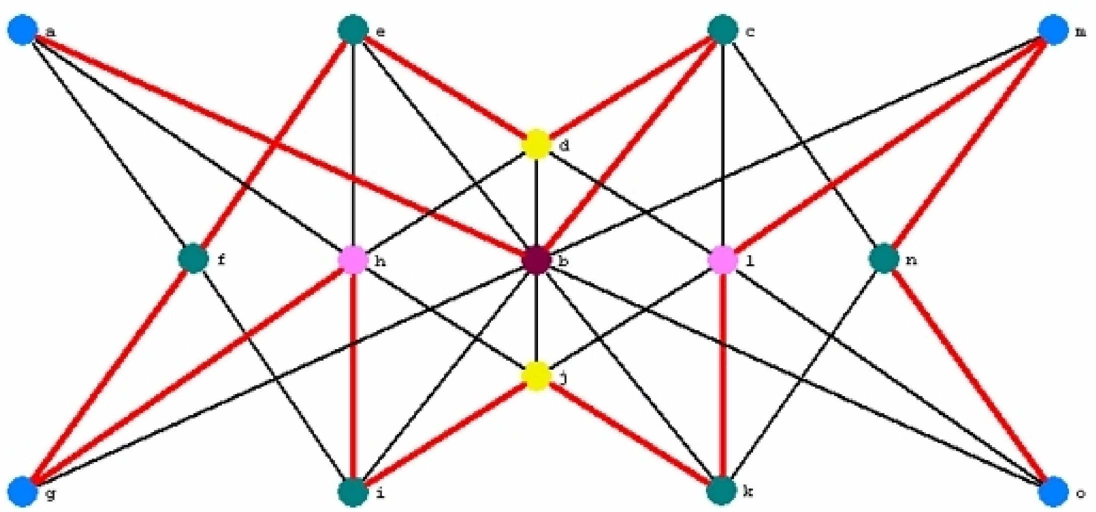
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική Εργασία

Σχέση Ν – διάστατης Γεωμετρίας - Γραμμικού Προγραμματισμού - Γραφοθεωρίας - Πληροφορικής



Μηνάς Πάλλας

Επιτροπή:Κ.Γιαννάκογλου (Σ.Μ.Μ.)
Ν.Πάλλα (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) (επιβλέπουσα)
Α.Παπαϊωάννου (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)

Αθήνα 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα προγράμματα σπουδών των Σχολών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου αλλά και των περισσότερων τεχνικών πανεπιστημίων του εξωτερικού διδάσκεται το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας. Αντικείμενο σχετικά νέο, το οποίο αποσχόλησε και απασχολεί επιστήμονες απο διάφορα επιστημονικά πεδία, καθώς έχει πολλές και περίπλοκες πολλές φορές εφαρμογές.

Είναι σημαντικό για ένα μηχανικό να μπορεί να κάνει εκτιμήσεις σχετικά με το κόστος των εργασιών που έχει προγραμματίσει, ή για το ποιός είναι ο πιο σύντομος και κερδοφόρος δρόμος για να μεταφέρει πρώτες ύλες. Με όλα αυτά ασχολείται η Επιχειρησιακή Έρευνα.

Στις μέρες μας που όλο και περισσότεροι μηχανικοί απασχολούνται ως διοικητικά στελέχη σε εργοστάσια και διάφορους οργανισμούς η βαθιά γνώση των μεθόδων και θεωριών που χρησιμοποιούνται απο την Επιχειρησιακή Έρευνα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Σε αυτή την εργασία στα πλαίσια σπουδών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών (κατεύθυνση Μηχανικού Παραγωγής), χρησιμοποιώντας n – διάστατη Γεωμετρία εμβαθύνουμε στη μέθοδο του Γραμμικού Προγραμματισμού και μάλιστα την συνδέουμε με άλλα πεδία των ‘μοντέρνων’ μαθηματικών με σκοπό την εύρεση εναλλακτικών μεθόδων προσέγγισης του προβλήματος.

Είναι σημαντικό για ένα σύγχρονο Μηχανικό να μπορεί να παίρνει γρήγορες και κερδοφόρες αποφάσεις και να διαχειρίζεται μία εργασία με επιτυχία. Έχει λοιπόν ανάγκη απο καλές γνώσεις γύρο απο την Επιχειρισιακή Έρευνα και τον Γραμμικό Προγραμματισμό που θα αποτελέσουν τους πιό αξιόπιστους συμβούλους για το ενστικτό του, που πάντα έχει εξάλλου τον τελευταίο λόγο στον κόσμο του Επιχειρείν.

Για την υποστήριξη αυτής της εργασίας οφείλω θερμές ευχαριστίες στην τριμελή επιτροπή αποτελουμένη απο τους κ.κ.:

Κυριάκο Γιαννάκογλου, Αν.Καθηγητή Σ.Μ.Μ. Ε.Μ.Π.

Αλέξανδρο Παπαϊωάννου, Επ..Καθηγητή Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π.

Νίκη Πάλλα, Λέκτ. Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2008

Μηνάς Ν.Πάλλας

Σημείωση του συγγραφέα.

Αναλυτική Γεωμετρία (αντικείμενο που διδασκόμαστε στα πλαίσια του μαθήματος Μαθηματικά Ιβ στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών) είναι η Γεωμετρία που περιγράφει τα Γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους με αλγεβρικές σχέσεις και εξισώσεις.Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ Γεωμετρικών σχημάτων και αλγεβρικών σχέσεων – εξισώσεων.

Για παράδειγμα

η εξίσωση $ax+\beta y=\gamma$ στον IR^2 παριστάνει ευθεία και αντίστροφα

η εξίσωση $ax+\beta y+\gamma z=\delta$ στον IR^3 με κάποιο από τα $a,\beta,\gamma\neq 0$ παριστάνει επίπεδο και αντίστροφα.

η εξίσωση $a_1x_1+a_2x_2+...+a_\nu x_\nu=\beta$ στον IR^n με όχι ολα τα $a_i=0$ παριστάνει υπερεπίπεδο και αντίστροφα.

Είναι προφανές ότι IR^2 και IR^3 είναι ειδικές περιπτώσεις του IR^n. Όμως, στον περιβάλλοντα χώρο ασχολούμαστε με την Γεωμετρία του IR^2 (επιπέδου), του IR^3 (χώρου) , του IR^n (χωροχρόνου).

Η Γεωμετρία του IR^n έχει εφαρμογές σε προβλήματα με πολλές μεταβλητές, όπως είναι τα οικονομικά προβλήματα. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού. Επομένως η Γεωμετρία του IR^n (n – διάστατη Γεωμετρία) έχει εφαρμογές στο Γραμμικό Προγραμματισμό.

Περνώντας απο την n – διάστατη Γεωμετρία σε μία άλλη καινούργια περιοχή των διακριτών μαθηματικών με πολλές εφαρμογές και στα οικονομικά μαθηματικά, την Θεωρία Γραφημάτων ουσιαστικά ρίχνουμε λίγο φώς στην βασιλική οδό που θα μας περάσει από το Engineering στο Management Science.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο **Γραμμικός Προγραμματισμός** είναι μια σχετικά νέα περιοχή των Μαθηματικών, αναπτύχθηκε την εποχή του $2^{ου}$ Παγκοσμίου Πολέμου απο τους *F.Hitchcook*, *L.Kantorovich*, *T.Koopmans* και *G.Dantzing* και είχε κίνητρα τις οικονομικές θεωρίες των *J.V.Neumann* και *W.Leontief* που διετυπώθησαν το 1930.

Το 1947 ο *Dantzing* θεμελίωσε το γενικό πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού και έδωσε μια απλοποιημένη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος γνωστής με το όνομα **'Μέθοδος Simplex'**. Απο τότε ο Γραμμικός Προγραμματισμός βρήκε πολλές εφαρμογές στη Βιομηχανία, στις Τηλεπικοινωνίες, στις Μεταφορές, στη Γεωργία κ.α.

Στο πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού στόχος μας είναι η εύρεση των μη αρνητικών τιμών των μεταβλητών $x_1, x_2, ..., x_\nu$ που βελτιστοποιούν (μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν) τη **Γραμμική Συνάρτηση**:

$$F = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_\nu x_\nu \quad (1)$$

όταν οι μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ πληρούν ορισμένους περιορισμούς που εκφράζονται με γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις. Χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ο μεγάλος αριθμός λύσεων που ικανοποιούν τους περιορισμούς κάθε προβλήματος από τις οποίες επιλέγεται η καταλληλότερη που βελτιστοποιεί την συνάρτηση (1).

Στο τεύχος αυτο αναπτύσσονται τα εξής 5 ΚΕΦΑΛΑΙΑ:

I. Ιστορική αναδρομή και εξέλιξη του Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.
II. Μορφή και λύση του Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.
III. Σχέση n – διάστατης Γεωμετρίας και Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού .
IV. Σχέση Θεωρίας Γραφημάτων και Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού.
V. Σχέση Πληροφορικής και Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

1. Ιστορική Αναδρομή

Ο άνθρωπος στη μακραίωνη ιστορία του επεδίωκε να βρεί τον ευνοϊκώτερο τρόπο για να εκτελέσει τις διάφορες εργασίες του.

Σε αυτό οφείλεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών.

Απο τους πανάρχαιους πολιτισμούς οι διοικούντες είχαν συμβούλους σοφούς, οι οποίοι έδιναν συμβουλές για τον αποδοτικώτερο τρόπο εκτέλεσης ενός παραγωγικού έργου, για τον οικονομικότερο τρόπο εκτέλεσης μιάς κατασκευής, για το πλέον στρατηγικό σχέδιο επίθεσης ή άμυνας σε περίπτωση πολέμου.

Οι συμβουλές αυτές εβασίζοντο στην πείρα και την διαίσθηση των συμβούλων.

Η ανάπτυξη των μαθηματικών σε αρχαίους λαούς ιδιαίτερα στους Ινδούς , Κινέζους, Άραβες ήταν συνυφασμένη με την προσπάθεια εύρεσης κατάλληλης μεθόδου για την εκτέλεση εργασίας ή κατασκευής.

Στην αρχαία Ελλάδα , όπου ο λογισμός κατείχε την υψηλότερη θέση μεταξύ των αρετών, ήταν διάχυτη η προσπάθεια **‘εύρεσις βελτίστου δια της σκέψεως’**.

Αυτό είναι φανερό στο **Τρίτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη**, στο οποίο αναφέρει την εύρεση του μεγίστου και ελαχίστου ευθυγράμμου τμήματος που μπορούμε να φέρουμε απο σημείο σε κύκλο. Επίσης στο **Τέταρτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη** αναφέρεται η εύρεση παραλληλογράμμου με την μέγιστη επιφάνεια, όταν δίδεται η περιμετρός του.

Παρά την ανάπτυξη των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας στην Ελλάδα, η ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης δεν ήταν σημαντική.Αυτό συνέβη, διότι οι Έλληνες φιλόσοφοι θεωρούσαν ότι υποβίβαζαν την καθαρά μαθηματική επιστήμη αν την χρησιμοποιούσαν για την επίλυση τεχνικών προβλημάτων.Η αντίληψη αυτή μεταβιβάστηκε και στους φιλοσόφους της Αναγέννησης.

Απο την εποχή των *Newton* και *Leibnitz* επικρατεί η αντίληψη ότι ‘κάθε τι στον κόσμο διέπεται απο μια αρχή μεγίστου ή ελαχίστου’.

Στην Οικονομική Θεωρία η ιδέα του βέλτιστου εμφανίστηκε στα τέλη του $18^{ου}$ αιώνα.

Τις πρώτες ιδέες για την εύρεση του βέλτιστου μιας συνάρτησης έδωσαν ο *Kepler*, ο *Fermat*, ο *Descartes* και αργότερα ο *Euler* και ο *Lagrange*.Οι μέθοδοι που πρότειναν βασίζονται στον Διαφορικό Λογισμό και οι ανεξάρτητες μεταβλητές δε συνδέονται με άλλες σχέσεις ή συνθήκες.

Οι κλασσικές μαθηματικές θεωρίες βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης θεμελιώθηκαν απο τους μαθηματικούς του $17^{ου}$ και $18^{ου}$ αιώνα.Λίγα χρόνια αργότερα το ενδιαφέρον στρέφεται στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων,όπου επιτυχία σημείωσε η **μέθοδος Gauss**.Την ίδια εποχή το ενδιαφέρον του *Fourier* στρέφεται στα ανισοτικά συστήματα, όπου προσπάθησε να βρεί την μικρότερη απόκλιση απο ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων και πρότεινε:

'μια λύση μεταβάσεως απο κορυφή σε κορυφή ενός πολυέδρου μέχρι την εύρεση του ελαχίστου'.

Σε αυτή την αρχή βασίζεται η μετέπειτα εμφανιζόμενη **'μέθοδος Simplex'***.

Και άλλοι μαθηματικοί έδειξαν ενδιαφέρον για το θέμα των γραμμικών ανισοτήτων στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα, όπως οι *Jordan*, *Stiemke*, *Motzkin* κ.ά. Διατυπώθηκαν θεωρήματα, στα οποία γινόταν χρήση του προβλήματος και του **'δυϊκού'** του και συνδυάστηκαν οι λύσεις των δύο προβλημάτων.

Ο *Motzkin* το 1936 παρουσίασε σημαντική εργασία σχετική με ανισοτικά συστήματα. Εισήγαγε την μέθοδο που προτάθηκε απο τον *Fourier* συστηματοποιημένη σε ένα αλγόριθμο γνωστό ως **'Μέθοδος Απαλοιφής *Fourier-Motzkin*'**.

Διατύπωσε επίσης θεωρήματα σχετικά με λύσεις που έχουν μη αρνητικές τιμές οι μεταβλητές.Αξιοσημείωτη υπήρξε η προσφορά του *Minkowski* για ανισοτικά συστήματα, όπου αναφέρεται ότι:

'Η γενική λύση μπορεί να μορφωθεί ως γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών λύσεων, τις οποίες ονομάζει **ακραίες λύσεις, βασικές λύσεις, ή λύσεις κορυφής**'.

Η ορολογία αυτή διατηρήθηκε και στην μετέπειτα θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Μια άλλη ιδιαίτερα σημαντική προσφορά υπήρξε το **θεώρημα Mini- max** του *John von Neumann* το 1928 και η **Θεωρία Παιγνίων** την οποία ανέπτυξε μαζί με τον *Morgenstern*.Η **Θεωρία Παιγνίων** ,όπως και ο **Γραμμικός Προγραμματισμός**,

---

* Βλέπε ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ, σελ.24

βασίζονται στη θεωρία Γραμμικών Ανισοτήτων, για το λόγο αυτό είναι δυνατή η μετατροπή και επίλυση προβλημάτων Παιγνίων σε προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού και αντίστροφα.

Σε όλες τις μέχρι προ του πολέμου προταθείσες μεθόδους λύσης γραμμικών συστημάτων εξισώσεων ή ανισώσεων δεν γινόταν προσπάθεια για την ταυτόχρονη εύρεση βέλτιστης λύσης συνάρτησης.

2. Ιστορική εξέλιξη του Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ως μέθοδος βελτιστοποίησης εμφανίστηκε στη Μ.Βρετανία κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, όταν δημιουργήθηκε η ανάγκη επιστημονικής αντιμετώπισης θεμάτων Άμυνας και Στρατιωτικής Τακτικής.

Εκλήθησαν διάφοροι επιστήμονες και σχηματίσθηκε η πρώτη Ομάδα Επιχειρησιακών Ερευνών υπό τον καθηγητή *Blackett*.Η ομάδα αυτή είχε εξαιρετικές επιτυχίες κατα την μελέτη των στρατιωτικών προβλημάτων του πολέμου και η φήμη της καθώς και της Επιχειρησιακής Έρευνας διαδόθηκε ταχύτατα.Η *'Μάχη της Αγγλίας'* , η *'Μάχη του Ατλαντικού'*, οι επιτυχείς βομβαρδισμοί πόλεων της Γερμανίας, η '*Εκστρατεία του Ειρηνικού'* θεωρούνται μερικές απο τις γνωστές επιτυχίες της ομάδας.Το Υπουργείο Αμύνης των Ηνωμένων Πολιτειών κατήρτισε επίσης μια ανάλογη ομάδα επιστημόνων.Μετά το τέλος του πολέμου φυσικό ήταν η αποκτηθείσα γνώση των νέων επιστημονικών και μαθηματικών μεθόδων να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές ειρηνικών σκοπών.Πολλοί απο τους Ερευνητές που είχαν λάβει μέρος σε ομάδες Επιχειρησιακών Ερευνών για στρατιωτικά προβλήματα, συνέχισαν την έρευνα σε ομάδες που συγκροτήθηκαν στη Βιομηχανία.Η ανάπτυξη και εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας υπήρξε ραγδαία απο το 1950 και μετά.

Η εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας ήταν ταχύτατη και χρησιμοποιήθηκε για την λήψη αποφάσεων σε Στρατιωτικά Θέματα, Κυβερνητικά Προγράμματα, **Προβλήματα Βιομηχανίας**, Οικονομίας, Ιατρικής, Προβλήματα Κοινωνικά και γενικώς σε **Θέματα Διοίκησης και Οργάνωσης**.

Αμέσως μετά το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου συνεστήθη στο Υπουργείο Αεροπορίας των Ηνωμένων Πολιτειών μια ομάδα Επιστημόνων υπο τον *George Dantzig,* με σκοπό την έρευνα και την μελέτη της δυνατότητας εφαρμογής μαθηματικών μεθόδων σε προβλήματα στρατιωτικού προγραμματισμού και σε θέματα προγραμματισμού και οικονομικής ανάπτυξης.Η έρευνα αυτή οδήγησε τον *Dantzig* στη Μαθηματική διατύπωση του Γενικού Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού και στην επινόηση αλγορίθμου επίλυσης του, που έγινε απο τον ίδιο το 1947. Πολλοί μελετητές ενδιαφέρθηκαν για τη νέα μέθοδο και στο Επιτελείο Αεροπορίας οργανώθηκε ερευνητική ομάδα που ονομάσθηκε *'Πρόγραμμα SCOOP'* (Scientific Computation of Optimum Programs), η οποία είχε σκοπό την **ανάπτυξη και την επέκταση των νέων μεθόδων βελτιστοποίησης**.

Η εξέλιξη του Γραμμικού Προγραμματισμού υπήρξε ραγδαία.Διάφοροι μελετητές πρότειναν και άλλους αλγόριθμους επίλυσης γραμμικών προβλημάτων(*Motzkin*, *Tompkins*, *Brown*, *Koopmans* κ.ά.). Η υπεροχή της μεθόδου Simplex έναντι των άλλων φάνηκε απο τις πρώτες εφαρμογές. Η προσφορά του *Dantzig* συνεχίσθηκε με πλήθος άρθρα και δημοσιεύσεις. Ιδιαίτερη σημασία για την εξέλιξη του Γραμμικού Προγραμματισμού είχε το βιβλίο *'Activity Analysis of Production and Allocation'* που εκδόθηκε απο τον *T.C. Koopmans* το 1951, στο οποίο περιέχονται όλες οι μέχρι τότε προταθείσες απο τους *Dantzig, Koopmans* και άλλους εργασίες σχετικές με τον Γραμμικό Προγραμματισμό.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός εμφανίστηκε ταυτόχρονα με τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές.Αυτό ήταν μια ευτυχής σύμπτωση, διότι οποιοδήποτε πρόβλημα Προγραμματισμού περιέχει μεγάλο αριθμό μεταβλητών αποφάσεων, η επιλυσή του απαιτεί επίπονη υπολογιστική εργασία.

Ώς προέκταση του Γραμμικού Προγραμματισμού προέκυψαν πολλοί κλάδοι Μαθηματικού Προγραμματισμού.

Ο **Κυρτός Προγραμματισμός** είναι μια γενίκευση του Γραμμικού προβλήματος, όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι συνθήκες του προβλήματος είναι κυρτές συναρτήσεις.

Ο **Στοχαστικός Προγραμματισμός** είναι ένας ακόμη κλάδος του Γραμμικού Προγραμματισμού που πλησιάζει περισσότερο σε μια άλλη περιοχή του Μαθηματικού Προγραμματισμού που ονομάζεται **Δυναμικός Προγραμματισμός**. Αντικείμενο του κλάδου αυτού είναι το πρόβλημα Μεταφοράς και προβλήματα ροής δια μέσου δικτύων (*Network theory, Network flows*). Στον κλάδο αυτό κλασσικές θεωρούνται οι εργασίες των *Ford* και *Fulkerson*, *Hoffman*, *Kuhn* και άλλων.

3. Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού στη Βιομηχανία

Όλα τα έθνη μετά το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου επιδόθηκαν σε μια προσπάθεια οικονομικής ανόρθωσης και ανάπτυξης, η οποία δεν έχει προηγούμενο στην ιστορία.Στην προσπάθεια αυτή οι μέθοδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας έπαιξαν σημαντικό ρόλο και ο Γραμμικός Προγραμματισμός εφαρμόσθηκε με μεγάλη επιτυχία.

Τα οφέλη από την εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού στη Βιομηχανία και τις οικονομικές επιχειρήσεις υπήρξαν πολλά.Ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο του Βιομηχανικού συστήματος.Σε κάθε εργασία που εκτελείται απο ανθρώπους, μηχανές, ή ανθρώπους και μηχανές όλη η διαδικασία παρίσταται από ένα μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος, του οποίου ζητάμε την βέλτιστη λύση, για την βελτιστοποίηση της παραγωγής.Έτσι πριν ληφθεί μια απόφαση προηγείται ανάλυση, κατασκευή μαθηματικού μοντέλου και επίλυση με την μέθοδο βελτιστοποίησης.Η προσφορά του Γραμμικού Προγραμματισμού ήταν άμεση και έμμεση στην ανάπτυξη και οργάνωση των επιχειρήσεων.

i)Βιομηχανία Πετρελαίου

Από τις πρώτες εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού στη Βιομηχανία, υπήρξαν προβλήματα προγραμματισμού διϋλιστηρίων πετρελαίου.Μπορούμε να πούμε ότι η βιομηχανία πετρελαίου είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με τον Γραμμικό Προγραμματισμό, διότι έχει χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα έρευνας για την ανέυρεση πετρελαίου, παραγωγής και μεταφοράς του απο τις διάφορες ανα τον κόσμο πηγές μέχρι τον τόπο επεξεργασίας και κατανάλωσης.

Η περιοχή αυτή έδωσε πολλές σημαντικές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού.Η πρώτη απο αυτές ήταν η μίξη βενζινών για τα απαιτούμενα παράγωγα προς μεγιστοποίηση του κέρδους.Τα τελικά προϊόντα πρέπει να πληρούν διάφορες συνθήκες, π.χ. περιεκτικότητα σε οκτάνια και ευελιξία, κατά τρόπο που να μεγιστοποιεί τα καθαρά έσοδα.

Άλλες μελέτες περιλαμβάνουν προβλήματα κατανομής ακάθαρτου πετρελαίου σε διάφορα διυλιστήρια και βέλτιστου ρυθμού αποθήκευσης και παραγωγής για εποχικά προϊόντα.Μαθηματικά μοντέλα για δραστηριότητες διυλιστηρίων και της βιομηχανίας πετρελαίου γενικώτερα οδήγησαν στη μελέτη και τη λύση πολλών προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού.

ii)Βιομηχανία Σιδήρου και Χάλυβα

Οι βιομηχανίες χάλυβα και αλουμινίου χρησιμοποίησαν τον Γραμμικό Προγραμματισμό.Τα πιο συνηθισμένα προβλήματα που αντιμετωπίσθηκαν είναι η εύρεση του επιθυμητού κράμματος στο ελάχιστο κόστος και το βέλτιστο πρόγραμμα λειτουργίας των ελάστρων κατεργασίας σιδήρου.Και άλλες βιομηχανίες μετάλλων χρησιμοποίησαν τον Γραμμικό Προγραμματισμό σε μεγάλη έκταση για την βελτίωση της οικονομικής των εκμετάλλευσης.

Έχουν διαμορφωθεί διάφορα μοντέλα που αφορούν τον προγραμματισμό της παραγωγής στην βιομηχανία σιδήρου και χάλυβα. Μία απο αυτές τις μελέτες καταλήγει σε πρόγραμμα παραγωγής με ελάχιστο κόστος για μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του βέλτιστου μηνιαίου σχεδίου ανοικτής καμίνου, του ρυθμού παραγωγής θερμού μετάλλου στην υψικάμινο, και του ποσού και του τύπου του αχρηστευμένου σιδήρου προς αγορά.Το μηνιαίο σχέδιο παραγωγής είναι συνάρτηση της ζήτησης του χάλυβος κατα είδος, της ποσότητας και του είδους του διατιθέμενου για αχρήστευση χάλυβα του εργοστασίου και της τιμής και της ποσότητας των διαφόρων τύπων, του προς αχρήστευση χάλυβα στην ελεύθερη αγορά.

Μία μελέτη Γραμμικού Προγραμματισμού που έγινε σε μεγάλη βιομηχανία λυχνιών, έδειξε ότι πρόγραμμα που απέβλεπε σε μέγιστο κέρδος θα αύξανε τα κέρδη της εταιρίας κατά ποσό 350.000$ σε σχέση με το προηγούμενο έτος αφ’ενός. Αφ’ετέρου πρόγραμμα που απέβλεπε στην μεγιστοποίηση της παραγωγής θα αύξανε αυτήν κατά 22%, αλλά τα κέρδη θα μειώνονταν κατα 23% ή 300.000$.Η αύξηση του κέρδους ήταν άμεσο αποτέλεσμα επιλογής προϊόντων με τη βοήθεια Γραμμικού Προγραμματισμού.Παράγοντες που ελήφθησαν υπ’όψη ήταν οι δυνατότητες του εργοστασίου και των μηχανών, οι προβλεπόμενες πωλήσεις απο τις διάφορες αποθήκες, τα μεταφορικά στα διάφορα κέντρα διανομής και η τρέχουσα και προτεινόμενη τακτική της εταιρείας.

iii)Χημική Βιομηχανία

Οι εφαρμογές στη χημική βιομηχανία είναι κυρίως σε προβλήματα παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων.

Μια μελέτη αποβλέπει στην εύρεση βελτίστου προγράμματος εργασίας 25 μηχανών διαφορετικής απόδοσης για την παρασκευή ταινιών οξειδίου του αλουμινίου πάνω σε χαρτί αλουμινίου.Υπάρχουν 45 είδη χαρτιού αλουμινίου ανάλογα με το δυναμικό και το πλάτος, καθένα με αντίστοιχο απαιτούμενο ρεύμα.

Το συνολικό φορτίο περιορίζεται ανάλογα με τις δυνατότητες κατανομής ρεύματος της εταιρείας.

Ο προγραμματισμός αυτός είναι καθαρό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στο οποίο υπεισέρχονται οι χωριτικότητες, οι περιορισμοί ρεύματος και άλλοι περιορισμοί.

iv)Βιομηχανία Άνθρακος

Για την βιομηχανία άνθρακος διαμορφώθηκε μοντέλο αποτελούμενο απο δύο αλληλένδετα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού.Τα δεδομένα του μοντέλου είναι οι ζητήσεις άνθρακα κατά περιοχή και τα μεταφορικά απο τις αποθήκες στους τόπους ζήτησης.

Τα προς παράδοση ποσά είναι οι μεταβλητές του πρώτου προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού.Επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος ικανοποίησης της ζήτησης υπο τους περιορισμούς αποθήκης.

Οι μεταβλητές του δευτέρου προβλήματος προγραμματισμού είναι οι τιμές παράδοσης του άνθρακος στις περιοχές ζήτησης και τα κατα μονάδα δικαιώματα που λαμβάνουν οι διάφορες αποθήκες.

Οι τιμές των μεταβλητών εκλέγονται έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα.

v)Βιομηχανία Χαρτιού

Δυο εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού στη βιομηχανία ξυλοπολτού και χαρτιού ήσαν στο πρόβλημα μεταφοράς και τον προγραμματισμό της περικοπής του χαρτιού σε κατάλληλο σχήμα.

Ο προγραμματισμός μεταφοράς αφορά το πρόβλημα μίας εταιρείας σε πολλά εργοστάσια.Το πρόβλημα είναι πως θα κατανεμηθούν οι παραγγελίες στα διάφορα εργοστάσια, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθούν τα μεταφορικά.

Το σχέδιο κοπής του χαρτιού αποβλέπει στην ελαχιστοποίηση του αχρηστευμένου χαρτιού στην χαρτοκοπτική μηχανή.Ο βιομήχανος κατασκευάζει κυλινδρικά δέματα χαρτιού ανάλογα με την παραγγελία του πελάτη όσον αφορά το πλάτος και τη διάμετρο.

Όταν κόπτωνται τα δέματα αυτά απο μεγαλύτερα δέματα χαρτιού υπάρχουν απώλειες χαρτιού απο την περικοπή. Εδώ ο βιομήχανος πρέπει να προσδιορίσει ποιές μηχανές και κατά ποιά σειρά παραγγελιών πρέπει να γίνει η περικοπή,έτσι ώστε η προκύπτουσα συνολική απώλεια να είναι ελάχιστη.

Προς την κατεύθυνση αυτή βρέθηκε τρόπος εξοικονόμησης άνω του 1,5%.Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της παραγωγής άνω των 15 τόνων ημερησίως.

vi)Πρόβλημα συναρμολογήσεως.

Ένα πρόβλημα που μελετήθηκε απο πολλές μορφές με μεθόδους Γραμμικού Προγραμματισμού είναι το πρόβλημα της ισοζύγισης γραμμής συναρμολόγησης.

Το βασικό πρόβλημα τίθεται ως εξής:

Το προς συναρμολόγηση αντικείμενο αποτελείται απο πολλά και διάφορα εξαρτήματα.Πρέπει τα εξαρτήματα αυτά να συναρμολογηθούν κατά ορισμένη ακολουθία ή σύστημα ακολουθιών. Κάθε εργάτης πρέπει να αναλάβει ορισμένο αριθμό και συνδυασμό μερών προς συναρμολόγηση, έτσι ώστε ο συνολικός του χρόνος να μην υπερβαίνει τον χρόνο περιόδου, δηλαδή τον χρόνο ο οποίος μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μονάδων κινούμενων στη γραμμή συναρμολόγησης.

Ένας χειριστής αδειάζει μόνο όταν ο χρόνος εργασίας του είναι μικρότερος της περιόδου.Ο καταμερισμός των έργων στους χειριστές πρέπει να γίνει έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο καθιστικός χρόνος κάθε χρόνου.

Μια παραλλαγή του προβλήματος αυτού είναι το σύστημα πολυσταδιακής παραγωγικής διαδικασίας.Εδώ έχουμε αριθμό αντικειμένων τα οποία πρέπει να περάσουν πρώτα απο ένα στάδιο παραγωγής ή μηχανή, μετά απο ένα δεύτερο στάδιο κ.λ.π.

Το πολύ ένα αντικείμενο μπορεί να περνά απο τη μηχανή σε δεδομένη στιγμή.

Για κάθε αντικείμενο γνωρίζουμε τον χρόνο διαβιβάσεως και επεξεργασίας σε κάθε στάδιο.

Το πρόβλημα είναι ο προγραμματισμός των αντικειμένων, έτσι ώστε να περάσουν την γραμμή της παραγωγικής διαδικασίας στον ελάχιστο συνολικό χρόνο.

Άλλες εφαρμογές περιλαμβάνουν το πρόβλημα του προσδιορισμού του αριθμού εκάστου είδους ενός προϊόντως που θα παραχθεί σε κάθε στάδιο της παραγωγικής διαδικασίας ενός μηχανοστασίου, έτσι ώστε το συνολικό κόστος παραγωγής να είναι ελάχιστο και ο χρόνος παράδοσης και οι απαιτήσεις να ικανοποιούνται για τα υφιστάμενα μέσα.Επίσης το πρόβλημα της προμήθειας και κατανομής νέων μεταφορικών μέσων σε διάφορες εργασίες κατα τρόπο που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος εργασιών και αγορών.

Εκτός της ευρείας εφαρμογής σε φυσικά προβλήματα, οι μέθοδοι του Γραμμικού Προγραμματισμού έχουν αναπόσπαστα συνδεθεί με διάφορες περιοχές των μαθηματικών.Μερικές απο αυτές τις περιοχές κατέστησαν δυνατή την λύση ειδικών προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού π.χ. η στατιστική θεωρία εφαρμόστηκε στη λύση προβλημάτων με στοιχεία υποκείμενα σε τυχαία σφάλματα.

Ακόμη σπουδαιότερη ήταν η χρήση μεθόδων Γραμμικού Προγραμματισμού στην απόδειξη θεωρημάτων και τη λύση προβλημάτων σε κλάδους έρευνας, οι οποίοι φαίνονται άσχετοι μεταξύ τους.

Οι θεωρητικές και υπολογιστικές απόψεις του Γραμμικού Προγραμματισμού εφαρμόσθηκαν με μεγάλη επιτυχία σε περιοχές της Συνδυαστικής Ανάλυσης, των μερικώς διατεταγμένων συνόλων, της θεωρίας δικτυωμάτων και γραφημάτων.

4.Μερικά απλά παραδείγματα προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Για να έχουμε μία σαφέστερη εικόνα των εφαρμογών του Γραμμικού Προγραμματισμού δίνουμε μερικά απλά παραδείγματα με τη μαθηματική τους διατύπωση.

i)Πρόβλημα μεταφοράς

Το κόστος μεταφοράς πρώτης ύλης απο τους τόπους συγκέντρωσης T_1 και T_2 στα σημεία επεξεργασίας $Σ_1$,$Σ_2$,$Σ_3$ και $Σ_4$ δίνεται ανά μονάδα απο τον πίνακα:

	$Σ_1$	$Σ_2$	$Σ_3$	$Σ_4$
T_1	30	40	25	65
T_2	30	90	35	20

Στους τόπους T_1 και T_2 υπάρχουν 1000 και 1500 μονάδες πρώτης ύλης αντίστοιχα και οι ανάγκες στο $Σ_1$ είναι 500 μονάδες, στο $Σ_2$ 700 μονάδες, στο $Σ_3$ είναι 400 μονάδες , στο $Σ_4$ 900 μονάδες.Ζητάμε τις ποσότητες που πρέπει να σταλούν για να έχουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς.

<u>Μαθηματική διατύπωση</u>:

Με x_{ij} συμβολίζουμε την ποσότητα (σε μονάδες) που μεταφέρθηκε απο το T_i στο $Σ_j$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1500 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Οι ποσότητες που μεταφέρθηκαν σε κάθε σημείο $Σ_i$ δίνονται απο τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 500 \\ x_{12} + x_{22} &= 700 \\ x_{13} + x_{23} &= 400 \\ x_{14} + x_{24} &= 900 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

$x_{ij} \geq 0$ (i=1,2 και j=1,2,3,4) (III)

Ζητείται η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$F_{min}= 30x_{11} + 40x_{12} + 25x_{13} + 65x_{14} + 30x_{21} + 90x_{22} + 35x_{23} + 20x_{24}$

Όταν οι μεταβλητές x_{ij} (i=1,2 και j=1,2,3,4) ικανοποιούν τις (I), (II) και (III).

ii)Πρόβλημα βιομηχανίας πετρελαίου

Για την παραγωγή βενζίνης τριών τύπων Α,Β,Γ μπορούν να εφαρμοσθούν δύο μέθοδοι διύλισης πετρελαίου με διαφορετικό κόστος η κάθε μία.Οι ποσότητες παραγωγής κάθε τύπου είναι διαφορετικές με τις δύο μεθόδους.Στον παρακάτω πίνακα δίδονται οι μονάδες κάθε τύπου βενζίνης που παράγονται απο τη διύλιση μιας μονάδας πετρελαίου με τις διαφορετικές μεθόδους, το κόστος παραγωγής κάθε διύλισης καθώς και οι ανάγκες του καταναλωτή.

	Διύλιση I	Διύλιση II	Καταναλωτής
Τύπος Α	1	1	100
ΤύποςΒ	3	4	340
Τύπος Γ	1	5	150
Κόστος	300	500	

Ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες πετρελαίου που πρέπει να διυλισθούν με κάθε μέθοδο, ώστε οι ανάγκες του καταναλωτή σε βενζίνη να έχουν ελάχιστο κόστος.

Μαθηματική διατύπωση:

Αν x_1 η ποσότητα του πετρελαίου που διυλίθηκε με τη μέθοδο I

και x_2 η ποσότητα του πετρελαίου που διυλίθηκε με τη μέθοδο II

τότε απο την εκφώνηση του προβλήματος ισχύουν:

$x_1 + x_2 = 100$ (χρειάζονται 100 μονάδες βενζίνης τύπου Α)

$3x_1 + 4x_2 = 340$ (χρειάζονται 340 μονάδες βενζίνης τύπου Β) (I)

$x_1 + 5x_2 = 150$ (χρειάζονται 150 μονάδες βενζίνης τύπου Γ)

$x_1, x_2 \geq 0$ (Οι μεταβλητές x_i με $i = 1,2$ είναι μη αρνητικές) (II)

$f_{min} = 300x_1 + 500x_2$ (Το κόστος του πετρελαίου που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί όταν τα x_1, x_2 ικανοποιούν τις συνθήκες I και II)

iii)Πρόβλημα βιομηχανίας χαρτιού

Εταιρία έχει δύο εργοστάσια παραγωγής τριών ποιοτήτων χαρτιού.Ο πίνακας δίνει την ημερήσια παραγωγή χαρτιού κάθε εργοστασίου, το ημερήσιο κόστος λειτουργίας και τις συνολικές ποσότητες που πρέπει να προμηθεύσει η εταιρεία.

	Εργοστάσιο I	Εργοστάσιο II	Ποσότητα χαρτιού που χρειάζεται
Κατώτερη ποιότητα	8	2	16
Μέση ποιότητα	1	1	5
Ανώτερη ποιότητα	2	7	20
Κόστος	1000	2000	

Ζητείται να βρεθούν οι ημέρες που πρέπει να εργασθεί κάθε εργοστάσιο ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος.

Μαθηματική διατύπωση:

Αν x_1 ημέρες εργασθεί το εργοστάσιο I

και x_2 ημέρες εργασθεί το εργοστάσιο II,

τότε απο την εκφώνηση του προβλήματος προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 &\geq 16 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \qquad \text{(I)} \\ 2x_1 + 7x_2 &\geq 20 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ (II)

$f(x_1, x_2) = 1000x_1 + 2000x_2$ (συνολικό κόστος που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί όταν τα x_1, x_2 ικανοποιούν τους περιορισμούς I,II)

iv)Πρόβλημα παραγωγής εργοστασίου

Εργοστάσιο έχει τριών ειδών μηχανές Α,Β,Γ και παράγει τριών τύπων προϊόντα I,II,III.

Κάθε ένα απο τα προϊόντα επεξεργάζεται και απο τις τρείς μηχανές.Αν η παραγωγή είναι συνεχής και ο απαιτούμενος χρόνος για τη ρύθμιση της μηχανής όταν αλλάζει προϊόν είναι αμελητέος, ζητείται ο αριθμός των μονάδων που πρέπει να παραχθεί απο κάθε προϊόν εβδομαδιαίως, ώστε να προκύπτει το μέγιστο κέρδος.

Ο πίνακας δίνει απαιτούμενες ώρες επεξεργασίας για μία μονάδα κάθε προϊόντος απο κάθε μηχανή, συνολικές διαθέσιμες ώρες κάθε κατηγορίας μηχανών εβομαδιαίως και το κέρδος απο την πώληση μιας μονάδας απο κάθε τύπο προϊόντος.

Είδος μηχανής	προϊόν I	προϊόν II	προϊόν III	ολικός διαθέσιμος χρόνος ανα εβδομάδα
A	2	6	5	40
B	5	2	4	40
Γ	3	6	4	40
κέρδος ανα μονάδα προϊόντος	3	4,5	4	

<u>Μαθηματική διατύπωση</u>:

Αν x_1, x_2, x_3 είναι ο αριθμός των μονάδων των προϊόντων I,II,III αντίστοιχα που παράγονται σε μια εβδομάδα απο την εκφώνηση του προβλήματος προκύπτουν οι σχέσεις:

$f_{\max} = 3x_1 + 4,5x_2 + 4x_3$ με περιορισμούς

$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 40$$
$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$
$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Γενίκευση του προβλήματος

Το πρόβλημα αυτό <u>γενικεύεται</u> με την εξής διατύπωση:

‘m- μηχανές χρησιμοποιούνται για την παραγωγή n- προϊόντων.Κάθε προϊόν επεξεργάζεται στη σειρά στις m- μηχανές και ο χρόνος που απαιτείται για την επεξεργασία καθενός απο τα προϊόντα είναι διαφορετικός.

a_{ij} είναι ο χρόνος που απαιτείται για την επεξεργασία του j- προϊόντος στην i- μηχανή.

Ο πίνακας A δίνει τους απαιτούμενους χρόνους.

b_i είναι ο διαθέσιμος χρόνος της i- μηχανής.

c_j είναι το κέρδος απο τη μονάδα του j- προϊόντος.

x_j είναι ο απαιτούμενος αριθμός μονάδων του j- προϊόντος που πρέπει να παράγεται κάθε μέρα ώστε να έχουμε μέγιστο τελικό κέρδος.Ζητείται η μεγιστοποίηση του κέρδους.’

πρ.1 πρ.2 πρ.n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mu\eta\chi\alpha\nu\acute{\eta}\ \ 1 \\ \dots \\ \mu\eta\chi\alpha\nu\acute{\eta}\ \ m \end{array}$$

<u>Μαθηματική διατύπωση</u>

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος προκύπτει η εξής μαθηματική διατύπωση:

$f_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ με περιορισμούς

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \\ 1 \le i \le n \end{array} \qquad \text{(I)}$$

Συναφές με το προηγούμενο πρόβλημα είναι και το πρόβλημα της διάθεσης των προϊόντων εργοστασίων.

n - διαφορετικά εργοστάσια προμηθεύουν

m - διαφορετικά προϊόντα

a_{ij} είναι ο αριθμός των μονάδων του i- προϊόντος που μπορεί να προμηθεύσει το j - εργοστάσιο σε μια ημέρα.

A είναι ο πίνακας που περιγράφει αυτό.

ερ.1 ερ.2 ... ερ.n

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{προϊόν 1} \\ \text{προϊόν 2} \\ \cdots \\ \text{προϊόν m} \end{array} \end{array}$$

b_i είναι ο ελάχιστος αριθμός μονάδων απο το i- προϊόν που πρέπει να προμηθευτεί.

c_j το κόστος προμήθειας απο το j- εργοστάσιο

x_j ο αριθμός των ημερών που πρέπει να εργάζεται το κάθε εργοστάσιο για να έχουμε ελάχιστο κόστος προμήθειας.

Ζητείται η ελαχιστοποίηση του κόστους.

Μαθηματική διατύπωση:

$$f_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad \text{με περιορισμούς}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0 \\ 1 \leq i \leq n \end{array}\right. \quad (II)$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε και δύο άλλα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού που αφορούν άλλες ειδικότητες μηχανικών.

I.Εφαρμογή στην πολεοδομία

Σε πλάνο πολεοδομικής ανάπτυξης θεωρούνται τέσσερα κατασκευαστικά σχέδια και υπολογίζεται ότι η δαπάνη τους και το οφελός τους είναι αντίστοιχα:

Σχέδιο	Κατασκευή	Δαπάνη σε χιλιάδες ευρώ	Κόστος σε χιλιάδες ευρώ
1.	Αμαξιτός δρόμος απο Α σε Β	1000	850
2.	Σύνδεση του Α με πλησιέστερο αυτοκινητόδρομο	3000	2500
3.	Εμπορικό κέντρο του Γ	2000	2100
4.	Σύνδεση του Γ με πλησιέστερο αυτοκινητόδρομο	2500	2750

Αν εκτελεσθούν τα σχέδια 1 και 2 θα έχουμε επιπλέον όφελος της τάξης των 100.000 και αν εκτελεσθούν τα σχέδια 2 και 4 θα έχουμε οικονομία δαπάνης της τάξης των 1.000.000.Επίσης είναι άχρηστη η εκτέλεση του σχεδίου 3 χωρίς την σύγχρονη εκτέλεση του σχεδίου 4.

Ο υπεύθυνος για το πλάνο οργανισμός δεν έχει στη διαθεσή του πάνω απο 5.000.000 και πρέπει να διαλέξει ένα συνδυασμό σχεδίων που θα δώσει το μεγαλύτερο δυνατό όφελος μένοντας όμως στα πλαίσια του προϋπολογισμού.

II.Πρόβλημα μίγματος

Μεταλλουργική βιομηχανία κατασκευάζει κράμα μολύβδου, ψευδαργύρου και κασσιτέρου. Το κράμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 31% μόλυβδο, 24% ψευδάργυρο και τουλάχιστον 37% κασσίτερο.Τα μεταλλεύματα που χρησιμοποιούμε περιέχουν επίσης προσμίξεις μαγγανίου, φωσφόρου, πυριτίου.

Το τελικό κράμα πρέπει να περιέχει μαγγάνιο τουλάχιστον 3% και όχι περισσότερο του 5%, φώσφορο σε ποσοστό λιγότερο του 2%, πυρίτιο σε ποσοστό λιγότερο του 1%.

Τα φυσικά μεταλλεύματα περιέχουν διάφορες αναλογίες των παραπάνω και με κατάλληλη επεξεργασία του μίγματος αυτών προκύπτει το επιθυμητό κράμα.

Η βιομηχανία χρησιμοποιεί 7 φυσικά μεταλλεύματα που έχουν τις παρακάτω αναλογίες των παραπάνω μετάλλων.

Μετάλλευμα / % περιεκτικότης	I	II	III	IV	V	VI	VII
Μόλυβδος	25	29	40	38	11	13	47
Ψευδάργυρος	19	11	12	11	47	29	38
Κασσίτερος	25	45	8	20	29	54	11
Μαγγάνιο	15	9	25	14	-	-	-
Φώσφορος	11	-	5	5	13	4	-
Πυρίτιο	5	6	10	12	-	-	4

Τα μεταλλεύματα κοστίζουν C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7 euro ανα τόνο.Το εργοστάσιο ζητεί την οικονομικώτερη αναλογία των μεταλλευμάτων για να κατασκευαστεί το επιθυμητό κράμα.Υποθέτουμε οτι η επεξεργασία του μίγματος είναι η ίδια οποιαδήποτε αναλογία των παραπάνω μετάλλων και αν χρησιμοποιήσουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

1.Μορφή Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Στην παράγραφο 4.iv του κεφαλαίου 1 είδαμε την γενική μορφή του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού που είναι:

'Εύρεση διανύσματος $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ που βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) τη γραμμική συνάρτηση $f = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$, όταν οι μη αρνητικές μεταβλητές $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ πρέπει να ικανοποιούν ορισμένους περιορισμούς που εκφράζονται με γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις.Αναλυτικά:

I. $f_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ με περιορισμούς

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \quad (1)$$

και $x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$

II. $f_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ με περιορισμούς

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array} \quad (2)$$

και. $x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$

Υπό μορφή πινάκων το γενικό πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού γράφεται:

I. $f_{\max} = c^T X$ II. $f_{\min} = c^T X$

$AX \le b$ $AX \ge b$

$X \ge 0$ $X \ge 0$

όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Τα a_{ij}, b_i, c_j είναι σταθερές και $m \prec n$.

Είναι ευκολώτερο να εργασθούμε αλγεβρικά με ισότητες παρά με ανισότητες. Άλλωστε και ο αλγόριθμος *Simplex* θα ήταν περίπλοκος αν και οι συνθήκες ήταν ανισοϊσότητες.Για τον λόγο αυτό θεωρούμε κανονική μορφή του προβλήματος όταν οι περιορισμοί είναι εξισώσεις.

Οι ανισότητες (1) και (2) μετατρέπονται σε εξισώσεις με την εισαγωγή μη αρνητικών βοηθητικών μεταβλητών, οπότε τα προβλήματα I,II γράφονται αντίστοιχα:

I. $f_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ με περιορισμούς

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} = b_m$$

$$x_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

II. $f_{\min} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ με περιορισμούς

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} \quad\quad\quad\quad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad\quad - x_{n+2} \quad\quad &= b_2 \\
.... & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad\quad\quad\quad - x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Υπο μορφή πινάκων γράφονται:

I.

$$\begin{aligned}
& f_{\max} = c^T X \\
& \underline{A}X = b \qquad (*) \\
& X \geq 0
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
& f_{\min} = c^T X \\
& \underline{A}X = b \qquad (*) \\
& X \geq 0
\end{aligned}$$

όπου $\underline{A} = [A, I_m]$, $\quad X = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...x_{n+m})^T$

Είναι φανερό ότι η βέλτιστη λύση είναι μια λύση του συστήματος (*). Για να υπάρχει μια τουλάχιστον λύση πρέπει και αρκεί βαθμός A=βαθμό (A , b).

2α. Βασικές έννοιες – ορισμοί για την λύση του Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού.

- Η συνάρτηση f ονομάζεται **αντικειμενική συνάρτηση**.
- Οι μεταβλητές $x_j (j = 1, ..., n)$ ονομάζονται **μεταβλητές αποφάσεων**.
- Ένα διάνυσμα $\xi \in \mathrm{IR}^n$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού ονομάζεται **εφικτή λύση**.
- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ονομάζεται **εφικτό σύνολο** ή **εφικτό χωρίο**.

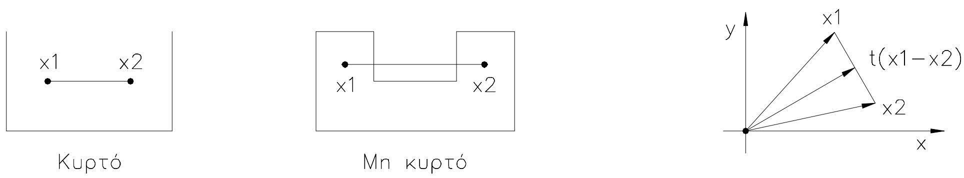
- Η εφικτή λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ονομάζεται **βέλτιστη λύση**.
- Η εφικτή λύση με όχι περισσότερα απο m θετικά x_i ονομάζεται **βασική εφικτή λύση**.
- **Ακραία λύση** είναι η εφικτή λύση που δεν μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός δύο εφικτών λύσεων.
- Μια **ακραία λύση** αντιστοιχεί σε **ακραίο σημείο** εφικτού συνόλου.

2β. Μορφή του συνόλου των λύσεων του Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο χώρος των λύσεων του Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι **κυρτό σύνολο**, όπως θα δούμε στα επόμενα. Στη συνέχεια δίνουμε ορισμούς και προτάσεις που αφορούν το χώρο των λύσεων του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ορισμοί

1. Ένα σύνολο S του IR^n λέγεται **κυρτό σύνολο** αν για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του συνόλου S το ευθύγραμμο τμήμα $x_1 x_2$ ανήκει στο σύνολο S.



2. Ευθύγραμμο τμήμα απο το x_1 στο x_2 είναι το σύνολο των σημείων x που ικανοποιούν την σχέση

$$x = tx_1 + (1-t)x_2 \quad \text{με} \quad 0 \le t \le 1$$

3. Ένα σύνολο θεωρείται κυρτό αν περιέχει περισσότερα απο δύο σημεία.

4. Υπερεπίπεδο λέγεται το σύνολο των σημείων $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ του IR^n που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τη γραμμική εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \quad (1)$$

με $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \neq 0$.

Η (1) στον IR^2 παριστάνει ευθεία την $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

Η (1) στον IR^3 παριστάνει επίπεδο το $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Το υπερεπίπεδο (1) χωρίζει τον χώρο IR^n σε τρία σύνολα S_1, S_2, S_3 ξένα μεταξύ τους:

$$S_1 = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \prec b\}$$
$$S_2 = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\}$$
$$S_3 = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \succ b\}$$

Τα σύνολα S_1, S_3 ονομάζονται **ανοικτοί ημίχωροι.**

Τα σύνολα $S_1 \cup S_2$ και $S_2 \cup S_3$ ονομάζονται **κλειστοί ημίχωροι.**

5. Ακραίο σημείο ενός κυρτού συνόλου S του IR^n λέγεται το σημείο P του συνόλου S που είναι σημείο τομής **n** υπερεπιπέδων απο εκείνα που ορίζουν το κυρτό σύνολο S.

6. Φραγμένο σύνολο λέγεται ένα σύνολο S αν υπάρχει θετικός αριθμός r τέτοιος ώστε

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leq r \quad \forall \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$$

Πρόταση 1: Η τομή δύο ή περισσοτέρων κυρτών συνόλων είναι κυρτο σύνολο.

Απόδειξη

Αν A, B κυρτά σύνολα και a, β σημεία που ανήκουν στο $A \cap B$, τότε

$$\alpha,\beta \in A \cap B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in A \cap B \Rightarrow a \in A \wedge a \in B \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta \in A \cap B \Rightarrow \beta \in A \wedge \beta \in B \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a\beta \in A \\ \kappa\alpha\iota \\ a\beta \in B \end{array} \right\} \Rightarrow a\beta \in A \cap B.$$

Τα σημεία $a, \beta \in A \cap B$ και προκύπτει $a\beta \in A \cap B$ δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα $a\beta$ ανήκει στην τομή των συνόλων A και B , άρα $A \cap B$ είναι κυρτό σύνολο.

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 2: Η τομή πεπερασμένου πλήθους ημίχωρων είναι κυρτό σύνολο.

3.Θεωρία της μεθόδου Simplex

Στη συνέχεια αναφέρουμε μια σειρά θεωρημάτων που αναφέρονται στη λύση του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Θεώρημα 1: Αν ξ_1, ξ_2 είναι εφικτές λύσεις, τότε ο κυρτός συνδυασμός $a\xi_1 + (1-a)\xi_2$ για $0 \le a \le 1$ είναι εφικτή λύση.

Απόδειξη

Αφού ξ_1, ξ_2 είναι εφικτές λύσεις ισχύουν:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A}\xi_1 = b \\ \underline{A}\xi_2 = b \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A}\left[a\xi_1 + (1-a)\xi_2 \right] = a\overbrace{\underline{A}\xi_1}^{b} + (1-a)\overbrace{\underline{A}\xi_2}^{b} = ab + (1-a)b = b$$

Επειδή οι συντεταγμένες των ξ_1, ξ_2 είναι μη αρνητικές, οι συντεταγμένες του $a\xi_1 + (1-a)\xi_2$ είναι προφανώς μη αρνητικές.

Απο το παραπάνω θεώρημα προκύπτει το εξής σημαντικό συμπέρασμα:

‘Το εφικτό σύνολο είναι κυρτό σύνολο’.

Θεώρημα 2: Αν υπάρχουν περισσότερες απο μία βέλτιστες λύσεις, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Απόδειξη

Αν ξ_1, ξ_2 δύο βέλτιστες λύσεις τότε: $f_{\max} = c^T\xi_1 = c^T\xi_2$

Επειδή ξ_1, ξ_2 βέλτιστες λύσεις => ξ_1, ξ_2 εφικτές λύσεις.

Επειδή ξ_1, ξ_2 εφικτές λύσεις και ο κυρτός συνδυασμός $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$ των ξ_1,ξ_2 με $0<\lambda<1$ είναι εφικτή λύση διαφορετική των ξ_1, ξ_2 και ισχύει:

$$c^T\left[\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2\right] = \lambda c^T\xi_1 + (1-\lambda)c^T\xi_2 = \lambda f_{\max} + (1-\lambda)f_{\max} = \cancel{\lambda f_{\max}} + f_{\max} - \cancel{\lambda f_{\max}} = f_{\max}$$

Ακολουθεί μία σειρά σημαντικών θεωρημάτων που οδηγούν στη λύση του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Το επόμενο θεώρημα (θεώρημα 3) είναι βασικό για την εύρεση λύσης του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού.

Θεώρημα 3: Αν υπάρχουν $k(k \le m)$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του A έτσι ώστε το b να είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών με μη αρνητικούς συντελεστές, τότε το διάνυσμα ξ του οποίου οι k συντεταγμένες είναι αυτοί οι συντελεστές και οι υπόλοιπες συντεταγμένες 0 είναι μια ακραία λύση.

Θεώρημα 4: Αν ξ είναι μια ακραία λύση, τότε τα διανύσματα στήλες που συνδέονται με τις θετικές συντεταγμένες x_i του ξ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι το πολύ m απο τα x_i είναι θετικά.

Θεώρημα 5: Υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ακραίων λύσεων.

Απόδειξη

Επειδή κάθε υποσύνολο k διανυσμάτων (όπου k είναι ο βαθμός του πίνακα A και $k \leq m$) δεν αποτελείται απο k γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ισούται το πολύ με

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ακραίων λύσεων.

Σημείωση: Ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι απειροσύνολο, ενώ των ακραίων λύσεων όπου ανήκει και η βέλτιστη λύση είναι πεπερασμένο σύνολο.

Θεώρημα 6: Αν το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι φραγμένο, τότε τουλάχιστον μια ακραία λύση είναι βέλτιστη λύση.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το θεώρημα για πρόβλημα μεγιστοποίησης χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, διότι ανάλογα ισχύουν και για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Αν $\xi_i \quad \left(i = 1, 2, ..., k\right)$ είναι ακραίες λύσεις και

$f_i = c^T \xi_i$ οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης

θέτουμε $f_m = c^T \xi_m = \max f_i$ με $i = 1, 2, ..., k$

Αν ξ είναι εφικτή λύση μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός των ακραίων λύσεων $\xi_i \quad \left(i = 1, 2, ..., k\right)$.

Επομένως, $\xi = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + ... + \lambda_k\xi_k$ (1) όπου $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$ (2)

$\lambda \geq 0$, $i = 1,2,...,k$

Αλλά τότε $f = c^T \xi \overset{(1)}{=} c^T \left(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + ... + \lambda_k\xi_k \right) =$

$$= \lambda_1 c^T \xi_1 + \lambda_2 c^T \xi_2 + ... + \lambda_k c^T \xi_k \leq$$

$$\leq \lambda_1 f_m + \lambda_2 f_m + ... + \lambda_k f_m \overset{(2)}{=} (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k) f_m = f_m$$

$$\Rightarrow f \leq f_m$$

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή στο ξ_m μια ακραία λύση.

Από όσα αναφέραμε σε αυτή την παράγραφο προκύπτει η εξής

Σημαντική παρατήρηση – Διερεύνηση

Στο πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

i) Οι περιορισμοί του προβλήματος να είναι ασυμβίβαστοι οπότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ii) Το εφικτό σύνολο να μην είναι φραγμένο και η αντικειμενική συνάρτηση να γίνεται οσοδήποτε μεγάλη, άρα το πρόβλημα της μεγιστοποίησης δεν έχει λύση. Αντίθετα το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει λύση.

iii) Υπάρχει μια τουλάχιστον βέλτιστη λύση.

iv) Αν υπάρχουν περισσότερες απο μία βέλτιστες λύσεις, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

v) Αν υπάρχει μία βέλτιστη λύση τότε υπάρχει μια βασική βέλτιστη λύση.

4. Ακρότατα (Μέγιστα-Ελάχιστα) Γραμμικής Συνάρτησης

Σε αυτή την παράγραφο διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε δυο βασικές προτάσεις που αναφέρονται στα μέγιστα και στα ελάχιστα μιας γραμμικής συνάρτησης που είναι ορισμένη σε κυρτό σύνολο του IR^n με ακραία σημεία.

Πρόταση 1: Αν η γραμμική συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι ορισμένη στο ευθύγραμμο τμήμα AB του IR^n τότε οι τιμές της βρίσκονται μεταξύ των $f(A)$, $f(B)$.

Απόδειξη

Αν $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$

$B = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ και

$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ σημείο μεταξύ των A και B τότε

$\exists t \in [0,1]$ σύμφωνα με τον ορισμό του ευθύγραμμου τμήματος τέτοιο ώστε

$\Gamma = tA + (1-t)B$ ή διαφορετικά (υπο μορφή συντεταγμένων)

$\gamma_i = ta_i + (1-t)\beta_i$ με $i = 1, 2, ..., n$

ισχύει $f(\Gamma) = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + ... + c_n\gamma_n =$

$$\begin{aligned}
&= c_1[ta_1 + (1-t)\beta_1] + c_2[ta_2 + (1-t)\beta_2] + ... + c_n[ta_n + (1-t)\beta_n] = \\
&= t[c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_na_n] + (1-t)[c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + ... + c_n\beta_n] = \\
&= tf(A) + (1-t)f(B).
\end{aligned}$$

Άρα
$$\begin{aligned}
&f(\Gamma) = tf(A) + (1-t)f(B) \\
&\Rightarrow f(\Gamma) = f(B) + t[f(A) - f(B)]
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το $f(\Gamma)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(A)$ και $f(B)$ αφού $0 \le t \le 1$.

Πρόταση 2: Αν γραμμική συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ είναι ορισμένη σε κυρτό και φραγμένο χωρίο του IR^3 τότε μέγιστη και ελάχιστη τιμή η $f(x_1, x_2, x_3)$ παίρνει σε ακραίο σημείο του χωρίου.

<u>Απόδειξη</u>

Αποδεικνύουμε την πρόταση για κυρτά πολύγωνα του IR^2. Ανάλογοι συλλογισμοί ισχύουν για κυρτά πολύεδρα του IR^3 που γενικεύονται για πολύτοπα *(simplex)* του IR^n.

Θεωρούμε κυρτό πολύγωνο S του IR^2 και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή σε δύο ακραία σημεία Δ και A του S αντίστοιχα.

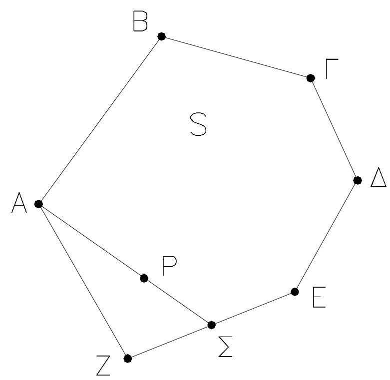
Αν P είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο του πολυγώνου S, θα δείξουμε

$$f(\Delta) \le f(\mathrm{P}) \le f(A)$$

Θεωρούμε την ευθεία AP που τέμνει την ΕΖ στο σημείο Σ, τότε απο την προηγούμενη πρόταση ισχύουν:

$$f(\Sigma) \le f(P) \le f(A) \quad (1)$$

$$f(E) \le f(\Sigma) \le f(Z) \quad (2)$$



Απο (1) και (2) συνεπάγεται

$$f(\Delta) \le f(E) \le f(\Sigma) \le f(Z) \le f(A)$$

άρα $f(\Delta) \le f(\Sigma) \le f(A)$

Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση στο ευθύγραμμο τμήμα $A\Sigma$ συμπεραίνουμε:

$$f(\Sigma) \le f(\mathrm{P}) \le f(A)$$

Επειδή P τυχαίο εσωτερικό σημείο του S συνεπάγεται ότι $\forall P \in S$ ισχύει $f(\Delta) \le f(\mathrm{P}) \le f(A)$.

Με ίδιους συλλογισμούς συμπεραίνουμε τα αντίστοιχα αν το S είναι πολύεδρο του IR^3 ή πολύτοπο του IR^n όπως θα δούμε στα επόμενα.

5. Εύρεση Ακραίας Λύσης

Το βασικό θεώρημα (3) που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο μας οδηγεί σε μία αλγεβρική μέθοδο για την εύρεση των ακραίων λύσεων του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Αν υποθέσουμε ότι οι m πρώτες στήλες $a_1, a_2, ..., a_m$ του πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και ότι το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0)^T$ είναι ακραία λύση με $x_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., m)$, τότε

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_m a_m = b_m$ (1) (απο βασικό θεώρημα).

και οι υπόλοιπες στήλες του A θα είναι

$a_j = y_{j1} a_1 + y_{j2} a_2 + ... + y_{jm} a_m \quad (j = m+1, m+2, ..., n)$

Είναι $a_1, a_2, ..., a_m$ βάση του IR^m και είναι γνωστό απο τη Γραμμική Άλγεβρα ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα διάνυσμα της βάσης με μια στήλη απο τις a_j, ώστε να έχουμε μια νέα βάση του IR^m.

Εάν οι νέες συντεταγμένες του b είναι θετικές, τότε έχουμε βρεί μια νέα ακραία λύση του προβλήματος.

Αν a_{m+1} είναι η νέα στήλη, η εισαγωγή της γίνεται ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε με ϑ την

$a_{m+1} = y_{m+1,1} a_1 + y_{m+1,2} a_2 + ... + y_{m+1,m} a_m$

$\Rightarrow \vartheta y_{m+1,1} a_1 + \vartheta y_{m+1,2} a_2 + ... + \vartheta y_{m+1,m} a_{m+1} - \vartheta a_{m+1} = 0 \quad (2)$

Αφαιρούμε την (2) απο την (1) οπότε προκύπτει

$(x_1 - \vartheta y_{m+1,1}) a_1 + (x_2 - \vartheta y_{m+1,2}) a_2 + ... + (x_m - \vartheta y_{m+1,m}) a_m - \vartheta a_{m+1} = b$

Το διάνυσμα

$$y = \{(x_1 - \vartheta y_{m+1,1}), (x_2 - \vartheta y_{m+1,2}), ..., (x_m - \vartheta y_{m+1}), \vartheta, 0, ...0\} \quad (3)$$

είναι εφικτή λύση του προβλήματος, αν οι συντεταγμένες του είναι μη αρνητικές, άρα θα έχουμε:

$\vartheta \succ 0$, $x_i - \vartheta y_{m+1,i} \geq 0$ για $y_{m+1,i} \succ 0$ δηλαδή

$$0 \prec \vartheta \prec \min \frac{x_i}{y_{m+1,i}}$$

Εκλέγουμε $\vartheta = \vartheta_0 = \min \frac{x_i}{y_{m+1,i}}$ οπότε μια συντεταγμένη του y μηδενίζεται και οι υπόλοιπες είναι θετικές.

Απο την (3) είναι φανερό ότι έχουμε ένα ακραίο σημείο του εφικτού συνόλου.

Εάν όλα τα $y_{m+1,i} \leq 0$ τότε η εκλογή του ϑ δεν είναι μονοσήμαντη οπότε για οποιοδήποτε $\vartheta \succ 0$ έχουμε απλά ένα σημείο του εφικτού συνόλου, άρα το πρόβλημα δεν έχει βέλτιστη λύση.

Για να κατανοήσουμε τα παραπάνω δίνουμε ένα σύντομο παράδειγμα.

Παράδειγμα

θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	b
$3\chi_1$	$-\chi_2$	$+2\chi_3$	$+\chi_4$			$=7$
$2\chi_1$	$-4\chi_2$			$+\chi_5$		$=12$
$-4\chi_1$	$-3\chi_2$	$+8\chi_3$			$+\chi_6$	$=10$

όλα τα $\chi_i \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι οι στήλες a_4, a_5, a_6 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και το διάνυσμα $\xi = (0,0,0,7,12,10)$ είναι μια ακραία λύση. Τότε

$$7a_4 + 12a_5 + 10a_6 = b \quad (1')$$

Τα a_4, a_5, a_6 είναι μια βάση του IR^3. Αν αντικαταστήσουμε ένα διάνυσμα της βάσης με τα a θα έχουμε μια νέα ακραία λύση.

Ισχύει $3a_4 + 2a_5 + (-4)a_6 = a_1$ (2’)

Πολλαπλασιάζοντας την (2’) με ϑ και αφαιρώντας απο την (1’) προκύπτει:

$$(7-3\vartheta)a_4 + (12-2\vartheta)a_5 + (10+4\vartheta)a_6 + \vartheta a_1 = b$$

Αν $\vartheta = \vartheta_0 = \min\left\{\frac{7}{3}, \frac{12}{2}\right\} = \frac{7}{3}$

τότε $\frac{22}{3}a_5 + \frac{58}{3}a_6 + \frac{7}{3}a_1 = b$ και η νέα ακραία λύση είναι $(\frac{7}{3}, 0, 0, 0, \frac{22}{3}, \frac{58}{3})$.

6. Μέθοδος Simplex – Αλγόριθμος Simplex

α) Μέθοδος Simplex

Είδαμε στα προηγούμενα ότι :

*1)*Ο χώρος των λύσεων του Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού, που ονομάζεται εφικτό σύνολο ή εφικτό χωρίο,είναι απειροσύνολο.

*2)*Η βέλτιστη λύση (δηλαδή η εφικτή λύση του Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$) είναι ακραίο σημείο του εφικτού συνόλου,άρα ανήκει σε πεπερασμένο σύνολο σημείων.

*3)*Το βασικό θεώρημα μας οδήγησε στην εύρεση μιας ακραίας λύσης του Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού.

*4)*Η επανάληψη αυτής της μεθόδου μας οδηγεί στην εύρεση και άλλων ακραίων λύσεων που όσο αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών $x_1, x_2, ..., x_n$ τόσο αυξάνεται και το πλήθος των ακραίων λύσεων.

Η δυσκολία του προβλήματος μπορεί να ξεπεραστεί με μια αλγεβρική μέθοδο γνωστή με το όνομα μέθοδος *Simplex*. Με την βοήθεια αυτής της μεθόδου περνάμε απο τη μία βασική εφικτή λύση (ακραίο σημείο του εφικτού συνόλου),στην άλλη,έτσι ώστε οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ να βελτιστοποιούνται (δηλαδή να αυξάνουν στο $f_{\max}$ και να ελαττώνονται στο $f_{\min}$). Με αυτή τη μέθοδο μετά απο πεπερασμένο αριθμό βημάτων έχουμε καταλήξει στη βέλτιστη λύση.

Ι. Αρχικά θα ασχοληθούμε με το **πρόβλημα** ***Μεγιστοποίησης***

$$f_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}$$

$$x_i \ge 0 \quad , \; i = 1, 2, ..., n .$$

Αν μετατρέψουμε τις ανισώσεις σε εξισώσεις προσθέτοντας m βοηθητικές μεταβλητές x_{n+k} με $k = 1, 2, ..., m$ τότε το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού γράφεται:

$$f_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_{n+m}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_{n+m} = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 1 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_{n+m} = b_2 \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 1 \cdot x_{n+m} = b_m \end{aligned}$$

$$x_i \ge 0$$

ή υπο μορφή πινάκων:

$$\begin{aligned} &f_{\max} = c^T X_o \\ &A_o X_o = b \qquad , \; b \ge 0 \\ &X_o \ge 0 \end{aligned}$$

όπου $A_o = (A, I_m)$, $X_o = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m})^T$

$c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$

Επειδή βαθ $A = m$ και $b \geq 0$ από βασικό θεώρημα (3 παρ.3) προκύπτει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το b σαν γραμμικό συνδυασμό των m γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A. Έτσι θα έχουμε βρεί μια βασική εφικτή λύση (ακραίο σημείο του συνόλου των λύσεων).

Οι συντελεστές των $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ είναι οι στήλες

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \; ... , \; e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ του } I_m$$

που αποτελούν προφανώς βάση του IR^m.

Αν αντικαταστήσουμε μια απο τις e_i με μια στήλη του A θα προκύψει μια νέα βασική λύση (ακραίο σημείο του συνόλου των λύσεων).

Έτσι θα έχουμε

$(x_1 - \vartheta y_{k1})e_1 + (x_2 - \vartheta y_{k2})e_2 + ... + (x_m - \vartheta y_{km})e_m + \vartheta_{ak} = b$

με $\vartheta \geq 0$ και $1 \leq k \leq n$.

Αν στην τελευταία σχέση οι συντεταγμένες είναι θετικές τότε έχουμε βρεί μια νέα ακραία λύση και η αντικειμενική συνάρτηση είναι f' όπου

$$f' = f - \vartheta(f_k - c_k) \quad (1)$$

με $f_k = f(0, 0, ..., 0, y_{k1}, y_{k2}, ..., y_{km})$

οπότε για να είναι $f' \succ f$ θα πρέπει $f_k - c_k \prec 0$ αφού $\vartheta \succ 0$.

Εάν $f_k - c_k \succ 0 \quad \forall k$ τότε η f είναι βέλτιστη στην (1).

Προφανώς όσο μεγαλύτερη γίνεται η ποσότητα $-\vartheta(f_k - c_k)$ τόσο αυξάνει η τιμή της f'. Έτσι μπορούμε να εκλέξουμε το k , ώστε ο αρνητικός αριθμός $f_k - c_k$ να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Σημειωτέον, ότι αν οι περιορισμοί είναι όλοι ανισωτικοί τότε αμέσως διαπιστώνουμε ότι $f_k = 0$, δηλαδή για την εκλογή του k περιοριζόμαστε στις αρνητικές συντεταγμένες του $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$.

Για να προσδιορίσουμε το ϑ ορίζουμε ποιό διάνυσμα της βάσης θα αντικαταστήσει τη στήλη a_k.

Συνεπώς για $y_{ki} \succ 0$ θα έχουμε

$$\vartheta = \min_i \frac{x_i}{y_{ki}} = \frac{x_r}{y_{kr}}.$$

Το y_{kr} ονομάζεται **στροφέας**.

Μετα την εύρεση του στροφέα κάνουμε αλλαγή βάσης με μία διαδικασία ανάλογη του *Αλγόριθμου Gauss*.

Επειδή θέλουμε $y_{kr} = 1$ διαιρούμε τη γραμμή του στροφέα με το στροφέα και αφαιρούμε y_{ki} φορές την νεα γραμμή απο την i – οστή γραμμή. Με αυτή την διαδικασία έχει προκύψει μια νέα βασική εφικτή λύση. Εκτελώντας αυτή την διαδικασία μετά απο πεπερασμένο πλήθος βημάτων όλες οι διαφορές $f_k - c_k$ έχουν γίνει θετικές οπότε θα έχουμε βρεί τη λύση του προβλήματος, διότι οι τιμές της f δεν αυξάνονται περαιτέρω.

Η διαδικασία που προηγουμένως αναφέραμε περιγράφεται απο μια σειρά πινάκων I,II,III κ.λ.π. με πρώτο πίνακα

I

A	I_m	b
$-c^T$	0	f

όπου $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ και οι περιορισμοί του προβλήματος εκφράζονται με ανισώσεις. Οι επόμενοι πίνακες ΙΙ,ΙΙΙ, κ.λ.π. προκύπτουν με τον Αλγόριθμο Simplex.

Διερεύνηση

1.Όταν στους περιορισμούς υπάρχουν ισότητες και ανισότητες της μορφής $\geq$ δεν εμφανίζεται μοναδιαίος πίνακας I_m.

2.Όταν δεν υπάρχει καμμία στήλη του I_m στον πίνακα Ι δηλαδή οι περιορισμοί είναι ισότητες και ανισότητες της μορφής '$\geq$' και δεν υπάρχει καμμία μεταβλητή με συντελεστή 1 σε ένα περιορισμό και μηδέν στους υπόλοιπους, τότε προσθέτουμε τις μεταβλητές $y_1, y_2, ..., y_m$ και οι περιορισμοί γράφονται

$$Ax + Iy = b \quad (*)$$

όπου $y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T \geq 0$ το διάνυσμα των **τεχνητών μεταβλητών**.

Η λύση του συστήματος (*) δεν είναι λύση και του αρχικού συστήματος εκτός αν $y = 0$. Αυτό επιτυγχάνεται, αν απο την αντικειμενική συνάρτηση αφαιρέσουμε το

$M\sum_{i=1}^{m} y_i$ (Μ αρκετά μεγάλος θετικός αριθμός)

οπότε στη βέλτιστη λύση οι τεχνητές μεταβλητές θα είναι μηδέν. Αυτό δηλώνει ότι και η βασική βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος θα είναι και βασική βέλτιστη λύση του αρχικού.

Η διατύπωση του προβλήματος σε αυτή την περίπτωση είναι η εξής:

'Να μεγιστοποιηθεί η $f = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i$ (**)

με περιορισμούς $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + y_i = b_i (\bullet)$

$x_j \geq 0$, $y_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ $(\bullet\bullet)$

$i = 1, 2, ..., m$ και $j = 1, 2, ..., n$

Την (**) την γράφουμε

$$f-\sum_{j=1}^{n}c_j x_j + M\sum_{i=1}^{m}y_i = 0(\therefore)$$

και απαλείφουμε τα y_i.

Αυτό επιτυγχάνεται με την πρόσθεση των ισοτήτων (•) κατα μέλη, στη συνέχεια πολλαπλασιασμό με Μ και τέλος αφαίρεση του αποτελέσματος απο την $(\therefore)$.

Οπότε προκύπτει

$$f-\sum_{j=1}^{n}c_j x_j + M\sum_{i=1}^{m}(b_i - \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j) = 0$$

$$\Rightarrow f-\sum(c_j + M\sum_{i=1}^{m}a_{ij})x_j = -M\sum_{i=1}^{m}b_i(\bullet\bullet\bullet)$$

Το πρόβλημα που προκύπτει απο τις (•) , (••) , (•••) μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο *Simplex*.

ΙΙ.Το **πρόβλημα ελαχιστοποίησης** της συνάρτησης

$$f = c^T x$$

με περιορισμούς $\begin{Bmatrix} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{Bmatrix}$

αντιστοιχεί σε πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης

$$g = b^T z$$

με περιορισμούς $\begin{Bmatrix} A^T z \leq c \\ z \geq 0 \end{Bmatrix}$

που ονομάζεται **δυϊκό** του αρχικού προβλήματος για το οποίο ισχύει το εξής:

θεώρημα Μια εφικτή λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f = c^T x$

με περιορισμούς $Ax \geq b$

$x \geq 0$

είναι εφικτή λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης της συνάρτησης $g = b^T z$

με περιορισμούς $\begin{Bmatrix} A^T z \leq c \\ z \geq 0 \end{Bmatrix}$

Επίσης $b^T z_o = c^T x_o$ αν και μόνο αν x_o, z_o είναι λύσεις.

Το θεώρημα αυτό μετατρέπει το πρόβλημα ελαχίστου σε πρόβλημα μεγίστου στο οποίο εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex στον πίνακα:

A^T	I_m	c
$-b^T$	0	0

Όταν οι περιορισμοί διατυπώνονται με ισότητες το πρόβλημα ελαχιστοποίησης αντιστοιχεί σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, οπότε η νέα αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται η $g = -f$.

β) *Αλγόριθμος Simplex*

Απο τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής βήματα του αλγορίθμου:

1.Εκλέγουμε μία στήλη a_j του πίνακα A που το τελευταίο στοιχείο της είναι $-c_j$ να είναι αρνητικός αριθμός.
2.Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης b με τα αντίστοιχα μη μηδενικά στοιχεία της εκλεγμένης στήλης a_j του πίνακα A. Εκλέγουμε το μικρότερο θετικό πηλίκο b_i / a_{ij} και το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A ονομάζεται **στροφέας**.
3.Διαιρούμε τα στοιχεία της γραμμής του στροφέα με το στροφέα. Αυτή είναι η νέα γραμμή ενός νέου πίνακα (ΙΙ), όπου η εκλεγμένη στήλη μετατρέπεται σε μοναδιαία με τη βοήθεια γραμμικών συνδυασμών της νέας γραμμής και των γραμμών του προηγούμενου πίνακα (Ι).

Τα βήματα 1,2,3 επαναλαμβάνονται μέχρις ότου τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής γίνουν μη αρνητικοί αριθμοί.
Όταν αυτό πραγματοποιηθεί, η μέθοδος *Simplex* έχει τελειώσει και στον τελευταίο πίνακα διαβάζουμε τα αποτελέσματα ως εξής:

Στη μοναδιαία στήλη a_j του πίνακα A η μονάδα αντιστοιχεί στο στοιχείο b_i της στήλης b και η μεταβλητή $x_j = b_i$. Έτσι προκύπτουν οι τιμές των μεταβλητών.

Στη θέση F του πίνακα έχει προκύψει η μέγιστη τιμή της F. Αυτά όσον αφορά το πρόβλημα μεγιστοποίησης.
Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μετατρέπεται στο **δυϊκό** του και λύνεται με τη μέθοδο *Simplex*, αλλά ο τελευταίος πίνακας διαβάζεται ως εξής:

Στη θέση F διαβάζουμε το F_{min} και αριστερά της F τις τιμές των μεταβλητών $x_1, x_2, ..., x_n$.

Συμπεράσματα

1) Οι τεχνητές μεταβλητές $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και αποτελούν βασική εφικτή λύση που δίνουν στην $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.
2) Αν κάθε μία από αυτές με γραμμικούς συνδυασμούς αντικαταστήσει κάποια από τις $x_1, x_2, ..., x_n$ στήλες του πίνακα A θα προκύψει μία νέα βασική εφικτή λύση που θα αυξάνει την τιμή της f.
3) Άν όλες οι $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ αντικαταστήσουν τις $x_1, x_2, ..., x_n$ θα έχει προκύψει βέλτιστη λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΣΧΕΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ Ν – ΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ν – ΔΙΑΣΤΑΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

1.Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι ο χώρος των λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτό σύνολο *n – διάστατης Γεωμετρίας*.

Επειδή θέλουμε να εξετάσουμε τη σχέση του Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού με τη *n – διάστατη Γεωμετρία* θα παρουσιάσουμε αρχικά βασικές έννοιες της θεωρίας των κυρτών συνόλων και της *n – διάστατης Γεωμετρίας*. Οι γνώσεις αυτές αποτελούν απαραίτητα εργαλεία για τη μελέτη σύγχρονων μεθόδων οικονομικής ανάλυσης και πιο ειδικά στη μελέτη προβλημάτων οικονομικής βελτιστοποίησης.

Μέσα στα πλαίσια αυτά θα μελετήσουμε διάφορες κατηγορίες σημειοσυνόλων. **Σημειοσύνολο** (point set) είναι το σύνολο που έχει στοιχεία διανύσματα ή σημεία του **n – διάστατου πραγματικού** ή **Ευκλείδιου χώρου**. Το σημειοσύνολο μπορεί να περιέχει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό σημείων.

Τα σημειοσύνολα που θα εξετάσουμε είναι **ευθείες, υπερεπίπεδα, κυρτά σύνολα, ημίχωροι, κυρτοί κώνοι**. Τα σημειοσύνολα αυτά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε προβλήματα **οικονομικής βελτιστοποίησης**, δηλαδή στη μελέτη γραμμικών ή μη γραμμικών οικονομικών μοντέλων και προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού.

Οι νόμοι σταθεράς ή φθίνουσας απόδοσης κλίμακος (the laws of constant or diminishing returns to scale) στη θεωρία παραγωγής οδηγούν στη γραμμικότητα ή την κυρτότητα (convexity) ορισμένων συναρτησιακών σχέσεων ή συνόλων.

Πολλά παραδείγματα οικονομικών φαινομένων που οδηγούν στη μελέτη κυρτών συνόλων προέρχονται απο τις περιοριστικές σχέσεις που διέπουν τη φύση των οικονομικών μεγεθών, π.χ. η μη αρνητικότητα ορισμένων μεγεθών, οι περιοριστικές διαθέσιμες ποσότητες κ.λ.π.

Αυτό δηλώνει ότι οι αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις θα εκφράζονται γενικά με ανισοεξισώσεις. Λύσεις τέτοιων συστημάτων μπορεί να είναι συνοριακά σημεία ενός φραγμένου συνόλου.

Η μελέτη και η επίλυση προβλημάτων που εκφράζονται με συστήματα ανισοεξισώσεων ορίζουν κυρτά σύνολα και αντιμετοπίζονται στα πλαίσια της θεωρίας της κυρτότητας.

Σημείωση: Στα κλασσικά μαθηματικά η κυρτότητα μελετήθηκε απο λίγους μόνο θεωρητικούς μαθηματικούς.

Η θεωρία της κυρτότητας είναι μία ερευνητική περιοχή με πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

2.Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε βασικά σημειοσύνολα που θα χρησιμοποιήσουμε για την μελέτη άλλων σημειοσυνόλων.

Είδαμε στα προηγούμενα (Κεφάλαιο ΙΙ) έννοιες που αφορούν το χώρο των λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού. Τις έννοιες δηλαδή της απόστασης, του κυρτού και φραγμένου συνόλου κ.λ.π. τις οποίες στη συνέχεια γενικεύουμε και ορίζουμε στον IR^n.

Αν στη σχέση που δίνει την απόσταση μεταξύ των σημείων x και a

$$\|x-a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}$$

θεωρήσουμε το $a=(a_1,a_2,\ldots a_n)$ σταθερό και $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ μεταβλητό, τότε το σύνολο

$$S=\{x:\|x-a\|=r\} \quad (1)$$

είναι το σύνολο των σημείων $\underline{x}$ που έχουν απόσταση ίση με r απο το a. Το σύνολο S, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν την εξίσωση

$$\|x-a\|=r$$

$$\text{ή } \left[(x_1-a_1)^2+\ldots(x_n-a_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}=r$$

$$\text{ή } \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2=r^2 \qquad (2)$$

ορίζει **κύκλο** (circle) στον διδιάστατο χώρο IR^2,

σφαίρα (sphere) στον τριδιάστατο χώρο IR^3,

και **υπερσφαίρα** (hypersphere) στον n – διάστατο χώρο IR^n (n>3).

Στη συνέχεια, για να ορίσουμε τα **εσωτερικά** και **εξωτερικά** σημεία ενός συνόλου δίνουμε τον ορσμό της ε – γειτνίασης.

ε – γειτνίαση (ε – neighbourhood) γύρο απο ένα σημείο a ορίζεται με το σημειοσύνολο

$$N_\varepsilon(a) = \left\{ x : \|x - a\| \prec \varepsilon \right\}$$

δηλαδή είναι το εσωτερικό υπερσφαίρας με κέντρο το a και ακτίνα ε>0.

Εσωτερικό σημείο *(interior point)* **ενός συνόλου X ονομάζεται ένα σημείο του x, όταν υπάρχει μια ε – γειτνίαση $N_\varepsilon(x)$ γύρω απο το x, που να περιέχει μόνο τα σημεία του X.**

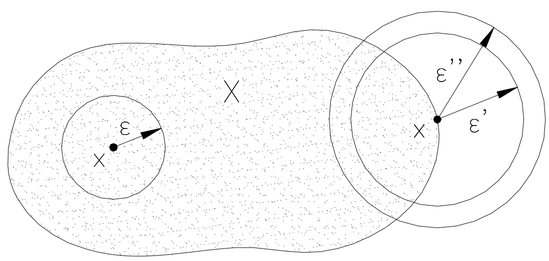
Συμβολικά $$N_\varepsilon(x) = N_\varepsilon(x) \bigcap X$$

Συνοριακό σημείο *(boundary point)* **ονομάζεται ένα σημείο x, όταν κάθε ε – γειτνίαση $N_\varepsilon(x)$ γύρω απο το x περιέχει στοιχεία που ανήκουν στο X και στοιχεία που δεν ανήκουν στο X ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το ε>0.**

Συμβολικά

$$N_\varepsilon(x) \bigcap X \subset N_\varepsilon(x)$$

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται οι έννοιες του εσωτερικού και συνοριακού σημείου που ορίσαμε παραπάνω.



Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τα ανοικτά και κλειστά σύνολα με βάση τα εσωτερικά και συνοριακά σημεία.

Κλειστό σύνολο *(closed set)* **λέγεται ένα σύνολο X, όταν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.**

Συμβολίζουμε $X = \left\{ x : \|x\| \le r \right\}$

Ανοικτό σύνολο *(open set)* **λέγεται ένα σύνολο** X**, όταν περιέχει μόνο τα εσωτερικά του σημεία.**

Συμπλήρωμα του συνόλου $X \subset IR^n$ **ορίζεται το σύνολο** $\bar{X} \subset IR^n$ **όταν ισχύουν:**

$X \bigcap \bar{X} = \varnothing$ **και**

$X \bigcup \bar{X} = IR^n$

π.χ. αν $X = \left\{ x : \|x - a\| \le \varepsilon \right\}$ τότε $\bar{X} = \left\{ x : \|x - a\| \succ \varepsilon \right\}$.

Άθροισμα των συνόλων A, B **με** $A \subseteq IR^n$ **και** $B \subseteq IR^n$ **ορίζεται το σύνολο:**

$A + B = \left\{ x \in IR^n : x = a + b, a \in A \wedge b \in B \right\}$.

Το άθροισμα $A + B$ είναι σύνολο των σημείων του IR^n που μπορούν να εκφραστούν με το άθροισμα ενός σημείου του συνόλου A και ενός σημείου του συνόλου B.

Όμοια ορίζεται και η διαφορά των συνόλων A, B.

Διαφορά των συνόλων A, B **με** $A \subseteq IR^n$ **και** $B \subseteq IR^n$ **ορίζεται το σύνολο:**

$A - B = \left\{ x \in IR^n : x = a - b, a \in A, b \in B \right\}$.

Αυστηρά φραγμένο *(strictly bounded)* **λέγεται ένα σύνολο** X **αν υπάρχει ένας αριθμός** $r \succ 0$ **ώστε να ισχύει:**

$\|x\| \le r \qquad \forall x \in X$ ή ισοδύναμα

αν υπάρχει διάνυσμα a **τέτοιο, ώστε να ισχύει:**

$\|x\| \le \|a\| \quad \forall x \in X$

Ένα αυστηρά φραγμένο σύνολο βρίσκεται στο εσωτερικό υπερσφαίρας που έχει κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα r, όπως προκύπτει απο τον συνδυασμό του παραπάνω ορισμού της υπερσφαίρας.

Φραγμένο πάνω *(bounded from above)* **λέγεται ένα σύνολο** X **όταν υπάρχει ένα σημείο** a **που κάθε συντεταγμένη του είναι πεπερασμένη, τέτοια ώστε να ισχύει:**

$$x \le a \Leftrightarrow \|x\| \le \|a\|.$$

Φραγμένο κάτω *(bounded from below)* **λέγεται ένα σύνολο** X **όταν υπάρχει ένα σημείο** a **που κάθε συντεταγμένη του είναι πεπερασμένη, τέτοια ώστε να ισχύει:**

$$x \ge a \Leftrightarrow \|x\| \ge \|a\|.$$

Συμπαγές λέγεται το σύνολο X **όταν κάθε ακολουθία σημείων του περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του** X**.**

Μια έννοια που πρέπει να ορίσουμε επίσης είναι του συνεκτικού συνόλου, αν και δεν την συναντάμε τόσο συχνά, όσο του συμπαγούς συνόλου. Η έννοια αυτή ορίζεται με τη χρήση των όρων ανοικτών ή κλειστών συνόλων στους ορισμούς που ακολουθούν.

Συνεκτικό *(connected set)* **ονομάζεται το σύνολο X, όταν δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένωση δύο μη κενών ανοικτών υποσυνόλων.**

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της έννοιας περιοχής του IR^n.

Περιοχή *(region)* **του IR^n είναι ένα συνεκτικό σύνολο σημείων του IR^n.**

3.Ευθεία στον IR^n.

Η ευθεία γραμμή στον χώρο IR^n χρησιμοποιείται πολύ στην n – διάστατη Γεωμετρία και μπορεί να εκφραστεί σε διανυσματική μορφή.

Ευθεία που διέρχεται απο το σημείο $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_n)\neq\vec{0}$ είναι το σημειοσύνολο

$l=\{x : x=v+t\vec{u}, t\in IR\}$.

και ονομάζεται **διανυσματική παραμετρική εξίσωση ευθείας**.

Η t ονομάζεται **παράμετρος** (parameter) και

η $x=v+t\vec{u}$ ονομάζεται **παραμετρική παράσταση** (parametric representation) της ευθείας.

Η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας ισοδυναμεί με σύστημα n εξισώσεων.

$$x=v+t\vec{u} \quad , t\in IR \quad \Leftrightarrow x_i=v_i+tu_i \ , \ i=1,2,...,n \\ t\in IR$$

Ευθύγραμμο τμήμα *(line segment)* ab **ονομάζεται το σύνολο των σημείων**

$$X=\{x : x=v+t\vec{u}, t_1\leq t\leq t_2\}\in L$$

αν a,b δύο σημεία της ευθείας l με $a\neq b$ και με αντίστοιχες τιμές t_1,t_2 της παραμέτρου t.

Αν τα σημεία $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ και $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ τότε η ευθεία που ορίζεται από τα a και b είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=a-b$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε το σύστημα

$$x_i = a_i + t(b_i - a_i) = (1-t)a_i + tb_i \ , \quad i = 1,2,...,n \ , \quad t \in IR$$

για $t=0 \Rightarrow x=a$

για $t=1 \Rightarrow x=b$ αντίστοιχα.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα a , b δίνεται από τον προηγούμενο τύπο όταν $0 \le t \le 1$.

(Τον προηγούμενο ορισμό τον είχαμε δεί στο προηγούμενο κεφάλαιο).

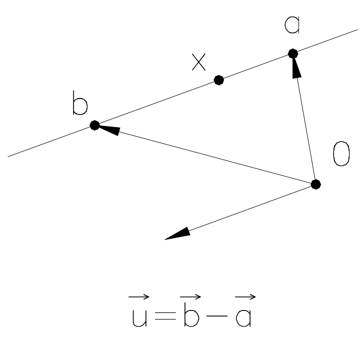
Από την παραμετρική παράσταση της ευθείας προκύπτει ότι η ευθεία που ορίζεται απο δύο σημεία $a \in IR^n$, $b \in IR^n$ με $a \neq b$ είναι το σημειοσύνολο:

$$L = \{x : x = \lambda a + (1-\lambda)b \quad \forall \lambda \in IR\}$$

και το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται απο τα σημεία $a \in IR^n$ και $b \in IR^n$ με $a \neq b$ είναι το σημειοσύνολο :

$$X = \{x : x = \lambda a + (1-\lambda)b \ , \ \lambda \in [0,1]\}$$

Σχηματικά



$x = a + t(b-a)$

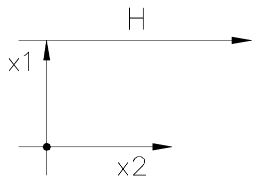
Στις μεθόδους βελτιστοποίησης πολλές φορές απαιτείται η βελτιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης $f(x)$ που ορίζεται στο IR^n κατα μήκος μιάς ημιευθείας *(half line)* ή ακτίνας *(ray)* του IR^n που ορίζεται ως εξής:

Αν x_1, x_2 δύο σημεία του IR^n, τότε το σημειοσύνολο

$$H = \left\{ x : x_1 + \lambda x_2 \,,\; 0 \le \lambda \in IR^n \right\}$$

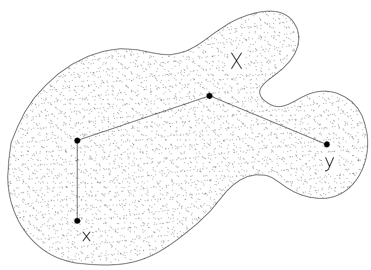
ορίζει μία ημιευθεία ή αλλοιώς ακτίνα από το x_1 στην κατεύθυνση του x_2.

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τον παραπάνω ορισμό



Από τον παραπάνω ορισμό του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από δύο σημεία προκύπτει η έννοια συνεκτικού συνόλου ως εξής:

Ένα ανοικτό σύνολο X, λέγεται συνεκτικό όταν για κάθε ζεύγος σημείων του $x \in X$ και $y \in X$ με $x \neq y$, που ενωθεί με πολυγωνική γραμμή αυτή να βρίσκεται στο X.



4. Υπερεπίπεδα – Ημίχωροι

Οι εξισώσεις της ευθείας γραμμής στον IR^2 και του επιπέδου στον IR^3 δίνονται απο τις σχέσεις:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = b \quad \text{ή} \quad cx = b$$

με $x = (x_1, x_2)$ και

$$c = (c_1, c_2) \neq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b \;\; \text{ή} \;\; cx = b$$

με $x = (x_1, x_2, x_3)$ και

$$c = (c_1, c_2, c_3) \neq 0$$

Η γενίκευση των εξισώσεων της ευθείας στον χώρο IR^2 και του επιπέδου στον χώρο IR^3 δίνει την εξίσωση του **υπερεπιπέδου** (hyperplane) στο χώρο IR^n , $n \succ 3$ ώς εξής:

$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = b$ ή $cx = b$

με $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$c = (c_1, c_2, ..., c_n) \neq 0$ και

$b \in IR$.

Επομένως:

Το σημειοσύνολο $X = \{x : cx = b \quad c, x \in IR^n \quad , \quad c \neq 0 \quad , \quad b \in IR\}$ **ορίζει υπερεπίπεδο στον χώρο** IR^n **.**

Αν θεωρήσουμε σε ένα υπερεπίπεδο δύο σημεία x_1, x_2 του IR^n με $x_1 \neq x_2$ τότε έχουμε $cx_1 = b_1$ και $cx_2 = b_2$ και

$$cx_1 - cx_2 = c(x_1 - x_2) = b - b = 0 .$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

«Αν x_1, x_2 **δύο σημεία ενός υπερεπιπέδου, τότε το διάνυσμα** c **είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα** $x_1 - x_2$ **».**

Είναι προφανές ότι το υπερεπίπεδο $cx = b_1$ είναι παράλληλη μετατόπιση του υπερεπιπέδου $cx = b_2$, $b_1 \neq b_2$ και για $b = 0$ το υπερεπίπεδο $cx = b$ περνά απο την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων.

Στο υπερεπίπεδο $cx = b$ το $c \neq 0$ ονομάζεται **κάθετο διάνυσμα** *(normal)* στο υπερεπίπεδο. Κάθε διάνυσμα λc , $\lambda \neq 0$ είναι επίσης κάθετο διάνυσμα στο υπερεπίπεδο, διότι

$$(\lambda c)x = \lambda b$$

$$\Rightarrow \lambda(cx) = \lambda b$$

θέτοντας $\lambda = 1/\|c\|$ προκύπτει $n = \dfrac{c}{\|c\|}$, $a = \dfrac{b}{\|c\|}$

οπότε η εξίσωση του υπερεπιπέδου γράφεται

$$nx = a \quad \text{με} \quad \|n\| = 1 .$$

Το διάνυσμα $\vec{n}$ ονομάζεται **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα** *(unit normals)* του υπερεπιπέδου.

$$\forall x \in \quad cx = b \quad \Rightarrow \frac{c}{\|c\|} x = \frac{b}{\|c\|}$$

$$nx = a = \|n\| \|x\| \cos\theta = \|x\| \cos\theta \quad \text{όπου} \quad \theta = x, n$$

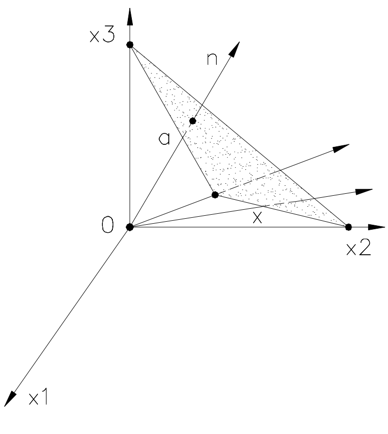
Επομένως a είναι η προβολή του διανύσματος x στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$a = \frac{b}{\|c\|} \leq \|x\|$ και $a = \|x\|$ αν $\cos\theta = 1$ δηλαδή αν $\theta = 0^o$.

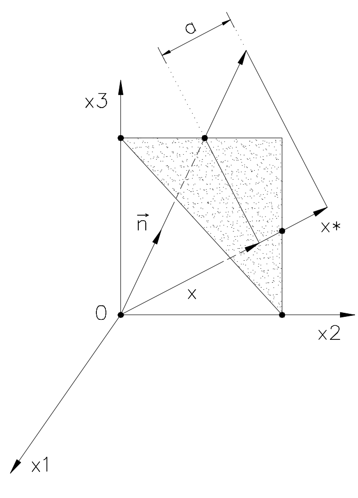
Τελικά προκύπτει ότι:

«$\frac{|b|}{\|c\|}$ είναι η απόσταση του υπερεπιπέδου $cx = b$ από την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων».



Η απόσταση του σημείου x^* από το υπερεπίπεδο δίνεται από τη σχέση

$$d = nx^* - a = \|cx^* - b\| \frac{1}{\|c\|} .$$



Είναι προφανές ότι τα υπερεπίπεδα $c_1x = b_1$ και $c_2x = b_2$ είναι παράλληλα αν και μόνον αν $c_1 = \lambda c$, με $\lambda \neq 0$. Επομένως:

«Δύο υπερεπίπεδα είναι παράλληλα αν και μόνον αν έχουν το ίδιο κάθετο διάνυσμα».

Θεωρούμε το υπερεπίπεδο $cx = b$ και ένα σημείο του, x_1. Τότε ισχύει $cx_1 = b_1$. Αν θέλουμε να βρούμε την τιμή του b που αντιστοιχεί στο υπερεπίπεδο που διέρχεται απο το σημείο $x_2 = x_1 + \lambda c$, $\lambda \succ 0$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα c, τότε απο την παραμετρική εξίσωση της ευθείας έχουμε $x_2 = x_1 + \lambda c$.

Το υπερεπίπεδο που περνά απο το x_2 έχει εξίσωση

$$cx_2 = c(x_1 + \lambda c) = b + \lambda \|c\|^2 = b_1$$

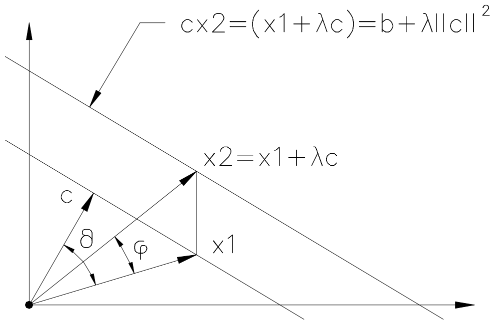
επομένως $b_1 \succ b$, επειδή $\lambda \succ 0$ και $\|c\| \neq 0$.

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε

$nx_1 = b = \|x_1\| \cos\theta$

$nx_2 = b_1 = \|x_2\| \cos\phi$

επειδή είναι $\phi \prec \theta$ έχουμε $b_1 \succ b$



Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι το υπερεπίπεδο $cx = b$ μετατοπίσθηκε παράλληλα προς τον εαυτό του και κατα την διεύθυνση του c όπου δημιουργήθηκε το υπερεπίπεδο $cx = b_1$, ώστε τα σημεία του να ικανοποιούν την $cx \succ b$.

Ένα υπερεπίπεδο $cx = b$ του IR^n χωρίζει τον χώρο IR^n σε δύο **ημιχώρους**

$X^- = \{x : cx \prec b\}$, $X^+ = \{x : cx \succ b\}$

που είναι δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους και με $X^o = \{x : cx = b\}$ συμβολίζουμε το σημειοσύνολο υπερεπίπεδο.

Προφανώς ισχύουν:

$$X^+ \bigcap X^- = \varnothing \ , \ X^+ \bigcap X^o = \varnothing \ , \ X^- \bigcap X^o = \varnothing$$

και $X^+ \bigcup X^o \bigcup X^- = IR^n$

Οι παραπάνω σχέσεις συνόλων δηλώνουν ότι ένα σημείο $x \in IR^n$ θα ανήκει μόνο σε ένα απο τα σύνολα X^+, X^-, X^o.

5. Κλειστοί και ανοικτοί ημίχωροι

Τα σύνολα που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, δηλαδή $X^+, X^-, X^+ \bigcup X^o, X^- \bigcup X^o$ ονομάζονται **ανοικτοί** και **κλειστοί ημίχωροι.** Αναλυτικά:

Τα σύνολα $X^- = \{x : cx \prec b\}$ **και** $X^- = \{x : cx \succ b\}$ **ονομάζονται ανοικτοί ημίχωροι** *(open half - spaces)*.

Τα σύνολα $F^- = \{x : cx \leq b\}$ **και** $F^+ = \{x : cx \geq b\}$ **ονομάζονται κλειστοί ημίχωροι** *(closed half – spaces)*.

Είναι προφανές ότι : $F^+ \bigcap F^- = \{x : cx = b\} = X^o$.

Απ'όσα προηγουμένως αναφέραμε, δηλαδή τους παραπάνω ορισμούς και τους ορισμούς των ανοικτών και κλειστών συνόλων προκύπτουν και αποδεικνύονται εύκολα τα ακόλουθα:

i) **Τα υπερεπίπεδα είναι κλειστά σύνολα.**

Πράγματι για κάθε σημείο x ενός υπερεπιπέδου υπάρχει μία ε – γειτνίαση γύρω απο το x τέτοια ώστε κάθε σημείο της να μην ανήκει στο υπερεπίπεδο. Συμβολικά $\forall x \in X = \{x : cx = b\}$ και $N_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| \prec \varepsilon\} \ \Rightarrow X \bigcap N_\varepsilon(x) = \varnothing$.

Επομένως: «κάθε σημείο υπερεπιπέδου είναι συνοριακό σημείο και κάθε υπερεπίπεδο είναι κλειστό σύνολο».

ii) **Οι ανοικτοί ημίχωροι είναι ανοικτά σύνολα.**

Αυτό δηλώνει ότι κανένα σημείο ανοικτού ημιχώρου δεν είναι συνοριακό διότι για κάθε σημείο του μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ε – γειτνίαση που κάθε σημείο της να ανήκει στον ανοικτό ημιχώρο.

Επομένως: «οι ανοικτοί ημίχωροι είναι ανοικτά σύνολα».

iii) **Οι κλειστοί ημίχωροι είναι κλειστά σύνολα.**

Πράγματι τα συνοριακά σημεία του κλειστού ημίχωρου

$F^- = \{x : cx \leq b\}$ ή $F^+ = \{x : cx \geq b\}$ είναι σημεία του υπερεπιπέδου $X = \{x : cx = b\}$.

Αυτό δηλώνει ότι κάθε ε – γειτνίαση ενός σημείου του υπερεπιπέδου $cx = b$ περιέχει σημεία που ανήκουν και σημεία που δεν ανήκουν στον κλειστό ημίχωρο.

6. Κυρτά σύνολα

Στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου παρουσιάσαμε εισαγωγικές έννοιες απαραίτητες για την μελέτη της κυρτότητας. Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε ένα συμειοσύνολο που παίζει σημαντικό και βασικό ρόλο στη θεωρία βελτιστοποίησης. Τα σημειοσύνολα αυτά ονομάζονται κυρτά σύνολα.

Κυρτό σύνολο *(convex set)* **λέγεται το σύνολο** $X \subseteq IR^n$ **όταν δύο οποιαδήποτε σημεία του** x_1, x_2 **ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα** x_1x_2 **που ανήκει στο** X**.**

Συμβολίζουμε $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$, $\lambda \in [0,1]$.

Το σημείο $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$, $\lambda \in [0,1]$ **ονομάζεται κυρτός γραμμικός συνδυασμός** *(convex linear combination)* **των σημείων** x_1, x_2**.**

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι ένα κυρτό σύνολο είναι συνεκτικό σύνολο, όμως κάθε συνεκτικό σύνολο δεν είναι κυρτό σύνολο.

Κυρτά σύνολα είναι:

i) **Η ευθεία** $L = \{x : x = x_1 + \lambda x_2 \ , \ \lambda \in IR\}$ **και**

η ημιευθεία $H = \{x : x = x_1 + \lambda x_2 \ , \ 0 \leq \lambda \in IR\}$**.**

ii) **Το υπερεπίπεδο** $cx = b$

Διότι αν x_1, x_2 σημεία του υπερεπιπέδου τότε $cx_1 = b$, $cx_2 = b$ και για το σημείο x του ευθύγραμμου τμήματος x_1, x_2 που ισχύει $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$ έχουμε

$$cx = c\left[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right] = \lambda cx_2 + (1-\lambda)cx_1 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

δηλαδή το x είναι σημείο του υπερεπιπέδου $cx = b$.

iii) **Οι κλειστοί ημίχωροι** $X^+ = \left\{x \in IR^n : cx \geq b\right\}$ **,** $X^- = \left\{x \in IR^n : cx \leq b\right\}$ **και οι ανοικτοί ημίχωροι** $F^+ = \left\{x \in IR^n : cx \succ b\right\}$, $F^- = \left\{x \in IR^n : cx \prec b\right\}$**.**

Διότι αν $x_1, x_2 \in X^-$ και $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$ με $\lambda \in [0,1]$ τότε $cx = \lambda cx_2 + (1-\lambda)cx_1 \leq \lambda b(1-\lambda)b = b$

επομένως $x \in X^-$.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε και την κυρτότητα των ημίχωρων X^+, F^+, F^-.

iv) **Η σφαίρα** $S = \left\{x \in IR^n : \|x-a\| \prec r\right\}$ με κέντρο το α και ακτίνα r.

Η υπερσφαίρα που ορίζεται από το σύνολο:

$$B = \left\{x \in IR^n : \|x-a\| = r\right\}$$

με κέντρο το α και ακτίνα r δεν είναι κυρτό σύνολο.

Ακραίο σημείο *(extreme point)* **ενός κυρτού συνόλου** X **λέγεται ένα σημείο** $x \in X$ **αν υπάρχουν δύο σημεία** $x_1, x_2 \in X$ **με** $x_1 \neq x_2$ **ώστε να μην ισχύει**

$$x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \text{ με } 0 \prec \lambda \prec 1$$

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι ένα ακραίο σημείο δεν μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός δύο οποιωνδήποτε άλλων διαφορετικών μεταξύ τους σημείων.

Είναι προφανές ότι: ‘ένα ακραίο σημείο είναι συνοριακό, αλλά κάθε συνοριακό σημείο δεν είναι ακραίο σημείο’.

7. Πράξεις κυρτών συνόλων

Ενδιαφερόμαστε για τις πράξεις κυρτών συνόλων που το αποτέλεσμα είναι κυρτό σύνολο.

i) **Η τομή πεπερασμένου αριθμού κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.**

Πράγματι αν $X_1, X_2, ..., X_K$ είναι κυρτά σύνολα του IR^n, τότε το $X = \bigcap_{i=1}^{k} X_i$ είναι επίσης κυρτό σύνολο, διότι αν $x, y \in X = \bigcap_{i=1}^{k} X_i$ και $\lambda \in [0,1]$ τότε x και y ανήκουν σε κάθε X_i και επομένως επειδή X_i κυρτό

$$\Rightarrow \lambda y + (1-\lambda)x \in X_i \quad \forall i$$

Αλλά τότε
$$\lambda y + (1-\lambda)x \in X = \bigcap_{i=1}^{k} X_i$$

άρα X είναι κυρτό σύνολο.

ii) **α)Η τομή πεπερασμένου αριθμού υπερεπιπέδων είναι κυρτό σύνολο.**

β)Η τομή πεπερασμένου αριθμού ημίχωρων είναι κυρτό σύνολο.

γ)Η τομή πεπερασμένου αριθμού υπερεπιπέδων και ημίχωρων είναι κυρτό σύνολο.

Πράγματι το σύνολο X των λύσεων $x \in IR^n$ του συστήματος των γραμμικών ανισοεξισώσεων

$$Ax \le b \quad \text{ή} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \quad \text{με} \quad i = 1, 2, ..., m$$

είναι κυρτό σύνολο του IR^n, όπου $A = \left(a_{ij}\right)$ $n \times m$ πίνακας και $b \in IR^m$.

Αυτό συμβαίνει διότι κάθε σημειοσύνολο

$$X_i = \left\{x : a_{ix} \le b_i\right\} \quad \text{με} \quad i = 1, 2, ..., m$$

ορίζει ένα κυρτό σύνολο.

Όμως, το σύνολο $X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$ είναι τομή κυρτών συνόλων άρα είναι κυρτό σύνολο σύμφωνα με το *i)*.

iii) **Το άθροισμα και η διαφορά δύο κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.**

Η έννοια του κυρτού γραμμικού συνδυασμού δύο σημείων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο επεκτείνεται στην περίπτωση που $k \ge 2$ ώς εξής:

Κυρτός συνδυασμός (convex combination)

Άν $x_1, x_2, ..., x_k$ σημεία του IR^n, τότε ο κυρτός συνδυασμός αυτών των σημείων είναι το σημείο

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., k$$

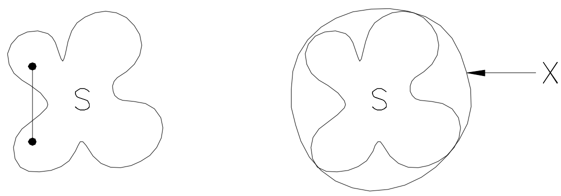
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Άν X είναι κυρτό σύνολο του IR^n, τότε από τον ορισμό της κυρτότητας το σύνολο X περιέχει κάθε κυρτό συνδυασμό δύο σημείων του.

Η πρόταση που ακολουθεί γενικεύει το παραπάνω, δηλαδή ένας κυρτός συνδυασμός περισσότερων από δύο σημείων ενός κυρτού συνόλου, ανήκει επίσης σ'αυτό το σύνολο.

'Το σύνολο των κυρτών γραμμικών συνδυασμών των σημείων $x_1, x_2, ..., x_k \in IR^n$ είναι κυρτό σύνολο'.

$$X = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, ..., k \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$ (απόδειξη σελ.24)



Το μικρότερο κυρτό σύνολο X που περιέχει ένα μη κυρτό σύνολο S ονομάζεται **κυρτή θήκη** *(convex hull)* του S.

Διαφορετικά:

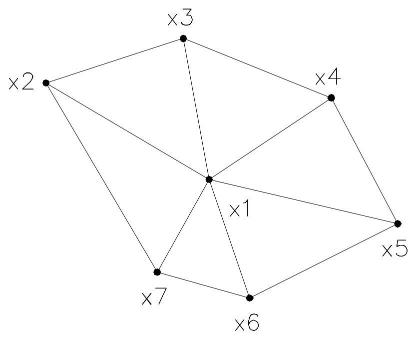
Κυρτή θήκη ενός συνόλου S ορίζεται η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το S. Συμβολίζεται co(S).

Ισχύει το θεώρημα:

Κυρτή θήκη πεπερασμένου αριθμού k διανυσμάτων $x_1, x_2, ..., x_k$ του IR^n είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των $x_1, x_2, ..., x_k$.

Συμβολίζουμε:

$$X = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ \ , \ \lambda_i \geq 0 \ \ , \ i = 1, ..., k \ \ , \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$



κυρτή θήκη των σημείων $x_1, x_2, ..., x_7 \in IR^n$.

8. Κυρτά πολύεδρα – πολύτοπα

Η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων ονομάζεται κυρτό πολύεδρο *(convex polyhedron)* **που ορίζεται από αυτά τα σημεία.**

Ένα κυρτό πολύεδρο που είναι φραγμένο ονομάζεται κυρτό πολύτοπο *(convex polytope)* **.**

Είναι προφανές ότι ένα κυρτό πολύτοπο που ορίζεται από τα σημεία $x_1, x_2, ..., x_k$ δεν μπορεί να έχει περισσότερα απο k ακραία σημεία.

Ισχύει το εξής θεώρημα:

Άν ένα αυστηρά κλειστό και φραγμένο κυρτό σύνολο X του IR^n έχει ένα πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων, τότε κάθε μη ακραίο σημείο του μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός των ακραίων σημείων του.

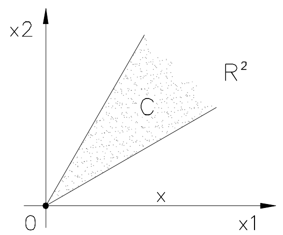
Άν X κυρτό πολύτοπο, τότε κάθε μη ακραίο σημείο του μπορεί να εκφρασθεί ως κυρτός συνδυασμός ακραίων σημείων του.

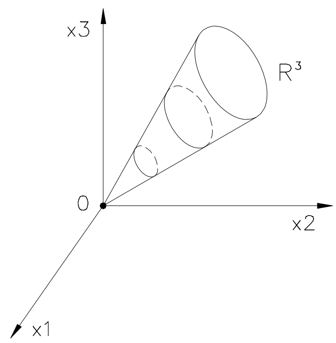
9.Κυρτοί Κώνοι

Μιά κατηγορία κυρτών συνόλων που παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού είναι οι κυρτοί κώνοι.

Κώνος C είναι ένα σύνολο σημείων του IR^n με την εξής ιδιότητα:

'αν $x \in C$ τότε και το $\lambda x \in C \quad \forall \lambda \geq 0$'.





Ένας κώνος ονομάζεται κυρτός αν και μόνο αν $\forall x, y \in C$ και λ και $\mu \in IR$ ισχύει $\lambda x + \mu y \in C$.

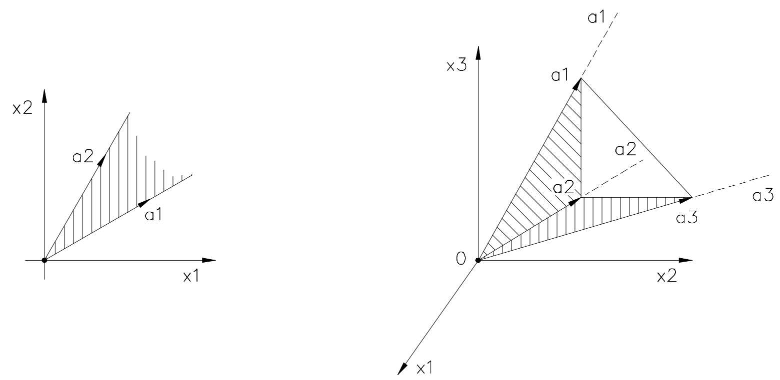
Παράδειγμα

i) Η ημιευθεία $(x) = \{ y : y = \lambda x \ , \ \lambda \geq 0 \}$ με $x \neq 0$ είναι ένας κυρτός κώνος.

ii) Το σύνολο $\{ x \in IR^n : x \geq 0 \}$ που είναι το μη αρνητικό τεταρτημόριο του IR^n είναι ένας κυρτός κώνος.

iii) Το υπερεπίπεδο $\{ x \in IR^n : cx = 0 \ , \ c \neq 0 \}$ του IR που περνά από την αρχή των αξόνων και οι ημίχωροι $\{ x \in IR^n : cx \leq 0 \ , \ c \neq 0 \}$ και $\{ x \in IR^n : cx \geq 0 \ , \ c \neq 0 \}$ που ορίζονται από το υπερεπίπεδο είναι κυρτοί κώνοι.

iv) Αν A είναι $n \times m$ πίνακας τότε το σύνολο των λύσεων $\{x \in IR^n : Ax \geq 0\}$ είναι κυρτός κώνος.



10. Γεωμετρική ερμηνία της μεθόδου Simplex

Τα m διανύσματα στήλες του I_m πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως μοναδιαία διανύσματα). Επομένως, αποτελούν βάση στο χώρο των λύσεων του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού. Την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων (στήλων) του I_m με γραμμικούς συνδυασμούς θα την περάσουμε στον πίνακα A και σε συνδυασμό με το θεώρημα 3 κεφ.ΙΙΙ θα προσδιορίσουμε την βέλτιστη λύση.

Έστω C είναι ο κυρτός κώνος που ορίζεται στον χώρο από τα m- διάστατα διανύσματα, στήλες του I_m που έχουν την ιδιότητα ότι ο m- διάστατος κώνος C τον οποίο ορίζουν, περιέχει σημείο $B(b_1,...,b_m)$, αυτό οδηγεί σε μία εφικτή λύση.

Το υπερεπίπεδο που περιέχει το C χωρίζει τα υπερεπίπεδα σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα περιέχει τον θετικό $m+1$ ημιάξονα των συντεταγμένων και η άλλη ομάδα τα υπόλοιπα διανύσματα $m-1$ κάτω απο το υπερεπίπεδο, τα οποία μπορούν να εκλεγούν ως νέα βάση διανυσμάτων με την ίδια διαδικασία. Η μέθοδος αυτή διαδοχικά εφαρμοζόμενη οδηγεί στη βέλτιστη λύση.

Με το πρώτο βήμα έχουμε εντοπίσει μία κορυφή του εφικτού συνόλου. Το δεύτερο βήμα είναι και το πιό βασικό, διότι μας πηγαίνει από κορυφή σε κορυφή του εφικτού συνόλου.

Κορυφή είναι το σημείο τομής n διαφορετικών υπερεπιπέδων και **ακμή** είναι η τομή $n-1$ υπερεπιπέδων.

Είδαμε στο Κεφάλαιο ΙΙ ότι το εφικτό σύνολο ορίζεται από m ανισώσεις $Ax \leq b$ και n ανισώσεις $x \geq 0$. Επομένως, κάθε κορυφή του εφικτού συνόλου προκύπτει ως λύση των $\binom{m+n}{n}$ εξισώσεων.

Γενικά υπάρχουν το πολύ $\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ δυνατές τομές δηλαδή κορυφές του πολυτόπου, διότι πολλές ακμές δεν τέμνονται άρα δεν ορίζουν κορυφή πολυτόπου και το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων θα είναι αδύνατο. Η μετάβαση απο κορυφή σε κορυφή του πολυτόπου μας δίνει την βέλτιστη λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΣΧΕΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ Ν – ΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Εισαγωγή

Σύμφωνα με τα προηγούμενα ο χώρος των λύσεων του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα κυρτό και φραγμένο σύνολο, άρα είναι ένα **πολύτοπο** στον IR^n. Η βέλτιστη λύση είναι ένα **ακραίο σημείο** του πολυτόπου.

Επομένως στο Πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού

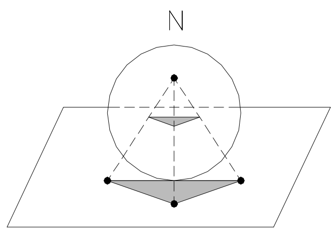
στον IR^2 η βέλτιστη λύση είναι κορυφή πολυγώνου,

στον IR^3 η βέλτιστη λύση είναι κορυφή πολυέδρου,

στον IR^n με $n \succ 3$ η βέλτιστη λύση είναι κορυφή πολύτοπου.

Σύμφωνα με το θεώρημα 6 και πρόταση 1, κεφάλαιο ΙΙ προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση ‘περπατά’ πάνω στις ακμές του πολυτόπου και σε κάποια κορυφή του (‘ακραίο σημείο’) παίρνει την βέλτιστη τιμή.

Το πολύεδρο με στερεογραφική προβολή αντιστοιχεί σε γράφημα[1] $G(n,m)$ του επιπέδου π που εφάπτεται στην σφαίρα S η οποία έχει πόλο το σημείο N, έτσι ώστε τα σημεία N, s, p να είναι συνευθειακά. (Σχήμα)



[1] Στο τέλος του κεφαλαίου ακολουθεί παράγραφος σχετικά με τις έννοιες της γραφοθεωρίας.

Επαγωγικά σκεπτόμενοι, ένα πολύτοπο του IR^n με στερεογραφική προβολή σε υπερσφαίρα απεικονίζεται στο υπερεπίπεδο με ένα γράφημα $G(n,m)$ όπου n οι κορυφές του πολυτόπου και m οι ακμές του πολυτόπου .

Επομένως ένα πολύτοπο του IR^n έχει στερεογραφική προβολή ένα γράφημα $G(n,m)$.

Η εφικτή λύση του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού περπατά πάνω στις πλευρές του γραφήματος (δηλαδή ακμές του πολύτοπου) και σε κάποια από τις κορυφές του γίνεται βέλτιστη τιμή (λύση του Π.Γ.Π.).

Σύμφωνα με τη γραφοθεωρία η ακολουθία κορυφών πλευρών $x_0e_0, x_1e_1, ..., x_ne_n$, έτσι ώστε κάθε κορυφή και πλευρά του γραφήματος να λαμβάνεται μία μόνο φορά, ονομάζεται **μονοπάτι** γραφήματος.

Ένα **μονοπάτι** λέγεται *Hamilton* όταν περνά από όλες τις κορυφές του γραφήματος, όχι όμως από όλες τις πλευρές του, μία φορά και το γράφημα αυτό λέγεται **ημιχαμιλτόνιο.** Επομένως η διαδρομή της εφικτής λύσης του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού πάνω στο μονοπάτι *Hamilton* της στερεογραφικής προβολής σε κάποια κορυφή του δίνει τη βέλτιστη λύση.

Τα μονοπάτια *Hamilton* βρίσκονται με τον αλγόριθμο *Kaufmann*.

Οι κορυφές του γραφήματος είναι οι λύσεις του συστήματος

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

με $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ...n$

(που προκύπτουν με χρήση εξειδικευμένων προγραμμάτων όπως το Mathematica)

και η βέλτιστη λύση προκύπτει από την αριθμητική τιμή της $f(x_1, ..., x_n)$ σε κάποια κορυφή $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Η πολυπλοκότητα του προβλήματος είναι γραμμική $O(n)$ ενώ η πολυπλοκότητα του προβλήματος με *Simplex* είναι $O(n^3)$ εκθετική.

Ορισμένα θεωρήματα και προβλήματα θεωρίας γραφημάτων θα μπορούσαν να διατυπωθούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού όπως π.χ. ο αλγόριθμος ροής ελάχιστου κόστους, το θεώρημα μέγιστης ροής – ελάχιστης τομής.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία αρκετά αναλυτική άποψη της θεωρίας γραμμικού προγραμματισμού για την κατανόηση της εφαρμογής της στη θεωρία γραφημάτων.

Είδαμε ότι ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα οποιοδήποτε πρόβλημα που μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \text{(i)} \qquad \text{με περιορισμούς}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, 1 \le j \le k \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, k+1 \le j \le m \end{aligned}\right\} \quad \text{(ii)}$$

$$\left. x_i \ge 0 \ , \ l+1 \le i \le n \right\} \quad \text{(iii)}$$

όπου για $1 \le i \le l$, x_i είναι χωρίς περιορισμό στο πρόσημο.

Τα a_{ij} , b_j , c_i είναι σταθερές και τα x_i μεταβλητές.

Ο ανωτέρω ορισμός του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένας από ένα αριθμό συνηθισμένων μορφών. Πολλά προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού έχουν μία φυσιολογική περιγραφή με προτάσεις παρόμοιες αλλά όχι πανομοιότυπες με τις παραπάνω, π.χ. ελαχιστοποίηση της $\sum_i c_i x_i$ είναι το ίδιο με μεγιστοποίηση της $\sum_i \left(-c_i\right) x_i$, ενας γραμμικός περιορισμός της μορφής $\sum_i a_{ji} x_i \le b_j$ είναι το ίδιο με το $\sum_i \left(-a_{ji}\right) x_i \ge -b_j$ κ.ο.κ.

Γενικά ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει n μεταβλητές x_i , μία αντικειμενική συνάρτηση (i), m περιορισμούς (ii) και ένα σύνολο απο συνθήκες μη αρνητικότητας (iii).

Για οποιοδήποτε τέτοιο πρόβλημα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δυϊκό πρόβλημα με m μεταβλητές y_i (όπου το καθένα αντιστοιχεί σε κάθε περιορισμό του αρχικού προβλήματος) και n περιορισμούς (ένα για κάθε μεταβλητή του αρχικού προβλήματος) ώς εξής:

ελαχιστοποίηση της $\sum_{j=1}^{m} b_j y_j$

με περιορισμούς $\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_i = c_i \quad , \quad 1 \le i \le l$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_i \ge c_i \quad , \quad l+1 \le i \le n$$

και συνθήκες μη αρνητικότητας $y_i \ge 0 \quad , \quad k+1 \le j \le m$.

Για να ξεχωρίσουμε το αρχικό πρόβλημα απο το δυϊκό που το ονομάζουμε **πρωτογενές**.

Είναι προφανές ότι το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτογενές.

Η συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι η μέθοδος *Simplex*. Αρχίζοντας απο μία εφικτή λύση, αυτή η μέθοδος παράγει μία ακολουθία από εφικτές λύσεις έτσι ώστε κάθε επόμενη να δίνει καλύτερη τιμή απο την προηγούμενη στην αντικειμενική συνάρτηση, τερματίζοντας στην βέλτιστη λύση. Η μέθοδος Simplex είναι ένας αλγόριθμος εκθετικού χρόνου.

Ένα κλασσικό πρόβλημα Επιχειρησιακής Έρευνας που μοντελοποιείται με γραμμικό προγραμματισμό είναι το **πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους** (min – cost flow problem). Για το πρόβλημα αυτό υπάρχει λύση βασισμένη στη μέθοδο *Ford – Fulkerson* (αναφέρεται στο βιβλίο του Gibbons, σελίδες 111-117, CUP).

Η σχέση Μαθηματικού Προγραμματισμού – Γραφημάτων είναι αμφίδρομη. Είδαμε παραπάνω το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού να μεταφέρεται σε γράφημα. Τώρα θα δούμε το αντίστροφο δηλαδή προβλήματα γραφημάτων να χρησιμοποιούν Γραμμικό Προγραμματισμό.

Η μαθηματική διατύπωση προβλημάτων βελτιστοποίησης σε δίκτυα βασίζεται στις αρχές του μαθηματικού προγραμματισμού και της θεωρίας γραφημάτων.

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δύο κόμβων ενός δικτύου, το πρόβλημα μέγιστης ροής μεταξύ δύο κόμβων ενός δικτύου και, το πρόβλημα της ροής ελάχιστου κόστους που ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες προσφοράς και ζήτησης στους κόμβους ενός δικτύου, αποτελούν τον σκελετό πάνω στον οποίο έχει αναπτυχθεί ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών.

2.Προβλήματα ροής και Γραμμικός Προγραμματισμός

Τα προβλήματα ροής αποτελούν ειδικές περιπτώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού. Στις διάφορες κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης σε δίκτυα αναλύονται οι σχέσεις γραμμικού προγραμματισμού και προβλημάτων ροής.

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις παράστασης προβλημάτων ροής με τη μορφή προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού ο πίνακας των περιορισμών του προβλήματος αντιστοιχεί στον πίνακα πρόσπτωσης (μήτρα κόμβων – κλάδων) κάποιου γραφήματος.

Το γεγονός αυτό οδηγεί στην απλοποίηση της μεθόδου *Simplex* σε μορφή πού να έχει πολύ βελτιωμένη υπολογιστική συμπεριφορά ή ακόμη και στην κατασκευή ειδικών αλγορίθμων.

I) Πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους

Το πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους έχει την εξής γενική διατύπωση:

Στο γράφημα $G(N, A)$ οι ακμές χαρακτηρίζονται απο τα εξής στοιχεία

i) ελάχιστη απαίτηση ροής

ii) μέγιστη δυναμικότητα ροής

iii) μοναδιαίο κόστος ροής.

Να βρεθεί το διάνυσμα ροής ελάχιστου κόστους που να ικανοποιεί τους περιορισμούς ροής πάνω στις ακμές και τη διατήρηση ροής στις κορυφές.

Αν x είναι το διάνυσμα ροής πάνω στις ακμές, δηλαδή x_i η ροή στον κλάδο i , l_i η ελάχιστη απαίτηση ροής, u_i η δυναμικότητα ροής, και c_i το μοναδιαίο κόστος του κλάδου i, τότε το πρόβλημα της ροής ελαχίστου κόστους μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\min \sum_{i \in A} c_i u_i$$

όταν
$$Ax = 0$$
$$l_i \le x_i \le u_i \qquad \forall i \in A$$

όπου A πίνακας πρόσπτωσης του G , $c = (c_i)$, $l = (l_i)$, $u = (u_i)$ $\forall i \in A$.

Η μορφοποίηση αυτή προϋποθέτει κατάλληλη ακμή για την ανακύκλωση ροής.

Ή διαφορετικά
$$\min cx$$
$$Ax = 0$$
όταν
$$l \le x \le u$$

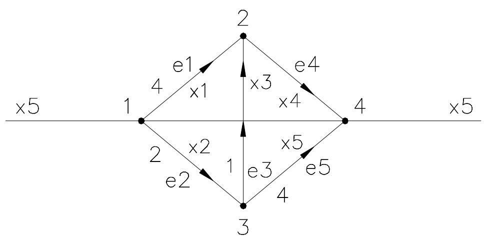
όπου A μήτρα κόμβων – κλάδων γραφήματος

c διάνυσμα κόστους κλάδων

l διάνυσμα ελάχιστης απαίτησης ροής στους κλάδους

u διάνυσμα δυναμικότητας κλάδων.

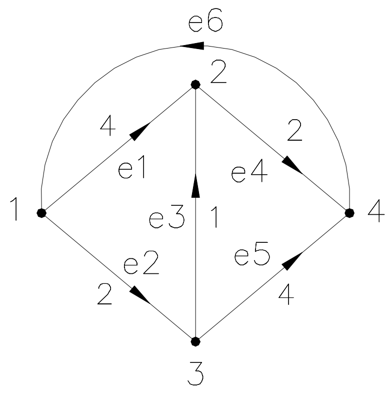
II) <u>Το πρόβλημα μέγιστης ροής</u>



Οι αριθμοί στις ακμές παριστάνουν τη μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει απο κάθε ακμή αντίστοιχα. Να βρεθεί ποιά είναι η μέγιστη ροή που μπορεί να διοχετευθεί από την ακμή $1 \equiv S$ στην ακμή $4 \equiv T$.

Αν $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ το διάνυσμα ροής πάνω στις ακμές του γραφήματος, επειδή ισχύει η διατήρηση της ροής θα πρέπει η ροή να αναχωρεί από την κορυφή 1 να φθάνει στην κορυφή 4. Επομένως πρέπει να μεγιστοποιηθεί είτε η ροή που αναχωρεί απο την κορυφή 1 ή αυτή που φθάνει στην κορυφή 4.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής περιγράφεται από τις σχέσεις:



$\max\{x_1 + x_2\}$

όταν ή $\max x_6$

[$x_1 + x_3 = x_4$ (διατήρηση ροής στην κορυφή 2) | $x_1 + x_2 = 6$

| $x_2 = x_3 + x_5$

$x_2 = x_3 + x_4$ (διατήρηση ροής στην κορυφή 3) | $x_4 + x_5 = x_6$

$0 \le x_1 \le 4$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 1$ | $0 \le x_i \le q_i$

$0 \le x_4 \le 2$, $0 \le x_5 \le 4$] |

Το πρόβλημα μέγιστης ροής γράφεται:

$$\max x_6$$

$$\text{όταν} \quad Ax = 0$$

$$0 \le x_i \le a_i \quad , \quad i = 1,\dots,6$$

III) <u>Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής</u>

Σε ένα γράφημα οι αριθμοί στις ακμές παριστάνουν αποστάσεις. Ζητείται να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο δεδομένων κορυφών.

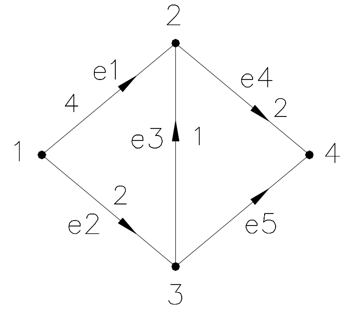
Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ελάχιστης διαδρομής γίνεται ως εξής:

$$x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

1 αν η ακμή e_i περιλαμβάνεται στην ελάχιστη διαδρομή

0 αν όχι.

Στο γράφημα του σχήματος ζητείται η συντομότερη διαδρομή μεταξύ των κορυφών 1 και 4.



Είναι προφανές ότι μία ακμή e_1 ή e_2 συμμετέχει στην ελάχιστη διαδρομή άρα $x_1 + x_2 = 1$. Άν χρησιμοποιηθεί είτε η ακμή e_1 είτε η ακμή e_3 περνά απο την κορυφή 2 οπότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ακμή 4, άρα

$$x_1 + x_3 = x_4$$

όμοια $$x_2 = x_3 + x_5$$

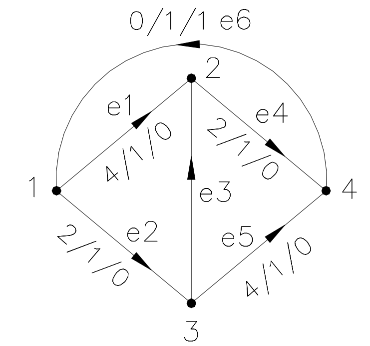
Το πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής απο την κορυφή 1 στην 4 γράφεται:

$$\min(4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 4x_5)$$

όταν
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 + x_3 = x_4 \\ & x_2 = x_3 + x_5 \\ & 0 \le x_i \le i \quad , \quad i = 1,...,5 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις παριστάνουν τη διακίνηση μιας μονάδας ροής από την κορυφή 1 στην κορυφή 4. Επομένως, το πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής από την κορυφή 1 στην 4 ταυτίζεται με τη διακίνηση μίας μονάδας ροής από την κορυφή 1 στην 4. Το ρόλο του μοναδιαίου κόστους παίζουν οι αποστάσεις στις ακμές.

Το γράφημα γίνεται:



και το πρόβλημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \min cx \\ & Ax = 0 \\ & 0 \le x_i \le 1 \quad , \quad i = 1,...,5 \\ & 1 \le x_6 \le i \end{aligned}$$ όπου A πίνακας προσπτώσεως.

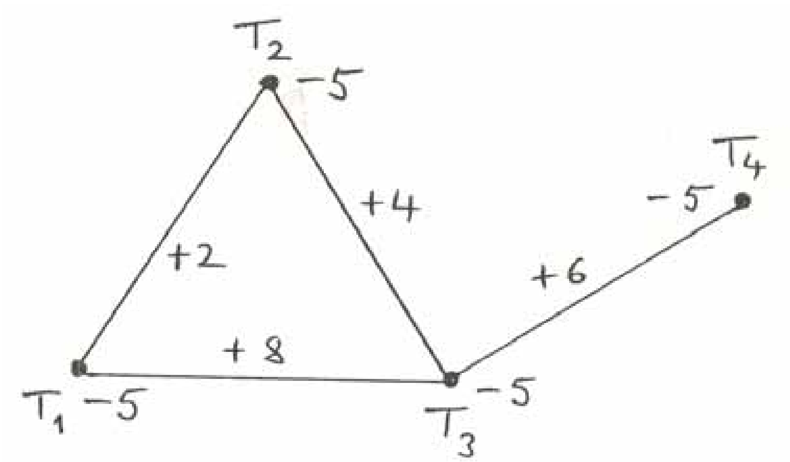
3.Αμφίδρομη σχέση προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού και Θεωρίας Γραφημάτων

<u>Πρόβλημα Rhys</u>

Στο δίκτυο του παρακάτω σχήματος οι κορυφές παριστάνουν 'επενδυτικές δραστηριότητες', δραστηριότητες υποδομής, με το αντίστοιχο κόστος (αρνητικός αριθμός που συνοδεύει κάθε κορυφή) πού απαιτεί η αναπτυξή τους. Οι πλευρές παριστάνουν παραγωγικές δραστηριότητες, δραστηριότητες που αποδίδουν κέρδος (ύστερα από την αφαίρεση από τα έσοδα του κόστους τους), το οποίο για κάθε δραστηριότητα αναγράφεται στον αντίστοιχο κλάδο (θετικός αριθμός πάνω σε κάθε κλάδο).

Κάθε παραγωγική δραστηριότητα για να αναπτυχθεί προϋποθέτει την ύπαρξη ορισμένων επενδυτικών δραστηριοτήτων, και συγκεκριμένα αυτών που πρόσκεινται σε κάθε κλάδο. Οι επενδυτικές αλλά και οι παραγωγικές δραστηριότητες θεωρείται ότι εκφράζονται με ένα τυπικό και πλήρως αδιαίρετο μέγεθος, δηλαδή κάθε δραστηριότητα είτε πραγματοποιείται σε ένα ορισμένο μέγεθος είτε απορρίπτεται.

Ζητείται να βρεθεί η επιλογή παραγωγικών και επενδυτικών δραστηριοτήτων που μεγιστοποιεί το κέρδος.



Για παράδειγμα , στο σχήμα οι κόμβοι μπορεί να είναι σταθμοί και οι κλάδοι γραμμές ενός συγκοινωνιακού δικτύου. Κάθε γραμμή για να λειτουργήσει και να αποφέρει έσοδα απαιτεί να προϋπάρχουν οι δυο σταθμοί στα άκρα της.

Στο δίκτυο του σχήματος, ας αντιστοιχίσουμε μεταβλητές $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ στους κόμβους του δικτύου και μεταβλητές $x_{ij} (i = 1, 2, 3, 4)(j = 1, 2, 3, 4)$ στους κλάδους του δικτύου. Δηλαδή, κάθε μεταβλητή y_i αντιστοιχεί σε ένα επενδυτικό έργο και κάθε μεταβλητή x_{ij} σε ένα παραγωγικό έργο.

Ορίζουμε τις τιμές των μεταβλητών y_i και x_{ij} ως εξής:

$$y_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

0 εάν το i επενδυτικό έργο δεν επιλέγεται

1 εάν το i επενδυτικό έργο επιλέγεται

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

0 εάν το (ij) παραγωγικό έργο δεν επιλέγεται

1 εάν το (ij) παραγωγικό έργο επιλέγεται

Το κάθε έργο θεωρείται ενιαία και αδιαίρετη οντότητα χωρίς να είναι δυνατή η εκτέλεση μέρους του μόνο.

Η διατύπωση του προβλήματος με τη μορφή του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού έχει ως εξής:

$$\max(2x_{12} + 8x_{13} + 4x_{23} + 6x_{34} - 5y_1 - 5y_2 - 5y_3 - 5y_4) \quad (1)$$

με τους περιορισμούς:

$$x_{12} - y_1 \le 0 \quad (2)$$

$$x_{12} - y_2 \le 0 \quad (3)$$

$$x_{13} - y_1 \le 0 \quad (4)$$

$$x_{13} - y_3 \le 0 \quad (5)$$

$$x_{23} - y_2 \le 0 \quad (6)$$

$$x_{23} - y_3 \le 0 \quad (7)$$

$$x_{34} - y_3 \le 0 \quad (8)$$

$$x_{34} - y_4 \le 0 \quad (9)$$

$$\begin{matrix} y_i = 0,1(i = 1,2,3,4) \\ x_{ij} = 0,1(i, j = 1,2,3,4) \end{matrix} \quad (10)$$

Οι περιορισμοί (2) και (3) εκφράζουν το γεγονός ότι το x_{12} δεν μπορεί να γίνει 1 εάν το y_1 και το y_2 δεν γίνουν 1. Το ίδιο εκφράζουν και οι λοιποί περιορισμοί (4) - (9) για τις άλλες παραγωγικές δραστηριότητες.

Στο πρόβλημα περιλαμβάνονται επίσης οι περιορισμοί $x_{ij} \leq 1$ ώστε σε συνδυασμό με τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης το πρόβλημα να έχει φραγμένες λύσεις.

Έτσι το πρωτεύον πρόβλημα γίνεται:

Πρωτεύον

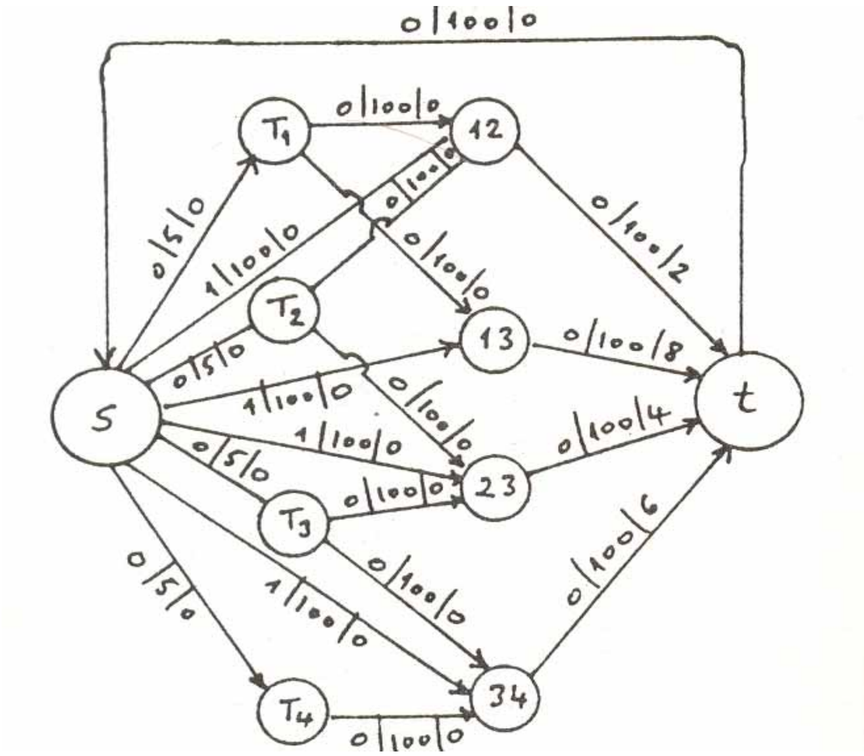
	T_1	T_2	T_3	T_4	12	13	23	34	
max	-5	-5	-5	-5	2	8	4	6	
	-1				1				≤ 0
		-1			1				≤ 0
	-1					1			≤ 0
			-1			1			≤ 0
		-1					1		≤ 0
			-1				1		≤ 0
			-1					1	≤ 0
				-1				1	≤ 0
					1				≤ 1
						1			≤ 1
							1		≤ 1
								1	≤ 1

και το δυϊκό του

Δυϊκό

min	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
T_1	-1		-1										≥ -5
T_2		-1			-1								≥ -5
T_3				-1		-1	-1						≥ -5
T_4								-1					≥ -5
12	1	1							1				>2
13			1	1						1			>8
23					1	1					1		>4
34							1	1				1	>6

Το δίκτυο που αντιστοιχεί στον πίνακα φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Μετασχηματισμός του δυϊκού σε πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους.

min	→	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
T_1	1	-1		-1						1													0
T_2	2		-1				-1				1												0
T_3	3				-1			-1	-1			1											0
T_4	4								-1				1										0
12	5	1	1											1				-1					0
13	6			1	1										1				-1				0
23	7					1	1									1				-1			0
34	8							1	1								1				-1		0
source										-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1					1	0
link																		1	1	1	1	-1	0
l_{ij}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	4	6	0	
u_{ij}	100	100	100	100	100	100	100	100	100	5	5	5	5	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

*** Βασικές έννοιες Θεωρίας Γραφημάτων**

Γράφημα *(graph)* $G(V,E)$ είναι ζεύγος πεπερασμένων μη κενών συνόλων ξένων μεταξύ τους.

Το V ονομάζεται **σύνολο κορυφών** (ή κόμβων) και

το E ονομάζεται σύνολο πλευρών (ή ακμών).

Αν V διατεταγμένο τότε το γράφημα ονομάζεται **κατευθυνόμενο** (direct).

Με $G(V,E)$ θα συμβολίζουμε το μη κατευθυνόμενο γράφημα και με $G(V,A)$ το κατευθυνόμενο γράφημα.

Το πλήθος των πλευρών σε **πλήρες γράφημα** με n κορυφές είναι $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ και στο πλήρες κατευθυνόμενο είναι $n(n-1)$.

Οι κόμβοι που ορίζουν ακμή ονομάζονται **γειτονικοί**.

Ένα γράφημα $G^{'}(V^{'},E^{'})$ λέγεται **υπογράφημα** του $G(V,E)$ αν $V^{'} \subseteq V$ και $E^{'} \subseteq E$.

Μονοπάτι είναι η διαδοχική ακολουθία κορυφής – πλευράς όταν κάθε κορυφή και κάθε πλευρά λαμβάνεται μία μόνο φορά.

Αν η αρχική κορυφή και η τελική ενός μονοπατιού συμπίπτουν τότε λέγεται **κύκλος**.

Ο αριθμός των πλευρών που προσπίπτουν σε κορυφή του γραφήματος ονομάζεται **βαθμός κορυφής**.

Στο κατευθυνόμενο γράφημα ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή (κόμβο) ονομάζεται **έσω βαθμός** και ο αριθμός των ακμών που αναχωρούν από την κορυφή ονομάζεται **έξω βαθμός**.

Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** λέγεται **δίκτυο**.

Πίνακας πρόσπτωσης γραφήματος (ή μήτρα κόμβων – κλάδων) είναι ένας $n \times m$ $(0,1)$ πίνακας με στοιχεία:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

0 αν η πλευρά a_{ij} δεν ανήκει στο γράφημα

1 αν η πλευρά a_{ij} ανήκει στο γράφημα.

Στο κατευθυνόμενο γράφημα $G(N,A)$ ο πίνακας πρόσπτωσης είναι:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

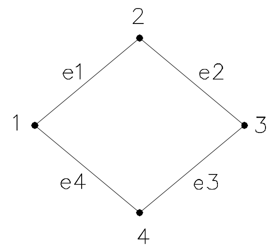
-1 ή 0 αν η πλευρά a_{ij} έχει διαφορετική κατεύθυνση στο γράφημα.

0 αν $a_{ij} \notin G$

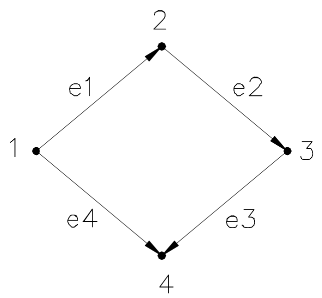
1 αν $a_{ij} \in G$

Συβολίζεται $A = (a_{ij})$

π.χ.



$$\begin{array}{cc} & \text{πλευρές} \\ & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \quad \text{κορυφές} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \end{array}$$



$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

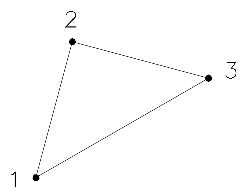
Πίνακας γειτνίασης γραφήματος $G(n,m)$ είναι ο $(0,1)$ πίνακας $n\times n$ με

$$\left(b_{ij}\right)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

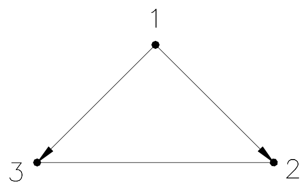
1 αν ij πλευρά του γραφήματος

0 αν διαφορετικά

<u>παράδειγμα</u>



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Δίκτυο είναι ένα σύνολο κόμβων (N) ακμών (A).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

1. Μορφή Προβλήματος

Με τη μέθοδο *Simplex*, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, λύνονται προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού. Το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού αναφέρεται στη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) της γραμμικής συνάρτησης $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, όταν οι μεταβλητές πληρούν κάποιους περιορισμούς, που εκφράζονται με εξισώσεις ή ανισώσεις.

Έχει την εξής μορφή:

$f_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ ή $f_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \quad (1) \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array} \quad (2)$$

Υπο μορφή πινάκων το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού γράφεται:

$$\begin{array}{l} F_{\max} = c^T X \\ AX \le b \\ X \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} F_{\min} = c^T X \\ AX \ge b \\ X \ge 0 \end{array}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Αν οι ανισώσεις στο (1) μετατραπούν σε εξισώσεις με την πρόσθεση των βοηθητικών μεταβλητών $x_{n+i}, i = 1, 2, ..., m$, τότε το (1) υπο μορφή πινάκων γράφεται:

$$F_{\max} = c^T X$$
$$A_o X_o = b$$
$$x \geq 0$$

όπου $A_o = (A, I_m), I_m$ μοναδιαίος.

Σημείωση:

1.Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της F λύνεται με τη μέθοδο *Simplex*
2.Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της F λύνεται με εφαρμογή της μεθόδου *Simplex* στο δυϊκό του, δηλαδή:

$$F_{\min} = c^T X \qquad G_{\max} = b^T z$$
$$AX \geq b \qquad \text{το δυϊκό είναι:} \qquad A^T z \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad z \geq 0$$

Τέλος εάν οι περιορισμοί των μεταβλητών εκφράζονται με εξισώσεις και ανισώσεις, χρησιμοποιείται μια βοηθητική μεταβλητή M.

2. Αλγόριθμος Simplex

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex γράφουμε τα δεδομένα με την εξής μορφή:

(I)

A	Im	b
$-c^T$	0	F

Η μέθοδος Simplex είναι ένας αλγόριθμος που προχωρά με αλλαγή των ανωτέρω πινάκων (I), (II) κλπ, και περιγράφεται απο τα εξής τρία βήματα:

1.Εκλέγουμε μία στήλη a_j του πίνακα A που το τελευταίο στοιχείο της είναι $-c_j$ να είναι αρνητικός αριθμός.
2.Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης b με τα αντίστοιχα μη μηδενικά στοιχεία της εκλεγμένης στήλης a_j του πίνακα A. Εκλέγουμε το μικρότερο θετικό πηλίκο b_i / a_{ij} και το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A ονομάζεται **στροφέας**.
3.Διαιρούμε τα στοιχεία της γραμμής του στροφέα με το στροφέα. Αυτή είναι η νέα γραμμή ενός νέου πίνακα (II), όπου η εκλεγμένη στήλη μετατρέπεται σε μοναδιαία με τη βοήθεια γραμμικών συνδυασμών της νέας γραμμής και των γραμμών του προηγούμενου πίνακα (I).

Τα βήματα 1,2,3 επαναλαμβάνονται μέχρις ότου τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής γίνουν μη αρνητικοί αριθμοί.

Όταν αυτό πραγματοποιηθεί, ο αλγόριθμος *Simplex* έχει τελειώσει και στον τελευταίο πίνακα διαβάζουμε τα αποτελέσματα ως εξής:

Στη μοναδιαία στήλη a_j *του πίνακα Α η μονάδα αντιστοιχεί στο στοιχείο* b_i *της στήλης* b *και η μεταβλητή* $x_j = b_i$. *Έτσι προκύπτουν οι τιμές των μεταβλητών.*

Στη θέση F του τελευταίου πίνακα έχει προκύψει η μέγιστη τιμή της F. Αυτά όσον αφορά το πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μετατρέπεται στο δυϊκό του και λύνεται με τη μέθοδο *Simplex*, αλλά ο τελευταίος πίνακας διαβάζεται ως εξής:

Στη θέση F διαβάζουμε το F_{min} *και αριστερά της F τις τιμές των μεταβλητών* $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ακολουθεί το πρόγραμμα της μεθόδου *Simplex*, όπου περιέχονται και οι τρείς περιπτώσεις:

I. Μεγιστοποίηση
II. Ελαχιστοποίηση
III. Όταν οι περιορισμοί εκφράζονται με ετερόστροφες ανισώσεις ή εξισώσεις.

3. Εφαρμογή

<u>Δεδομένα - Ζητούμενα</u>

α) Βιομηχανία κατασκευάζει δύο τύπους προϊόντων Α,Β.

Η κατασκευή τους προγραμματίζεται σε τρείς αυτόματους μηχανισμούς I,II,III.

Το προϊόν Α απασχολεί 1 χρονική μονάδα τις μηχανές I
2 χρονικές μονάδες τις μηχανές II
1 χρονική μονάδα τις μηχανές III

και δίνει κέρδος 6 χρηματικές μονάδες.

Το προϊόν Β απασχολεί 1 χρονική μονάδα τις μηχανές I
1 χρονική μονάδα τις μηχανές II
3 χρονικές μονάδες τις μηχανές III

και δίνει κέρδος 8 χρηματικές μονάδες.

Άν η βιομηχανία διαθέτει 100 χρονικές μονάδες για τις μηχανές I
180 χρονικές μονάδες για τις μηχανές II
210 χρονικές μονάδες για τις μηχανές III

πόσα προϊόντα τύπου Α και πόσα τύπου Β μπορεί να κατασκευάσει για να έχει μέγιστο κέρδος;

β) Άν τα έξοδα για την κατασκευή των δύο τύπων προϊόντων Α,Β είναι 200 χρηματικές μονάδες ημερησίως για το καθένα και η απόδοση των μηχανών ημερησίως είναι 100, 300, 400 για το Α και 200, 100, 300 για το Β αντίστοιχα,

βρείτε: πόσα προϊόντα τύπου Α και τύπου Β πρέπει να κατασκευάσει η βιομηχανία ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος, όταν οι απαιτήσεις παραγωγής είναι όχι λιγότερες από

9.000 μονάδες από τις μηχανές Ι

12.000 μονάδες από τις μηχανές ΙΙ

26.000 μονάδες από τις μηχανές ΙΙΙ.

Λύση

Καταστρώνουμε αρχικά τις αντικειμενικές συναρτήσεις και τους περιορισμούς:

α) $f_{\max} = 6x_1 + 8x_2$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \le 100 \\
&2x_1 + x_2 \le 180 \\
&x_1 + 3x_2 \le 210 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

β) $g_{\min} = 200x + 200y$

$$
\begin{aligned}
&100x + 200y \ge 9000 \\
&300x + 100y \ge 12000 \\
&400x + 300y \ge 26000 \\
&x, y \ge 0
\end{aligned}
$$

Ακολουθεί ο κώδικας προγράμματος επίλυσης σε γλώσσα C++:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define  MMAX  25
#define  NMAX  25
#define  REAL  double

typedef REAL MAT[MMAX][NMAX];

MAT  A;
int  IPOSV[MMAX], IZROV[NMAX];
```

```
int  i,j,ICASE,N,M,M1,M2,M3;
REAL R;


  void simp1(MAT,int,int *,int,int,int *,REAL *);
  void simp2(MAT,int,int,int *,int,int *,int,REAL *);
  void simp3(MAT,int,int,int,int);


void simplx(MAT a,int m,int n,int m1,int m2,int m3,int *icase,int
*izrov, int *iposv)  {
 /*-------------------------------------------------------------------
----------------------
 χρήση simp1,simp2,simp3
 Μέθοδος Simplex για γραμμικό προγραμματισμό. Παράμετροι εισόδου a,
m, n, mp, np, m1, m2, and m3,
 και Παράμετροι εξόδου a, icase, izrov, και iposv .
 Παράμετροι: MMAX είναι ο μέγιστος αριθμός των περιορισμών που
περιμένουμε; NMAX είναι ο μέγιστος αριθμός
 μεταβλητών που περιμένουμε; EPS είναι το η απόλυτη ακρίβεια, στην
οποία θα πρέπει να προσαρμοσθεί
 η κλίμακα των μεταβλητών.
 --------------------------------------------------------------------
---------------------*/
  int i,ip,ir,is,k,kh,kp,m12,nl1,nl2,l1[NMAX],l2[MMAX],l3[MMAX];
  REAL bmax,q1,EPS=1e-6;
  if(m != m1+m2+m3) {
    printf(" Lathos synolo periorismwn sthn simplx.\n");
      return;
  }
  nl1=n;
  for (k=1; k<=n; k++) {
    l1[k]=k;     // Δημιουργία λίστας δεικτών για τις στήλες που
επιδέχονται αλλαγών.
    izrov[k]=k;  //αρχικά μεταφέρει όλες τις μεταβλητές στο δεξί
πίνακα.
  }
  nl2=m;
  for (i=1; i<=m; i++) {
        if (a[i+1][1] < 0.0) {
          printf(" lathos pinakas eisagwghs sth simplx, ta deksia
merh twn periorismwn prepei na einai >= 0.\n");
            return;
      }
    l2[i]=i;
    iposv[i]=n+i;
/*--------------------------------------------------------------------
-----------------------------
 Αρχικές μεταβλητές στον αριστερό πίνακα,τύπου m1,που έχουν την
μεταβλητή χαλαρότητας
 αρχικά στον αριστερό πίνακα, χωρίς τεχνητή μεταβλητή. Τύπου m2
περιορισμοί που έχουν την μεταβλητή χαλαρότητας
αρχικά στον αριστερό πίνακα, με -, και διαχειρίζονται τις τεχνητές
μεταβλητές χωρίς να φαίνονται
 κατα την πρώτη ανταλλαγή. Τύπου m3 μεταβλητές έχουν αρχικά της
τεχνητές τους μεταβλητές στον αριστερό
 πίνακα.
----------------------------------------------------------------------
----------------------------*/
  }
```

```
  for (i=1; i<=m2; i++) l3[i]=1;
  ir=0;
  if(m2+m3 == 0) goto e30; //Η αντικατάσταση είναι μία δυνατή πρώτη
λύση. προχώρα στη φάση δύο.
  ir=1;
  for (k=1; k<=n+1; k++) { //υπολογίζει την βοηθητική αντικειμενική
συνάρτηση.
    q1=0.0;
    for (i=m1+1; i<=m; i++) q1 += a[i+1][k];
    a[m+2][k]=-q1;
  }
e10: simp1(a,m+1,l1,nl1,0,&kp,&bmax);    //βρές max. coeff. της
βοηθητικής αντ.συναρτ.
  if(bmax <= EPS && a[m+2][1] < -EPS) {
    *icase=-1;    //η βοηθητική αντ.συναρτ, είναι ακόμα αρνητική και
δεν μπορεί να βελτιωθεί,
    return;       //δεν υπάρχει δυνατή λύση.
  }
  else if (bmax <= EPS && a[m+2][1] <= EPS) {
//η αντικειμενική συνάρτηση είναι μηδέν και δεν μπορεί να βελτιωθεί;
έχουμε ένα πιθανό νέο αρχικό διάνυσμα.
//Σβήσε όλες τις εναπομείνασες τεχνητές μεταβλητές που είναι σχετικές
με τους περιορισμούς
//goto 1's και μετά πήγαινε στη φάση δύο με goto 30.
    m12=m1+m2+1;
    if (m12 <= m)
      for (ip=m12; ip<=m; ip++)
              if(iposv[ip] == ip+n) {   //βρές τεχνητή μεταβλητή για
ένα περιορισμό με ισότητα.
            simp1(a,ip,l1,nl1,1,&kp,&bmax);
            if(bmax > EPS) goto e1; //αντάλλαξε με στήλη που
αντιστοιχεί σε μέγιστο στροφέα της σειράς
          }                         /.
    ir=0;
    m12=m12-1;
    if (m1+1 > m12) goto e30;
    for (i=m1+1; i<=m1+m2; i++)     //άλλαξε πρόσημο σε γραμμή με m2
περιορισμούς
      if(l3[i-m1] == 1)             //έχει μείνει απο την αρχική
βάση.
        for (k=1; k<=n+1; k++)
          a[i+1][k] *= -1.0;
    goto e30;                       //πήγαινε στη φάση δύο.
  }

  simp2(a,m,n,l2,nl2,&ip,kp,&q1); //βρές στροφέα.

  if(ip == 0) {                         //μέγιστο βοηθητικής
αντ.συνάρτ
    *icase=-1;                          //μη εφικτή λύση.
    return;
  }
e1: simp3(a,m+1,n,ip,kp);
//αντάλλαξε δεξί και αριστερό πίνακα και ανανέωσε τα δεδομένα.
  if(iposv[ip] >= n+m1+m2+1)


    for (k=1; k<=nl1; k++)
      if(l1[k] == kp) goto e2;
e2: nl1=nl1-1;
    for (is=k; is<=nl1; is++)  l1[is]=l1[is+1];
```

```
  }
  else {
    if(iposv[ip] < n+m1+1) goto e20;
    kh=iposv[ip]-m1-n;
    if(l3[kh] == 0) goto e20;  //ανταλλαγμένος τυπου m2 περιορισμός.
    l3[kh]=0;                  //αν είναι πρώτη φορά άλλαξε στροφέα
                               //ή το – στην κρυφή μεταβλητή
                              .
  }
  a[m+2][kp+1] += 1.0;
  for (i=1; i<=m+2; i++)  a[i][kp+1] *= -1.0;
e20: is=izrov[kp];             //ανανέωσε τις μεταβλητές.
  izrov[kp]=iposv[ip];
  iposv[ip]=is;
  if (ir != 0) goto e10;       //αν ακόμα είσαι στην φάση ένα,
πήγαινε πίσω στο 10.
//βρέθηκε πιθανή λύση,βελτιστοποίησέ τη.
e30: simp1(a,0,l1,nl1,0,&kp,&bmax); //δοκίμασε την z-γραμμή .
  if(bmax <= EPS) {           //βρέθηκε λύση.
    *icase=0;
    return;
  }
  simp2(a,m,n,l2,nl2,&ip,kp,&q1);   //εντόπισε στροφέα .
  if(ip == 0) {              .
    *icase=1;
    return;
  }
  simp3(a,m,n,ip,kp);
  goto e20;

// υπορουτίνες προγράμματος
void simp1(MAT a,int mm,int *ll,int nll,int iabf,int *kp,REAL *bmax)
{
  int k;
  REAL test;
  *kp=ll[1];
  *bmax=a[mm+1][*kp+1];
  if (nll < 2) return;
  for (k=2; k<=nll; k++) {
    if(iabf == 0)
      test=a[mm+1][ll[k]+1]-(*bmax);
    else
      test=fabs(a[mm+1][ll[k]+1])-fabs(*bmax);
    if(test > 0.0) {
      *bmax=a[mm+1][ll[k]+1];
      *kp=ll[k];
    }
  }
  return;
}

void simp2(MAT a, int m,int n,int *l2,int nl2,int *ip,int kp,REAL
*q1) {
  REAL EPS=1e-6;
//εντόπισε στροφέα ,λαμβάνοντας υπόψη και πιθανό εκφυλισμό.
  int i,ii,k;
  REAL q,q0,qp;
  *ip=0;
  if(nl2 < 1) return;
  for (i=1; i<=nl2; i++)
    if (a[i+1][kp+1] < -EPS) goto e2;
```

```
  return;  //δεν έχουμε στροφείς.
e2: *q1=-a[l2[i]+1][1]/a[l2[i]+1][kp+1];
  *ip=l2[i];
  if (i+1 > nl2) return;
  for (i=i+1; i<=nl2; i++) {
    ii=l2[i];
      if(a[ii+1][kp+1] < -EPS) {
      q=-a[ii+1][1]/a[ii+1][kp+1];
      if (q <  *q1) {
        *ip=ii;
        *q1=q;
      }
      else if (q == *q1)
            for (k=1; k<=n; k++) {
          qp=-a[*ip+1][k+1]/a[*ip+1][kp+1];
          q0=-a[ii+1][k+1]/a[ii+1][kp+1];
          if (q0 != qp) goto e6;
        }
e6:     if (q0 < qp) *ip=ii;
      }
    }
  }
  return;
}

void simp3(MAT a,int i1,int k1,int ip,int kp) {
  int ii,kk;
  REAL piv;
  piv=1.0/a[ip+1][kp+1];
  if (i1 >= 0)
    for (ii=1; ii<=i1+1; ii++)
        if (ii-1 != ip) {
        a[ii][kp+1] *= piv;
        for (kk=1; kk<=k1+1; kk++)
          if (kk-1 != kp)
            a[ii][kk] -= a[ip+1][kk]*a[ii][kp+1];
      }
  for (kk=1; kk<=k1+1; kk++)
    if(kk-1 !=  kp) a[ip+1][kk] =-a[ip+1][kk]*piv;
  a[ip+1][kp+1]=piv;
  return;
}


int main() {

double R1;
char T;

  printf("\n");
  printf(" Maximize? (Y/N) "); scanf("%c", &T);
  printf(" Arithmos metablitwn ths Synarthshs: "); scanf("%d", &N);
  printf(" Arithmos <= anisothtwn..: "); scanf("%d", &M1);
  printf(" Arithmos >= anisothtwn..: "); scanf("%d", &M2);
  printf(" Arithmos = isothtwn.....: "); scanf("%d", &M3);

if (T == 'Y' || T=='y')
      R1 = 1.0;
    else
      R1 = -1.0;
```

```
  M=M1+M2+M3;  // σύνολο περιορισμών

  for (i=1; i<=M+2; i++)
    for (j=1; j<=N+1; j++)
            A[i][j]=0.0;

  printf(" Dwste th synarthsh:\n");
  for (i=2; i<=N+1; i++) {
    printf(" Syntelesths #%d: ", i-1);
      scanf("%lf", &A[1][i]);
      A[1][i] *= R1;
  }
  printf(" Stathera : ");
  scanf("%lf", &A[1][1]);
// βάλε περιορισμούς
  for (i=1; i<=M; i++) {
    printf(" Dwste periorismo #%d: \n", i);
    for (j=2; j<=N+1; j++) {
      printf(" Syntelesths #%d: ", j-1);
        scanf("%lf", &R);
        A[i+1][j] = -R;
      }
    printf(" Stathera : ");
      scanf("%lf", &A[i+1][1]);
  }

  printf("\n Pinakas Dedomenwn:\n");
  for (i=1; i<=M+1; i++) {
    for (j=1; j<=N+1; j++)
      printf("%8.2f", A[i][j]);
      printf("\n");
  }

  simplx(A,M,N,M1,M2,M3,&ICASE,IZROV,IPOSV);

  if (ICASE==0) {  //αποτέλεσμα.
    printf("\n Maximum/Minimum = %f\n", A[1][1] * R1);

    for (i=1; i<=N; i++) {
      for (j=1; j<=M; j++)
          if (IPOSV[j] == i)  {
          printf("  X%d = %f\n", i, A[j+1][1]);
            goto e3;
            }
        printf("  X%d = %f\n", i, 0.0);
e3:;}
  }
  else
    printf(" Den yparxei lysh! (error code = %d).\n", ICASE);

  printf("\n");

}

// τέλος simplex.cpp
```

Ακολουθεί η λύση βήμα βήμα με τη χρήση του προγράμματος:

α) εισάγουμε τα δεδομένα

Maximize? (Y/N) y

Arithmos metablitwn ths Synarthshs: 2

Arithmos <= anisothtwn..: 3

Arithmos >= anisothtwn..: 0

Arithmos = isothtwn.....: 0

Dwste th synarthsh:

Syntelesths #1: 6

Syntelesths #2: 8

Stathera : 0

Dwste periorismo #1:

Syntelesths #1: 1

Syntelesths #2: 1

Stathera : 100

Dwste periorismo #2:

Syntelesths #1: 2

Syntelesths #2: 1

Stathera : 180

Dwste periorismo #3:

Syntelesths #1: 1

Syntelesths #2: 3

Stathera : 210

και πέρνουμε την λύση

```
Pinakas Dedomenwn:
   0.00    6.00    8.00
 100.00   -1.00   -1.00
 180.00   -2.00   -1.00
 210.00   -1.00   -3.00

Maximum/Minimum = 710.000000
 X1 = 45.000000
 X2 = 55.000000
```

δηλαδή το μέγιστο κέρδος είναι 710 χρηματικές μονάδες

και μπορεί να κατασκευάσει

45 προϊόντα τύπου Α

55 προϊόντα τύπου Β

β) εισάγουμε τα δεδομένα

Maximize? (Y/N) n

Arithmos metablitwn ths Synarthshs: 2

Arithmos <= anisothtwn..: 0

Arithmos >= anisothtwn..: 3

Arithmos = isothtwn.....: 0

Dwste th synarthsh:

Syntelesths #1: 200

Syntelesths #2: 200

Stathera : 0

Dwste periorismo #1:

Syntelesths #1: 100

Syntelesths #2: 200

Stathera : 9000

Dwste periorismo #2:

Syntelesths #1: 300

Syntelesths #2: 100

Stathera : 12000

Dwste periorismo #3:

Syntelesths #1: 400

Syntelesths #2: 300

Stathera : 26000

και πέρνουμε την λύση

Pinakas Dedomenwn:

0.00 -200.00 -200.00

9000.00 -100.00 -200.00

12000.00 -300.00 -100.00

26000.00 -400.00 -300.00

Maximum/Minimum = 14000.000000

X1 = 50.000000

X2 = 20.000000

δηλαδή θα πρέπει να κατασκευάσει 50 προϊόντα τύπου A
και 20 προϊόντα τύπου B
και το ελάχιστο κόστος θα είναι 14.000 χρηματικές μονάδες.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τελειώνοντας αυτή την εργασία κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε και μία άλλη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού, την μέθοδο *Karmarkar*, που αποδείχθηκε ανταγωνιστική όχι μόνο στη θεωρία αλλά και στην πράξη έναντι της μεθόδου *Simplex*.

Ώστόσο η μέθοδος *Simplex* δούλευε σε ένα μέσο χρόνο ο οποίος αποδείχθηκε (για μία παραλλαγή της) ότι είναι πολυωνυμικός. Για κάποιο λόγο κρυμμένο στη Γεωμετρία των n – διάστατων πολυέδρων (πολύτοπων), τα κακά εφικτά σύνολα είναι σπάνια και η μέθοδος *Simplex* τυχερή. Μία άλλη περιοχή των Μαθηματικών που χρησιμοποιεί την μέθοδο *Simplex* είναι η θεωρία Παιγνίων.

Από όλα όσα αναφέραμε στην παρούσα εργασία φαίνεται ότι η μέθοδος *Simplex*, ο Γραμμικός Προγραμματισμός και η εμβάθυνση στη θεωρία αυτών είναι ένα αναγκαίο εφόδιο για ένα σύγχρονο Μηχανικό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Ε.Γαλανή, Πεπερασμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Ε.Μ.Π. 1993
- Σ.Κουνιάς, Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεσσαλονίκη 1982
- Δ.Ξηρόκωστας, Γραμμικός Προγραμματισμός, Αθήνα 1977
- Μ.Παυλίδου, Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεσσαλονίκη 1972
- Π.Μηλιώτης, Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, Εκδόσεις Α.Σταμούλης 1994
- Γ.Μανωλόπουλος, Μαθήματων Θεωρίας Γράφων, Εκδώσεις Νέων Τεχνολογιών 2000
- Μ.Λουκάκη, Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Θεσσαλονίκη 1989
- Π.Πολύζος, Παραδώσεις Μαθήματος Επιχειρησιακής Έρευνας Ι, Αθήνα 2005
- Α.Παπαϊωάννου, Θεωρία Γραφημάτων, Εκδόσεις Ε.Μ.Π. 2000
- Ν.Πάλλα, 0,1 Πίνακες-Γραφήματα-Πληροφορική, Δ.Δ. Αθήνα 2003
- Ι.Μαρουλάς, Γραμμική Άλγεβρα, Αθήνα 2003

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- W.W.Garvin, Introduction to Linear Programming, McGraw-Hill 1969
- S.Gass, Linear Programming, McGraw-Hill 1974
- A.W. Godman and J.S. Ratti, Finite mathematics with applications, MacMillan 1975
- B.Kolman and R.Beck, Elementary Linear Programming with applications, Academic Press 1980
- S.Vajda, An Introduction to Linear Programming and the theory of Games, Methuen and Co.Ltd 1968
- N.Biggs,E.Loyd, R.Wilson, Graph Theory 1736-1936, Clarendon Press, Oxford 1976
- B.Bollobas, Modern Graph Theory, Springer – Verlang 2000
- F.Harary, Graph Theory, Addison – Wesley 1972
- A.Kaufmann, Points and Arrows, The Theory of Graphs, Transworls pub.Ltd.1972
- O.Ore, Graphs and their uses, The Mathematical Association of America 1963
- O.Ore,Theory of Graphs, American Mathematical Society, Providence 1962
- R.J.Wilson, Intoduction to Graph Theory, Longmann 1979
- V.Chvatal, Linear Programming, Freeman 1983
- D.G Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison – Wesley 1973
- G.Strang, Introduction to Applied Mathematics, Wellesley – Cambridge press 1986
- G.Strang, Linear Algebra and its Applications, Harcourt Brace Jovanovich 1988
- A.Gibbons, Algorithmic Graph Theory, CUP 1985
- M.D. Intrilligator, Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice Hall 1972

Πηγές απο Internet

http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_graph_theory

http://en.wikipedia.org/wiki/Polytope

http://en.wikipedia.org/wiki/Operational_research

http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_method

http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/review/BAMS.pdf

http://mathworld.wolfram.com/RiemannianGeometry.html

http://ftp.cs.indiana.edu/pub/hanson/Siggraph01QuatCourse/ggndgeom.pdf

http://www.it.uom.gr/project/cmanual/index.htm

http://www.cs.cf.ac.uk/Dave/C/CE.html