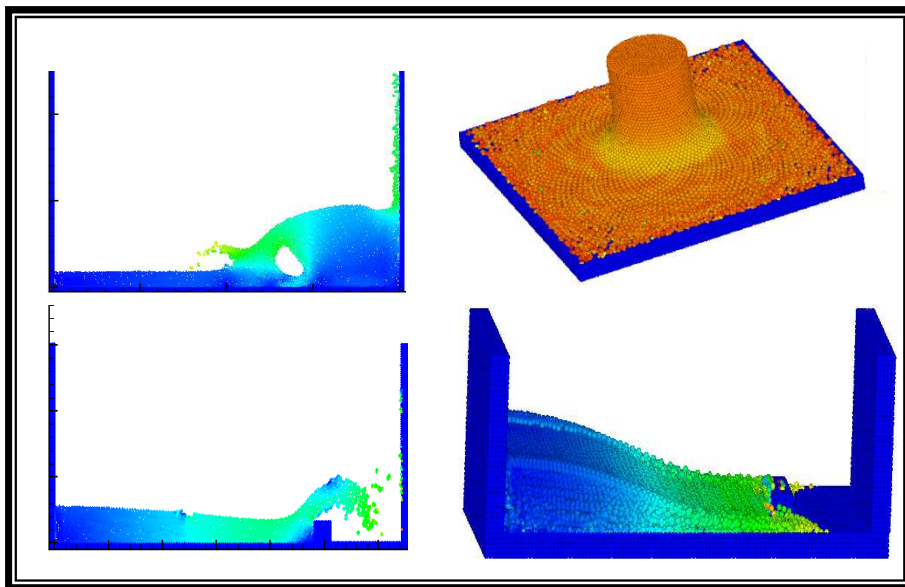




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SPH
(SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS) ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟ-
ΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΡΟΩΝ ΜΕ
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ**



Διπλωματική Εργασία

Παπαδόπουλος Γεώργιος

Επιβλέπων : Αναγνωστόπουλος Ιωάννης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2009

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	3
Abstract.....	5
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....	9
1.1 Πλεγματικές μέθοδοι.....	9
1.2 Μη πλεγματικές μέθοδοι.....	10
Κεφάλαιο 2: Παρουσίαση του μοντέλου SPH.....	13
2.1 Μοντέλο SPH.....	13
2.1.1 Γενική περιγραφή.....	13
2.1.2 Ολοκληρωματική διατύπωση μιας συναρτησης με τη μεθοδο SPH.....	13
2.1.3 Ολοκληρωματική αναπαράσταση της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης.....	15
2.1.4 Σωματιδιακή Προσέγγιση.....	17
2.1.5 Η συνάρτηση εξομάλυνσης W (kernel).....	19
2.1.6 Τεχνικές εξαγωγής SPH διατυπώσεων.....	23
2.2 Μοντέλο SPH για ρευστά.....	25
2.2.1 Σωματιδιακή προσέγγιση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας.....	25
2.2.2 Σωματιδιακή προσέγγιση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής.....	26
2.2.3 Τεχνητή συνεκτικότητα.....	26
2.2.4 Τεχνητή συμπίεστικότητα.....	28
2.2.5 Χρονικό βήμα ολοκλήρωσης.....	29
2.2.6 Χειρισμός ορίων.....	30
2.2.7 Αναζήτηση γειτονικών σωματιδίων.....	32
2.2.8 Τεχνικές εξομάλυνσης της ροής.....	34
2.2.9 Εφαρμογές στη ρευστομηχανική.....	35
Κεφάλαιο 3: Κώδικας SPH.....	41
3.1 Χαρακτηριστικά του αλγορίθμου.....	41
3.2 Λογικό Διάγραμμα.....	43
3.3 Ανάλυση του λογικού διαγράμματος.....	46
Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή του αλγορίθμου – Αποτελέσματα.....	55
4.1 Εφαρμογή 1: Πρόσκρουση δέσμης ρευστού σε πλάκα (Jet).....	56
4.2 Εφαρμογή 2: Κατάρρευση στήλης νερού.....	70
4.2.1 Κατάρρευση στήλης νερού σε στεγνή δεξαμενή (2d).....	70

4.2.2 Κατάρρευση στήλης νερού σε στεγνή δεξαμενή (3d).....	76
4.2.3 Κατάρρευση στήλης νερού σε υγρή δεξαμενή (2d)	80
4.3 Εφαρμογή 3: Κατάρρευση δεξαμενής νερού και πρόσκρουση σε εμπόδιο	85
4.4 Εφαρμογή 4: Κινούμενο Όριο	99
Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα – Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη.....	109
Παράρτημα «Α»: Στοιχεία παράλληλης επεξεργασίας με τη μέθοδο OrenMP.....	113
Παράρτημα «Β»: Τμήματα Κώδικα SPH.....	117
Παράρτημα «Γ»: Πίνακας μεταβλητών.....	123
Παράρτημα «Δ»: Ορολογία	127
Αναφορές	129

Περίληψη

Η αδυναμία των συμβατικών πλεγματικών μεθόδων να υπολογίσουν ροές ελεύθερης επιφάνειας καθώς και ροές σε πολύπλοκες γεωμετρικές οδήγησε στην ανάπτυξη μη-πλεγματικών μεθόδων. Μια σχετικά καινούργια και πολλά υποσχόμενη μη πλεγματική μέθοδος είναι η μέθοδος Υδροδυναμικής Ρεόντων Σωματιδίων (Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH). Η μέθοδος SPH αντιμετωπίζει τα υδροδυναμικά προβλήματα με την κατά Lagrange θεώρηση και διακριτοποιεί το ρευστό λαμβάνοντάς το ως ένα πεπερασμένο σύνολο σωματιδίων που φέρουν όλες τις ιδιότητες του ρευστού.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αρχικά μια γενική παρουσίαση της μεθόδου SPH και της εφαρμογής των σχέσεων της στις εξισώσεις της ρευστομηχανικής. Κατόπιν αναπτύσσεται υπολογιστικός αλγόριθμος της μεθόδου σε 3 διαστάσεις και γίνεται έλεγχος της εγκυρότητάς του πάνω σε γνωστά προβλήματα ροών ελεύθερης επιφάνειας. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στην προσομοίωση πρόσκρουσης δέσμης νερού πάνω σε επίπεδη πλάκα, ως ένα τμήμα μια γενικότερης μελέτης προσομοίωσης της ροής σε υδροστροβίλους δράσης (Pelton και Turgo).

Ο κώδικας γράφτηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran και για την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων έγινε χρήση του λογισμικού TecPlot.

Ειδικότερα η εργασία είναι δομημένη ως εξής:

Κεφ. 1 Γίνεται μια σύντομη αναφορά στις πλεγματικές και μη-πλεγματικές μεθόδους και παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους.

Κεφ. 2 Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αναλύεται η μέθοδος SPH και γίνεται η εξαγωγή των γενικών σχέσεων. Παρουσιάζεται πώς μετατρέπονται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις σε πεπερασμένα αθροίσματα. Στο δεύτερο μέρος γίνεται μετατροπή των εξισώσεων διατήρησης Euler σε SPH μορφή και αναφέρονται τρόποι αντιμετώπισης συνήθων προβλημάτων που συναντώνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου. Τέλος γίνεται μια βιβλιογραφική αναφορά στις εφαρμογές της SPH στη ρευστομηχανική.

Κεφ. 3 Γίνεται ανάλυση του υπολογιστικού αλγορίθμου της μεθόδου SPH που αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση των ροών.

Κεφ. 4 Εφαρμόζεται ο αλγόριθμος SPH σε τέσσερα διαφορετικά προβλήματα για τα οποία έχουν γίνει σχετικά εργαστηριακά πειράματα και έτσι είναι δυνατή η αξιολόγηση της μεθόδου. Στην αρχή εξετάζεται σε τρεις διαστάσεις η πρόσπτωση δέσμης νερού με μεγάλη ταχύτητα πάνω σε επίπεδη πλάκα για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης. Κατόπιν προσομοιώνεται η κατάρρευση στήλης ύδατος σε δύο και τρεις διαστάσεις. Έπειτα μελετάται η περίπτωση κατάρρευσης δεξαμενής νερού και πρόσκρουσης σε εμπόδιο, σε δύο και τρεις διαστάσεις. Τέλος προσομοιώνεται η δημιουργία και μετάδοση κυμάτων από αντικείμενο που ολισθαίνει σε κεκλιμένη επιφάνεια, εξετάζοντας έτσι περιπτώσεις με κινούμενο όριο.

Κεφ. 5 Αναφέρονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου SPH στις περιπτώσεις του κεφαλαίου 4, αναλύονται τα προβλήματα και γί-

νονται προτάσεις για την βελτίωση του αλγορίθμου, ώστε οι προσομοιώσεις να πλησιάζουν ακόμη περισσότερο στην πραγματικότητα.

Τέλος στα παραρτήματα γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της μεθόδου παράλληλης επεξεργασίας OpenMP, αναλύονται κάποια τμήματα του κώδικα SPH-JET-3D και παρατίθεται μια λίστα μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα.

Abstract

The inability of conventional grid-based methods to calculate free surface flows and flows in complex geometries led to the development of meshfree methods. A relatively new and promising meshfree method is the Smoothed Particle Hydrodynamics method - SPH. The SPH method treats hydrodynamic problems in a Lagrange form, by discretizing the fluid and taking it as a finite set of particles which carry all the properties of the fluid.

The purpose of this work is first a general presentation of the SPH method and the application of SPH method to the governing equations of fluid flow. Then we checked the validity of the SPH on well known free surface flow problems, giving particular weight to simulation of a water jet impingement on a flat plate, as a part of a broader study in simulating the flow in water turbines (Pelton and Turgo).

For the simulation of flows a computer code in Fortran programming language was developed in Hydraulic Turbomachines Laboratory of NTUA. For the visualization of results the software TecPlot was used.

More specifically, the work is structured as follows:

Chapter. 1 A brief reference to grid-based and meshfree methods is done, presenting the advantages and disadvantages of each method.

Chapter. 2 This section is divided into two parts. The first part discusses the method of SPH and the derivation of the general formulation. It is shown how to transform partial differential equations into finite summations. In the second part, after a brief reference to implementations of SPH in Fluid Dynamics, the Euler governing equations are converted in SPH form and it is explained how to treat usual problems encountered in implementing the method.

Chapter 3 The algorithm developed to simulate flows with the SPH method is described and analyzed.

Chapter 4 The SPH algorithm is applied to four different problems for which we had laboratory experimental results and thus it was possible to evaluate the method. In the beginning, the three dimensional impingement of a water jet on a flat plate is tested for various angles of incidence. Then a collapse of a water column in two and three dimensions is simulated. Next the case of a water tank collapsing and impacting on a barrier in two and three dimensions is examined. Finally the algorithm is applied to simulate the creation and transmission of waves, caused by a sliding object into inclined surface, testing cases including moving barrier.

Chapter 5 Contains the conclusions from the implementation of the SPH method and as well as the problems and the suggestions for improving the algorithm so that it can provide more accurate results.

Finally the annexes include a brief presentation of the method of parallel processing OpenMP, explanation of selected parts of the SPH-JET-3D algorithm and a list of variables used in the computer code.

Αντί Προλόγου

...Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επικ. Καθηγητή της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών κ. Αναγνωστόπουλο Ιωάννη για την ανάθεση και επίβλεψη της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες Σταματέλο Φώτη και Κουκουβίνη Φοίβο για την συνεργασία και καταλυτική καθοδήγησή τους καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Φαινόμενα στη φύση μηχανικά, γεωλογικά, ηλεκτρικά, χημικά, ηλεκτρονικά, ή βιολογικά, μπορούν συχνά να περιγραφούν με τη βοήθεια των αλγεβρικών, διαφορικών, ή ολοκληρωματικών εξισώσεων. Το επιθυμητό θα ήταν να υπήρχαν ακριβείς αναλυτικές λύσεις για αυτές τις εξισώσεις. Δυστυχώς, όμως μπορούμε μόνο να επιτύχουμε ακριβείς λύσεις για ένα μικρό μέρος των πρακτικών προβλημάτων, διότι τα περισσότερα από αυτά είναι πολύπλοκα. Έτσι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές διαδικασίες για την απόκτηση προσεγγιστικών λύσεων. Σήμερα οι μηχανικοί και οι επιστήμονες πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με αριθμητικές τεχνικές για διάφορους τύπους προβλημάτων.

Λόγω της ταχείας ανάπτυξης της τεχνολογίας των υπολογιστών, οι τεχνικές αριθμητικής προσομοίωσης που χρησιμοποιούν υπολογιστή (ή υπολογιστική προσομοίωση) έχουν γίνει μια σημαντική προσέγγιση για την επίλυση πολύπλοκων και πρακτικών προβλημάτων στην τεχνολογία και την επιστήμη.

Η κύρια ιδέα της αριθμητικής προσομοίωσης είναι να μετατρέψει ένα πολύπλοκο πρακτικό πρόβλημα σε μια μαθηματική περιγραφή με απλή διακριτή μορφή, να επαναδημιουργήσει και να λύσει το πρόβλημα σε έναν υπολογιστή και, τέλος, να οπτικοποιήσει τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις απαιτήσεις της ανάλυσης. Έτσι είναι συχνά δυνατόν να βρεθεί μια αποτελεσματική αριθμητική ή προσεγγιστική λύση για ένα σύνθετο πρόβλημα, εφόσον χρησιμοποιείται η ορθή αριθμητική μέθοδος.

Η διακριτοποίηση του χώρου όπου εξελίσσεται ένα φαινόμενο γίνεται με δύο κατηγορίες μεθόδων. Η μια χρησιμοποιεί υπολογιστικά πλέγματα (πλεγματικές μέθοδοι) ενώ η δεύτερη αντιπροσωπευτικά σημεία ή στοιχεία του μέσου (μη-πλεγματικές μέθοδοι).

1.1 Πλεγματικές μέθοδοι

Οι πλεγματικές μέθοδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο περιγράφεται το πρόβλημα, οι πλεγματικές Euler και οι πλεγματικές Lagrange.

Στις πλεγματικές μεθόδους Euler το πλέγμα είναι προσδεμένο στο χώρο, οι κόμβοι είναι σταθεροί και τα κελιά είναι απαραμόρφωτα. Οι μεγάλες παραμορφώσεις του μέσου δεν επηρεάζουν το πλέγμα και η μάζα, η ορμή και η ενέργεια ρέουν διαμέσου των επιφανειών των κελιών. Οι μέθοδοι αυτοί βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην υπολογιστική μηχανική των ρευστών με κυριότερη τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών (ΜΠΔ), (Anderson, 1995, Hirsch, 1988, Wilkins, 1999).

Ένα μειονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι δεν μπορεί να καταγραφεί η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών σε ένα υλικό σημείο του μέσου. Ο χειρισμός πολύπλοκων γεωμετριών με τη δημιουργία ανομοιομορφου πλέγματος είναι δύσκολη διαδικασία. Με τη ροή μάζας, ορμής και ενέργειας διαμέσου των κελιών, είναι δύσκολο να καθοριστεί η θέση των ελεύθερων επιφανειών, παραμορφώσιμων ορίων και διεπιφανειών.

Στις πλεγματικές μεθόδους τύπου Lagrange το πλέγμα είναι προσδεμένο στο υλικό μέσο και συνεπώς κινείται μαζί με αυτό. Έτσι μαζί κινούνται και οι κόμβοι και τα κελιά του πλέγματος, οπότε με την παραμόρφωση του μέσου παραμορφώνονται και αυτά. Η μάζα, η ορμή και η ενέργεια παραμένουν σταθερές σε κάθε κελί. Οι μέθοδοι αυτοί βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην μηχανική στερεού μέσου με κυριότερη τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ), (Zienkiewicz και Taylor, 2000, Liu και Quek, 2003, κτλ).

Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι οι κόμβοι μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος ορίων ή διεπιφανειών. Οι οριακές συνθήκες στις ελεύθερες επιφάνειες, τα κινούμενα όρια και οι διεπιφάνειες καθορίζονται αυτόματα με την κίνηση αυτών των κόμβων. Πολύπλοκες γεωμετρίες μπορούν να αντιμετωπιστούν εύκολα χρησιμοποιώντας πλέγματα μεταβλητής γεωμετρίας ή πύκνωσης. Επίσης καθώς το πλέγμα είναι προσδεμένο στο υλικό, είναι διαθέσιμη η χρονική εξέλιξη των μεταβλητών σε ένα συγκεκριμένο υλικό σημείο. Ένα σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι στη μελέτη των ρευστών η μεγάλη παραμόρφωση του πλέγματος εισάγει ανακρίβεια στον υπολογισμό λόγω αριθμητικών σφαλμάτων ή οδηγεί σε πλήρη αδυναμία εκτέλεσης τους.

1.2 Μη πλεγματικές μέθοδοι

Το ενδιαφέρον πλέον είναι έντονο στη νέα γενιά υπολογιστικών μεθόδων, τις μη πλεγματικές, οι οποίες αναμένεται να καταστούν ανώτερες των συμβατικών πλεγματικών μεθόδων (Πεπερασμένων Στοιχείων και Πεπερασμένων Διαφορών) για πολλές εφαρμογές, αφού συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα αυτών. Η βασική ιδέα των μη πλεγματικών μεθόδων είναι να παρέχουν ακριβείς και σταθερές αριθμητικές λύσεις για τις διαφορικές εξισώσεις, με όλων των ειδών τις πιθανές οριακές συνθήκες, με μια σειρά από αυθαίρετα διανεμημένους κόμβους (ή σωματίδια) χωρίς τη χρήση κάποιου πλέγματος που να παρέχει σύνδεση μεταξύ τους.

Ένας σημαντικός στόχος της βασικής έρευνας στον τομέα αυτόν είναι να τροποποιήσει την εσωτερική δομή των πλεγματικών μεθόδων ΜΠΣ και ΜΠΔ ώστε να γίνει πιο προσαρμοστική και ισχυρή. Μεγάλη προσπάθεια επικεντρώθηκε σε προβλήματα στα οποία οι συμβατικές μέθοδοι είναι δύσκολο να εφαρμοστούν, όπως προβλήματα με ελεύθερη επιφάνεια, παραμορφώσιμα όρια, κινούμενες διεπαφές (για ΜΠΔ), μεγάλες παραμορφώσεις (για ΜΠΣ), δημιουργία πολύπλοκου πλέγματος και ανάλυση πολλαπλών διαστάσεων (για ΜΠΔ και ΜΠΣ). Πρόσφατα, μια σειρά μη πλεγματικών μεθόδων έχουν προταθεί για την ανάλυση των στερεών και των κατασκευών καθώς και για ροές ρευστού. Στον πίνακα 1.1 δίνονται κάποιες τυπικές μη πλεγματικές μέθοδοι με χρονολογική σειρά. Αυτές οι μη-πλεγματικές μέθοδοι έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά, αλλά είναι διαφορετικές στα μέσα και στη διαδικασία υλοποίησης. Μια από τις μη-πλεγματικές μεθόδους είναι και η μέθοδος SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) που αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία. Τονίζεται ότι στη συνέχεια για τον όρο SPH στα ελληνικά θα γίνεται χρήση του όρου Υδροδυναμική Ρεόντων Σωματιδίων.

Πίνακας 1.1. Κάποιες τυπικές μη-πλεγματικές μέθοδοι με χρονολογική σειρά

Μέθοδοι	Αναφορές
Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)	Lucy, 1977; Gingold και Monaghan, 1977, κτλ.
Finite point method	Liszka και Orkisz.. 1980; Onate κ.α., 1996.
Diffuse element method (DEM)	Nayroles κ.α., 1992
Element free Galerkin (EFG) method	Belytschko κ.α, 1994, 1996, 1998, 2000.
Reproduced kernel particle method (RKPM)	Liu κ.α., 1995, 1996.
HP-cloud method	Duarte και Oden, 1996
Free mesh method	Yagawa και Yamada, 1996, 1998.
Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method	Atluri και Zhu, 1998, 1999, Atluri και Shen, 2002.
Point interpolation method (PIM)	Liu και Gu, 1999, 2001a-d; Gu και Liu, 2001a,c; Liu 2002
Meshfree weak- strong form (MWS)	Liu και Gu, 2002, 2003c.

Κεφάλαιο 2

Παρουσίαση του μοντέλου SPH

2.1 Μοντέλο SPH

2.1.1 Γενική περιγραφή

Η μέθοδος Υδροδυναμικής Ρεόντων Σωματιδίων (Smoothed Particle Hydrodynamics – SPH) είναι μια μη-πλεγματική Lagrangian μέθοδος στην οποία το εξεταζόμενο μέσο διακριτοποιείται από ένα πεπερασμένο αριθμό σωματιδίων. Αυτά τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, κινούνται σύμφωνα με την κίνηση του μέσου και μεταφέρουν μαζί τους όλες τις φυσικές πληροφορίες που περιγράφουν το μέσο. Η τεχνική είναι σχετικά καινούρια αφού παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τους Monaghan και Gingold (1977) και Lucy (1977) για μοντελοποίηση αστροφυσικών προβλημάτων. Σύντομα όμως έγινε αντιληπτό ότι η μέθοδος αυτή μπορεί εφαρμοστεί και στα υδροδυναμικά φαινόμενα όπου το ρευστό μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένας πεπερασμένος αριθμός σωματιδίων.

Τα προβλήματα που αφορούν την υδροδυναμική περιγράφονται κυρίως από μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) μεταβλητών όπως πυκνότητα, ταχύτητα, ενέργεια, κτλ. Η αναλυτική λύση αυτών των εξισώσεων είναι εφικτή σε ελάχιστες απλές περιπτώσεις και με αρκετές παραδοχές. Οπότε οι προσπάθειες έχουν στραφεί προς την εύρεση των κατάλληλων μεθόδων για αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Για να επιλυθούν αριθμητικά τέτοιας μορφής προβλήματα πρέπει πρώτα να διακριτοποιηθεί η περιοχή του προβλήματος όπου ορίζονται οι ΜΔΕ. Κατόπιν πρέπει να εφαρμοστεί μια μέθοδος με την οποία θα είναι δυνατή η προσέγγιση των τιμών των μεταβλητών και των παραγώγων αυτών σε κάθε σημείο δημιουργώντας μια προσεγγιστική συνάρτηση. Αυτή η συνάρτηση τότε εφαρμόζεται στις ΜΔΕ για να παράγει ένα σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ) σε διακριτοποιημένη μορφή στις οποίες οι μεταβλητές παραγωγίζονται μόνο ως προς τον χρόνο. Έτσι το σύστημα μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας κάποιες από τις τυποποιημένες ρουτίνες αριθμητικής ολοκλήρωσης.

2.1.2 Ολοκληρωματική διατύπωση μιας συναρτησης με τη μεθοδο SPH.

Η διατύπωση του SPH συχνά χωρίζεται σε δύο κύρια μέρη. Το πρώτο μέρος είναι η ολοκληρωματική διατύπωση των συναρτήσεων που περιγράφουν ένα πεδίο ροής. Το δεύτερο μέρος είναι η σωματιδιακή προσέγγιση αυτών.

Στο πρώτο μέρος, η ολοκλήρωση του γινομένου μίας τυχαίας συνάρτησης επί μια συνάρτηση εξομάλυνσης πυρήνα δίνει την προσέγγιση της συνάρτησης στην μορφή της ολοκληρωματικής διατύπωσης. Η ολοκληρωματική διατύπωση της συνάρτησης τότε προσεγγίζεται αθροίζοντας τις τιμές των κοντινότερων γειτονικών σωματιδίων παράγοντας έτσι την σωματιδιακή προσέγγιση μίας συνάρτησης σε ένα διακριτό σημείο ή σωματίδιο.

Η φιλοσοφία της τεχνικής SPH ξεκινά από την βασική ιδιότητα της συνάρτησης δ -Dirac

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.1)$$

όπου f είναι συνάρτηση του διανύσματος \mathbf{x} και $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ είναι η συνάρτηση δ -Dirac που δίνεται από τη σχέση

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad (2.2)$$

Στη σχέση (2.1), Ω είναι ο όγκος του ολοκληρώματος που περιέχει το \mathbf{x} . Έτσι με τη χρήση της σχέσης (2.1) μπορούμε να αναπαραστήσουμε μία συνάρτηση σε ολοκληρωματική μορφή, αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται στον χώρο Ω και να είναι συνεχής.

Αν η συνάρτηση δ αντικατασταθεί με μία συνάρτηση εξομάλυνσης $W(\mathbf{x}-\mathbf{x}',h)$, τότε η ολοκληρωματική διατύπωση της $f(\mathbf{x})$ δίνεται από την σχέση

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.3)$$

όπου W είναι η λεγόμενη συνάρτηση εξομάλυνσης πυρήνα (smoothing function kernel) ή συνάρτηση εξομάλυνσης (smoothing function). ή απλώς πυρήνας. Στη συνάρτηση εξομάλυνσης h είναι το μήκος εξομάλυνσης ή χαρακτηριστικό μήκος, το οποίο ορίζει την περιοχή επιρροής της συνάρτησης εξομάλυνσης W . Πρέπει να σημειωθεί ότι από τη στιγμή που η W δεν είναι η συνάρτηση δ -Dirac η ολοκληρωματική διατύπωση της συνάρτησης f όπως δίνεται από τη σχέση 2.3 είναι μια προσέγγιση της f . Αυτός είναι και ο ορισμός του όρου προσεγγιστικός πυρήνας.

Η συνάρτηση εξομάλυνσης W συνήθως επιλέγεται να είναι άρτια συνάρτηση. Επίσης πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. Η πρώτη είναι η συνθήκη κανονικοποίησης, σύμφωνα με την οποία πρέπει να ισχύει

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1 \quad (2.4)$$

Η συνθήκη κανονικοποίησης ονομάζεται και *μοναδιαία συνθήκη* αφού η ολοκλήρωση της συνάρτησης εξομάλυνσης δίνει μονάδα.

Η δεύτερη συνθήκη είναι η δυνατότητα της συνάρτησης W να μετατρέπεται σε συνάρτηση δ -Dirac όταν το μήκος εξομάλυνσης πλησιάζει το μηδέν

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.5)$$

Η W πρέπει να είναι συμπαγής μέσα στην ακτίνα επίδρασης και μηδενική εκτός, δηλαδή

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0 \quad \text{οταν } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \kappa h \quad (2.6)$$

όπου κ είναι μια σταθερά που σχετίζεται με την συνάρτηση εξομάλυνσης και καθορίζει την περιοχή επίδρασής της.

Η συνάρτηση f στην ολοκληρωτική της μορφή είναι, όπως προαναφέρθηκε, μια προσέγγιση της συνάρτησης f . Η ακρίβεια της προσέγγισης είναι δευτέρας τάξης όπως φαίνεται παρακάτω. Αν χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(\mathbf{x}')$ γύρω από το \mathbf{x} , όπου η $f(\mathbf{x})$ διαφορίσιμη έχουμε

$$f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + r(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 \quad (2.7)$$

όπου r είναι το υπόλοιπο του αναπτύγματος. Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω σχέση στην (2.3) έχουμε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}') + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + r(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &= f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + r(h^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Η συνάρτηση W είναι μια άρτια συνάρτηση του \mathbf{x} οπότε το γινόμενο $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$ είναι μια περιττή συνάρτηση και το ολοκλήρωμα της είναι μηδέν

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \quad (2.9)$$

έτσι χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.4) και (2.9) η εξίσωση f στην ολοκληρωματική της μορφή ισούται με

$$f(\mathbf{x}) + r(h^2)$$

οπότε είναι εύκολα αντιληπτό ότι στην μέθοδο SPH η ολοκληρωματική αναπαράσταση ή ο προσεγγιστικός πυρήνας μια συνάρτησης έχει ακρίβεια δευτέρας τάξης.

2.1.3 Ολοκληρωματική αναπαράσταση της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης

Η προσέγγιση της χωρικής παραγώγου $\nabla \cdot f(\mathbf{x})$ δίνεται από την σχέση (2.3) αντικαθιστώντας την $f(\mathbf{x})$ με την $\nabla \cdot f(\mathbf{x})$

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (2.10)$$

εφαρμόζοντας την παραγωγή γινομένου έχουμε

$$[\nabla \cdot f(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \nabla \cdot [f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)] - f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \quad (2.11)$$

οπότε η σχέση (2.10) γίνεται

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)] d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (2.12)$$

το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέρος της σχέσης (2.12) μπορεί να μετατραπεί, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης, σε επιφανειακό ολοκλήρωμα όπου η S είναι η επιφάνεια που περικλείει τον χώρο Ω .

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \int_S f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (2.13)$$

όπου \vec{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S .

Αφού η συνάρτηση εξομάλυνσης W ορίστηκε να είναι συμπαγής, όταν η περιοχή επίδρασης του πυρήνα βρίσκεται μέσα στην ευρύτερη περιοχή του προβλήματος, το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Σε περίπτωση που η περιοχή επίδρασης δεν βρίσκεται ολόκληρη μέσα στην περιοχή του προβλήματος, η συνάρτηση εξομάλυνσης τέμνεται από το όριο και το επιφανειακό ολοκλήρωμα δεν είναι πλέον μηδέν. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να γίνουν τροποποιήσεις ώστε να διορθωθεί η οριακή επίδραση, και το επιφανειακό ολοκλήρωμα να ληφθεί ίσο με μηδέν στην εξίσωση (2.13).

Έτσι για τα σημεία των οποίων η ακτίνα επίδρασης βρίσκεται μέσα στα όρια του προβλήματος η σχέση (2.13) απλοποιείται ως εξής

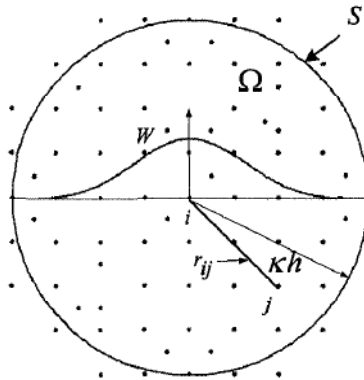
$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (2.14)$$

Στην παραπάνω σχέση είναι αντιληπτό ότι ο διαφορικός τελεστής της συνάρτησης f μεταφέρεται στην συνάρτηση εξομάλυνσης μέσα στο ολοκλήρωμα. Με άλλα λόγια, η SPH ολοκληρωματική αναπαράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης ενός πεδίου παρέχει την δυνατότητα να υπολογίζεται η παράγωγος της συνάρτησης, λαμβάνοντας το γινόμενο της συνάρτησης επί την παράγωγο της συνάρτησης εξομάλυνσης W .

2.1.4 Σωματιδιακή Προσέγγιση

Στην μέθοδο SPH, όλο το σύστημα αντιπροσωπεύεται από ένα πεπερασμένο αριθμό σωματιδίων καθένα από τα οποία έχει τη δική του μάζα και κατέχει τη δική του θέση στον χώρο. Αυτό επιτυγχάνεται με την σωματιδιακή προσέγγιση η οποία είναι άλλη μία σημαντική λειτουργία της SPH μεθόδου.

Η ολοκληρωματική αναπαράσταση μια συνάρτησης μπορεί να διακριτοποιηθεί μετατρέποντας το ολοκλήρωμα σε ένα άθροισμα όλων των σωματιδίων που βρίσκονται μέσα στην περιοχή επίδρασης του πυρήνα όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1.1.



Σχήμα 2.1.1. Σωματιδιακή προσέγγιση χρησιμοποιώντας τα σωματίδια που βρίσκονται εντός της περιοχής επίδρασης Ω της συνάρτησης εξομάλυνσης W του σωματιδίου i. Η περιοχή επίδρασης είναι σφαιρική με ακτίνα kh.

Η διαδικασία διακριτοποίησης του ολοκληρώματος μετατρέποντάς το σε άθροισμα που περιλαμβάνει τα σωματίδια, ονομάζεται σωματιδιακή προσέγγιση. Η διαδικασία αυτή φαίνεται παρακάτω.

Αν ο στοιχειώδης όγκος $d\mathbf{x}'$ στα προηγούμενα ολοκληρώματα στη θέση του σωματιδίου j αντικατασταθεί από τον πεπερασμένο όγκο του σωματιδίου ΔV_j ο οποίος συνδέεται με την μάζα του σωματιδίου m_j με τη σχέση

$$m_j = \Delta V_j \rho_j \quad (2.15)$$

όπου ρ_j η πυκνότητα του σωματιδίου j ($=1,2,\dots,N$) και N ο αριθμός των σωματιδίων που βρίσκονται μέσα στην περιοχή επιρροής του πυρήνα του σωματιδίου i.

Η συνεχής SPH ολοκληρωματική αναπαράσταση για την συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ μπορεί να γραφεί στην παρακάτω διακριτοποιημένη μορφή της σωματιδιακής προσέγγισης.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &\cong \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \Delta V_j \\ &= \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \frac{1}{\rho_j} (\rho_j \Delta V_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \frac{1}{\rho_j} m_j$$

ή

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.16)$$

Έτσι η σωματιδιακή προσέγγιση μίας συνάρτησης για ένα σωματίδιο i μπορεί τελικά να γραφεί

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f \cdot (\mathbf{x}_j) W_{ij} \quad (2.17)$$

όπου

$$W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.18)$$

Η εξίσωση (2.17) δηλώνει ότι η τιμή μιας συνάρτησης στο σωματίδιο i προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο των τιμών της συνάρτησης για όλα τα σωματίδια j που βρίσκονται στην περιοχή δράσης του πυρήνα του i , με διαφορετική όμως βαρύτητα για το κάθε σωματίδιο, η οποία καθορίζεται από την συνάρτηση εξομάλυνσης.

Με την ίδια λογική, η σωματιδιακή προσέγγιση της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης είναι

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.19)$$

όπου η κλίση ∇W στην παραπάνω εξίσωση λαμβάνεται ως προς το σωματίδιο j . Έτσι η σωματιδιακή προσέγγιση για μια συνάρτηση σε ένα σωματίδιο i μπορεί γραφεί τελικά

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla W_{ij} \quad (2.20)$$

όπου

$$\nabla W_{ij} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j} = - \frac{\mathbf{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.21)$$

αφού

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (2.22)$$

όπου x, y, z οι συντεταγμένες και r_{ij} η απόσταση των σωματίων i, j .

Αν η κλίση ∇W ληφθεί ως προς το σωματίδιο i τότε το αρνητικό πρόσημο παραλείπεται και η σχέση (2.20) γίνεται

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.23)$$

Η εξίσωση (2.23) δηλώνει ότι η τιμή της κλίσης μιας συνάρτησης στο σωματίδιο i προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο των τιμών της συνάρτησης για όλα τα σωματίδια j που βρίσκονται στην περιοχή δράσης του πυρήνα του i , με διαφορετική όμως βαρύτητα για το κάθε σωματίδιο, η οποία καθορίζεται από την κλίση της συνάρτησης εξομάλυνσης.

Ομοίως η σωματιδιακή προσέγγιση της Λαπλασιανής μιας συνάρτησης δίνεται από τη σχέση

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \nabla^2 W_{ij} \quad (2.24)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι η σωματιδιακή προσέγγιση στην πραγματικότητα μετατρέπει τις συνεχείς ολοκληρωματικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης και των παραγώγων της σε διακριτοποιημένα αθροίσματα που βασίζονται σε τυχαία τοποθετημένα σωματίδια. Αυτή η χρήση των αθροισμάτων των σωματιδίων για να προσεγγιστούν τα ολοκληρώματα είναι και ο βασικός λόγος που η μέθοδος SPH είναι απλή χωρίς την ανάγκη δημιουργίας πλέγματος για αριθμητική ολοκλήρωση.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν αντικαταστήσουμε την συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ με την πυκνότητα ρ στην συνάρτηση (2.17) τότε έχουμε την κατά SPH προσέγγιση της πυκνότητας

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (2.25)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η W έχει μονάδες αντίστροφου όγκου. Η σχέση (2.25) δηλώνει ότι η πυκνότητα ενός σωματιδίου είναι ο σταθμισμένος μέσος όλων των σωματιδίων μέσα στην περιοχής επίδρασης του.

2.1.5 Η συνάρτηση εξομάλυνσης W (kernel)

Σε γενική μορφή μία συνάρτηση εξομάλυνσης πυρήνα μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τη σχέση

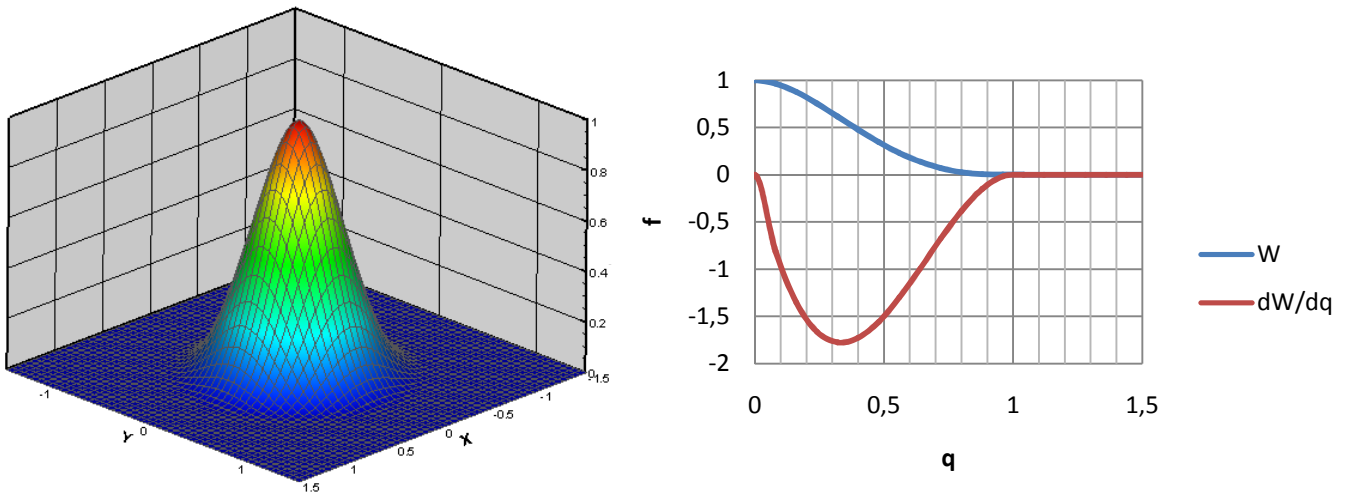
$$W_h(r_{ij}) = \frac{1}{h^d} f\left(\frac{r_{ij}}{h}\right) \quad (2.26)$$

όπου d είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος. Διάφορες μορφές της συνάρτησης έχουν δοκιμαστεί κατά καιρούς. Παρακάτω παρατίθενται κάποιες από τις πιο πρόσφατες συναρτήσεις πυρήνα που συναντώνται στην SPH βιβλιογραφία.

Ο Lucy το 1977 χρησιμοποίησε μια καμπανοειδή συνάρτηση (σχήμα 2.1.2):

$$W_h(r_{ij}) = \alpha_d \begin{cases} (1 + 3q)(1 - q)^3, & q \leq 1 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

όπου $q = \frac{r_{ij}}{h}$ και α_d είναι $5/4h$, $5/\pi h^2$ και $105/16\pi h^3$ για χώρο 1, 2 και 3 διαστάσεων αντίστοιχα, έτσι ώστε η συνθήκη της μονάδας να ικανοποιείται και για τρεις διαστάσεις.



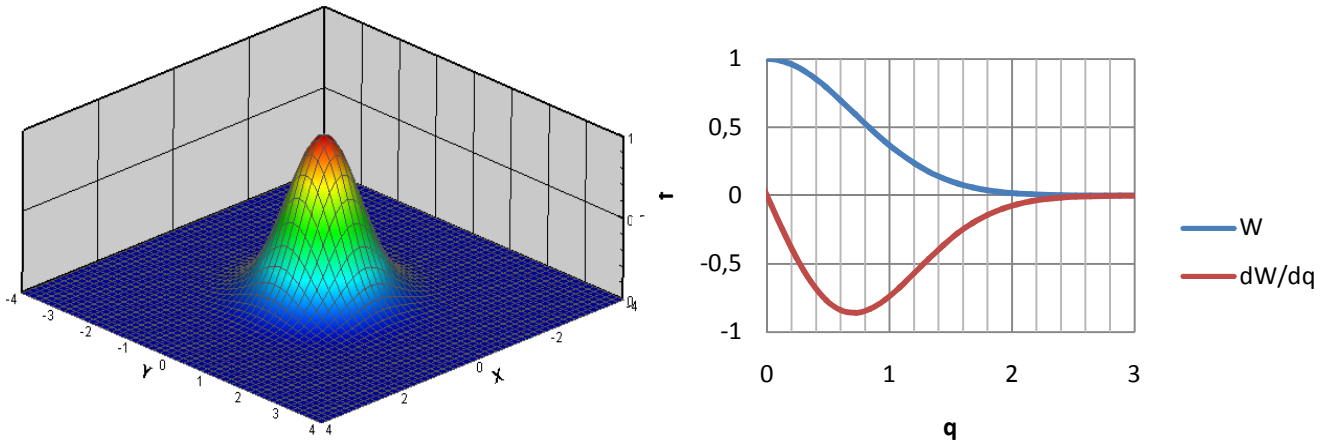
Σχήμα 2.1.2 Η μορφή της καμπανοειδής συνάρτησης του Lucy.

Ο Monaghan (1992) σημείωσε ότι για να βρεθεί μια φυσική αναπαράσταση μίας SPH εξίσωσης, πρέπει η συνάρτηση εξομάλυνσης να λαμβάνει τη μορφή της συνάρτησης Gauss. Έτσι οι Gingold και Monaghan (1977) στη αρχική τους δημοσίευση επέλεξαν την παρακάτω συνάρτηση Gauss (σχήμα 2.1.3) να προσομοιώσουν μη σφαιρικά αστέρια.

$$W_h(r_{ij}) = \alpha_d e^{-q^2} \quad (2.28)$$

όπου α_d είναι $1/\pi 0.5h$, $1/\pi h^2$ και $1/\pi 1.5h^3$ για χώρο 1, 2 και 3 διαστάσεων αντίστοιχα.

Η συνάρτηση πυρήνα με τη μορφή της συνάρτησης Gauss είναι επαρκώς λεία ακόμα και για παραγώγους υψηλότερων τάξεων και θεωρείται ως η καλύτερη επιλογή επειδή είναι πολύ σταθερή και ακριβής ιδιαίτερα σε σωματίδια με ανομοιογενή διασπορά. Ωστόσο δεν είναι τελείως συμπαγής παρά μόνο αν το q τείνει στο άπειρο, πρακτικά όμως θεωρείται συμπαγής.



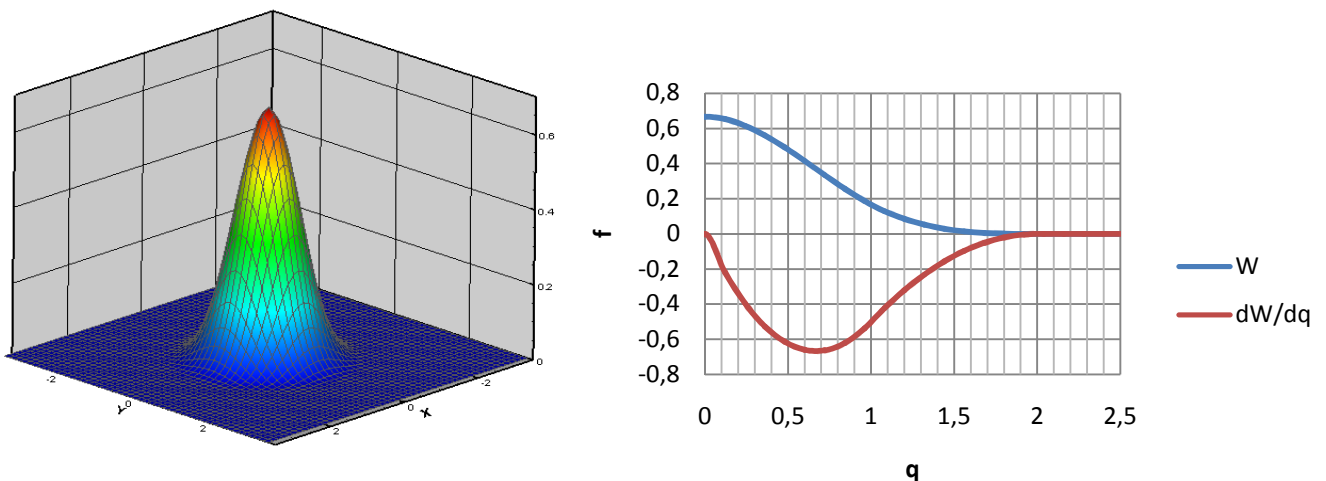
Σχήμα 2.1.3. Η μορφή της συνάρτησης Gauss.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να ελαχιστοποιηθεί το q μερικές φορές πρέπει ή να αυξηθεί η περιοχή επίδρασης του πυρήνα ή να αυξηθεί ο αριθμός των σωματιδίων με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

Οι Monaghan και Lattanzio (1985) επινόησαν την παρακάτω συνάρτηση εξομάλυνσης (σχήμα 2.1.4) βασισμένοι στις συναρτήσεις κυβικών splines:

$$W_h(r_{ij}) = a_d \begin{cases} \frac{2}{3} - q^3 + \frac{1}{2}q^3, & 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - q)^3, & 1 \leq q < 2 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases} \quad (2.29)$$

όπου $a_d=1/h$, $15/7\pi h^2$ και $3/2\pi h^3$ για χώρο 1,2 και 3 διαστάσεων αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1.4. Η μορφή της συνάρτησης κυβικής spline.

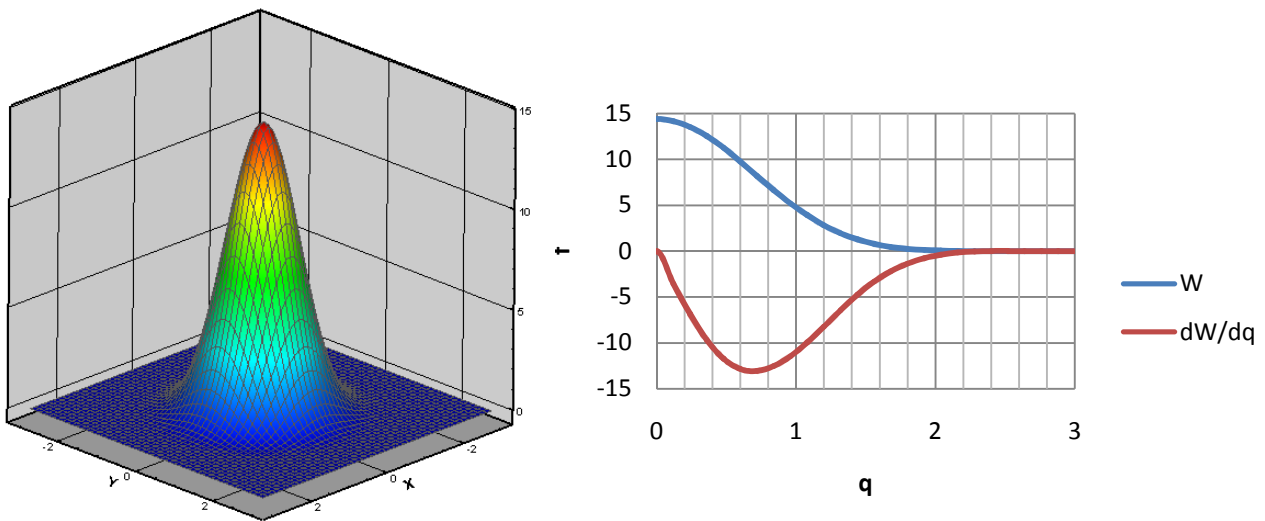
Η κυβική spline συνάρτηση μέχρι τώρα είναι η συνάρτηση που έχει χρησιμοποιηθεί περισσότερο αφού προσομοιάζει την Gauss και ταυτόχρονα έχει μικρότερη περιοχή επίδρασης. Ωστόσο η δεύτερη παράγωγος μιας κυβικής spline συνάρτησης είναι γραμμική συνάρτηση και σύμφωνα με τις ιδιότητες σταθερότητας μπορεί να είναι κατώτερη άλλων πιο ομαλών πυρήνων.

Ο Morris (1994,1996) εισήγαγε υψηλότερης τάξης (4ης και 5ης) splines που προσεγγίζουν καλύτερα την συνάρτηση Gauss και είναι σταθερότερες.

Η τετάρτης τάξης spline (σχήμα 2.1.5) είναι:

$$W_h(r_{ij}) = a_d \begin{cases} (2.5 - q)^4 - 5(1.5 - q)^4 + 10(0.5 - q)^4, & 0 \leq q < 0.5 \\ (2.5 - q)^4 - 5(1.5 - q)^4, & 0.5 \leq q < 1.5 \\ (2.5 - q)^4, & 1.5 \leq q < 2.5 \\ 0, & q \geq 2.5 \end{cases} \quad (2.30)$$

όπου a_d είναι $1/24h$, $96/1199\pi h^2$ και $1/20\pi h^3$ για χώρο 1,2 και 3 διαστάσεων αντίστοιχα.

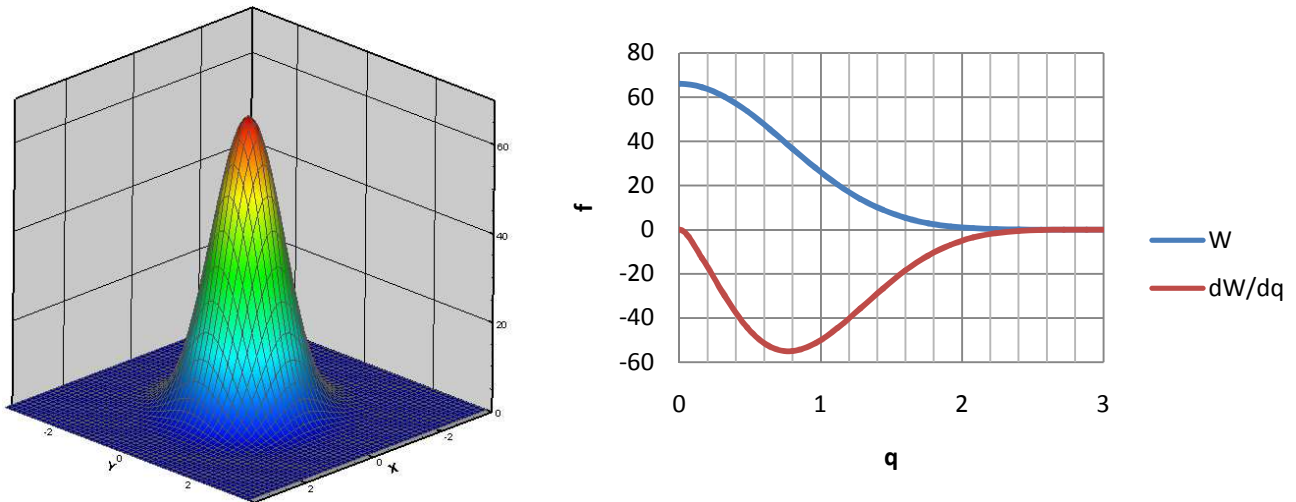


Σχήμα 2.1.5 Η μορφή της συνάρτησης της τετάρτης τάξης spline.

Η πέμπτης τάξης spline (σχήμα 2.1.6) είναι:

$$W_h(r_{ij}) = a_d \begin{cases} (3 - q)^5 - 6(2 - q)^5 + 15(1 - q)^5, & 0 \leq q < 1 \\ (3 - q)^5 - 6(2 - q)^5, & 1 \leq q < 2 \\ (3 - q)^5, & 2 \leq q < 3 \\ 0, & q \geq 3 \end{cases} \quad (2.31)$$

όπου a_d είναι $120/h$, $7/478\pi h^2$ και $3/359\pi h^3$ για χώρο 1,2 και 3 διαστάσεων αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1.6 Η μορφή της συνάρτησης της πέμπτης τάξης spline.

2.1.6 Τεχνικές εξαγωγής SPH διατυπώσεων.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω διαδικασίες για την ολοκληρωματική και σωματιδιακή προσέγγιση μια συνάρτησης, μπορούν να εξαχθούν SPH διατυπώσεις για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ). Στη πραγματικότητα υπάρχουν διάφοροι τρόποι για την παραγωγή SPH διατυπώσεων. Σύμφωνα με τον Benz(1990) για να δημιουργηθούν SPH εξισώσεις για τις (ΜΔΕ), πολλαπλασιάζεται κάθε όρος με την συνάρτηση εξομάλυνσης και γίνεται ολοκλήρωση στον όγκο ελέγχου με τη χρήση ολοκλήρωσης κατά μέλη και αναπτυγμάτων Taylor. Ο Monaghan (1992) εφάρμοσε μια πιο απλή προσέγγιση, χρησιμοποιώντας απευθείας τις σχέσεις (2.17) και (2.23). Με αυτή την προσέγγιση οι δύο παρακάτω ταυτότητες χρησιμοποιούνται για να τοποθετήσουν την πυκνότητα μέσα στον διαφορικό τελεστή

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho f(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x}) \cdot \nabla \rho] \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \rho \left[\nabla \cdot \left(\frac{f(\mathbf{x})}{\rho} \right) + \frac{f(\mathbf{x})}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \right] \quad (2.32)$$

Οι δύο παραπάνω ταυτότητες μπορούν αντικατασταθούν στο ολοκλήρωμα στην εξίσωση (2.10). Αν εφαρμόσουμε την διαδικασία σωματιδιακής προσέγγισης σε κάθε διαφορικό όρο στο δεξί μέρος των εξισώσεων (2.31) και (2.32) έχουμε τις παρακάτω σχέσεις για το σωματίδιο i

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j=1}^N m_j [f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)] \cdot \nabla_i W_{ij} \right] \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) = \rho_i \left[\sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^2} \right] \cdot \nabla_i W_{ij} \right] \quad (2.34)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε όρος που βρίσκεται έξω από το διαφορικό των σχέσεων (2.31) και (2.32) αναφέρεται στο σωματίδιο i . Επίσης παρατηρούμε ότι με τις παραπάνω σχέσεις κάθε συνάρτηση του πεδίου $f(x)$ εμφανίζεται ανά ζεύγη σωματιδίων.

2.2 Μοντέλο SPH για ρευστά.

Η μέθοδος SPH για μετατροπή των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε διακριτοποιημένες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τον χρόνο, έχει ουσιαστική εφαρμογή στην αντιμετώπιση προβλημάτων ρευστομηχανικής. Στη περίπτωση αυτή το ρευστό αντιμετωπίζεται ως ένα σύνολο πεπερασμένου αριθμού σωματιδίων, τα οποία φέρουν όλες τις ιδιότητες του ρευστού (μάζα, ιξώδες, πυκνότητα) και τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής (πίεση ταχύτητα) και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα πεδίο ροής και αφορούν την παρούσα εργασία είναι η εξίσωση διατήρησης της μάζας και η εξίσωση διατήρησης της ορμής. Όπως αναφέρθηκε η μέθοδος SPH εφαρμόζεται στην κατά Lagrange μορφή των εξισώσεων και αυτή η μορφή θα παρουσιαστεί παρακάτω.

2.2.1 Σωματιδιακή προσέγγιση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας.

Η διαφορική διατύπωση της εξίσωσης της συνέχειας κατά την Lagrange θεώρηση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.35)$$

όπου $\frac{D}{Dt}$ η υλική παράγωγος, ρ η πυκνότητα και \mathbf{u} η ταχύτητα.

Αν εφαρμοστεί η σωματιδιακή προσέγγιση της σχέσης (2.33) στην σχέση (2.35) έχουμε το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του σωματιδίου i

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}$$

έτσι

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2.36)$$

όπου $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$.

Με αυτή την έκφραση ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας εξαρτάται από τη διαφορά των ταχυτήτων του σωματιδίου i και των γειτονικών σωματιδίων j , καθώς και από τη σχετική τους θέση που υπολογίζεται μέσω της κλίσης της συνάρτησης W . Έτσι είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός της μεταβολής της πυκνότητας αφού σε κάθε χρονικό βήμα γίνεται υπολογισμός της ταχύτητας και της θέσης των σωματιδίων.

2.2.2 Σωματιδιακή προσέγγιση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής.

Η διαφορική διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης του ορμής για συνεκτική ροή κατά την Lagrange θεώρηση δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (2.37)$$

όπου μ το ιξώδες, \mathbf{g} η επιτάχυνση της βαρύτητας, p η πίεση και Δ ο τελεστής Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.38)$$

Αν θεωρηθεί το ρευστό μη συνεκτικό τότε προκύπτει η εξίσωση Euler για την διατήρηση της ορμής

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (2.39)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.40)$$

Αν εφαρμοστεί η σωματιδιακή προσέγγιση της σχέσης (2.34) στην σχέση (2.40) για την κλίση της πίεσης, έχουμε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σωματιδίου i

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i} \rho_i \left[\sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right] \cdot \nabla_i W_{ij} \right] + \mathbf{g} \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right] \cdot \nabla_i W_{ij} + \mathbf{g} \quad (2.42)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η επιτάχυνση ενός σωματιδίου i εξαρτάται από την πίεση και πυκνότητα του σωματιδίου i και των γύρω του σωματιδίων j καθώς και από την σχετική τους θέση.

2.2.3 Τεχνητή συνεκτικότητα.

Στην παραπάνω διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής το ρευστό θεωρήθηκε μη συνεκτικό. Για ακριβέστερη προσομοίωση ενός πραγματικού ρευστού, με ιξώδες καθώς και για την αποφυγή παραγωγής αφύσικων λύσεων οι Monaghan και

Gingold (1983) επινόησαν την εισαγωγή ενός όρου τεχνητής συνεκτικότητας στη εξίσωση της ορμής (2.42). Έτσι η εξίσωση της ορμής παίρνει την εξής μορφή

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left[\left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W_{ij} - \Pi_{ij} \right] + \mathbf{g} \quad (2.43)$$

όπου Π_{ij} το τεχνητό ιξώδες.

Η αναλυτική έκφραση του τεχνητού ιξώδους είναι

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-a_{\Pi} \bar{c}_{ij} \varphi_{ij} + \beta_{\Pi} \varphi_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} \nabla_i W_{ij}, & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

όπου

$$\varphi_{ij} = \frac{h_{ij} \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \varphi^2}$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2} (c_i + c_j)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_j)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2} (h_i + h_j)$$

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$$

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$$

οι συντελεστές a_{Π} και β_{Π} των παραπάνω εξισώσεων είναι σταθερές των οποίων η τυπική τιμή είναι η μονάδα (Monaghan, 1988, Evrard, 1988). Ο συντελεστής $\varphi=0.1h_{ij}$ εισέρχεται για να εμποδίσει αριθμητικές αποκλίσεις όταν δύο σωματίδια πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους. Οι c και \mathbf{u} συμβολίζουν την ταχύτητα του ήχου και το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου, αντίστοιχα.

Οι Herquist και Katz (1989) εφάρμοσαν μια διαφορετική έκφραση της τεχνητής συνεκτικότητας η οποία εξαρτάται από την απόκλιση της ταχύτητας:

$$\Pi_{ij} = \left[\frac{q_i}{\rho_i^2} + \frac{q_j}{\rho_j^2} \right] \nabla_i W_{ij} \quad (2.45)$$

όπου

$$q_i = \begin{cases} a_{\Pi} h_i \rho_i c_i |\nabla \cdot \mathbf{u}_i| + \beta_{\Pi} h_i^2 \rho_i |\nabla \cdot \mathbf{u}_i|^2, & \nabla \cdot \mathbf{u}_i < 0 \\ 0, & \nabla \cdot \mathbf{u}_i \geq 0 \end{cases}$$

Δύο πιο απλές σχέσεις της τεχνητής συνεκτικότητας προτάθηκαν, μια από τον Monaghan (1992)

$$\Pi_{ij} = 8 \frac{v_i + v_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{\mathbf{u}_{ij} \mathbf{x}_{ij}}{x_{ij}^2} \nabla_i W_{ij} \quad (2.46)$$

όπου $v = \frac{\mu}{\rho}$ η κινηματική συνεκτικότητα, και η δευτερη από τον Morris κ.α.(1997)

$$\Pi_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\mathbf{u}_{ij}}{x_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (2.47)$$

Οι σχέσεις 2.46 και 2.47, σε αντίθεση με τις εκφράσεις της τεχνητής συνεκτικότητας των σχέσεων 2.44 και 2.45, χρησιμοποιούν την τιμή του ιξώδους εισάγοντας έτσι στην εξίσωση της ορμής μια φυσική ιδιότητα του ρευστού.

2.2.4 Τεχνητή συμπίεστικότητα.

Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης των σωματιδίων, όπως φαίνεται από την εξίσωση (2.43) χρειάζεται και ο υπολογισμός της πίεσης των σωματιδίων. Εξάλλου η κλίση της πίεσης είναι η αιτία της κίνησης των σωματιδίων. Όμως υπάρχουν αρκετές δυσκολίες στην μοντελοποίηση της πίεσης με τη μέθοδο SPH. Ο υπολογισμός της πίεσης ενός ασυμπίεστου ρευστού από την πραγματική καταστατική εξίσωση των ρευστών οδηγεί σε χρονικά βήματα ολοκλήρωσης τα οποία είναι εξαιρετικά μικρά. Έτσι η πίεση υπολογίζεται μέσω μιας καταστατικής εξίσωσης η οποία την συνδέει με την πυκνότητα. Όπως προκύπτει και από την εξίσωση μεταβολής της πυκνότητας, το ρευστό, και για την περίπτωση του νερού, λαμβάνεται ελαφρώς συμπίεστό. Με την προϋπόθεση αυτή ο Batchelor (1973) πρότεινε μια καταστατική εξίσωση την οποία τροποποίησε ο Monaghan (1994) για ροές με ελεύθερη επιφάνεια

$$p_i = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (2.48)$$

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα αναφοράς, γ μια σταθερά που για την περίπτωση του νερού παίρνει την τιμή $\gamma=7$, και c_0 η ταχύτητα του ήχου. Η ταχύτητα του ήχου αν λάβει την φυσική της τιμή θα προκαλέσει πολύ μικρά χρονικά βήματα, όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω. Λαμβάνει τέτοιες τιμές ώστε ο αριθμός Mach να παραμένει κάτω του 0.1. Έτσι μια προτεινόμενη τιμή της ταχύτητας του ήχου είναι 10 φορές την τιμή της μέγιστης ταχύτητας της ροής (Violau κ.α,2007), διατηρώντας τις διακυμάνσεις της σχετικής πυκνότητας μικρότερες του 1%.

Μια άλλη πιθανή επιλογή της καταστατικής εξίσωσης είναι:

$$p = c^2 \rho \quad (2.49)$$

την οποία ο Morris κ.α. (1997) χρησιμοποίησαν για να μοντελοποιήσουν ασυμπίεστες ροές χαμηλού αριθμού Reynolds χρησιμοποιώντας SPH. Το βασικότερο πρόβλημα στον υπολογισμό της πίεσης με τη μέθοδο SPH είναι ότι μικρές μεταβολές της πυκνότητας μπορεί να προκαλέσουν μεγάλες διακυμάνσεις στην πίεση με αποτέλεσμα την αστάθεια του αλγορίθμου ή και ανακριβείς τιμές της πίεσης

2.2.5 Χρονικό βήμα ολοκλήρωσης

Κατά την επιλογή του χρονικού βήματος ολοκλήρωσης των εξισώσεων πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν οι παρακάτω περιορισμοί (Issa,2004):

- Συνθήκη CFL (Courant-Friedrich-Levy)
- Το μέγεθος των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε κάθε σωματίδιο
- Ο όρος κινηματικής συνεκτικότητας

Συνθήκη CFL

Η συνθήκη CFL επιβάλλει ότι το χρονικό βήμα dt_{CFL} πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με το χρόνο μετακίνησης του χαρακτηριστικού μήκους h ως προς τη χωρική διακριτοποίηση. Στις σχέσεις του SPH και στις υδραυλικές εφαρμογές (όπου $M \ll 1$), η συνθήκη αυτή εκφράζεται με τη σχέση:

$$dt_{CFL} = 0.4 \frac{h}{c_0} \quad (2.50)$$

όπου ο συντελεστής 0.4 καθορίστηκε από αριθμητικά πειράματα (Monaghan, 1992) και c_0 η αριθμητική τιμή της ταχύτητας του ήχου. Ο σκοπός αυτής συνθήκης είναι να αποφευχθεί η μετάδοση της τεχνητής πίεσης με τη μορφή κυμάτων (κυμάτων πίεσης) κατά την επίλυση της καταστατικής εξίσωσης.

Συνθήκη λόγω των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων.

Αυτή συνθήκη εξασφαλίζει ότι τα σωματίδια δεν πλησιάζουν πολύ κοντά μεταξύ τους κατά την ολοκλήρωση της κίνησής τους σε ένα χρονικό βήμα (Morris κ.α.,1997).

$$dt_{forces} = 0.25 \min \left(\sqrt{\frac{h}{\gamma_i}} \right) \quad (2.51)$$

όπου γ_i είναι η επιτάχυνση των σωματιδίων i που οφείλεται στις εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις.

Συνθήκη λόγω κινηματικής συνεκτικότητας

Το κριτήριο της κινηματικής συνεκτικότητας πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν έτσι ώστε το χρονικό βήμα να είναι μικρότερο της χρονικής κλίμακας του φαινομένου συνεκτικότητας. Η χρονική κλίμακα αυτή εξαρτάται από το χαρακτηριστικό μήκος h . Το κριτήριο συνεκτικότητας ορίζεται από τη σχέση:

$$dt_{visc} = 0.125 \frac{h^2}{\nu} \quad (2.52)$$

Για μια ικανοποιητικά υψηλή ανάλυση (μικρό h) ή μεγάλη τιμή της συνεκτικότητας, η σχέση (2.52) είναι τυπικά ο κυρίαρχος χρονικός περιορισμός. Η συνθήκη αυτή είναι γενικά μη απαραίτητη, εκτός από ροές χαμηλού αριθμού Reynolds.

Έτσι το τελικό χρονικό βήμα dt καθορίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$dt = \min\{dt_{CFL}, dt_{forces}, dt_{visc}\} \quad (2.53)$$

2.2.6 Χειρισμός ορίων

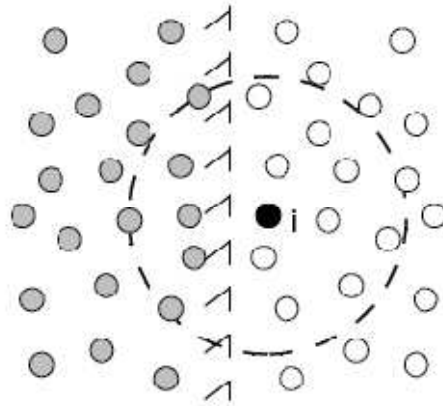
Η μέθοδος SPH είχε σχεδιαστεί αρχικά για προσομοίωση κίνησης σωμάτων στην αστροφυσική χωρίς συγκεκριμένα όρια του υπολογιστικού χώρου. Η αντιμετώπιση, λοιπόν, των οριακών συνθηκών σε διάφορους τύπους ροής ρευστών ακόμα παρουσιάζει δυσκολίες.

Παρά τη μεγάλη σημασία αντιμετώπισης των οριακών συνθηκών για πρακτικές εφαρμογές, το κυρίως πρόβλημα που υπάρχει έχει σχέση με την έλλειψη σωματιδίων και τη διακοπή του χώρου ολοκλήρωσης καθώς και με την απουσία συνεκτικών δυνάμεων στα σωματίδια που βρίσκονται κοντά στα όρια.

Ένα ακόμα σημαντικό πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι η εισχώρηση σωματιδίων του ρευστού στο στερεό τοίχωμα, που δεν έχει φυσικό νόημα.

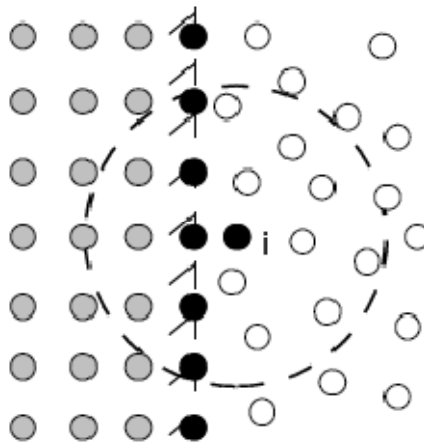
Αυτά τα προβλήματα μπορούν να αντιμετωπιστούν αν αυξηθεί ο υπολογιστικός χώρος και περιλαμβάνει και τα τοιχώματα, τα οποία αντιπροσωπεύονται επίσης από σωματίδια.

Μια πρόταση (Libersky, Pertschek κ.α., 1993) είναι να παράγονται σωματίδια τοιχώματος συμμετρικά ως προς τα σωματίδια του ρευστού, δηλαδή κατοπτρικά σωματίδια με γραμμή συμμετρίας το σταθερό όριο. Τα σωματίδια αυτά ονομάζονται φανταστικά σωματίδια (ghost particles).



Σχήμα 2.2.1. Φανταστικά σωματίδια τοιχώματος (ghost particles)

Μια εναλλακτική πρόταση (Issa,2005) είναι τα υποθετικά αυτά σωματίδια του τοιχώματος να έχουν μια σταθερή και προκαθορισμένη θέση, οπότε και ονομάζονται εικονικά σωματίδια (fictitious particles).

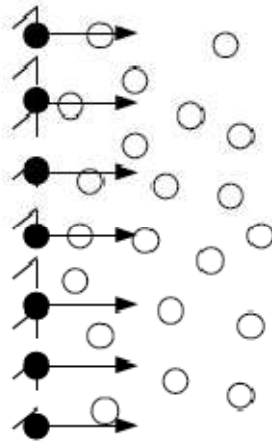


Σχήμα 2.2.2. Εικονικά σωματίδια τοιχώματος (fictitious particles)

Και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές των ιδιοτήτων των σωματιδίων αυτών καθορίζονται έτσι ώστε να ισχύουν οι ανάλογες οριακές συνθήκες.

Οι δύο παραπάνω μέθοδοι δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, αλλά αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα σε σύνθετες γεωμετρίες, όπως κυρτές επιφάνειες και ακμές.

Τα προβλήματα αυτά παρακάμπτονται ως ένα βαθμό με μια απλούστερη αλλά λιγότερο ακριβή μέθοδο που προτείνεται από τον Monaghan (1994). Σωματίδια τοποθετούνται κατά μήκος του ορίου και ασκούν απωστικές δυνάμεις στα σωματίδια του ρευστού.



Σχήμα 2.2.3. Σωματίδια τοιχώματος με απωστικές δυνάμεις.

Οι δυνάμεις έχουν τη λεγόμενη μορφή Lennard-Jones:

$$F = D \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (2.54)$$

όπου r η κάθετη απόσταση του σωματιδίου από το τοίχωμα, r_0 το μήκος της περιοχής επίδρασης των δυνάμεων και D είναι ένας συντελεστής που επιλέγεται σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και έχει μονάδες m^2/s^2 . Για $r > r_0$ οι δυνάμεις μηδενίζονται. Η F έχει μονάδες επιτάχυνσης και δίνει τη δύναμη που ασκείται ανά μονάδα μάζας ρευστού.

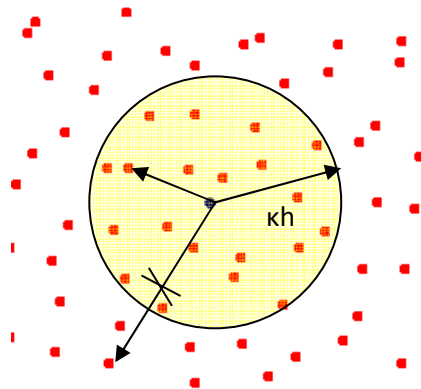
Η τεχνική των απωστικών δυνάμεων, παρόλο που δίνει λύση σε πολύπλοκες γεωμετρίες, υστερεί ως προς την ακρίβεια, κυρίως λόγω της απουσίας συνεκτικών δυνάμεων στα σωματίδια που βρίσκονται κοντά στα τοιχώματα.

Τέλος μια πολύ ικανοποιητική μέθοδος, που φέρει τα πλεονεκτήματα των παραπάνω μεθόδων, είναι ο συνδυασμός εικονικών σωματιδίων με την ταυτόχρονη εφαρμογή των απωστικών δυνάμεων, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία.

2.2.7 Αναζήτηση γειτονικών σωματιδίων

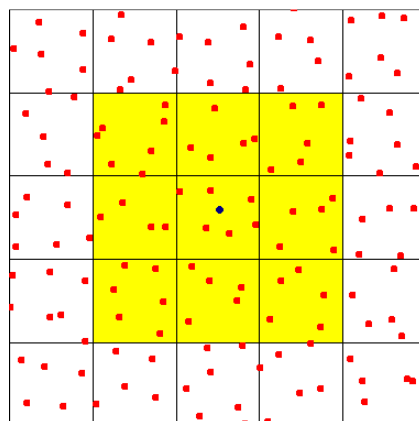
Κατά την εφαρμογή της μεθόδου SPH οι μεταβολές των ιδιοτήτων του κάθε σωματιδίου οφείλονται στην αλληλεπίδρασή του με τα γειτονικά σωματίδια, δηλαδή σε αυτά που βρίσκονται μέσα στην περιοχή επίδρασης του πυρήνα εξομάλυνσης. Έτσι προκύπτει το ερώτημα, πώς θα γίνεται η αναζήτηση των γειτονικών σωματιδίων.

Η πιο απλή και προφανής λύση είναι να ελέγχεται η απόσταση όλων των σωματιδίων j από το εξεταζόμενο σωματίδιο i και όσα βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από kh να αλληλεπιδρούν με το σωματίδιο i (σχήμα 2.2.7). Αυτή όμως είναι μια εξαιρετικά χρονοβόρα διαδικασία, αφού αν ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων είναι N πρέπει να γίνουν συνολικά N^2 έλεγχοι απόστασης σε κάθε χρονικό βήμα.



Σχήμα 2.2.4. Έλεγχος όλων των σωματιδίων για την αναζήτηση των γειτονικών

Μια λύση λιγότερο δαπανηρή σε υπολογιστικό κόστος και χρόνο είναι η εφαρμογή του αλγορίθμου linked-list (Liu, 2003) και λειτουργεί για σταθερό χαρακτηριστικό μήκος αλληλεπίδρασης h . Σε αυτήν την περίπτωση δημιουργείται ένα σταθερό πλέγμα έτσι ώστε να καλύπτει όλο τον υπολογιστικό χώρο. Η κάθε πλευρά των κελιών του πλέγματος έχει μήκος όσο η ακτίνα αλληλεπίδρασης kh , όπου k παίρνει τις τιμές 2, 2.5, 3 ανάλογα με την συνάρτηση εξομάλυνσης W (§ 2.1.5). Τα σωματίδια αντιστοιχίζονται στα κελιά του πλέγματος, έτσι ώστε κατά την αναζήτηση των γειτονικών σωματιδίων ελέγχονται μόνο τα σωματίδια που βρίσκονται στο ίδιο και στα γειτονικά κελιά. Δηλαδή στο δισδιάστατο πρόβλημα γίνεται ο έλεγχος στο κελί του σωματιδίου και στα 8 γειτονικά του (σχήμα 2.2.8), σύνολο 9 κελιά, ενώ στο τρισδιάστατο γίνεται έλεγχος σε συνολικά 27 κελιά. Με αυτόν τον τρόπο ο χρόνος αναζήτησης γειτονικών σωματιδίων μειώνεται σημαντικά.



Σχήμα 2.2.5. Αναζήτηση γειτονικών σωματιδίων στα γειτονικά κελιά μόνο.

2.2.8 Τεχνικές εξομάλυνσης της ροής

Για την ομαλή κίνηση των σωματιδίων του ρευστού σε σχέση με τα γειτονικά τους αλλά και την σχετικά ομοιόμορφη κατανομή της πυκνότητας έχουν προταθεί κάποιες διορθωτικές τεχνικές εξομάλυνσης της ροής. Για τη διόρθωση της ταχύτητας των σωματιδίων υπάρχει η τεχνική XSPH και για τη διόρθωση της πυκνότητας υπάρχει η τεχνική κανονικοποίησης της πυκνότητας.

Τεχνική XSPH

Η διόρθωση της ταχύτητας των σωματιδίων με τη μέθοδο XSPH προτάθηκε από τον Monaghan (1992). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή ο ρυθμός μεταβολής της θέσης ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i - \varepsilon \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{u}_{ij} W_{ij} \quad (2.55)$$

όπου ε είναι μία σταθερά μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Στις περισσότερες περιπτώσεις η τιμή $\varepsilon=0.3$ είναι μια καλή επιλογή για την προσομοίωση ασυμπίεστων ροών. Είναι φανερό ότι η τεχνική XSPH περιλαμβάνει τη συνεισφορά των γειτονικών σωματιδίων, γι' αυτό και κάνει το σωματίδιο να κινείται με ταχύτητα πλησιέστερη στη μέση ταχύτητα των γειτονικών σωματιδίων. Η XSPH όταν εφαρμόζεται σε ασυμπίεστες ροές μπορεί να διατηρήσει τα σωματίδια σε τάξη, ενώ όταν εφαρμόζεται σε συμπίεστες ροές μπορεί να μειώσει αποτελεσματικά αφύσικες εισχωρήσεις μεταξύ σωματιδίων που πλησιάζουν.

Η τεχνική αυτή μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σε προσομοιώσεις εκρήξεων όπου ο συντελεστής ε λαμβάνει τιμές $\varepsilon > 0.5$.

Μια διαφορετική έκφραση της XSPH δίνεται από τους Colagrossi και Landrini (2003) όπου δεν λαμβάνεται υπόψη μόνο η τιμή της πυκνότητας του γειτονικού σωματιδίου j , αλλά και η πυκνότητα του εξεταζόμενου σωματιδίου i :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \varepsilon \sum_j \frac{m_j}{\bar{\rho}_{ij}} \mathbf{u}_{ij} W_{ij} \quad (2.56)$$

$$\text{όπου } \bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$$

Η διορθωμένη ταχύτητα χρησιμοποιείται στις εξισώσεις θέσης και πυκνότητας, αλλά όχι στην εξίσωση της ορμής.

Για διφασικές ροές η τεχνική XSPH δίνει λάθος αποτελέσματα.

Κανονικοποίηση Πυκνότητας

Μολονότι οι ροές των ρευστών που προκύπτουν από SPH προσομοιώσεις είναι γενικά ρεαλιστικές, το πεδίο πίεσης των σωματιδίων παρουσιάζει μεγάλες διακυμάν-

σεις. Οι προσπάθειες για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος έχουν επικεντρωθεί σε διάφορες προσεγγίσεις, συμπεριλαμβανόμενης και της διόρθωσης του προσεγγιστικού πυρήνα (Bonet & Lok, 1999). Μια, πιο άμεση και λιγότερο δαπανηρή σε υπολογιστικό κόστος μέθοδος, είναι η εφαρμογή ενός φίλτρου στην πυκνότητα των σωματιδίων και την εκ νέου αντιστοίχιση μιας πυκνότητας σε κάθε σωματίδιο (Colagrossi και Landrini, 2003). Η μέθοδος κανονικοποίησης της πυκνότητας ονομάζεται φίλτρο Shepard.

Το φίλτρο Shepard είναι μια γρήγορη και απλή διόρθωση της πυκνότητας των σωματιδίων, και η ακόλουθη διαδικασία εφαρμόζεται κάθε 30 χρονικά βήματα.

$$\rho_i^{\text{new}} = \sum_j \rho_j \tilde{W}_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} = \sum_j m_j \tilde{W}_{ij} \quad (2.57)$$

όπου ο πυρήνας εξομάλυνσης έχει επίσης διορθωθεί χρησιμοποιώντας μια διόρθωση γνωστή ως Zeroth-Order:

$$\tilde{W}_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_j W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j}} \quad (2.58)$$

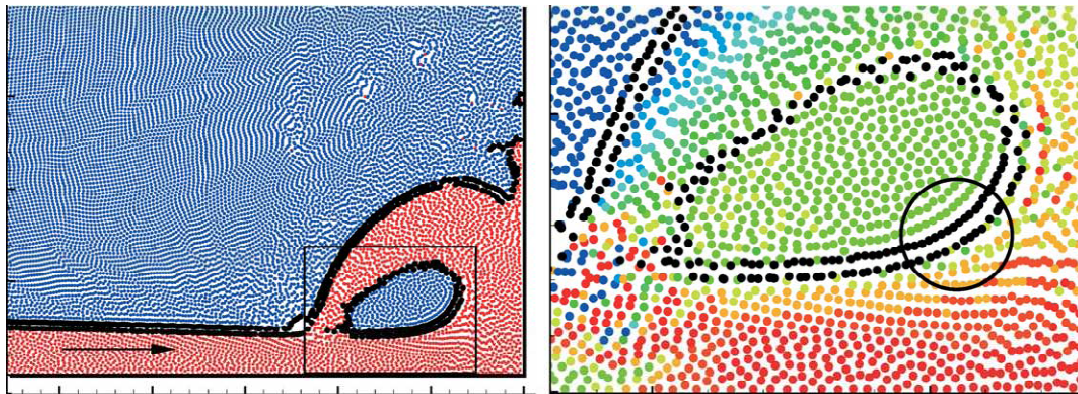
2.2.9 Εφαρμογές στη ρευστομηχανική

Η μέθοδος SPH έχει μεγάλη εφαρμογή στη ρευστομηχανική, κυρίως σε προβλήματα ροών που περιλαμβάνουν ελεύθερες επιφάνειες. Οι κύριες κατηγορίες των προβλημάτων ελέγχου που συναντώνται στη βιβλιογραφία είναι οι εξής:

- Κατάρρευση στήλης ρευστού
- Δημιουργία κύματος
- Πρόσπτωση δέσμης σε πλάκα
- Ροή γύρω από αντικείμενο
- Ροή σε κλειστό αγωγό και σε ανοιχτό κανάλι
- Συμπεριφορά σταγόνας ρευστού

Στην περίπτωση της κατάρρευσης στήλης ρευστού ο Monaghan (1992) παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα προσομοιώνοντας την ροή στήλης νερού που συναντά ένα εμπόδιο. Για την αντιμετώπιση των τοιχωμάτων εφάρμοσε δυνάμεις Lennard-Jones και παρατήρησε την συμμετοχή των σωματιδίων των τοιχωμάτων στη συμπεριφορά του ρευστού.

Οι Colagrossi και Landrini (2003) στο ίδιο πρόβλημα κατάρρευσης στήλης, χωρίς όμως την ύπαρξη εμποδίου, παρατήρησαν ότι το κύμα που δημιουργείται κατά την επιστροφή του νερού από την σύγκρουσή του με το τοίχωμα (σχήμα 2.2.1) εγκλωβίζει μία ποσότητα αέρα, η οποία αν δεν ληφθεί υπ' όψιν στους υπολογισμούς προκύπτουν αφύσικα αποτελέσματα. Έτσι παρουσιάζουν ένα διφασικό μοντέλο για να συμπεριλάβουν και την επίδραση του αέρα.



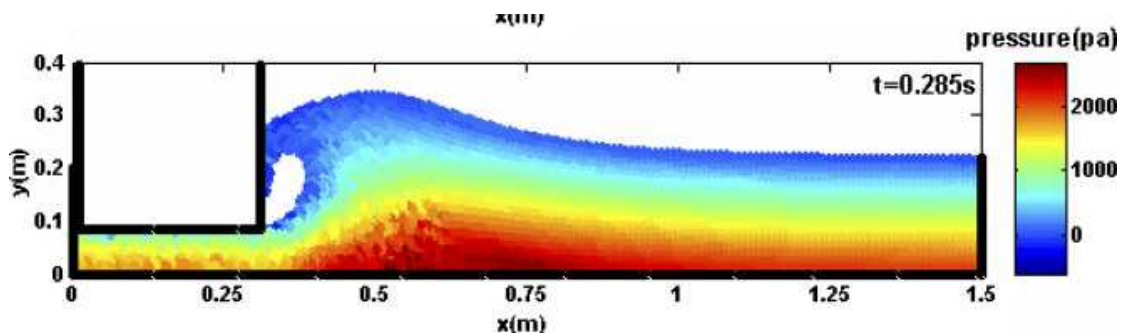
Σχήμα 2.2.6. Κατανομή των σωματιδίων (αριστερά) και της πίεσης (δεξιά) στο διφασικό μοντέλο των Colagrossi και Landrini μετά τη σύγκρουση του νερού σε κατακόρυφο τοίχο.

Οι Violeau και Issa (2007) προσέγγισαν το ίδιο πρόβλημα εισάγοντας στον κώδικα SPH κάποια μοντέλα τύρβης. Για την ακρίβεια χρησιμοποίησαν το μοντέλο $k-\epsilon$ και το τρισδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης μεγάλης δίνης (Large Eddy Simulation ,LES).

Ο Ataie-Ashtiani κ.α.(2008) εφάρμοσαν τον τροποποιημένο κώδικα ασυμπιεστού SPH(M- I-SPH) παράγοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα .Στον κώδικα M-I-SPH το νερό αντιμετωπίζεται ως πλήρως ασυμπιεστο και η πίεση υπολογίζεται λύνοντας μια εξίσωση Poisson, ικανοποιώντας τη συνθήκη ασυμπιεστότητας.

Ο Lee κ.α.(2008) συγκρίνουν τις μεθόδους I-SPH και WCSPH (ελαφρώς συμπιεστό SPH) στο πρόβλημα της στήλης. Τέλος ο Crespo κ.α.(2008) προσομοιώνουν την περίπτωση κατάρρευσης στήλης νερού σε μία δεξαμενή που περιέχει νερό και μελετούν την μετάδοση των κυμάτων.

Στο πρόβλημα δημιουργίας και εξέλιξης κύματος ο Dalrymple κ.α. (2006) προσομοίωσαν κύμα σε ακτή εφαρμόζοντας Shepard φίλτρο στην πυκνότητα και ένα νέο αλγόριθμο χρονικού βήματος. Ο Songdong Shao κ.α. (2006) εφάρμοσαν το μοντέλο I-SPH στη δημιουργία κυμάτων που υπερπηδούν έναν κεκλιμένο τοίχο. Το ίδιο πείραμα επανέλαβε ο Songdong Shao (2006) σε νεώτερη εργασία, χρησιμοποιώντας πάλι I-SPH, αλλά εισάγοντας αυτή τη φορά και το μοντέλο τύρβης $k-\epsilon$. Ο Ataie-Ashtiani κ.α. (2008) χρησιμοποίησαν την μέθοδο M-I-SPH στη δημιουργία και μετάδοσης κύματος. Σε μεταγενέστερη δημοσίευση οι Ataie-Ashtiani και Shobeyri (2008) μελέτησαν τη δημιουργία κύματος από ολίσθηση σωματιδίου σε κεκλιμένη επιφάνεια που καλύπτεται από νερό, καθώς και από τη βύθιση σωματιδίου σε νερό (σχήμα 2.2.2).



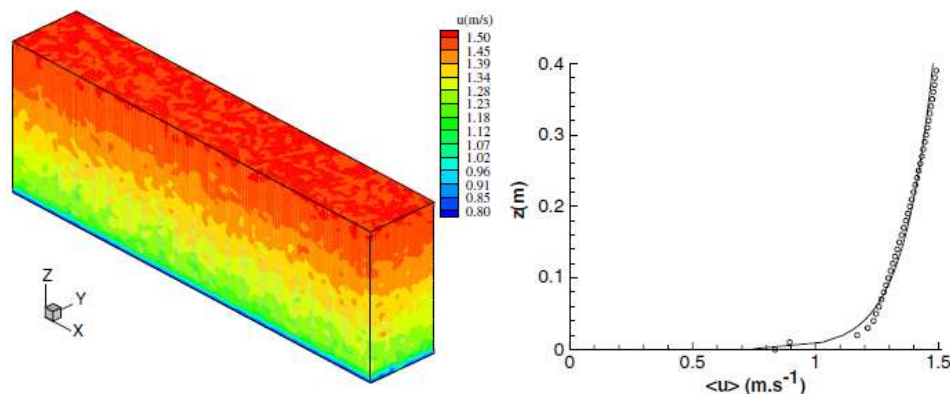
Σχήμα 2.2.7. Δημιουργία κύματος από βύθιση αντικειμένου (Ataie-Ashtiani,Shobeyri, 2008)

Προσομοίωση πρόσπτωσης δέσμης ρευστού πάνω σε πλάκα για διάφορες γωνίες παρουσίασαν ο Morris κ.α. σε δύο δημοσιεύσεις το 1998. Στην πρώτη δημοσίευση η πλάκα ήταν οριζόντια και εξέτασαν τις περιπτώσεις να είναι ακίνητη και να κινείται, και στη δεύτερη η πλάκα ήταν κατακόρυφη και ακίνητη.

Ο Marongiu κ.α.(2007) έδειξαν την δυνατότητα προσομοίωσης πρόσπτωσης δέσμης νερού πάνω σε σκαφίδια υδροστροβίλου Pelton με SPH.

Για την περίπτωση ροής ρευστού γύρω από αντικείμενο ο Morris κ.α.(1997) μελέτησαν την ροή και την κατανομή της πίεσης γύρω από ένα κύλινδρο για διάφορες τιμές του Re. Ο Yildiz κ.α. (2008) εξέτασαν την ίδια περίπτωση εφαρμόζοντας την μέθοδο πολλαπλών εφαπτομένων των ορίων (Multiple Boundary Tangent method, MBT), όπου για κάθε σωματίδιο των στερεών ορίων λαμβάνεται η εφαπτομένη του για την δημιουργία κατοπτρικών σωματιδίων συμπαγούς αντικειμένου. Ροή γύρω από αντικείμενο τετραγωνικής διατομής προσομοίωσαν ο Lee κ.α.(2008) συγκρίνοντας τις μεθόδους I-SPH και WCSPH.

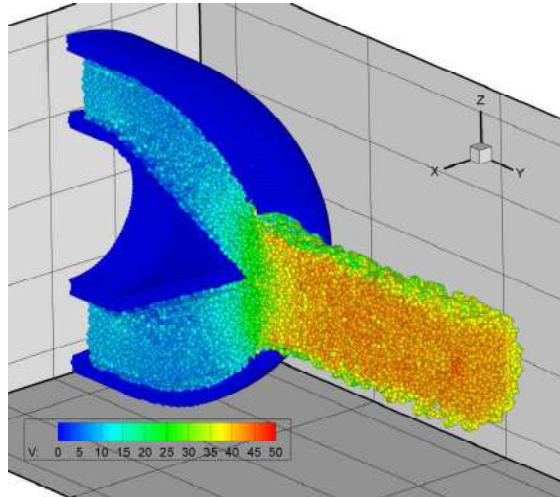
Δισδιάστατη ροή σε αγωγό μελέτησαν ο Morris κ.α.(1997) προσομοιώνοντας την ροή Couette και τη ροή Poiseuille. Τις ίδιες προσομοιώσεις παρουσίασαν και ο Jiang κ.α. (2005). Την τρισδιάστατη ροή σε ανοιχτό κανάλι (σχήμα 2.2.3), εφαρμόζοντας μοντέλα τύρβης, πέτυχαν ο Violeau κ.α. (2007).



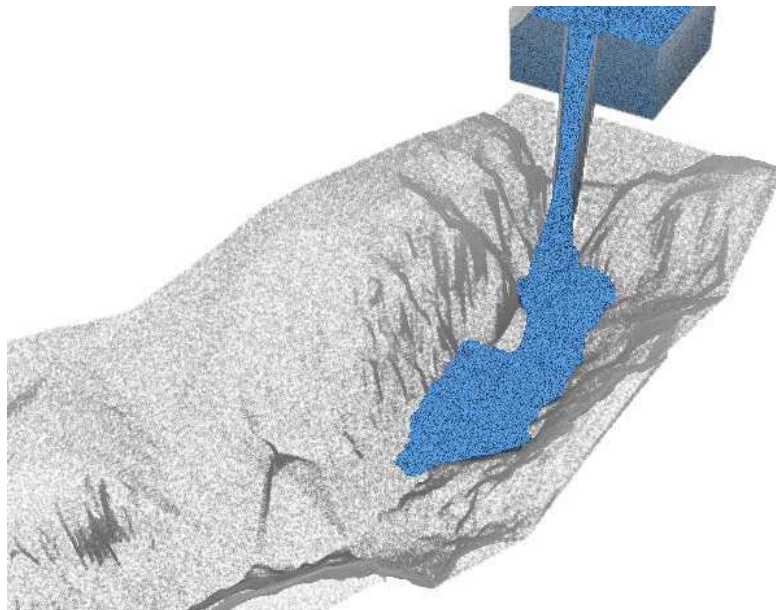
Σχήμα 2.2.8. 3d τυρβώδης ροή ανοιχτού καναλιού με τη μέθοδο SPH-LES (Violeau κ.α. ,2007)

Στην προσομοίωση συμπεριφοράς σταγόνας ρευστού και μετατροπής της μορφής της σε έλλειψη αναφέρθηκε ο Monaghan (1992). Ο Guangzheng Zhou κ.α. (2008) εφάρμοσαν ένα αποτελεσματικό μοντέλο επιφανειακής τάσης το οποίο είναι απλό σε μορφή και έχει μικρό υπολογιστικό κόστος. Τέλος ο Ataie-Ashtiani κ.α. (2008) χρησιμοποίησαν την μέθοδο M-I-SPH στην ελλειπτική σταγόνα.

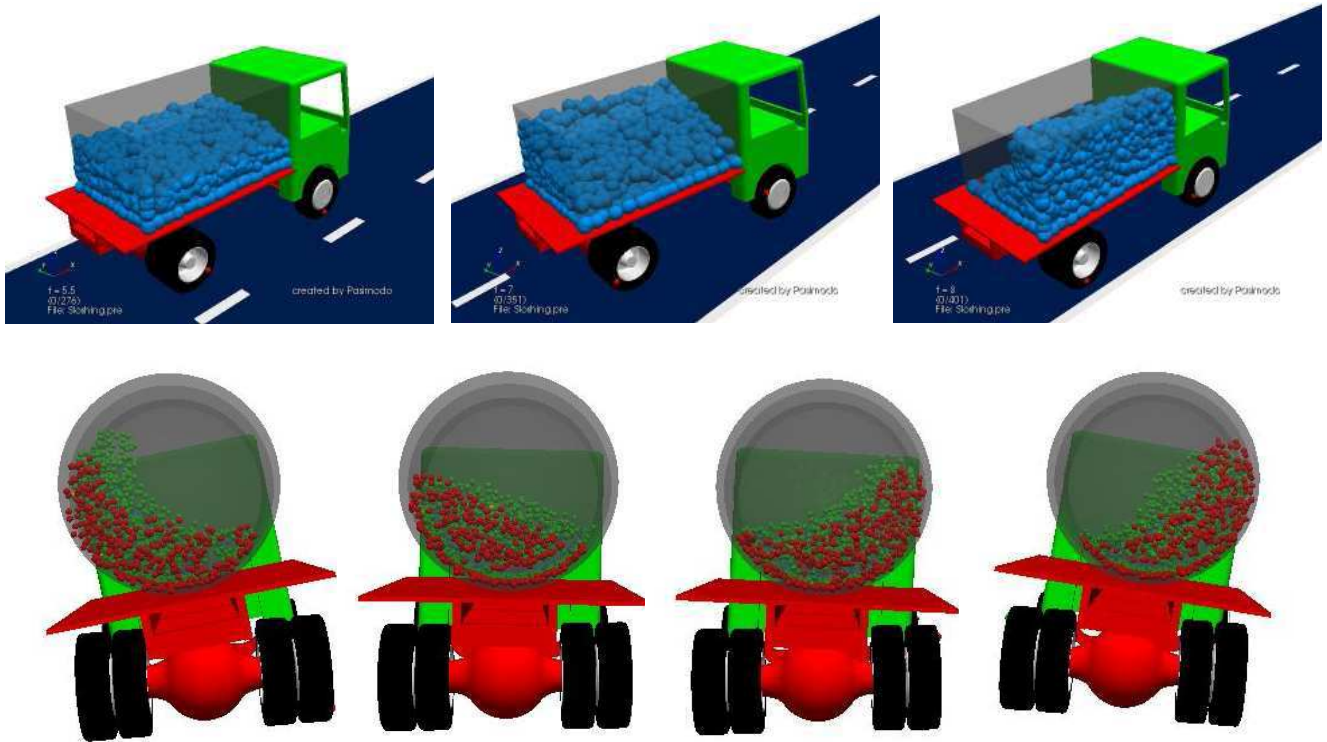
Πέρα από τις παραπάνω εφαρμογές, πολλές προσομοιώσεις ρευστών με τη βοήθεια του SPH έχουν δημοσιευθεί στα πρακτικά των συνεδριάσεων του SPHERIC (Smoothed Particle Hydrodynamics European Research Interest Community). Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται κάποιες από τις εφαρμογές αυτές.



Σχήμα 2.2.9. Προσομοίωση ακροφυσίου υδροτροβίλου Pelton (Κουκουνίνης κ.α. 2009).



Σχήμα 2.2.10. Προσομοίωση ροής σε κανάλι υπερχείλισης φράγματος (Lee κ.α. 2009).



Σχήμα 2.2.11. Προσομοίωση της συμπεριφοράς ρευστού σε βυτιοφόρο όχημα με παραλληλεπίπεδη (πάνω) και κυλινδρική (κάτω) δεξαμενή, κατά την αλλαγή λωρίδας κυκλοφορίας (Lehnard κ.α., 2009).

Κεφάλαιο 3

Κώδικας SPH

3.1 Χαρακτηριστικά του αλγορίθμου

Όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο SPH έγινε για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής των ρευστών με την βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών. Έτσι στην παρούσα εργασία δημιουργήθηκε ένας αλγόριθμος σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής.

Γενικότερος στόχος του αλγορίθμου είναι η προσομοίωση της ροής του ρευστού, για διάφορες συνθήκες. Με τη βοήθεια του κώδικα είναι δυνατή η οπτικοποίηση της θέσης των σωματιδίων του ρευστού σε κάθε επιθυμητό χρονικό σημείο και η σύγκρισή της με στιγμιότυπα της πραγματικής ροής, που έχουν ληφθεί κατά τη διάρκεια πειραμάτων. Επίσης μέσω του αλγορίθμου είναι εφικτός ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών της ροής (όπως ταχύτητας και πίεσης) σε διάφορες θέσης της υπολογιστικής περιοχής καθώς και των μέσων τιμών αυτών. Έτσι με την σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα πειραματικά δεδομένα της βιβλιογραφίας, γίνεται ο έλεγχος της αξιοπιστίας του κώδικα, εντοπίζονται τα τμήματα που δημιουργούν αποκλίσεις από την πραγματική ροή και γίνεται η βελτίωση του αλγορίθμου.

Έχοντας πλέον ένα ολοκληρωμένο αλγόριθμο είναι δυνατή η προσομοίωση και ο υπολογισμός ροών, που είναι δύσκολο ή και αδύνατο μερικές φορές, να υπολογιστούν αναλυτικά ή με τη βοήθεια πλεγματικών αριθμητικών μεθόδων, όπως η ροή του νερού σε ένα υδροστρόβιλο Pelton.

Στην συγκεκριμένη εργασία ο κώδικας αναπτύχθηκε για δισδιάστατες και για τρισδιάστατες ροές. Ο κώδικας δεν διαφοροποιείται σημαντικά και οι μικρές διαφορές θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Ένα σημαντικό πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται, κατά την εφαρμογή του προγράμματος, είναι ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος «τρεξίματος» σε CPU. Σε κάθε χρονικό βήμα, για την αριθμητική ολοκλήρωση, εφαρμόζεται ένα σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης, κατά το οποίο γίνονται ο υπολογισμοί για κάθε σωματίδιο δύο φορές. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η ανάλυση, δηλαδή ο αριθμός σωματιδίων N , και ειδικά στα τρισδιάστατα προβλήματα, αυξάνεται ο υπολογιστικός χρόνος. Επίσης όταν αυξάνεται η ανάλυση μειώνεται το χαρακτηριστικό μήκος h της συνάρτησης εξομάλυνσης αντιστρόφως ανάλογα, δηλαδή:

$$h \sim \frac{1}{N} \quad (3.1)$$

Όμως είδαμε ότι το μέγιστο χρονικό βήμα DT_{\max} εξαρτάται από το h και ότι όσο μειώνεται το h τόσο μειώνεται το DT_{\max} , δηλαδή:

$$DT_{\max} \sim h \quad (3.2)$$

Έτσι η σχέση μεταξύ DT_{\max} και αριθμού σωματιδίων N είναι αντιστρόφως ανάλογη:

$$DT_{max} \sim \frac{1}{N} \quad (3.3)$$

Μείωση του DT_{max} συνεπάγεται την αύξηση του υπολογιστικού χρόνου, για μια δεδομένη χρονική διάρκεια του φαινομένου που προσομοιώνεται. Από την άλλη, αύξηση της ανάλυσης δίνει αποτελέσματα που πλησιάζουν πιο πολύ το πραγματικό φαινόμενο. Έτσι είναι φανερό ότι ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ένας υπολογιστής, και ειδικά ένας οικιακός, για να ολοκληρώσει του υπολογισμούς μπορεί να φτάνει σε αρκετές μέρες.

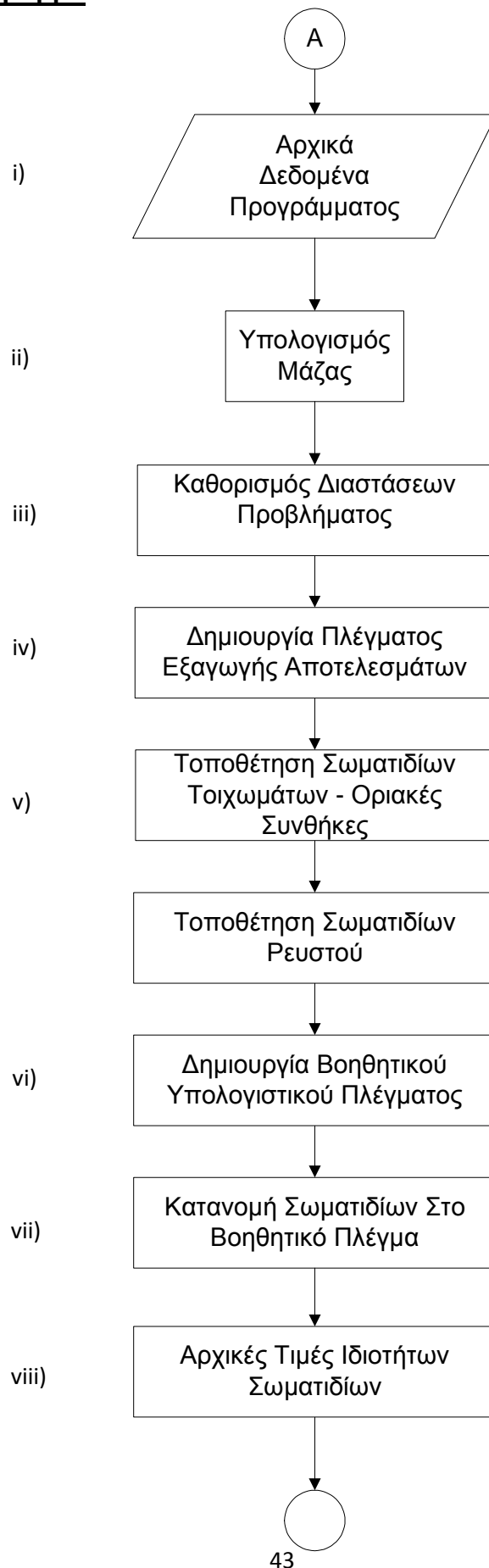
Για να επιτευχθεί σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου ο κώδικας τροποποιήθηκε έτσι ώστε να «τρέχει» σε παράλληλους επεξεργαστές. Με την παράλληλη επεξεργασία ο χρόνος μπορεί να γίνει περίπου

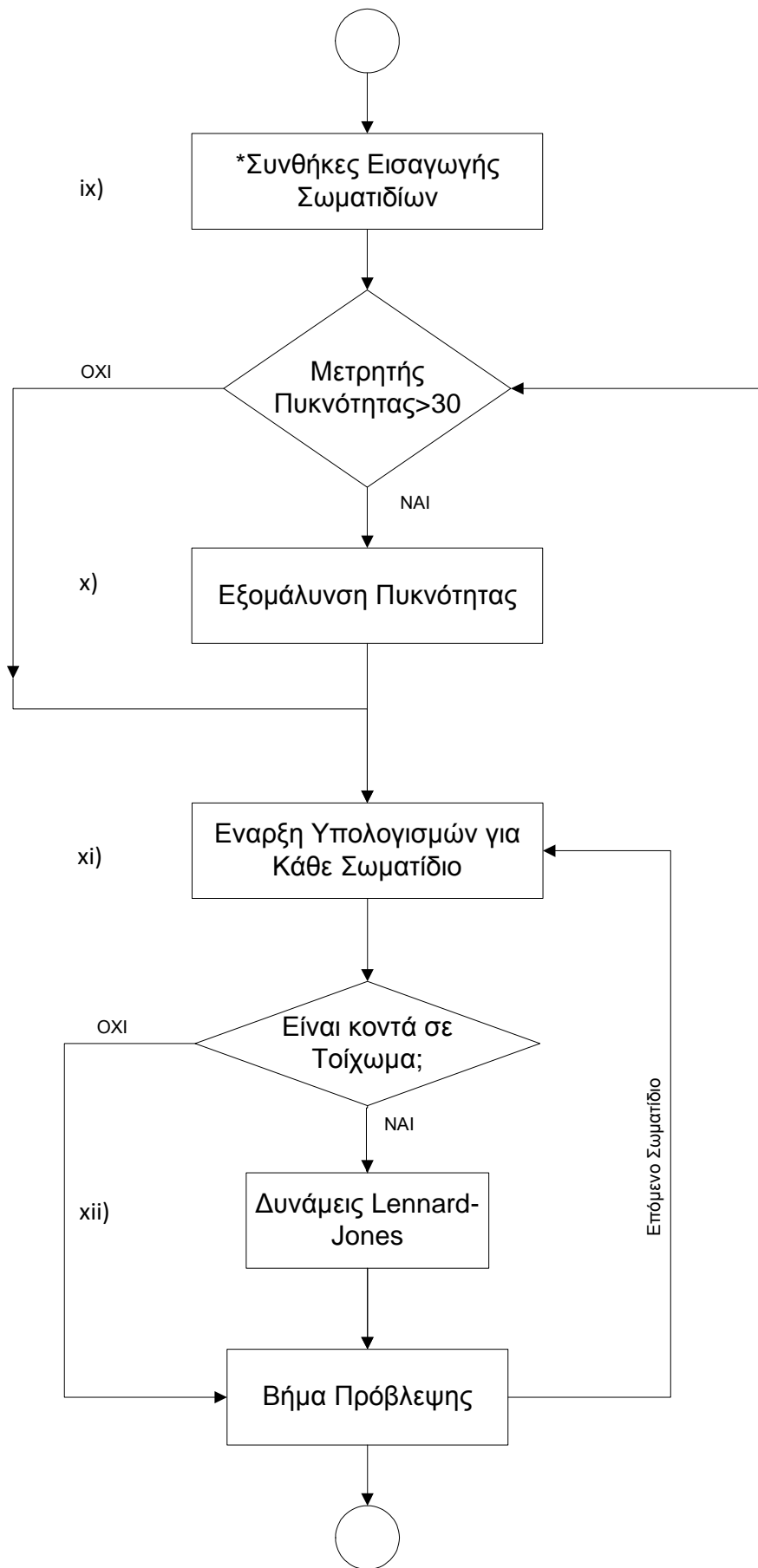
$$t_{tot,par} = \frac{t_{tot,ser}}{n} \quad (3.4)$$

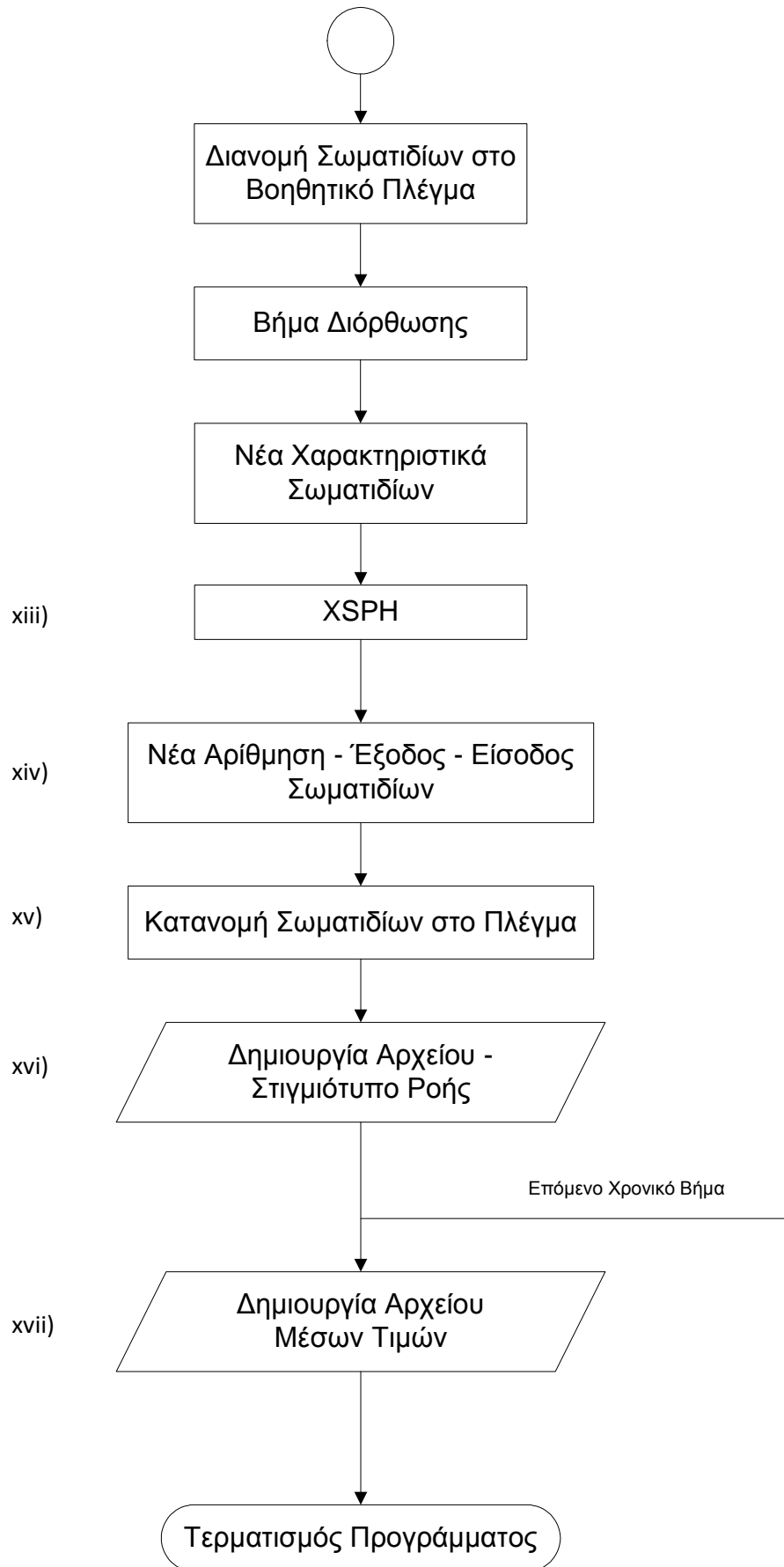
όπου $t_{tot,ser}$ ο συνολικός χρόνος υπολογισμού σειριακής επεξεργασίας και n ο αριθμός των παράλληλων επεξεργαστών. Για την παράλληλη επεξεργασία έγινε χρήση της μεθόδου OpenMP. Περισσότερες λεπτομέρειες για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο παράρτημα «Α».

Έτσι, κατόπιν της παρουσίασης ορισμένων βασικών χαρακτηριστικών του αλγορίθμου ακολουθεί το λογικό διάγραμμα και η αναλυτική περιγραφή του.

3.2 Λογικό Διάγραμμα







3.3 Ανάλυση του λογικού διαγράμματος

Για την καλύτερη ανάλυση του λογικού διαγράμματος δίπλα σε κάθε τμήμα του αλγορίθμου υπάρχει ένας αριθμός που αντιστοιχεί στις παρακάτω επεξηγήσεις.

i. Αρχικά δεδομένα προγράμματος.

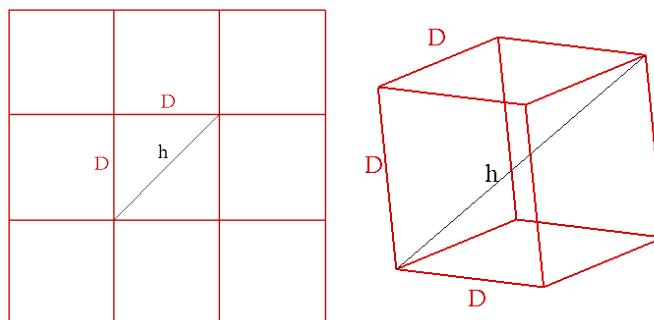
Καθορίζονται τα μεγέθη αναφοράς όπως η πυκνότητα ρ_0 και το κινηματικό ιξώδες ν του νερού, η αριθμητική ταχύτητα του ήχου c_0 , η αρχική ταχύτητα του νερού U_0 , το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης DT και κάποια γεωμετρικά δεδομένα του προβλήματος. Κατόπιν ζητείται από τον χρήστη να καθορίσει, με έμμεσο τρόπο, τον αριθμό των σωματιδίων, δηλαδή να ορίσει τον αριθμό των σωματιδίων για μία διάσταση, η οποία διαφοροποιείται για κάθε περίπτωση προβλήματος. Π.χ. στην περίπτωση της δέσμης νερού, ζητείται ο αριθμός N των σωματιδίων της ακτίνας της δέσμης νερού. Η ακτίνα r έχει καθορισμένο μήκος, οπότε καθορίζεται η αρχική απόσταση των σωματιδίων D η οποία είναι:

$$D = \frac{r}{N - 1} \quad (3.5)$$

Με αυτήν την απόσταση θα τοποθετηθούν τα σωματίδια στη δεδομένη γεωμετρία του χώρου, καθορίζοντας έτσι και τον αριθμό των σωματιδίων. Της το χαρακτηριστικό μήκος εξομάλυνσης της συνάρτησης πυρήνα h καθορίζεται από την απόσταση D . Η αρχική τοποθέτηση των σωματιδίων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν πλέγμα, έτσι στον δισδιάστατο κώδικα δημιουργούν τετράγωνα με πλευρά D και στον τρισδιάστατο κύβους με ακμή D . Επιλέγουμε το χαρακτηριστικό μήκος h να είναι ίσο με την μέγιστη απόσταση δυο σωματιδίων στο ίδιο τετράγωνο ή κύβο. Έτσι το h γίνεται

$$\begin{aligned} h &= D\sqrt{2} && \text{για 2 διαστάσεις} \\ h &= D\sqrt{3} && \text{για 3 διαστάσεις} \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα



Σχήμα 3.3.1. Επιλογή του χαρακτηριστικού μήκους h για 2 και 3 διαστάσεις

Κατόπιν γίνεται έλεγχος αν το χρονικό βήμα βρίσκεται κάτω από το μέγιστο, το οποίο δίνεται από τη σχέση 2.50:

$$DT_{max} = 0.4 \frac{h}{c_0} \quad (3.7)$$

και εμφανίζεται σχετικό μήνυμα στην οθόνη για τυχόν διόρθωση.

Μετά καθορίζεται κάθε πότε θα δημιουργείται αρχείο εξόδου, το οποίο θα δίνει το στιγμιότυπο της ροής, και ο αριθμός αυτών αρχείων.

Τέλος καθορίζονται οι χαρακτηριστικοί συντελεστές των δυνάμεων Lennard-Jones.

ii. Υπολογισμός μάζας

Κάνοντας χρήση της σχέσης (2.25) για τον υπολογισμό της πυκνότητας υπολογίζεται η μάζα των σωματιδίων.

$$m = \frac{\rho_i}{\sum W_{ij}} \quad (3.8)$$

Γίνεται η παραδοχή ότι η μάζα που προκύπτει είναι η ίδια για τα σωματίδια του νερού και για τα σωματίδια των τοιχωμάτων.

Η συνάρτηση εξομάλυνσης που χρησιμοποιείται έχει τη μορφή που ορίζεται από τους Violeu και Issa (2007):

$$W(q) = \frac{\alpha_d}{h^d} \begin{cases} \left(\frac{5}{2} - q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2} - q\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2} - q\right)^4 & \text{αν } 0 \leq q \leq 0.5 \\ \left(\frac{5}{2} - q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2} - q\right)^4 & \text{αν } 0.5 \leq q \leq 1.5 \\ \left(\frac{5}{2} - q\right)^4 & \text{αν } 1.5 \leq q \leq 2.5 \\ 0 & \text{αν } 2.5 \leq q \end{cases} \quad (3.9)$$

όπου το q ορίζεται ως ο λόγος $\frac{r_{ij}}{h}$ με r_{ij} την απόσταση δύο σωματιδίων, το d είναι η διάσταση του προβλήματος, το $\alpha_d = \frac{96}{1199}\pi$ για δύο διαστάσεις ($d=2$) και $\alpha_d = \frac{1}{20}\pi$ για τρεις διαστάσεις ($d=3$).

iii. Καθορισμός διαστάσεων προβλήματος.

Καθορίζονται τα όρια του προβλήματος, οι θέσεις και οι διαστάσεις των τοιχωμάτων και των ρευστών.

iv. Δημιουργία πλέγματος αποτελεσμάτων.

Επειδή χρειάζεται ο υπολογισμός κάποιων μέσων τιμών των χαρακτηριστικών του πεδίου ροής σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου του προβλήματος, δημιουργούνται ένα ή περισσότερα πλέγματα στα οποία αποθηκεύονται οι τιμές των ροικών μεγεθών και η επεξεργασία αυτών γίνεται στο τέλος του προγράμματος. Η θέση και η μορφή του πλέγματος διαφοροποιείται, ανάλογα με το πρόβλημα.

v. Τοποθέτηση σωματιδίων τοιχωμάτων και ρευστών.

Τοποθετούνται, βάση της αρχικής γεωμετρίας του προβλήματος, πρώτα τα σωματίδια των τοιχωμάτων και μετά τα σωματίδια του ρευστού και δίνεται σε κάθε ένα από αυτά ένας καθολικός αριθμός, δηλαδή μια ταυτότητα για την διαχείρισή τους. Αυτό γίνεται έτσι ώστε στα πρώτα νούμερα να υπάρχουν τα σωματίδια των τοιχωμάτων, ο αριθμός των οποίων δεν μεταβάλλεται, και στα τελευταία νούμερα να υπάρχουν τα σωματίδια του ρευστού, η θέση των οποίων μεταβάλλεται και σε πολλές περιπτώσεις εξέρχονται του υπολογιστικού χώρου. Επίσης επειδή εξετάζουμε την συμπεριφορά των σωματιδίων του ρευστού, η αναζήτησή του καθολικού αριθμού τους ξεκινά από εκεί που τελειώνουν οι αριθμοί των σωματιδίων των τοιχωμάτων.

vi. Δημιουργία υπολογιστικού πλέγματος

Δημιουργείται ένα βοηθητικό πλέγμα δύο ή τριών διαστάσεων, ανάλογα την περίπτωση, για την κατανομή των σωματιδίων μέσα σε αυτό. Το πλέγμα καταλαμβάνει όλον τον υπολογιστικό χώρο και παραμένει σταθερό σε όλη τη διάρκεια των υπολογισμών. Κάθε πλευρά και ακμή, στις δύο και τρεις διαστάσεις αντίστοιχα, έχει μήκος ίσο με την ακτίνα επιρροής του πυρήνα εξομάλυνσης, δηλαδή 2.5h. Έτσι για ένα σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται σε ένα κελί του πλέγματος, τα σωματίδια που το επηρεάζουν θα βρίσκονται αναγκαστικά στο κελί του και στα γειτονικά κελιά, δηλαδή στο δισδιάστατο πρόβλημα η αναζήτηση γίνεται σε 9 κελιά και στο τρισδιάστατο σε 27. Γι' αυτό οι πράξεις που γίνονται είναι ανάλογες του αριθμού των σωματιδίων N.

vii. Κατανομή σωματιδίων στο πλέγμα.

Κατανέμονται όλα τα σωματίδια στο βοηθητικό πλέγμα και για την εύρεση τους μέσα σε κάθε κελί, εκτός από τον καθολικό αριθμό, τους δίδεται και ένας τοπικός αριθμός κελιού. Έτσι δημιουργείται ένας πίνακας που περιέχει την θέση του κελιού, τον τοπικό και τον καθολικό αριθμό των σωματιδίων. Είναι ευνόητο ότι αυτή η κατανομή των σωματιδίων αλλάζει κάθε φορά που αλλάζουν θέση τα σωματίδια.

viii. Αρχικές τιμές ιδιοτήτων των σωματιδίων.

Μετά την τοποθέτηση και κατανομή των σωματιδίων στο υπολογιστικό πλέγμα, δίνονται σε αυτά οι αρχικές τιμές των ιδιοτήτων τους, δηλαδή της ταχύτητας για κάθε διάσταση, της πυκνότητας, της συνεκτικότητας και της πίεσης.

ix. *Συνθήκες εισαγωγής νέων σωματιδίων (για τη δέσμη ρευστού μόνο)

Καθορίζεται ο χρόνος εισόδου και η ταχύτητα εισόδου για κάθε νέο σωματίδιο που εισέρχεται στον υπολογιστικό χώρο, για κάθε διάσταση.

x. Εξομάλυνση πυκνότητας.

Για την ομαλοποίηση της ροής και την αποφυγή μεγάλων διακυμάνσεων της πυκνότητας με αποτέλεσμα μεγάλες διακυμάνσεις της πίεσης, όπως αναφέρθηκε και στο 2^ο κεφάλαιο, κάθε 30 χρονικά βήματα γίνεται εξομάλυνση της πυκνότητας με την εφαρμογή της σχέσης 2.57:

$$\rho_i = \sum m_j \frac{W_{ij} m_j}{\sum W_{ij} \rho_j} \quad (3.10)$$

και για την παρούσα περίπτωση, όπου όλα τα σωματίδια του ρευστού έχουν την ίδια μάζα η παραπάνω σχέση 3.10 γίνεται

$$\rho_i = \frac{\sum \rho_j W_{ij}}{\sum W_{ij}} \quad (3.11)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι στην εξομάλυνση της πυκνότητας συνεισφέρουν μόνο τα σωματίδια του ρευστού.

xi. Έναρξη υπολογισμών για κάθε σωματίδιο

Σε αυτή τη φάση γίνονται οι υπολογισμοί για κάθε σωματίδιο. Υπολογίζεται ο ρυθμός μεταβολής των συνιστωσών της ταχύτητας και η μεταβολή της πυκνότητας με την χρήση των παρακάτω σχέσεων:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= - \sum_j m_j \left[\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} - (\Pi_{ij})_x \right] \\ \frac{dv}{dt} &= - \sum_j m_j \left[\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_j} - (\Pi_{ij})_y \right] \\ \frac{dw}{dt} &= - \sum_j m_j \left[\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_j} - (\Pi_{ij})_z \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

και

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_j m_j \left(u_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} + v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} + w_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial z} \right) \quad (3.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} u_{ij} &= u_i - u_j, & v_{ij} &= v_i - v_j, & w_{ij} &= w_i - w_j \\ \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} &= \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j}, & \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} &= \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_j}, & \frac{\partial W_{ij}}{\partial z} &= \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial z_j} \end{aligned}$$

με την απόσταση των σωματιδίων να ορίζεται ως

$$r_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2} \quad (3.14)$$

και την παράγωγο της συνάρτησης εξομάλυνσης W ως προς την απόσταση r_{ij} να δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dW(q)}{dr} = -\frac{a_d}{h^{d+1}} \begin{cases} 4\left(\frac{5}{2}-q\right)^3 - 20\left(\frac{3}{2}-q\right)^3 + 40\left(\frac{1}{2}-q\right)^3 & \text{αν } 0 \leq q \leq 0.5 \\ 4\left(\frac{5}{2}-q\right)^3 - 20\left(\frac{3}{2}-q\right)^3 & \text{αν } 0.5 \leq q \leq 1.5 \\ 4\left(\frac{5}{2}-q\right)^3 & \text{αν } 1.5 \leq q \leq 2.5 \\ 0 & \text{αν } 2.5 \leq q \end{cases} \quad (3.15)$$

όπου $q = \frac{r_{ij}}{h}$.

Ο όρος συνεκτικότητας Π_{ij} δίνεται από τη σχέση 2.46 η οποία προτείνεται από τον Monaghan (1992) :

$$(\Pi_{ij})_x = 8 \frac{v_i + v_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{u_{ij} x_{ij}}{x_{ij}^2} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

για τον άξονα x και με τις αντίστοιχες μετατροπές για τις άλλες 2 διαστάσεις.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει η παρουσίαση του σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης που αναφέρθηκε παραπάνω. Αφού έχουν υπολογιστεί οι κλίσεις της ταχύτητας και της πυκνότητας γίνεται μια πρόβλεψη της νέας ταχύτητας:

$$u_p = u + du$$

$$v_p = v + dv$$

$$w = w + dw$$

της νέας πυκνότητας:

$$\rho_p = \rho + d\rho$$

και βάσει αυτής η πρόβλεψη της νέας πίεσης:

$$p_p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho_p}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (3.17)$$

Έτσι γίνεται η πρόβλεψη της νέας θέσης των σωματιδίων:

$$\begin{aligned} x_p &= x + \frac{1}{2}(u + u_p)DT \\ y_p &= y + \frac{1}{2}(v + v_p)DT \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$z_p = z + \frac{1}{2}(w + w_p)DT$$

Με τις νέες θέσεις, ταχύτητες και πυκνότητες γίνεται πρόβλεψη του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας du_p , dv_p , dw_p , και της πυκνότητας $d\rho_p$ με τη βοήθεια μίας υπορουτίνας, αφού βέβαια έχει γίνει ανακατανομή των σωματιδίων στο πλέγμα βάση την προβλεπόμενη θέση.

Έτσι η διορθωμένη ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} u_c &= u + \frac{1}{2}(du + du_p)DT \\ v_c &= v + \frac{1}{2}(dv + dv_p)DT \\ w_c &= w + \frac{1}{2}(dw + dw_p)DT \end{aligned} \quad (3.19)$$

η νέα θέση των σωματιδίων γίνεται:

$$\begin{aligned} x_c &= x + \frac{1}{2}(u + u_c)DT \\ y_c &= y + \frac{1}{2}(v + v_c)DT \\ z_c &= z + \frac{1}{2}(w + w_c)DT \end{aligned} \quad (3.20)$$

η νέα πυκνότητα θα είναι:

$$\rho_c = \rho + \frac{1}{2}(d\rho + d\rho_p)DT \quad (3.21)$$

και νέα πίεση:

$$p_c = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (3.22)$$

xii. Δυνάμεις Lennard-Jones

Κατά τη φάση υπολογισμού της επιτάχυνσης των σωματιδίων γίνεται έλεγχος αν το κάθε σωματίδιο του ρευστού πλησιάζει σε τοίχωμα. Για την αποφυγή εισχώρησης σωματιδίων σε τοίχο, και ιδιαίτερα στο τρισδιάστατο πρόβλημα που η «ανωμαλία» αυτή εμφανίζεται πιο συχνά, εφαρμόζονται οι δυνάμεις Lennard-Jones 12-6, οι οποίες είναι απωστικές. Έχουν τη μορφή (2.54):

$$F(r) = D \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (3.23)$$

όπου r η κάθετη απόσταση από το τοίχωμα και r_0 η μέγιστη απόσταση που εφαρμόζονται οι δυνάμεις. Η $F(r)$ έχει μονάδες επιτάχυνσης και προστίθεται με το ανάλογο πρόσημο στην σχέση της κλίσης της ταχύτητας, ανάλογα βέβαια με τη γεωμετρία του τοιχώματος και με τέτοιο τρόπο ώστε η δύναμη να είναι κάθετη της επιφάνειας. Οι δυνάμεις αυτές υπολογίζονται και στο βήμα της διόρθωσης.

xiii. Εφαρμογή μεθόδου XSPH.

Αφού έχουν υπολογιστεί οι νέες ταχύτητες και οι νέες θέσεις των σωματιδίων, γίνεται η διόρθωση των θέσεων με τη μέθοδο XSPH που αναφέρεται στην παράγραφο 2.2.8 με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}x &= x_c - 0.3 \sum \frac{m}{\rho_c} u_{ij} W_{ij} DT \\y &= y_c - 0.3 \sum \frac{m}{\rho_c} v_{ij} W_{ij} DT \\z &= z_c - 0.3 \sum \frac{m}{\rho_c} w_{ij} W_{ij} DT\end{aligned}\tag{3.24}$$

Η αναζήτηση των γειτονικών σωματιδίων γίνεται με βάση τη θέση που έχουν στη αρχή του χρονικού βήματος και όχι τη θέση που υπολογίστηκε με τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης, δηλαδή στη μέθοδο XSPH συνεισφέρουν τα παλιά γειτονικά σωματίδια και όχι τα νέα. Αυτό συνεπάγεται την ανακατανομή των σωματιδίων στο πλέγμα, σύμφωνα με την αρχική τους θέση.

xiv. Έξοδος-Είσοδος σωματιδίων. Νέα αρίθμηση.

Γίνεται έλεγχος για το ποια σωματίδια εξέρχονται του υπολογιστικού χώρου και διαγράφονται. Κατόπιν γίνεται νέα αρίθμηση των εναπομεινάντων σωματιδίων, ώστε να μην υπάρχει ενδιάμεσος αριθμός που να μην αντιστοιχεί σε κάποιο σωματίδιο. Τέλος στην περίπτωση της δέσμης ρευστού γίνεται η εισαγωγή των σωματιδίων, αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του βήματος ix.

xv. Ανακατανομή σωματιδίων στο πλέγμα

Αφού υπολογίστηκε η νέα θέση των σωματιδίων και έγινε η νέα αρίθμηση και η εισαγωγή νέων σωματιδίων, γίνεται η κατανομή των σωματιδίων στο βοηθητικό πλέγμα για το επόμενο χρονικό βήμα.

xvi. Δημιουργία αρχείου εξόδου-στιγμιότυπου.

Σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, δημιουργείται ένα αρχείο στο οποίο καταγράφονται οι συντεταγμένες, οι ταχύτητες, οι πυκνότητες και οι πιέσεις όλων των σωματιδίων. Έτσι με τη χρήση του προγράμματος Tecplot ή άλλου σχεδιαστικού

προγράμματος, είναι δυνατή η απεικόνιση της ροής τη δεδομένη χρονική στιγμή, αλλά και ολόκληρη η εξέλιξή της με τη δημιουργία animation (κινούμενης εικόνας).

xvii. Δημιουργία αρχείων τελικών αποτελεσμάτων.

Τα αρχεία αυτά δημιουργούνται στο τέλος του αλγορίθμου και περιέχουν μέσες τιμές (χρονικά) σε διάφορα σημεία του ροϊκού πεδίου, π.χ. όταν η ροή γίνεται μόνιμη στην περίπτωση της δέσμης, η πίεση που δέχεται η πλάκα είναι σταθερή και υπολογίζεται λαμβάνοντας τις μέσες τιμές της πίεσης των σωματιδίων που βρίσκονται κοντά της, εξομαλύνοντας έτσι αφύσικες διακυμάνσεις που μπορεί να παρουσιαστούν.

Στο Παράρτημα «Β» υπάρχουν τμήματα του κώδικα για την περίπτωση τρισδιάστατης προσομοίωσης δέσμης νερού που προσπίπτει πάνω σε επίπεδη επιφάνεια.

Στο Παράρτημα «Γ» βρίσκεται η λίστα των μεταβλητών του κώδικα.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή του αλγορίθμου – Αποτελέσματα

Η εφαρμογή του αλγορίθμου γίνεται για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις ελέγχου, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις για κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του κώδικα, συγκρίνονται με δεδομένα που έχουν προκύψει από εκτέλεση πειραμάτων σε πραγματικές συνθήκες, για τον ποιοτικό και ποσοτικό έλεγχο του αλγορίθμου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για την περαιτέρω βελτιστοποίηση του κώδικα.

Οι τέσσερις περιπτώσεις που θα εξεταστούν είναι οι εξής:

- Πρόσκρουση δέσμης ρευστού σε πλάκα (3d κώδικας)
- Κατάρρευση στήλης νερού (2d και 3d κώδικας)
- Κατάρρευση δεξαμενής νερού και πρόσκρουση σε εμπόδιο (2d και 3d κώδικας)
- Δημιουργία κυμάτων από ολίσθηση σφήνας σε πλαγιά – κινούμενο όριο (2d κώδικας)

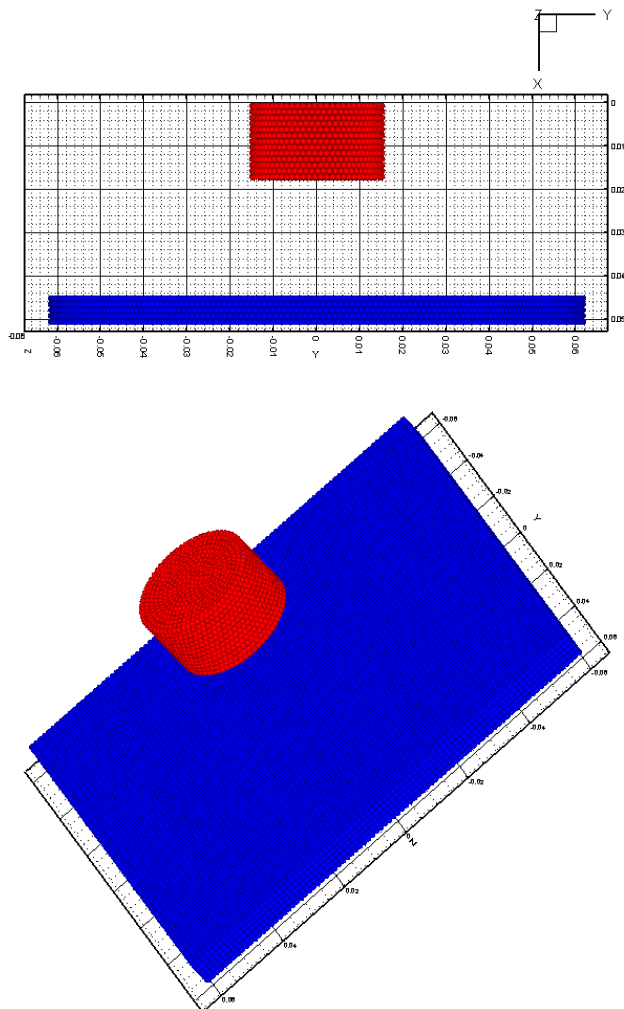
Στις περιπτώσεις κατάρρευσης στήλης νερού εφαρμόζεται κώδικας 2 και 3 διαστάσεων. Επειδή ο τριών διαστάσεων κώδικας είναι εξαιρετικά χρονοβόρος για μεγάλο αριθμό σωματιδίων, δημιουργήθηκε και ο δισδιάστατος κώδικας για την σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα αλλά και με τον 3d.

4.1 Εφαρμογή 1: Πρόσκρουση δέσμης ρευστού σε πλάκα (Jet).

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζεται η περίπτωση πρόσκρουσης δέσμης νερού πάνω σε επίπεδη ακίνητη πλάκα για διάφορες γωνίες πρόσκρουσης. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης με τη μέθοδο SPH θα συγκριθούν με τα αποτελέσματα του πειράματος της Kvicinsky (2002) οπότε οι αρχικές συνθήκες και οι διαστάσεις της διάταξης του υπολογιστικού χώρου θα είναι οι ίδιες με τις διαστάσεις του πειράματος.

Διαστάσεις της διάταξης και αρχικές συνθήκες.

Η δέσμη του νερού έχει διάμετρο 0.03m και η πλάκα στη οποία προσκρούει είναι τετράγωνη με πλευρά 0.062m όπως φαίνεται στο σχήμα (4.1.1). Γίνεται επιλογή τετραγωνικής πλάκας και όχι δίσκου, για να έχουν τα σωματίδια της πλάκας σταθερή απόσταση μεταξύ τους D .



Σχήμα 4.1.1 Διαστάσεις και διάταξη της δέσμης νερού και της πλάκας

Η αρχική ταχύτητα της δέσμης και ταχύτητα αναφοράς είναι ίση με 19.8 m/s. Γίνεται η παραδοχή ότι όλα τα σωματίδια έχουν την ίδια αρχική ταχύτητα (ομοιόμορφο

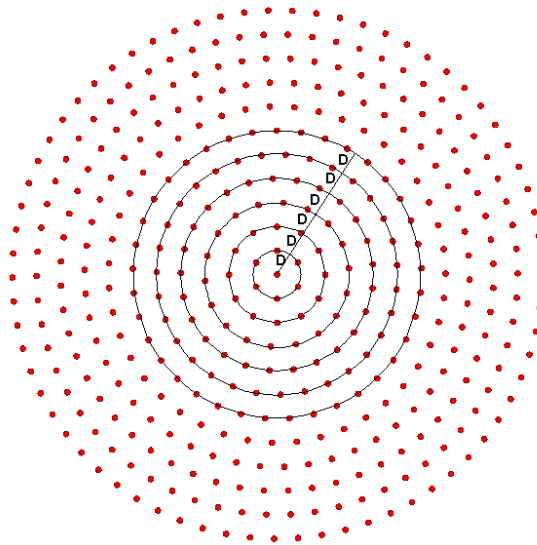
προφίλ). Η πυκνότητα αναφοράς του νερού είναι ίση με 1000 kg/m^3 και η κινηματική συνεκτικότητα είναι $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Αρχική θέση σωματιδίων

Τα σωματίδια του νερού τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η ακτίνα της δέσμης να είναι $r=0.015\text{m}$. Έτσι η αρχική απόσταση D των σωματιδίων εξαρτάται από τον αριθμό N των σωματιδίων στην ακτίνα, ο οποίος θα είναι και το σημείο αναφοράς της χωρικής διακριτοποίησης (ανάλυσης) του προβλήματος. Η απόσταση D δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{r}{N - 1}$$

Τα σωματίδια σχηματίζουν N ομόκεντρους δακτυλίους με ακτινική απόσταση μεταξύ τους D . Στο σχήμα 4.1.2 ο αριθμός σωματιδίων ακτίνας είναι $N=12$ και η απόσταση των δακτυλίων είναι $D=0.00136\text{m}$.



Σχήμα 4.1.2. Τοποθέτηση των δακτυλίων του νερού όπου D είναι η ακτινική τους απόσταση.

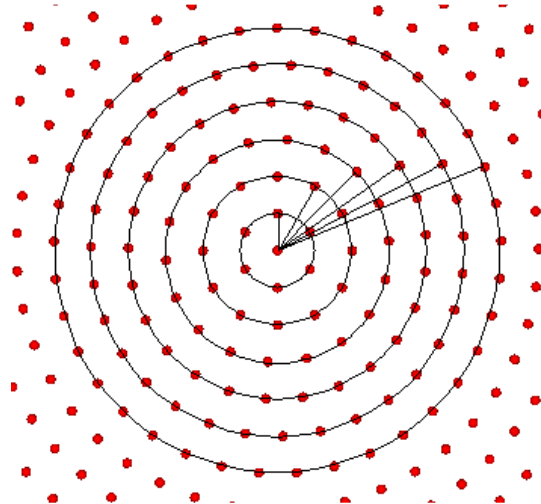
Η κατανομή των σωματιδίων κατά μήκος ενός δακτυλίου με ακτίνα r_i γίνεται ως εξής: βρίσκεται πρώτα ο αριθμός των σωματιδίων του δακτυλίου m από την ακέραια τιμή της σχέσης

$$m = \frac{2\pi r_i}{D}$$

και μετά υπολογίζεται η γωνιακή απόσταση των σωματιδίων

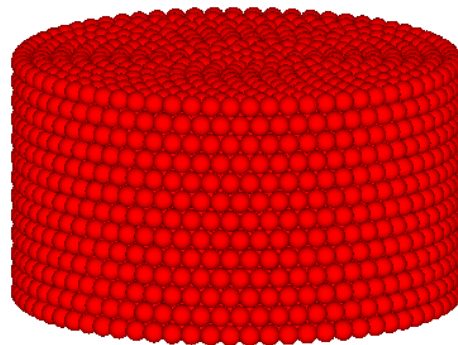
$$\varphi_i = \frac{2\pi r_i}{m}$$

Για την αποφυγή αυξημένων συγκεντρώσεων σωματιδίων του ρευστού σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις πάνω στην πλάκα, ο κάθε δακτύλιος περιστρέφεται κατά γωνία η οποία ισούται με το άθροισμα της μισής γωνιακής απόστασης του προηγούμενου εσωτερικού δακτυλίου με τη γωνία περιστροφής του ίδιου δακτυλίου (σχήμα 4.1.3).



Σχήμα 4.1.3. Περιστροφή δακτυλίων του νερού. Κάθε δακτύλιος ξεκινά τη συμπλήρωσή του από την διχοτόμο δύο σωματιδίων του προηγούμενου δακτυλίου.

Τέλος περιστροφή γίνεται και ανά δύο διατομές όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.4



Σχήμα 4.1.4. Περιστροφή διατομών. Κάθε διατομή περιστρέφεται κατά μισή γωνία του εξωτερικού δακτυλίου της προηγούμενης διατομής.

Τα σωματίδια της πλάκας δημιουργούν πλέγμα με σωματιδιακή απόσταση D . Το πάχος της πλάκας είναι $4D$ δηλαδή 5 σωματίδια. Έτσι αφού η ακτίνα επίδρασης του πυρήνα είναι $2.5h$ και στο τρισδιάστατο πρόβλημα είναι $h=D\sqrt{3}$, η ακτίνα επίδρασης γίνεται $4.33D$. Αν λάβουμε υπ' όψιν μας την επίδραση των δυνάμεων Lennard-Jones, η ελάχιστη απόσταση ενός σωματιδίου από το πέμπτο σωματίδιο της πλάκας (σε βάθος) είναι τουλάχιστον περίπου $4.35D$. Συνεπώς είναι περιττό να τοποθετηθεί και έκτη σειρά σωματιδίων στο πάχος της πλάκας.

Ανεξαρτησία αριθμού σωματιδίων

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των σωματιδίων, τόσο μειώνεται το χαρακτηριστικό μήκος h του προσεγγιστικού πυρήνα και έτσι όλο και περισσότερο πλησιάζει η συνάρτηση εξομάλυνσης W την συνάρτηση δ -Dirac. Δηλαδή όσο πληθαίνουν τα σωματίδια τόσο η προσομοίωση πλησιάζει την πραγματικότητα. Όμως επειδή αύξηση της ανάλυσης συνεπάγεται αύξηση του υπολογιστικού χρόνου, εξετάζεται από ποιο αριθμό σωματιδίων και μετά τα αποτελέσματα δεν μεταβάλλονται αισθητά. Έτσι γίνεται εκτέλεση του αλγορίθμου για 4, 6, 8, 10 και 12 σωματίδια ανά ακτίνα και συγκρίνονται τα αποτελέσματα της κατανομής της πίεσης στην πλάκα.

Η συνολική διάρκεια του φαινομένου είναι $8.9 \cdot 10^{-3}$ s, το χρονικό βήμα είναι $2 \cdot 10^{-6}$ s και δημιουργείται αρχείο εξόδου κάθε 10^{-4} s. Το «τρέξιμο» του κώδικα έγινε σε 8 παράλληλους επεξεργαστές ταχύτητας 2 GHz ο καθένας. Στον πίνακα που ακολουθεί υπάρχουν τα χαρακτηριστικά για κάθε ανάλυση, δηλαδή ο αριθμός σωματιδίων ανά ακτίνα, ο αριθμός σωματιδίων του ρευστού στην μόνιμη ροή, ο αριθμός σωματιδίων της πλάκας, ο συνολικός αριθμός σωματιδίων, η αρχική απόσταση των σωματιδίων D και ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του κώδικα για την δημιουργία 89 αρχείων εξόδου.

Ανάλυση (σωματίδια)	Σωματίδια Ρευστού	Σωματίδια Πλάκας	Συνολικά Σωματίδια	Απόσταση D (10^{-3} m)	Χρόνος (min)
4	747	2830	3577	5.000	3
6	2848	7205	10053	3.000	13
8	8173	16245	24418	2.143	35
10	16962	26645	43607	1.667	80
12	30764	39605	70369	1.364	149

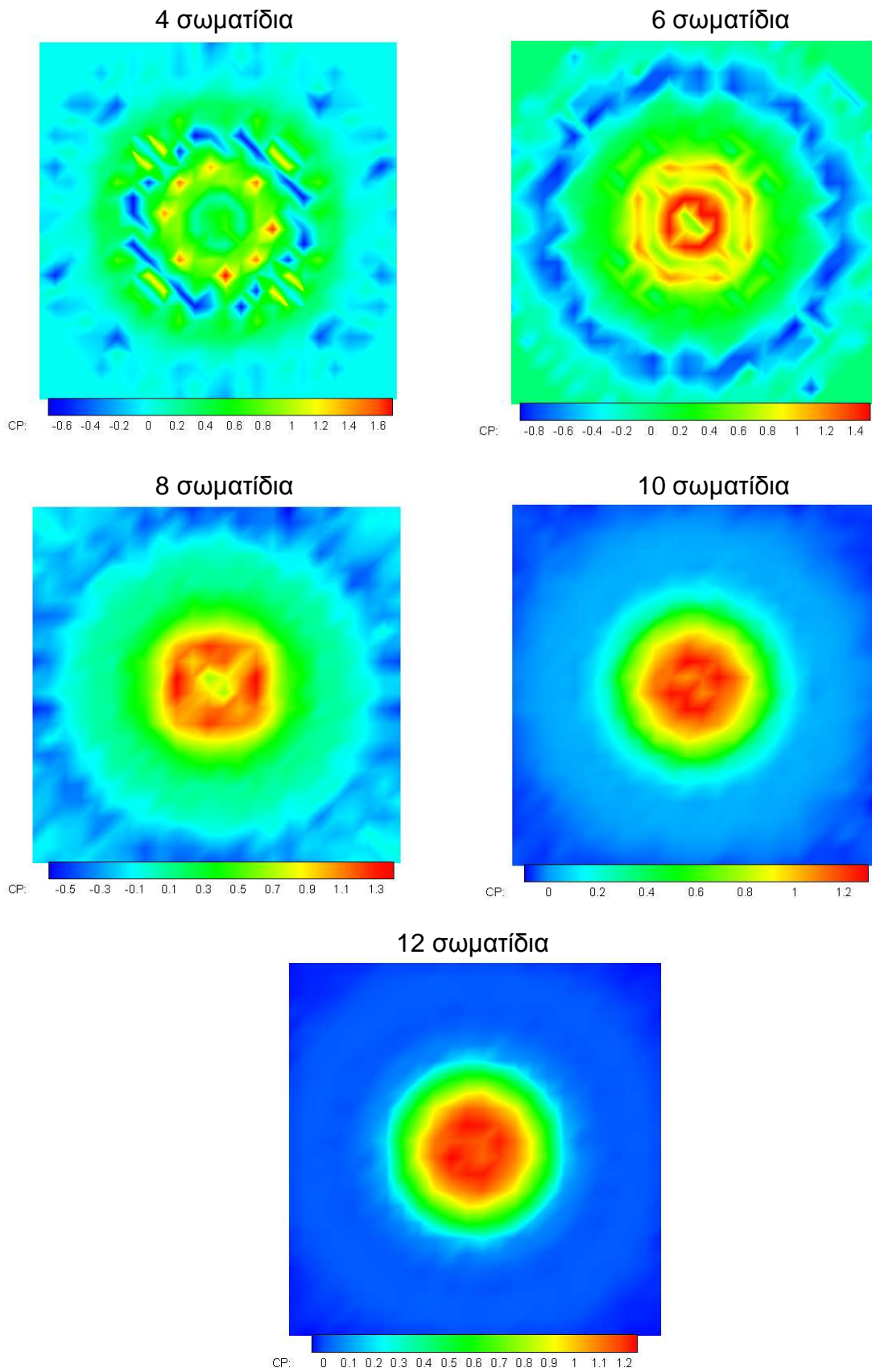
Αξίζει να τονιστεί ότι επειδή ο χρόνος υπολογισμού είναι ανάλογος με τον αριθμό των σωματιδίων N , αυξάνεται σημαντικά με την αύξηση της ανάλυσης και αν ο κώδικας εκτελεστεί σε σειριακό υπολογιστή, οι χρόνοι πολλαπλασιάζονται με το 8 περίπου.

Κατανομή πίεσης πάνω στην πλάκα.

Η πίεση είναι αδιαστατοποιημένη με την μορφή του συντελεστή πίεσης

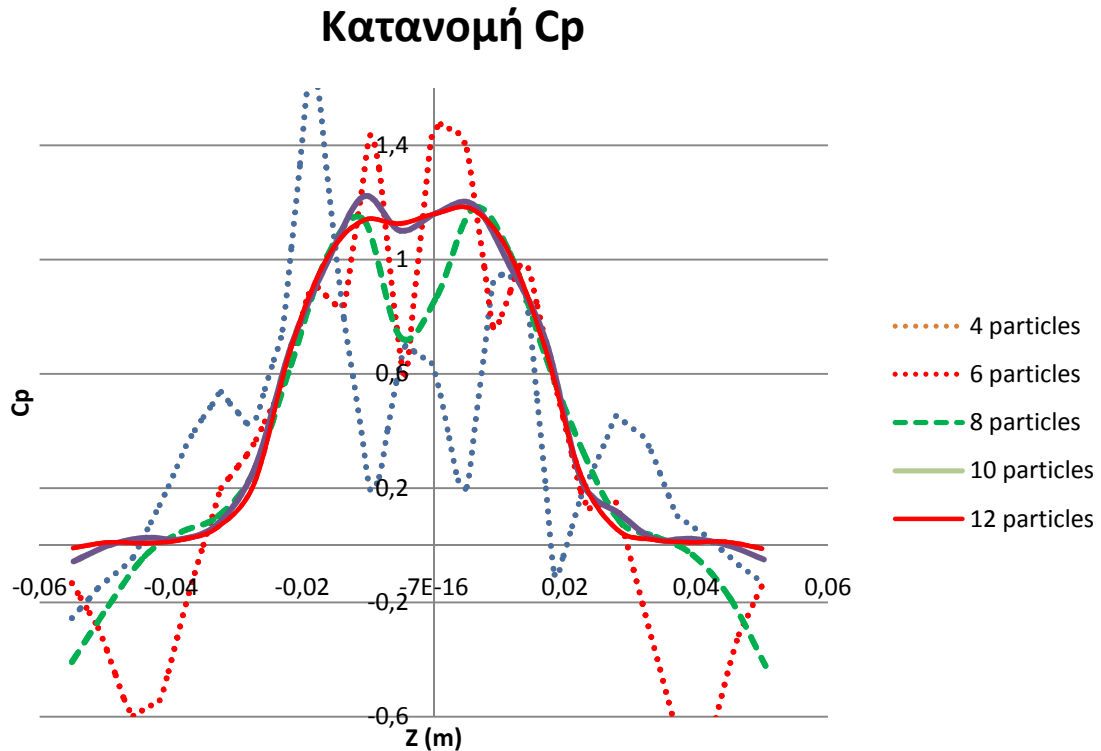
$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2}$$

Έχουμε για κάθε περίπτωση τα παρακάτω αποτελέσματα (σχ.4.1.5):



Σχήμα 4.1.5. Κατανομή του c_p στην πλάκα για 4,6,8,10 και 12 σωματίδια.

Παρατηρούμε, ποιοτικά, ότι η κατανομή του c_p στην πλάκα για 10 και 12 σωματίδια είναι παρόμοια, ενώ για λιγότερα σωματίδια, και ειδικά για 4, υπάρχει ανομοιομορφία. Εξετάζοντας ποσοτικά την κατανομή c_p κατά μήκος του άξονα z και για $y=0$ και $x=0$ έχουμε το διάγραμμα του σχήματος 4.1.6.



Σχήμα 4.1.6. Κατανομή του c_p για διαφόρους αριθμούς σωματιδίων

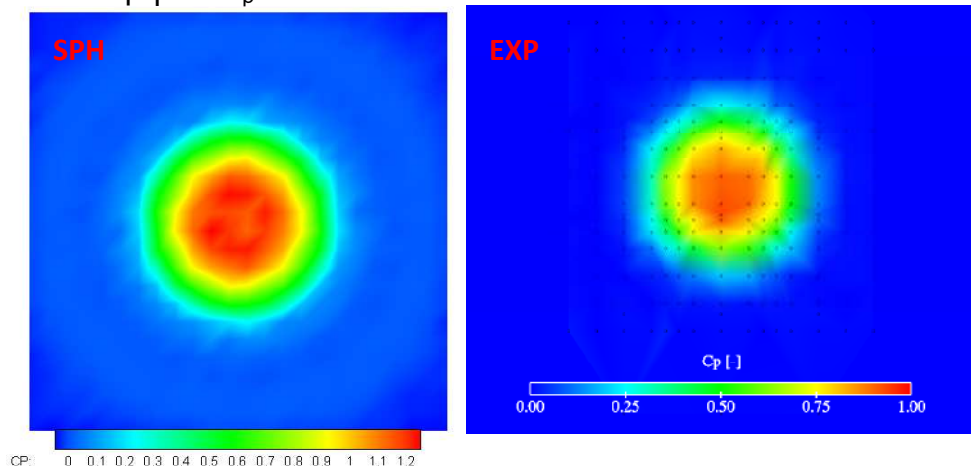
Παρατηρούμε πάλι ότι για 10 και 12 σωματίδια οι γραμμές συμπίπτουν, ενώ για λιγότερα σωματίδια έχουμε μεγάλες διακυμάνσεις του c_p και με αφύσικες τιμές. Πρέπει να σημειωθεί ότι παρόλο που αυξάνεται ο αριθμός των σωματιδίων, η ανώτερη τιμή του c_p είναι περίπου 1.2 και δεν πλησιάζει τη μονάδα. Αυτό διαπιστώνεται και από την σύγκριση μεταξύ των 10 και 12 σωματιδίων.

Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα.

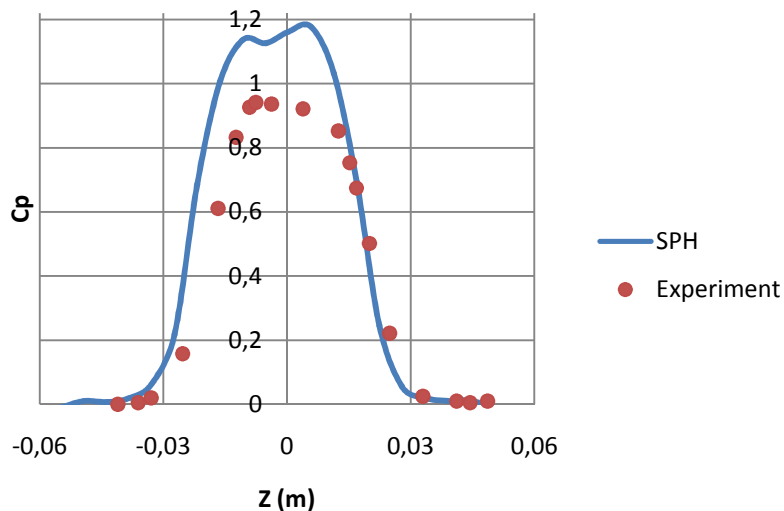
Για την σύγκριση της προσομοίωσης με το πραγματικό φαινόμενο έχουμε στη διάθεσή μας πειραματικά δεδομένα από την εργασία της Kvicinsky τα οποία περιλαμβάνουν την κατανομή της πίεσης πάνω στην πλάκα και το προφίλ της δέσμης στη μόνιμη ροή για γωνία πρόσπτωσης 0° , 30° και 60° .

Έτσι για γωνία 0° :

Η κατανομή του c_p είναι:



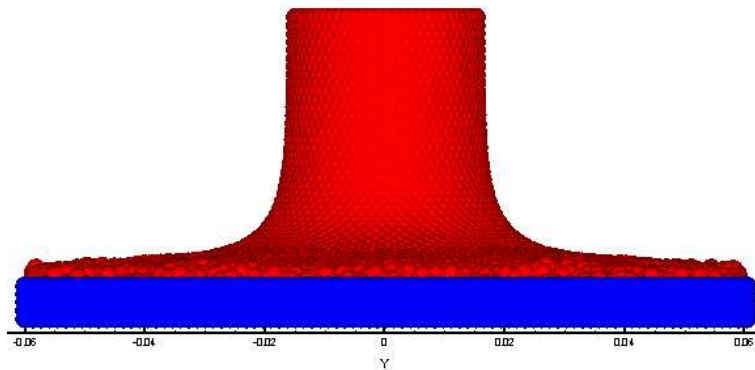
Σχήμα 4.1.7 Ισοσταθμική παρουσίαση της κατανομής του c_p για γωνία πρόσπτωσης 0° . Στην αριστερή εικόνα το αποτέλεσμα του SPH και στη δεξιά του πειράματος.



Σχήμα 4.1.8 Σύγκριση της κατανομής της πίεσης πάνω στην πλάκα.

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα του SPH έχουν τη ίδια μορφή με τα αποτελέσματα του πειράματος εκτός από την περιοχή γύρω από το $z=0$ όπου γίνεται ένα μικρό βύθισμα της καμπύλης. Επίσης η μέγιστη τιμή του c_p είναι 1.2. Η διακύμανση της καμπύλης εξομαλύνεται.

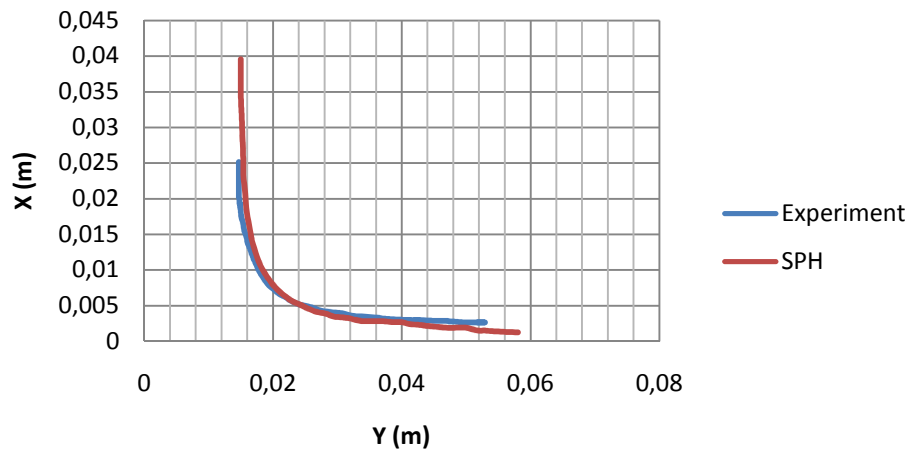
Το προφίλ της δέσμης δίνεται στο σχήμα 4.1.9.



Σχήμα 4.1.9 Το προφίλ της δέσμης στην μόνιμη ροή.

Η σύγκριση με το πείραμα δίνεται στο σχήμα 4.1.10.

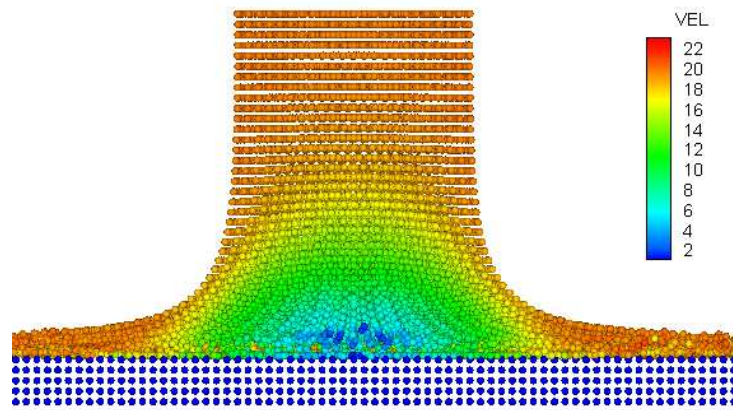
Προφίλ Δέσμης



Σχήμα 4.1.10. Σύγκριση του προφίλ της δέσμης.

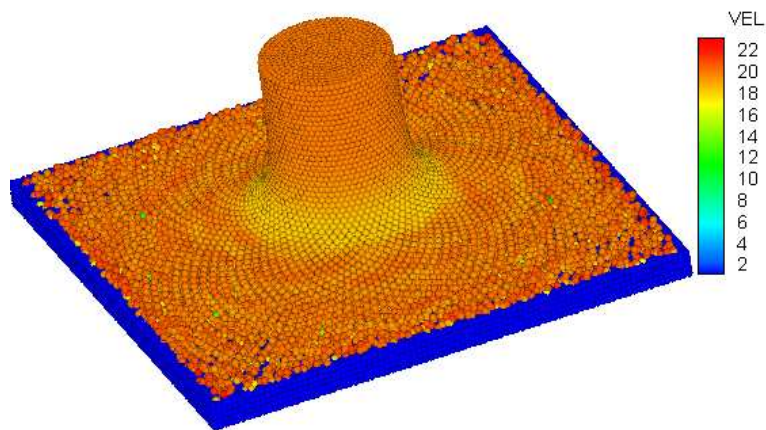
Παρατηρούμε ότι τα δύο προφίλ της δέσμης συμπίπτουν.

Αν γίνει αξονική τομή της δέσμης μπορούμε να παρατηρήσουμε την κατανομή της ταχύτητας (σχήμα 4.1.11). Βλέπουμε ότι η ταχύτητα των σωματιδίων μειώνεται κοντά στον άξονα της δέσμης και στην περιοχή κοντά στην πλάκα, γεγονός που είναι αναμενόμενο.



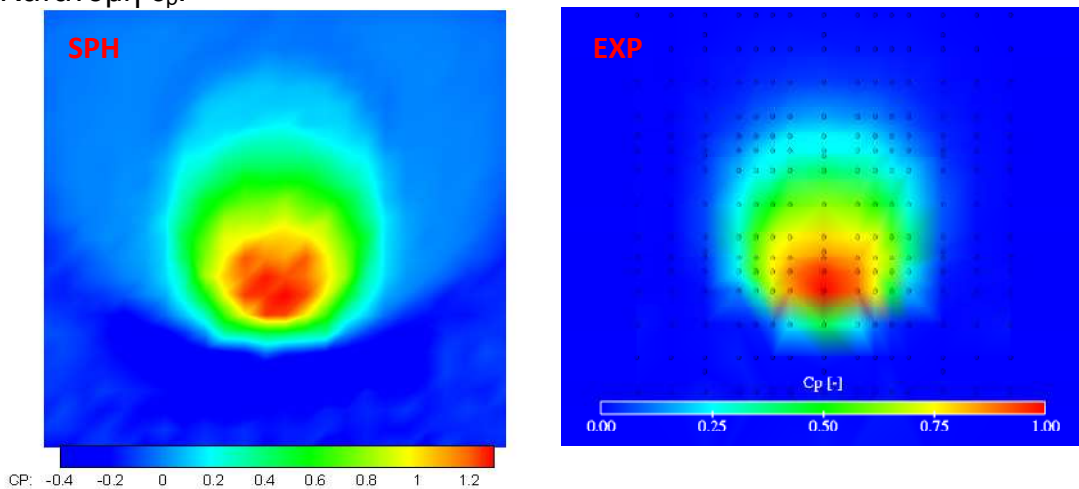
Σχήμα 4.1.11 Αξονική τομή της δέσμης στη μόνιμη ροή.

Στο παρακάτω σχήμα 4.1.12 φαίνεται η κατανομή της ταχύτητας και η θέση των σωματιδίων της δέσμης από ένα γενικότερο πλάνο.



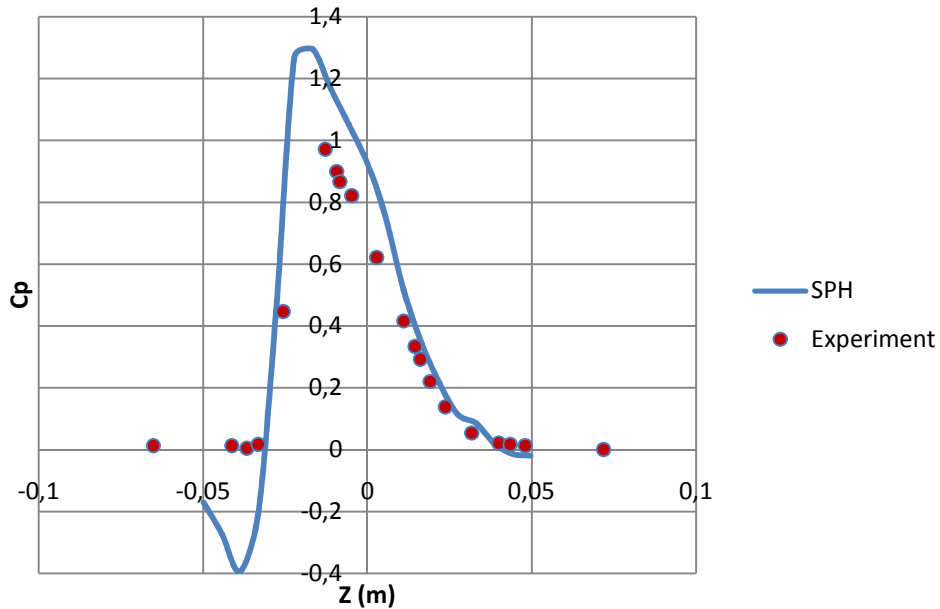
Σχήμα 4.1.12 Θέση και ταχύτητα σωματιδίων του ρευστού στη μόνιμη ροή.

Για γωνία πρόσπτωσης 30° έχουμε
Κατανομή c_p :



Σχήμα 4.1.13 Ισοσταθμική παρουσίαση της κατανομής του c_p για γωνία πρόσπτωσης 30° . Στην αριστερή εικόνα το αποτέλεσμα του SPH και στη δεξιά του πειράματος.

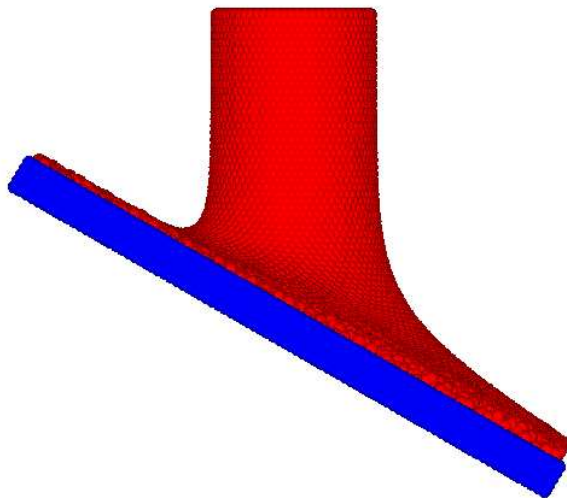
Από την ποιοτική σύγκριση των δύο εικόνων του σχήματος 4.1.13 παρατηρούμε ότι η κατανομή της πίεσης που υπολογίστηκε έχει την ίδια μορφή με την κατανομή του πειράματος.



Σχήμα 4.1.14 Σύγκριση της κατανομής της πίεσης πάνω στην πλάκα

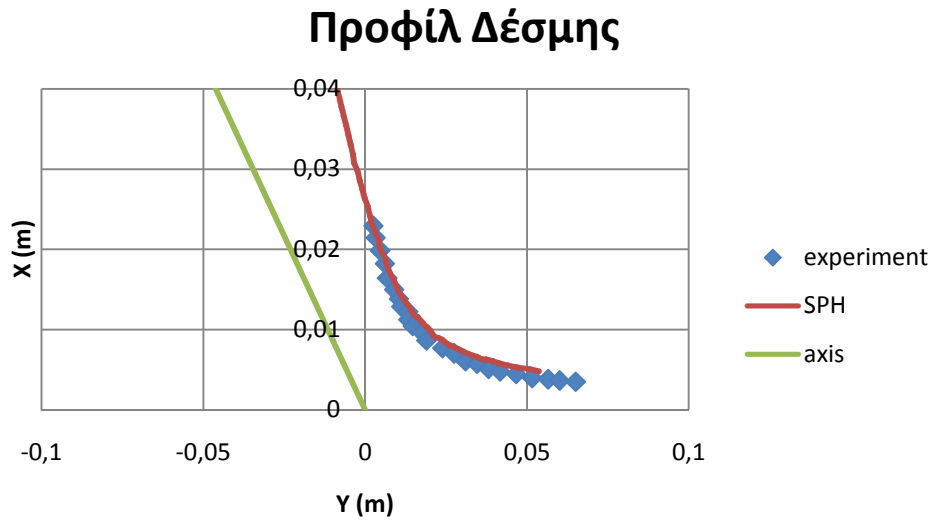
Από την σύγκριση των διαγραμμάτων του σχήματος 4.1.14 παρατηρούμε ότι τα γραφήματα σχεδόν συμπίπτουν, εκτός από την περιοχή γύρω από το $z=-0.03$, όπου το c_p που υπολογίστηκε φτάνει μέχρι το -0.4 . Επίσης η μέγιστη τιμή του c_p που δίνεται από το SPH, είναι 1.3 . Αυτές οι δύο αποκλίσεις από τα πειραματικά αποτελέσματα οφείλονται στον σχετικά μικρό αριθμό των σωματιδίων.

Το προφίλ της δέσμης, όπως δίνεται από το πρόγραμμα Tecplot φαίνεται στο σχήμα 4.1.15.



Σχήμα 4.1.15 Το προφίλ της δέσμης στην μόνιμη ροή για γωνία 30° .

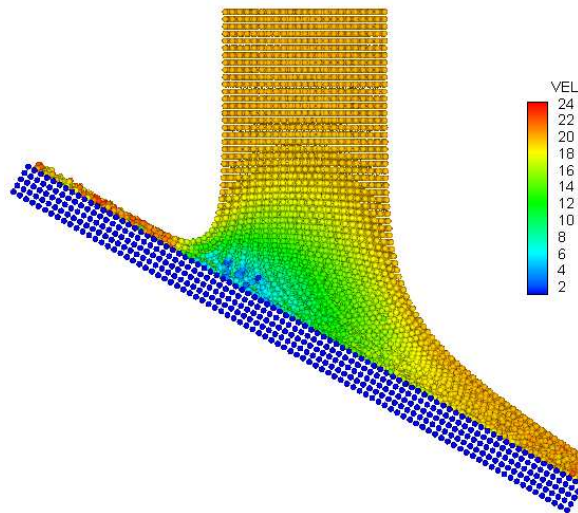
Αν συγκρίνουμε το προφίλ της δέσμης με το προφίλ που προκύπτει από το πείραμα έχουμε το διάγραμμα του σχήματος 4.1.16.



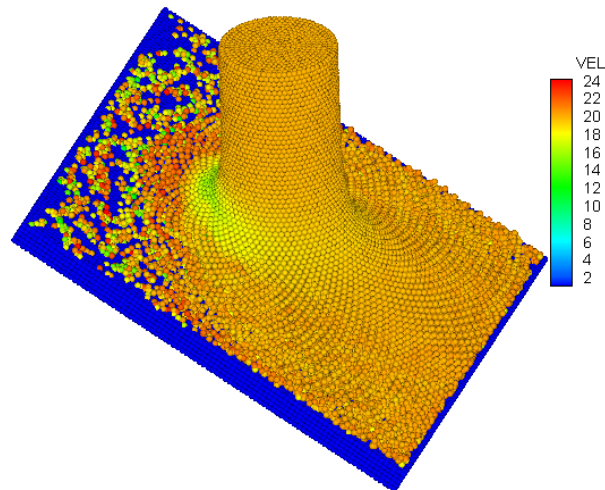
Σχήμα 4.1.16. Σύγκριση του προφίλ της δέσμης.

Παρατηρούμε ότι το προφίλ της δέσμης της προσομοίωσης συμπίπτει με το προφίλ του πειράματος. Επίσης στο διάγραμμα έχει σχεδιαστεί και ο άξονας της δέσμης.

Αν γίνει αξονική τομή της δέσμης στο επίπεδο z έχουμε την κατανομή της απόλυτης ταχύτητας στα σωματίδια του ρευστού όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.17. Το σημείο ανακοπής δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα της δέσμης αλλά μετατοπίζεται προς τα αριστερά, όπου η δέσμη συναντά πιο νωρίς την πλάκα, γεγονός αναμενόμενο. Ένα γενικότερο πλάνο της δέσμης φαίνεται στο σχήμα 4.1.18.



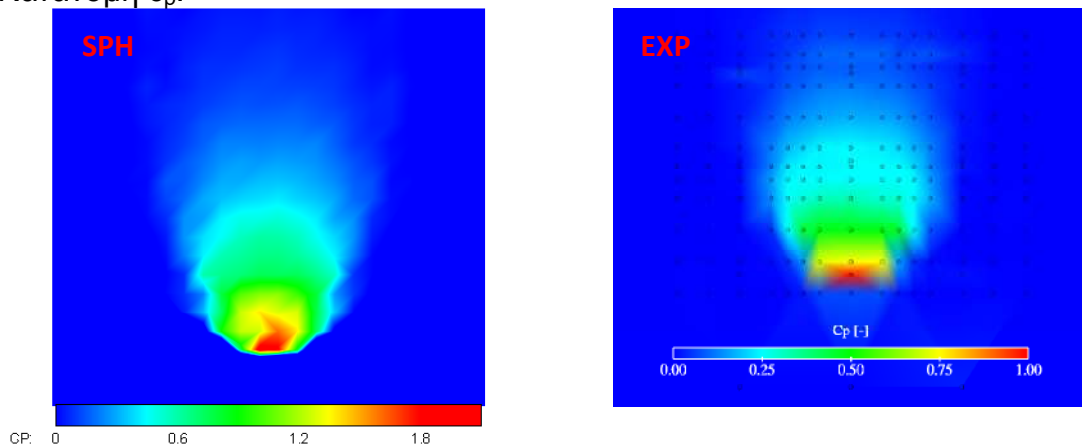
Σχήμα 4.1.17. Αξονική τομή της δέσμης στη μόνιμη ροή.



Σχήμα 4.1.18 Θέση και ταχύτητα σωματιδίων του ρευστού στη μόνιμη ροή.

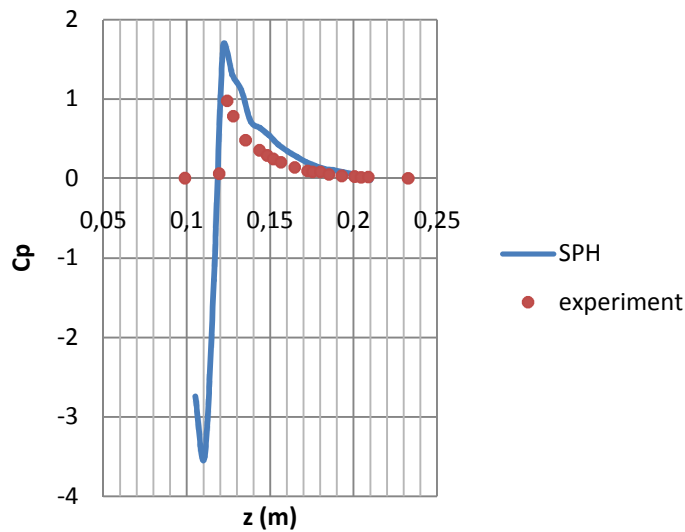
Για γωνία 60° έχουμε

Κατανομή c_p :



Σχήμα 4.1.19 Ισοσταθμική παρουσίαση της κατανομής του c_p για γωνία πρόσπτωσης 60° . Στην αριστερή εικόνα το αποτέλεσμα του SPH και στη δεξιά του πειράματος.

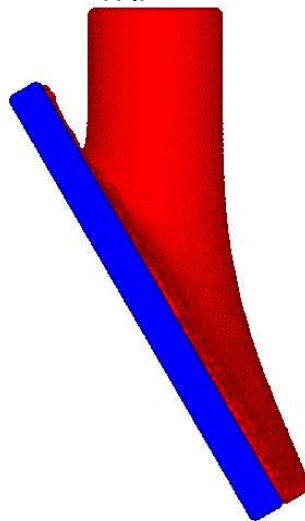
Από την ποιοτική σύγκριση των δύο εικόνων του σχήματος 4.1.19 παρατηρούμε ότι η κατανομή της πίεσης που υπολογίστηκε έχει την ίδια μορφή με την κατανομή του πειράματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περιοχή πριν από το σημείο ανακοπής το c_p που υπολογίζεται με την εφαρμογή του κώδικα λαμβάνει τιμές μέχρι -3.5 γεγονός που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Αυτό οφείλεται στον πολύ μικρό αριθμό σωματιδίων του ρευστού που κινούνται προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.22. Έτσι κατά τον υπολογισμό της πίεσης το σφάλμα είναι μεγάλο. Η ανωμαλία του c_p στην περιοχή αυτή φαίνεται στο γράφημα του σχήματος 4.1.20



Σχήμα 4.1.20 Σύγκριση της κατανομής της πίεσης πάνω στην πλάκα

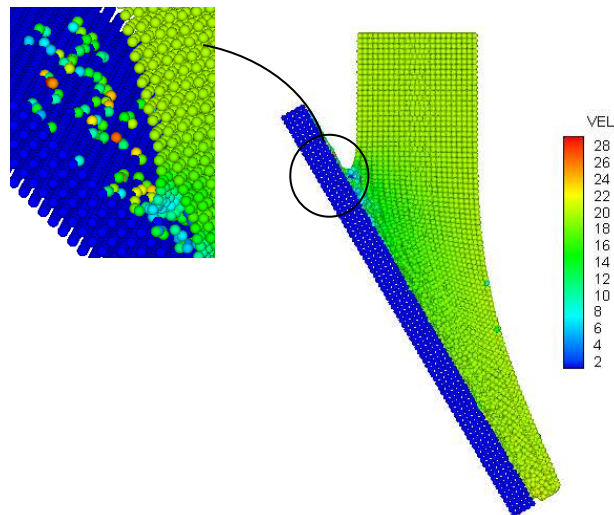
Μια ακόμη παρατήρηση που πρέπει να γίνει είναι ότι η μέγιστη τιμή του c_p που εμφανίζεται είναι 1.8 πιθανόν λόγο του μικρού αριθμού σωματιδίων. Παρόλα αυτά η γραμμή του SPH με τη γραμμή των πειραματικών δεδομένων έχουν παρόμοια μορφή.

Το προφίλ της δέσμης φαίνεται στο σχήμα 4.1.21.



Σχήμα 4.1.21 Το προφίλ της δέσμης στην μόνιμη ροή για γωνία 60° .

Αν γίνει αξονική τομή της δέσμης στο επίπεδο z έχουμε την κατανομή της απόλυτης ταχύτητας στα σωματίδια του ρευστού όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.22.



Σχήμα 4.1.22. Αξονική τομή της δέσμης στη μόνιμη ροή για γωνία πρόσπτωσης 60° .

Το σημείο ανακοπής μετατοπίζεται ακόμα πιο αριστερά απ' ό,τι στην περίπτωση γωνίας πρόσπτωσης 30° , γεγονός αναμενόμενο. Όμως όπως φαίνεται και στο σχήμα ένας μικρός αριθμός σωματιδίων κινείται προς τα πάνω με μεγάλο εύρος ταχυτήτων, αφού κάποια σωματίδια έχουν ταχύτητα μέχρι και 28 m/s. Αυτός ο μικρός αριθμός των σωματιδίων με τη διακύμανση της ταχύτητάς, προκαλούν τα αφύσικα αποτελέσματα του c_p .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η προσομοίωση της πρόσπτωσης δέσμης νερού πάνω σε επίπεδη πλάκα, με την εφαρμογή της μεθόδου SPH, δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Υπάρχουν βέβαια κάποια σφάλματα στην κατανομή του c_p , όμως η ποιοτική συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα είναι πολύ καλή. Τέλος πλήρη ταύτιση αποτελεσμάτων έχουμε στο προφίλ του πάχους του ρευστού κατά μήκος της πλάκας.

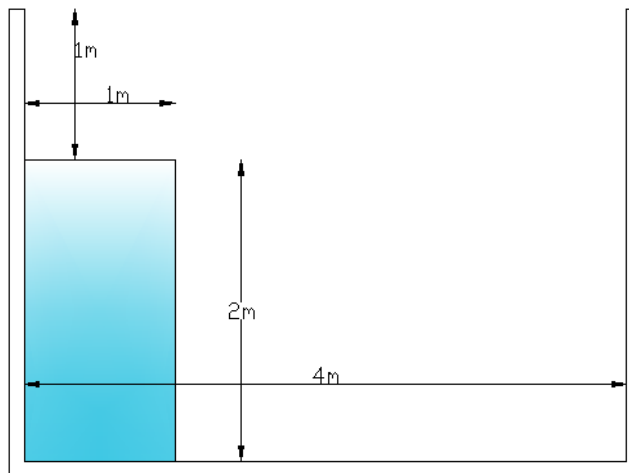
4.2 Εφαρμογή 2: Κατάρρευση στήλης νερού.

Στη συγκεκριμένη παράγραφο εφαρμόζεται η μέθοδος SPH στην προσομοίωση κατάρρευσης στήλης νερού (φράγματος). Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση κατάρρευσης της στήλης σε μια άδεια δεξαμενή και αναπτύχθηκε κώδικας για δυο και τρεις διαστάσεις. Τα γεωμετρικά δεδομένα ελήφθησαν από την δημοσίευση των Violeau και Issa (2007). Τέλος εξετάζεται η περίπτωση όπου η δεξαμενή περιέχει νερό και για το λόγο αυτό αναπτύχθηκε κώδικας δύο διαστάσεων. Η γεωμετρία του χώρου περιλαμβάνεται στην δημοσίευση των Violeau και Issa (SPHERIC,2007).

4.2.1 Κατάρρευση στήλης νερού σε στεγνή δεξαμενή (2d)

Στοιχεία προβλήματος

Η γεωμετρία του προβλήματος βασίζεται στο πείραμα των Koshizuka and Oka (1996). Η στήλη νερού έχει ύψος $h=2\text{m}$ και πλάτος $w=1\text{m}$ ενώ η δεξαμενή έχει μήκος 4m . Η διάταξη και οι διαστάσεις του προβλήματος φαίνονται στο σχήμα 4.2.1



ΣΧΗΜΑ 4.2.1. Διαστάσεις και αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Στοιχεία του κώδικα

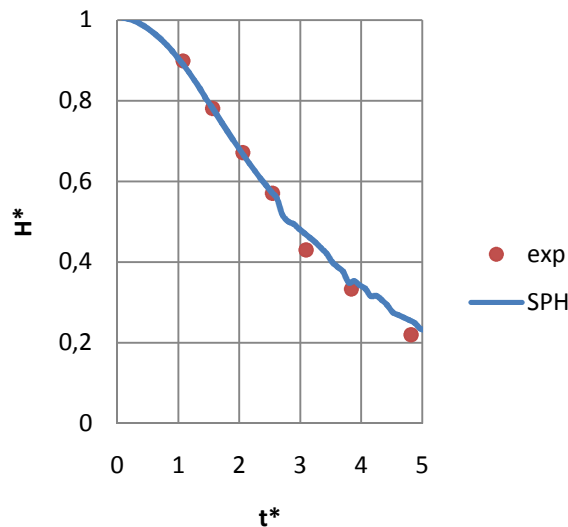
Ο κώδικας εκτελείται για δύο διαστάσεις. Η αρχική απόσταση των σωματιδίων D εξαρτάται από τον αριθμό των σωματιδίων του νερού που σχηματίζουν το πλάτος της στήλης. Έτσι στην συγκεκριμένη περίπτωση τοποθετήθηκαν κατά πλάτος της στήλης 80 σωματίδια. Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται ο αριθμός σωματιδίων της στήλης νερού, των τοιχωμάτων και ο συνολικός, καθώς και το χρονικό βήμα, ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος, η απόσταση D και η μάζα των σωματιδίων.

Σωματίδια νερού	12720
Σωματίδια τοίχου	4785
Σύνολο σωματιδίων	17505
Απόσταση D	0.0127m
Μάζα m	0.016 kg
DT	$2 \cdot 10^{-5}$ s
Υπολογιστικός χρόνος	556 min

Δημιουργήθηκαν 171 διαδοχικά αρχεία που δίνουν το στιγμιότυπο της ροής για κάθε 0.02s του φαινομένου. Δηλαδή ο συνολικός χρόνος του φαινομένου είναι 3.42s. Η τεχνητή ταχύτητα του ήχου ήταν 150 m/s, μιας και η μέγιστη ταχύτητα των σωματιδίων είναι περίπου 12 m/s. Για την μέτρηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο αριστερό άκρο της δεξαμενής καθορίστηκε μια περιοχή ελέγχου πλάτους ίση με την αρχική απόσταση των σωματιδίων D. Τέλος κοντά στη περιοχή των τοιχωμάτων ισχύουν οι δυνάμεις Lennard-Jones.

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Η μεταβολή με το χρόνο της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στο αριστερό τοίχωμα δίνεται στο γράφημα του σχήματος 4.2.2 ενώ στο γράφημα του σχήματος 4.2.3 δίνεται η μεταβολή της μέγιστης απόστασης σωματιδίων του νερού από το αριστερό τοίχωμα.



Σχήμα 4.2.2. Μεταβολή το βάθους του νερού στο αριστερό τοίχωμα.

Τα μεγέθη είναι αδιαστατοποιημένα. Ο χρόνος και στα δύο γραφήματα δίνεται από τη σχέση :

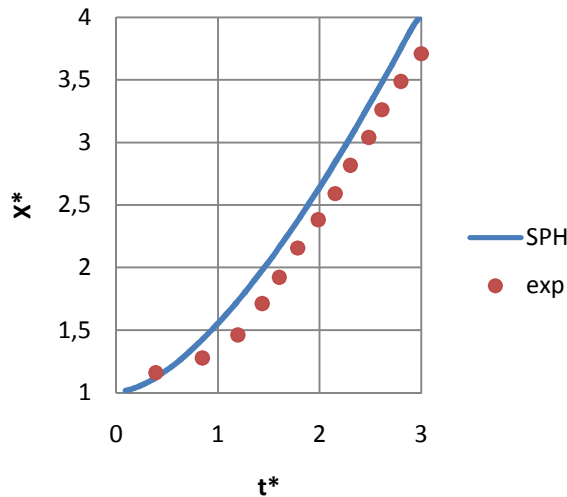
$$t^* = 10t \sqrt{\left(\frac{2w}{g}\right)}$$

όπου w το πλάτος της στήλης και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για το αριστερό τοίχωμα στο οποίο υπολογίζεται το βάθος του νερού, το ύψος του νερού είναι αδιαστατοποιημένο και δίνεται από τη σχέση:

$$H^* = y/(h)$$

όπου y το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του νερού και h το αρχικό ύψος της στήλης.



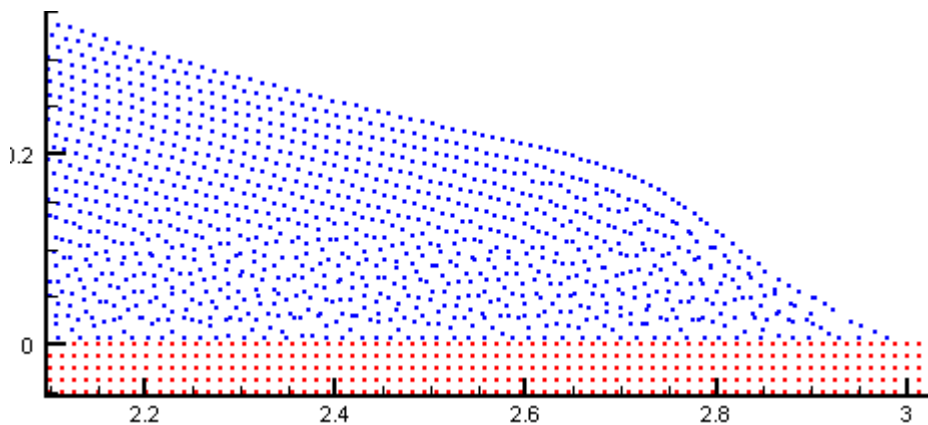
Σχήμα 4.2.3. Μεταβολή της μέγιστης απόστασης σωματιδίων νερού από το αριστερό τοίχωμα.

Η αδιαστατοποιημένη μέγιστη απόσταση των σωματιδίων του νερού από το αριστερό τοίχωμα δίνεται από τη σχέση:

$$X^* = x/(w)$$

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων του κώδικα SPH με τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζει ικανοποιητική συμφωνία.

Στο σχήμα 4.2.4 δίνεται ενδεικτικά η μορφή των σωματιδίων του νερού στο μέτωπο της στήλης κατά την κατάρρευση της, σε κάποια χρονική στιγμή.

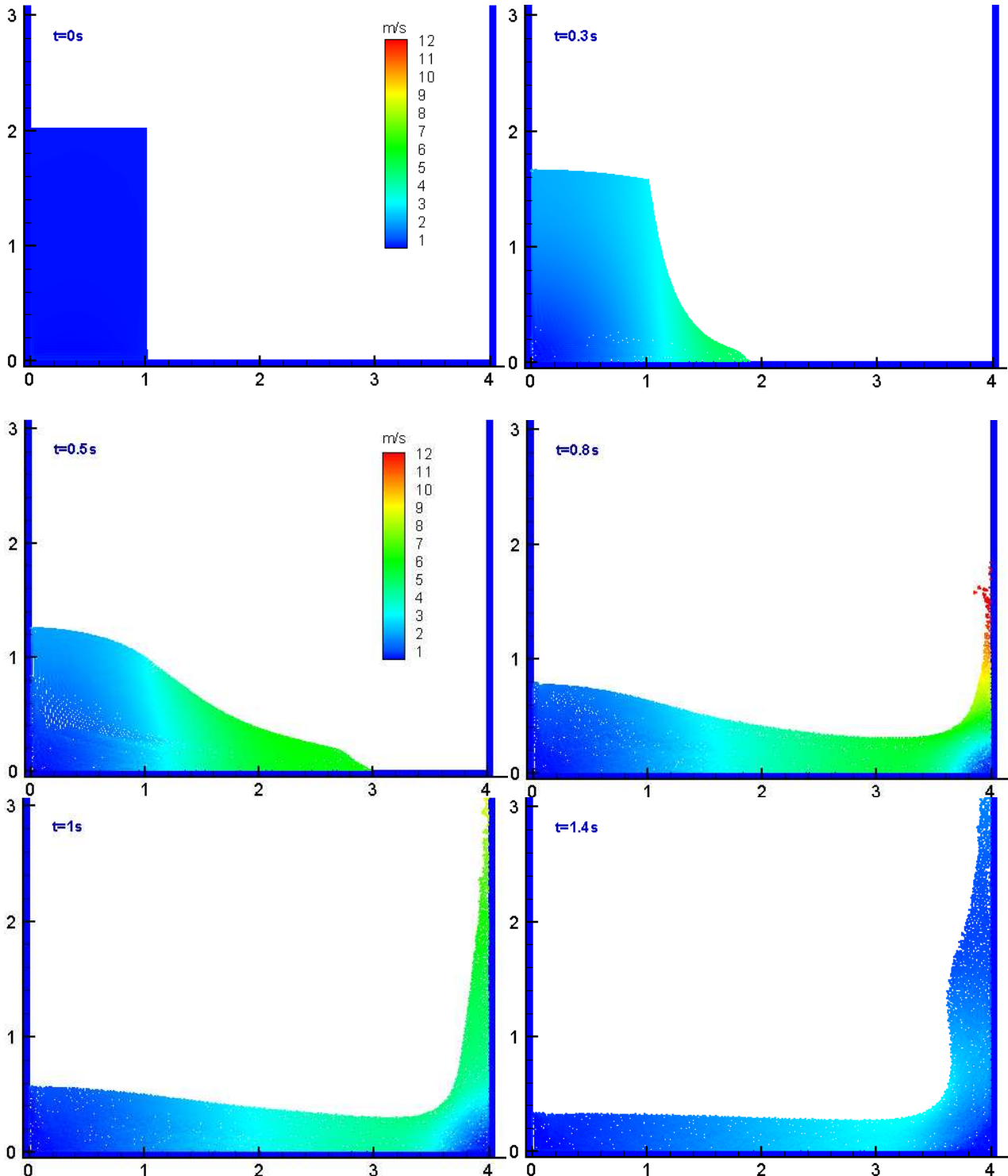


Σχήμα 4.2.4 Η μορφή των σωματιδίων του νερού στο μέτωπο της στήλης για $t=0.5s$.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η διάταξη των σωματιδίων του νερού που βρίσκονται κοντά στο τοίχωμα έχει διαταραχθεί από την επίδραση των σωματιδίων του τοιχώματος.

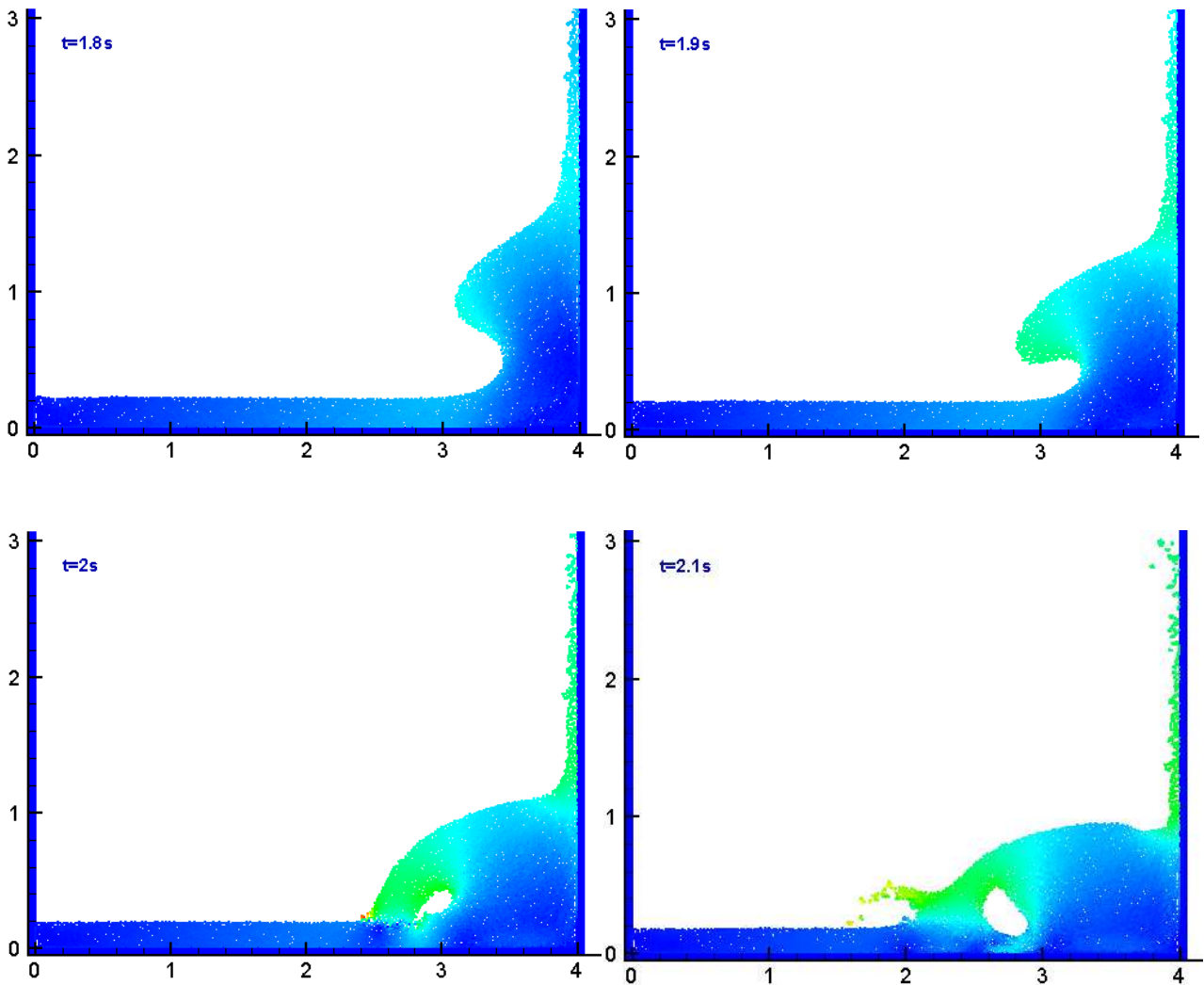
Στιγμιότυπα ροής

Στο σχήμα 4.2.5 δίνονται στιγμιότυπα της ροής σε κάποιες χρονικές στιγμές. Ο χρωματισμός των σωματιδίων έγινε βάσει της ταχύτητάς τους. Έτσι παρατηρούμε ότι για $t=0.8s$ το νερό έχει φτάσει το δεξί τοίχωμα και κινείται προς τα επάνω. Για $t=1.4s$ έχει μηδενιστεί η ανοδική του ταχύτητά και στο $t=1.8s$ κινείται προς τα κάτω.

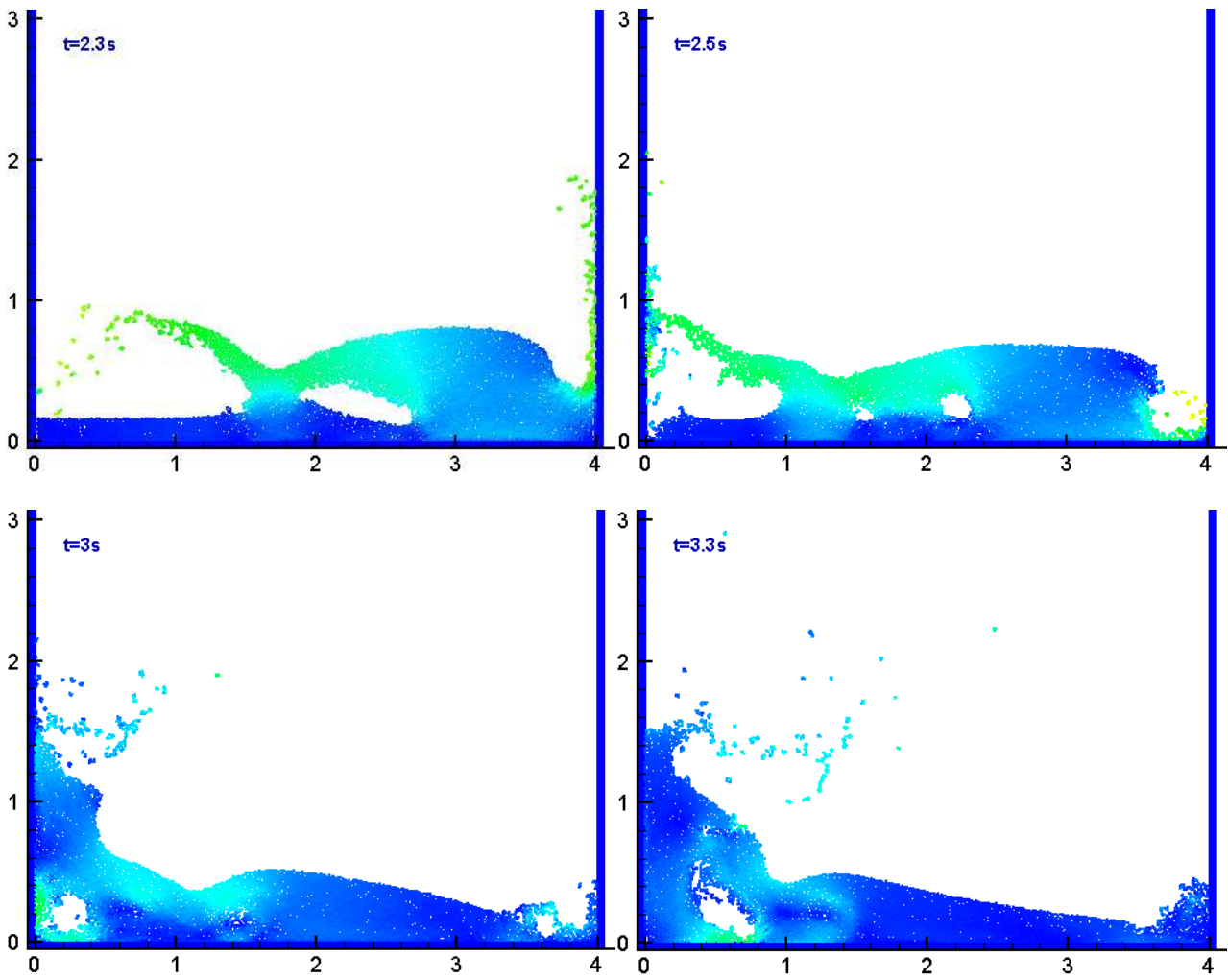


Σχήμα 4.2.5α. Στιγμιότυπα 2d ροής κατάρρευσης στήλης νερού.

Για $t=2.1s$ η στήλη που επιστρέφει προς τον πυθμένα προκαλεί την αναδίπλωση προς το αριστερό τοίχωμα, δημιουργώντας και μια δίνη που φαίνεται καλύτερα στο $t=2.1s$. Στην επιφάνεια του δεξιού τοιχώματος δημιουργείται μία διαταραχή από τα σταγονίδια του νερού που είχαν ανέβει ψηλότερα και πέφτουν με καθυστέρηση ($t=2.3$). Η αναδίπλωση της στήλης προκαλεί τη δημιουργία κύματος το οποίο προσκρούει στο αριστερό τοίχωμα για $t=2.5s$ και συνεχίζεται μέχρι την νέα αναδίπλωση του κύματος για $t=3.3s$.



Σχήμα 4.2.5β. Στιγμιότυπα 2d ροής κατάρρευσης στήλης νερού.



Σχήμα 4.2.5γ. Στιγμιότυπα 2d ροής κατάρρευσης στήλης νερού.

4.2.2 Κατάρρευση στήλης νερού σε στεγνή δεξαμενή (3d)

Στοιχεία προβλήματος

Η γεωμετρία του προβλήματος βασίζεται στο πείραμα του Issa (2005). Η στήλη νερού έχει ύψος 0.3m μήκος 0.3m και πλάτος 0.6m ενώ η δεξαμενή έχει μήκος 0.9m.

Στοιχεία του κώδικα

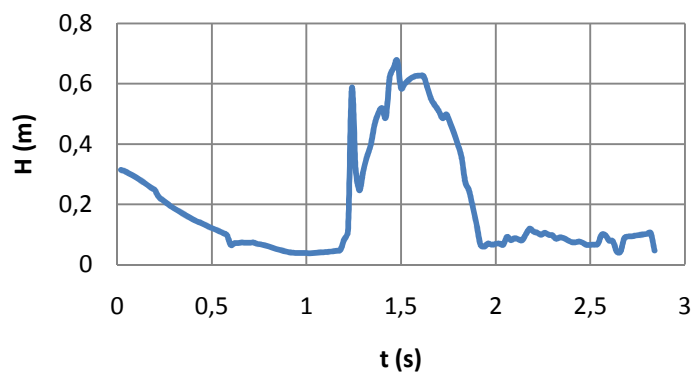
Ο κώδικας εκτελείται για τρεις διαστάσεις. Η αρχική απόσταση D των σωματιδίων εξαρτάται από τον αριθμό των σωματιδίων του νερού που σχηματίζουν το μήκος της στήλης. Έτσι στην συγκεκριμένη περίπτωση τοποθετήθηκαν κατά μήκος της στήλης 20 σωματίδια. Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται ο αριθμός σωματιδίων της στήλης νερού, των τοιχωμάτων και ο συνολικός, καθώς και το χρονικό βήμα, ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος, η απόσταση D και η μάζα των σωματιδίων.

Σωματίδια νερού	15600
Σωματίδια τοίχου	33210
Σύνολο σωματιδίων	48810
Απόσταση D	0.0158 m
Μάζα m	0.0004 kg
ΔT	$2 \cdot 10^{-5}$ s
Υπολογιστικός χρόνος	1121 min

Δημιουργήθηκαν 142 διαδοχικά αρχεία που δίνουν το στιγμιότυπο της ροής για κάθε 0.02s του φαινομένου. Δηλαδή ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης του φαινομένου είναι 2.84s. Η τεχνητή ταχύτητα του ήχου ήταν 150 m/s. Για την μέτρηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο αριστερό άκρο της δεξαμενής, όπως και στο δισδιάστατο πρόβλημα καθορίστηκε μια περιοχή ελέγχου πλάτους και μήκους ίση με την αρχική απόσταση των σωματιδίων D , στο μέσον του αριστερού τοίχου.

Αποτελέσματα

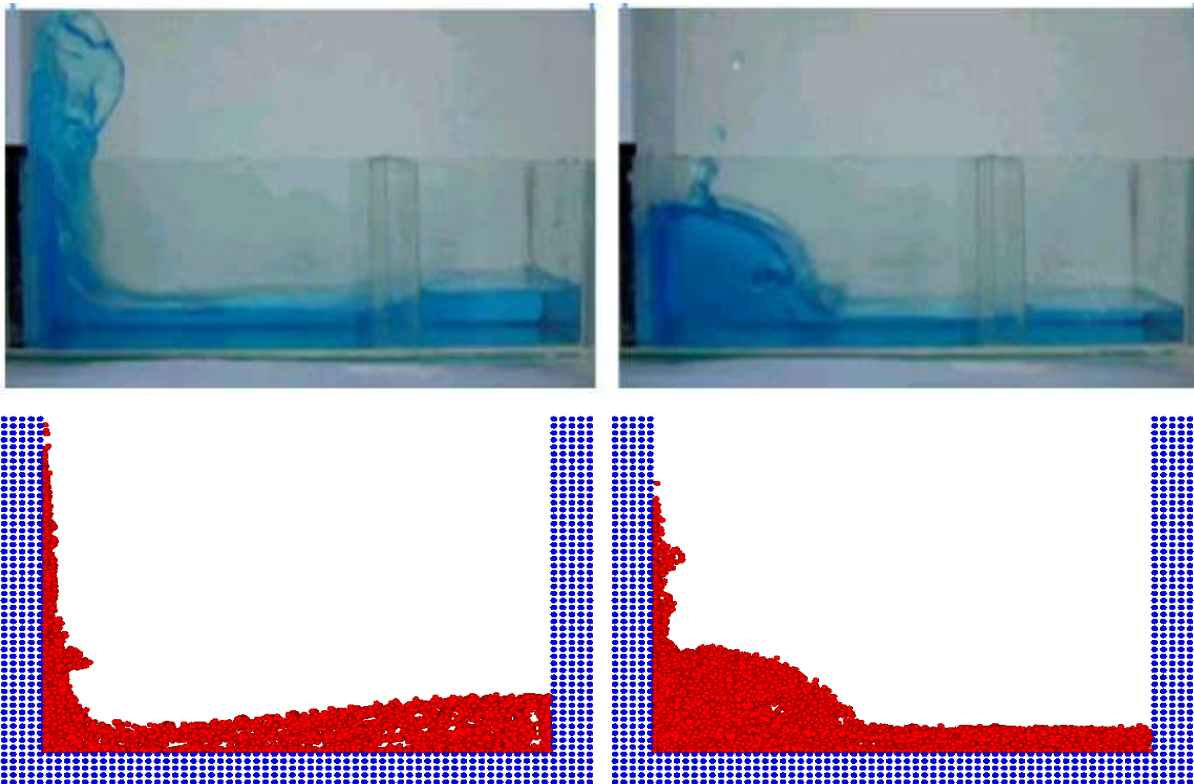
Στο σχήμα 4.2.6 δίνεται η μεταβολή του βάθους της δεξαμενής συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 4.2.6 Χρονική μεταβολή του βάθους της στήλης στο αριστερό τοίχωμα.

Ενώ έχουν τοποθετηθεί τοιχώματα στην αρχή και στο τέλος της δεξαμενής πάχους 5 σωματιδίων, στα πλαϊνά μέρη της δεξαμενής δεν τοποθετήθηκαν, για την μείωση του υπολογιστικού χρόνου, με αποτέλεσμα να μην υφίστανται συνεκτικές δυνάμεις στα σωματίδια που βρίσκονται σε επαφή με αυτά τα τοιχώματα. Η παραμονή των σωματιδίων εντός της δεξαμενής επιτυγχάνεται με την εφαρμογή των δυνάμεων Lennard-Jones.

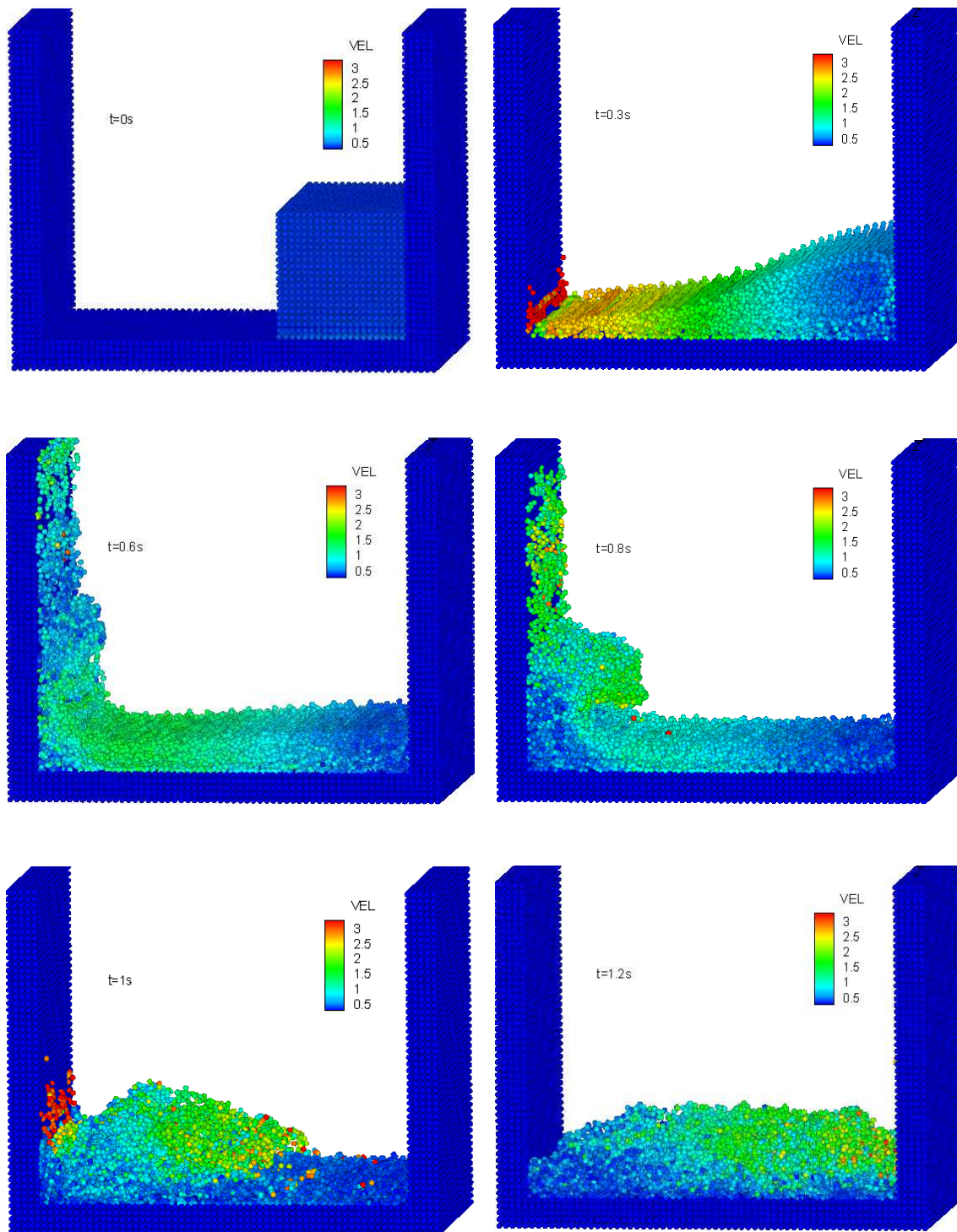
Στο σχήμα 4.2.7 γίνεται σύγκριση των στιγμιότυπων του πειράματος με την αριθμητικά υπολογισμένη ροή. Παρατηρούμε ότι για $t=0.89s$ τα αποτελέσματα ταιριάζουν, ενώ για $t=0.48s$ υπάρχει μια μικρή διαφορά στο νερό που ανεβαίνει προς τα επάνω. Αυτή διαφορά μπορεί να μειωθεί αν αυξηθεί ο αριθμός των σωματιδίων.



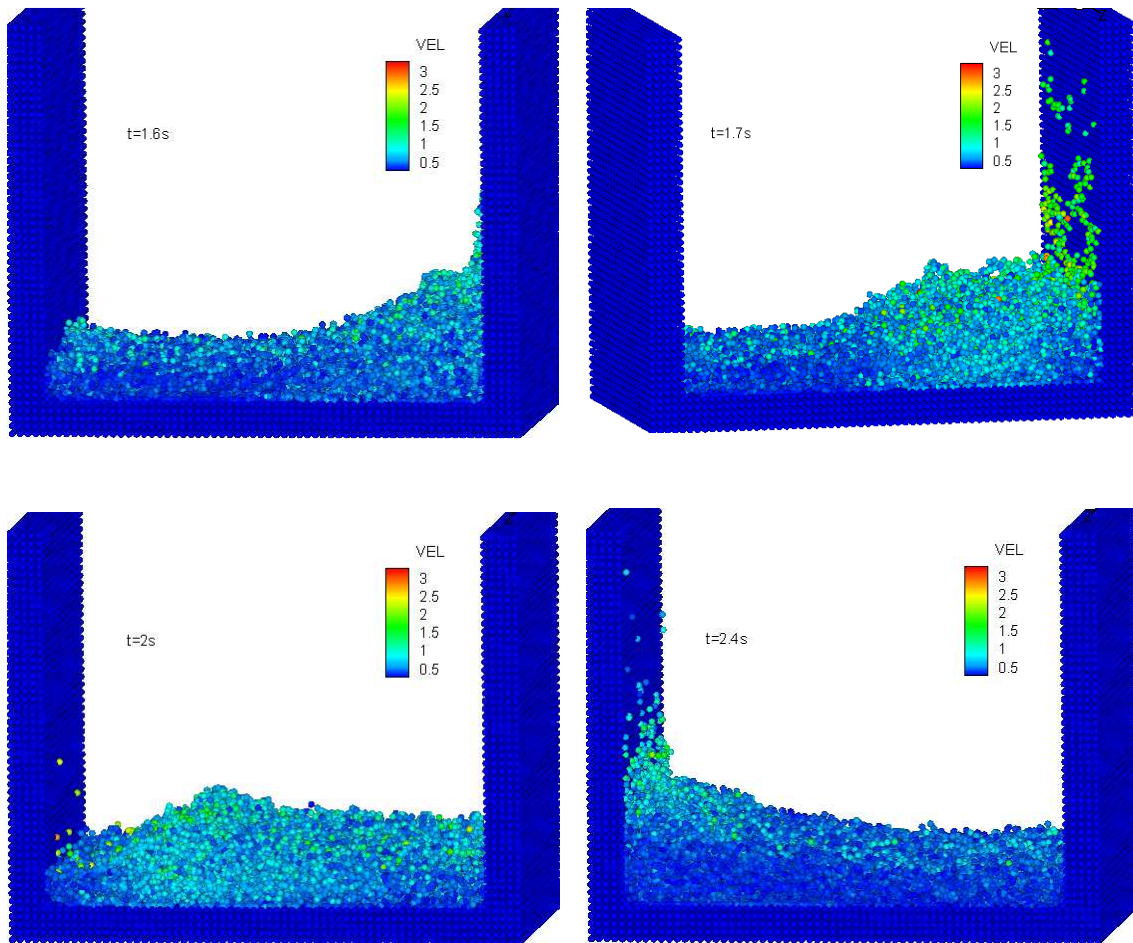
Σχήμα 4.2.7. Στιγμιότυπα σε δύο χρονικές στιγμές $t=0.48s$ (αριστερά) και $t=0.89s$ (δεξιά).

Στιγμιότυπα ροής

Στο σχήμα 4.2.8 δίνονται στιγμιότυπα της ροής σε κάποιες χρονικές στιγμές. Ο χρωματισμός των σωματιδίων έγινε με βάση την ταχύτητά τους. Το νερό της στήλης μετά την κατάρρευση φτάνει στο αριστερό τοίχωμα τη χρονική στιγμή $t=0.3s$. Για $t=0.8s$ γίνεται αναδίπλωση της στήλης που επιστρέφει προς τον πυθμένα και δημιουργείται κύμα το οποίο φτάνει στο δεξί τοίχωμα για $t=1.2s$. Τέλος το κύμα ανακλάται και επιστρέφει στα αριστερό τοίχωμα για $t=2.4s$.



Σχήμα 4.2.8α. Στιγμιότυπα 3d ροής κατάρρευσης στήλης νερού.

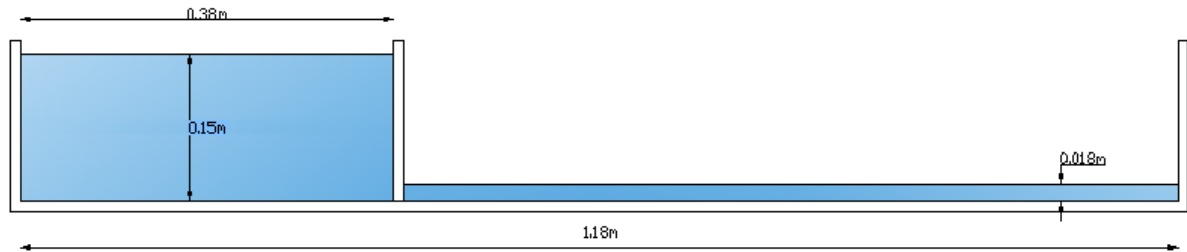


Σχήμα 4.2.8β. Στιγμιότυπα 3d ροής κατάρρευσης στήλης νερού.

4.2.3 Κατάρρευση στήλης νερού σε υγρή δεξαμενή (2d)

Στοιχεία προβλήματος

Η γεωμετρία του προβλήματος βασίζεται στο πείραμα του Janosi κ.α.(2004). Η στήλη νερού έχει ύψος 0.15m και πλάτος 0.38 m ενώ η δεξαμενή έχει μήκος 1.8m και είναι γεμισμένη με ένα στρώμα νερό βάθους 0.018m. Η διάταξη και οι διαστάσεις του προβλήματος φαίνονται στο σχήμα 4.2.9



Σχήμα 4.2.9. Διαστάσεις και αρχικές συνθήκες του προβλήματος υγρής δεξαμενής.

Στοιχεία του κώδικα

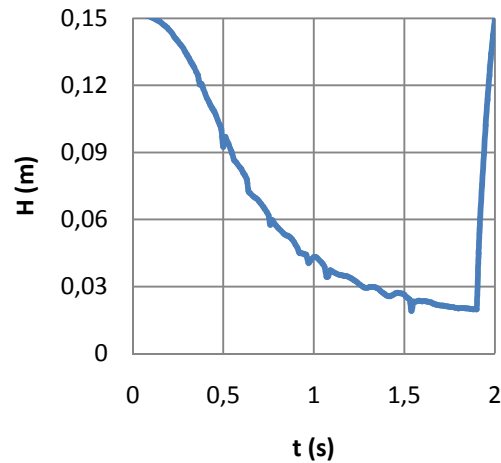
Ο κώδικας εκτελείται για δύο διαστάσεις. Η αρχική απόσταση D των σωματιδίων εξαρτάται, όπως και στη περίπτωση της στεγνής δεξαμενής, από τον αριθμό των σωματιδίων του νερού που σχηματίζουν το πλάτος της στήλης. Έτσι στην συγκεκριμένη περίπτωση τοποθετήθηκαν κατά μήκος της στήλης 200 σωματίδια. Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται ο αριθμός σωματιδίων της στήλης νερού, των τοιχωμάτων και ο συνολικός, καθώς και το χρονικό βήμα, ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος, η απόσταση D και η μάζα των σωματιδίων.

Σωματίδια νερού	20170
Σωματίδια τοίχου	4705
Σύνολο σωματιδίων	24875
Απόσταση D	0.0019m
Μάζα m	0.00037 kg
DT	$1 \cdot 10^{-5}$ s
Υπολογιστικός χρόνος	827 min

Δημιουργήθηκαν 200 διαδοχικά αρχεία που δίνουν το στιγμιότυπο της ροής για κάθε 0.01s του φαινομένου. Δηλαδή ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης του φαινομένου είναι 2s. Η τεχνητή ταχύτητα του ήχου ήταν 100 m/s. Για την μέτρηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο αριστερό άκρο της δεξαμενής, όπως και στο πρόβλημα της στεγνής δεξαμενής, καθορίστηκε μια περιοχή ελέγχου πλάτους ίση με την αρχική απόσταση των σωματιδίων D .

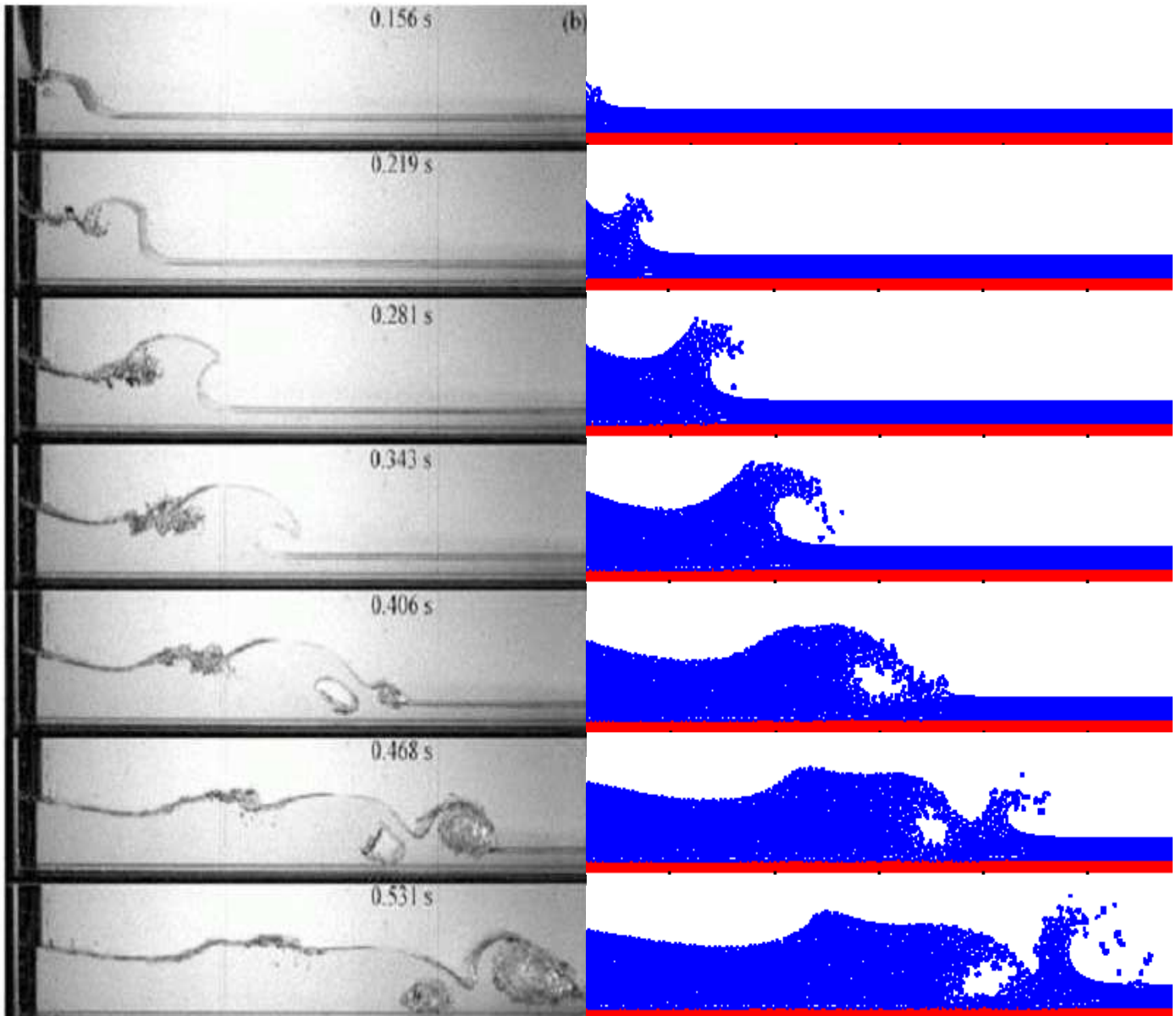
Αποτελέσματα

Στο σχήμα 4.2.10 δίνεται η μεταβολή του βάθους της δεξαμενής συναρτήσει του χρόνου. Τα μεγέθη είναι διαστατοποιημένα.



Σχήμα 4.2.10 Χρονική μεταβολή του βάθους της στήλης στο αριστερό τοίχωμα.

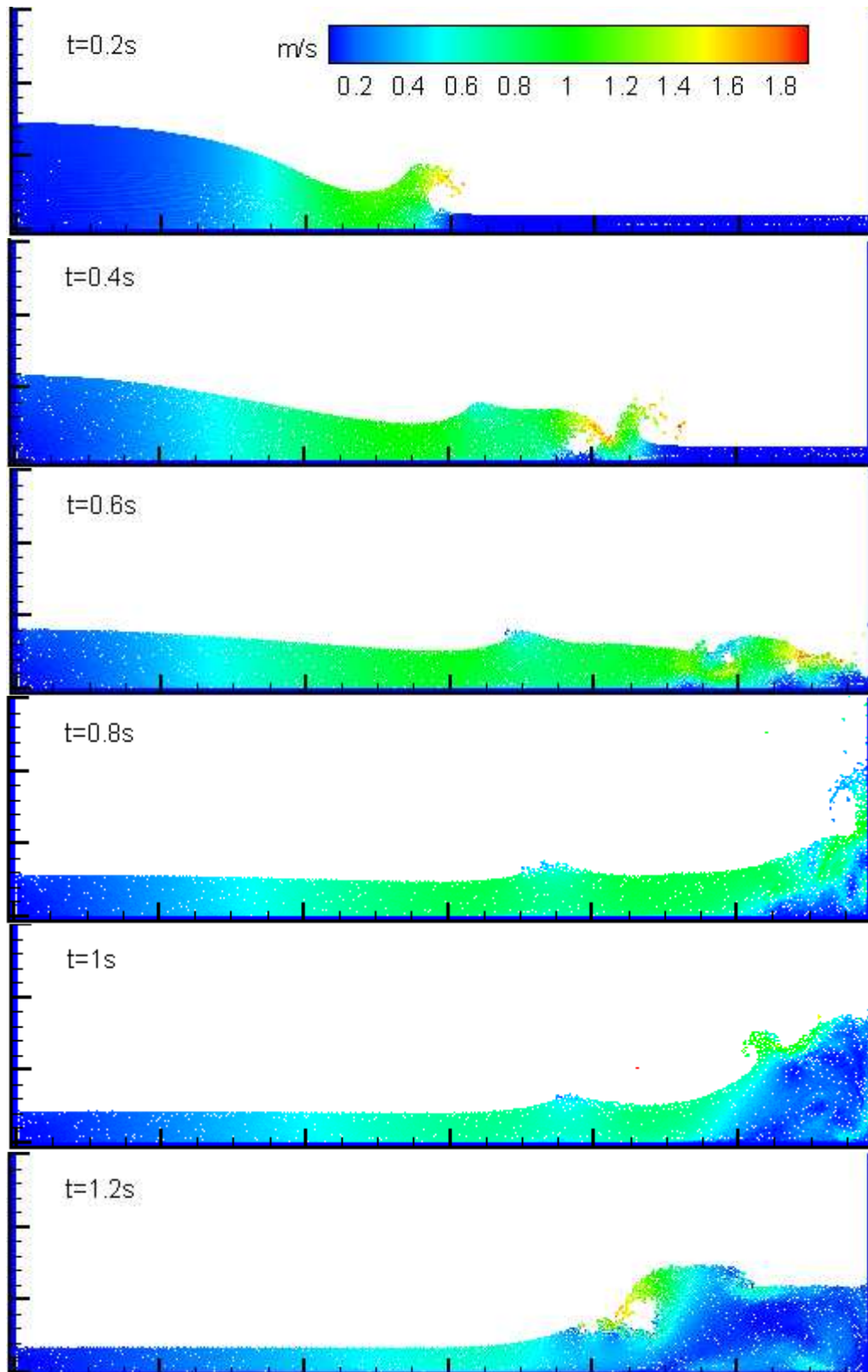
Στο σχήμα 4.2.10 γίνεται μια σύγκριση της ροής του νερού που υπολογίστηκε με τη μέθοδο SPH με την πραγματική ροή και ιδιαίτερα της μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Ένα χρονικό κενό παρατηρείται (περίπου 110ms) μεταξύ των αποτελεσμάτων (για παράδειγμα η πρώτη εικόνα που αντιστοιχεί σε χρόνο 0.156s αριθμητικά υπολογίστηκε για χρόνο 0.05s). Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι στον κώδικα θεωρήθηκε ότι η μπάρα που συγκρατεί την στήλη εξαφανίζεται ακαριαία. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική, αλλά δείχνει ότι ο κώδικας επιδέχεται βελτίωση για την απόλυτη ταύτιση.



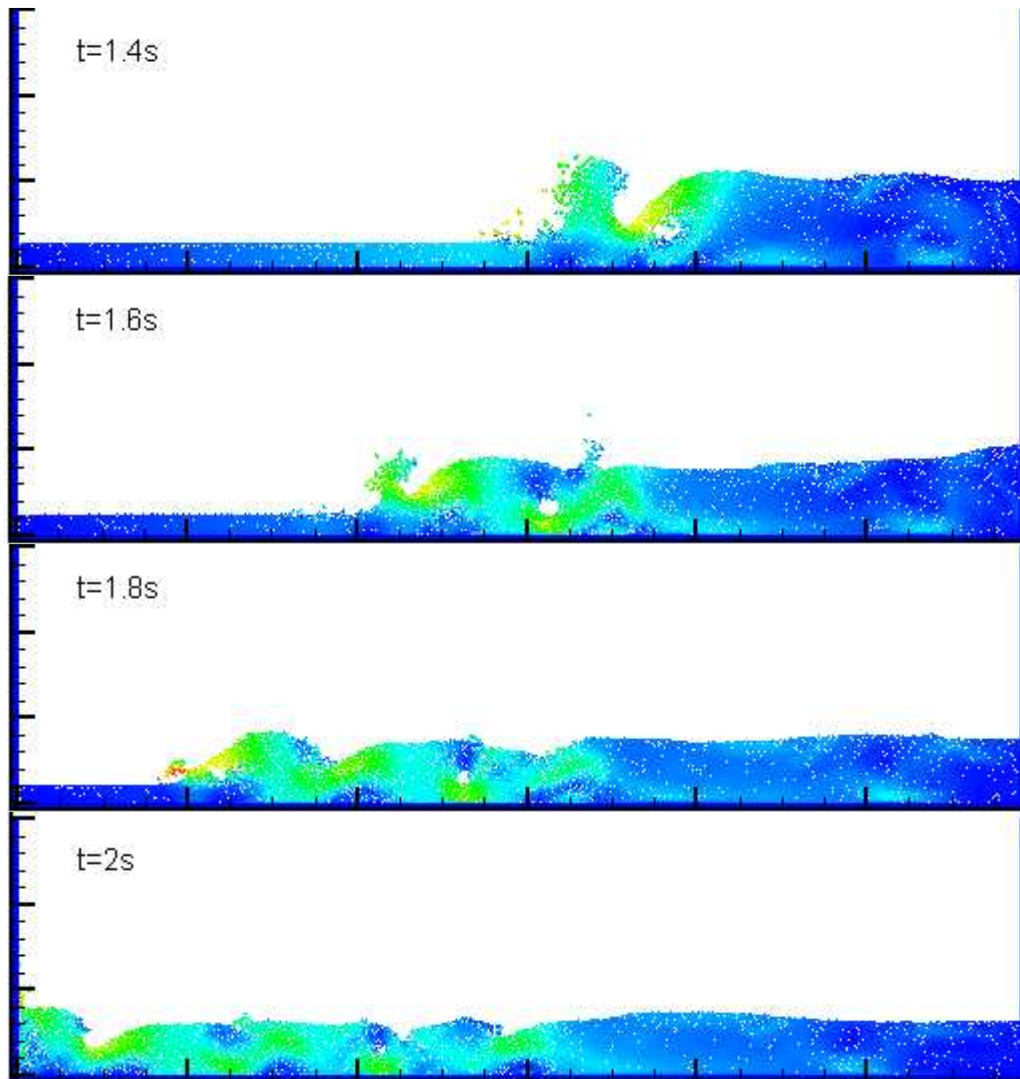
Σχήμα 4.2.11. Στιγμιότυπα της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας. Στα αριστερά εικόνες από την εκτέλεση του πειράματος και δεξιά εικόνες από την εφαρμογή μεθόδου SPH.

Στιγμιότυπα ροής

Αξίζει να παρουσιαστούν και άλλα στιγμιότυπα, για να γίνει αντιληπτή η συνολική πορεία του νερού. Ο χρωματισμός των σωματιδίων γίνεται με βάση την ταχύτητά τους.



Σχήμα 4.2.12α. Στιγμιότυπα της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 4.2.12β. Στιγμιότυπα της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας.

Παρατηρούμε ότι την χρονική στιγμή $t=0.6s$ το κύμα φτάνει στο δεξί τοίχωμα, ανακλάται και δημιουργεί ένα δεύτερο κύμα ($t=1\div 1.8$) και επιστρέφει στο αριστερό τοίχωμα για $t=2sec$.

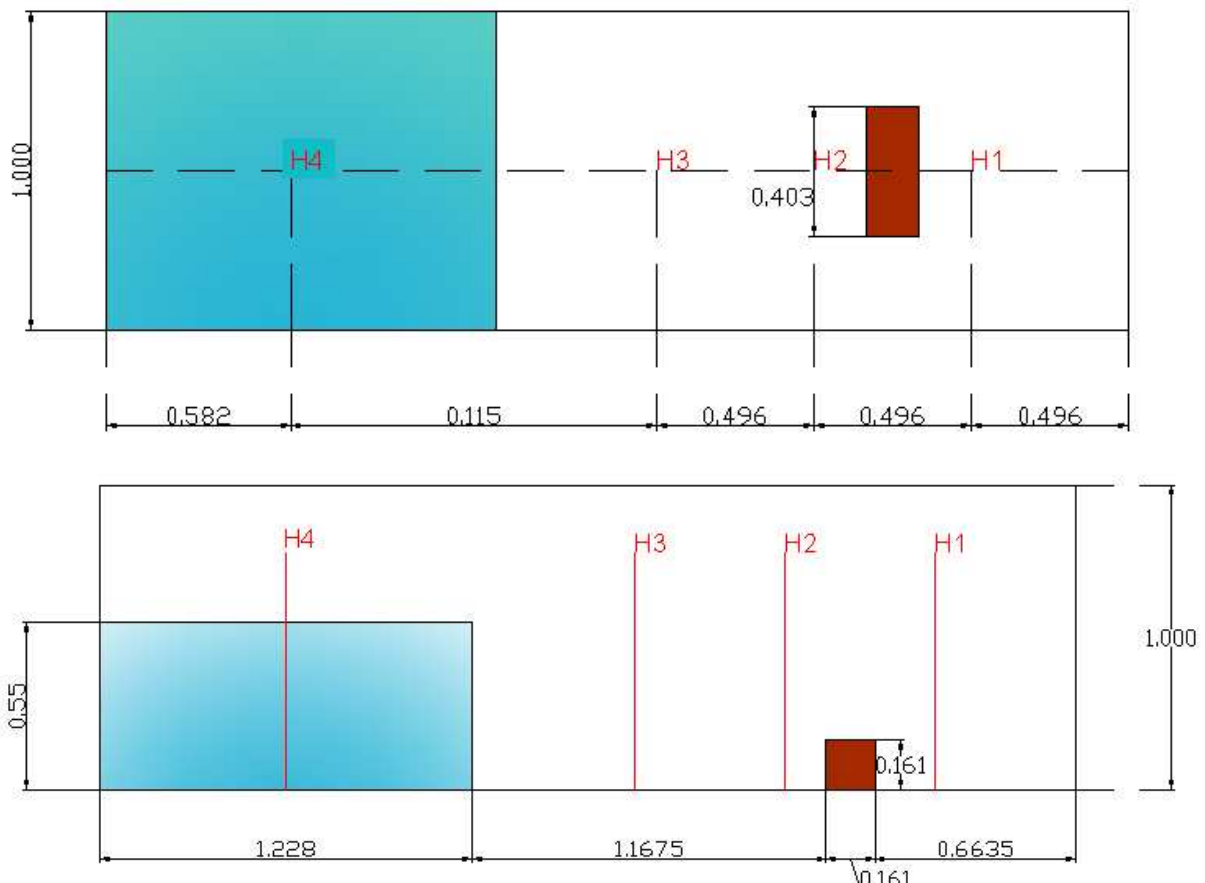
4.3 Εφαρμογή 3: Κατάρρευση δεξαμενής νερού και πρόσκρουση σε εμπόδιο

Σε αυτήν παράγραφο εξετάζεται η περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου SPH στην προσομοίωση κατάρρευσης δεξαμενής νερού και πρόσκρουσης σε εμπόδιο. Η προσομοίωση βασίζεται στο εργαστηριακό πείραμα που εκτελέστηκε από τον Kleefsman κ.α. (2005). Σε αυτό το πείραμα μια δεξαμενή νερού χάνει την μία πλευρά της, το νερό με τη επίδραση της βαρύτητας χύνεται εκτός και συναντά ένα εμπόδιο. Η εφαρμογή του κώδικα γίνεται για 2 και για 3 διαστάσεις.

Στοιχεία του προβλήματος.

Η δεξαμενή έχει μήκος 1.228m, πλάτος 1m και ύψος 0.55m. Το εμπόδιο έχει μήκος 0.161m, πλάτος 0.403m, ύψος 0.161m και βρίσκεται σε απόσταση 1.1675m από τη δεξαμενή. Ο υπολογιστικός χώρος έχει διαστάσεις 3.22x1x1 m.

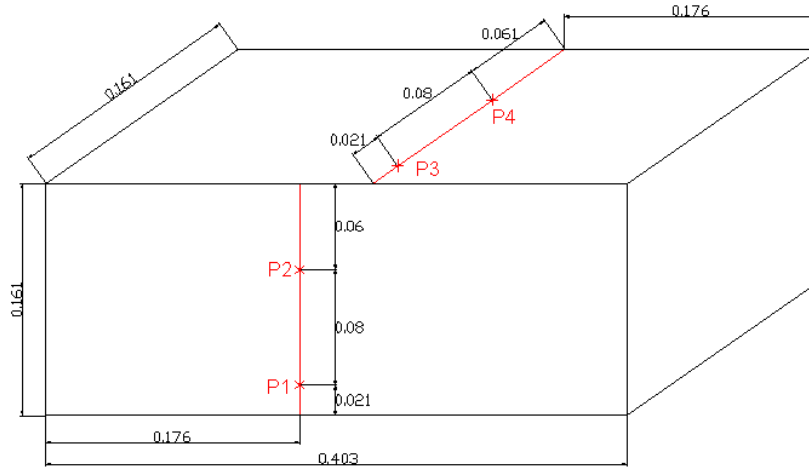
Η διάταξη και οι διαστάσεις φαίνονται στο σχήμα 4.3.1.



Σχήμα 4.3.1. Γενική περιγραφή του συστήματος: κάτοψη (πάνω εικόνα) και πλάγια όψη (κάτω εικόνα).

Για τον έλεγχο του προβλήματος και την σύγκριση του SPH με το πείραμα έχουν τοποθετηθεί σημεία ελέγχου που καταγράφουν την χρονική μεταβολή του ύψους της

ανώτερης ελεύθερης επιφάνειας. Αυτά τα σημεία συμβολίζονται με το γράμμα Η και φαίνονται στο σχήμα 4.3.1. Για την μέτρηση της πίεσης πάνω στο εμπόδιο υπάρχουν σημεία ελέγχου που συμβολίζονται με το γράμμα Ρ και η θέση τους φαίνεται στο σχήμα 4.3.2



Σχήμα 4.3.2. Περιγραφή του εμποδίου και των σημείων ελέγχου πίεσης Ρ.

Στοιχεία του κώδικα.

Ο κώδικας αναπτύχθηκε για 2 και 3 διαστάσεις. Ο αριθμός των σωματιδίων του προβλήματος καθορίζεται από τον αριθμό των σωματιδίων του νερού κατά μήκος της δεξαμενής. Επειδή στο τρισδιάστατο πρόβλημα ο αριθμός σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερος από το δισδιάστατο πρόβλημα, με αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου, εκτελούμε το πρόγραμμα 2d με 100 σωματίδια κατά μήκος της δεξαμενής για την σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα και κατόπιν εκτελούμε τον 2d και τον 3d κώδικα με 40 σωματίδια για την μεταξύ τους σύγκριση.

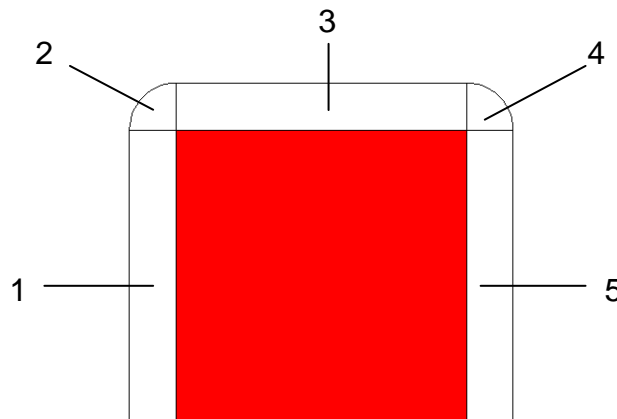
Έτσι στον πίνακα που ακολουθεί δίνεται για κάθε περίπτωση ο αριθμός σωματιδίων, η απόσταση τοποθέτησης D, η μάζα των σωματιδίων, το χρονικό βήμα των υπολογισμών DT και ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος. Τα αρχεία εξόδου που δημιουργούνται δίνουν το στιγμιότυπο της ροής για κάθε 0.02s.

	2d 100 σωμ.	2d 40 σωμ.	3d 40 σωμ.
Εμπόδιο	182 p	30 p	420 p
Νερό	4500 p	720 p	21216 p
Τοιχώματα	2555 p	1035 p	31675 p
Σύνολο σωματιδίων	7237 p	1785 p	53311 p
απόσταση D	0.0124 m	0.0315 m	0.0315 m
μάζα σωματιδίων	0.0156 kg	0.101 kg	0.003164 kg
χρονικό βήμα DT	10^{-5} s	10^{-5} s	$5 \cdot 10^{-5}$ s
υπολογιστικός χρόνος	504 min	91 min	2769 min

Δημιουργήθηκαν 250 αρχεία-στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε 5s του φαινομένου και οι κώδικες εκτελέστηκαν 8 παράλληλους επεξεργαστές, ταχύτητας 2 GHz έκαστος.

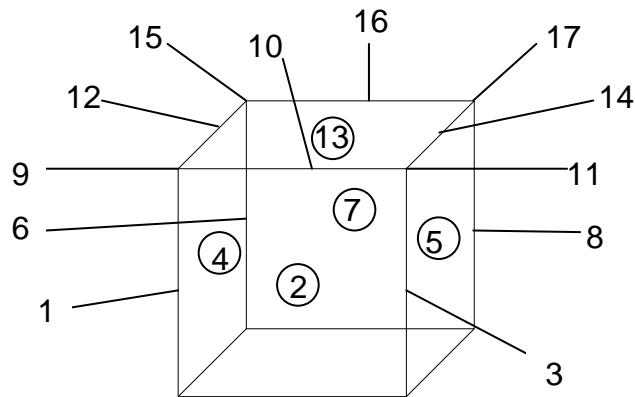
Οριακές Συνθήκες

Για την αποφυγή εισχώρησης σωματιδίων του νερού στα τοιχώματα και στο εμπόδιο εφαρμόζονται οι απωστικές δυνάμεις Lennard-Jones με ακτίνα επίδρασης $r_0=0.45D$ και με διεύθυνση την διεύθυνση της απόστασης r . Ενώ η εφαρμογή τους στα τοιχώματα είναι απλή, γιατί αρκεί η εύρεση της κάθετης απόστασης του σωματιδίου από το τοίχωμα, στην περίπτωση του εμποδίου τα πράγματα γίνονται πιο πολύπλοκα. Στον 2D κώδικα η περιοχή γύρω από το εμπόδιο χωρίζεται σε 5 τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.3. Στα τμήματα 1, 3 και 5 στους υπολογισμούς λαμβάνεται η κάθετη απόσταση r από την αντίστοιχη επιφάνεια, ενώ στα τμήματα 2 και 4 λαμβάνεται η απόσταση r από την αντίστοιχη γωνία. Στην κάτω πλευρά του εμποδίου δεν χρειάζονται οι απωστικές δυνάμεις αφού υπάρχουν οι δυνάμεις του κάτω τοιχώματος.



Σχήμα 4.3.3. Περιοχές εφαρμογής των δυνάμεων Lennard-Jones (2d).

Στον 3D κώδικα η περιοχή γύρω από το εμπόδιο χωρίζεται σε 17 τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.4. Στα τμήματα 2, 4, 5, 7 και 13 λαμβάνεται η κάθετη απόσταση r από τις αντίστοιχες πλευρές, στα τμήματα 1, 3, 6, 8, 10, 12, 14 και 16 λαμβάνεται η κάθετη απόσταση r από τις αντίστοιχες ακμές και στα τμήματα 9, 11, 15 και 17 λαμβάνεται η απόσταση r από τις αντίστοιχες γωνίες. Είναι εύλογο ότι τα 17 αυτά τμήματα απαιτούν τη δημιουργία 17 συνθηκών ελέγχου θέσης για κάθε σωματίδιο νερού στον κώδικα. Αυτό σημαίνει μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού χρόνου.

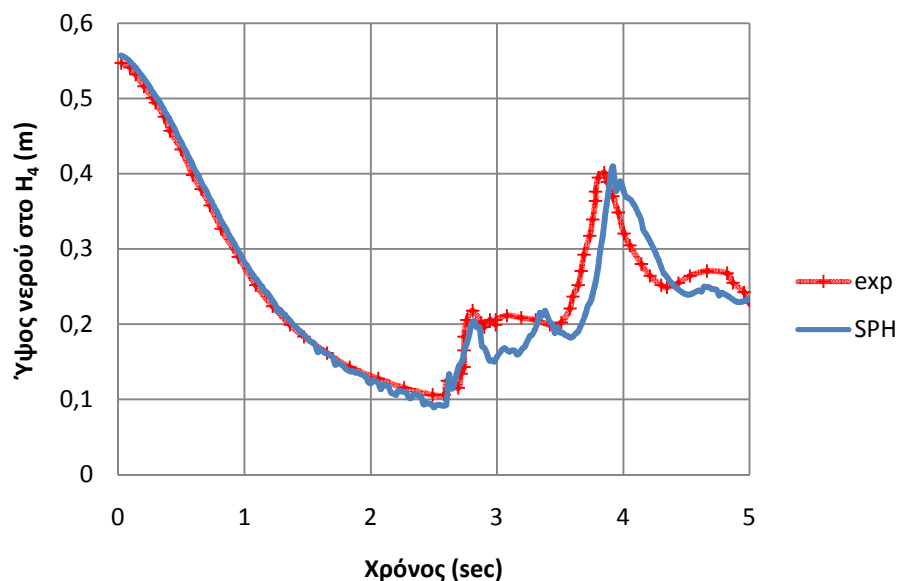


Σχήμα 4.3.4. Περιοχές εφαρμογής των δυνάμεων Lennard-Jones (3d).

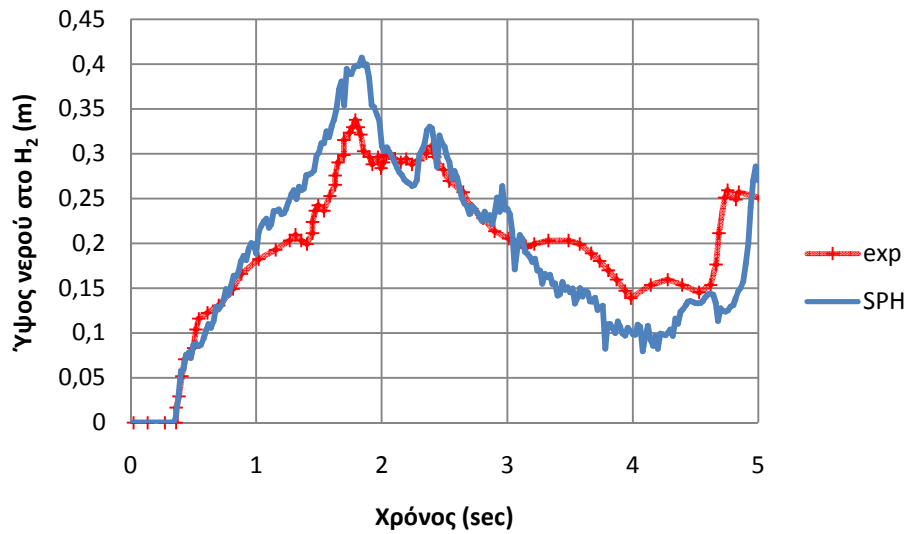
Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, τα σωματίδια των τοιχωμάτων δεν μεταβάλλουν την πυκνότητα και την πίεσή τους. Μία μέθοδος για την αποφυγή των δυνάμεων Lennard-Jones θα μπορούσε να είναι η μεταβολή της πυκνότητας και της πίεσης των σωματιδίων του τοίχου και του εμποδίου με τον ίδιο τρόπο που μεταβάλλονται οι αντίστοιχες ιδιότητες των σωματιδίων του ρευστού.

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Για την αξιολόγηση του κώδικα στο συγκεκριμένο πρόβλημα, και επειδή η εκτέλεση του τρισδιάστατου προβλήματος με μεγάλο αριθμό σωματιδίων είναι εξαιρετικά χρονοβόρα, γίνεται σύγκριση των πειραματικών δεδομένων του Kleefsman κ.α. (2005) με τον δισδιάστατο κώδικα με ανάλυση 100 σωματιδίων. Έτσι στο σχήμα 4.3.5 δίνεται η χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στο σημείο ελέγχου H_4 και στο σχήμα 4.3.6 στο σημείο H_2 .

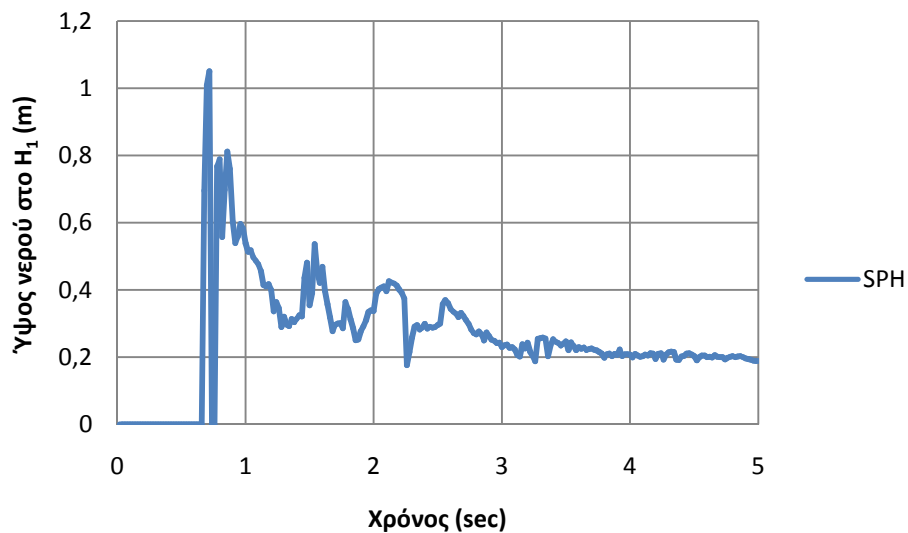


Σχήμα 4.3.5 Χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στο σημείο ελέγχου H_4 (SPH-2d-100p).

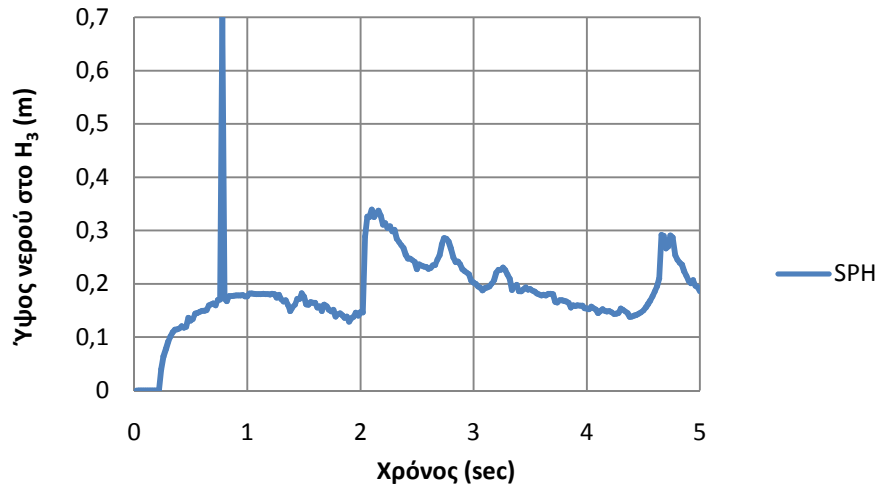


Σχήμα 4.3.6 Χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στο σημείο ελέγχου H_2 (SPH-2d-100p).

Παρατηρούμε ότι στο σημείο ελέγχου H_4 τα αποτελέσματα είναι αρκετά ικανοποιητικά αφού οι καμπύλες συμπίπτουν, εκτός από τη περιοχή μεταξύ τρίτου και τέταρτου δευτερολέπτου όπου η καμπύλη του SPH είναι ελαφρώς μετατοπισμένη προς τα δεξιά, με την ίδια όμως μορφή. Στο σημείο ελέγχου H_2 οι καμπύλες δεν συμπίπτουν, αλλά η γενικότερη μορφή της καμπύλης SPH πλησιάζει τη μορφή της πειραματικής, οπότε τα αποτελέσματα του κώδικα είναι αποδεκτά και σε αυτή τη θέση. Στα σχήματα 4.3.7 και 4.3.8 δίνεται η αριθμητικά υπολογισμένη μεταβολή της κατακόρυφης θέσης του νερού στα υπόλοιπα δύο σημεία ελέγχου H_1 και H_3 .



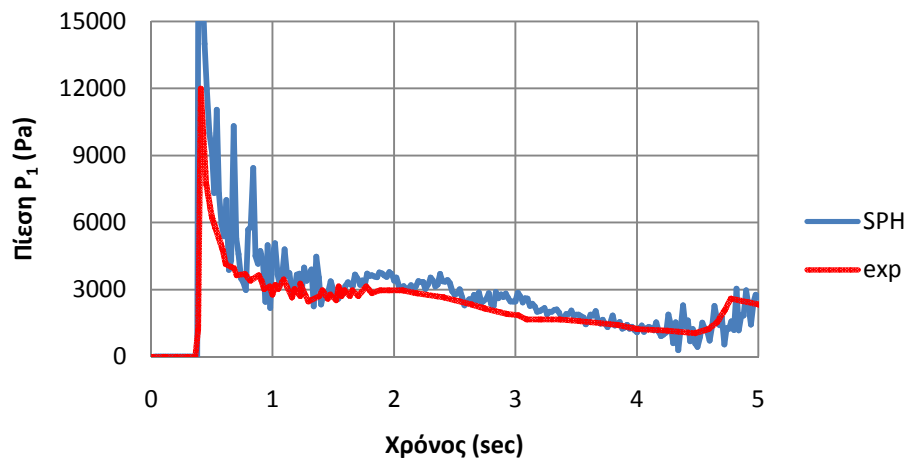
Σχήμα 4.3.7 Χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στο σημείο ελέγχου H_1 (SPH-2d-100p).



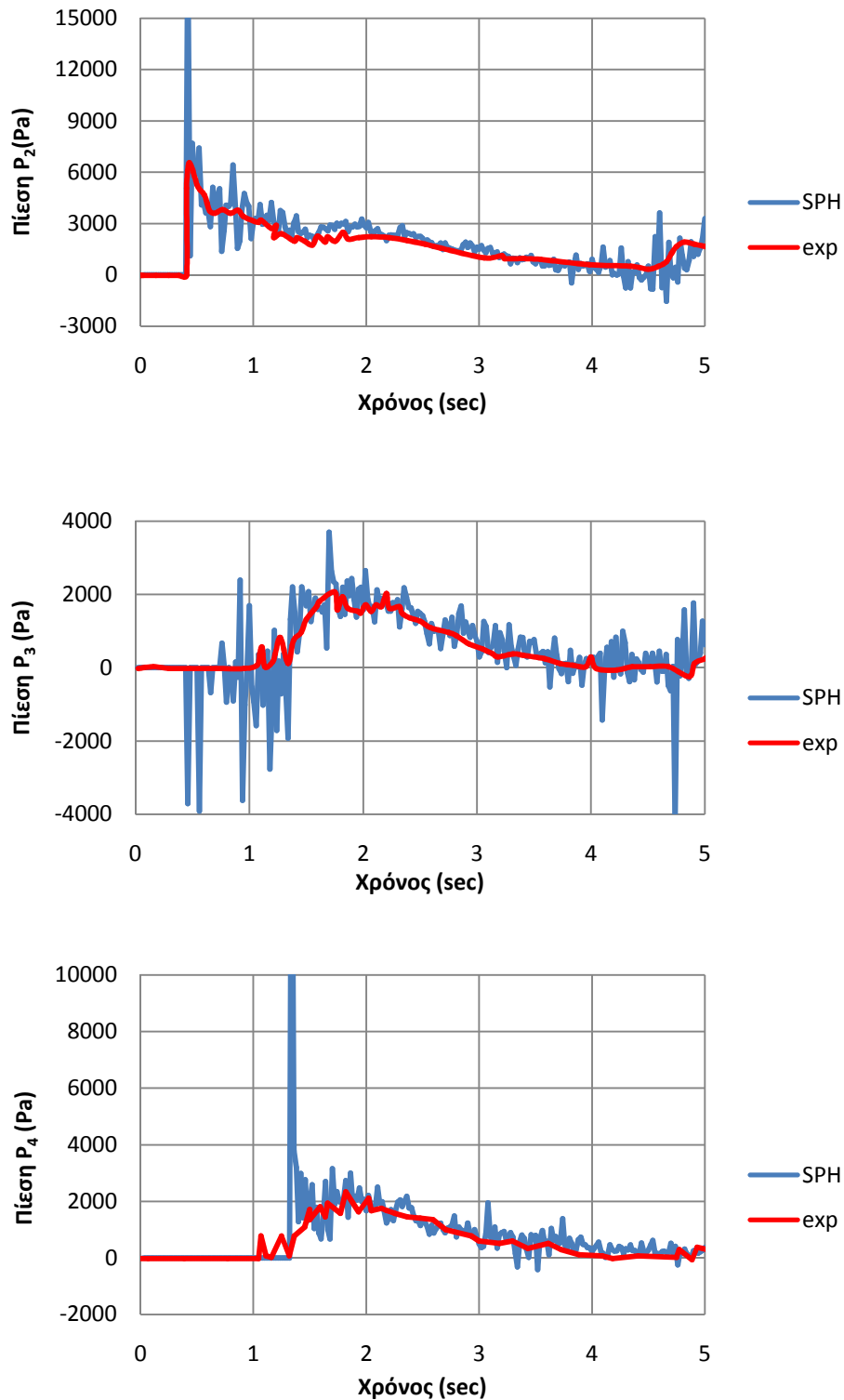
Σχήμα 4.3.8 Χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στο σημείο ελέγχου H_3 (SPH-2d-100p).

Παρατηρούμε ότι στο σημείο ελέγχου H_1 , η καμπύλη του ύψους της πάνω ελεύθερης επιφάνειας του νερού από μηδέν που είναι για $t=0s$ (αφού δεν υπάρχει νερό) αυξάνεται απότομα και κατόπιν μειώνεται σταδιακά. Η αύξηση αυτή οφείλεται στο άλμα που κάνει το νερό μετά την πρόσκρουσή στο εμπόδιο. Στο σημείο ελέγχου H_3 η διαταραχή που παρουσιάζει η καμπύλη για $t=0.8s$ οφείλεται σε μεμονωμένα σωματίδια που επιστρέφουν στο αριστερό τοίχωμα μετά την πρόσκρουση, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3.13α.

Στα σχήματα 4.3.9 και 4.3.10 δίνεται η χρονική μεταβολή της πίεσης πάνω στα σημεία ελέγχου P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , για τον δισδιάστατο κώδικα SPH.



Σχήμα 4.3.9. Χρονική μεταβολή πίεσης στο σημείο ελέγχου P_1 .

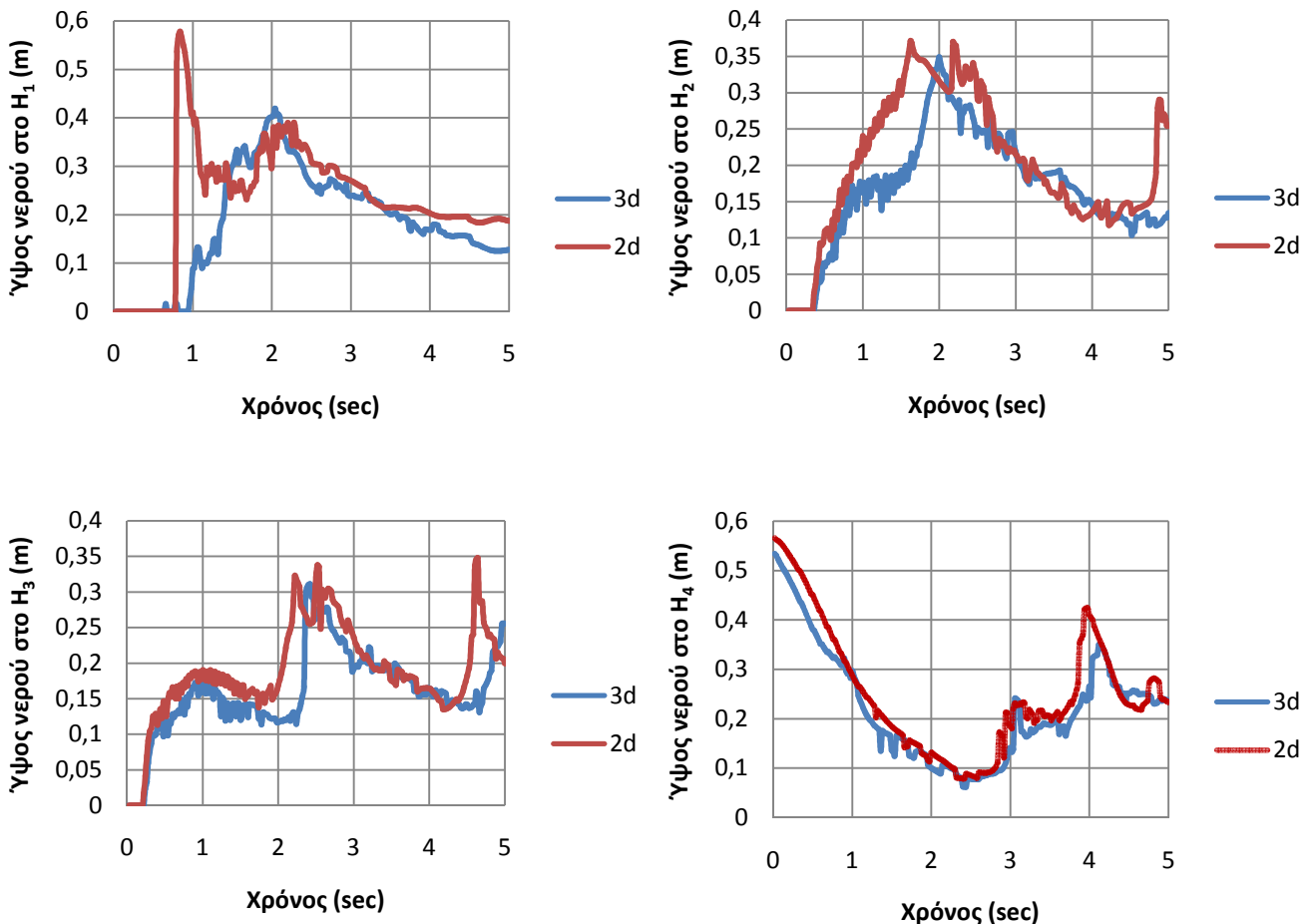


Σχήμα 4.3.10. Χρονική μεταβολή πίεσης στα σημεία ελέγχου P₂, P₃ και P₄.

Παρατηρούμε ότι η τιμή της υπολογιζόμενης πίεσης παρουσιάζει διαταραχές, ιδιαίτερα στο σημείο P₃ το οποίο βρίσκεται στο πάνω μέρος του εμπόδιου, που οφείλονται στα μεμονωμένα σωματίδια που διέρχονται από το εμπόδιο. Βλέπουμε όμως ότι η μέση καμπύλη χρονικής μεταβολής της πίεσης σε όλα τα διαγράμματα συμπίπτει

με την αντίστοιχη πειραματική καμπύλη. Έτσι λαμβάνοντας αυτό το γεγονός υπ' όψιν μπορούμε να θεωρήσουμε ικανοποιητικά τα αποτελέσματα.

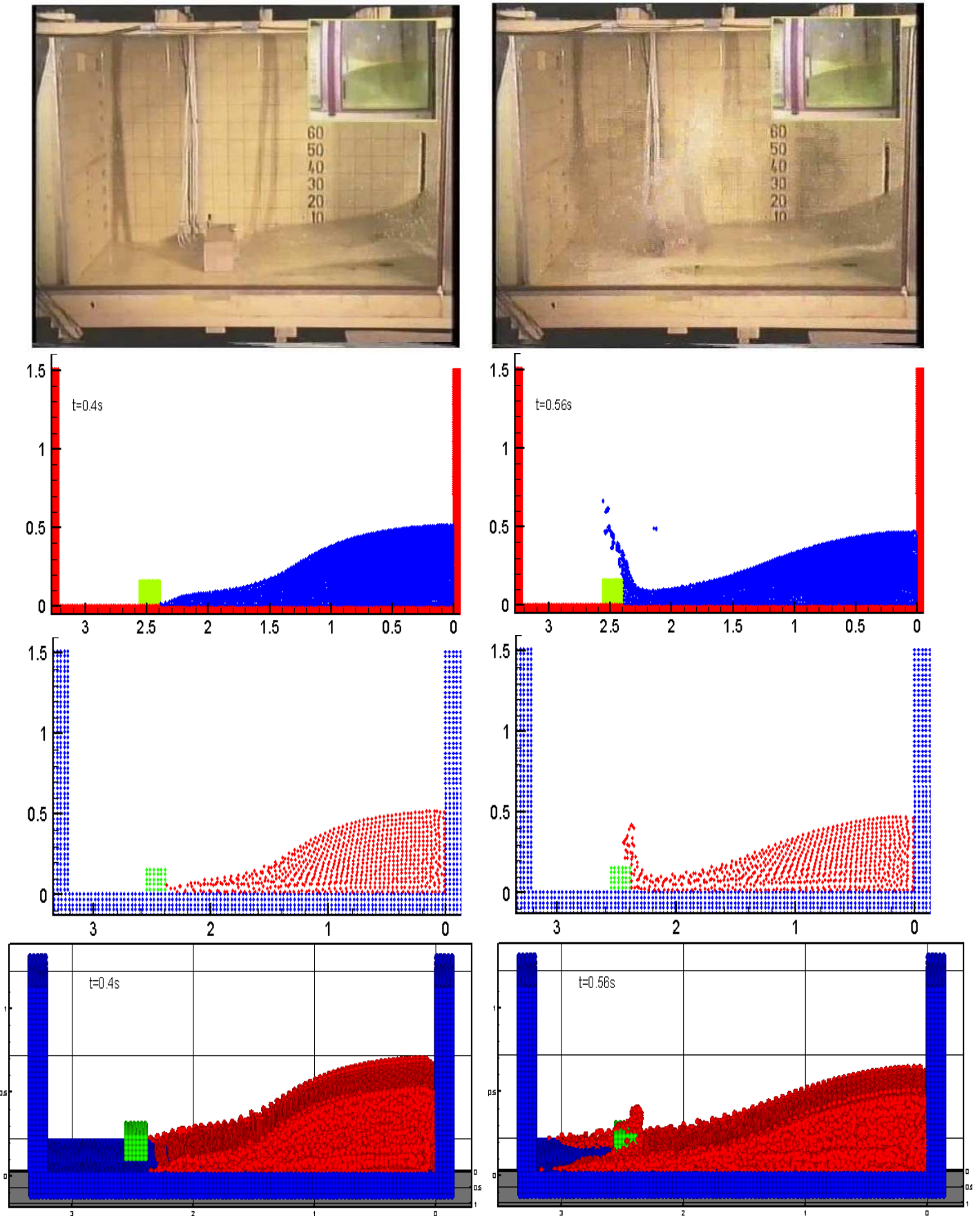
Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο δισδιάστατος κώδικας προσομοιώνει ικανοποιητικά το πραγματικό φαινόμενο. Για να ελέγξουμε την αξιοπιστία του τρισδιάστατου κώδικα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του 3d με αυτά του 2d για ανάλυση 40 σωματιδίων. Έτσι στο σχήμα 4.3.11 δίνεται η χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στα σημεία ελέγχου H.



Σχήμα 4.3.11 Χρονική μεταβολή του ύψους του νερού στα τέσσερα σημεία ελέγχου H.

Παρατηρούμε ότι αν και σε μερικά σημεία υπάρχει χρονική υστέρηση του τρισδιάστατου κώδικα, οι καμπύλες έχουν γενικά την ίδια μορφή. Οπότε η δισδιάστατη επίλυση αναπαράγει αρκετά ικανοποιητικά την εξέλιξη της ροής.

Στο σχήμα 4.3.12 δίνονται τα στιγμιότυπα της ροής για δισδιάστατο και τρισδιάστατο SPH και συγκρίνονται με αντίστοιχες εικόνες (φωτογραφίες) από το πείραμα, για τις χρονικές στιγμές 0.4s και 0.56s αντίστοιχα, με πολύ ικανοποιητική συμφωνία.

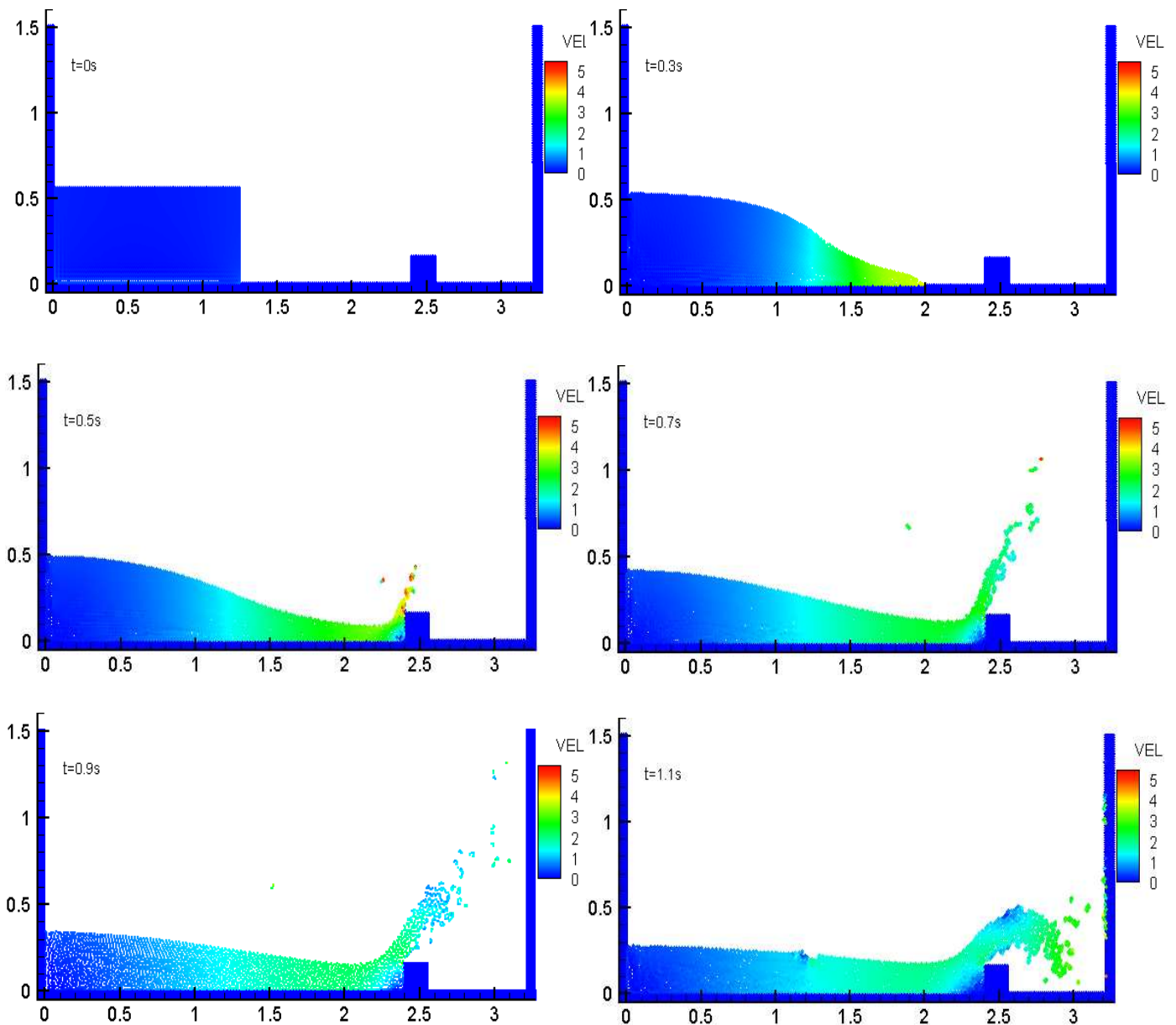


Σχήμα 4.3.12 Στιγμιότυπα της ροής τις χρονικές στιγμές 0.4s και 0.56s(πείραμα, 2d 100p, 2d 40p, 3d 40p)

Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι τα στιγμιότυπα ταιριάζουν μεταξύ τους με μια μικρή διαφορά στο 0.56 δευτερόλεπτο όπου, στο τρισδιάστατο και στο δισδιάστατο 40 σωματιδίων, το νερό δεν εκτινάσσεται τόσο ψηλά όσο στο πείραμα. Αύξηση του αριθμού των σωματιδίων μπορεί να δώσει ακόμη πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

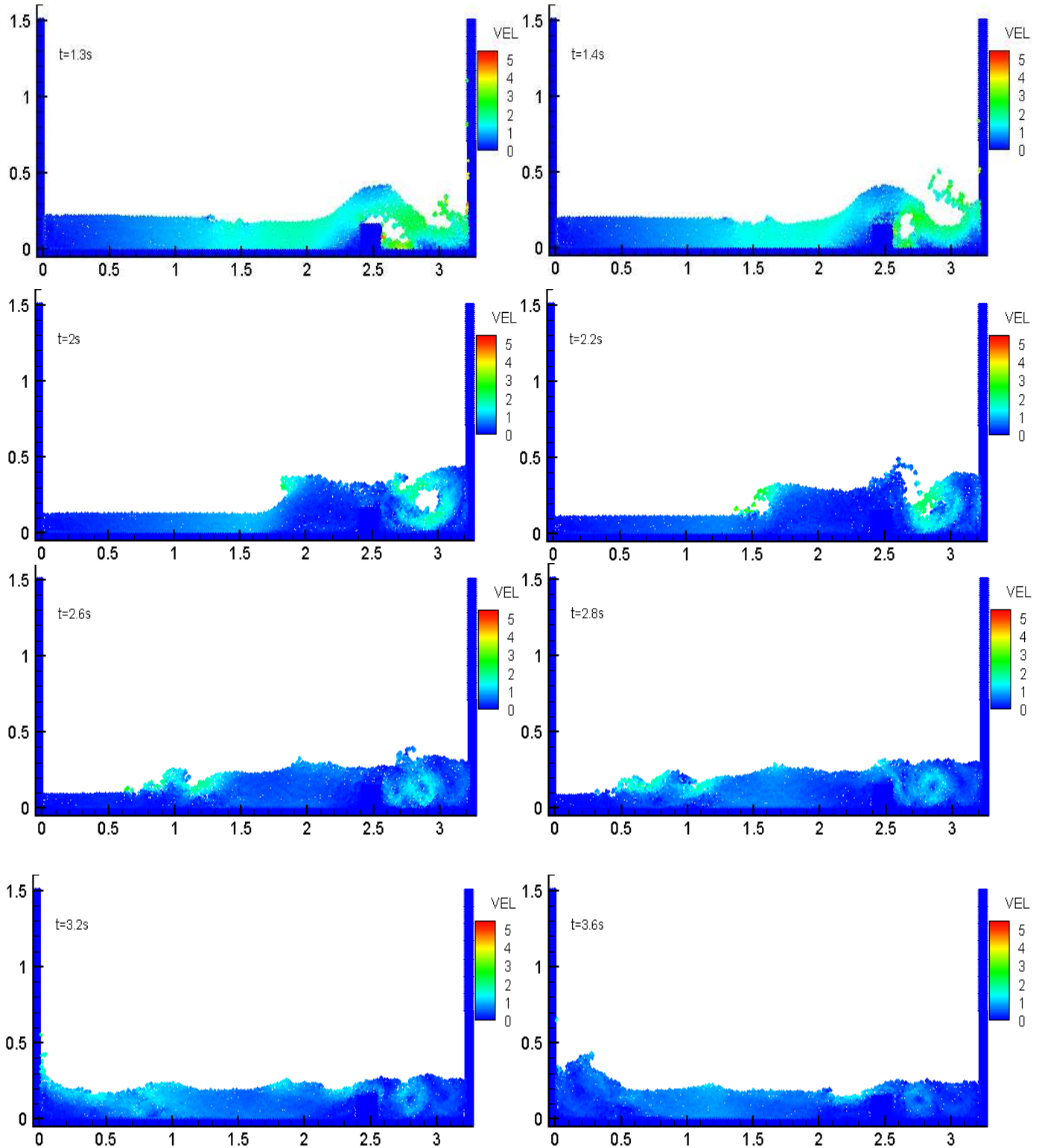
Στιγμιότυπα 2d ροής

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα στιγμιότυπα της δισδιάστατης ροής (100 σωματιδίων) για διάφορες χρονικές στιγμές παρουσιάζοντας έτσι την πορεία του φαινομένου. Ο χρωματισμός των σωματιδίων έγινε με βάση την απόλυτη ταχύτητα τους.

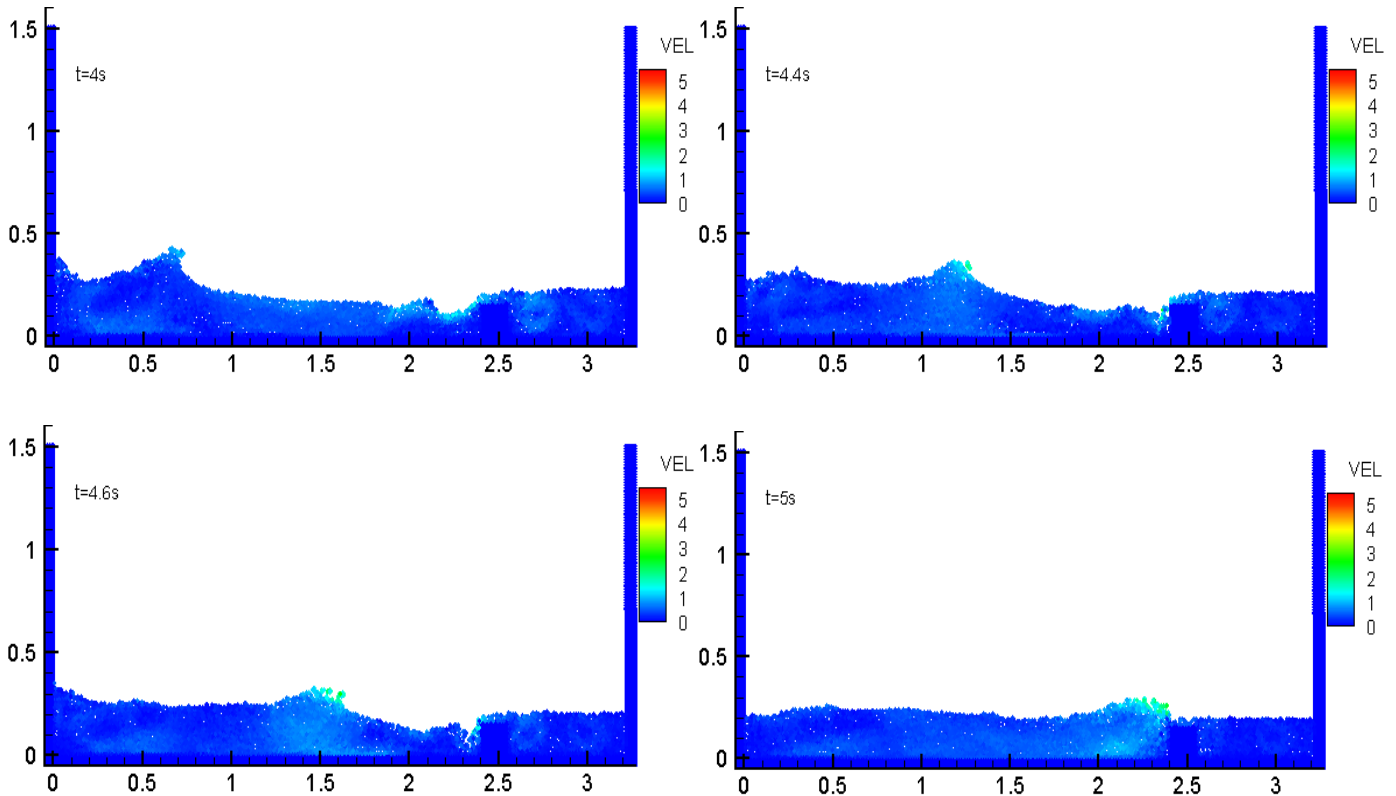


Σχήμα 4.3.13α Στιγμιότυπα της ροής του δισδιάστατου προβλήματος (100p).

Παρατηρείται ότι την χρονική στιγμή $t=0.5s$ το νερό προσκρούει στο εμπόδιο, εκτελεί άλμα και επιστρέφει στον πυθμένα μετά το εμπόδιο για $t=1.1s$. Κατόπιν η περιοχή μεταξύ εμπόδιου και δεξιού τοιχώματος γεμίζει με νερό ($t=1.4s$) και για $t=2s$ δημιουργείται ένα κύμα το οποίο κατευθύνεται προς το αριστερό τοίχωμα. Για $t=3.6s$ το κύμα ανακλάται στο αριστερό τοίχωμα και αποσβάνει μέχρι το $t=5s$.



Σχήμα 4.3.13β Στιγμιότυπα της ροής του δισδιάστατου προβλήματος (100ρ).

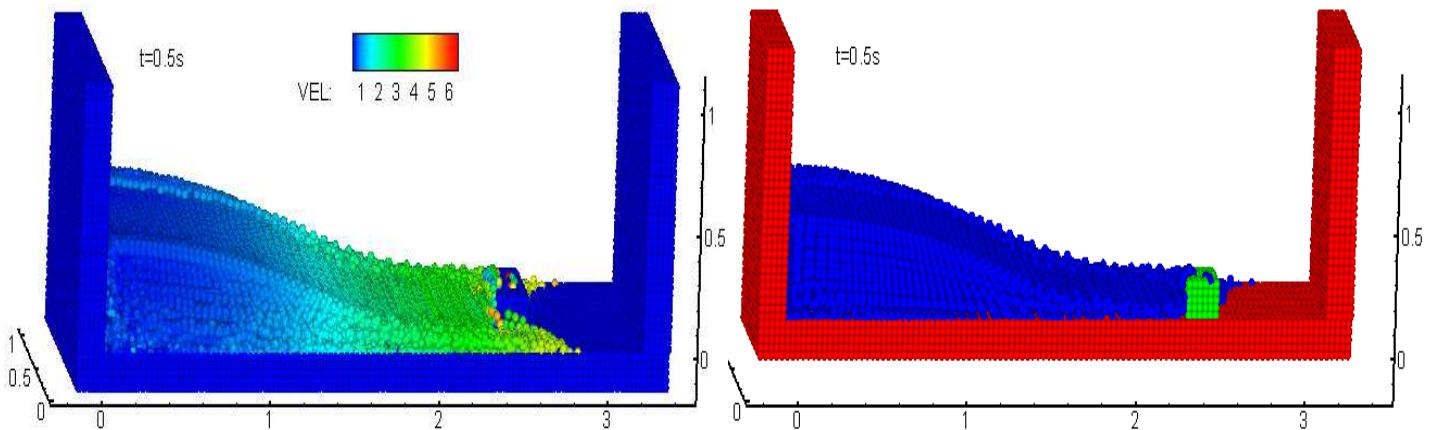


Σχήμα 4.3.13γ Στιγμιότυπα της ροής του δισδιάστατου προβλήματος (100ρ).

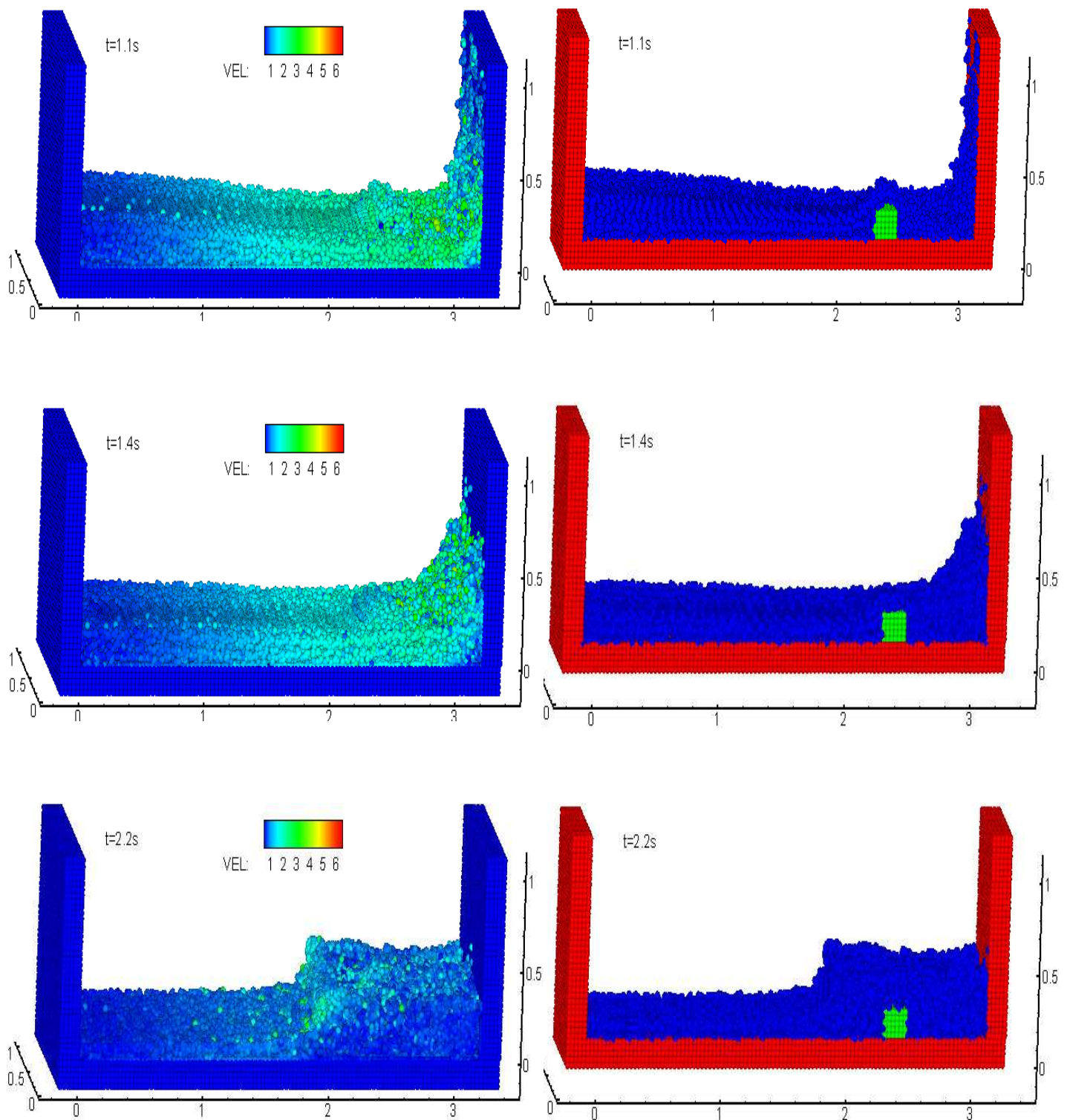
Στιγμιότυπα κώδικα 3d

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα στιγμιότυπα της τρισδιάστατης ροής (40 σωματιδίων) για διάφορες χρονικές στιγμές σε ολόκληρη προβολή και σε τομή. Ο χρωματισμός των σωματιδίων στη πλήρη προβολή έγινε με βάση την απόλυτη ταχύτητά τους.

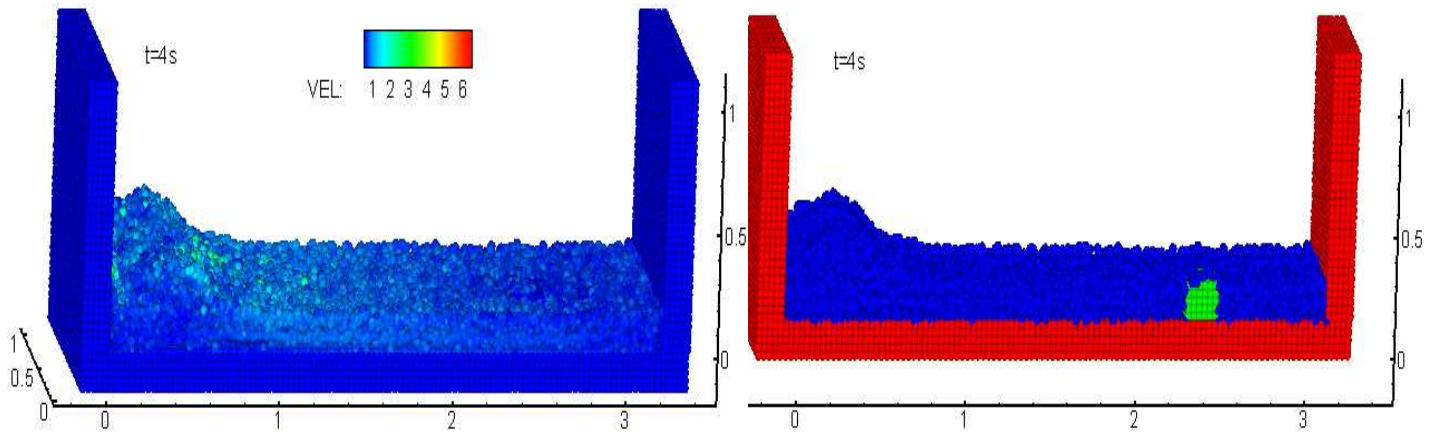
Παρατηρούμε ότι για $t=0.5s$ το νερό φτάνει στο εμπόδιο, για $t=1.4s$ γίνεται αναδίπλωση και δημιουργία κύματος για $t=2.2s$. Τέλος το κύμα που δημιουργήθηκε φτάνει στο αριστερό τοίχωμα και ανακλάται την χρονική στιγμή $t=4s$.



Σχήμα 4.3.14α Στιγμιότυπα της ροής του τρισδιάστατου προβλήματος (40ρ).



Σχήμα 4.3.14β Στιγμιότυπα της ροής του τρισδιάστατου προβλήματος (40ρ).



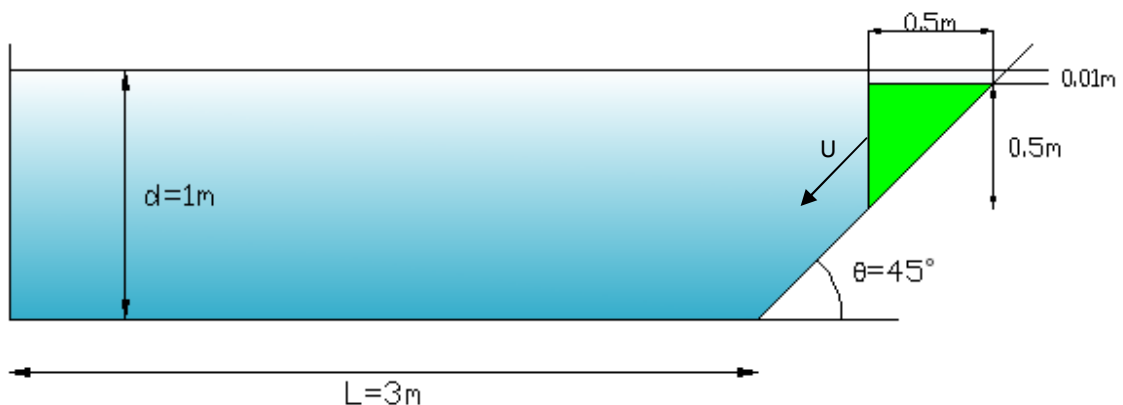
Σχήμα 4.3.14γ Στιγμιότυπα της ροής του τρισδιάστατου προβλήματος (40ρ).

4.4 Εφαρμογή 4: Κινούμενο Όριο

Σε αυτήν παράγραφο εξετάζεται η περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου SPH στην προσομοίωση δημιουργίας κυμάτων από την ολίσθηση συμπαγούς σφήνας μέσα σε νερό κατά μήκος κεκλιμένης επιφάνειας. Η προσομοίωση βασίζεται στο εργαστηριακό πείραμα που εκτελέστηκε από τον Heinrich (1992). Σε αυτό το πείραμα κύματα νερού παράγονται από την κίνηση μία σφήνας, η οποία αφήνεται να ολισθήσει πάνω σε πλαγιά με κλίση 45° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Με αυτόν το τρόπο γίνεται αναπαράσταση της δημιουργίας παράκτιων κυμάτων. Η εφαρμογή του κώδικα γίνεται για 2 διαστάσεις.

Στοιχεία του προβλήματος.

Η διατομή της σφήνας είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με διαστάσεις $0.5\text{m} \times 0.5\text{m}$. Το βάθος του νερού είναι 1m και το πάνω μέρος της σφήνας είναι 1cm κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια. Η κεκλιμένη επιφάνεια ξεκινά στα 3m από τον αριστερό τοίχο και έχει κλίση 45° . Η υπολογιστική περιοχή έχει μήκος 4.5m και ύψος 1.5m . Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα 4.4.1



Σχήμα 4.4.1. Αρχικές συνθήκες της περίπτωσης ολίσθησης σφήνας κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου 45° .

Η σφήνα την χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ ξεκινά από την ηρεμία, κάνει επιταχυνόμενη κίνηση η οποία διαρκεί 0.4s και μετά κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η κατακόρυφη ταχύτητα, η οποία είναι ίση με την οριζόντια, δίνεται από την σχέση (Ataie .κ.α, 2007)

$$v(t) \begin{cases} c_1 \tanh(c_2 t), & t \leq 0.4\text{s} \\ 0.6 & t > 0.4\text{s} \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές τιμές και για τους υπολογισμούς έλαβαν την τιμή 86 και 0.0175 αντίστοιχα. Έτσι αφού είναι γνωστή η ταχύτητα, μπορεί να υπολογιστεί και η θέση της σφήνας για κάθε χρονική στιγμή. Επίσης τα σωματίδια της σφήνας συνεισφέρουν με την ταχύτητα τους στην μεταβολή των χαρακτηριστικών των σωματιδίων του νερού.

Στοιχεία του κώδικα.

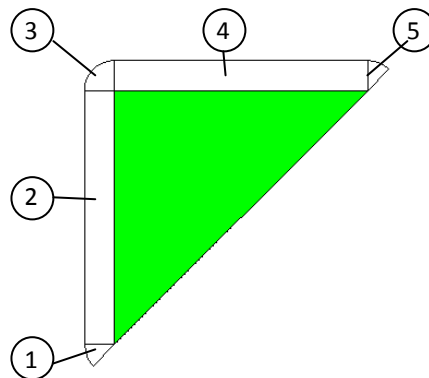
Κατά την εφαρμογή του κώδικα, το χρονικό βήμα των υπολογισμών DT είναι $10^{-5}s$ και δημιουργείται αρχείο εξόδου που δίνει το στιγμιότυπο της ροής κάθε $0.02s$. Η αρχική απόσταση των σωματιδίων καθορίζεται από τον αριθμό των σωματιδίων μεταξύ ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα. Έτσι για 50 σωματίδια η απόσταση γίνεται $D=0.02m$. Το κάθε τοίχωμα έχει πάχος 5 σωματίδια. Ο αριθμός σωματιδίων της σφήνας, των τοιχωμάτων και του νερού δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Σωματίδια	
Σφήνα	300 p
Νερό	8379 p
Τοιχώματα	1220 p
Σύνολο	9899 p
απόσταση D	0.02m
χρόνος	423min

Δημιουργήθηκαν 220 αρχεία-στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε 4.4s του φαινομένου και ο υπολογιστικός χρόνος ήταν 423min σε 8 παράλληλους επεξεργαστές, ταχύτητας 2 GHz ο καθένας.

Οριακές Συνθήκες.

Για την αποφυγή εισχώρησης σωματιδίων του νερού στα σωματίδια της σφήνας, εφαρμόζονται στα όρια αυτής, δυνάμεις Lennard-Jones. Η περιοχή επίδρασης αυτών των δυνάμεων φαίνεται στο σχήμα 4.4.2 με απόσταση $r_0=0.45D$ και χωρίζεται σε 5 τμήματα. Στα τμήματα 2 και 4 τα σωματίδια του νερού δέχονται απωστικές δυνάμεις με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια. Στα τμήματα 1, 3 και 5 τα σωματίδια του νερού δέχονται απωστικές δυνάμεις με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το σωματίδιο και την γωνία της σφήνας.

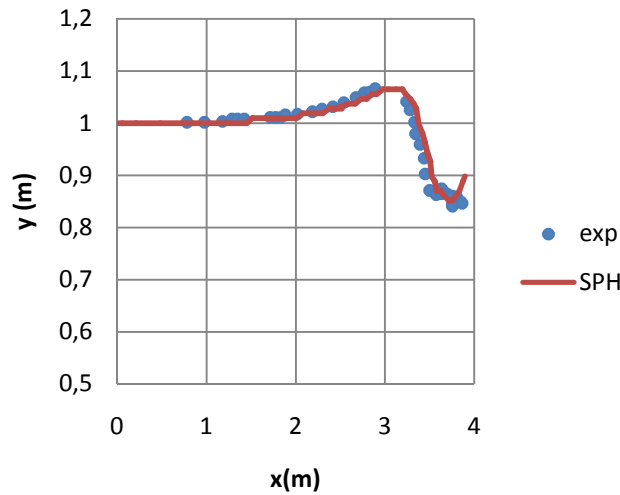


Σχήμα 4.4.2 Περιοχή εφαρμογής δυνάμεων Lennard-Jones γύρω από τη σφήνα.

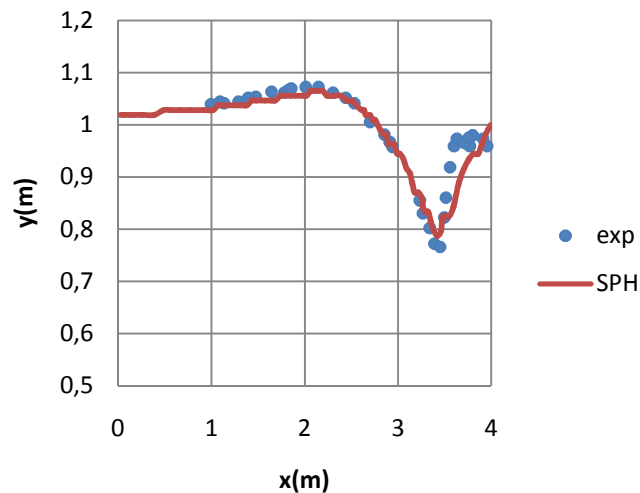
Στην κάτω δεξιά επιφάνεια δεν είναι αναγκαίες οι δυνάμεις αυτές γιατί η σφήνα εφάπτεται της πλαγιάς και τα σωματίδια του νερού απωθούνται από το τοίχωμα της κεκλιμένης επιφάνειας. Σημειώνεται ότι η ύπαρξη του κινούμενου ορίου δεν προκαλεί καμία πρόσθετη τροποποίηση ή επιβάρυνση του αλγορίθμου, γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα της μεθόδου SPH σε τέτοιες περιπτώσεις, έναντι των πλεγματικών μεθόδων.

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Στα σχήματα 4.4.3 και 4.4.4 γίνεται σύγκριση της μεθόδου SPH και του πειράματος για τις χρονικές στιγμές $t=0.5s$ και $t=1s$. Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά, ειδικά για $t=0.5s$ όπου οι καμπύλες συμπίπτουν, ενώ για $t=1s$ υπάρχει μια μικρή απόκλιση στην δεξιά περιοχή.



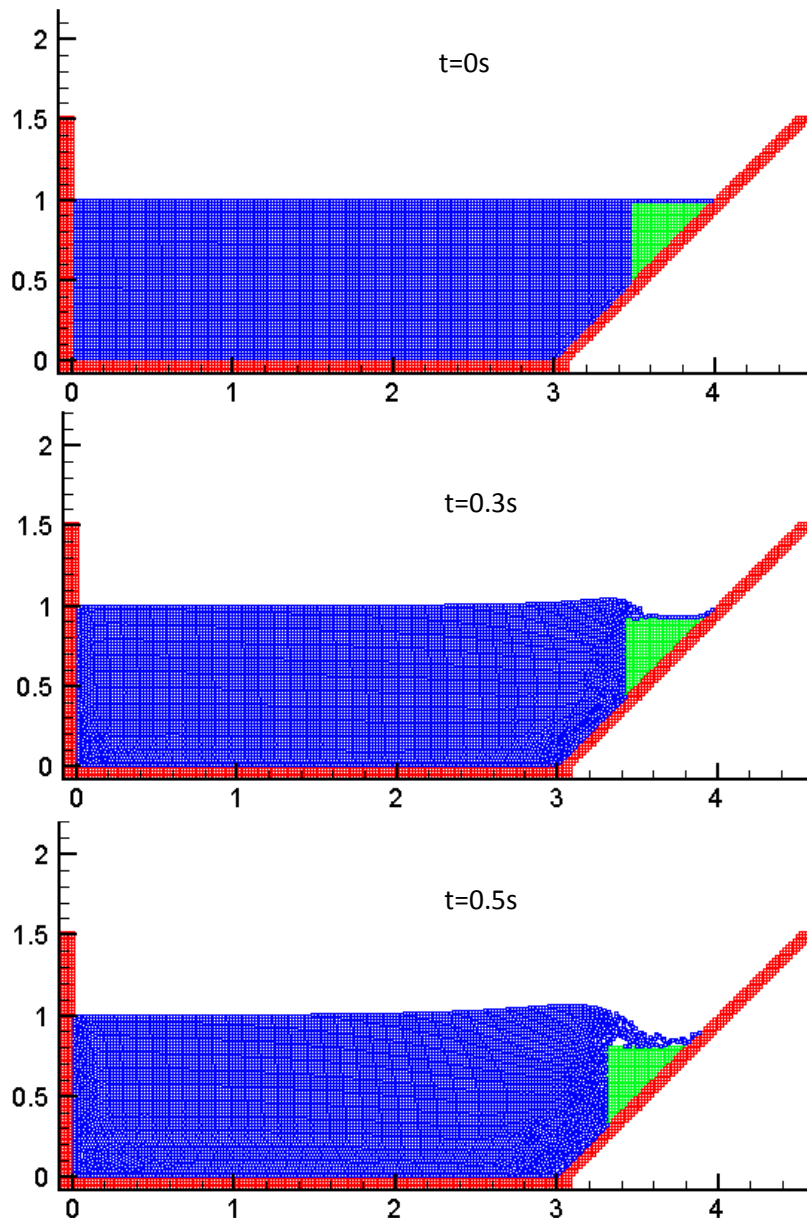
Σχήμα 4.4.3 Προφίλ ελεύθερης επιφάνειας τη χρονική στιγμή $t=0.5s$



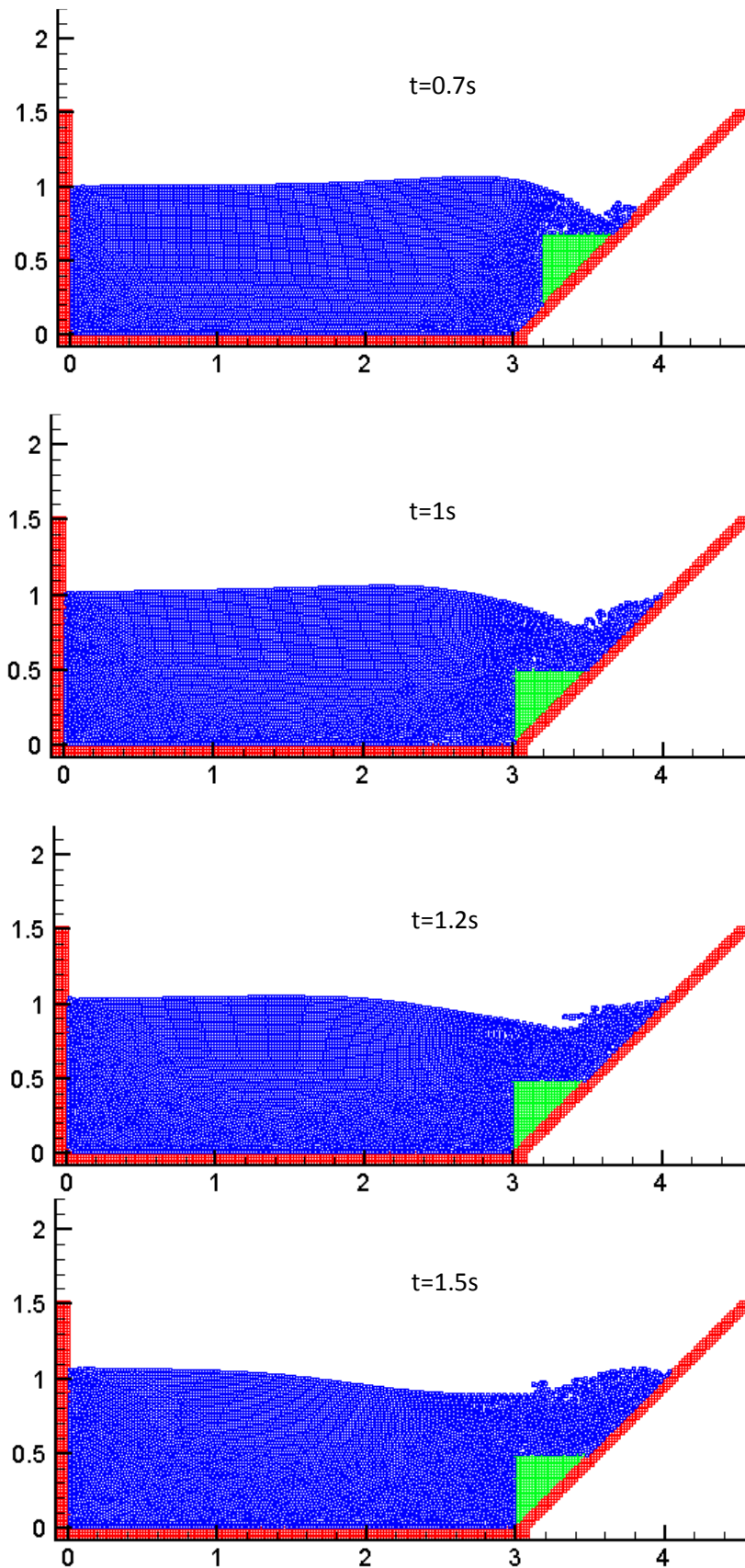
Σχήμα 4.4.4 Προφίλ ελεύθερης επιφάνειας τη χρονική στιγμή $t=1s$

Στιγμιότυπα ροής

Στα σχήματα 4.4.5 δίνεται η κίνηση της σφήνας στην κεκλιμένη επιφάνεια και η δημιουργία κυμάτων για διάφορες χρονικές στιγμές μέχρι $t=4s$ δείχνοντας την σταθερότητα της μεθόδου SPH να προσομοιώνει φαινόμενα για σχετικά μεγάλα χρονικά διαστήματα. Για $t=0.3s$ φαίνεται η δημιουργία του πρώτου κύματος και η μετακίνησή του προς τα αριστερά. Το πρώτο κύμα φτάνει στον αριστερό τοίχο τη χρονική στιγμή $t=1.5s$ όπου η ελεύθερη επιφάνεια φτάνει στο 1.09m και ανακλάται.

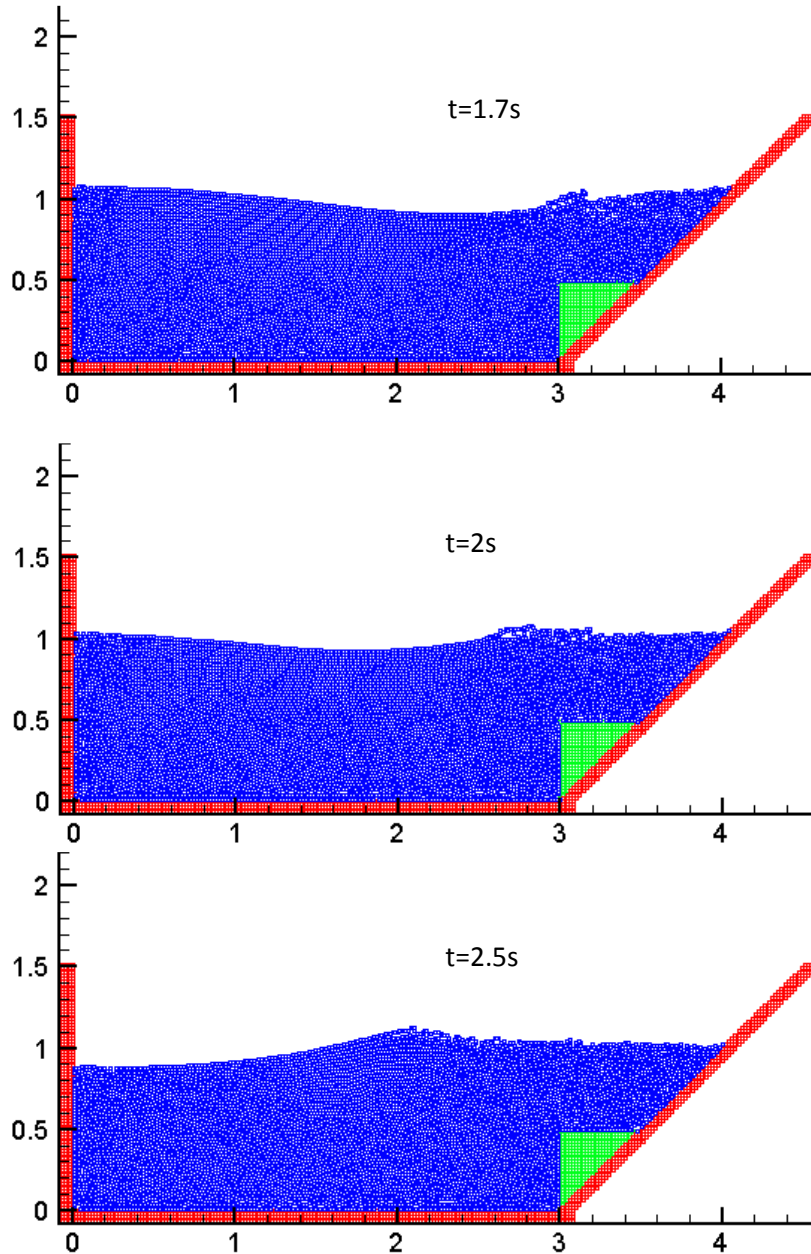


Σχήμα 4.4.5α. Στιγμιότυπα της ροής για $t=0, 0.3$ και $0.5s$.

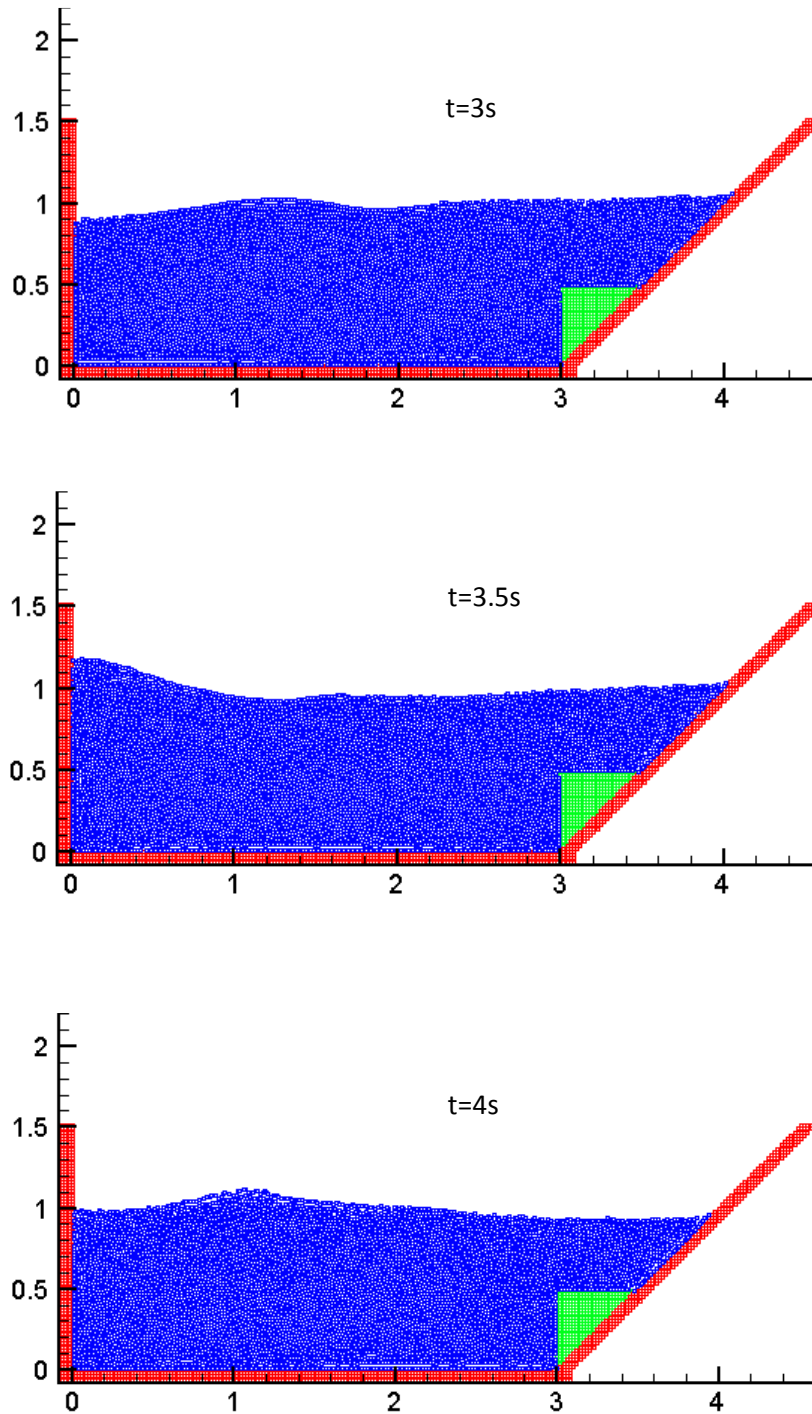


Σχήμα 4.4.5β. Στιγμιότυπα της ροής για $t=0.7, 1, 1.2$ και $1.5s$.

Την ίδια χρονική στιγμή εμφανίζεται στα δεξιά ένα δεύτερο κύμα το οποίο κινείται αριστερά και συναντά το ανακλώμενο πρώτο κύμα την χρονική στιγμή 2.5. Τέλος, από το 3^ο δευτερόλεπτο και μετά, η ελεύθερη επιφάνεια τείνει προς την ηρεμία με ένα μικρό και μειούμενο προοδευτικά κυματισμό.



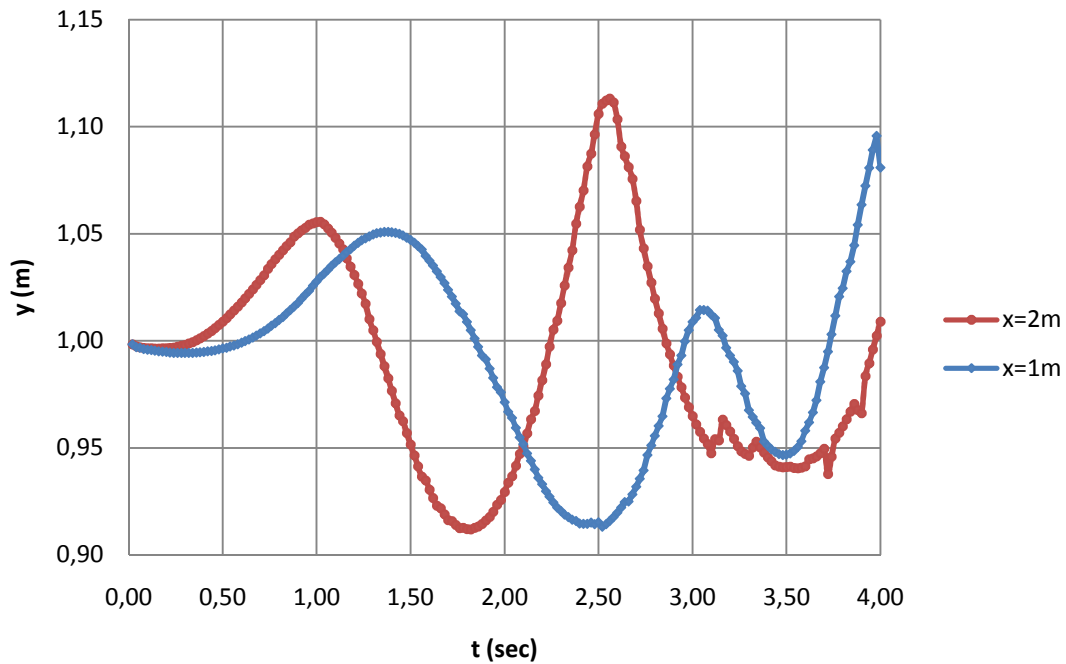
Σχήμα 4.4.5γ. Στιγμιότυπα της ροής για $t= 1.7, 2$ και $2.5s$



Σχήμα 4.4.5δ. Στιγμιότυπο της ροής για $t=3, 3.5$ και $4s$

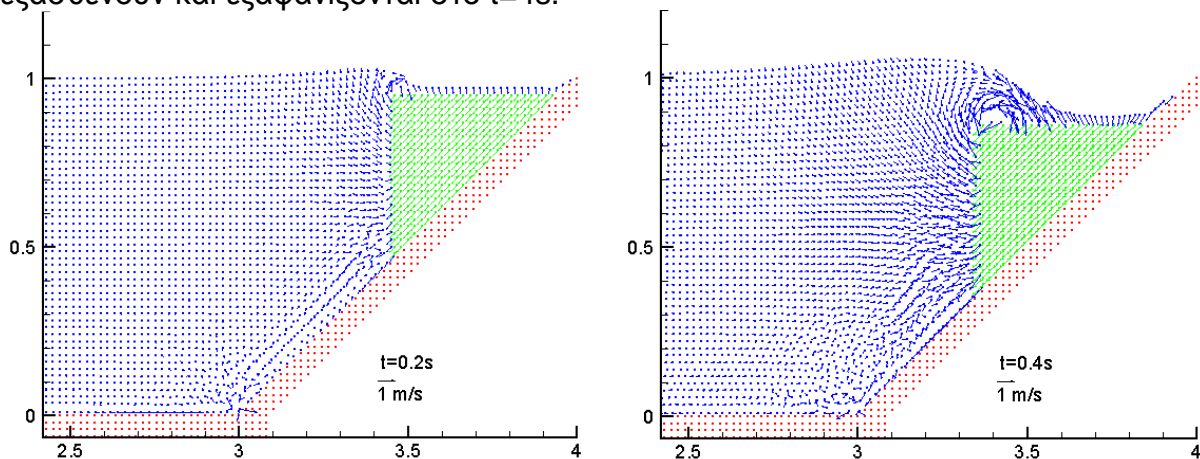
Άλλα αποτελέσματα

Στο σχήμα 4.4.6 παρουσιάζεται η ταλάντωση της ελεύθερης επιφάνειας σε απόσταση 1 και 2 μέτρα από τον αριστερό τοίχο.

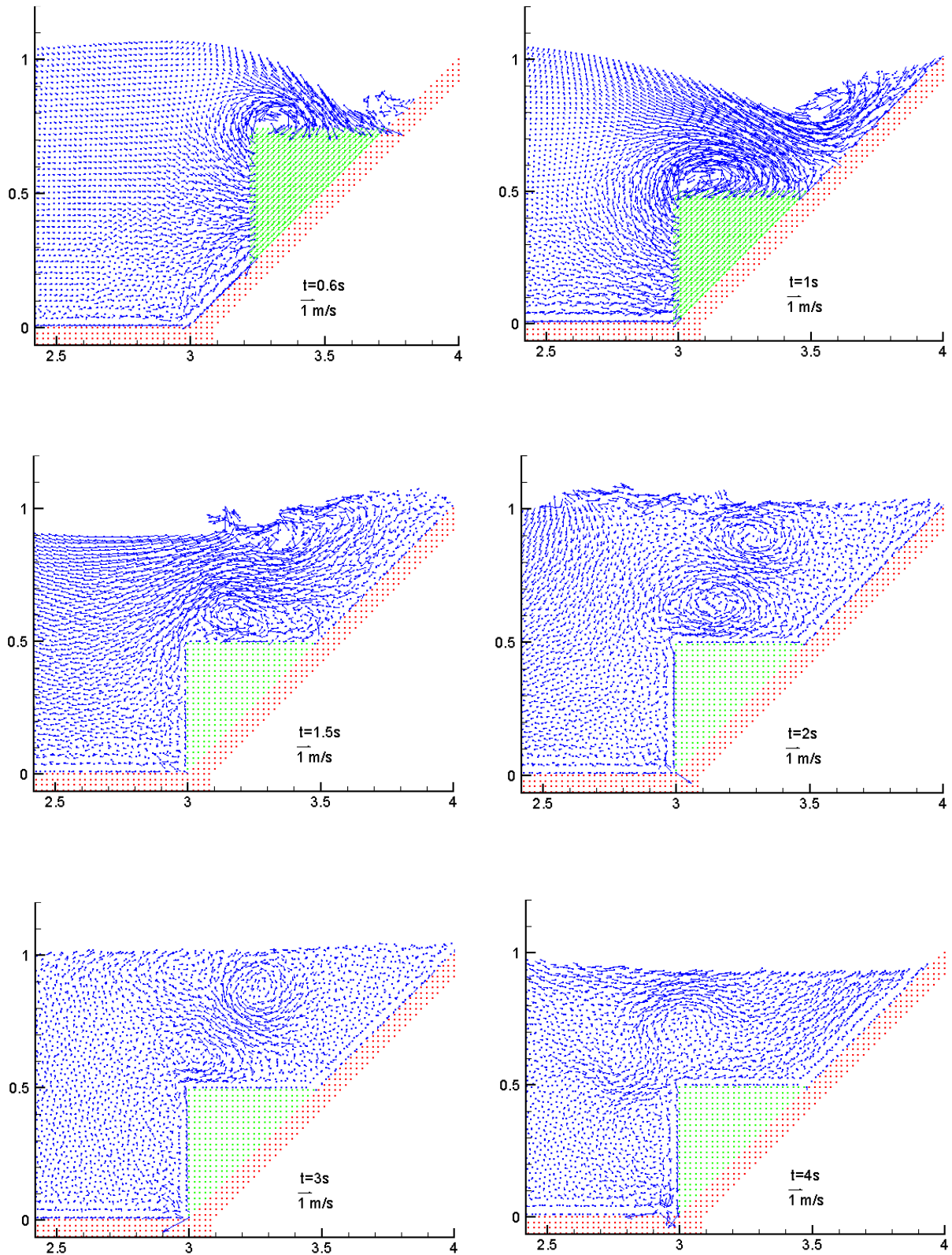


Σχήμα 4.4.6 Θέση ελεύθερης επιφάνειας σε απόσταση 1m και 2m από το αριστερό τοίχωμα για διάφορες χρονικές στιγμές.

Τέλος, στα σχήματα 4.4.7 παρουσιάζεται το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων. Στο 0.4s φαίνεται η κίνηση του νερού προς το πάνω μέρος της σφήνας κάνοντας ένα «αλματάκι». Ένα μέρος του νερού κινείται προς την κεκλιμένη επιφάνεια και το υπόλοιπο κινείται προς τα αριστερά δημιουργώντας μία δίνη μέχρι το πρώτο δευτερόλεπτο. Το νερό που κινήθηκε προς τα δεξιά επιστρέφει και δημιουργεί μία δεύτερη δίνη αντίθετης κατεύθυνσης από την πρώτη ($t=2s$). Μετά το τρίτο δευτερόλεπτο οι δίνες εξασθενούν και εξαφανίζονται στο $t=4s$.



Σχήμα 4.4.7α. Διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων της ροής για $t=0.2$ και $0.4s$



Σχήμα 4.4.7β. Διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων της ροής για $t= 0.6, 1, 1.5, 2, 3$ και $4s$

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα – Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Η υπολογιστική μέθοδος SPH που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε σε προβλήματα ρευστομηχανικής που περιλαμβάνουν ελεύθερες επιφάνειες και έδειξε ότι η μη-πλεγματική μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει τις δυσκολίες που συναντούν οι συμβατικές πλεγματικές μέθοδοι στον υπολογισμό ροών διφασικών ή με ελεύθερη επιφάνεια καθώς και ροών μη-μόνιμων ή με πολύπλοκες γεωμετρίες. Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων που παράγονται με την μέθοδο SPH με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα παρατηρήσαμε ότι υπάρχει πάντα πολύ καλή ποιοτική συμφωνία και στις περισσότερες περιπτώσεις και καλή ποσοτική συμφωνία.

Στην περίπτωση της δέσμης που προσκρούει με μεγάλη ταχύτητα πάνω σε επίπεδη πλάκα η προσομοίωση της ροής δίνει αποδεκτά αποτελέσματα. Όμως παρουσιάστηκε πρόβλημα στον ακριβή ποσοτικό προσδιορισμό της πίεσης, το οποίο εξαρτάται από την γωνία πρόσπτωσης.

Στις δύο περιπτώσεις κατάρρευσης στήλης νερού τα αποτελέσματα ήταν επίσης πολύ ικανοποιητικά και με ποσοτική ταύτιση των αποτελεσμάτων στις διαστάσεις εφαρμογές, ενώ στις τρισδιάστατες είχαμε μια μικρή απόκλιση, η οποία οφείλεται στη χαμηλή σχετικά ανάλυση σωματιδίων που χρησιμοποιήθηκε, επειδή η αύξηση των σωματιδίων στον 3d κώδικα, αυξάνει υπερβολικά τον υπολογιστικό χρόνο, ακόμα και με παράλληλη επεξεργασία. Επίσης παρατηρήθηκε διακύμανση της πίεσης στην περίπτωση κατάρρευσης δεξαμενής νερού και πρόσκρουσής σε εμπόδιο, η οποία οφείλεται σε μεμονωμένα σωματίδια.

Τέλος, στην εφαρμογή που περιλαμβάνει κινούμενο όριο (ολισθαίνουσα σφήνα), η συμπεριφορά του νερού στην ελεύθερη επιφάνεια καθώς και στην περιοχή γύρω από την σφήνα, ήταν η επιθυμητή. Είναι προφανές, έτσι, η σημαντική δυνατότητα της μεθόδου SPH, έναντι των πλεγματικών μεθόδων, να προσομοιώνει περιπτώσεις με κινούμενα όρια χωρίς να προκαλεί καμία πρόσθετη τροποποίηση ή επιβάρυνση του αλγορίθμου.

Παρά τα θετικά αποτελέσματα, ο SPH κώδικας επιδέχεται αρκετές βελτιώσεις που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω μελέτης. Στην περίπτωση της 3d δέσμης μπορεί γίνει υπολογισμός συμμετρικών τμημάτων του jet ώστε να μπορεί να αυξηθεί ο αριθμός των σωματιδίων ή/και να μειωθεί ο υπολογιστικός χρόνος (Koukouninis κ.α.,2009).

Επίσης, θα πρέπει να εισαχθεί κάποιο μοντέλο τύρβης για να γίνει ακριβέστερη η προσομοίωση τυρβωδών ροών. Ακόμη, για την καλύτερη πρόβλεψη της μορφής των ελεύθερων επιφανειών μπορούν να ενσωματωθούν σχέσεις για τον υπολογισμό των επιφανειακών τάσεων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στη βιβλιογραφία υπάρχουν διαφορετικές προτάσεις για την αντιμετώπιση των οριακών συνθηκών σε στερεά όρια των τοιχωμάτων. Αξίζει να μελετηθεί κάποια εναλλακτική μέθοδος για να αποφευχθεί η σχέση Lennard-Jones σε πολύπλοκες γεωμετρίες, αφού παρατηρήσαμε ότι η χρήση της επιβαρύνει αρκετά το υπολογιστικό κόστος.

Για την ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου μπορεί να εφαρμοστεί ένα σχήμα ρυθμιζόμενου χρονικού βήματος ολοκλήρωσης. Δηλαδή σε κάθε βήμα να υπολογίζεται το επόμενο χρονικό βήμα σύμφωνα με τους χρονικούς περιορισμούς της σχέσης 2.53.

Επειδή ο υπολογιστικός χρόνος και η ακρίβεια των υπολογισμών εξαρτώνται από τον αριθμό των σωματιδίων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ρυθμιζόμενη τοπική πύκνωση των σωματιδίων σε συγκεκριμένες θέσεις του υπολογιστικού χώρου. Αυτό συνεπάγεται την δυνατότητα μεταβολής του χαρακτηριστικού μήκους h , ώστε να υπάρχει επαρκής αριθμός γειτονικών σωματιδίων. Έτσι βελτιώνεται η ακρίβεια στις επιθυμητές θέσεις χωρίς επιπλέον υπολογιστικό κόστος.

Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν φάνηκε η δυσκολία του ακριβούς προσδιορισμού του πεδίου της πίεσης, παρά την εφαρμογή της τεχνητής συμπίεστικότητας. Είναι αναγκαία, λοιπόν, η ενσωμάτωση κατάλληλων σχέσεων για την βέλτιστη προσομοίωση της πίεσης.

Τέλος για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που εμφανίζονται όταν δημιουργούνται περιοχές με λίγα μεμονωμένα σωματίδια μπορεί να εφαρμοστεί κάποια μέθοδος διάσπασης αυτών των σωματιδίων σε μικρότερα σωματίδια ώστε ο προσεγγιστικός πυρήνας W να λειτουργεί ακριβέστερα.

Η μέθοδος Υδροδυναμικής Ρεόντων Σωματιδίων είναι όντως μια πολλά υποσχόμενη μέθοδος στην μελέτη φαινομένων ρευστομηχανικής και οι δυνατότητές της πιστεύεται ότι θα αυξηθούν με την συνεχιζόμενη ανάπτυξη της τεχνολογίας στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

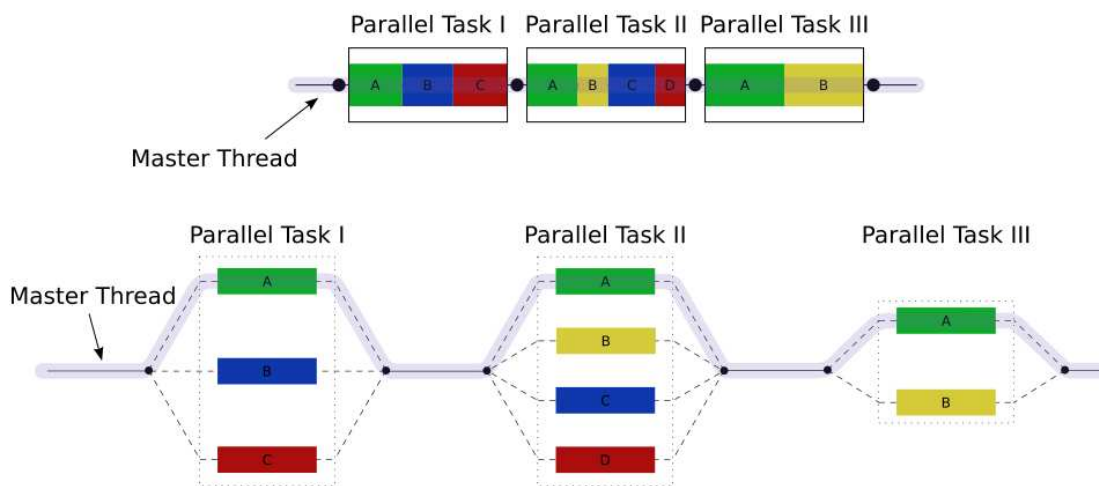
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα «Α»

Στοιχεία παράλληλης επεξεργασίας με τη μέθοδο OpenMP.

Το OpenMP είναι μια διεπαφή εφαρμογών προγραμμάτων (Application Program Interface - API) το οποίο χρησιμοποιείται για να παραλληλίσουμε προγράμματα σε αρχιτεκτονικές συστημάτων κοινής μνήμης. Το προγραμματιστικό μοντέλο του OpenMP είναι βασισμένο σε παραλληλισμό με νήματα. Μια διεργασία κοινής μνήμης αποτελείται από πολλά νήματα και το OpenMP βασίζεται στο χαρακτηριστικό αυτό. Όπως φαίνεται στο Σχήμα A.1, ένα Master νήμα γεννά ομάδες από νήματα όταν χρειάζεται. Το master νήμα εκτελεί τις εντολές σειριακά μέχρι να φτάσει την πρώτη παράλληλη περιοχή. Η ομάδα των νημάτων που περιλαμβάνεται σε αυτή την παράλληλη περιοχή εκτελείται παράλληλα. Όταν η ομάδα τελειώσει, τότε τα νήματα συγχρονίζονται και τερματίζουν, αφήνοντας μόνο το master νήμα και διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές χρειάζεται.

Τα νήματα επικοινωνούν μεταξύ τους με κοινές μεταβλητές.



Σχήμα A.1. Σχηματική περιγραφή του Master νήματος και των παραλλήλων.

Για να γίνει αυτή η παραλληλοποίηση, ο προγραμματιστής θα πρέπει να δώσει στον μεταφραστή (compiler) οδηγίες οι οποίες ενσωματώνονται στον κώδικα της Fortran.

Οι βασικές οδηγίες που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα SPH παρουσιάζονται παρακάτω.

Κάθε γραμμή του κώδικα που αναφέρεται στην παράλληλη επεξεργασία ξεκινάει με την ακόλουθη μορφή

`!$OMP`

έτσι τα λειτουργικά συστήματα που δεν υποστηρίζουν παράλληλη επεξεργασία λαμβάνουν την γραμμή ως σχόλιο. Επίσης όταν γίνεται αλλαγή γραμμής στις οδηγίες, η νέα γραμμή ξεκινά ως εξής

!\$OMP&

Μια περιοχή του κώδικα που πρόκειται να εκτελεστεί παράλληλα δηλώνεται με τις παρακάτω εντολές στην αρχή και στο τέλος του:

```
!$OMP PARALLEL
```

```
...  
...  
...  
...
```

```
!$OMP END PARALLEL
```

Ο χρήστης πρέπει να καθορίζει τον αριθμό των νημάτων που θα εκτελέσουν τον κώδικα. Αυτό γίνεται με την εντολή:

```
NUM_THREADS(#)
```

Αν μέσα στην παράλληλη περιοχή πρέπει να εκτελεστεί μία επανάληψη (loop) αυτή δηλώνεται στην αρχή και τέλος της ως εξής:

```
!$OMP DO
```

```
DO.....
```

```
...  
...  
...
```

```
END DO
```

```
!$OMP END DO
```

Επειδή η μνήμη που χρησιμοποιείται από τους παράλληλους επεξεργαστές είναι κοινή, πρέπει να καθορίζεται ποιες από τις μεταβλητές θα είναι κοινές και ποιες θα είναι ιδιωτικές για κάθε νήμα. Για τις κοινές μεταβλητές γίνεται δέσμευση μίας θέσης στη μνήμη και έχουν πρόσβαση όλοι οι επεξεργαστές ενώ για τις ιδιωτικές δεσμεύονται τόσες θέσεις όσα και τα νήματα και ο κάθε επεξεργαστής αναφέρεται στις δικές του μεταβλητές.

Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην ταξινόμηση των μεταβλητών γιατί μπορεί να αλλοιωθούν τα αποτελέσματα του κώδικα. Για παράδειγμα έστω ότι υπάρχει μία μεταβλητή με το όνομα TEMP στην οποία αποθηκεύεται το αποτέλεσμα μιας πράξης για να χρησιμοποιηθεί κάπου αλλού και έστω ότι όλες αυτές οι πράξεις ανήκουν στο τμήμα του κώδικα που εκτελείται παράλληλα. Αν αυτή η μεταβλητή δηλωθεί ως κοινή ο επεξεργαστής A θα αποθηκεύσει στη μεταβλητή μια τιμή, κατόπιν στην ίδια μεταβλητή ο επεξεργαστής B θα αποθηκεύσει στην ίδια μεταβλητή μια άλλη τιμή αποτελεσμα των δικών του πράξεων. Όταν θα καλέσει ο A την τιμή της μεταβλητής TEMP θα λάβει την τροποποιημένη από τον B τιμή, έτσι τα αποτελέσματα του A θα είναι σφαλμένα. Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι οι μεταβλητές που δηλώνονται ως ιδιωτικές διαγράφονται με την ένωση των νημάτων στο master νήμα. Τέλος οι πίνακες δηλώνονται χωρίς παρένθεση.

Η δήλωση των μεταβλητών γίνεται με δύο τρόπους. Ο ένας τρόπος είναι να δηλωθούν η καθεμία ξεχωριστά, έτσι οι κοινές δηλώνονται ως εξής:

SHARED(μεταβλητή1, μεταβλητή2, ...)

και οι ιδιωτικές:

PRIVATE(μεταβλητή1, μεταβλητή2, ...)

Ο δεύτερος τρόπος είναι να δηλωθούν όλες μαζί με την εντολή DEFAULT. Η οδηγία αυτή καθορίζει τον αρχικό χαρακτηρισμό όλων των μεταβλητών, δηλαδή είτε όλες κοινές

DEFAULT(SHARED)

είτε όλες ιδιωτικές

DEFAULT(PRIVATE)

Έτσι δίνουμε σε όλες τις μεταβλητές τον χαρακτηρισμό των περισσότερων μεταβλητών με την εντολή DEFAULT και κατόπιν χαρακτηρίζουμε ξεχωριστά τις υπόλοιπες.

Ένα παράδειγμα με όλα τα παραπάνω δίνεται στο τμήμα του κώδικα SPH

```
!$OMP PARALLEL DEFAULT(PRIVATE) SHARED(NTOT,X,Y,Z,HL1,HL2,HL3,  
!$OMP& XMIN,YMIN,ZMIN,GHX,GHY,GHZ,MIN,MPAR,NWAL,TERM0,  
!$OMP& TINY,H,DEN,DENCOR) NUM_THREADS(8)  
!$OMP DO  
  
    DO 201 i=nwal+1,ntot  
        ...  
        ...  
        ...  
    ENDDO  
!$OMP END DO  
...  
...  
!$OMP DO  
    DO ID=NWAL+1,NTOT  
  
        DEN(ID)=DENCOR(ID)  
  
    END DO  
!$OMP END DO  
!$OMP END PARALLEL
```


Παράρτημα «B»

Τμήματα Κώδικα SPH

Σε αυτό το παράρτημα δίνονται κάποια τμήματα του κώδικα εφαρμογής της μεθόδου SPH για την περίπτωση της πρόσπτωσης δέσμης νερού πάνω σε επίπεδη πλάκα.

Αρχική τοποθέτηση σωματιδίων δέσμης.

Τα σωματίδια της δέσμης νερού τοποθετούνται σε διαδοχικές στρώσεις δακτυλίων. Στην αρχή καθορίζεται πόσες στρώσεις θα αποτελούν το αρχικό μήκος της δέσμης στην μεταβλητή NHOR. Κατόπιν τοποθετείται το κεντρικό σωματίδιο και μετατοπίζεται ανάλογα με την ακτίνα πρόσπτωσης. Στη συνέχεια τοποθετούνται τα σωματίδια σε κάθε δακτύλιο με τέτοιο τρόπο ώστε το τόξο μεταξύ δύο σωματιδίων να είναι ίσο με την απόσταση D (κεφάλαιο 3). Κάθε δακτύλιος απέχει από τούς γειτονικούς του κατά D.

Κάθε σωματίδιο του δακτυλίου έχει μια γωνιακή θέση ως προς το κέντρο και τον, κάθετο στη δέσμη, άξονα y. Η γωνία αυτή μεταβάλλεται από δύο μεταβλητές TUR και RANGL. Η TUR περιστρέφει τον δακτύλιο κατά γωνία ίση με μισή γωνιακή απόσταση του αμέσως εσωτερικού δακτυλίου και η μεταβλητή RANGL περιστρέφει τον δακτύλιο κατά γωνία ίση με μισή γωνιακή απόσταση του ίδιου δακτυλίου της προηγούμενης στρώσης. Τέλος γίνεται στροφή και μετατόπιση της δέσμης σύμφωνα με τη γωνία πρόσπτωσης.

```

NHOR=INT(XJET/DXY+0.5)+1
ICOUN=0
I=NWAL
DO N1=1,NHOR
XFL=XJET-FLOAT(N1-1)*DXY

C*****Κεντρικό Σωματίδιο*****
I=I+1
X(I)=XFL
Y(I)=0.
Z(I)=0.

YFL=Y(I)
Y(I)=Y(I)*COS(ANGLE)-(XWAL-X(I))*SIN(ANGLE)
X(I)=X(I)-YFL*SIN(ANGLE)+(XWAL-X(I))*(1.-COS(ANGLE))

TUR=0.0
ICOUN=ICOUN+1

C*****Σωματίδια Δακτυλίων*****
DO N2=0,NDIV-1
  ARCN=2.*PI*(1.+FLOAT(N2))
  NARC=INT(ARCN)
  COUN=FLOAT(1-MOD(ICOUN,2))
    
```

```

RANGL=2.*PI/FLOAT(NARC)*COUN*0.5
DO N3=0,NARC-1
  I=I+1
  FI=2.*PI/FLOAT(NARC)*FLOAT(N3)

  X(I)=XFL
  Y(I)=(DXY+FLOAT(N2)*DXY)*SIN(FI+RANGL+TUR)
  Z(I)=(DXY+FLOAT(N2)*DXY)*COS(FI+RANGL+TUR)

C***** Στροφή και μετατόπιση*****
  YFL=Y(I)
  Y(I)=Y(I)*COS(ANGLE)-(XWAL-X(I))*SIN(ANGLE)
  X(I)=X(I)-YFL*SIN(ANGLE)+(XWAL-X(I))*(1.-COS(ANGLE))

  END DO
  TUR=TUR+PI/FLOAT(NARC)

END DO
END DO

```

Δημιουργία υπολογιστικού πλέγματος - Τοποθέτηση σωματιδίων στο πλέγμα

Καθορίζεται ο αριθμός και το μήκος των κελιών για κάθε διάσταση x,y,z. Μετά μηδενίζονται οι πίνακες και αρχίζει η ταξινόμηση των σωματιδίων στα κελιά τους. Κάθε σωματίδιο εκτός από τον καθολικό αριθμό του (ταυτότητα), αποκτά και ένα τοπικό αριθμό στο κελί που ανήκει. Ο αριθμός αυτός αποθηκεύεται στην μεταβλητή NNP.

```

NI=INT((XMAX-XMIN)/H25+0.5)+1
NJ=INT((YMAX-YMIN)/H25+0.5)+1
NK=INT((ZMAX-ZMIN)/H25+0.5)+1
GHZ=(ZMAX-ZMIN)/FLOAT(NK-1)
GHX=(XMAX-XMIN)/FLOAT(NI-1)
GHY=(YMAX-YMIN)/FLOAT(NJ-1)
NI=NI+1
WRITE(*,*) 'NI,NJ,NK,GHX,GHY,GHZ '
WRITE(*,*) NI,NJ,NK,GHX,GHY,GHZ

C**** Μηδενισμός Πινάκων MIN,MPAR****
DO I=1,NI+3
  DO J=1,NJ+3
    DO K=1,NK+3
      MIN(I,J,K)=0.
      DO N=1,NPP
        MPAR(I,J,K,N)=0.
      END DO
    END DO
  END DO
END DO

```

```

NNPMX=0
NTOTVER=0

C*****Ταξινόμηση σωματιδίων*****
DO I=1,NTOT
  NNI=INT((X(I)-XMIN)/GHX)+2
  NNJ=INT((Y(I)-YMIN)/GHY)+2
  NNK=INT((Z(I)-ZMIN)/GHZ)+2

  MIN(NNI,NNJ,NNK)=MIN(NNI,NNJ,NNK)+1
  NNP=MIN(NNI,NNJ,NNK)

  IF(NNP.GT.NNPMX) NNPMX=NNP
  MPAR(NNI,NNJ,NNK,NNP)=I
  NTOTVER=NTOTVER+1
END DO

```

Επιλογή γειτονικών σωματιδίων - Υπολογισμός πυρήνα (kernel)

Για την επιλογή των γειτονικών σωματιδίων εντοπίζεται το κελί του βοηθητικού πλέγματος στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο και επιλέγονται τα γειτονικά κελιά. Κατόπιν ελέγχεται η απόσταση των σωματιδίων DR και αν είναι μικρότερη η ίση από το μήκος 2.5h υπολογίζεται η συνάρτηση εξομάλυνσης.

```

NNI=INT((X(I)-XMIN)/GHX)+2
NNJ=INT((Y(I)-YMIN)/GHY)+2
NNK=INT((Z(I)-ZMIN)/GHZ)+2

C*****Επιλογή γειτονικών κελιών*****
ISTA=NNI-1
IEND=NNI+1
JSTA=NNJ-1
JEND=NNJ+1
KSTA=NNK-1
KEND=NNK+1

DO II=ISTA,IEND
  DO JJ=JSTA,JEND
    DO KK=KSTA,KEND
      DO N1=1,MIN(II,JJ,KK)
        J=MPAR(II,JJ,KK,N1)

        DX=X(I)-X(J)
        DY=Y(I)-Y(J)
        DZ=Z(I)-Z(J)
        DR=SQRT(ABS(DX**2+DY**2+DZ**2)+TINY)
        DP=P(I)-P(J)
        DU=U(I)-U(J)
        DV=V(I)-V(J)
        DW=W(I)-W(J)

```



```

C*****KERNEL*****

DWDR=0.0
DDW=0.0
DRH=DR/H

IF(DR.LT.HL1) THEN
  IF(DR.LT.HL2) THEN
    IF(DR.LT.HL3) THEN
      DWDR=TERM1*(4.*(2.5-DRH)**3-20.*(1.5-DRH)**3
#          +40.*(0.5-DRH)**3)
      DDW=TERM0*((2.5-DRH)**4-5.*(1.5-DRH)**4+10.*(0.5-DRH)**4)
    ELSE
      DWDR=TERM1*(4.*(2.5-DRH)**3-20.*(1.5-DRH)**3)
      DDW=TERM0*((2.5-DRH)**4-5.*(1.5-DRH)**4)
    ENDIF
  ELSE
    DWDR=TERM1*(4.*(2.5-DRH)**3)
    DDW=TERM0*((2.5-DRH)**4)
  ENDIF
ENDIF

IF(DR.GT.0.) THEN
  DWDX=DWDR*DX/DR
  DWDY=DWDR*DY/DR
  DWDZ=DWDR*DZ/DR
ENDIF

```

Δυνάμεις Lennard-Jones

Γίνεται έλεγχος αν το σωματίδιο βρίσκεται στη περιοχή επίδρασης των απωστικών δυνάμεων και στην καταφατική περίπτωση υπολογίζεται η δύναμη και προστίθεται ή αφαιρείται (ανάλογα με τη γεωμετρία) στον όρο της επιτάχυνσης.

```

IF ((X(I).GE.(XWAL-R0)).AND.(X(I).LT.XWAL)) THEN
  WNFORCE=0.0
  DISTW=XWAL-X(I)
  HLP1=R0/(DISTW+TINY)
  WNFORCE=DLJ*(HLP1**12-HLP1**6)/(DISTW+TINY)
  SDUDT=SDUDT+WNFORCE
ENDIF

```

Έξοδος Σωματιδίων

Σε αυτό το τμήμα γίνεται επανακαταμέτρηση των σωματιδίων που υπάρχουν μέσα στον υπολογιστικό χώρο. Τους δίνεται νέος αύξων αριθμός και μεταφέρουν τις ιδιότητές τους σε αυτόν. Όσα σωματίδια βρίσκονται εκτός υπολογιστικού χώρου δεν λαμβάνουν αριθμό και έτσι διαγράφονται από την μνήμη.

```
II=NWAL
DO I=NWAL+1,NTOT

IF(Y(I).GT.(YMAX-dxy).OR.Y(I).LT.(YMIN+dxy)) CYCLE
IF(Z(I).GT.(ZMAX-dxy).OR.Z(I).LT.(ZMIN+dxy)) CYCLE
IF(X(I).GT.XEND.OR.X(I).LT.XMIN) CYCLE

II=II+1
X(II)=X(I)
Y(II)=Y(I)
Z(II)=Z(I)
P(II)=P(I)
DEN(II)=DEN(I)
U(II)=U(I)
V(II)=V(I)
W(II)=W(I)
DEN2(II)=DEN2(I)
U2(II)=U2(I)
V2(II)=V2(I)
W2(II)=W2(I)

END DO
NTOT=II
```


Παράρτημα «Γ»

Πίνακας μεταβλητών

Πίνακας μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα SPH-3d της δέσμης.

NPR	Μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός σωματιδίων (μνήμη)
NIP	Μέγιστος αριθμός κελιών του υπολογιστικού πλέγματος στον άξονα x (μνήμη)
NJP	Μέγιστος αριθμός κελιών του υπολογιστικού πλέγματος στον άξονα y (μνήμη)
NKP	Μέγιστος αριθμός κελιών του υπολογιστικού πλέγματος στον άξονα z (μνήμη)
NPP	Μέγιστος αριθμός σωματιδίων σε ένα κελί του υπολογιστικού πλέγματος (μνήμη)
NGN	Μέγιστος αριθμός κελιών του πλέγματος αποτελεσμάτων στον άξονα y (μνήμη)
G	$g=9.81 \text{ m/s}$
PI	π
TINY	Πολύ μικρός αριθμός για αποφυγή διαιρέσεων με το 0
H	Χαρακτηριστικό μήκος πυρήνα W
AM	Μάζα σωματιδίων
GHX	Μήκος στον άξονα x κελίων του υπολογιστικού πλέγματος
GHY	Μήκος στον άξονα y κελίων του υπολογιστικού πλέγματος
GHZ	Μήκος στον άξονα z κελίων του υπολογιστικού πλέγματος
DXY	Αρχική απόσταση σωματιδίων D
NWAL	Αριθμός σωματιδίων τοίχου
NTOT	Συνολικός αριθμός σωματιδίων
TERM0,1	Όροι πολλαπλασιασμού της συνάρτησης W
HL1,2,3	Όρια αλλαγής συμπεριφοράς της συνάρτησης W
XMAX	Όριο έναρξης τοίχου στον άξονα x
YMAX	Μέγιστο όριο υπολογιστικού χώρου στον άξονα y
ZMAX	Μέγιστο όριο υπολογιστικού χώρου στον άξονα z
XMIN	Ελάχιστο όριο υπολογιστικού χώρου στον άξονα x
YMIN	Ελάχιστο όριο υπολογιστικού χώρου στον άξονα y
ZMIN	Ελάχιστο όριο υπολογιστικού χώρου στον άξονα z
XEND	Μέγιστο όριο υπολογιστικού χώρου στον άξονα x
MIN(I,J)	Πλήθος σωματιδίων στο κελί I,J
MPAR(I,J)	Αντιστοίχιση στο N-οστό σωματίδιο του κελιού I,J τον καθολικό αριθμό του
U2	Προβλεπόμενη-Νέα ταχύτητα u σωματιδίου μετά το επαναληπτικό βήμα
V2	Προβλεπόμενη-Νέα ταχύτητα v σωματιδίου μετά το επαναληπτικό βήμα
W2	Προβλεπόμενη-Νέα ταχύτητα w σωματιδίου μετά το επαναληπτικό βήμα
P2	Προβλεπόμενη-Νέα πίεση σωματιδίου
DEN2	Προβλεπόμενη-Νέα πυκνότητα σωματιδίου
X2	Προβλεπόμενη-Νέα θέση στον άξονα x σωματιδίου
Y2	Προβλεπόμενη-Νέα θέση στον άξονα y σωματιδίου
Z2	Προβλεπόμενη-Νέα θέση στον άξονα z σωματιδίου
UF1	Μεταβολή της ταχύτητας u στο βήμα πρόβλεψης
VF1	Μεταβολή της ταχύτητας v στο βήμα πρόβλεψης

WF1	Μεταβολή της ταχύτητας w στο βήμα πρόβλεψης
DENF1	Μεταβολή της πυκνότητας στο βήμα πρόβλεψης
XF1	Μεταβολή της θέσης x στο βήμα πρόβλεψης
YF1	Μεταβολή της θέσης y στο βήμα πρόβλεψης
ZF1	Μεταβολή της θέσης z στο βήμα πρόβλεψης
VISC	Κινηματική συνεκτικότητα
U3	Διορθωμένη-Νέα ταχύτητα u σωματιδίου
V3	Διορθωμένη-Νέα ταχύτητα v σωματιδίου
W3	Διορθωμένη-Νέα ταχύτητα w σωματιδίου
P3	Διορθωμένη-Νέα πίεση σωματιδίου
DEN3	Διορθωμένη-Νέα πυκνότητα σωματιδίου
X3	Διορθωμένη-Νέα θέση στον άξονα x σωματιδίου
Y3	Διορθωμένη-Νέα θέση στον άξονα y σωματιδίου
Z3	Διορθωμένη-Νέα θέση στον άξονα z σωματιδίου
X	Θέση στον άξονα x σωματιδίου
Y	Θέση στον άξονα y σωματιδίου
Z	Θέση στον άξονα z σωματιδίου
U	Ταχύτητα u σωματιδίου
V	Ταχύτητα v σωματιδίου
W	Ταχύτητα w σωματιδίου
P	Πίεση σωματιδίου
DEN	Πυκνότητα σωματιδίου
DJET	Διάμετρος δέσμης νερού
R0	Απόσταση επίδρασης δυνάμεων Lennard-Jones
DJL	Συντελεστής σχέσης Lennard-Jones
ANGLE	Γωνία πρόσπτωσης δέσμης σε RAD
DENCOR	Διόρθωση-εξομάλυνση πυκνότητας σωματιδίου
XSPHX	Διόρθωση x_{sph} στον άξονα x
XSPHY	Διόρθωση x_{sph} στον άξονα y
XSPHZ	Διόρθωση x_{sph} στον άξονα z
UMEAN	Μέση ταχύτητα u μεταξύ των θέσεων 1 και 2
VMEAN	Μέση ταχύτητα v μεταξύ των θέσεων 1 και 2
WMEAN	Μέση ταχύτητα w μεταξύ των θέσεων 1 και 2
COND(J,K)	Μέση τιμή πυκνότητας του κελιού (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
CONP(J,K)	Μέση τιμή πίεσης του κελιού (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
CONU(J,K)	Μέση τιμή ταχύτητας u του κελιού (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
CONV(J,K)	Μέση τιμή ταχύτητας v του κελιού (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
CONW(J,K)	Μέση τιμή ταχύτητας w του κελιού (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
CONCP(J,K)	Μέση τιμή πυκνότητας του κελιού (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
NCONNP(J,K)	Αριθμός σωματιδίων στο κελί (J,K) του πλέγματος πάνω στην πλάκα
DTFILE	Όνομα αρχείου εξόδου
DENREF	Πυκνότητα αναφοράς
VISREF	Κινηματική συνεκτικότητα αναφοράς
VELJET	Αρχική ταχύτητα δέσμης

NDIV	Αριθμός σωματιδίων νερού στην ακτίνα της δέσμης
ANGLEDEG	Γωνία πρόσπτωσης δέσμης σε μοίρες
TIMPLT	Ανά πόσο χρόνο φαινομένου τυπώνεται αρχείο εξόδου
CS	Τεχνητή ταχύτητα του ήχου
DTMX	Μέγιστο επιτρεπόμενο χρονικό βήμα
TNM	Πλήθος αρχείων εξόδου που δημιουργεί το πρόγραμμα
DT	Χρονικό βήμα
KSTAR	Σημείο από οποίο και μετά το φαινόμενο είναι μόνιμο
DDWSUM	Άθροισμα τιμής συνάρτησης W
DX	Απόσταση δύο σωματιδίων στον άξονα x
DY	Απόσταση δύο σωματιδίων στον άξονα y
DZ	Απόσταση δύο σωματιδίων στον άξονα z
DDW	Τιμή συνάρτησης W
YLEN	Μήκος υπολογιστικού χώρου στον άξονα y-Χαρακτηριστικό μέγεθος
XJET	Μέγιστη αρχική θέση σωματιδίων δέσμης στον άξονα x
NGJ	Αριθμός κόμβων υπολογιστικού πλέγματος πάνω στην πλάκα (y)
NGK	Αριθμός κόμβων υπολογιστικού πλέγματος πάνω στην πλάκα (z)
DJD	Μήκος κελιού του υπολογιστικού πλέγματος πάνω στην πλάκα (y)
DKD	Μήκος κελιού του υπολογιστικού πλέγματος πάνω στην πλάκα (z)
NHORW	Αριθμός σωματιδίων τοίχου στον άξονα x
NVERW	Αριθμός σωματιδίων τοίχου στον άξονα y,z
ICOUN	Μετρητής για την περιστροφή των σωματιδίων της δέσμης (REAL)
ARCN	Γωνία περιστροφής σωματιδίων δέσμης
COUN	Μετρητής για την περιστροφή των σωματιδίων της δέσμης (INTEGER)
RANGL	Πρόσθετη γωνία περιστροφής σωματιδίων δέσμης
FI	Γωνία περιστροφής σωματιδίων δέσμης
TUR	Πρόσθετη γωνία περιστροφής σωματιδίων δέσμης ανά διατομή
NI	Πλήθος κελιών του υπολογιστικού χώρου στον άξονα x
NJ	Πλήθος κελιών του υπολογιστικού χώρου στον άξονα y
NK	Πλήθος κελιών του υπολογιστικού χώρου στον άξονα z
NTOTVER	Επαλήθευση του συνολικού αριθμού σωματιδίων
NNPMX	Μέγιστος αριθμός σωματιδίων ανά κελί
NNI	Αριθμός κελιού στον άξονα x που βρίσκεται το εξεταζόμενο σωματίδιο
NNJ	Αριθμός κελιού στον άξονα y που βρίσκεται το εξεταζόμενο σωματίδιο
NNK	Αριθμός κελιού στον άξονα z που βρίσκεται το εξεταζόμενο σωματίδιο
UINLET	Ταχύτητα εισόδου u νέων σωματιδίων
VINLET	Ταχύτητα εισόδου v νέων σωματιδίων
TINLET	Χρόνος ελέγχου για την εισαγωγή νέων σωματιδίων στη δέσμη
SMTTT	Χρόνος που πέρασε από την προηγούμενη εισαγωγή σωματιδίων
TTIME	Χρόνος φαινομένου
NSTEPS	Συνολικός αριθμός χρονικών βημάτων
KS	Αριθμός αρχείου εξόδου
NDENTIMER	Μετρητής για την κανονικοποίηση της πυκνότητας
DWDX	$\partial W / \partial x$

DWDY	$\partial W / \partial y$
DWDZ	$\partial W / \partial z$
SDEN	Μεταβολή της πυκνότητας λόγω αλληλεπίδρασης με γειτονικά σωματίδια
SDUDT	Μεταβολή της ταχύτητας u λόγω αλληλεπίδρασης με γειτονικά σωματίδια
SDVDT	Μεταβολή της ταχύτητας v λόγω αλληλεπίδρασης με γειτονικά σωματίδια
SDWDT	Μεταβολή της ταχύτητας w λόγω αλληλεπίδρασης με γειτονικά σωματίδια
ISTA	Κελί έναρξης αναζήτησης σωματιδίων στον άξονα x
IEND	Κελί τερματισμού αναζήτησης σωματιδίων στον άξονα x
JSTA	Κελί έναρξης αναζήτησης σωματιδίων στον άξονα y
JEND	Κελί τερματισμού αναζήτησης σωματιδίων στον άξονα y
KSTA	Κελί έναρξης αναζήτησης σωματιδίων στον άξονα z
KEND	Κελί τερματισμού αναζήτησης σωματιδίων στον άξονα z
DR	Απόσταση δύο σωματιδίων
DP	Διαφορά πιέσεων δύο σωματιδίων
DU	Διαφορά ταχυτήτων u δύο σωματιδίων
DV	Διαφορά ταχυτήτων v δύο σωματιδίων
DW	Διαφορά ταχυτήτων w δύο σωματιδίων
DWDR	$\partial W / \partial r$
DRH	Απόσταση δύο σωματιδίων προς το χαρακτηριστικό μήκος = a
WNFORCE	Δυνάμεις Lennard-Jones
HLP1	Λόγος r_0/r (Lennard-Jones)
DISTW	Απόσταση σωματιδίου από τοίχωμα
TERMx	Όρος του XSPH για τον άξονα x
TERMy	Όρος του XSPH για τον άξονα y
TERMz	Όρος του XSPH για τον άξονα z
DXADD	Αρχική μετατόπιση στον άξονα x νεοεισερχόμενων σωματιδίων
DYADD	Αρχική μετατόπιση στον άξονα y νεοεισερχόμενων σωματιδίων
YYY	Θέση y του κόμβου πλέγματος πάνω στην πλάκα
ZZZ	Θέση z του κόμβου πλέγματος πάνω στην πλάκα
ABSVEL	Απόλυτη ταχύτητα σωματιδίου

Παράρτημα «Δ»

Ορολογία

artificial compressibility	τεχνητή συμπιεστότητα
artificial equation of state	τεχνητή καταστατική εξίσωση
artificial viscosity	τεχνητή συνεκτικότητα
boundary conditions	οριακές συνθήκες
compact	συμπαγής
discretization	διακριτοποίηση
fictitious particles	εικονικά σωματίδια
ghost particles	φανταστικά σωματίδια
grid-based methods	πλεγματικές μέθοδοι
integral representation	ολοκληρωματική αναπαράσταση
kernel approximation	προσέγγιση πυρήνα
meshfree methods	μη-πλεγματικές μέθοδοι
normalization	κανονικοποίηση
particle	σωματίδιο
particle approximation	σωματιδιακή προσέγγιση
resolution	ανάλυση
smoothing kernel function W	συνάρτηση πυρήνα ή συνάρτηση εξομάλυνσης
smoothing length h	χαρακτηριστικό μήκος εξομάλυνσης
SPH - Smoothed Particle Hydrodynamics	Υδροδυναμική Ρεόντων Σωματιδίων
support domain	περιοχή επίδρασης
time integration	χρονική ολοκλήρωση
time step	χρονικό βήμα
unity condition	συνθήκη μονάδας

Αναφορές

- http://wiki.manchester.ac.uk/spheric/index.php/Main_Page . Ιστοσελίδα της ευρωπαϊκής ερευνητικής ομάδας SPHERIC για τη μέθοδο SPH
- http://wiki.manchester.ac.uk/sphysics/index.php/Main_Page Ιστοσελίδα για ελεύθερο λογισμικό SPHysics
- Γιαννάκογλου Κ.Χ, Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ. (2002), Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα
- Τσαγγάρης Σ. (1995). Μηχανική των ρευστών, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα
- Anderson, J. D. (1995), Computational fluid dynamics: the basics with applications, Me Graw-Hill.
- Ataie-Ashtiani B. and Shobeyri G.(2008) Numerical simulation of landslide impulsive waves by incompressible smoothed particle hydrodynamics. International Journal for Numerical Methods in Fluids 2008; 56:209–232
- Ataie-Ashtiani B., Shobeyri G. , Farhadi L. (2008) Modified incompressible SPH method for simulating free surface problems.Fluid Dynamics Research 40, 637–661
- Atluri S. N. and Shen S. P. (2002), The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. Tech Science Pree, USA.
- Atluri S. N. and Zhu T. (1998), A new meshless local Petrov-Galerkin (MPLG) approach in computational mechanics, Computational Mechanics, 22:117-127.
- Batchelor G.K.(1973), An Introduction to Fluid Dynamics (Cambridge Univ.Press, Cambridge.
- Belytschko T., Krongauz Y., Dolbow J. and Gerlach, C. (1998), On the completeness of the meshfree particle methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43(5):785-819.
- Belytschko T., Krongauz Y; Organ D., Fleming M. and Krysl P. (1996), Meshless methods: an overview and recently developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:3-47.
- Belytschko T., Liu W. K. and Moran B. (2000), Nonlinear finite elements for continua and structures. John Wiley and Sons, New York.
- Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L. (1994), Element-Free Galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:229-256.
- Benz W. (1990), Smoothed particle hydrodynamics: a review, In Numerical Modeling of Non-linear Stellar Pulsation: Problems and Prospects, Kluwer Academic, Boston.
- Bonet J. and T.-S. L. Lok.(1999) Variational and momentum preservation aspects of Smoothed Particle Hydrodynamic formulations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 180, 97-115.
- Colagrossi A., Landrini M. (2003) Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. Journal of Computational Physics 191,448–475
- Crespo A. J. C. , Gómez-Gesteira M., Dalrymple R. A. (2008). Modeling Dam Break Behavior over a Wet Bed by a SPH Technique. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 134, No. 6, November 1, 2008. ©ASCE, ISSN 0733-950X/2008/6-313–320
- Dalrymple R.A. Rogers, B.D.(2006). Numerical modeling of water waves with the SPH method. Coastal Engineering 53, 141 – 147

- Duarte C. A. and Oden J. T. (1996), An HP adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237-262.
- Evrard, August E. (1988), Beyond N-Body: 3D cosmological gas dynamics, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 235:911.
- Gingold R. A. and Monaghan J. J. (1977), Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375-389.
- Gu Y. T. and Liu G. R. (2001a), A boundary point interpolation method (BPIM) using radial function basis, *First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pp. 1590-1592, June 2001, MIT.
- Gu Y. T. and Liu G. R. (2001c), A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 5515-5528.
- Guangzheng Zhou , Wei Ge , Jinghai Li. (2008). A revised surface tension model for macro-scale particle methods. *Powder Technology* 183 21–26
- Heinrich P. (1992). Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides. *Journal of Waterways, Port, Coastal, and Ocean Engineering* ; 118(3):249–266.
- Hernquist L. and Katz N. (1989), TreeSPH- A unification of SPH with the hierarchical tree method, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 70:419-446.
- Hieber S.E. , Koumoutsakos P.(2008). An immersed boundary method for smoothed particle hydrodynamics of self-propelled swimmers. *Journal of Computational Physics* 227 , 8636–8654
- Hirsch C. (1988), *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 1, Wiley-Interscience publication.
- Issa R.(2005), Numerical assessment of the Smoothed Particle Hydrodynamics gridless method for incompressible flows and its extension to turbulent flows, PhD Thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology
- Janosi I.M., Jan D., Szabo K.G. and Tel T. (2004). Turbulent drag reduction in dam-break flows. *Experiments in Fluids* 37: 219-229.
- Jiang F. , Oliveira M. S. A., Sousa A. C. M.(2005), SPH Simulation of Low Reynolds Number Planar Shear Flow and Heat Convection. *Mat.-wiss. u. Werkstofftech*, 36, No. 10
- Kleefsman K. M. T. ,Fekken G. , Veldman A. E. P, Iwanowski B. and Buchner B. (2005). A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems. *J. Comp. Phys.*, 206:363–393.
- Koshizuka S, Oka Y.(1996) Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of compressible fluid. *Nuclear Science Engineering* ; 123:421–434.
- Koukouvinis P.,Anagnostopoulos G.,Papantonis D. Flow modelling in the injector of a Pelton turbine, *SPHERIC 4th International Workshop*, 257-264.
- Kvicinsky S. ,Kueny J.-L. ,Avellan F. (2002), Numerical and Experimental Analysis of Free Surface Flow in a 3D Non Rotating Pelton Bucket, *The 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*.
- Kvicinsky S.(2002), *Methodes d'Analyse Des Ecoulements 3D À Surface Libre: Application Aux Turbines Pelton*, Phd Thesis, École Polytechnique Federale De Lausanne
- Lee E.-S. , Moulinec C. , Xu R. , Violeau D. ,Laurence D. , Stansby P.(2008) Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method. *Journal of Computational Physics* 227 , 8417–8436
- Lee E.-S.,Violeau D., Issa R. Simulating a Real Dam Spillway Flow with 3-D SPH, *SPHERIC 4th International Workshop*, 339-345.

- Lehnart A., Fleissner F., Eberhard P. Using SPH in a co-simulation approach to simulate sloshing in tank vehicles, SPHERIC 4th International Workshop, 240-245.
- Libersky L. D., Petscheck A. G, Carney T. C, Hipp J. R. and Allahdadi F. A. (1993), High strain Lagrangian hydrodynamics-a three-dimensional SPH code for dynamic material response, *Journal of Computational Physics*, 109: 67-75.
- Liszka T. and Orkisz J. (1980), The finite difference method at arbitrary irregular grids and its applications in applied mechanics, *Computers and Structures*, 11:83-95.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2002), A truly meshless method based on the strongweak form, in Liu G. R. (Ed.) *Advances in Meshfree and X-FEM Methods*, pp. 259-261.
- Liu G. R. & Liu M. B.(2003): *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*, World Scientific, ISBN: 981-238-456-1.
- Liu G. R. (2002), *Mesh Free Methods: moving beyond the finite element method*, CRC Press, Boca Raton.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (1999), A point interpolation method, *Proceedings of 4th Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics*, pp 1009-1014, December 1999, Singapore.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2001a), A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids, *Structural Engineering and Mechanics*, 11(2): 221-236.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2001b), A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *Journal of Sound and Vibration*, 246(1): 29-46.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2001c), A point interpolation method for twodimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50,937-951.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2001d), On formulation and application of local point interpolation methods for computational mechanics. *Computational Mechanics of Proceeding of First Asia-Pacific Congress on Computational Mechanics*, pp. 97-106, Sydney, Australia.
- Liu G. R. & Liu M. B.(2003): *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*, World Scientific, ISBN: 981-238-456-1.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2003c), A Meshfree Weak-Strong (MWS) form method, *25th World Conference on Boundary Element Methods*, 8-10 September 2003, Split, Croatia.
- Liu G. R. and Quek (2003), *The finite element method: a practical course*, Butterworth Heine-
mann.
- Liu W. K. and Chen Y. (1995), Wavelet and multiple-scale reproducing kernel methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21:901-931.
- Lucy L. B. (1977), Numerical approach to testing the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, 82:1013-1024.
- Marongiu J.C., Leboeuf F. and Parkinson E. (2007) Numerical simulation of the flow in a Pelton turbine using the meshless method SPH and a new simple solid boundary treatment. In *7th European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, Athens, Greece
- Monaghan J. J. (1988), An introduction to SPH, *Computer Physics Communications*, 48:89-96.
- Monaghan J. J. (1992), Smoothed particle hydrodynamics, *Annual Review of Astronomical and Astrophysics*, 30:543-574.
- Monaghan J. J. and Gingold R. A. (1983), Shock simulation by the particle method of SPH, *Journal of Computational Physics*, 52:374-381.
- Monaghan J. J. and Lattanzio J. C. (1985), A refined particle method for astrophysical problems, *Astronomy and Astrophysics*, 149:135-143.

- Monaghan J.J.. Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics* 110, 399-406 (1994)
- Morris J. P. (1994), A study of the stability properties of SPH, *Applied Mathematics Reports and Preprints*, Monash University.
- Morris J. P. (1996), Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications, Ph. D. thesis, Monash University.
- Morris J. P. , Fox P. J., Zhu Yi (1997), Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS* 136, 214–226
- Nayroles B., Touzot G. and Villon P. (1992), Generalizing the finite element methods: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, 10:307-318.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L. (1996), A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow, *International Journal for Numerical methods in Engineering*, 39(22):3839-3866.
- Reichl P.J. , Morris P. , Hourigan K. , Thompson M.C. , Stoneman S.A.T.(1998), Smooth particle hydrodynamics simulation of surface coating. *Applied Mathematical Modelling* 22, 1037-1046
- Reichl P.J., Morris P., Stoneman S.A.T. , Thompson M.C., Hourigan K.(1998). Smooth Particle Hydrodynamics Modelling of Vertical Jet Impingement. In *Proceedings Of The Thirteenth Australasian Fluid Mechanics Conference* (Eds: M.C. Thompson & K. Hourigan, ISBN: 0-7326-2044-9), Monash University, Melbourne, Australia, 13-18 December 1998, 1, 103-106.
- Songdong Shao (2006), Changming Ji , David I. Graham, Dominic E. Reeve , Philip W. James , Andrew J. Chadwick . Simulation of wave overtopping by an incompressible SPH model. *Coastal Engineering* 53 ,723–735
- Songdong Shao. (2006).Incompressible SPH simulation of wave breaking and overtopping with turbulence modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* ; 50:597–621
- Violeau D. , Issa R.,(2007),SPHERIC benchmark test case number 5: sensitivity analysis to numerical and physical parameters, *SPHERIC Second International Workshop*,47-50
- Violeau D. , Issa R. (2007) Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 53:277–304
- Wilkins M. L. (1999) *Computer simulation of dynamic phenomena*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Yagawa G. and Yamada T. (1996), Free mesh method: a new meshless finite element method, *Computational Mechanics*, 18:383-386.
- Yagawa G. and Yamada T. (1998), Meshless method on massively parallel processor with application to fracture mechanics, *Key Engineering Materials*, 145-149:201-210.
- Yildiz M., Rook R. A., Suleman A.(2008), SPH with the multiple boundary tangent method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Fluids* DOI: 10.1002/nme.2458
- Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. (2000), *The Finite Element Method*, 5th ed., Butterworth Herimann.