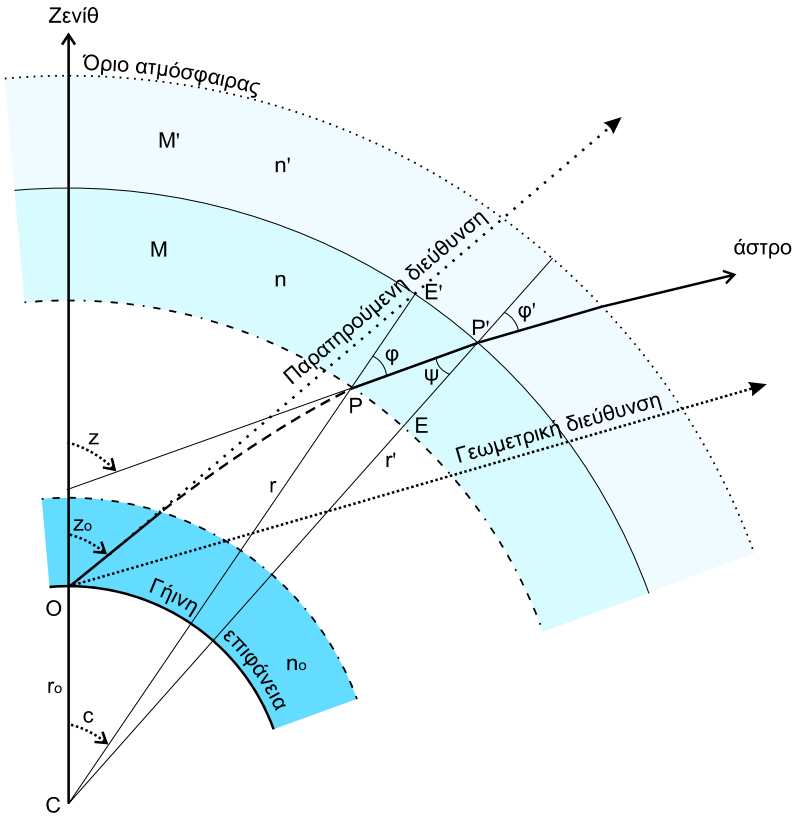
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΜΕ ΑΥΤΟΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ



ΠΑΝΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Ρωμύλος Κορακίτης

ΑΘΗΝΑ 2009

Κι αν είναι τρέλα, έχει τη μέθοδό της

ΟΥΙΛΛΙΑΜ ΣΑΙΞΠΗΡ, «ΑΜΛΕΤ»

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζει μια μεθοδολογία προσδιορισμού του αστρονομικού πλάτους. Η ιδέα της μεθοδολογίας αυτής ανήκει στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ρ. Κορακίτη του οποίου η συμβολή στην υλοποίησή της ήταν καθοριστική. Η ανάπτυξη της εργασίας βασίζεται στην πεποίθηση ότι, επιστημονικό έργο δεν είναι η μηχανιστική εφαρμογή συγκεκριμένων μεθόδων σε συγκεκριμένα προβλήματα αλλά η βαθύτερη κατανόηση των μεθόδων, που κάνει δυνατή την εφαρμογή τους σε οποιοδήποτε μη τυποποιημένο πρόβλημα. Έτσι, παράλληλα με την παράθεση της θεωρίας, γίνεται συστηματική προσπάθεια για την κατανόηση των αρχών πάνω στις οποίες στηρίζεται η μεθοδολογία και για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από αυτή.

JD = 2 455 005 Φ = 37° 58' 30" Λ = 23° 46' 38"

Πάνου Γεώργιος

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
Πίνακας Περιεχομένων	ii
Πίνακας Πινάκων	iv
Πίνακας Σχημάτων	v
Πίνακας Γραφημάτων	vi
Πίνακας Εικόνων	vii
Περίληψη	viii
Summary	ix
Εισαγωγή	**1**
Κεφάλαιο 1: Προσδιορισμός Πλάτους	**3**
1.1 Επιφάνειες αναφοράς	4
1.2 Συστήματα αναφοράς	5
1.2.1 Γήινα συστήματα αναφοράς	5
1.2.2 Συστήματα αναφοράς στην ουράνια σφαίρα	6
1.2.2.1 Ουρανογραφικό σύστημα	7
1.2.2.2 Αστρονομικό σύστημα	8
1.2.2.3 Οριζόντιο σύστημα (τοπικό)	9
1.2.2.4 Ισημερινό σύστημα	10
1.3 Φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας	10
1.4 Αναγωγές των συντεταγμένων	11
1.4.1 Αναγωγές ουρανογραφικών συντεταγμένων	11
1.4.2 Αναγωγή αστρονομικών συντεταγμένων	12
1.5 Προσδιορισμός αστρονομικού πλάτους (Φ)	13
Κεφάλαιο 2: Μοντέλα Διάθλασης	**18**
2.1 Διάθλαση του φωτός	19
2.2 Αστρονομική διάθλαση	21
2.3 Αναλυτικά μοντέλα διάθλασης	21
2.4 Υπολογισμός διάθλασης	23
2.4.1 Επίπεδη γη	23
2.4.1.1 Μοντέλο I	23
2.4.1.2 Καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων στην ατμόσφαιρα	24
2.4.2 Σφαιρική γη	26
2.4.2.1 Μοντέλο II	26
2.4.2.2 Μοντέλο III	32
2.4.2.3 Μοντέλο IV	33
2.4.2.4 Μοντέλο V	34
Κεφάλαιο 3: Βαθμονόμηση Μοντέλων	**38**
3.1 Σφάλματα στις μετρήσεις	39
3.1.1 Πηγές και είδη σφαλμάτων	40
3.1.2 Ακρίβεια - Ορθότητα	41

3.2 Στοιχεία στατιστικής ανάλυσης	41
3.2.1 Μέτρα ακρίβειας - Διαστήματα εμπιστοσύνης	42
3.2.2 Μεταβλητότητα - Βάρη	45
3.2.3 Στατιστικός έλεγχος χ^2	46
3.3 Διαδικασία συνόρθωσης	48
3.3.1 Το μοντέλο της συνόρθωσης	48
3.3.2 Εκτιμήσεις των $\hat{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{\upsilon}$	50
3.3.3 Εκτιμήσεις πινάκων μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας	52
3.3.3.1 Εκτίμηση $\mathbf{V}_{\hat{x}}$ ή $\hat{\mathbf{V}}_{\hat{x}}$	52
3.3.3.2 Εκτίμηση $\mathbf{V}_{\hat{\ell}}$ ή $\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\ell}}$ και $\mathbf{V}_{\upsilon}$ ή $\hat{\mathbf{V}}_{\upsilon}$	53
3.3.3.3 Εκτίμηση της a posteriori μεταβλητότητας της μονάδας βάρους $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_o^2$	54
3.3.4 Περίπτωση μη γραμμικών σχέσεων	54
3.4 Μεθοδολογία εφαρμογής της συνόρθωσης	56
3.4.1 Εισαγωγή - Δεδομένα	56
3.4.2 Επίλυση	57
3.4.2.1 Μοντέλο I	57
3.4.2.2 Μοντέλο II	61
3.4.2.3 Μοντέλο III	63
3.4.2.4 Μοντέλο IV	65
3.4.2.5 Μοντέλο V	67
Κεφάλαιο 4: Ανάλυση Δεδομένων Προσομοίωσης	**70**
4.1 Στάδια επίλυσης	71
4.2 Γενικά χαρακτηριστικά MATLAB	72
4.3 Παρουσίαση αλγορίθμου	74
4.4 Αριθμητικά ή Υπολογιστικά σφάλματα	75
4.5 Δεδομένα πειραμάτων	76
4.6 Διεξαγωγή πειραμάτων	80
4.6.1 Πείραμα 1° (Υπολογιστικά σφάλματα)	80
4.6.2 Πείραμα 2° (Ευστάθεια)	84
4.6.3 Πείραμα 3° (Βαθμονόμηση SkyMap)	85
4.6.4 Πείραμα 4° (Πλήθος άστρων)	86
4.6.5 Πείραμα 5° (Ταυτότητα άστρων)	88
Κεφάλαιο 5: Επεξεργασία Αστρονομικών Παρατηρήσεων	**97**
5.1 Διεξαγωγή παρατηρήσεων	98
5.1.1 Επιλογή σημείου παρατήρησης	98
5.1.2 Σχεδιασμός παρατηρήσεων	98
5.1.3 Εξοπλισμός	99
5.1.4 Διαδικασία εκτέλεσης μετρήσεων	100
5.1.4.1 Προσανατολισμός γεωδαιτικού σταθμού	101
5.1.4.2 Αναγνώριση άστρου	101
5.1.4.3 Παρατήρηση άστρου	102
5.1.5 Επεξεργασία μετρήσεων	102
5.2 Ανάλυση δεδομένων - Υπολογισμοί	105
5.2.1 $1^η$ ΣΕΙΡΑ - ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02	106

5.2.1.1 1η ΣΕΙΡΑ - Μέθοδος Sterneck 106
5.2.1.2 1η ΣΕΙΡΑ - Αυτοβαθμονόμηση 109
5.2.2 2η ΣΕΙΡΑ - ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 11/05/09 115
5.2.2.1 2η ΣΕΙΡΑ - Μέθοδος Sterneck 115
5.2.2.2 2η ΣΕΙΡΑ - Αυτοβαθμονόμηση 116
5.2.3 3η ΣΕΙΡΑ - ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09 119
5.2.3.1 3η ΣΕΙΡΑ - Μέθοδος Sterneck 119
5.2.3.2 3η ΣΕΙΡΑ - Αυτοβαθμονόμηση 120

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα - Προτάσεις 127

6.1.1 Μέθοδος Sterneck 128
6.1.2 Αυτοβαθμονόμηση 129

Βιβλιογραφία 134

Παράρτημα 138

Παράρτημα Α: Πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής (z) και των κατανομών t και χ^2 139
Α.1 Πίνακας τυπικής κανονικής κατανομής (z) 139
Α.2 Πίνακας κατανομής t 140
Α.3 Πίνακας κατανομής χ^2 141

Παράρτημα Β: Κώδικες MATLAB 142
Β.1 cholesky_inversion.m 142
Β.2.1 Model_I.m 143
Β.2.2 Model_II.m 145
Β.2.3 Model_III.m 148
Β.2.4 Model_IV.m 150
Β.2.5 Model_V.m 153
Β.3 Fourth_degree_polynomial.m 155

Παράρτημα Γ: Αστρονομικές παρατηρήσεις 159

Γ.1 2η ΣΕΙΡΑ 159
Γ.2 3η ΣΕΙΡΑ 165

Πίνακας Πινάκων

Πίνακας 1.1 13
Πίνακας 2.1 36
Πίνακας 2.2 36
Πίνακας 2.3 37
Πίνακας 4.1 73
Πίνακας 4.2 80
Πίνακας 4.3 82

Πίνακας 4.4	82
Πίνακας 4.5	84
Πίνακας 4.6	85
Πίνακας 5.1	98
Πίνακας 5.2	106
Πίνακας 5.3	107
Πίνακας 5.4	108
Πίνακας 5.5	110
Πίνακας 5.6	112
Πίνακας 5.7	112
Πίνακας 5.8	114
Πίνακας 5.9	114
Πίνακας 5.10	114
Πίνακας 5.11	115
Πίνακας 5.12	115
Πίνακας 5.13	116
Πίνακας 5.14	116
Πίνακας 5.15	116
Πίνακας 5.16	119
Πίνακας 5.17	119
Πίνακας 5.18	120
Πίνακας 5.19	120
Πίνακας 5.20	120
Πίνακας 5.21	122
Πίνακας 5.22	123
Πίνακας 5.23	124
Πίνακας 5.24	124
Πίνακας 5.25	124
Πίνακας 5.26	125
Πίνακας 5.27	125
Πίνακας 5.28	126
Πίνακας 5.29	126

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 1.1	5
Σχήμα 1.2	6
Σχήμα 1.3	7
Σχήμα 1.4	8
Σχήμα 1.5	9
Σχήμα 1.6	10
Σχήμα 1.7	14
Σχήμα 1.8	15
Σχήμα 1.9	15
Σχήμα 1.10	15
Σχήμα 2.1	20
Σχήμα 2.2	23

Σχήμα 2.3	26
Σχήμα 2.4	33
Σχήμα 2.5	34
Σχήμα 4.1	74
Σχήμα 4.2	77
Σχήμα 4.3	81
Σχήμα 5.1	101
Σχήμα 5.2	105
Σχήμα 6.1	132

Πίνακας Γραφημάτων

Γράφημα 1.1	16
Γράφημα 1.2	17
Γράφημα 2.1	22
Γράφημα 2.2	37
Γράφημα 3.1	42
Γράφημα 3.2	43
Γράφημα 4.1	83
Γράφημα 4.2	86
Γράφημα 4.3	87
Γράφημα 4.4	87
Γράφημα 4.5	88
Γράφημα 4.6	88
Γράφημα 4.7	89
Γράφημα 4.8	89
Γράφημα 4.9	90
Γράφημα 4.10	90
Γράφημα 4.11	91
Γράφημα 4.12	91
Γράφημα 4.13	92
Γράφημα 4.14	92
Γράφημα 4.15	93
Γράφημα 4.16	93
Γράφημα 4.17	94
Γράφημα 4.18	94
Γράφημα 4.19	95
Γράφημα 4.20	95
Γράφημα 5.1	103
Γράφημα 5.2	111
Γράφημα 5.3	111
Γράφημα 5.4	112
Γράφημα 5.5	113
Γράφημα 5.6	117
Γράφημα 5.7	118
Γράφημα 5.8	118
Γράφημα 5.9	121

Γράφημα 5.10	121
Γράφημα 5.11	122

Πίνακας Εικόνων

Εικόνα 5.1	100
Εικόνα 5.2	100

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ:

- Χρησιμοποιείται ο διεθνής συμβολισμός για τους δεκαδικούς αριθμούς. Δηλαδή, η υποδιαστολή παριστάνεται με τελεία και όχι, κατά την ελληνική πρακτική, με κόμμα. Αυτό γίνεται γιατί ο ελληνικός συμβολισμός είναι ασύμβατος με την αναπαράσταση των αριθμών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

- Ο συμβολισμός as υποδηλώνει τα δευτερόλεπτα τόξου (arcsec).

Περίληψη

Η Γεωδαισία είναι επιστήμη με έντονα εφαρμοσμένο χαρακτήρα που στηρίζεται στην ανάλυση δεδομένων από παρατηρήσεις. Η Γεωδαιτική Αστρονομία ασχολείται με τον προσδιορισμό διευθύνσεων στο χώρο, από σημεία της φυσικής γήινης επιφάνειας, χρησιμοποιώντας άστρα ως στόχους. Με σκοπό τον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους (Φ) αναπτύσσεται μια μεθοδολογία που αξιοποιεί ολόκληρη τη διαθέσιμη πληροφορία και παρέχει ευκολία, ταχύτητα και ακρίβεια.

Η απαίτηση ακρίβειας επιβάλλει την παρατήρηση των άστρων τη στιγμή της μεσημβρινής τους διάβασης. Στην περίπτωση αυτή το σημαντικότερο σφάλμα, που οφείλεται στη διάθλαση, αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ζενίθ και μπορεί να απαλειφθεί με παρατηρήσεις ζευγών άστρων που να μεσουρανούν συμμετρικά ως προς το ζενίθ (Μέθοδος Sterneck). Η αδυναμία εξασφάλισης συμμετρίας στην πράξη, προκαλεί την αναζήτηση μοντέλων περιγραφής της διάθλασης.

Τα μοντέλα διάθλασης βασίζονται σε γεωμετρικούς και φυσικούς νόμους και λαμβάνουν υπόψη τα γενικά χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας και τις τοπικές συνθήκες στη θέση του παρατηρητή. Οι υποθέσεις τους αφορούν επίπεδη ή σφαιρική γη με στρωματοποιημένη ατμόσφαιρα. Έτσι, η χρήση του νόμου του Snell, σε συνδυασμό με σχέσεις περιγραφής της μεταβολής του δείκτη διάθλασης κατά μήκος της φωτεινής ακτίνας, οδηγεί σε μαθηματικές εκφράσεις που περιέχουν παραμέτρους.

Ο αριθμητικός υπολογισμός (εκτίμηση) του αστρονομικού πλάτους και των παραμέτρων του μοντέλου διάθλασης γίνεται, στην παρούσα εργασία, με βάση τα παρατηρούμενα μεγέθη και με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων (αυτοβαθμονόμηση). Με έμφαση στην κατανόηση της λογικής που διέπει τη βέλτιστη επεξεργασία πλεοναζουσών παρατηρήσεων, αναφέρονται οι βασικές αρχές της συνόρθωσης. Έτσι, με δεδομένα τις αποκλίσεις και τις ζενίθιες αποστάσεις των άστρων, η επίλυση διαμορφώνεται ως προς τη μαθηματική της μορφή.

Η υλοποίηση των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια προγράμματος Η/Υ. Τα πειράματα με δεδομένα προσομοίωσης περιλαμβάνουν τη διερεύνηση της παθολογίας των συγκεκριμένων αριθμητικών διαδικασιών και την εκτίμηση των υπολογιστικών σφαλμάτων. Επιπλέον, παρέχουν πληροφορίες για το σύνολο της διαδικασίας προσδιορισμού με αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η συμπεριφορά και οι επιδόσεις της προτεινόμενης μεθοδολογίας μελετήθηκαν με δεδομένα αστρονομικών παρατηρήσεων, που έγιναν για το σκοπό αυτό. Η επεξεργασία των μετρήσεων, με συνόρθωση, οδηγεί στον υπολογισμό των ζενιθίων αποστάσεων και στον προσδιορισμό του πλάτους. Έμφαση δόθηκε στη σύγκριση των αποτελεσμάτων της αυτοβαθμονόμησης με τα αντίστοιχα της εφαρμογής της κλασικής μεθόδου Sterneck.

Μετά την ανάλυση των παρατηρήσεων έγινε φανερό ότι, με την προτεινόμενη μεθοδολογία αυτοβαθμονόμησης εντοπίζονται, ελέγχονται και περιορίζονται οι επιδράσεις των σφαλμάτων και εξασφαλίζεται ο προσδιορισμός του αστρονομικού πλάτους με ακρίβεια μερικών δεκάτων του δευτερολέπτου τόξου.

Summary

Geodesy is a science with a strongly applied character, based on the analysis of mostly observational data. Geodetic Astronomy is concerned with the determination of directions in space, from points on the physical earth surface, using stars as targets. In this work we present a methodology for the determination of astronomical latitude which uses all available information and offers ease, speed and precision.

The request for precision forces us to observe the stars at their meridian transit. In this case the main error, caused by the astronomical refraction, changes its sign on either side of zenith and can be removed by observing pairs of stars at symmetrical transits (Sterneck's method). The practical difficulty of ensuring symmetry creates the need of refractional models.

The refractional models are based on geometrical and physicals laws and take into account the general characteristics of the atmosphere and the conditions at the place of observer. Their theory is based on a flat or spherical earth with layered atmosphere. Therefore, the Snell's formula combined with expressions of refractive index along the light ray, results in functions which include parameters.

In this work, the numerical computation (estimation) of the astronomical latitude and the parameters of refractional models is based on the observations using the Least Squares Method (autocalibration). Emphasizing on the optimum processing of redundant observations, the basic principles of this technique are indicated. Thus, the mathematical expressions formed use the declinations and the zenith distances of stars.

All relevant algorithms have been implemented on an integrated development environment (IDE) on a personal computer. Experiments with simulated data examine the pathology of numerical techniques and the estimation of errors. Furthermore, they provide information for the determination using astronomical observations.

The performance of the proposed methodology has been examined with data of astronomical observations. Data processing results in the calculation of zenith distances and in the determination of latitude. The results were compared with those of the Sterneck's method.

In conclusion, the analysis of the observations shows that the proposed methodology of autocalibration detects, checks and constrains the effects of errors and provides for the determination of astronomical latitude with a precision of a few tenths of arcsec.

Εισαγωγή

Το πρόβλημα προσδιορισμού του αστρονομικού πλάτους, στη θεωρητική του πλευρά, ξεκινά με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν σχέσεις ανάμεσα σε παραμέτρους και σε φυσικά μεγέθη (π.χ. ζενίθιες γωνίες). Τα μαθηματικά αυτά μοντέλα βασίζονται σε γεωμετρικούς και φυσικούς νόμους που απλά περιγράφουν μια ομάδα φαινομένων, με τρόπο ικανοποιητικό σε σχέση με τα αντίστοιχα δεδομένα των παρατηρήσεων και την αντίστοιχη εφαρμογή. Επομένως, τα μαθηματικά μοντέλα αναφέρονται σε κάποιο "φυσικό σύστημα".

Ένα φυσικό σύστημα είναι ένα νοητικό κατασκεύασμα που αντιστοιχεί σε ένα μόνο μέρος της φυσικής πραγματικότητας (που είναι αδιαίρετη αφού όλα τα μέρη της βρίσκονται σε συνεχή αλληλεξάρτηση), αγνοώντας την αλληλεπίδραση με τον υπόλοιπο φυσικό κόσμο. Οι παράμετροι, που θεωρούνται ποσοτικά ιδιαίτερα σημαντικές και λαμβάνονται υπόψη, περιγράφουν το φυσικό σύστημα. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων αυτών απαιτεί την ύπαρξη μιας ποσοτικής πληροφορίας που προκύπτει από μετρήσεις.

Όμως, από την ίδια τη φύση της διαδικασίας των μετρήσεων προκύπτει μια σημαντική δυσκολία. Καταρχήν, οι μετρήσεις δίνουν αριθμητικά αποτελέσματα που "καταγράφουν", κατά κάποιο τρόπο, την πολυσύνθετη αντικειμενική πραγματικότητα. Επομένως, είναι επηρεασμένες από επιδράσεις που οφείλονται στο μέρος εκείνο της φυσικής πραγματικότητας που αφέθηκε έξω από το φυσικό σύστημα (επιδράσεις του περιβάλλοντος των μετρήσεων). Αλλά και μέσα στο ίδιο το φυσικό σύστημα μπορεί να υπάρχουν διαφορές, σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό, ανάμεσα στις πραγματικές σχέσεις των παραμέτρων - φυσικών μεγεθών και στις σχέσεις που εκφράζουν οι συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις (σφάλματα μαθηματικού μοντέλου).

Το ουσιαστικό όμως πρόβλημα στον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους είναι η αντιμετώπιση των σφαλμάτων των μετρήσεων. Ο τρόπος με τον οποίο, κάθε μια από τις δύο μεθόδους που χρησιμοποιούνται (Sterneck - αυτοβαθμονόμηση), περιορίζει τις επιδράσεις των σφαλμάτων αυτών παρουσιάζεται ως κεντρικό ερευνητικό αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Ειδικότερα, η εργασία περιλαμβάνει 6 κεφάλαια:

Στο κεφάλαιο 1 δίνονται οι ορισμοί των συστημάτων αναφοράς στην ουράνια σφαίρα και οι αρχές των δύο μεθόδων προσδιορισμού του αστρονομικού πλάτους.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα μοντέλα περιγραφής της αστρονομικής διάθλασης και αναλύονται οι θεωρίες - υποθέσεις τους.

Στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται λεπτομερώς οι μαθηματικοί τύποι που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των συναρτησιακών μοντέλων, με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων.

Στο κεφάλαιο 4 αναλύονται δεδομένα προσομοίωσης και δίνονται εκτιμήσεις των υπολογιστικών σφαλμάτων των αλγορίθμων.

Στο κεφάλαιο 5 επεξεργάζονται αστρονομικές παρατηρήσεις και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των δύο μεθόδων και γίνεται προσπάθεια ερμηνείας των αποτελεσμάτων. Η ερμηνεία αυτή στηρίζεται στην κατανόηση του χαρακτήρα, των δυνατοτήτων, αλλά και των περιορισμών της κάθε μεθόδου.

Η τεκμηριωμένη γνώση του τρόπου με τον οποίο γίνονται οι μετρήσεις, η ανάλυση των αριθμητικών δεδομένων που προκύπτουν απ' αυτές, αλλά και η επιλογή των συγκεκριμένων μαθηματικών εξισώσεων που θα αποτελέσουν το, κατά περίπτωση, καταλληλότερο μαθηματικό μοντέλο προσδιορίζει την επιστημονική συγκρότηση του Τοπογράφου Μηχανικού. Επομένως, το αντικείμενο του "μηχανικού των μετρήσεων" δεν αποτελεί μια απλή τεχνική, όπως ίσως από πρώτη όψη φαίνεται, αλλά μια σοβαρή επιστημονική μέθοδο που θεμελιώνεται από τους κλάδους της Φυσικής και των Μαθηματικών.

Κεφάλαιο 1

Προσδιορισμός Πλάτους

1.1 Επιφάνειες αναφοράς

Γεωδαισία είναι η επιστήμη που με παρατηρήσεις, μετρήσεις και υπολογισμούς προσδιορίζει το σχήμα (μορφή), το μέγεθος (διαστάσεις) και το πεδίο βαρύτητας της γης. Βασικός σκοπός της, επομένως, είναι ο προσδιορισμός της θέσης σημείων (οντοτήτων) της φυσικής γήινης επιφάνειας (φ.γ.ε.) σε δεδομένη χρονική στιγμή.

Η φυσική γήινη επιφάνεια (φ.γ.ε.) υλοποιείται άμεσα στη φυσική μας εποπτεία και θεωρείται το όριο μεταξύ της συμπαγούς και της υδάτινης επιφάνειας της γης και της ατμόσφαιρας. Είναι ο χώρος και το αντικείμενο μέτρησης, αποτύπωσης και μελέτης της γεωδαισίας.

Η μοναδική διεύθυνση που υλοποιείται στη φύση είναι η κατακόρυφος (διεύθυνση της βαρύτητας), που σχετίζεται με την κατασκευή των γεωδαιτικών οργάνων και επηρεάζει όλες τις μετρήσεις.

Η πραγματική επιφάνεια της γης στο κομμάτι της στεριάς της είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και τα βουνά δημιουργούν την εντύπωση, στην ανθρώπινη κλίμακα, μιας ιδιαίτερα ανώμαλης φ.γ.ε., η οποία δεν είναι δυνατόν να αποδοθεί με κάποια μαθηματική σχέση. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού επιλέγονται βοηθητικές επιφάνειες αναφοράς, που πλησιάζουν κατά το δυνατό το σχήμα και μέγεθος της πραγματικής γης. Οι μικρές αποκλίσεις, που θα προσδιοριστούν από την σύγκριση του σχήματος και του μεγέθους της πραγματικής γης με το μοντέλο αναφοράς, χρησιμεύουν σε μια επιστημονική ανάλυση για την ερμηνεία διαφόρων φυσικών παραμέτρων και φαινομένων.

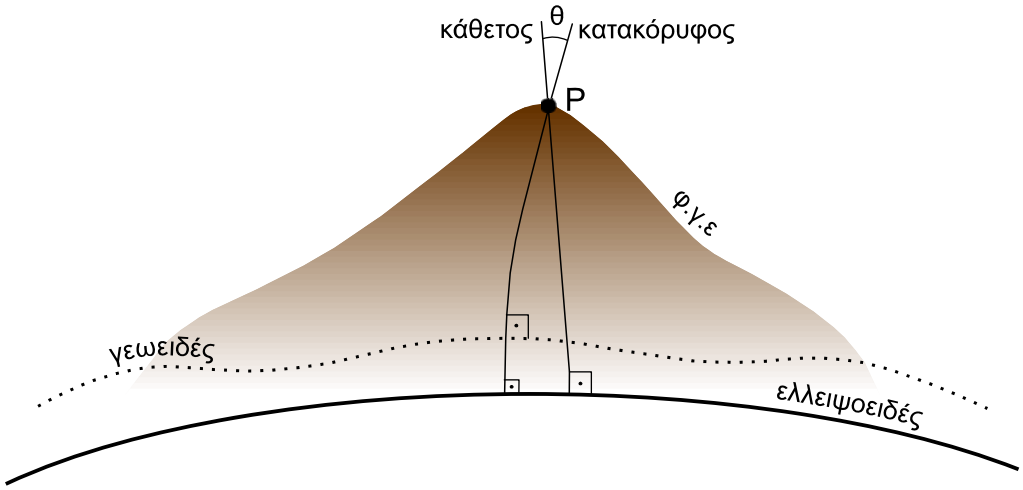
Οι επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το φυσικό και γεωμετρικό μοντέλο της γης και πάνω στις οποίες προβάλλουμε τα σημεία της φ.γ.ε. για να προσδιορίσουμε τη θέση τους, αλλά και τις μετρήσεις για να κάνουμε τους υπολογισμούς είναι τρεις: **το γεωειδές** (φυσικό μοντέλο), **το ελλειψοειδές εκ περιστροφής** (μαθηματικό μοντέλο) και **η σφαίρα** (προσεγγιστικό μοντέλο).

Πράγματι η γη σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί **σφαίρα** (από ομοιογενές υλικό και μάζα ίση με τη μάζα της γης) με ακτίνα 6371 km περίπου. Λόγω όμως της περιστροφής γύρω από τον άξονα της, η γη έχει πάρει το σχήμα ενός **ελλειψοειδούς εκ περιστροφής** (ε.ε.π.). Αν τελειοποιηθεί το μοντέλο έτσι ώστε να έχει τις ίδιες μηχανικές (φυσικές) ιδιότητες, αλλά πολύ λιγότερες επιφανειακές ανωμαλίες από την πραγματική επιφάνεια της γης, η περιβάλλουσα επιφάνεια είναι μια ισοδυναμική (χωροσταθμική) επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης. Η επιφάνεια αυτή, που πλησιάζει περισσότερο από κάθε άλλη ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης τη μέση στάθμη της θάλασσας (μ.σ.θ.), είναι **το γεωειδές**. Από τον ορισμό του γεωειδούς προκύπτει ότι η κατακόρυφος (η διεύθυνση του νήματος της στάθμης) είναι κάθετη στην επιφάνειά του σε κάθε σημείο του.

Γενικά, οι κατακόρυφοι είναι ευθείες ασύμβατες με φορά προς το κέντρο της γης. Για μικρές όμως εκτάσεις της φ.γ.ε., όπου η επίδραση της καμπυλότητας της γης δεν είναι σημαντική, μπορούν να θεωρηθούν παράλληλες. Έτσι χρησιμοποιούμε, στην περίπτωση αυτή, ως επιφάνεια αναφοράς, ένα οριζόντιο επίπεδο εφαπτόμενο

στο γεωειδές στο μέσο της περιοχής που είναι βέβαια κάθετο στη διεύθυνση της κατακορύφου [Μπιλλήρης Χ., 2006].

Για τον προσδιορισμό, επομένως, της θέσης ενός σημείου της φ.γ.ε., ως προς την επιφάνεια αναφοράς του απαιτείται να φέρουμε από το σημείο αυτό **κάθετη** προς την επιφάνεια αναφοράς (Σχήμα 1.1). Η διεύθυνση της καθέτου αυτής για την περίπτωση του γεωειδούς και του οριζοντίου επιπέδου είναι η **διεύθυνση της κατακορύφου**.



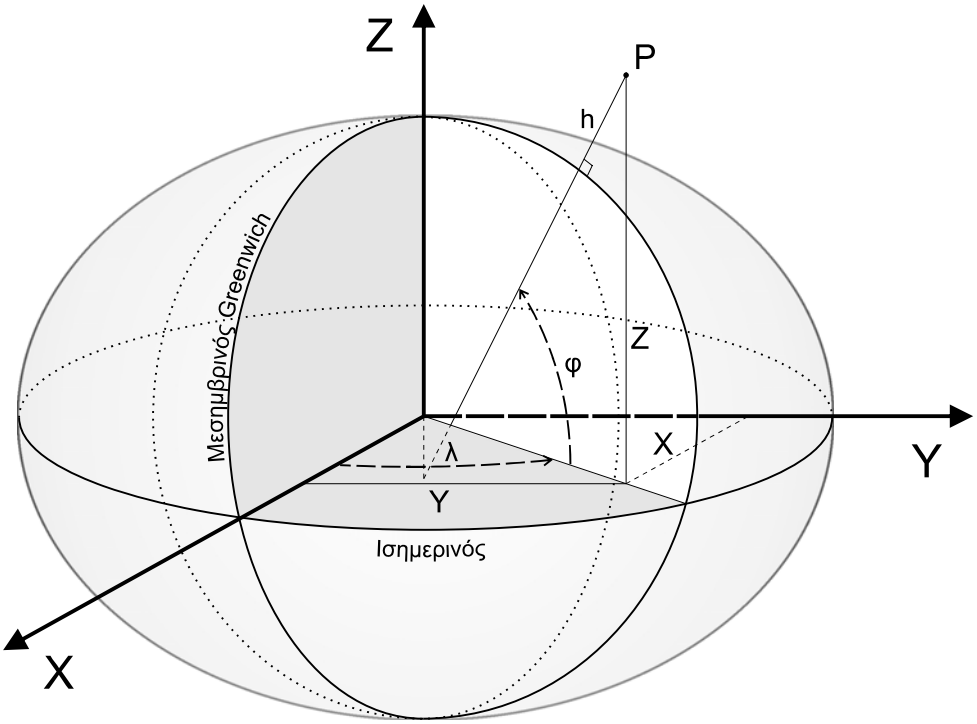
Σχήμα 1.1: Απόκλιση της κατακορύφου σε σημείο P της φ.γ.ε.

Η γωνία (θ) που σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης της κατακορύφου και της καθέτου στο ελλειψοειδές αναφοράς, στο σημείο P της επιφάνειας της γης, ονομάζεται *απόκλιση της κατακορύφου* (*deflection of the vertical*). Είναι μια γωνία στο χώρο και δίνει την κλίση μεταξύ των δύο επιφανειών (γεωειδούς και ε.ε.π.).

1.2 Συστήματα αναφοράς

1.2.1 Γήινα συστήματα αναφοράς

Γήινο ή Παγκόσμιο Σύστημα Αναφοράς καλείται κάθε σύστημα αναφοράς που έχει ως κέντρο του το κέντρο μάζας της γης, ως άξονα Z τον μέσο άξονα περιστροφής της, ως άξονα των X την κάθετη στον Z ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της γης προς τον μεσημβρινό του Greenwich και τον άξονα Y κάθετο στο επίπεδο XZ. Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής που χρησιμοποιείται ως επιφάνεια αναφοράς (γήινο ελλειψοειδές) έχει το ίδιο κέντρο και άξονα περιστροφής το μέσο άξονα περιστροφής της γης. Ο βασικός μεσημβρινός, απ' όπου μετράται το **γεωδαιτικό μήκος** (**λ**) από 0° - 360° ανατολικά, είναι ο μεσημβρινός του Greenwich. Το **γεωδαιτικό πλάτος** (**φ**) μετράται πάνω στο μεσημβρινό που περνά από το σημείο P (προβολή του σημείου της φυσικής γήινης επιφάνειας στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς), με αφετηρία τον ισημερινό, από 0° - 90° βόρεια και από 0° - (-90°) νότια. Η τρίτη συνιστώσα στο γήινο σύστημα αναφοράς είναι το (γεωμετρικό) **υψόμετρο** (**h**) του σημείου της φ.γ.ε., από το ελλειψοειδές (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Γεωδαιτικές συντεταγμένες σημείου P

Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο κυρίως παγκόσμια συστήματα αναφοράς:

A. Το Διεθνές Γήινο Σύστημα Αναφοράς (**I**nternational **T**errestrial **R**eference **S**ystem), που ορίζεται με κέντρο το κέντρο μάζας της γης, με άξονα των Z να περνάει από το μέσο πόλο της περιόδου 1900 - 1905, που λέγεται *Διεθνής Συμβατική Αφετηρία* (*CIO - Conventional International Origin*), με άξονα των X να περνάει από τον μεσημβρινό του Greenwich και άξονα των Y να συμπληρώνει το δεξιόστροφο σύστημα. Υλοποιείται με τις συντεταγμένες ενός μεγάλου αριθμού σταθμών που περιλαμβάνονται στο Διεθνές Γήινο Πλαίσιο Αναφοράς (International Terrestrial Reference Frame). Το ITRF βασίζεται σε μετρήσεις συγκεκριμένης εποχής (π.χ. ITRF 1996, Epoch 1997) και ορίζεται από τις θέσεις και τις ταχύτητες ενός δικτύου επίγειων σταθμών, οι οποίες έχουν προσδιοριστεί με μεγάλη ακρίβεια και παρακολουθούνται συνεχώς με μεθόδους δορυφορικής (GPS, SLR, LLR, DORIS) και διαστημικής (VLBI) γεωδαισίας.

B. Το WGS ’84 (World Geodetic System 1984), σύστημα αναφοράς των τεχνητών δορυφόρων GPS, το οποίο υλοποιείται μέσω των εκπεμπόμενων τροχιών (θέσεων) των δορυφόρων GPS και επίγειων σταθμών.

Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι, τα συστήματα αναφοράς της γεωδαισίας είναι όλα εντοπισμένα στον χώρο και συνδέονται με τη θέση και τις διαστάσεις της γης.

1.2.2 Συστήματα αναφοράς στην ουράνια σφαίρα

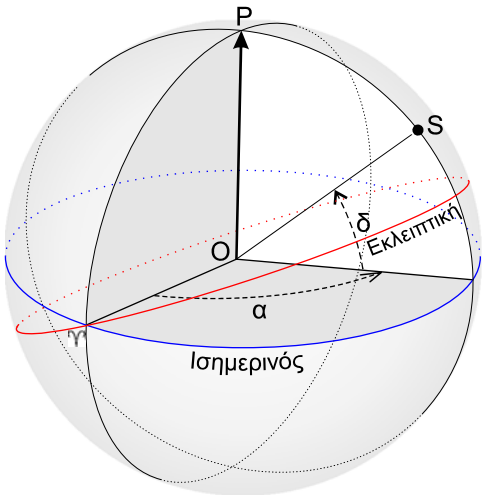
Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, η Γεωδαιτική Αστρονομία ασχολείται αποκλειστικά με διευθύνσεις, δηλαδή *ελεύθερα*, *μοναδιαία διανύσματα*. Ο όρος *θέση*

ενός σημείου δεν υπονοεί την *πραγματική του θέση* στην επιφάνεια της γης αλλά τη *διεύθυνση της κατακορύφου* (*direction of the vertical*), που ορίζεται ως το μοναδιαίο διάνυσμα με αντίθετη φορά από το *διάνυσμα της έντασης* (*επιτάχυνσης*) *του γήινου πεδίου βαρύτητας* στο σημείο αυτό. Επιπλέον η ισοδυναμία του απειροσυνόλου όλων των μοναδιαίων διανυσμάτων με τα σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας, μας δίνει τη δυνατότητα, για την περιγραφή των διανυσμάτων αυτών, χρησιμοποίησης σφαιρικών συντεταγμένων (Λ, Φ). Συνεπώς, η επιφάνεια αναφοράς της Γεωδαιτικής Αστρονομίας είναι μια μοναδιαία σφαίρα που μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε και να έχει οποιαδήποτε ακτίνα (που λαμβάνεται ίση με τη μονάδα) και ονομάζεται **ουράνια σφαίρα**.

Τα συστήματα αναφοράς ορίζονται στην ουράνια σφαίρα βάσει των διαφόρων κινήσεων της γης και του πεδίου βαρύτητας. Για τον προσανατολισμό των συστημάτων αυτών στο χώρο απαιτείται μια συγκεκριμένη διεύθυνση ευθείας ή ισοδύναμα, η διεύθυνση ενός επιπέδου. Το επίπεδο αυτό ορίζει, στην ουράνια σφαίρα, ένα μέγιστο κύκλο που έχει ως πόλους τα σημεία που ορίζονται από τη διεύθυνση της ευθείας. Από τους πόλους αυτούς περνούν άπειροι μέγιστοι κύκλοι, όλοι κάθετοι στο βασικό. Ένας από αυτούς επιλέγεται (αυθαίρετα) ως αφετηρία για τη μέτρηση της πρώτης σφαιρικής συντεταγμένης. Ο ορισμός του συστήματος ολοκληρώνεται με τον καθορισμό της μονάδας και της φοράς μέτρησης των συντεταγμένων [Κορακίτης Ρ., 2008].

1.2.2.1 Ουρανογραφικό σύστημα

Το Ουρανογραφικό Σύστημα Αναφοράς (Celestial Reference System) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της θέσης των άστρων (Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Ουρανογραφικό σύστημα αναφοράς

Βασική διεύθυνση είναι η *διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας περιστοφής της γης* που τέμνει την ουράνια σφαίρα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία, το Βόρειο και το Νότιο Πόλο του ουρανού. Η διάμετρος αυτή ονομάζεται και άξονας του κόσμου. Το επίπεδο που είναι κάθετο στην διεύθυνση αυτή ορίζει στην ουράνια σφαίρα το βασικό μέγιστο κύκλο του ουρανογραφικού συστήματος που λέγεται *ουράνιος Ισημερινός* (*celestial Equator*). Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι που είναι κάθετοι στον ουράνιο Ισημερινό ονομάζονται *ωριαίοι κύκλοι* (*hour circles*) και ως αφετηρία

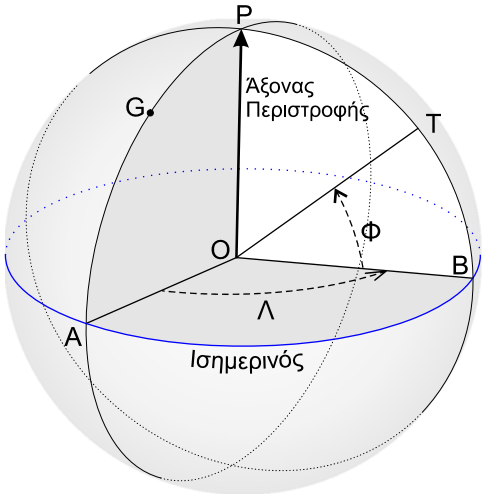
των μετρήσεων ορίζεται ο ωριαίος κύκλος που περνά από το Εαρινό Ισημερινό σημείο ♈ (ή πρώτο σημείο του Κριού - vernal equinox ή first point of Aries). Οι συντεταγμένες στο ουρανογραφικό σύστημα είναι η *ορθή αναφορά* **α** (*right ascension*), ως το μέτρο ενός τόξου του Ισημερινού, που μετράται κατά την ορθή φορά και σε συμβατικές μονάδες γωνίας που λέγονται *ώρες*, από 0^h ως 24^h, και η *απόκλιση* **δ** (*declination*), ως το μέτρο ενός τόξου του ωριαίου, με αφετηρία τον Ισημερινό, από 0° ως $+90^o$ προς το Βόρειο Πόλο και από 0° ως -90° προς το Νότιο Πόλο.

Το ουρανογραφικό σύστημα που χρησιμοποιείται σήμερα είναι το Διεθνές Ουράνιο Σύστημα Αναφοράς (**I**nternational **C**elestial **R**eference **S**ystem). Το σύστημα αυτό υλοποιείται από μια ομάδα εξωγαλαξιακών ραδιοπηγών (quasars), οι οποίες αποτελούν το Διεθνές Ουράνιο Πλαίσιο Αναφοράς (**ICR F**rame).

Το ουρανογραφικό σύστημα (ICRS) συνδέεται με το γήινο (ITRF) μέσω των **Παραμέτρων Προσανατολισμού της Γης** (**E**arth **O**rientation **P**arameters). Οι παράμετροι αυτές περιγράφουν τη στροφή του ενός συστήματος ως προς το άλλο ως συνάρτηση του χρόνου [IERS, 2000].

1.2.2.2 Αστρονομικό σύστημα

Το Αστρονομικό Σύστημα Αναφοράς (Astronomical Reference System) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της θέσης σημείων της γης (Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4: Αστρονομικό σύστημα αναφοράς

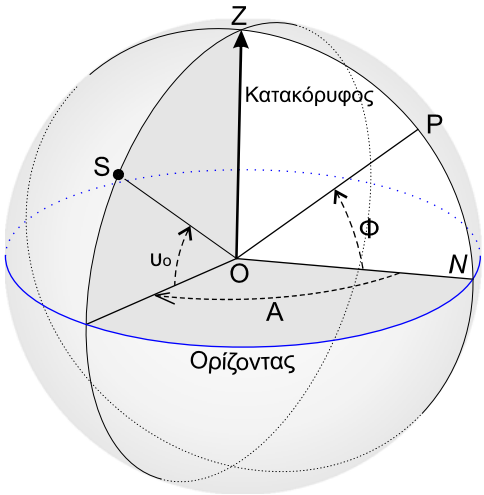
Η βασική διεύθυνση που το ορίζει είναι η *διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της γης* και επομένως, βασικός μέγιστος κύκλος είναι ο *ουράνιος Ισημερινός*. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από τους ουράνιους Πόλους ονομάζονται *μεσημβρινοί* (*meridians*) και ως αφετηρία των μετρήσεων επιλέγεται εκείνος που περιέχει το ζενίθ του Γκρήνουιτς (Greenwich), ο οποίος ονομάζεται *πρωτεύων μεσημβρινός* (*prime meridian*). Οι συντεταγμένες στο αστρονομικό σύστημα είναι το *αστρονομικό μήκος* **Λ** (*astronomical longitude*), ως το μέτρο ενός τόξου του Ισημερινού, που μετράται κατά την ορθή φορά σε *μοίρες*, από 0° ως 360°, και το *αστρονομικό πλάτος* **Φ** (*astronomical latitude*), ως το μέτρο ενός τόξου του

μεσημβρινού, από 0° ως $+90^o$ προς το Βόρειο Πόλο και από 0° ως -90° προς το Νότιο Πόλο.

Συμπερασματικά, τα δύο συστήματα (ουρανογραφικό - αστρονομικό) στηρίζονται στην ίδια βασική διεύθυνση (διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας της γης) και διαφέρουν μόνο κατά μια μεταβαλλόμενη γωνία στροφής (γύρω από τον άξονα του κόσμου) λόγω της ημερήσιας περιστροφής της γης.

1.2.2.3 Οριζόντιο σύστημα (τοπικό)

Το Οριζόντιο Σύστημα ή σύστημα του ορίζοντα (Horizon System) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της διεύθυνσης παρατήρησης προς ένα άστρο, όπως αυτό φαίνεται από έναν τόπο κάποια χρονική στιγμή (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Οριζόντιο σύστημα αναφοράς

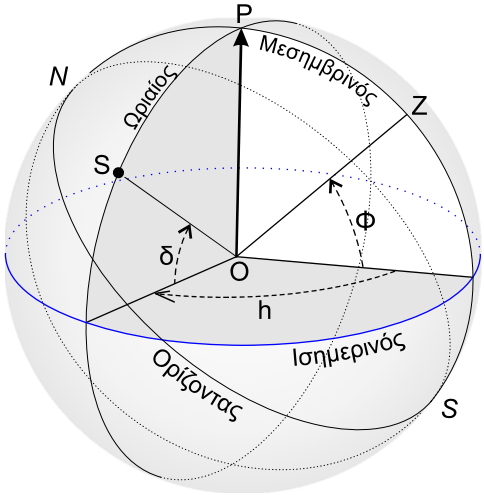
Η βασική διεύθυνση που ορίζει το σύστημα είναι η *διεύθυνση της κατακορύφου* του τόπου. Βασικός μέγιστος κύκλος του συστήματος είναι ο *αστρονομικός ορίζοντας* (*astronomical horizon*) που έχει ως πόλους το ζενίθ και το ναδίρ του τόπου. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από το ζενίθ και το ναδίρ ονομάζονται *κατακόρυφοι κύκλοι* (*vertical circles*) και ως αφετηρία των μετρήσεων επιλέγεται εκείνος που περιέχει το Βόρειο Πόλο του ουρανού, ο οποίος ονομάζεται *αστρονομικός μεσημβρινός* (*astronomical meridian*) του τόπου. Οι συντεταγμένες στο οριζόντιο σύστημα είναι το *αστρονομικό αζιμούθιο* **A** (*astronomical azimuth*), ως το μέτρο ενός τόξου του ορίζοντα, που μετράται κατά την ανάδρομη φορά σε *μοίρες*, από 0° ως 360°, και το *ύψος* υ_o (*altitude*), ως το μέτρο ενός τόξου του κατακόρυφου κύκλου, με αφετηρία τον ορίζοντα ως τη διεύθυνση παρατήρησης, από 0° ως $+90^o$ προς το ζενίθ (πάνω από τον ορίζοντα) και από 0° ως -90° προς το ναδίρ (κάτω από τον ορίζοντα). Συνήθως, αντί του ύψους, χρησιμοποιείται η *ζενίθια απόσταση* ή *ζενίθια γωνία* $\mathbf{z}_o$ (*zenith distance* or *zenith angle*), που είναι η συμπληρωματική του γωνία και μετράται σε *μοίρες*, από 0° στο ζενίθ μέχρι 180° στο ναδίρ. Ισχύει δηλαδή πάντα:

$$z_o = 90^o - \upsilon_o \tag{1.1}$$

Σημειώνεται ότι, τα σημεία τομής του ορίζοντα με τον αστρονομικό μεσημβρινό ονομάζονται *Βορράς* (*North*) με $A = 0^o$ και *Νότος* (*South*) με $A = 180^o$.

1.2.2.4 Ισημερινό σύστημα

Το Ισημερινό Σύστημα ή σύστημα ωριαίας γωνίας (hour angle system) αποτελεί συνδυασμό του οριζόντιου και του ουρανογραφικού συστήματος και είναι χρήσιμο για τη σύνδεση των άλλων συστημάτων (Σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6: Ισημερινό σύστημα αναφοράς

Το σύστημα έχει την ίδια γεωμετρία με το ουρανογραφικό, όμως, αφετηρία των μετρήσεων είναι ο *ωριαίος κύκλος που περνά από το ζενίθ*, δηλαδή ο *αστρονομικός μεσημβρινός* του τόπου. Οι συντεταγμένες στο ισημερινό σύστημα είναι η *ωριαία γωνία* **h** (*hour angle*), ως το μέτρο ενός τόξου του ισημερινού, που μετράται κατά την ανάδρομη φορά σε *ώρες*, από 0^h ως 24^h, και η *απόκλιση* **δ** (*declination*), όπως ακριβώς και στο ουρανογραφικό σύστημα. Επιπρόσθετα, η απόκλιση δ είναι ανεξάρτητη τόπου και χρόνου, ενώ η ωριαία γωνία εξαρτάται από τον τόπο και μεταβάλλεται με το χρόνο.

1.3 Φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας

Η ημερήσια περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της (κατά την ορθή φορά) προκαλεί τη φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας κατά την ανάδρομη φορά. Έτσι, κάθε άστρο φαίνεται να διαγράφει καθημερινά μια τροχιά στην ουράνια σφαίρα κατά μήκος ενός μικρού κύκλου παράλληλου στον ουράνιο Ισημερινό (κύκλος απόκλισης). Επιπλέον, η κίνηση κάθε άστρου κατά μήκος της τροχιάς του οριοθετείται από χαρακτηριστικές θέσεις και φαινόμενα. Δηλαδή, ανάλογα με την κλίση του άξονα περιστροφής ως προς τον ορίζοντα (που εξαρτάται από το πλάτος Φ του τόπου) και την απόσταση της τροχιάς από τον Ισημερινό (που εξαρτάται από την απόκλιση δ του άστρου), η τροχιά αυτή μπορεί να βρίσκεται ολόκληρη πάνω ή κάτω από τον ορίζοντα ή να τέμνεται από αυτόν σε δύο σημεία. Συγκεκριμένα, για τόπους του Βορείου ημισφαιρίου αν ισχύει η συνθήκη

$$\Phi - 90^o \leq \delta \leq 90^o - \Phi \tag{1.2}$$

ο ορίζοντας τέμνει την τροχιά και το άστρο ονομάζεται αμφιφανές (από το συγκεκριμένο τόπο). Το τμήμα της τροχιάς πάνω από τον ορίζοντα (από την ανατολή μέχρι τη δύση του άστρου) αποτελεί το ημερήσιο τόξο, ενώ το υπόλοιπο το νυκτερινό τόξο. Στην περίπτωση που ισχύει

$$\delta > 90^o - \Phi \tag{1.3}$$

ολόκληρη η τροχιά του άστρου βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα του τόπου και το άστρο ονομάζεται αειφανές. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή ισχύει

$$\delta < \Phi - 90^o \tag{1.4}$$

ολόκληρη η τροχιά του άστρου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα του τόπου και το άστρο ονομάζεται αφανές.

Συνέπεια του ορισμού του αστρονομικού μεσημβρινού είναι το γεγονός ότι αυτός τέμνει τις τροχιές όλων των άστρων κατά διάμετρο. Το σημείο τομής που είναι πλησιέστερα στο ζενίθ του τόπου λέγεται σημείο *άνω μεσουράνησης* (ή *άνω μεσημβρινής διάβασης* - *upper transit*) του άστρου και αντιστοιχεί στο σημείο της τροχιάς με το μέγιστο ύψος. Το αντιδιαμετρικό σημείο τομής λέγεται σημείο *κάτω μεσουράνησης* (ή *κάτω μεσημβρινής διάβασης* - *lower transit*) του άστρου και αντιστοιχεί στο σημείο της τροχιάς με το ελάχιστο ύψος. Προφανώς, όταν το άστρο είναι αμφιφανές, η άνω μεσουράνηση συμβαίνει πάνω και η κάτω μεσουράνηση συμβαίνει κάτω από τον ορίζοντα. Στα αειφανή άστρα και οι δύο μεσημβρινές διαβάσεις είναι ορατές, συμβαίνουν δηλαδή πάνω από τον ορίζοντα, ενώ στα αφανή καμία δεν είναι ορατή. Επιπρόσθετα, αν ισχύει

$$\delta > \Phi \tag{1.5}$$

το άστρο μεσουρανεί βόρεια του ζενίθ. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν

$$\delta < \Phi \tag{1.6}$$

το άστρο μεσουρανεί νότια του ζενίθ (σε τόπο του Βορείου ημισφαιρίου).

1.4 Αναγωγές των συντεταγμένων

Μια σειρά από κινήσεις και φαινόμενα προκαλούν μεταβολές στις τιμές των ουρανογραφικών συντεταγμένων κάθε άστρου αλλά και στις αστρονομικές συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου τόπου.

1.4.1 Αναγωγές ουρανογραφικών συντεταγμένων

Για τις συνήθεις εφαρμογές της Γεωδαιτικής Αστρονομίας (π.χ. προσδιορισμός Φ, Λ) απαιτείται να είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άστρων που χρησιμοποιούνται ως στόχοι κατά τις παρατηρήσεις. Οι θέσεις αυτές των άστρων,

καθώς και παράμετροι για την ακτινική ταχύτητα (radial velocity), την ίδια κίνηση (proper motion) και την παράλλαξη (parallax) περιλαμβάνονται σε αστρομετρικούς καταλόγους που αναφέρουν τη **μέση θέση** (**mean place**) σε δεδομένη εποχή και σύστημα αναφοράς (π.χ. J2000 και ICRS).

Μεταξύ δύο διαφορετικών εποχών προκαλείται αλλαγή της διεύθυνσης του άξονα περιστροφής της γης στο χώρο, εξαιτίας των φαινομένων της μετάπτωσης (precession) και της κλόνησης (nutation). Η μετάπτωση, ως συνάρτηση του χρονικού διαστήματος, αποτελεί το ομαλό μέρος της μεταβολής του άξονα γύρω απ' αυτόν της εκλειπτικής, ενώ το περιοδικό της μέρος είναι η κλόνηση που υπολογίζεται για συγκεκριμένη χρονική στιγμή (παρατήρησης). Δηλαδή, εφαρμόζοντας κάποιο μοντέλο (π.χ. IAU 1976, IAU 2000A) υπολογίζουμε την μετάπτωση και μετατρέπουμε τις συντεταγμένες από μια μέση θέση στην αρχική εποχή, στη μέση θέση στην τελική εποχή. Χρησιμοποιώντας και κάποιο μοντέλο κλόνησης (π.χ. 1980, MHB 2000), ανάγουμε τις συντεταγμένες από τη μέση θέση της ημερομηνίας στην **αληθή θέση** (**true place**), επίσης της ημερομηνίας.

Τόσο η μέση όσο και η αληθής αποτελούν θεωρητικές θέσεις, στις οποίες θα έβλεπε το άστρο ένας φανταστικός παρατηρητής που θα βρισκόταν στο κέντρο μάζας του ηλιακού συστήματος (ηλιοκεντρικές θέσεις). Για την εύρεση της γεωκεντρικής θέσης του άστρου λαμβάνεται υπόψη η κίνηση της γης γύρω από τον Ήλιο. Δηλαδή, γίνονται οι αναγωγές εξαιτίας των φαινομένων της ετήσιας παράλλαξης (annual parallax) και της ετήσιας αποπλάνησης (annual aberration) και από την αληθή θέση καταλήγουμε στη **φαινόμενη θέση** (**apparent place**).

Οι φαινόμενες ουρανογραφικές συντεταγμένες ενός άστρου αναφέρονται στο κέντρο της γης, ενώ οι παρατηρήσεις του γίνονται στην επιφάνειά της. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι η εμφάνιση της γεωκεντρικής παράλλαξης (geocentric parallax), που είναι εντελώς αμελητέα για παρατηρήσεις άστρων. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της ημερήσιας αποπλάνησης (diurnal aberration), κατά την παρατήρηση μεσημβρινών διαβάσεων, τα άστρα φαίνεται ότι μεσουρανούν αργότερα από την ώρα που πραγματικά αυτό συμβαίνει. Η διόρθωση της επίδρασης αυτής γίνεται είτε στην τιμή του χρόνου παρατήρησης που αντιστοιχεί στην μεσουράνηση, είτε στο αστρονομικό μήκος Λ. Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι, ή φαινόμενη διαφέρει από την **παρατηρούμενη θέση** (**observed place**) γιατί έχει διορθωθεί για τις επιδράσεις της γεωκεντρικής παράλλαξης, της ημερήσιας αποπλάνησης αλλά και της αστρονομικής διάθλασης.

Η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου της διάθλασης και η διαδικασία υπολογισμού της επίδρασης της στον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους (Φ) εξετάζεται στα δύο επόμενα κεφάλαια.

1.4.2 Αναγωγή αστρονομικών συντεταγμένων

Οι αστρονομικές συντεταγμένες Λ και Φ, όπως προσδιορίζονται από αστρονομικές παρατηρήσεις, αναφέρονται στον αληθή (στιγμιαίο) πόλο της ημερομηνίας. Για να χρησιμοποιηθούν σε γεωδαιτικές εφαρμογές (π.χ. υπολογισμό της απόκλισης της κατακορύφου) πρέπει να αναχθούν στον Συμβατικό Πόλο (CIO) του γήινου συστήματος. Η αναγωγή αυτή γίνεται από τις σχέσεις:

$$\Lambda_{CIO} = \Lambda - (x_p \sin\Lambda + y_p \cos\Lambda) \tan\Phi \quad (1.7)$$

$$\Phi_{CIO} = \Phi - (x_p \cos\Lambda - y_p \sin\Lambda) \quad (1.8)$$

όπου τα x_p, y_p είναι οι παράμετροι της κίνησης του Πόλου.

Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 1.1) παρουσιάζονται συνοπτικά τα αίτια των μεταβολών των τιμών των συντεταγμένων. Επιπλέον, αναφέρονται οι απαιτούμενες διορθώσεις στις ουρανογραφικές συντεταγμένες του αστρομετρικού καταλόγου προκειμένου να υπολογιστούν οι φαινόμενες θέσεις των άστρων τη στιγμή της παρατήρησης. Τέλος, δεν παραλείπεται και η αναγωγή που πρέπει να γίνεται στις προσδιοριζόμενες τιμές των αστρονομικών συντεταγμένων ενός τόπου.

Συντεταγμένες	**Αιτία**	**Διόρθωση**	**Ενδεικτική τιμή διόρθωσης**
(α, δ)	Κίνηση παρατηρούμενου άστρου	Ίδια κίνηση	Μέχρι 10"/χρόνο
	Σχετική κίνηση του παρατηρητή ως προς το άστρο	*Ημερήσια αποπλάνηση*	*Μέχρι 0".3*
		Γεωκεντρική παράλλαξη	Αμελητέα
		Ετήσια αποπλάνηση	Μέχρι 20"
		Ετήσια παράλλαξη	0".001 - 0".1
	Μετατόπιση συστήματος αναφοράς	Κλόνηση	Μέχρι 20"
		Μετάπτωση	50"/χρόνο
(Λ, Φ)	Κίνηση του Πόλου	Αναγωγή στον CIO	0".02 - 0".5

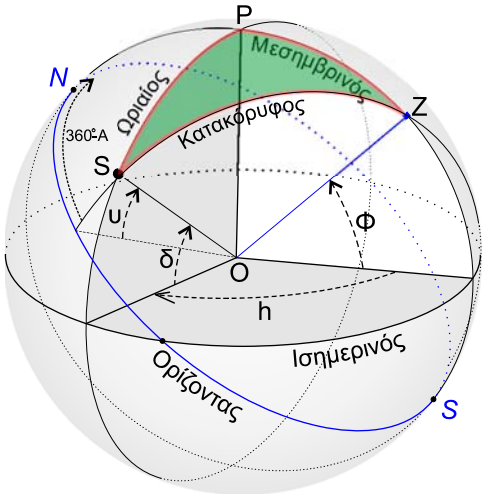
Πίνακας 1.1: Αναγωγές των συντεταγμένων

1.5 Προσδιορισμός αστρονομικού πλάτους (Φ)

Με βάση τα σχήματα 1.5 και 1.6 παρατηρούμε ότι το αστρονομικό πλάτος είναι το **ύψος του Βορείου Πόλου** ή διαφορετικά η **απόκλιση του ζενίθ** στο συγκεκριμένο τόπο. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι, το αστρονομικό πλάτος είναι η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της κατακορύφου ενός σημείου με το επίπεδο του Ισημερινού και επιπλέον, μαζί με το αστρονομικό μήκος μπορούν να χαρακτηριστούν ως παρατηρήσεις της διεύθυνσης του διανύσματος της βαρύτητας στο σημείο αυτό.

Για να γίνει οποιοσδήποτε υπολογισμός πρέπει να βρεθούν οι κατάλληλες μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων των συστημάτων αναφοράς. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ένα σφαιρικό τρίγωνο στην ουράνια σφαίρα, που έχει βασικά στοιχεία (πλευρές και γωνίες) σχετιζόμενα μ' αυτές. Το τρίγωνο αυτό, που ονομάζεται **τρίγωνο θέσης** (**position triangle** or **astronomical triangle**) σχηματίζεται με κορυφές το άστρο (S), τον ορατό πόλο (P) και το ζενίθ του τόπου (Z)

(Σχήμα 1.7). Σημειώνεται επίσης ότι, οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων συντεταγμένων μπορούν να προσδιοριστούν με εφαρμογή των τύπων της σφαιρικής τριγωνομετρίας.



Σχήμα 1.7: Τρίγωνο θέσης

Ο προσδιορισμός του πλάτους με παρατήρηση κάποιου άστρου μπορεί να γίνει εφόσον είναι γνωστά τρία τουλάχιστον στοιχεία του τριγώνου θέσης. Τα στοιχεία αυτά, συνήθως, είναι: η απόκλιση δ του άστρου, η ζενίθια απόσταση z και η υπολογιζόμενη (από το χρόνο παρατήρησης) ωριαία γωνία h. Η βασική σχέση που συνδέει τα στοιχεία αυτά με το πλάτος Φ προκύπτει με εφαρμογή του νόμου συνημιτόνων:

$$\cos(90^o - \upsilon) = \cos(90^o - \delta) \cdot \cos(90^o - \Phi) + \sin(90^o - \delta) \cdot \sin(90^o - \Phi) \cdot \cosh \qquad \text{ή}$$

$$\cos z = \sin\delta \cdot \sin\Phi + \cos\delta \cdot \cos\Phi \cdot \cosh \qquad (1.9)$$

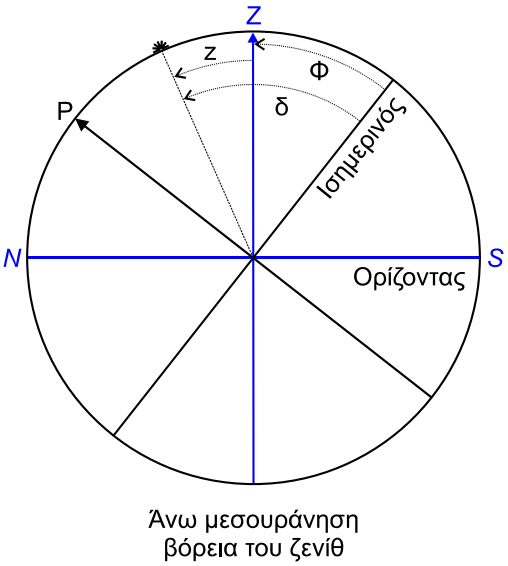
Σε κάθε διαδικασία προσδιορισμού αναζητούνται οι ευνοϊκότερες συνθήκες παρατήρησης (μετρήσεις & αβεβαιότητες) ώστε να επιτευχθεί ο κατάλληλος συνδυασμός από την άποψη της ακρίβειας των προβλεπόμενων αποτελεσμάτων αλλά και από την άποψη της οικονομίας χρόνου παραμονής στο ύπαιθρο και κόστους.

Κατά τον υπολογισμό του πλάτους από την παραπάνω σχέση υπάρχουν σφάλματα από διάφορες πηγές. Με δεδομένο ότι οι ουρανογραφικές συντεταγμένες (α, δ) του άστρου είναι γνωστές με αρκετή ακρίβεια, εξετάζονται οι επιδράσεις των σφαλμάτων της ζενίθιας απόστασης (δz) και της ωριαίας γωνίας (δh) που προκαλούν σφάλματα $\delta\Phi_z$ και $\delta\Phi_h$ στην τιμή του πλάτους, αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό τους σχηματίζουμε τα μερικά διαφορικά της σχέσης 1.9 και μετά από κάποιες αντικαταστάσεις, προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι για τα σφάλματα:

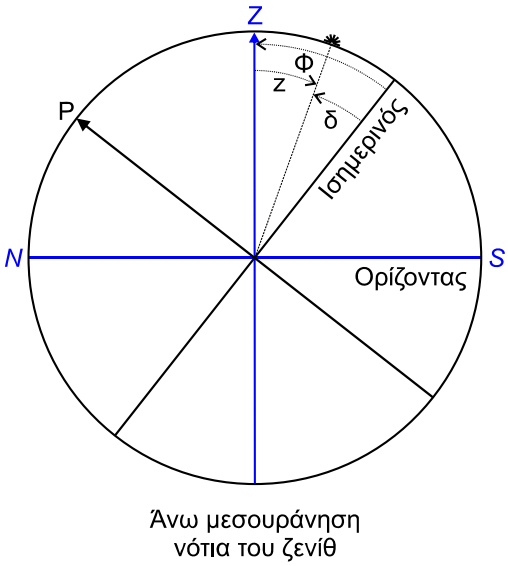
$$\delta\Phi_z = \frac{-1}{\cos A} \cdot \delta z \qquad (1.10)$$

$$\delta\Phi_h = -\cos\Phi \cdot \tan A \cdot \delta h \qquad (1.11)$$

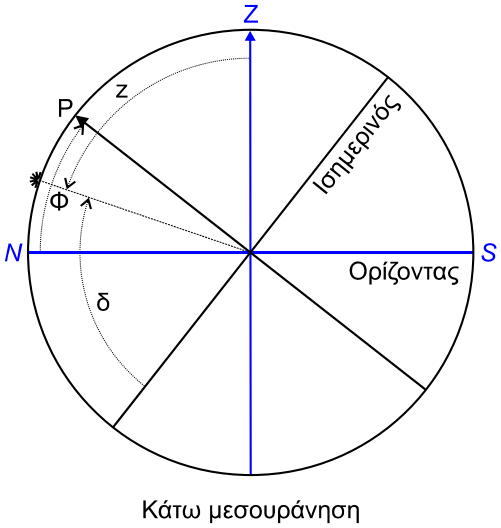
Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι αν $A = 0^o$ ή $A = 180^o$, το σφάλμα $\delta\Phi_z$ γίνεται ελάχιστο (ίσο με το δz), ενώ το σφάλμα $\delta\Phi_h$ μηδενίζεται. Επομένως, ο προσδιορισμός του πλάτους πρέπει να γίνεται τη στιγμή της μεσημβρινής διάβασης του άστρου ή πολύ κοντά σ' αυτή. Επιπλέον, τη στιγμή της μεσουράνησης, το τρίγωνο θέσης εκφυλίζεται σε μια τριάδα τόξων του μεσημβρινού που σχετίζονται μεταξύ τους με απλές αλγεβρικές σχέσεις, στις οποίες δεν υπεισέρχεται η ωριαία γωνία h (Σχήματα 1.8 , 1.9 , 1.10).



Σχήμα 1.8



Σχήμα 1.9



Σχήμα 1.10

Από τα παραπάνω σχήματα (προβολές στο επίπεδο του μεσημβρινού) γίνεται φανερό ότι το πλάτος, σε τόπους του Βορείου ημισφαιρίου, υπολογίζεται από τα δ και z με τις σχέσεις:

$\Phi = \delta - z$ άνω μεσουράνηση <u>βόρεια</u> του ζενίθ (1.12)

$\Phi = \delta + z$ άνω μεσουράνηση <u>νότια</u> του ζενίθ (1.13)

Προφανώς, από τις σχέσεις αυτές συνεπάγεται ότι $\delta\Phi = \mp\ \delta z$ (όπως προκύπτει και από το γενικό τύπο 1.10). Επειδή το μεγαλύτερο μέρος του σφάλματος δz οφείλεται στην αστρονομική διάθλαση, η επίδραση του μπορεί να εξαλειφθεί αν παρατηρηθεί ένα ζευγάρι άστρων, που να μεσουρανούν εκατέρωθεν του ζενίθ και έχουν

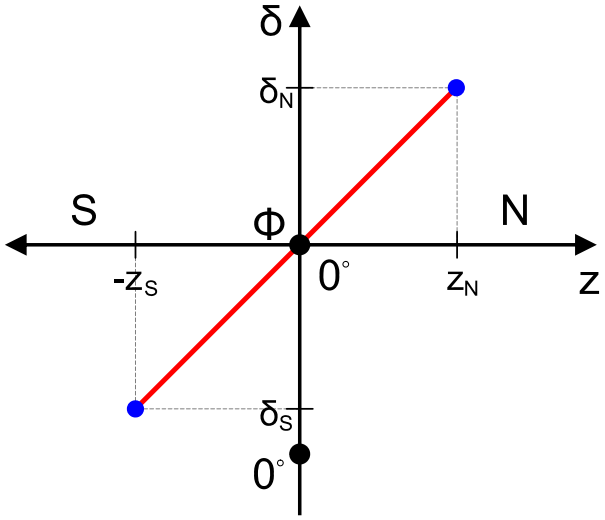
- Ίδια ζενίθια απόσταση (συμμετρία ως προς το ζενίθ).
- Μικρή διαφορά χρόνου μεσουράνησης (ώστε να είναι ίδια η κατάσταση της ατμόσφαιρας).

Κάθε ζευγάρι άστρων (βόρειο N και νότιο S) δίνει μια τιμή και το πλάτος προκύπτει ως ο μέσος όρος των αντίστοιχων τιμών σύμφωνα με τις σχέσεις 1.12 και 1.13:

$$\Phi = \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} = \frac{\delta_N + \delta_S}{2} + \frac{z_S - z_N}{2} = \frac{\delta_N + \delta_S}{2} \qquad (1.14)$$

Επιπρόσθετα, αν το ζεύγος των άστρων παρασταθεί σε άξονες z, δ παρατηρούμε ότι το αστρονομικό πλάτος (δ όταν $z = 0^o$) είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημεία (Γράφημα 1.1).

Μέσο ευθυγράμμου τμήματος $= \left(\frac{z_N - z_S}{2}, \frac{\delta_N + \delta_S}{2}\right) = \left(0, \frac{\delta_N + \delta_S}{2}\right) = (0, \Phi)$

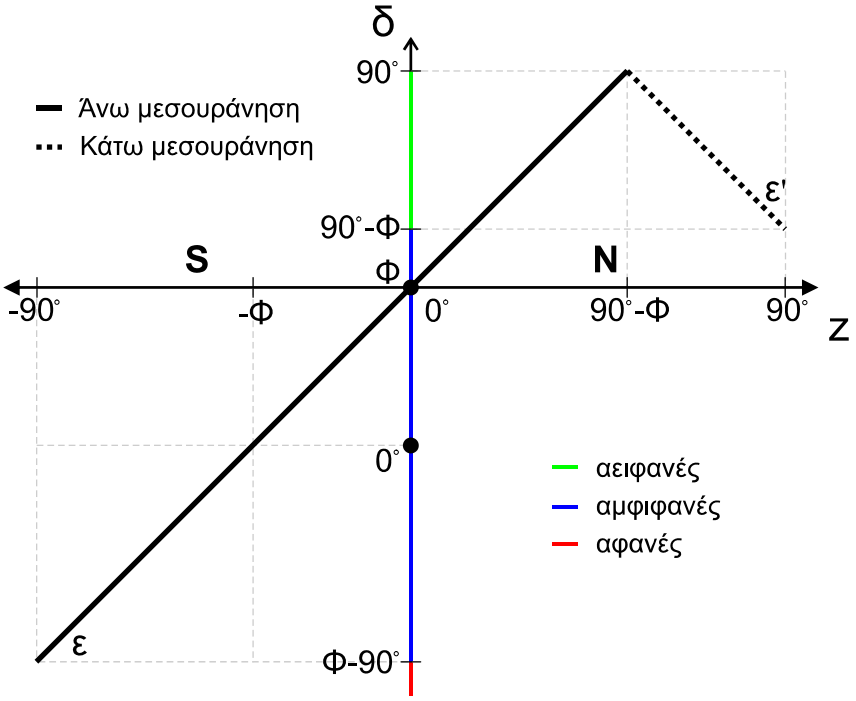


Γράφημα 1.1: Συμμετρικό ζεύγος άστρων σε άξονες z, δ

Στην πράξη όμως, δεν είναι δυνατό να βρεθούν άστρα σε ακριβώς συμμετρικές θέσεις. Αναδιατυπώνοντας, λοιπόν, τις παραπάνω αρχές: Παρατηρείται ένα ζεύγος άστρων (βόρειο N και νότιο S) που έχουν την ίδια περίπου ζενίθια απόσταση και στη μικρότερη δυνατή διαφορά χρόνου μεσουράνησης. Οι μετρημένες ζενίθιες αποστάσεις διορθώνονται από τη διάθλαση και η μέση τιμή του πλάτους είναι απαλλαγμένη από την ατελή διόρθωση της επίδρασής της (Μέθοδος Sterneck).

$$\Phi = \frac{\Phi_N + \Phi_S}{2} = \frac{\delta_N + \delta_S}{2} + \frac{z_S - z_N}{2} \qquad (1.15)$$

Έχοντας συμβολίσει με z_o τις μετρούμενες ζενίθιες αποστάσεις, στην περίπτωση που παρατηρηθούν μεσημβρινές διαβάσεις άστρων και τα αποτελέσματα τοποθετηθούν σε άξονες z, δ, εύκολα διαπιστώνεται ότι τα σημεία (z_o, δ) βρίσκονται πολύ κοντά στις ευθείες ε, ε' του παρακάτω γραφήματος (Γράφημα 1.2).



Γράφημα 1.2: Μεσουρανήσεις άστρων

Οι συστηματικές διαφορές των σημείων (z_o, δ) από τα σημεία των ευθειών οφείλονται στην αστρονομική διάθλαση. Επομένως, χρησιμοποιώντας γενικές μορφές αναλυτικών μοντέλων διάθλασης, ο προσδιορισμός του πλάτους από δεδομένα άνω μεσημβρινών διαβάσεων (ευθεία ε) καταλήγει να είναι ένα πρόβλημα παρεμβολής της ευθείας που προσαρμόζεται καλύτερα στις τιμές (z, δ) και του άξονα των δ. Τα αναλυτικά μοντέλα διάθλασης, η διαδικασία προσαρμογής - παρεμβολής και ο προσδιορισμός του πλάτους παρουσιάζονται στα κεφάλαια που ακολουθούν και αποτελούν το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλα Διάθλασης

A curious fellow named Snell
Found a Law we all think is swell
Observers all buy it
But when they apply it
Their answers are all shot to hell.

(J. A. Hughes 1978)

2.1 Διάθλαση του φωτός

Όταν το φως συναντήσει την επιφάνεια που διαχωρίζει το μέσο στο οποίο διαδίδεται από ένα άλλο διαφανές μέσο, στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα, ένα μέρος του ανακλάται και το υπόλοιπο μέρος του διαθλάται, δηλαδή περνάει στο δεύτερο μέσο αλλάζοντας πορεία.

Αιτία της διάθλασης είναι η διαφορετική ταχύτητα του φωτός στα δύο μέσα.

Η **ταχύτητα του φωτός** έχει πεπερασμένη τιμή, η οποία μπορεί να μετρηθεί.

α) Το φως, όπως και κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα, διαδίδεται στο κενό με σταθερή ταχύτητα c = 299 792 458 m/s.
β) Η ταχύτητα c του φωτός στο κενό είναι θεμελιώδης σταθερά και είναι η μεγαλύτερη δυνατή ταχύτητα για όλα τα σώματα.
γ) Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς στο οποίο γίνεται η μέτρησή της.
δ) Η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της φωτεινής πηγής.
ε) Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός μέσα σε διαφανή υλικά (τα οποία λέγονται και οπτικά μέσα) είναι μικρότερη από την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό. Μέσα στον ατμοσφαιρικό αέρα είναι περίπου ίση με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό.
στ) Μέσα στα διαφανή υλικά η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι διάφορη για τα διάφορα χρώματα, δηλαδή για το κόκκινο, το πράσινο κλπ. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα διάδοσης του φωτός μέσα στα διάφορα υλικά εξαρτάται από το μήκος κύματος (άρα από τη συχνότητα) του φωτός.

Ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό (c) προς την ταχύτητά του (υ) στο υλικό ονομάζεται (απόλυτος) δείκτης διάθλασης (n) του οπτικού υλικού, δηλαδή

$$n = \frac{c}{\upsilon} \tag{2.1}$$

Ο δείκτης διάθλασης είναι καθαρός αριθμός και για το κενό, επειδή υ = c είναι n = 1. Για όλα τα άλλα διαφανή υλικά, επειδή υ < c, ο δείκτης διάθλασης είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, n > 1. Επειδή η ταχύτητα του φωτός στον αέρα είναι περίπου ίση με την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται στο κενό ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι περίπου ίσος με τη μονάδα (1-1.0003).

Έστω ότι μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει υπό γωνία πάνω σε μια επιφάνεια και διαθλάται (Σχήμα 2.1.α). Τη γωνία ανάμεσα στην αρχική διεύθυνση της ακτίνας και την κάθετη στην επιφάνεια την ονομάζουμε **γωνία πρόσπτωσης** (θ_1), και τη γωνία ανάμεσα στην κάθετη στην επιφάνεια και στη διεύθυνση της διαθλώμενης ακτίνας, **γωνία διάθλασης** (θ_2).

Προκύπτει ότι:

1. Η προσπίπτουσα ακτίνα, η διαθλώμενη και η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων στο σημείο πρόσπτωσης της ακτίνας βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
2. Όταν το φως είναι μονοχρωματικό, ο λόγος του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης (θ_1) προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης (θ_2) είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των δεικτών διάθλασης των δύο μέσων.

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{ή}$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{2.2}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται και **νόμος του Snell**.

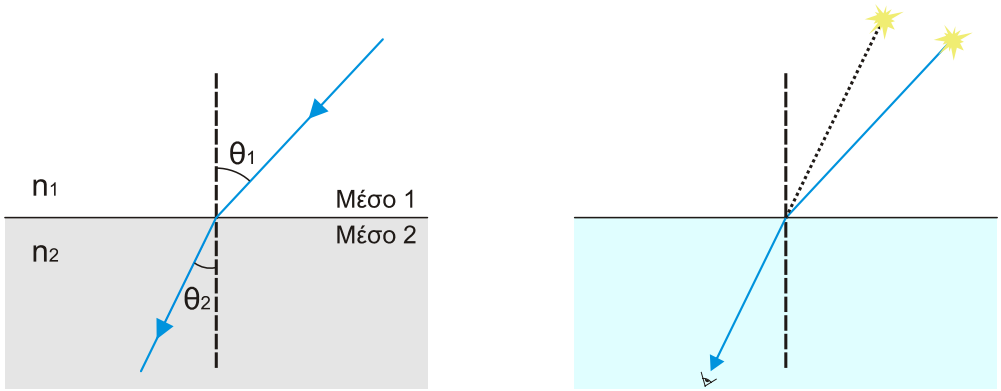
Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι όταν μια ακτίνα διέρχεται από ένα υλικό a σε ένα υλικό b στο οποίο η ταχύτητα του φωτός είναι μικρότερη ($n_b > n_a$), τότε η γωνία διάθλασης είναι μικρότερη από τη γωνία πρόσπτωσης, δηλαδή η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει την κάθετη στο σημείο πρόσπτωσης.

Ο δείκτης διάθλασης του κενού είναι εξ ορισμού ίσος με τη μονάδα, επομένως όταν μια ακτίνα διέρχεται από το κενό σε ένα υλικό πλησιάζει πάντα την κάθετη.

Όταν μια ακτίνα προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια, $\theta_1 = 0$, και από το νόμο του Snell προκύπτει ότι και $\theta_2 = 0$. Δηλαδή η ακτίνα δεν αλλάζει κατεύθυνση.

Από τους νόμους της διάθλασης προκύπτει ότι η πορεία που ακολουθεί μια ακτίνα είναι ίδια είτε αυτή μεταβαίνει από το υλικό a στο b είτε αντίστροφα.

Στο φαινόμενο της διάθλασης οφείλονται πολλές οφθαλμαπάτες όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2.1.β. Το ανθρώπινο μάτι αντιλαμβάνεται το φως σαν να διαδίδεται ευθύγραμμα. Έτσι βλέπει το άστρο στην προέκταση της ακτίνας (εστιγμένη γραμμή) πιο κοντά στην κάθετη στην επιφάνεια, από ότι είναι πραγματικά.



2.1.α 2.1.β

Σχήμα 2.1: Διάθλαση φωτεινής ακτίνας

2.2 Αστρονομική διάθλαση

Η αστρονομική διάθλαση οφείλεται στην ύπαρξη της γήινης ατμόσφαιρας, της οποίας ο δείκτης διάθλασης είναι διάφορος του δείκτη διάθλασης του κενού, δηλαδή της μονάδας.

Η ακτίνα φωτός που εκπέμπεται από κάποιο άστρο, πριν φθάσει στον παρατηρητή, διέρχεται από τη γήινη ατμόσφαιρα μέσα στην οποία αλλάζει συνεχώς διεύθυνση διάδοσης. Αντίθετα, στο χώρο ανάμεσα στο άστρο και το ανώτατο όριο της ατμόσφαιρας που θεωρείται κενός, η πορεία της φωτεινής ακτίνας παραμένει ευθύγραμμη.

Αιτία της συνεχούς αλλαγής διεύθυνσης της φωτεινής ακτίνας, στο τμήμα της εντός της γήινης ατμόσφαιρας, είναι η μεταβολή του δείκτη διάθλασης με την πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα: η ατμόσφαιρα της γης δεν είναι ομοιογενές μέσο σ' όλη την έκτασή της. Η πυκνότητα της μεταβάλλεται ανάλογα με τις συνθήκες **πίεσης**, **θερμοκρασίας** και **υγρασίας**. Συνεπώς, ο (τοπικός) δείκτης διάθλασης και το μέγεθος της εκτροπής της φωτεινής ακτίνας εξαρτώνται από τις συνθήκες αυτές. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της συνεχούς αλλαγής της κατάστασης της ατμόσφαιρας και της εξάρτησης του δείκτη διάθλασης από τη **σύνθεση του αέρα** και το **μήκος κύματος (λ)** της φωτεινής ακτίνας, ο υπολογισμός είναι ένα δύσκολο πρόβλημα, ιδιαίτερα κοντά στον ορίζοντα, που δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια.

Οι μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος της διάθλασης χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις αριθμητικές και τις προσεγγιστικές μεθόδους. Στις αριθμητικές μεθόδους χρησιμοποιούνται μοντέλα που απαιτούν λεπτομερή γνώση των συνθηκών της ατμόσφαιρας κατά μήκος της διαδρομής της φωτεινής ακτίνας. Συνήθως ως δεδομένα χρησιμοποιούνται τιμές μέσων συνθηκών της ατμόσφαιρας (U.S. Standard Atmosphere 1976) και για τους υπολογισμούς πραγματοποιούνται αριθμητικές ολοκληρώσεις [Garfinkel B., 1967]. Αντίθετα, οι προσεγγιστικές μέθοδοι απαιτούν γνώση των ατμοσφαιρικών συνθηκών στο σημείο παρατήρησης και οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται μέσω αναλυτικών εκφράσεων. Ας σημειωθεί ότι, για παρατηρήσεις κοντά στον ορίζοντα, χρησιμοποιούνται συνήθως τιμές διάθλασης από πίνακες που βασίζονται κυρίως σε δεδομένα παρατηρήσεων (Pulkova Tables, 4th edition, 1956).

Στο κεφάλαιο αυτό επιδιώκεται ένας προσεγγιστικός υπολογισμός της διάθλασης με βάση τα γενικά χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας και τις τοπικές συνθήκες στη θέση του παρατηρητή. Οι συνθήκες αυτές είναι η πίεση και η θερμοκρασία, διότι η υγρασία επιδρά ελάχιστα και δεν θα ληφθεί υπόψη. Όσον αφορά τη σύνθεση του αέρα, θεωρείται σταθερή, ενώ η μεταβολή του δείκτη διάθλασης με το μήκος κύματος, για το ορατό φως, είναι ανεπαίσθητη και παραλείπεται.

2.3 Αναλυτικά μοντέλα διάθλασης

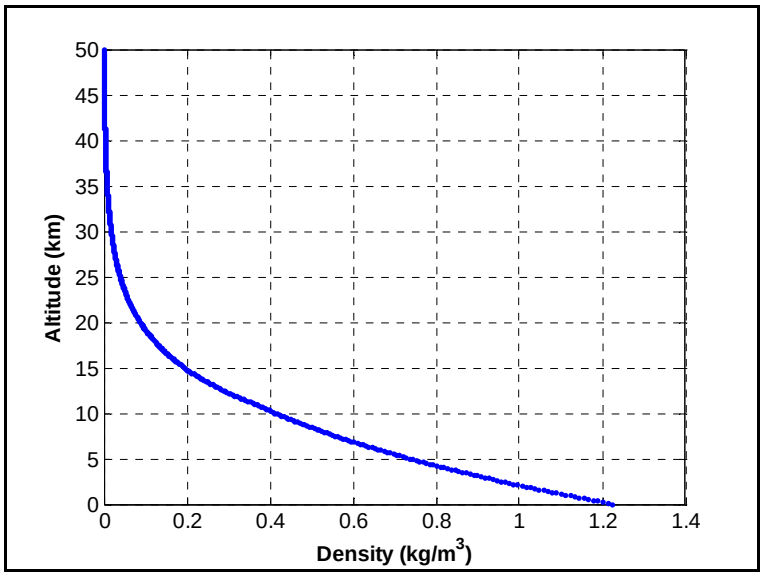
Τα μοντέλα διάθλασης που περιγράφονται έχουν βάση τις θεωρίες των Chauvenet (1960), Woolard and Clemence (1966), Smart (1977), Green (1985),

Wittmann (1997) και η ανάπτυξή τους στηρίζεται σε φυσικές και γεωμετρικές υποθέσεις. Οι φυσικές υποθέσεις που χρησιμοποιούνται περιγράφονται στη διαδικασία ανάπτυξης του κάθε μοντέλου ενώ οι γεωμετρικές αφορούν:

- Επίπεδη γη, με ατμοσφαιρικά στρώματα παράλληλα και επίπεδα προς αυτή.
- Σφαιρική γη, με σφαιρικά συμμετρική ατμόσφαιρα ως προς το κέντρο της.

Οι γεωμετρικές αυτές υποθέσεις, χάριν απλότητας, δέχονται τη συμμετρία των ατμοσφαιρικών στρωμάτων περί την κάθετη σε κάθε σημείο πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας (ισοτροπία). Έτσι δεν επηρεάζεται το αζιμούθιο του παρατηρούμενου σώματος και η φωτεινή ακτίνα βρίσκεται πάντα σε ένα κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το σημείο παρατήρησης και το άστρο.

Επειδή το συνολικό ύψος της ατμόσφαιρας είναι αμελητέο σε σχέση με την απόσταση των άστρων από τη γη, θεωρούμε ότι η φωτεινή ακτίνα, στο ευθύγραμμο τμήμα της εκτός ατμόσφαιρας, είναι παράλληλη με την ευθεία που συνδέει γεωμετρικά τον παρατηρητή με το άστρο. Επιπλέον εξαιτίας του ότι η πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα (επομένως και ο δείκτης διάθλασης) αυξάνει όσο πλησιάζουμε την επιφάνεια της γης (Γράφημα 2.1), η τροχιά της φωτεινής ακτίνας θα είναι μια καμπύλη γραμμή που στρέφει τα κοίλα προς το έδαφος.



Γράφημα 2.1: Πυκνότητα ατμοσφαιρικού αέρα σε συνάρτηση με το ύψος (U.S. Standard Atmosphere 1976)

Η παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση z_o, η οποία προσδιορίζεται από την εφαπτόμενη στην πορεία της φωτεινής ακτίνας στο σημείο που βρίσκεται ο παρατηρητής, είναι μικρότερη της πραγματικής z κατά μια μικρή γωνία R που ονομάζεται **αστρονομική διάθλαση** (**astronomical refraction**). Δηλαδή η διάθλαση είναι η γωνία που πρέπει να προστεθεί στην παρατηρούμενη τιμή της ζενίθιας απόστασης για να προκύψει η τιμή στην οποία θα έβλεπε ο παρατηρητής το άστρο αν δεν υπήρχε ατμόσφαιρα (γεωμετρική θέση του άστρου).

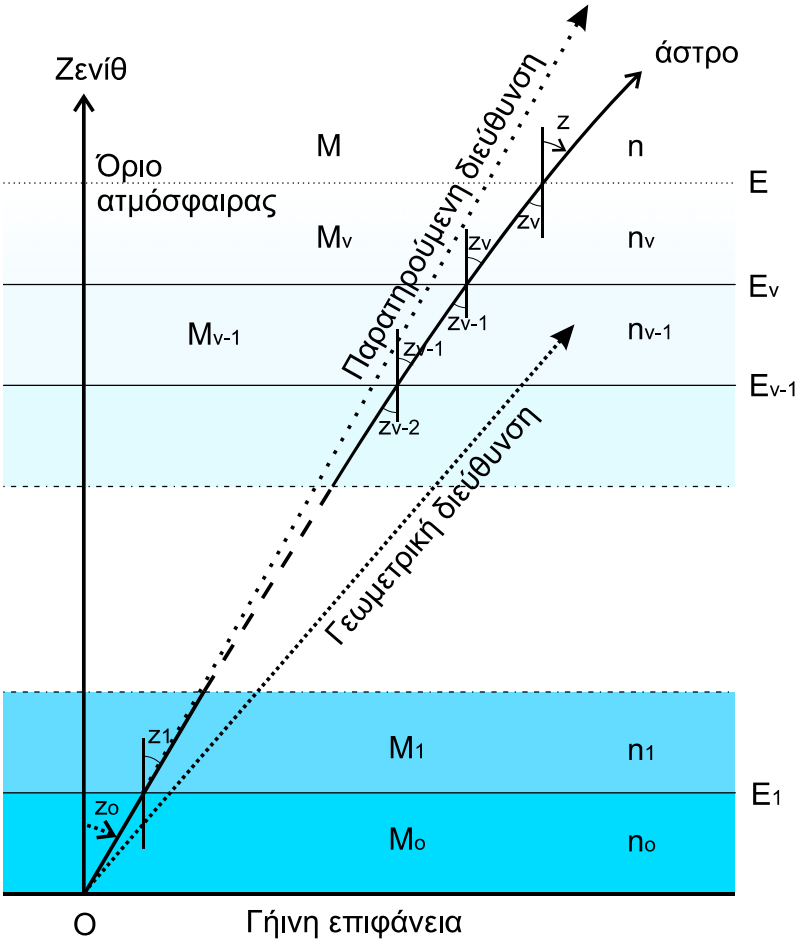
$$z = z_o + R \tag{2.3}$$

2.4 Υπολογισμός διάθλασης

2.4.1 Επίπεδη γη

2.4.1.1 Μοντέλο Ι

Η ατμόσφαιρα αποτελείται από ν + 1 παράλληλα επίπεδα, που κάθε ένα από αυτά έχει τα δικά του οπτικά χαρακτηριστικά και δείκτη διάθλασης (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Μοντέλο Ι

Συμβολίζοντας με Ε το όριο της ατμόσφαιρας, το μέσο που συμβολίζεται με Μ υποδηλώνει το κενό, για το οποίο ο δείκτης διάθλασης είναι n = 1. Τα υπόλοιπα μέσα συμβολίζονται με M_ν, $M_{\nu-1}$, …, M_o και έχουν δείκτες διάθλασης n_ν, $n_{\nu-1}$, …, n_o αντίστοιχα. Γωνία πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας στην επιφάνεια Ε είναι η z, που αντιστοιχεί στην πραγματική ζενίθια απόσταση.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Snell, κατά μήκος της φωτεινής ακτίνας, για τα διαδοχικά ζεύγη επιπέδων, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$n \sin z = n_\nu \sin z_\nu ,$$

Όμως n = 1, επομένως:

$$\sin z = n_\nu \sin z_\nu ,$$

$$n_\nu \sin z_\nu = n_{\nu-1} \sin z_{\nu-1} ,$$

$$n_{\nu-1} \sin z_{\nu-1} = n_{\nu-2} \sin z_{\nu-2} ,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n_1 \sin z_1 = n_o \sin z_o$$

όπου z_o η παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση και n_o ο δείκτης διάθλασης του αέρα στο σημείο παρατήρησης (Ο).

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε, προφανώς

$$\sin z = n_o \sin z_o \qquad \text{ή}$$

$$\sin(z_o + R) = n_o \sin z_o \qquad \text{ή}$$

$$\sin z_o \cos R + \cos z_o \sin R = n_o \sin z_o$$

Επειδή η διάθλαση R είναι πολύ μικρή γωνία, μπορούμε να γράψουμε $\cos R \approx 1$ και $\sin R \approx R$. Επομένως,

$$\sin z_o + R \cos z_o = n_o \sin z_o \quad \text{ή}$$

$$R = (n_o - 1) \tan z_o \qquad \text{ή}$$

$$R('') = \frac{(n_o - 1)}{\sin 1''} \tan z_o \qquad \text{ή}$$

$$R = k \cdot \tan z_o \tag{2.4}$$

Ο τύπος 2.4 δείχνει ότι η διάθλαση εξαρτάται από την παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση και το δείκτη διάθλασης στην περιοχή του παρατηρητή. Σημειώνεται ότι, το συγκεκριμένο μοντέλο ισχύει στην περίπτωση που το παρατηρούμενο άστρο βρίσκεται κοντά στο ζενίθ (ζενίθιες αποστάσεις μέχρι 30°).

Για κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες (p_0 = 1013.25 mbar και $\theta_0 = 0\ ^oC$) και μονοχρωματικό κίτρινο φως (λ = 0.58 μm), ο δείκτης διάθλασης έχει τιμή n_o = 1.0002926 [Jenkins F., White H., 1981], επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_0 = 60''.35 \cdot \tan z_o \tag{2.5}$$

Η σχέση αυτή δίνει την <u>κανονική</u> αστρονομική διάθλαση. Η <u>πραγματική</u> διάθλαση υπολογίζεται με τη βοήθεια του νόμου των τέλειων αερίων.

2.4.1.2 Καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων στην ατμόσφαιρα

Η καταστατική εξίσωση ενός ιδανικού αερίου είναι μια σχέση μεταξύ της πίεσης p, του όγκου V και της απόλυτης θερμοκρασίας T του αερίου:

$$pV = n_{gas} R_{gas} T$$

Αέριο μάζας m και γραμμομοριακής μάζας M έχει n_{gas} mol.

Ισχύει $n_{gas} = \frac{m}{M}$. Οπότε $pV = \frac{m}{M} R_{gas} T$

Η πυκνότητα του αερίου είναι $\rho = \frac{m}{V}$. Οπότε $pM = \frac{m}{V} R_{gas} T \Rightarrow$

$pM = \rho R_{gas} T \Rightarrow \rho = \frac{M}{R_{gas}} \cdot \frac{p}{T} \Rightarrow \rho \propto \frac{p}{T}$

όπου R_{gas} η παγκόσμια σταθερά αερίων.

Για ένα μίγμα αερίων ισχύει ο νόμος του Dalton: Η ολική πίεση του μίγματος (p_{tot}) ισούται με το άθροισμα των μερικών πιέσεων (p_i) των επί μέρους αερίων του.

$$p_{tot} = p_1 + p_2 + \ldots$$

Η μερική πίεση ενός ιδανικού αερίου είναι η πίεση που ασκεί χωριστά κάθε συστατικό αέριο του μίγματος όταν έχει την ίδια θερμοκρασία και καταλαμβάνει τον ίδιο όγκο που καταλαμβάνει και το μίγμα.

Αν υποθέσουμε ότι, ο ατμοσφαιρικός αέρας συμπεριφέρεται σαν ένα μίγμα ιδανικών αερίων με ολική πίεση p, θερμοκρασία T και πυκνότητα ρ, από την καταστατική εξίσωση έχουμε:

$$\rho = \frac{M_{air}}{R_{gas}} \cdot \frac{p}{T}$$

όπου M_{air} το μέσο μοριακό βάρος των στοιχείων της ατμόσφαιρας (N_2 (78%), O_2 (21%), …).

Για τον ατμοσφαιρικό αέρα, στο σημείο παρατήρησης, ισχύουν:

$\rho \propto \frac{p}{T}$ ή $\rho \propto \frac{p}{273+\theta}$ και $(n_o - 1) \propto \rho$ (Νόμος Dale - Gladstone)

Επομένως μεταξύ των συνθηκών p, θ και των κανονικών p_0, θ_0 στο ίδιο σημείο, έχουμε:

$$\frac{(n_o - 1)}{(n_o - 1)_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{273+\theta_0}{273+\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{R_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{273+\theta_0}{273+\theta} \quad \Rightarrow$$

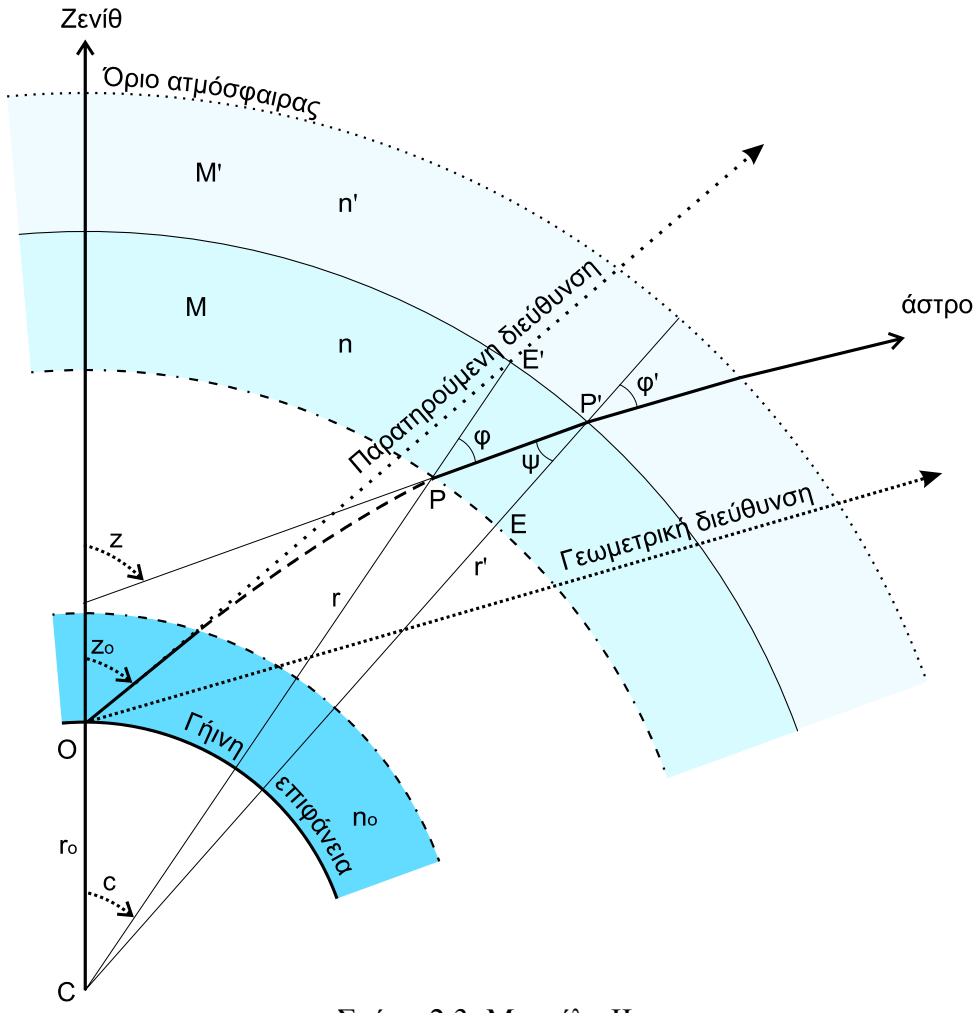
$$R = [(\frac{p}{1013.25}) \cdot (\frac{273}{(273+\theta)})] \cdot R_0 \quad \Rightarrow \quad R = f_{air} \cdot R_0 \qquad (2.6)$$

Αυτό σημαίνει ότι, για τον υπολογισμό της πραγματικής διάθλασης, πολλαπλασιάζουμε την κανονική με το συντελεστή f_{air}, που εξαρτάται από την ατμοσφαιρική πίεση (p) στο σημείο παρατήρησης (εκφρασμένη σε mbar) και τη θερμοκρασία (θ) στο ίδιο σημείο (εκφρασμένη σε βαθμούς Κελσίου).

2.4.2 Σφαιρική γη

2.4.2.1 Μοντέλο ΙΙ

Θεωρώντας τη γη σφαιρική και την ατμόσφαιρα που την περιβάλλει σφαιρικά συμμετρική ως προς το κέντρο της, στο σχήμα 2.3 απεικονίζεται η τομή της με ένα κατακόρυφο επίπεδο.



Σχήμα 2.3: Μοντέλο ΙΙ

Καθένα από τα διαδοχικά στρώματα της ατμόσφαιρας έχει τα δικά του οπτικά χαρακτηριστικά και δείκτη διάθλασης.

Η φωτεινή ακτίνα PP' διέρχεται από το στρώμα M' με δείκτη διάθλασης n' , σε στρώμα M με δείκτη διάθλασης n. Έστω C το κέντρο της γης και CP' = r' , CP = r , οι εσωτερικές ακτίνες των στρωμάτων M' και M. Ο νόμος Snell στο σημείο P' δίνει:

$$n' \sin\varphi' = n \sin\psi$$

Στο τρίγωνο PCP' , με εφαρμογή του νόμου ημιτόνων, έχουμε:

$$\frac{\sin(180^{o} - \varphi)}{r'} = \frac{\sin\varphi}{r'} = \frac{\sin\psi}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r \sin\varphi = r' \sin\psi$$

Απαλείφοντας το sinψ από τις παραπάνω εξισώσεις:

$$r' \, n' \sin\varphi' = r \, n \sin\varphi$$

Η σχέση αυτή που αποδείχθηκε για δύο διαδοχικά στρώματα, ισχύει συνεπώς για κάθε δύο στρώματα της ατμόσφαιρας, με αποτέλεσμα το γινόμενο r n sinφ να παραμένει σταθερό.

Συμβολίζοντας με r_o την ακτίνα της γης, n_o το δείκτη διάθλασης του αέρα στην περιοχή του παρατηρητή (O) και z_o την παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$r \, n \sin\varphi = r_o \, n_o \sin z_o$$

Από το σχήμα z = φ + c , οπότε dz = dφ + dc.

Διαφορίζοντας την σχέση r n sinφ = σταθερό, έχουμε:

$$n \sin\varphi \, dr + r \sin\varphi \, dn + r \, n \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

οπότε, διαιρώντας με r n sinφ, προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} + \frac{d\varphi}{\tan\varphi} = 0 \qquad (2.7)$$

Υποθέτοντας ότι τα στρώματα έχουν μικρό πάχος, μπορούμε να γράψουμε:

PE = r dc

P'E' = r' dc = (r + dr) dc $\approx$ r dc (αγνοώντας το γινόμενο των διαφορικών)

Αλλά στο τρίγωνο PE'P' ισχύει: P'E' = (r' – r) tanφ = dr tanφ.

Επομένως r dc = dr tanφ ή $\frac{dr}{r} = \frac{dc}{\tan\varphi}$

Η προηγούμενη διαφορική εξίσωση 2.7 γράφεται:

$$\frac{dn}{n} + \frac{d\varphi + dc}{\tan\varphi} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dn}{n} + \frac{dz}{\tan\varphi} = 0 \quad \text{ή}$$

$$dz = -\frac{dn}{n}\tan\varphi \qquad (2.8)$$

Η σχέση 2.8 αποτελεί τη **γενική διαφορική εξίσωση της διάθλασης** και αν ολοκληρωθεί από n = n_o έως n = 1 λαμβάνεται η διάθλαση R.

Αντικαθιστώντας την tanφ με τη βοήθεια της ισότητας sinφ = $\frac{r_o\, n_o}{r\, n} \sin z_o$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$dz = -\frac{dn}{n} \cdot \frac{r_o n_o \sin z_o}{(r^2 n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} \quad \text{ή}$$

$$\int_{z_o}^{z} dz = -\, r_o\, n_o \sin z_o \int_{n_o}^{1} \frac{dn}{n\,(r^2 n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} \quad \text{ή}$$

$$z - z_o = r_o\, n_o \sin z_o \int_{1}^{n_o} \frac{dn}{n\,(r^2 n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} \quad \text{ή}$$

$$R = r_o\, n_o \sin z_o \int_{1}^{n_o} \frac{dn}{n\,(r^2 n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} \qquad (2.9)$$

Σημειώνεται ότι, η σχέση 2.9 (**ολοκλήρωμα διάθλασης**) περιλαμβάνει δύο μεταβλητές n, r, όπου το r είναι συνάρτηση του δείκτη διάθλασης r = r(n). Για τον υπολογισμό του, επομένως, απαιτείται να βρεθεί η σχέση των δύο αυτών μεταβλητών, λαμβάνοντας υπόψη φυσικούς νόμους που περιλαμβάνουν στοιχεία της κατάστασης της ατμόσφαιρας. Δυστυχώς, η ελλιπής γνώση της συνεχώς μεταβαλλόμενης κατάστασης της ατμόσφαιρας έχει σαν αποτέλεσμα, να μη μπορεί να διατυπωθεί ακριβής εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών και αναγκαστικά οδηγούμαστε σε προσεγγίσεις.

Υπολογισμός ολοκληρώματος διάθλασης

Συμβολίζοντας με h το ύψος της ατμόσφαιρας μέσα στο οποίο προκαλείται αξιόλογη διάθλαση ($h << r_o$), μπορούμε να γράψουμε:

$$r = r_o + h$$

οπότε αντικαθιστώντας στην παράσταση $(r^2 n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{-1/2}$, έχουμε:

$$[(r_o + h)^2\, n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o]^{-1/2} = [(r_o^2 + 2hr_o + h^2)\, n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o]^{-1/2} =$$

$$[r_o^2 (1 + 2\frac{h}{r_o} + \left(\frac{h}{r_o}\right)^2)\, n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o]^{-1/2} \approx [r_o^2 (1 + 2\frac{h}{r_o})\, n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o]^{-1/2} =$$

$$\frac{1}{r_o}\, [(n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o) + 2n^2 \frac{h}{r_o})]^{-1/2} = \frac{1}{r_o n}\, [(1 - \frac{n_o^2}{n^2} \sin^2 z_o) + 2\frac{h}{r_o})]^{-1/2}.$$

Επειδή $\frac{h}{r_o} \approx 10^{-3}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε, στην παραπάνω παράσταση, το διωνυμικό θεώρημα $(\alpha + \beta)^{\kappa} \approx \alpha^{\kappa} + \kappa\, \alpha^{\kappa-1} \beta$, αν $\sin^2 z_o < 0.9 \Rightarrow \sin z_o < 0.95 \Rightarrow$

$\mathbf{z_o} \leq \mathbf{71^o}$. Τότε:

$$\frac{1}{r_o n}\,[(1-\frac{n_o^2}{n^2}\sin^2 z_o)+2\frac{h}{r_o})]^{-1/2} = \frac{1}{r_o n}\,(1-\frac{n_o^2}{n^2}\sin^2 z_o)^{-1/2} - \frac{1}{r_o n}\,(1-\frac{n_o^2}{n^2}\sin^2 z_o)^{-3/2}\,\frac{h}{r_o} =$$

$$\frac{1}{r_o n}\,(1-\frac{n_o^2}{n^2}\sin^2 z_o)^{-1/2}\,[1-\frac{h}{r_o(1-\frac{n_o^2}{n^2}\sin^2 z_o)}].$$

Μετά την παραπάνω αντικατάσταση, το ολοκλήρωμα διάθλασης γράφεται:

$$R = n_o \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{dn}{n\,(n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} - n_o \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{hn\,dn}{r_o\,(n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{3/2}}$$

$$R = \qquad R_1 \qquad - \qquad R_2$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$R_1 = n_o \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{dn}{n\,(n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} = \left[-\arcsin\frac{n_o \sin z_o}{n}\right]_1^{n_o} = \arcsin(n_o \sin z_o) - z_o$$

Επειδή ο δείκτης διάθλασης του αέρα, στην επιφάνεια του εδάφους, είναι λίγο μεγαλύτερος της μονάδας, μπορούμε να τον γράψουμε ως $n_o = 1 + x$, όπου το x είναι μια μικρή ποσότητα. Τότε

$$R_1 \equiv f(x) = \arcsin[(1 + x)\sin z_o] - z_o$$

και από το θεώρημα Maclaurin, παραλείποντας όρους ανώτερης τάξης, έχουμε:

$$R_1 \equiv f(x) = f(0) + x\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} + \frac{1}{2}\,x^2\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=0}$$

Όμως $f(0) = \arcsin(\sin z_o) - z_o = 0$ και

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sin z_o}{[1-(1+x)^2\sin^2 z_o]^{1/2}}\,, \qquad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} = \tan z_o\,,$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{(1+x)\sin^3 z_o}{[1-(1+x)^2\sin^2 z_o]^{3/2}}\,, \qquad \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=0} = \tan^3 z_o\,.$$

Επομένως

$$R_1 = x\tan z_o + \frac{1}{2}\,x^2\,\tan^3 z_o \qquad \text{ή}$$

$$R_1 = (n_o - 1)\tan z_o + \frac{1}{2}(n_o - 1)^2 \tan^3 z_o$$

$$R_1 = A_1 \tan z_o + B_1 \tan^3 z_o$$

όπου: $A_1 = (n_o - 1)$, $B_1 = \frac{1}{2}(n_o - 1)^2$

Ο πρώτος όρος του αποτελέσματος αυτού αντιστοιχεί στο μοντέλο Ι που ισχύει για μικρές ζενίθιες αποστάσεις.

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος

$$R_2 = n_o \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{hn\, dn}{r_o (n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{3/2}}$$

χρησιμοποιούμε το νόμο των Dale - Gladstone, που εκφράζει τη σχέση του δείκτη διάθλασης με την ατμοσφαιρική πυκνότητα

$n = 1 + (n_o - 1)\frac{\rho}{\rho_o}$, όπου ρ_o η πυκνότητα του αέρα στη γήινη επιφάνεια.

Διαφορίζοντας τη σχέση αυτή $dn = \frac{(n_o - 1)}{\rho_o} d\rho$ και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα R_2, έχουμε το αποτέλεσμα:

$$R_2 = n_o \sin z_o \frac{(n_o - 1)}{\rho_o} \int_0^{\rho_o} \frac{hn\, d\rho}{r_o (n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{3/2}}$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση του ολοκληρώματος $f(n) = \frac{hn}{r_o (n^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{3/2}}$,

$n = n_o - \varepsilon$, όπου $\varepsilon = [0, 0.0003]$, καταλήγουμε στην παραδοχή $f(n) \approx f(n_o)$.

Επομένως,

$$R_2 = n_o \sin z_o \frac{(n_o - 1)}{\rho_o} \int_0^{\rho_o} \frac{hn_o\, d\rho}{r_o (n_o^2 - n_o^2 \sin^2 z_o)^{3/2}} \quad \text{ή}$$

$$R_2 = n_o \sin z_o \frac{(n_o - 1)}{\rho_o} \int_0^{\rho_o} \frac{hn_o\, d\rho}{r_o n_o^3 (1 - \sin^2 z_o)^{3/2}} \quad \text{ή}$$

$$R_2 = \tan z_o \sec^2 z_o \frac{1}{r_o n_o} \frac{(n_o - 1)}{\rho_o} \int_0^{\rho_o} h\, d\rho$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_0^{\rho_o} h\, d\rho = [h\rho]_0^{\rho_o} - \int_\infty^0 \rho\, dh = [h\rho]_0^{\rho_o} + \int_0^\infty \rho\, dh = \int_0^\infty \rho\, dh \qquad (h = 0 \text{ όταν } \rho = \rho_o).$$

Το ύψος μιας ομοιογενούς ατμόσφαιρας (H), ορίζεται μέσω της σχέσης

$$H = \frac{1}{\rho_o} \int_0^\infty \rho\, dh$$

Η ατμόσφαιρα αυτή έχει σταθερή πυκνότητα, όση στο σημείο παρατήρησης, ενώ η πίεση της μειώνεται σύμφωνα με τους νόμους της αδιαβατικής μεταβολής των ιδανικών αερίων.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει:

$$R_2 = (n_o - 1)\frac{H}{r_o n_o} \tan z_o \sec^2 z_o \qquad \text{ή}$$

$$R_2 = (n_o - 1)\frac{H}{r_o n_o} \tan z_o (1 + \tan^2 z_o) \qquad \text{ή}$$

$$R_2 = A_2 \tan z_o (1 + \tan^2 z_o)$$

όπου: $A_2 = (n_o - 1)\dfrac{H}{r_o n_o}$

Οι εκφράσεις R_1 και R_2 δίνουν το παρακάτω μοντέλο διάθλασης:

$$R = (A_1 - A_2) \tan z_o + (B_1 - A_2) \tan^3 z_o \qquad \text{ή}$$

$$R = [(n_o - 1)(1 - \frac{H}{r_o n_o})] \tan z_o + [(n_o - 1)(\frac{1}{2}(n_o - 1) - \frac{H}{r_o n_o})] \tan^3 z_o \qquad \text{ή}$$

$$R('') = [\frac{(n_o - 1)}{\sin 1''}(1 - \frac{H}{r_o n_o})] \tan z_o + [\frac{(n_o - 1)}{\sin 1''}(\frac{1}{2}(n_o - 1) - \frac{H}{r_o n_o})] \tan^3 z_o \qquad \text{ή}$$

$$R = A \cdot \tan z_o + B \cdot \tan^3 z_o \qquad (2.10)$$

Για κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες (p_0 = 1013.25 mbar και θ_0 = 0 ^oC) και μονοχρωματικό κίτρινο φως (λ = 0.58 μm) ο δείκτης διάθλασης έχει τιμή n_o = 1.0002926. Θεωρώντας το ύψος της ομοιογενούς ατμόσφαιρας H = 8 km και την ακτίνα της γης ίση με 6371 km [Young A., 2004], η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_0 = 60''.28 \cdot \tan z_o - 0''.067 \cdot \tan^3 z_o \qquad (2.11)$$

2.4.2.2 Μοντέλο III

Ακολουθώντας σχετική εργασία του Isaac Newton, ο Thomas Simpson το 1743 διατύπωσε μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών του ολοκληρώματος διάθλασης (2.9), $r\ n^{m+1}$ = σταθερό, m εμπειρική σταθερά.

Δηλαδή, γράφοντας $r\ n^{m+1} = r_o\ n_o^{m+1}$ ή $r^2 = r_o^2 \left(\frac{n_o}{n}\right)^{2m+2}$ και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα διάθλασης έχουμε:

$$R = r_o\ n_o \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{dn}{n\,(r^2 n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} \quad \text{ή}$$

$$R = r_o\ n_o \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{dn}{n\,(r_o^2 \left(\frac{n_o}{n}\right)^{2m} \frac{n_o^2}{n^2} n^2 - r_o^2 n_o^2 \sin^2 z_o)^{1/2}} \quad \text{ή}$$

$$R = \sin z_o \int_1^{n_o} \frac{dn}{n\,(\left(\frac{n_o}{n}\right)^{2m} - \sin^2 z_o)^{1/2}} \quad \text{ή}$$

$$R = \frac{1}{m}\left[\arcsin\left(\frac{\sin z_o}{\left(\frac{n_o}{n}\right)^m}\right)\right]_1^{n_o} \quad \text{ή}$$

$$R = \frac{1}{m}\left[z_o - \arcsin\left(\frac{\sin z_o}{n_o^m}\right)\right] \tag{2.12}$$

ή $$R('') = \frac{1}{\sin 1''}\frac{1}{m}\left[z_o - \arcsin\left(\frac{\sin z_o}{n_o^m}\right)\right], \qquad [\ldots]\ \text{rad}$$

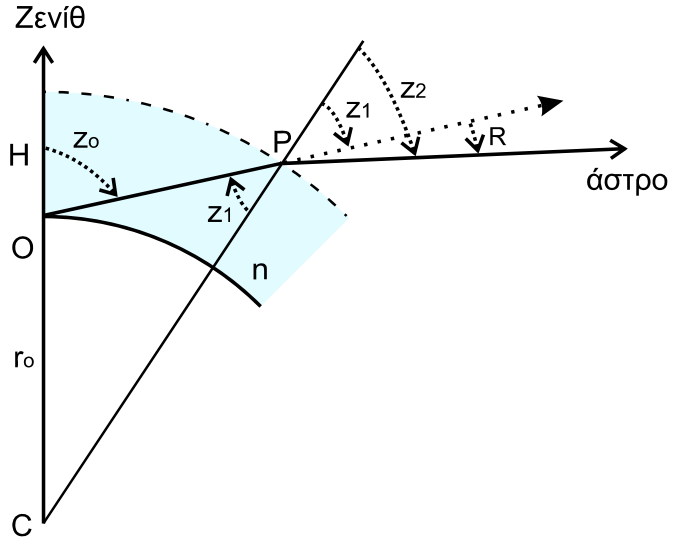
Για κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες (p_0 = 1013.25 mbar και θ_0 = 0 ^oC) και τιμή της εμπειρικής σταθεράς ίση με 6.46 [Wittmann A., 1997], η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_0 = 31930''\left[z_o - \arcsin\left(\frac{\sin z_o}{1.0002926^{6.46}}\right)\right] \tag{2.13}$$

2.4.2.3 Μοντέλο IV

Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως μοντέλο Cassini [Young A., 2004].

Η γη θεωρείται σφαιρική και η ατμόσφαιρα ομοιογενής με δείκτη διάθλασης n και ύψος H (Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: Μοντέλο IV

Σφαιρική γη με κέντρο C *και ακτίνα* r_o. *Ο παρατηρητής βρίσκεται σε σημείο* O *της γήινης επιφάνειας. Η ακτίνα διαθλάται σε σημείο* P *ατμόσφαιρας ύψους* H.

Στον παρατηρητή (O) η ζενίθια απόσταση της ακτίνας του φωτός είναι z_o. Επειδή η κατακόρυφος στο σημείο P είναι διαφορετική από αυτή στο O η φωτεινή ακτίνα σχηματίζει γωνία z_1 που είναι μικρότερη από την z_o. Η ακτίνα εισέρχεται στην ατμόσφαιρα στο σημείο P με γωνία πρόσπτωσης z_2.

Από το τρίγωνο POC εφαρμόζοντας το νόμο ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\sin z_1}{r_o} = \frac{\sin z_o}{r_o + H} \qquad \text{ή} \qquad \sin z_1 = \frac{r_o}{r_o + H}\sin z_o$$

Από το νόμο του Snell στο σημείο P έχουμε:

$$\sin z_2 = n \sin z_1 \qquad \text{ή} \qquad \sin z_2 = n\frac{r_o}{r_o + H}\sin z_o$$

Η διάθλαση είναι η διαφορά των δύο γωνιών:

$$R = z_2 - z_1 \quad \text{ή}$$

$$R = \arcsin(n\frac{r_o}{r_o + H}\sin z_o) - \arcsin(\frac{r_o}{r_o + H}\sin z_o) \quad \text{ή}$$

$$R = \arcsin(n \cdot c \cdot \sin z_o) - \arcsin(c \cdot \sin z_o) \qquad (2.14)$$

ή $$R('') = \frac{1}{\sin 1''}[\arcsin(n \cdot c \cdot \sin z_o) - \arcsin(c \cdot \sin z_o)], \quad [\ldots] \text{ rad}$$

όπου: $c = \dfrac{r_o}{r_o + H}$

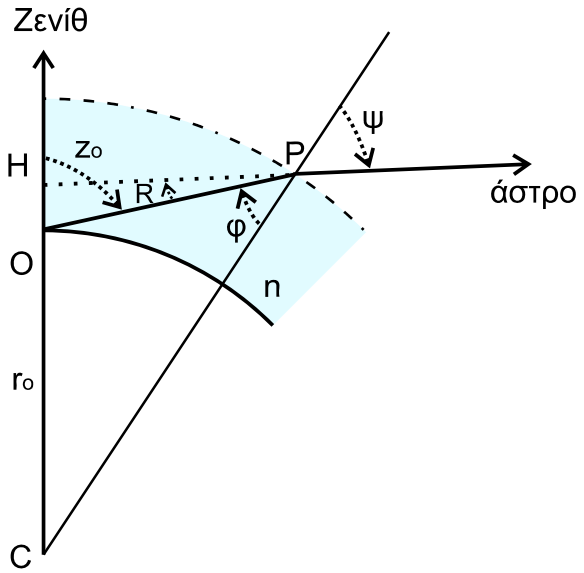
Σημειώνεται ότι στην ανάπτυξη του μοντέλου δεν έχουν χρησιμοποιηθεί καθόλου μαθηματικές προσεγγίσεις.

Αντικαθιστώντας την τιμή του δείκτη διάθλασης για κανονικές συνθήκες n = 1.0002926, το ύψος ομοιογενούς ατμόσφαιρας H = 8 km και την ακτίνα της γης ίση με 6371 km, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_0('') = \frac{1}{\sin 1''}[\arcsin(0.9990381 \cdot \sin z_o) - \arcsin(0.9987459 \cdot \sin z_o)] \qquad (2.15)$$

2.4.2.4 Μοντέλο V

Η γη θεωρείται σφαιρική και η ατμόσφαιρα ομοιογενής ύψους H με δείκτη διάθλασης n (Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Μοντέλο V

Η εισερχόμενη ακτίνα, που σχηματίζει γωνία ψ με την κάθετη στην ατμόσφαιρα, εκτρέπεται κατά γωνία R = ψ – φ. *Στη θέση του παρατηρητή η ζενίθια απόσταση της φωτεινής ακτίνας είναι* z_o.

Στο σχήμα 2.5, ψ είναι η γωνία πρόσπτωσης της εισερχόμενης ακτίνας, φ η γωνία διάθλασης, z_o η παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση της ακτίνας του φωτός στο σημείο O και R η γωνία διάθλασης.

Με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων και του νόμου Snell στα επίπεδα τρίγωνα του σχήματος έχουμε:

$$\frac{\sin\varphi}{r_o} = \frac{\sin z_o}{r_o + H} = \frac{\sin\psi}{r_o\, n}$$

Ισχύει $\psi = \varphi + R$

$n \sin\varphi = \sin(\varphi + R) = \sin\varphi \cos R + \cos\varphi \sin R$

Επειδή η διάθλαση R είναι πάντα μικρότερη από 0.01 rad, παραλείποντας όρους ανώτερης τάξης θέτουμε $\sin R \approx R$ και $\cos R \approx 1 - \frac{1}{2} R^2$.

Τότε έχουμε:

$$n \sin\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2} R^2 \sin\varphi + R \cos\varphi \quad \text{ή}$$

$$\sin\varphi\ R^2 - 2 \cos\varphi\ R + 2(n-1) \sin\varphi = 0$$

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς R:

$\Delta = 4 \cos^2\varphi - 8(n-1) \sin^2\varphi > 0$

$$R = \frac{1}{\tan\varphi} - \left[\left(\frac{1}{\tan\varphi}\right)^2 - 2(n-1)\right]^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{(1-\sin^2\varphi)^{1/2}} = \frac{r_o \sin z_o}{[(r_o + H)^2 - (r_o \sin z_o)^2]^{1/2}}$ προκύπτει η γωνία διάθλασης:

$$R = \left[\left(\frac{1 + \frac{H}{r_o}}{\sin z_o}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{1 + \frac{H}{r_o}}{\sin z_o}\right)^2 + 1 - 2n\right]^{1/2} \quad \text{ή}$$

$$R = \left[\left(\frac{w}{\sin z_o}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w}{\sin z_o}\right)^2 + 1 - 2n\right]^{1/2} \qquad (2.16)$$

$$\text{ή} \qquad R('') = \frac{1}{\sin 1''}\left[\left[\left(\frac{w}{\sin z_o}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w}{\sin z_o}\right)^2 + 1 - 2n\right]^{1/2}\right]$$

όπου: $w = 1 + \frac{H}{r_o}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_0('') = \frac{1}{\sin 1''}\left[\left[\left(\frac{1.00125569}{\sin z_o}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{1.00125569}{\sin z_o}\right)^2 + 1 - 2\cdot 1.0002926\right]^{1/2}\right] \quad (2.17)$$

Επισημαίνεται ότι, τα μοντέλα IV και V χρησιμοποιούν τις ίδιες φυσικές παραδοχές και διαφέρουν ως προς τη μαθηματική τους προσέγγιση.

Συνολικά, τα μοντέλα διάθλασης και οι παράμετροι τους δίνονται στους παρακάτω πίνακες:

A/A	**Αναλυτικά μοντέλα διάθλασης**	**Παράμετροι**
I	$R = k \cdot \tan z_o$	k
II	$R = A \cdot \tan z_o + B \cdot \tan^3 z_o$	A, B
III	$R = \frac{1}{m}\left[z_o - \arcsin\left(\frac{\sin z_o}{n_o^m}\right)\right]$	m, n_o
IV	$R = \arcsin(n\cdot c\cdot \sin z_o) - \arcsin(c\cdot \sin z_o)$	c, n
V	$R = \left[\left(\frac{w}{\sin z_o}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w}{\sin z_o}\right)^2 + 1 - 2n\right]^{1/2}$	w, n

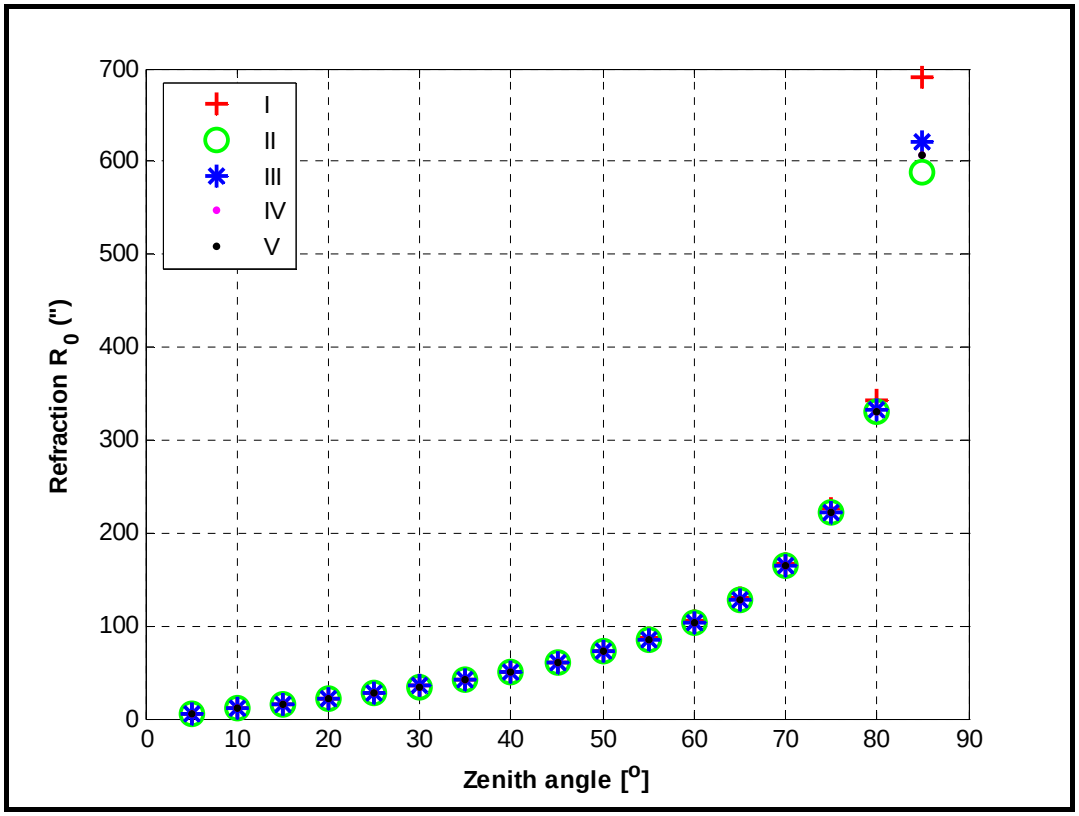
Πίνακας 2.1: Μοντέλα διάθλασης

A/A	**Μοντέλα Διάθλασης** **Κανονικές Συνθήκες** (p_0 = 1013.25 mbar , $\theta_0 = 0^o C$) f_{air} = 1.000000
I	$R_0 = 60''.35 \cdot \tan z_o$
II	$R_0 = 60''.28 \cdot \tan z_o - 0''.067 \cdot \tan^3 z_o$
III	$R_0 = 31930''\left[z_o - \arcsin\left(\frac{\sin z_o}{1.0002926^{6.46}}\right)\right]$
IV	$R_0('') = \frac{1}{\sin 1''}[\arcsin(0.9990381\cdot \sin z_o) - \arcsin(0.9987459\cdot \sin z_o)]$
V	$R_0('') = \frac{1}{\sin 1''}\left[\left[\left(\frac{1.00125569}{\sin z_o}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{1.00125569}{\sin z_o}\right)^2 + 1 - 2\cdot 1.0002926\right]^{1/2}\right]$

Πίνακας 2.2: Βαθμονόμηση μοντέλων διάθλασης

z [o]	I	II	III	IV	V
5	5.28	5.27	5.27	5.27	5.27
10	10.64	10.63	10.63	10.63	10.63
15	16.17	16.15	16.15	16.15	16.15
20	21.97	21.94	21.94	21.94	21.94
25	28.14	28.10	28.11	28.10	28.10
30	34.84	34.79	34.80	34.79	34.79
35	42.26	42.19	42.19	42.18	42.18
40	50.64	50.54	50.55	50.54	50.54
45	60.35	60.21	60.23	60.21	60.21
50	71.92	71.73	71.75	71.72	71.72
55	86.19	85.89	85.93	85.89	85.89
60	104.53	104.06	104.13	104.06	104.06
65	129.42	128.61	128.73	128.61	128.61
70	165.81	164.23	164.47	164.24	164.24
75	225.23	221.49	222.11	221.57	221.57
80	342.26	329.64	332.12	330.29	330.29
85	689.80	588.95	620.27	606.83	606.83

Πίνακας 2.3: Τιμές κανονικής διάθλασης (σε as) για κάθε μοντέλο



Γράφημα 2.2: Κανονική διάθλαση για κάθε μοντέλο

Κεφάλαιο 3

Βαθμονόμηση Μοντέλων

3.1 Σφάλματα στις μετρήσεις

Ένα μέγεθος προσδιορίζεται από μετρήσεις άμεσα ή έμμεσα. Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης που είναι σύγκριση του μεγέθους με κάποια μονάδα, δεν μπορεί ποτέ να θεωρηθεί πως δίνει την **αληθινή τιμή** του μεγέθους, αλλά μια εκτίμηση. Έτσι κάθε μέτρηση περιέχει ένα σφάλμα που η αληθινή του τιμή δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί, γιατί δεν είναι γνωστή και η αληθινή τιμή του μεγέθους.

Για την εκτίμηση των καλύτερων τιμών των μεγεθών που ενδιαφέρουν γίνονται περισσότερες μετρήσεις από τις απαραίτητες, με συνέπεια να απαιτείται η διαδικασία της συνόρθωσης, ώστε να δοθεί μία και μοναδική τιμή σε κάθε μετρούμενο μέγεθος καθώς και στα μεγέθη που συνδέονται με αυτά, χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες μετρήσεις. Με τη διαδικασία, λοιπόν, της συνόρθωσης, αφενός μεν εξασφαλίζουμε καλύτερες ακρίβειες στον προσδιορισμό των αγνώστων αφού αξιοποιείται ολόκληρη η διαθέσιμη πληροφορία, αφετέρου δε μπορούμε να έχουμε και ένα μέτρο αυτής της ακρίβειας.

Γενικά, για τη μελέτη των διαφόρων φαινομένων και για τους υπολογισμούς στοιχείων που ενδιαφέρουν δημιουργούνται μοντέλα (συναρτησιακά) στα οποία αναφέρονται τα μετρημένα στοιχεία.

Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι ενός μοντέλου είναι τα ικανά και αναγκαία στοιχεία που το ορίζουν. Από τις παραμέτρους αυτές είναι δυνατός ο υπολογισμός όλων των υπόλοιπων στοιχείων του μοντέλου.

Αν $\underline{n}$ ο αριθμός των μετρήσεων και $\underline{m}$ ο αριθμός των αγνώστων καθοριστικών ανεξάρτητων παραμέτρων που μπορούν να υπολογιστούν από τα στοιχεία που μετρήθηκαν απαιτείται συνόρθωση αν $\underline{n} > \underline{m}$. Η διαφορά $\underline{n} - \underline{m} = \underline{r}$ ονομάζεται βαθμός ελευθερίας.

Η μέθοδος που έχει καθιερωθεί ως αποδεκτή για τις συνορθώσεις είναι η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.).

Αν με $\hat{\ell}$ συμβολιστεί η συνορθωμένη τιμή ενός μεγέθους που έχει μετρηθεί και με ℓ_i το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, τότε η διαφορά

$$\hat{\ell} - \ell_i = \upsilon_i \tag{3.1}$$

ονομάζεται υπόλοιπο και αναφέρεται πάντα στα μετρημένα μεγέθη.

Αν έχουν μετρηθεί $\underline{n}$ μεγέθη ενός συναρτησιακού μοντέλου με το ίδιο σύστημα "όργανο - παρατηρητής - συνθήκες" οι καλύτερες τιμές είτε των μεγεθών που μετρήθηκαν είτε των ανεξάρτητων παραμέτρων του μοντέλου θα είναι εκείνες για τις οποίες:

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i^2 = \boldsymbol{\upsilon}^T \boldsymbol{\upsilon} = \min \tag{3.2}$$

Αν όλες οι μετρήσεις δεν έχουν γίνει με το ίδιο σύστημα και υπάρχουν ενδείξεις ότι δεν είναι της ίδιας ποιότητας τότε η αρχή της Μ.Ε.Τ. εκφράζεται σαν:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \upsilon_i^2 = \boldsymbol{\upsilon}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\upsilon} = \min \tag{3.3}$$

όπου P_i τα βάρη των μετρήσεων.

3.1.1 Πηγές και είδη σφαλμάτων

Έχει καθιερωθεί τα σφάλματα των μετρήσεων να κατατάσσονται σε **χονδροειδή** (λάθη), **συστηματικά** και **τυχαία**.

Τα **χονδροειδή** οφείλονται σε απροσεξία του παρατηρητή, εντοπίζονται εύκολα με επανάληψη της μέτρησης και αποφεύγονται αν ο παρατηρητής είναι προσεκτικός.

Τα **συστηματικά** σφάλματα παρουσιάζουν σταθερότητα ή περιοδικότητα σε μέγεθος και πρόσημο και σε μεγάλο ποσοστό υπακούουν σε κάποιο φυσικό νόμο οπότε, μπορούν να εκφραστούν με κάποια μαθηματική σχέση και να υπολογιστούν (π.χ. αστρονομική διάθλαση). Μπορεί ακόμη ορισμένα να απαλειφθούν ακολουθώντας κατάλληλη μεθοδολογία στις μετρήσεις. Τέτοια σφάλματα οφείλονται σε πολλούς παράγοντες, όπως ατέλειες και ατελείς ρυθμίσεις οργάνων, καιρικές συνθήκες κλπ. Είναι ακόμα δυνατό να δημιουργούνται συστηματικά σφάλματα από λανθασμένη επιλογή μοντέλου για τις αναγωγές των μετρήσεων. Επομένως τα σφάλματα αυτά αποφεύγονται αν ακολουθείται η σωστή διαδικασία στις μετρήσεις, ελέγχονται και ρυθμίζονται τα όργανα και γίνονται οι απαραίτητες αναγωγές με επιλογή των πιο ρεαλιστικών μαθηματικών μοντέλων. Σχεδόν πάντα όμως παραμένει ένα μικρό ποσοστό συστηματικών σφαλμάτων που είναι πιθανό να εντοπιστεί μετά τη συνόρθωση.

Αν οι μετρήσεις ενός μεγέθους με το ίδιο σύστημα έδιναν όλες το ίδιο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα αυτό θα ήταν η **ακριβής τιμή** μ του μεγέθους. Δηλαδή η ακριβής τιμή μπορεί να υπολογιστεί από μια σειρά μετρήσεων αν το πλήθος των μετρήσεων τείνει στο άπειρο.

Σαν **τυχαίο** σφάλμα ορίζεται η διαφορά:

$$\ell_i - \mu = u_i \tag{3.4}$$

Συνεπώς οι διαφορές που προκύπτουν, αφού απαλειφθούν τα χονδροειδή και τα συστηματικά σφάλματα των αποτελεσμάτων μιας σειράς μετρήσεων του ίδιου μεγέθους με το ίδιο σύστημα, οφείλονται μόνο σε σφάλματα των μετρήσεων που έχουν τυχαίο χαρακτήρα.

Επίσης, αν πρόκειται για μετρήσεις στοιχείων ενός μοντέλου που είναι περισσότερες από τον αριθμό των αγνώστων ανεξαρτήτων παραμέτρων του οι μετρήσεις δεν θα είναι συμβιβαστές και οι διαφορές θα οφείλονται σε σφάλματα των

μετρήσεων που έχουν τυχαίο χαρακτήρα αλλά και στο μικρό ποσοστό συστηματικών σφαλμάτων που απομένει.

Έτσι, το μεγαλύτερο ποσοστό των συστηματικών σφαλμάτων αντιμετωπίζεται με συναρτησιακά μοντέλα, τα τυχαία σφάλματα μαζί με το μικρό ποσοστό των συστηματικών που απομένει αντιμετωπίζονται μαζί, με τα μοντέλα της Στατιστικής.

3.1.2 Ακρίβεια - Ορθότητα

Ακρίβεια (Precision) ή εσωτερική ακρίβεια είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν οι μετρήσεις μεταξύ τους. Εξαρτάται από την ευαισθησία του οργάνου και την ικανότητα του παρατηρητή.

Η ακρίβεια μπορεί να εκτιμηθεί από μια σειρά μετρήσεων με το ίδιο σύστημα "όργανο - παρατηρητής - συνθήκες".

Ορθότητα (Accuracy) ή εξωτερική ακρίβεια είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν οι μετρήσεις την αληθινή τιμή.

Η ορθότητα δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί από μια σειρά μετρήσεων ενός μεγέθους με το ίδιο σύστημα "όργανο - παρατηρητής - συνθήκες".

Ο συνδυασμός ορθότητας και ακρίβειας συχνά ονομάζεται **αξιοπιστία**.

3.2 Στοιχεία στατιστικής ανάλυσης

Ένα μέγεθος x που προσδιορίζεται από μετρήσεις μπορεί να θεωρηθεί τυχαία (στοχαστική) μεταβλητή. Έτσι, το αποτέλεσμα x_i κάθε μέτρησης ονομάζεται **ενδεχόμενη τιμή** και θεωρείται συνεχές μέγεθος.

Το σύνολο των ενδεχομένων τιμών ενός μεγέθους αποτελεί πληθυσμό. Έτσι, στις περιπτώσεις μεγεθών που προσδιορίζονται από μετρήσεις, θα είχαμε τον πληθυσμό, αν οι μετρήσεις με το ίδιο σύστημα "όργανο - παρατηρητής - συνθήκες" έτειναν στο άπειρο.

Στην πράξη ο αριθμός των μετρήσεων είναι περιορισμένος, οπότε τα αποτελέσματα μιας σειράς μετρήσεων θεωρούνται σαν ένα δείγμα του πληθυσμού.

Από συνδυασμό πειραμάτων και θεωρίας προσδιορίζονται συναρτήσεις που περιγράφουν τις κατανομές των πιθανοτήτων εμφάνισης των διαφόρων τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής. Οι συναρτήσεις αυτές είναι δύο ειδών: οι συναρτήσεις πυκνοτήτων και οι συναρτήσεις κατανομής.

Για τον πλήρη ορισμό των συναρτήσεων πιθανοτήτων θα πρέπει ορισμένες παράμετροι είτε να θεωρηθούν γνωστές είτε να προσδιοριστούν από μετρήσεις. Τα μεγέθη ή οι εκτιμητές που υπολογίζονται από τις στοχαστικές μεταβλητές του δείγματος, ονομάζονται στατιστικά μεγέθη και θεωρούνται σαν στοχαστικές μεταβλητές με δικές τους συναρτήσεις πυκνοτήτων. Επίσης αναφέρεται ότι, ορισμένα στατιστικά μεγέθη ακολουθούν την κανονική κατανομή και άλλα όχι. Γενικά, η

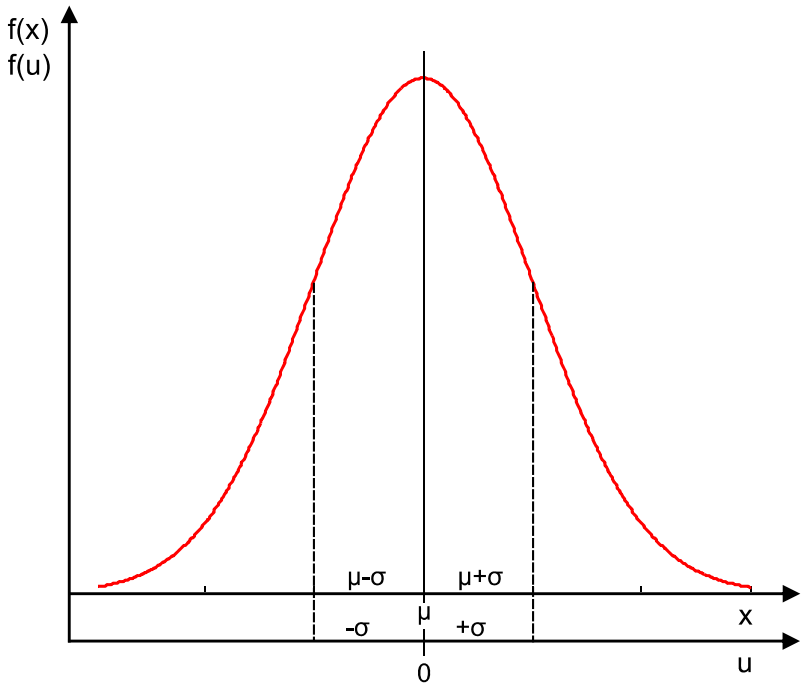
κανονική κατανομή αποτελεί το στατιστικό μοντέλο για τις μετρήσεις και είναι η πιο διαδεδομένη κατανομή πιθανοτήτων.

Η μέση τιμή του δείγματος, οι καλύτερες τιμές των ανεξαρτήτων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου ή των στοιχείων που μετρήθηκαν και προσδιορίζονται από μια συνόρθωση, αποτελούν εκτιμήσεις των αντίστοιχων ακριβών τιμών και είναι υπό προϋποθέσεις στατιστικά μεγέθη που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

3.2.1 Μέτρα ακρίβειας - Διαστήματα εμπιστοσύνης

Με την παραδοχή ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή η συνάρτηση πυκνοτήτων τους είναι η:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{για } -\infty < x < +\infty \qquad \text{(Γράφημα 3.1)}$$



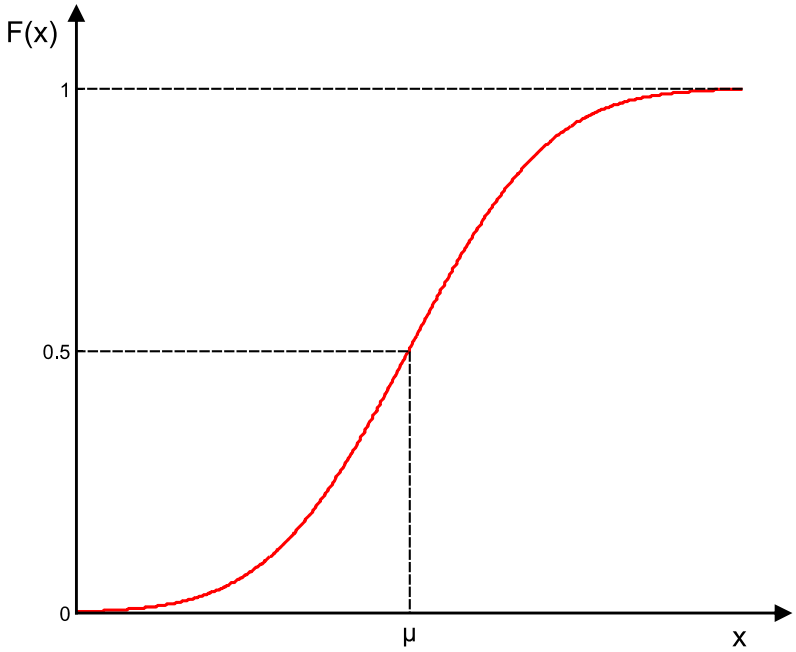
Γράφημα 3.1: Κανονική κατανομή - Συνάρτηση πυκνοτήτων

Η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής είναι η:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \text{(Γράφημα 3.2)}$$

Οι παράμετροι μ και σ των παραπάνω συναρτήσεων είναι η ακριβής τιμή και το τυπικό σφάλμα των μετρήσεων αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται στο γράφημα 3.1, η συνάρτηση f(x) είναι συμμετρική ως προς την ακριβή τιμή μ, ενώ τα σημεία καμπής της βρίσκονται στις θέσεις x = μ – σ και x = μ + σ.



Γράφημα 3.2: Κανονική κατανομή - Συνάρτηση κατανομής

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η ακρίβεια μιας μέτρησης είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν οι μετρήσεις μεταξύ τους. Έτσι, είναι προφανές ότι όσο πιο πεπλατυσμένη είναι η συνάρτηση πυκνοτήτων των μετρήσεων ή των τυχαίων σφαλμάτων τόσο λιγότερο ακριβείς θα είναι οι μετρήσεις. Ένα μέτρο, λοιπόν, της ακρίβειας των μετρήσεων είναι το τυπικό σφάλμα σ, γιατί όσο μεγαλώνει το σ τόσο πιο πεπλατυσμένη γίνεται η f(x), που σημαίνει ότι η ακρίβεια είναι αντίστροφη του τυπικού σφάλματος. Επομένως δικαιολογείται και το όνομα τυπικό σφάλμα σαν ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει (τυποποιεί) μια σειρά μετρήσεων.

Για απλούστευση θεωρείται η τυποποιημένη μεταβλητή $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ με $\mu_z = 0$ και $\sigma_z = 1$, οπότε:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(x)$$

Οι τιμές της F(z) έχουν υπολογιστεί και πινακοποιηθεί για $z \geq 0$ (Παράρτημα Α).

Είναι προφανές ότι:

$$f(-z) = f(z) \qquad \text{και} \qquad F(-z) = 1 - F(z)$$

ενώ η πιθανότητα με την οποία μια τιμή z βρίσκεται μεταξύ των τιμών $-z_i$ και z_i θα είναι:

$$P(-z_i < z < z_i) = \int_{-z_i}^{z_i} f(z)dz = 2F(z_i) - 1$$

και για $z_i = 1 \rightarrow 2F(z_i) - 1 = 0.683$ που σημαίνει

$$P(-1 < \frac{x-\mu}{\sigma} < 1) = 68\%$$

ή $$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 68\%$$

ή $$P(x - \sigma < \mu < x + \sigma) = 68\%$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται πως η διαφορά μιας εκτίμησης x της μεταβλητής από την ακριβή της τιμή θα κυμαίνεται μεταξύ – σ και + σ (αν x είναι η μέση τιμή τότε σ θα είναι το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής) με πιθανότητα 68% που σημαίνει πως αν η εκτίμηση που έχουμε κάνει είναι x η ακριβής τιμή της μεταβλητής θα βρίσκεται στο διάστημα x – σ έως x + σ με πιθανότητα 68%. Έτσι, το τυπικό σφάλμα ορίζει ένα διάστημα μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η διαφορά x – μ με πιθανότητα 68%.

Σαν μέτρα ακρίβειας των μετρήσεων χρησιμοποιούνται και διαστήματα πολλαπλάσια του τυπικού σφάλματος, όπως το 2σ ή 3σ, για τα οποία βρίσκονται οι αντίστοιχες πιθανότητες.

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < +2) = 95.4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < +3) = 99.7\%$$

Η πιθανότητα ονομάζεται **επίπεδο εμπιστοσύνης** ενώ το διάστημα που συνδέεται με αυτή **διάστημα εμπιστοσύνης**.

Το επίπεδο εμπιστοσύνης γενικά συμβολίζεται και με p = 1 – α, όπου α η πιθανότητα να βρίσκεται η x – μ έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης.

Η τυποποιημένη μεταβλητή $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ που ακολουθεί κανονική κατανομή χρησιμοποιείται εφόσον το τυπικό σφάλμα αναφέρεται στον πληθυσμό (a priori τυπικό σφάλμα σ) ή ο βαθμός ελευθερίας είναι μεγαλύτερος από 30. Στις περιπτώσεις που τα σφάλματα έχουν εκτιμηθεί από τις μετρήσεις (a posteriori τυπικό σφάλμα $\hat{\sigma}$), τότε εφόσον ο βαθμός ελευθερίας είναι μικρότερος από 30, τα διαστήματα εμπιστοσύνης υπολογίζονται με βάση το στατιστικό μέγεθος $t = \frac{x-\mu}{\hat{\sigma}}$.

Το μέγεθος αυτό ακολουθεί κατανομή Student με συνάρτηση πυκνοτήτων συμμετρική ως προς t = 0, που όσο μεγαλώνει ο βαθμός ελευθερίας πλησιάζει την κανονική κατανομή.

Για ορισμένες πιθανότητες και για βαθμούς ελευθερίας από 1 έως ∞ έχουν πινακοποιηθεί οι τιμές της t που συμβολίζονται με t_p (Παράρτημα Α). Επιπλέον, η πιθανότητα με την οποία μια τιμή t βρίσκεται μεταξύ των τιμών $-t_p$ και t_p θα είναι:

$$P(-t_p < t < t_p) = \int_{-t_p}^{t_p} f(t)dt = 2F(t_p) - 1$$

3.2.2 Μεταβλητότητα - Βάρη

Το τετράγωνο του τυπικού σφάλματος σ^2 ονομάζεται μεταβλητότητα και είναι ένα μέγεθος που εκφράζει τη διασπορά των ενδεχομένων τιμών.

Στις περιπτώσεις συνορθώσεων που περιλαμβάνουν μεγέθη διαφορετικής ακρίβειας χρησιμοποιούνται βάρη.

Το βάρος μιας μέτρησης μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας αριθμός που εκφράζει πόσο περισσότερο θα πρέπει να συμβάλλει μια μέτρηση στο τελικό αποτέλεσμα σε σχέση με κάποια άλλη.

Τα βάρη ορίζονται σαν αριθμοί αντιστρόφως ανάλογοι των μεταβλητοτήτων των μετρήσεων και δίνονται γενικά από τη σχέση:

$$P_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$$

Ο αριθμητής c μπορεί να είναι οποιαδήποτε αυθαίρετα επιλεγμένη ποσότητα και δεν επηρεάζει τη λύση.

Μονάδα βάρους ονομάζεται η πραγματική ή φανταστική παρατήρηση με βάρος 1 ενώ **μεταβλητότητα της μονάδας βάρους** η μεταβλητότητα αυτής της παρατήρησης που συμβολίζεται με σ_o^2.

Έτσι, ορίζεται το βάρος με τη σχέση:

$$P_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2} \tag{3.5}$$

Αν $P_i = 1$ θα είναι $c = \sigma_o^2 = \sigma_i^2$ οπότε μονάδα βάρους θα είναι η παρατήρηση ℓ_i ενώ μεταβλητότητα της μονάδας βάρους σ_o^2 η μεταβλητότητα σ_i^2 της συγκεκριμένης παρατήρησης.

Εάν οι μετρήσεις αναφέρονται σε μεγέθη που έχουν όλα τις ίδιες διαστάσεις (μονάδες) θεωρείται η μονάδα βάρους στις ίδιες διαστάσεις οπότε προκύπτουν βάρη αδιάστατα (καθαροί αριθμοί). Εάν όμως οι μετρήσεις αναφέρονται σε μεγέθη με διαφορετικές διαστάσεις για να θεωρηθούν τα βάρη καθαροί αριθμοί θα πρέπει να αναχθούν οι μετρήσεις και τα τυπικά τους σφάλματα στις ίδιες διαστάσεις.

Γενικά με τη χρήση βαρών αναγόμαστε σε φανταστικές παρατηρήσεις από τον ίδιο πληθυσμό με μεταβλητότητα όση η a priori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους σ_o^2.

Μετά τη συνόρθωση και τον προσδιορισμό των καλύτερων τιμών συγκρίνονται οι μετρήσεις με αυτές και προσδιορίζεται η a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_o^2$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\boldsymbol{\upsilon}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\upsilon}}{\underline{r}} \tag{3.6}$$

Είναι προφανές πως το $\hat{\sigma}_o$ εξαρτάται από το σ_o (επιλογή μονάδας βάρους) ο λόγος όμως $\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$ είναι ανεξάρτητος του σ_o.

Αν οι a priori μεταβλητότητες των μετρήσεων σ_i^2 που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των βαρών ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ο λόγος $\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$ θα πρέπει να προκύψει πολύ κοντά στη μονάδα, ενώ στις περιπτώσεις μικρότερων ή μεγαλύτερων μεταβλητοτήτων από τις πραγματικές ο λόγος αυτός αναμένεται να προκύψει μεγαλύτερος ή μικρότερος αντίστοιχα από τη μονάδα.

Ενδέχεται ακόμα οι a priori μεταβλητότητες να είναι ρεαλιστικές και ο λόγος $\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$ να είναι μεγάλος. Στην περίπτωση αυτή, αν δεν υπάρχουν χονδροειδή, είναι πιθανή η παρουσία συστηματικών σφαλμάτων στις μετρήσεις και το συναρτησιακό μοντέλο (π.χ. παράλειψη κάποιας αναγωγής).

3.2.3 Στατιστικός έλεγχος χ^2

Για να πραγματοποιηθεί η συνόρθωση, γίνονται ορισμένες παραδοχές ως προς το στατιστικό και το μαθηματικό μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί και μετά τη συνόρθωση θα πρέπει να γίνει ένας έλεγχος που θα δείξει αν οι αρχικές παραδοχές ήταν σωστές ώστε και η λύση να είναι αποδεκτή (στατιστικός έλεγχος).

Οι αρχικές παραδοχές απαρτίζουν τη μηδενική υπόθεση που συμβολίζεται με H_o. Ο έλεγχος της υπόθεσης αυτής γίνεται με βάση κάποιο στατιστικό μέγεθος που υπολογίζεται από το συγκεκριμένο δείγμα (στατιστικό μέγεθος ελέγχου). Έτσι αν το στατιστικό αυτό μέγεθος βρίσκεται μέσα στο διάστημα που συνδέεται με ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, σημαίνει πως η αρχική μας υπόθεση H_o που αφορά στο στατιστικό και μαθηματικό μοντέλο ήταν σωστή και ότι δεν έγιναν χονδροειδή σφάλματα (λάθη) στις μετρήσεις, αν όχι θα πρέπει να ερευνηθεί η αιτία της ασυμφωνίας και να βελτιωθεί το μοντέλο ή να απορριφθούν ορισμένες μετρήσεις. Η αρχική υπόθεση H_o ελέγχεται σε σχέση με μία εναλλακτική υπόθεση H_1.

Αν σύμφωνα με την αρχική υπόθεση ένα στατιστικό μέγεθος d πρέπει να είναι ίσο με d_o θα είναι:

$$H_o \rightarrow d = d_o$$

ενώ οι πιθανές εναλλακτικές υποθέσεις μπορεί να είναι:

$$H_1 \rightarrow d \neq d_o \quad \text{ή}$$

$$H_1 \rightarrow d > d_o \quad \text{ή} \quad d < d_o$$

Αν η εναλλακτική υπόθεση H_1 εκφράζεται ως $d \neq d_o$, ο έλεγχος είναι αμφίπλευρος, ενώ αν η εναλλακτική υπόθεση εκφράζεται ως $d > d_o$ ή $d < d_o$ τότε οι έλεγχοι είναι μονόπλευροι.

Ο στατιστικός έλεγχος μιας υπόθεσης δεν είναι αλάνθαστος γιατί βασίζεται γενικά σ' ένα περιορισμένο δείγμα.

Η μεταβλητότητα που υπολογίζεται από μια συνόρθωση είναι στατιστικό μέγεθος (επειδή προέρχεται από στοχαστικές μεταβλητές) αλλά δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Για την εύρεση των διαστημάτων εμπιστοσύνης της χρησιμοποιείται η κατανομή χ^2.

Το χαρακτηριστικό μέγεθος $\frac{\underline{r}\,\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$ θεωρείται πως ακολουθεί κατανομή χ^2 με βαθμό ελευθερίας $\underline{r}$ και ανάλογα με την εναλλακτική υπόθεση H_1 υπολογίζεται το διάστημα μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται, με ορισμένη πιθανότητα για να ισχύει η H_o.

α) <u>Αμφίπλευρος έλεγχος</u>

$$H_o \rightarrow \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} = 1 \qquad H_1 \rightarrow \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \neq 1$$

Για επίπεδο εμπιστοσύνης p = 1 – α γίνεται αποδεκτή η H_o εφόσον:

$$P\left(\chi^2_{p_1,\underline{r}} \leq \frac{\underline{r}\,\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \leq \chi^2_{p_2,\underline{r}} \right) = p_2 - p_1 = p$$

Επειδή η κατανομή χ^2 δεν είναι συμμετρική, θεωρούνται οριακές τιμές της χ^2 για πιθανότητες p_1 και p_2 έτσι ώστε $p_1 = 1 - p_2$ οπότε $p_1 = \frac{\alpha}{2}$ και $p_2 = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Με στοιχείο εισόδου το βαθμό ελευθερίας και τις p_1 και p_2, βρίσκονται οι τιμές $\chi^2_{p_1,\underline{r}}$, $\chi^2_{p_2,\underline{r}}$ (Παράρτημα Α).

Επομένως, για επίπεδο εμπιστοσύνης p γίνεται αποδεκτή η υπόθεση H_o εφόσον:

$$\chi^2_{p_1,\underline{r}} \le \frac{\underline{r}\,\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \le \chi^2_{p_2,\underline{r}} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\sigma_o^2\,\chi^2_{p_1,\underline{r}}}{\underline{r}} \le \hat{\sigma}_o^2 \le \frac{\sigma_o^2\,\chi^2_{p_2,\underline{r}}}{\underline{r}} \tag{3.7}$$

β) <u>Μονόπλευρος έλεγχος</u>

$$H_o \rightarrow \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} = 1 \qquad H_1 \rightarrow \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} > 1$$

θα ισχύει η H_o αν: $P\left(\frac{\underline{r}\,\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \le \chi^2_{p,\underline{r}}\right) = p$

Με στοιχείο εισόδου το βαθμό ελευθερίας και το επίπεδο εμπιστοσύνης p = 1 – α βρίσκεται η τιμή $\chi^2_{p,\underline{r}}$ οπότε για επίπεδο εμπιστοσύνης p γίνεται αποδεκτή η υπόθεση H_o εφόσον:

$$\frac{\underline{r}\,\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \le \chi^2_{p,\underline{r}} \quad \text{ή}$$

$$\hat{\sigma}_o^2 \le \frac{\sigma_o^2\,\chi^2_{p,\underline{r}}}{\underline{r}} \tag{3.8}$$

3.3 Διαδικασία συνόρθωσης

3.3.1 Το μοντέλο της συνόρθωσης

Οι σχέσεις που συνδέουν παραμέτρους με μετρήσεις ονομάζονται γενικά εξισώσεις συνθήκης και συνιστούν το συναρτησιακό μοντέλο, ενώ ο πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας των μετρήσεων συνιστά το στατιστικό μοντέλο.

Το συναρτησιακό μοντέλο θεωρείται ως καθοριστικό, ενώ το στατιστικό ως στοχαστικό (αποτέλεσμα κάποιων εκτιμήσεων).

Τα δεδομένα για την εφαρμογή της Μ.Ε.Τ. είναι οι συνιστώσες $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{\underline{n}}$ του διανύσματος ℓ των μετρήσεων και ο πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας τους $\mathbf{V}_\ell$.

Συνήθως, οι μετρήσεις θεωρούνται στατιστικά ανεξάρτητες οπότε:

$$\mathbf{V}_{\ell} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\ell_1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma^2_{\ell_2} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma^2_{\ell_n} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Σημειώνεται όμως ότι, η υπόθεση των ασυσχέτιστων παρατηρήσεων, που οφείλεται κυρίως στην έλλειψη επαρκούς στατιστικής πληροφορίας για τον ακριβή προσδιορισμό των πραγματικών συσχετίσεων των σφαλμάτων, είναι η εξαίρεση παρά ο κανόνας, στην προσπάθεια μοντελοποίησης της διαδικασίας συλλογής και καταγραφής των δεδομένων.

$$\mathbf{P} = \sigma^2_o\, \mathbf{V}_{\ell}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2_o}{\sigma^2_{\ell_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \frac{\sigma^2_o}{\sigma^2_{\ell_2}} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{\sigma^2_o}{\sigma^2_{\ell_n}} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Εάν όλες οι μετρήσεις χαρακτηρίζονται από την ίδια ακρίβεια τότε θεωρούνται ισοβαρείς και δεν απαιτείται για τη συνόρθωση η μεταβλητότητά τους (Πίνακας βαρών **P**).

Αν οι εξισώσεις συνθήκης που σχηματίζονται είναι γραμμικές και περιέχουν παραμέτρους και περισσότερα από ένα μετρημένα στοιχεία, το σύστημά τους σε μορφή πινάκων θα είναι:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\ell = \boldsymbol{\kappa} \tag{3.11}$$

όπου **A**: ο πίνακας των συντελεστών των παραμέτρων που ενδιαφέρουν (m_o)
B: ο πίνακας των συντελεστών των μετρημένων στοιχείων
x: το διάνυσμα των παραμέτρων
ℓ : το διάνυσμα των μετρήσεων
κ: το διάνυσμα των σταθερών όρων

Οι εξισώσεις αυτές δεν θα είναι συμβιβαστές και το ℓ περιέχει τα αποτελέσματα μετρήσεων που έχουν τυχαία σφάλματα ($\hat{\ell} = \ell + \boldsymbol{\upsilon}$) οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως:

$$\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\hat{\ell} = \boldsymbol{\kappa} \qquad \text{ή}$$

$$\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\ell + \boldsymbol{\upsilon}) = \boldsymbol{\kappa} \tag{3.12}$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}$: το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των παραμέτρων
$\hat{\ell}$: το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των μετρήσεων

$\boldsymbol{\upsilon}$: το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων

Αν $\underline{n}$ ο αριθμός των μετρημένων στοιχείων, $\underline{m}$ ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων και m_o ο αριθμός των παραμέτρων x που ενδιαφέρουν, ο βαθμός ελευθερίας θα είναι $\underline{r} = \underline{n} - \underline{m}$ ενώ ο αριθμός των εξισώσεων συνθήκης θα είναι $\underline{c} = \underline{r} + m_o$.

Έτσι, οι διαστάσεις των πινάκων και των διανυσμάτων θα είναι:

$$\mathbf{A}_{\underline{m}_o}^{\underline{c}},\ \mathbf{B}_{\underline{n}}^{\underline{c}},\ \hat{\mathbf{x}}^{m_o},\ \ell^{\underline{n}},\ \boldsymbol{\upsilon}^{\underline{n}},\ \boldsymbol{\kappa}^{\underline{c}}$$

Η σχέση 3.12 μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{W} \tag{3.13}$$

όπου $\mathbf{W} = \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{B}\,\ell$ (διάνυσμα σφαλμάτων κλεισίματος).

Το σύστημα των εξισώσεων συνθήκης (3.12) περιέχει $\underline{c}$ εξισώσεις ενώ τα άγνωστα μεγέθη είναι $\underline{n} + m_o$ (m_o ανεξάρτητες παράμετροι που ενδιαφέρουν και $\underline{n}$ φαινόμενα σφάλματα ή υπόλοιπα μετρήσεων) και φυσικά $\underline{n} + m_o > \underline{c} = \underline{r} + m_o$ δηλαδή $\underline{n} > \underline{r}$.

3.3.2 Εκτιμήσεις των $\hat{\mathbf{x}}$ και $\boldsymbol{\upsilon}$

Η λύση θα είναι εκείνη που ικανοποιεί τη σχέση 3.13 ενώ συγχρόνως ικανοποιεί και την αρχή της Μ.Ε.Τ. $\boldsymbol{\upsilon}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\upsilon} = \min$.

Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο του δεσμευμένου ακρότατου του Lagrange.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή έχουμε:

$$G(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\underline{n}}) = \boldsymbol{\upsilon}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\upsilon}$$

και $$\begin{bmatrix} g_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{m_o}, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{\underline{n}}) \\ g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{m_o}, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{\underline{n}}) \\ \vdots \\ g_{\underline{c}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{m_o}, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{\underline{n}}) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} - \mathbf{W}$$ και $$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{\underline{c}} \end{bmatrix}$$

ενώ θα πρέπει:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\upsilon}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\upsilon} - 2\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} - \mathbf{W}) = \min \tag{3.14}$$

Εδώ αναφέρεται πως ο πολλαπλασιασμός του $\boldsymbol{\lambda}^T$ με – 2 γίνεται για απλούστευση των σχέσεων και δεν επηρεάζει τη λύση.

Η σχέση 3.14 θα ισχύει αν $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\upsilon}} = \mathbf{0},\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0},\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$

Έτσι προκύπτει

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\upsilon}} = 2\,\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - 2\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{0} \qquad \text{ή} \qquad -\mathbf{P}\boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -\,2\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -\,2(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} - \mathbf{W})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{W} \tag{3.17}$$

και το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\upsilon} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Ο συμμετρικός πίνακας των συντελεστών των αγνώστων έχει διαστάσεις $\underline{n} + \underline{c} + m_o$.

Επειδή η λύση του συστήματος 3.18 στο σύνολο του παρουσιάζει δυσχέρειες που οφείλονται στο μεγάλο αριθμό των αγνώστων, μπορεί να φθάσει κανείς στη λύση με αντικαταστάσεις.

Έτσι από τη σχέση 3.15

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{3.19}$$

Από τις 3.17 και 3.19

$$\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{W} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{3.20}$$

Από τις 3.16 και 3.20 προκύπτει:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \qquad \text{ή}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W} \qquad \text{ή}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W} \tag{3.21}$$

Ο πίνακας $\mathbf{Q}_\ell = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sigma_o^2}\mathbf{V}_\ell$ ονομάζεται πίνακας συντελεστών βάρους των μετρήσεων.

Το διάνυσμα $\mathbf{B}\ell = \ell_a$ θεωρείται σαν διάνυσμα των ανηγμένων μετρήσεων, οπότε ο πίνακας $\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^T$ είναι ο πίνακας συντελεστών βάρους του διανύσματος ℓ_a.

Έτσι ο $(\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^T)^{-1}$ θα είναι ο πίνακας βαρών του ℓ_a και μπορεί να συμβολιστεί με $\mathbf{P}_a$ οπότε η σχέση 3.21 γράφεται:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{W} \tag{3.22}$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{A}$ συμβολίζεται με $\mathbf{N}_a$ οπότε:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{W} \tag{3.23}$$

Από τις σχέσεις 3.19 και 3.20 προκύπτει:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{P}_a(\mathbf{W} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{3.24}$$

και με αντικατάσταση του $\hat{\mathbf{x}}$ υπολογίζεται το διάνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}$.

Το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των μετρήσεων θα είναι:

$$\hat{\ell} = \ell + \boldsymbol{\upsilon} \qquad \text{ή}$$

$$\hat{\ell} = \ell + \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{P}_a(\mathbf{W} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{3.25}$$

Οι εκτιμήσεις αυτές για τα παρατηρούμενα μεγέθη είναι "συνορθωμένες", ή αλλιώς συμβιβαστές (σε σχέση με τις αρχικά διαθέσιμες από τις μετρήσεις τιμές, οι οποίες δεν είναι συμβιβαστές μεταξύ τους). Αυτό σημαίνει ότι, αν υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων που ενδιαφέρουν χρησιμοποιώντας ένα υποσύνολο των συνορθωμένων παρατηρήσεων (οι οποίες να είναι τόσες ακριβώς όσες χρειάζονται) προκύπτουν πάντοτε οι ίδιες τιμές για τις παραμέτρους, ανεξάρτητα από το ποιο ακριβώς υποσύνολο παρατηρήσεων χρησιμοποιείται κάθε φορά.

3.3.3 Εκτιμήσεις πινάκων μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας

3.3.3.1 Εκτίμηση $\mathbf{V}_{\hat{x}}$ ή $\hat{\mathbf{V}}_{\hat{x}}$

Η σχέση 3.23 γράφεται:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{B}\,\ell) \tag{3.26}$$

οπότε εφόσον γνωρίζουμε τον πίνακα $\mathbf{V}_\ell = \sigma_o^2\,\mathbf{P}^{-1}$ των μετρήσεων, εφαρμόζοντας τον νόμο μετάδοσης μεταβλητοτήτων, προκύπτει:

$$\mathbf{V}_{\hat{x}} = \sigma_o^2\,\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{A}\,\mathbf{N}_a^{-1} = \sigma_o^2\,\mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{A}\,\mathbf{N}_a^{-1}$$

Αλλά $\mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \mathbf{A} = \mathbf{N}_a$ οπότε

$$\mathbf{V}_{\hat{x}} = \sigma_o^2 \mathbf{N}_a^{-1} \quad (3.27) \qquad \text{ή} \qquad \hat{\mathbf{V}}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{N}_a^{-1} \quad (3.28)$$

3.3.3.2 Εκτίμηση $\mathbf{V}_{\hat{\ell}}$ ή $\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\ell}}$ και $\mathbf{V}_{\upsilon}$ ή $\hat{\mathbf{V}}_{\upsilon}$

Για τον υπολογισμό του πίνακα μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας των καλύτερων τιμών των στοιχείων που μετρήθηκαν θεωρείται η σχέση 3.25. Με αντικατάσταση του $\hat{\mathbf{x}}$ από την 3.23 προκύπτει:

$$\hat{\ell} = \ell + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a (\mathbf{W} - \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \mathbf{W}) \qquad \text{ή}$$

$$\hat{\ell} = \ell + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{B} \ell - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \boldsymbol{\kappa} + \\ + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \mathbf{B} \ell$$

και

$$\mathbf{V}_{\hat{\ell}} = \mathbf{V}_{(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_a\mathbf{B} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_a\mathbf{A}\mathbf{N}_a^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}_a\mathbf{B})\ell}$$

οπότε εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης μεταβλητοτήτων θα είναι:

$$\mathbf{V}_{\hat{\ell}} = \sigma_o^2 (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1})$$

$$\text{ή} \qquad \mathbf{V}_{\hat{\ell}} = \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1} - \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a [\, \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \,] \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \qquad (3.29)$$

$$\text{ή} \qquad \hat{\mathbf{V}}_{\hat{\ell}} = \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{P}^{-1} - \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a [\, \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \,] \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \qquad (3.30)$$

Εδώ θα πρέπει να διευκρινισθεί πως ενώ τα αποτελέσματα των μετρήσεων ℓ_i θεωρούνται εν γένει στατιστικά ανεξάρτητα δεν ισχύει το ίδιο για τις καλύτερες τιμές $\hat{\ell}_i$ διότι υπολογίζονται από τα ίδια $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, …, $\hat{x}_{m_o}$ και επιπλέον κάθε εξίσωση συνθήκης περιέχει περισσότερες από μία μετρήσεις.

Συχνά για εντοπισμό χονδροειδών ή συστηματικών σφαλμάτων συγκρίνονται τα υπόλοιπα υ_i με τα τυπικά τους σφάλματα. Έτσι απαιτείται η εκτίμηση του πίνακα μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας $\mathbf{V}_{\upsilon}$ των υπολοίπων.

Για τον $\mathbf{V}_{\upsilon}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\mathbf{V}_{\upsilon} = \mathbf{V}_{\ell} - \mathbf{V}_{\hat{\ell}} \qquad (3.31)$$

$$\text{ή} \qquad \mathbf{V}_{\upsilon} = \sigma_o^2 (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1})$$

$$\text{ή} \qquad \mathbf{V}_{\upsilon} = \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a [\, \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \,] \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \qquad (3.32)$$

$$\text{ή} \qquad \hat{\mathbf{V}}_{\upsilon} = \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_a [\, \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{N}_a^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_a \,] \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \qquad (3.33)$$

Επειδή τα υ όπως και τα $\hat{\ell}$ δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αποδεικνύεται ότι τόσο ο $\mathbf{V}_{\upsilon}$ όσο και ο $\mathbf{V}_{\hat{\ell}}$ δεν μπορούν να αντιστραφούν.

3.3.3.3 Εκτίμηση της a posteriori μεταβλητότητας της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_o^2$

Το $\hat{\sigma}_o^2 = \dfrac{\boldsymbol{\upsilon}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\upsilon}}{\underline{n}-\underline{m}}$ μπορεί να υπολογισθεί αν υπολογισθούν τα υ από τη σχέση 3.24 ή από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\mathbf{W}^T\mathbf{P}_a\mathbf{W} - \hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{N}_a\hat{\mathbf{x}}}{\underline{n}-\underline{m}} \tag{3.34}$$

3.3.4 Περίπτωση μη γραμμικών σχέσεων

Αν οι συνθήκες που δημιουργούνται μεταξύ μετρήσεων και παραμέτρων δεν είναι γραμμικές, αλλά σχέσεις της μορφής:

$$y_i = f_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = \kappa_i \tag{3.35}$$

δίνονται προσωρινές τιμές x^o στις παραμέτρους x και αναπτύσσονται οι σχέσεις κατά Taylor στη θέση $\mathbf{x}^o$, ℓ οπότε:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^o_{\mathbf{y}\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_{m_o}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_{m_o}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\underline{c}}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_{\underline{c}}}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_{\underline{c}}}{\partial \hat{x}_{m_o}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{J}^o_{\mathbf{y}\hat{\ell}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\ell}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\ell}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\ell}_{\underline{n}}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\ell}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\ell}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\ell}_{\underline{n}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\underline{c}}}{\partial \hat{\ell}_1} & \frac{\partial f_{\underline{c}}}{\partial \hat{\ell}_2} & \cdots & \frac{\partial f_{\underline{c}}}{\partial \hat{\ell}_{\underline{n}}} \end{bmatrix}$$

Έτσι το σύστημα γίνεται:

$$\mathbf{A}\,\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{W} \tag{3.36}$$

όπου:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \kappa_1 - f_1(\mathbf{x}^o, \ell) \\ \kappa_2 - f_2(\mathbf{x}^o, \ell) \\ \vdots \\ \kappa_{\underline{c}} - f_{\underline{c}}(\mathbf{x}^o, \ell) \end{bmatrix}$$

Για την κατανόηση της διαδικασίας θεωρείται αρχικά ένα τυχαίο μέγεθος y που συνδέεται με ένα άλλο τυχαίο μέγεθος x με μια μη γραμμική συνάρτηση f(x). Εφόσον η f(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στην περιοχή των τιμών που μπορεί

να πάρει το μέγεθος x αναπτύσσεται κατά Taylor σε κάποια θέση x^o μέσα στο εύρος των τιμών του x και παραλείπονται οι όροι που περιέχουν δυνάμεις του $\delta x = x - x^o$ μεγαλύτερες από τη μονάδα (όροι ανώτερης τάξης).

Έτσι προκύπτει η σχέση:

$$y = f(x) \approx y^o + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x^o} \delta x \tag{3.37}$$

όπου $y^o = f(x^o)$ και $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x^o}$ θεωρούνται χωρίς σφάλμα και φυσικά $\sigma_{\delta x} = \sigma_{x-x^o} = \sigma_x$. Η σχέση 3.37 είναι γραμμική ως προς δx και εκφράζει την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης f(x) στη θέση x^o. Αυτό σημαίνει αντικατάσταση της καμπύλης f(x) με ευθεία για μικρό διάστημα στη θέση x^o.

Συνεπώς, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τα διανύσματα **y**, $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\ell}$ προκύπτουν οι πίνακες $\mathbf{J}^o_{y\hat{x}}$ και $\mathbf{J}^o_{y\hat{\ell}}$. Ο πίνακας $\mathbf{J}^o_{y\hat{x}}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του διανύσματος **y** ως προς $\hat{\mathbf{x}}$ στη θέση $\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} x^o_1 & x^o_2 & \cdots & x^o_{m_o} \end{bmatrix}^T$. Αντίστοιχα, ο πίνακας $\mathbf{J}^o_{y\hat{\ell}}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του διανύσματος **y** ως προς $\hat{\ell}$ στη θέση των προσωρινών τιμών. Σαν προσωρινές τιμές είναι φυσικό να θεωρηθούν, στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα των μετρήσεων $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{\underline{n}}$ οπότε οι ζητούμενες διορθώσεις θα είναι τα υπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\underline{n}}$.

Η λύση ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση των γραμμικών σχέσεων δίνει το διάνυσμα $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$ και στη συνέχεια προκύπτει:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^o + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{V}_{\hat{x}} = \mathbf{V}_{\delta x}$$

Επισημαίνεται πως, λόγω ακριβώς της γραμμικοποίησης, το πρόβλημα δεν λύνεται με μία και μόνη εφαρμογή της Μ.Ε.Τ. αλλά με διαδοχικές επαναλήψεις (διαδοχικές προσεγγίσεις). Σε κάθε επανάληψη ως προσωρινές εισάγονται οι νέες τιμές $x' = x^o + \delta x$ και υπολογίζονται νέες διορθώσεις τους δx' κ.ο.κ., μέχρις ότου οι διορθώσεις αυτές γίνουν αμελητέα μικρές, δηλαδή μικρότερες από ένα όριο σύγκλισης που έχει τεθεί.

Η αριθμητική τιμή των ορίων σύγκλισης που επιλέγονται, καθορίζεται κυρίως από την επιδιωκόμενη ακρίβεια (υπό την προϋπόθεση ότι η ακρίβεια των μετρήσεων είναι σε θέση να ανταποκριθεί σε αυτή). Έτσι, ένα πιο ασφαλές κριτήριο είναι η σύγκλιση του a posteriori τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}^2_o$. Δηλαδή γίνεται έλεγχος αν το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους που προκύπτει σε κάθε συνόρθωση διαφέρει από εκείνο της αμέσως προηγούμενης.

Πάντως, η εξασφάλιση προσωρινών - προσεγγιστικών τιμών για τις παραμέτρους που ενδιαφέρουν είναι ένα σοβαρό ζήτημα, αφού οι κακές αρχικές τιμές των παραμέτρων (δηλαδή οι πολύ διαφορετικές από τις "αληθείς") δυσχεραίνουν τη

σύγκλιση του αλγορίθμου ή ακόμα και την καθιστούν αδύνατη, προκαλώντας αδυναμία λύσης.

Προφανώς, κατά την εφαρμογή της διαδικασίας συνόρθωσης θα πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη οι μονάδες των στοιχείων των διανυσμάτων $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\ell}$. Θα πρέπει, δηλαδή, να διασφαλίζεται ότι όλα τα μεγέθη είναι σε τέτοιες μονάδες ώστε το αποτέλεσμα της επίλυσης να είναι και αυτό στις επιθυμητές μονάδες.

3.4 Μεθοδολογία εφαρμογής της συνόρθωσης

3.4.1 Εισαγωγή - Δεδομένα

Το πρόβλημα που τίθεται αφορά στον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους (Φ) και των παραμέτρων του μοντέλου της κανονικής διάθλασης (R_0).

Έτσι, από τις σχέσεις 1.12 και 1.13 προκύπτει η εξίσωση της ευθείας ε του γραφήματος 1.2:

$$\Phi = \delta \pm z \quad \left[\frac{+S}{-N}\right] \tag{3.38}$$

ή

$$\delta \pm z - \Phi = 0 \quad \left[\frac{+S}{-N}\right] \tag{3.39}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την πραγματική ζενίθια απόσταση (z) με τη βοήθεια της 2.3 προκύπτει:

$$\delta \pm (z_o + R) - \Phi = 0 \quad \left[\frac{+S}{-N}\right] \tag{3.40}$$

Επιπλέον, η πραγματική διάθλαση (R) υπολογίζεται μέσω της κανονικής από τη σχέση 2.6 και επομένως:

$$\delta \pm (z_o + f_{air} \cdot R_0) - \Phi = 0 \quad \left[\frac{+S}{-N}\right] \tag{3.41}$$

όπου R_0 το μοντέλο κανονικής διάθλασης (Πίνακας 2.1).

Δηλαδή για κάθε παρατηρούμενο άστρο έχουμε μια εξίσωση της μορφής:

$$\delta_i \pm (z_{oi} + f^i_{air} \cdot R_{0i}) - \Phi = 0 \quad \left[\frac{+S}{-N}\right] \text{ για κάθε άστρο } i = 1, \ldots, \nu. \tag{3.42}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για τον υπολογισμό του πλάτους, απαιτούνται παρατηρούμενες ζενίθιες αποστάσεις (z_o) άστρων κατά τη μεσουράνησή τους καθώς και οι

φαινόμενες αποκλίσεις τους (δ) τη στιγμή αυτή. Επιπλέον, για τον υπολογισμό του συντελεστή f_{air} απαιτούνται οι τιμές της θερμοκρασίας (θ) και της ατμοσφαιρικής πίεσης (p) κατά την παρατήρηση του άστρου. Ας σημειωθεί ότι, οι τιμές της θερμοκρασίας και της πίεσης κατά συνέπεια και ο συντελεστής f_{air} θεωρούνται χωρίς σφάλμα.

Το εν λόγω πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί "Προσδιορισμός πλάτους με αυτοβαθμονόμηση" διότι:

- το αστρονομικό πλάτος (Φ) προσδιορίζεται ως παράμετρος του γραμμικού μοντέλου (βαθμονόμηση) και
- οι πραγματικές ζενίθιες αποστάσεις (z) προκύπτουν μέσω της βαθμονόμησης του μοντέλου διάθλασης χρησιμοποιώντας αποκλειστικά δεδομένα παρατηρήσεων.

Καταγράφοντας τις παρατηρήσεις μορφώνουμε το διάνυσμα των μετρήσεων ℓ και τον πίνακα μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητάς τους $\mathbf{V}_\ell$.

$$\ell = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ z_{o1} \\ \vdots \\ \delta_\nu \\ z_{o\nu} \end{bmatrix} \quad (3.43) \qquad \mathbf{V}_\ell = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{z_{o1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\delta_\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{z_{o\nu}} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Συνεπώς αν το πλήθος των παρατηρούμενων άστρων είναι ν, ο αριθμός των μετρημένων στοιχείων είναι $\underline{n} = 2\nu$.

Το γεγονός ότι οι παρατηρήσεις είναι πάντα περισσότερες από τις απαραίτητες, υπαγορεύει την ανάγκη της συνόρθωσης. Η συνόρθωση γίνεται με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.), ακολουθώντας την παρακάτω τεχνική.

3.4.2 Επίλυση

3.4.2.1 Μοντέλο Ι

Αντικαθιστώντας στη σχέση 3.42 το μοντέλο Ι προκύπτει:

$$\delta_i \pm (z_{oi} + f^i_{air} \cdot k \cdot \tan z_{oi}) - \Phi = 0 \quad \begin{bmatrix} +S \\ \hline -N \end{bmatrix} \qquad (3.45)$$

Εφόσον για κάθε άστρο i = 1, …, ν έχουμε την απόκλιση (δ_i) και την παρατηρούμενη ζενίθια απόσταση (z_{oi}), ο αριθμός των μετρήσεων είναι $\underline{n} = 2\nu$.

Οι παράμετροι που μας ενδιαφέρουν είναι το πλάτος Φ και η παράμετρος k του μοντέλου διάθλασης, δηλαδή $m_o = 2$ ($\mathbf{x} = [\Phi \quad k]^T$).

Οι ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι είναι $m = m_o + \nu = 2 + \nu$ γιατί οι ελάχιστες παράμετροι από τις οποίες μπορούμε να αναπαράγουμε ότι μετρήσαμε είναι οι Φ, k και μια παράμετρος για κάθε άστρο δηλαδή ν παράμετροι για τα άστρα και 2 επιπλέον παράμετροι (σταθερός όρος & συντελεστής).

Ο βαθμός ελευθερίας είναι $\underline{r} = \underline{n} - \underline{m} = 2\nu - (2 + \nu) = \nu - 2$ ενώ σχηματίζονται $\underline{c} = \underline{r} + m_o = \nu - 2 + 2 = \nu$ εξισώσεις συνθήκης.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, όπου ζητείται να προσδιοριστούν συγκεκριμένες παράμετροι, ενώ ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων αυξάνεται με την αύξηση των παρατηρήσεων, θα χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε παραπάνω (§ 3.3) όπως αυτή εφαρμόζεται σε μη γραμμικές σχέσεις.

Στο σημείο αυτό χρήσιμο είναι να γίνει μία σημαντική επισήμανση:

Η διάθεση τουλάχιστον τόσων εξισώσεων όσων και αγνώστων συνιστά μια αναγκαία μεν αλλά όχι και ικανή συνθήκη λύσης. Κι αυτό γιατί, εκτός του επαρκούς αριθμού τους, οι εξισώσεις οφείλουν να εξασφαλίζουν και ορισμένες "γεωμετρικές" προϋποθέσεις. Οι προϋποθέσεις αυτές αφορούν το ίδιο το μοντέλο με τους περιορισμούς που αυτό θέτει (π.χ. το μοντέλο I ισχύει όταν $z_o < 30^o$) αλλά και τις τιμές των ζενίθιων γωνιών (π.χ. περίπου ίδιες τιμές ζενίθιων γωνιών για όλα τα άστρα συνιστά κακή επιλογή). Εάν πάλι τα άστρα βρίσκονται όλα βόρεια ή όλα νότια του ζενίθ, τότε η λύση που προκύπτει είναι εξαιρετικά αβέβαιη.

Συμπερασματικά, για την πραγματοποίηση συνόρθωσης απαιτείται αριθμός άστρων που να εξασφαλίζουν περίσσεια εξισώσεων και επιπλέον, για περισσότερο αξιόπιστα αποτελέσματα τα άστρα αυτά θα πρέπει να είναι καλά κατανεμημένα βόρεια και νότια του ζενίθ (βλ. Γράφημα 1.2).

Η σχέση 3.45 γράφεται ως:

$$f_{Ii}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = \hat{\delta}_i \pm (\hat{z}_{oi} + f^i_{air} \cdot \hat{k} \cdot \tan \hat{z}_{oi}) - \hat{\Phi} = 0 \qquad \begin{bmatrix} +S \\ -N \end{bmatrix} \qquad (3.46)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση δεν είναι γραμμική ως προς παραμέτρους και μετρήσεις δίνονται προσωρινές τιμές x^o στο διάνυσμα των παραμέτρων **x** και αναπτύσσεται κατά Taylor, οπότε:

$$\frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{\Phi}} \cdot \delta\Phi + \frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{k}} \cdot \delta k + \frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{\delta}} \cdot \upsilon_\delta + \frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{z}_o} \cdot \upsilon_{z_o} = -[\delta_i \pm (z_{oi} + f^i_{air} \cdot k^o \cdot \tan z_{oi}) - \Phi^o] \quad (3.47)$$

όπου $\dfrac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{\Phi}} = -1, \qquad \dfrac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{k}} = \pm f^i_{air} \cdot \tan z_{oi}$,

$$\frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{\delta}} = 1, \qquad \frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{z}_o} = \pm \left(1 + \frac{f^i_{air} \cdot k^o}{\cos^2 z_{oi}}\right)$$

Σημειώνεται ότι, για την αποφυγή πολύ μικρών και μεγάλων αριθμών θα θεωρηθούν τα αποτελέσματα των μετρήσεων - δεδομένα καθώς και οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων Φ και k σε δευτερόλεπτα τόξου (as).

Έτσι, οι διορθώσεις δΦ, δk, υ_δ θα προκύψουν σε δευτερόλεπτα τόξου ενώ προκειμένου και τα υ_{z_o} των ζενίθιων γωνιών να προκύψουν στις ίδιες μονάδες θα πρέπει ο συντελεστής τους $\frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{z}_o}$ να είναι καθαρός αριθμός.

Δηλαδή $\frac{\partial f_{Ii}}{\partial \hat{z}_o} = \pm \left(1 + \frac{f^i_{air} \cdot k^o \cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{oi}}\right)$.

Επομένως, η σχέση 3.47 γράφεται:

$$-1 \cdot \delta\Phi \pm f^i_{air} \cdot \tan z_{oi} \cdot \delta k + 1 \cdot \upsilon_\delta \pm \left(1 + \frac{f^i_{air} \cdot k^o \cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{oi}}\right) \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm (z_{oi} + f^i_{air} \cdot k^o \cdot \tan z_{oi}) - \Phi^o] \qquad (\text{σε as}) \qquad \left[\frac{+S}{-N}\right] \qquad (3.48)$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{W}$$

Οι διαστάσεις των πινάκων είναι: $\mathbf{A}^v_2$, $\mathbf{B}^v_{2v}$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^2$, $\boldsymbol{\upsilon}^{2v}$, $\mathbf{W}^v$.

Ο πίνακας **A** σχηματίζεται από την παραγώγιση των σχέσεων f_{Ii} ως προς τις m_o παραμέτρους δηλαδή ως προς τις Φ και k με προσωρινές τιμές τα αποτελέσματα των μετρήσεων.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{k}} \\ \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{k}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{Iv}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{Iv}}{\partial \hat{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \pm f^1_{air} \cdot \tan z_{o1} \\ -1 & \pm f^2_{air} \cdot \tan z_{o2} \\ \vdots & \vdots \\ -1 & \pm f^v_{air} \cdot \tan z_{ov} \end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

Ο πίνακας **B** σχηματίζεται από την ανάπτυξη των σχέσεων ως προς τα μετρημένα μεγέθη χρησιμοποιώντας ως προσωρινές τιμές για το μεν πλάτος κάποια τιμή που μπορεί εύκολα να αποκτηθεί ενώ για το k την τιμή που προκύπτει από τη θεωρητική ανάλυση που αναπτύσσεται, για το εν λόγω μοντέλο, στο κεφάλαιο 2 (§ 2.4). Τονίζεται όμως ότι, εφόσον ορισμένοι άγνωστοι δεν συμμετέχουν σε μια εξίσωση, στις αντίστοιχες θέσεις τοποθετείται ο συντελεστής ίσος με μηδέν.

Επομένως

$$\mathbf{x}^{o} = \begin{bmatrix} \Phi^{o} \\ k^{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{o} \\ 60''.35 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

και

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{z}_{o1}} & \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{z}_{o2}} & \cdots & \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{I1}}{\partial \hat{z}_{o\nu}} \\ \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{z}_{o1}} & \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{z}_{o2}} & \cdots & \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{I2}}{\partial \hat{z}_{o\nu}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{I\nu}}{\partial \hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{I\nu}}{\partial \hat{z}_{o1}} & \frac{\partial f_{I\nu}}{\partial \hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{I\nu}}{\partial \hat{z}_{o2}} & \cdots & \frac{\partial f_{I\nu}}{\partial \hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{I\nu}}{\partial \hat{z}_{o\nu}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm\left(1+\frac{f^{1}_{air}\cdot k^{o}\cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{o1}}\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm\left(1+\frac{f^{2}_{air}\cdot k^{o}\cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{o2}}\right) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \pm\left(1+\frac{f^{\nu}_{air}\cdot k^{o}\cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{o\nu}}\right) \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\Phi \\ \delta k \end{bmatrix} \quad (3.52) \qquad \boldsymbol{\upsilon} = \begin{bmatrix} \upsilon_{\delta_1} \\ \upsilon_{z_{o1}} \\ \upsilon_{\delta_2} \\ \upsilon_{z_{o2}} \\ \vdots \\ \upsilon_{\delta_\nu} \\ \upsilon_{z_{o\nu}} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -[\delta_1 \pm (z_{o1} + f^{1}_{air}\cdot k^{o}\cdot \tan z_{o1}) - \Phi^{o}] \\ -[\delta_2 \pm (z_{o2} + f^{2}_{air}\cdot k^{o}\cdot \tan z_{o2}) - \Phi^{o}] \\ \vdots \\ -[\delta_\nu \pm (z_{o\nu} + f^{\nu}_{air}\cdot k^{o}\cdot \tan z_{o\nu}) - \Phi^{o}] \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα βαρών **P** χρησιμοποιείται σαν σ_o οποιοσδήποτε αριθμός ή και η μονάδα (1").

Οι διορθώσεις των προσωρινών τιμών των παραμέτρων υπολογίζονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \mathbf{N}_a^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}_a\,\mathbf{W} \tag{3.55}$$

αφού επιλυθεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων με μια από τις γνωστές μεθόδους.

Σημειώνεται ότι, αν οι διορθώσεις είναι μεγάλες γίνεται δεύτερη προσέγγιση θεωρώντας σαν προσωρινές τιμές αυτές που προέκυψαν από την πρώτη λύση.

Επομένως, αφού προκύψει το διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}$ ($\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^o + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$) υπολογίζεται το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_o$ και ελέγχεται με στατιστικό τεστ χ^2 ο λόγος $\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$ για να φανεί η αξιοπιστία της λύσης.

Τέλος, υπολογίζεται ο πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας των παραμέτρων από τη σχέση 3.28 ($\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}}$) και επομένως οι αβεβαιότητές τους.

Όλα τα υπόλοιπα μοντέλα διαθέτουν δύο παραμέτρους στο μοντέλο διάθλασης και μαζί με το πλάτος Φ οι ανεξάρτητες παράμετροι που ενδιαφέρουν είναι $m_o = 1 + 2 = 3$. Επειδή ο αριθμός των μετρήσεων, για παρατηρήσεις ν άστρων, είναι $\underline{n} = 2\nu$ ενώ ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων είναι $m = m_o + \nu = 3 + \nu$, ο βαθμός ελευθερίας προκύπτει $\underline{r} = \underline{n} - \underline{m} = 2\nu - (3 + \nu) = \nu - 3$. Συνεπώς για ν άστρα σχηματίζονται $\underline{c} = \underline{r} + m_o = \nu - 3 + 3 = \nu$ εξισώσεις συνθήκης.

3.4.2.2 Μοντέλο ΙΙ

Η εξίσωση συνθήκης για το μοντέλο ΙΙ είναι της μορφής:

$$f_{\mathrm{II}i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = \hat{\delta}_i \pm (\hat{z}_{oi} + f^i_{air} \cdot \hat{A} \cdot \tan \hat{z}_{oi} + f^i_{air} \cdot \hat{B} \cdot \tan^3 \hat{z}_{oi}) - \hat{\Phi} = 0 \quad \begin{bmatrix} +S \\ -N \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση δεν είναι γραμμική ως προς παραμέτρους και μετρήσεις δίνονται προσωρινές τιμές x^o στο διάνυσμα των παραμέτρων $\mathbf{x} = [\Phi \quad A \quad B]^T$ και αναπτύσσεται κατά Taylor, οπότε:

$$\frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{\Phi}} \cdot \delta\Phi + \frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{A}} \cdot \delta A + \frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{B}} \cdot \delta B + \frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{\delta}} \cdot \upsilon_\delta + \frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{z}_o} \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm (z_{oi} + f^i_{air} \cdot A^o \cdot \tan z_{oi} + f^i_{air} \cdot B^o \cdot \tan^3 z_{oi}) - \Phi^o] \quad (3.57)$$

όπου $\frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{\Phi}} = -1$, $\frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{A}} = \pm f^i_{air} \cdot \tan z_{oi}$, $\frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{B}} = \pm f^i_{air} \cdot \tan^3 z_{oi}$,

$$\frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{\delta}} = 1, \qquad \frac{\partial f_{\mathrm{II}i}}{\partial \hat{z}_o} = \pm \left(1 + \frac{f^i_{air} \cdot A^o}{\cos^2 z_{oi}} + \frac{3 \cdot f^i_{air} \cdot B^o \cdot \tan^2 z_o}{\cos^2 z_{oi}}\right)$$

Για να προκύψουν οι διορθώσεις δΦ, δA, δB, υ_δ, υ_{z_o} σε δευτερόλεπτα τόξου η σχέση 3.57 γράφεται:

$$-1 \cdot \delta\Phi \pm f^i_{air} \cdot \tan z_{oi} \cdot \delta A \pm f^i_{air} \cdot \tan^3 z_{oi} \cdot \delta B + 1 \cdot \upsilon_\delta$$

$$\pm\left(1+\frac{f^{i}_{air}\cdot A^{o}\cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{oi}}+\frac{3\cdot f^{i}_{air}\cdot B^{o}\cdot \tan^2 z_{o}\cdot \sin 1''}{\cos^2 z_{oi}}\right)\cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-\left[\delta_i \pm (z_{oi} + f^{i}_{air}\cdot A^{o}\cdot \tan z_{oi} + f^{i}_{air}\cdot B^{o}\cdot \tan^3 z_{oi}) - \Phi^{o}\right] \quad (\sigma\varepsilon\ \text{as})\left[\frac{+S}{-N}\right] \qquad (3.58)$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{W}$$

Οι διαστάσεις των πινάκων είναι: $\mathbf{A}^{\nu}_{3}$, $\mathbf{B}^{\nu}_{2\nu}$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{3}$, $\boldsymbol{\upsilon}^{2\nu}$, $\mathbf{W}^{\nu}$.

Δηλαδή έχουμε:

$$\mathbf{x}^{o} = \begin{bmatrix}\Phi^{o}\\ A^{o}\\ B^{o}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Phi^{o}\\ 60''.28\\ -0''.067\end{bmatrix} \qquad (3.59) \qquad\qquad \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\delta\Phi\\ \delta A\\ \delta B\end{bmatrix} \qquad (3.60)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{A}} & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{B}}\\ \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{A}} & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{B}}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{A}} & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{B}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & \pm f^{1}_{air}\cdot \tan z_{o1} & \pm f^{1}_{air}\cdot \tan^3 z_{o1}\\ -1 & \pm f^{2}_{air}\cdot \tan z_{o2} & \pm f^{2}_{air}\cdot \tan^3 z_{o2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & \pm f^{\nu}_{air}\cdot \tan z_{o\nu} & \pm f^{\nu}_{air}\cdot \tan^3 z_{o\nu}\end{bmatrix} \qquad (3.61)$$

(3.62)
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{z}_{o1}} & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{z}_{o2}} & \cdots & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{II1}}{\partial\hat{z}_{o\nu}}\\ \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{z}_{o1}} & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{z}_{o2}} & \cdots & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{II2}}{\partial\hat{z}_{o\nu}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{z}_{o1}} & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{z}_{o2}} & \cdots & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{II\nu}}{\partial\hat{z}_{o\nu}}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \pm \left(\begin{array}{c} 1 + \dfrac{f_{air}^{1} \cdot A^{o} \cdot \sin 1''}{\cos^{2} z_{o1}} + \\ \dfrac{f_{air}^{1} \cdot B^{o} \cdot \tan^{2} z_{o1} \cdot \sin 1''}{\cos^{2} z_{o1}} \end{array} \right) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \pm \left(\begin{array}{c} 1 + \dfrac{f_{air}^{2} \cdot A^{o} \cdot \sin 1''}{\cos^{2} z_{o2}} + \\ \dfrac{f_{air}^{2} \cdot B^{o} \cdot \tan^{2} z_{o2} \cdot \sin 1''}{\cos^{2} z_{o2}} \end{array} \right) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \pm \left(\begin{array}{c} 1 + \dfrac{f_{air}^{v} \cdot A^{o} \cdot \sin 1''}{\cos^{2} z_{ov}} + \\ \dfrac{f_{air}^{v} \cdot B^{o} \cdot \tan^{2} z_{ov} \cdot \sin 1''}{\cos^{2} z_{ov}} \end{array} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -[\delta_1 \pm (z_{o1} + f_{air}^{1} \cdot A^{o} \cdot \tan z_{o1} + f_{air}^{1} \cdot B^{o} \cdot \tan^{3} z_{o1}) - \Phi^{o}] \\ -[\delta_2 \pm (z_{o2} + f_{air}^{2} \cdot A^{o} \cdot \tan z_{o2} + f_{air}^{2} \cdot B^{o} \cdot \tan^{3} z_{o2}) - \Phi^{o}] \\ \vdots \\ -[\delta_v \pm (z_{ov} + f_{air}^{v} \cdot A^{o} \cdot \tan z_{ov} + f_{air}^{v} \cdot B^{o} \cdot \tan^{3} z_{ov}) - \Phi^{o}] \end{bmatrix} \qquad (3.63)$$

Αντίστοιχα με την περίπτωση του μοντέλου Ι, προσδιορίζονται οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων και τα τυπικά τους σφάλματα.

3.4.2.3 Μοντέλο ΙΙΙ

Η εξίσωση συνθήκης για το μοντέλο ΙΙΙ είναι της μορφής:

$$f_{IIIi}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = \hat{\delta}_i \pm [\hat{z}_{oi} + f_{air}^{i} \cdot \frac{1}{\hat{m}} \left[\hat{z}_{oi} - \arcsin\left(\frac{\sin \hat{z}_{oi}}{\hat{n}_o^{\hat{m}}} \right) \right]] - \hat{\Phi} = 0 \qquad \begin{bmatrix} +S \\ -N \end{bmatrix} \qquad (3.64)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση δεν είναι γραμμική ως προς παραμέτρους και μετρήσεις δίνονται προσωρινές τιμές x^{o} στο διάνυσμα των παραμέτρων $\mathbf{x} = [\Phi \quad m \quad n_o]^T$ και αναπτύσσεται κατά Taylor, οπότε:

$$\frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{\Phi}} \cdot \delta\Phi + \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{m}} \cdot \delta m + \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{n}_o} \cdot \delta n_o + \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{\delta}} \cdot \upsilon_{\delta} + \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{z}_o} \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm [z_{oi} + f_{air}^{i} \cdot \frac{1}{m^{o}} \left[z_{oi} - \arcsin\left(\frac{\sin z_{oi}}{n_o^{o\,m^{o}}} \right) \right]] - \Phi^{o}] \qquad (3.65)$$

$$\text{όπου } \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{\Phi}} = -1, \qquad \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{m}} = \pm\ f^{i}_{air} \cdot \left[\frac{\arcsin\left(\frac{\sin z_{oi}}{n_o^{o\,m^o}}\right) - z_{oi}}{m^{o\,2}} + \frac{\sin z_{oi} \cdot \ln n_o^o}{m^o \cdot n_o^{o\,m^o}\left(1 - \frac{\sin^2 z_{oi}}{n_o^{o\,2m^o}}\right)^{1/2}} \right],$$

$$\frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{n}_o} = \pm\ f^{i}_{air} \cdot \left[\frac{\sin z_{oi}}{n_o^o \cdot n_o^{o\,m^o}\left(1 - \frac{\sin^2 z_{oi}}{n_o^{o\,2m^o}}\right)^{1/2}}\right],$$

$$\frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{\delta}} = 1, \qquad \frac{\partial f_{IIIi}}{\partial \hat{z}_o} = \pm\ \left[1 + f^{i}_{air} \cdot \left[\frac{1}{m^o} - \frac{\cos z_{oi}}{m^o \cdot n_o^{o\,m^o}\left(1 - \frac{\sin^2 z_{oi}}{n_o^{o\,2m^o}}\right)^{1/2}}\right]\right]$$

Αν οι διορθώσεις δm, δn_o θεωρηθούν καθαροί αριθμοί ενώ για τις παραμέτρους Φ, δ, z_o οι αντίστοιχες διορθώσεις εκφραστούν σε δευτερόλεπτα τόξου η σχέση 3.65 γράφεται:

$$-1 \cdot \delta\Phi \pm \frac{f^{i}_{air}}{\sin 1''} \cdot \left[\frac{\arcsin\left(\frac{\sin z_{oi}}{n_o^{o\,m^o}}\right) - z_{oi}}{m^{o\,2}} + \frac{\sin z_{oi} \cdot \ln n_o^o}{m^o \cdot n_o^{o\,m^o}\left(1 - \frac{\sin^2 z_{oi}}{n_o^{o\,2m^o}}\right)^{1/2}} \right] \cdot \delta m$$

$$\pm \frac{f^{i}_{air}}{\sin 1''} \cdot \left[\frac{\sin z_{oi}}{n_o^o \cdot n_o^{o\,m^o}\left(1 - \frac{\sin^2 z_{oi}}{n_o^{o\,2m^o}}\right)^{1/2}}\right] \cdot \delta n_o + 1 \cdot \upsilon_\delta$$

$$\pm \left[1 + f^{i}_{air} \cdot \left[\frac{1}{m^o} - \frac{\cos z_{oi}}{m^o \cdot n_o^{o\,m^o}\left(1 - \frac{\sin^2 z_{oi}}{n_o^{o\,2m^o}}\right)^{1/2}}\right]\right] \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-\left[\delta_i \pm \left[z_{oi} + f^{i}_{air} \cdot \frac{1}{m^o}\left[z_{oi} - \arcsin\left(\frac{\sin z_{oi}}{n_o^{o\,m^o}}\right)\right]\right] - \Phi^o\right] \qquad (\text{σε as}) \left[\frac{+S}{-N}\right] \qquad (3.66)$$

Σχηματίζεται επομένως η μορφή των πινάκων του συστήματος:

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} \Phi^o \\ m^o \\ n_o^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^o \\ 6.46 \\ 1.0002926 \end{bmatrix} \quad (3.67) \qquad \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\Phi \\ \delta m \\ \delta n_o \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{III1}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{III1}}{\partial \hat{m}} & \frac{\partial f_{III1}}{\partial \hat{n}_o} \\ \frac{\partial f_{III2}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{III2}}{\partial \hat{m}} & \frac{\partial f_{III2}}{\partial \hat{n}_o} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{IIIv}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{IIIv}}{\partial \hat{m}} & \frac{\partial f_{IIIv}}{\partial \hat{n}_o} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{III1}}{\partial \hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{III1}}{\partial \hat{z}_{o1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{III2}}{\partial \hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{III2}}{\partial \hat{z}_{o2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_{IIIv}}{\partial \hat{\delta}_v} & \frac{\partial f_{IIIv}}{\partial \hat{z}_{ov}} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -[\delta_1 \pm [z_{o1} + f_{air}^1 \cdot \frac{1}{m^o}\left[z_{o1} - \arcsin\left(\frac{\sin z_{o1}}{n_o^{o\,m^o}}\right)\right]] - \Phi^o] \\ -[\delta_2 \pm [z_{o2} + f_{air}^2 \cdot \frac{1}{m^o}\left[z_{o2} - \arcsin\left(\frac{\sin z_{o2}}{n_o^{o\,m^o}}\right)\right]] - \Phi^o] \\ \vdots \\ -[\delta_v \pm [z_{ov} + f_{air}^v \cdot \frac{1}{m^o}\left[z_{ov} - \arcsin\left(\frac{\sin z_{ov}}{n_o^{o\,m^o}}\right)\right]] - \Phi^o] \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

3.4.2.4 Μοντέλο IV

Η εξίσωση συνθήκης για το μοντέλο IV είναι της μορφής:

$$f_{IVi}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = \hat{\delta}_i \pm [\hat{z}_{oi} + f_{air}^i \cdot [\arcsin(\hat{n} \cdot \hat{c} \cdot \sin\hat{z}_{oi}) - \arcsin(\hat{c} \cdot \sin\hat{z}_{oi})]] - \hat{\Phi} = 0 \quad (3.72)$$

Με προσωρινές τιμές x^o στο διάνυσμα των παραμέτρων $\mathbf{x} = [\Phi \quad c \quad n]^T$ αναπτύσσεται η παραπάνω σχέση (μη γραμμική ως προς παραμέτρους και μετρήσεις) κατά Taylor, επομένως:

$$\frac{\partial f_{IVi}}{\partial \hat{\Phi}} \cdot \delta\Phi + \frac{\partial f_{IVi}}{\partial \hat{c}} \cdot \delta c + \frac{\partial f_{IVi}}{\partial \hat{n}} \cdot \delta n + \frac{\partial f_{IVi}}{\partial \hat{\delta}} \cdot \upsilon_\delta + \frac{\partial f_{IVi}}{\partial \hat{z}_o} \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm [z_{oi} + f^i_{air}\cdot\left[\arcsin\left(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi}\right)-\arcsin\left(c^o\cdot \sin z_{oi}\right)\right]] - \Phi^o] \qquad (3.73)$$

όπου $\dfrac{\partial f_{IVi}}{\partial\hat{\Phi}} = -1, \qquad \dfrac{\partial f_{IVi}}{\partial\hat{c}} = \pm\ f^i_{air}\cdot\left[\dfrac{n^o\cdot \sin z_{oi}}{[1-(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}} - \dfrac{\sin z_{oi}}{[1-(c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}}\right],$

$$\frac{\partial f_{IVi}}{\partial\hat{n}} = \pm\ f^i_{air}\cdot\left[\frac{c^o\cdot \sin z_{oi}}{[1-(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}}\right],$$

$$\frac{\partial f_{IVi}}{\partial\hat{\delta}} = 1, \qquad \frac{\partial f_{IVi}}{\partial\hat{z}_o} = \pm\ [1 + f^i_{air}\cdot\left[\frac{n^o\cdot c^o\cdot \cos z_{oi}}{[1-(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}} - \frac{c^o\cdot \cos z_{oi}}{[1-(c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}}\right]]$$

Αν οι διορθώσεις δc, δn θεωρηθούν καθαροί αριθμοί ενώ για τις παραμέτρους Φ, δ, z_o οι αντίστοιχες διορθώσεις εκφραστούν σε δευτερόλεπτα τόξου η σχέση 3.73 γράφεται:

$$-1\cdot\delta\Phi \pm \frac{f^i_{air}}{\sin 1''}\cdot\left[\frac{n^o\cdot \sin z_{oi}}{[1-(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}} - \frac{\sin z_{oi}}{[1-(c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}}\right]\cdot\delta c$$

$$\pm \frac{f^i_{air}}{\sin 1''}\cdot\left[\frac{c^o\cdot \sin z_{oi}}{[1-(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}}\right]\cdot\delta n + 1\cdot\upsilon_\delta$$

$$\pm [1 + f^i_{air}\cdot\left[\frac{n^o\cdot c^o\cdot \cos z_{oi}}{[1-(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}} - \frac{c^o\cdot \cos z_{oi}}{[1-(c^o\cdot \sin z_{oi})^2]^{1/2}}\right]]\cdot\upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm [z_{oi} + f^i_{air}\cdot\left[\arcsin\left(n^o\cdot c^o\cdot \sin z_{oi}\right)-\arcsin\left(c^o\cdot \sin z_{oi}\right)\right]] - \Phi^o] \quad (") \qquad (3.74)$$

Σχηματίζεται επομένως η μορφή των πινάκων του συστήματος:

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix}\Phi^o\\ c^o\\ n^o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Phi^o\\ 0.9987459\\ 1.0002926\end{bmatrix} \quad (3.75) \qquad \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\delta\Phi\\ \delta c\\ \delta n\end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{IV1}}{\partial\hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{IV1}}{\partial\hat{c}} & \frac{\partial f_{IV1}}{\partial\hat{n}} \\ \frac{\partial f_{IV2}}{\partial\hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{IV2}}{\partial\hat{c}} & \frac{\partial f_{IV2}}{\partial\hat{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{IVv}}{\partial\hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{IVv}}{\partial\hat{c}} & \frac{\partial f_{IVv}}{\partial\hat{n}} \end{bmatrix} \qquad (3.77)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{IV1}}{\partial \hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{IV1}}{\partial \hat{z}_{o1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{IV2}}{\partial \hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{IV2}}{\partial \hat{z}_{o2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_{IV\nu}}{\partial \hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{IV\nu}}{\partial \hat{z}_{o\nu}} \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -[\delta_1 \pm [z_{o1} + f_{air}^1 \cdot [\arcsin(n^o \cdot c^o \cdot \sin z_{o1}) - \arcsin(c^o \cdot \sin z_{o1})]] - \Phi^o] \\ -[\delta_2 \pm [z_{o2} + f_{air}^2 \cdot [\arcsin(n^o \cdot c^o \cdot \sin z_{o2}) - \arcsin(c^o \cdot \sin z_{o2})]] - \Phi^o] \\ \vdots \\ -[\delta_\nu \pm [z_{o\nu} + f_{air}^\nu \cdot [\arcsin(n^o \cdot c^o \cdot \sin z_{o\nu}) - \arcsin(c^o \cdot \sin z_{o\nu})]] - \Phi^o] \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

3.4.2.5 Μοντέλο V

Η εξίσωση συνθήκης για το μοντέλο V είναι της μορφής (3.80):

$$f_{Vi}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = \hat{\delta}_i \pm [\hat{z}_{oi} + f_{air}^i \cdot \left[\left[\left(\frac{\hat{w}}{\sin \hat{z}_{oi}}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hat{w}}{\sin \hat{z}_{oi}}\right)^2 + 1 - 2\hat{n}\right]^{1/2}\right]] - \hat{\Phi} = 0$$

Με προσωρινές τιμές x^o στο διάνυσμα των παραμέτρων $\mathbf{x} = [\Phi \quad w \quad n]^T$ αναπτύσσεται η παραπάνω σχέση (μη γραμμική ως προς παραμέτρους και μετρήσεις) κατά Taylor, επομένως:

$$\frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{\Phi}} \cdot \delta\Phi + \frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{w}} \cdot \delta w + \frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{n}} \cdot \delta n + \frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{\delta}} \cdot \upsilon_\delta + \frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{z}_o} \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm [z_{oi} + f_{air}^i \cdot \left[\left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{oi}}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{oi}}\right)^2 + 1 - 2n^o\right]^{1/2}\right]] - \Phi^o] \tag{3.81}$$

όπου

$$\frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{\Phi}} = -1, \quad \frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{w}} = \pm f_{air}^i \cdot [\frac{w^o}{\sin^2 z_{oi}\left(\frac{w^{o2}}{\sin^2 z_{oi}} - 1\right)^{1/2}} - \frac{w^o}{\sin^2 z_{oi}\left(\frac{w^{o2}}{\sin^2 z_{oi}} + 1 - 2n^o\right)^{1/2}}],$$

$$\frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{n}} = \pm f_{air}^i \cdot [\frac{1}{\left(\frac{w^{o2}}{\sin^2 z_{oi}} + 1 - 2n^o\right)^{1/2}}],$$

$$\frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{\delta}} = 1, \quad \frac{\partial f_{Vi}}{\partial \hat{z}_o} = \pm\ [1 + f^i_{air} \cdot [\frac{w^{o^2} \cdot \cos z_{oi}}{\sin^3 z_{oi}\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} + 1 - 2n\right)^{1/2}} - \frac{w^{o^2} \cdot \cos z_{oi}}{\sin^3 z_{oi}\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} - 1\right)^{1/2}}]]$$

Αν οι διορθώσεις δw, δn θεωρηθούν καθαροί αριθμοί ενώ για τις παραμέτρους Φ, δ, z_o οι αντίστοιχες διορθώσεις εκφραστούν σε δευτερόλεπτα τόξου η σχέση 3.81 γράφεται:

$$-1 \cdot \delta\Phi \pm \frac{f^i_{air}}{\sin 1''} \cdot [\frac{w^o}{\sin^2 z_{oi}\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} - 1\right)^{1/2}} - \frac{w^o}{\sin^2 z_{oi}\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} + 1 - 2n^o\right)^{1/2}}] \cdot \delta w$$

$$\pm \frac{f^i_{air}}{\sin 1''} \cdot [\frac{1}{\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} + 1 - 2n^o\right)^{1/2}}] \cdot \delta n + 1 \cdot \upsilon_\delta$$

$$\pm\ [1 + f^i_{air} \cdot [\frac{w^{o^2} \cdot \cos z_{oi}}{\sin^3 z_{oi}\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} + 1 - 2n\right)^{1/2}} - \frac{w^{o^2} \cdot \cos z_{oi}}{\sin^3 z_{oi}\left(\frac{w^{o^2}}{\sin^2 z_{oi}} - 1\right)^{1/2}}]] \cdot \upsilon_{z_o} =$$

$$-[\delta_i \pm [z_{oi} + f^i_{air} \cdot \left[\left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{oi}}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{oi}}\right)^2 + 1 - 2n^o\right]^{1/2}\right]] - \Phi^o] \quad (") \qquad (3.82)$$

Σχηματίζεται επομένως η μορφή των πινάκων του συστήματος:

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} \Phi^o \\ w^o \\ n^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^o \\ 1.00125569 \\ 1.0002926 \end{bmatrix} \quad (3.83) \qquad \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\Phi \\ \delta w \\ \delta n \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{V1}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{V1}}{\partial \hat{w}} & \frac{\partial f_{V1}}{\partial \hat{n}} \\ \frac{\partial f_{V2}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{V2}}{\partial \hat{w}} & \frac{\partial f_{V2}}{\partial \hat{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{Vv}}{\partial \hat{\Phi}} & \frac{\partial f_{Vv}}{\partial \hat{w}} & \frac{\partial f_{Vv}}{\partial \hat{n}} \end{bmatrix} \qquad (3.85)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{V1}}{\partial \hat{\delta}_1} & \frac{\partial f_{V1}}{\partial \hat{z}_{o1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{V2}}{\partial \hat{\delta}_2} & \frac{\partial f_{V2}}{\partial \hat{z}_{o2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_{V\nu}}{\partial \hat{\delta}_\nu} & \frac{\partial f_{V\nu}}{\partial \hat{z}_{o\nu}} \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -[\delta_1 \pm [z_{o1} + f_{air}^1 \cdot \left[\left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{o1}}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{o1}}\right)^2 + 1 - 2n^o\right]^{1/2}\right]] - \Phi^o] \\ -[\delta_2 \pm [z_{o2} + f_{air}^2 \cdot \left[\left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{o2}}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{o2}}\right)^2 + 1 - 2n^o\right]^{1/2}\right]] - \Phi^o] \\ \vdots \\ -[\delta_\nu \pm [z_{o\nu} + f_{air}^\nu \cdot \left[\left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{o\nu}}\right)^2 - 1\right]^{1/2} - \left[\left(\frac{w^o}{\sin z_{o\nu}}\right)^2 + 1 - 2n^o\right]^{1/2}\right]] - \Phi^o] \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση
Δεδομένων Προσομοίωσης

…όσοι έχουν ταλέντο στους αριθμητικούς υπολογισμούς
παρουσιάζουν φυσική ευχέρεια σε όλες τις μαθήσεις…

Πλάτωνος Πολιτεία

4.1 Στάδια επίλυσης

Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος συνόρθωσης περιλαμβάνει πολύπλοκες αριθμητικές πράξεις και συνίσταται από τα παρακάτω τέσσερα κύρια στάδια:

1) Διαμόρφωση του προβλήματος

Στο κεφάλαιο 3 (§ 3.4) το πρόβλημα διαμορφώθηκε ως προς τη μαθηματική του έκφραση δηλαδή σαν ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων.

2) Επιλογή μεθόδου

Η Αριθμητική Ανάλυση είναι το μέρος εκείνο της μαθηματικής επιστήμης που ασχολείται με την ανάπτυξη και εκτίμηση μεθόδων που υπολογίζουν αριθμητικά αποτελέσματα από γνωστά αριθμητικά δεδομένα.

Βασικό εργαλείο της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι ο Ηλεκτρονικός Υπολογιστής (Η/Υ). Χωρίς αυτόν δεν μπορεί να προχωρήσει πέρα από την επίλυση στοιχειωδών προβλημάτων. Συνέπεια αυτής της άμεσης εξάρτησής της από τον Η/Υ είναι ότι η μεθοδολογία της και η νοοτροπία της, ο τρόπος που αντιμετωπίζει τα διάφορα προβλήματα και αξιολογεί τους διάφορους τρόπους υπολογισμού της λύσης, είναι βαθιά επηρεασμένος από τις δυνατότητες και τον τρόπο λειτουργίας του Η/Υ.

Δύο είναι τα βασικά κριτήρια μιας αριθμητικής μεθόδου: (α) **η ταχύτητα** και (β) **η ακρίβεια**. Με τον όρο ταχύτητα εννοούμε τον υπολογιστικό χρόνο που χρειάζεται η Κεντρική Μονάδα Επεξεργασίας του Η/Υ για να μας δώσει τα αριθμητικά αποτελέσματα. Η ακρίβεια συνδέεται με τα σφάλματα που παράγονται είτε με τον τρόπο που αποθηκεύονται τα δεδομένα στον υπολογιστή είτε με τα σφάλματα που οφείλονται στην ίδια τη μέθοδο.

Όπως έχει αναφερθεί, μέρος του προβλήματος της συνόρθωσης είναι και η λύση του γραμμικού συστήματος των κανονικών εξισώσεων. Επομένως, το αριθμητικό πρόβλημα, στην περίπτωση αυτή, εστιάζεται στην επιλογή της μεθόδου με το μικρότερο αριθμό αριθμητικών πράξεων και με την οποία τα σφάλματα στρογγύλευσης των συντελεστών δεν επηρεάζουν σημαντικά τη λύση του συστήματος.

Δεχόμενοι ότι το σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει μία και μοναδική λύση, καλείται **ευσταθές** (καλής κατάστασης) αν μια μικρή μεταβολή στα δεδομένα του επιφέρει σχετικά "μικρή" μεταβολή στη λύση του. Αν μια μικρή μεταβολή στα δεδομένα επιφέρει σχετικά "μεγάλη" μεταβολή στη λύση, τότε το σύστημα καλείται **ασταθές** (κακής κατάστασης) [Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., 1985].

Διεθνώς τα τελευταία χρόνια, για την επίλυση του συστήματος σε περιπτώσεις συνορθώσεων, προτιμάται η μέθοδος Cholesky που έχει τα παρακάτω πλεονεκτήματα:

- Μικρότερο φράγμα σφάλματος συγκρινόμενο με το σφάλμα άλλων μεθόδων (π.χ. Gauss).

- Περιλαμβάνει μία παραγοντοποίηση και κατόπιν το σύστημα λύνεται με αντικαταστάσεις.
- Απαιτεί μικρότερο χώρο αποθήκευσης για τα ενδιάμεσα αποτελέσματα.

3) Προγραμματισμός και κωδικοποίηση

Για να μπορέσει μια οποιαδήποτε υπολογιστική διαδικασία να χρησιμοποιηθεί στον Η/Υ πρέπει πρώτα να πάρει μορφή αλγορίθμου, γιατί μόνο έτσι μπορεί ο Η/Υ να την εκτελέσει. Η περιγραφή του αλγορίθμου πρέπει να δοθεί στον Η/Υ σαν "πρόγραμμα" γραμμένο σε μια από τις καθιερωμένες γλώσσες προγραμματισμού, που χρησιμοποιούν απλές λέξεις της Αγγλικής γλώσσας για να συμβολίσουν τις διάφορες βασικές διεργασίες.

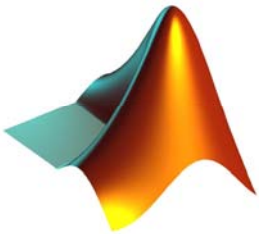
Βασικό στοιχείο της φύσης ενός αλγορίθμου είναι ότι αποτελεί εντελώς αυτοματοποιημένη διαδικασία που δεν ζητάει ούτε επιτρέπει διαισθητικές επιλογές για την πορεία λύσης ενός προβλήματος. Όλα τα στοιχεία μιας διαδικασίας επίλυσης προβλήματος πρέπει να είναι πλήρως καθορισμένα, δηλαδή να αντιστοιχούν σε απλές διαδικασίες άμεσα εκτελέσιμες από τον Η/Υ. Έτσι, "αλγόριθμος" ονομάζεται μια πεπερασμένη ακολουθία αριθμητικών πράξεων (προσθέσεων, αφαιρέσεων, πολλαπλασιασμών ή διαιρέσεων) και λογικών συνδέσεων (συζεύξεων, διαζεύξεων, συναγωγών ή αρνήσεων) που εφαρμόζονται στα αρχικά δεδομένα ενός προβλήματος και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα για να παραγάγουν ένα τελικό αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται από εμάς, με βάση τη μαθηματική ανάλυση της μεθόδου, σαν ορισμένης ακρίβειας προσέγγιση της λύσης του αρχικού προβλήματος. Μην ξεχνάμε ότι, οι αλγόριθμοι παράγουν σύνολα αριθμών (π.χ. αριθμητικούς πίνακες). Η σημασία των συνόλων αυτών για το πρόβλημα που μελετάμε, το πώς σχετίζονται με τη λύση του, πρέπει εμείς να το προσδιορίσουμε και για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τόσο την ποιοτική ανάλυση της λύσης του αρχικού προβλήματος, όσο και την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της υπολογιστικής διαδικασίας που χρησιμοποιούμε [Κιουστελίδης Ι., 2004].

4) Εκτέλεση του προγράμματος

Για την εκτέλεση των διαφόρων αλγορίθμων, που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εφαρμογής (Παράρτημα Β), χρησιμοποιήθηκε το πακέτο MATLAB (Έκδοση 7.0) που είναι ένα ενιαίο προγραμματιστικό περιβάλλον.

MATLAB
Version 7

Copyright 1984 - 2004
The MathWorks, Inc.



4.2 Γενικά χαρακτηριστικά MATLAB

1. Το MATLAB (MATrix LABoratory) είναι ένα λογισμικό πακέτο για υψηλής απόδοσης αριθμητικούς υπολογισμούς (numerical computations). Παρέχει στο

χρήστη ένα διαδραστικό περιβάλλον με χιλιάδες ενσωματωμένες συναρτήσεις (functions), κατάλληλες για την υλοποίηση απαιτητικών υπολογιστικών αναλύσεων και γραφημάτων. Επίσης ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να αναπτύξει τις δικές του συναρτήσεις και να τις χρησιμοποιήσει σε αλγορίθμους. Τονίζεται ότι, στους αλγορίθμους της συγκεκριμένης εφαρμογής έχουν χρησιμοποιηθεί μόνο οι βασικές μαθηματικές συναρτήσεις του πακέτου, ενώ η μέθοδος Cholesky αναπτύχθηκε ως συνάρτηση με το όνομα cholesky_inversion (Παράρτημα Β).

2. Η βασική δομική μονάδα του MATLAB είναι ο πίνακας (matrix) και ο θεμελιώδης τύπος δεδομένου είναι το διάνυσμα (array). Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του λογισμικού πακέτου συντίθεται από τις προαναφερόμενες βασικές μονάδες. Ας αναφερθεί ότι, στο MATLAB δεν υπάρχει ανάγκη για δήλωση μεταβλητών, όπως και των διαστάσεων ενός πίνακα, που χρησιμοποιούνται σε μια εφαρμογή. Το λογισμικό αυτό είναι με τέτοιο τρόπο δομημένο, ώστε όλοι οι υπολογισμοί να μετατρέπονται ουσιαστικά σε υπολογισμούς μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων. Επομένως, εξαιτίας της ευχέρειας με την οποία εκτελεί πράξεις μεταξύ διανυσμάτων και πινάκων, το εν λόγω πακέτο, μπορεί να θεωρηθεί σαν γλώσσα προγραμματισμού ειδικά σχεδιασμένη για την ταχεία και ακριβή εφαρμογή αλγορίθμων συνόρθωσης.

3. Τα προγράμματα του MATLAB λέγονται M-files (αρχεία M) και αποτελούν σειρές εντολών γραμμένες με οποιονδήποτε επεξεργαστή κειμένου (π.χ. M-file Editor). Τα περισσότερα προγράμματα, τα οποία συντάσσονται μέσω του MATLAB αποθηκεύονται ως M-files, όπως επίσης και το σύνολο των ενσωματωμένων συναρτήσεων.

4. Το MATLAB παρέχει τη δυνατότητα εισαγωγής δεδομένων (importing data) μέσα από το περιβάλλον εργασίας του, πριν καλέσουμε εκεί για εκτέλεση το πρόγραμμα. Μπορεί όμως να γίνει εισαγωγή δεδομένων στο περιβάλλον εργασίας και από ένα αρχείο ASCII (American Standard Code for Information Interchange) γραμμένο με τυχόντα επεξεργαστή. Ένα τέτοιο αρχείο για την εισαγωγή ενός πίνακα πρέπει να αποτελείται μόνο από μία ορθογώνια διάταξη αριθμών (των στοιχείων του πίνακα). Παράδειγμα χρήσης αρχείου είναι το Refraction.txt που περιέχει τα δεδομένα εισόδου της παρούσας εφαρμογής με την παρακάτω μορφή:

$\left[\frac{+1,S}{-1,N}\right]$	δ (")	σ_δ (")	z_o (")	σ_{z_o} (")	p (mbar)	θ (^oC)
– 1	208800	0.01	71978.03	0.1	1000.00	15.20
+1	10800	0.01	125957.74	0.1	1000.25	14.75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

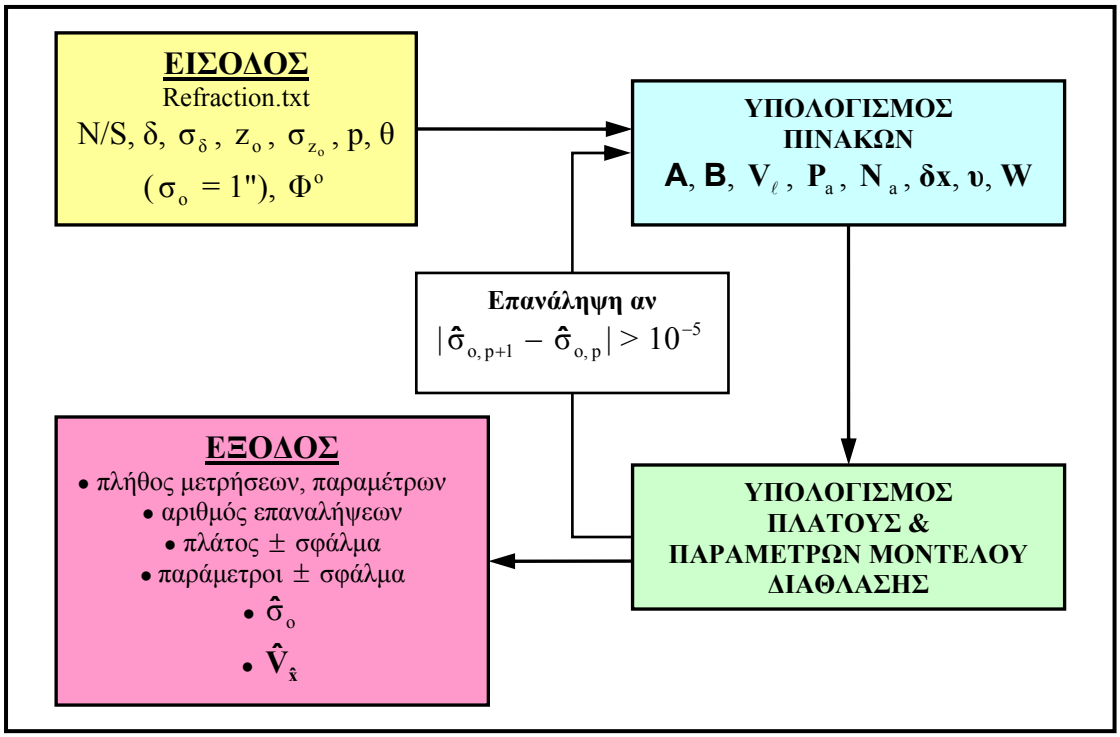
Πίνακας 4.1: Μορφή αρχείου δεδομένων εισόδου

5. Οι υπολογισμοί στο MATLAB γίνονται με διπλή ακρίβεια (double precision), δηλαδή με 15 σημαντικά ψηφία, ανεξάρτητα του τρόπου με τον οποίο έχουμε επιλέξει να εμφανίζονται τα εξαγόμενα αποτελέσματα.

Προφανώς, η σύντομη παρουσίαση της MATLAB έγινε για λόγους πληρότητας και για να τονιστεί η δυνατότητα κάλυψης των απαιτήσεών μας (κυρίως από άποψη ακρίβειας). Για το λόγο αυτό δεν παραθέτουμε ορισμούς των εντολών ή συναρτήσεων του πακέτου αλλά τις εφαρμόζουμε μέσα στα πειράματα. Πριν την παρουσίαση των πειραμάτων αυτών, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί η διάρθρωση του προγράμματος - αλγορίθμου, καθώς και τα σφάλματα που αφορούν τους υπολογισμούς.

4.3 Παρουσίαση αλγορίθμου

Ο υπολογισμός της καλύτερης τιμής του αστρονομικού πλάτους Φ και του σφάλματός της, με χρήση των διαφόρων μοντέλων διάθλασης, πραγματοποιείται με τα προγράμματα MATLAB Model_I.m, Model_II.m,… (Παράρτημα Β). Τα στοιχεία εισόδου περιλαμβάνονται σε ένα αρχείο με το όνομα Refraction.txt (βλ. Πίνακα 4.1), ενώ απαραίτητη είναι και η αρχική τιμή για το πλάτος (σε as). Στις αρχικές ρυθμίσεις περιλαμβάνεται η τιμή $\Phi^o = 38^o$ (= 136800"). Υπολογίζοντας την τιμή του πλάτους και των παραμέτρων του εκάστοτε μοντέλου διάθλασης, η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τη σύγκλιση του a posteriori τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_o$), δηλαδή όταν $|\hat{\sigma}_{o,p+1} - \hat{\sigma}_{o,p}| \leq 10^{-5}$. Έτσι, τα στοιχεία εξόδου του προγράμματος είναι ο αριθμός των μετρήσεων, παραμέτρων και επαναλήψεων, η τιμή του πλάτους και των παραμέτρων του μοντέλου διάθλασης με τον πίνακα μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητάς τους (τυπικά σφάλματα), καθώς και το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_o$) (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Σχηματικό διάγραμμα των βασικών ενεργειών του προγράμματος

4.4 Αριθμητικά ή Υπολογιστικά σφάλματα

Κατά τη χρήση των αλγορίθμων, μεγάλη προσοχή πρέπει να δοθεί στα διάφορα είδη σφαλμάτων που συνδέονται με τον αλγόριθμο. Τα σφάλματα αυτά είναι:

1) Σφάλματα αποκοπής (ή διακριτοποίησης)

Αυτά οφείλονται στον τρόπο κατασκευής της προσέγγισης όπως η αποκοπή μιας σειράς (π.χ. Taylor), η απλούστευση των τύπων μετατροπής μονάδων (π.χ. π = 3.1416) ή ο τερματισμός μιας επαναληπτικής διαδικασίας πριν από τη σύγκλιση. Συχνά, η διακριτοποίηση ενός προβλήματος, ώστε να είναι δυνατή η χρήση του Η/Υ εισάγει "παρασιτικές λύσεις" που δεν σχετίζονται με το αρχικό πρόβλημα. Γενικά, τα σφάλματα αποκοπής τείνουν να κυριαρχούν σε προβλήματα που εμπλέκουν παραγώγους ή μη γραμμικότητες, τα οποία συχνά απαιτούν μια θεωρητικά ατέρμονα διαδικασία επίλυσης.

2) Σφάλματα στρογγύλευσης

Αυτά οφείλονται στο ότι ο Η/Υ διαθέτει για την αποθήκευση κάθε ενδιάμεσου αποτελέσματος μόνο πεπερασμένο χώρο μνήμης και επομένως αναγκαστικά αποκόπτει τα τελευταία δεκαδικά ή δυαδικά ψηφία. Τέτοια σφάλματα προκύπτουν μάλιστα και κατά τη μετατροπή της δυαδικής μορφής των αριθμών, που χρησιμοποιείται εσωτερικά από τον Η/Υ, στη δεκαδική με την οποία εκτυπώνονται τα αποτελέσματα. Τα σφάλματα στρογγύλευσης φαίνονται καταρχήν ασήμαντα γιατί περιορίζονται στα τελευταία μόνο δεκαδικά ψηφία. Όμως σε ορισμένες μεθόδους που απαιτούν μεγάλο όγκο πράξεων μπορούν να συσσωρευτούν και να παραποιήσουν σημαντικά τα αποτελέσματα. Υπενθυμίζεται ότι, για την αποφυγή αυτών των σφαλμάτων, τόσο τα δεδομένα όσο και τα αποτελέσματα των αλγορίθμων εκφράστηκαν στις κατάλληλες μονάδες. Γενικά, τα σφάλματα στρογγύλευσης τείνουν να κυριαρχούν σε καθαρά αλγεβρικά προβλήματα με πεπερασμένους αλγορίθμους επίλυσης.

3) Μεθοδικά σφάλματα

Η μέθοδος που επιλέγεται για να λυθεί αριθμητικά ένα πρόβλημα είναι συσχετισμένη με το δικό της σφάλμα. Όμως, η δυσκολία στην ακριβή επίλυση ενός προβλήματος δεν οφείλεται πάντοτε στη μέθοδο, αλλά μπορεί να ενυπάρχει στο πρόβλημα που επιλύεται. Δηλαδή, ακόμη και με ακριβείς υπολογισμούς, είναι δυνατόν η λύση του προβλήματος να είναι πολύ ευαίσθητη σε διαταράξεις των δεδομένων του.

Η ιδέα της ευστάθειας ενός υπολογιστικού αλγορίθμου είναι ανάλογη αυτής ενός μαθηματικού προβλήματος (π.χ. αντιστροφή πίνακα). Και οι δύο ιδέες έχουν να κάνουν με την ευαισθησία σε διαταράξεις, αλλά ο όρος ευστάθεια χρησιμοποιείται συνήθως για αλγορίθμους και ο όρος κατάσταση για προβλήματα. Συνεπώς, ένας αλγόριθμος είναι ευσταθής αν το αποτέλεσμα που προκύπτει απ' αυτόν δεν είναι σχετικά ευαίσθητο σε διαταράξεις. Διαφορετικά, ο αλγόριθμος είναι ευσταθής αν το αποτέλεσμα που προκύπτει απ' αυτόν είναι η ακριβής λύση ενός κοντινού προβλήματος (προς το αρχικό). Επιπλέον, η ευστάθεια από μόνη της δεν εγγυάται ότι

η υπολογιζόμενη λύση θα είναι ακριβής, γιατί η ακρίβεια εξαρτάται και από την κατάσταση του μαθηματικού προβλήματος που περιλαμβάνεται στον αλγόριθμο. Έτσι, η έλλειψη ακρίβειας μπορεί να προέλθει τόσο από την εφαρμογή ενός ευσταθούς αλγόριθμου που περιλαμβάνει ένα μαθηματικό πρόβλημα κακής κατάστασης, όπως και από την εφαρμογή ενός μη ευσταθούς αλγορίθμου που περιλαμβάνει ένα καλής κατάστασης μαθηματικό πρόβλημα.

Οι διακρίσεις που έχουμε κάνει ανάμεσα στους διάφορους τύπους σφαλμάτων είναι σημαντικές στην κατανόηση της συμπεριφοράς των αριθμητικών αλγορίθμων και των παραγόντων που επηρεάζουν την ακρίβειά τους, αλλά συνήθως δεν είναι απαραίτητο ή ακόμη και δυνατό, να προσδιορίσουμε επακριβώς ποσοτικά τα επιμέρους σφάλματα.

Συμπερασματικά, η ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων ενός υπολογισμού (θεωρώντας τα αρχικά δεδομένα με "απόλυτη" ακρίβεια) ανακλά ένα συνδυασμό κάποιων ή και όλων αυτών των συστηματικών προσεγγίσεων. Επιπλέον, οι διαταράξεις που παρουσιάζονται στα αποτελέσματα εξαρτώνται και από τη φύση του χρησιμοποιούμενου αλγορίθμου.

4.5 Δεδομένα πειραμάτων

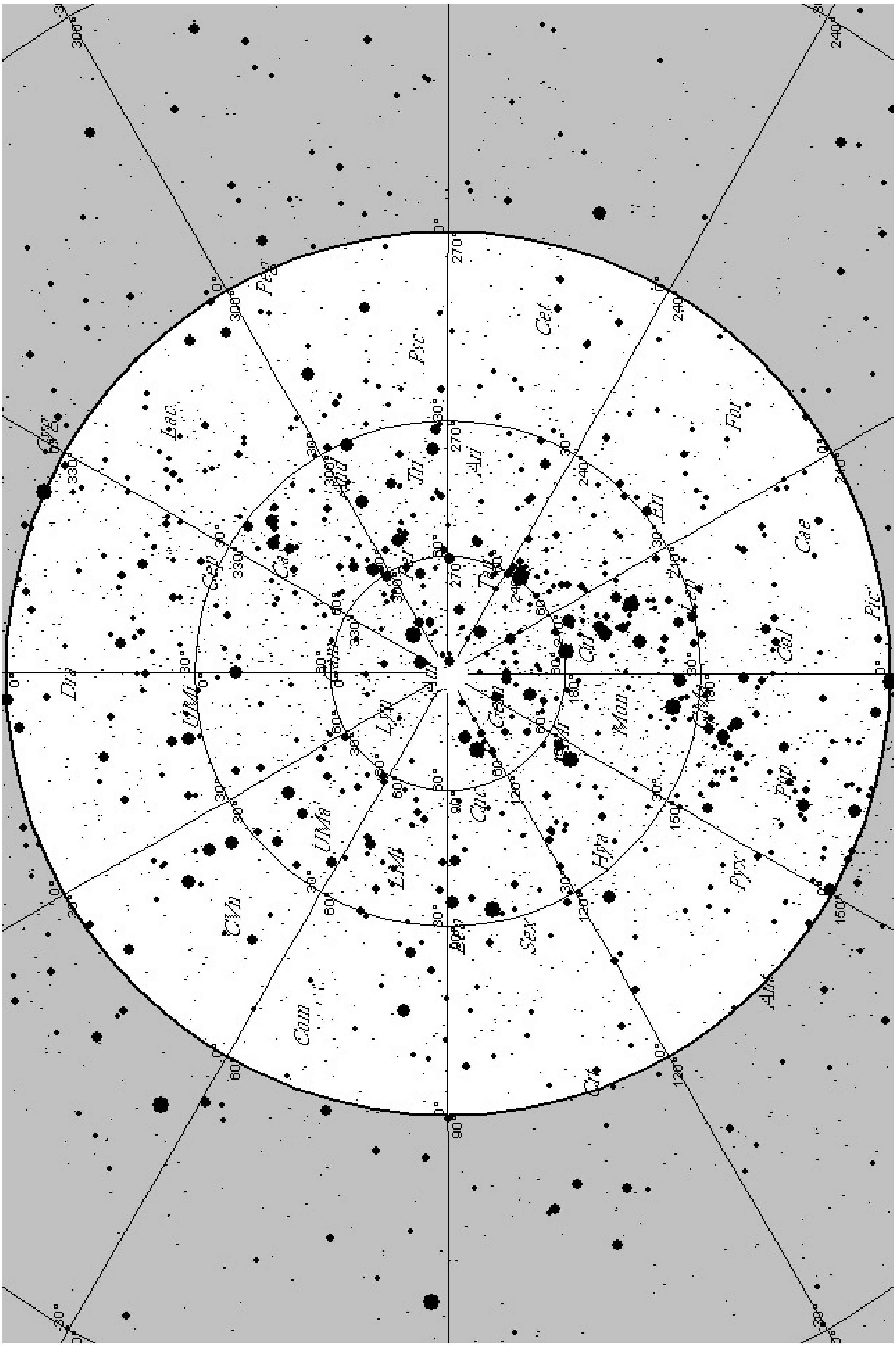
Η σειρά των πειραμάτων με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων συμβάλλει στην εκπλήρωση ενός διπλού στόχου: αφενός στον έλεγχο των αλγορίθμων, αφετέρου στην εξαγωγή χρήσιμων πληροφοριών για τον προσδιορισμό του πλάτους με πραγματικά δεδομένα. Δηλαδή, η διερεύνηση συνίσταται τόσο στο επίπεδο της ακρίβειας, με παράθεση τιμών εκτίμησης σφάλματος, όσο και σε θέματα σύγκρισης των διαφόρων μοντέλων διάθλασης.

Τα προσομοιωμένα δεδομένα προέρχονται είτε από απλούς υπολογισμούς είτε από το πρόγραμμα Η/Υ SkyMap. Η χρήση του προγράμματος (εικονικό πλανητάριο), για το σχεδιασμό παρατηρήσεων, απαιτεί τα παρακάτω στοιχεία:

- Προσεγγιστικές τιμές γεωγραφικών συντεταγμένων (φ, λ) με ακρίβεια 1 δευτερόλεπτο τόξου.
- Πολιτικό χρόνο (UTC + Time Zone).
- Προσεγγιστικές τιμές πίεσης και θερμοκρασίας με ακρίβειες 1 mbar και 1 ^{o}C αντίστοιχα.
- Ώρα (π.χ. $12^{h}\ 00^{m}\ 00^{s}$).
- Ημέρα παρατήρησης (π.χ. 1 Ιανουαρίου 2010 AD).

Επομένως, ορίζοντας τιμές συντεταγμένων φ = 38° 00' 00", λ = 23° 43' 48", συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας p = 1013 mbar, θ = 0 ^{o}C αντίστοιχα, καταγράφουμε τιμές απόκλισης (δ_i) και ύψους (υ_{oi}) άστρων, κατά τη μεσουράνησή τους, βόρεια και νότια του ζενίθ (Πίνακας 4.2).

Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε την προσομοίωση της ουράνιας σφαίρας όπως παρουσιάζεται στην οθόνη του Η/Υ (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2: Προσομοίωση ουράνιας σφαίρας ($\varphi = 38^{o}\,00'\,00''$, $\lambda = 23^{o}\,43'\,48''$, 1 Ιανουαρίου 2009, $00^{h}\,00^{m}\,00^{s}$).

A/A	N/S	Όνομα άστρου	δ_i	υ_{oi} (ά.μ.)	z_{oi} (°)
1	S	1671-986-1	+19° 50' 44.0"	+71° 51' 5"	18.148611
2	S	1670-918-1	+17° 23' 37.3"	+69° 24' 1"	20.599722
3	S	2208-2471-1	+25° 23' 30.5"	+77° 23' 45"	12.604167
4	S	2225-1821-1	+24° 39' 06.2"	+76° 39' 21"	13.344167
5	S	1711-2475-1	+15° 15' 22.4"	+67° 15' 49"	22.736389
6	S	2237-1659-1	+23° 47' 31.6"	+75° 47' 48"	14.203333
7	S	1173-1740-1	+10° 23' 01.5"	+62° 23' 35"	27.606944
8	S	2255-2883-1	+25° 11' 37.9"	+77° 11' 52"	12.802222
9	S	1179-1775-1	+15° 14' 09.7"	+67° 14' 36"	22.756667
10	S	1185-2319-1	+20° 15' 32.8"	+72° 15' 53"	17.735278
11	S	1183-1805-1	+17° 56' 43.1"	+69° 57' 6"	20.048333
12	S	1739-2317-1	+24° 19' 07.6"	+76° 19' 23"	13.676944
13	S	1188-1686-1	+16° 59' 29.7"	+68° 59' 54"	21.001667
14	S	1198-1597-1	+15° 23' 40.3"	+67° 24' 7"	22.598056
15	S	622-574-1	+9° 12' 19.8"	+61° 12' 55"	28.784722
16	S	1212-1935-1	+20° 51' 16.7"	+72° 51' 36"	17.140000
17	S	631-1493-1	+8° 53' 29.3"	+60° 54' 5"	29.098611
18	S	643-937-1	+10° 9' 16.8"	+62° 9' 50"	27.836111
19	S	1228-2019-1	+19° 45' 45.6"	+71° 46' 6"	18.231667
20	S	650-1471-1	+9° 3' 47.4"	+61° 4' 22"	28.927222
21	S	650-1469-1	+9° 46' 00.5"	+61° 46' 35"	28.223611
22	S	653-1366-1	+11° 22' 11.2"	+63° 22' 43"	26.621389
23	S	656-1725-1	+12° 58' 11.5"	+64° 58' 41"	25.021944
24	S	661-1403-1	+11° 10' 24.5"	+63° 10' 57"	26.817500
25	S	1800-2207-1	+23° 27' 01.7"	+75° 27' 18"	14.545000
26	S	1804-2519-1	+25° 36' 28.6"	+77° 36' 43"	12.388056
27	S	662-1546-1	+12° 31' 05.4"	+64° 31' 36"	25.473333
28	S	1262-1645-1	+22° 6' 29.3"	+74° 6' 47"	15.886944
29	S	1822-2314-1	+27° 37' 31.2"	+79° 37' 43"	10.371389
30	S	667-839-1	+8° 55' 03.2"	+60° 55' 39"	29.072500
31	S	1272-1126-1	+20° 36' 08.8"	+72° 36' 29"	17.391944
32	S	1264-1009-1	+15° 39' 05.4"	+67° 39' 31"	22.341389
33	S	1824-1167-1	+27° 22' 24.3"	+79° 22' 36"	10.623333
34	S	1268-1267-1	+17° 33' 56.1"	+69° 34' 20"	20.427778
35	S	1265-1172-1	+15° 53' 34.5"	+67° 54' 0"	22.100000
36	S	673-1488-1	+10° 10' 54.6"	+62° 11' 28"	27.808889
37	S	1830-2129-1	+22° 58' 32.3"	+74° 58' 49"	15.019722
38	S	683-1217-1	+8° 55' 05.9"	+60° 55' 41"	29.071944
39	S	696-1790-1	+13° 31' 51.4"	+65° 32' 20"	24.461111
40	S	1300-2225-1	+17° 23' 37.6"	+69° 24' 1"	20.599722
41	N	3945-1798-1	+56° 35' 56.9"	+71° 24' 24"	18.593333
42	N	4252-1870-1	+62° 37' 37.6"	+65° 22' 52"	24.618889
43	N	3598-2172-1	+48° 52' 40.3"	+79° 7' 32"	10.874444
44	N	3981-1590-1	+58° 14' 56.1"	+69° 45' 27"	20.242500
45	N	3615-3021-1	+49° 31' 30.8"	+78° 28' 42"	11.521667
46	N	4277-1102-1	+66° 15' 02.1"	+61° 45' 32"	28.241111
47	N	3646-911-1	+50° 31' 26.6"	+77° 28' 47"	12.520278
48	N	4013-1825-1	+58° 42' 15.8"	+69° 18' 8"	20.697778
49	N	4009-2605-1	+57° 33' 06.0"	+70° 27' 17"	19.545278
50	N	4005-2471-1	+55° 48' 26.0"	+72° 11' 54"	17.801667

A/A	N/S	Όνομα άστρου	δ_i	υ_{oi} (ά.μ.)	z_{oi} (°)
51	N	3664-1985-1	+59° 12' 08.2"	+68° 48' 16"	21.195556
52	N	4015-3523-1	+61° 52' 57.5"	+66° 7' 31"	23.874722
53	N	4019-3949-1	+62° 58' 58.8"	+65° 1' 31"	24.974722
54	N	3654-2131-1	+54° 13' 11.2"	+73° 47' 7"	16.214722
55	N	3663-2668-1	+56° 35' 18.5"	+71° 25' 3"	18.582500
56	N	3663-2669-1	+57° 52' 01.4"	+70° 8' 22"	19.860556
57	N	4017-2318-1	+61° 10' 25.7"	+66° 50' 1"	23.166389
58	N	3673-1923-1	+55° 11' 56.8"	+72° 48' 23"	17.193611
59	N	3682-2389-1	+58° 16' 47.7"	+69° 43' 36"	20.273333
60	N	4031-3289-1	+60° 16' 59.2"	+67° 43' 27"	22.275833
61	N	3683-2185-1	+59° 16' 44.3"	+68° 43' 40"	21.272222
62	N	3282-2271-1	+48° 40' 29.8"	+79° 19' 42"	10.671667
63	N	4036-2834-1	+63° 42' 53.0"	+64° 17' 38"	25.706111
64	N	3689-131-1	+54° 31' 53.8"	+73° 28' 25"	16.526389
65	N	3690-2172-1	+55° 53' 13.4"	+72° 7' 7"	17.881389
66	N	3302-1892-1	+50° 19' 11.4"	+77° 41' 3"	12.315833
67	N	3304-2737-1	+49° 16' 02.0"	+78° 44' 11"	11.263611
68	N	3704-1332-1	+55° 55' 57.5"	+72° 4' 23"	17.926944
69	N	3701-1394-1	+52° 47' 57.4"	+75° 12' 19"	14.794722
70	N	3701-1393-1	+53° 32' 29.3"	+74° 27' 48"	15.536667
71	N	3318-1840-1	+49° 38' 51.3"	+78° 21' 22"	11.643889
72	N	3320-2808-1	+49° 53' 34.8"	+78° 6' 39"	11.889167
73	N	3715-1248-1	+59° 58' 14.5"	+68° 2' 11"	21.963611
74	N	4067-1935-1	+63° 22' 19.1"	+64° 38' 11"	25.363611
75	N	3335-2097-1	+50° 22' 29.8"	+77° 37' 44"	12.371111
76	N	4079-2478-1	+60° 27' 11.8"	+67° 33' 14"	22.446111
77	N	3756-1653-1	+57° 33' 05.1"	+70° 27' 17"	19.545278
78	N	4085-2992-1	+63° 4' 19.8"	+64° 56' 10"	25.063889
79	N	3762-2640-1	+59° 53' 16.8"	+68° 7' 9"	21.880833
80	N	3750-1042-1	+54° 17' 00.6"	+73° 43' 18"	16.278333
81	S	5161-2682-1	-0° 47' 37.8"	+51° 13' 13"	38.779722
82	S	5749-2530-1	-12° 31' 01.2"	+39° 30' 16"	50.495556
83	S	5753-2281-1	-14° 45' 11.6"	+37° 16' 12"	52.730000
84	S	505-2355-1	+5° 22' 23.7"	+57° 23' 4"	32.615556
85	S	6333-2128-1	-17° 47' 03.9"	+34° 14' 29"	55.758611
86	S	5167-2593-1	-2° 51' 17.1"	+49° 9' 38"	40.839444
87	S	514-230-1	+2° 9' 52.3"	+54° 10' 38"	35.822778
88	S	5177-1878-1	-1° 4' 21.5"	+50° 56' 30"	39.058333
89	S	5767-2439-1	-14° 55' 24.1"	+37° 6' 0"	52.900000
90	S	5760-1997-1	-9° 27' 44.9"	+42° 33' 24"	47.443333
91	S	5186-2125-1	-4° 59' 38.4"	+47° 1' 21"	42.977500
92	S	536-2354-1	+5° 17' 12.1"	+57° 17' 53"	32.701944
93	S	6360-1220-1	-16° 47' 46.4"	+35° 13' 43"	54.771389
94	S	5216-1725-1	-5° 31' 50.3"	+46° 29' 10"	43.513889
95	S	547-1047-1	+2° 17' 07.9"	+54° 17' 53"	35.701944
96	N	4597-1693-1	+81° 27' 22.9"	+46° 33' 37"	43.439722
97	N	4459-947-1	+74° 59' 20.1"	+53° 1' 28"	36.975556
98	N	4594-2182-1	+80° 35' 20.4"	+47° 25' 38"	42.572778
99	N	4465-2643-1	+70° 36' 13.0"	+57° 24' 28"	32.592222
100	N	4474-1757-1	+73° 13' 33.2"	+54° 47' 12"	35.213333

A/A	N/S	Όνομα άστρου	δ_i	υ_{oi} (ά.μ.)	z_{oi} (°)
101	N	4471-1685-1	+72° 23' 19.0"	+55° 37' 24"	34.376667
102	N	4608-2417-1	+78° 52' 23.3"	+49° 8' 31"	40.858056
103	N	4650-3037-1	+83° 12' 14.0"	+44° 48' 50"	45.186111
104	N	4650-3036-1	+84° 23' 47.4"	+43° 37' 19"	46.378056
105	N	4601-3531-1	+75° 26' 18.9"	+52° 34' 30"	37.425000
106	N	4606-3584-1	+77° 41' 03.9"	+50° 19' 49"	39.669722
107	N	4307-2166-1	+74° 53' 51.4"	+53° 6' 56"	36.884444
108	N	4623-1236-1	+86° 18' 18.7"	+41° 42' 52"	48.285556
109	N	4296-1459-1	+68° 49' 38.0"	+59° 11' 0"	30.816667
110	N	4617-2855-1	+83° 49' 29.8"	+44° 11' 35"	45.806944

Πίνακας 4.2: Προσομοιωμένες παρατηρήσεις άστρων (04-05/10/2009)

Στην παραπάνω βάση δεδομένων, οι παρατηρούμενες ζενίθιες αποστάσεις (z_{oi}) προκύπτουν από τη σχέση 1.1 και περιλαμβάνουν τιμές άνω μεσουράνησης (ά.μ.) $10^o < z_{oN} < 52^o$, $10^o < z_{oS} < 60^o$. Επιπλέον, οι φαινόμενες αποκλίσεις των άστρων τη στιγμή της παρατήρησης υπολογίζονται από τα στοιχεία του καταλόγου Tycho2.

Ο κατάλογος Tycho2 είναι, προς το παρόν, ο ακριβέστερος και πληρέστερος αστρομετρικός κατάλογος. Βασίζεται στα δεδομένα της διαστημικής αποστολής HIPPARCOS (1989 - 1993) για τις θέσεις των άστρων και σε δεδομένα από 144 καταλόγους διαφόρων εποχών για τον προσδιορισμό των ιδίων κινήσεων. Περιέχει 2539913 άστρα με τυπικές αποκλίσεις στη θέση από 7 ως 60 mas. Ο κατάλογος Tycho2 αναφέρεται στο σύστημα ICRS την εποχή J2000 [Καλλιανού Φ., 2006].

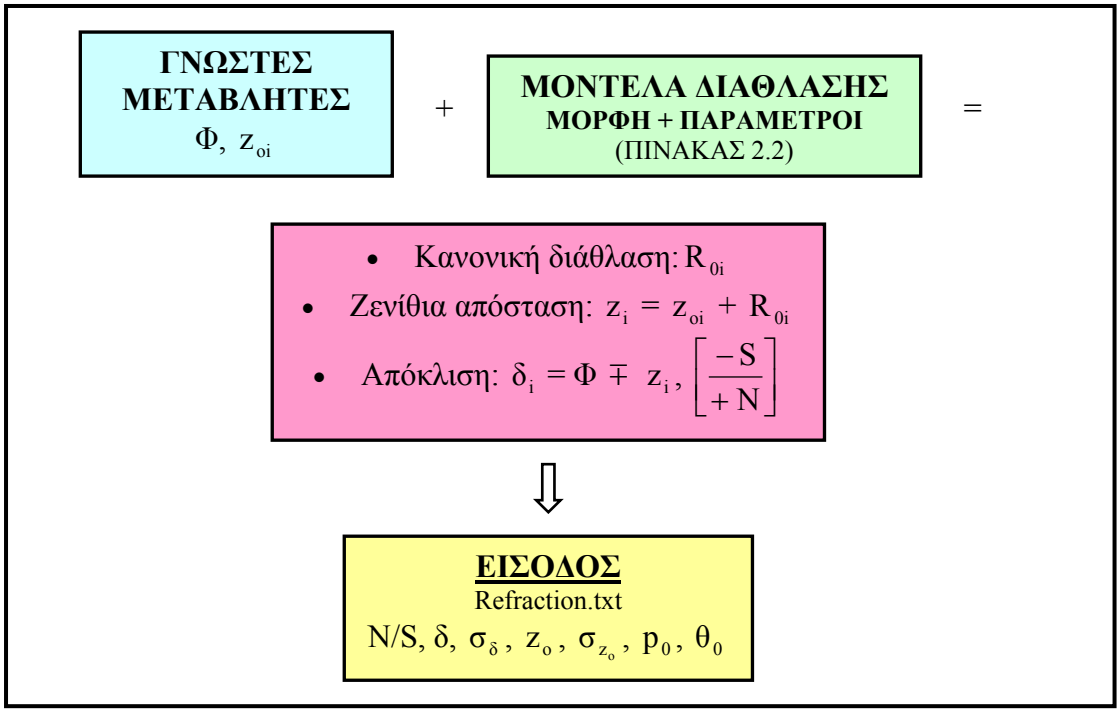
Chris Marriott's
SkyMap Pro
Version 9

Copyright 1992 - 2002
C. A. Marriott

4.6 Διεξαγωγή πειραμάτων

4.6.1 Πείραμα 1ο (Υπολογιστικά σφάλματα)

Σκοπός του 1ου πειράματος είναι η εκτίμηση των σφαλμάτων που αφορούν, αναγκαστικά, κάθε διαδικασία υπολογισμού. Έτσι, για την εξασφάλιση αρχικών δεδομένων με "άπειρη" ακρίβεια, δεδομένου ότι τα μοντέλα διάθλασης είναι συναρτήσεις της παρατηρούμενης ζενίθιας απόστασης ($R = f(z_o)$), ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.3):



Σχήμα 4.3: Υπολογισμός στοιχείων εισόδου 1ου πειράματος

Προφανώς, τα στοιχεία εισόδου αναφέρονται σε φανταστικά άστρα των οποίων οι θεωρούμενες τιμές και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.3):

A/A	ΘΕΣΗ	Φ (°)	Φ (")	z_{oi} (°)	z_{oi} (")
1	N	38	136800	10	36000
2	N	38	136800	25	90000
3	S	38	136800	15	54000
4	S	38	136800	30	108000

ΤΙΜΕΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ R_{0i} (")					
A/A	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
1	10.641	10.629	10.630	10.628	10.628
2	28.142	28.102	28.107	28.101	28.101
3	16.171	16.151	16.153	16.150	16.150
4	34.843	34.790	34.796	34.788	34.788

ΖΕΝΙΘΙΕΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ z_i					
A/A	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
1	36010.641	36010.629	36010.630	36010.628	36010.628
2	90028.142	90028.102	90028.107	90028.101	90028.101
3	54016.171	54016.151	54016.153	54016.150	54016.150
4	108034.843	108034.790	108034.796	108034.788	108034.788

ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ δ_i					
Α/Α	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
1	172810.641	172810.629	172810.630	172810.628	172810.628
2	226828.142	226828.102	226828.107	226828.101	226828.101
3	82783.829	82783.849	82783.847	82783.850	82783.850
4	28765.157	28765.210	28765.204	28765.212	28765.212

Πίνακας 4.3: Στοιχεία εισόδου 1ου πειράματος

Επιπλέον, έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές σ_δ = 0".01 και σ_{z_o} = 0".1, για το σχηματισμό του πίνακα βαρών **P**, ενώ επιλέγουμε τα αποτελέσματα να εμφανίζονται με 15 σημαντικά ψηφία. Μετά την επεξεργασία των δεδομένων, τα εξαγόμενα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.4):

ΜΟΝΤΕΛΟ I		
Φ" =	136800	± 2.25728687993941e-011
k" =	60.350000000359	± 5.58406575908302e-011
$\hat{\sigma}_o$" =	± 4.45525712238342e-010	p = 1, 2

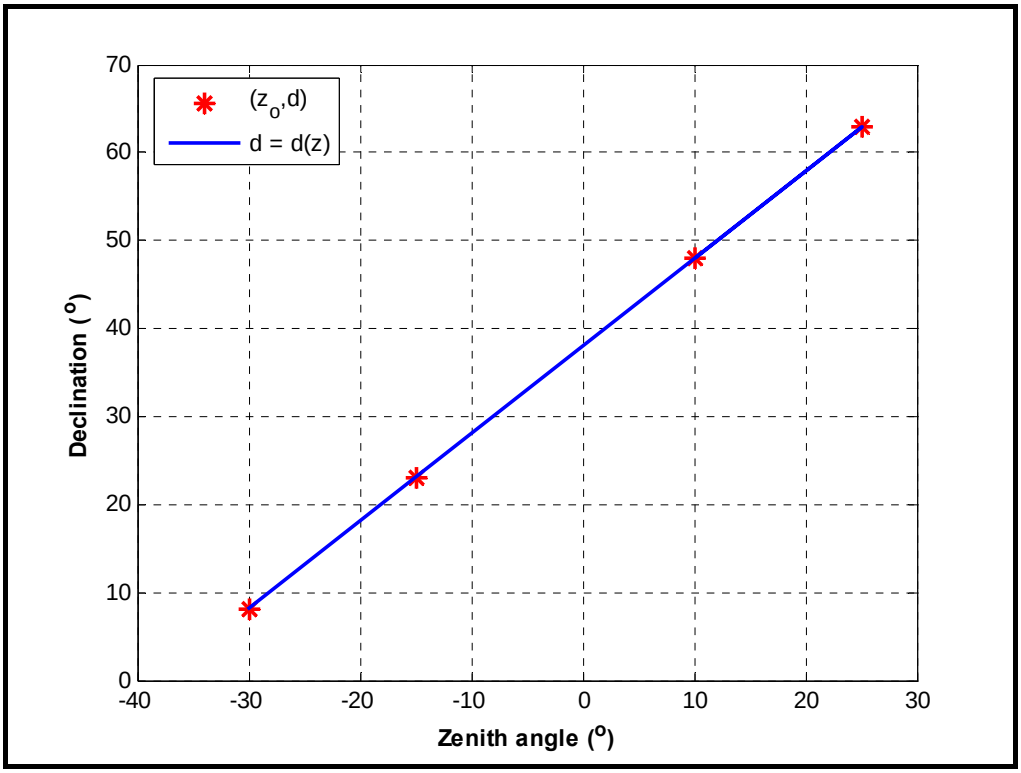
ΜΟΝΤΕΛΟ II		
Φ" =	136800	± 1.0117396832931e-010
A" =	60.2799999992863	± 6.67969081597259e-010
B" =	-0.0669999988183744	± 2.52656407580997e-009
$\hat{\sigma}_o$" =	± 1.87703270555863e-009	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ III		
Φ" =	136800	± 3.03709865392542e-010
m =	6.46000023835341	± 8.62865227006614e-007
n_o =	1.00029260000001	± 4.6209918400163e-014
$\hat{\sigma}_o$" =	± 5.63491623876575e-009	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ IV		
Φ" =	136800	± 1.75257621850418e-010
c =	0.998745899973646	± 7.2770584658494e-011
n =	1.00029260000001	± 2.66518292083079e-014
$\hat{\sigma}_o$" =	± 3.25164007178674e-009	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ V		
Φ" =	136800	± 6.23894945518236e-011
w =	1.00125568999985	± 2.59705073648313e-011
n =	1.0002926	± 9.48771433486279e-015
$\hat{\sigma}_o$" =	± 1.15754270019672e-009	p = 1, 2

Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα 1ου πειράματος



Γράφημα 4.1: Πείραμα 1ο

Με το τέλος της διεξαγωγής του 1ου πειράματος, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν ορισμένα σχόλια - παρατηρήσεις:

- Οι τιμές των αποκλίσεων (δ_i) έχουν χρησιμοποιηθεί με όλα τα δεκαδικά τους ψηφία, όπως άλλωστε επιβάλλεται σε τέτοια πειράματα, ανεξάρτητα από το πώς εμφανίζονται στον πίνακα 4.3 (οικονομία χώρου).

- Κατά τον υπολογισμό των τιμών της κανονικής διάθλασης (R_{0i}) δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή, ώστε τόσο οι παράμετροι των μοντέλων όσο και οι τύποι μετατροπής μονάδων να χρησιμοποιηθούν χωρίς να έχει προηγηθεί κάποια πράξη μεταξύ τους, που πιθανώς αλλοίωνε το αποτέλεσμα (π.χ. στρογγυλοποίηση, αποκοπή).

- Σε πειράματα υπολογιστικών σφαλμάτων επιτυγχάνεται καλύτερος έλεγχος αν ο βαθμός ελευθερίας είναι $\underline{r} = 1$.

- Οι "γεωμετρικές" προϋποθέσεις δεν έχουν καμία ισχύ. Δηλαδή, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν άστρα που βρίσκονται όλα βόρεια ή όλα νότια του ζενίθ ή ακόμα και τιμές γωνιών πέραν των ορίων που θέτει το μοντέλο (με την προϋπόθεση ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού του μοντέλου).

- Οι τιμές των σφαλμάτων βρίσκονται στο διάστημα $[1\cdot10^{-15},\ 1\cdot10^{-9}]$. Εξαίρεση υπάρχει για το σφάλμα της παραμέτρου m (μοντέλο III), που είναι της τάξης $1\cdot10^{-6}$. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στις σχετικά μεγάλες τιμές των σφαλμάτων αποκοπής και στρογγύλευσης, αφού το μοντέλο είναι έντονα μη γραμμικό και ο αλγόριθμος περιλαμβάνει πολλές πράξεις.

Συμπερασματικά, τα υπολογιστικά σφάλματα, όπως υπολογίζονται σε ένα δεδομένο υπολογιστή και με τη χρήση του MATLAB, παραμένουν φραγμένα και έχουν σχετικά μικρές τιμές. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα σφάλματα που θα προκύπτουν σε κάθε επίλυση θα οφείλονται στη μοντελοποίηση (απλοποιήσεις - παραλείψεις) και στην αβεβαιότητα των αρχικών δεδομένων, δηλαδή σε σφάλματα που υπάρχουν πριν ξεκινήσουν οι υπολογισμοί.

4.6.2 Πείραμα 2^{ο} (Ευστάθεια)

Για τον έλεγχο της ευστάθειας των αλγορίθμων χρησιμοποιούμε τα δεδομένα που εφαρμόζονται για το μοντέλο Ι στο προηγούμενο πείραμα. Έτσι, έχουμε ελαφρά διαφοροποιημένες τιμές για τη διάθλαση (δηλαδή για τις αποκλίσεις) σχετικά με αυτές που προκύπτουν για τα υπόλοιπα μοντέλα διάθλασης.

Τα αποτελέσματα του 2^{ου} πειράματος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4.5):

ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ" =	136800	± 2.25728687993941e-011
k" =	60.350000000359	± 5.58406575908302e-011
$\hat{\sigma}_o$" =	± 4.45525712238342e-010	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ" =	136800	± 1.17028195672572e-011
A" =	60.3500000006066	± 7.72641552189874e-011
B" =	-9.43573675800208e-010	± 2.92248336615475e-010
$\hat{\sigma}_o$" =	± 2.17116755613604e-010	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙΙ		
Φ" =	136800	± 6.55198886604505e-011
m =	-3.75695419087274e-007	± 1.85322853563454e-007
n_o =	1.00029262786371	± 9.92550333172573e-015
$\hat{\sigma}_o$" =	± 1.21556241040744e-009	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ ΙV		
Φ" =	136800.000000001	± 2.14012033583197e-009
c =	0.999853699668462	± 8.8559640016609e-010
n =	1.00029262786819	± 3.24207604775582e-013
$\hat{\sigma}_o$" =	± 3.97046132815148e-008	p = 1, 2

ΜΟΝΤΕΛΟ V		
Φ" =	136800.000000001	± 2.14434050396047e-009
w =	1.00014630744056	± 8.8759215279533e-010
n =	1.00029262786401	± 3.24845519646772e-013
$\hat{\sigma}_o$" =	± 3.97829056872649e-008	p = 1, 2

Πίνακας 4.5: Αποτελέσματα 2^{ου} πειράματος

Συμπερασματικά, η μικρή διατάραξη των αρχικών δεδομένων αποδεικνύει την ευαισθησία του μοντέλου ΙΙΙ (πολύ διαφορετική τιμή της παραμέτρου m και με διαφορετικό πρόσημο), έναντι των άλλων μοντέλων.

4.6.3 Πείραμα 3° (Βαθμονόμηση SkyMap)

Χρησιμοποιώντας όλα τα άστρα (ν = 110) που περιλαμβάνονται στη βάση δεδομένων (Πίνακας 4.2), προσδιορίζουμε τα αποτελέσματα της συνόρθωσης για το κάθε μοντέλο (Πίνακας 4.6). Ας σημειωθεί ότι, οι αβεβαιότητες των γωνιών θεωρήθηκαν σ_{z_o} = 0".5 ενώ για τις αποκλίσεις έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή σ_δ = 0".05. Γενικά, οι τιμές απόκλισης, στον κατάλογο Tycho2, είναι γνωστές με ακρίβεια 0".001. Όμως, το SkyMap στρογγυλοποιεί τις τιμές αυτές, την εποχή της παρατήρησης (φαινόμενη θέση), καθώς και τις τιμές των γωνιών παρατήρησης με την ακρίβεια που αναφέρθηκε.

ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ" =	136800.01	± 0.03
k" =	63.44	± 0.05
$\hat{\sigma}_o$" =	± 0.627	p = 1, 2, 3

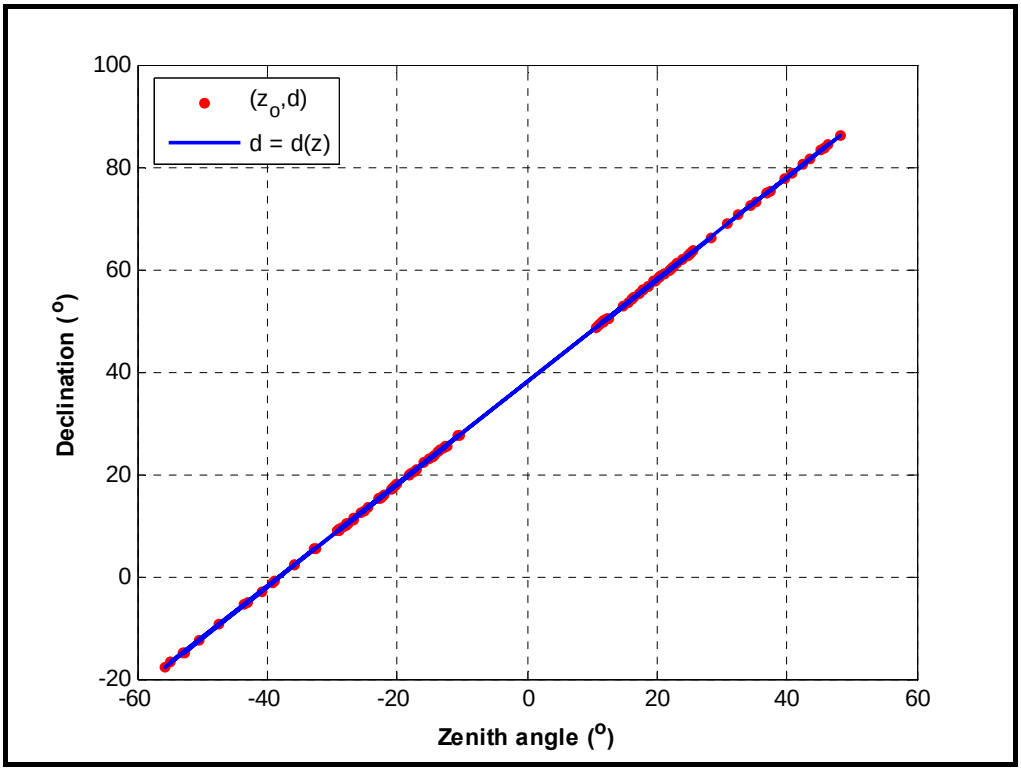
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ" =	136800.01	± 0.03
A" =	63.49	± 0.09
B" =	-0.065	± 0.080
$\hat{\sigma}_o$" =	± 0.628	p = 1, 2, 3

ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙΙ		
Φ" =	136800.01	± 0.03
m =	6.63	± 8.22
n_o =	1.0003082	± 7.68e-007
$\hat{\sigma}_o$" =	± 0.628	p = 1, 2, 3

ΜΟΝΤΕΛΟ IV		
Φ" =	136800.01	± 0.03
c =	0.9988271	± 0.00126
n =	1.0003082	± 7.67e-007
$\hat{\sigma}_o$" =	± 0.628	p = 1, 2, 3

ΜΟΝΤΕΛΟ V		
Φ" =	136800.01	± 0.03
w =	1.00117425	± 0.00127
n =	1.0003082	± 7.67e-007
$\hat{\sigma}_o$" =	± 0.628	p = 1, 2, 3

Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα 3^{ου} πειράματος



Γράφημα 4.2: Πείραμα 3°

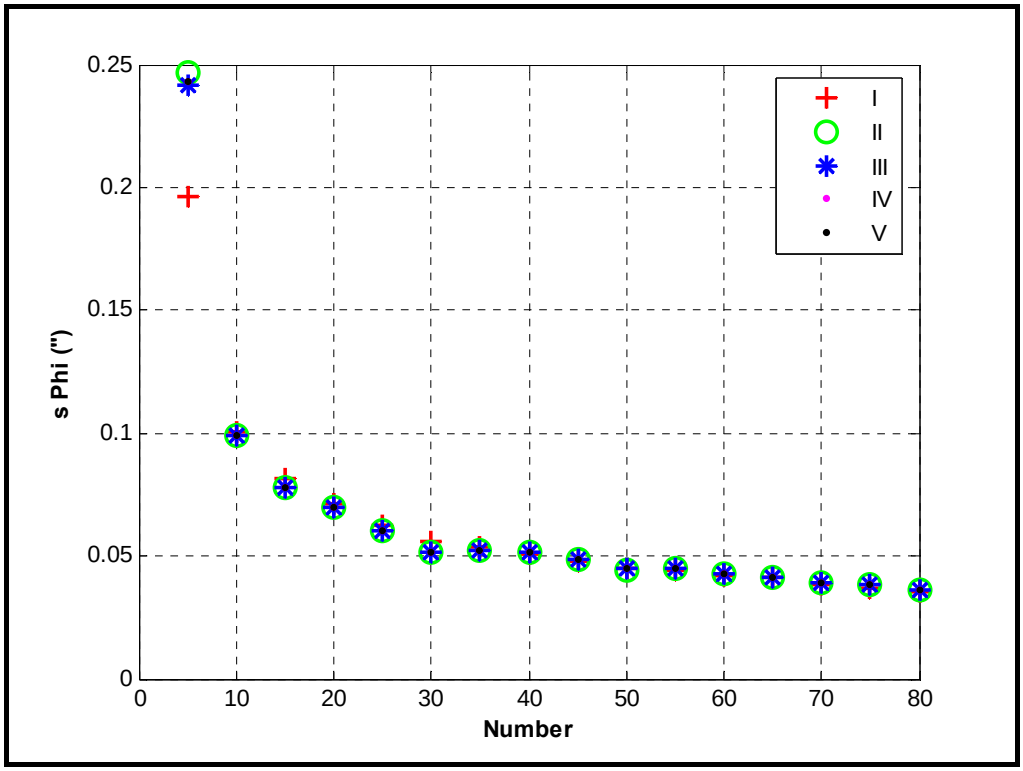
Στο σημείο αυτό πραγματοποιείται ένας έλεγχος κατά πόσο οι υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων διαφέρουν απ' αυτές των προσωρινών τιμών. Δηλαδή, ελέγχονται έμμεσα οι τιμές των παραμέτρων της κανονικής διάθλασης που αντιστοιχούν στα δεδομένα του SkyMap.

4.6.4 Πείραμα 4° (Πλήθος άστρων)

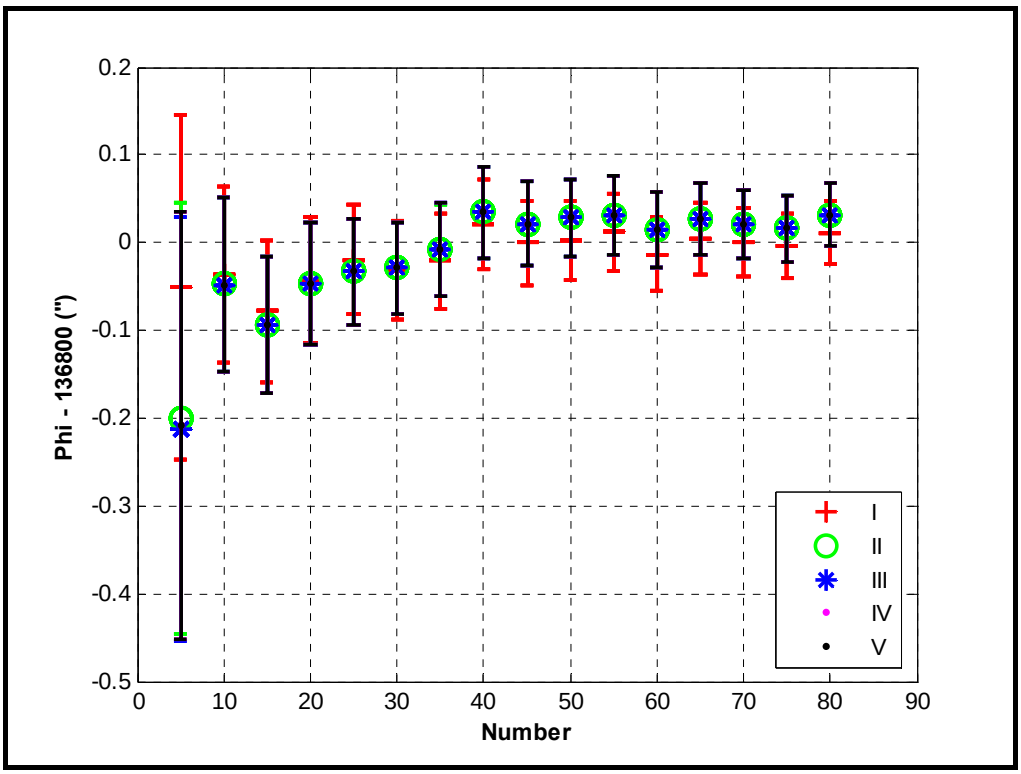
Στο 4° πείραμα εξετάζεται η ακρίβεια προσδιορισμού του πλάτους σε συνάρτηση με το πλήθος των άστρων. Εφόσον είναι γνωστά τα μοντέλα, με τους περιορισμούς τους, καθώς και οι ακρίβειες των δεδομένων (σ_δ = 0".05, σ_{z_o} = 0".5), μεταβάλλοντας τον αριθμό των άστρων, αφαιρώντας 5 κάθε φορά, προκύπτουν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα (Γράφημα 4.3, 4.4).

Γενικά, η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται βελτιστοποίηση (optimization) και μελετά την εύρεση του κατάλληλου συνδυασμού, αριθμού μετρήσεων και αβεβαιοτήτων, από την άποψη της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.

Σημειώνεται ότι, για τη διεξαγωγή του πειράματος, χρησιμοποιήθηκαν τα πρώτα 80 άστρα του πίνακα 4.2. Είναι φανερό ότι, εξαιτίας των μικρών ζενιθίων γωνιών των δεδομένων, τα αποτελέσματα του πλάτους είναι καλύτερα στην περίπτωση του μοντέλου I (Γράφημα 4.4). Πάντως, με κατώτατο όριο τα 10 άστρα για το συγκεκριμένο επίπεδο ακρίβειας των δεδομένων τα αποτελέσματα είναι εντός του ± 0".1.



Γράφημα 4.3: Ακρίβεια πλάτους συναρτήσει του πλήθους άστρων

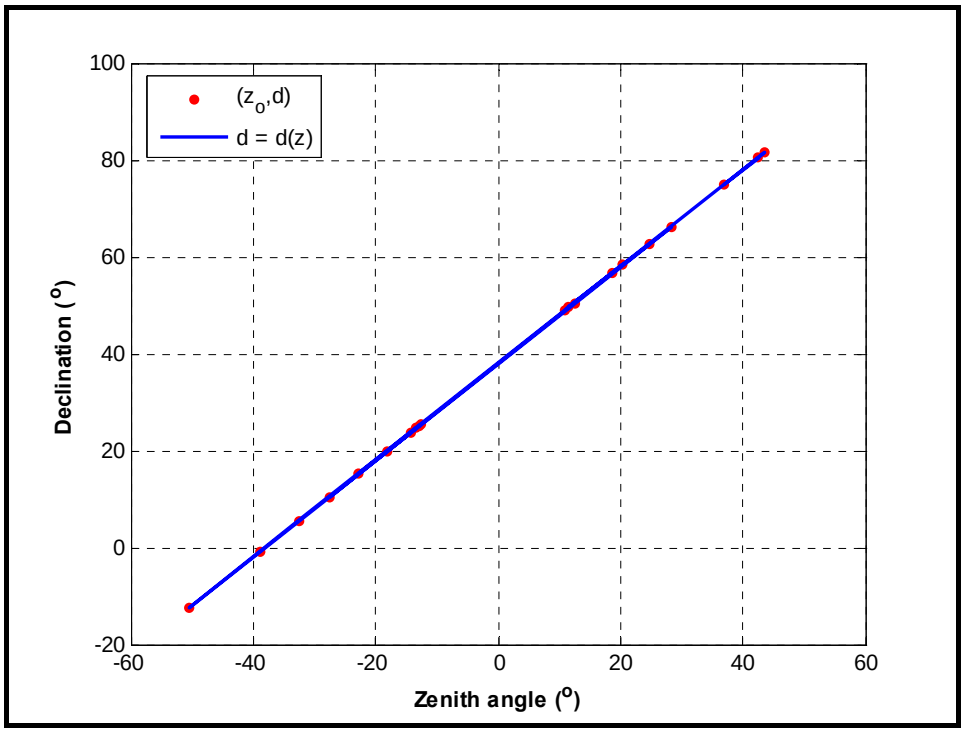


Γράφημα 4.4: Τιμές και σφάλματα πλάτους συναρτήσει του πλήθους άστρων

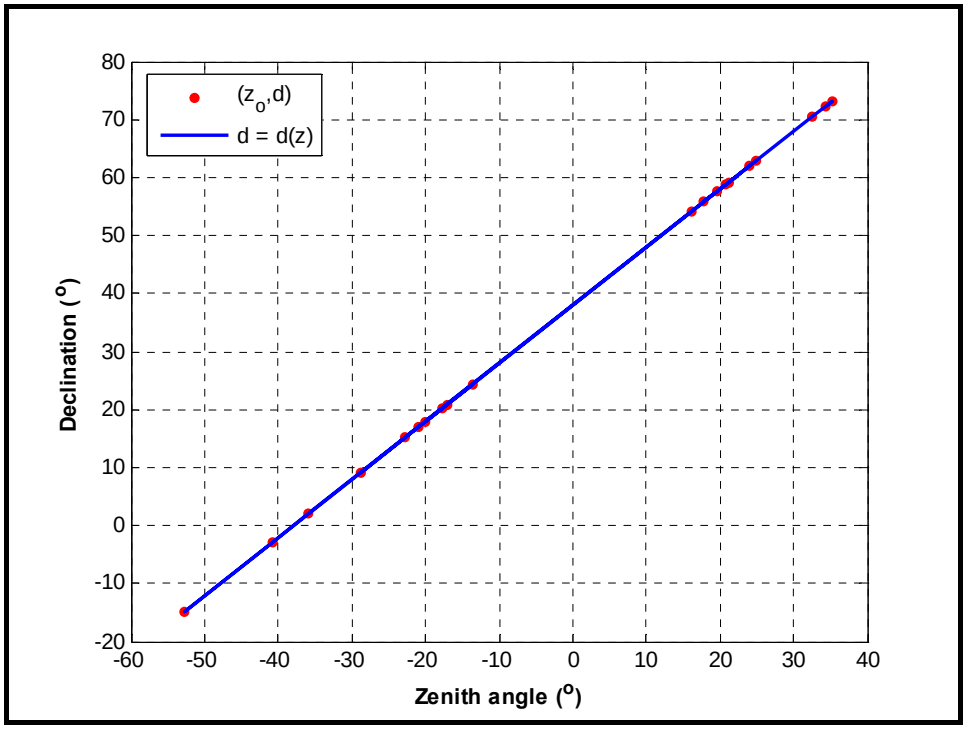
Τέλος, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, με εξαίρεση το μοντέλο I, δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές στην τιμή του πλάτους για τα υπόλοιπα μοντέλα.

4.6.5 Πείραμα 5° (Ταυτότητα άστρων)

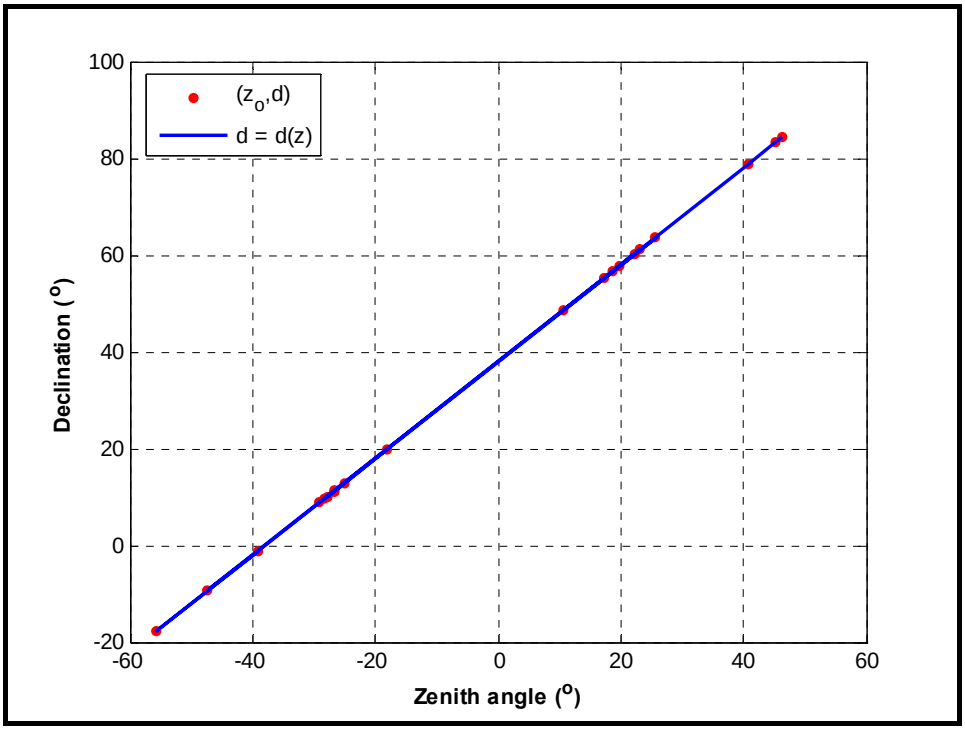
Μοιράζοντας 100 άστρα του πίνακα 4.2 σε 5 ομάδες (A, B, C, D, E), σχηματίζουμε 5 σύνολα που το καθένα περιέχει 20 διαφορετικά άστρα (ν = 20). Έπειτα, για το κάθε σύνολο, εφαρμόζονται όλα τα μοντέλα και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα ακόλουθα γραφήματα.



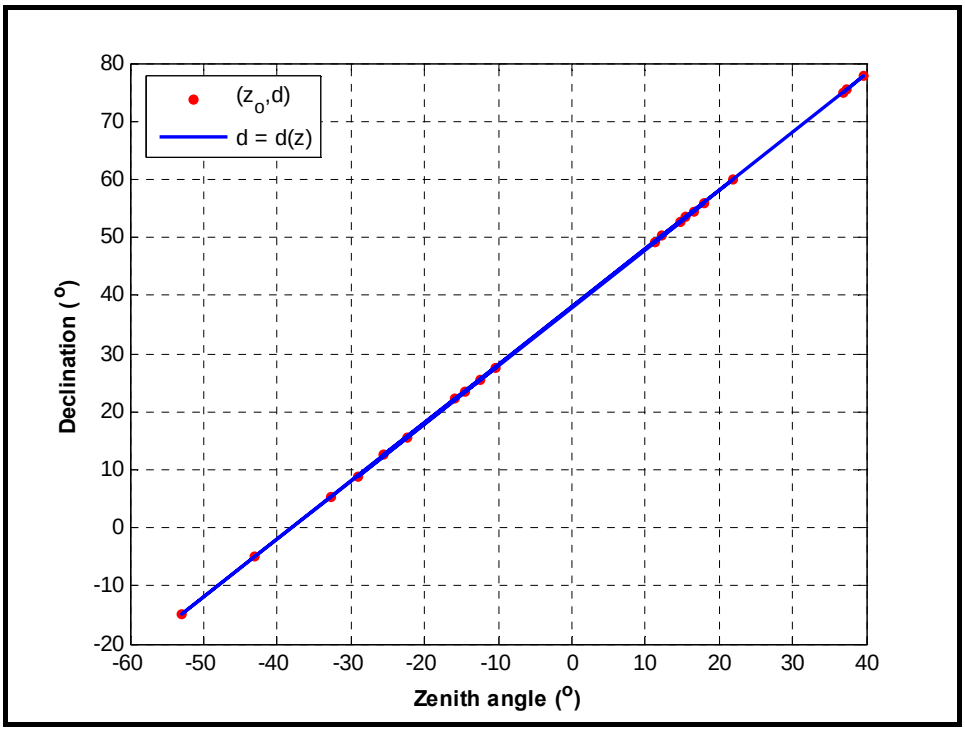
Γράφημα 4.5: Πείραμα 5° - Ομάδα A



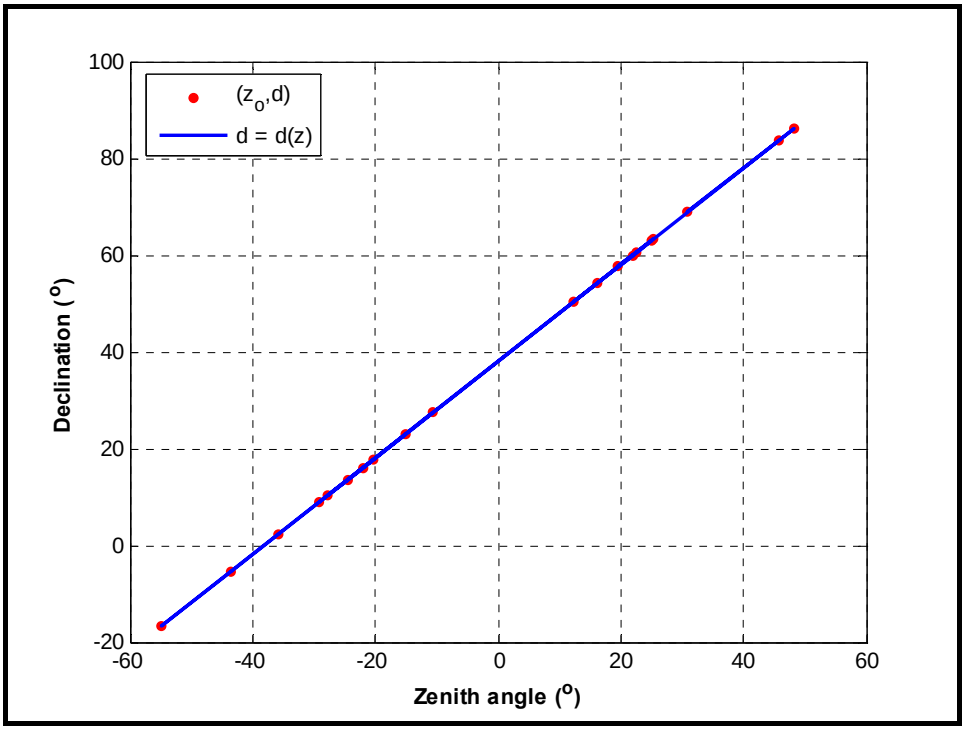
Γράφημα 4.6: Πείραμα 5° - Ομάδα B



Γράφημα 4.7: Πείραμα 5° - Ομάδα C

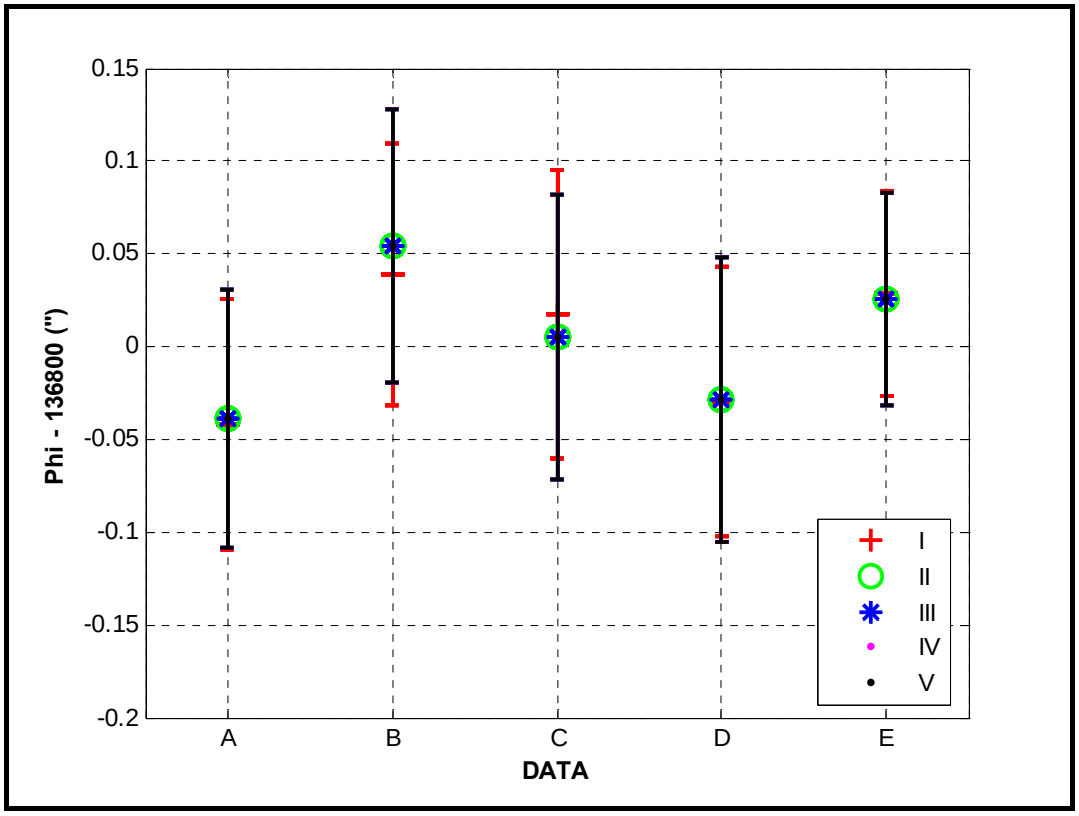


Γράφημα 4.8: Πείραμα 5° - Ομάδα D

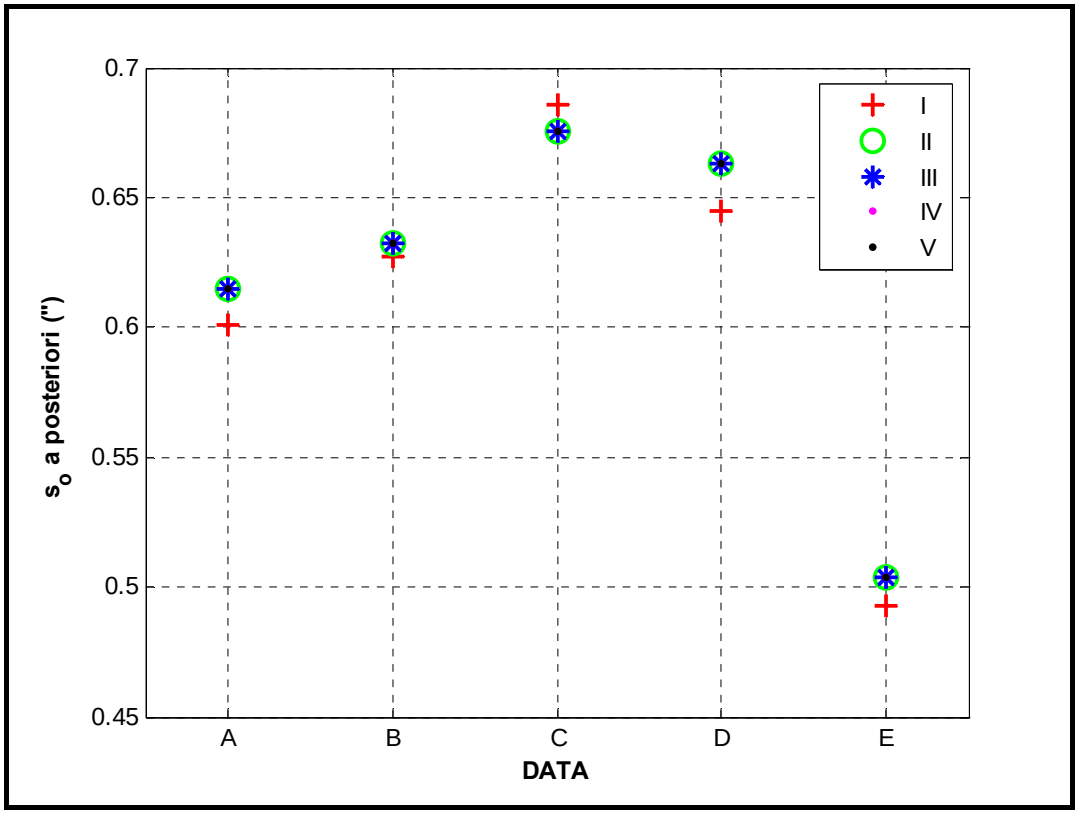


Γράφημα 4.9: Πείραμα 5° - Ομάδα Ε

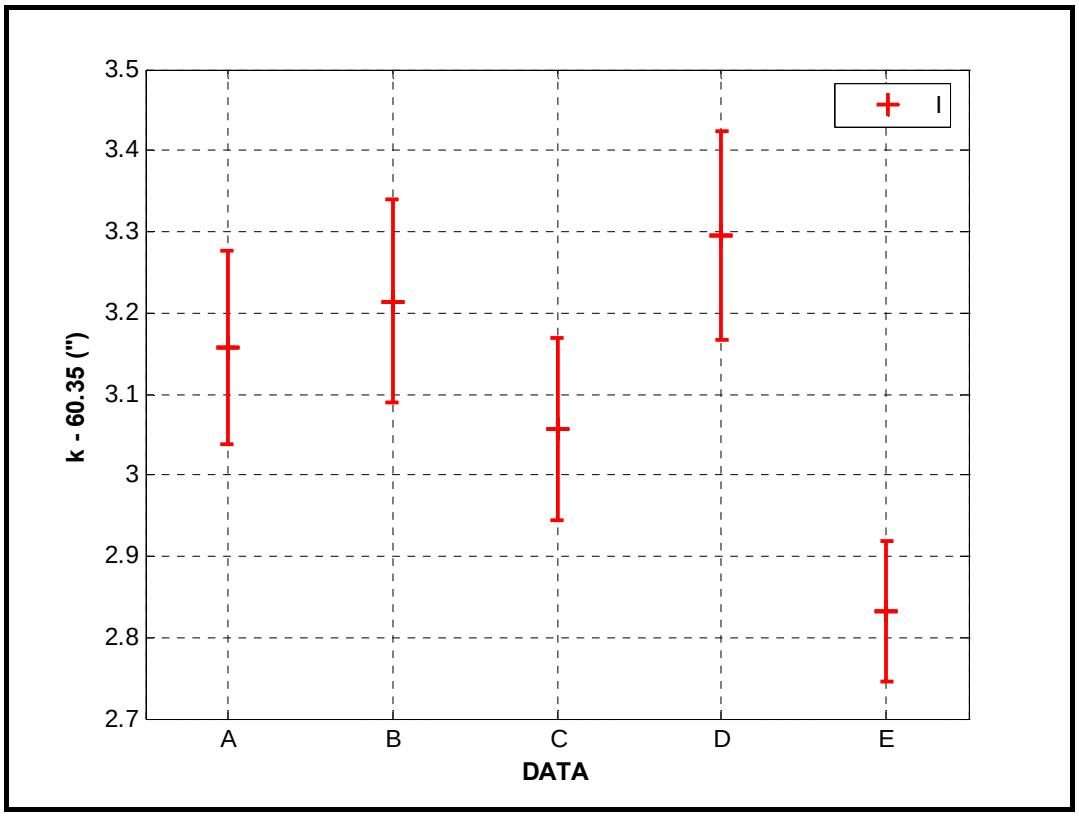
Αντίστοιχα γραφήματα των προηγουμένων, καλό είναι να μην απουσιάζουν από μια διαδικασία συνόρθωσης, γιατί η εποπτεία που μας εξασφαλίζουν έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων.



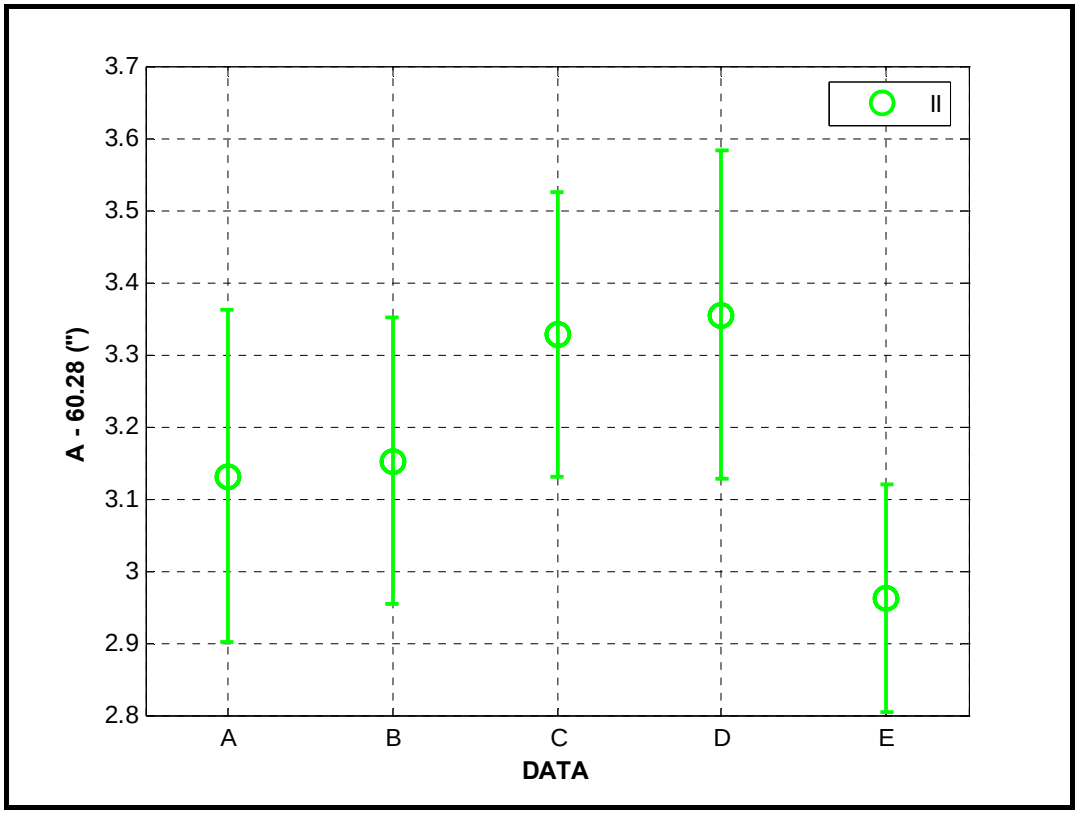
Γράφημα 4.10: Τιμές και σφάλματα πλάτους



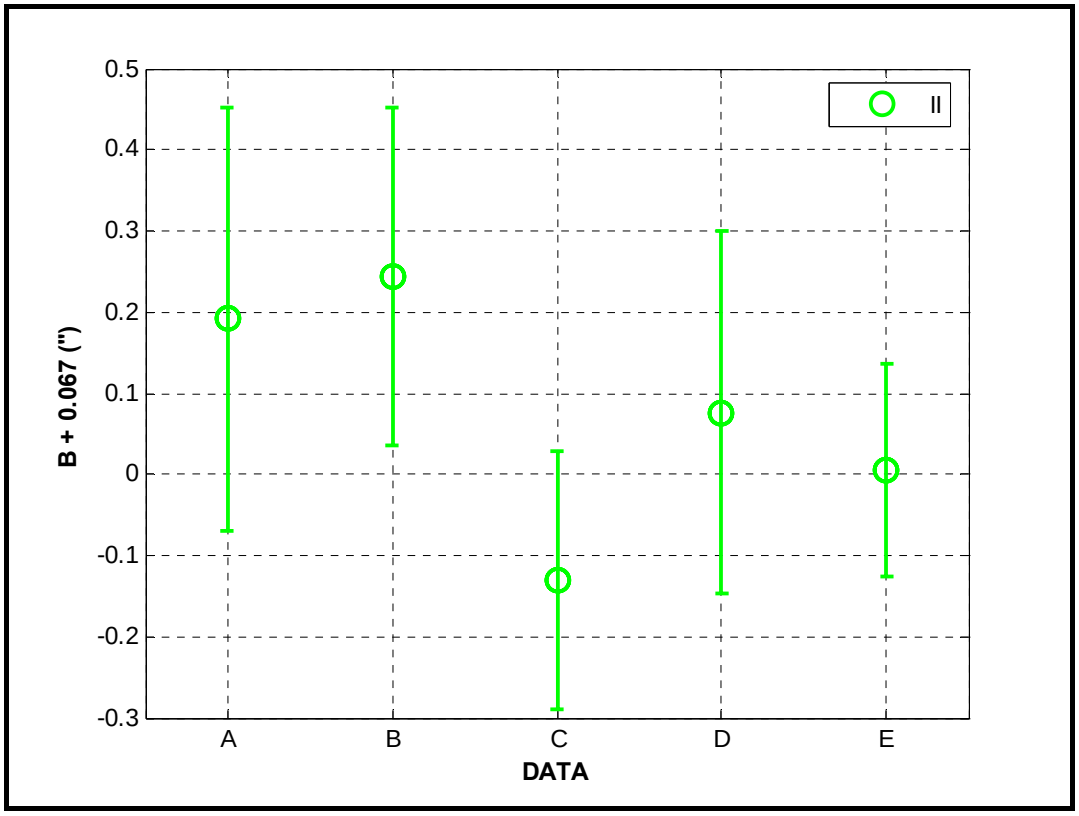
Γράφημα 4.11: A posteriori τυπικό σφάλμα μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_o$)



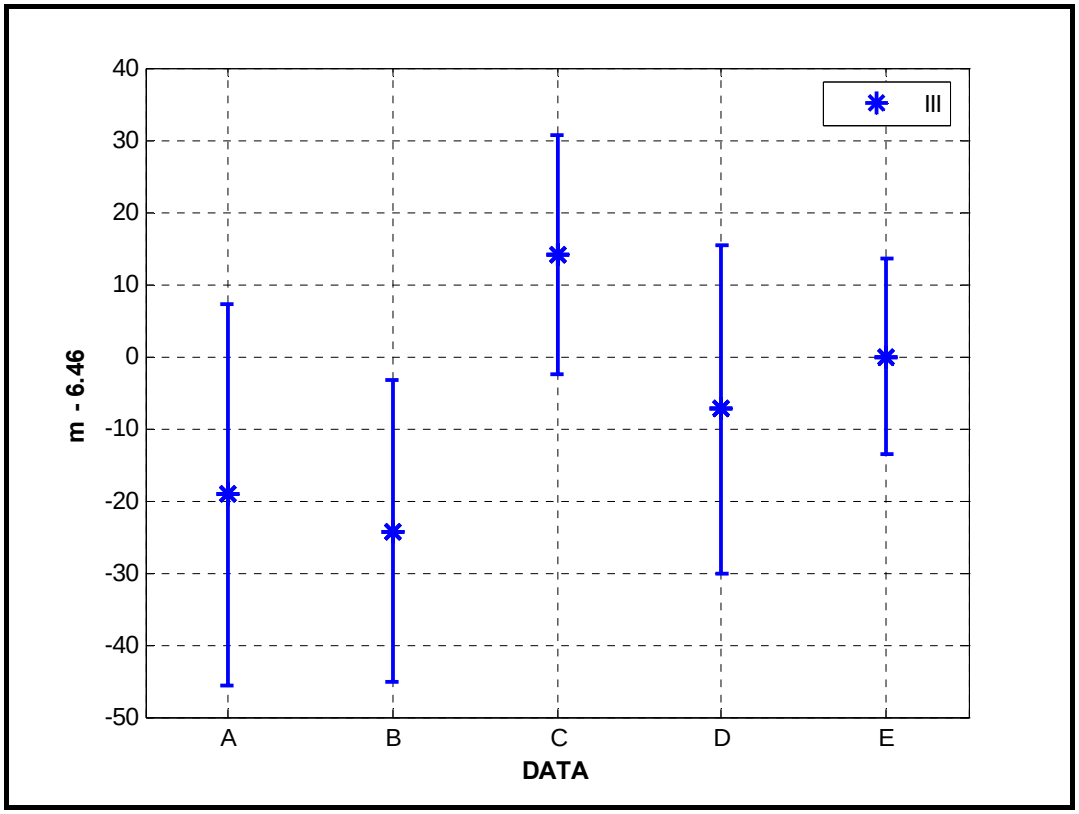
Γράφημα 4.12: Παράμετρος k $\pm$ σ_k - Μοντέλο I



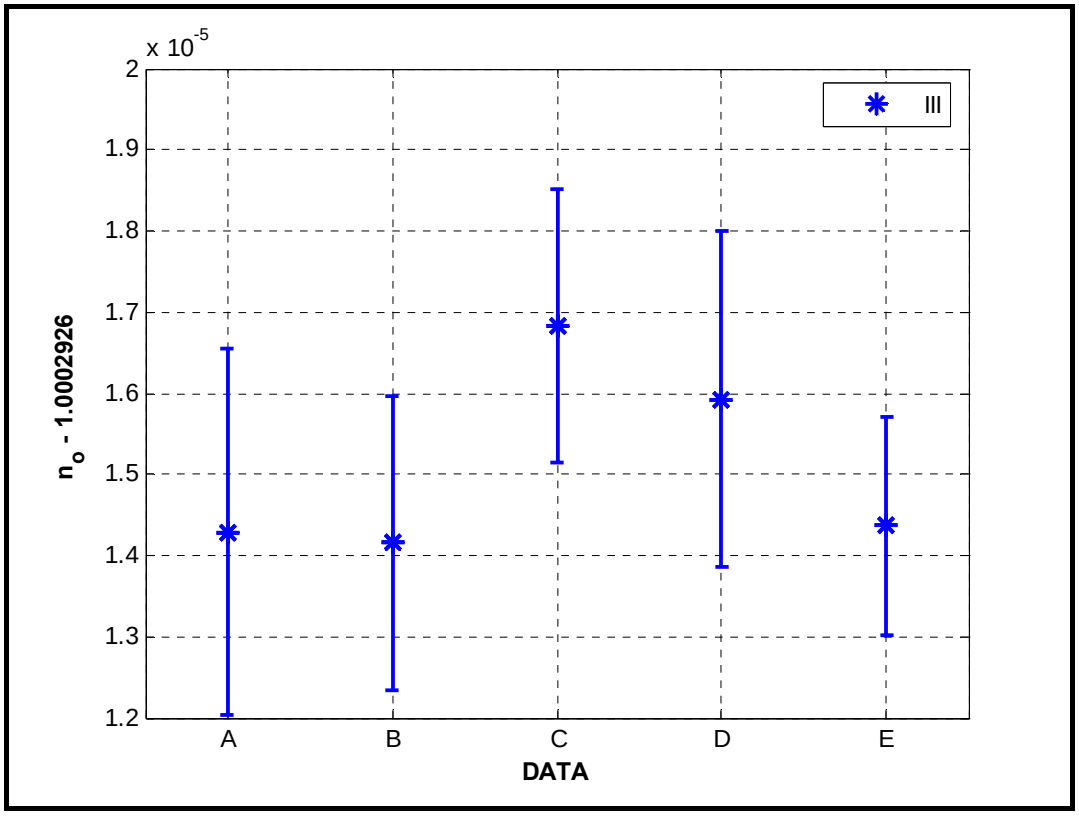
Γράφημα 4.13: Παράμετρος A ± σ_A - Μοντέλο II



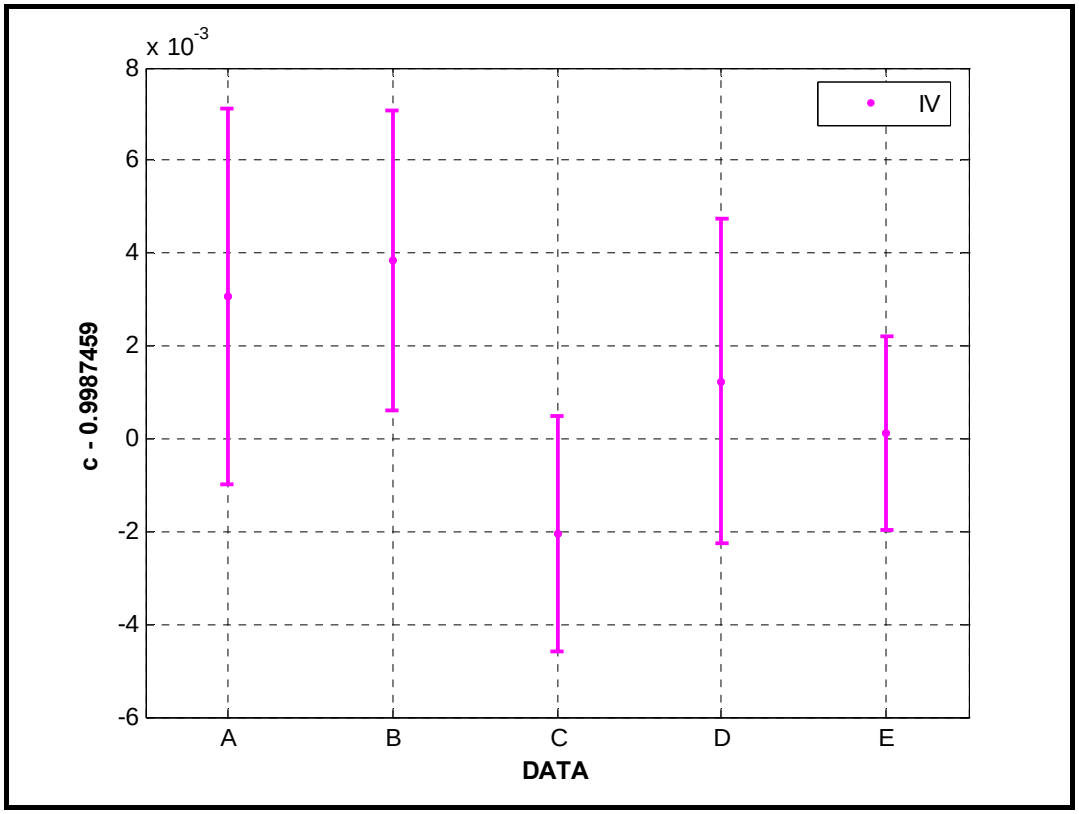
Γράφημα 4.14: Παράμετρος B ± σ_B - Μοντέλο II



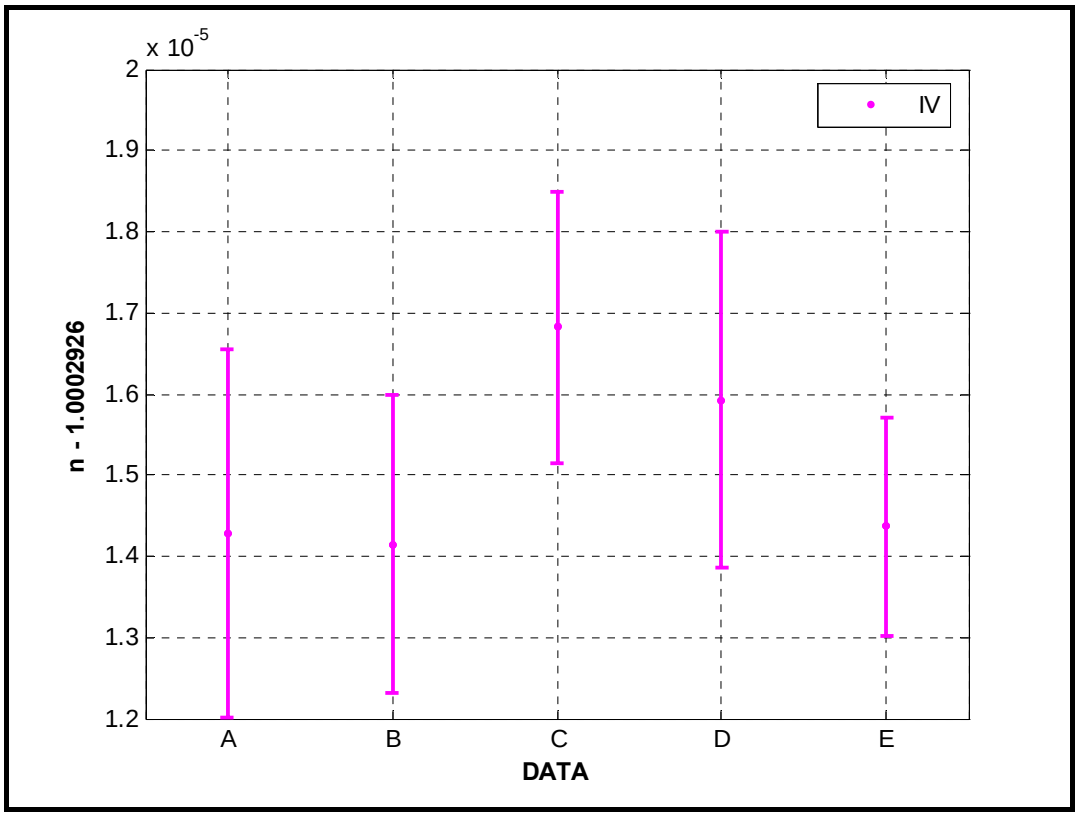
Γράφημα 4.15: Παράμετρος m ± σ_m - Μοντέλο III



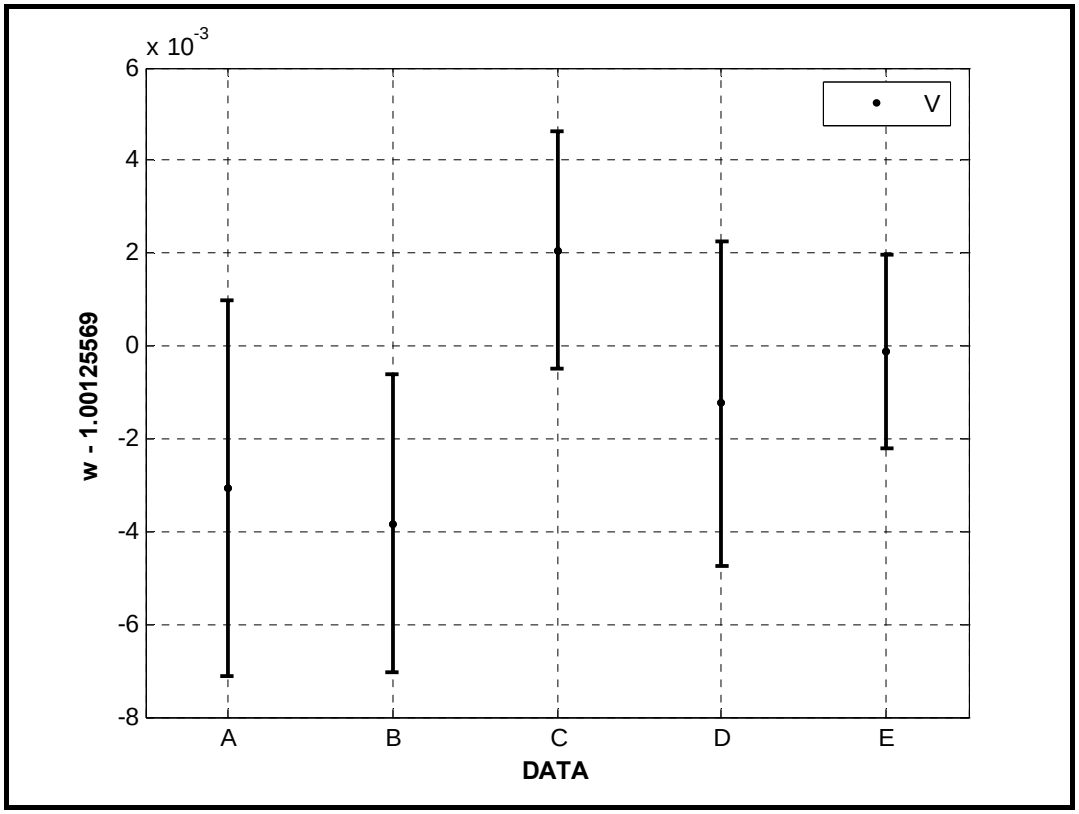
Γράφημα 4.16: Παράμετρος n_o ± σ_{n_o} - Μοντέλο III



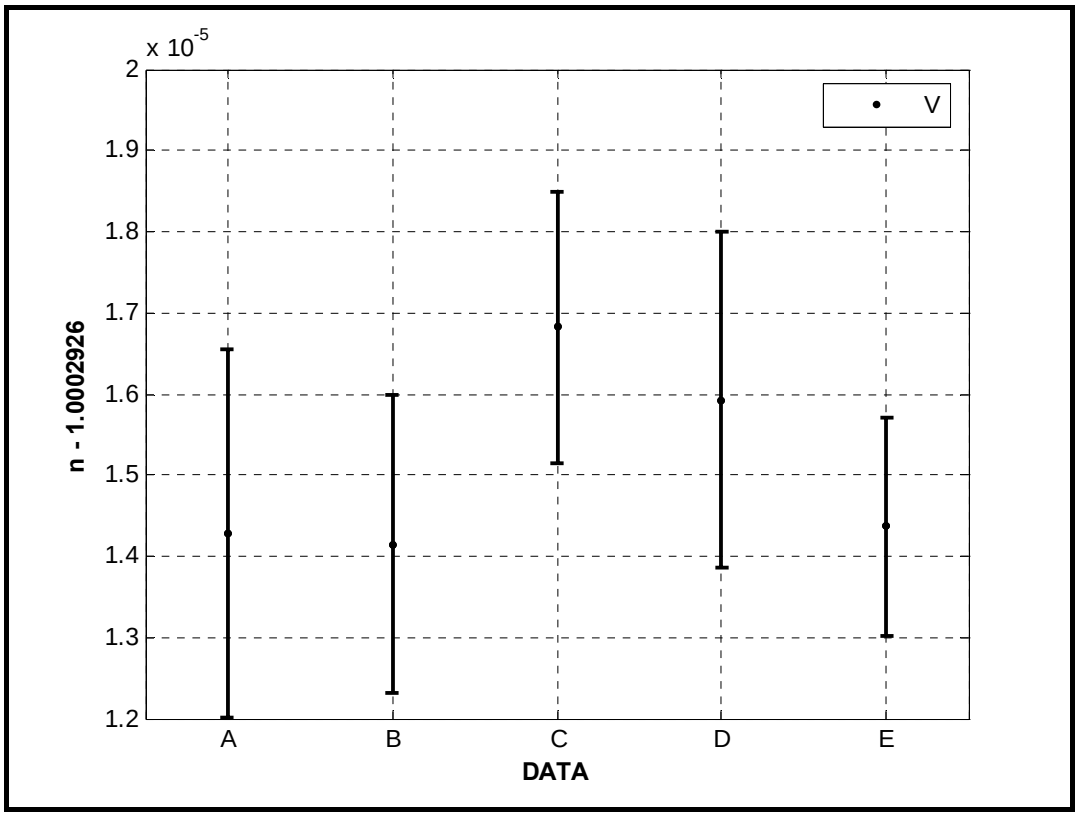
Γράφημα 4.17: Παράμετρος c $\pm$ σ_c - Μοντέλο IV



Γράφημα 4.18: Παράμετρος n $\pm$ σ_n - Μοντέλο IV



Γράφημα 4.19: Παράμετρος w ± σ_w - Μοντέλο V



Γράφημα 4.20: Παράμετρος n ± σ_n - Μοντέλο V

Η παρουσίαση των παραπάνω γραφημάτων έγινε για δύο λόγους: Πρώτον, για να αποδοθούν οι τιμές των παραμέτρων (ή μάλλον οι διαφορές τους από τις προσωρινές τιμές) με τα σφάλματά τους για το κάθε σύνολο A, B, C, D, E. Δεύτερον, για να συγκριθούν οι τιμές αυτές μεταξύ των διαφορετικών συνόλων.

Συμπερασματικά, για τις διάφορες ομάδες, οι διαφορές που προκύπτουν στην τιμή του πλάτους είναι της τάξης του ± 0".05. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει την ανεξαρτησία του προσδιορισμού ως προς την ταυτότητα των άστρων.

Κεφάλαιο 5

Επεξεργασία Αστρονομικών Παρατηρήσεων

Τα όργανα πρέπει να δουλεύουν
Οι άνθρωποι πρέπει να σκέφτονται

Murphy

5.1 Διεξαγωγή παρατηρήσεων

5.1.1 Επιλογή σημείου παρατήρησης

Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας προσδιορισμού του πλάτους πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις σε σημείο της ταράτσας του κτηρίου Λαμπαδαρίου, της Σχολής Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών του ΕΜΠ. Παράλληλα, για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων, χρησιμοποιήθηκαν και δεδομένα που περιλαμβάνουν παρατηρήσεις για την εφαρμογή της μεθόδου Sterneck.

5.1.2 Σχεδιασμός παρατηρήσεων

Ο σχεδιασμός των παρατηρήσεων αφορά κυρίως την επιλογή των άστρων που πρόκειται να παρατηρηθούν και μέσω αυτών να προσδιοριστεί το αστρονομικό πλάτος (Φ) του σημείου παρατήρησης.

Για την επιλογή των άστρων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό **Observer** v. 2 [Κακολύρης Δ., 2006]. Αυτό επιλέγει, με βέλτιστο τρόπο, ζεύγη άστρων απ' τον κατάλογο Tycho2, με βάση τον τόπο και το χρόνο των παρατηρήσεων και παραμέτρους σχετικές με το εύρος των ζενιθίων γωνιών, τον επιθυμητό χρόνο παρατήρησης και το επιθυμητό μέγεθος κάθε άστρου κλπ.

Η έξοδος του προγράμματος δίνει έναν πλήρη πίνακα πρόβλεψης των παρατηρήσεων, στον οποίο περιλαμβάνονται, μεταξύ άλλων, για κάθε άστρο:

- Η θέση, αν δηλαδή είναι βόρειο (N) ή νότιο (S).
- Το όνομα.
- Το μέγεθος (magnitude).
- Η απόκλιση (δ), που χρειάζεται κατόπιν για τον υπολογισμό του πλάτους (Φ).
- Ο χρόνος μεσουράνησης με ακρίβεια 1 δευτερόλεπτο χρόνου.
- Η ζενίθια απόσταση στην οποία θα παρατηρηθεί το άστρο κατά τη μεσουράνησή του.
- Οι αναμενόμενες οριζόντιες συντεταγμένες του άστρου (αναγνώσεις του οργάνου) τη στιγμή της έναρξης της παρατήρησης.

Το τελευταίο στοιχείο είναι απαραίτητο για την αναγνώριση του άστρου.

Τα στοιχεία του σχεδιασμού των παρατηρήσεων καταγράφονται σε ειδικό έντυπο (Πίνακας 5.1), που είναι απαραίτητο κατά τη διάρκεια των μετρήσεων.

ΤΟΠΟΣ: ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ - ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 11/05/09 Φ = 37° 58' 30" - Λ = 23° 46' 38"											
Α/Α	**Θέση**	**Όνομα TYC**	**m**	**δ***			**Έναρξη**			**Τ (ά.μ.) UTC**	**z (ά.μ.) (grad)**
				°	**'**	**"**	**Τ (UTC)**	**Α (grad)**	**z (grad)**		
1	N	3458-2328-1	4.86	51	30	40.076	19:26:05	3.31948	15.06179	19:30:34	15.03609
2	S	1989-3213-1	5.44	24	30	51.214	19:34:04	196.21012	14.97516	19:37:33	14.95239
3	S	1454-0967-1	6.24	18	40	31.007	20:16:11	197.25893	21.45447	20:19:37	21.43824
4	S	2002-1055-1	6.02	25	39	12.275	20:48:32	194.72957	13.72777	20:53:01	13.68698

* Την εποχή των παρατηρήσεων

Πίνακας 5.1: Πρόγραμμα παρατήρησης άστρων

Στο στάδιο του σχεδιασμού πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα παρακάτω:

- Επιλέγεται περίπου ίδιος αριθμός άστρων εκατέρωθεν του ζενίθ και με καλή κατανομή των ζενίθιων γωνιών.

- Γενικά, είναι καλύτερο να επιλέγονται άστρα με μέγεθος μεταξύ 4 και 7. Στην αντίθετη περίπτωση είτε η σκόπευσή τους δεν είναι σημειακή ($m < 4$), είτε είναι εξαιρετικά αμυδρά και καθίσταται δύσκολη η παρατήρησή τους ($m > 7$).

- Δεν επιλέγονται διπλά άστρα γιατί είναι ασαφής η σκόπευσή τους.

- Δεν επιλέγονται άστρα που μεσουρανούν σε ζενίθια απόσταση μικρότερη των 5^g γιατί η φαινόμενη ταχύτητά τους είναι πολύ μεγάλη και δεν επιτρέπει την πλήρη, σε χρόνο και αριθμό σκοπεύσεων, παρατήρησή τους. Επιπλέον, δεν επιλέγονται άστρα που μεσουρανούν σε ζενίθια απόσταση μεγαλύτερη των 30^g γιατί, αντίθετα, η φαινόμενη ταχύτητα τους είναι πολύ μικρή γεγονός που κάνει την παρατήρηση τους κουραστική και χρονοβόρα.

5.1.3 Εξοπλισμός

Για την εκτέλεση της παρατήρησης των άστρων απαιτείται ο ακόλουθος εξοπλισμός:

- Γεωδαιτικός σταθμός (Total Station).

- Ψηφιακό θερμόμετρο και βαρόμετρο.

Οι σύγχρονοι γεωδαιτικοί σταθμοί (total stations), που έχουν δυνατότητα για αυτόματη ψηφιακή ανάγνωση και καταγραφή των γωνιών, επιτρέπουν τη λήψη μεγάλου πλήθους παρατηρήσεων κάθε άστρου γύρω από τη μεσημβρινή του διάβαση. Με τον τρόπο αυτό οι μετρήσεις είναι απαλλαγμένες από χονδροειδή σφάλματα αναγνώσεων - καταγραφής ενώ παράλληλα έχει μειωθεί σημαντικά ο χρόνος παραμονής στο σημείο παρατήρησης. Θεωρείται δεδομένο ότι, πιθανά συστηματικά σφάλματα του οργάνου, έχουν εντοπιστεί και εξαλειφθεί κατά τον εργαστηριακό του έλεγχο.

Για την εκτέλεση των μετρήσεων χρησιμοποιείται ο ολοκληρωμένος γεωδαιτικός σταθμός **TDM 5005** της εταιρείας Leica (Εικόνα 5.1). Ο σταθμός αυτός έχει μερικά αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά:

- Η απόδοσή του στις γωνίες είναι 0.1^{cc} και η ακρίβειά του $\pm\ 0.5^{cc}$.

- Επιτρέπει την ψηφιακή μέτρηση και καταγραφή γωνιών, μηκών και χρόνου σε ειδική καταγραφική μονάδα, ενώ συνδέεται με ηλεκτρονικό υπολογιστή με τη βοήθεια εξόδου RS232. Με τον τρόπο αυτό υπάρχει η δυνατότητα αμφίδρομης επικοινωνίας και μεταφοράς των δεδομένων από το όργανο στον ηλεκτρονικό υπολογιστή αλλά και αντίστροφα η μεταφορά και εγκατάσταση λογισμικού από τον υπολογιστή στο όργανο.

- Έχει δυνατότητα ηλεκτρονικής οριζοντίωσης και αυτόματης διόρθωσης των τιμών των μετρούμενων γωνιακών μεγεθών, αν υπάρχει σφάλμα.

- Οι κοχλίες του είναι ατέρμονες, χωρίς πάκτωση οριζοντίου και κατακόρυφου δίσκου.

- Διαθέτει ανεξάρτητο πηδάλιο, πάνω στο οποίο και δίπλα στους μικροκινητήριους κοχλίες οριζόντιας και κατακόρυφης κίνησης, διαθέτει ειδικό πλήκτρο (trigger key), με τη βοήθεια του οποίου ενεργοποιείται η εντολή καταγραφής των μετρήσεων.

- Το τηλεσκόπιο του έχει μεγέθυνση x42 και στο οπτικό του πεδίο υπάρχουν τέσσερις ομόκεντροι κύκλοι οι οποίοι διακόπτονται από σταυρόνημα.

- Ο φωτισμός τόσο του τηλεσκοπίου όσο και της οθόνης του είναι ρυθμιζόμενος με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η παρατήρηση και κατά τη διάρκεια της νύχτας.

- Υπάρχει η δυνατότητα προσθήκης αγκωνοειδούς πρίσματος, απαραίτητου για τη διαδικασία σκόπευσης σε μικρές ζενίθιες γωνίες.

Χρησιμοποιείται, τέλος, και φορητός ψηφιακός καταγραφικός σταθμός μετεωρολογικών δεδομένων της εταιρείας Ahlborn, που δίνει τιμές της ατμοσφαιρικής πίεσης και της θερμοκρασίας (Εικόνα 5.2).

Εικόνα 5.1: TDM 5005

Εικόνα 5.2

5.1.4 Διαδικασία εκτέλεσης μετρήσεων

Για τη διενέργεια των μετρήσεων ο γεωδαιτικός σταθμός τοποθετείται στο σημείο παρατήρησης και αφού αποκατασταθούν οι συνθήκες λειτουργίας του, προσανατολίζεται στο μεσημβρινό του τόπου.

5.1.4.1 Προσανατολισμός γεωδαιτικού σταθμού

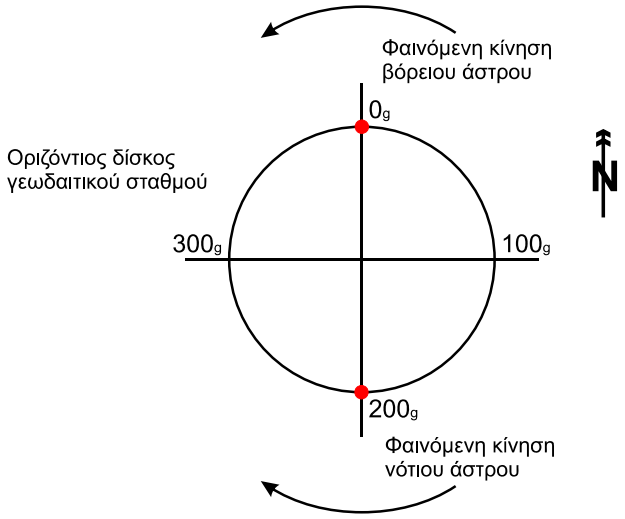
Ο προσανατολισμός του γεωδαιτικού σταθμού γίνεται με τη βοήθεια του Πολικού. Ο αρχικός προσανατολισμός γίνεται με σκόπευση του Πολικού αστέρα κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία έχει προ-υπολογιστεί το αζιμούθιο του Πολικού. Τότε τίθεται στον οριζόντιο δίσκο του οργάνου η ανάγνωση μηδέν, στρέφεται το όργανο σε γωνία τόση όση είναι το αζιμούθιο του Πολικού αλλά με αντίθετο πρόσημο και εισάγεται πάλι η ανάγνωση μηδέν στον οριζόντιο δίσκο. Έτσι, ο γεωδαιτικός σταθμός είναι προσανατολισμένος στο μεσημβρινό του τόπου με μια ακρίβεια περίπου 10^{cc} (3"), η οποία είναι αρκετή για τη διαδικασία παρατήρησης των άστρων του προγράμματος. Επισημαίνεται ότι, η αβεβαιότητα στη σκόπευση του Πολικού δεν είναι μεγάλη, παρά το μεγάλο μέγεθός του (m = 2), εξαιτίας της θέσης του που συνεπάγεται τη μικρή φαινόμενη ταχύτητά του (για τόπους του Βορείου ημισφαιρίου με μικρά και μεσαία πλάτη).

5.1.4.2 Αναγνώριση άστρου

Αν το άστρο που πρόκειται να παρατηρηθεί είναι βόρειο (N), στρέφεται ο γεωδαιτικός σταθμός προς Βορρά και τοποθετείται στον κατακόρυφο κύκλο του η ένδειξη της ζενίθιας απόστασης όπως έχει υπολογιστεί κατά την επιλογή του άστρου (Πίνακας 5.1). Ακολούθως, στον οριζόντιο κύκλο αναγνώσεων τοποθετείται η αντίστοιχη ένδειξη. Η διαδικασία αυτή πρέπει να πραγματοποιηθεί σε εύλογο χρονικό διάστημα (4 min έως 5 min πριν το χρόνο μεσουράνησης). Στο οπτικό πεδίο του τηλεσκοπίου και κοντά στο σταυρόνημα, βρίσκεται το άστρο που πρόκειται να παρατηρηθεί και τότε γίνεται η έναρξη της σκόπευσής του.

Αν το άστρο είναι νότιο (S), στρέφεται ο γεωδαιτικός σταθμός προς Νότο και τοποθετούνται οι αντίστοιχες ενδείξεις του οριζόντιου και κατακόρυφου κύκλου, όπως υπολογίστηκαν στο στάδιο της προετοιμασίας των παρατηρήσεων.

Είναι γνωστό ότι, η φαινόμενη κίνηση των άστρων ακολουθεί τη φορά των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα) για νότια άστρα ενώ την αντίθετη (αριστερόστροφα) για βόρεια άστρα (Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1: Φαινόμενη κίνηση άστρων

Αν κατά την αναγνώριση ενός άστρου, στο οπτικό πεδίο του γεωδαιτικού σταθμού, εμφανίζονται και άλλα άστρα ιδίου μεγέθους, τότε υπάρχει πιθανότητα λανθασμένης σκόπευσης. Η πιθανότητα εμφάνισης τέτοιων περιπτώσεων ελαχιστοποιείται, αν επισημαίνονται και αποφεύγονται κατά την επιλογή των άστρων στο στάδιο του σχεδιασμού.

5.1.4.3 Παρατήρηση άστρου

Η παρατήρηση του άστρου γίνεται ακολουθώντας την κίνησή του με τους μικροκινητήριους κοχλίες του γεωδαιτικού σταθμού. Κάθε φορά που ο παρατηρητής κρίνει (αξιολογεί) ότι το άστρο βρίσκεται στο κέντρο του σταυρονήματος, ενεργοποιεί το πλήκτρο καταγραφής (trigger key), ενώ δεν διακόπτει την οπτική παρακολούθηση του άστρου. Επισημαίνεται ότι, ο ρυθμός με τον οποίο ο παρατηρητής εκτελεί τις μετρήσεις πρέπει να είναι όσο το δυνατόν σταθερός, δηλαδή οι διαδοχικές μετρήσεις να ισαπέχουν χρονικά. Τέλος, σε κάθε παρατήρηση αντιστοιχεί ο αύξων αριθμός της καταγραφής, η οριζόντια και κατακόρυφη γωνία, ενώ για κάθε άστρο καταγράφεται η ατμοσφαιρική πίεση και η θερμοκρασία, όπως δίνονται από τον ψηφιακό μετεωρολογικό σταθμό.

Ο χρόνος, που απαιτείται για την ολοκλήρωση της παρατήρησης κάθε άστρου, είναι κατά μέσο όρο 8 - 10 min. Η παρατήρηση των άστρων είναι αποδοτική και λιγότερο κουραστική, αν προβλέπεται η προσωρινή διακοπή τους για χρονικό διάστημα 10 - 15 min μετά από παρατήρηση περίπου 10 άστρων. Το χρονικό αυτό διάστημα είναι απαραίτητο για ξεκούραση, αφού η νυχτερινή παρατήρηση είναι ιδιαίτερα επίπονη και απαιτεί την πλήρη ηρεμία, προσοχή και αυτοσυγκέντρωση του παρατηρητή, για την επίτευξη επιτυχών μετρήσεων. Γίνεται σαφές ότι, δεν μπορεί να συγκριθεί η νυχτερινή παρατήρηση ενός άστρου (κινούμενος στόχος στο άπειρο) με την επίγεια παρατήρηση στη διάρκεια της ημέρας [Λάμπρου Ε., 2003].

5.1.5 Επεξεργασία μετρήσεων

Η επεξεργασία των καταγεγραμμένων μετρήσεων κάθε άστρου αποβλέπει στον προσδιορισμό της ελάχιστης τιμής της κατακόρυφης γωνίας, που είναι η τιμή τη στιγμή της μεσουράνησης. Ο προσδιορισμός αυτός προκύπτει, με εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, από προσαρμογή ενός συμμετρικού πολυωνύμου $4^{ου}$ βαθμού $z = g(A)$ στις πλεονάζουσες παρατηρήσεις (ζεύγη οριζόντια - κατακόρυφη γωνία), σύμφωνα με την ακόλουθη θεωρητική ανάλυση (Γράφημα 5.1).

Από το τρίγωνο θέσης του άστρου, με εφαρμογή του νόμου συνημιτόνων, προκύπτει:

$$\sin\delta = \cos z \cdot \sin\Phi + \sin z \cdot \cos\Phi \cdot \cos A \qquad (5.1)$$

Σχηματίζοντας το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης της παραπάνω σχέσης (δ, Φ σταθερά), έχουμε

$$0 = -\sin z \cdot \sin\Phi \cdot \delta z + \cos z \cdot \cos\Phi \cdot \cos A \cdot \delta z - \sin z \cdot \cos\Phi \cdot \sin A \cdot \delta A \qquad (5.2)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση 5.2 στην περιοχή της άνω μεσουράνησης, βόρεια του ζενίθ και χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις

$$\cos A \approx 1, \qquad \delta A = A - A_o, \qquad \sin A \approx \sin(\delta A) \approx (\delta A - \frac{\delta A^3}{3!})$$

προκύπτει:

$$(\cos z_o \cdot \cos\Phi - \sin z \cdot \sin\Phi) \cdot \delta z \approx \sin z_o \cdot \cos\Phi \cdot (\delta A^2 - \frac{\delta A^4}{3!}) \tag{5.3}$$

Όμως $\cos z_o \cdot \cos\Phi - \sin z \cdot \sin\Phi = \cos(z_o + \Phi) = \cos\delta$ επομένως:

$$\delta z \approx \frac{\sin z_o \cdot \cos\Phi}{\cos\delta} \cdot (\delta A^2 - \frac{\delta A^4}{3!}) \tag{5.4}$$

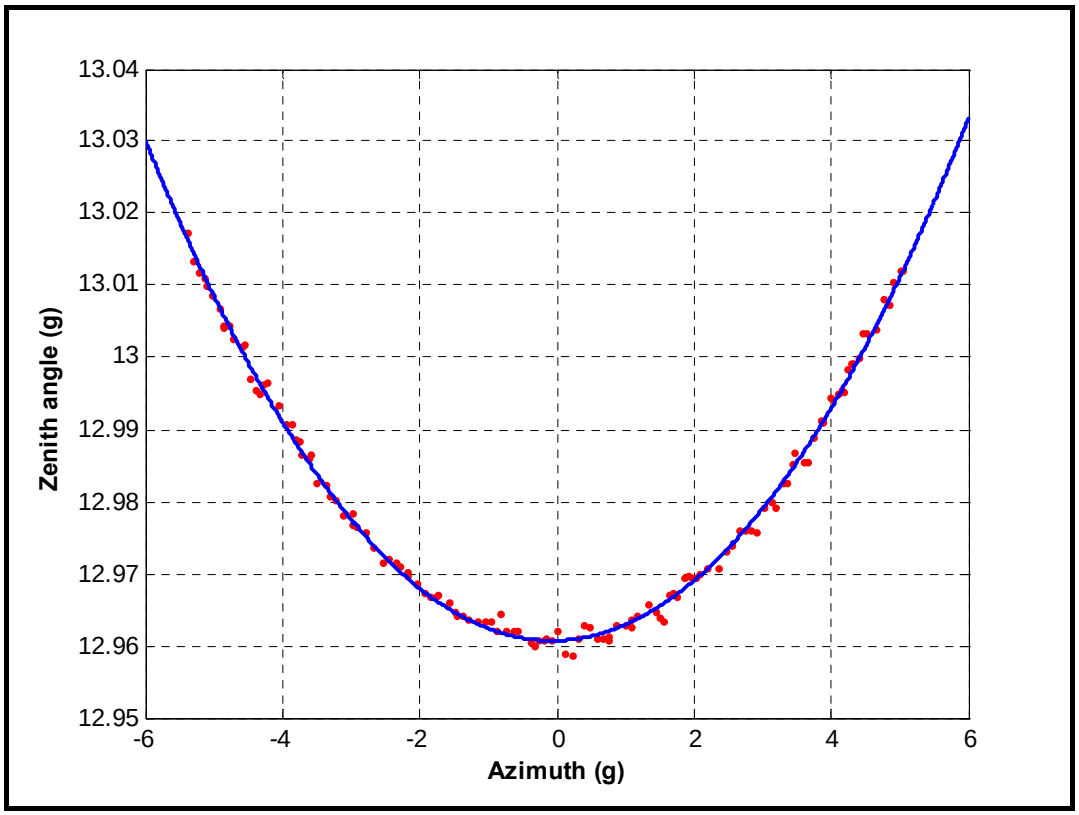
Τελικά

$$z = z_o + \delta z \approx z_o + C_1 \cdot (A - A_o)^2 - C_2 \cdot (A - A_o)^4 \tag{5.5}$$

Αντίστοιχη ανάλυση ακολουθείται και για την άνω μεσουράνηση, νότια του ζενίθ, οπότε προκύπτει:

$$z = z_o + \delta z \approx z_o - C_1 \cdot (A - A_o)^2 + C_2 \cdot (A - A_o)^4 \tag{5.6}$$

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζεται η προσαρμογή του πολυωνύμου 4^{ου} βαθμού σε μια ενδεικτική σειρά παρατηρήσεων (αζιμουθίου - ζενίθιας απόστασης).



Γράφημα 5.1: Προσαρμογή πολυωνύμου 4^{ου} βαθμού στα μετρημένα ζεύγη (A, z)

Αναφέρεται ότι, οι σκοπεύσεις που γίνονται σε κάθε άστρο είναι της τάξης των 100. Συνεπώς, με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία προσδιορισμού της ζενίθιας απόστασης (z_o), μειώνονται δραστικά τα τυχαία σφάλματα της παρατήρησης κάθε μεσουράνησης. Επιπρόσθετα, ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα που οφείλονται στην αβεβαιότητα διχοτόμησης ή σκόπευσης του κέντρου του άστρου και εξαρτώνται από τον τρόπο αντίληψης του παρατηρητή και τη διακριτική ικανότητα του ματιού του (προσωπικά σφάλματα).

Ο υπολογισμός της ζενίθιας απόστασης z_o και του σφάλματός της, πραγματοποιείται με το πρόγραμμα MATLAB (Fourth_degree_polynomial.m), που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εφαρμογής (Παράρτημα Β). Τα στοιχεία εισόδου του προγράμματος περιλαμβάνονται σε ένα αρχείο με το όνομα Points.txt, που περιέχει, σε κάθε γραμμή του, τον αύξοντα αριθμό, την οριζόντια και την κατακόρυφη γωνία σκόπευσης του άστρου. Υπολογίζοντας την τιμή της ζενίθιας απόστασης και των παραμέτρων A_o, C_1, C_2, η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τη σύγκλιση του a posteriori τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_o$). Ακολουθεί ο έλεγχος και η απόρριψη των άστοχων παρατηρήσεων, με κριτήριο αν το υπόλοιπο υ της παρατήρησης βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[-3\hat{\sigma}_o, +3\hat{\sigma}_o]$ και επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Έτσι, τα στοιχεία εξόδου του προγράμματος είναι ο αριθμός των μετρήσεων, παραμέτρων και επαναλήψεων, η τιμή της ζενίθιας απόστασης και των παραμέτρων με τον πίνακα μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητάς τους (τυπικά σφάλματα), καθώς και το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_o$).

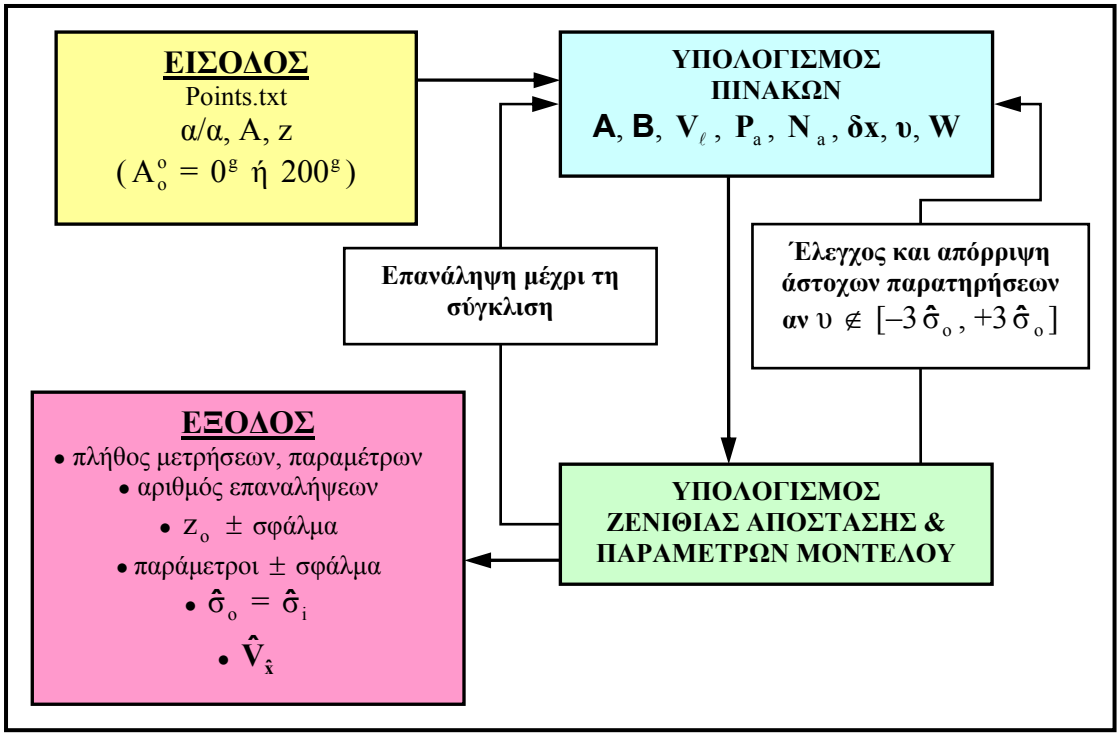
Ο τρόπος με τον οποίο προσανατολίζεται ο γεωδαιτικός σταθμός συνεπάγεται την επίδραση ενός σταθερού συστηματικού σφάλματος. Συγκεκριμένα, από μια σειρά παρατηρήσεων, η τιμή της παραμέτρου A_o αναμένεται σταθερή και κοντά στο 0^g ή 200^g. Η διαφορά θα εκφράζει την οριζόντια γωνία του μεσημβρινού του τόπου.

Επισημαίνεται ότι, οι γωνίες μετρώνται από το όργανο με την ίδια ακρίβεια, τόσο οι οριζόντιες και κατακόρυφες, όσο και για κάθε σκόπευση. Συνεπώς, οι παρατηρήσεις είναι ισοβαρείς και δεν απαιτείται πίνακας βαρών **P**. Η επίλυση ακολουθεί τη γνωστή διαδικασία χρησιμοποιώντας τους τύπους του κεφαλαίου 3 (§ 3.3) όμως, στην προκειμένη περίπτωση, το $\hat{\sigma}_o$ εκφράζει το a posteriori τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης διότι:

$$\hat{\mathbf{V}}_\ell = \hat{\sigma}_o^2\, \mathbf{P}^{-1} = \hat{\sigma}_o^2\, \mathbf{I} \tag{5.7}$$

Και στην περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει στατιστικός έλεγχος εάν υπάρχει αρχική εκτίμηση για τη μεταβλητότητα των μετρήσεων.

Η διάρθρωση του προγράμματος προσαρμογής, παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: Βασικές ενέργειες του προγράμματος προσαρμογής

Καταλήγοντας τονίζεται ότι, είναι απαραίτητη η αυστηρή τήρηση των προδιαγραφών της θέσης, του μεγέθους και της διαδικασίας παρατήρησης, για να οδηγηθεί η μεθοδολογία σε ακριβή και ορθά αποτελέσματα, σύμφωνα με την ανάλυση.

5.2 Ανάλυση δεδομένων - Υπολογισμοί

Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας χρησιμοποιήθηκαν τρεις σειρές μετρήσεων. Οι σειρές αυτές αναφέρονται σε δύο σημεία της Αττικής και περιλαμβάνουν μετρήσεις στα παρακάτω σημεία:

- Το αστρονομικό βάθρο Β στο Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου ($1^η$ ΣΕΙΡΑ).
- Το δυτικότερο βάθρο στο δώμα του κτηρίου Λαμπαδαρίου, στην Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου ($2^η$ και $3^η$ ΣΕΙΡΑ).

Σημειώνεται ότι, για τη $2^η$ και $3^η$ σειρά, οι πίνακες πρόβλεψης των παρατηρήσεων και τα γραφήματα προσαρμογής του πολυωνύμου στις καταγεγραμμένες μετρήσεις κάθε άστρου, περιλαμβάνονται στο Παράρτημα (Παράρτημα Γ).

5.2.1 1η ΣΕΙΡΑ - ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02

Στις 18 Μαΐου 2002 πραγματοποιήθηκε μια σειρά μετρήσεων 10 ζευγών άστρων για τον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους Φ [Λάμπρου Ε., 2003].

Ο πίνακας των δεδομένων μεσουράνησης των άστρων, που είναι η βάση για τον υπολογισμό του πλάτους με τις μεθόδους Sterneck και αυτοβαθμονόμησης, παρουσιάζεται παρακάτω (Πίνακας 5.2).

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02							
Α/Α	**ΘΕΣΗ**	**Όνομα**	**Απόκλιση δ (ο)**	**Ζενίθια απόσταση (grad)**	**σ z_o (grad)**	**p (mbar)**	**θ (°C)**
1	N	66UMa	56.59060	20.56277	0.00042	965.70	16.83
2	S	5Com	20.53021	19.49334	0.00044	965.70	16.83
3	S	11Com	17.78176	22.54710	0.00042	965.70	16.83
4	N	74UMa	58.39805	22.57123	0.00039	965.70	16.83
5	N	76UMa	62.70608	27.35593	0.00045	965.70	16.83
6	S	29Com	14.11125	26.62368	0.00044	965.70	16.83
7	S	36Com	17.39844	22.97252	0.00039	965.70	16.83
8	N	Tyc4163-436-1	62.03363	26.60918	0.00039	965.70	16.83
9	N	21CVn	49.67249	12.87892	0.00044	965.70	16.83
10	S	Tyc1997-52-1	24.33631	15.26632	0.00047	965.70	16.83
11	S	2Boo	22.48542	17.32143	0.00042	965.70	16.83
12	N	86UMa	53.72010	17.37414	0.00045	965.70	16.83
13	N	Tyc3471-1252-1	50.96205	14.30936	0.00044	965.70	16.83
14	S	12Boo	25.08185	14.43619	0.00043	965.70	16.83
15	N	Tyc3860-1669-1	54.01514	17.70040	0.00042	965.70	16.83
16	S	Tyc2016-334-1	23.90342	15.74483	0.00044	965.50	17.20
17	N	Tyc4181-1850-1	60.66405	25.08644	0.00038	965.50	17.20
18	S	Tau5 Ser	16.11110	24.40098	0.00049	965.50	17.20
19	S	δCrB	26.06090	13.34903	0.00043	965.50	17.20
20	N	Tyc3493-163-1	49.87314	13.10020	0.00039	965.50	17.20

Πηγή: Ε. Λάμπρου

Πίνακας 5.2: Δεδομένα παρατηρήσεων 18/05/02

5.2.1.1 1η ΣΕΙΡΑ - Μέθοδος Sterneck

Με εφαρμογή του τύπου 1.15, για καθένα από τα παραπάνω ζεύγη άστρων, προσδιορίζεται μια τιμή του πλάτους ($\overline{\Phi}$). Η τιμή αυτή είναι απαλλαγμένη, ως ένα βαθμό, από το συστηματικό σφάλμα της επίδρασης της διάθλασης (αλλαγή προσήμου εκατέρωθεν του ζενίθ). Στη συνέχεια, προσπαθώντας να δοθεί συγκεκριμένη πληροφορία για το πλάτος, υπολογίζεται η μέση τιμή από όλα τα ζεύγη. Δηλαδή, θεωρώντας τους προσδιορισμούς ισοβαρείς, εκτός του μέσου όρου, υπολογίζεται και το a posteriori τυπικό του σφάλμα:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Phi}} = \sqrt{\frac{[uu]}{n \cdot (n-1)}} \tag{5.8}$$

Στην περίπτωση που οι προσδιορισμοί θεωρηθούν ανισοβαρείς, υπολογίζεται ο γενικευμένος μέσος όρος και το τυπικό του σφάλμα από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\hat{\Phi} = \frac{[P\overline{\Phi}]}{[P]} \tag{5.9}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Phi}} = \sqrt{\frac{[Puu]}{[P]\cdot(n-1)}} \tag{5.10}$$

Η αντιμετώπιση των προσδιορισμών ως ανισοβαρών, έχει νόημα, στην περίπτωση αυτή, διότι κάθε ζεύγος ικανοποιεί σε διαφορετικό βαθμό την απαίτηση συμμετρίας. Έτσι, χρησιμοποιούνται ως βάρη αριθμοί αντιστρόφως ανάλογοι των τετραγώνων των υπολοίπων (uu).

Συνολικά, τα αποτελέσματα περιλαμβάνονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 5.3).

Α/Α	**ΘΕΣΗ**	**Απόκλιση δ (ο)**	**Ζενίθια απόσταση (ο)**	**Φ**	$\overline{\Phi}$	**uu (")**	**P**
1	N	56.59060	18.50649	38° 5' 2.771"	38° 4' 44.967"	0.034	29.32
2	S	20.53021	17.54401	38° 4' 27.163"			
3	S	17.78176	20.29239	38° 4' 26.936"	38° 4' 44.562"	0.049	20.60
4	N	58.39805	20.31411	38° 5' 2.188"			
5	N	62.70608	24.62034	38° 5' 8.668"	38° 4' 44.951"	0.028	35.23
6	S	14.11125	23.96131	38° 4' 21.234"			
7	S	17.39844	20.67527	38° 4' 25.349"	38° 4' 46.328"	2.389	0.42
8	N	62.03363	23.94826	38° 5' 7.307"			
9	N	49.67249	11.59103	38° 4' 53.245"	38° 4' 43.412"	1.878	0.53
10	S	24.33631	13.73969	38° 4' 33.578"			
11	S	22.48542	15.58929	38° 4' 28.945"	38° 4' 44.546"	0.056	17.88
12	N	53.72010	15.63673	38° 5' 0.146"			
13	N	50.96205	12.87842	38° 5' 1.054"	38° 4' 44.481"	0.091	11.01
14	S	25.08185	12.99257	38° 4' 27.908"			
15	N	54.01514	15.93036	38° 5' 5.201"	38° 4' 45.372"	0.348	2.88
16	S	23.90342	14.17035	38° 4' 25.543"			
17	N	60.66405	22.57780	38° 5' 10.514"	38° 4' 44.821"	0.002	661.53
18	S	16.11110	21.96088	38° 4' 19.128"			
19	S	26.06090	12.01413	38° 4' 30.112"	38° 4' 44.384"	0.159	6.30
20	N	49.87314	11.79018	38° 4' 58.656"			
				Μέση τιμή:	**38° 4' 44.782"**	**(± 0.236")**	
				Γενικευμένος μέσος όρος:	**38° 4' 44.813"**	**(± 0.095")**	

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα μεθόδου Sterneck 18/05/02

Πρέπει να σημειωθεί ότι, κατά την επεξεργασία των παρατηρήσεων στον πίνακα 5.3 χρησιμοποιήθηκαν οι παρατηρούμενες τιμές των ζενιθίων γωνιών τη στιγμή της άνω μεσουράνησης.

Μια βελτιωμένη διαδικασία επεξεργασίας περιλαμβάνει την εκτίμηση της αστρονομικής διάθλασης στην ζενίθια γωνία κάθε άστρου, που έχει σημασία γιατί δεν μπορεί να εξασφαλισθεί απόλυτη συμμετρία μεταξύ των άστρων κάθε ζεύγους. Έτσι, χρησιμοποιώντας τον τύπο 2.6 και το μοντέλο I, προκύπτουν οι διορθωμένες τιμές των ζενιθίων γωνιών (z_o + R) και ακολούθως υπολογίζεται, με βάση αυτές, η τιμή του πλάτους (Πίνακας 5.4).

Α/Α	**ΘΕΣΗ**	**Απόκλιση δ (ο)**	**z_0 + R (ο)**	**Φ**	**$\overline{\Phi}$**	**uu (")**	**P**
1	N	56.59060	18.51153	38° 4' 44.636"	38° 4' 44.464"	0.0021	483.49
2	S	20.53021	17.54876	38° 4' 44.291"			
3	S	17.78176	20.29795	38° 4' 46.969"	38° 4' 44.550"	0.0017	591.84
4	N	58.39805	20.31968	38° 4' 42.131"			
5	N	62.70608	24.62723	38° 4' 43.840"	38° 4' 44.576"	0.0044	225.97
6	S	14.11125	23.96800	38° 4' 45.312"			
7	S	17.39844	20.68095	38° 4' 45.794"	38° 4' 44.519"	0.0001	10413.14
8	N	62.03363	23.95495	38° 4' 43.244"			
9	N	49.67249	11.59411	38° 4' 42.133"	38° 4' 44.479"	0.0009	1103.20
10	S	24.33631	13.74337	38° 4' 46.825"			
11	S	22.48542	15.59349	38° 4' 44.061"	38° 4' 44.522"	0.0002	6505.81
12	N	53.72010	15.64094	38° 4' 44.982"			
13	N	50.96205	12.88186	38° 4' 48.667"	38° 4' 44.538"	0.0008	1223.16
14	S	25.08185	12.99604	38° 4' 40.409"			
15	N	54.01514	15.93466	38° 4' 49.737"	38° 4' 44.469"	0.0016	633.66
16	S	23.90342	14.17414	38° 4' 39.202"			
17	N	60.66405	22.58404	38° 4' 48.020"	38° 4' 44.481"	0.0008	1265.97
18	S	16.11110	21.96694	38° 4' 40.942"			
19	S	26.06090	12.01732	38° 4' 41.624"	38° 4' 44.494"	0.0002	4443.52
20	N	49.87314	11.79332	38° 4' 47.364"			
				Μέση τιμή:	**38° 4' 44.509"**	**(± 0.012")**	
				Γενικευμένος μέσος όρος:	**38° 4' 44.512"**	**(± 0.007")**	

Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα μεθόδου Sterneck με χρήση μοντέλου 18/05/02

Προφανώς, με τη χρήση του μοντέλου τα αποτελέσματα βελτιώνονται, αφού εξαλείφεται ένα μεγάλο μέρος συστηματικού σφάλματος διάθλασης.

Υπενθυμίζεται ότι οι τύποι 5.8 και 5.10 για την εκτίμηση του σφάλματος χρησιμοποιούνται καταχρηστικά, αφού οι τιμές του πλάτους από κάθε ζεύγος δεν είναι επαναλαμβανόμενες, άμεσες μετρήσεις.

Για τη σωστή εκτίμηση του σφάλματος πρέπει να χρησιμοποιηθεί η έννοια της μετάδοσης σφαλμάτων, με αναφορά στα τυχαία σφάλματα των μετρήσεων. Έτσι αποκτά ενδιαφέρον ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης σ_{Φ_i} της ποσότητας Φ_i μέσω των σχέσεων 1.12 και 1.13.

Από το νόμο μετάδοσης σφαλμάτων προκύπτει ότι, αν οι τυχαίες μεταβλητές δ, z_o είναι ανεξάρτητες (ασυσχέτιστες), τότε η τυπική απόκλιση του αστρονομικού πλάτους Φ_i δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_{\Phi_i} = \sqrt{\sigma_\delta^2 + \sigma_{z_o}^2} \tag{5.11}$$

Αγνοώντας τον όρο σ_δ^2, στην παραπάνω σχέση, προκύπτει $\sigma_{\Phi_i} = \sigma_{z_o}$. Επιπλέον, αν τα τυχαία σφάλματα σ_{Φ_N}, σ_{Φ_S} που επιδρούν στην τιμή του μέσου όρου είναι στατιστικά ανεξάρτητα και έχουν ίδια τιμή (ισοβαρείς παρατηρήσεις), τότε εύκολα υπολογίζεται το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής ($\overline{\Phi}$) από κάθε ζεύγος:

$$\sigma_{\overline{\Phi}} = \frac{\sigma_{\Phi_i}}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_{z_o}}{\sqrt{2}} \tag{5.12}$$

Τέλος, για n ζεύγη άστρων το σφάλμα του προσδιορισμού είναι:

$$\sigma_{\hat{\Phi}} = \frac{\sigma_{\Phi_i}}{\sqrt{2n}} = \frac{\sigma_{z_o}}{\sqrt{2n}} \tag{5.13}$$

Εξετάζοντας τις τιμές των τυπικών σφαλμάτων των ζενιθίων γωνιών (Πίνακας 5.2), παρατηρούμε ότι κυμαίνονται μεταξύ 1".2 και 1".6. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή 1".4, από τον τύπο 5.12 προκύπτει $\hat{\sigma}_{\overline{\Phi}}$ = 1". Επιπλέον, επειδή χρησιμοποιήθηκαν 10 ζεύγη για τον υπολογισμό του $\hat{\Phi}$, από τον τύπο 5.13 προκύπτει $\hat{\sigma}_{\hat{\Phi}}$ = 0".31.

5.2.1.2 1η ΣΕΙΡΑ - Αυτοβαθμονόμηση

Από τα δεδομένα του πίνακα 5.2 προσδιορίζεται η τιμή του πλάτους μέσω της διαδικασίας αυτοβαθμονόμησης και τη χρήση του μοντέλου διάθλασης Ι. Σημειώνεται ότι, για τις αβεβαιότητες των αποκλίσεων έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή σ_δ = 0".01. Και αυτό γιατί, είναι λογικό να θεωρείται ρεαλιστική προσέγγιση μια τάξη μεγέθους χειρότερη απ' αυτήν του καταλόγου Tycho2, δεδομένου ότι στη διαδικασία προσδιορισμού της φαινόμενης θέσης υπεισέρχονται μοντελοποιήσεις και υπολογισμοί οι οποίοι είναι αναπόφευκτο ότι θα εισαγάγουν κάποιες αβεβαιότητες.

Τα αποτελέσματα της αυτοβαθμονόμησης για την 1η σειρά παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 5.5).

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02		
ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ =	38° 4' 44".565	± 0".643
k =	62".57	± 2".16
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.41321 & -0.09182 \\ -0.09182 & 4.67692 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 2".09	ν = 20, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης Ι - 18/05/02 (ν = 20)

Στο σημείο αυτό πραγματοποιείται ο στατιστικός έλεγχος χ^2 (§ 3.2.3). Δηλαδή ελέγχεται, θεωρώντας επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, αν η αρχική υπόθεση ήταν σωστή, αν δηλαδή το στατιστικό και μαθηματικό μοντέλο που θεωρήθηκε ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης p = 0.99 θα είναι α = 0.01 οπότε:

p_1 = 0.005 και p_2 = 0.995. Ο βαθμός ελευθερίας είναι $\underline{r}$ = 18.

Έτσι, με στοιχεία εισόδου, στον πίνακα της κατανομής χ^2 (Παράρτημα Α), τα p_1, p_2 και το βαθμό ελευθερίας προκύπτει:

$$\chi^2_{0.005,18} = 6.26 \qquad \chi^2_{0.995,18} = 37.16$$

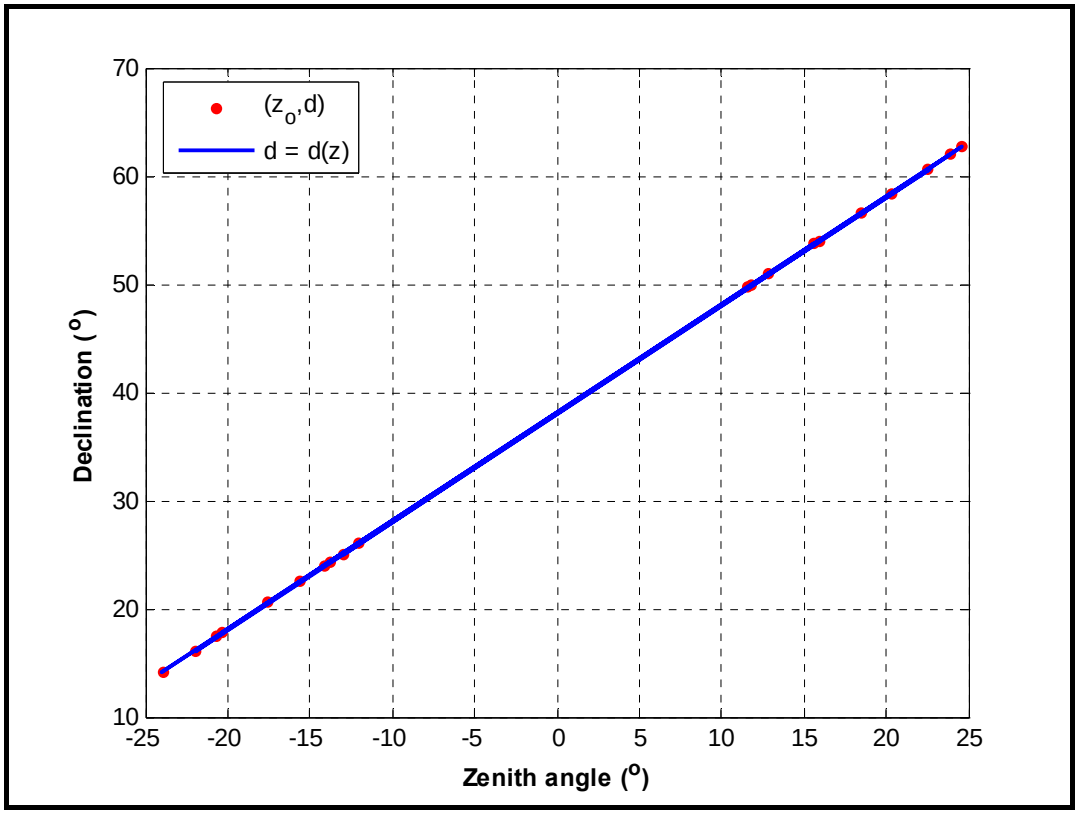
οπότε θα θεωρηθεί η αρχική υπόθεση ως σωστή αν

$$6.26 \le \frac{\underline{r}\,\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \le 37.16 \qquad \text{ή} \qquad 0.35 \le \hat{\sigma}_o^2 \le 2.06$$

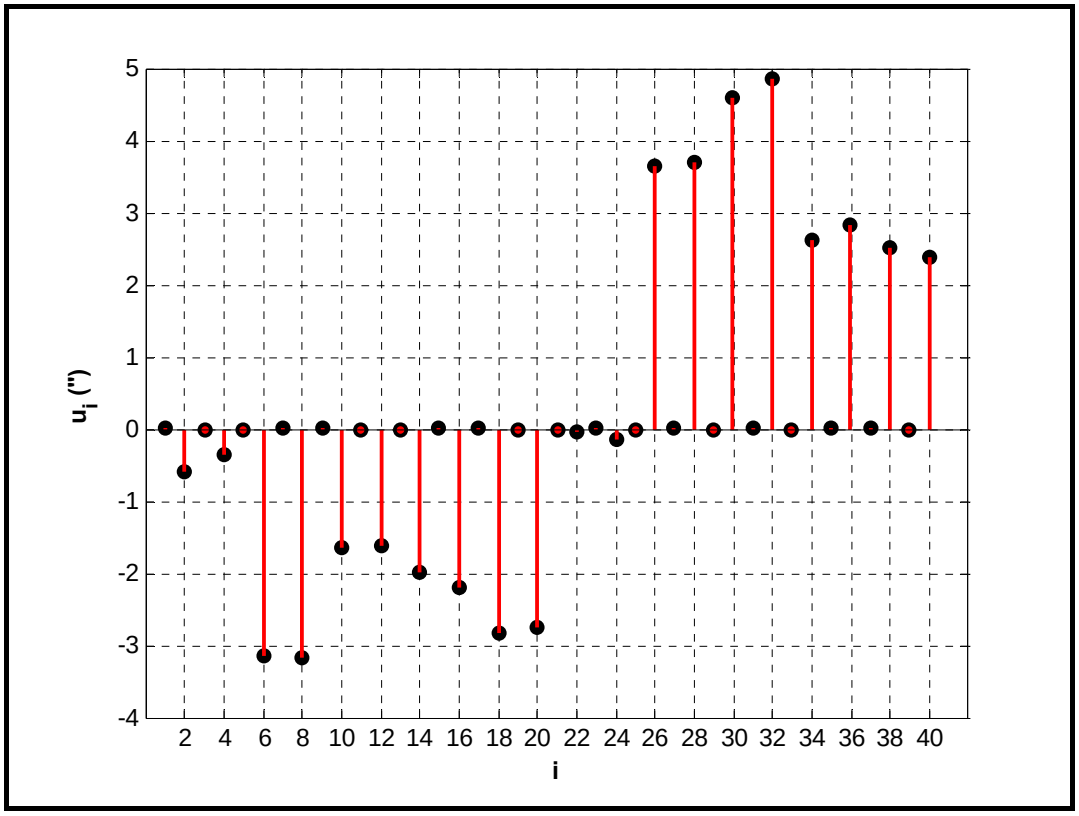
αλλά $\hat{\sigma}_o^2$ = 4.37 που δείχνει πως η αρχική υπόθεση δεν είναι σωστή για το συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Ερευνώντας την αιτία της ασυμφωνίας ελέγχεται αν υπάρχει κάποιο χονδροειδές σφάλμα (λάθος) στις μετρήσεις. Στην ανίχνευση αυτή βοηθά το παρακάτω γράφημα (Γράφημα 5.2), που απεικονίζει τα ζεύγη (z_o, δ) και την ευθεία προσαρμογής. Έτσι, στην περίπτωση που δεν υπάρχουν λάθη, τα σημεία βρίσκονται πολύ κοντά στην ευθεία.

Αυτό όμως που ουσιαστικά βοηθά στην αξιολόγηση μιας διαδικασίας συνόρθωσης είναι, πέραν του $\hat{\sigma}_o$, το διάνυσμα των υπολοίπων **υ** (Γράφημα 5.3).



Γράφημα 5.2: Αυτοβαθμονόμηση 18/05/02

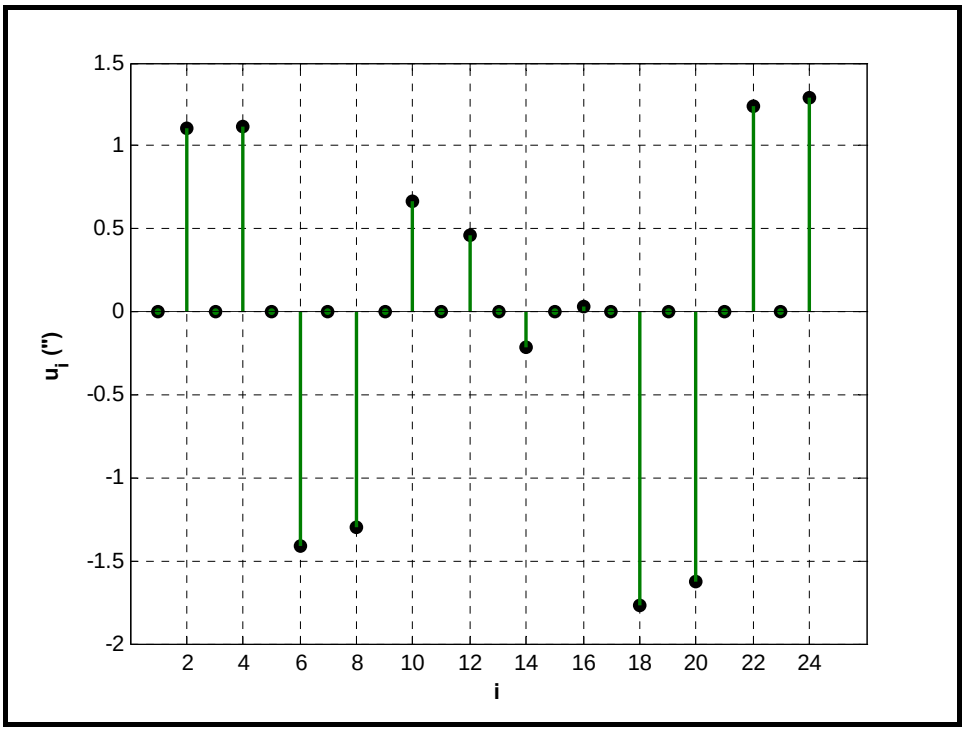


Γράφημα 5.3: Τιμές υπολοίπων υ 18/05/02 (ν = 20)

Εύκολα λοιπόν διαπιστώνεται, από το γράφημα 5.3, η παρουσία συστηματικών σφαλμάτων. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι τα 20 άστρα χωρίζονται σε δύο ομάδες των 12 και 8 διαδοχικών άστρων αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των ομάδων αυτών, παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02		
ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ =	38° 4' 44".495	± 0".356
k =	57".14	± 1".11
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.12677 & -0.01275 \\ -0.01275 & 1.24267 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 0".90	ν = 12, p = 1, 2, 3

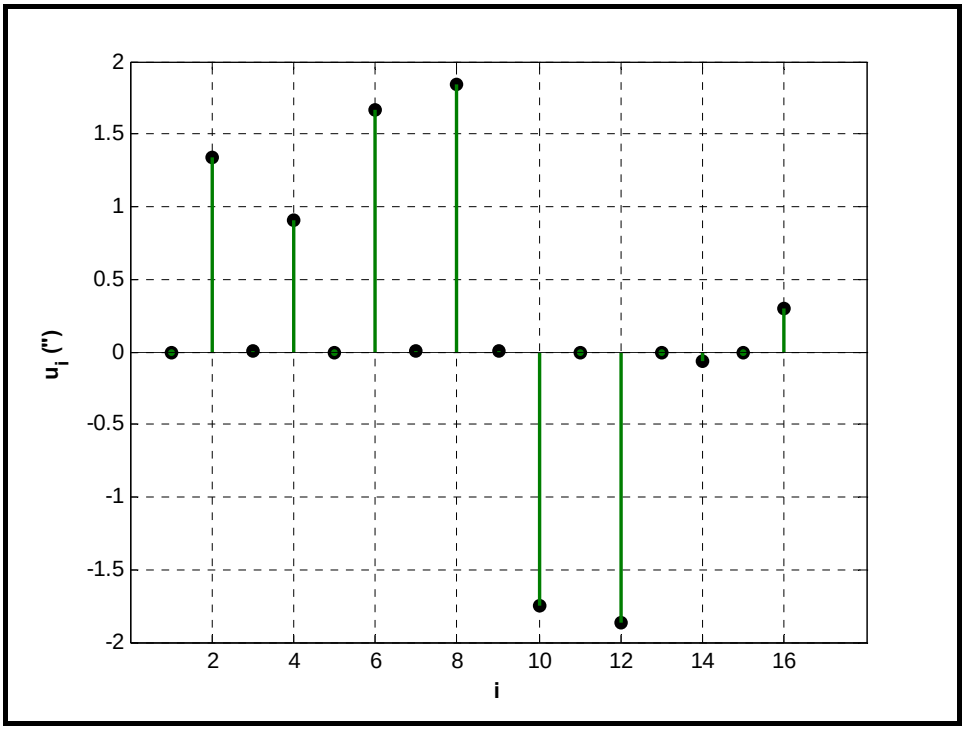
Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης Ι - 18/05/02 (ν = 12)



Γράφημα 5.4: Τιμές υπολοίπων υ 18/05/02 (ν = 12)

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02		
ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ =	38° 4' 44".337	± 0".563
k =	74".91	± 2".16
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.31728 & -0.15735 \\ -0.15735 & 4.67377 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 1".15	ν = 8, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης Ι - 18/05/02 (ν = 8)



Γράφημα 5.5: Τιμές υπολοίπων υ 18/05/02 (ν = 8)

Επαναλαμβάνοντας, λοιπόν, τη διαδικασία του στατιστικού ελέγχου, για τις αρχικές υποθέσεις των δύο ομάδων, με βαθμούς ελευθερίας r = 10 και r = 6 αντίστοιχα και επίπεδο εμπιστοσύνης 99% προκύπτει:

$$\chi^2_{0.005,10} = 2.16 \qquad \chi^2_{0.995,10} = 25.19$$

$$\chi^2_{0.005,6} = 0.68 \qquad \chi^2_{0.995,6} = 18.55$$

δηλαδή $0.22 \leq \hat{\sigma}_o^2 \leq 2.52$ και $0.11 \leq \hat{\sigma}_o^2 \leq 3.09$ αντίστοιχα. Επομένως, γίνονται αποδεκτές οι αρχικές υποθέσεις και των δύο ομάδων, αφού $\hat{\sigma}_o^2 = 0.81$ και $\hat{\sigma}_o^2 = 1.32$ αντίστοιχα.

Συμπερασματικά, από τις τιμές της παραμέτρου k του μοντέλου διάθλασης, έγινε φανερή, με τον πιο σαφή τρόπο, η αιτία της ασυμφωνίας του στατιστικού ελέγχου στην πρώτη επίλυση (ν = 20). Δηλαδή, εξαιτίας της αλλαγής της κατάστασης της ατμόσφαιρας, μετά την παρατήρηση των 12 πρώτων άστρων, ο συντελεστής k μεταβλήθηκε αρκετά. Επομένως, η μέση τιμή του (από τα 20 άστρα) είχε σαν αποτέλεσμα να μην υπολογίζονται σωστά οι αναγωγές των παρατηρούμενων ζενιθίων γωνιών λόγω διάθλασης.

Εξαιτίας των μικρών ζενιθίων γωνιών, επιλέχθηκε το μοντέλο Ι για τη συνόρθωση. Κρίνεται όμως σκόπιμο να εφαρμοστεί και το μοντέλο ΙΙ, οπότε τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02		
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ =	38° 4' 44".701	± 0".611
A =	71".97	± 5".62
B =	-68".46	± 38".16
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.37367 & 0.31733 & -2.90580 \\ & 31.63742 & -200.03507 \\ & & 1456.43943 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o =$	± 1".97	ν = 20, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.8: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης ΙΙ - 18/05/02 (ν = 20)

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02		
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ =	38° 4' 44".473	± 0".378
A =	55".87	± 3".74
B =	8".59	± 23".99
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.14272 & 0.20605 & -1.48639 \\ & 13.97315 & -85.20044 \\ & & 575.58299 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o =$	± 0".94	ν = 12, p = 1, 2

Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης ΙΙ - 18/05/02 (ν = 12)

ΔΙΟΝΥΣΟΣ 18/05/02		
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ =	38° 4' 44".481	± 0".313
A =	84".17	± 2".70
B =	-81".69	± 21".33
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.09824 & 0.04275 & -0.80137 \\ & 7.26585 & -51.55217 \\ & & 455.10034 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o =$	± 0".63	ν = 8, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.10: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης ΙΙ - 18/05/02 (ν = 8)

Όσον αφορά τους στατιστικούς ελέγχους, ισχύουν τα ίδια με την περίπτωση του μοντέλου Ι.

5.2.2 2η ΣΕΙΡΑ - ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 11/05/09

Στις 11 Μαΐου 2009 πραγματοποιήθηκε μια σειρά μετρήσεων 18 άστρων για τον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους Φ (Παράρτημα Γ). Δυστυχώς, από τα 18 άστρα μόνο τα 8 ήταν κατάλληλα για χρήση. Τα αίτια της αποτυχίας, πέραν της απειρίας του παρατηρητή, οφείλονται στην κακή, από πλευράς χρόνου και αριθμού σκοπεύσεων, παρατήρηση των άστρων με μεγάλες ζενίθιες αποστάσεις. Συνεπώς, η παρατήρηση του μικρού τμήματος της τροχιάς των άστρων αυτών, δεν επιτρέπει κανενός είδους προσαρμογή για τον προσδιορισμό της ζενίθιας απόστασης μεσουράνησης. Επιπλέον, μια εξωγενής σημαντική δυσκολία ήταν η ύπαρξη των φώτων της πόλης (φωτορύπανση). Αναμφισβήτητα, ο διάχυτος φωτισμός στον ουρανό μειώνει την ευκρίνεια και καθιστά δύσκολη τη σκόπευση των άστρων. Έτσι, τα όρια λαμπρότητας των άστρων πρέπει να τίθενται μεταξύ 3ου και 6ου μεγέθους.

Ο πίνακας των δεδομένων μεσουράνησης των 8 άστρων παρουσιάζεται παρακάτω (Πίνακας 5.11).

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 11/05/09								
A/A	**A**	**ΘΕΣΗ**	**Όνομα**	**Απόκλιση δ (ο)**	**Ζενίθια απόσταση (grad)**	**σ z_0 (grad)**	**p (mbar)**	**θ (°C)**
1	3	N	3458-2328-1	51.511132	15.03731	0.00012	998.90	17.30
2	4	S	1989-3213-1	24.514226	14.95315	0.00026	999.10	17.30
3	8	S	1454-0967-1	18.675280	21.43584	0.00028	999.50	16.60
4	11	S	2002-1055-1	25.653410	13.68788	0.00036	999.40	16.60
5	12	N	3851-1508-1	53.681931	17.44762	0.00015	999.20	17.00
6	13	S	2009-0085-1	27.339443	11.81481	0.00037	999.20	17.50
7	14	N	3468-1122-1	49.412800	12.70593	0.00017	999.30	17.40
8	15	N	3042-1024-1	43.599919	6.24924	0.00024	999.10	16.50

Πίνακας 5.11: Δεδομένα παρατηρήσεων 11/05/09

5.2.2.1 2η ΣΕΙΡΑ - Μέθοδος Sterneck

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική όσων αναφέρθηκαν στην παράγραφο 5.2.1.1, τα αποτελέσματα των τριών ζευγών άστρων που πληρούν τις προδιαγραφές της μεθόδου Sterneck δίνονται στους πίνακες που ακολουθούν.

A	**ΘΕΣΗ**	**Απόκλιση δ (ο)**	**Ζενίθια απόσταση (ο)**	**Φ**	**$\overline{\Phi}$**	**uu (")**	**P**
3	N	51.511132	13.53358	37° 58' 39.196"	37 58' 29.303"	2.385	0.42
4	S	24.514226	13.45783	37° 58' 19.410"			
11	S	25.653410	12.31909	37° 58' 20.998"	37 58' 32.827"	3.920	0.26
12	N	53.681931	15.70286	37° 58' 44.656"			
13	S	27.339443	10.63333	37° 58' 21.973"	37 58' 30.412"	0.190	5.27
14	N	49.412800	11.43534	37° 58' 38.851"			
				Μέση τιμή:	**37° 58' 30.847"**	**(± 1.040")**	
				Γενικευμένος μέσος όρος:	**37° 58' 30.437"**	**(± 0.502")**	

Πίνακας 5.12: Αποτελέσματα μεθόδου Sterneck 11/05/09

A	ΘΕΣΗ	Απόκλιση δ (ο)	$z_o + R$ (ο)	Φ	$\overline{\Phi}$	uu (")	P
3	N	51.511132	13.53732	37° 58' 25.729"	37° 58' 29.265"	0.723	1.38
4	S	24.514226	13.46155	37° 58' 32.801"			
11	S	25.653410	12.32249	37° 58' 33.253"	37° 58' 31.079"	0.928	1.08
12	N	53.681931	15.70723	37° 58' 28.905"			
13	S	27.339443	10.63624	37° 58' 32.473"	37° 58' 30.003"	0.013	78.42
14	N	49.412800	11.43849	37° 58' 27.533"			
				Μέση τιμή:	**37° 58' 30.116"**	**(± 0.527)**	
				Γενικευμένος μέσος όρος:	**37° 58' 30.005"**	**(± 0.136)**	

Πίνακας 5.13: Αποτελέσματα μεθόδου Sterneck με χρήση μοντέλου 11/05/09

5.2.2.2 2η ΣΕΙΡΑ - Αυτοβαθμονόμηση

Τα αποτελέσματα της αυτοβαθμονόμησης για τη 2η σειρά παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 11/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ =	37° 58' 28".065	± 1".231
k =	56".57	± 5".47
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1.51576 & -3.65887 \\ -3.65887 & 29.96881 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o =$	± 4".67	ν = 8, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.14: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης Ι - 11/05/09

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 11/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ =	37° 58' 29".413	± 0".595
A =	21".30	± 7".22
B =	464".39	± 89".82
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.35434 & -2.46780 & 23.38721 \\ & 52.18374 & -612.576 \\ & & 8066.81 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o =$	± 2".03	ν = 8, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.15: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης ΙΙ - 11/05/09

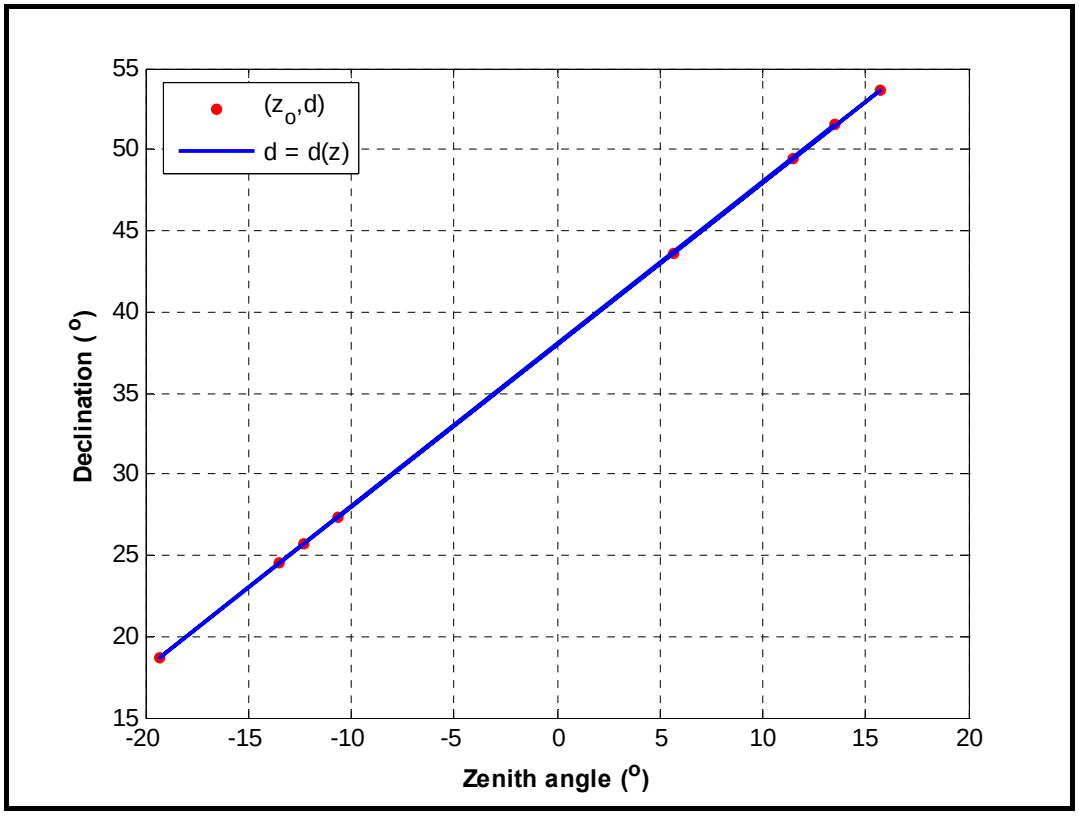
Από το στατιστικό έλεγχο, για τα δύο μοντέλα, με βαθμούς ελευθερίας r = 6 και r = 5 αντίστοιχα και επίπεδο εμπιστοσύνης 99% προκύπτει:

$$\chi^2_{0.005,6} = 0.68 \qquad \chi^2_{0.995,6} = 18.55$$

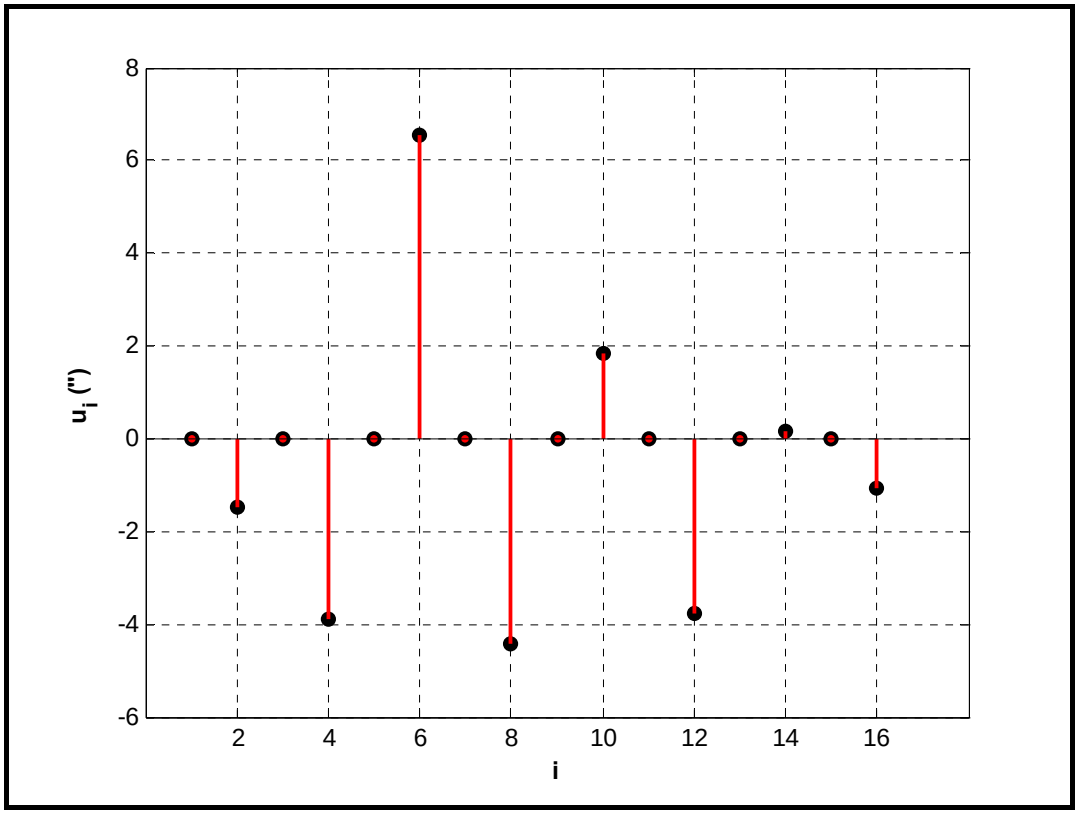
$$\chi^2_{0.005,5} = 0.41 \qquad \chi^2_{0.995,5} = 16.75$$

δηλαδή $0.11 \leq \hat{\sigma}_o^2 \leq 3.09$ και $0.08 \leq \hat{\sigma}_o^2 \leq 3.35$ αντίστοιχα. Επομένως, δεν γίνονται αποδεκτές οι αρχικές υποθέσεις και των δύο μοντέλων, αφού $\hat{\sigma}_o^2 = 21.81$ και $\hat{\sigma}_o^2 = 4.12$ αντίστοιχα.

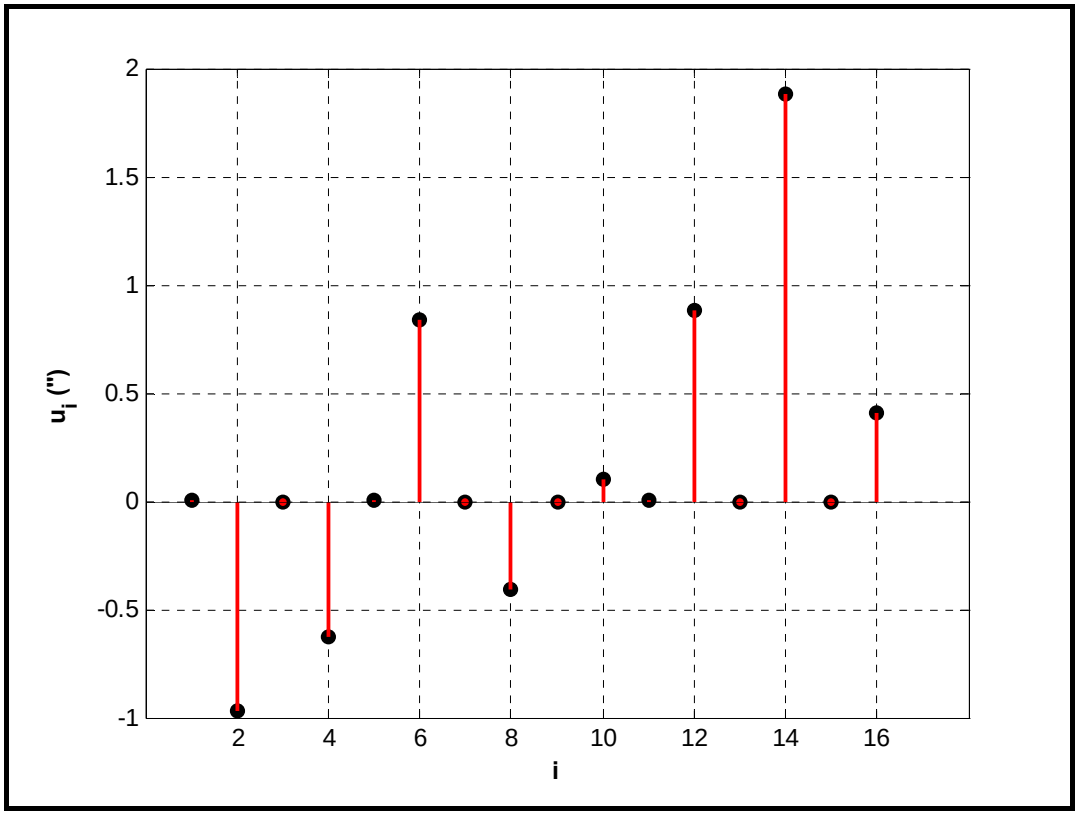
Συμπερασματικά, ο στατιστικός έλεγχος έδωσε την απάντηση στην κακή ποιότητα της πρωτογενούς πληροφορίας.



Γράφημα 5.6: Αυτοβαθμονόμηση 11/05/09



Γράφημα 5.7: Τιμές υπολοίπων υ 11/05/09 - Μοντέλο I



Γράφημα 5.8: Τιμές υπολοίπων υ 11/05/09 - Μοντέλο II

5.2.3 3η ΣΕΙΡΑ - ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09

Στις 21 Μαΐου 2009 πραγματοποιήθηκε μια σειρά μετρήσεων 16 άστρων για τον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους Φ (Παράρτημα Γ).

Ο πίνακας των δεδομένων μεσουράνησης των άστρων, παρουσιάζεται παρακάτω (Πίνακας 5.16).

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09							
Α/Α	**ΘΕΣΗ**	**Όνομα**	**Απόκλιση δ (ο)**	**Ζενίθια απόσταση (grad)**	**σz_0 (grad)**	**p (mbar)**	**θ (°C)**
1	N	3847-01128-1	58.355835	22.64063	0.00016	994.10	20.80
2	S	1448-03273-1	21.009945	18.84558	0.00020	994.80	20.90
3	N	4162-01200-1	60.270266	24.76648	0.00018	995.00	20.70
4	S	1450-01133-1	17.357444	22.90327	0.00011	995.20	20.60
5	S	0897-00595-1	13.624584	27.05059	0.00012	995.50	20.20
6	N	3460-02493-1	45.979411	8.89278	0.00021	995.50	20.20
7	N	3851-01506-1	54.634534	18.50686	0.00010	995.60	20.30
8	S	1466-01082-1	21.216013	18.61674	0.00013	995.60	20.10
9	S	1473-01074-1	21.648873	18.13636	0.00013	995.80	20.10
10	N	3040-00969-1	43.809272	6.48150	0.00018	995.80	19.80
11	N	3472-01264-1	46.044643	8.96548	0.00016	995.70	19.80
12	S	1479-01217-1	19.182846	20.87568	0.00013	995.50	19.70
13	N	3476-01538-1	49.326701	12.61050	0.00013	995.40	19.60
14	S	2019-01252-1	26.486262	12.76279	0.00012	995.40	19.60
15	S	1485-00540-1	16.348199	24.02330	0.00013	995.40	19.80
16	N	3861-01445-1	54.519066	18.37870	0.00014	995.10	20.20

Πίνακας 5.16: Δεδομένα παρατηρήσεων 21/05/09

5.2.3.1 3η ΣΕΙΡΑ - Μέθοδος Sterneck

Από τα 8 παραπάνω ζεύγη, μόνο τα 2 πληρούν τις προδιαγραφές της μεθόδου Sterneck. Επομένως, όπως και για τις άλλες σειρές, υπολογίζονται τα αποτελέσματα με και χωρίς χρήση μοντέλου διάθλασης.

Α	**ΘΕΣΗ**	**Απόκλιση δ (ο)**	**Ζενίθια απόσταση (ο)**	**Φ**	**$\overline{\Phi}$**	**uu (")**	**P**
7	N	54.634534	16.65617	37° 58' 42.111"	37° 58' 28.992"	0.272	3.67
8	S	21.216013	16.75506	37° 58' 15.873"			
13	N	49.326701	11.34945	37° 58' 38.090"	37° 58' 30.036"	0.272	3.67
14	S	26.486262	11.48651	37° 58' 21.981"			
				Μέση τιμή:	**37° 58' 29.514"**	**(± 0.522")**	

Πίνακας 5.17: Αποτελέσματα μεθόδου Sterneck 21/05/09

A	ΘΕΣΗ	Απόκλιση δ (ο)	z_0 + R (ο)	Φ	$\overline{\Phi}$	uu (")	P
7	N	54.634534	16.66076	37° 58' 25.598"	37° 58' 29.050"	0.278	3.60
8	S	21.216013	16.75968	37° 58' 32.502"			
13	N	49.326701	11.35254	37° 58' 26.987"	37° 58' 30.104"	0.278	3.60
14	S	26.486262	11.48963	37° 58' 33.222"			
					Μέση τιμή:	**37° 58' 29.577"**	**(± 0.527")**

Πίνακας 5.18: Αποτελέσματα μεθόδου Sterneck με χρήση μοντέλου 21/05/09

Είναι προφανές ότι οι δύο τιμές $\overline{\Phi}$ από τα δύο ζεύγη είναι υποχρεωτικά ισοβαρείς, επομένως δεν έχει εδώ νόημα ο υπολογισμός γενικευμένου μέσου όρου.

5.2.3.2 3η ΣΕΙΡΑ - Αυτοβαθμονόμηση

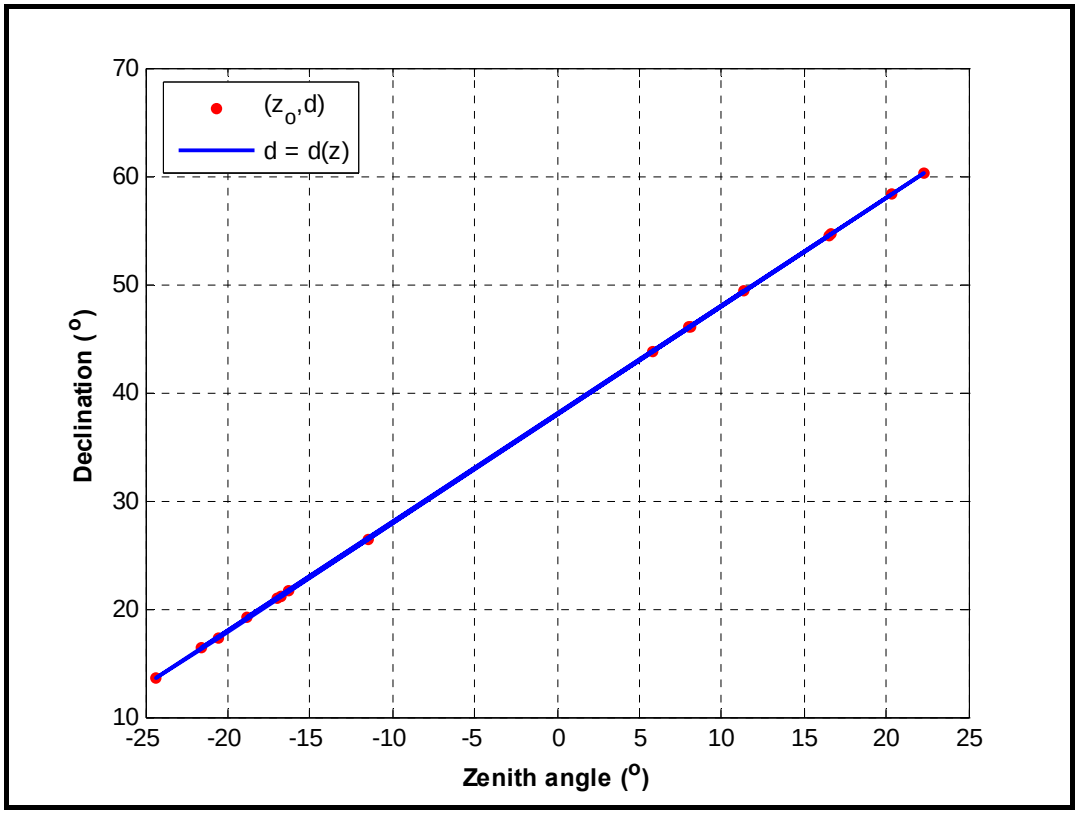
Τα αποτελέσματα της αυτοβαθμονόμησης για την 3η σειρά παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ I		
Φ =	37° 58' 29".358	± 0".415
k =	46".38	± 1".43
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.17182 & 0.15385 \\ 0.15385 & 2.04602 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 3".61	ν = 16, p = 1, 2, 3

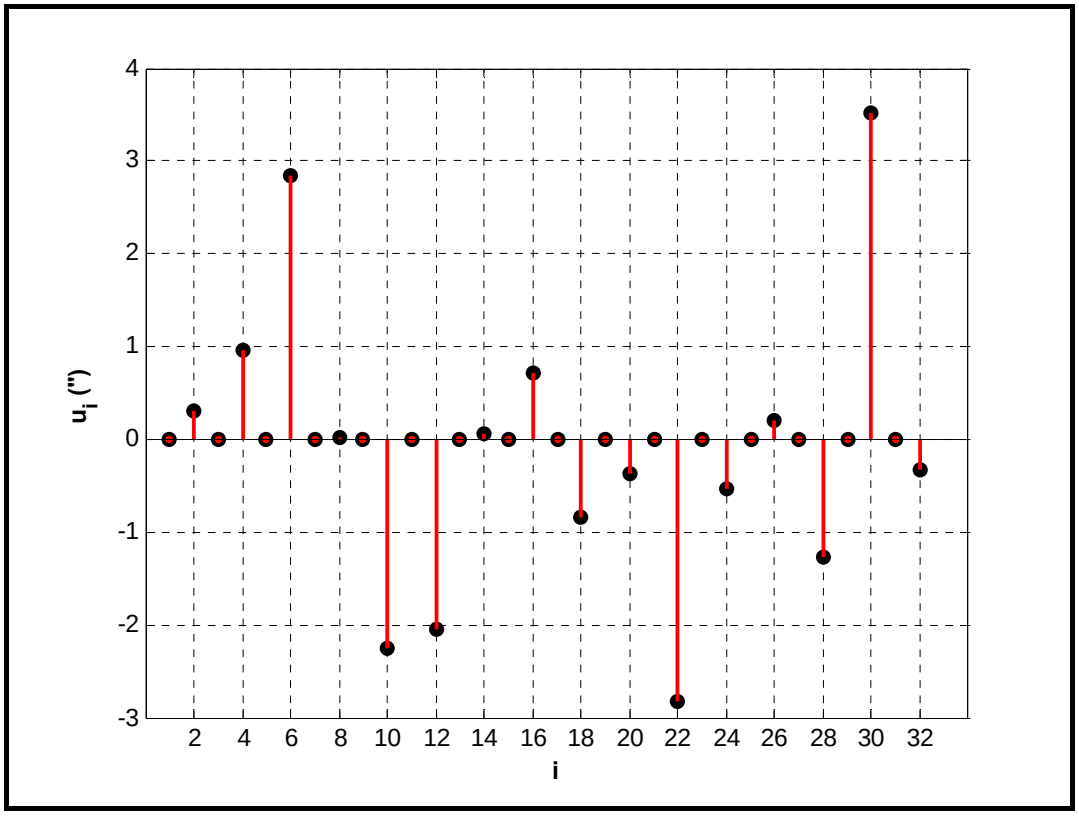
Πίνακας 5.19: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης I - 21/05/09

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ II		
Φ =	37° 58' 29".414	± 0".448
A =	44".78	± 4".12
B =	12".83	± 30".80
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.20044 & -0.34992 & 4.11509 \\ & 16.94275 & -118.370 \\ & & 948.749 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 3".73	ν = 16, p = 1, 2, 3

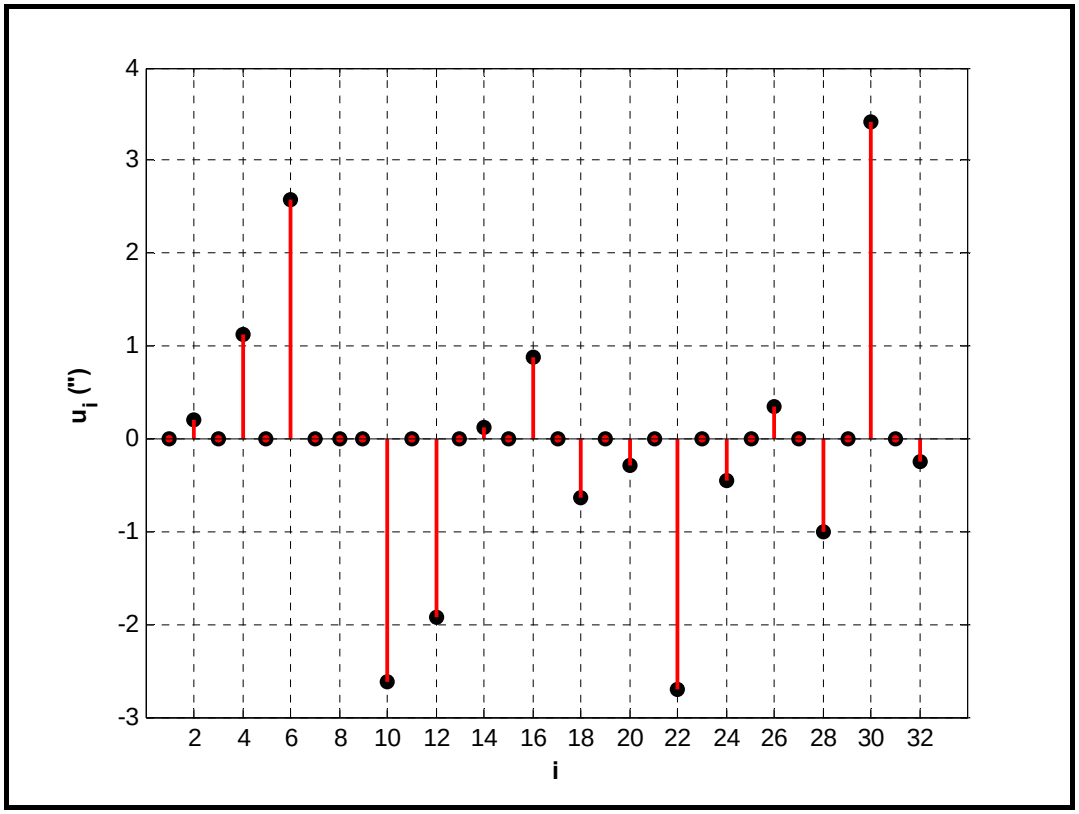
Πίνακας 5.20: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης II - 21/05/09



Γράφημα 5.9: Αυτοβαθμονόμηση 21/05/09



Γράφημα 5.10: Τιμές υπολοίπων υ 21/05/09 - Μοντέλο Ι



Γράφημα 5.11: Τιμές υπολοίπων υ 21/05/09 - Μοντέλο ΙΙ

Από το στατιστικό έλεγχο, για τα δύο μοντέλα, με βαθμούς ελευθερίας r = 14 και r = 13 αντίστοιχα και επίπεδο εμπιστοσύνης 99% προκύπτει:

$$\chi^2_{0.005,14} = 4.07 \qquad \chi^2_{0.995,14} = 31.32$$
$$\chi^2_{0.005,13} = 3.57 \qquad \chi^2_{0.995,13} = 29.82$$

δηλαδή $0.29 \le \hat{\sigma}_o^2 \le 2.24$ και $0.27 \le \hat{\sigma}_o^2 \le 2.29$ αντίστοιχα. Επομένως, δεν γίνονται αποδεκτές οι αρχικές υποθέσεις και των δύο μοντέλων, αφού $\hat{\sigma}_o^2 = 13.03$ και $\hat{\sigma}_o^2 = 13.91$ αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της προσαρμογής του πολυωνύμου 4^{ου} βαθμού, της ενδεικτικής σειράς παρατηρήσεων του γραφήματος 5.1.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ 4^{ου} ΒΑΘΜΟΥ		
A_o =	-0.0638 ^{g}	± 0.0075 ^{g}
z_o =	12.96070 ^{g}	± 0.000174 ^{g}
C_1 =	0.001945	± 3.842e-005
C_2 =	-7.48e-007	± 1.54e-006
$\hat{\sigma}_o$ =	± 0.0010 ^{g}	n = 130, p = 1, 2, 3, 4, 5

Πίνακας 5.21: Αποτελέσματα προσαρμογής πολυωνύμου 4^{ου} βαθμού

Από τα αποτελέσματα της προσαρμογής και συγκεκριμένα από την τιμή του a posteriori τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_o$), που στη συγκεκριμένη περίπτωση ταυτίζεται με το a posteriori τυπικό σφάλμα της μιας μέτρησης, συμπεραίνεται πως μάλλον είχαν υποτιμηθεί οι τιμές των σφαλμάτων των ζενιθίων γωνιών (μεγάλη αισιοδοξία). Σε κάθε περίπτωση, είναι καλύτερο να υπερεκτιμώνται οι τιμές των σφαλμάτων (μικρή αισιοδοξία). Επομένως, το στατιστικό μοντέλο της παραπάνω σειράς μεταβλήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε οι τιμές των σφαλμάτων των ζενιθίων γωνιών να τριπλασιαστούν. Έτσι, προκύπτουν στην ίδια τάξη μεγέθους με τις τιμές των δεδομένων του Διονύσου ($1^η$ ΣΕΙΡΑ - § 5.2.1).

Καταγράφοντας τις τιμές της παραμέτρου A_o για το σύνολο των άστρων της συγκεκριμένης σειράς, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 5.22).

Α/Α	ΘΕΣΗ	Όνομα	A_o (grad)	σ A_o
1	N	3847-01128-1	0.0292	0.0114
2	S	1448-03273-1	199.9950	0.0147
3	N	4162-01200-1	0.0517	0.0097
4	S	1450-01133-1	200.0273	0.0060
5	S	0897-00595-1	199.9781	0.0096
6	N	3460-02493-1	-0.0291	0.0167
7	N	3851-01506-1	-0.0199	0.0069
8	S	1466-01082-1	200.0422	0.0091
9	S	1473-01074-1	200.0271	0.0085
10	N	3040-00969-1	0.0252	0.0117
11	N	3472-01264-1	-0.0531	0.0123
12	S	1479-01217-1	200.0098	0.0103
13	N	3476-01538-1	0.0063	0.0137
14	S	2019-01252-1	200.0302	0.0096
15	S	1485-00540-1	200.0105	0.0077
16	N	3861-01445-1	-0.0545	0.0103

Πίνακας 5.22: Αποτελέσματα παραμέτρου A_o - 21/05/09

Προφανώς, η παράμετρος A_o δεν παραμένει σταθερή. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται σε πιθανή μεταβολή του προσανατολισμού του οργάνου, εξαιτίας του χειρισμού του, αλλά κυρίως στο ότι η παράμετρος αυτή είναι άγνωστη στη διαδικασία συνόρθωσης. Αυτό της επιτρέπει να αποκτά τιμή σχετική με την ποιότητα των σκοπεύσεων κάθε άστρου. Δηλαδή, σε μια κακή παρατήρηση το αποτέλεσμά της θα βρίσκεται μακριά από την αναμενόμενη τιμή. Αντίθετα, σε μια καλή παρατήρηση η διαφορά της παραμέτρου από την αναμενόμενη τιμή θα είναι μικρή.

Τα αποτελέσματα της αυτοβαθμονόμησης με το νέο στοχαστικό μοντέλο, για όλα τα μοντέλα ακολουθούν.

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ Ι		
Φ =	37° 58' 29".358	± 0".414
k =	46".38	± 1".43
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.17181 & 0.15384 \\ 0.15384 & 2.04587 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 1".21	ν = 16, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.23: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης Ι - 21/05/09

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙ		
Φ =	37° 58' 29".414	± 0".448
A =	44".78	± 4".12
B =	12".83	± 30".80
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.20044 & -0.35002 & 4.11576 \\ & 16.94292 & -118.373 \\ & & 948.779 \end{bmatrix} (as^2)$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 1".24	ν = 16, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.24: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης ΙΙ - 21/05/09

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΙΙ		
Φ =	37° 58' 29".400	± 0".448
m =	-1574.65	± 4446.23
n_o =	1.000188	± 8.83e-005
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.20037 & -572.62 & -1.08e-005 \\ & 19768918 & 0.39173 \\ & & 7.79e-009 \end{bmatrix}$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 1".24	ν = 16,p = 1, 2, 3, 4

Πίνακας 5.25: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης ΙΙΙ - 21/05/09

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ IV		
Φ =	37° 58' 29".403	± 0".448
c =	1.19173	± 0.51
n =	1.000184	± 9.53e-005
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.20037 & 0.06654 & -1.17e-005 \\ & 0.26074 & -4.86e-005 \\ & & 9.08e-009 \end{bmatrix}$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 1".24	ν = 16, p = 1, 2, 3

Πίνακας 5.26: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης IV - 21/05/09

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ 21/05/09		
ΜΟΝΤΕΛΟ V		
Φ =	37° 58' 29".402	± 0".448
w =	0.842224	± 0.35
n =	1.000184	± 9.08e-005
$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.20031 & -0.04516 & -1.11e-005 \\ & 0.12076 & 3.15e-005 \\ & & 8.24e-009 \end{bmatrix}$		
$\hat{\sigma}_o$ =	± 1".24	ν = 16,p = 1, 2, 3, 4

Πίνακας 5.27: Αποτελέσματα αυτοβαθμονόμησης V - 21/05/09

Από το στατιστικό έλεγχο, για όλα τα μοντέλα, με βαθμούς ελευθερίας r = 14 και r = 13 αντίστοιχα και επίπεδο εμπιστοσύνης 99% προκύπτει:

$$\chi^2_{0.005,14} = 4.07 \qquad \chi^2_{0.995,14} = 31.32$$
$$\chi^2_{0.005,13} = 3.57 \qquad \chi^2_{0.995,13} = 29.82$$

δηλαδή $0.29 \le \hat{\sigma}_o^2 \le 2.24$ και $0.27 \le \hat{\sigma}_o^2 \le 2.29$ αντίστοιχα. Επομένως, γίνονται αποδεκτές οι αρχικές υποθέσεις όλων των μοντέλων, αφού $\hat{\sigma}_o = 1.2$ δηλαδή $\hat{\sigma}_o^2 = 1.44$.

Οι τελικές τιμές του πλάτους, για τα δύο σημεία (Διόνυσος - Λαμπαδάριο), περιλαμβάνονται στους παρακάτω πίνακες.

ΔΙΟΝΥΣΟΣ					
Πλήθος	**Μέθοδος Sterneck**			**Αυτοβαθμονόμηση**	
20	●	Μ. Τ	38° 4' 44".782 (±0".236) / ± 0".3*	**I**	38° 4' 44".57 ± 0".64
		Γ. Μ. Ο	38° 4' 44".813 (±0".095) / ± 0".3*		
	●	Μ. Τ	38° 4' 44".509 (±0".012) / ± 0".3*	**II**	38° 4' 44".70 ± 0".61
		Γ. Μ. Ο	38° 4' 44".512 (±0".007) / ± 0".3*		
12	●	Μ. Τ	38° 4' 44".794 (±0".384) / ± 0".4*	**I**	38° 4' 44".50 ± 0".36
		Γ. Μ. Ο	38° 4' 44".828 (±0".104) / ± 0".4*		
	●	Μ. Τ	38° 4' 44".518 (±0".017) / ± 0".4*	**II**	38° 4' 44".47 ± 0".38
		Γ. Μ. Ο	38° 4' 44".519 (±0".001) / ± 0".4*		
8	●	Μ. Τ	38° 4' 44".764 (±0".223) / ± 0".5*	**I**	38° 4' 44".34 ± 0".56
		Γ. Μ. Ο	38° 4' 44".804 (±0".246) / ± 0".5*		
	●	Μ. Τ	38° 4' 44".496 (±0".015) / ± 0".5*	**II**	38° 4' 44".48 ± 0".31
		Γ. Μ. Ο	38° 4' 44".494 (±0".001) / ± 0".5*		

Πίνακας 5.28: Τελικές τιμές πλάτους - Διόνυσος

ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ						
Σειρά	**A**	**Μέθοδος Sterneck**			**Αυτοβαθμονόμηση**	
2η	6/8	●	Μ. Τ	37° 58' 30".847 (±1".040) / ± 0".3*	**I**	37° 58' 28".07 ± 1".23
			Γ. Μ. Ο	37° 58' 30".437 (±0".502) / ± 0".3*		
		●	Μ. Τ	37° 58' 30".116 (±0".527) / ± 0".3*	**II**	37° 58' 29".41 ± 0".60
			Γ. Μ. Ο	37° 58' 30".005 (±0".136) / ± 0".3*		
3η	4/16	●	Μ. Τ	37° 58' 29".514 (±0".522) / ± 0".2*	**I**	37° 58' 29".36 ± 0".41
		●	Μ. Τ	37° 58' 29".577 (±0".527) / ± 0".2*	**II**	37° 58' 29".41 ± 0".45

Πίνακας 5.29: Τελικές τιμές πλάτους - Λαμπαδάριο

(● Χωρίς μοντέλο διάθλασης, ● Με μοντέλο διάθλασης)
* Τυχαία σφάλματα (Νόμος μετάδοσης)
Τα αποτελέσματα με κόκκινο χρώμα υποδηλώνουν την ασυμφωνία του στατιστικού ελέγχου.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα - Προτάσεις

6.1 Συμπεράσματα

6.1.1 Μέθοδος Sterneck

Η μέθοδος Sterneck αναφέρεται αποκλειστικά σε ζευγάρι άστρων και βασίζεται στην αρχή "συμμετρία επιλέγω και το σφάλμα καταστρέφω". Όμως, η αρχή αυτή μόνο στη θεωρητική πλευρά της μεθόδου ικανοποιείται απόλυτα.

Στην πράξη, δεν είναι δυνατό να βρεθούν άστρα σε ακριβώς συμμετρικές θέσεις. Επιπλέον η μέθοδος, εκτός της συμμετρίας, προϋποθέτει και ίδια κατάσταση της ατμόσφαιρας. Με αυτές τις προδιαγραφές, η ίδια τιμή της διάθλασης αλλά με διαφορετικό πρόσημο εκατέρωθεν του ζενίθ οδηγεί στην απαλοιφή του συστηματικού σφάλματος εξαιτίας της επίδρασής της.

Ο καθορισμός ενός ορίου, πέρα από το οποίο η διαφορά των ζενιθίων γωνιών πρέπει να αποδοθεί σε λάθος επιλογή ζεύγους, είναι λεπτό ζήτημα. Εξαρτάται από την ακρίβεια του οργάνου και τη μέθοδο με την οποία γίνεται η μέτρηση - προσδιορισμός της ζενίθιας απόστασης, καθώς και από την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος ίσου με τη διαπιστούμενη διαφορά. Συνεπώς, δεν υπάρχουν σαφή κριτήρια που να βοηθούν στην εκτίμηση του παραπάνω ορίου.

Η τεχνική, με την οποία αφαιρείται ένα μεγάλο μέρος συστηματικού σφάλματος, βασίζεται στην αναγωγή των παρατηρούμενων ζενιθίων γωνιών. Το μοντέλο διάθλασης που χρησιμοποιείται έχει συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων και το σφάλμα που αποδίδεται στις τιμές αυτές εξαρτάται από την ποιότητα της συμμετρίας. Δηλαδή, με ακριβώς συμμετρικές θέσεις άστρων, η αριθμητική τιμή του πλάτους είναι ανεξάρτητη των παραμέτρων του μοντέλου διάθλασης.

Η αλλαγή της κατάστασης της ατμόσφαιρας, στο διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των δύο παρατηρήσεων, μπορεί να ενισχύσει ή όχι τη διαφορά των δύο ζενιθίων γωνιών. Σε κάθε περίπτωση, η επίδραση της στο αποτέλεσμα της τιμής του πλάτους, σε επίπεδο ζεύγους, είναι ανεξέλεγκτη. Έτσι, τα δύο άστρα παρατηρούνται στη μικρότερη δυνατή διαφορά χρόνου μεσουράνησης (της τάξης των 10 min), ώστε οι ατμοσφαιρικές συνθήκες να παραμένουν όσο το δυνατόν αμετάβλητες.

Η παρατήρηση πολλών ζευγών άστρων έχει σαν αποτέλεσμα ένα σύνολο τιμών πλάτους. Η απόδοση συγκεκριμένης πληροφορίας απαιτεί τον υπολογισμό του μέσου όρου των παραπάνω τιμών. Ακολούθως, για ένδειξη ακρίβειας υπολογίζεται το τυπικό σφάλμα. Στην περίπτωση που οι τιμές του πλάτους αντιμετωπιστούν ως ανισοβαρείς (γενικευμένος μέσος όρος), ο καθορισμός βαρών (υπολογισμός τυπικού σφάλματος) είναι ένα πρόβλημα που επιδέχεται διάφορους τρόπους λύσης.

Ανεξάρτητα από τα συστηματικά σφάλματα, οι τιμές του πλάτους είναι επηρεασμένες από τα σφάλματα των τιμών των ζενιθίων γωνιών. Έτσι, τα πολλά ζεύγη άστρων, περιορίζουν τις επιδράσεις των τυχαίων σφαλμάτων. Συγκεκριμένα, η ακρίβεια του μέσου όρου αυξάνει ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του πλήθους των ζευγών. Αυτό σημαίνει ότι, για να διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί κλπ. η ακρίβεια, πρέπει αντίστοιχα να τετραπλασιαστούν, εννεαπλασιαστούν κλπ. τα ζεύγη.

6.1.2 Αυτοβαθμονόμηση

Η αυτοβαθμονόμηση είναι μια διαδικασία συνόρθωσης. Με τη μέθοδο αυτή γίνεται ταυτόχρονος αριθμητικός υπολογισμός (εκτίμηση) ενός συνόλου άγνωστων μεγεθών (παραμέτρων), με βάση τις διαθέσιμες τιμές ενός άλλου συνόλου μεγεθών (μετρήσεων), οι οποίες είναι επηρεασμένες από διάφορα σφάλματα. Γενικά, η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) είναι ένα από τα βασικότερα εργαλεία βέλτιστης επεξεργασίας αριθμητικών δεδομένων για την εξαγωγή ποιοτικής ή/και ποσοτικής πληροφορίας σε σχέση με κάποιο φυσικό σύστημα.

Σκοπός της παρακάτω ανάλυσης είναι να εξηγηθούν οι βασικές αρχές της συνόρθωσης, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση της λογικής που διέπει τη βέλτιστη επεξεργασία πλεοναζουσών παρατηρήσεων για τον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους (Φ). Για το λόγο αυτό, αποφεύγεται η ανάλυση των μαθηματικών λεπτομερειών, επισημαίνεται όμως η πρακτική σημασία της μεθόδου στον προσδιορισμό αυτό.

Ο πλήρης ορισμός της διαδικασίας είναι: "Συνόρθωση με εφαρμογή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) χρησιμοποιώντας βάρη". Τα βάρη καθορίζονται άμεσα από τη στατιστική ακρίβεια των διαθέσιμων δεδομένων. Έτσι, η συνόρθωση:

- Αξιοποιεί όλα τα διαθέσιμα δεδομένα (τα οποία είναι περισσότερα από τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό) μαζί με τα σφάλματά τους.

- Οδηγεί σε μονοσήμαντα καθορισμένη εκτίμηση του αστρονομικού πλάτους.

Με την προϋπόθεση ότι τα σφάλματα των μετρήσεων είναι τυχαία, επομένως ακολουθούν την κανονική κατανομή (ή κατανομή του Gauss), η εκτίμηση του πλάτους είναι μια βέλτιστη ανεπηρέαστη εκτίμηση. Αυτό σημαίνει ότι, η εκτίμηση του πλάτους έχει για προσδοκία (μέση τιμή σε άπειρες επαναλήψεις των μετρήσεων και της συνόρθωσης) την ακριβή τιμή μ (ανεπηρέαστη εκτίμηση) και επιπλέον είναι η τιμή με την ελάχιστη μεταβλητότητα (βέλτιστη ανεπηρέαστη εκτίμηση). Τέλος, στο αποτέλεσμα περιλαμβάνεται και το γεγονός ότι οι διαθέσιμες μετρήσεις είναι οι περισσότερο πιθανοφανείς (κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας).

Από τον ίδιο το χαρακτήρα των αστρονομικών παρατηρήσεων συνεπάγεται ότι, οι τιμές της ζενίθιας απόστασης και της απόκλισης του άστρου μεταβάλλονται με το χρόνο. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι, οι μετρήσεις δεν μπορούν να επαναληφθούν. Επιπλέον, η κατάσταση της ατμόσφαιρας είναι δυναμική, ενώ στη θεωρητική ανάλυση της επίδρασής της μόνο ως στατική μπορεί να θεωρηθεί (ατμόσφαιρα αναφοράς).

Αυτόματα, οι δύο παραπάνω λόγοι καθιστούν επιτακτική την ανάγκη της συνόρθωσης για τον προσδιορισμό του πλάτους. Γιατί εκτός από το χαρακτηριστικό της μέγιστης ακρίβειας (με προφανή σημασία), ο αλγόριθμος συνόρθωσης χρησιμοποιείται και για διαγνωστικούς σκοπούς. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να αξιολογηθεί η ποιότητα των παρατηρήσεων αλλά και όλη η διαδικασία (στατιστικός έλεγχος χ^2).

Αρχικά, τα χονδροειδή σφάλματα (λάθη) εντοπίζονται μέσω των υπολοίπων, οπότε και απομακρύνονται. Μια πιθανή αιτία ύπαρξης χονδροειδούς σφάλματος οφείλεται στη λάθος αναγνώριση κάποιου άστρου και την παρατήρηση κάποιου άλλου. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται ο στατιστικός έλεγχος. Σε περίπτωση προβλημάτων, μια λύση είναι η τροποποίηση του στοχαστικού μοντέλου των μετρήσεων. Όμως, αν το πρόβλημα παραμένει, η ασυμφωνία οφείλεται σε επιδράσεις συστηματικών σφαλμάτων που αναζητούνται στο μαθηματικό μοντέλο.

Μέσω της αυτοβαθμονόμησης περιορίζεται (ως ένα βαθμό) η επίδραση των συστηματικών σφαλμάτων. Συγκεκριμένα, η δομή της ατμόσφαιρας κατά τη διάρκεια των μετρήσεων, όπως εκφράζεται μέσω των μοντέλων διάθλασης, μόνο με τον τρόπο αυτό μπορεί να αποδοθεί. Αντίθετα, αν η κατάσταση της ατμόσφαιρας, στη διάρκεια των μετρήσεων μεταβληθεί αρκετά, τότε το μοντέλο αδυνατεί να περιγράψει με σωστό τρόπο τη διάθλαση.

Η παρατήρηση άστρων σε μικρές ζενίθιες αποστάσεις αντιστοιχεί σε μια εύκολη περιγραφή της πορείας της φωτεινής ακτίνας. Η διαδρομή που ακολουθεί αυτή, διαπερνά σε μικρότερο βαθμό τα στρώματα της ατμόσφαιρας και καμπυλώνεται, κυρίως, κατά την κατακόρυφη έννοια. Συνεπώς, υφίσταται τις μικρότερες μεταβολές, που της επιτρέπουν την αντιστοιχία με τις θεωρίες - υποθέσεις των μοντέλων.

Από την ανάλυση των αστρονομικών παρατηρήσεων προκύπτει ότι οι υπολογισθείσες τιμές του αστρονομικού πλάτους είναι πολύ κοντά στην αναμενόμενη τιμή. Συνεπώς, η ανάλυση των δεδομένων ικανοποιεί πρακτικές ανάγκες (αλλά και θεωρητικές, όταν οι τιμές χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή θεωρητικών - ποιοτικών συμπερασμάτων), δηλαδή έχει πετύχει τους σκοπούς της.

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων των μοντέλων διάθλασης γίνεται ικανοποιητικά μόνο για το μοντέλο Ι. Σε όλα τα υπόλοιπα μοντέλα, υπάρχει μια δικαιολογημένη αδυναμία προσδιορισμού των παραμέτρων τους, που οφείλεται στην έλλειψη αρκετής πληροφορίας στις μετρήσεις (μικρές ζενίθιες αποστάσεις).

Αναμφισβήτητα, η άρση του περιορισμού της παρατήρησης άστρων σε όσο το δυνατό συμμετρικές θέσεις, αυξάνει τον αριθμό των διαθέσιμων παρατηρούμενων άστρων. Επιπλέον, η συνόρθωση εντοπίζει, ελέγχει και περιορίζει τις επιδράσεις των χονδροειδών και συστηματικών σφαλμάτων, ενώ στη μέθοδο Sterneck η επίδρασή τους στα αποτελέσματα είναι αναπόφευκτα ανεξέλεγκτη.

Συνολικά, η διαδικασία στηρίζεται σε δύο συνορθώσεις. Η μία αφορά τον προσδιορισμό των ζενιθίων γωνιών μεσουράνησης ενώ η άλλη τον προσδιορισμό του πλάτους. Και στις δύο περιπτώσεις, καμία παράμετρος δεν θεωρείται γνωστή αλλά προσδιορίζονται όλες με τη βοήθεια των μαθηματικών και υπολογιστικών εργαλείων. Τέλος, επισημαίνεται ότι, σε κάθε στάδιο, υπάρχει η δυνατότητα ελέγχου.

Καταλήγοντας, η εφαρμογή της μεθόδου αυτοβαθμονόμησης, επιτρέπει τον προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους (Φ), με ακρίβεια μερικών δεκάτων του δευτερολέπτου τόξου. Συγκεκριμένα η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, στην παρούσα εργασία, βρίσκεται στο διάστημα [0".3, 0".6].

Η παρακάτω συγκριτική ανάλυση παρουσιάζει με απλό τρόπο ότι, το αποτέλεσμα του αστρονομικού πλάτους με αυτοβαθμονόμηση είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα από εκείνο της μεθόδου Sterneck.

Η ακριβής τιμή (μ) του αστρονομικού πλάτους προκύπτει με χρήση απείρου πλήθους μετρήσεων. Συνεπώς, στην πράξη, δεν μπορεί να είναι ποτέ γνωστή.

Στη μέθοδο Sterneck κάθε ζευγάρι άστρων δίνει μια τιμή για το πλάτος. Έτσι, οι τιμές που προκύπτουν από τα διαφορετικά ζεύγη (μπλε κουκκίδες), θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους, εξαιτίας των σφαλμάτων των μετρήσεων. Σε μια άλλη σειρά παρατηρήσεων, οι αριθμητικές τιμές του πλάτους, που προκύπτουν από κάθε ζεύγος (πράσινες κουκκίδες), θα είναι και πάλι διαφορετικές (Σχήμα 6.1.α).

Υπολογίζοντας το μέσο όρο (ή το γενικευμένο μέσο όρο) από κάθε σειρά παρατηρήσεων, οι τιμές του πλάτους (μπλε - πράσινη κουκκίδα) θα είναι επίσης διαφορετικές (Σχήμα 6.1.β). Σε επαναλαμβανόμενες σειρές παρατηρήσεων και αντίστοιχων υπολογισμών των μέσων τιμών, θα προκύπτουν κάθε φορά διαφορετικές τιμές. Συνεπώς, θα έχουμε ένα σύνολο πιθανών τιμών του αστρονομικού πλάτους, που προκύπτει από το διαδοχικό υπολογισμό των μέσων τιμών, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τα αντίστοιχα ζεύγη παρατηρήσεων.

Η επανάληψη μετρήσεων και η αντίστοιχη συνόρθωση οδηγεί σε αποτελέσματα (μπλε - πράσινη κουκκίδα), που έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα προσέγγισης της άγνωστης ακριβούς τιμής του αστρονομικού πλάτους (ανεπηρέαστη εκτίμηση) και μικρότερη διασπορά (ελάχιστη μεταβλητότητα) (Σχήμα 6.1.γ).

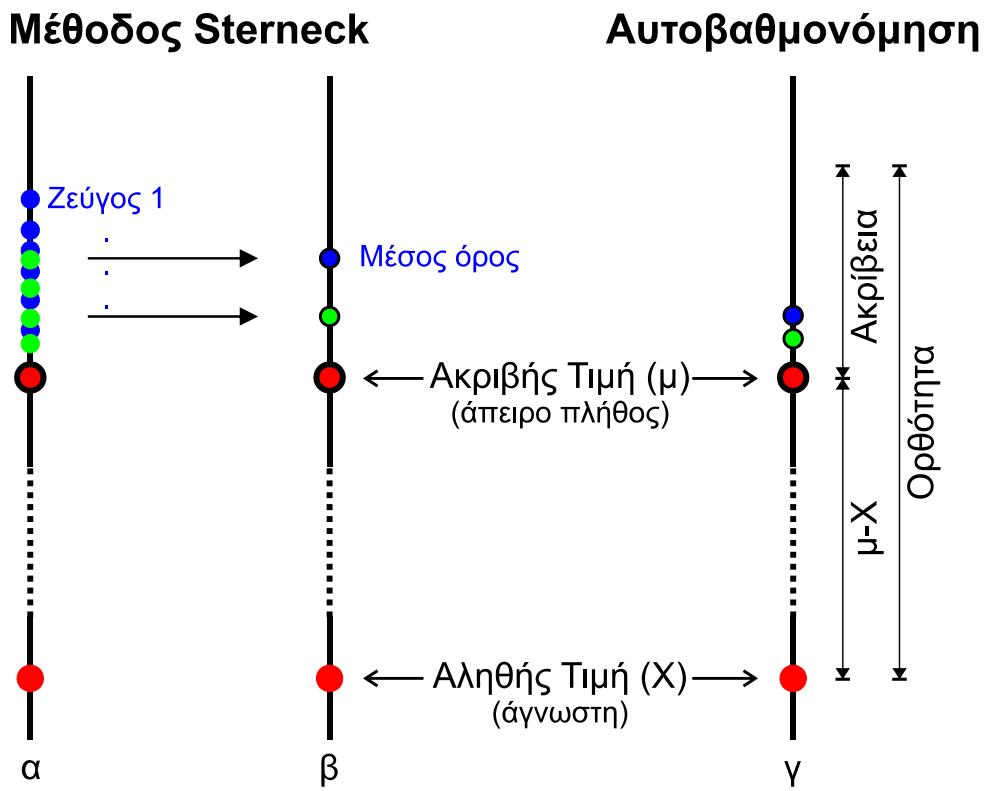
Το γεγονός ότι οι τιμές δεν είναι συγκεντρωμένες γύρω από την ακριβή τιμή, οφείλεται στις επιδράσεις των συστηματικών σφαλμάτων των δύο μεθόδων (με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν καθόλου χονδροειδή σφάλματα στις μετρήσεις). Έτσι, εξαιτίας του περιορισμού των συστηματικών σφαλμάτων με την αυτοβαθμονόμηση, η λύση που προκύπτει βρίσκεται πιο κοντά στην ακριβή τιμή (Σχήμα 6.1.β, 6.1.γ).

Στο σημείο αυτό, γίνεται η διάκριση ανάμεσα στην εσωτερική και στην εξωτερική ακρίβεια.

- Η διασπορά των τιμών του πλάτους, από τις επαναλαμβανόμενες λύσεις, καθορίζει την εσωτερική ακρίβεια των δύο μεθόδων.

- Η συγκέντρωση των τιμών γύρω από την ακριβή τιμή του πλάτους, καθορίζει την εξωτερική ακρίβεια των δύο μεθόδων.

Αναμφισβήτητα, τόσο η ακριβής (μ) όσο και η αληθής τιμή (Χ) του αστρονομικού πλάτους είναι άγνωστες. Όμως, η διαφορά μ – Χ των δύο τιμών εκφράζει το σύνολο των συστηματικών σφαλμάτων που απομένουν και οφείλονται στη μοντελοποίηση. Έτσι, ακολουθώντας διαφορετικές μεθοδολογίες αυξάνεται η πιθανότητα προσέγγισης της αληθούς τιμής. Επιπλέον, ενισχύεται ακόμα περισσότερο αν οι διαφορετικές μεθοδολογίες οδηγούν σε παρόμοια αποτελέσματα, όπως συμβαίνει στην περίπτωσή μας (Πίνακας 5.28, 5.29). Επομένως, για την εκτίμηση της ορθότητας, εκτός από την αλλαγή του συστήματος "όργανο - παρατηρητής - συνθήκες", απαιτείται και διαφορετική "μεθοδολογία".



Σχήμα 6.1: Συγκριτικές επιδόσεις των δύο μεθόδων

Οι προδιαγραφές της μεθόδου Sterneck, στην πράξη, αποτελούν και τα μειονεκτήματά της. Η βασική της απαίτηση (συμμετρία) είναι η πηγή των προβλημάτων της, τόσο στην επιλογή καταλλήλων άστρων, όσο και στην αντιμετώπιση των σφαλμάτων. Αντίθετα, με την άρση της συμμετρίας, η αυτοβαθμονόμηση επιτρέπει μεγαλύτερο αριθμό διαθέσιμων παρατηρούμενων άστρων. Επιπλέον, αξιοποιεί όλα τα πλεονεκτήματα της διαδικασίας συνόρθωσης, που καθίσταται επιτακτική, εξαιτίας της ιδιαιτερότητας των αστρονομικών παρατηρήσεων και της δυναμικής κατάστασης της ατμόσφαιρας (διάγνωση ανεπιθύμητων σφαλμάτων). Όμως, το σημαντικότερο όλων είναι η συνολική διαχείριση των σφαλμάτων. Δηλαδή, εκτός της επίδρασης των τυχαίων σφαλμάτων, αντιμετωπίζει τα συστηματικά σφάλματα των ζενιθίων γωνιών μέσω των μοντέλων διάθλασης. Συγκεκριμένα, το μοντέλο Ι και το μοντέλο ΙΙ αρκούν για μια καλή τιμή του πλάτους. Για όλους τους παραπάνω λόγους, προτείνεται η μέθοδος της αυτοβαθμονόμησης για έναν πιο εύκολο, γρήγορο και ακριβή προσδιορισμό του αστρονομικού πλάτους.

6.2 Προτάσεις

Η μεγάλη διαθεσιμότητα υπολογιστικών μέσων και οι ραγδαίες εξελίξεις στην τεχνολογία κατασκευής τοπογραφικών οργάνων τα τελευταία χρόνια, έχουν επιφέρει βασικές αλλαγές στη φιλοσοφία της οργάνωσης και της εκτέλεσης των αστρονομικών παρατηρήσεων. Ανάμεσα στις αισιόδοξες προοπτικές των δυνατοτήτων του τοπογραφικού εξοπλισμού συγκαταλέγεται και η λήψη εικόνων με χρήση εικονοσταθμού. Έτσι, διαδοχικές εικόνες ενός τμήματος του νυχτερινού ουρανού μπορούν να εξασφαλίσουν τιμές ζενιθίων γωνιών άστρων.

Από το σύνολο της εργασίας διαπιστώνεται ότι, ο προσδιορισμός του πλάτους είναι ένα πρόβλημα προσαρμογής. Έτσι, ένας διαφορετικός τρόπος αντιμετώπισης είναι η χρησιμοποίηση μαθηματικών μοντέλων με παραμέτρους που δεν έχουν φυσικό νόημα, δεν είναι δηλαδή φυσικά μεγέθη στα πλαίσια μιας θεωρίας που εξηγεί τα φαινόμενα. Επομένως, η αναζήτηση βελτιώσεων στα μαθηματικά μοντέλα είναι μια δυναμική διαδικασία που διευκολύνεται με τη χρησιμοποίηση συνορθώσεων (βελτιστοποίηση).

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο στην παραπάνω αναζήτηση είναι η ισορροπία ανάμεσα στη θεωρία και στην εφαρμογή. Επειδή ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό των μαθηματικών μοντέλων είναι η απλότητα, η θεωρητική γνώση δεν πρέπει να εξαντλείται στη διαμόρφωση τους. Επιπλέον, η χρησιμοποίηση μη ικανοποιητικών μοντέλων, που είναι πιο απλά απ' ότι απαιτεί η εφαρμογή, γίνεται αισθητή όταν εφαρμόζονται τα αποτελέσματα στην πράξη. Η παραπάνω ισορροπία αποκαθίσταται με τη συσσώρευση εμπειρίας, τον πειραματισμό, αλλά και μια βαθύτερη κατανόηση, τόσο της θεωρίας όσο και των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των δεδομένων.

Με τον παραπάνω τρόπο αποκαθίσταται μια διαλεκτική ενότητα ανάμεσα στη θεωρία και την πράξη, καθώς, περνώντας από τα θεωρητικά μοντέλα στην εφαρμογή και από τις ανάγκες της εφαρμογής στην επανεξέταση της θεωρίας, αναπτύσσεται ένας διάλογος ανάμεσα στο θεωρητικό και στο εφαρμοσμένο επιστημονικό έργο.

Βιβλιογραφία

- Αγατζά - Μπαλοδήμου Α. Μ.: **Θεωρία Σφαλμάτων & Συνορθώσεις Ι**, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2005.

- Αγατζά - Μπαλοδήμου Α. Μ.: **Θεωρία Σφαλμάτων & Συνορθώσεις ΙΙ**, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2007.

- Αργυράκος Ι. Γ.: **Γεωδαιτική Αστρονομία**, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 1973.

- Βέης Γ., Μπιλλήρης Χ., Παπαζήση Κ.: **Ανώτερη Γεωδαισία**, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 1995.

- Βλάχος Δ.: **Τοπογραφία**, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη 1997.

- Δερμάνης Α.: **Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης**, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1992.

- Κακολύρης Δ.: **Ανάπτυξη λογισμικού βέλτιστης επιλογής ζευγών αστέρων για παρατηρήσεις μεσημβρινών διαβάσεων**, Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2006.

- Καλλιανού Φ.: **Συστήματα και πλαίσια αναφοράς στη Γεωδαιτική Αστρονομία - Οι διεθνείς συμβάσεις**, Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2006.

- Κατσάνος Ε.: **Βασικά στοιχεία για τη χρήση του MATLAB & Εφαρμογή σε προβλήματα κατασκευών**, Διδακτικές Σημειώσεις, ΑΠΘ.

- Κιουστελίδης Ι.: **Αριθμητική Ανάλυση**, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004.

- Κορακίτης Ρ.: **Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας**, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2008.

- Λάμπρου Ε.: **Ανάπτυξη μεθοδολογίας αστρογεωδαιτικών προσδιορισμών με ψηφιακά γεωδαιτικά όργανα**, Διδακτορική Διατριβή, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2003.

- Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι.: **Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση**, ΕΜΠ, Αθήνα 1985.

- Μπιλλήρης Χ.: **Εισαγωγή στη Γεωδαισία**, ΣΑΤΜ / ΕΜΠ, Αθήνα 2006.

- Πέτσα Ε.: **Θεμελιώδεις Έννοιες και Θεμελιώδη Προβλήματα της Φωτογραμμετρίας**, ΤΕΙ Αθήνας, 2000.

- Ράπτης Α.: **Βασική Αριθμητική Ανάλυση με μικροϋπολογιστές**, ΕΜΠ, Αθήνα 1988.

- Σαββάλας Α., Σαββάλας Σ.: **Φυσική Γ' Λυκείου**, Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα 1999.

- Auer L. H. & Standish E. M.: **Astronomical Refraction: Computational method for all zenith angles**, Astron. J. 119, 2472 - 2474 (2000).

- Brocklesby J.: **Elements of Astronomy**, Farmer, Brace, & Co. Publications, New York 1855.

- Chauvenet W.: **A Manual of Spherical and Practical Astronomy** (5th edition), Dover Publications, New York 1960.

- Garfinkel B.: **Astronomical Refraction in a Polytropic Atmosphere**, Astron. J. 72, 2 (1967).

- Green R. M.: **Spherical Astronomy**, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

- Hughes J. A.: **Refractional influences in Astrometry and Geodesy**, International Astronomical Union, Symposium No. 89, D. Reidel Publications, Uppsala, Sweden 1978.

- Jenkins F. A., White H. E.: **Fundamentals of Optics** (6th edition), McGraw - Hill, 1981.

- Kristensen L. K.: **Astronomical refraction and airmass**, Astron. Nachr. 319 (1998) 3, 193 - 198.

- Kurzyńska K.: **Precision in determination of astronomical refraction from aerological data**, Astron. Nachr. 308 (1987) 5, 323 - 328.

- Lipcanu M.: **A direct method for the calculation of astronomical refraction**, The publishing house of the Romanian Academy, Series A, 6, 2 (2005).

- Mahan A. I.: **Astronomical Refraction - Some History and Theories**, Applied Optics 1, 4, 497 - 511 (1962).

- Nener et al.: **Analytical models of optical refraction in the troposphere**, J. Opt. Soc. Am. 20, 5 (2003).

- Rossi B.: **Optics**, Addison - Wesley publishing company, Cambridge 1965.

- Smart W. M.: **Textbook on Spherical Astronomy** (6th edition), Cambridge University Press, Cambridge 1977.

- Stone R. C.: **An Accurate Method for Computing Atmospheric Refraction**, Astronomical Society of the Pacific, 108, 1051 - 1058 (1996).

- Thomas M. E. & Joseph R. I.: **Astronomical Refraction**, Johns Hopkins Apl. Technical Digest, 17, 3 (1996).

- Waldemar L. H. & Siebren van der Werf.: **Atmospheric refraction: a history**, Applied Optics 44, 27, 5624 - 5636 (2005).

- Wittmann A. D.: **Astronomical refraction: formulas for all zenith distances**, Astron. Nachr. 318 (1997) 5, 305 - 312.

- Woolard E. W. & Clemence G. M.: **Spherical Astronomy**, Academic Press, New York, 1966.

- Yan H.: **A new expression for astronomical refraction**, Astron. J. 112, 3 (1996).

- Young A. T.: **Sunset science. IV. Low - Altitude Refraction**, Astron. J. 127, 3622 - 3637 (2004).

Παράρτημα

Παράρτημα Α: Πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής (z) και των κατανομών t και χ^2.

Α.1 Πίνακας τυπικής κανονικής κατανομής (z)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Α.2 Πίνακας κατανομής t

v	$t_{0.60}$	$t_{0.75}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$	$t_{0.9995}$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.620
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.276	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.141
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Α.3 Πίνακας κατανομής χ^2

v	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.500}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.64	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	91.58	100.62	119.33	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65

Παράρτημα Β: Κώδικες MATLAB

B.1 cholesky_inversion.m

```
%-- Matrix inverse --
function B = cholesky_inversion(A)
[n,n] = size(A);

%-- ΠΙΝΑΚΑΣ G --
G = zeros(n,n);

for i = 1:n
   G(i,i) = sqrt(A(i,i) - G(:,i)'*G(:,i));
   for j = (i+1):n
      G(i,j) = (A(i,j) - G(:,i)'*G(:,j))/G(i,i);
   end
end

%-- ΠΙΝΑΚΑΣ D --
D = zeros(n,n);

for i = 1:n
   D(i,i) = 1/G(i,i);
   for j = (i+1):n
      D(i,j) = -(D(i,:)*G(:,j))/G(j,j);
   end
end

%-- ΠΙΝΑΚΑΣ B --
B = zeros(n,n);

for i = 1:n
   B(i,i) = D(i,:)*D(i,:)';
   for j = (i+1):n
      B(i,j) = D(i,:)*D(j,:)';
      B(j,i) = B(i,j);
   end
end
%==========================================
```

B.2.1 Model_I.m

```
%----- Model_I -----
clc
clear all
format long g
format compact

%%----- Δεδομένα -----

disp('Data')
fprintf('\n')

%Είσοδος δεδομένων
M=load('Refraction.txt');

%Εμφάνιση δεδομένων
disp('Coordinates')
disp('Point          d(arcsec)          z(arcsec)')
fprintf('%s','1')
disp(M(1:1,2:2:4))

fprintf('\n')

%%----- Επίλυση -----
disp('Solution')
fprintf('\n')

%Ορισμός βοηθητικών πινάκων
Code = M(:,1);
d = M(:,2);
sd = diag(M(:,3));
z = M(:,4);
sz = diag(M(:,5));
z = (z/3600)*(pi/180);
P = M(:,6);
T = M(:,7);
fair = (P/1013.25).*(273./(273+T));

%Προσδιορισμός προσεγγιστικών τιμών
Phi = 136800;
k = 60.35;

L = numel(M,:,1)   %Πλήθος αστέρων
n = 2*L            %Αριθμός μετρήσεων
mo = 2             %Παράμετροι που ενδιαφέρουν
m = 2 + L          %Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι
disp('Degrees of freedom:')
r = n - m          %Βαθμοί ελευθερίας
c = r + mo         %Εξισώσεις συνθήκης
fprintf('\n')

%Αρχικοποίηση μεταβλητών συνθήκης ελέγχου
so_new = 10;
so_old = 1;
p = 1;

while (abs(so_new-so_old)>10^-5 && p<5)
p

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα l -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα l
l = zeros(n,1);

%l(1:2:n-1,1) = d;
%l(2:2:n,1) = z;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα A -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα σχεδιασμού
A = zeros(c,mo);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
A1 = zeros(c,mo);
A2 = zeros(c,mo);
```

```
A1(1:c,1) = -ones(c,1);

A2(1:c,2) = fair.*tan(z);
A2(1:c,2) = A2(1:c,2).*Code;

A = A1+A2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα B -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα B
B = zeros(c,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
B1 = zeros(c,n);
B2 = zeros(c,n);

C1 = ones(c,1);
C2 = 1+(fair*k/((180/pi)*3600))./cos(z).^2;
C2 = C2.*Code;

for i=1:c
   for j=(2*i-1)
      B1(i,j)=C1(i);
   end
end

for i=1:c
   for j=(2*i)
      B2(i,j)=C2(i);
   end
end

B = B1+B2;

%Πίνακας μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των μετρήσεων
%Αρχικοποίηση του πίνακα Vl
Vl = zeros(n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
Vl1 = zeros(n,n);
Vl2 = zeros(n,n);

for i=1:2:(n-1)
   for j=i
      Vl1(i,j)=sd(i/2+0.5,j/2+0.5).^2;
   end
end

for i=2:2:(n)
   for j=i
      Vl2(i,j)=sz(i/2,j/2).^2;
   end
end

Vl = Vl1+Vl2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα w -----
w(1:c,1) = -(d+((z*3600)*(180/pi)+fair*k.*tan(z)).*Code-Phi);

%Πίνακας Βαρών του la
Pa = (B*Vl*B')^-1;

%Πίνακας κανονικών εξισώσεων Na
Na = A'*Pa*A;

%Αρχικοποίηση του διανύσματος των παραμέτρων που ενδιαφέρουν
dx = zeros(mo,1);

%Διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
dx = cholesky_inversion(Na)*A'*Pa*w;

U = Vl*B'*Pa*(w-A*dx);

fprintf('\n')

so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r);
```

```
so_old = so_new;
so_new = so_aposteriori;

Phi = Phi + dx(1);
k = k + dx(2);

p = p+1;
end

%Παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων
disp('The final values of the parameters:')
Phi = Phi
k = k

fprintf('\n')
disp('Standard error of unit weight:')
so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r)
Vx = (so_aposteriori^2)*cholesky_inversion(Na)
s = sqrt(diag(Vx));
s_Phi = s(1)
s_k = s(2)
%-----------------------------------------------------------------------

%%----- Γράφημα -----

z = z*(180/pi);
R = fair*(k/3600).*tan(z*(pi/180));
z1 = (z+R).*(-Code);

plot(z.*(-Code),d/3600,'r.',z1,Phi/3600+z1,'b-','MarkerSize',15,'LineWidth',1.5)

xlabel 'Zenith angle (^o)'
ylabel 'Declination (^o)'
grid on
title 'Model I'
legend('(z_o,d)','d = d(z)')
%=======================================================================
```

B.2.2 Model_II.m

```
%----- Model_II -----
clc
clear all
format long g
format compact

%%----- Δεδομένα -----

disp('Data')
fprintf('\n')

%Είσοδος δεδομένων
M=load('Refraction.txt');

%Εμφάνιση δεδομένων
disp('Coordinates')
disp('Point          d(arcsec)          z(arcsec)')
fprintf('%s','1')
disp(M(1:1,2:2:4))

fprintf('\n')

%%----- Επίλυση -----
disp('Solution')
fprintf('\n')

%Ορισμός βοηθητικών πινάκων
Code = M(:,1);
d = M(:,2);
sd = diag(M(:,3));
z = M(:,4);
sz = diag(M(:,5));
z = (z/3600)*(pi/180);
```

```
P = M(:,6);
T = M(:,7);
fair = (P/1013.25).*(273./(273+T));

%Προσδιορισμός προσεγγιστικών τιμών
Phi = 136800;
aa = 60.28;
bb = -0.067;

L = numel(M,:,1)   %Πλήθος αστέρων
n = 2*L            %Αριθμός μετρήσεων
mo = 3             %Παράμετροι που ενδιαφέρουν
m = 3 + L          %Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι
disp('Degrees of freedom:')
r = n - m          %Βαθμοί ελευθερίας
c = r + mo         %Εξισώσεις συνθήκης
fprintf('\n')

%Αρχικοποίηση μεταβλητών συνθήκης ελέγχου
so_new = 10;
so_old = 1;
p = 1;

while (abs(so_new-so_old)>10^-5 && p<5)
p

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα l -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα l
l = zeros(n,1);

%l(1:2:n-1,1) = d;
%l(2:2:n,1) = z;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα A -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα σχεδιασμού
A = zeros(c,mo);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
A1 = zeros(c,mo);
A2 = zeros(c,mo);
A3 = zeros(c,mo);

A1(1:c,1) = -ones(c,1);

A2(1:c,2) = fair.*tan(z);
A2(1:c,2) = A2(1:c,2).*Code;

A3(1:c,3) = fair.*tan(z).^3;
A3(1:c,3) = A3(1:c,3).*Code;

A = A1+A2+A3;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα B -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα B
B = zeros(c,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
B1 = zeros(c,n);
B2 = zeros(c,n);

C1 = ones(c,1);
C2 = 1+(fair*aa/((180/pi)*3600))./cos(z).^2+3*(fair*bb/((180/pi)*3600)).*tan(z).^2./cos(z).^2;
C2 = C2.*Code;

for i=1:c
   for j=(2*i-1)
      B1(i,j)=C1(i);
   end
end

for i=1:c
   for j=(2*i)
      B2(i,j)=C2(i);
   end
end
```

```
B = B1+B2;

%Πίνακας μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των μετρήσεων
%Αρχικοποίηση του πίνακα Vl
Vl = zeros(n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
Vl1 = zeros(n,n);
Vl2 = zeros(n,n);

for i=1:2:(n-1)
   for j=i
      Vl1(i,j)=sd(i/2+0.5,j/2+0.5).^2;
   end
end

for i=2:2:(n)
   for j=i
      Vl2(i,j)=sz(i/2,j/2).^2;
   end
end

Vl = Vl1+Vl2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα w -----
w(1:c,1) = -(d+((z*3600)*(180/pi)+fair*aa.*tan(z)+fair*bb.*tan(z).^3).*Code-Phi);

%Πίνακας Βαρών του la
Pa = (B*Vl*B')^-1;

%Πίνακας κανονικών εξισώσεων Na
Na = A'*Pa*A;

%Αρχικοποίηση του διανύσματος των παραμέτρων που ενδιαφέρουν
dx = zeros(mo,1);

%Διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
dx = cholesky_inversion(Na)*A'*Pa*w;

U = Vl*B'*Pa*(w-A*dx);

fprintf('\n')

so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r);
so_old = so_new;
so_new = so_aposteriori;

Phi = Phi + dx(1);
aa = aa + dx(2);
bb = bb + dx(3);

p = p+1;
end

%Παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων
disp('The final values of the parameters:')
Phi = Phi
aa = aa
bb = bb

fprintf('\n')
disp('Standard error of unit weight:')
so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r)
Vx = (so_aposteriori^2)*cholesky_inversion(Na)
s = sqrt(diag(Vx));
s_Phi = s(1)
s_aa = s(2)
s_bb = s(3)


%==============================================================================
```

B.2.3 Model_III.m

```
%----- Model_III -----
clc
clear all
format long g
format compact

%%----- Δεδομένα -----

disp('Data')
fprintf('\n')

%Είσοδος δεδομένων
M=load('Refraction.txt');

%Εμφάνιση δεδομένων
disp('Coordinates')
disp('Point          d(arcsec)          z(arcsec)')
fprintf('%s','1')
disp(M(1:1,2:2:4))

fprintf('\n')

%%----- Επίλυση -----
disp('Solution')
fprintf('\n')

%Ορισμός βοηθητικών πινάκων
Code = M(:,1);
d = M(:,2);
sd = diag(M(:,3));
z = M(:,4);
sz = diag(M(:,5));
z = (z/3600)*(pi/180);
P = M(:,6);
T = M(:,7);
fair = (P/1013.25).*(273./(273+T));

%Προσδιορισμός προσεγγιστικών τιμών
Phi = 136800;
mm = 6.46;
no = 1.0002926;

L = numel(M,:,1)   %Πλήθος αστέρων
n = 2*L            %Αριθμός μετρήσεων
mo = 3             %Παράμετροι που ενδιαφέρουν
m = 3 + L          %Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι
disp('Degrees of freedom:')
r = n - m          %Βαθμοί ελευθερίας
c = r + mo         %Εξισώσεις συνθήκης
fprintf('\n')

%Αρχικοποίηση μεταβλητών συνθήκης ελέγχου
so_new = 10;
so_old = 1;
p = 1;

while (abs(so_new-so_old)>10^-5 && p<5)
p

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα l -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα l
l = zeros(n,1);

%l(1:2:n-1,1) = d;
%l(2:2:n,1) = z;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα A -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα σχεδιασμού
A = zeros(c,mo);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
A1 = zeros(c,mo);
A2 = zeros(c,mo);
```

```
A3 = zeros(c,mo);

A1(1:c,1) = -ones(c,1);

A2(1:c,2) = ((180/pi)*3600)*fair.*((-z/mm^2)+(1/mm^2)*asin(sin(z)/no^mm)+(1/mm)*sin(z)*log(no)./sqrt(no^(2*mm)-
sin(z).^2));
A2(1:c,2) = A2(1:c,2).*Code;

A3(1:c,3) = ((180/pi)*3600)*fair.*((1/no)*sin(z)./sqrt(no^(2*mm)-sin(z).^2));
A3(1:c,3) = A3(1:c,3).*Code;

A = A1+A2+A3;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα B -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα B
B = zeros(c,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
B1 = zeros(c,n);
B2 = zeros(c,n);

C1 = ones(c,1);
C2 = 1+fair.*((1/mm)-cos(z)./(mm*sqrt(no^(2*mm)-sin(z).^2)));
C2 = C2.*Code;

for i=1:c
   for j=(2*i-1)
      B1(i,j)=C1(i);
   end
end

for i=1:c
   for j=(2*i)
      B2(i,j)=C2(i);
   end
end

B = B1+B2;

%Πίνακας μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των μετρήσεων
%Αρχικοποίηση του πίνακα Vl
Vl = zeros(n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
Vl1 = zeros(n,n);
Vl2 = zeros(n,n);

for i=1:2:(n-1)
   for j=i
      Vl1(i,j)=sd(i/2+0.5,j/2+0.5).^2;
   end
end

for i=2:2:(n)
   for j=i
      Vl2(i,j)=sz(i/2,j/2).^2;
   end
end

Vl = Vl1+Vl2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα w -----
w(1:c,1) = -(d+((z*3600)*(180/pi)+fair*(1/mm).*((z*3600)*(180/pi)-((180/pi)*3600)*asin(sin(z)/no^mm))).*Code-Phi);

%Πίνακας Βαρών του la
Pa = (B*Vl*B')^-1;

%Πίνακας κανονικών εξισώσεων Na
Na = A'*Pa*A;

%Αρχικοποίηση του διανύσματος των παραμέτρων που ενδιαφέρουν
dx = zeros(mo,1);

%Διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
dx = cholesky_inversion(Na)*A'*Pa*w;
```

```
U = Vl*B'*Pa*(w-A*dx);

fprintf('\n')

so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r);
so_old = so_new;
so_new = so_aposteriori;

Phi = Phi + dx(1);
mm = mm + dx(2);
no = no + dx(3);

p = p+1;
end

%Παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων
disp('The final values of the parameters:')
Phi = Phi
mm = mm
no = no

fprintf('\n')
disp('Standard error of unit weight:')
so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r)
Vx = (so_aposteriori^2)*cholesky_inversion(Na)
s = sqrt(diag(Vx));
s_Phi = s(1)
s_mm = s(2)
s_no = s(3)


%==========================================================================
```

B.2.4 Model_IV.m

```
%----- Model_IV -----
clc
clear all
format long g
format compact

%%----- Δεδομένα -----

disp('Data')
fprintf('\n')

%Είσοδος δεδομένων
M=load('Refraction.txt');

%Εμφάνιση δεδομένων
disp('Coordinates')
disp('Point          d(arcsec)          z(arcsec)')
fprintf('%s','1')
disp(M(1:1,2:2:4))

fprintf('\n')

%%----- Επίλυση -----
disp('Solution')
fprintf('\n')

%Ορισμός βοηθητικών πινάκων
Code = M(:,1);
d = M(:,2);
sd = diag(M(:,3));
z = M(:,4);
sz = diag(M(:,5));
z = (z/3600)*(pi/180);
P = M(:,6);
T = M(:,7);
fair = (P/1013.25).*(273./(273+T));
```

```
%Προσδιορισμός προσεγγιστικών τιμών
Phi = 136800;
cc = 0.9987459;
nn = 1.0002926;

L = numel(M,:,1)   %Πλήθος αστέρων
n = 2*L            %Αριθμός μετρήσεων
mo = 3             %Παράμετροι που ενδιαφέρουν
m = 3 + L          %Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι
disp('Degrees of freedom:')
r = n - m          %Βαθμοί ελευθερίας
c = r + mo         %Εξισώσεις συνθήκης
fprintf('\n')

%Αρχικοποίηση μεταβλητών συνθήκης ελέγχου
so_new = 10;
so_old = 1;
p = 1;

while (abs(so_new-so_old)>10^-5 && p<5)
p

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα l -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα l
l = zeros(n,1);

%l(1:2:n-1,1) = d;
%l(2:2:n,1) = z;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα A -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα σχεδιασμού
A = zeros(c,mo);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
A1 = zeros(c,mo);
A2 = zeros(c,mo);
A3 = zeros(c,mo);

A1(1:c,1) = -ones(c,1);

A2(1:c,2) = ((180/pi)*3600)*fair.*((nn*sin(z)./sqrt(1-(nn*cc*sin(z)).^2))-(sin(z)./sqrt(1-(cc*sin(z)).^2)));
A2(1:c,2) = A2(1:c,2).*Code;

A3(1:c,3) = ((180/pi)*3600)*fair.*(cc*sin(z)./sqrt(1-(nn*cc*sin(z)).^2));
A3(1:c,3) = A3(1:c,3).*Code;

A = A1+A2+A3;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα B -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα B
B = zeros(c,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
B1 = zeros(c,n);
B2 = zeros(c,n);

C1 = ones(c,1);
C2 = 1+fair.*((nn*cc*cos(z)./sqrt(1-(nn*cc*sin(z)).^2))-(cc*cos(z)./sqrt(1-(cc*sin(z)).^2)));
C2 = C2.*Code;

for i=1:c
   for j=(2*i-1)
      B1(i,j)=C1(i);
   end
end

for i=1:c
   for j=(2*i)
      B2(i,j)=C2(i);
   end
end

B = B1+B2;

%Πίνακας μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των μετρήσεων
```

```
%Αρχικοποίηση του πίνακα Vl
Vl = zeros(n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
Vl1 = zeros(n,n);
Vl2 = zeros(n,n);

for i=1:2:(n-1)
   for j=i
      Vl1(i,j)=sd(i/2+0.5,j/2+0.5).^2;
   end
end

for i=2:2:(n)
   for j=i
      Vl2(i,j)=sz(i/2,j/2).^2;
   end
end

Vl = Vl1+Vl2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα w -----
w(1:c,1) = -(d+((z*3600)*(180/pi)+((180/pi)*3600)*fair.*(asin(nn*cc*sin(z))-asin(cc*sin(z)))).*Code-Phi);

%Πίνακας Βαρών του la
Pa = (B*Vl*B')^-1;

%Πίνακας κανονικών εξισώσεων Na
Na = A'*Pa*A;

%Αρχικοποίηση του διανύσματος των παραμέτρων που ενδιαφέρουν
dx = zeros(mo,1);

%Διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
dx = cholesky_inversion(Na)*A'*Pa*w;

U = Vl*B'*Pa*(w-A*dx);

fprintf('\n')

so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r);
so_old = so_new;
so_new = so_aposteriori;

Phi = Phi + dx(1);
cc = cc + dx(2);
nn = nn + dx(3);

p = p+1;
end

%Παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων
disp('The final values of the parameters:')
Phi = Phi
cc = cc
nn = nn

fprintf('\n')
disp('Standard error of unit weight:')
so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r)
Vx = (so_aposteriori^2)*cholesky_inversion(Na)
s = sqrt(diag(Vx));
s_Phi = s(1)
s_cc = s(2)
s_nn = s(3)


%==========================================================================
```

B.2.5 Model_V.m

```
%----- Model_V -----
clc
clear all
format long g
format compact

%%----- Δεδομένα -----

disp('Data')
fprintf('\n')

%Είσοδος δεδομένων
M=load('Refraction.txt');

%Εμφάνιση δεδομένων
disp('Coordinates')
disp('Point          d(arcsec)          z(arcsec)')
fprintf('%s','1')
disp(M(1:1,2:2:4))

fprintf('\n')

%%----- Επίλυση -----
disp('Solution')
fprintf('\n')

%Ορισμός βοηθητικών πινάκων
Code = M(:,1);
d = M(:,2);
sd = diag(M(:,3));
z = M(:,4);
sz = diag(M(:,5));
z = (z/3600)*(pi/180);
P = M(:,6);
T = M(:,7);
fair = (P/1013.25).*(273./(273+T));

%Προσδιορισμός προσεγγιστικών τιμών
Phi = 136800;
ww = 1.00125569;
nn = 1.0002926;

L = numel(M,:,1)   %Πλήθος αστέρων
n = 2*L            %Αριθμός μετρήσεων
mo = 3             %Παράμετροι που ενδιαφέρουν
m = 3 + L          %Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι
disp('Degrees of freedom:')
r = n - m          %Βαθμοί ελευθερίας
c = r + mo         %Εξισώσεις συνθήκης
fprintf('\n')

%Αρχικοποίηση μεταβλητών συνθήκης ελέγχου
so_new = 10;
so_old = 1;
p = 1;

while (abs(so_new-so_old)>10^-5 && p<5)
p

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα l -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα l
l = zeros(n,1);

%l(1:2:n-1,1) = d;
%l(2:2:n,1) = z;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα A -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα σχεδιασμού
A = zeros(c,mo);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
A1 = zeros(c,mo);
A2 = zeros(c,mo);
```

```
A3 = zeros(c,mo);

A1(1:c,1) = -ones(c,1);

A2(1:c,2) = ((180/pi)*3600)*fair.*(ww./((sin(z).^2).*sqrt((ww./sin(z)).^2-1))-ww./((sin(z).^2).*sqrt((ww./sin(z)).^2+1-2*nn)));
A2(1:c,2) = A2(1:c,2).*Code;

A3(1:c,3) = ((180/pi)*3600)*fair.*(1./(sqrt((ww./sin(z)).^2+1-2*nn)));
A3(1:c,3) = A3(1:c,3).*Code;

A = A1+A2+A3;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα B -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα B
B = zeros(c,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
B1 = zeros(c,n);
B2 = zeros(c,n);

C1 = ones(c,1);
C2  =  1+fair.*(-((ww^2).*cos(z))./((sin(z).^3).*sqrt((ww./sin(z)).^2-1))+((ww^2).*cos(z))./((sin(z).^3).*sqrt((ww./sin(z)).^2+1-
2*nn)));
C2 = C2.*Code;

for i=1:c
   for j=(2*i-1)
      B1(i,j)=C1(i);
   end
end

for i=1:c
   for j=(2*i)
      B2(i,j)=C2(i);
   end
end

B = B1+B2;

%Πίνακας μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των μετρήσεων
%Αρχικοποίηση του πίνακα Vl
Vl = zeros(n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
Vl1 = zeros(n,n);
Vl2 = zeros(n,n);

for i=1:2:(n-1)
   for j=i
      Vl1(i,j)=sd(i/2+0.5,j/2+0.5).^2;
   end
end

for i=2:2:(n)
   for j=i
      Vl2(i,j)=sz(i/2,j/2).^2;
   end
end

Vl = Vl1+Vl2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα w -----
w(1:c,1) = -(d+((z*3600)*(180/pi)+((180/pi)*3600)*fair.*(sqrt((ww./sin(z)).^2-1)-sqrt((ww./sin(z)).^2+1-2*nn))).*Code-Phi);

%Πίνακας Βαρών του la
Pa = (B*Vl*B')^-1;

%Πίνακας κανονικών εξισώσεων Na
Na = A'*Pa*A;

%Αρχικοποίηση του διανύσματος των παραμέτρων που ενδιαφέρουν
dx = zeros(mo,1);

%Διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
dx = cholesky_inversion(Na)*A'*Pa*w;
```

```
U = Vl*B'*Pa*(w-A*dx);

fprintf('\n')

so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r);
so_old = so_new;
so_new = so_aposteriori;

Phi = Phi + dx(1);
ww = ww + dx(2);
nn = nn + dx(3);

p = p+1;
end

%Παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων
disp('The final values of the parameters:')
Phi = Phi
ww = ww
nn = nn

fprintf('\n')
disp('Standard error of unit weight:')
so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r)
Vx = (so_aposteriori^2)*cholesky_inversion(Na)
s = sqrt(diag(Vx));
s_Phi = s(1)
s_ww = s(2)
s_nn = s(3)


%==========================================================================
```

B.3 Fourth_degree_polynomial.m

```
%----- Πολυώνυμο 4ου Βαθμού - Γενική Μέθοδος -----
clc
clear all
format long g
format compact

%%----- Δεδομένα -----

disp('Data')
fprintf('\n')

%Είσοδος δεδομένων
M=load('Points.txt');

%Εμφάνιση δεδομένων
disp('Coordinates')
disp('Point            H(g)            V(g)')
fprintf('%s','1')
disp(M(1,2:3))

fprintf('\n')

%%----- Επίλυση -----
disp('Solution')
fprintf('\n')

%Ορισμός βοηθητικών πινάκων
H = M(:,2);
sH = 1;
V = M(:,3);
sV = 1;

q = numel(H);
```

```
for i=1:q
   if H(i)>350
      H(i)=H(i)-400;
   else
      H(i)=H(i);
   end
end

%Προσδιορισμός προσεγγιστικών τιμών
Ho = 0;
Vo = 1;
C1 = 10^-4;
C2 = 10^-8;

L = numel(M,:,1)   %Πλήθος σημείων
n = 2*L            %Αριθμός μετρήσεων
mo = 4             %Παράμετροι που ενδιαφέρουν
m = 4 + L          %Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι
disp('Degrees of freedom:')
r = n - m          %Βαθμοί ελευθερίας
c = r + mo         %Εξισώσεις συνθήκης
fprintf('\n')

%Αρχικοποίηση μεταβλητών συνθήκης ελέγχου
so_new = 10;
so_old = 1;
p = 1;

while (abs(so_new-so_old)>10^-8 && p<10)
p

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα l -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα l
l = zeros(n,1);

%l(1:2:n-1,1) = H;
%l(2:2:n,1) = V;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα A -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα σχεδιασμού
A = zeros(c,mo);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
A1 = zeros(c,mo);
A2 = zeros(c,mo);
A3 = zeros(c,mo);
A4 = zeros(c,mo);

A1(1:c,1) = -2*C1*(H-Ho);

A2(1:c,2) = ones(c,1);

A3(1:c,3) = (H-Ho).^2;

A4(1:c,4) = -(H-Ho).^4;

A = A1+A2+A3+A4;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα B -----
%Αρχικοποίηση του πίνακα B
B = zeros(c,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
B1 = zeros(c,n);
B2 = zeros(c,n);

G1 = 2*C1*(H-Ho)-4*C2*(H-Ho).^3;
G2 = -ones(c,1);

for i=1:c
   for j=(2*i-1)
      B1(i,j)=G1(i);
   end
end
```

```
for i=1:c
   for j=(2*i)
      B2(i,j)=G2(i);
   end
end

B = B1+B2;

%Πίνακας μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των μετρήσεων
%Αρχικοποίηση του πίνακα Vl
Vl = diag(n,n);

%Αρχικοποίηση προσθετέων πινάκων
Vl1 = zeros(n,n);
Vl2 = zeros(n,n);

for i=1:2:(n-1)
   for j=i
      Vl1(i,j)=sH^2;
   end
end

for i=2:2:(n)
   for j=i
      Vl2(i,j)=sV^2;
   end
end

Vl = Vl1+Vl2;

%----- Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα w -----
w(1:c,1) = -Vo-C1*(H-Ho).^2+C2*(H-Ho).^4+V;

%Πίνακας Βαρών του la
Pa = (B*Vl*B')^-1;

%Πίνακας κανονικών εξισώσεων Na
Na = A'*Pa*A;

%Αρχικοποίηση του διανύσματος των παραμέτρων που ενδιαφέρουν
dx = zeros(mo,1);

%Διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων
dx = cholesky_inversion(Na)*A'*Pa*w;

U = Vl*B'*Pa*(w-A*dx);

fprintf('\n')

so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r);
so_old = so_new;
so_new = so_aposteriori;

Ho = Ho + dx(1);
Vo = Vo + dx(2);
C1 = C1 + dx(3);
C2 = C2 + dx(4);

p = p+1;
end

%Παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων
disp('The final values of the parameters:')
Ho = Ho
Vo = Vo
C1 = C1
C2 = C2

fprintf('\n')
disp('Standard error of unit weight:')
so_aposteriori = sqrt((U'*Vl^-1*U)/r)
Vx = (so_aposteriori^2)*cholesky_inversion(Na)
s = sqrt(diag(Vx));
s_Ho = s(1)
s_Vo = s(2)
```

```
s_C1 = s(3)
s_C2 = s(4)

for i=1:(2*q)
   if (abs(U(i))>2.5*so_aposteriori)
      i = M(1,1) - 1 + i/2
   end
end


%==========================================================================
%----- Πολυώνυμο 4ου Βαθμού - Γράφημα -----
x = -6:0.01:6;

y = Vo + C1*(x-Ho).^2 - C2*(x-Ho).^4;

plot(H,V,'r.',x,y,'MarkerSize',10,'LineWidth',1.5)

xlabel 'Azimuth (g)'
ylabel 'Zenith angle (g)'
%title 'TYC '
grid on

%==========================================================================
```

Παράρτημα Γ: Αστρονομικές παρατηρήσεις

ΤΟΠΟΣ: ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟ

Φ = 37° 58' 30" - Λ = 23° 46' 38"

Γ.1 2η ΣΕΙΡΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 11/05/09

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ: **OBSERVER v. 2**

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

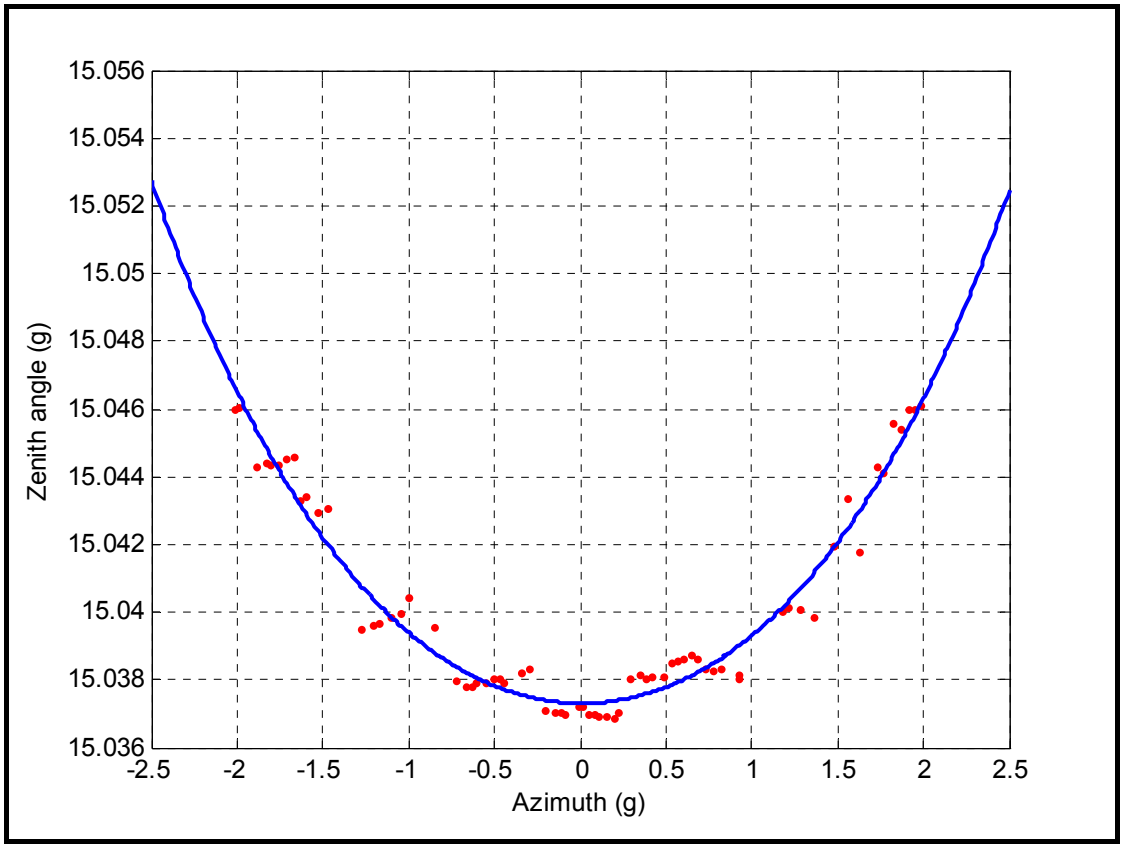
	Όνομα			Τ(έναρξης)	Α(έναρξης)	Ζ(έναρξης)	Τ(ά.μ.)	Ζ(ά.μ.)	Τ(λήξης)	m
				UTC	g	g		g	UTC	
1	0866	1180	S	19:07:20	197.47559	32.56142	19:11:49	32.54189	19:14:49	4.212
2	4553	1680	N	19:15:19	0.32921	43.97866	19:18:49	43.97667	19:23:18	5.178
3	3458	2328	N	19:26:05	3.31948	15.06179	19:30:34	15.03609	19:33:34	4.859
4	1989	3213	S	19:34:04	196.21012	14.97516	19:37:33	14.95239	19:42:02	5.444
5	0294	1033	S	19:53:37	197.8227	38.86271	19:58:06	38.84587	20:01:07	6.154
6	4551	2415	N	20:01:37	0.40463	41.59877	20:05:07	41.59632	20:08:26	6.105
7	4163	0436	N	20:08:56	1.22484	26.68638	20:12:45	26.67833	20:15:41	6.265
8	1454	0967	S	20:16:11	197.25893	21.45447	20:19:37	21.43824	20:24:06	6.244
9	0313	1234	S	20:31:53	197.58177	34.28329	20:36:23	34.26458	20:39:22	6.342
10	4405	1859	N	20:39:52	0.57084	36.90341	20:43:21	36.89998	20:47:50	5.632
11	2002	1055	S	20:48:32	194.72957	13.72777	20:53:01	13.68698	20:56:02	6.024
12	3851	1508	N	20:56:32	2.14130	17.46039	21:00:03	17.44741	21:03:14	5.689
13	2009	0085	S	21:03:44	195.06669	11.84548	21:07:25	11.81412	21:10:26	6.246
14	3468	1122	N	21:10:56	3.20812	12.72470	21:14:27	12.70526	21:18:56	5.452
15	3042	1024	N	21:39:48	9.16293	6.31930	21:44:18	6.24825	21:47:19	5.896
16	4187	1365	N	22:16:55	0.76687	32.58867	22:20:24	32.58405	22:24:54	5.210
17	5003	0868	S	22:25:19	198.01590	43.37243	22:29:49	43.35708	22:32:48	6.137
18	4560	3065	N	22:33:18	0.33741	43.70007	22:36:48	43.69804	22:41:18	5.169

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΣΤΡΩΝ

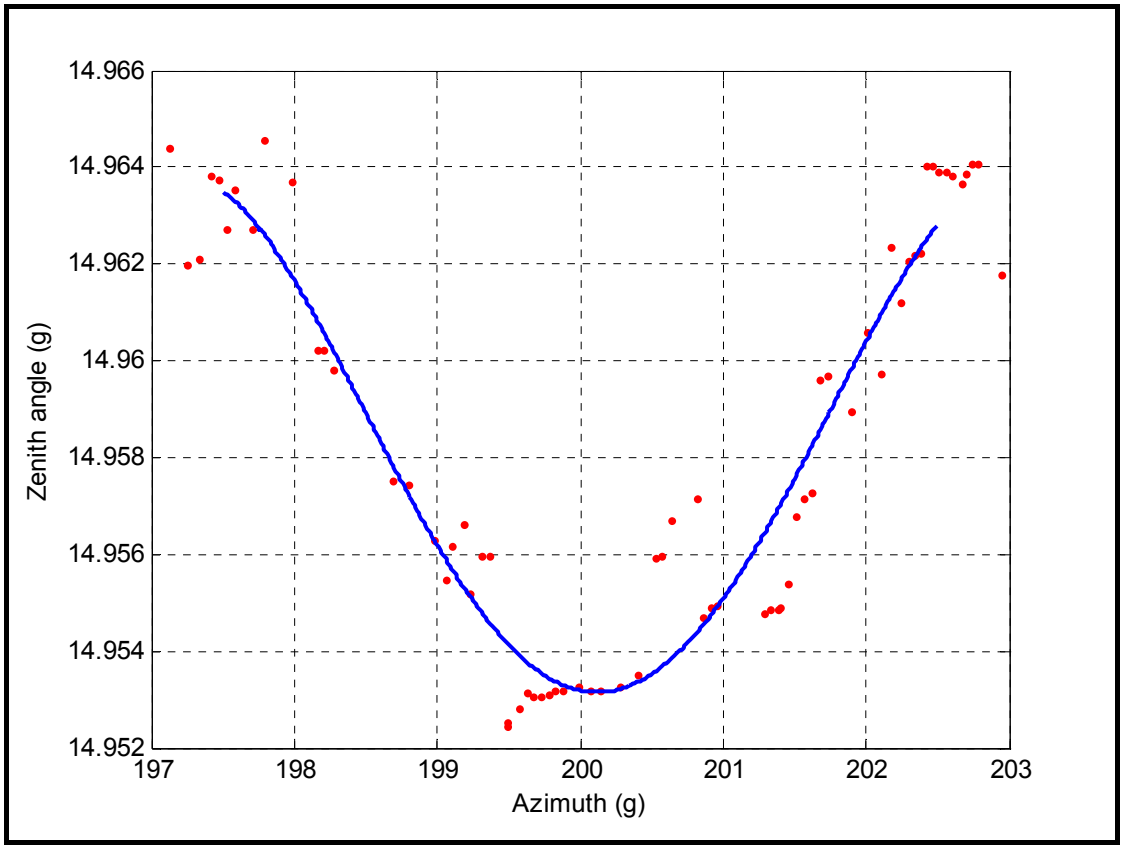
	Όνομα		α*			δ*			m		Τ(ά.μ.)	Ζ(ά.μ.)
			h	m	s	°	'	"				
1	0866	1180	12	5	42.795	8	40	43.665	4.212	S	19:11:49	32.54189
2	4553	1680	12	12	43.800	77	33	59.507	5.178	N	19:18:49	43.97667
3	3458	2328	12	24	31.222	51	30	40.076	4.859	N	19:30:34	15.03609
4	1989	3213	12	31	30.488	24	30	51.214	5.444	S	19:37:33	14.95239
5	0294	1033	12	52	07.304	3	0	11.258	6.154	S	19:58:06	38.84587
6	4551	2415	12	59	09.657	75	25	23.848	6.105	N	20:05:07	41.59632
7	4163	0436	13	6	48.395	61	59	32.102	6.265	N	20:12:45	26.67833
8	1454	0967	13	13	41.706	18	40	31.007	6.244	S	20:19:37	21.43824
9	0313	1234	13	30	30.208	7	7	40.188	6.342	S	20:36:23	34.26458
10	4405	1859	13	37	29.371	71	11	41.64	5.632	N	20:43:21	36.89998
11	2002	1055	13	47	11.542	25	39	12.275	6.024	S	20:53:01	13.68698
12	3851	1508	13	54	14.610	53	40	54.95	5.689	N	21:00:03	17.44741
13	2009	0085	14	1	38.141	27	20	21.996	6.246	S	21:07:25	11.81412
14	3468	1122	14	8	41.040	49	24	46.079	5.452	N	21:14:27	12.70526
15	3042	1024	14	38	36.265	43	35	59.710	5.896	N	21:44:18	6.24825
16	4187	1365	15	14	49.072	67	18	32.964	5.21	N	22:20:24	32.58405
17	5003	0868	15	24	14.812	-1	3	31.148	6.137	S	22:29:49	43.35708
18	4560	3065	15	31	15.660	77	18	56.322	5.169	N	22:36:48	43.69804
*Την εποχή των παρατηρήσεων												

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ 4^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

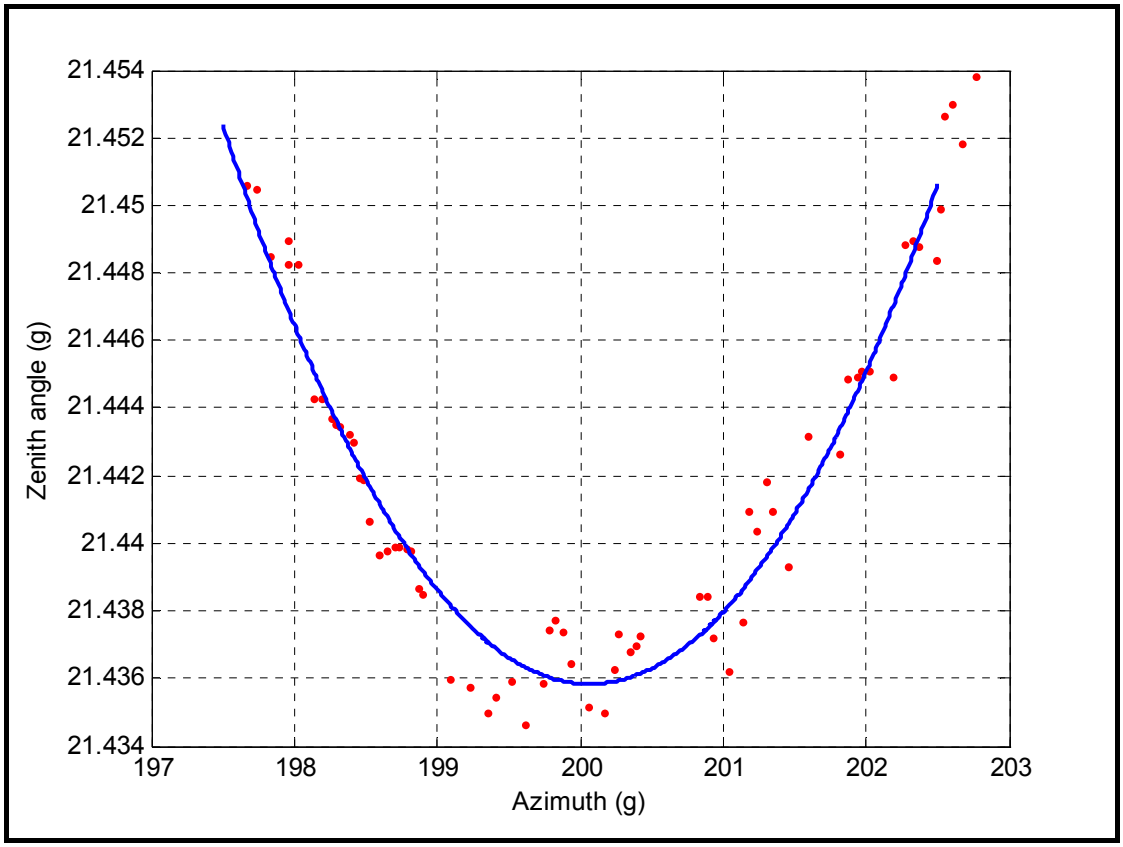
Σημειώνεται ότι, από τις καταγεγραμμένες μετρήσεις των άστρων έχουν αφαιρεθεί αυτές που το υπόλοιπό τους βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[-2.5\,\hat{\sigma}_o, +2.5\,\hat{\sigma}_o]$.



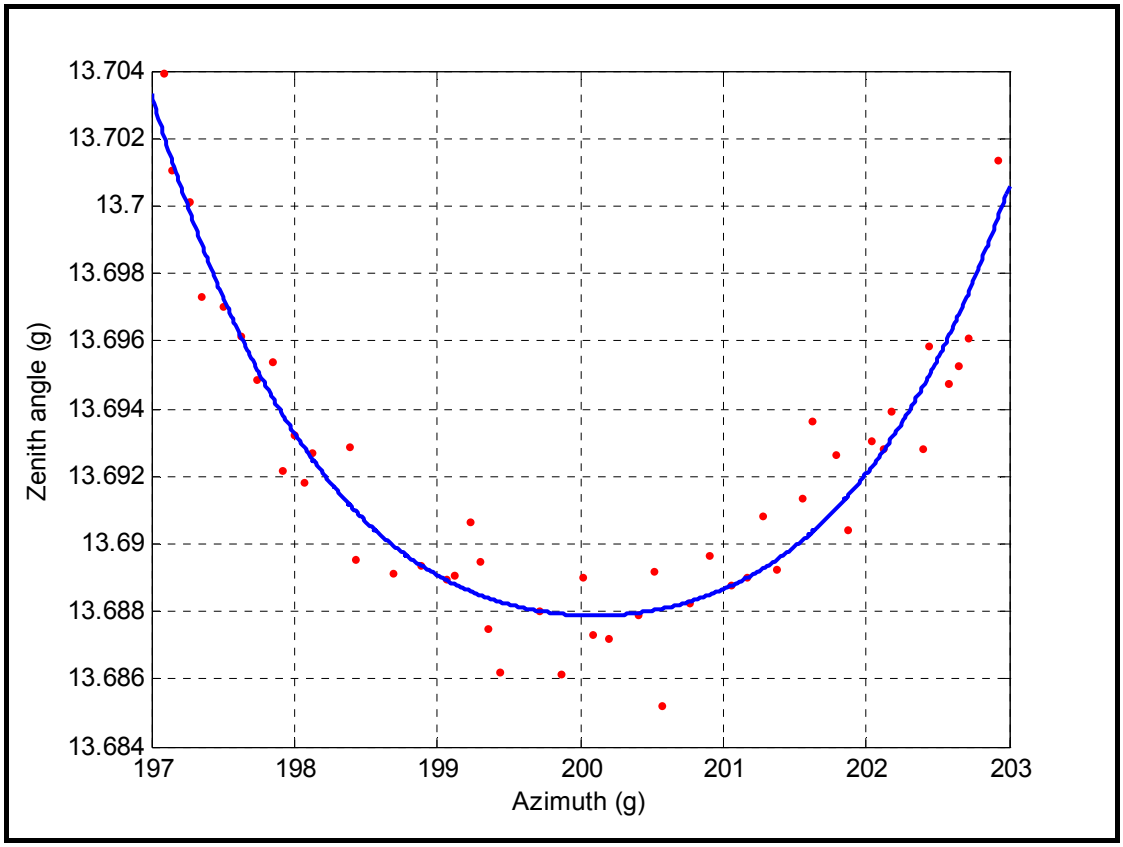
3. TYC 3458 - 2328



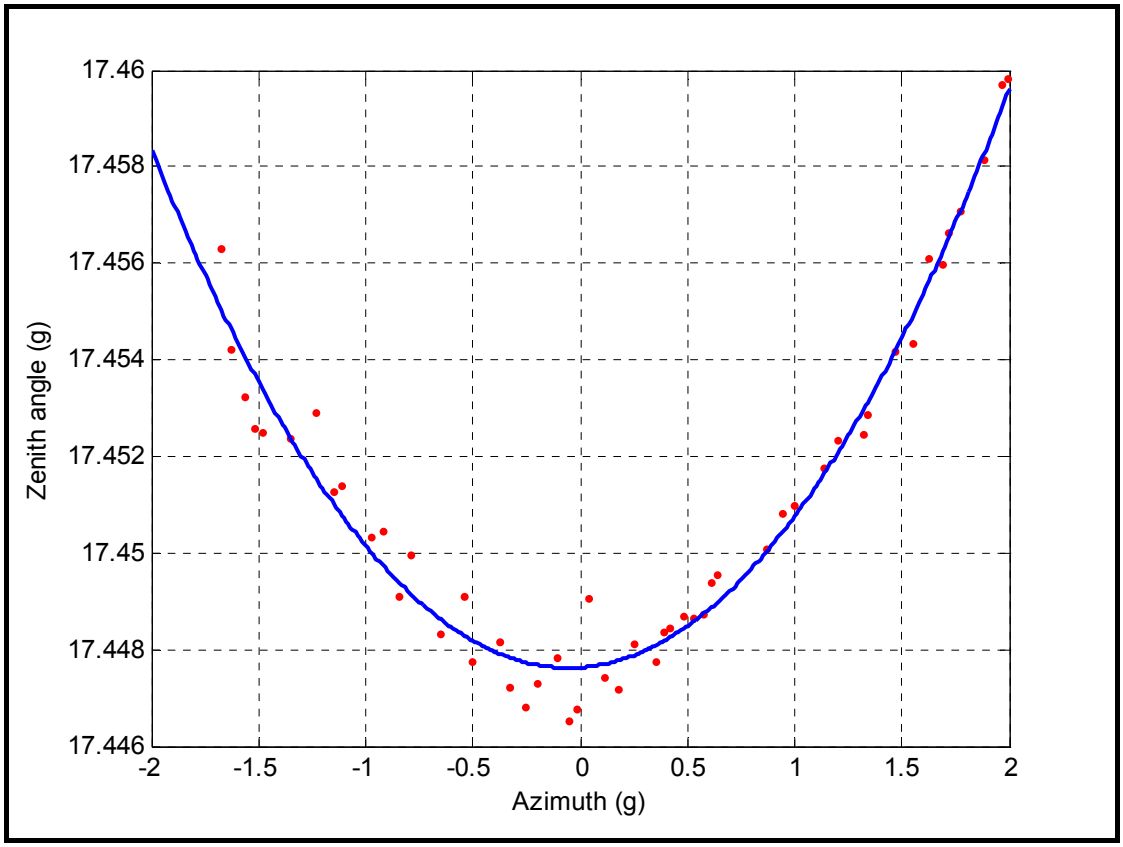
4. TYC 1989 - 3213



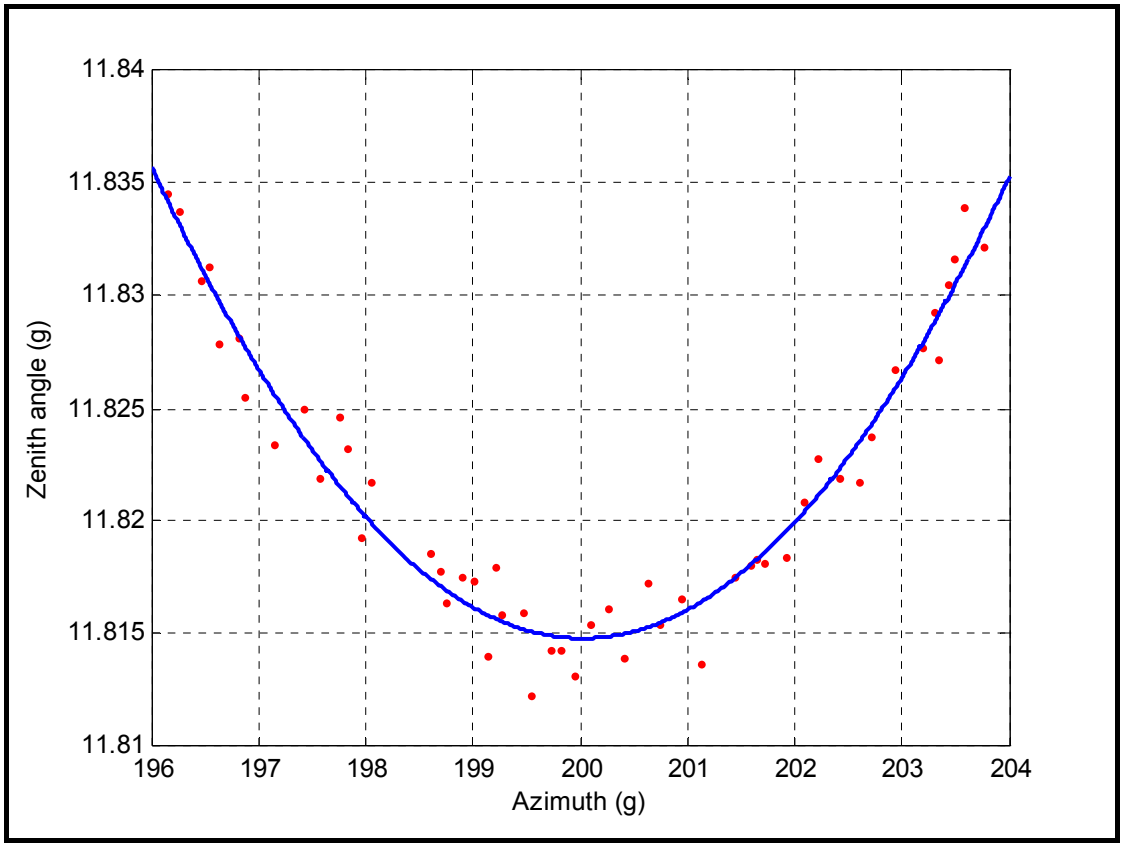
8. TYC 1454 - 0967



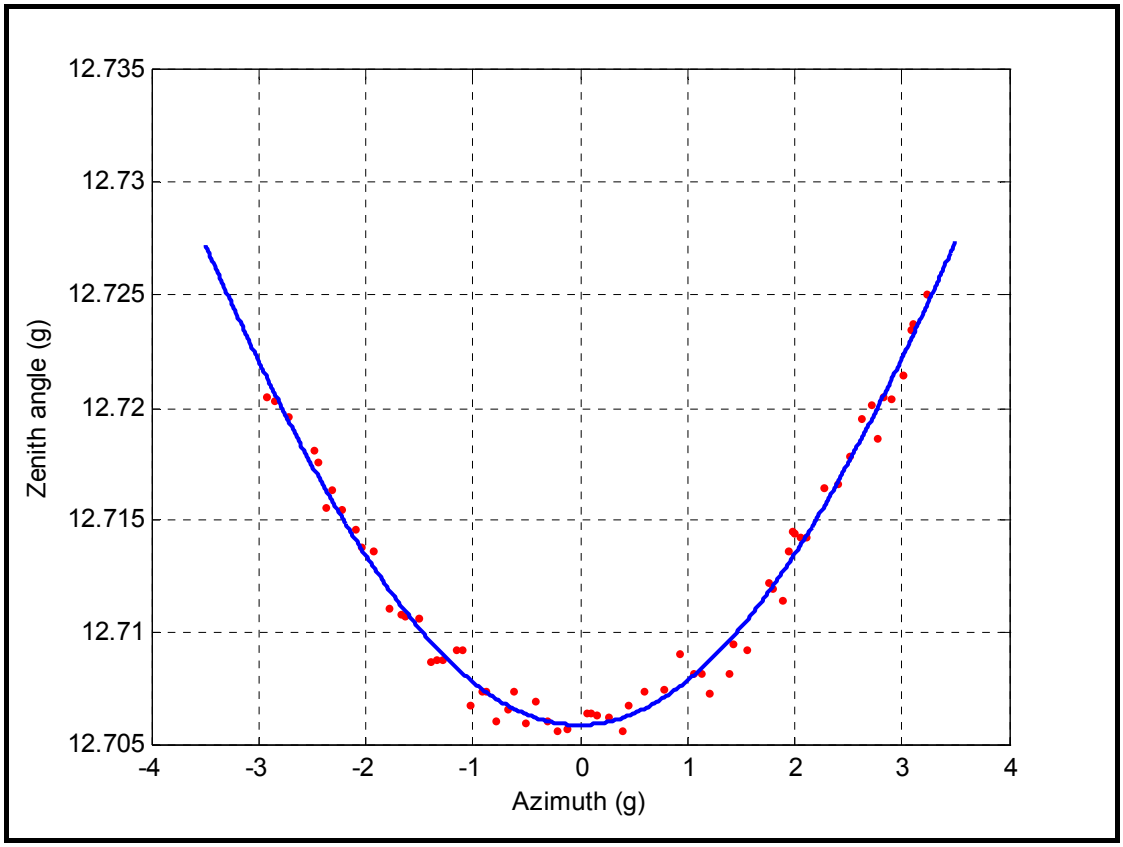
11. TYC 2002 - 1055



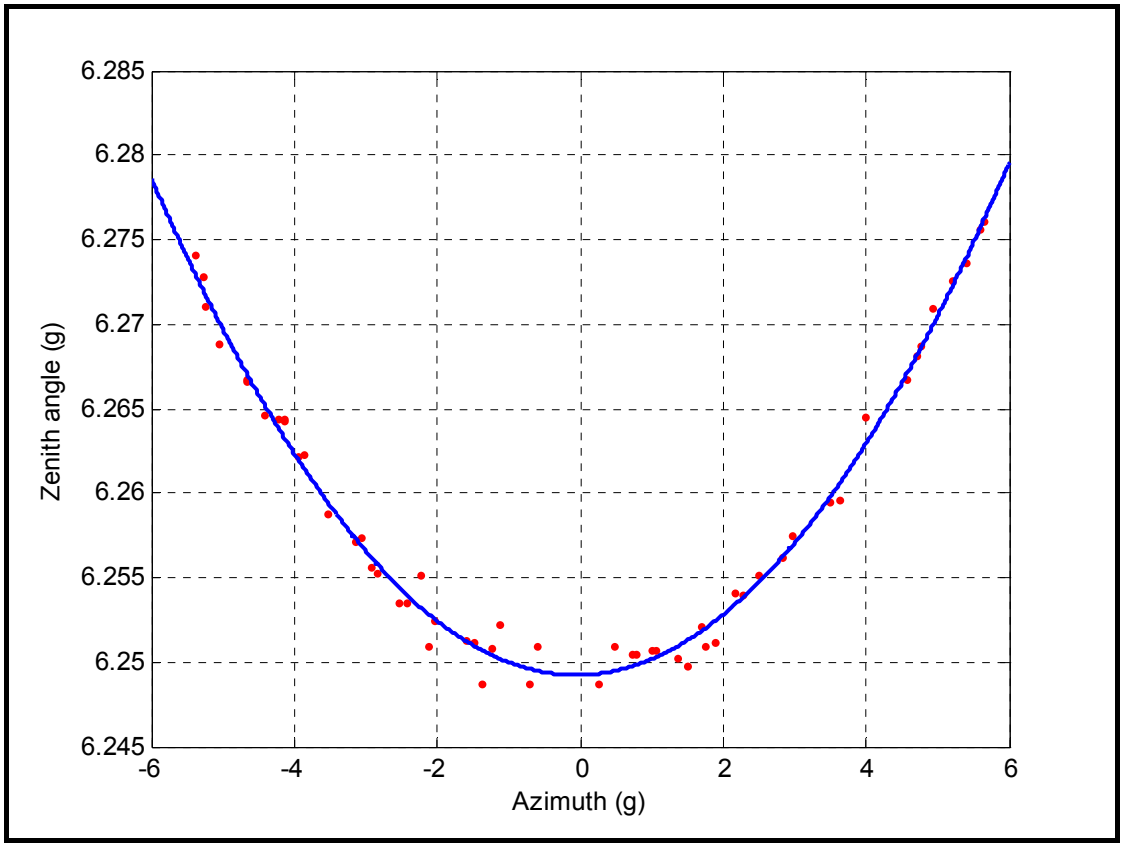
12. TYC 3851 - 1508



13. TYC 2009 - 0085



14. TYC 3468 - 1122



15. TYC 3042 - 1024

Γ.2 3η ΣΕΙΡΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/05/09

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

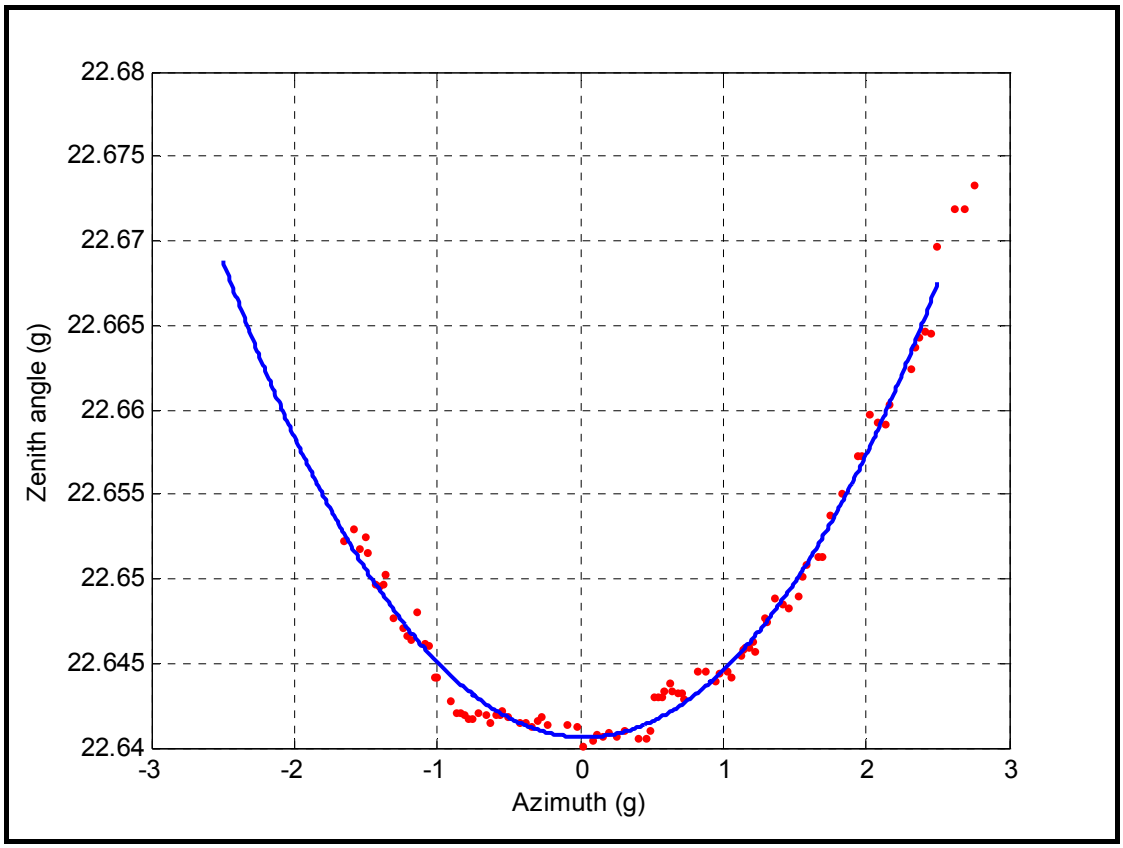
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

	Όνομα			Τ(έναρξης)	Α(έναρξης)	Ζ(έναρξης)	Τ(ά.μ.)	Ζ(ά.μ.)	Τ(λήξης)	m
				UTC	g	g		g	UTC	
1	3847	1128	N	18:52:35	1.92006	22.65423	18:57:09	22.63907	19:01:14	5.374
2	1448	3273	S	19:01:44	195.92434	18.87706	19:06:19	18.84489	19:10:33	5.587
3	4162	1200	N	19:11:03	1.72296	24.77963	19:15:47	24.76557	19:20:25	5.885
4	1450	1133	S	19:20:55	196.12382	22.93636	19:26:03	22.90202	19:31:33	4.922
5	0897	0595	S	19:38:52	196.40159	27.08237	19:44:21	27.04835	19:48:19	5.468
6	3460	2493	N	19:48:49	6.18908	8.93915	19:53:17	8.89141	19:58:46	5.983
7	3851	1506	N	20:02:11	3.08064	18.53466	20:07:40	18.50552	20:11:41	4.828
8	1466	1082	S	20:12:11	195.93997	18.64759	20:16:42	18.61599	20:20:39	5.075
9	1473	1074	S	20:21:09	195.90282	18.16664	20:25:36	18.13518	20:29:42	5.747
10	3040	0969	N	20:30:12	9.02400	6.55249	20:34:48	6.48079	20:38:30	5.394
11	3472	1264	N	20:39:00	5.77519	9.00580	20:43:13	8.96387	20:47:46	4.181
12	1479	1217	S	20:48:16	195.87325	20.9104	20:53:20	20.8744	20:56:52	5.425
13	3476	1538	N	20:57:22	3.72223	12.63555	21:01:25	12.6096	21:05:19	5.916
14	2019	1252	S	21:05:49	194.49509	12.80366	21:10:14	12.76182	21:15:43	5.003
15	1485	0540	S	21:18:30	196.02605	24.06064	21:23:59	24.02306	21:27:56	5.821
16	3861	1445	N	21:28:26	2.52570	18.39665	21:32:53	18.37726	21:38:22	5.355

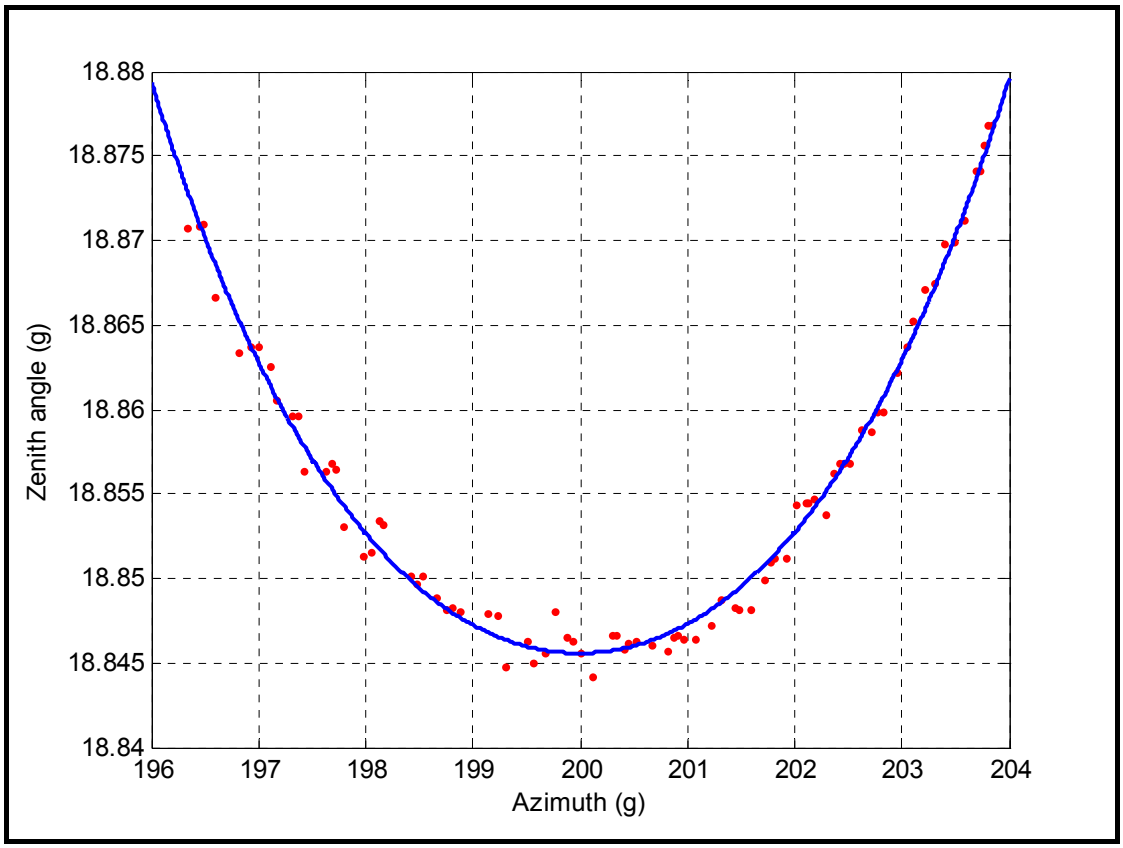
ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΣΤΡΩΝ

	Όνομα		α*			δ*			m		Τ(ά.μ.)	Ζ(ά.μ.)
			h	m	s	°	'	"				
1	3847	1128	12	30	26.139	58	21	21.005	5.374	N	18:57:09	22.63907
2	1448	3273	12	39	37.046	21	00	35.801	5.587	S	19:06:19	18.84489
3	4162	1200	12	49	06.741	60	16	12.959	5.885	N	19:15:47	24.76557
4	1450	1133	12	59	25.072	17	21	26.799	4.922	S	19:26:03	22.90202
5	0897	0595	13	17	45.316	13	37	28.504	5.468	S	19:44:21	27.04835
6	3460	2493	13	26	43.120	45	58	45.880	5.983	N	19:53:17	8.89141
7	3851	1506	13	41	08.396	54	38	04.321	4.828	N	20:07:40	18.50552
8	1466	1082	13	50	11.467	21	12	57.648	5.075	S	20:16:42	18.61599
9	1473	1074	13	59	07.344	21	38	55.944	5.747	S	20:25:36	18.13518
10	3040	0969	14	08	20.702	43	48	33.380	5.394	N	20:34:48	6.48079
11	3472	1264	14	16	46.954	46	02	40.715	4.181	N	20:43:13	8.96387
12	1479	1217	14	26	55.640	19	10	58.247	5.425	S	20:53:20	20.8744
13	3476	1538	14	35	02.002	49	19	36.123	5.916	N	21:01:25	12.6096
14	2019	1252	14	43	52.293	26	29	10.543	5.003	S	21:10:14	12.76182
15	1485	0540	14	57	40.060	16	20	53.518	5.821	S	21:23:59	24.02306
16	3861	1445	15	06	35.783	54	31	08.636	5.355	N	21:32:53	18.37726
*Την εποχή των παρατηρήσεων												

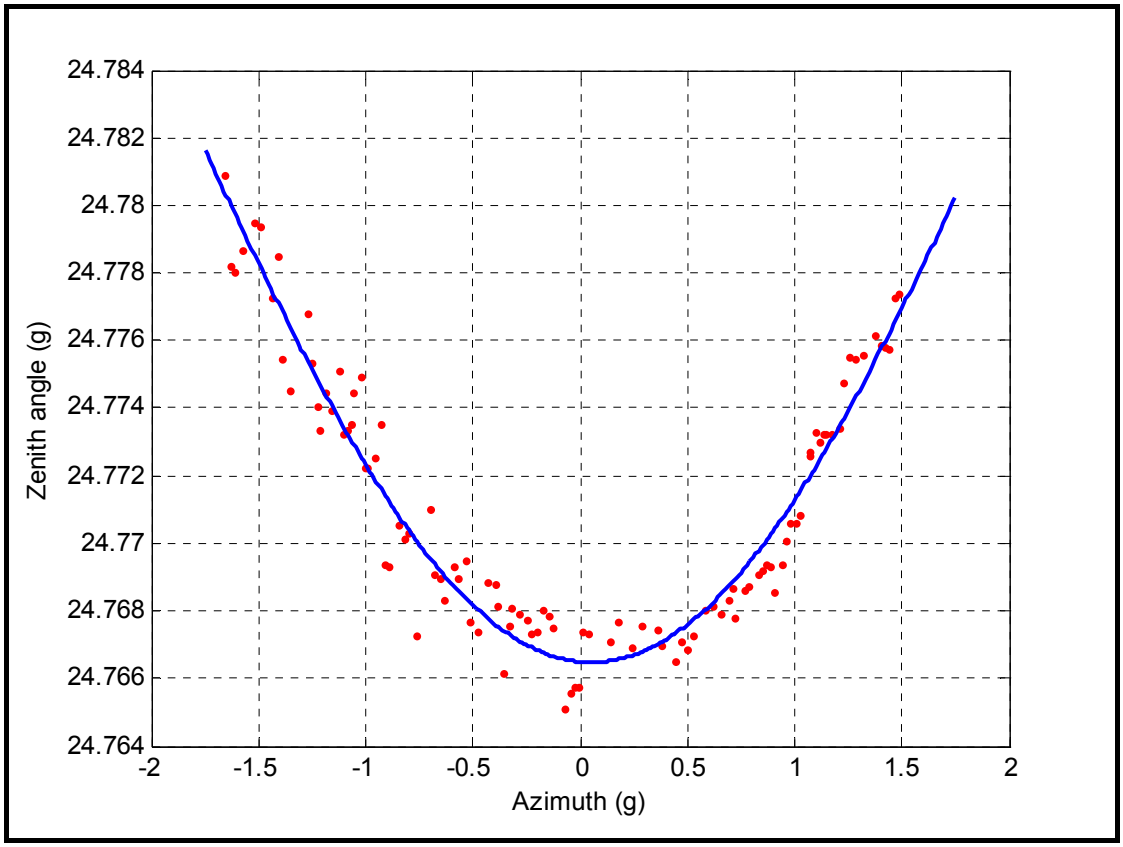
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ 4^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ



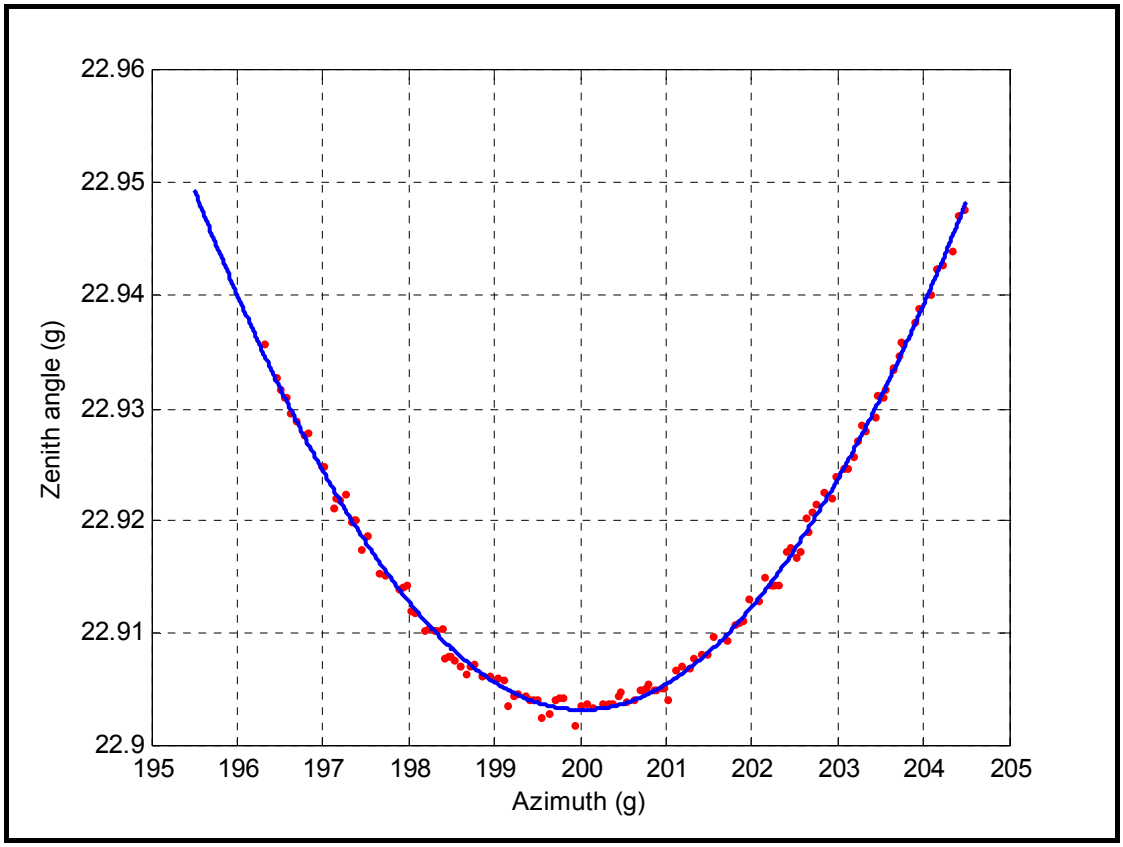
1. TYC 3847 - 1128



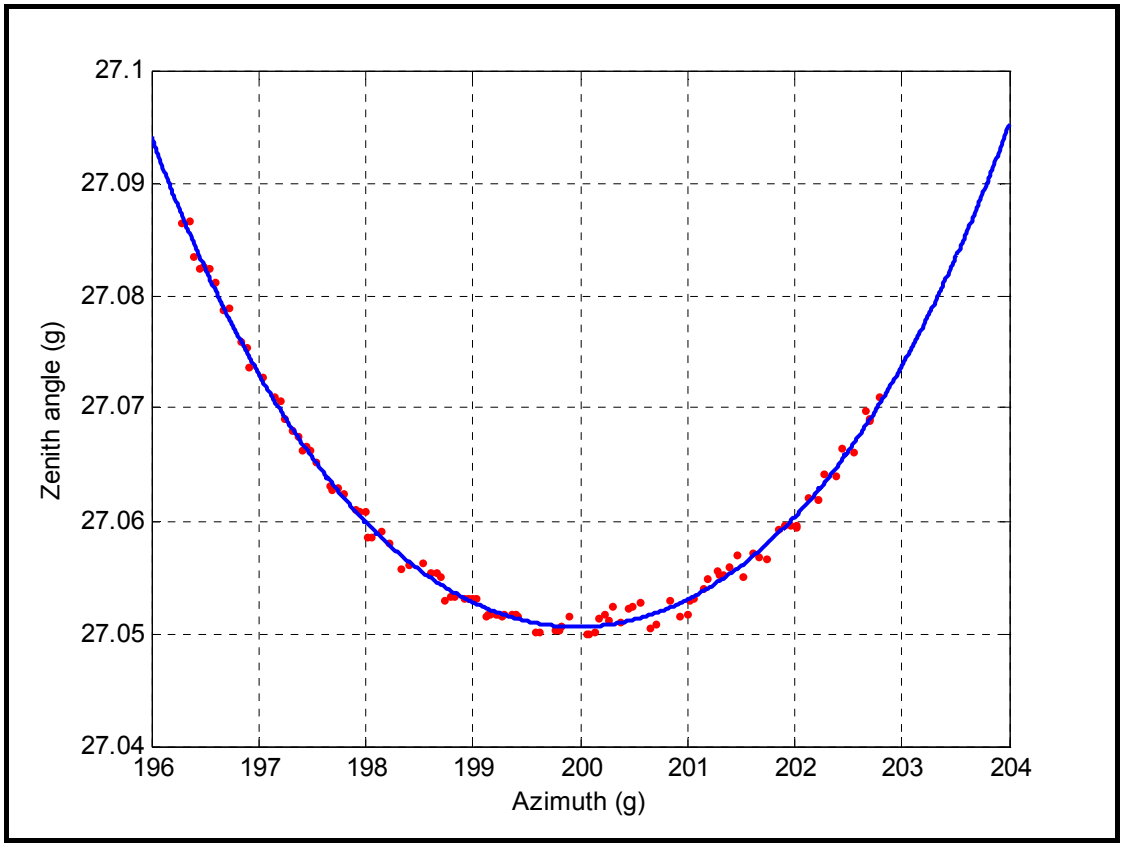
2. TYC 1448 - 3273



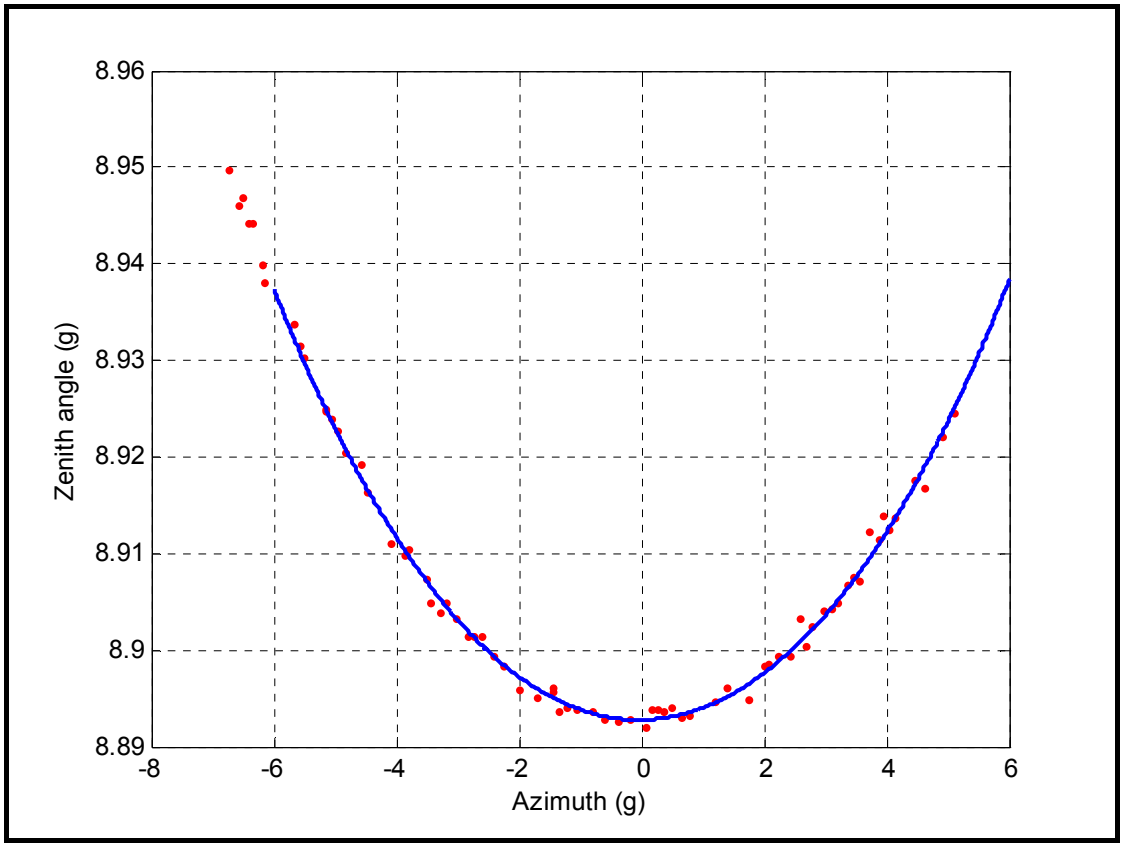
3. TYC 4162 - 1200



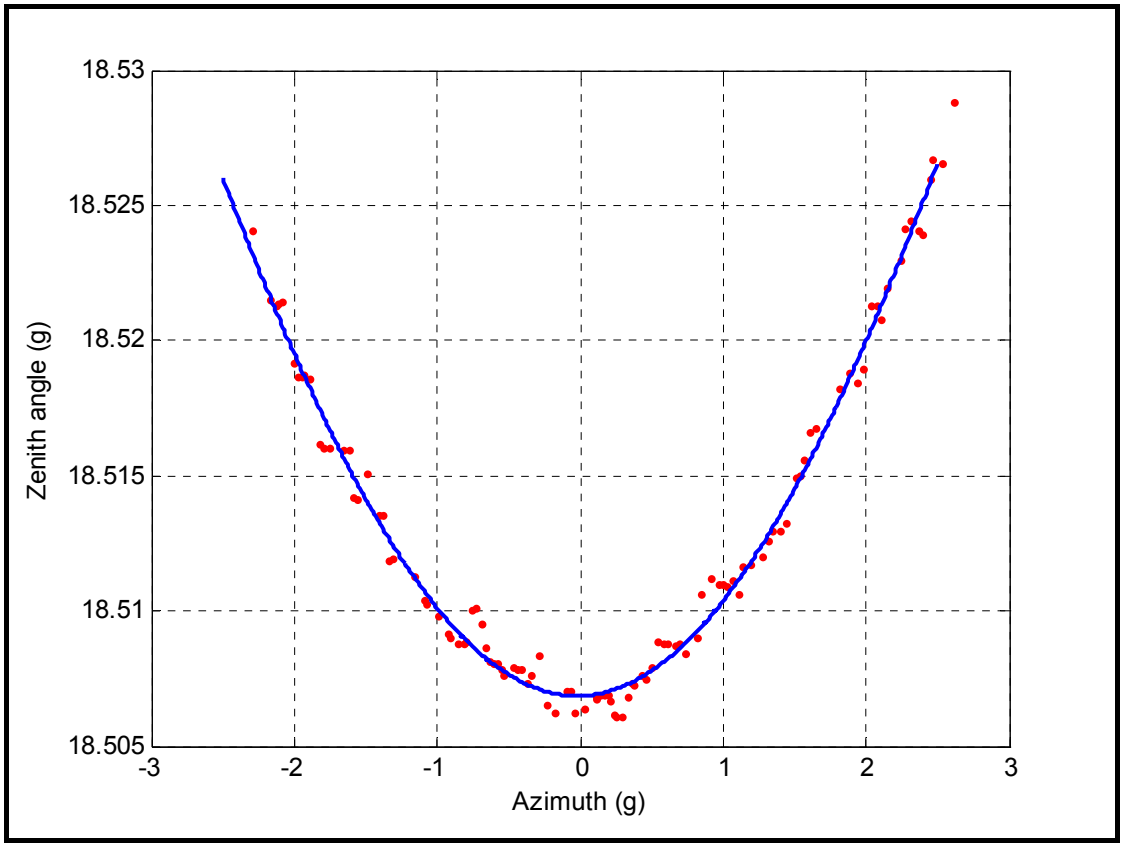
4. TYC 1450 - 1133



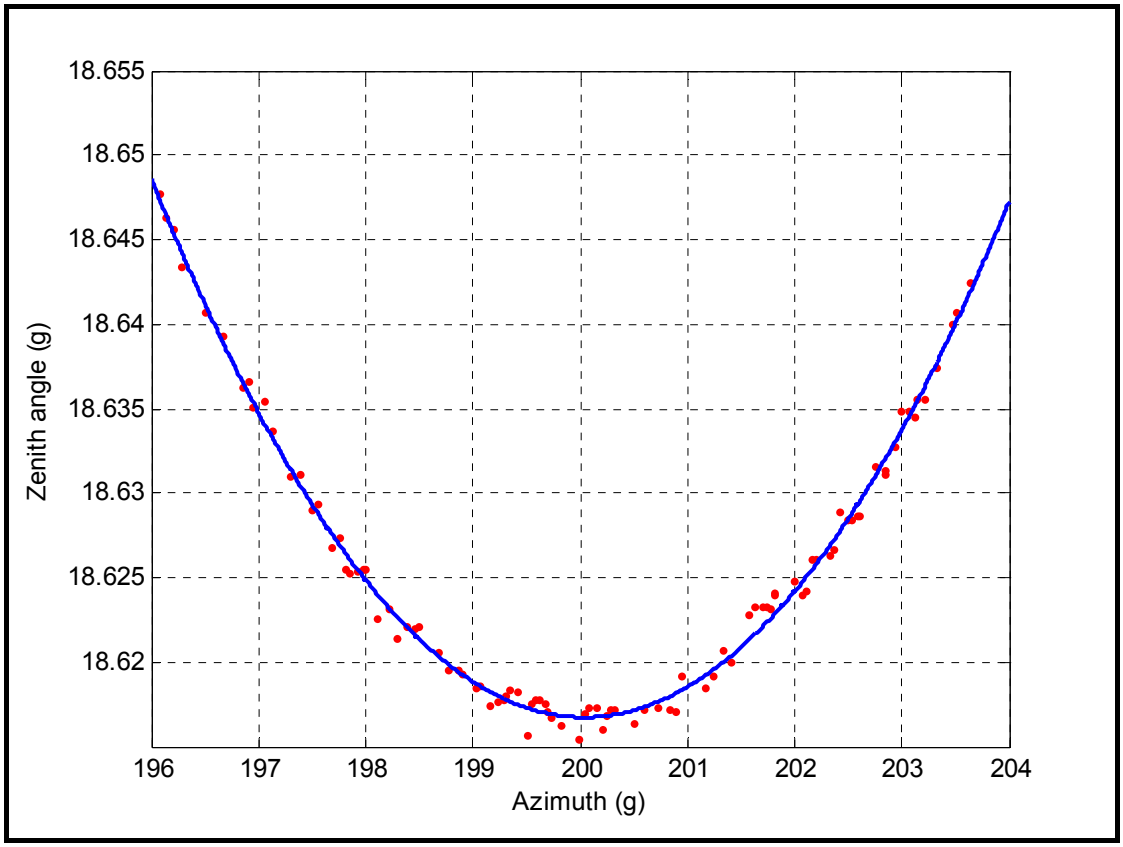
5. TYC 0897 - 0595



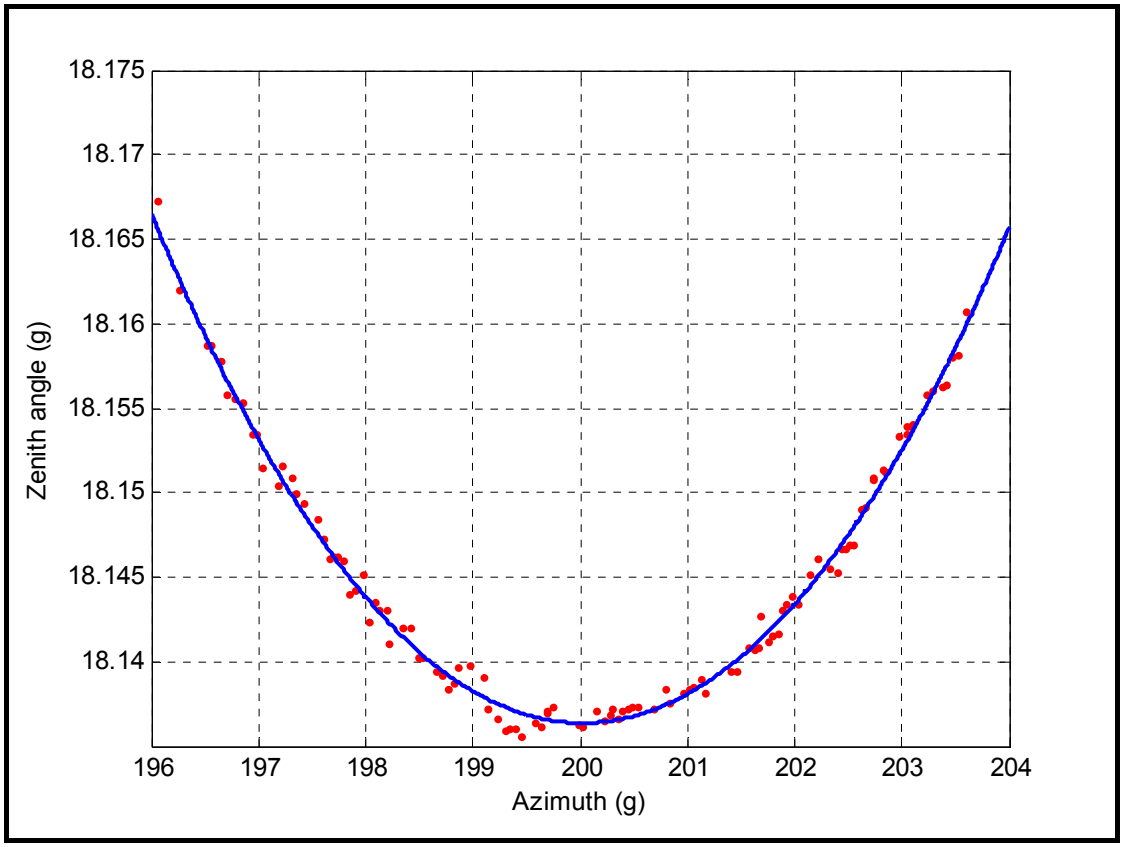
6. TYC 3460 - 2493



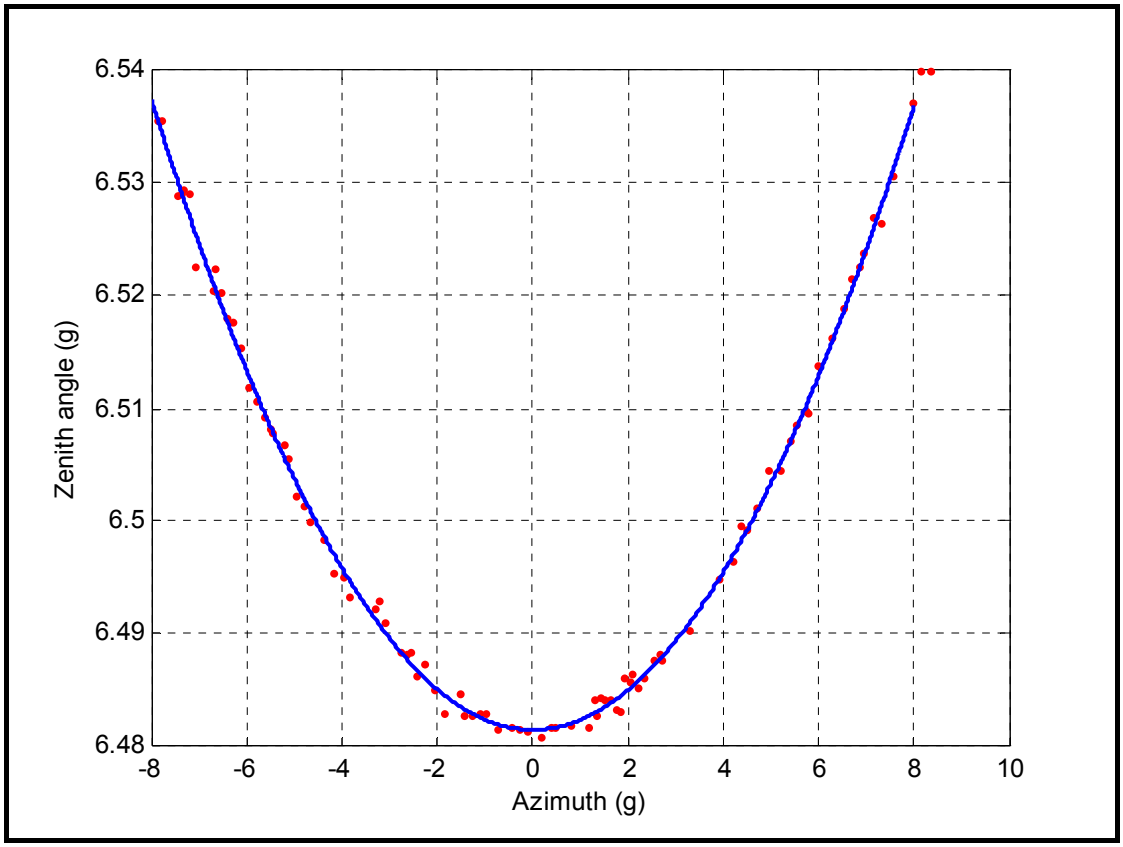
7. TYC 3851 - 1506



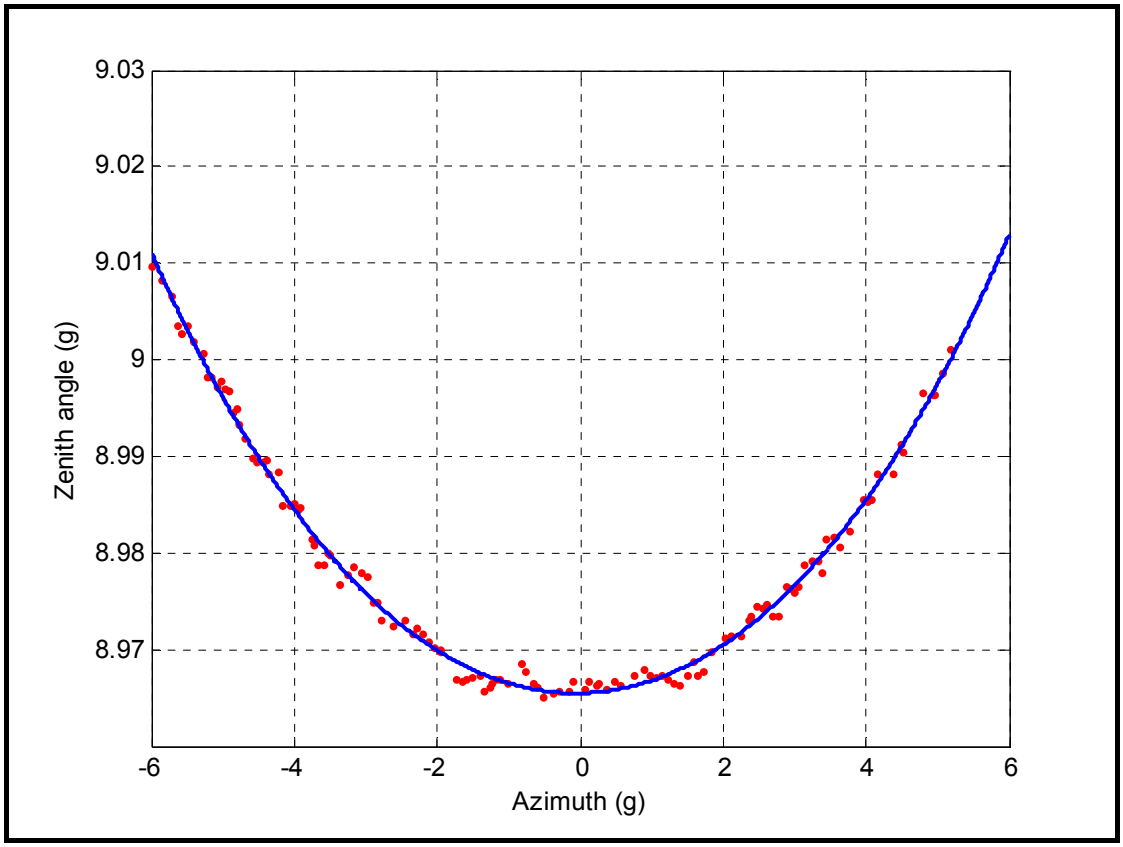
8. TYC 1466 - 1082



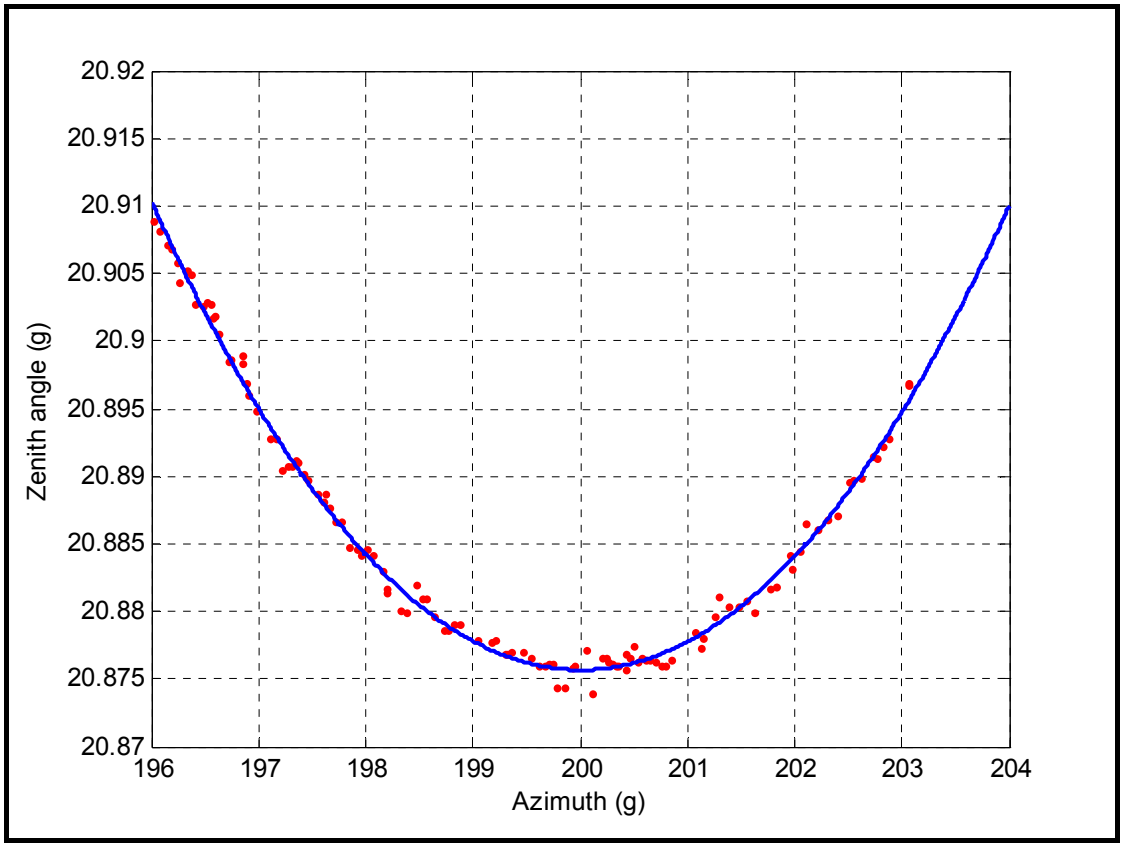
9. TYC 1473 - 1074



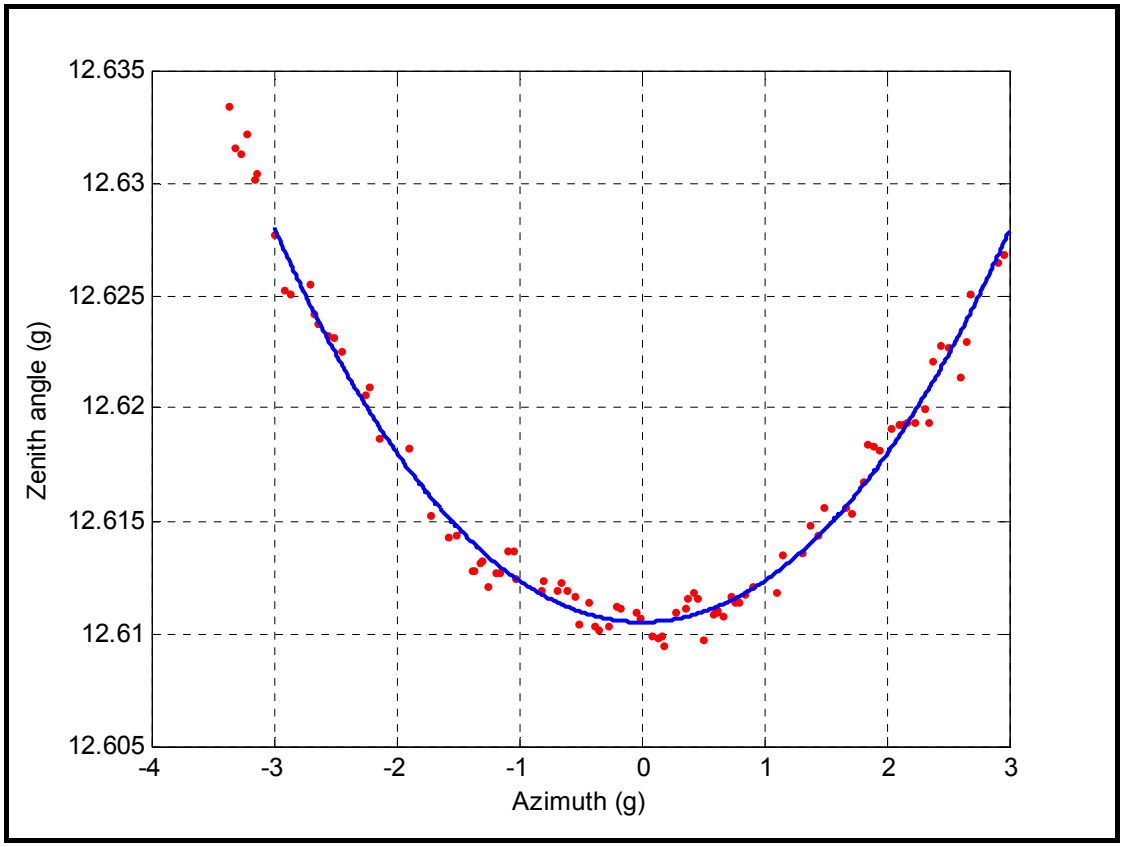
10. TYC 3040 - 0969



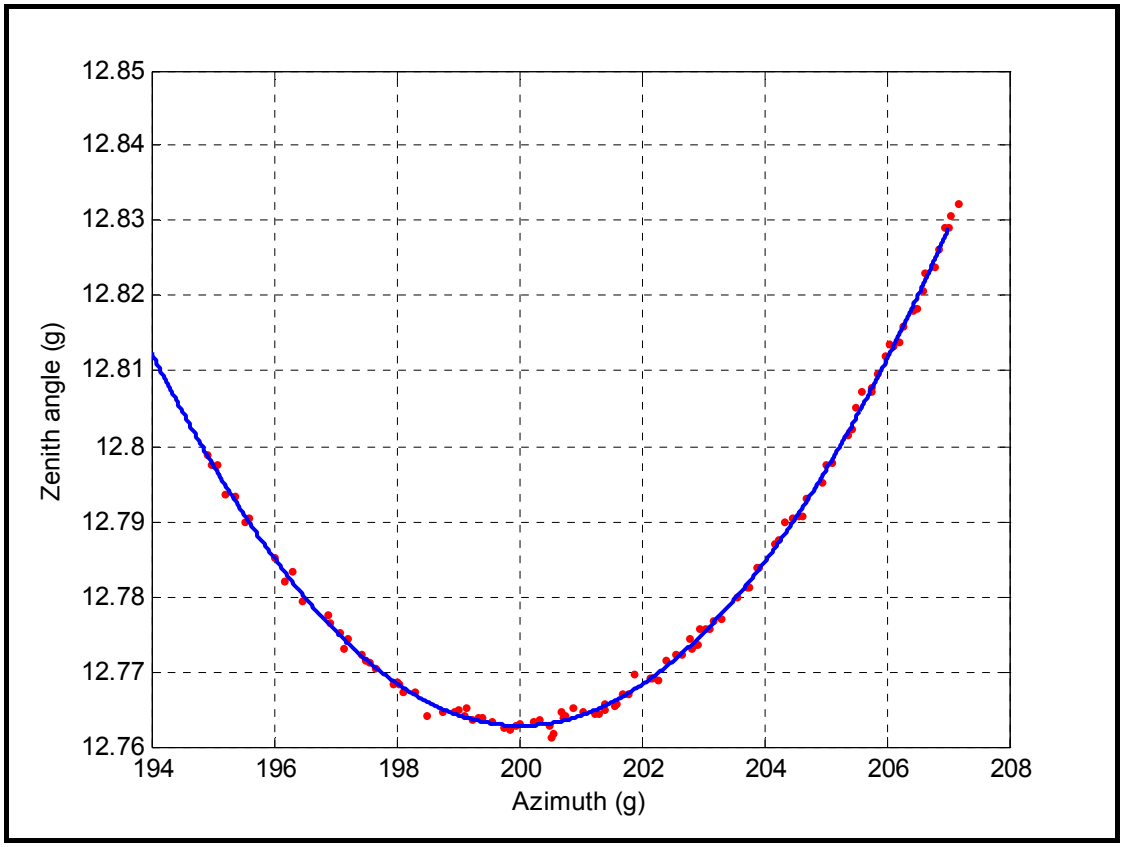
11. TYC 3472 - 1264



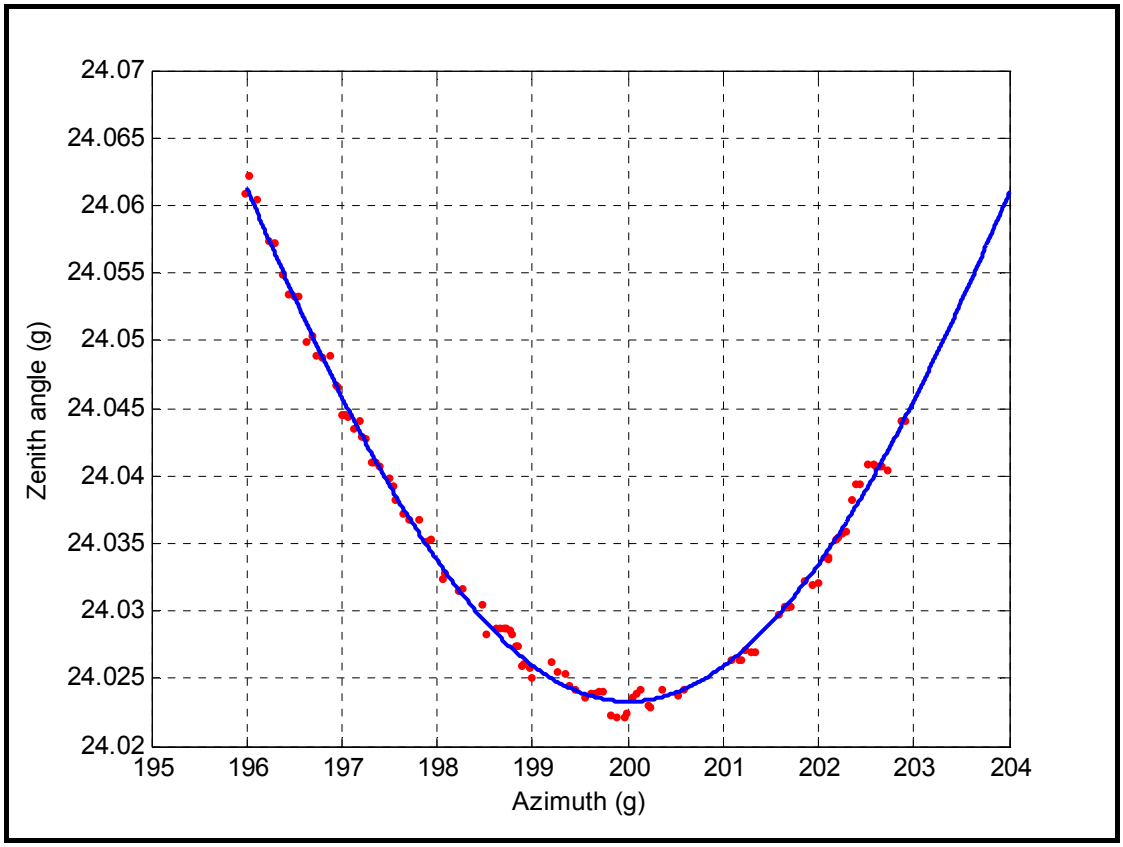
12. TYC 1479 - 1217



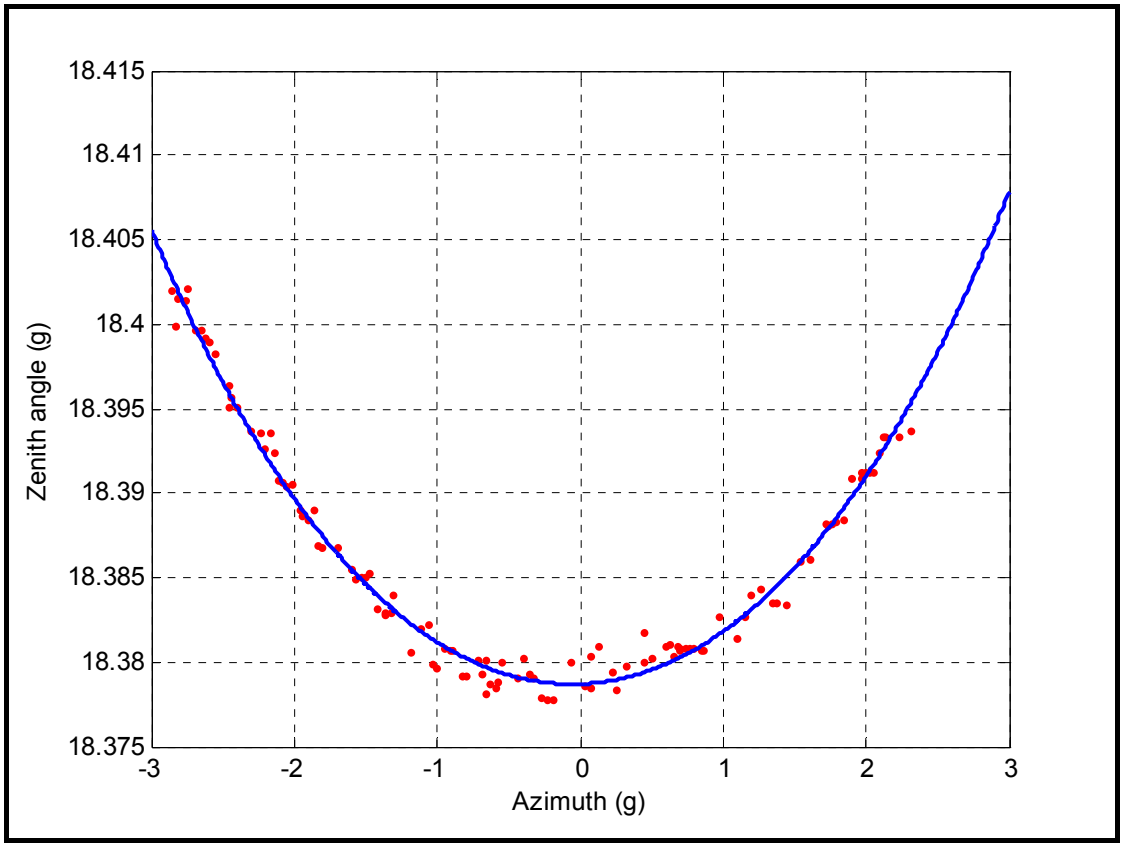
13. TYC 3476 - 1538



14. TYC 2019 - 1252



15. TYC 1485 - 0540



16. TYC 3861 - 1445