (εδάφιο 2.3.1).

Συγκεκριμένα, μέσω των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού, γίνεται αρχικά για κάθε μεμονωμένη ορθοτροπική στρώση  $k$  ο υπολογισμός των στοιχείων  $(Q_{ij})_k$  του μητρώου δυσκαμψίας αυτής  $[Q]_k$  (σχέσεις 2.9α-δ). Το σύμβολο  $k$  αντιστοιχεί στον αριθμό της κάθε στρώσης, που στην προκειμένη περίπτωση είναι συνολικά 17, σύμφωνα με τη μοντελοποίηση που έχει επιλεγεί (Σχήμα 5.28). Στη συνέχεια, γίνεται ο υπολογισμός των στοιχείων  $(\bar{Q}_{ij})_k$  του μητρώου ανηγμένης δυσκαμψίας κάθε στρώσης  $[\bar{Q}]_k$ , μέσω της σχέσης 2.12, σύμφωνα με τη γωνία προσανατολισμού της κάθε μίας από αυτές ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  ή  $-45^\circ$ ) ως προς το γεωμετρικό σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 5.2). Έπειτα, με αντιστροφή των σχέσεων 2.9α-δ, γίνεται ο υπολογισμός των ανηγμένων ακαμψιών  $E_{x,k}$  και  $E_{y,k}$  κάθε στρώσης, ως εξής:

$$E_{x,k} = \frac{(\bar{Q}_{11})_k \cdot (\bar{Q}_{22})_k - (\bar{Q}_{12})_k^2}{(\bar{Q}_{22})_k}$$

$$E_{y,k} = \frac{(\bar{Q}_{11})_k \cdot (\bar{Q}_{22})_k - (\bar{Q}_{12})_k^2}{(\bar{Q}_{11})_k}$$

Τέλος, οι ακαμψίες  $E_x$  και  $E_y$  του πολύστρωτου, υπολογίζονται μέσω των παρακάτω σχέσεων:



$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^{17} E_{x,k} \cdot t_k}{t_{TOT}}$$

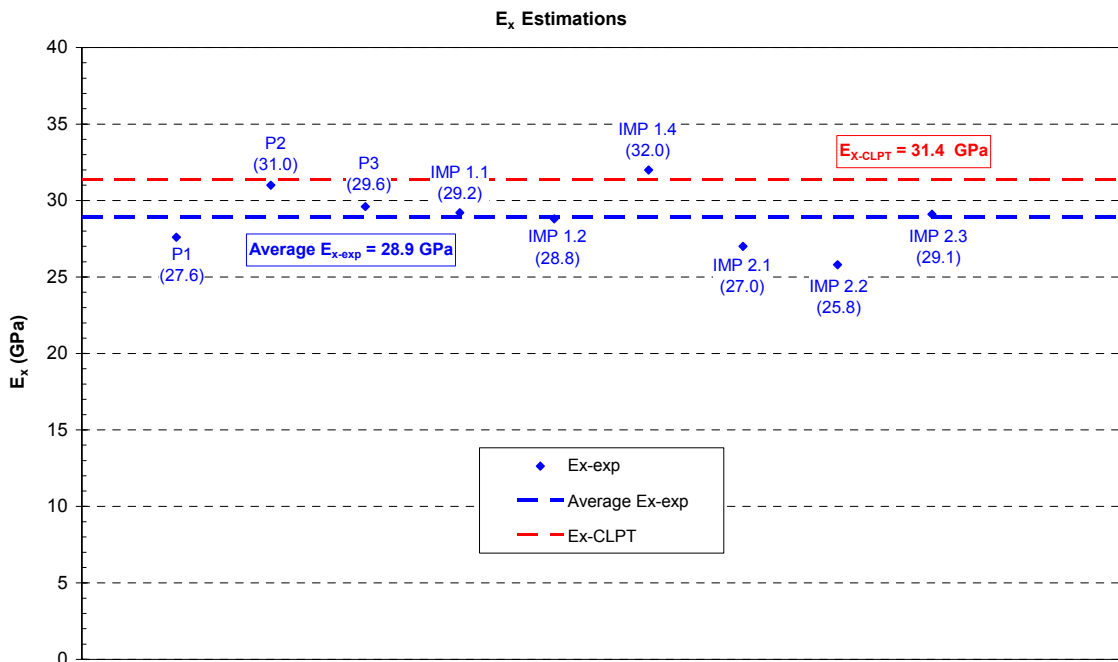
$$E_y = \frac{\sum_{k=1}^{17} E_{y,k} \cdot t_k}{t_{TOT}}$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς, προέκυψαν οι εξής τιμές των ακαμψιών:

$$E_{x-CLT} = 31.4 \text{ GPa}$$

$$E_{y-CLT} = 14.8 \text{ GPa}$$

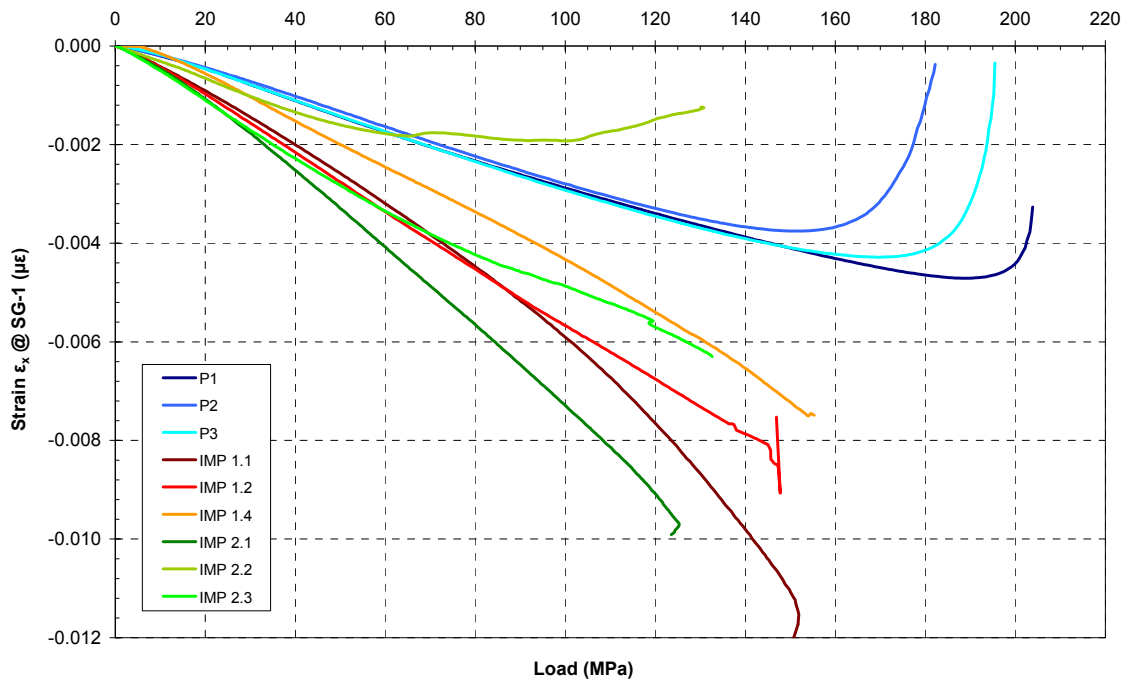
Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.46 που ακολουθεί, παρουσιάζονται συγκριτικά τα αποτελέσματα πειραματικής και θεωρητικής (CLT) εκτίμησης της διαμήκουσ ακαμψίας  $E_x$  των δοκιμίων, όπου παρατηρείται σχετικά καλή σύμπτωση, με απόκλιση της τάξης του 8% περίπου.



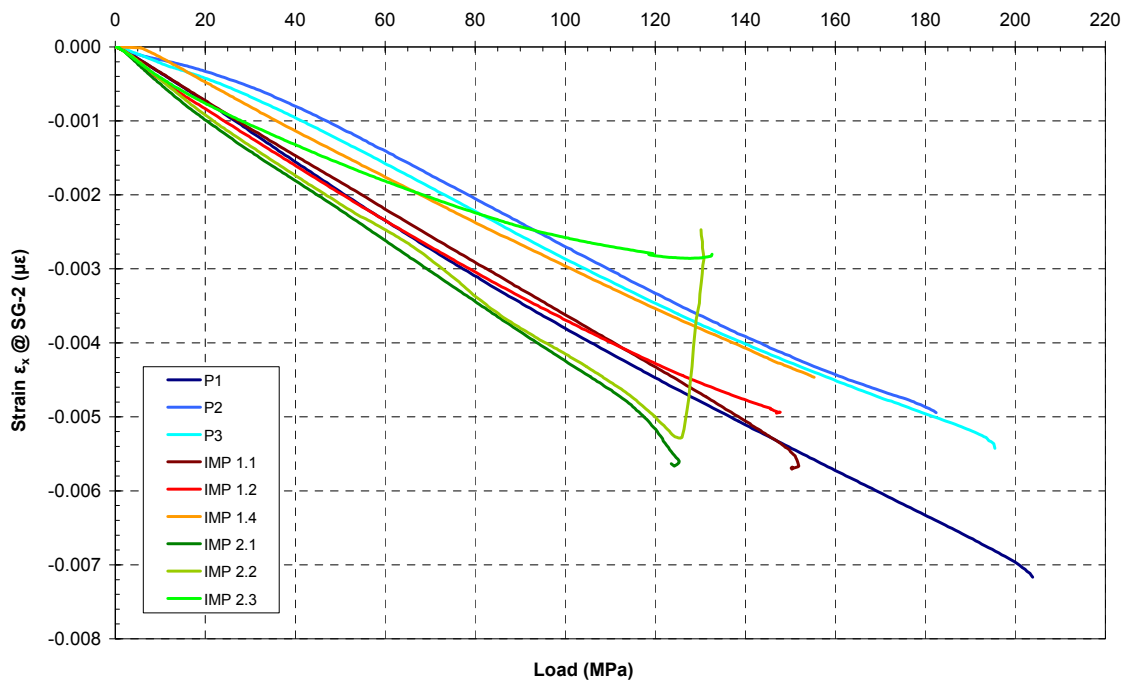
Σχήμα 5.46: Αποτελέσματα εκτίμησης της διαμήκουσ ακαμψίας  $E_x$  των δοκιμίων.

### 5.3.9 Σύγκριση των παραμορφώσεων μεταξύ των δοκιμίων

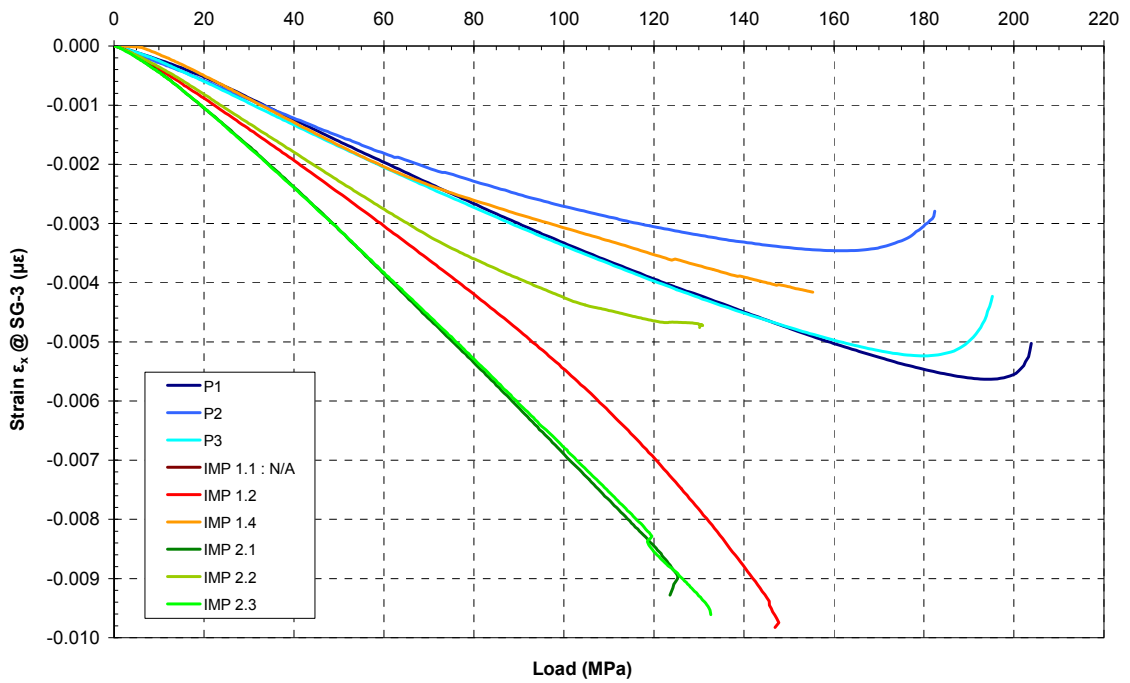
Στη συνέχεια, στα διαγράμματα των Σχημάτων 5.47 έως 5.54 φαίνεται ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης των μετρημένων παραμορφώσεων όλων των δοκιμίων, όπου κάθε σχήμα παρουσιάζει τη μεταβολή των παραμορφώσεων όλων των δοκιμίων στην ίδια θέση μέτρησης.



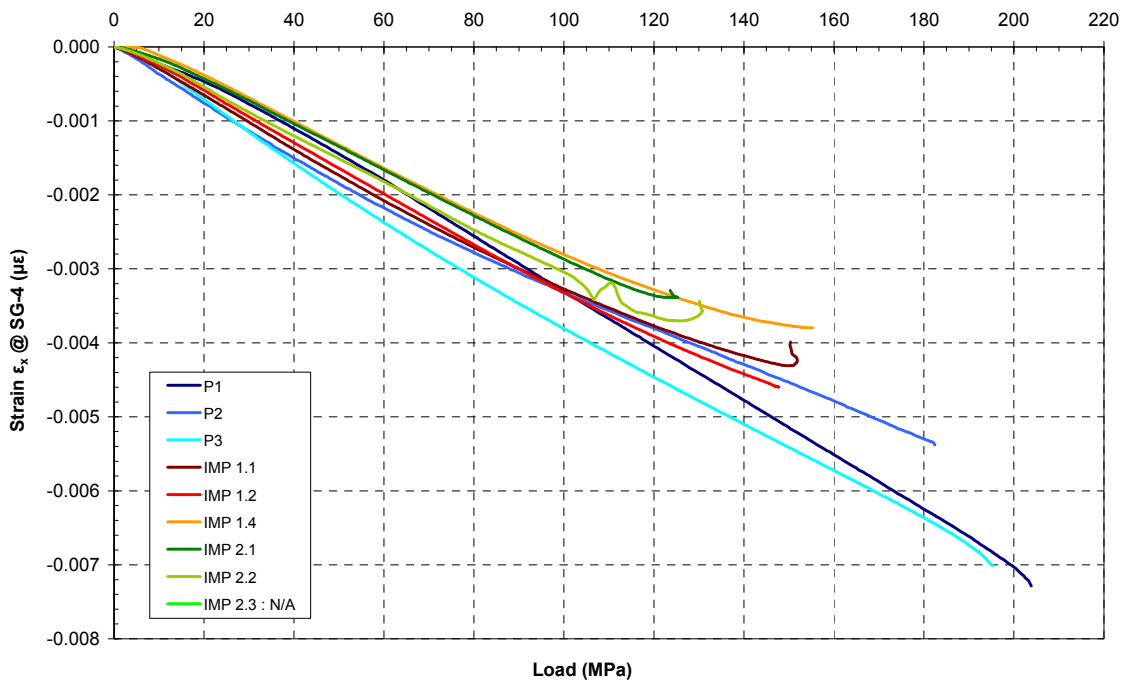
Σχήμα 5.47: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-1.



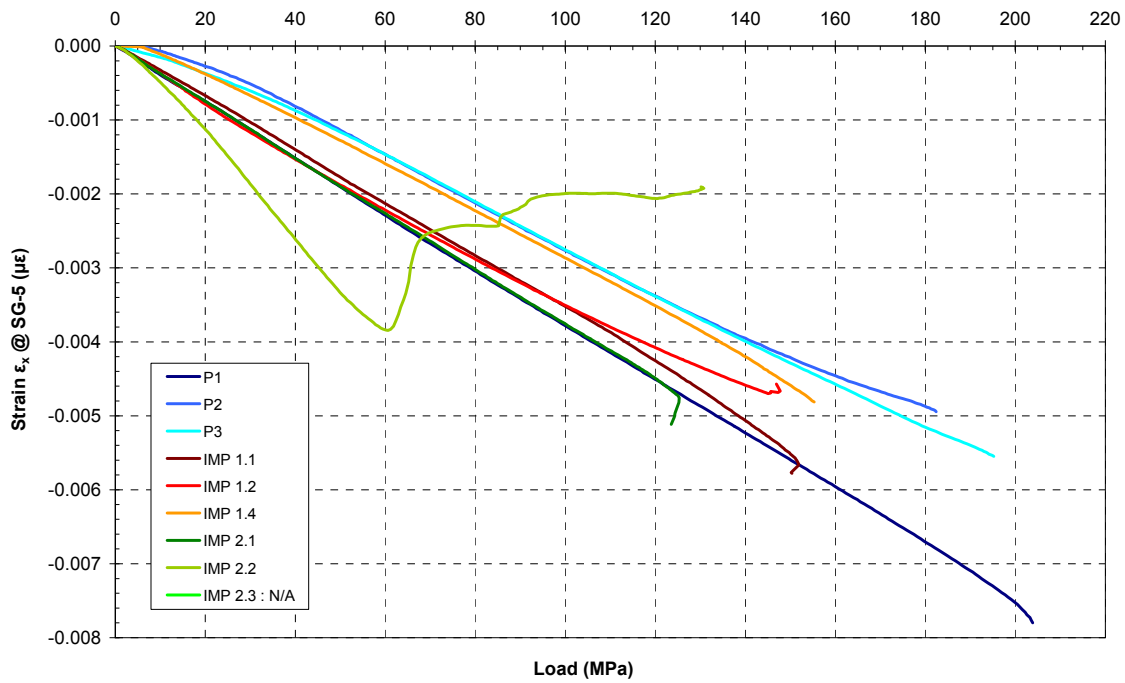
Σχήμα 5.48: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-2.



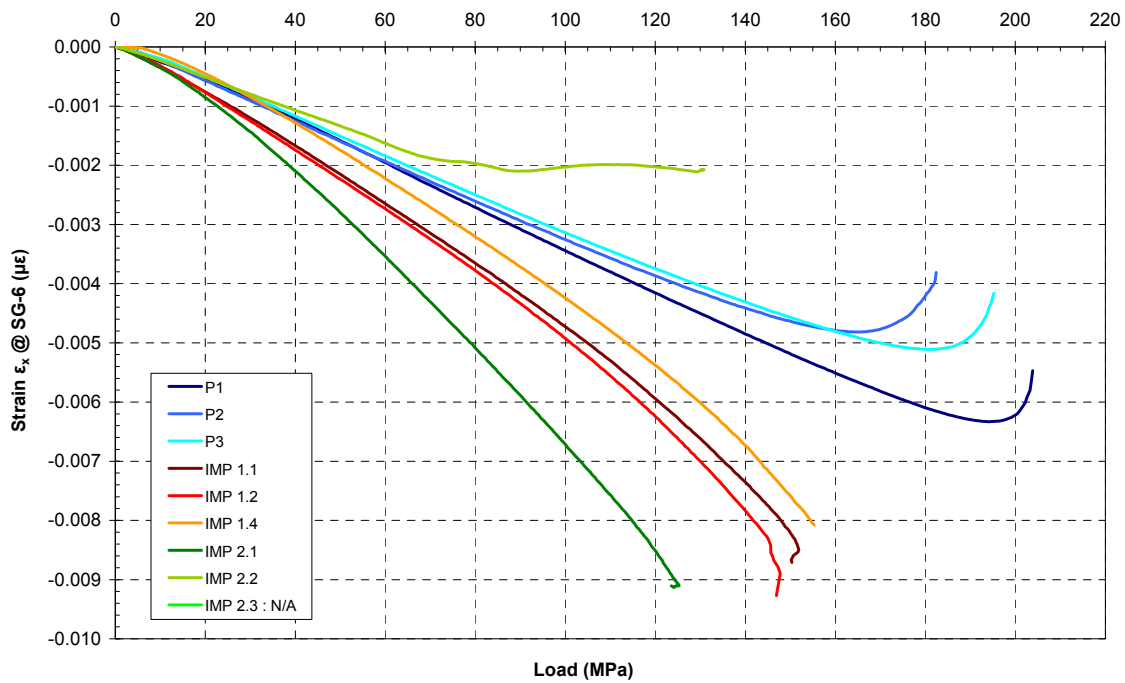
Σχήμα 5.49: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-3.



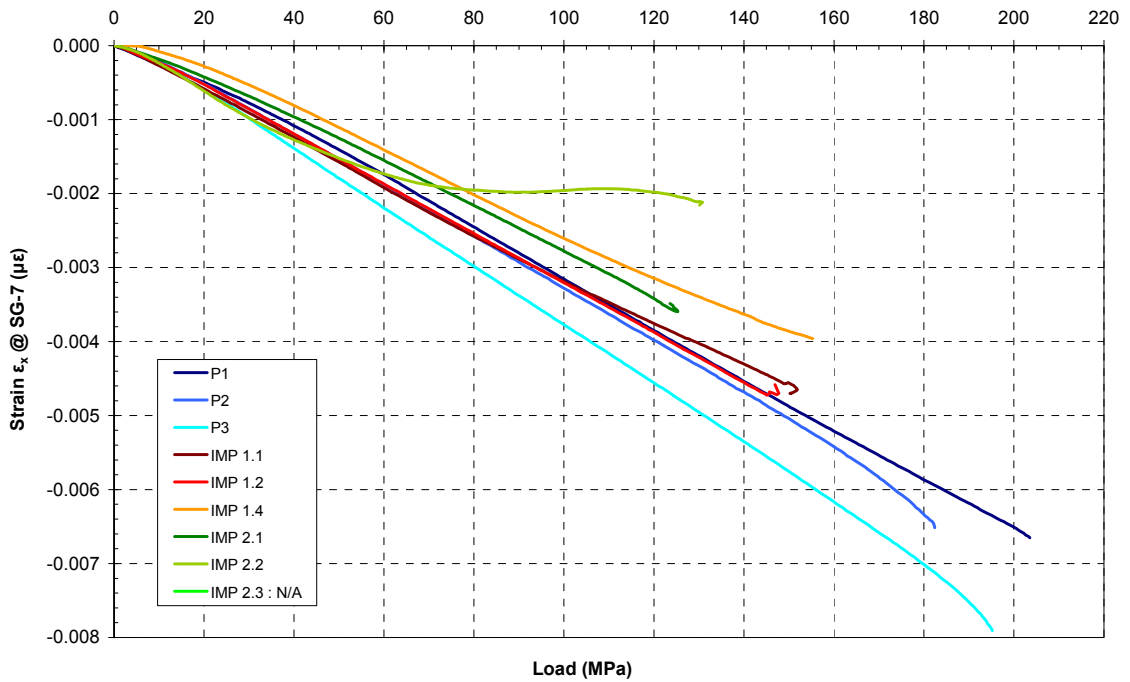
Σχήμα 5.50: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-4.



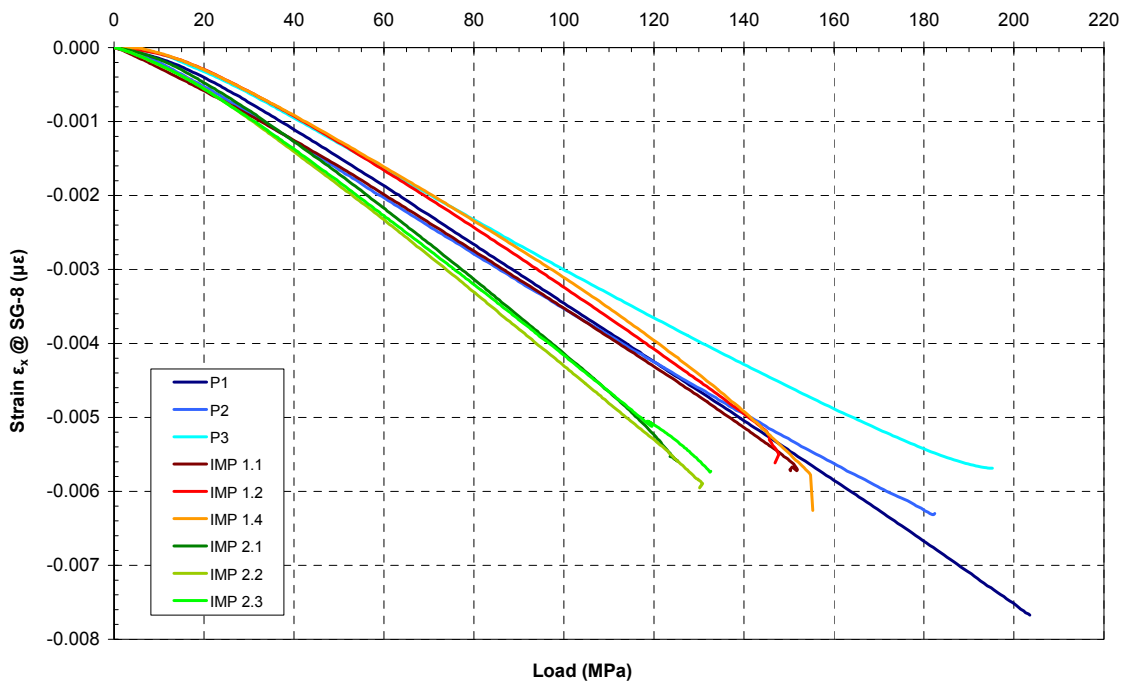
Σχήμα 5.51: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-5.



Σχήμα 5.52: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-6.



Σχήμα 5.53: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-7.



Σχήμα 5.54: Συγκριτικό διάγραμμα παραμορφώσεων όλων των δοκιμών στη θέση SG-8.

Στα περισσότερα από αυτά τα διαγράμματα, με χαρακτηριστικά αυτά των θέσεων SG-3, SG-6 και SG-8, παρατηρείται σχετική ομοιομορφία μεταξύ των δοκιμών της ίδιας ομάδας. Υπενθυμίζεται εδώ ότι οι μετρήσεις της πλάκας IMP 2.2 είχαν αποδειχθεί προβληματικές, οπότε αγνοείται η ανώμαλη συμπεριφορά των αντίστοιχων καμπυλών. Επίσης, από την παρατήρηση των παραπάνω διαγραμμάτων φαίνεται για

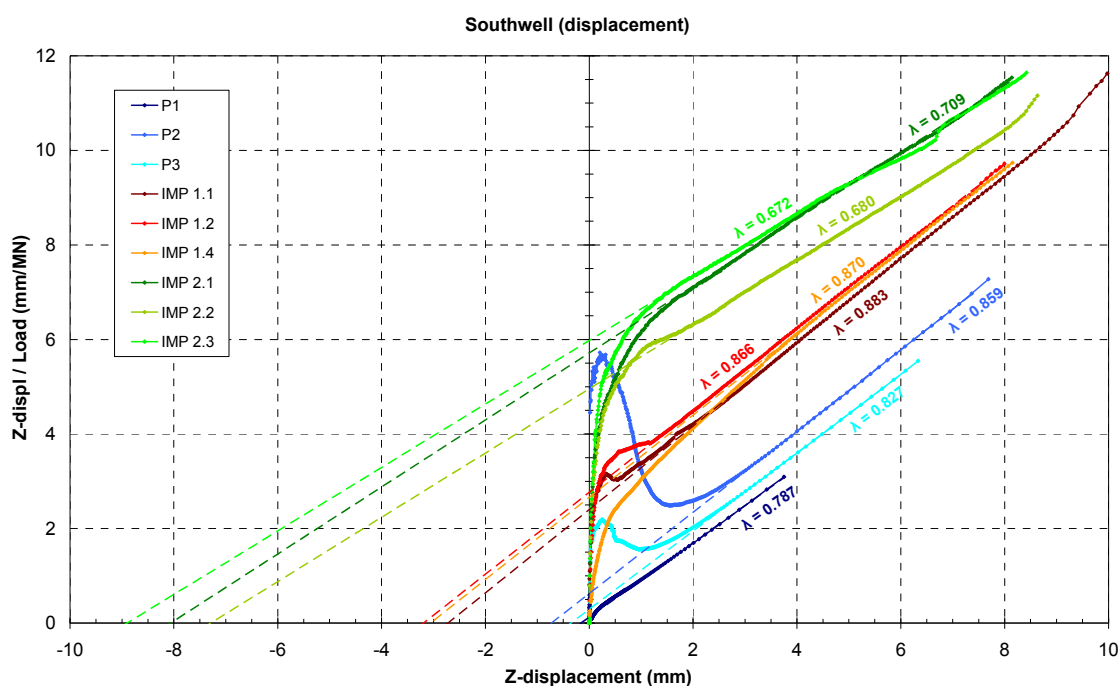
ακόμα μια φορά η καμπύλη μορφή των μετρήσεων των επιμηκυνσιόμετρων που βρίσκονται στο μέσο του μήκους της πλάκας (SG-1, SG-3 και SG-6), όπου αναπτύσσονται επιπλέον των ομοιόμορφων και καμπτικές παραμορφώσεις, είτε θετικές (P Series), είτε αρνητικές (IMP-1 & IMP-2 Series). Όλα τα υπόλοιπα διαγράμματα (SG-2, SG-4, SG-5, SG-7 & SG-8) εμφανίζουν σχεδόν γραμμικές παραμορφώσεις, συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου, αφού όπως είπαμε τα σημεία αυτά βρίσκονται μακριά από το κέντρο της εκάστοτε πλάκας και δεν δέχονται τις έντονες καμπτικές παραμορφώσεις που προκαλεί το φαινόμενο του λυγισμού στην περιοχή της μέσης τομής.

### 5.3.10 Διαγράμματα Southwell

Όπως έχει προαναφερθεί, τα διαγράμματα Southwell χρησιμοποιούνται ως μέθοδος εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού κυρίως σε δοκούς, αλλά κατά προέκταση και σε πλάκες. Στο εδάφιο αυτό περιγράφονται η εφαρμογή και τα αποτελέσματα των δύο εναλλακτικών μεθόδων Southwell που έχουν παρουσιασθεί στο εδάφιο 2.4.1.

#### A. Μέθοδος Southwell “πλάγιας μετατόπισης” (δ)

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Southwell-δ που βασίζεται στην πλάγια μετατόπιση (δ) του κέντρου κάθε δοκιμίου, κατασκευάστηκε το γράφημα του Σχήματος 5.55 που ακολουθεί.



Σχήμα 5.55: Συγκεντρωτικό διάγραμμα Southwell-δ, βάσει της πλάγιας μετατόπισης (δ).

Στο γράφημα αυτό περιλαμβάνονται οι καμπύλες Southwell-δ για κάθε δοκίμιο, καθώς και οι ευθείες, οι εφαπτόμενες στη γραμμική περιοχή των αντίστοιχων καμπυλών. Αντιστρέφοντας την κλίση ( $\lambda$ ) της εφαπτομένης κάθε καμπύλης, έχουμε κατά τα γνωστά (βλ. εδάφιο 2.4.1), μια εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ( $P_{cr-S-\delta}$ ) και στη συνέχεια, διαιρώντας με την αντίστοιχη επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής, προκύπτει η κρίσιμη τάση λυγισμού ( $\sigma_{cr-S-\delta}$ ) του εκάστοτε δοκιμίου. Τα αποτελέσματα εφαρμογής της συγκεκριμένης μεθόδου παρουσιάζονται στη συνέχεια στον Πίνακα 5.11, όπου για λόγους σύγκρισης παρατίθενται και τα αποτελέσματα των μεθόδων εκτίμησης κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού που εφαρμόστηκαν νωρίτερα, μέσω του ρυθμού μεταβολής των πλάγιων μετατοπίσεων στο κέντρο -  $\sigma_{cr-A(av)}$  (βλ. εδάφιο 5.3.3) και μέσω της διαμήκου παραμόρφωσης σε αυτό -  $\sigma_{cr-1(av)}$  (βλ. εδάφιο 5.3.7), χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις των LVDT-A και SG-1 αντίστοιχα.

**Πίνακας 5.11:** Αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου Southwell “πλάγιας μετατόπισης” ( $\delta$ ) και σύγκριση με τα προηγούμενα αποκτηθέντα.

Ομάδα δοκιμίων	Δοκίμιο	Southwell "πλάγιας μετατόπισης" ( $\delta$ )				LVDT-A	SG-1
		$\lambda$ (1/MN)	$P_{cr-S-\delta}$ (kN)	$\sigma_{cr-S-\delta}$ (MPa)	$\sigma_{cr,S-\delta(av)}$ (MPa)	$\sigma_{cr-A(av)}$ (MPa)	$\sigma_{cr-1(av)}$ (MPa)
P Series	P1	0.787	1270	213.7	207.2 (3.1%)	182.0	169.8
	P2	0.859	1164	201.0			
	P3	0.827	1209	206.9			
IMP 1 Series	IMP 1.1	0.883	1132	197.9	205.7 (3.4%)	148.7	-
	IMP 1.2	0.866	1155	207.4			
	IMP 1.4	0.870	1149	211.7			
IMP 2 Series	IMP 2.1	0.709	1411	250.8	257.2 (5.4%)	-	-
	IMP 2.2	0.680	1472	247.7			
	IMP 2.3	0.672	1489	273.2			

*Οι αριθμοί εντός παρενθέσεων υποδεικνύουν το συντελεστή διασποράς (coefficient of variation).*

Από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, παρατηρείται ότι για την κάθε ομάδα δοκιμίων ξεχωριστά, η μέθοδος δίνει γενικά ομοιόμορφα αποτελέσματα μεταξύ των δοκιμίων της ίδιας ομάδας, με σχετικά ικανοποιητικούς συντελεστές διασποράς. Οι τιμές όμως αυτές των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, συγκρινόμενες με εκείνες που αποκτήθηκαν από την εφαρμογή των δύο άλλων μεθόδων (“ρυθμού μεταβολής των πλάγιων μετατοπίσεων” και “διαμήκων παραμορφώσεων”) είναι αρκετά μεγαλύτερες και δε μπορούν να θεωρηθούν ως αποδεκτές, αφού σε όλες τις περιπτώσεις ξεπερνούν ακόμα και τα φορτία αστοχίας (βλ. Πίνακα 5.6). Επίσης, παρατηρείται ότι σύμφωνα με τη μέθοδο Southwell-δ, το μέσο κρίσιμο φορτίο λυγισμού των δοκιμίων με μικρή γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series), προσεγγίζει αυτό των γεωμετρικά τέλειων δοκιμίων (P Series), ενώ για τα δοκίμια με μεγάλη γεωμετρική ατέλεια (IMP-2 Series) το φορτίο αυτό αυξάνεται σημαντικά, πράγμα εντελώς ασύμβατο με τα θεωρητικώς

αναμενόμενα αποτελέσματα. Επομένως, η μέθοδος αυτή δε θεωρείται αξιόπιστη ως προς την εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού και τα αποτελέσματα της δε θα ληφθούν περαιτέρω υπόψη.

Παρ’ όλα αυτά, από το διάγραμμα εφαρμογής της μεθόδου Southwell (Σχήμα 5.55) φαίνεται να επιβεβαιώνεται ένα μέρος της θεωρίας αυτής. Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία (βλ. εδάφιο 2.4.1), η τομή της προέκτασης της εφαπτομένης κάθε καμπύλης του διαγράμματος Southwell με τον άξονα των μετατοπίσεων  $X$ , αναμένεται να αντιστοιχεί στο μέγεθος της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0$ ) του αντίστοιχου δοκιμίου. Στον Πίνακα 5.12, παρατίθενται τα στοιχεία αυτά, μετά την εφαρμογή της μεθόδου ( $w_{south-\delta}$ ), σε σύγκριση με τις μετρήσεις του μεγέθους της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας ( $w_{measu-av}$ ) κάθε πλάκας, που έχουν γίνει σε προηγούμενο στάδιο. Συγκεκριμένα, ως μετρήσεις της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας έχουν ληφθεί οι μέσες τιμές των μεγεθών της κυρτότητας ( $w_{cvx}$ ) και της κοιλότητας ( $w_{ccv}$ ) της εκάστοτε πλάκας (Πίνακας 5.3).

**Πίνακας 5.12:** Επιβεβαίωση του μεγέθους της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0$ ) των δοκιμίων, μέσω της μεθόδου Southwell “μετατόπιση” ( $\delta$ ).

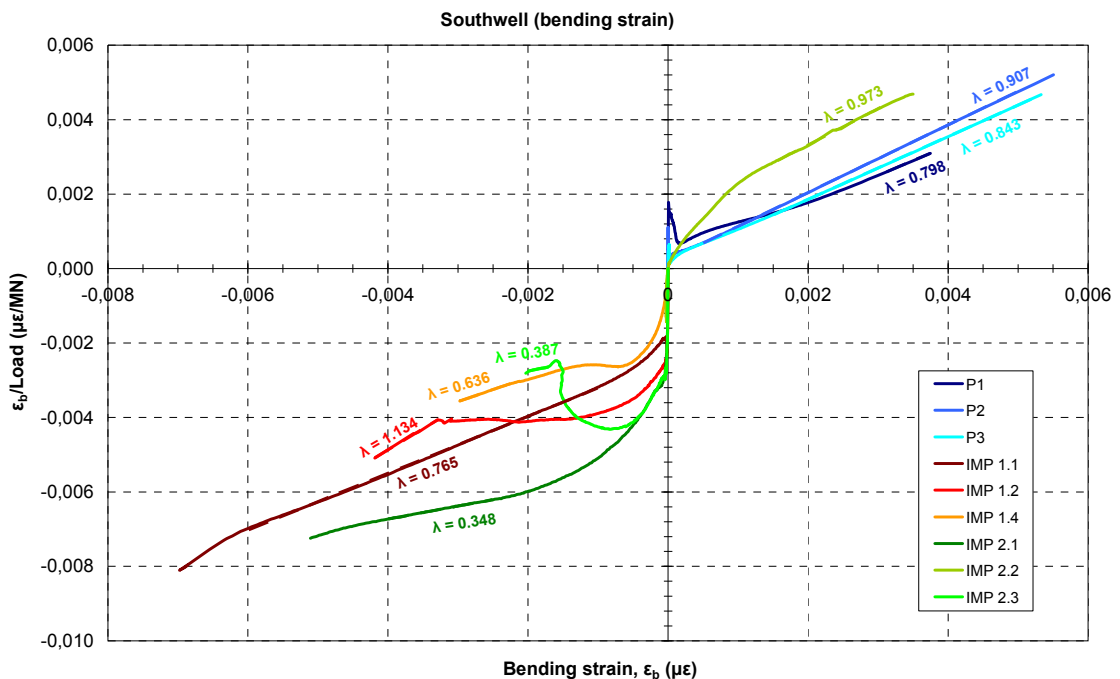
Ομάδα δοκιμίων	Δοκίμιο	Southwell "displacement" ( $\delta$ )		
		$w_{measu-av}$	$w_{south-\delta}$	Σφάλμα %
P Series	P1	-	0.16	-
	P2	-	0.72	-
	P3	-	0.35	-
IMP 1 Series	IMP 1.1	2.62	2.72	3.82%
	IMP 1.2	2.76	3.19	15.58%
	IMP 1.4	3.00	3.06	2.00%
IMP 2 Series	IMP 2.1	8.76	8.06	-7.99%
	IMP 2.2	8.22	7.29	-11.31%
	IMP 2.3	8.69	8.90	2.42%

Πρέπει να σημειωθεί ότι στα δοκίμια της 1<sup>ης</sup> ομάδας (P Series) δεν έγιναν προφανώς ανάλογες μετρήσεις, εφόσον θεωρητικά δεν υπήρχε γεωμετρική ατέλεια σε αυτά. Οι μικρές τιμές γεωμετρικής ατέλειας σε αυτές τις πλάκες, όπως υποδεικνύονται από τη μέθοδο Southwell, θεωρούνται φυσιολογικές και είναι πιθανόν να οφείλονται είτε σε στρέβλωση αυτών των πλακών μετά την κατασκευή τους, είτε σε μικρά σφάλματα εφαρμογής της μεθόδου, όπως παρατηρείται και για τα υπόλοιπα δοκίμια, με μέσο όρο σφάλματος 7,2 %. Έτσι, η εφαρμογή της μεθόδου Southwell επιβεβαιώνει τη θεωρία εκτίμησης της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας των δοκιμίων με σχετικά καλή ακρίβεια.



### B. Εναλλακτική μέθοδος Southwell “διαμήκους καμπτικής παραμόρφωσης” ( $\epsilon_b$ )

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η εναλλακτική μέθοδος Southwell- $\epsilon_b$ , που βασίζεται στη διαμήκη καμπτική παραμόρφωση ( $\epsilon_b$ ) στο κέντρο κάθε δοκιμίου (βλ. εδάφιο 2.4.1). Στο Σχήμα 5.43 που έχει ήδη παρουσιαστεί, φαίνεται η μορφή ανάπτυξης των καμπτικών παραμορφώσεων, που κάνει εμφανές το γεγονός ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να είναι εφαρμόσιμη μόνο στα δοκίμια της 1<sup>ης</sup> ομάδας (P Series), λόγω της σχετικά απότομης ανάπτυξης καμπτικής παραμόρφωσης σε αυτά. Η ομαλότητα της ανάπτυξης καμπτικών παραμορφώσεων στα δοκίμια των ομάδων με γεωμετρικές ατέλειες (IMP-1 & IMP-2 Series) κάνει δύσκολη την εφαρμογή της μεθόδου σε αυτά, αφού οι αντίστοιχες καμπύλες Southwell που προκύπτουν δεν έχουν σαφές γραμμικό τμήμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.56, όπου παρουσιάζονται συγκεντρωτικά (για όλα τα δοκίμια) τα αποτελέσματα της εφαρμογής της συγκεκριμένης μεθόδου.



**Σχήμα 5.56:** Συγκεντρωτικό διάγραμμα εναλλακτικής μεθόδου Southwell- $\epsilon_b$ , βάσει της διαμήκους καμπτικής παραμόρφωσης ( $\epsilon_b$ ).

Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο Southwell, έτσι και εδώ η αντιστροφή της κλίσης του γραμμικού τμήματος κάθε καμπύλης δίνει την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ( $P_{cr,S-\epsilon_b}$ ) και στη συνέχεια, διαιρώντας με την αντίστοιχη επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής, προκύπτει η κρίσιμη τάση λυγισμού ( $\sigma_{cr,S-\epsilon_b}$ ) του εκάστοτε δοκιμίου. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.56, έγινε προσπάθεια εφαρμογής της μεθόδου ακόμα και στα δοκίμια με γεωμετρικές ατέλειες, με μεγάλη ανομοιομορφία στις εξαγόμενες καμπύλες. Τα αποτελέσματα της μεθόδου παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.13, σε σύγκριση με τα αποτελέσματα όλων των μεθόδων εκτίμησης κρίσιμων φορτίων (τάσεων) λυγισμού που χρησιμοποιήθηκαν έως τώρα.

**Πίνακας 5.13:** Αποτελέσματα εφαρμογής μεθόδου Southwell “καμπτικής παραμόρφωσης” ( $\epsilon_b$ ) και σύγκριση με τα προηγούμενως αποκτηθέντα.

Ομάδα δοκιμίων	Δοκίμιο	Southwell "bending strain" ( $\epsilon_b$ )				South- $\delta$	LVDT-A	SG-1
		$\lambda$ (1/MN)	$P_{cr,S-\epsilon_b}$ (kN)	$\sigma_{cr,S-\epsilon_b}$ (MPa)	$\sigma_{cr,S-\epsilon_b,Av}$ (MPa)	$\sigma_{cr,S-\delta(av)}$ (MPa)	$\sigma_{cr-A(av)}$ (MPa)	$\sigma_{cr-1(av)}$ (MPa)
P Series	P1	0.798	1254	210.8				
	P2	0.907	1102	190.4	201.4 (5.1%)	207.2	182.0	169.8
	P3	0.843	1186	203.0				
IMP 1 Series	IMP 1.1	0.765	1308	228.6				
	IMP 1.2	1.134	882	158.4	<del>225.6</del> (29.1%)	<del>205.7</del>	148.7	-
	IMP 1.4	0.636	1573	289.8				
IMP 2 Series	IMP 2.1	0.348	2878	511.5				
	IMP 2.2	0.973	1028	173.0	<del>386.0</del> (48.0%)	<del>257.2</del>	-	-
	IMP 2.3	0.387	2581	474.6				

Οι αριθμοί εντός παρενθέσεων υποδεικνύουν το συντελεστή διασποράς (coefficient of variation).

Από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα και όπως ήταν αναμενόμενο, φαίνεται ότι υπάρχει σχετική ομοιομορφία μόνο μεταξύ των αποτελεσμάτων της 1<sup>ης</sup> ομάδας δοκιμίων (P Series) και μάλιστα παρατηρείται πολύ καλή σύμπτωση με τα αποτελέσματα της προηγούμενης μεθόδου Southwell “πλάγιας μετατόπισης” ( $\delta$ ), με απόκλιση μόλις 3%. Παρά το γεγονός αυτό, όπως και με την προηγούμενη μέθοδο Southwell, οι τιμές της κρίσιμης τάσης λυγισμού ( $\sigma_{cr,S-\epsilon_b}$ ) είναι μη αποδεκτές, αφού είναι ανάλογα υψηλές, ξεπερνώντας τις αντίστοιχες τιμές των τάσεων αστοχίας ( $\sigma_u$  - βλ. Πίνακα 5.6). Ως προς τα αποτελέσματα των δοκιμίων με γεωμετρικές ατέλειες (IMP-1 & IMP-2 Series), υπάρχει μεγάλη ανομοιομορφία μεταξύ των δοκιμίων και στις δύο ομάδες πλακών, η οποία άλλωστε ήταν αναμενόμενη από την παρατήρηση του αντίστοιχου διαγράμματος Southwell και η οποία επιβεβαιώνεται με τους αντίστοιχους πολύ μεγάλους συντελεστές διασποράς. Εκτός αυτού, οι τιμές των κρίσιμων τάσεων λυγισμού γι’ αυτές τις πλάκες, μέσω τις συγκεκριμένης μεθόδου, είναι τελείως αφύσικες, οπότε δε λαμβάνονται περαιτέρω υπόψη.

### Γ. Αποτίμηση της μεθόδου Southwell

Έπειτα από την εφαρμογή της μεθόδου Southwell και την παρατήρηση των αποτελεσμάτων της, είναι σαφές ότι δε μπορούν να ληφθούν αξιόπιστα αποτελέσματα για την εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, ειδικά για τα δοκίμια με γεωμετρικές ατέλειες (IMP-1 & IMP-2 Series). Μόνο σε επίπεδες πλάκες η μέθοδος προσεγγίζει κάπως τα κρίσιμα φορτία λυγισμού, πάντα όμως φαίνεται να τα υπερεκτιμά, κάτι που είναι γενικά μη αποδεκτό για μελέτη σχεδίασης κατασκευών. Αξιοσημείωτη είναι η αρκετά καλή σύμπτωση μεταξύ της βασικής και της εναλλακτικής μεθόδου Southwell, ως προς την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου

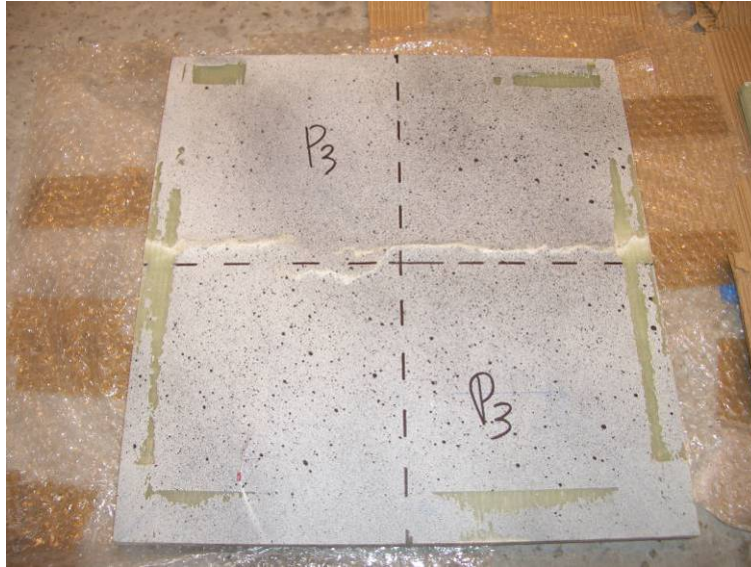
λυγισμού, μόνο για τα δοκίμια επίπεδης γεωμετρίας (P Series), όπως φαίνεται ακολούθως στο συγκριτικό Πίνακα 5.14. Στον ίδιο πίνακα, παρατηρείται επίσης ότι η ταξινόμηση των κρίσιμων τάσεων λυγισμού αυτών των πλακών κατά φθίνουσα τιμή, δηλαδή  $P1 > P3 > P2$ , συμπίπτει τόσο μεταξύ των δύο μεθόδων Southwell, αλλά και με τις άλλες δύο μεθόδους που εφαρμόστηκαν (“ρυθμού μεταβολής των πλάγιων μετατοπίσεων” και “διαμήκων παραμορφώσεων”). Σημαντική είναι επίσης η σχετικά καλή εκτίμηση των αρχικών ατελειών των γεωμετρικά ατελών πλακών, όπως προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου.

**Πίνακας 5.14:** Σύγκριση αποτελεσμάτων 4 μεθόδων για “τέλεια” δοκίμια (P Series).

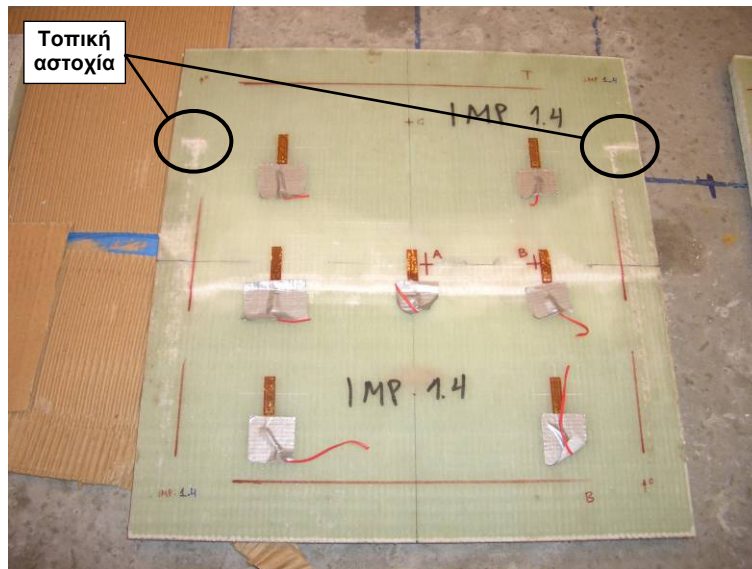
Δοκίμιο	Μέθοδος Southwell			LVDΤ-A	SG-1
	$\sigma_{cr,S-\delta}$ (MPa)	$\sigma_{cr,S-\epsilon b}$ (MPa)	διαφορά %	$\sigma_{cr-A}$ (MPa)	$\sigma_{cr-1}$ (MPa)
P1	214	211	1.33 %	195.0	188.9
P2	201	190	5.30 %	167.7	151.2
P3	207	203	1.90 %	183.2	169.2

### 5.3.11 Τύπος (μορφή) αστοχίας

Η αστοχία όλων των δοκιμίων έγινε κατά παρόμοιο τρόπο. Σημεία εκκίνησης της αστοχίας ήταν τα μέσα των κατακόρυφων (μακριών) πλευρών, δηλαδή τα σημεία στήριξης των πλακών από τις κατακόρυφες πλευρικές μεταλλικές φλάντζες (βλ. Σχήμα 5.13) και η ρωγμή αναπτύχθηκε στην περιοχή της εγκάρσιας μέσης τομής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.57. Επίσης, παρατηρείται έντονη τοπική αστοχία στο άνω άκρο των πλευρικών αυτών δοκών, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο Σχήμα 5.58, κάτι που δείχνει ότι οι συγκεκριμένες (ιδιόμορφες) συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν (βλ. Σχήμα 5.15), επέδρασαν στη μορφή της αστοχίας και κατά συνέπεια και στα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία.



Σχήμα 5.57: Όψη της κυρτής πλευράς του δοκιμίου P3, μετά τη δοκιμή και αστοχία του.



Σχήμα 5.58: Όψη της κοίλης πλευράς του δοκιμίου IMP 1.4, μετά τη δοκιμή και αστοχία του, όπου φαίνονται χαρακτηριστικά τα σημεία τοπικής αστοχίας λόγω των ιδιόμορφων συνοριακών συνθηκών.

#### 5.4 Μοντελοποίηση πειραμάτων με χρήση της ΜΠΣ & σύγκριση με τα πειραματικά και τα αναλυτικά αποτελέσματα

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι βασικές παράμετροι της πειραματικής διαδικασίας που περιγράφηκαν στο παρόν Κεφάλαιο χρησιμοποιήθηκαν επίσης στο Κεφάλαιο 4, για τη μοντελοποίηση πολύστρωτων πλακών με γεωμετρικές ατέλειες και τη διεξαγωγή της

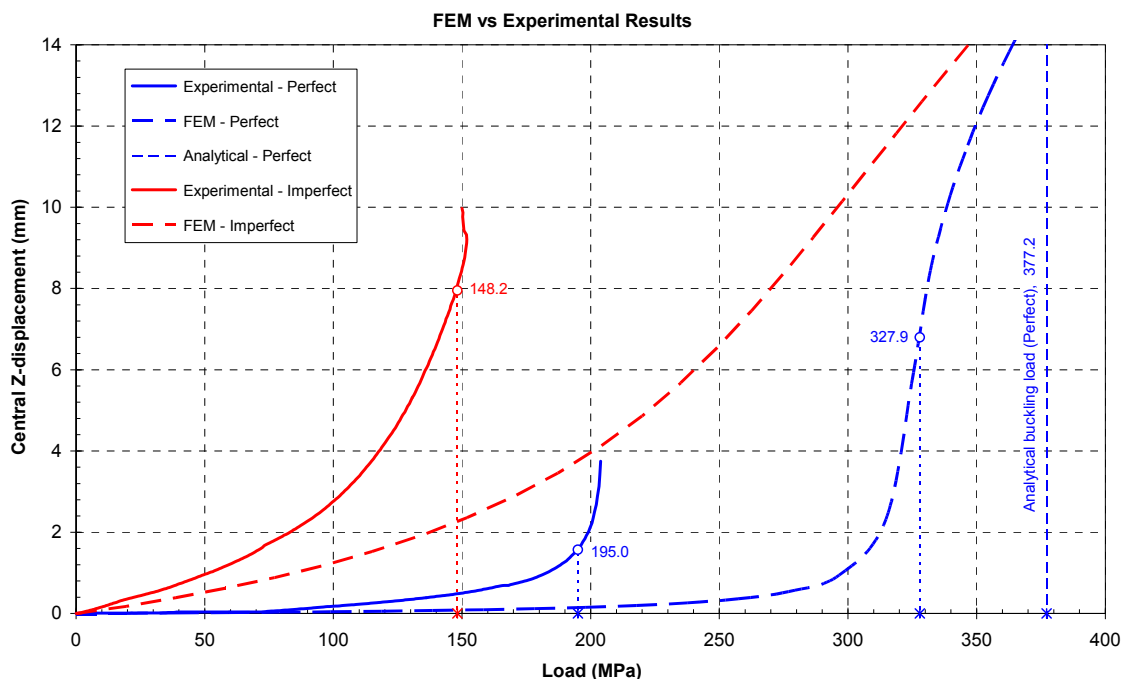
αντίστοιχης παραμετρικής μελέτης λυγισμού. Συγκεκριμένα, οι παράμετροι που μοντελοποιήθηκαν πιστά ήταν:

- Οι διαστάσεις της πολύστρωτης πλάκας.
- Το υλικό και οι μηχανικές του ιδιότητες.
- Η ακολουθία και τα πάχη των στρώσεων.
- Οι ειδικές συνοριακές συνθήκες.

Η μόνη απόκλιση της μοντελοποίησης στη ΜΠΣ ως προς την πειραματική διαδικασία αφορά στη μορφή της γεωμετρικής ατέλειας, η οποία είχε μια ειδική ημιτονοειδή μορφή (βλ. εδάφιο 4.3.2), και όχι τη μορφή της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής λυγισμού. Η απόκλιση όμως αυτή θεωρείται αμελητέα, αφού η ειδική αυτή ημιτονοειδής μορφή που χρησιμοποιήθηκε πλησιάζει αρκετά την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού της πλήρως πακτωμένης πλάκας. Τέλος, στην πειραματική διαδικασία το μέγεθος της γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0$ ) των πλακών με μικρή ατέλεια (IMP-1 Series) είναι ίδιο (ονομαστικά) με αυτό των μοντέλων της παραμετρικής μελέτης πεπερασμένων στοιχείων ( $w_0 = 3.2 \text{ mm}$ ).

Έτσι, μπορεί να γίνει μια σύγκριση μεταξύ των αντίστοιχων περιπτώσεων που μελετήθηκαν. Συγκεκριμένα, το πείραμα λυγισμού επίπεδης πλάκας (P-Series) μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη ΜΠΣ ως η περίπτωση “Case 0 : [0-0]” του εδαφίου 4.3, ενώ το πείραμα λυγισμού πλάκας με μικρή γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series) μπορεί να μοντελοποιηθεί αντίστοιχα ως η περίπτωση “Case 1 : [1-0]”.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.59 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η σύγκριση αυτών των αποτελεσμάτων, όπου για την αναπαράσταση των πειραματικών αποτελεσμάτων επιλέχθηκαν οι αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις των δοκιμίων P1 και IMP-1.1, για την επίπεδη πλάκα και την πλάκα με μικρή γεωμετρική ατέλεια αντίστοιχα. Επιπλέον, για την περίπτωση λυγισμού επίπεδης πλάκας, επισημαίνεται και το αποτέλεσμα της αναλυτικής μεθόδου, όπως υπολογίστηκε στο εδάφιο 5.3.4.



Σχήμα 5.59: Σύγκριση μεταξύ αποτελεσμάτων της ΜΠΣ και της πειραματικής διαδικασίας.

Από το παραπάνω συγκριτικό διάγραμμα είναι εμφανές ότι υπήρξε μεγάλη απόκλιση των πειραματικών αποτελεσμάτων από τα αναμενόμενα, όπως αυτά έχουν προκύψει από την εφαρμογή της ΜΠΣ και της αναλυτικής μεθόδου. Οι λόγοι που εξηγούν αυτή την απόκλιση έχουν ήδη περιγραφεί αναλυτικά στο εδάφιο 5.3.4 και σχετίζονται με τις ιδιόμορφες (και μη γραμμικές) συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στα δοκίμια από το πλαίσιο δοκιμών (test rig), την διαφορά (8%) μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής διαμήκουσ ακαμψίας ( $E_x$ ) των δοκιμίων, αλλά και την ανομοιομορφία του πάχους αυτών, λόγω της μεθόδου κατασκευής που χρησιμοποιήθηκε (επίστρωση με το χέρι – hand lay-up). Οι παραπάνω συνθήκες, όπως αναφέρθηκε δεν ήταν δυνατό να ληφθούν υπόψη κατά τη μοντελοποίηση πεπερασμένων στοιχείων της παρούσας μελέτης, οδηγώντας σε μεγάλες αποκλίσεις των αποτελεσμάτων από αυτά της πειραματικής διαδικασίας.

## 5.5 Συμπεράσματα

Αρχικά, σημειώνεται ότι οι μετρήσεις που ελήφθησαν από την παρούσα πειραματική μελέτη θεωρούνται γενικά φυσιολογικές και αναμενόμενες, εκτός από μερικές μεμονωμένες εξαιρέσεις, όπως για παράδειγμα οι μετρήσεις των επιμηκυνσιόμετρων στη δοκιμή της πλάκας IMP 2.2 (βλ. Σχήμα 5.41) όπου προφανώς υπήρξε κάποια δυσλειτουργία στο σύστημα των μετρητικών οργάνων, η οποία δεν ήταν δυνατό να προσδιορισθεί. Επίσης παρατηρήθηκε αρκετά καλή επαναληψιμότητα των μετρήσεων σε δοκίμια του ίδιου τύπου, με εξαίρεση τη μικρή απόκλιση στις μετρήσεις

μεταξύ των επίπεδων δοκιμίων (P Series). Ακόμη, σε κάθε δοκιμή έγινε επιβεβαίωση των μετρήσεων των LVDTs μέσω του οπτικού συστήματος ARAMIS με αρκετά μεγάλη επιτυχία, αποδεικνύοντας την αξιοπιστία και τη μεγάλη ακρίβεια των μετρητικών συστημάτων που χρησιμοποιηθήκαν.

Ως προς την αντοχή των πολύστρωτων πλακών που υπόκεινται σε λυγισμό, προέκυψε το συμπέρασμα ότι μια γεωμετρική ατέλεια σχετικά μικρού μεγέθους ( $w_0=1\%$  B) μειώνει το φορτίο αστοχίας κατά 22% περίπου, ενώ μια αντίστοιχη ατέλεια σχετικά μεγάλου μεγέθους ( $w_0=3\%$  B) μειώνει το φορτίο αστοχίας κατά 33% περίπου.

Αξιολογώντας της μεθόδους πειραματικής εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού που χρησιμοποιήθηκαν, ως πιο αξιόπιστη θεωρείται η μέθοδος που βασίστηκε στο ρυθμό αύξησης της πλάγιας μετατόπισης του κέντρου (μετρούμενη μέσω του LVDT-A). Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι εφαρμόσιμη και σε πλάκες με μικρή γεωμετρική ατέλεια, κάτι που δεν είναι δυνατό με τις υπόλοιπες μεθόδους (Southwell), οι οποίες δίνουν συγκρίσιμα αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση επίπεδων πλακών. Επίσης, παρατηρείται (Πίνακας 5.9) ότι μέσω της μεθόδου “διαμήκους παραμόρφωσης στο κέντρο” (μετρούμενη μέσω του SG-1) προκύπτει σχετική υποεκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού ( $\sigma_{cr-1} / \sigma_{cr-A} \cong 93\%$ ).

Είναι προφανές ότι η εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των πλακών με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες είναι αρκετά δύσκολη έως αδύνατη, ειδικά στις περιπτώσεις όπου οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες εμφανίζονται σε μεγάλη κλίμακα (IMP-2 Series). Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν παρατηρείται λυγισμική συμπεριφορά, όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις πλακών με μικρή αρχική γεωμετρική ατέλεια (IMP-1 Series) και ακόμα πιο έντονα στις περιπτώσεις επίπεδων πλακών (P Series). Εντούτοις, είναι σαφές ότι τα κρίσιμα φορτία λυγισμού των πλακών επηρεάζονται σημαντικά από την ύπαρξη ακόμα και σχετικά μικρών γεωμετρικών ατελειών ( $w_0=1\%$  B), με μείωση αυτών των φορτίων κατά 18% περίπου. Παρατηρείται επίσης ότι ο λυγισμός των πλακών αυτών εμφανίζεται σε φορτίο που αντιστοιχεί στο 98% του φορτίου αστοχίας τους, ενώ σε πλάκες χωρίς ατέλειες ( $w_0=0$ ) ο λυγισμός εμφανίζεται σε φορτίο που αντιστοιχεί στο 94% του φορτίου αστοχίας αυτών. Άρα σε κάθε περίπτωση η αστοχία επέρχεται αμέσως μετά την εμφάνιση του φαινομένου του λυγισμού, κάτι που θεωρείται λογικό να συμβαίνει σε τέτοιου είδους, σχετικά παχιές πλάκες.

Από τη σύγκριση της πειραματικά εκτιμώμενης διαμήκους ακαμψίας ( $E_x$ ) με την θεωρητικώς αναμενόμενη (σύμφωνα με τις πραγματικές-μετρούμενες μηχανικές ιδιότητες του υλικού – Πίνακας 5.5α), παρατηρείται σχετικά καλή σύμπτωση των αποτελεσμάτων ( $E_{x-exp} \cong 92\% E_{x-CLPT}$ ). Εδώ παρατηρείται επίσης και η αδυναμία εξασφάλισης πλήρους ομοιομορφίας μεταξύ των διάφορων δοκιμίων, που άλλωστε είναι αδύνατον να επιτευχθεί, λαμβάνοντας υπόψη τη μέθοδο κατασκευής που χρησιμοποιήθηκε (επίστρωση με το χέρι – hand lay-up).

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της ΜΠΣ και των αναλυτικών, με αυτά της πειραματικής διαδικασίας, φαίνεται ότι παρά την προσπάθεια ακριβούς προσομοίωσης όλων των παραμέτρων του προβλήματος, υπήρχε μεγάλη απόκλιση μεταξύ των αναμενόμενων και των πραγματικών αποτελεσμάτων, η οποία οφείλεται

κατά κύριο λόγο στις ειδικής φύσεως, μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν από το πλαίσιο δοκιμών, αλλά δευτερευόντως και σε άλλους παράγοντες, που δεν ήταν δυνατό να προσομοιαστούν ικανοποιητικά κατά τη μοντελοποίηση πεπερασμένων στοιχείων, όπως η ανομοιομορφία του πάχους των δοκιμίων.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

#### 6.1 Συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας

Ο τομέας των σύνθετων υλικών βρίσκει ευρεία (και συνεχώς αναπτυσσόμενη) εφαρμογή στη ναυπηγική βιομηχανία, κάτι που οφείλεται στην πληθώρα πλεονεκτημάτων που διαθέτουν τα υλικά αυτά έναντι των συμβατικών υλικών (χάλυβας & ξύλο) και κυρίως στην ευελιξία που παρέχουν στο σχεδιαστή μηχανικό μέσω των απεριόριστων δυνατοτήτων σχεδίασης. Λόγω της φύσης όμως των σύνθετων υλικών, τα οποία επιτυγχάνουν αρκετά μεγάλη αντοχή και γενικά πολύ καλές μηχανικές ιδιότητες, ο σχεδιασμός οδηγεί σε λεπτότερες κατασκευές. Έτσι, σε συνδυασμό και με τα μικρότερα μέτρα ελαστικότητας των υλικών αυτών έναντι των συμβατικών, ελλοχεύει πάντα ο κίνδυνος εμφάνισης του φαινομένου του λυγισμού, που σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να αποδειχθεί καταστροφικός.

Την ευπάθεια αυτή των κατασκευών από σύνθετα υλικά στο λυγισμό ενισχύουν οι κάθε φύσης ατέλειες που εμφανίζονται σε αυτά, με σημαντικότερες τις γεωμετρικές ατέλειες, που θεωρούνται σχεδόν αναπόφευκτες, ειδικά σε περιπτώσεις κατασκευής με τη μέθοδο επίστρωσης με το χέρι (hand lay up). Έτσι, κατά τη σχεδίαση μιας κατασκευής, παράλληλα με τον έλεγχο αντοχής, θεωρείται απαραίτητος και ο έλεγχος της εμφάνισης λυγισμού στους διάφορους κατασκευαστικούς φορείς από τους οποίους αυτή αποτελείται.

Για την εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού σε γεωμετρικά τέλειους φορείς, έχουν αναπτυχθεί αναλυτικές μέθοδοι που δίνουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα βάσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών (μήκος, διατομή), των υλικών και των συνοριακών συνθηκών του εκάστοτε προβλήματος. Στις περιπτώσεις όμως φορέων με γεωμετρικές ατέλειες είναι δύσκολη η εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, αφού δεν έχει αναπτυχθεί κάποια αξιόπιστη αναλυτική μέθοδος υπολογισμού αυτών, που να λαμβάνει υπόψη και να μοντελοποιεί την ιδιομορφία αυτών των περιπτώσεων παράγοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Έτσι, στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε προσπάθεια πειραματικής εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού φορέων με γεωμετρικές ατέλειες, μέσω διερευνητικής εφαρμογής κάποιων δοκιμαστικών μεθόδων, η αποτίμηση των οποίων γίνεται ακολούθως.

α. Μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων.

Αποδείχθηκε η πιο έγκυρη και αξιόπιστη μέθοδος εκτίμησης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού ατελών φορέων, αφού εφαρμόστηκε με σχετική επιτυχία τόσο στην παραμετρική μελέτη λυγισμού πολύστρωτων δοκών με γεωμετρικές ατέλειες (εδάφιο 4.2), όσο και στα πειραματικά αποτελέσματα λυγισμού πολύστρωτων πλακών με γεωμετρικές ατέλειες (εδάφιο 5.3.3). Παρά ταύτα, η συγκεκριμένη μέθοδος απέτυχε να εφαρμοσθεί στα μοντέλα της παραμετρικής μελέτης λυγισμού πολύστρωτων πλακών με γεωμετρικές ατέλειες (εδάφιο 4.3), δίνοντας αποτελέσματα ασύμβατα με τη λογική των θεωρητικώς αναμενόμενων αποτελεσμάτων (π.χ. αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού με αύξηση του μεγέθους της κεντρικής γεωμετρικής ατέλειας, κάτι που είναι εντελώς παράλογο).

β. Μέθοδος των διαμηκών παραμορφώσεων στο κέντρο της επιφάνειας του φορέα.

Μετά από εφαρμογή της μεθόδου αυτής στα αποτελέσματα των πειραματικών δοκιμών λυγισμού πολύστρωτων πλακών, διαπιστώθηκε ότι η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε περιπτώσεις γεωμετρικά τέλειων φορέων, με αποτελέσματα πιο συντηρητικά από ότι με τη μέθοδο του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων (τιμές κρίσιμων φορτίων λυγισμού μικρότερες κατά περίπου 7%).

γ. Μέθοδος Southwell (2 εναλλακτικές μέθοδοι).

Όπως προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου, τόσο σε αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης λυγισμού πεπερασμένων στοιχείων (πολύστρωτων δοκών και πλακών), όσο και στα αποτελέσματα των πειραματικών δοκιμών λυγισμού πολύστρωτων πλακών, η μέθοδος Southwell μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε γεωμετρικά τέλειους φορείς και μόνο προσεγγιστικά, χωρίς να αναμένονται ιδιαίτερα ακριβή αποτελέσματα.

δ. Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ).

δ-1) Ανάλυση ιδιοτιμών λυγισμού:

Η μέθοδος αυτή είναι κατά τα γνωστά εφαρμόσιμη μόνο σε περιπτώσεις γεωμετρικά τέλειων φορέων και με προσεκτική χρήση παράγει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι σκόπιμο να γίνεται εκ των προτέρων μια μελέτη σύγκλισης της λύσης.

δ-2) Μη γραμμική ανάλυση λυγισμού:

Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται για να προσομοιωθεί η λυγισμική συμπεριφορά ενός φορέα (ή μιας κατασκευής), χωρίς όμως να παράγει άμεσα αποτελέσματα για το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητη μια ακόμα μέθοδος (π.χ. από τις προαναφερθείσες α-γ). Εντούτοις, διαπιστώθηκε ότι η εφαρμογή της ΜΠΣ απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή ως προς την επιλογή των παραμέτρων της (τύπος elements, πυκνότητα πλέγματος διακριτοποίησης, τύπος ανάλυσης, ακριβείς συννοριακές συνθήκες, φορτίσεις κ.λ.π.) προκειμένου να οδηγήσει

σε ακριβή προσομοίωση του φυσικού προβλήματος και ακολούθως σε ικανοποιητικά αποτελέσματα, με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος (χρόνος επίλυσης). Επίσης, όπως και στην περίπτωση ανάλυσης ιδιοτιμών λυγισμού ( $\delta-1$ ), πριν από κάθε εφαρμογή της μεθόδου είναι απαραίτητη και μια μελέτη σύγκλισης της αναμενόμενης λύσης.

Από τη διεξαγωγή της παραμετρικής μελέτης πεπερασμένων στοιχείων για πολύστρωτες δοκούς με γεωμετρικές ατέλειες προέκυψε το ακόλουθο συμπέρασμα. Η ύπαρξη μιας τοξοειδούς γεωμετρικής ατέλειας σε μια δοκό που είναι κατασκευασμένη από σύνθετα υλικά πάχους αντίστοιχου των ναυπηγικών πολύστρωτων (6-10 mm), επιφέρει μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κατά περίπου 25% (για μήκος ατέλειας  $L_0 = 0.2 L$ ) ως προς το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της αντίστοιχης τέλειας δοκού, ανεξαρτήτως του πάχους της.

Από τη διεξαγωγή της παραμετρικής μελέτης πεπερασμένων στοιχείων για πολύστρωτες πλάκες με γεωμετρικές ατέλειες, προέκυψαν μόνο ποιοτικά συμπεράσματα, αφού δεν επιτεύχθηκε η εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των μοντέλων-πλακών που αναπτύχθηκαν. Έτσι, προέκυψε το ακόλουθο συμπέρασμα. Τόσο η έκταση, όσο και η θέση μιας γεωμετρικής ατέλειας στην επιφάνεια μιας πολύστρωτης πλάκας επηρεάζουν σημαντικά τη λυγισμική της συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, όσο πιο μεγάλη είναι η έκταση της ατέλειας και όσο πιο κοντά βρίσκεται αυτή στο κέντρο της πλάκας, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση της λυγισμικής συμπεριφοράς της πολύστρωτης πλάκας από την ασταθή λυγισμική συμπεριφορά την οποία θα ακολουθούσε μια αντίστοιχη επίπεδη πλάκα, σύμφωνα με την κλασική θεωρία λυγισμού.

Η πειραματική διαδικασία λυγισμού πολύστρωτων πλακών έδειξε ότι η ύπαρξη μιας σχετικά μικρής γεωμετρικής ατέλειας ( $w_0=1\% B$ ) οδηγεί σε μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κατά περίπου 18%, ενώ παρατηρήθηκε επίσης ότι η αστοχία των πλακών επέρχεται πάντα αμέσως μετά την εμφάνιση του φαινομένου του λυγισμού ( $\sigma_{cr}/\sigma_u = 94-98\%$ ).

## 6.2 Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Προτείνεται η περαιτέρω διερεύνηση των μεθόδων πειραματικής εκτίμησης κρίσιμων φορτίων λυγισμού φορέων με γεωμετρικές ατέλειες που αναπτύχθηκαν και εφαρμόστηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι οποίες είναι οι εξής:

- μέθοδος του ρυθμού μεταβολής των μετατοπίσεων
- μέθοδος των διαμηκών παραμορφώσεων στο κέντρο της επιφάνειας
- μέθοδος των διαγραμμάτων Southwell (Southwell- $\delta$  και Southwell- $\varepsilon_b$ )

Επίσης, προτείνεται η διεξαγωγή παραμετρικής μελέτη λυγισμού πολύστρωτων δοκών με γεωμετρικές ατέλειες, με επιπλέον παράμετρο το μήκος της γεωμετρικής ατέλειας και με περισσότερες τιμές παραμέτρων. Τέλος, προτείνεται η μοντελοποίηση

πεπερασμένων στοιχείων της πειραματικής διαδικασίας που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 5, με ακριβέστερη προσομοίωση των ιδιόμορφων μη γραμμικών συνοριακών συνθηκών και με εφαρμογή κριτηρίων αστοχίας (αστοχία 1<sup>ης</sup> στρώσης - first ply failure και ανάλυση προοδευτικής αστοχίας των στρώσεων - progressive failure analysis).

---

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνική

- Καρύδης Π. (2000), “Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου, Θέματα Τοπικής Αντοχής”, Γ. Αργυρόπουλος Ε.Π.Ε., Αθήνα.
- Κουρουπάκη Μ. (1999), “Σφάλματα και επισκευές σε σκάφη από Σύνθετα Υλικά”, Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Ναυπηγικής Τεχνολογίας, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Τσούβαλης Ν.Γ. (1998), “Ανάλυση και Σχεδίαση Σκαφών από Σύνθετα Υλικά”, Σημειώσεις Μαθήματος, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

### Διεθνής

- Agarwal B.D. & Broutman L.J. (1990), “Analysis and Performance of Fiber Composites (2nd edition), John Wiley & Sons Inc., New York”.
- Beale R.F. (1989), “Surveying and Repairing GRP Vessels”, Fairplay Publications, Surrey.
- Donnel L.H. (1976), “Beams, Plates and Shells”, McGraw-Hill, New York.
- Eckold G. (1994), “Design and Manufacturing of Composite Structures”, Woodhead Publishing Co., Cambridge, England.
- Gurdal Z., Haftka R. & Hajela P. (1999), “Design and Optimization of Laminated Composite Materials”, Wiley Interscience, New York.
- Jensen C. (2006), “Defects in FRP Panels and their Influence on Compressive Strength”, Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark.
- Lui T.H. & Lam S.S.E. (2001), “Finite strip analysis of laminated plates with general initial imperfection under end shortening”, *Engineering Structures*, 23, (673-686).
- Moaveni S. (1999), “Finite Element Analysis, Theory and Application with ANSYS”, Prentice Hall Inc., New Jersey.
- Ovesy H.R. & Assaee H. (2005), “An investigation on the post-buckling behavior of symmetric cross-ply laminated plates using a semi-energy finite strip approach”, *Composite Structures*, 71, (365-370).

- Ovesy H.R., GhannadPour S.A.M. & Morada G. (2005), “Geometric non-linear analysis of composite laminated plates with initial imperfection under end shortening, using two versions of finite strip method”, *Composite Structures*, 71, (307-314).
- Petrick P.J. (1984), “Fiberglass Repairs”, Cornell Maritime Press, Maryland, USA.
- Pignataro M., Rizzi N. & Luongo A. (1991), “Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures”, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Shenoi R.A. & Wellicome J.F. (1993), “Composite Materials in Maritime Structures. Volume 1: Fundamental Aspects”, Cambridge University Press, Great Britain.
- Shenoi R.A. & Wellicome J.F. (1993), “Composite Materials in Maritime Structures. Volume 2: Practical Considerations”, Cambridge University Press, Great Britain.
- Short G.J., Guild F.J. & Pavier M.J. (2002), “Delaminations in flat and curved composite laminates subjected to compressive load”, *Composite Structures*, 58, (249-258).
- Spyrakos C. & Raftoyannis J. (1997), “Linear and Nonlinear Finite Element Analysis in Engineering Practice”, Algor Inc., Pittsburg, PA (USA).
- Timoshenko S. (1976), “Strength of Materials” (3<sup>rd</sup> edition), Robert E. Kreger Publishing Co., Huntington, New York.
- Timoshenko S. & Woinowsky-Krieger S. (1959), “Theory of Plates and Shells” (Second Edition), McGraw-Hill, New York.
- Timoshenko S. & Young D.H. (1968), “Elements of Strength of Materials” (5<sup>th</sup> Edition), D. Van Nostrand, New York.
- Tomblin J. & Barbero E. (1994), “Local Buckling Experiments on FRP Columns”, *Thin-Walled Structures*, 18, (97-116)
- Tsai S.W. (1987), “Composites Design” (Third Edition), Think Composites: Dayton, Paris and Tokyo, USA.
- Tsouvalis N.G. (1993), “Static and Dynamic Response of Simply Supported Composite Laminated Plates Under the Action of In-Plane Compressive and/or Lateral Loads”, Ph.D. Thesis, Dept. of Naval Architecture and Marine Engineering, National Technical University of Athens.
- Turvey G.J. & Marshall I.H. (1995), “Buckling and Postbuckling of Composite Plates”, Chapman & Hall, London, UK.

### Άλλες Πηγές

Documentation for ANSYS, Release 10.0, ANSYS Inc.