

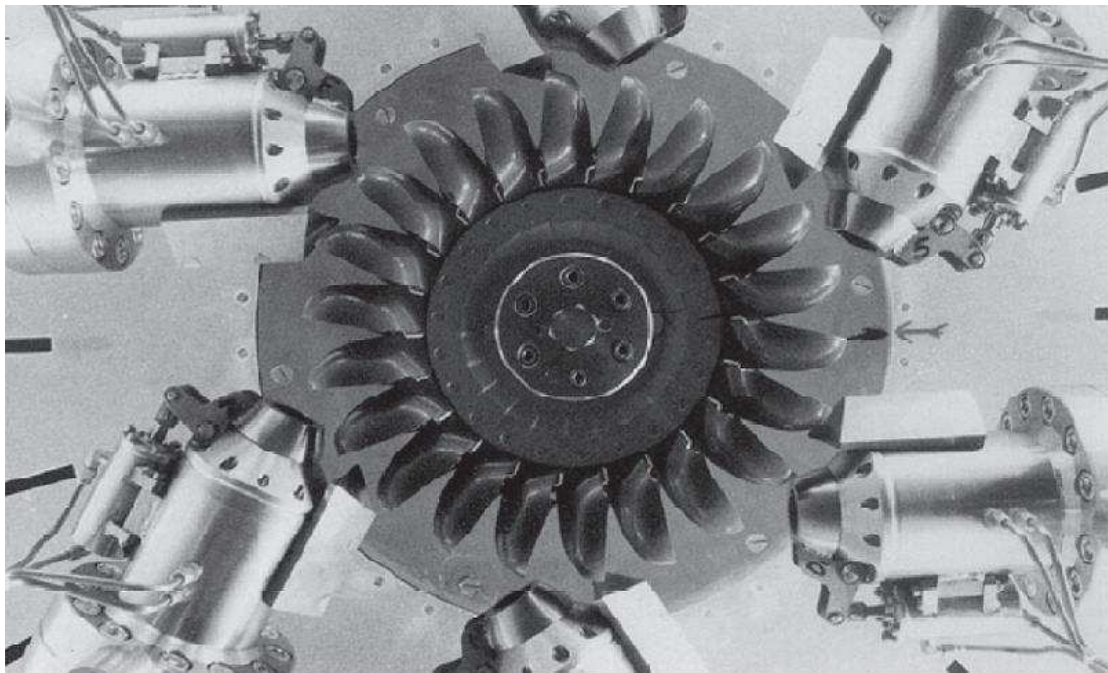


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

Διπλωματική εργασία :

Αριθμητική επίλυση της διδιάστατης αξονοσυμμετρικής ροής με την μέθοδο της ψευδοσυμπίεστότητας και προσδιορισμός της μορφής δέσμης από ακροφύσιο τύπου Pelton.

Κουτρογιάννης Θεοχάρης
Επιβλέπων: Καθηγητής Δ. Παπαντώνης



ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1	Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ρευστομηχανικών εξισώσεων	1-1.
1.2	Αριθμητικές μεθοδολογίες για την επίλυση των ασυμπίεστων ροών	1-2.
1.3	Περιγραφή της τυρβώδους ροής	1-4.
1.4	Σκοπός και συνοπτική περιγραφή της εργασίας	1-5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

2.1	Οι 2 – D εξισώσεις Navier – Stokes.	2-1.
2.2	Προσθήκη ψευδοσυμπίεστότητας.	2-4.
2.3	Αδιαστατοποίηση του συστήματος Navier – Stokes.	2-6.
2.4	Μετασχηματισμός συντεταγμένων.	2-8.
2.5	Μετασχηματισμός στο γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων των εξισώσεων N – S .	2-10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

3.1	Τύρβη και χαρακτηριστικά τυρβώδους ροής	3-1.
3.2	Περιγραφή τυρβώδους ροής κατά Reynolds	3-2.
3.3	Βασικές εξισώσεις τυρβώδους ροής κατά Reynolds	3-4.
3.4	Μοντελοποίηση της τύρβης	3-6.
3.5	Ανακεφαλαίωση εξισώσεων προς επίλυση	3-11.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

4.1	Εισαγωγή	4-1.
4.2	Απαιτούμενες ιδιότητες της αριθμητικής μεθόδου.	4-1.
4.3	Η μέθοδος των χαρακτηριστικών για την επίλυση των μη συνεκτικών όρων των εξισώσεων N – S .	4-5.
4.4	Διακριτοποίηση των συνεκτικών διανυσμάτων των εξισώσεων Navier – Stokes	4-13.
4.5	Διακριτοποίηση των μη συνεκτικών διανυσμάτων των εξισώσεων τυρβώδους ροής k – ε.	4-14.
4.6	Διαδικασία διακριτοποίησης των συνεκτικών διανυσμάτων των εξισώσεων τυρβώδους ροής k – ε.	4-15.
4.7	Χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής και των εξισώσεων του μοντέλου k – ε.	4-15.
4.8	Αρχικές και Οριακές συνθήκες (initial & boundary conditions)	4-18.
4.9	Διαδικασία επίλυσης των μοντελοποιημένων εξισώσεων	4-28.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΓΙΑ ΑΚΡΟΦΥΣΙΟΥ PELTON

5.1	Εισαγωγή.	5-1.
5.2	Τυρβώδης αξονοσυμμετρική ροή διαμέσου ακροφυσίου τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton (Type I).	5-4.
5.3	Τυρβώδης αξονοσυμμετρική ροή διαμέσου ακροφυσίου τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton (Type II) .	5-18.
5.4	Τυρβώδης αξονοσυμμετρική ροή διαμέσου ακροφυσίου τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton (Type III).	5-28.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο : ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ

6.1	Περιγραφή της διαδικασίας μοντελοποίησης – επίλυσης του ακροφυσίου.	6-1
6.2	Πίνακας μεταβλητών κώδικα και αντιστοιχίας του με θεωρία.	6-5.
6.3	Δημιουργία πλέγματος – δομημένα πλέγματα.	6-16.
6.4	Περιγραφή της μεθόδου δημιουργίας πλέγματος (μέθοδος Coons).	6-17.
6.5	Ο κώδικας σε Fortran.	6-23.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

➤ Λατινικά σύμβολα

axis	συντελεστής των αξονοσυμμετρικών όρων
CFL	αδιάστατος συντελεστής για τον υπολογισμό του χρονικού βήματος (Courant – Friedrichs – Lewy)
$C_{\varepsilon 1}$	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon : = 1.44$
$C_{\varepsilon 2}$	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon : = 1.92$
C_{μ}	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon : = 0.09$
E, G, K	μη συνεκτικά διανύσματα στις εξισώσεις Navier - Stokes
$\overline{E_{k\varepsilon}}, \overline{G_{k\varepsilon}}, \overline{K_{k\varepsilon}}$	μη συνεκτικά διανύσματα στις εξισώσεις $k - \varepsilon$
\overline{f}	χρονικά μέση τιμή βασικών μεγεθών ροής
f'	διακύμανση βασικών μεγεθών ροής
J	ιακωβιανή μετασχηματισμού
k	τυρβώδη κινητική ενέργεια
L_{ref}	χαρακτηριστικό μήκος αναφοράς
p	στατική πίεση
$P_{k\varepsilon}$	διάνυσμα παραγωγής στις σχέσεις $k - \varepsilon$
r	ακτίνα
R, T, L	συνεκτικά διανύσματα στις εξισώσεις Navier – Stokes
Re	αριθμός Reynolds
RES ⁽ⁿ⁾	υπόλοιπο για το n-οστό βήμα της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Runge – Kutta
$R_{k\varepsilon}, T_{k\varepsilon}, L_{k\varepsilon}$	συνεκτικά διανύσματα στις εξισώσεις $k - \varepsilon$
t	χρόνος
U	διάνυσμα κύριων μεταβλητών στις Navier – Stokes
U ⁽ⁿ⁾	διάνυσμα κύριων μεταβλητών για το n-οστό βήμα της μεθόδου Runge – Kutta
U_{in}	μέση ταχύτητα εισόδου
$U_{k\varepsilon}$	διάνυσμα κύριων μεταβλητών στις εξισώσεις $k - \varepsilon$
U_{p2}	ταχύτητα παράλληλη προς το τοίχωμα
U_{ref}	ταχύτητα αναφοράς
$u^{\#}$	ταχύτητα τριβής
u_r	συνιστώσα ταχύτητας κατά την ακτινική διεύθυνση
u_z	συνιστώσα ταχύτητας κατά την αξονική διεύθυνση
u_{φ}	συνιστώσα ταχύτητας κατά την περιφερειακή διεύθυνση
y_2	απόσταση από το τοίχωμα
y^{2+}	αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα
z, φ , r	κυλινδρικές συντεταγμένες

➤ Ελληνικά σύμβολα

β	συντελεστής ψευδοσυμπιεστότητας
Γ_k	συντελεστής του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$
Γ_ε	συντελεστής του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$
E	παράμετρος τραχύτητας στις συναρτήσεις τοιχώματος : $E = 9.7$
ε	ρυθμός καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας
Θ	όρος παραγωγής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας
Θ_3	πρόσθετος όρος παραγωγής για την αξονοσυμμετρική περίπτωση
κ	σταθερά von Karman : = 0.4
$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	ιδιοτιμές του συστήματος εξισώσεων Navier – Stokes
μ	δυναμική συνεκτικότητα
μ_t	τυρβώδης συνεκτικότητα
μ	ιξώδες όγκου
μ_{eff}	ενεργός συνεκτικότητα
μ_{ref}	δυναμική συνεκτικότητα αναφοράς
ξ, η, ζ	ανεξάρτητες συντεταγμένες μετασχηματισμού
σ_ε	σταθερά μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$: = 1.22
σ_k	σταθερά μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$: = 0.90
τ_w	διατμητική τάση στο τοίχωμα
τ_{ij}	συνεκτικές τάσεις στο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων
τ_{ij}	συνεκτικές τάσεις
τ_{ij}^{turb}	τυρβώδεις συνεκτικές τάσεις

1.1 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ρευστομηχανικών εξισώσεων

Η ιστορία είναι γεμάτη από παραδείγματα εφαρμογών ρευστομηχανικής όπως τα ρωμαϊκά λουτρά και υδραγωγεία, τα διάφορων τύπων πλοία με κατάλληλη μορφή κύτους και τα συστήματα παραγωγής ενέργειας από τον άνεμο, που κατασκευάστηκαν πολύ πριν η μηχανική των ρευστών οριστεί από τους Reynolds, Newton, Euler, Navier, Stokes, Prandtl και άλλους. Στον 20^ο αιώνα γίναμε μάρτυρες πολλών παραδειγμάτων εφαρμογών της ρευστομηχανικής που επιστρατεύτηκαν από την ανθρωπότητα για να αυξήσουν την ποιότητα ζωής, όλα κατασκευασμένα χωρίς την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Τέτοια καθημερινά παραδείγματα είναι οι μηχανές εσωτερικής καύσης, οι ατμοστρόβιλοι, τα αεροπλάνα και η κάθε είδους ιπτάμενη κατασκευή καθώς και συστήματα περιβαλλοντικής προστασίας από την μόλυνση και εξαερισμού.

Η υπολογιστική ρευστομηχανική (Computational Fluid Dynamics, CFD) αντιμετωπίζει την αριθμητική ανάλυση αυτών των φαινομένων. Παρόλη την εντυπωσιακή πρόοδο τα τελευταία χρόνια, αυτή παραμένει ένα εργαλείο που απέχει από την τελειότητα συγκρινόμενο με την φύση και τις αρχές της μηχανικής των ρευστών, εν μέρει επειδή τα υπολογιστικά συστήματα έχουν διαδοθεί και χρησιμοποιούνται ευρέως τα τελευταία 30 – 40 χρόνια. Οι εξισώσεις Navier – Stokes που περιγράφουν την κίνηση ενός νευτώνειου συνεκτικού ρευστού έχουν διατυπωθεί εδώ και έναν αιώνα. Η πιο ευθύς μέθοδος προσέγγισης οποιουδήποτε ρευστομηχανικού προβλήματος είναι να επιλύσουμε τις εξισώσεις για τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Οι αναλυτικές λύσεις είναι λίγες και τετριμμένες και, ακόμα με τους σημερινούς υπερυπολογιστές, η ακριβής αριθμητικά λύση των ολοκληρωμένων τρισδιάστατων, χρονικά εξαρτώμενων εξισώσεων της τυρβώδους ροής είναι απρόσιτη οικονομικά εκτός από τις μελέτες σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds και απλές γεωμετρίες. Συμπερασματικά, η απευθείας επίλυση είναι ακόμα και σήμερα πρακτικώς μη πραγματοποιήσιμη (τουλάχιστον οικονομοτεχνικά) για μηχανολογικούς σκοπούς.

Τα παραπάνω οδήγησαν σε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις ώστε να κατανοήσουμε τα φαινόμενα ροής των ρευστών. Συγκεκριμένα, η πρώτη είναι να επινοήσουμε χρήσιμες συσχετίσεις μέσα από την παρουσίαση περιγραφικών πειραμάτων μέχρι αναλυτικών πειραματικών ερευνών που προσφέρουν περαιτέρω κατανόηση αλλά και επιπροσθέτως βελτίωση των υπό εξέταση διεργασιών. Η δεύτερη περιλαμβάνει την επίλυση απλοποιημένων μορφών των εξισώσεων ρευστομηχανικής για την διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας και συγκριτικά απλών οριακών συνθηκών. Τα πλεονεκτήματα είναι μεγάλα όταν συνδυάζουμε

και τις δυο μεθόδους για ιδιαίτερος πολύπλοκα προβλήματα δυναμικής ρευστών αλλά αυτό δεν ήταν δυνατό μέχρι πρόσφατα λόγω του μικρού πλήθους λύσεων από αναλυτικές μεθόδους και απλών υπολογιστικών τεχνικών. Τα πρόβλημα αυτό έδωσε τέλος η καθολική επικράτηση των ηλεκτρονικών υπολογιστικών συστημάτων. Ο ρυθμός ανάπτυξης των αριθμητικών μεθοδολογιών στην υπολογιστική ρευστομηχανική συνδυάζεται άμεσα από τις υπάρχουσες υπολογιστικές δυνατότητες. Η αλματώδης εξέλιξη της σύγχρονης επιστήμης στο χώρο των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η κατασκευή συνεχώς νέων μονάδων με μεγαλύτερες δυνατότητες όσον αναφορά την ταχύτητα, την δυνατότητα αποθήκευσης και μνήμης, αλλά παράλληλα και η βελτίωση του λόγου του κόστους ως προς την απόδοση, δίνουν νέα ώθηση στους ερευνητές να προσεγγίσουν με τις αριθμητικές μεθοδολογίες τις πραγματικές συνθήκες ροής. Οι αριθμητικές προσεγγίσεις της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής έχουν αποδειχθεί τις περισσότερες φορές πιο ισχυρές από τις αναλυτικές λύσεις που έχουν εμφανισθεί στο παρελθόν όπως επί παραδείγματι η επίλυση της τρισδιάστατης ροής γύρω από τα πτερύγια των αεριοστροβίλων με αποτελέσματα που συμβάλλουν στην καλύτερη σχεδίαση τους.

Γίνεται κατανοητό από τα παραπάνω ότι η χρήση πειραματικής και υπολογιστικής ρευστομηχανικής απαιτεί αρκετούς πόρους. Το κόστος της πραγματοποίησης πειραμάτων πολλές φορές είναι απαγορευτικό, όπως π.χ. πτητικά τεστ σε αεροπλάνα, δοκιμές αεριοστροβίλων ή και τεστ καταστροφής ακριβών εξαρτημάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να είναι δυνατόν να μειώσουμε τον αριθμό των πειραμάτων που χρειαζόμαστε με την χρήση CFD με την προϋπόθεση ότι από την αρχή απαιτείται μικρός αριθμός αυτών για να επαληθεύσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα. Από την άλλη, το κόστος απόκτησης ακριβών αριθμητικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων μπορεί να είναι υψηλό για μια πολύπλοκη ροή αλλά και πάλι είναι σημαντικά μικρότερο από αυτό που απαιτείται για τα περαιτέρω πειράματα που θα χρειαζόταν να διεξάγουμε. Στην πραγματικότητα, η πιο ελκυστική πρόταση για την επίλυση ενός προβλήματος μηχανικής ρευστών είναι ένας συνδυασμός μετρήσεων και υπολογισμών. Παρότι και οι δυο υπάρχουν σε περιορισμούς, ο συνδυασμός των προσεγγίσεων αυτών έχει ως αποτέλεσμα φτηνότερο και πιο αξιόπιστο σχεδιασμό, ο οποίος συνάδει με τις ολοένα αυστηρότερες απαιτήσεις στην αποδοτικότητα, την περιβαλλοντική προστασία, την τεχνολογική υπεροχή και την οικονομία, από ότι θα είχαμε αν χρησιμοποιούσαμε μόνο την μία.

1.2 Αριθμητικές μεθοδολογίες για την επίλυση ασυμπίεστων ροών

Σχεδόν όλα , αν όχι όλα , τα ρευστά είναι συμπίεστα. Ασυμπίεστη χαρακτηρίζεται μια προσέγγιση της ροής όπου η ταχύτητα ροής είναι ασήμαντη παντού συγκρινόμενη με την ταχύτητα του ήχου του μέσου. Αν η ασυμπίεστη ροή οριστεί με αυτό τον τρόπο, η πλειοψηφία των ρευστών που συναντάμε καθημερινά (αέρας, νερό, αίμα κ.λ.π) υπάγονται σε αυτή την κατηγορία. Για την επίλυσή τους τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμες αριθμητικές μέθοδοι, ρητές και πεπλεγμένες, καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, συμπληρώνοντας τις υπάρχουσες αναλυτικές και πειραματικές λύσεις. Ένα από τα πρώτα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν προτάθηκε από τον Bernoulli το 1730 ερευνώντας την ροή του αίματος. Μια ταξινόμηση αυτών των μεθοδολογιών μπορεί να γίνει ως προς την επιλογή των αρχικών μεταβλητών του ρευστομηχανικού προβλήματος, σύμφωνα με τις οποίες καταστρώνεται το σύστημα των προς επίλυση εξισώσεων, επιβάλλονται οι οριακές του συνθήκες στην κατάλληλη μορφή και ύστερα από την επίλυση του, από τις εξαγόμενες τιμές των αρχικών μεταβλητών προκύπτουν και όλες οι άλλες παράμετροι του πεδίου ροής.

Μαθηματικά, η διατύπωση της ασυμπίεστης ροής εισάγει ένα μοναδικό πρόβλημα σε σχέση με την συμπίεστη λόγω της ανάγκης ικανοποίησης του αντίστοιχου κριτηρίου. Φυσικά, η πληροφορία «ταξιδεύει» με άπειρη ταχύτητα σε ένα ασυμπίεστο μέσο, βάζοντας σκληρές απαιτήσεις στους υπολογιστικούς αλγόριθμους για την ικανοποίηση της ασυμπίεστότητας και εγείρει δυσκολίες στην εισαγωγή των οριακών συνθηκών. Συγκεκριμένα, οι αριθμητικές προσεγγίσεις , ως προς το είδος των αρχικών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται , διακρίνονται σε :

- Μεθοδολογίες που εισάγουν την συνάρτηση στροβιλότητας και την ροϊκή συνάρτηση ($\psi - \omega$ μοντελοποίηση). Η προσέγγιση αυτή είναι η πλέον πολυχρησιμοποιούμενη για επίλυση δισδιάστατων ροών, λόγω του ότι το πεδίο ταχυτήτων δεν υπολογίζεται άμεσα από τις εξισώσεις πεδίου αλλά εξάγεται από το πεδίο στροβιλότητας, παρότι δεν μπορεί να μετασχηματιστεί για να περιγράψει τις τρισδιάστατες γιατί κάνουν την εμφάνισή τους 6 μερικές διαφορικές (Poisson εξισώσεις στροβιλότητας) στην θέση των τεσσάρων που απαιτούνται στην μοντελοποίηση με ταχύτητα – πίεση. Ένα ακόμα πλεονέκτημα είναι ότι το πεδίο πίεσεων, που η αντιμετώπιση του από τα αριθμητικά μοντέλα είναι δύσκολη, εξαλείφεται από την μοντελοποίηση καθώς δεν χρειάζεται να λυθεί. Η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι χρήσιμη για θερμικά συστήματα ρευστών που η γνώση του πεδίου πίεσης δεν

απαιτείται. Παράλληλα, κληρονομεί τα προβλήματα που αφορούν τις ιδιότητες του ρευστού, όπως η συμπιεστότητα αλλά και η δυσχερής επιβολή των οριακών συνθηκών.

- Μεθοδολογίες που εισάγουν τις συνιστώσες της *ταχύτητας* και της *πίεσης* του ρευστού και βρίσκουν εφαρμογή στην επίλυση δισδιάστατων και τρισδιάστατων πεδίων ροής. Συγκεκριμένα, έχουμε άμεση ικανοποίηση του κριτηρίου της ασυμπιεστότητας αλλά με την εισαγωγή μιας σχέσης που συνδέει την πίεση με τις συνιστώσες της ταχύτητας μαζί με τις εξισώσεις ορμής ώστε να έχουμε πλήρη περιγραφή του πεδίου. Η προσθήκη αυτή εισάγει δυσκολίες στην κατάλληλη μοντελοποίηση παρόλα αυτά όμως σήμερα χρησιμοποιείται σχεδόν για το σύνολο των εφαρμογών.

Παρακάτω θα μας απασχολήσουν οι μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν με βάση την θεωρία των στοιχειωδών μεταβλητών καθώς και το πώς αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες που περιγράφηκαν πιο πάνω.

Η πρωταρχική μορφή των εξισώσεων του πεδίου ροής και πιο συγκεκριμένα η εξίσωση συνέχειας περιλαμβάνει την χρονική παράγωγο της πυκνότητας, η οποία από την στιγμή που σαν ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πίεσης, εισάγει μια σύζευξη της χρονικής της παραγώγου με την πίεση και στις εξισώσεις ορμής. Το πρόβλημα που προκύπτει από αυτή την μοντελοποίηση βρίσκεται στο ότι για ένα ασυμπίεστο ρευστό το πεδίο πιέσεων δεν καθοδηγείται πια από οποιαδήποτε ανεξάρτητη μεταβλητή αφού η χρονική παράγωγος της πυκνότητας εξαφανίζεται από την εξίσωση της συνέχειας. Παράλληλα, έχουμε να αντιμετωπίσουμε και την ολοένα και αυξανόμενη ασυμφωνία της ακουστικής και εκ μεταφοράς ταχύτητας των κυμάτων μειούμενου του αριθμού Mach κάνοντας τις εξισώσεις ακόμα πιο δύσκολες στην επίλυσή τους. Τρεις μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων αλλά εδώ θα ασχοληθούμε με τις δυο πιο ειδικές : *πρόβλεψης – διόρθωσης* και *τεχνητής συμπιεστότητας*.

Αρχικά έχουμε τις μεθοδολογίες που είναι ευρέως γνωστές ως *πρόβλεψης – διόρθωσης* στις οποίες οι χρονικές παράγωγοι των ταχυτήτων στις εξισώσεις ορμής χρησιμοποιούνται για την μετάβαση στο επόμενο «χρονικό επίπεδο» είτε πρόκειται για μόνιμο είτε για μη μόνιμο πρόβλημα ροής. Με την βοήθεια αυτής της διάταξης γίνεται «πρόβλεψη» με ρητό ή πεπλεγμένο τρόπο του πεδίου των ταχυτήτων χωρίς όμως να λαμβάνουμε υπ' όψιν την εξίσωση της συνέχειας σαν περιορισμό. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτό το πεδίο ταχυτήτων υπολογίζεται το πεδίο πιέσεων από μία εξίσωση Poisson έτσι ώστε να πετύχουμε την

ικανοποίηση του κριτηρίου της συνέχειας. Η εξίσωση που χρησιμοποιούμε, η οποία έχει προκύψει από συνδυασμό των σχέσεων «διόρθωσης» των ταχυτήτων με την εξίσωση της συνέχειας, αποτελεί το κλειδί για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου για αυτό και χρήζει ιδιαίτερης προσοχής μαζί με την σωστή επιλογή του τύπου του πλέγματος. Το τελικό βήμα είναι η «διόρθωση» των ταχυτήτων από το προσφάτως υπολογισμένο πεδίο πιέσεων και η μετάβαση στο νέο χρονικό επίπεδο. Επαναληπτικές μεθοδολογίες αυτής της κατηγορίας έχουν αναπτυχθεί ευρέως για την επίλυση μονίμων ή μη μονίμων δισδιάστατων και τρισδιάστατων πεδίων.

Στην μεθοδολογία ψευδοσυμπίεστικότητας, η οποία αναπτύχθηκε από τον Chorin το 1967, έχουμε την προσθήκη ενός νέου όρου στην εξίσωση συνέχειας και πιο συγκεκριμένα της χρονικής παραγώγου της πίεσης πολλαπλασιασμένη με ένα συντελεστή ψευδοσυμπίεστικότητας σχηματίζοντας έτσι τον όρο ψευδοσυμπίεστικότητας. Προσθέτοντας τον όρο αυτό, το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει είναι υπερβολικού – παραβολικού τύπου και για την επίλυσή του μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία των υπερβολικών πεδίων που εφαρμόζεται για την επίλυση των συμπίεστων πεδίων ροής. Επίσης, προσθέτοντας την χρονική παραγώγου στην εξίσωση της συνέχειας επιτυγχάνεται η συσχέτιση του πεδίου ταχυτήτων με την πίεση και οι εξισώσεις ροής μπορούν να επιλυθούν ταυτόχρονα με αντιστροφή πινάκων. Πρέπει να επισημανθεί ότι η παραπάνω προστιθέμενη παράγωγος στην εξίσωση της συνέχειας νοείται στον «ψευδοχρόνο» ως ένα μέσο για την διαμόρφωση υπερβολικού συστήματος εξισώσεων και τη δημιουργία επαναληπτικής διαδικασίας για την τελική σύγκλιση του πεδίου σε μία μόνιμη κατάσταση στην οποία ο παραπάνω όρος μηδενίζεται και οι εξισώσεις ροής αποκτούν την φυσική τους έννοια.

Φυσικά, η χρήση του ψευδοχρόνου σημαίνει ότι εισάγουμε κύματα πεπερασμένης ταχύτητας στο ασυμπίεστο πεδίο ροής ως μέσο διανομής της πίεσης. Για μια ασυμπίεστη ροή, η ταχύτητα των κυμάτων είναι άπειρη, δεδομένου του ότι η ταχύτητα διάδοσης αυτών των ψευδοκυμάτων εξαρτάται από την σπουδαιότητα της ψευδοσυμπίεστικότητας. Επιπροσθέτως, το πεδίο πιέσεων στην ασυμπίεστη ροή που εξετάζουμε επηρεάζεται ακαριαία από οποιαδήποτε αλλαγή στο πεδίο ροής αλλά με την τεχνητή συμπίεστικότητα υπάρχει μια χρονική καθυστέρηση ανάμεσα στην διαταραχή της ροής και της επιρροής του στο πεδίο πιέσεων. Ιδεατά, η τιμή του όρου ψευδοσυμπίεστικότητας επιλέγεται να είναι τόσο υψηλή όσο μας επιτρέπει ο αλγόριθμος και η μοντελοποίηση που χρησιμοποιούμε ούτως ώστε το κριτήριο της ασυμπίεστικότητας να ανακτηθεί γρήγορα. Αυτό όμως πρέπει

να πραγματοποιηθεί χωρίς να μειωθεί η ακρίβεια και η σταθερότητα της αριθμητικής μεθοδολογίας που χρησιμοποιείται. Από την άλλη, αν η τεχνητή συμπίεστικότητα επιλεγθεί έτσι ώστε αυτά τα ψευδοκύματα να «ταξιδεύουν» πολύ αργά, ώστε η μεταβολή του πεδίου πίεσεων που συνοδεύει αυτά τα κύματα να είναι πολύ αργή παραβιάζοντας την χρονική εξέλιξη του συνεκτικού οριακού στρώματος. Στις συνεκτικές ροές, η συμπεριφορά του οριακού στρώματος είναι πολύ ευαίσθητη στην βαθμίδα της πίεσης, ειδικά όταν έχουμε αποκόλληση το οριακού στρώματος. Αν έχουμε αποκόλληση, το κύμα πίεσης ταξιδεύει με πεπερασμένη ταχύτητα προκαλώντας μεταβολές στην βαθμίδα πίεσης, η οποία θα επηρεάσει το σημείο αποκόλλησης της ροής. Αυτή η αλλαγή στην αποκολλημένη ροή οδηγεί στην μη σύγκλιση της μεθόδου στην μόνιμη κατάσταση. Ειδικότερα για τις εσωτερικές ροές, η συνεκτικότητα είναι σημαντική για ολόκληρο το πεδίο ροής καθώς και η αλληλεπίδραση μεταξύ των ψευδοκυμάτων πίεσης και της συνεκτικής ροής γίνεται επίσης σπουδαία.

Τόσο στην περίπτωση των εξισώσεων Navier-Stokes για την περιγραφή συμπίεστων πεδίων ροής όσο και για τις εξισώσεις του ασυμπίεστου ρευστού με την προσθήκη του όρου της ψευδοσυμπίεστικότητας, στο προκύπτον υπερβολικό - παραβολικό σύστημα εξισώσεων, οι ιακωβιανοί πίνακες των συναγωγικών μητρώων λαμβάνουν πραγματικές ιδιοτιμές. Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις Navier-Stokes εμφανίζουν υπερβολικό χαρακτήρα στην μη συνεκτική περιοχή και παραβολικό στην συνεκτική ενώ με την εισαγωγή της υπόθεσης της μόνιμης κατάστασης προκύπτει ένα μικτό σύστημα υπερβολικού – ελλειπτικού χαρακτήρα. Η κλίση των «χαρακτηριστικών» γραμμών του πεδίου, που προσδιορίζεται από το πρόσημο των παραπάνω ιδιοτιμών, δίνει με την σειρά της την κατεύθυνση διάδοσης της «πληροφορίας» μέσα στο πεδίο ροής και έτσι επιτυγχάνεται η σύνδεση του προσήμου των ιδιοτιμών του υπερβολικού προβλήματος, με την κατεύθυνση προεκβολής των ανάντι σχημάτων διαφορών που χρησιμοποιούνται για την διακριτή αντιπροσώπευση των συναγωγικών μητρώων της ροής. Η διακριτοποίηση αυτή, που λαμβάνει υπ' όψη τις φυσικές πληροφορίες του πεδίου, αποτελεί μια πιο ολοκληρωμένη αναπαράσταση του φυσικού προβλήματος και οι μεθοδολογίες αυτές δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν κεντρικές διαφορές και όρους τεχνητής συνεκτικότητας.

Συνεχίζοντας, για την διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων έχουν αναπτυχθεί δυο μεθοδολογίες που εκμεταλλεύονται το πρόσημο των ιδιοτιμών των εξισώσεων που αρχικά χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση της συμπίεστης ροής αλλά με την είσοδο της ψευδοσυμπίεστικότητας

μπόρεσαν να βρουν εφαρμογή και στην ασυμπίεστη ροή. Οι μέθοδοι αυτοί αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως προσέγγιση Boltzmann ή Flux Vector Splitting (FVS) και επιλυτής Riemann ή Flux Difference Splitting (FDS).

Η πρώτη κατηγορία, η οποία αναπτύχθηκε στις αρχές του '80 και που αναφέρεται ως προσέγγιση Boltzmann, βασίζεται στην θεώρηση κάποιων ψευδοσωματιδίων τα οποία κινούνται μεταξύ των όγκων σύμφωνα με μια δεδομένη κατανομή ταχύτητας προκαλώντας την αλληλεπίδραση αυτών των στοιχειωδών όγκων. Η αριθμητική μέθοδος εδώ διαχωρίζει τις συναγωγικές ροές σε δύο μέρη σύμφωνα με τον πρόσημο συγκεκριμένων χαρακτηριστικών μεταβλητών, που εν γένει είναι παρόμοια αλλά όχι ταυτόσημα με τις ιδιοτιμές του ιακωβιανού συναγωγικού πίνακα. Στην συνέχεια τα δυο κομμάτια διακριτοποιούνται με κατάλληλα σενάρια (π.χ. ανάντι διαφορές) λαμβάνοντας υπ' όψιν την ανάντι ή κατάντι κίνηση των ψευδο - σωματιδίων για την διακριτοποίηση των μη συνεκτικών όρων.

Η δεύτερη κατηγορία, η οποία πρωτοπαρουσιάστηκε το 1959 από τον Godunov και αργότερα βελτιώθηκε από τους Roe και Osher, είναι εκείνη που λαμβάνει υπ' όψιν τον τρόπο διάδοσης των πληροφοριών σε κάθε σημείο του υπολογιστικού πεδίου επιλύοντας έτσι με ακριβή ή προσεγγιστικό τρόπο το πρόβλημα αρχικών τιμών Riemann (εμφάνιση 1 - D εξίσωσης Euler για τις ασυνέχειες στην διεπιφάνεια) για μια ασυνέχεια μεταξύ δύο υπολογιστικών όγκων. Η επίλυση αυτή ονομάζεται προσέγγιση Riemann, ενώ η αριθμητική μέθοδος που διακρίνει την επίδραση των κυμάτων ανάλογα με την ανάντι ή την κατάντι διάδοση τους, για την διακριτοποίηση των μη συνεκτικών όρων, ονομάζεται αντίστοιχα Flux Difference Splitting μέθοδος ή επιλυτής Riemann. Σε μια προσπάθεια μείωσης του υπολογιστικού φόρτου της μεθόδου για την εύρεση ακριβούς λύσης, τελευταία αναπτύχθηκαν προσεγγιστικές εκφράσεις του επιλυτή Riemann που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ευκολία για κάθε είδος πλέγματος στηριζόμενα στην εξαιρετική ανάλυση του οριακού στρώματος και στην περιγραφή των κυμάτων.

Στην παρούσα μελέτη η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στηρίζεται σε έναν επιλυτή Riemann ενώ για την ανάντι (upwind) αντιπροσώπευση των μητρώων της ροής στις πλευρές των υπολογιστικών χωρίων εισάγονται και χρησιμοποιούνται εκφράσεις των αρχικών μεταβλητών του πεδίου συναρτήσει των τιμών τους πάνω στις χαρακτηριστικές. Με τον τρόπο αυτό η κατεύθυνση προεκβολής καθορίζεται από το πρόσημο των ιδιοτιμών του ιακωβιανού πίνακα των συναγωγικών (μεταφορικών) όρων σε κάθε υπολογιστικό σημείο του πεδίου, δυνατότητα που δίνεται από

τον υπερβολικό χαρακτήρα των εξισώσεων με την προσθήκη του όρου της ψευδοσυμπίεστότητας. Η ανάντι αυτή προσέγγιση συσχετιζόμενη με τις χαρακτηριστικές του πεδίου, εισάγει μία πρωτοτυπία ως προς τις υπάρχουσες μεθοδολογίες επίλυσης ασυμπίεστων ροών.

Η παραπάνω μέθοδος διακριτοποίησης έχει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα αλλά και αδυναμίες συγκρινόμενη με τα μοντέλα κεντρικών διαφορών (central schemes). Γενικά, η χρήση κεντρικών διαφορών δεν απαιτεί περίπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς δικαιολογώντας έτσι το μικρότερο υπολογιστικό κόστος ανά υπολογισμό σε σχέση με τα αντίστοιχα ανάντι. Από την άλλη, η ανάντι μοντελοποίηση είναι ικανή να εντοπίσει τις ασυνέχειες πολύ πιο εύστοχα σε σχέση με την κεντρική. Επιπροσθέτως, λόγω της χαμηλής αριθμητικής διάχυσης που εμφανίζουν και τα δυο σενάρια, η ανάντι μπορεί να περιγράψει το οριακό στρώμα χρησιμοποιώντας λιγότερους κόμβους πλέγματος και πιο συγκεκριμένα το μοντέλο του Roe. Οι δυσκολίες για την ανάντι μοντελοποίηση κάνουν την εμφάνισή τους για δεύτερης και ανώτερης τάξης ακρίβεια. Το πρόβλημα εντοπίζεται στην ανάγκη επιβολής περιοριστικών συναρτήσεων (κριτηρίων) έτσι ώστε να εμποδίσουμε την δημιουργία ισχυρών διακυμάνσεων στην περιοχή εμφάνισης ασυνεχειών. Οι περιορισμοί αυτοί είναι γνωστό ότι καθυστερούν την σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας, λόγω της δυσχρηστίας σε περιοχές ομαλής ροής κάτι που ξεπεράστηκε από την πρόταση του Venkatakrishnan που βρίσκει εφαρμογή στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα. Παρόλα αυτά, μικρές παρεκκλίσεις θα υπάρχουν στην τελική λύση οι οποίες πρέπει να ληφθούν υπόψη. Τέλος, μειονέκτημα στην χρήση των περιοριστικών συναρτήσεων αποτελεί το υψηλό υπολογιστικό κόστος, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούμε πλέγματα σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.

Η παρούσα μεθοδολογία Riemann είναι μεθοδολογία πεπερασμένων όγκων, που κατά την επίλυση τον προβλήματος χρησιμοποιεί για την διακριτή αντιπροσώπευση του υπολογιστικού χωρίου, ομόθετο (collocated) πλέγμα με όλα τα μεγέθη του πεδίου εκφρασμένα στο κέντρο κάθε υπολογιστικού χωρίου. Με την μέθοδο υπολογισμού του πλέγματος θα ασχοληθούμε αναλυτικά σε παρακάτω κεφάλαιο. Η χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier-Stokes και k- ε είναι ρητή Runge - Kutta τέταρτης τάξης.

1.3 Περιγραφή της τυρβώδους ροής

Η μοντελοποίηση της τυρβώδους ροής είναι ένα από τα τρία βασικά στοιχεία της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής (CFD). Πολύ ακριβείς

μαθηματικές θεωρίες έχουν εξελιχθεί με την βοήθεια των δύο άλλων στοιχείων, την μεθοδολογία δημιουργίας πλέγματος και την ανάπτυξη αλγορίθμων. Η δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου που προσεγγίζει την φυσική συμπεριφορά της τυρβώδους ροής αποδεικνύεται απαιτητική και χρονοβόρα με αποτέλεσμα σήμερα να έχουμε επιτύχει πολύ μικρότερη ακρίβεια στην μοντελοποίηση από όση θα επιθυμούσαμε. Αυτό όμως δεν προκαλεί έκπληξη γιατί προσπαθούμε να περιγράψουμε ένα εξαιρετικά δύσκολο και περίπλοκο φαινόμενο του οποίου η φυσική δεν είναι εντελώς κατανοητή. Έτσι ο στόχος παραμένει, με χρήση των προσεγγίσεων που παρουσιάστηκαν από τους Prandtl, Taylor, von Karman και άλλους, η επινόηση ενός ιδεατού μοντέλου που θα εισάγει την λιγότερη πολυπλοκότητα ενώ παράλληλα θα αντιλαμβάνεται την ουσία της φύσης της τύρβης (φυσική της τύρβης).

Το 1937 οι Taylor και von Karman πρότειναν το εξής ορισμό: « Η τύρβη είναι μια ακανόνιστη κίνηση που γενικά κάνει την εμφάνισή της σε ρευστά, αέριας ή υγρής φύσης, όταν η ροή περνά από στερεές επιφάνειες ή όταν περνά γειτονικό ρεύμα της ίδιας ροής ή όταν διασταυρώνονται». Στο κεφάλαιο 3 θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο φαινόμενο της τύρβης αλλά έχοντας στο νου τον παραπάνω ορισμό θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν για τον υπολογισμό της συνεκτικότητας του ρευστού στις τυρβώδεις ροές.

Οι πρώτες προσπάθειες ανάπτυξης μια μαθηματικής περιγραφής των τυρβωδών τάσεων αναζητήθηκαν στην μίμηση της μοριακής διαδικασίας βαθμίδας – διάχυσης. Στο ίδιο πνεύμα ο Boussinesq εισήγαγε την έννοια της τυρβώδους συνεκτικότητας αλλά ούτε αυτός ούτε ο Reynolds κατάφεραν να προτείνουν μια συστηματική λύση των εξισώσεων Navier – Stokes. Η φυσική των συνεκτικών ροών έγινε περισσότερο κατανοητή ύστερα από την παρουσίαση της θεωρίας του οριακού στρώματος από τον Prandtl (1904) που οδήγησε τον ίδιο στην εισαγωγή του μήκους αναμείξεως και συνάμα στο πρώτο και απλούστερο μοντέλο υπολογισμού της τυρβώδους ροής (1925). Σήμερα αναφερόμαστε στην υπόθεση μήκους αναμείξεως σαν αλγεβρικό μοντέλο ή μοντέλο μηδενικής τάξης. Εξ' ορισμού ένα μοντέλο n τάξης (εξισώσεων) περιγράφει ένα μοντέλο που απαιτεί την επίλυση των n πρόσθετων διαφορικών εξισώσεων μεταφοράς μαζί με αυτές που εκφράζουν την διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Στα αλγεβρικά ανήκει και η υπόθεση Boussinesq που βασίζεται στο ότι οι τάσεις Reynolds μηδενίζονται στις θέσεις όπου η ταχύτητα παρουσιάζει ακρότατο κάτι που δεν επαληθεύεται πάντα πειραματικά. Η μεθοδολογία αυτή λοιπόν χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία για τον υπολογισμό οριακών στρωμάτων

ελεύθερων διατμητικών στρωμάτων παρατηρήθηκε όμως ότι η υπόθεση δεν προλέγει την ροή πάνω σε καμπύλες επιφάνειες ή σε περιπτώσεις όπου στο πεδίο ροής υπάρχουν περισσότερες από μία τάσεις Reynolds της ίδιας σπουδαιότητας.

Για να βελτιώσει την ικανότητα πρόβλεψης των ιδιοτήτων των τυρβωδών ροών και για να αναπτύξει μια πιο ρεαλιστική μαθηματική περιγραφή των τυρβωδών τάσεων, ο Prandtl (1945) εφηύρε ένα μοντέλο στο οποίο η τυρβώδης συνεκτικότητα εξαρτάται από την κινητική ενέργεια των τυρβωδών διακυμάνσεων, k . Πρότεινε λοιπόν μια μοντελοποιημένη διαφορική εξίσωση προσεγγίζοντας την ακριβή εξίσωση του k . Αυτή η βελτίωση, σε εννοιολογικό επίπεδο, λαμβάνει υπ' όψιν το γεγονός ότι η τυρβώδη συνεκτικότητα επηρεάζεται από το ιστορικό της ροής δηλαδή που βρέθηκε η ροή. Έτσι γεννιέται η αλγεβρική μέθοδος του μοντέλου μιας εξίσωσης.

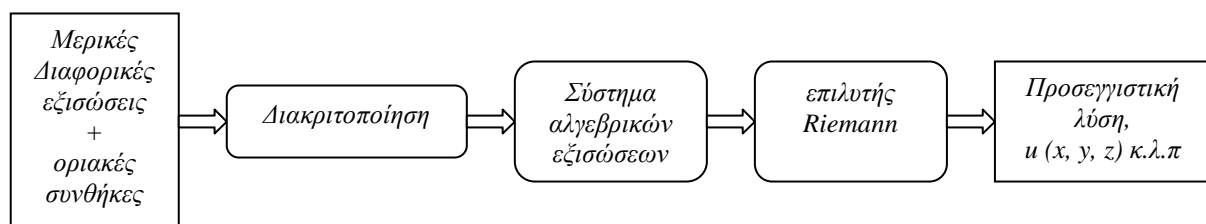
Παρότι η εξάρτηση της τυρβώδους συνεκτικότητας από το ιστορικό της ροής μας παρέχει ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο, η ανάγκη να ορίσουμε την κλίμακα των δυνάμεων, που περιέχουν την τυρβώδη κινητική ενέργεια, παραμένει. Από τη στιγμή που την θεωρούμε χαρακτηριστικό μέγεθος της τύρβης και είναι διαφορετική για κάθε ροή, το μοντέλο που δεν την λαμβάνουν υπ' όψιν θεωρούνται ημιτελή. Έτσι πρέπει να γνωρίζουμε κάτι περισσότερο για την ροή εκτός από τις αρχικές και οριακές συνθήκες για να μπορούμε να πάρουμε λύση.

Ένας επιθυμητός τύπος μοντέλου τύρβης είναι εκείνος ο οποίος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε τυρβώδη ροή με γνώση μόνο των οριακών ή / και αρχικών συνθηκών. Ιδεατά, κανένα στοιχείο για τις ιδιότητες της τύρβης δεν θα πρέπει να χρειάζεται για να υπολογίσουμε την λύση. Ένα τέτοιο μοντέλο ορίζετε ως ολοκληρωμένο. Ο ορισμός που δόθηκε δεν αναφέρει τίποτα για την ακρίβεια και την καθολικότητα του μοντέλου παρά μόνο ότι χρησιμοποιείται για να καθορίσουμε την ροή χωρίς πρότερη γνώση οποιαδήποτε ιδιότητας της υπό μελέτη ροής.

Ο Kolmogorov (1942) εισήγαγε το πρώτο ολοκληρωμένο μοντέλο περιγραφής της τύρβης. Συγκεκριμένα μαζί με την μοντελοποιημένη εξίσωση του k , πρότεινε μια δεύτερη παράμετρο ε στην οποία αναφερόταν ως «ο ρυθμός καταστροφής της ενέργειας στο πεδίο του όγκου και του χρόνου» (ρυθμός της καταστροφής της τύρβης). Τα αντίστροφο του ε χρησιμοποιείται ως κλίμακα του τυρβώδους χρόνου ενώ το $k^{1/2}/\varepsilon$ ως το ανάλογο του μήκους αναμίξεως. Σε αυτό το μοντέλο που είναι γνωστό ως $k - \varepsilon$, το ε ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση παρόμοια με αυτή του k έτσι καταλήγουμε στο σύστημα δύο εξισώσεων

επίλυσης της τύρβης. Το συγκεκριμένο μοντέλο θεωρείται αξιόπιστο (κυρίως των Launder και Spalding) και κατάλληλο για την περιγραφή πολύπλοκων ροών παρότι χρησιμοποιεί την υπόθεση Boussinesq και εν γένει είναι δαπανηρότερη από πλευράς υπολογιστικής ισχύος και έτσι σήμερα το απαντάμε συχνά στην επίλυση της ροής διαμέσου των υδροδυναμικών μηχανών.

Στο μοντέλο $k - \epsilon$ σημαντικό ρόλο όπως θα δούμε παρακάτω στο αντίστοιχο κεφάλαιο παίζουν οι οριακές συνθήκες στο στερεό όριο ιδιότητα που οδήγησε στην εμφάνιση δύο διαφορετικών προσεγγίσεων των συνθηκών που εφαρμόζονται. Το πρώτο είναι το μοντέλο του μικρού αριθμού Reynolds από τους Jones και Launder που δημιουργήθηκε γιατί όταν ολοκληρώνονταν οι εξισώσεις στον τοίχο εμφάνιζαν αριθμητική αστάθεια. Οι προσθήκες από διάφορους ερευνητές βασίστηκαν στο ότι θα έπρεπε οι εξισώσεις να ολοκληρωθούν απευθείας από τον συνεκτικό υπόστρωμα μέχρι το στερεό όριο. Η συγκεκριμένη τεχνική όμως σπάνια χρησιμοποιείται σε πολύπλοκες τρισδιάστατες γεωμετρίες γιατί απαιτεί πάρα πολύ πυκνά πλέγματα κοντά στο στερεό όριο αυξάνοντας κατά πού την υπολογιστική ισχύ. Τα δεύτερο, που χρησιμοποιείται και στην παρούσα εργασία, περιγράφεται από τις συναρτήσεις τοιχώματος (wall functions) που προσδιορίζουν την ταχύτητα και τις διατμητικές τάσεις του ρευστού κοντά στο στερεό όριο ενώ παράλληλα δεν απαιτεί πολύ πυκνό πλέγμα κοντά στο τοίχωμα. Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται με μεγάλη αποτελεσματικότητα σε πλήθος πεδίων αλλά σε περιοχές ανακυκλοφορίας ή έντονων φαινομένων δινών έχει παρατηρηθεί ότι δεν περιγράφει ικανοποιητικά το πεδίο κοντά στο στερεό όριο. Για τον λόγο αυτό προτάθηκαν διάφορες διορθώσεις τόσο στις συναρτήσεις τοιχώματος όσο και στους συντελεστές των εξισώσεων $k - \epsilon$ με βελτίωση των αποτελεσμάτων σε συγκεκριμένες γεωμετρίες όμως.



Εικόνα 1.1 Περιγραφή της υπολογιστικής διαδικασίας εύρεσης λύσης

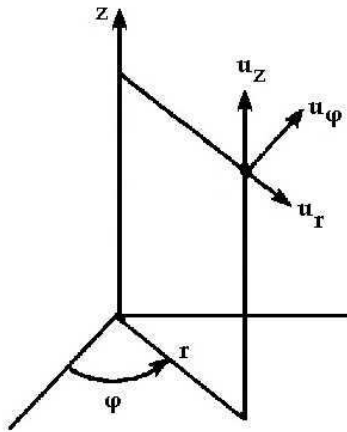
1.4 Σκοπός – Συνοπτική περιγραφή της παρούσας εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας αριθμητικής μεθοδολογίας για τον υπολογισμό μόνιμης δισδιάστατης και αξονοσυμμετρικής ασυμπίεστης ροής με τη μέθοδο της ψευδοσυμπίεστότητας. Αναλυτικότερα, η μεθοδολογία αυτή πρέπει να μπορεί να είναι σε θέση να επιλύει τις εξισώσεις Navier - Stokes με την χρήση γενικευμένων καμπυλόγραμμων πλεγμάτων, σε μόνιμα δισδιάστατα τυρβώδη πεδία ροής.

Συγκεκριμένα, στο 2^ο κεφάλαιο θα γίνει μια παρουσίαση των βασικών εξισώσεων Navier - Stokes περιγραφής της ροής για ασυμπίεστο συνεκτικό ρευστό σε δύο διαστάσεις και για γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Στο 3^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την περιγραφή και την αποτελεσματικότητα του μοντέλου τύρβης k-ε δύο εξισώσεων αλλά και με το σκεπτικό πίσω από την επιλογή του. Στο 4ο κεφάλαιο θα γίνει μια εκτενής ανάλυση της μεθοδολογίας που ακολουθείται για την αριθμητική επίλυση του πεδίου ροής όσον αναφορά την πορεία επίλυσης, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μοντελοποίησης, την διαδικασία επιλογής των οριακών συνθηκών καθώς και των κριτηρίων ευστάθειας. Στο 5^ο κεφάλαιο πραγματοποιείται εφαρμογή της αριθμητικής μεθοδολογίας στην επίλυση διδιάστατων πεδίων μόνιμης στρωτής ή τυρβώδους ροής διαμέσου του υπό εξέταση ακροφυσίου καθώς και ανάλυση των αποτελεσμάτων ώστε να διαπιστωθεί η αξιοπιστία και ακρίβεια της παρούσας μεθοδολογίας. Τέλος, στο 6^ο κεφάλαιο, γίνεται περιγραφή της διαδικασίας μοντελοποίησης και πορείας επίλυσης του προβλήματος του ακροφυσίου, περιγραφή και αντιστοιχία μεταβλητών του κώδικα με αυτές που χρησιμοποιούνται στη θεωρία (Κεφ. 2, 3 και 4), καθώς και περιγραφή της μεθόδου δημιουργίας πλέγματος.

2.1 Οι 2 – D εξισώσεις Navier – Stokes.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ροή ασυμπίεστου ρευστού πυκνότητας ρ , προκύπτουν σε διαφορική μορφή από τις εξισώσεις συνέχειας (διατήρησης της μάζας), της διατήρησης της ορμής (δεύτερος νόμος του Newton) και της διατήρησης της ενέργειας (πρώτος νόμος θερμοδυναμικής). Τα σύστημα εξισώσεων που προκύπτει αναφέρεται ως σύστημα Navier – Stokes. Οι σχέσεις αυτές σε διαφορική και σε κυλινδρικές συντεταγμένες (z, r) είναι :



Εικόνα 2.1 Κυλινδρικές συντεταγμένες (z, φ, r)

Εξίσωση συνέχειας :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{u} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.1 \alpha)$$

Εξίσωση ορμής :

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{div}(\rho \vec{u}) = -\text{grad}P + \text{div} \vec{\tau}$$

Αναλύοντας την στις δυο υπό διερεύνηση κατευθύνσεις προκύπτει :

z – αξονική κατεύθυνση :

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z^2}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r u_z u_r)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial(u_z^2 + p)}{\partial z} + \frac{u_z u_r}{r} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial r} \right) = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \quad (2.1.1 \beta)$$

r- ακτινική κατεύθυνση :

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r u_r^2)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \tau_{rr})}{\partial r} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} + \frac{\partial(u_r^2 + p)}{\partial r} + \frac{u_r^2}{r} \right) = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}}{r} \quad (2.1.1 \gamma)$$

Η εξίσωση ενέργειας στην παρούσα εργασία δεν θα μας απασχολήσει καθώς δεν απαιτείται υπολογισμός του θερμοκρασιακού πεδίου. Για τις εφαρμογές όπου η πυκνότητα παραμένει σταθερή σε όλο το υπολογιστικό πεδίο, θεωρούμε ότι το κριτήριο της ασυμπίεστης ροής ικανοποιείται. Έτσι για μια ασυμπίεστη ροή η πυκνότητα θεωρείται σταθερή αφαιρώντας την από την λίστα των αγνώστων μεταβλητών. Επιπλέον, μικρό – διακυμάνσεις στο συντελεστή ιξώδους είναι ουσιαστικά αμελητέες και έτσι θεωρείται γνωστός επίσης.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω τρεις εξισώσεις προκύπτει το σύστημα σε μητρική μορφή :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ u_z \\ u_r \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_z \\ u_z^2 + p \\ u_z u_r \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z u_r \\ u_r^2 + p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_r/r \\ u_z u_r/r \\ u_r^2/r \end{bmatrix} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz}/r \\ (\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi})/r \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

όπου $p = \frac{P}{\rho}$ είναι η ανηγμένη πίεση.

Για περαιτέρω απλοποίηση θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_z \\ u_r \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} u_z \\ u_z^2 + p \\ u_z u_r \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z u_r \\ u_r^2 + p \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} u_r/r \\ u_z u_r/r \\ u_r^2/r \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz}/r \\ (\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi})/r \end{bmatrix}$$

Η απλοποιημένη μορφή των εξισώσεων είναι :

$$\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{\partial G_1}{\partial r} + K_1 \right) = \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial T_1}{\partial r} + L_1 \quad (2.1.3)$$

Θεωρώντας το ρευστό ως νευτώνειο, οι αντίστοιχες εκφράσεις των διατμητικών τάσεων είναι :

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu' \operatorname{div} \vec{u}, & \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu' \operatorname{div} \vec{u} \\ \tau_{\phi\phi} &= 2\mu \frac{u_r}{r} + \mu' \operatorname{div} \vec{u} \\ \tau_{zr} = \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

όπου $\vec{u} = (u_z, u_r)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και $\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}$.

Ο συντελεστής μ ονομάζεται *δυναμική συνεκτικότητα* και αποτελεί φυσική ιδιότητα του ρευστού, είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και της πίεσης ενώ είναι ανεξάρτητος της εντατικής κατάστασης του ρευστού. Ο συντελεστής μ' λέγεται *ιζώδες όγκου* και στην περίπτωση που το ρευστό βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει :

$$\frac{2}{3}\mu + \mu' = 0 \Rightarrow \mu' = -\frac{2}{3}\mu$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση έχουμε :

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right), & \tau_{rr} &= \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau_{\phi\phi} &= \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \tau_{rr} - \tau_{\phi\phi} = 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \quad (2.1.4)$$

2.2 Προσθήκη ψευδοσυμπιεστότητας

Οι εξισώσεις ροής του ρευστού (2.1.2) που προέκυψαν παραπάνω αποτελούν τις φυσικές εξισώσεις μη μόνιμης ροής. Όταν χρησιμοποιούνται για την επίλυση μόνιμων πεδίων ροής, η χρονική παράγωγος χρησιμοποιείται για την δημιουργία μιας επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης για τη μετάβαση σε επόμενο «χρονικό επίπεδο» επαναλήψεων, με σκοπό την τελική σύγκλιση του προβλήματος σε μόνιμη λύση μηδενίζοντας ταυτόχρονα τις χρονικές παραγώγους. Η διαφορά στον χαρακτήρα των εξισώσεων ροής συμπιεστού και ασυμπιέστου ρευστού εντοπίζεται στην απουσία χρονικής παραγώγου στην εξίσωση συνέχειας. Προσπαθούμε λοιπόν να δώσουμε υπερβολικό χαρακτήρα στις εξισώσεις ασυμπιέστου ρευστού εισάγοντας την χρονική παράγωγο της πίεσης που αποτελεί την μοναδική λογική επιλογή (μεταξύ των ταχυτήτων και της πυκνότητας που παραμένει σταθερή). Η προσθήκη αυτή όμως μας οδηγεί σε επίλυση των μη πραγματικών εξισώσεων ασυμπιέστου ρευστού υπονομεύοντας τα αποτελέσματα της μεθόδου και αμφισβητεί την ικανότητά τους για περιγραφή της μη μόνιμης ροής. Από την άλλη, όταν επιτευχθεί σύγκλιση, η χρονική παράγωγος μηδενίζεται και ικανοποιείται το κριτήριο της ασυμπιεστότητας.

Επιστρέφοντας στις αρχικές εξισώσεις, παρατηρούμε την απουσία της πίεσης από το διάνυσμα U_1 των αγνώστων μεταβλητών που παραγωγίζονται χρονικά καθιστώντας αδύνατο τον συσχετισμό των μη συνεκτικών μητρώων E_1 , G_1 και K_1 με το διάνυσμα των αγνώστων μεταβλητών, με αποτέλεσμα το γενικό πρόβλημα της συμβατότητας πίεσης – ταχύτητας για ασυμπιέστες ροές.

Η χρήση της μεθόδου της **ψευδοσυμπιεστότητας** μας επιτρέπει την σύνδεση της πίεσης με τις συνιστώσες της ταχύτητας και τη δημιουργία πλήρως πεπλεγμένου αριθμητικού σχήματος για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που περιγράφουν το ρευστομηχανικό πρόβλημα.

Συγκεκριμένα, προσθέτοντας τον όρο της ψευδοσυμπιεστότητας στην εξίσωση συνέχειας προκύπτει :

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0$$

Η παράμετρος β είναι ο **συντελεστής ψευδοσυμπιεστότητας** που συνδέει τις εξισώσεις της ορμής με την εξίσωση της συνέχειας και η τιμή που επιλέγεται για αυτήν, είναι τέτοια ώστε να διευκολύνει τη γρήγορη σύγκλιση του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση ροής. Η αναθεωρημένη εξίσωση μαζί με τις εξισώσεις ορμής για μη μόνιμη κατάσταση ροής σχηματίζουν το χρονικά εξαρτώμενο υπερβολικό – παραβολικό σύστημα εξισώσεων περιγραφής της ροής. Με αυτόν τον τρόπο δύναται να γίνει χρησιμοποίηση των πεπλεγμένων σχημάτων που έχουν χρήση στις συμπιεστές ροές. Σημειώνουμε ότι στην παρούσα φάση η μεταβλητή t δεν αντιπροσωπεύει πια τον φυσικό χρόνο όπως ήδη έχουμε εξηγήσει στον 1^ο κεφάλαιο.

Παράλληλα, μια από τις βασικές δυσκολίες που έχουμε να αντιμετωπίσουμε στην συμπιεστές ροές, δηλαδή η μετάβαση από την υποηχητική στην υπερηχητική ροή καθώς και η ύπαρξη των «κρουστικών κυμάτων» (shock waves) κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου, με την παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να αποφευχθεί.

Η τιμή της παραμέτρου β είναι σημαντική και γι αυτό επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να οδηγεί στην γρήγορη σύγκλιση του συστήματος στην μόνιμη κατάσταση ροής εξασφαλίζοντας παράλληλα την σταθερότητα της μεθόδου. Το 1986 ο Kwak πρότεινε η τιμή της παραμέτρου να παίρνει τιμές από το διάστημα (0.1...10) αφού παρατήρησε ότι επαληθεύονται για τα περισσότερα ρευστομηχανικά προβλήματα της κατηγορίας. Τα πάνω όριο προκύπτει από την ανάγκη το διορθωμένο πεδίο ταχυτήτων να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας του ασυμπίεστου ρευστού (ρυθμός σύγκλισης) ενώ το κάτω όριο από την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων πίεσης που πρέπει να είναι τέτοια ούτως ώστε να υπερκαλύπτει την διάδοση της στροβιλότητας αλλιώς οι επαναλήψεις στον ψευδοχρόνο τείνουν να μη συγκλίνουν.

Με πρόσθεση του όρου της ψευδοσυμπιεστότητας, στις σχέσεις (2.1.3) το μητρώο U_1 γίνεται :

$$U_1 = \begin{bmatrix} p/\beta \\ u_z \\ u_r \end{bmatrix}$$

2.3 Αδιαστατοποίηση του συστήματος Navier – Stokes.

Το επόμενο βήμα για την ορθή μοντελοποίηση αλλά και τον εύκολο χειρισμό του συστήματος των εξισώσεων είναι η αδιαστατοποίηση τους με κάποια χαρακτηριστικά μεγέθη έτσι ώστε το ρευστομηχανικό πρόβλημα να εξαρτάται από κάποιους χαρακτηριστικούς αριθμούς όπως οι αριθμοί Reynolds, Mach, Prandtl, Euler και Strouhal.

Χρησιμοποιούμε τα παρακάτω αδιαστατοποιήμενα μεγέθη :

$$\begin{aligned} u_z^* &= \frac{u_z}{U_{ref}}, u_r^* = \frac{u_r}{U_{ref}} \\ z^* &= \frac{z}{L_{ref}}, r^* = \frac{r}{L_{ref}} \\ t^* &= \frac{t}{L_{ref}/U_{ref}} \\ p^* &= \frac{P}{\rho U_{ref}^2} = \frac{p}{U_{ref}^2} \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_{ref}}, \tau^* = \frac{\tau}{\frac{U_{ref}}{L_{ref}} \mu_{ref}} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Σημειώνουμε ότι τα αδιάστατα μεγέθη συμβολίζονται με αστερίσκο ενώ οι παράμετροι αδιαστατοποίησης από τον δείκτη ref.

Εισάγοντας τα αδιάστατα μεγέθη προς εξισώσεις Navier – Stokes και χρησιμοποιώντας κανόνες παραγωγισής όπως :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}/U_{ref}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}}$$

προκύπτει το παρακάτω προς επίλυση σύστημα εξισώσεων N – S σε αδιάστατη μορφή :

Εξίσωση συνέχειας :

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_z^*}{\partial z^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}} + \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}} + \frac{u_r^*}{r^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{U_{ref}}{L_{ref}} \cdot \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} + \frac{u_r^*}{r^*} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial u_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} + \frac{u_r^*}{r^*} = 0}$$

(2.3.2 α)

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση διατηρεί την αρχική της μορφή.

Εξίσωση ορμής :

z – αξονική κατεύθυνση :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial t^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}/U_{ref}} + \frac{\partial u_z^{*2}}{\partial z^*} \cdot \frac{U_{ref}^2}{L_{ref}} + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \cdot \frac{U_{ref}^2}{L_{ref}} + \frac{\partial(u_z^* \cdot u_r^*)}{\partial r^*} \cdot \frac{U_{ref}^2}{L_{ref}} + \frac{u_z^* \cdot u_r^*}{r^*} \cdot \frac{U_{ref}^2}{L_{ref}} \right) = \\ = \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}} \cdot \mu_{ref} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial r^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}} \cdot \mu_{ref} + \frac{\tau_{rz}^*}{r^*} \cdot \frac{U_{ref}}{L_{ref}} \cdot \mu_{ref} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{U_{ref}^2}{L_{ref}} \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u_z^{*2} + p^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial(u_z^* \cdot u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{u_z^* \cdot u_r^*}{r^*} \right) = \frac{U_{ref} \cdot \mu_{ref}}{L_{ref}^2} \left(\frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial r^*} + \frac{\tau_{rz}^*}{r^*} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial u_z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u_z^{*2} + p^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial(u_z^* \cdot u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{u_z^* \cdot u_r^*}{r^*} = \frac{\mu_{ref}}{\rho U_{ref} L_{ref}} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial r^*} + \frac{\tau_{rz}^*}{r^*} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u_z^{*2} + p^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial(u_z^* \cdot u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{u_z^* \cdot u_r^*}{r^*} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial r^*} + \frac{\tau_{rz}^*}{r^*} \right)}$$

(2.3.2 β)

r– ακτινική κατεύθυνση (ομοίως) :

$$\boxed{\frac{\partial u_r^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u_z^* \cdot u_r^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial(u_r^{*2} + p^*)}{\partial r^*} + \frac{u_r^{*2}}{r^*} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{rr}^*}{\partial r^*} + \frac{\tau_{rr}^* - \tau_{\phi\phi}^*}{r^*} \right)}$$

(2.3.2 γ)

όπου $\text{Re} = \frac{\rho U_{ref} L_{ref}}{\mu_{ref}}$ είναι ο αδιαστατοποιημένος αριθμός Reynolds.

Από εδώ και στο εξής θα αμελούνται οι αστερίσκοι και θα εννοείται ότι τα μεγέθη είναι αδιαστατοποιημένα με βάση την παραπάνω διαδικασία.

Πρέπει να τονιστεί ότι μπορεί να χρησιμοποιηθούν και άλλες μεταβλητές ως παράμετροι αδιαστατοποίησης, όπως για παράδειγμα για την πίεση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πέρα από την πίεση περιβάλλοντος την ταχύτητα με περιορισμό στην ταχύτητα του ήχου ελεύθερης ροής (για υψηλής ταχύτητας ροή).

Όσον αφορά την διαδικασία αδιαστατοποίησης του χρόνου ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτον, για εφαρμογές όπου υπάρχει μεγάλος αριθμός Reynolds $Re \gg 1$, ο χρόνος αδιαστατοποιείται με τον τρόπο που ορίστηκε πριν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός του ότι τέτοιου είδους προβλήματα ο όρος μεταφοράς επικρατεί του όρου συνεκτικότητας και ο L_{ref}/U_{ref} αποτελεί μια φυσική αναπαράσταση του χρονικού διαστήματος του προβλήματος (για παράδειγμα ένα μόριο που κινείται με ταχύτητα U_{ref} «μεταφέρεται» κατά ένα χαρακτηριστικό μήκος L). Δεύτερον, για ροή χαμηλού αριθμού Reynolds, $Re \ll 1$, η διάχυση επικρατεί του όρου μεταφοράς και ο L_{ref}^2/ν είναι καταλληλότερος για παράμετρος αδιαστατοποίησης. Το παρόν πρόβλημα ανήκει στην πρώτη κατηγορία όπου έχουμε ροή υψηλού αριθμού Reynolds.

Οι αδιαστατοποιημένες εξισώσεις Navier – Stokes σε μητρική μορφή έχουν ως εξής :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{\partial G_1}{\partial r} + K_1 = \frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial T_1}{\partial r} + L_1 \right) \quad (2.3.3)$$

2.4 Μετασχηματισμός συντεταγμένων

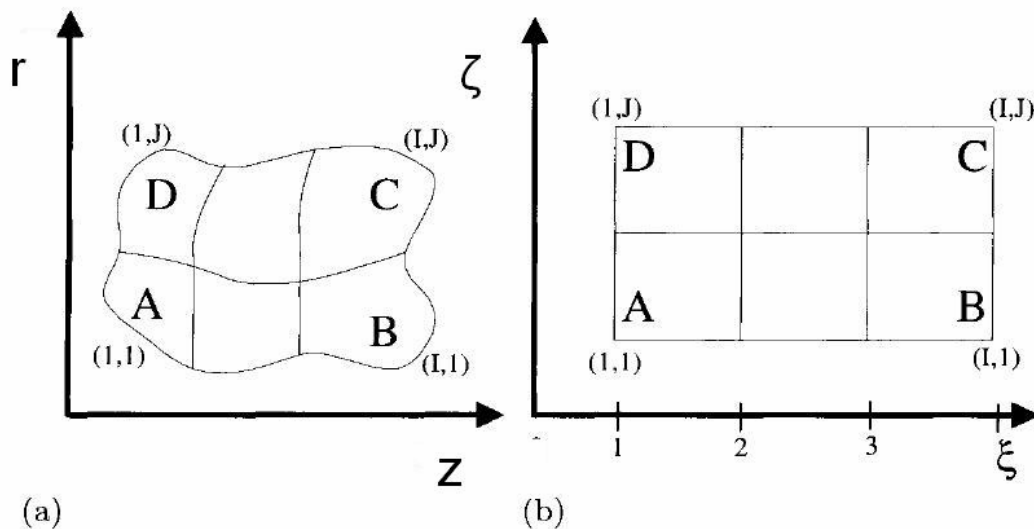
Το επόμενο βήμα για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, έχοντας υπ' όψιν το ακανόνιστο σχήμα του φυσικού πεδίου που εξετάζουμε, είναι ο μετασχηματισμός τους με την χρήση γενικευμένων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων αφού είναι από τους πιο απλούς τρόπους για την μελέτη της ροής εντός χωρίων τυχαίας μορφής.

Με το μετασχηματισμό των εξισώσεων σε γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων επιτυγχάνεται η επίλυση σε ένα ομοιόμορφο πια υπολογιστικό πεδίο, όπου οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών για την διακριτή αντιπροσώπευση των διαφορικών εξισώσεων της ροής απλοποιούνται, διευκολύνοντας παράλληλα την επιβολή των οριακών συνθηκών.

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων γίνεται με την εισαγωγή νέων ανεξάρτητων μεταβλητών:

$$\xi = \xi(z, r) \quad \text{και} \quad \zeta = \zeta(z, r)$$

με τις (z, r) συντεταγμένες να εκφράζουν το φυσικό πεδίο και τις (ξ, ζ) να εκφράζουν το αντίστοιχο υπολογιστικό. Χαρακτηριστικό της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι η επιλογή των μεταβλητών είναι τέτοια ώστε το χωρικό βήμα στο καμπυλόγραμμο σύστημα (ξ, ζ) να είναι ομοιόμορφο και μοναδιαίο ($\Delta\xi = \Delta\zeta = 1$) όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.1 .



Εικόνα 2.1 Μετασχηματισμός συντεταγμένων (a) Φυσικό πεδίο και (b) Υπολογιστικό πεδίο

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας οπότε προκύπτει :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \xi_z \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta_z \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \xi_r \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta_r \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (2.4.1)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις μετρικές ποσότητες ξ_z, ξ_r, ζ_z και ζ_r ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά εκφράζουμε τα ολικά διαφορικά των συντεταγμένων του υπολογιστικού χωρίου σε μητρική μορφή :

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \xi_z \cdot dz + \xi_r \cdot dr \\ d\zeta &= \zeta_z \cdot dz + \zeta_r \cdot dr \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} d\xi \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_z & \xi_r \\ \zeta_z & \zeta_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix}$$

Ομοίως για τις συντεταγμένες του φυσικού χωρίου έχουμε :

$$\begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi & z_\zeta \\ r_\xi & r_\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\zeta \end{bmatrix}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει :

$$\begin{bmatrix} \xi_z & \xi_r \\ \zeta_z & \zeta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi & z_\zeta \\ r_\xi & r_\zeta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \cdot \begin{pmatrix} r_\zeta & -z_\zeta \\ -r_\xi & z_\xi \end{pmatrix}$$

Επομένως οι μετρικές ποσότητες που αναζητούμε γράφονται :

$$\begin{aligned} \xi_z &= \frac{r_\zeta}{J}, \xi_r = -\frac{z_\zeta}{J} \\ \zeta_z &= -\frac{r_\xi}{J}, \zeta_r = \frac{z_\xi}{J} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Ο πίνακας J αποτελεί την ιακωβιανή του μετασχηματισμού από το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στο γενικευμένο καμπυλόγραμμο και ισούται με :

$$J = \frac{\partial(z, r)}{\partial(\xi, \zeta)} = \begin{vmatrix} z_\xi & z_\zeta \\ r_\xi & r_\zeta \end{vmatrix} = z_\xi \cdot r_\zeta - z_\zeta \cdot r_\xi \quad (2.4.3)$$

Οι ποσότητες z_ξ, z_ζ, r_ξ και r_ζ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές στο υπολογιστικό πεδίο.

2.5 Μετασχηματισμός στο γενικευμένο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων των εξισώσεων N – S .

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού (2.4.1) στις εξισώσεις N – S (2.3.3) προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U_1}{\partial t} + \underbrace{\left(\xi_z \frac{\partial E_1}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial E_1}{\partial \zeta} \right)}_{\partial E_1 / \partial z} + \underbrace{\left(\xi_r \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial G_1}{\partial \zeta} \right)}_{\partial G_1 / \partial r} + K_1 = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\underbrace{\left(\xi_z \frac{\partial R_1}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial R_1}{\partial \zeta} \right)}_{\partial R_1 / \partial z} + \underbrace{\left(\xi_r \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial T_1}{\partial \zeta} \right)}_{\partial T_1 / \partial r} + L_1 \right] \quad (2.5.1)
 \end{aligned}$$

όπου τα μητρώα R_1 , T_1 και L_1 περιέχουν τις μετασχηματισμένες μερικές παραγώγους των ταχυτήτων.

Αντίστοιχα οι διατμητικές τάσεις μετασχηματίζονται παρόμοια :

$$\begin{aligned}
 \tau'_{zz} &= \frac{2}{3} \mu \left[2 \underbrace{\left(\xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right)}_{\partial u_z / \partial z} - \underbrace{\left(\xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right)}_{\partial u_r / \partial r} - \frac{u_r}{r} \right] \Rightarrow \\
 \tau'_{zz} &= \mu \left(\frac{4}{3} \xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{4}{3} \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \frac{u_r}{r} \right)
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \tau'_{rr} &= \mu \left(\frac{4}{3} \xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \frac{4}{3} \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \frac{u_r}{r} \right) \\
 \tau'_{zr} &= \mu \left(\xi_r \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} + \xi_z \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right) \\
 \tau'_{rr} - \tau'_{\phi\phi} &= 2\mu \left(\xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} - \frac{u_r}{r} \right)
 \end{aligned}$$

Σε μια προσπάθεια απλοποίησης, αποδεικνύεται ότι διαιρώντας τις σχέσεις (2.5.1) με την ιακωβιανή J και προσθαφαιρώντας μερικούς όρους τις αναγάγουμε στην παρακάτω μορφή :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} + K = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} + L \right)} \quad (2.5.2)$$

Το διάνυσμα U των κύριων μεταβλητών (primitive variables) προκύπτει :

$$U = J \cdot U_1$$

Τα μη συνεκτικά διανύσματα ροής E , G και K (inviscid flux vectors) προκύπτουν :

$$E = J(E_1\xi_z + G_1\xi_r) = J \begin{bmatrix} u_z\xi_z + u_r\xi_r \\ (u_z^2 + p)\xi_z + u_z u_r \xi_r \\ u_z u_r \xi_z + (u_r^2 + p)\xi_r \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u_z\xi_z + u_r\xi_r \\ u_z(u_z\xi_z + u_r\xi_r) + p\xi_z \\ u_r(u_z\xi_z + u_r\xi_r) + p\xi_r \end{bmatrix}$$

$$G = J(E_1\zeta_z + G_1\zeta_r) = J \begin{bmatrix} u_z\zeta_z + u_r\zeta_r \\ (u_z^2 + p)\zeta_z + u_z u_r \zeta_r \\ u_z u_r \zeta_z + (u_r^2 + p)\zeta_r \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u_z\zeta_z + u_r\zeta_r \\ u_z(u_z\zeta_z + u_r\zeta_r) + p\zeta_z \\ u_r(u_z\zeta_z + u_r\zeta_r) + p\zeta_r \end{bmatrix}$$

$$K = JK_1$$

Τα συνεκτικά διανύσματα ροής R , T και L (viscous flux vectors) προκύπτουν :

$$R = J(R_1\xi_z + T_1\xi_r) = J \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{zz}\xi_z + \tau'_{rz}\xi_r \\ \tau'_{zr}\xi_z + \tau'_{rr}\xi_r \end{bmatrix} =$$

$$= J \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \left(\frac{4}{3} \xi_z^2 + \xi_r^2 \right) + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \left(\frac{4}{3} \xi_z \zeta_z + \xi_r \zeta_r \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \left(\frac{1}{3} \xi_z \xi_r \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \left(\xi_r \zeta_z - \frac{2}{3} \xi_z \zeta_r \right) - \frac{2}{3} \xi_z \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \left(\frac{1}{3} \xi_z \xi_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \left(\xi_z \zeta_r - \frac{2}{3} \xi_r \zeta_z \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \left(\frac{4}{3} \xi_r^2 + \xi_z^2 \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \left(\frac{4}{3} \xi_r \zeta_r + \xi_z \zeta_z \right) - \frac{2}{3} \xi_r \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}$$

και αντίστοιχα :

$$T = J(R_1\zeta_z + T_1\zeta_r) = J \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{zz}\zeta_z + \tau'_{rz}\zeta_r \\ \tau'_{zr}\zeta_z + \tau'_{rr}\zeta_r \end{bmatrix} =$$

$$= J \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \left(\frac{4}{3} \xi_z^2 + \xi_r^2 \right) + \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \left(\frac{4}{3} \xi_z \zeta_z + \xi_r \zeta_r \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{3} \zeta_z \zeta_r \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \left(\xi_r \zeta_z - \frac{2}{3} \xi_z \zeta_r \right) - \frac{2}{3} \zeta_z \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \left(\frac{1}{3} \zeta_z \zeta_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \left(\xi_z \zeta_r - \frac{2}{3} \xi_r \zeta_z \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \left(\frac{4}{3} \zeta_r^2 + \zeta_z^2 \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \left(\frac{4}{3} \xi_r \zeta_r + \xi_z \zeta_z \right) - \frac{2}{3} \zeta_r \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}$$

$$L = JL_1$$

3.1 Τύρβη και χαρακτηριστικά τυρβώδους ροής

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια προσπάθεια περιγραφής του φαινομένου της τύρβης καθώς και η περιγραφή του χρησιμοποιούμενου μοντέλου επίλυσής της.

Τα είδη των πεδίων ροής που συναντάμε στην φύση και θα μας απασχολήσουν είναι το στρωτό και το τυρβώδες. Ο διαχωρισμός τους οφείλεται στο ότι η χρονική συμπεριφορά μιας διαταραχής ορισμένου πλάτους και συχνότητας που δημιουργείται μέσα στο πεδίο ροής. Συγκεκριμένα αν το πλάτος μιας τυχαίας διαταραχής που δημιουργείται μέσα στο πεδίο ροής ελαττώνεται με το χρόνο (μηδενικές χρονικές παράγωγοι), τότε πρόκειται για *στρωτή ροή*. Αν όμως το πλάτος της διαταραχής αυξάνεται με το χρόνο δείχνοντας ότι η αρχική διαταραχή ή η αρχική αστάθεια στη ροή, μπορεί να αφαιρέσει από την ροή κινητική ενέργεια και στη συνέχεια να δημιουργήσει και άλλες διαταραχές μικρότερου πλάτους και διαφορετικής συχνότητας, τότε η ροή χαρακτηρίζεται *τυρβώδης*.

Άλλος τρόπος διαχωρισμού των ροών είναι η στροβιλότητα. Οι τυρβώδεις ροές είναι ροές υψηλής στροβιλότητας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στις στρωτές ροές να εμφανίζονται εν γένει μεγάλες δίνες και στις τυρβώδεις μικροδίνες. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι που τοποθετεί το όριο ανάμεσα στις ροές μικρής και μεγάλης στροβιλότητας.

Για να αντιληφθούμε τι είναι τύρβη θα πρέπει να δούμε τις ιδιότητες της και να τις αποσαφηνίσουμε πριν καταλήξουμε σε έναν επαρκή ορισμό.

1. Οι τυρβώδεις ροές είναι μη μόνιμες ροές που έχουν *ακανόνιστες διακυμάνσεις* (fluctuations) της ταχύτητας γύρω από μια χρονικά μέση τιμή και στις τρεις κατευθύνσεις (z,φ,r). Η ένταση αυτών των διακυμάνσεων είναι μεταβλητή, αλλά συνήθως είναι κάτω από το 10% της μέσης ταχύτητας ενώ η φύση τους δεν είναι στοχαστική (τυχαία) αλλά έχουν δομή και συνειρισμό.
2. Οι αταξίες στο πεδίο ταχυτήτων δημιουργούν χωρικές δομές που ονομάζονται *μικροδίνες*. Ο όρος μικροδίνη, αν και ασαφής, ορίζεται ως η χρονική δομή που διατηρείται για σύντομο χρονικό διάστημα ενώ αντίστοιχα οι μεγάλες δίνες είναι αυτές που φέρουν μικροδίνες και ακόμα μικρότερες. Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της τύρβης είναι η συνεχής κατανομή του μεγέθους των μικροδινών.
3. Η τύρβη είναι *αυτοδιατηρούμενη* δηλαδή αφού δημιουργηθεί δεν μειώνεται και δεν σταματά ενώ είναι και συνυφασμένη με μέση *διάτμηση* (οριακά στρώματα, δέσμες, ομόρρους).

4. Η τύρβη *διεισδύει* στο μη τυρβώδες ρευστό με συνέπεια την αύξηση της τυρβώδους περιοχής (π.χ. η δέσμη που διεισδύει καθώς απλώνει από την έξοδο της).
5. Οι τυρβώδεις ροές είναι *ροές μεγάλης διάχυσης* . Οι μικροδίνες μπορούν να μεταφέρουν ρευστό από μια περιοχή χαμηλής ορμής σε ροή υψηλής ορμής αναμιγνύοντας το με αυτό τον τρόπο τονίζοντας έτσι τον χαρακτήρα διάχυσης της ροής (διάχυση μικροδίνης).
6. Οι τυρβώδεις ροές είναι *καταστροφικές* (dissipative). Κάθε συνεκτική ροή έχει συνεκτική καταστροφή, όμως οι τυρβώδεις ροές έχουν πολύ περισσότερη λόγω της απότομης κλίσης της ταχύτητας. Πιο αναλυτικά η ενέργεια που καταστρέφεται στις μικροδίνες είναι σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη των μεγάλων δινών.
7. Χαρακτηριστική ιδιότητα αποτελεί και η *διάλειψη* (intermittency). Η διάλειψη είναι μια ιδιότητα της τύρβης που εμφανίζεται κατά την μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις παραπάνω ιδιότητες καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό της τύρβης (κατά Bradshaw) :

«Τύρβη είναι μια τρισδιάστατη χρονικά μεταβαλλόμενη ροή, στην οποία η έκταση των δινοσωλήνων προκαλεί διαταραχές ταχύτητας σε όλες τις συχνότητες μεταξύ ελάχιστης που καθορίζεται από τις οριακές συνθήκες και μέγιστης που καθορίζεται από την συνεκτικότητα του ρευστού».

3.2 Περιγραφή τυρβώδους ροής κατά Reynolds

Οι δυσκολίες που υπάρχουν στην απευθείας λύση των εξισώσεων Navier-Stokes στην μη μόνιμη μορφή τους οδήγησαν αρχικά στην εμφάνιση των μοντέλων τύρβης ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τύρβη μεγάλης κλίμακας μέσω της εύρεσης των χρονικά μέσων τιμών των βασικών μεγεθών. Η βασική ιδέα που χρησιμοποιείται είναι αυτή που προτάθηκε από τον Reynolds (1895). Ο Reynolds διέσπασε την ταχύτητα και τα υπόλοιπα βασικά μεγέθη στη χρονικά μέση τιμή και τη διακύμανση.

Η χρονικά μέση τιμή των βασικών μεγεθών f της ροής δίνεται από:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f dt$$

όπου το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης Δt πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ως προς την χρονική περίοδο των τυρβωδών διακυμάνσεων, αλλά και αρκετά μικρό ως προς την χρονική διάρκεια των μη τυρβωδών διακυμάνσεων της ροής.

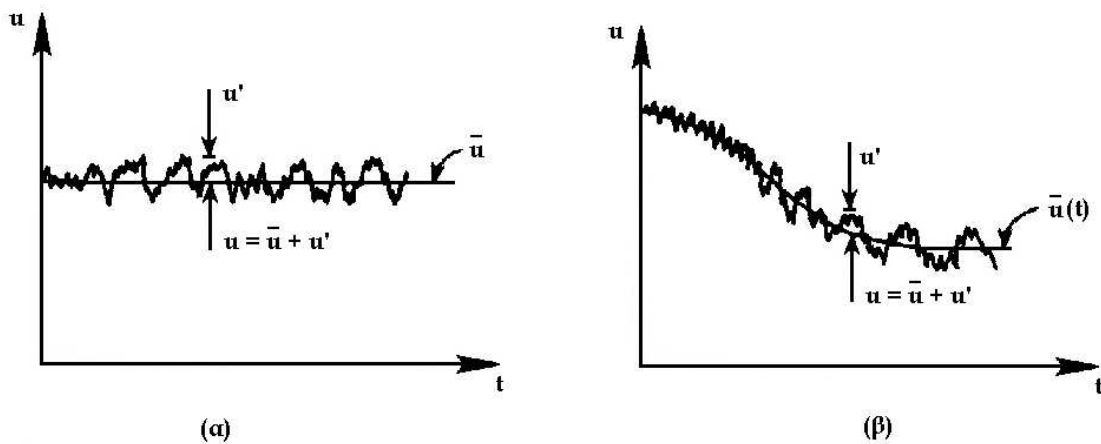
Βάσει της περιγραφής Reynolds, τα βασικά μεγέθη f της ροής διασπώνται στη μέση χρονικά τιμή \bar{f} και την διακύμανση f' :

$$\begin{aligned} u_z &= \bar{u}_z + u'_z \\ u_r &= \bar{u}_r + u'_r \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned}$$

Εξ' ορισμού, η μέση χρονικά τιμή της διακύμανσης είναι:

$$\overline{f'} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f' dt = 0$$

οπότε: $\overline{u'_z} = \overline{u'_r} = \overline{p'} = 0$



Τυρβώδης ροή: (α) Μόνιμη και (β) Μη μόνιμη ροή

Για το σχηματισμό των μέσων τιμών των βασικών εξισώσεων της ροής (Navier-Stokes) απαιτούνται κανόνες σχηματισμού μέσων τιμών, όπως παραθέτονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} + f', \quad \overline{f'} = 0 \\ \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{fg} = \bar{fg} + \overline{f'g'} \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}, \quad \frac{\overline{\partial f}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$$

$$\overline{\int f dS} = \int \overline{f} dS.$$

3.3 Βασικές εξισώσεις τυρβώδους ροής κατά Reynolds

(α) Εξίσωση της συνέχειας (διατήρησης της μάζας)

Σχηματίζοντας τη μέση τιμή του πρώτου και του δεύτερου μέλους της εξίσωσης συνέχειας προκύπτει:

$$\overline{\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{\overline{u_r}}{r} = 0 \quad (3.3.1)$$

επομένως ισχύει η ίδια μορφή της εξίσωσης της συνέχειας και για τις μέσες τιμές των ταχυτήτων της τυρβώδους ροής.

(β) Εξίσωση διατήρησης της ορμής

Για την εξίσωση διατήρησης της ορμής χρησιμοποιούμε την συντηρητική μορφή της οποίας η μέση τιμή προκύπτει:

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial (u_z^2 + p)}{\partial z} + \frac{\partial (u_z u_r)}{\partial r} + \frac{u_z u_r}{r} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial (u_r^2 + p)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z u_r)}{\partial z} + \frac{u_r^2}{r} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}}{r} \right)$$

και μετά από την εφαρμογή των κανόνων μέσης τιμής έχουμε:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_z^2}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u_z^2}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{\partial (\overline{u_z u_r})}{\partial r} + \frac{\partial (\overline{u_z u_r})}{\partial r} + \frac{\overline{u_z u_r}}{r} + \frac{\overline{u_z u_r}}{r} \right) = \frac{\partial \overline{\tau_{zz}}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\tau_{rz}}}{\partial r} + \frac{\overline{\tau_{rz}}}{r}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_z u_r})}{\partial z} + \frac{\partial (\overline{u_z u_r})}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u_r^2}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u_r^2}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{\overline{u_r^2}}{r} + \frac{\overline{u_r^2}}{r} \right) = \frac{\partial \overline{\tau_{rz}}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\tau_{rr}}}{\partial r} + \frac{\overline{\tau_{rr}} - \overline{\tau_{\phi\phi}}}{r}$$

Ανακατατάσσοντας τους όρους των παραπάνω σχέσεων έχουμε:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_z^2 + \bar{p})}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{u}_z \bar{u}_r)}{\partial r} + \frac{\bar{u}_z \bar{u}_r}{r} \right) = \frac{\partial(\bar{\tau}_{zz} - \bar{\rho} u_z'^2)}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{rz} - \bar{\rho} u_z' u_r')}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{rz} - \bar{\rho} u_z' u_r'}{r}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_r^2 + \bar{p})}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{u}_z \bar{u}_r)}{\partial z} + \frac{\bar{u}_r^2}{r} \right) = \frac{\partial(\bar{\tau}_{rr} - \bar{\rho} u_r'^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{rz} - \bar{\rho} u_z' u_r')}{\partial z} + \frac{(\bar{\tau}_{rr} - \bar{\tau}_{\phi\phi}) - \bar{\rho} u_r'^2}{r}$$

Εισάγοντας των τανυστή των τυρβωδών διατμητικών τάσεων ή τάσεων Reynolds :

$$\tau^{turb} = \begin{bmatrix} \tau_{zz}^{turb} & \tau_{zr}^{turb} \\ \tau_{rz}^{turb} & \tau_{rr}^{turb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\rho} u_z'^2 & -\bar{\rho} u_z' u_r' \\ -\bar{\rho} u_z' u_r' & -\bar{\rho} u_r'^2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός , προκύπτουν οι εκφράσεις για τις παραπάνω σχέσεις :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_z^2 + \bar{p})}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{u}_z \bar{u}_r)}{\partial r} + \frac{\bar{u}_z \bar{u}_r}{r} \right) = \frac{\partial(\bar{\tau}_{zz} + \tau_{zz}^{turb})}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{rz} + \tau_{rz}^{turb})}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{rz} + \tau_{rz}^{turb}}{r}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_r^2 + \bar{p})}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{u}_z \bar{u}_r)}{\partial z} + \frac{\bar{u}_r^2}{r} \right) = \frac{\partial(\bar{\tau}_{rr} + \tau_{rr}^{turb})}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{rz} + \tau_{rz}^{turb})}{\partial z} + \frac{\bar{\tau}_{rr} + \tau_{rr}^{turb} + \bar{\tau}_{\phi\phi}}{r}$$

(3.3.2) και (3.3.3)

Η παραπάνω εξίσωση της ορμής για τα μέσα μεγέθη διαφέρει από την μορφή την αρχική εξίσωση ως προς τους όρους των τυρβωδών διατμητικών τάσεων $-\bar{\rho} u_z'^2, -\bar{\rho} u_r'^2$ και $-\bar{\rho} u_z' u_r'$ (τάσεις Reynolds).

Λόγω της επιβολής της οριακής συνθήκης μηδενισμού της ταχύτητας οι τυρβώδεις διατμητικές τάσεις μηδενίζονται πάνω σε ακίνητα στερεά όρια οπότε $u_z' |_{wall} = u_r' |_{wall} = 0$ και :

$$\tau_{wall}^{turb} = -\overline{\rho u_{z,wall}' u_{r,wall}'} = 0$$

Λόγω της εισαγωγής μέσων τιμών δημιουργούνται νέοι άγνωστοι (τάσεις Reynolds) στο σύστημα εξισώσεων Navier-Stokes έτσι οδηγούμαστε στην κατασκευή και προσθήκη των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης.

3.4 Μοντελοποίηση της τύρβης

Το μοντέλο της τυρβώδους ροής απαιτείται για την συσχέτιση των τάσεων Reynolds $\tau_{ij}^{turb} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$ με τα μέσα μεγέθη $\overline{u_z}$ και $\overline{u_r}$ της ροής. Σήμερα υπάρχουν πολλά μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούν αλγεβρικές ή διαφορικές εξισώσεις, όπως το αλγεβρικό μοντέλο του Prandtl (βασίζεται στην θεωρία μίξης) και τα μοντέλα που βασίζονται στην εξίσωση της κινητικής ενέργειας. Αυτά χρησιμοποιούν είτε μόνο την εξίσωση για την κινητική ενέργεια k και λέγονται μοντέλα μιας εξίσωσης (θεωρία κλίμακας μήκους, μοντέλο Bradshaw) είτε και μια πρόσθετη σχέση και λέγονται μοντέλα δυο εξισώσεων (π.χ. μοντέλο $k - \varepsilon$ όπου εμφανίζεται η εξίσωση για την τυρβώδη καταστροφή ε της κινητικής ενέργειας δίνοντας με αυτό τον τρόπο την κατανομή της κλίμακας μήκους της τύρβης της ροής).

Στην παρούσα μεθοδολογία θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο $k - \varepsilon$ που φαίνεται ότι είναι το πιο αξιόπιστο από όλα τα μοντέλα τύρβης που υπάρχουν. Η μέση τυρβώδης κινητική ενέργεια ορίζονται ως:

$$\overline{k} = \frac{\overline{u_z'^2} + \overline{u_r'^2}}{2} \quad (3.4.1)$$

ενώ η τυρβώδης καταστροφή ε της κινητικής ενέργειας ως:

$$\varepsilon = \nu \left[\left(\frac{\partial u_z'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r'}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z'}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r'}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.4.2 \alpha)$$

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται βασίζεται στην υπόθεση του Boussinesq (που δεν επαληθεύεται γενικά πειραματικά) για την τυρβώδη συνεκτικότητα :

$$\tau^{turb} = \begin{bmatrix} \tau_{zz}^{turb} & \tau_{zr}^{turb} \\ \tau_{rz}^{turb} & \tau_{rr}^{turb} \end{bmatrix} = \mu_t \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} - \frac{2}{3} \rho \overline{k} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} & 2 \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} - \frac{2}{3} \rho \overline{k} \end{bmatrix}$$

όπου η τυρβώδης συνεκτικότητα μ_t (eddy viscosity) δίνεται από την σχέση Prandtl – Kolmogorov – Taylor :

$$\mu_t = \rho C_m \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.4.2 \beta)$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις για τις τυρβώδεις διατμητικές τάσεις στις σχέσεις (3.4.1) και (3.4.2) και έτσι οι εξισώσεις Navier – Stokes για τα μέσα μεγέθη μπορούν να γραφτούν στη μορφή (2.5.1):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} + K = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} + L \right)$$

Στο εξής θα παραλείπουμε τις επιγραμμές των μέσων μεγεθών για λόγους απλότητας ενώ οι διατμητικές τάσεις εκφράζονται από τις σχέσεις (2.1.4) συναρτήσει όμως της ενεργούς συνεκτικότητας :

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t .$$

Σύμφωνα με το μοντέλο k – ε , η εξίσωση για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k και η εξίσωση για την τυρβώδη καταστροφή ε της κινητικής ενέργειας που αντικαθιστά την ακριβή σχέση (3.4.2 α), είναι :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (u_z k)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r k)}{\partial r} \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right]}_{\text{ΔΙΑΧΥΣΗ}} + \Theta - \rho \varepsilon$$

όπου: Θ είναι ο όρος παραγωγής και ρε είναι ο όρος καταστροφής.

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (u_z \varepsilon)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r \varepsilon)}{\partial r} \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right]}_{\text{ΔΙΑΧΥΣΗ}} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Theta}_{\text{ΠΑΡΑΓ}} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{ΚΑΤΑΣ}}$$

Ο όρος της παραγωγής Θ υπολογίζεται από :

$$\Theta = \mu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στο εξής σύστημα :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(u_z k)}{\partial z} + \frac{\partial(u_r k)}{\partial r} + \frac{u_r k}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\Gamma_k}{r} \frac{\partial k}{\partial r} + \Theta - \rho \varepsilon \quad (3.4.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(u_z \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial(u_r \varepsilon)}{\partial r} + \frac{u_r \varepsilon}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\Gamma_\varepsilon}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Theta + C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.4.4)$$

όπου $\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$ και $\Gamma_\varepsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$.

Ακολουθεί ο πίνακας με τις τιμές των εμπειρικών συντελεστών που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο k - ε όπως αυτές έχουν βελτιστοποιηθεί έπειτα από δεκάδες ώρες αριθμητικών πειραμάτων στον Η/Υ.

Πίνακας : Τιμές σταθερών μοντέλου k - ε

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	0.9	1.22

Προσπαθώντας να συγχωνεύσουμε τις εξισώσεις (3.4.3) και (3.4.4) σχηματίζουμε τα εξής διανύσματα :

$$U'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} k \\ \varepsilon \end{bmatrix}, E'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_z k \\ u_z \varepsilon \end{bmatrix}, G'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_r k \\ u_r \varepsilon \end{bmatrix}, K'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_r k/r \\ u_r \varepsilon/r \end{bmatrix},$$

$$R'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial z} \\ \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{bmatrix}, T'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial r} \\ \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \end{bmatrix}, L'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_k}{r} \frac{\partial k}{\partial r} \\ \frac{\Gamma_\varepsilon}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \end{bmatrix}, P'_{k\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Theta - \rho \varepsilon \\ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Theta - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{bmatrix}.$$

Προκύπτει λοιπόν η παρακάτω σχέση:

$$\rho \left(\frac{\partial U'_{k\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial E'_{k\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\partial G'_{k\varepsilon}}{\partial r} + K'_{k\varepsilon} \right) = \frac{\partial R'_{k\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\partial T'_{k\varepsilon}}{\partial r} + L'_{k\varepsilon} + P'_{k\varepsilon} \quad (3.4.5)$$

Αδιαστατοποιούμε τα μεγέθη k και ε :

$$k^* = \frac{k}{U_{ref}^2}, \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{(\text{Re} \mu^* U_{ref}) / (\rho L_{ref}^2)}$$

και τα αντικαθιστούμε στη εξίσωση (3.4.5) οπότε η αδιάστατη μορφή της προκύπτει ως εξής :

$$\frac{\partial U'_{k\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial E'_{k\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\partial G'_{k\varepsilon}}{\partial r} + K'_{k\varepsilon} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial R'_{k\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\partial T'_{k\varepsilon}}{\partial r} + L'_{k\varepsilon} + P'_{k\varepsilon} \right] \quad (3.4.6)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού (2.4.1) στις εξισώσεις (3.4.6) και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως για τις εξισώσεις Navier – Stokes , οι σχέσεις του μοντέλου $k - \varepsilon$ γράφονται στο γενικευμένο καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων ως εξής :

$$\boxed{\frac{\partial U_{k\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial E_{k\varepsilon}}{\partial \xi} + \frac{\partial G_{k\varepsilon}}{\partial \zeta} + K_{k\varepsilon} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial R_{k\varepsilon}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_{k\varepsilon}}{\partial \zeta} + L_{k\varepsilon} + P_{k\varepsilon} \right]} \quad (3.4.7)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ισχύουν :

$$U_{k\varepsilon} = J U'_{k\varepsilon}$$

για τα μη συνεκτικά διανύσματα

$$E_{k\varepsilon} = J (E'_{k\varepsilon} \xi_z + G'_{k\varepsilon} \xi_r) = J \begin{bmatrix} (u_z \xi_z + u_r \xi_r) k \\ (u_z \xi_z + u_r \xi_r) \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$G_{k\varepsilon} = J (E'_{k\varepsilon} \zeta_z + G'_{k\varepsilon} \zeta_r) = J \begin{bmatrix} (u_z \zeta_z + u_r \zeta_r) k \\ (u_z \zeta_z + u_r \zeta_r) \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$K_{k\varepsilon} = J K'_{k\varepsilon}$$

για τα συνεκτικά διανύσματα

$$R_{k\varepsilon} = J (R'_{k\varepsilon} \xi_z + T'_{k\varepsilon} \xi_r) = J \begin{bmatrix} \Gamma_k (k_z \xi_z + k_r \xi_r) \\ \Gamma_\varepsilon (\varepsilon_z \xi_z + \varepsilon_r \xi_r) \end{bmatrix}$$

$$T_{k\varepsilon} = J (R'_{k\varepsilon} \zeta_z + T'_{k\varepsilon} \zeta_r) = J \begin{bmatrix} \Gamma_k (k_z \zeta_z + k_r \zeta_r) \\ \Gamma_\varepsilon (\varepsilon_z \zeta_z + \varepsilon_r \zeta_r) \end{bmatrix}$$

$$L_{k\varepsilon} = J L'_{k\varepsilon}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις μετασχηματισμένες μερικές παραγώγους των k και ε :

$$\begin{aligned} k_z &= \xi_z k_\xi + \zeta_z k_\zeta, & k_r &= \xi_r k_\xi + \zeta_r k_\zeta \\ \varepsilon_z &= \xi_z \varepsilon_\xi + \zeta_z \varepsilon_\zeta, & \varepsilon_r &= \xi_r \varepsilon_\xi + \zeta_r \varepsilon_\zeta \end{aligned}$$

τα συνεκτικά διανύσματα εμφανίζονται στην μορφή :

$$\begin{aligned} R_{k\varepsilon} &= J \begin{bmatrix} \Gamma_k (d_1 k_\xi + d_2 k_\zeta) \\ \Gamma_\varepsilon (d_1 \varepsilon_\xi + d_2 \varepsilon_\zeta) \end{bmatrix}, \\ T_{k\varepsilon} &= J \begin{bmatrix} \Gamma_k (d_2 k_\xi + d_3 k_\zeta) \\ \Gamma_\varepsilon (d_2 \varepsilon_\xi + d_3 \varepsilon_\zeta) \end{bmatrix}, \\ L_{k\varepsilon} &= J \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_k}{r} (\xi_r k_\xi + \zeta_r k_\zeta) \\ \frac{\Gamma_\varepsilon}{r} (\xi_r \varepsilon_\xi + \zeta_r \varepsilon_\zeta) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου οι συντελεστές d_1 , d_2 και d_3 δίνονται από :

$$d_1 = \xi_z^2 + \zeta_r^2, \quad d_2 = \xi_z \zeta_z + \xi_r \zeta_r, \quad d_3 = \zeta_z^2 + \zeta_r^2$$

Τέλος για το διάνυσμα $P_{k\varepsilon}$ έχουμε :

$$P_{k\varepsilon} = JP'_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} \Theta - \varepsilon \text{Re} \\ (C_{\varepsilon 1} \Theta - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \text{Re}) \frac{\varepsilon}{k} \end{bmatrix}$$

με τον όρο παραγωγής να δίνεται από :

$$\Theta = \mu_t \left[2 \left\{ \left(\xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right\} + \left\{ \left(\xi_r \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right) + \left(\xi_z \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right) \right\}^2 \right]$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, η ενεργός συνεκτικότητα μ_{eff} είναι αδιαστατοποιημένη με την δυναμική συνεκτικότητα μ οπότε είναι :

$$\mu_{\text{eff}}^* = \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = 1 + \mu_t^*$$

όπου η μ_t^* υπολογίζεται από την (3.4.2 β) για αδιάστατα k και ε .

3.5 Ανακεφαλαίωση εξισώσεων προς επίλυση

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή και ανάλυση της αριθμητικής μεθόδου που θα χρησιμοποιήσουμε, θα επιχειρήσουμε μια ανακεφαλαίωση των εξισώσεων που καλούμαστε να επιλύσουμε.

- Εξισώσεις Navier – Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ u_z \\ u_r \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_z \\ u_z^2 + p \\ u_z u_r \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z u_r \\ u_r^2 + p \end{bmatrix} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} \end{bmatrix} +$$

$$+ axis * \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz}/r \\ (\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi})/r \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} u_r/r \\ u_z u_r/r \\ u_r^2/r \end{bmatrix} \right\}$$

ή

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + axis * \left[\frac{1}{Re} L - K \right]}$$

(3.5.1)

όπου :

$$axis = \begin{cases} 0, & \text{για διδιάστατο πρόβλημα} \\ 1, & \text{για αξονοσυμμετρικό πρόβλημα} \end{cases}$$

Τα μητρώα που χρησιμοποιούνται στις παραπάνω εξισώσεις είναι :

$$U = J \begin{bmatrix} 0 \\ u_z \\ u_r \end{bmatrix},$$

$$E = J \begin{bmatrix} u_z \xi_z + u_r \xi_r \\ u_z (u_z \xi_z + u_r \xi) + p \xi_z \\ u_r (u_z \xi_z + u_r \xi) + p \xi_r \end{bmatrix}, \quad G = J \begin{bmatrix} u_z \zeta_z + u_r \zeta_r \\ u_z (u_z \zeta_z + u_r \zeta) + p \zeta_z \\ u_r (u_z \zeta_z + u_r \zeta) + p \zeta_r \end{bmatrix}$$

$$R = J \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{zz} \xi_z + \tau'_{rz} \xi_r \\ \tau'_{rz} \xi_z + \tau'_{rr} \xi_r \end{bmatrix}, \quad T = J \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{zz} \zeta_z + \tau'_{rz} \zeta_r \\ \tau'_{rz} \zeta_z + \tau'_{rr} \zeta_r \end{bmatrix}$$

$$L = J \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz}/r \\ (\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi})/r \end{bmatrix}, \quad K = J \begin{bmatrix} u_r/r \\ u_z u_r/r \\ u_r^2/r \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{zz} &= \mu \left(\frac{4}{3} \xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{4}{3} \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau'_{rr} &= \mu \left(\frac{4}{3} \xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \frac{4}{3} \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau'_{zr} &= \mu \left(\xi_r \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} + \xi_z \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right) \\ \tau'_{rr} - \tau'_{\phi\phi} &= 2\mu \left(\xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} - \frac{u_r}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

- Εξισώσεις μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} k \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_z k \\ u_z \varepsilon \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} u_r k \\ u_r \varepsilon \end{bmatrix} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial z} \\ \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial r} \\ \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \Theta - \rho \varepsilon \\ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Theta - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{bmatrix} + axis * \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial r} \\ \rho \frac{\partial r}{\partial r} \\ \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \\ \rho \frac{\partial r}{\partial r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_3 - \rho \varepsilon \\ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Theta_3 - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} u_r k/r \\ u_r \varepsilon/r \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ή

$$\boxed{\frac{\partial U_{k\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial E_{k\varepsilon}}{\partial \xi} + \frac{\partial G_{k\varepsilon}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial R_{k\varepsilon}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_{k\varepsilon}}{\partial \zeta} + P_{k\varepsilon} \right] + axis * \left\{ \frac{1}{\text{Re}} (L_{k\varepsilon} + P_{k\varepsilon 3}) - K_{k\varepsilon} \right\}} \quad (3.5.4)$$

όπου :

$$axis = \begin{cases} 0, & \text{για διδιάστατο πρόβλημα} \\ 1, & \text{για αξονοσυμμετρικό πρόβλημα} \end{cases}$$

Τα μητρώα που χρησιμοποιούνται στις παραπάνω εξισώσεις είναι :

$$U_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} k \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad E_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} (u_z \xi_z + u_r \xi_r)k \\ (u_z \xi_z + u_r \xi_r)\varepsilon \end{bmatrix}, \quad G_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} (u_z \zeta_z + u_r \zeta_r)k \\ (u_z \zeta_z + u_r \zeta_r)\varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

$$R_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} \Gamma_k (d_1 k_\xi + d_2 k_\zeta) \\ \Gamma_\varepsilon (d_1 \varepsilon_\xi + d_2 \varepsilon_\zeta) \end{bmatrix}, \quad T_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} \Gamma_k (d_2 k_\xi + d_3 k_\zeta) \\ \Gamma_\varepsilon (d_2 \varepsilon_\xi + d_3 \varepsilon_\zeta) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad \Gamma_\varepsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \quad (3.5.6)$$

$$d_1 = \xi_z^2 + \xi_r^2, \quad d_2 = \xi_z \zeta_z + \xi_r \zeta_r, \quad d_3 = \zeta_z^2 + \zeta_r^2 \quad (3.5.7)$$

$$P_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} \Theta - \varepsilon \text{Re} \\ (C_{\varepsilon 1} \Theta - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \text{Re}) \frac{\varepsilon}{k} \end{bmatrix} \quad (3.5.8)$$

όπου ο όρος παραγωγής Θ υπολογίζεται από :

$$\Theta = \mu_t (\Theta_1 + \Theta_2)$$

$$\Theta_1 = 2 \left\{ \left(\xi_z \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\xi_r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right)^2 \right\} \quad (3.5.9)$$

$$\Theta_2 = \left\{ \left(\xi_r \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \zeta_r \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right) + \left(\xi_z \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right) \right\}^2$$

$$L_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_k}{r} (\xi_r k_\xi + \zeta_r k_\zeta) \\ \frac{\Gamma_\varepsilon}{r} (\xi_r \varepsilon_\xi + \zeta_r \varepsilon_\zeta) \end{bmatrix}, \quad K_{k\varepsilon} = J \begin{bmatrix} u_r k / r \\ u_r \varepsilon / r \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

$$P_{k\varepsilon} = J \left[\begin{array}{c} \Theta_3 - \varepsilon \text{Re} \\ (C_{\varepsilon 1} \Theta_3 - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \text{Re}) \frac{\varepsilon}{k} \end{array} \right] \quad (3.5.11)$$

όπου ο όρος Θ_3 εκφράζεται ως εξής :

$$\Theta_3 = \mu_t \left\{ 2 \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right\} \quad (3.5.12)$$

4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα πραγματοποιήσουμε μια αναλυτική περιγραφή της αριθμητικής μεθοδολογίας για την επίλυση της ασυμπίεστης μόνιμης ροής, προσπαθώντας παράλληλα να εισάγουμε την θεωρία που έχει ήδη περιγραφεί στα παραπάνω κεφάλαια.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την μέθοδο των χαρακτηριστικών, με το πως μας διευκολύνει στην σύνδεση των εξισώσεων του υπό επίλυση συστήματος αλλά και τον μοναδικό τρόπο υπολογισμού των κύριων μεταβλητών στο υπολογιστικό χωρίο.

Συνοπτικά, η πορεία επίλυσης περιλαμβάνει τα εξής : Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου, οι συνιστώσες της ταχύτητας που προκύπτουν από τις εξισώσεις Navier – Stokes με βάση τα παραπάνω, χρησιμοποιούνται για τις εξισώσεις του μοντέλου της τύρβης k - ϵ που επιλύονται ξεχωριστά από τις εξισώσεις του ασυμπίεστου ρευστού. Για τον υπολογισμό των μη συνεκτικών όρων των εξισώσεων k - ϵ χρησιμοποιείται ένα ανάντι σχήμα δεύτερης τάξης.

Στην συνέχεια, πραγματοποιείται η χρονική ολοκλήρωση των δύο συστημάτων εξισώσεων ($N - S$ και $k - \epsilon$) χρησιμοποιώντας ένα σχήμα Runge – Kutta 4^{ης} τάξης.

Τέλος, θα ασχοληθούμε με την θεωρία του οριακού στρώματος που θα χρησιμοποιήσουμε καθώς και με τις οριακές συνθήκες, όσον αναφορά το είδος και τον τρόπο επιβολής τους.

4.2 Απαιτούμενες ιδιότητες της αριθμητικής μεθόδου.

Η αριθμητική μέθοδος επίλυσης του ρευστομηχανικού προβλήματος θα πρέπει να παρουσιάζει συγκεκριμένες ιδιότητες. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, δεν είναι δυνατό να αναλυθεί στο σύνολό της η μέθοδος για αυτό προτιμάμε την ανάλυση σε διακεκριμένα μέρων. Αν αυτά τα «κομμάτια» δεν ικανοποιούν τις απαραίτητες ιδιότητες τότε ούτε ολόκληρη η αριθμητική μέθοδος θα τις ικανοποιεί με το αντίστροφο να μην επαληθεύεται πάντα. Παρακάτω θα ασχοληθούμε με αυτά τα κριτήρια που θα πρέπει να ικανοποιούνται.

Συνακολουθία (consistency) : Μια προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών είναι συνακόλουθη εάν η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει τις μερικές διαφορικές εξισώσεις το μέγεθος του πλέγματος τείνει στο μηδέν. Με άλλα λόγια, η διακριτοποίηση γίνεται ακριβής όταν το μέγεθος του υπολογιστικού πλέγματος τείνει στο μηδέν. Η διαφορά μεταξύ της διακριτοποιημένης εξίσωσης και της πλήρους αποτελεί το σφάλμα αποκοπής (προσέγγισης) που αποτελεί το εργαλείο για την

ικανοποίηση του κριτηρίου (τείνει στο μηδέν όταν το χρονικό βήμα είναι διαρκώς μειούμενο και το πλέγμα τείνει στο μηδέν). Έτσι ένα σχήμα που είναι συνακόλουθο μας εξασφαλίζει το γεγονός ότι λύνουμε τις κυριαρχούσες εξισώσεις και τίποτα παραπάνω.

Ιδεατά, όλοι οι όροι της αριθμητικής μεθόδου θα πρέπει να διακριτοποιηθούν με προσεγγίσεις της ίδιας τάξεως ακρίβειας. Παρόλα αυτά κάποιοι όροι, όπως οι όροι εκ μεταφοράς ή οι όροι διάχυσης οι οποίοι είναι κυρίαρχοι σε ροές υψηλού αριθμού Reynolds και σε ροές μικρού αριθμού Reynolds αντίστοιχα, είναι λογικό να προσπαθήσουμε η διακριτοποίησή τους να είναι υψηλότερης τάξης ακρίβειας από των άλλων.

Όμως ακόμα και αν οι προσεγγίσεις είναι συνακόλουθες, αυτό δεν σημαίνει ότι και η λύση του διακριτοποιημένου συστήματος εξισώσεων θα είναι η ακριβής λύση των διαφορικών εξισώσεων μόνο με τον περιορισμό του μικρού βήματος του αλγορίθμου. Για να συμβεί αυτό η αριθμητική μέθοδος θα πρέπει να είναι σταθερή όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Σταθερότητα (stability) : Ένα αριθμητικό σχήμα λέγεται ότι είναι σταθερό αν οποιοδήποτε σφάλμα που εμφανίζεται στην πεπερασμένη διαφορική εξίσωση δεν αυξάνεται με την λύση αυτής. Με άλλα λόγια, η αριθμητική μέθοδος επίλυσης χαρακτηρίζεται ως σταθερή όταν δεν αυξάνει τα σφάλματα που κάνουν την εμφάνισή τους κατά την διάρκεια της πορείας επίλυσης του συστήματος. Για πρόσκαιρα προβλήματα, η σταθερότητα εγγυάται ότι η μέθοδος παράγει φραγμένη λύση όποτε η λύση της πλήρους εξίσωσης είναι φραγμένη. Για επαναληπτικές μεθόδους, μια σταθερή μέθοδος είναι αυτή που δεν αποκλίνει. Το κριτήριο της σταθερότητας μπορεί να είναι δύσκολο να ερευνηθεί, ειδικότερα ότι είναι παρόν οριακές συνθήκες και μη γραμμικότητες. Για αυτό το λόγο, είναι σύνηθες να ερευνάται η σταθερότητα της μεθόδου για γραμμικά προβλήματα με σταθερούς συντελεστές χωρίς οριακές συνθήκες. Τα δεδομένα που εξάγουμε με αυτό τον τρόπο μπορούν αρκετές φορές να εφαρμοστούν σε πιο περίπλοκα προβλήματα αλλά με σημαντικές εξαιρέσεις.

Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη προσέγγιση για την διερεύνηση της σταθερότητας των αριθμητικών σχημάτων είναι η ανάλυση von Neumann.

Σύγκλιση (convergence) : Ένα πεπερασμένο διαφορικό σχήμα συγκλίνει εάν η λύση της πεπερασμένης διαφορικής εξίσωσης προσεγγίζει εκείνη της μερικής διαφορικής εξίσωσης όταν το μέγεθος του υπολογιστικού πλέγματος τείνει στο μηδέν. Για γραμμικά προβλήματα αρχικών τιμών, η θεωρία του Lax καθορίζει ότι δοσμένου του ότι ένα καλά τοποθετημένο

πρόβλημα αρχικών τιμών στο οποίο έχει εφαρμοστεί προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών που ικανοποιεί το κριτήριο της συνακολουθίας, η σταθερότητα αποτελεί το αναγκαίο και επαρκές κριτήριο για την επίτευξη της σύγκλισης. Προφανώς, ένα σχήμα που ικανοποιεί μόνο την συνακολουθία είναι άχρηστο εκτός και αν η μέθοδος επίλυσης συγκλίνει. Για μη γραμμικά προβλήματα που παρουσιάζουν ισχυρή εξάρτηση από τις οριακές συνθήκες, η σταθερότητα και η σύγκλιση της μεθόδου είναι δύσκολο να καταδειχθούν. Για αυτό η σύγκλιση συνήθως ελέγχεται χρησιμοποιώντας αριθμητικά πειράματα, όπως με την επανάληψη των υπολογισμών σε μια σειρά εξευγενισμένων υπολογιστικών πλεγμάτων. Αν η μέθοδος είναι σταθερή και εάν όλες οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στην διαδικασία διακριτοποίησης είναι συνακόλουθες, συνήθως βρίσκουμε ότι η λύση συγκλίνει και είναι ανεξάρτητη του πλέγματος. Για επαρκώς μικρά μεγέθη πλέγματος, ο ρυθμός σύγκλισης καθορίζεται από το την τάξη του σφάλματος αποκοπής, επιτρέποντας μας να εκτιμήσουμε το λάθος της λύσης.

Συντηρητικότητα (conservation) : Από την στιγμή που οι προς επίλυση εξισώσεις είναι νόμοι διατήρησης, το αριθμητικό σχήμα θα πρέπει, σε τοπική αλλά και ολική βάση, να τους ικανοποιεί και εκείνο. Αυτό σημαίνει ότι, για μόνιμη κατάσταση και με απουσία πηγών, το ποσοστό στην συντηρητικής ποσότητας που εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου ισούται με το ποσοστό εκείνου που εισέρχεται. Εάν χρησιμοποιείται η αυστηρή συντηρητική μορφή των εξισώσεων και η μέθοδος πεπερασμένων όγκων, εξασφαλίζεται για κάθε αυτόνομο όγκο ελέγχου και για το πεδίο λύσεων σαν σύνολο. Άλλες μέθοδοι διακριτοποίησης μπορούν να γίνουν συντηρητικές με την κατάλληλη επιλογή των προσεγγίσεων.

Αυτή είναι μια σημαντική ιδιότητα της αριθμητικής μεθόδου, από την στιγμή που εισάγει περιορισμό στο σφάλμα της λύσης. Αν η διατήρηση της μάζας και της ορμής ικανοποιούνται, το σφάλμα μπορεί να διανείμει αυτές τις ποσότητες σε όλο το υπολογιστικό πεδίο. Μη συντηρητικά σχήματα μπορούν να παράγουν τεχνητές πηγές αλλάζοντας την ισορροπία τοπικά αλλά και ολικά. Παρόλα αυτά, μπορούν να είναι συνακόλουθα και σταθερά και να οδηγούν σε ορθές λύσεις στο όριο αρκετά μεγάλων πλεγμάτων. Τα σφάλματα λόγω της μη ικανοποίησης της συντηρητικότητας στις περισσότερες των περιπτώσεων γίνονται αισθητά σε χονδροειδή πλέγματα. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι είναι δύσκολο να εντοπιστούν τα πλέγματα στα οποία τα σφάλματα αυτά είναι αρκετά μικρά οδηγώντας μας στην χρήση συντηρητικών σχημάτων.

Ακρίβεια (accuracy) : Οι αριθμητικές λύσεις ρευστομηχανικών προβλημάτων αποτελούν προσεγγιστικές λύσεις. Εκτός από τα σφάλματα που εισάγονται κατά την διάρκεια των επαναλήψεων του υπολογιστικού αλγορίθμου, αλλά και από την επιβολή οριακών συνθηκών, οι αριθμητικές λύσεις πάντα περικλείουν τρία είδη συστηματικών σφαλμάτων :

- *Σφάλματα μοντελοποίησης*, τα οποία ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ της πραγματικής ροής και της ακριβής λύσης του μαθηματικού μοντέλου
- *Σφάλματα διακριτοποίησης*, τα οποία ορίζονται ως η διαφορά ανάμεσα στην ακριβή λύση των συντηρητικών εξισώσεων και την ακριβή λύση του αλγεβρικού συστήματος των εξισώσεων που έχουν διακριτοποιηθεί από αυτές τις εξισώσεις
- *Σφάλματα επαναλήψεων*, τα οποία ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ των επαναληπτικών και ορθών λύσεων του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων.

Τα σφάλματα επαναλήψεων συχνά καλούνται σφάλματα σύγκλισης. Παρόλα αυτά, ο όρος σύγκλιση χρησιμοποιείται όχι μόνο για το σφάλμα αποκοπής των επαναληπτικών μεθόδων, αλλά συχνά και την σύγκλιση των αριθμητικών σχημάτων προς μια λύση ανεξάρτητη πλέγματος, εμφανίζοντας έτσι μια σύνδεση με το σφάλμα διακριτοποίησης. Είναι σημαντικό να λαμβάνουμε υπ' όψιν την ύπαρξη τέτοιων σφαλμάτων και ακόμα να προσπαθούμε να τα ξεχωρίσουμε. Κάποια σφάλματα μπορεί να αλληλοεξουδετερωθούν με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση που αποκτάται από ένα χονδροειδές (coarse) πλέγμα μπορεί να συμπίπτει περισσότερο με την πειραματική λύση από ότι η λύση από ένα ραφιναρισμένο πλέγμα, το οποίο εξ' ορισμού είναι πιο ακριβές.

Τα σφάλματα μοντελοποίησης εξαρτώνται από τις υποθέσεις που κάνουμε παράγοντας τις εξισώσεις μεταφοράς για τις μεταβλητές. Μπορεί να θεωρούνται αμελητέα όταν μελετάμε στρωτές ροές από την στιγμή που οι Navier – Stokes αναπαριστούν επαρκώς ένα ακριβές μοντέλο της ροής. Από την άλλη, για τυρβώδεις και διφασικές ροές, τα σφάλματα αυτά μπορεί να είναι πολύ μεγάλα καθιστώντας την ακριβή λύση των μοντελοποιημένων εξισώσεων ποιοτικά λάθος. Επίσης σφάλματα μοντελοποίησης εισάγονται απλοποιώντας την γεωμετρία του υπολογιστικού πεδίου ή τις οριακές συνθήκες. Αυτά δεν είναι απόλυτα γνωστά αλλά μπορούν να εκτιμηθούν από την σύγκριση λύσεων στις οποίες τα σφάλματα διακριτοποίησης και σύγκλισης είναι αμελητέα με ακριβή πειραματικά δεδομένα ή από δεδομένα που έχουν παρθεί από πιο ακριβή μοντέλα. Είναι απαραίτητο να τα εκτιμάμε και να τα ελέγχουμε πριν τα μοντέλα των φυσικών φαινομένων όπως τα τυρβώδη μοντέλα μπορούν να κριθούν.



Σχήμα 4.1 Σχέση μεταξύ συνακολουθίας, σταθερότητας και σύγκλισης

Παραπάνω αναφερθήκαμε στο ότι οι διακριτοποιημένες προσεγγίσεις εισάγουν σφάλματα τα οποία μειώνονται καθώς το πλέγμα ραφινάρεται και η τάξη της προσέγγισης είναι μια μέθοδος μέτρησης της ακρίβειας. Από την άλλη, για γνωστό πλέγμα, μέθοδοι της ίδιας τάξης ακρίβειας μπορούν να παράγουν σφάλματα στην λύση που διαφέρουν και κατά μία τάξη μεγέθους. Κάτι τέτοιο συμβαίνει γιατί η τάξη ακρίβειας μας δίνει το ρυθμό κατά τον οποίο τα σφάλματα μειώνονται καθώς το πλέγμα ραφινάρεται, δίνοντάς μας καμία πληροφορία γι αυτό όταν υπάρχει μοναδικό πλέγμα.

Σφάλματα επαναλήψεων και στρογγυλοποίησης είναι πιο εύκολο να ελεγχθούν.

Τέλος, στις ιδιότητες των αριθμητικών μεθοδολογιών ανήκουν και η ανάγκη για τις αριθμητικές λύσεις να περιορίζονται ανάμεσα σε κατάλληλα όρια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε να κάνουμε με φυσικές ποσότητες που είναι πάντα θετικές. Η ιδιότητα αυτή είναι δύσκολο να διατηρηθεί με τα σχήματα μιας τάξης ακρίβειας μόνο να εγγυούνται την ικανοποίησή της. Συνήθως μη φραγμένες λύσεις προκύπτουν για χονδροειδή κυρίως πλέγματα καθιστώντας τα σχήματα αυτά επίφοβα για εμφάνιση προβλημάτων σταθερότητας και σύγκλισης.

Στην συνέχεια θα προχωρήσουμε στην ανάλυση των σχημάτων που χρησιμοποιούνται στην παρούσα μεθοδολογία και θα γίνουν εμφανή τα πλεονεκτήματά τους που μας οδηγούν στην επιλογή των.

4.3 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών για την επίλυση των μη συνεκτικών όρων των εξισώσεων N – S .

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών χρησιμοποιείται από την παρούσα μεθοδολογία λόγω της ικανότητά της να εκμεταλλεύεται τις υπερβολικές ιδιότητες των μη συνεκτικών, ασυμπίεστων εξισώσεων της ορμής και της συνέχειας αφού πρώτα προκύψει η σύνδεση των εξισώσεων με την μέθοδο της ψευδοσυμπίεστος. Οι κύριες μεταβλητές που περιγράφουν το ρευστομηχανικό πρόβλημα (πίεση και συνιστώσες της ταχύτητας) υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών τους πάνω στις χαρακτηριστικές, με τις τιμές να προσδιορίζονται από ένα ανάντι σχήμα διαμόρφωσης του οποίου η λειτουργία βασίζεται στο πρόσημο της ιδιοτιμής της τοπικής ιακωβιανής.

Στην περίπτωση των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων, οι χαρακτηριστικές είναι πραγματικές και ξεχωριστές. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα σε δύο κατευθύνσεις. Γενικά, η διάδοση της είναι σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση ώστε ένα δεδομένο απαιτείται να οριστεί σε ένα αρχικό σημείο σε κάθε χαρακτηριστική, με την περίπτωση μας να χρειάζεται δύο τέτοιες αρχικές συνθήκες. Εάν υπάρχουν πλευρικά όρια, συνήθως μόνο μια συνθήκη απαιτείται σε κάθε σημείο γιατί μια χαρακτηριστική μεταφέρει την πληροφορία έξω από το υπολογιστικό πεδίο και μια την μεταφέρει μέσα. Παρόλα αυτά υπάρχουν εξαιρέσεις σε αυτό τον κανόνα.

Σε παραβολικές εξισώσεις οι χαρακτηριστικές εκφυλίζονται σε ένα μοναδικό πραγματικό σέτ. Επομένως, μόνο μια αρχική συνθήκη απαιτείται κανονικά. Στα πλευρικά όρια μία συνθήκη απαιτείται σε κάθε σημείο.

Τέλος, για ελλειπτικές εξισώσεις, οι χαρακτηριστικές είναι φανταστικές ή μιγαδικές ώστε δεν υπάρχουν ξεχωριστές διευθύνσεις διάδοσης της πληροφορίας. Συγκεκριμένα, η πληροφορία «ταξιδεύει» κατά ισότιμο τρόπο προς όλες τις κατευθύνσεις. Γενικά, μία οριακή συνθήκη απαιτείται σε κάθε σημείο πάνω στο όριο και το πεδίο της λύσης είναι συνήθως κλειστό παρόλο που μέρος του υπολογιστικού πεδίου μπορεί να εκτείνεται στο άπειρο.

Εάν αμελήσουμε τους συνεκτικούς όρους των εξισώσεων N – S (2.5.2) τότε οι ασυμπίεστες εξισώσεις Euler που προκύπτουν είναι :

$$U_t + E_\xi + G_\zeta + K = 0 \quad (4.3.1)$$

Στη συνέχεια προχωρούμε στη διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler μέσω της χρήσης ενός διδιάστατου πλέγματος όπου όλες οι κύριες

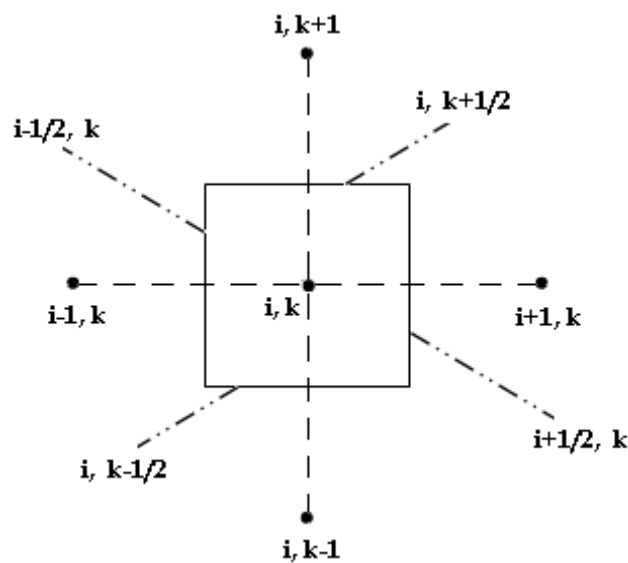
μεταβλητές (πίεση και συνιστώσες της ταχύτητας, primitive variables) αποθηκεύονται στο κέντρο κάθε υπολογιστικής κυψέλης.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται μια υπολογιστική κυψέλη (i, k) και οι πλευρές της $(i - 1/2, k)$ και $(i + 1/2, k)$ κατά την ξ -διεύθυνση και $(i, k - 1/2)$ και $(i, k + 1/2)$ κατά την ζ -διεύθυνση.

Χρησιμοποιώντας μεθοδολογία πεπερασμένων διαφορών, οι εξισώσεις Euler (4.3.1) παίρνουν την εξής μορφή :

$$U_t + \left(E_{i+\frac{1}{2},k} - E_{i-\frac{1}{2},k} \right) + \left(G_{i+\frac{1}{2},k} - G_{i-\frac{1}{2},k} \right) + K = 0 \quad (4.3.2)$$

Όπως περιγράψαμε σε παραπάνω κεφάλαιο, ο σκοπός του επίλυτή Riemann είναι ο καθορισμός των διανυσμάτων E και G στις πλευρές του υπολογιστικού όγκου λαμβάνοντας υπ' όψιν τις φυσικές πληροφορίες του πεδίου μέσω των ανάντι και κατάντι διαδιδόμενων κυμάτων.



Εικόνα 4.1 Υπολογιστική κυψέλη (i,k)

Η επίλυση του προβλήματος Riemann στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης μπορεί να επιτευχθεί με την διάσπαση των εξισώσεων Euler στις διευθύνσεις ξ και ζ , παραλείποντας τον αξονοσυμμετρικό όρο K :

$$\frac{1}{2} \cdot U_t + E_\xi = 0 \quad (4.3.3 \alpha)$$

$$\frac{1}{2} \cdot U_t + G_\zeta = 0 \quad (4.3.3 \beta)$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την πορεία της μεθόδου για την ανάλυση της εξίσωσης (4.2.3 α) κατά την ξ -διεύθυνση και της εξίσωσης (4.2.3 β) κατά τη ζ -διεύθυνση. Ο συντελεστής $1/2$ παραλείπεται αφού είναι δυνατό να ενσωματωθεί στο χρονικό βήμα. Η εξίσωση (4.2.3 α) θα χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη της τοπικής επίλυσης κατά Riemann στην ξ -διεύθυνση. Με αντίστοιχο τρόπο αναλύεται και η δεύτερη εξίσωση κατά τη ζ -διεύθυνση.

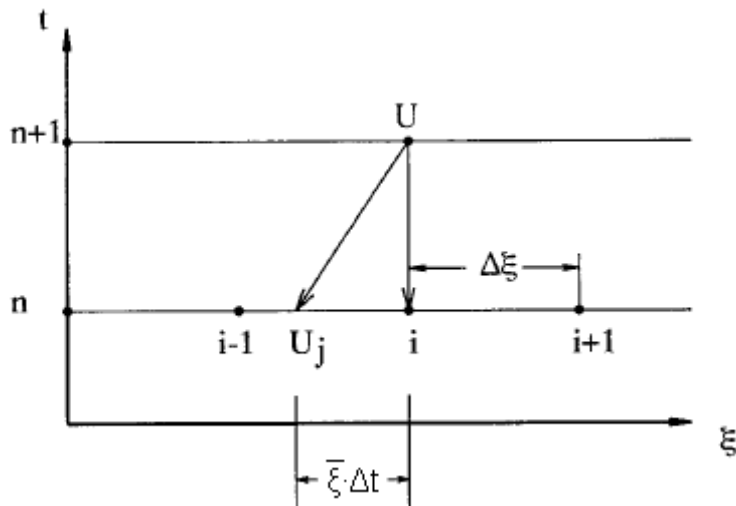
Οι εξισώσεις (4.3.3 α) μετασχηματίζονται στην παρακάτω μη συντηρητική μορφή :

$$\frac{1}{\beta} p_t + u_{z\xi} \cdot \xi_x + u_{r\xi} \cdot \xi_z = 0 \quad (4.3.4 \alpha)$$

$$u_{zt} + u_{z\xi} (u_z \cdot \xi_x + u_r \cdot \xi_z) + u_z (u_{z\xi} \cdot \xi_x + u_{r\xi} \cdot \xi_z) + \xi_x \cdot p_\xi = 0 \quad (4.3.4 \beta)$$

$$u_{rt} + u_{r\xi} (u_z \cdot \xi_x + u_r \cdot \xi_z) + u_r (u_{z\xi} \cdot \xi_x + u_{r\xi} \cdot \xi_z) + \xi_z \cdot p_\xi = 0 \quad (4.3.4 \gamma)$$

Στο προκύπτον σύστημα εξισώσεων, σε κάθε χρονικό βήμα από την $t = n \cdot \Delta n$ χρονική βαθμίδα στην $(n+1) \cdot \Delta n$, οι χωρικές παράγωγοι υπολογίζονται από τις τιμές των μεταβλητών του n χρονικού επιπέδου (μέθοδος ρητού σχήματος). Για τη χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.3.4), οι νέες τιμές των κύριων μεταβλητών του διανύσματος U στο χρονικό επίπεδο $n+1$, ορίζονται με μια σειρά Taylor που αναπτύσσεται με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου γνωστού επιπέδου n .



Εικόνα 4.2 Σχηματική αναπαράσταση των χαρακτηριστικών

Χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor, το διάνυσμα U ορίζεται ως συνάρτηση των τιμών U_j τη χρονική στιγμή t , (οι οποίες βρίσκονται εντός του διαστήματος επιρροής $\Delta \xi$) βάσει της σχέσης :

$$U = U_j + \Delta \xi \cdot U_\xi + U_t \cdot \Delta t \Rightarrow U_t = \frac{U - U_j}{\Delta t} - U_\xi \frac{\Delta \xi}{\Delta t} \quad (4.3.5)$$

Το διάστημα $\Delta\xi$ ορίζεται με την εισαγωγή της ταχύτητας του κύματος ξ' :

$$\Delta\xi = \xi' \cdot \Delta t$$

και η γραμμή με κλίση $1/\xi'$ ονομάζεται *χαρακτηριστική*.

Η ταχύτητα ξ' του κύματος εκφράζεται στο υπολογιστικό πεδίο από μια ταχύτητα λ διαιρεμένη με ένα αδιάστατο μήκος. Το αδιάστατο αυτό μήκος μπορεί να είναι το πηλίκο του εμβαδού δια της ποσότητας $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}$. Τελικά προκύπτει η σχέση :

$$\xi' = \lambda \cdot \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2} \quad (4.3.6)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην εξίσωση (4.3.5) έχουμε το εξής :

$$U_t = \frac{U - U_j}{\Delta t} - U_\xi \cdot \lambda \cdot \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2} \quad (4.3.7)$$

Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις (4.3.4) :

$$\frac{1}{\beta} \frac{1}{\Delta t \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}} (p - p_j) - \frac{1}{\beta} p_\xi \lambda + u_{z\xi} \bar{x} + u_{r\xi} \bar{z} = 0 \quad (4.3.8 \alpha)$$

$$\frac{1}{\Delta t \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}} (u_z - u_{z_j}) + u_{z\xi} (\lambda - \lambda_0) + u_z (u_{z\xi} \bar{x} + u_{r\xi} \bar{z}) + p_\xi \bar{x} = 0 \quad (4.3.8\beta)$$

$$\frac{1}{\Delta t \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}} (u_r - u_{r_j}) + u_{r\xi} (\lambda - \lambda_0) + u_r (u_{z\xi} \bar{x} + u_{r\xi} \bar{z}) + p_\xi \bar{z} = 0 \quad (4.3.8\gamma)$$

όπου ισχύει :

$$\lambda_0 = u_z \bar{x} + u_r \bar{z}$$

$$\bar{x} = \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}} \quad (4.3.8 \delta)$$

$$\bar{z} = \frac{\xi_z}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}}$$

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις ορίζονται οι χωρικές παράγωγοι των συνιστωσών της ταχύτητας $u_{z\xi}$ και $u_{r\xi}$ και της πίεσης p_ξ χρησιμοποιώντας της μεθοδολογία Riemann.

Σε κάθε χρονικό βήμα το σύστημα των εξισώσεων (4.3.8) μηδενίζεται και έτσι τις πολλαπλασιάζουμε με τους συντελεστές a , b και c :

$$a \cdot (4.3.8a) + b \cdot (4.3.8\beta) + c \cdot (4.3.8\gamma) = 0$$

Με αντικατάσταση προκύπτει :

$$\frac{1}{\Delta t \sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}} \left[\frac{1}{\beta} a (p - p_j) + b (u_z - u_{z_j}) + c (u_r - u_{r_j}) \right] + p_\xi \left[-a \frac{\lambda}{\beta} + b\bar{x} + c\bar{z} \right] + u_{z\xi} \left[a\bar{x} + b(\lambda_0 - \lambda + u_z \bar{x}) + c u_r \bar{x} \right] + u_{r\xi} \left[a\bar{z} + c(\lambda_0 - \lambda + u_r \bar{z}) + b u_z \bar{z} \right] = 0$$

(4.3.9)

Σύμφωνα με τον Eberle [1985], για τη διακριτοποίηση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, πρέπει οι συντελεστές των χωρικών παραγώγων να μηδενίζονται. Έτσι από την εξίσωση (4.3.9) προκύπτει το σύστημα :

$$\frac{1}{\beta} a (p - p_j) + b (u_z - u_{z_j}) + c (u_r - u_{r_j}) = 0 \quad (4.3.10 \alpha)$$

$$-a \frac{\lambda}{\beta} + b\bar{x} + c\bar{z} = 0 \quad (4.3.10 \beta)$$

$$a\bar{x} + b(\lambda_0 - \lambda + u_z \bar{x}) + c u_r \bar{x} = 0 \quad (4.3.10 \gamma)$$

$$a\bar{z} + c(\lambda_0 - \lambda + u_r \bar{x}) + b u_z \bar{z} = 0 \quad (4.3.10 \delta)$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών a , b και c επιλύουμε τις εξισώσεις (4.3.10 β), (4.3.10 γ) και (4.3.10 δ). Οι ιδιοτιμές του συστήματος (4.3.10) ισούται με :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= u_z \bar{x} + u_r \bar{z} \\ \lambda_1 &= \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + \beta} \\ \lambda_2 &= \lambda_0 - \sqrt{\lambda_0^2 + \beta} \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Για $\lambda = \lambda_0$ από την εξίσωση (4.3.10 β) προκύπτει :

$$a = \frac{b\bar{x} + c\bar{z}}{\lambda_0} \beta \quad (4.3.12)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω έκφραση του συντελεστή a στην εξίσωση (4.3.10 α) και προκύπτει :

$$b \left[\bar{x}(p - p_0) + \lambda_0(u_z - u_{z_0}) \right] + c \left[\bar{z}(p - p_0) + \lambda_0(u_r - u_{r_0}) \right] = 0 \quad (4.3.13)$$

όπου ο δείκτης '0' υποδηλώνει ότι η εξίσωση (4.3.13) έχει εκφραστεί για την ιδιοτιμή λ_0 . Βάση της θεωρίας θα πρέπει η παραπάνω εξίσωση να ικανοποιείται ανεξάρτητα από τις τιμές των συντελεστών b και c , οπότε μηδενίζονται οι ποσότητες μέσα στις παρενθέσεις και έτσι θα πρέπει να ισχύει :

$$\bar{x}(u_r - u_{r_0}) - \bar{z}(u_z - u_{z_0}) = 0 \quad (4.3.14)$$

Ακολουθώντας παρόμοια πορεία για τις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις :

$$(p - p_1) + \lambda_1 \left[\bar{x}(u_z - u_{z_1}) + \bar{z}(u_r - u_{r_1}) \right] = 0 \quad (4.3.15 \alpha)$$

$$(p - p_2) + \lambda_2 \left[\bar{x}(u_z - u_{z_2}) + \bar{z}(u_r - u_{r_2}) \right] = 0 \quad (4.3.15 \beta)$$

Τα συστήματα εξισώσεων (4.3.14) και (4.3.15) αποτελούν τις εξισώσεις των χαρακτηριστικών και οι ποσότητες p_j , u_{r_j} και u_{z_j} με $j=0,1,2$ αποτελούν τις τιμές των κύριων μεταβλητών πάνω στις τρεις χαρακτηριστικές. Καθώς επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων των χαρακτηριστικών προκύπτουν οι κύριες μεταβλητές συναρτήσει των τιμών τους πάνω στις χαρακτηριστικές. Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί στις εξής λύσεις :

$$u_z = \bar{x}R_1 + \bar{z}(\bar{z}u_{z_0} - \bar{x}u_{r_0}) \quad (4.3.16 \alpha)$$

$$u_r = \bar{z}R_1 + \bar{x}(\bar{x}u_{r_0} - \bar{z}u_{z_0}) \quad (4.3.16 \beta)$$

$$p = \frac{\lambda_1 k_2 - \lambda_2 k_1}{\sqrt{\lambda_0^2 + \beta}} \quad (4.3.16 \gamma)$$

όπου :

$$R_1 = \frac{0.5}{\sqrt{\lambda_0^2 + \beta}} \left[(p_1 - p_2) + \bar{x}(\lambda_1 u_{z_1} - \lambda_2 u_{z_2}) + \bar{z}(\lambda_1 u_{r_1} - \lambda_2 u_{r_2}) \right] \quad (4.3.17 \alpha)$$

$$k_1 = p_1 + \lambda_1 (\bar{x}u_{z_1} + \bar{z}u_{r_1}) \quad (4.3.17 \beta)$$

$$k_2 = p_2 + \lambda_2 (\bar{x}u_{z_2} + \bar{z}u_{r_2}) \quad (4.3.17 \gamma)$$

Για τον υπολογισμό του μη συνεκτικού διανύσματος E πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης χρησιμοποιούνται οι τιμές των κύριων μεταβλητών από τις εξισώσεις (4.3.16).

Σκοπός του επιλυτή Riemann, όπως έχει περιγραφεί σε παραπάνω κεφάλαιο, είναι η διακριτοποίηση των μητρώων των εξισώσεων, βάσει της διεύθυνσης διάδοσης της πληροφορίας. Ο ορισμός των κυρίων μεταβλητών p_j , u_{r_j} και u_{z_j} με $j=0,1,2$, πάνω στις χαρακτηριστικές γίνεται από μια μέση τιμή των τιμών τους αριστερά (-) ή δεξιά (+) της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Η επιλογή της αριστερής ή της δεξιάς τιμής για κάθε χαρακτηριστική 0,1 και 2 γίνεται βάσει του προσήμου των τοπικών ιδιοτιμών :

$$U_{i+\frac{1}{2}}^j = \begin{bmatrix} p_j \\ u_{z_j} \\ u_{r_j} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[(1 + \text{sign}(\lambda_j)) U^- + (1 - \text{sign}(\lambda_j)) U^+ \right] \quad (4.3.18)$$

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι όταν έχουμε θετική ιδιοτιμή η πληροφορία μεταφέρεται από τα όρια προς το εσωτερικό της ροής και ένα φυσικό όριο πρέπει να τεθεί ενώ όταν είναι αρνητική η πληροφορία μεταφέρεται από το εσωτερικό της ροής προς τα όρια επηρεάζοντας έτσι τις οριακές συνθήκες στην διεπιφάνεια (αριθμητικές οριακές συνθήκες).

Τα διανύσματα U^- και U^+ εκφράζουν τις τιμές των χαρακτηριστικών μεταβλητών αριστερά και δεξιά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό τους, συναρτήσει των τιμών των κύριων μεταβλητών στους γειτονικούς κόμβους, χρησιμοποιείται ένα ανάντι σχήμα παρεμβολής 3ης τάξης :

$$\begin{aligned} \left(U_{i+\frac{1}{2}} \right)^- &= \frac{1}{6} (5U_i - U_{i-1} + 2U_{i+1}) \\ \left(U_{i+\frac{1}{2}} \right)^+ &= \frac{1}{6} (5U_{i+1} - U_{i+2} + 2U_i) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Θυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι ένα ανάντι σχήμα παρεμβολής δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα σταθερό για θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την εφαρμογή της μεθόδου των χαρακτηριστικών για το μητρώο G είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν που περιγράφηκε παραπάνω για το μητρώο E καταλήγοντας σε παρόμοια αποτελέσματα.

4.4 Διακριτοποίηση των συνεκτικών διανυσμάτων των εξισώσεων Navier – Stokes

Στην συνέχεια θα γίνει μια σύντομη περιγραφή της διαδικασίας διακριτοποίησης των συνεκτικών μητρώων R και T του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων. Η διακριτοποίηση γίνεται στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης (i, k) χρησιμοποιώντας τις τιμές των μεταβλητών στις θέσεις $(i+1/2, k)$ και $(i-1/2, k)$ για το μητρώο R και τις τιμές $(i, k+1/2)$ και $(i, k-1/2)$ για το μητρώο T :

$$R_{\xi} = R_{i+\frac{1}{2},k} - R_{i-\frac{1}{2},k} \quad (4.4.1 \alpha)$$

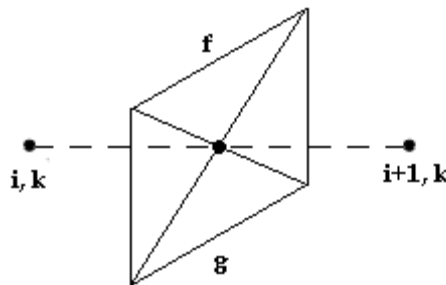
$$T_{\zeta} = T_{i,k+\frac{1}{2}} - T_{i,k-\frac{1}{2}} \quad (4.4.1 \beta)$$

Για τον καθορισμό των συνεκτικών διανυσμάτων πάνω στις πλευρές της υπολογιστικής κυψέλης (i, k) , απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων των συνιστωσών της ταχύτητας $u_{z_{\xi}}$, $u_{r_{\xi}}$, $u_{z_{\zeta}}$ και $u_{r_{\zeta}}$ πάνω στις πλευρές της κυψέλης. Ο υπολογισμός γίνεται με τη χρήση σχήματος κεντρικών διαφορών τόσο για τη ξ – διεύθυνση όσο και για τη ζ – διεύθυνση :

$$(u_{\xi})_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+1} - u_i \quad (4.4.2 \alpha)$$

$$(u_{\zeta})_{i+\frac{1}{2}} = u_f - u_g \quad (4.4.2 \beta)$$

με τους δείκτες f και g να ορίζονται ως εξής :



Εικόνα 4.3 Σχηματική απεικόνιση σχήματος κεντρικών διαφορών

4.5 Διακριτοποίηση των μη συνεκτικών διανυσμάτων των εξισώσεων τυρβώδους ροής $k - \varepsilon$.

Με αντίστοιχη διαδικασία θα γίνει ο υπολογισμός των παραγώγων των μη συνεκτικών διανυσμάτων $E_{k\varepsilon_\xi}$ και $G_{k\varepsilon_\xi}$ των εξισώσεων $k-\varepsilon$ (κεφάλαιο 3^ο) στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης (i, k) χρησιμοποιώντας τις τιμές των μεταβλητών στις θέσεις $(i+1/2, k)$ και $(i-1/2, k)$ για το μητρώο $E_{k\varepsilon_\xi}$ και τις τιμές $(i, k+1/2)$ και $(i, k-1/2)$ για το μητρώο $G_{k\varepsilon_\xi}$:

$$E_{k\varepsilon_\xi} = E_{k\varepsilon_{i+\frac{1}{2},k}} - E_{k\varepsilon_{i-\frac{1}{2},k}} \quad (4.5.1 \alpha)$$

$$G_{k\varepsilon_\xi} = G_{k\varepsilon_{i,k+\frac{1}{2}}} - G_{k\varepsilon_{i,k-\frac{1}{2}}} \quad (4.5.1 \beta)$$

Για τον καθορισμό των μη συνεκτικών διανυσμάτων E και G πάνω στις πλευρές της υπολογιστικής κυψέλης (i, k) , απαιτούνται τα μεγέθη k και ε της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και του όρου απορρόφησης καθώς και οι συνιστώσες της ταχύτητας (στις πλευρές της κυψέλης). Οι συνιστώσες της ταχύτητας στο κέντρο κάθε κυψέλης είναι γνωστές επειδή σε κάθε «χρονική» επανάληψη προηγείται η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων Navier-Stokes (§ 4.3 και 4.4). Έτσι, οι συνιστώσες της ταχύτητας πάνω στις πλευρές της κυψέλης υπολογίζονται ως μέση τιμή των αντίστοιχων μεγεθών στους γειτονικούς κόμβους. Για παράδειγμα κατά την ξ -διεύθυνση προκύπτει :

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \quad (4.5.2)$$

όπου $u \Rightarrow u_r$ ή u_z .

Για τον καθορισμό των k και ε πάνω στην πλευρά της κυψέλης χρησιμοποιείται ένα ανάντι σχήμα δεύτερης τάξης. Για παράδειγμα κατά την ξ -διεύθυνση είναι :

$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[(1 + \text{sign}(\lambda)) \beta_i + (1 - \text{sign}(\lambda)) \beta_{i+1} \right] \quad (4.5.3)$$

με $\beta \Rightarrow k$ ή ε

$$\lambda = u_{z_{i+\frac{1}{2}}} \xi_x + u_{r_{i+\frac{1}{2}}} \xi_z \quad (4.5.4)$$

4.6 Διαδικασία διακριτοποίησης των συνεκτικών διανυσμάτων των εξισώσεων τυρβώδους ροής $k - \epsilon$.

Για την διαδικασία διακριτοποίησης των συνεκτικών διανυσμάτων $R_{k\epsilon_\xi}$ και $T_{k\epsilon_\xi}$ των τυρβωδών εξισώσεων k - ϵ (κεφάλαιο 3^ο) δε θα γίνει ιδιαίτερη περιγραφή μιας και η μεθοδολογία είναι ακριβώς αντίστοιχη με αυτήν που ακολουθείται για τα συνεκτικά διανύσματα των εξισώσεων Navier-Stokes (§ 4.4).

4.7 Χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής και των εξισώσεων του μοντέλου $k - \epsilon$.

Για την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier – Stokes και των εξισώσεων του μοντέλου $k - \epsilon$, εφαρμόζεται μια ρητή επαναληπτική μέθοδος Runge-Kutta 4^{ης} τάξης :

$$\text{Βήμα 1}^\circ : \quad U^{(1)} = U^n$$

$$\text{Βήμα 2}^\circ : \quad U^{(2)} = U^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot RES^{(1)}$$

$$\text{Βήμα 3}^\circ : \quad U^{(3)} = U^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot RES^{(2)}$$

$$\text{Βήμα 4}^\circ : \quad U^{(4)} = U^n + \Delta t \cdot RES^{(3)}$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{6} \left(RES^{(1)} + 2RES^{(2)} + 2RES^{(3)} + RES^{(4)} \right) \quad (4.7.1)$$

όπου :

$$RES^{(\cdot)} = RES(U) = \frac{1}{Re} (R_\xi + T_\zeta + L) - E_\xi - G_\zeta - K \quad (4.7.2)$$

$$RES^{(\cdot)} = RES(U_{k\epsilon}) = \frac{1}{Re} (R_{k\epsilon_\xi} + T_{k\epsilon_\zeta} + L_{k\epsilon} + P_{k\epsilon}) - E_{k\epsilon_\xi} - G_{k\epsilon_\zeta} - K_{k\epsilon}$$

Τα σχήματα Runge-Kutta τυπικά εκφράζονται σε ρητή μορφή αφού η πεπλεγμένη διατύπωση περιλαμβάνει μεγάλο υπολογιστικό κόστος και έτσι σπάνια προτιμώνται.

Κάποια από τα πλεονεκτήματα των σχημάτων Runge-Kutta είναι :

1. Επειδή συνήθως χρησιμοποιούμε την ρητή μορφή του σχήματος, γίνεται εμφανής η ευκολία στον προγραμματισμό της.
2. Τα σχήματα Runge-Kutta διατηρούν καλύτερα κριτήρια σταθερότητας από τα συγκρίσιμα πεπλεγμένα σχήματα. Παρόλα αυτά, τονίζεται ότι το σχήμα μπορεί να είναι ασταθές για μη γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις όταν χρησιμοποιούνται κεντρικές διαφορές για τον όρο μεταφοράς. Γι αυτό συνήθως εισάγουμε όρους απόσβεσης για να σταθεροποιήσουμε την λύση. Για να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος οι όροι απόσβεσης μπορούν να εκτιμηθούν μόνο μια φορά σε κάθε χρονικό επίπεδο n και απομακρύνονται από την λύση έπειτα από το τελικό στάδιο.

Από την άλλη τα κύρια μειονεκτήματά τους είναι :

1. Από την στιγμή όπου αρκετοί υπολογισμοί πραγματοποιούνται για κάθε διάστημα, το σχήμα απαιτεί σημαντικά μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο για κάθε βήμα.
2. Εκτιμήσεις σφαλμάτων είναι συνήθως δύσκολα να υπολογιστούν.

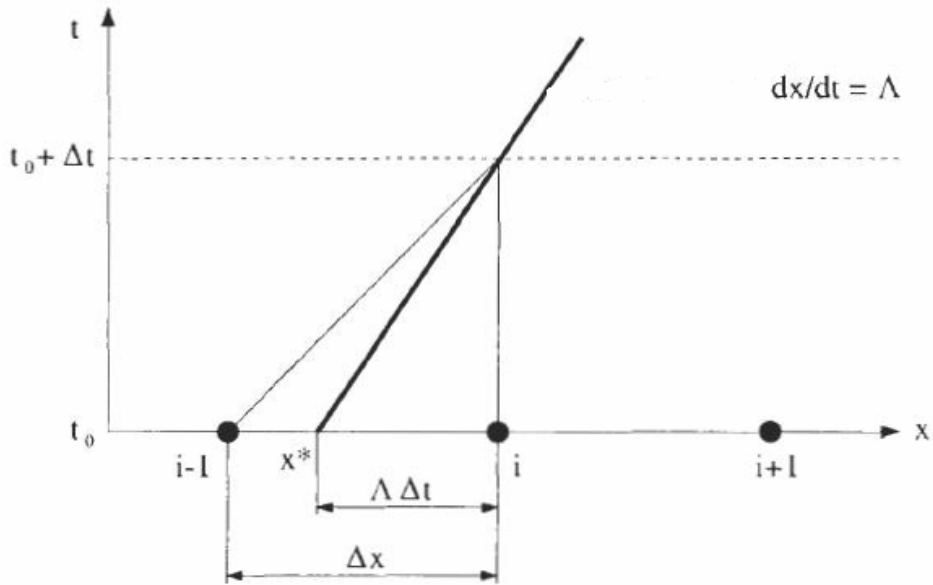
Κάθε ρητό σχήμα παραμένει σταθερό μόνο μέχρι μια συγκεκριμένη τιμή του χρονικού βήματος Δt . Το απαραίτητο, αλλά όχι αρκετό, κριτήριο σταθερότητας για σχήματα χρονικών βημάτων κατασκευάστηκε από τους Courant, Friedrichs και Lewy. Το επονομαζόμενο κριτήριο CFL καθορίζει ότι το εξαρτώμενο υπολογιστικό πεδίο του αριθμητικού σχήματος πρέπει να περιλαμβάνει το πεδίο εξάρτησης της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, αυτή η «αδιάστατη ταχύτητα» είναι στην πραγματικότητα ένας περιορισμός στο μέγεθος του χρονικού βήματος όταν το μέγεθος του χωρικού βήματος παραμένει σταθερό.

Για να κατανοήσουμε το παραπάνω παρατηρούμε το παρακάτω σχήμα. Το πεδίο εξάρτησης του μοντέλου της εξίσωσης μεταφοράς δίνεται από την χαρακτηριστική $\Lambda = \Delta t / \Delta x$. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία «κινείται» με αυτή την ταχύτητα μέσα στο υπολογιστικό πεδίο. Συνεπώς, η ακριβής λύση την χρονική στιγμή $(t_0 + \Delta t)$ ισούται με την λύση την χρονική στιγμή t_0 αλλά στην χωρική συντεταγμένη $x^* = x_i - \Lambda \Delta t$. Για να μπορέσουμε να εξομοιώσουμε την συμπεριφορά της ακριβούς λύσης σωστά, το πεδίο επιρροής της διακριτοποίησης στο χώρο θα πρέπει να περιλαμβάνει το σημείο x^* . Γι αυτό τουλάχιστον το x_{i-1} θα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται (αν $\Lambda > 0$). Έτσι σχηματίζουμε το κριτήριο :

$$\Lambda \Delta t \leq \Delta x \quad \text{ή} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\Lambda}$$

Αυτό οδηγεί στην μορφή του κριτηρίου CFL :

$$CFL = |\Lambda| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$



Εικόνα 4.4 Πεδίο εξάρτησης του ρητού σχήματος σε σχέση με το πεδίο εξάρτησης της εξίσωσης μεταφοράς (μαύρη γραμμή)

Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι το πεπλεγμένο σχήμα επιτρέπει το κριτήριο CFL να είναι μεγαλύτερο της μονάδας από την στιγμή που η νέα λύση στο νέο χρονικό επίπεδο $(t_0 + \Delta t)$ καθορίζεται σε περισσότερα του ενός βήματα.

Για να επιταχύνουμε την σύγκλιση στην μόνιμη κατάσταση, το χρονικό βήμα δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται από κόμβο σε κόμβο. Το μέγιστο «τοπικό» χρονικό βήμα υπολογίζεται από το κριτήριο ευστάθειας υπερβολικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων βάσει της μέγιστης ιδιοτιμής (εξισώσεις 4.2.11) των συνεκτικών μητρώων και του σταθερού αριθμού CFL (Courant-Friedrichs-Lewy):

$$\Delta t_{i,k} = \frac{CFL}{\max(|\lambda_0|, |\lambda_1|, |\lambda_2|)_{i,k}} \quad (4.7.3)$$

Βάσει του παραπάνω ορισμού αλλά και της θεωρίας για το κριτήριο σταθερότητας προκύπτει ότι κατά τον υπολογισμό του «τοπικού» χρονικού βήματος λαμβάνονται υπ' όψιν τα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού πλέγματος και του πεδίου ροής μέσα από την χρήση των ιδιοτιμών. Οι τιμές του CFL για την παρούσα μεθοδολογία και για το ρευστομηχανικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει βρίσκονται στο κεφάλαιο 6.

4.8 Αρχικές και Οριακές συνθήκες (initial & boundary conditions)

Ανεξαρτήτως της αριθμητικής μεθοδολογίας που επιλέγουμε για την επίλυση των κυρίαρχων εξισώσεων περιγραφής της ροής, θα πρέπει να ορίσουμε τις κατάλληλες *αρχικές* και *οριακές* συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες καθορίζονται από την κατάσταση του υγρού την χρονική στιγμή $t = 0$, ή στο πρώτο βήμα του επαναληπτικού σχήματος. Καθίσταται σαφές ότι όσο καλύτερη (κοντύτερη στην λύση) είναι η αρχική εκτίμηση τόσο ταχύτερα θα έχουμε σύγκλιση στην τελική λύση. Επιπλέον, η πιθανότητα αποτυχίας της αριθμητικής μεθόδου μειώνεται αναλογικά. Επομένως, είναι σημαντικό η αρχική λύση να ικανοποιεί τουλάχιστον το κυρίαρχο σύστημα εξισώσεων και αν απαιτείται τις θερμοδυναμικές σχέσεις. Μια συνήθης πρακτική που πρωτοεμφανίστηκε στην αεροδυναμική συνίσταται από καθορισμένες τιμές πίεσης, πυκνότητας (συμπιεστά προβλήματα) και ταχύτητας για την ελεύθερη ροή (δοσμένου του αριθμού Mach και της γωνίας προσβολής) σε ολόκληρο το πεδίο ροής. Αντίστοιχα στην κατασκευή μηχανημάτων είναι σημαντικό να ορίσουμε τις κατευθύνσεις της ροής αλλά και του πεδίου πιέσεων σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο όσο καλύτερα μπορούμε. Συνεπώς αξίζει τον κόπο να εφαρμόσουμε χαμηλής τάξης προσεγγίσεις για να παράγουμε μια φυσικά σημαντική αρχική εκτίμηση.

Οποιαδήποτε αριθμητική προσομοίωση της ροής λαμβάνει υπ' όψιν μόνο ένα συγκεκριμένο κομμάτι του φυσικού πεδίου αυτής. Ο «ακρωτηριασμός» του υπολογιστικού πεδίου δημιουργεί τεχνητά όρια όπου οι τιμές των φυσικών μεταβλητών πρέπει να οριστούν. Παραδείγματα αποτελούν τα εξωτερικά όρια στην αεροδυναμική, η είσοδος, η έξοδος και το περιοδικό όριο στην περίπτωση των εσωτερικών ροών και τα συμμετρικά πεδία. Το κυριότερο πρόβλημα όταν κατασκευάζουμε τέτοιες οριακές συνθήκες είναι όπως γίνεται αντιληπτό είναι το ότι η λύση του περιορισμένου πεδίου θα πρέπει να μείνει όσο πιο κοντά γίνεται σε μια λύση η οποία μπορεί να υπολογιστεί για ολόκληρο το φυσικό πεδίο της ροής. Στην περίπτωση των εξωτερικών, εισόδου και εξόδου ορίων, χαρακτηριστικές οριακές συνθήκες συχνά χρησιμοποιούνται για να καταστείλουν την εμφάνιση αφύσικων

διαταραχών στην ροή. Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται ώστε τα όρια αυτά να μην βρίσκονται αρκετά στο υπό εξέταση αντικείμενο (π.χ. πτέρυγα) γιατί ελλοχεύει ο κίνδυνος να μειωθεί η ακρίβεια της λύσης.

Ένας διαφορετικός τύπος οριακών συνθηκών προκύπτει όταν η επιφάνεια του σώματος εκτίθεται στο ρευστό. Στην περίπτωση της ροής χωρίς ιξώδες που περιγράφονται από τις εξισώσεις Euler η κατάλληλη οριακή συνθήκη είναι να απαιτήσουμε η ροή να είναι εφαπτομενική στην επιφάνεια.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ στην επιφάνεια}$$

Συγκριτικά, για τις εξισώσεις Navier – Stokes καμία σχετική ταχύτητα μεταξύ της επιφάνειας και του ρευστού θεωρείται στην επιφάνεια και ονομάζεται *συνθήκη μη ολίσθησης*.

$$u = v = 0 \text{ στην επιφάνεια}$$

Η συμπεριφορά στα τοιχώματα αλλάζει και γίνεται πιο περίπλοκη στην περίπτωση που πρέπει να απαιτήσουμε συγκεκριμένη θερμοκρασιακή διανομή ή όταν πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν την ακτινοβολία της θερμότητας.

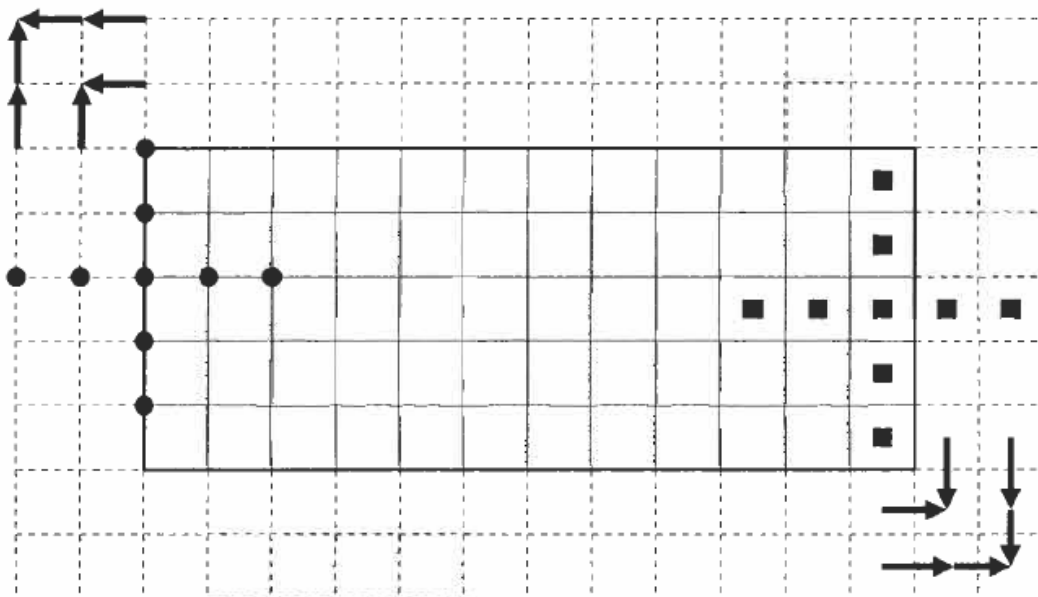
Επιπροσθέτως, οριακές συνθήκες πρέπει να οριστούν στις επιφάνειες όπου διαφορετικά υγρά (π.χ. αέρας και νερό) έρχονται σε επαφή. Αλλά πέρα από τις φυσικές οριακές συνθήκες και αυτές που επιβάλλονται από τον «ακρωτηριασμό» του πεδίου ροής μπορούν να υπάρξουν όρια που παράγονται από την ίδια την αριθμητική μεθοδολογία. Η σωστή επιβολή αυτών των συνθηκών είναι πολύ σημαντική σε κάθε επιλυτή ροής γιατί όχι μόνο η ακρίβεια της μεθόδου παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση από την σωστή επιβολή των φυσικών και αριθμητικών ορίων αλλά η σταθερότητα και η ταχύτητα σύγκλισης επηρεάζονται σημαντικά.

Οι ακόλουθοι τύποι οριακών συνθηκών εμφανίζονται γενικά στις αριθμητικές μεθοδολογίες επίλυσης των εξισώσεων Navier – Stokes :

- Τοιχώματος
- Εισόδου / εξόδου στις εσωτερικές ροές και ελεύθερης ροής στις εξωτερικές
- Συμμετρίας
- Περιορισμού συντεταγμένων και περιοδικά όρια
- Όρια στην διεπιφάνεια κελιών του πλέγματος

Πριν προχωρήσουμε στην αναφορά των οριακών συνθηκών που αντιστοιχούν στο υπό εξέταση ρευστομηχανικό πρόβλημα θα ασχοληθούμε με την τεχνική των ψευδοκυψελών (dummy cells). Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ δημοφιλής στα δομημένα πλέγματα αλλά προσφέρουν και κάποια πλεονεκτήματα με την χρήση τους στα μη δομημένα. Οι ψευδοκυψέλες αποτελούν ένα πρόσθετο στρώμα από κελιά του πλέγματος έξω από το φυσικό πεδίο ροής όπως γίνεται φαίνεται και στο σχήμα 4.6. Όπως βλέπουμε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο περιβάλλεται από ένα στρώμα ψευδοκυψελών (διακεκομμένες γραμμές). Παρότι δεν παράγονται όπως το πλέγμα μέσα στο πεδίο και είναι τεχνητά υπάρχουν γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως ο όγκος που σχετίζονται μαζί τους.

Ο σκοπός των ψευδοκυψελών είναι το να απλοποιήσουν τις ροές, τις βαθμίδες, την διάχυση στα όρια της ροής. Αυτό επιτυγχάνεται από την πιθανότητα να επεκτείνουμε την επιρροή του σχήματος χωρικής διακριτοποίησης πέρα από τα όρια. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 4.6 το ίδιο σχήμα διακριτοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί στα όρια όπως και στο εσωτερικό του φυσικού πεδίου. Έτσι μπορούμε να επιλύσουμε τις κυριαρχούσες εξισώσεις με τον ίδιο τρόπο όπως σε όλα τα «φυσικά» σημεία του πλέγματος αυξάνοντας την ευκολία με την οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω σχήμα. Επιπλέον, όλα τα σημεία ενός δομημένου πλέγματος μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με έναν μόνο βρόγχο το οποίο είναι πολύ σημαντικό πλεονέκτημα όταν χρησιμοποιούμε διανυσματική ανάλυση. Το κριτήριο είναι ότι οι ψευδοκυψέλες περιέχουν κατάλληλες τιμές των συντηρητικών μεταβλητών αλλά και των γεωμετρικών ποσοτήτων.

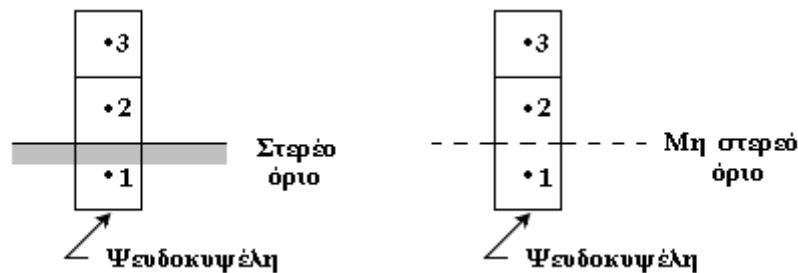


Εικόνα 4.6 Στρώμα ψευδοκυψελών γύρω από το υπολογιστικό πλέγμα με σχήματα 2^{ns} τάξης

Όπως γίνεται αντιληπτό τα στρώματα ψευδοκυψελών πρέπει να είναι τέτοια ώστε να καλύπτονται τα σημεία που βρίσκονται εκτός του φυσικού πεδίου. Οι συντηρητικές μεταβλητές στις ψευδοκυψέλες (σημεία) υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες ενώ οι γεωμετρικές ποσότητες συνήθως από τον αντίστοιχο όγκο ελέγχου στα όρια. Στην περίπτωση των ορίων στην διεπιφάνεια μεταξύ των κελιών, όλες οι μεταβλητές της ροής και η γεωμετρία μεταφέρονται από τα γειτονικά κελιά.

Οι οριακές συνθήκες, που εφαρμόζονται από την παρούσα μεθοδολογία, είναι ρητές έτσι ώστε σε κάθε υπό-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta, οι πέντε κύριες μεταβλητές (ρ , u_x , u_r , k και ϵ) στα όρια του υπολογιστικού πεδίου, να προκύπτουν από τις τιμές των μεταβλητών στους γειτονικούς κόμβους, χωρίς να απαιτείται η επίλυση ξεχωριστών εξισώσεων (πεπλεγμένες οριακές συνθήκες).

Επειδή οι κύριες μεταβλητές ορίζονται στο κέντρο κάθε υπολογιστικής κυψέλης (cell – centered scheme), για τον ορισμό των οριακών συνθηκών η παρούσα μεθοδολογία χρησιμοποιεί μια σειρά από ψευδοκυψέλες γύρω από τα όρια του αριθμητικού πλέγματος όπως περιγράφηκε παραπάνω.



Εικόνα 4.7 Ψευδοκυψέλες στο όριο του υπολογιστικού πλέγματος

Συμπερασματικά, ο καθορισμός των οριακών συνθηκών συνεπάγεται τον προσδιορισμό των κύριων μεταβλητών στις ψευδοκυψέλες.

Πριν προχωρήσουμε με την ανάλυση, ας αναλογιστούμε πως οι οριακές συνθήκες πρέπει να συνάδουν με την φυσική του προβλήματος. Γενικά, σε κάθε σημείο μέσα στο πεδίο αλλά και στα όρια, κάποιες από τις ιδιοτιμές θα είναι θετικές και κάποιες αρνητικές οδηγώντας στην εμφάνιση κυμάτων που κινούνται προς και από το υπολογιστικό πεδίο. Υπενθυμίζουμε ότι τα κύματα που κινούνται από το πεδίο μεταφέρουν την πληροφορία από το εσωτερικό ενώ εκείνα που κινούνται προς το πεδίο μεταφέρουν την πληροφορία από το περιβάλλον χωρίς στα όρια. Δυστυχώς τα δεδομένα του περιβάλλοντος δεν είναι πάντα γνωστά εισάγοντας έτσι δυσκολίες στην εισαγωγή τους. Τέλος παρατηρούμε ότι ο αριθμός των οριακών συνθηκών σε ένα σημείο πάνω στο όριο του

χωρίου θα πρέπει να ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών τύπων κυμάτων που μπορούν να εισέλθουν στο όριο από εκείνο το σημείο.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις οριακών συνθηκών :

1 . Είσοδος ροής

Στην είσοδο επιβάλλονται συγκεκριμένες κατανομές για τις συνιστώσες της ταχύτητας :

$$u_{z_1} = u_{z,inlet}$$

$$u_{r_1} = u_{r,inlet}$$

Για την πίεση μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος, οπότε στον ψευδοόγκο η πίεση 2 ορίζεται ως εξής :

$$p_1 = 2p_2 - p_3$$

Για τα μεγέθη k και ε , επειδή σπάνια υπάρχουν πειραματικές μετρήσεις, για την είσοδο χρησιμοποιούνται εμπειρικές σχέσεις όπως :

$$k = 0.03 \cdot u_{z,inlet}^2 \quad (4.8.1 \alpha)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{C_\mu \cdot k_1^{1.5}}{0.005 \cdot D_{inlet}} \quad (4.8.1 \beta)$$

3 . Εξόδος ροής

Για όλα τα μεγέθη εκτός από την πίεση επιβάλλεται δεύτερη παράγωγος ίση με μηδέν :

$$a_1 = 2a_2 - a_3 \quad \text{όπου } a = u_z, u_r, k \text{ ή } \varepsilon$$

Η τιμή της πίεσης ορίζεται σε όλη την διατομή της εξόδου με μια σταθερή τιμή (συνήθως την πίεση περιβάλλοντος $p_{outlet} = p_\infty$).

4 . Επίπεδο συμμετρίας

Αν η ροή είναι συμμετρική κατά μια κατεύθυνση ή άξονα, το πρώτο κριτήριο που πρέπει να ικανοποιείται είναι το ότι δεν υπάρχει ροή κατά μήκος του ορίου. Αυτό ισούται με την απαίτηση η κανονική ταχύτητα κατά μήκος του συμμετρικού ορίου είναι μηδέν.

Εάν για παράδειγμα το z-επίπεδο είναι επίπεδο συμμετρίας τότε οι οριακές συνθήκες είναι :

$$a_1 = a_2 \text{ όπου } a = u_z, u_r, k \text{ ή } \varepsilon$$

$$u_{r,1} = -u_{r,2}$$

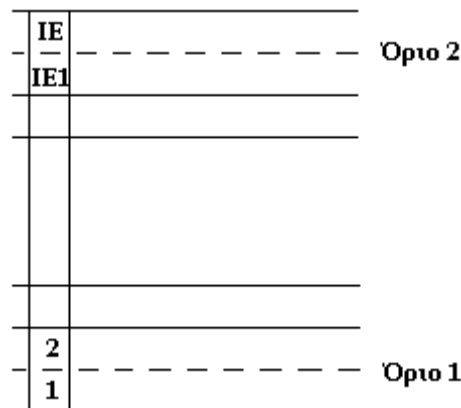
4 . Περιοδικές οριακές συνθήκες

Υπάρχουν συγκεκριμένες πρακτικές εφαρμογές όπου το πεδίο ροής είναι περιοδικό κατά μία ή πολλαπλές κατευθύνσεις. Σε μια τέτοια περίπτωση είναι αρκετό να εξομοιώσουμε την ροή μόνο σε μία από τις επαναλαμβανόμενες περιοχές. Η σωστή αλληλεπίδραση με το εναπομείναν φυσικό πεδίο εφαρμόζονται μέσω περιοδικών οριακών συνθηκών.

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο βασικούς τύπους περιοδικών συνθηκών. Η πρώτη περιλαμβάνει την περίπτωση όπου μια περιοδική οριακή συνθήκη μπορεί να μετατραπεί στο άλλο όριο μέσα από μεταφορά (μετατόπιση) συντεταγμένων (coordinate translation). Ο δεύτερος αναπαριστά περιοδικά όρια που παράγονται από την περιστροφή συντεταγμένων και είναι γνωστά ως περιστροφική περιοδικότητα (rotational periodicity).

Εδώ έχουμε χρήση του πρώτου τύπου όπου στις περιοδικές οριακές συνθήκες θεωρείται ότι η κατάσταση ροής στο ένα όριο του υπολογιστικού χωρίου (όριο 1) ταυτίζεται με την κατάσταση ροής στο άλλο όριο (όριο 2), οπότε οι οριακές συνθήκες (όπως φαίνονται και στο επόμενο σχήμα) ορίζονται :

$$a_{IE1} = a_1 \text{ και } a_{IE} = a_2 \text{ όπου } a = u_z, u_r, p, k \text{ ή } \varepsilon$$



Εικόνα 4.8 Περιοδικές οριακές συνθήκες

5 . Ελεύθερο όριο(οριακές συνθήκες για εξωτερική ροή)

Οι οριακές συνθήκες εδώ παρουσιάζουν ομοιότητες με αυτές όταν έχουμε επίπεδο συμμετρίας με την διαφορά ότι η σωστή επιβολή τους είναι σημαντική μιας και θα μας δώσουν την ικανότητα με ορθό τρόπο να προβλέψουμε την ελεύθερη επιφάνεια της ροής καθορίζοντας την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μεθόδου.

Στην ελεύθερη επιφάνεια θα πρέπει να ικανοποιούνται τρεις συνθήκες ταυτόχρονα :

- (I) Μηδενική κανονική ταχύτητα
- (II) Μηδενική (ή ορισμένη) διατμητική τάση
- (III) Μηδενική (ή καθορισμένη) κανονική τάση

Σε στοιχειώσεις περιπτώσεις (χωρίς την ύπαρξη επιφανειακής τάσης) ούτως ώστε η διατμητική και κανονική τάση να είναι μηδενικές, μια προσέγγιση είναι το να αγνοήσουμε την συνθήκη (I) και να στήσουμε τις (II) και (III) πάνω σε ένα υποτιθέμενο περίγραμμα και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις κανονικές ταχύτητες πάνω σε αυτό. Από τις τιμές αυτές των ταχυτήτων μπορεί να κατασκευαστεί μια καινούργια γραμμή ροής, η οποία υπηρετεί σαν το καινούργιο υποτιθέμενο περίγραμμα και μπορεί να συνεχιστεί έτσι η διαδικασία μέχρι να επιτευχθεί ένα ικανοποιητικό επίπεδο σύγκλισης και με την κανονική ταχύτητα να είναι αρκετά μικρή ώστε το τελικό περίγραμμα να μπορεί να θεωρηθεί ότι ικανοποιεί όλες τις συνθήκες.

Για την τυρβώδη κινητική ενέργεια της ροής k και για τον όρο απορρόφησης ε , που συνδέεται με την κλίμακα μήκους και το k , γνωρίζουμε ότι στην ελεύθερη επιφάνεια θεωρούνται μηδενικές.

Στην περίπτωσή μας θεωρούμε άγνωστη την κανονική ταχύτητα και επιβάλλουμε περιορισμό στην πίεση έτσι ώστε να ισούται με την πίεση περιβάλλοντος. Συγκεκριμένα έχουμε :

$$u_{r,1} = u_{r,2} \text{ και } u_{z,1} = u_{z,2}$$

$$p = p_{\infty}$$

$$k_1 = -k_2 \text{ και } \varepsilon_1 = -\varepsilon_2$$

έτσι ώστε η μέση τιμή των k και ε πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια να μηδενίζονται (π.χ. $k_{surface} = 0.5 \cdot (k_1 + k_2) = 0$).

6 . Στερεό τοίχωμα

Για τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού πάνω σε τοίχωμα, ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης (no – slip condition) οπότε οι τιμές των u_z και u_r στους ψευδοόγκους γίνονται :

$$u_{z,1} = -u_{z,2} \text{ και } u_{r,1} = -u_{r,2}$$

έτσι ώστε η μέση τιμή της κάθε συνιστώσας της ταχύτητας πάνω στο τοίχωμα να μηδενίζεται (για παράδειγμα $u_{z,wall} = 0.5 \cdot (u_{z,1} + u_{z,2}) = 0$).

Αντίστοιχα για την πίεση ισχύει ότι η κάθετη παράγωγος της πάνω στο τοίχωμα είναι ίση με μηδέν οπότε ισχύει :

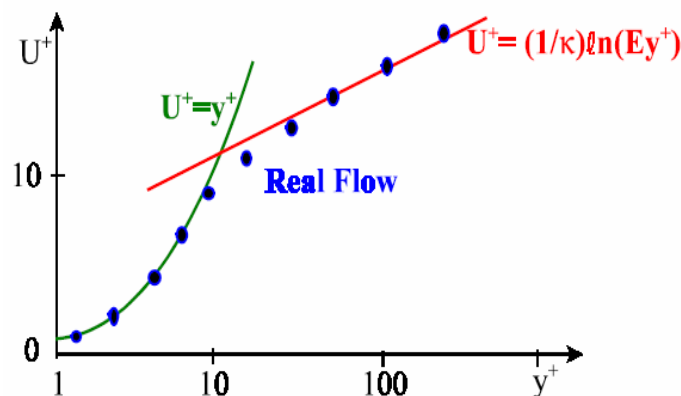
$$P_1 = P_2$$

Οι τιμές k και ϵ της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ορίζονται πάνω στο τοίχωμα (συγκεκριμένα στον κόμβο 2) χρησιμοποιώντας την μέθοδο των συναρτήσεων τοιχώματος (wall functions) με τις οποίες προσεγγίζονται οι διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα.

Σε μεγάλους αριθμούς Reynolds, το συνεκτικό υπόστρωμα του οριακού στρώματος είναι τόσο λεπτό που καθίσταται δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε αρκετά σημεία πλέγματος για να το αναλύσουμε. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αποφευχθεί χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις τοιχώματος οι οποίες βασίζονται στην ύπαρξη μιας λογαριθμικής περιοχής στο προφίλ της ταχύτητα όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, όταν ο κόμβος 2 βρίσκεται μέσα στο τυρβώδες οριακό υπόστρωμα, η παράλληλη ως προς το τοίχωμα ταχύτητα στην θέση αυτή δίνεται από την λογαριθμική σχέση :

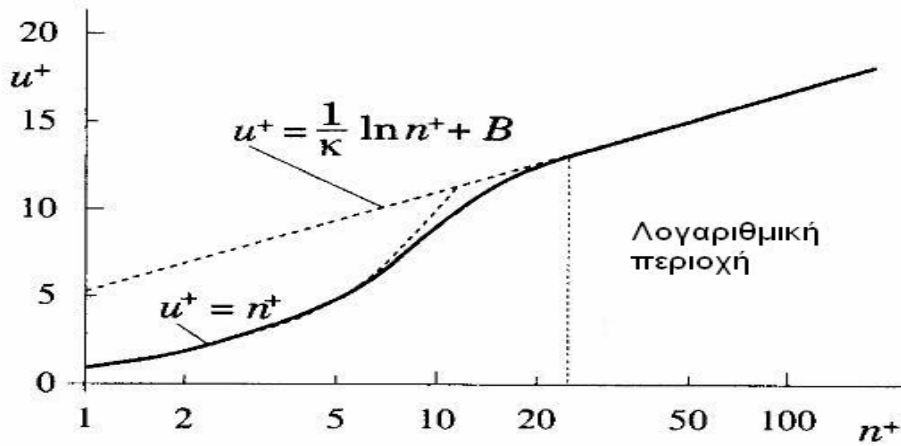
$$|U_{p,2}| = \frac{u^\#}{\kappa} \cdot \ln(Ey_2^+) \quad (4.8.2 \alpha)$$



Εικόνα 4.9 Τυρβώδες οριακό στρώμα

όπου το μέγεθος $u^\#$ ονομάζεται ταχύτητα τριβής, ενώ το y_2^+ αντιπροσωπεύει την αδιάστατη απόσταση μεταξύ του κόμβου 2 και του τοιχώματος. Ο συντελεστής $E=9,79$ είναι μια παράμετρος τραχύτητας και $\kappa=0,419$ είναι η σταθερά Von Karman.

Στην βιβλιογραφία υπάρχει και η μορφή του παρακάτω σχήματος όπου υπάρχει η προσθήκη του συντελεστή B , μιας εμπειρικής σταθεράς που συνδέεται με το πάχος του συνεκτικού υποστρώματος και παίρνει τιμές $B \approx 5.5$ σε ένα οριακό στρώμα γύρω από μια λεία επίπεδη πλάκα ενώ παίρνει μικρότερες τιμές για πιο τραχιά τοιχώματα.



Εικόνα 4.10 Τυρβώδες οριακό στρώμα με διακεκομμένη γραμμή οι εξισώσεις και με μαύρη γραμμή τα πειραματικά δεδομένα ($n^+ = y^+$)

Όταν ο κόμβος 2 βρίσκεται μέσα στο τυρβώδες οριακό υπόστρωμα τότε, σύμφωνα με την θεωρία έχουμε :

$$y_2^+ > 11.63$$

Για $y_2^+ < 11.63$ η ροή στον κόμβο 2 είναι στρωτή (στρωτό οριακό υπόστρωμα) και αντί για την σχέση (4.8.1α) ισχύει :

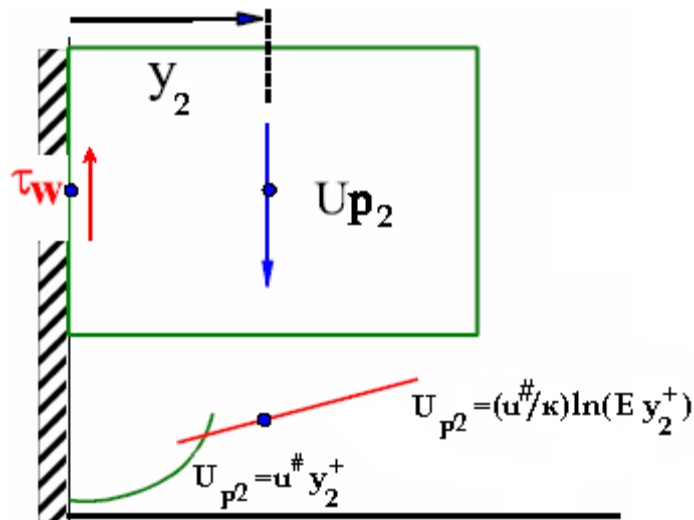
$$|U_{p,2}| = u^\# \cdot y_2^+ \tag{4.8.2 \beta}$$

Τα μεγέθη $u^\#$ και y_2^+ συνδέονται μεταξύ τους και με τη διατμητική τάση τ_w στο τοίχωμα βάσει των σχέσεων :

$$u^\# = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho Re}} \tag{4.8.3}$$

$$y_2^+ = Re \cdot \frac{\rho y_2 u^\#}{\mu} \tag{4.8.4}$$

όπου y_2 είναι η απόσταση του κόμβου 2 από το τοίχωμα όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.11.



Εικόνα 4.11 Συναρτήσεις τοιχώματος

Η υπόθεση που γίνεται από τη μέθοδο των συναρτήσεων τοιχώματος είναι ότι στο οριακό τυρβώδες υπόστρωμα επικρατεί μια τοπική ενεργειακή ισορροπία, δηλαδή η παραγωγή του k ισούται με την καταστροφή του ε :

$$\frac{\mu_t}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 = \varepsilon$$

οπότε για $\tau_2 = \tau_w$ προκύπτουν τα k και ε στον κόμβο 2, αποφεύγοντας με αυτό τον τρόπο την επίλυση του συστήματος εξισώσεων $k - \varepsilon$ (3.5.7) :

$$k_2 = \frac{(u^\#)^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (4.8.5 \text{ α})$$

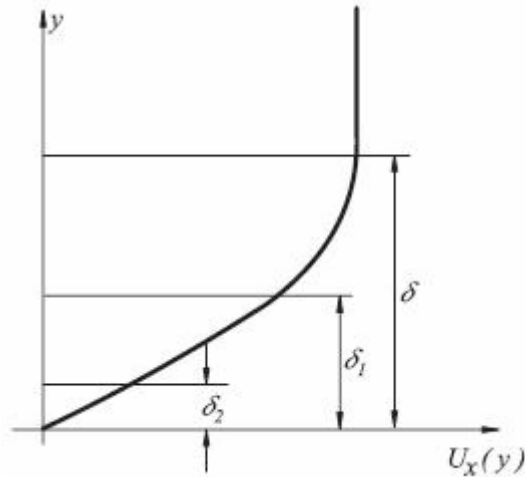
$$\varepsilon_2 = \frac{(u^\#)^3}{\kappa y_2} \quad (4.8.5 \text{ β})$$

Υπενθυμίζουμε ότι η χρήση της μεθόδου των συναρτήσεων τοιχώματος στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα, αντί της ανάλυσης του συνεκτικού υποστρώματος, μας προσφέρει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα :

- Ο υπολογιστικός χρόνος και ο απαιτούμενος χώρος για αποθήκευση δεδομένων μειώνονται σημαντικά γιατί οι παράγωγοι των εξαρτώμενων μεταβλητών κοντά στον τοίχο δεν χρειάζεται να αναλυθούν.
- Κάποιες από τις υποθέσεις στην παραγωγή των μοντέλων των εξισώσεων $k - \varepsilon$ χάνουν την ισχύ τους στην περιοχή κοντά στο

τοίχωμα που επηρεάζεται από το ιξώδες του ρευστού, κάτι που δεν αντιμετωπίζουμε εδώ.

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες έχουν ισχύ όταν ο πρώτος κόμβος βρίσκεται μέσα στην λογαριθμική περιοχή (π.χ. όταν $y_p^+ > 30$).



Εικόνα 4.12 Προφίλ ταχύτητας όπου δ το πάχος του οριακού στρώματος, δ_1 το πάχος μετατόπισης και δ_2 το πάχος ορμής

4.9 Διαδικασία επίλυσης των μοντελοποιημένων εξισώσεων

Πριν ξεκινήσει η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε παραπάνω απαιτείται η επιλογή μιας αρχικής τιμής των κύριων μεταβλητών σε όλους τους κόμβους του αριθμητικού πλέγματος που βασίζεται στην εμπειρία του μελετητή και την φυσική διάσταση του ρευστομηχανικού προβλήματος. Τα βήματα που ακολουθούνται για την επίλυση των εξισώσεων περιγραφής της ροής από την αρχική λύση στην τελική μόνιμη κατάσταση είναι τα εξής :

Βήμα 1^ο : Αρχική εκτίμηση των κύριων μεταβλητών (u_z, u_r, p, k και ε)

Βήμα 2^ο : Εφαρμογή των συναρτήσεων τοιχώματος στα στερεά όρια και υπολογισμός των k και ε στους κόμβους των στερεών ορίων (§ 4.8).

Βήμα 3^ο : Καθορισμός των οριακών συνθηκών για τα μεγέθη της πίεσης και της ταχύτητας (§ 4.8).

Βήμα 4^ο : Επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes (§ 4.3 και 4.4).

Βήμα 5^ο : Καθορισμός των οριακών συνθηκών για τα μεγέθη k και ε (§ 4.8).

Βήμα 6^ο : Επίλυση των εξισώσεων του μοντέλου $k - \varepsilon$ χρησιμοποιώντας τα κύρια μεγέθη ροής που υπολογίζονται στο 4^ο βήμα , (§ 4.5 και 4.6).

Βήμα 7^ο : Έλεγχος σύγκλισης, αντικατάσταση των κύριων μεταβλητών με τις νέες τιμές και επιστροφή στο βήμα 2^ο .

Ο έλεγχος σύγκλισης πραγματοποιείται εξετάζοντας τα υπόλοιπα των κύριων μεταβλητών σε όλους τους κόμβους του αριθμητικού πλέγματος. Το υπόλοιπο μιας κύριας μεταβλητής A ορίζεται ως :

$$RES = |A^{n+1} - A^n|$$

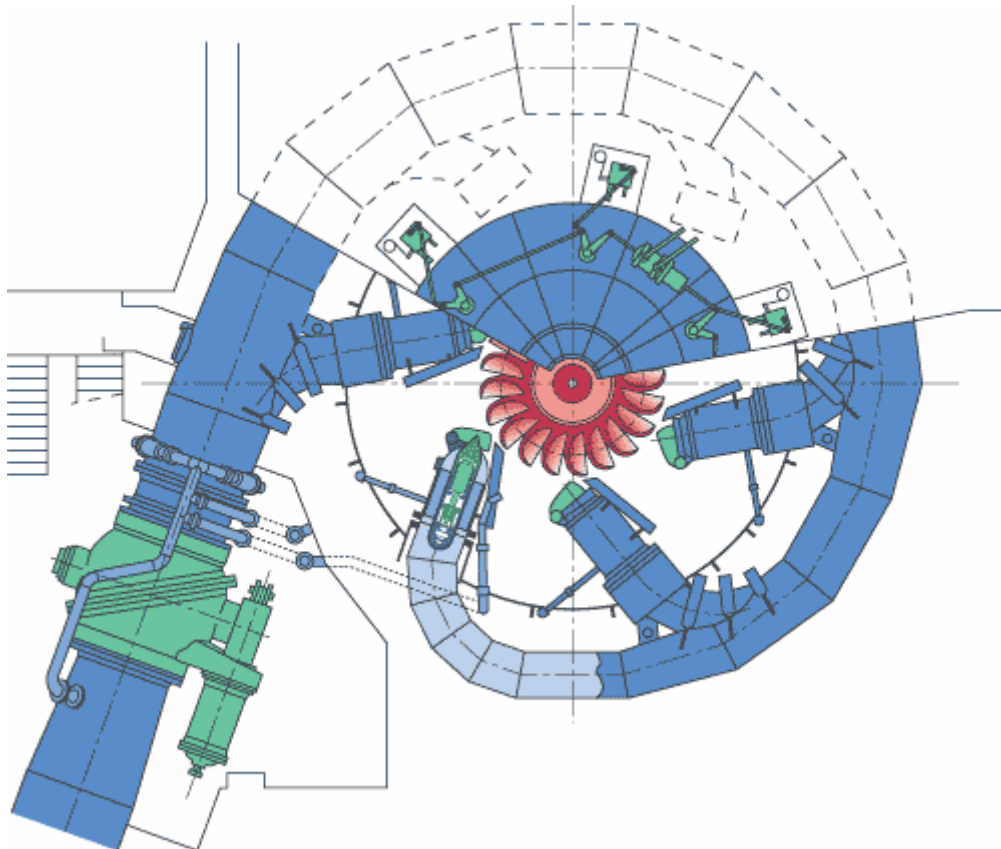
Η παραπάνω διαδικασία σταματά όταν το μέγιστο υπόλοιπο για όλες τις κύριες μεταβλητές και για όλους τους κόμβους, γίνει μικρότερο από ένα κριτήριο σύγκλισης της επιλογής μας. Το κριτήριο σύγκλισης που επιλέγουμε εδώ βρίσκεται στο τέλος της παρούσας εργασίας.

Αφού επιτευχθεί σύγκλιση καλούμαστε να ελέγξουμε την ορθότητα του περιγράμματος του ελεύθερου ορίου, δηλαδή βλέπουμε εάν ικανοποιείται το κριτήριο της μηδενικής ταχύτητας. Αν ικανοποιείται ο αλγόριθμος υπολογισμού σταματά ενώ σε περίπτωση που δεν ικανοποιείται εφαρμόζεται καινούργιο πλέγμα με βάση το πεδίο ταχυτήτων που προέκυψε με την παραπάνω διαδικασία. Συγκεκριμένα, αναλόγως το πρόσημο της ταχύτητας και την απόκλισή της από το μηδενικό κριτήριο προσαρμόζεται το πλέγμα μόνο στα σημεία της ελεύθερης επιφάνειας. Το κριτήριο σύγκλισης εδώ είναι της τάξης του 10^{-2} .

5.1 Εισαγωγή

Μετά την περιγραφή της μεθοδολογίας και του τρόπου επίλυσης των εξισώσεων του ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού που προηγήθηκαν, ακολουθούν αριθμητικές εφαρμογές σε διάφορες περιπτώσεις πεδίων μόνιμης στρωτής ή τυρβώδους ροής.

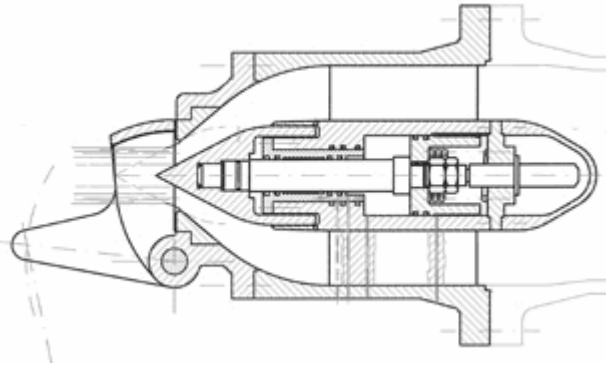
Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την ανάλυση της ροής διαμέσου ενός ακροφυσίου κατά Bonet αλλά και την διαμόρφωση της δέσμης στην έξοδο αυτού (εύρεση ελεύθερης επιφάνειας). Σκοπός είναι για διάφορα ανοίγματα της βελόνης του ακροφυσίου να αποκτήσουμε αποδεκτό πεδίο λύσης ώστε να εποπτεύσουμε την εξέλιξη της ροής, την αποτελεσματικότητα του σχεδιασμού του εξαρτήματος και την ποιότητα της δέσμης στην έξοδο.



Εικόνα 5.1 Διάταξη με τομή υδροστροβίλου Pelton κατακόρυφου άξονα με περισσότερες δέσμες

Το υπό εξέταση ακροφύσιο χρησιμοποιείται από έναν υδροστροβίλο Pelton, αποτελώντας μέρος του τμήματος εισόδου αυτού. Συγκεκριμένα το τμήμα εισόδου αρχίζει από την σφαιρική βάννα, στο άκρο του αγωγού προσαγωγής, και καταλήγει στο ή στα ακροφύσια τροφοδοσίας. Στην εικόνα 5.1 δίνεται τομή ακροφυσίου Pelton : η ρύθμιση της παροχής επιτυγχάνεται μέσω βελόνης, η οποία μετακινείται κατά τον άξονα του ακροφυσίου, συνήθως με υδραυλικό σύστημα εμβόλου (εικόνα 5.2). Με

την μετακίνηση της βελόνης μεταβάλλεται η διατομή διέλευσης της παροχής, η διάμετρος της δέσμης και άρα μεταβάλλεται αντίστοιχα η παροχή.



Εικόνα 5.2 Ακροφύσιο τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton

Υπενθυμίζεται ότι η ταχύτητα της δέσμης είναι σταθερή, ανεξάρτητη της θέσης της βελόνης δεδομένου ότι είναι της μορφής :

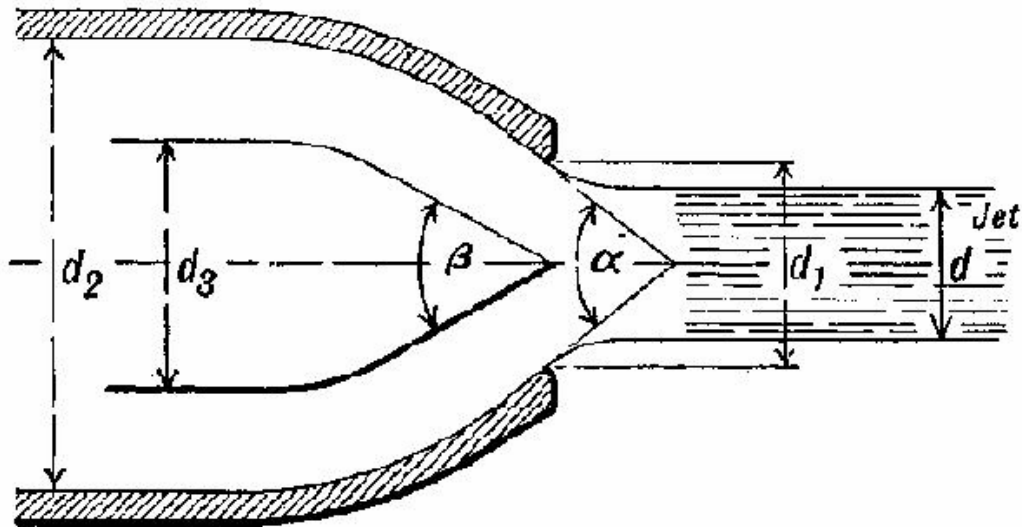
$$c \approx \sqrt{2gH}$$

με την παραπάνω σχέση να προκύπτει από την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli. Η όλη κατασκευή του ακροφυσίου είναι πολύ στιβαρή λόγω της μεγάλης τιμής της στατικής πίεσης και των μεγάλων ταχυτήτων στην διατομή εξόδου του ακροφυσίου.

Για την περίπτωση γρήγορης απόρριψης του φορτίου κατασκευάζεται όνυχας εκτροπής της δέσμης, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.2, αμέσως μετά την διατομή εξόδου του ακροφυσίου. Με την ενεργοποίησή του ο όνυχας εκτρέπει την δέσμη έτσι ώστε να μην προσπίπτει πλέον στον δρομέα μηδενίζοντας την αναπτυσσόμενη σε αυτόν ροπή. Στην συνέχεια η παροχή της δέσμης μειώνεται, μέσω του κλεισίματος της βελόνης, με ρυθμό που έχει από πριν υπολογιστεί έτσι ώστε η υπερπίεση που δημιουργείται κατά την διάρκεια του υδραυλικού πλήγματος να μην ξεπερνά τις επιτρεπόμενες τιμές. Στο σημείο αυτό θυμίζουμε ότι ο αγωγός προσαγωγής των υδροστροβίλων Pelton έχει συνήθως μεγάλο μήκος ενώ και η υψομετρική διαφορά των άκρων του είναι και αυτή μεγάλη (ο Pelton χειρίζεται μεγάλες υψομετρικές διαφορές). Για τον λόγο αυτό ένας χειρισμός στον αγωγό μπορεί να θεωρηθεί ως 'στιγμιαίος' και να προκαλέσει υδραυλικό πλήγμα μεγάλης έντασης. Τα αριθμητικά δεδομένα που θα προκύψουν από τον αλγόριθμο θα μας δώσουν μια εικόνα για τις δυνάμεις και τις υπερπίεσεις που δημιουργούνται κατά την διάρκεια τέτοιων χειρισμών καθώς και λίγο πριν από το κλείσιμο του ακροφυσίου.

Το σώμα του ακροφυσίου κατασκευάζεται συνήθως από χυτοχάλυβα ενώ το άκρο της βελόνης από ανοξείδωτο χάλυβα και αντικαθίσταται μετά από ορισμένες ώρες λειτουργίας λόγω της μηχανικής διάβρωσης που υφίσταται από την υψηλή ταχύτητα της ροής και την ύπαρξη σωματιδίων στο νερό, όπως άμμος κ.λ.π.

Αξιόλογη πειραματική προσπάθεια απαιτείται για επιτύχουμε τον βέλτιστο σχεδιασμό του σχήματος του σώματος του ακροφυσίου και της βελόνης έτσι ώστε να έχουμε παραγωγή μιας συμπαγής παράλληλης δέσμης, ιδιαίτερα στην περίπτωση που καλείται να χειριστεί μεγάλα διαθέσιμα ύψη. Σημαντικό κριτήριο για την ορθή σχεδίαση αποτελεί η σταδιακή μείωση της περιοχής, όπου διέρχεται το νερό, προς την έξοδο. Με βάση το σχήμα 5.3 προκύπτουν οι παρακάτω εμπειρικές σχέσεις (από πειράματα και εμπειρία σχεδιασμού) :



Εικόνα 5.3 Ακροφύσιο : βασικές διαστάσεις σχεδίασης (διάμετροι)

d = μέγιστη διάμετρος δέσμης (με την βελόνη πλήρως ανοικτή)

$$d_1/d = 1,2 \dots 1,4$$

$$d_2/d = 3,0 \dots 4,0$$

$$d_3/d = 1,25 \dots 1,50$$

με $\alpha \approx 60^\circ \dots 90^\circ$ και $\beta \approx 40^\circ \dots 60^\circ$

Η διαθέσιμη υδραυλική πτώση H μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε κινητική ενέργεια από το ειδικά διαμορφωμένο ακροφύσιο, δηλαδή σε δέσμη κυκλικής διατομής μέσης ταχύτητας c_e η οποία θα είναι ίση προς :

$$c_e = C_e \cdot \sqrt{2gH}$$

όπου: H = υδραυλική πτώση πριν το ακροφύσιο
 C_e = συντελεστής απωλειών ακροφυσίου = 0,95...0,98

Επομένως η παροχή από την δέσμη διαμέτρου d θα είναι ίση προς :

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot C_e = (0,75...0,77) \cdot d^2 \cdot \sqrt{2gH}$$

5.1 Τυρβώδης αξονοσυμμετρική ροή διαμέσου ακροφυσίου τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton (Pelton turbine Type I).

Σε αυτήν παράγραφο γίνεται αριθμητική επίλυση και μελέτη της τυρβώδους αξονοσυμμετρικής καθώς το νερό διέρχεται μέσα από το ακροφύσιο (σχήμα 5.4) με την χρήση της μεθοδολογίας που περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Η είσοδος αλλά και η έξοδος της ροής από το υπολογιστικό χωρίο γίνεται καθαρά αξονικά όπως μαρτυρά το παρακάτω σχήμα. Για την επίλυση της ροής χρησιμοποιούμε αριθμό Reynolds $Re = 2 \cdot 10^6$ ενώ ως ταχύτητα αναφοράς U_{ref} για την αδιαστατοποίηση των μεγεθών της ροής (αξονική και ακτινική ταχύτητα κ.λ.π.) εκλέγεται η ταχύτητα στην είσοδο του ακροφυσίου. Η ροή εκεί θεωρείται στρωτή και ομοιόμορφη με $u_{inlet}/U_{ref} = 1$. Επίσης, ως μήκος αναφοράς L_{ref} θα χρησιμοποιηθεί η διάμετρος εισόδου D_{in} .

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν αναλυτικά οι οριακές συνθήκες που θα εφαρμοστούν από τον αλγόριθμο για την μοντελοποίηση και επίλυση του συστήματος εξισώσεων περιγραφής της ροής του ρευστού. Συγκεκριμένα έχουμε :

- Στην είσοδο (AB) θεωρούμε ότι η ταχύτητα παρουσιάζει ομοιόμορφη κατανομή με αξονική συνιστώσα $u_z/U_{ref} = 1$ και αντίστοιχα ακτινική συνιστώσα $u_r/U_{ref} = 0$. Για την πίεση θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο προεκβολής της τιμής της, κάτι που σημαίνει ότι μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος αυτής κατά την αξονική διεύθυνση (κατεύθυνση της ροής) $\partial^2 p / \partial z^2 = 0$. Για τα μεγέθη k και ε της τυρβώδους κινητικής ενέργειας χρησιμοποιούνται οι εμπειρικές σχέσεις που περιγράφηκαν στο 4^ο κεφάλαιο (σχέσεις 4.8.5α και 4.8.5β).

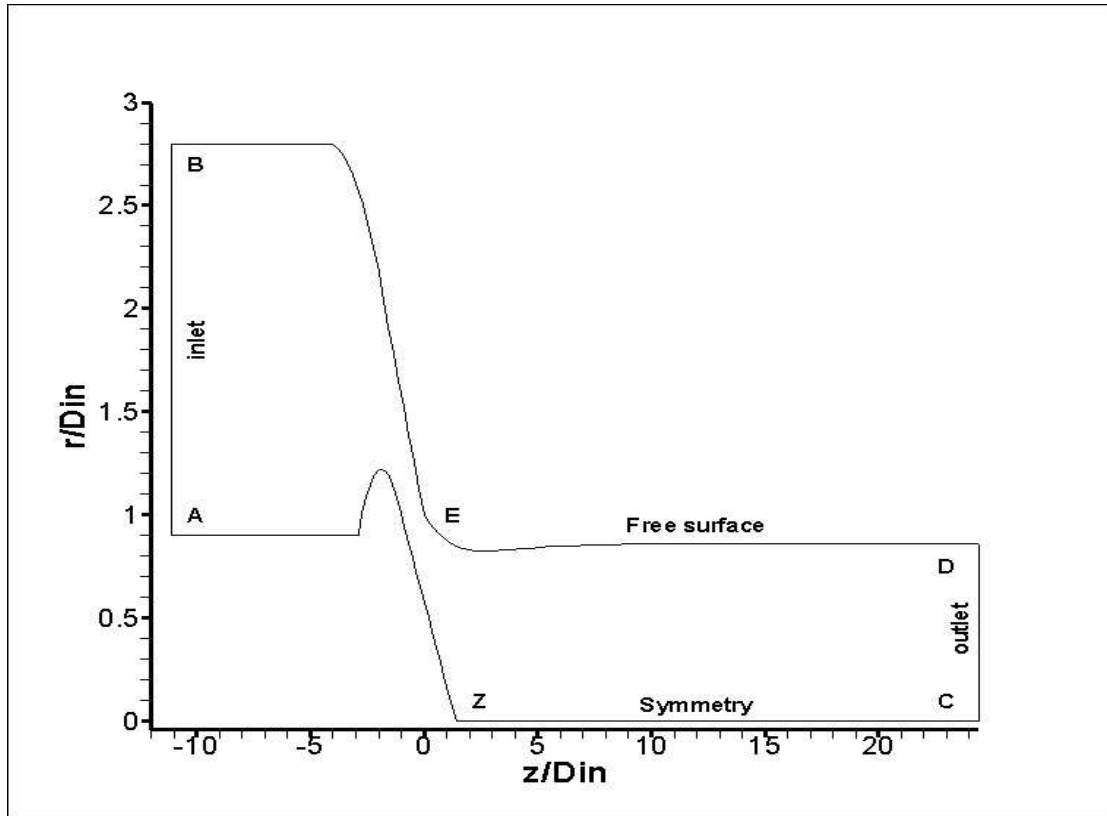
- Στην έξοδο (ΓΔ) η κατανομή της πίεσης θεωρείται γνωστή και σταθερή κατά μήκος της διατομής : $p/(0.5 \cdot \rho \cdot U_{ref}) = 1$. Για όλες τις υπόλοιπες κύριες μεταβλητές χρησιμοποιούμε προεκβολή, μηδενίζοντας την δεύτερη παράγωγο : $\partial^2 a / \partial r^2 = 0$ με $a = u_z, u_r, k, \varepsilon$.
- Για το κάτω όριο προκύπτουν δύο ειδών οριακές συνθήκες αφού έχουμε μέχρι ένα σημείο στερεό τοίχωμα και από εκεί και μέχρι το τέλος έχουμε ελεύθερο όριο (συμμετρία). Στο κομμάτι του τοιχώματος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης (non – slip condition) οπότε για τις συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε $u_z / U_{ref} = u_r / U_{ref} = 0$. Για την πίεση ισχύει ότι η κάθετη παράγωγος πάνω στο τοίχωμα είναι ίση με μηδέν, $\partial p / \partial r = 0$, ενώ τα μεγέθη k και ε προσδιορίζονται από την εφαρμογή των συναρτήσεων τοιχώματος. Στο κομμάτι όπου έχουμε άξονα συμμετρίας την αξονική διεύθυνση, η ακτινική ταχύτητα μηδενίζεται, $u_r = 0$, ενώ για τις υπόλοιπες κύριες μεταβλητές μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος : $\partial a / \partial r = 0$ με $a = u_z, p, k, \varepsilon$.
- Για το άνω όριο έχουμε πάλι την εμφάνιση δύο διαφορετικών καταστάσεων ροής αφού έχουμε ως ένα σημείο στερεό τοίχωμα και από εκεί μέχρι το τέλος του πεδίου έχουμε ελεύθερο όριο (ελεύθερη επιφάνεια). Στην περίπτωση του τοιχώματος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης οπότε για τις συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε $u_z / U_{ref} = u_r / U_{ref} = 0$. Για την πίεση ισχύει ότι και για το κάτω όριο, $\partial p / \partial r = 0$, ενώ και τα μεγέθη k και ε προσδιορίζονται από την εφαρμογή των συναρτήσεων τοιχώματος. Για την περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας θεωρούμε ότι κατά μήκος της διατομής θεωρείται γνωστή και σταθερή, $p/(0.5 \cdot \rho \cdot U_{ref}) = 1$ ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας θεωρούνται άγνωστες και γι αυτό επιβάλλεται συνθήκες όπως στην περίπτωση της συμμετρίας, $\partial a / \partial r = 0$ με $a = u_z, u_r$. Από την άλλη, τα μεγέθη k και ε θα πρέπει να ικανοποιούν το κριτήριο του μηδενισμού, γι αυτό θα ισχύει $k = \varepsilon = 0$.

Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας των οριακών συνθηκών που εφαρμόζονται στις διατομές του υπολογιστικού χωρίου του προβλήματος.

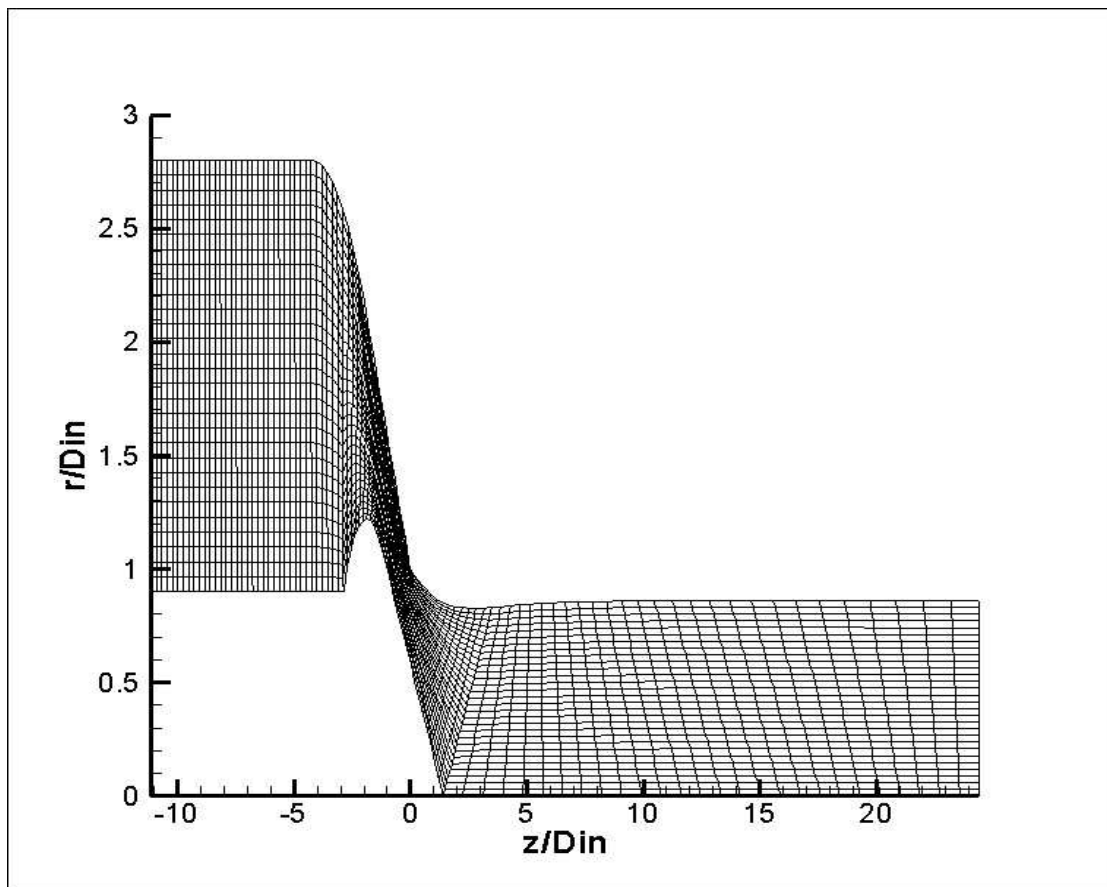
Πίνακας 5.2.1 Οριακές συνθήκες

Είσοδος (ΑΒ)	<p>Δεδομένη ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας και γνωστές τιμές για τα $k - \varepsilon$:</p> $u_r = 0, u_z = 0, \partial^2 p / \partial z^2 = 0$ $k = 0.03 \cdot u_{z,inlet}^2, \varepsilon = \frac{C_\mu \cdot k^{1.5}}{0.005 \cdot D_{inlet}}$
Έξοδος (ΓΔ)	<p>Δεδομένη κατανομή πίεσης :</p> $p = \sigma\alpha\theta. = 1$ $\partial^2 a / \partial r^2 = 0, a = u_z, u_r, k, \varepsilon$
Κάτω όριο (ΑΖ)+(ΖΔ)	<p>(ΑΖ) : στερεό τοίχωμα $u_z = u_r = 0, \partial p / \partial r = 0$ k και ε : προσδιορίζονται από την εφαρμογή των συναρτήσεων τοιχώματος, (ΖΔ) : άξονας συμμετρίας z $u_r = 0, \partial a / \partial r = 0$ με $a = u_z, p, k, \varepsilon$</p>
Άνω όριο (ΒΕ)+(ΕΓ)	<p>(ΒΕ) : στερεό τοίχωμα $u_z = u_r = 0, \partial p / \partial r = 0$ k και ε : προσδιορίζονται από την εφαρμογή των συναρτήσεων τοιχώματος, (ΕΓ) : ελεύθερη επιφάνεια Δεδομένη κατανομή πίεσης : $p = \sigma\alpha\theta. = 1$ $\partial a / \partial r = 0$ με $a = u_z, u_r$ $k = \varepsilon = 0$</p>

Στη συνέχεια δίνεται το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την μοντελοποίηση του καναλιού του ακροφυσίου κατά Bonet και την διακριτοποίηση των εξισώσεων στις δυο γενικευμένες κατευθύνσεις ξ και ζ . Το μέγεθος του πλέγματος είναι (90x30) και έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να είναι περισσότερο πυκνό κοντά στο άνω και το κάτω όριο του, τα οποία αντιπροσωπεύουν στερεά τοιχώματα, άξονα συμμετρίας και ελεύθερη επιφάνεια και επειδή εκεί εμφανίζονται οι πιο έντονες μεταβολές της ροής, είναι απαραίτητο να υπάρχει μεγαλύτερη διακριτοποίηση του χώρου ώστε να προκύπτουν όσο το δυνατόν ακριβέστερα αποτελέσματα.

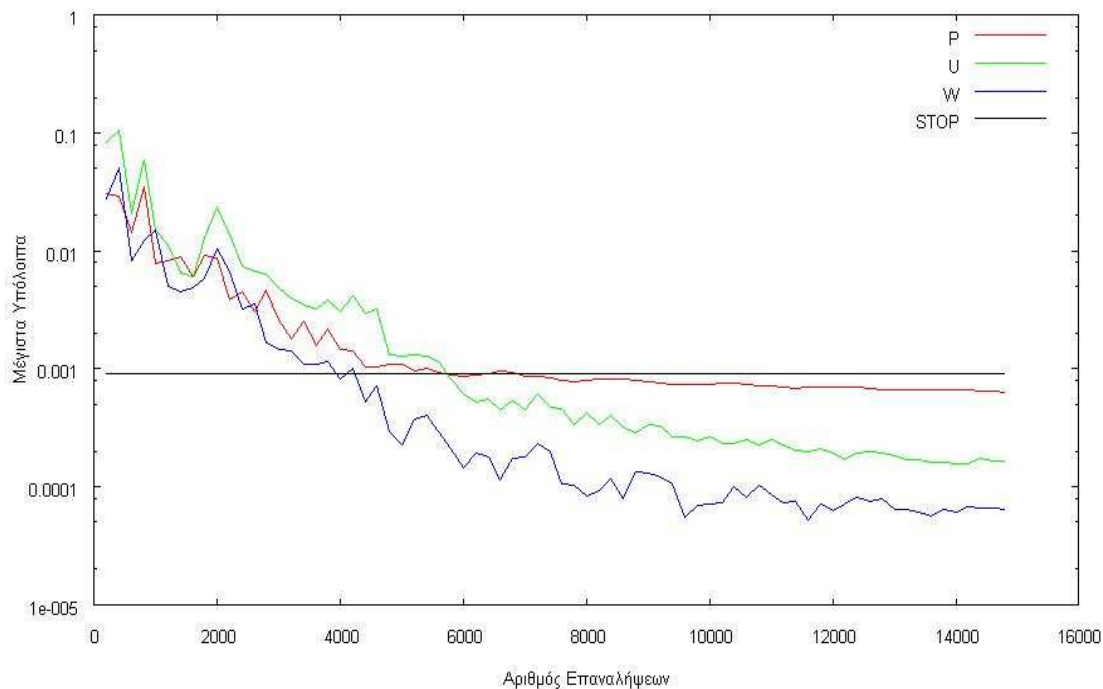


Εικόνα 5.4 Γεωμετρία του ακροφυσίου



Εικόνα 5.5 Υπολογιστικό πλέγμα (90x30)

Το κριτήριο σύγκλισης που χρησιμοποιήθηκε για το μέγιστο υπόλοιπο ήταν το $9 \cdot 10^{-4}$, ο αριθμός CFL ήταν 0,2 και η τιμή του συντελεστή ψευδοσυμπίεστης β ήταν 1,3. Οι τιμές αυτές προέκυψαν μετά από δοκιμές ούτως ώστε να εξυπηρετούν τις απαιτήσεις για ταχύτερη και επιτυχή σύγκλιση του αλγορίθμου. Στο παρακάτω σχήμα (5.6) απεικονίζονται τα μέγιστα υπόλοιπα των κύριων μεγεθών p , u_z και u_r συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων και η πορεία των τιμών τους έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης ($9 \cdot 10^{-4}$, οριζόντια ευθεία γραμμή) και για τις τρεις μεταβλητές.

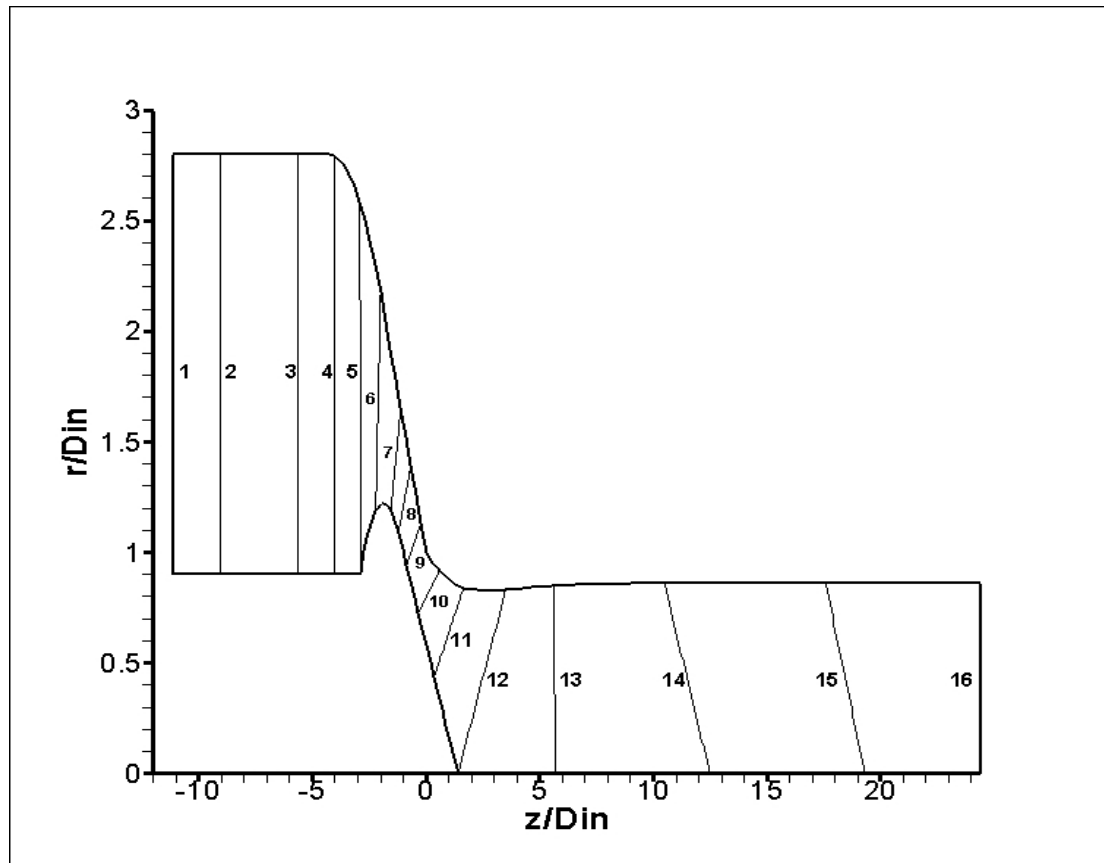


Εικόνα 5.6 Ιστορία σύγκλισης της ροής (για $Re = 3 \cdot 10^6$)

Στα επόμενα διαγράμματα δίνονται οι κατανομές της ταχύτητας όπως προκύπτουν από την επίλυση του πεδίου ροής για το συγκεκριμένο ακροφύσιο. Οι διατομές στις οποίες αντιστοιχούν οι κατανομές που απεικονίζονται στα διαγράμματα, έχουν επιλεγθεί με τρόπο τέτοιο ώστε να δοθεί η συνολική εικόνα για το πεδίο λύσεων στις περιοχές που ενδιαφέρουν περισσότερο, δίνονται αριθμημένες στο σχήμα 5.7.

Στα δύο πρώτα διαγράμματα (σχήμα 5.8.1 και 5.8.2) είναι σχεδιασμένες οι κατανομές της αξονικής συνιστώσας u_z της ταχύτητας, τα δύο επόμενα (σχήμα 5.9.1 και 5.9.2) αφορούν την ακτινική συνιστώσα u_r και στα δύο τελευταία (σχήμα 5.10.1 και 5.10.2) αναπαριστώνται οι κατανομές της συνισταμένης ταχύτητας $U = \sqrt{u_z^2 + u_r^2}$.

Όλες οι τιμές της ταχύτητας που είναι σχεδιασμένες στα επόμενα διαγράμματα είναι αδιαστατοποιημένες με την μέση ταχύτητα εισόδου U_{in} του ρευστού και δίνονται συναρτήσει του μοναδιαίου αδιάστατου ύψους $r' = (r - r_i)/(r_o - r_i)$ της κάθε διατομής, όπου r_i είναι η εσωτερική ακτίνα (προς τον άξονα συμμετρίας) και r_o είναι η εξωτερική.



Εικόνα 5.7 Υπο εξέταση διατομές

Όσον αναφορά την δημιουργία του πλέγματος, πρέπει να διευκρινιστεί η χρησιμότητα του βοηθητικού αρχείου *inozzle.dat*. Το αρχείο αυτό χρησιμοποιείται για την εισαγωγή της γεωμετρίας του κελύφους και της βελόνης του ακροφυσίου Pelton. Συγκεκριμένα, καθορίζονται η γωνία της βελόνης και του κοίλου (εικόνα 5.3), οι αντίστοιχες γωνίες καμπυλότητας, η μέγιστη ακτίνα της βελόνης καθώς και οι ακτίνες του εξωτερικού κυλίνδρου (σώμα) και του βάκτρου. Παράλληλα, στο αρχείο αυτό επιλέγουμε το ποσοστό ανοίγματος του ακροφυσίου που στην περίπτωση που εξετάζουμε παρακάτω είναι 100%.

Για την επιβεβαίωση της ορθότητας των αποτελεσμάτων στο τέλος του τρεξίματος του αλγορίθμου υπολογίζεται η παροχή στην είσοδο και την έξοδο του υπολογιστικού χωρίου ώστε να μπορούμε να επαληθεύσουμε την συνέχεια για το πεδίο της λύσης. Η ακτίνα της ανεπτυγμένης δέσμης

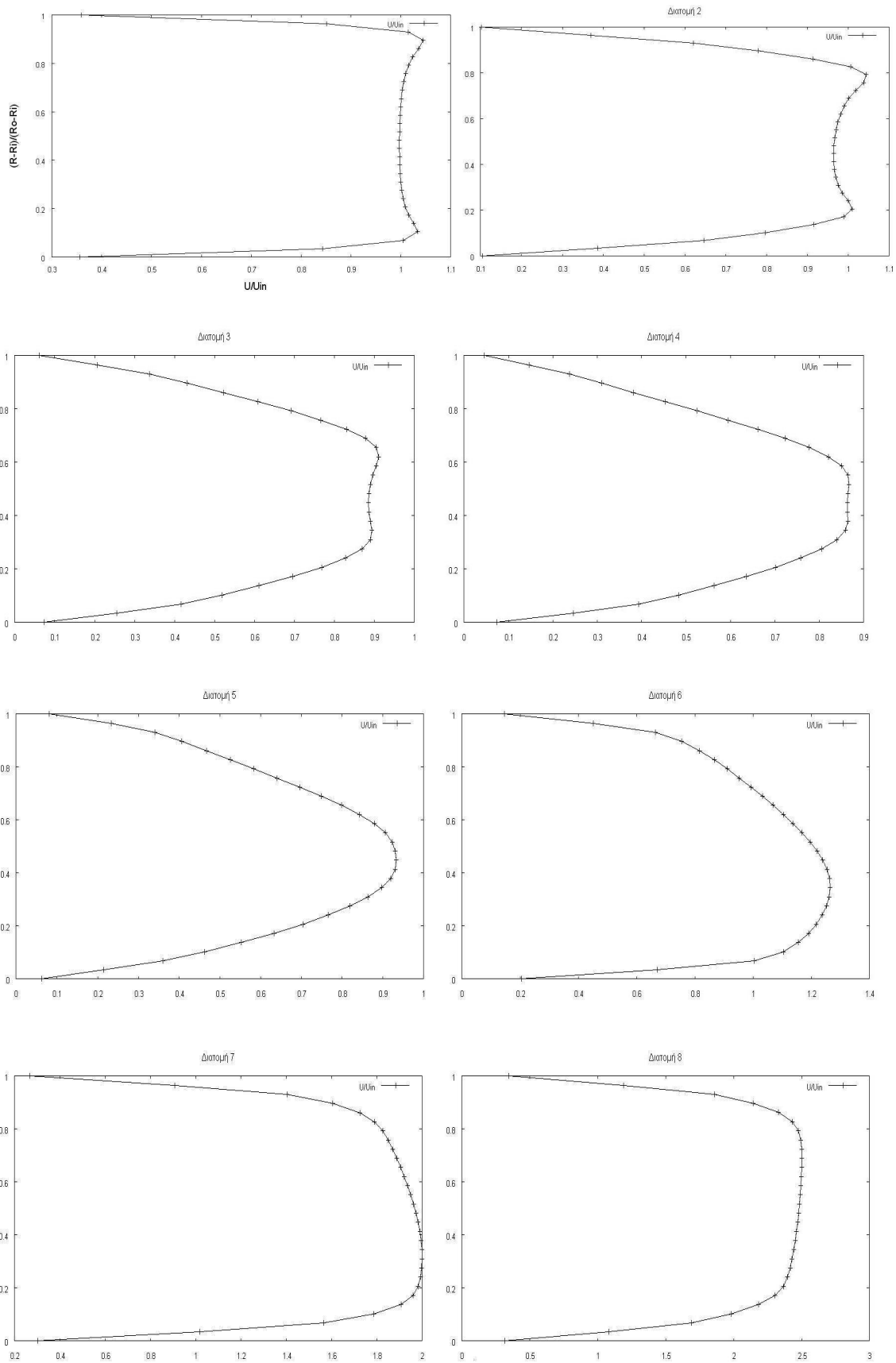
εξόδου του ρευστού εκτιμάται με βάση την παραπάνω διαδικασία και αναθεωρείται μετά από κάθε πλήρη υπολογισμό του πεδίου λύσεων βοηθώντας στην ταχύτερη σύγκλιση στην τελική λύση. Παράλληλα, ο αλγόριθμος δημιουργεί το βοηθητικό αρχείο *free_stream.dat* στο οποίο αποθηκεύονται οι τελικές τιμές της κάθετης στο πλέγμα συνιστάμενης ταχύτητας καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της γωνίας των υπολογιστικών κυψελών που χρησιμοποιούνται στην εύρεση της ελεύθερης επιφάνειας.

Δεδομένα ακροφυσίου Pelton κατά Bovet	
<i>AP</i> (μοίρες) – Γωνία βελόνης	45.0
<i>AE</i> (μοίρες) – Γωνία κοίλου	61.0
<i>RE</i> (-) – Ακτίνα καμπυλότητας κοίλου	4.50
<i>RP</i> (-) – Ακτίνα καμπυλότητας βελόνης	1.74
<i>R3</i> (-) – Μέγιστη ακτίνα βελόνης	1.22
<i>R4</i> (-) – Ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου	2.80
<i>R5</i> (-) – Ακτίνα βάκτρου	0.90
<i>XOP</i> (%) – Άνοιγμα βελόνης	1.00

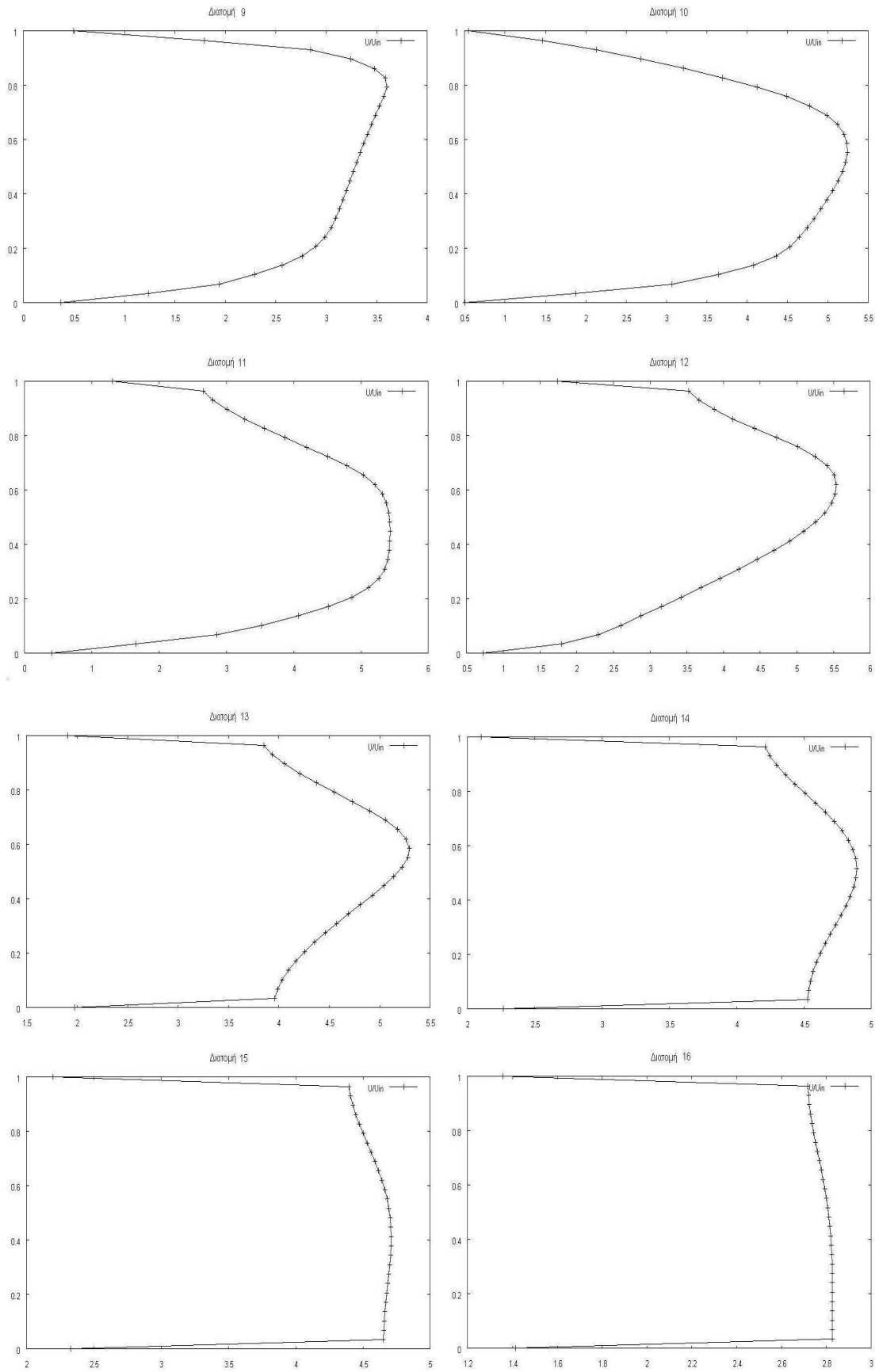
Όπως παρατηρούμε οι τιμές των ακτινών r είναι αδιάστατες και πιο συγκεκριμένα έχουν αδιαστατοποιηθεί με βάση την ακτίνα r_1 (εικόνα 5.3) που στην υπό εξέταση περίπτωση ισούται με την μονάδα. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το ακροφύσιο που επιλύουμε είναι τύπου I όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα.

Τύπος	R_4 [-]	R_3 [-]	R_5 [-]	R_p [-]	R_e [-]	A_p [°]	A_e [°]
I	2.80	1.22	0.90	1.74	4.50	45.0	61.0
II	2.25	1.30	0.90	1.80	3.20	50.0	75.0
III	3.00	1.40	0.90	2.40	5.60	55.0	80.0

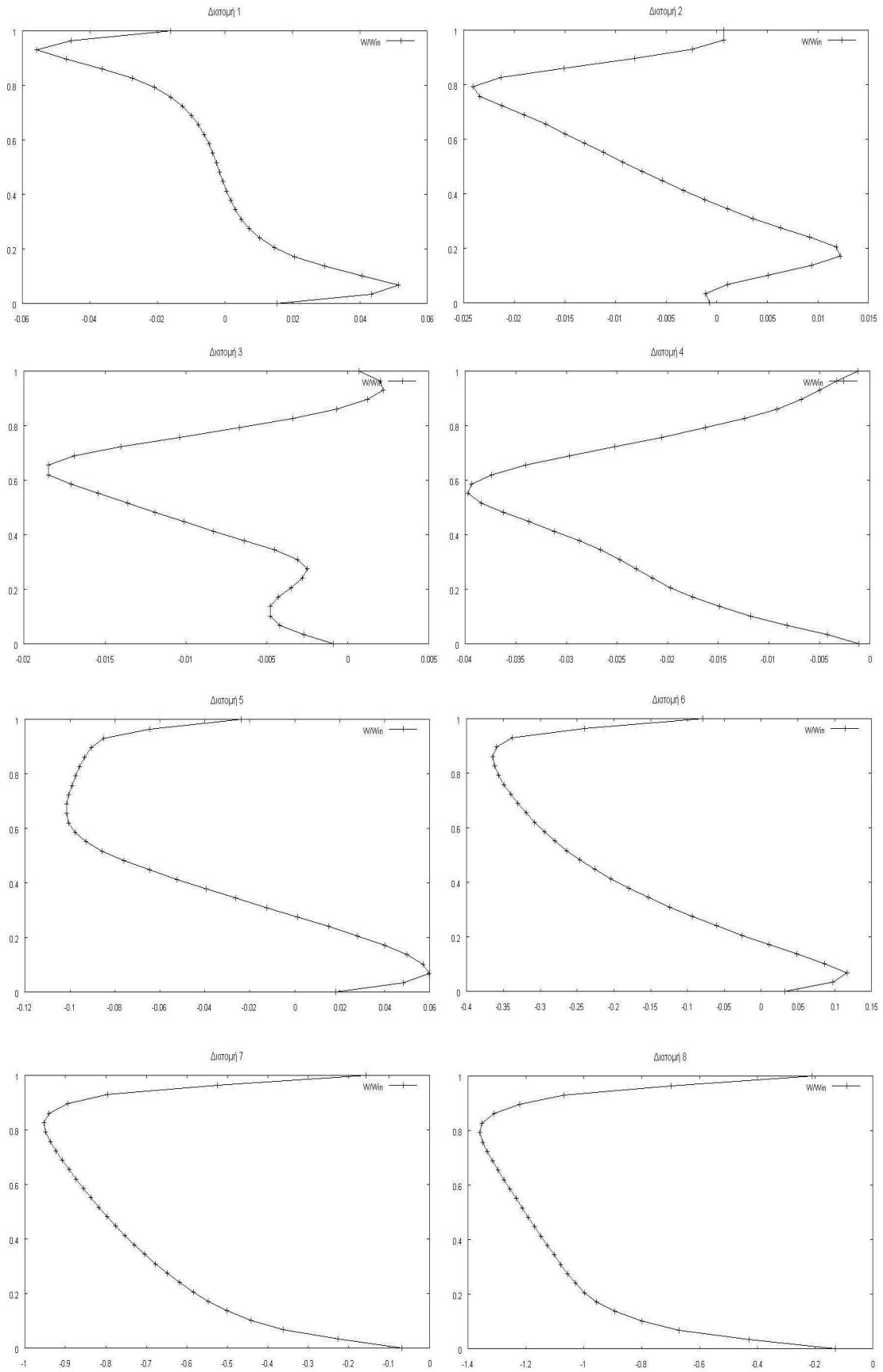
Στην συνέχεια ακολουθούν τα διαγράμματα των ταχυτήτων των επιλεχθέντων διατομών του υπολογιστικού πεδίου.



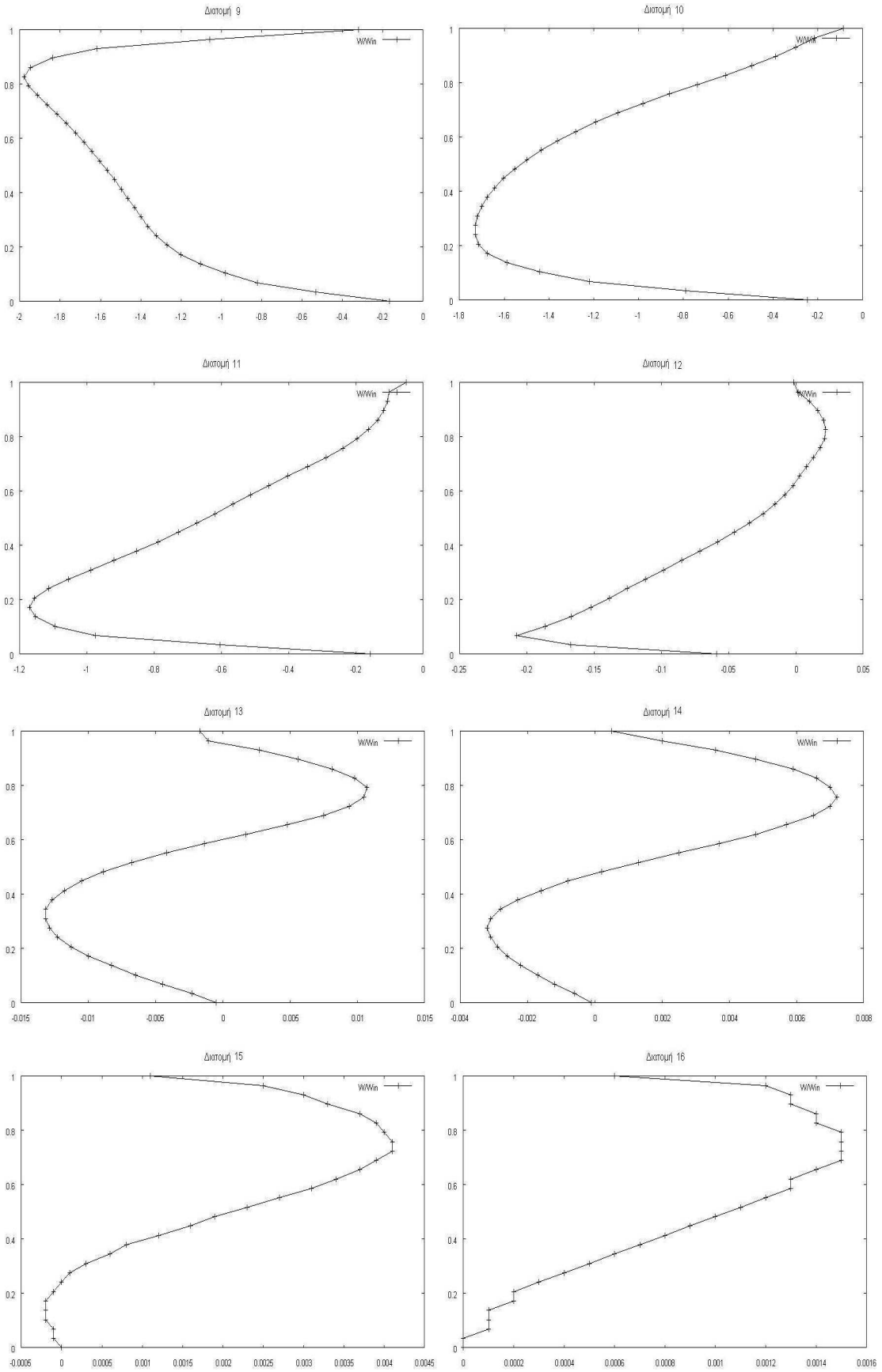
Σχήμα 5.8.1 Κατανομή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



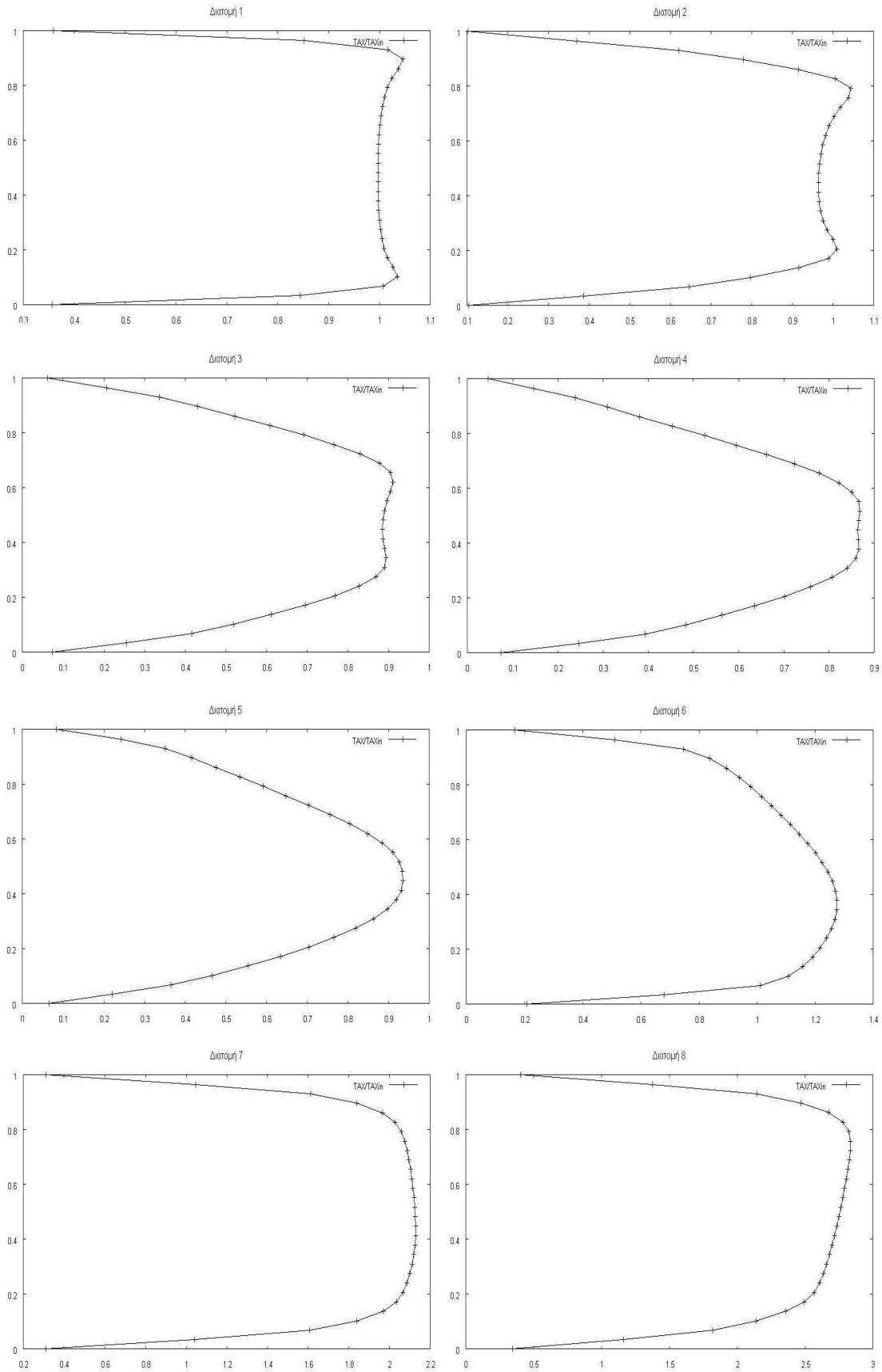
Σχήμα 5.8.2 Κατανομή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



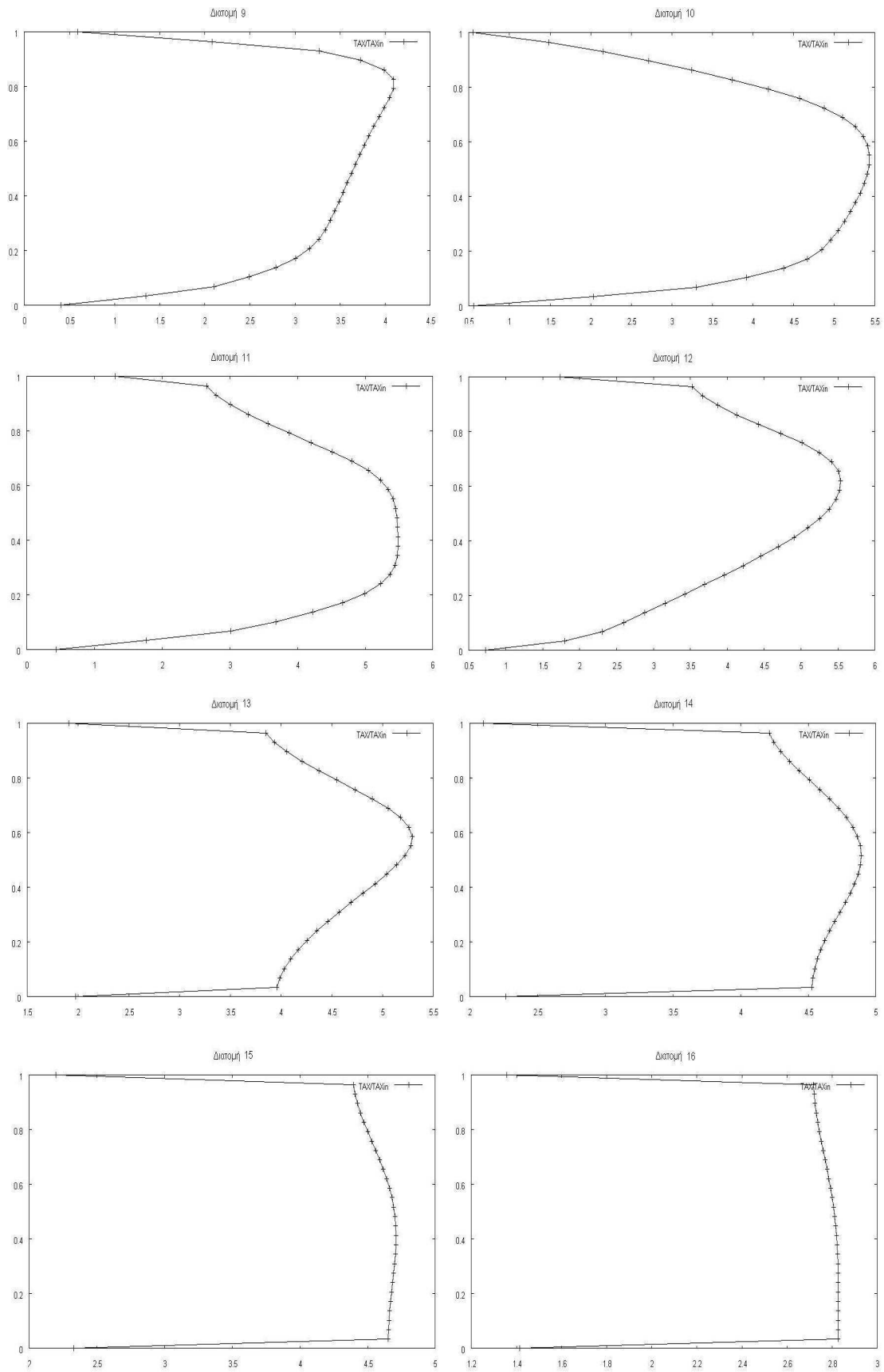
Σχήμα 5.9.1 Κατανομή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



Σχήμα 5.9.2 Κατανομή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

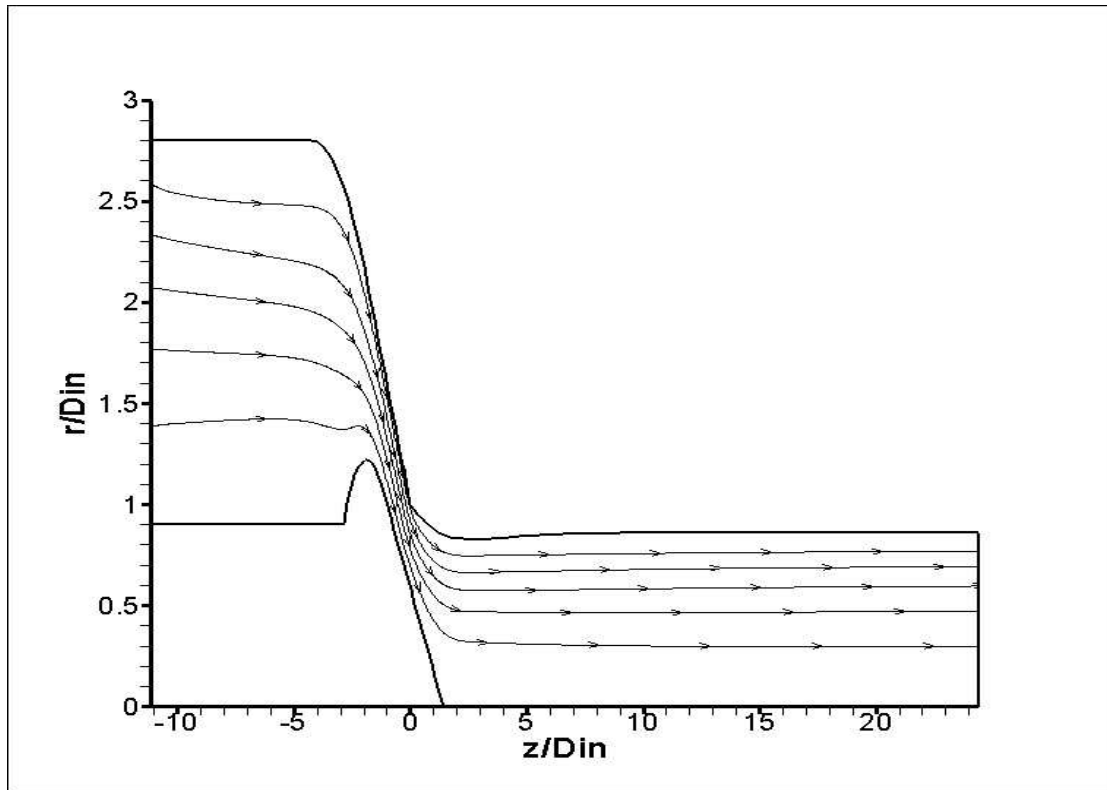


Σχήμα 5.10.1 Κατανομή της συνιστάμενης ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

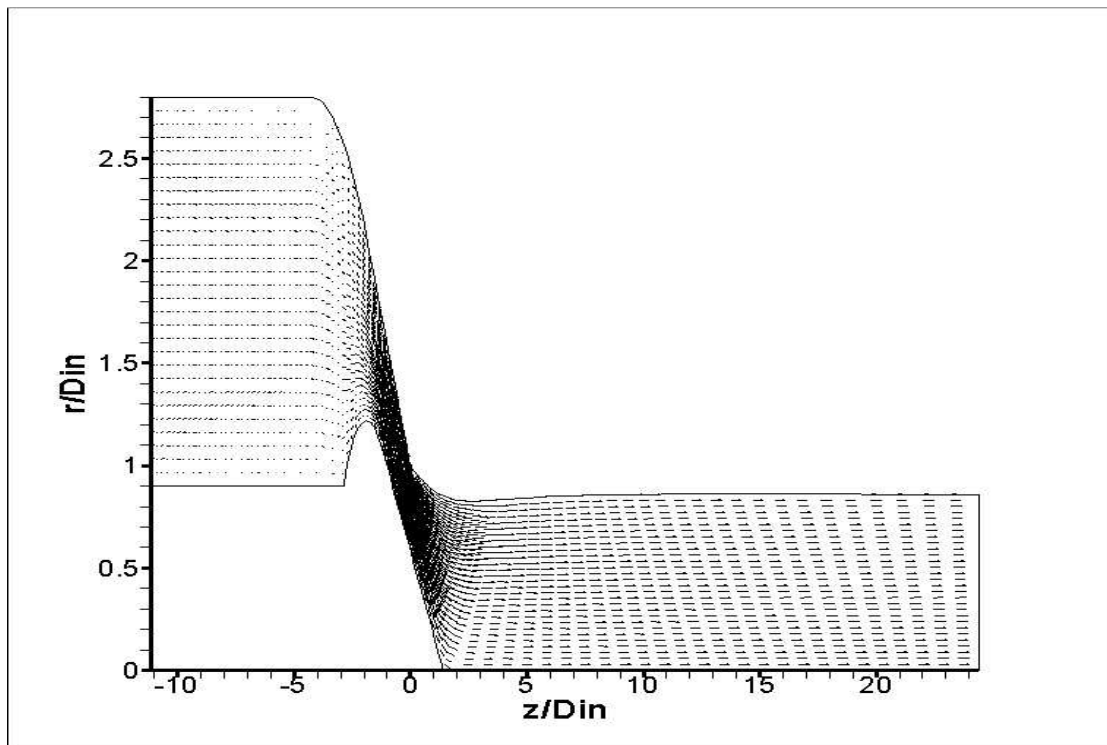


Σχήμα 5.10.2 Κατανομή της συνιστάμενης ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

Τέλος, στα παρακάτω σχήματα είναι σχεδιασμένες πέντε γραμμές ροής σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προγράμματος *STREAMLINES.FOR* καθώς και επίσης τα βέλη ροής (ταχύτητας).



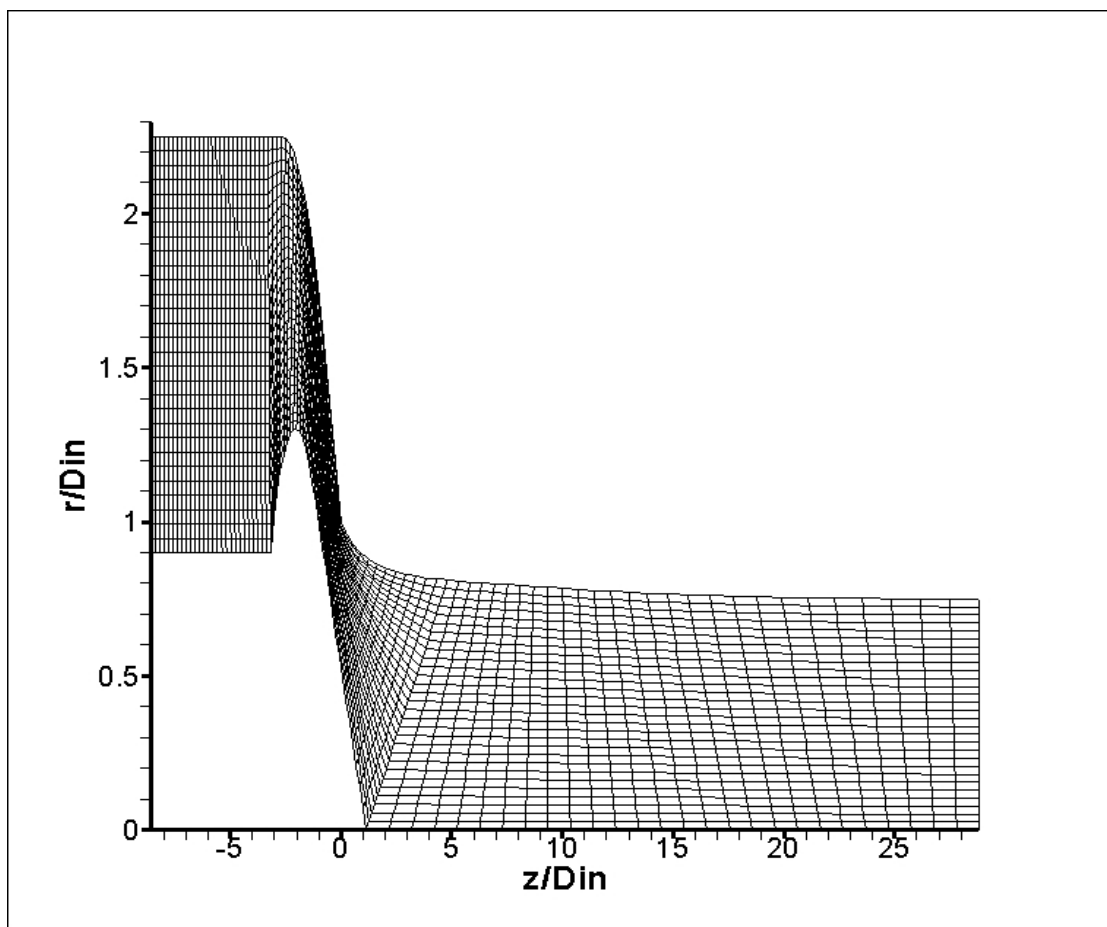
Εικόνα 5.11 Γραμμές ροής για $Re=3*10^6$



Εικόνα 5.12 Βέλη ταχυτήτων ροής για $Re=3*10^6$

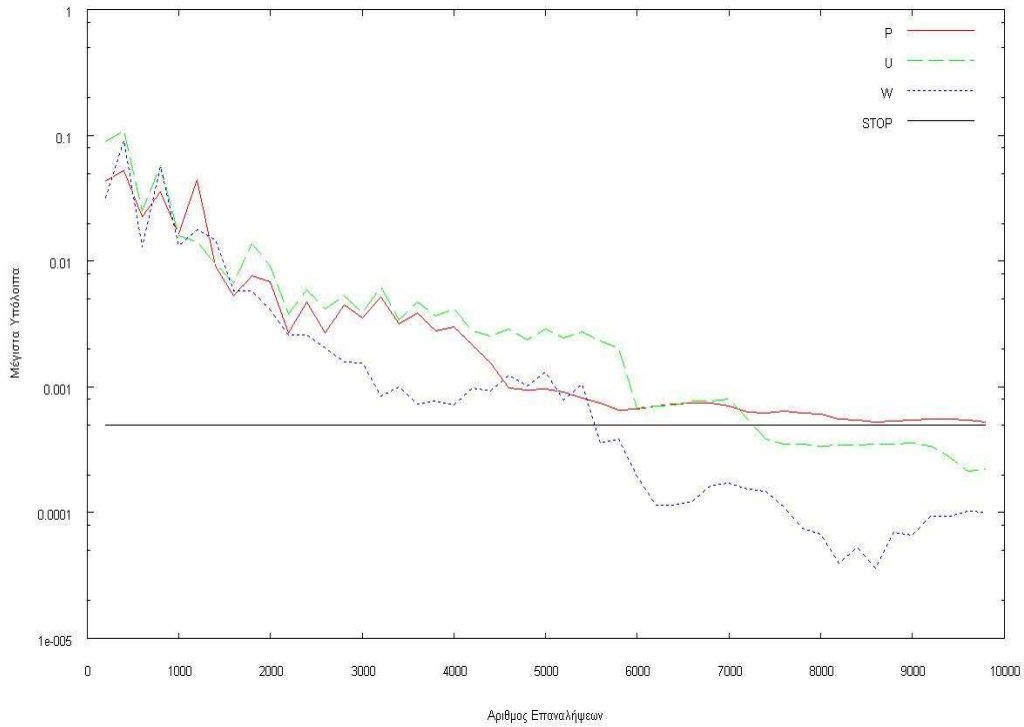
5.4 Τυρβώδης αξονοσυμμετρική ροή διαμέσου ακροφυσίου τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton (Pelton turbine Type II).

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με το ακροφύσιο τύπου II για το οποίο χρησιμοποιούμε πλέγμα (90x30) όπως φαίνεται παρακάτω ενώ το κριτήριο σύγκλισης που χρησιμοποιήθηκε για το μέγιστο υπόλοιπο ήταν το $5 \cdot 10^{-4}$, ο αριθμός CFL ήταν 0,2 και η τιμή του συντελεστή ψευδοσυμπίεστότητας β ήταν 1,3 με τις τιμές αυτές να προκύπτουν μετά από δοκιμές ούτως ώστε να εξυπηρετούν τις απαιτήσεις για ταχύτερη και επιτυχή σύγκλιση του αλγορίθμου. Το ποσοστό ανοίγματος και για αυτή την περίπτωση είναι 100%, δηλαδή το ακροφύσιο είναι πλήρως ανοικτό.



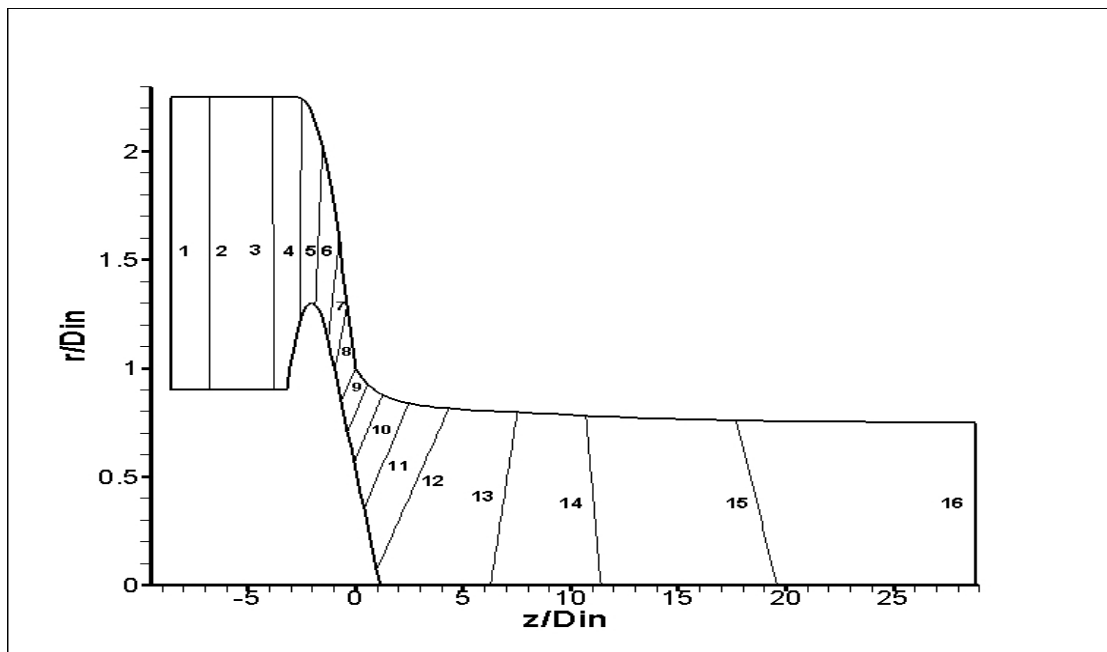
Εικόνα 5.13 Υπολογιστικό πλέγμα (90x30)

Στο παρακάτω σχήμα (5.14) απεικονίζονται τα μέγιστα υπόλοιπα των κύριων μεγεθών p , u_z και u_r συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων και η πορεία των τιμών τους έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης ($5 \cdot 10^{-4}$, οριζόντια ευθεία γραμμή) και για τις τρεις μεταβλητές. Το κριτήριο που ορίστηκε για τον προσδιορισμό της ελεύθερης επιφάνειας είναι 10^{-2} .



Εικόνα 5.14 Ιστορία της σύγκλισης της ροής (για $Re = 3 \cdot 10^6$)

Στα επόμενα διαγράμματα δίνονται οι κατανομές της ταχύτητας όπως προκύπτουν από την επίλυση του πεδίου ροής για το συγκεκριμένο ακροφύσιο. Οι διατομές στις οποίες αντιστοιχούν οι κατανομές που απεικονίζονται στα διαγράμματα, έχουν επιλεγθεί με τρόπο τέτοιο ώστε να δοθεί η συνολική εικόνα για το πεδίο λύσεων στις περιοχές που ενδιαφέρουν περισσότερο, δίνονται αριθμημένες στο σχήμα 5.15.



Εικόνα 5.15 Υπό εξέταση διατομές

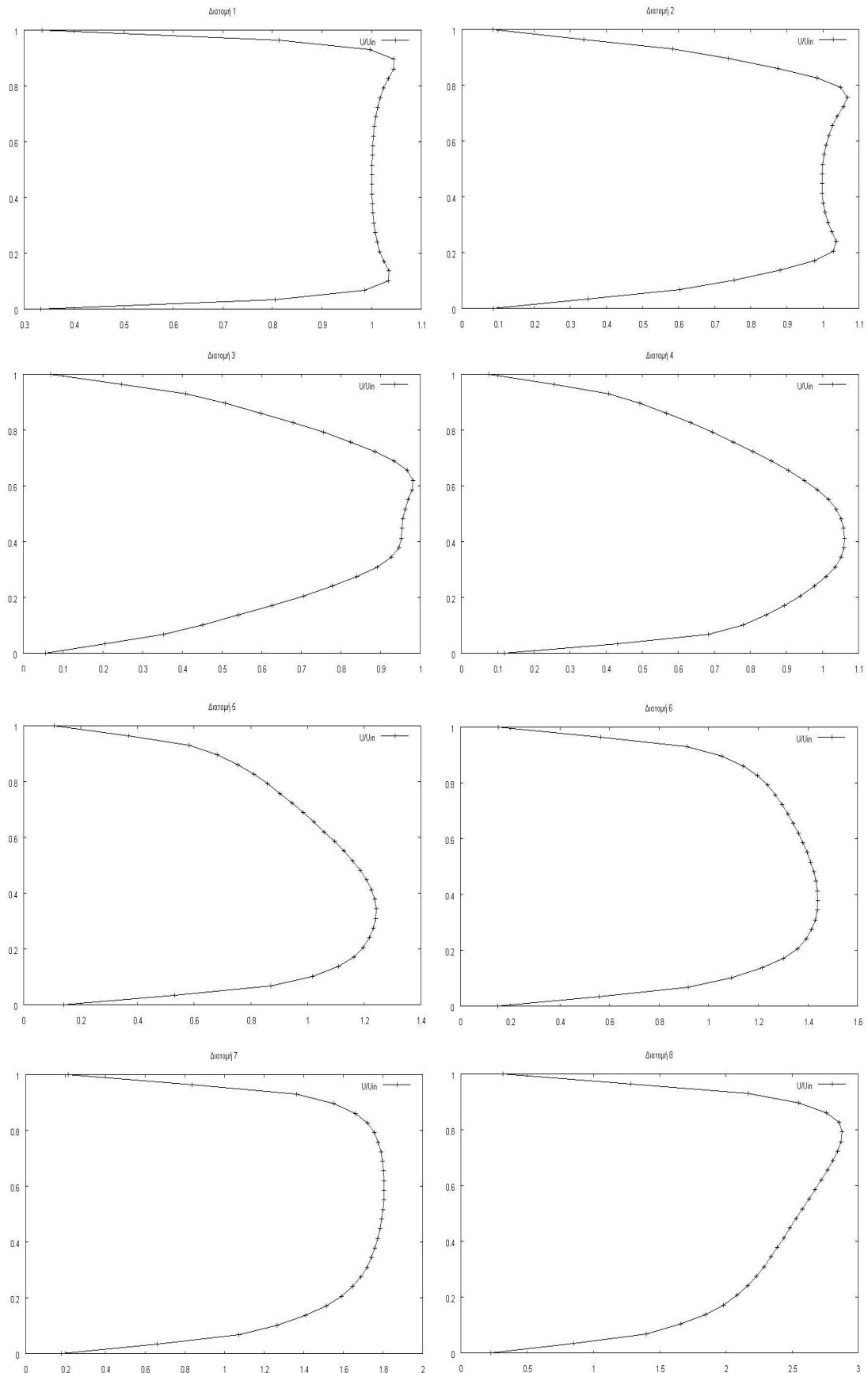
Στα δύο πρώτα διαγράμματα (σχήμα 5.16.1 και 5.16.2) είναι σχεδιασμένες οι κατανομές της αξονικής συνιστώσας u_z της ταχύτητας, τα δύο επόμενα (σχήμα 5.17.1 και 5.17.2) αφορούν την ακτινική συνιστώσα u_r και στα δύο τελευταία (σχήμα 5.18.1 και 5.18.2) αναπαριστώνται οι κατανομές της συνισταμένης ταχύτητας $U = \sqrt{u_z^2 + u_r^2}$.

Όλες οι τιμές της ταχύτητας που είναι σχεδιασμένες στα επόμενα διαγράμματα είναι αδιαστατοποιημένες με την μέση ταχύτητα εισόδου U_{in} του ρευστού και δίνονται συναρτήσει του μοναδιαίου αδιάστατου ύψους $r' = (r - r_i)/(r_o - r_i)$ της κάθε διατομής, όπου r_i είναι η εσωτερική ακτίνα (προς τον άξονα συμμετρίας) και r_o είναι η εξωτερική.

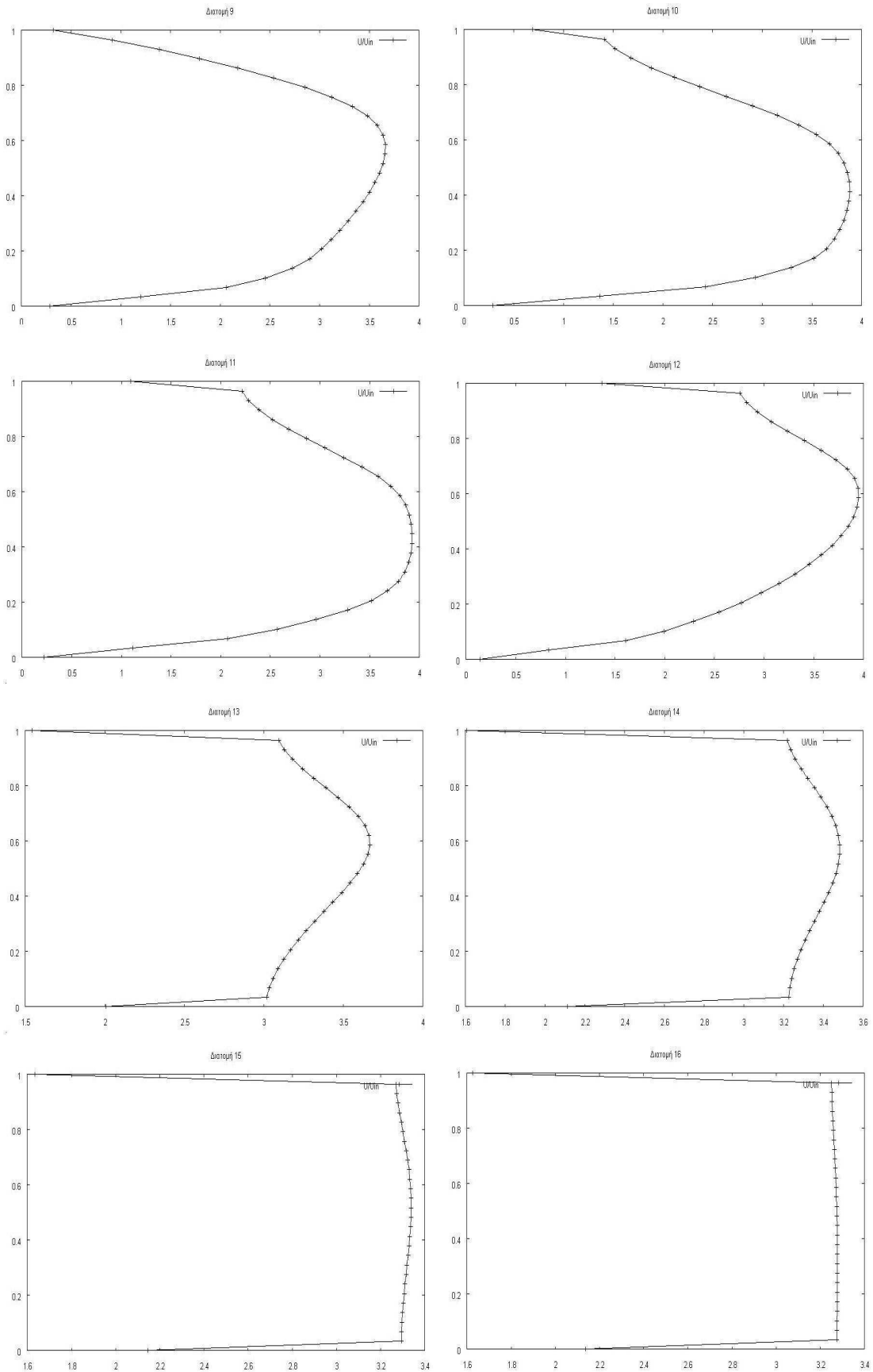
Δεδομένα ακροφυσίου Pelton κατά Bovet	
<i>AP(μοίρες) – Γωνία βελόνης</i>	50.0
<i>AE(μοίρες) – Γωνία κοίλου</i>	75.0
<i>RE(-) – Ακτίνα καμπυλότητας κοίλου</i>	3.20
<i>RP(-) – Ακτίνα καμπυλότητας βελόνης</i>	1.80
<i>R3(-) – Μέγιστη ακτίνα βελόνης</i>	1.30
<i>R4(-) – Ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου</i>	2.25
<i>R5(-) – Ακτίνα βάκτρου</i>	0.90
<i>XOP(%) – Άνοιγμα βελόνης</i>	1.00

Με βάση τον παραπάνω πίνακα τροποποιούμε κατάλληλα το αρχείο *inozzle.dat* ώστε να εισάγουμε την διαφορετική γεωμετρία του ακροφυσίου τύπου Π.

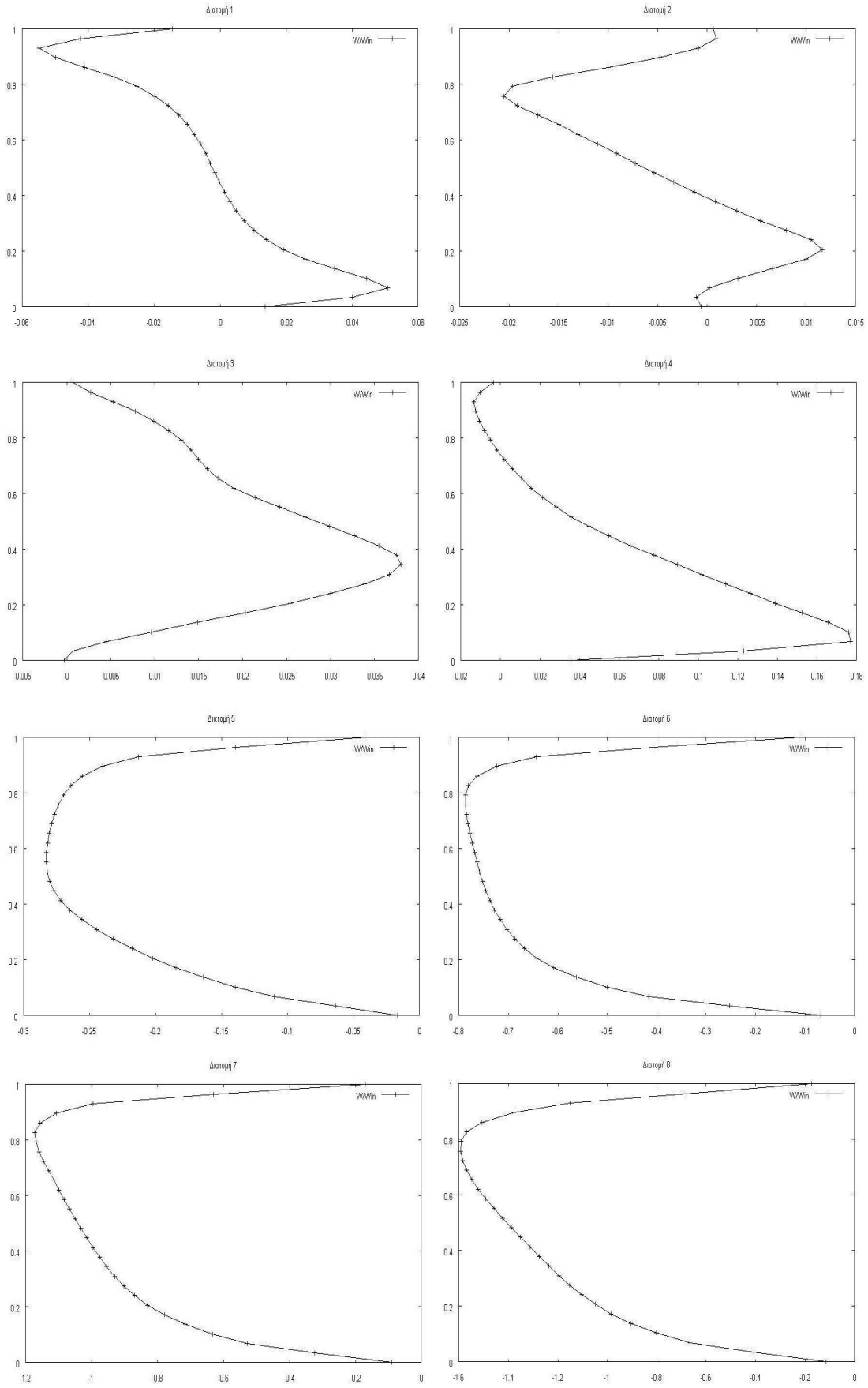
Στην συνέχεια ακολουθούν τα διαγράμματα των αδιαστατοποιημένων ταχυτήτων των επιλεγθέντων διατομών του υπολογιστικού πεδίου.



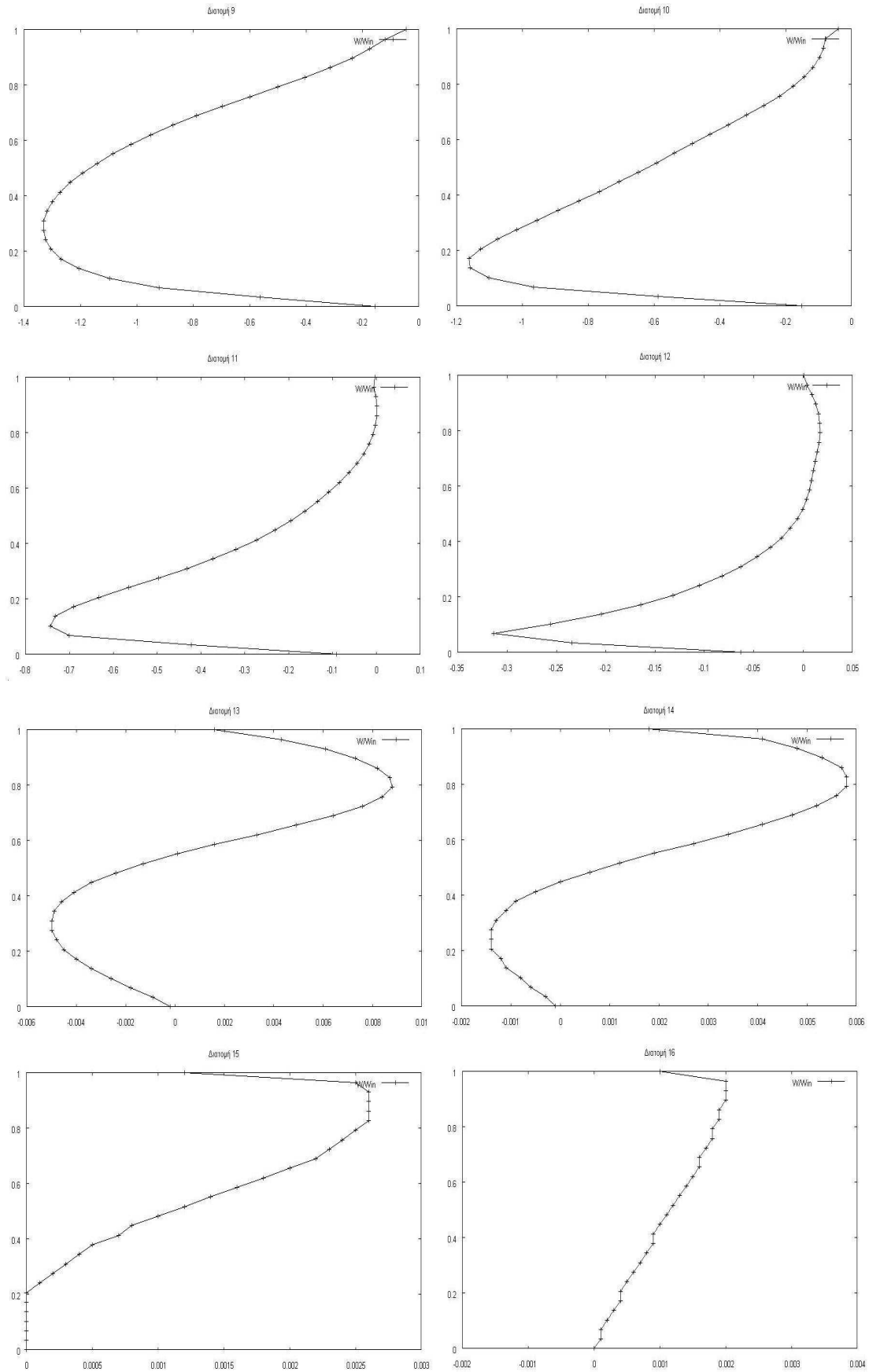
Σχήμα 5.16.1 Κατανομή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



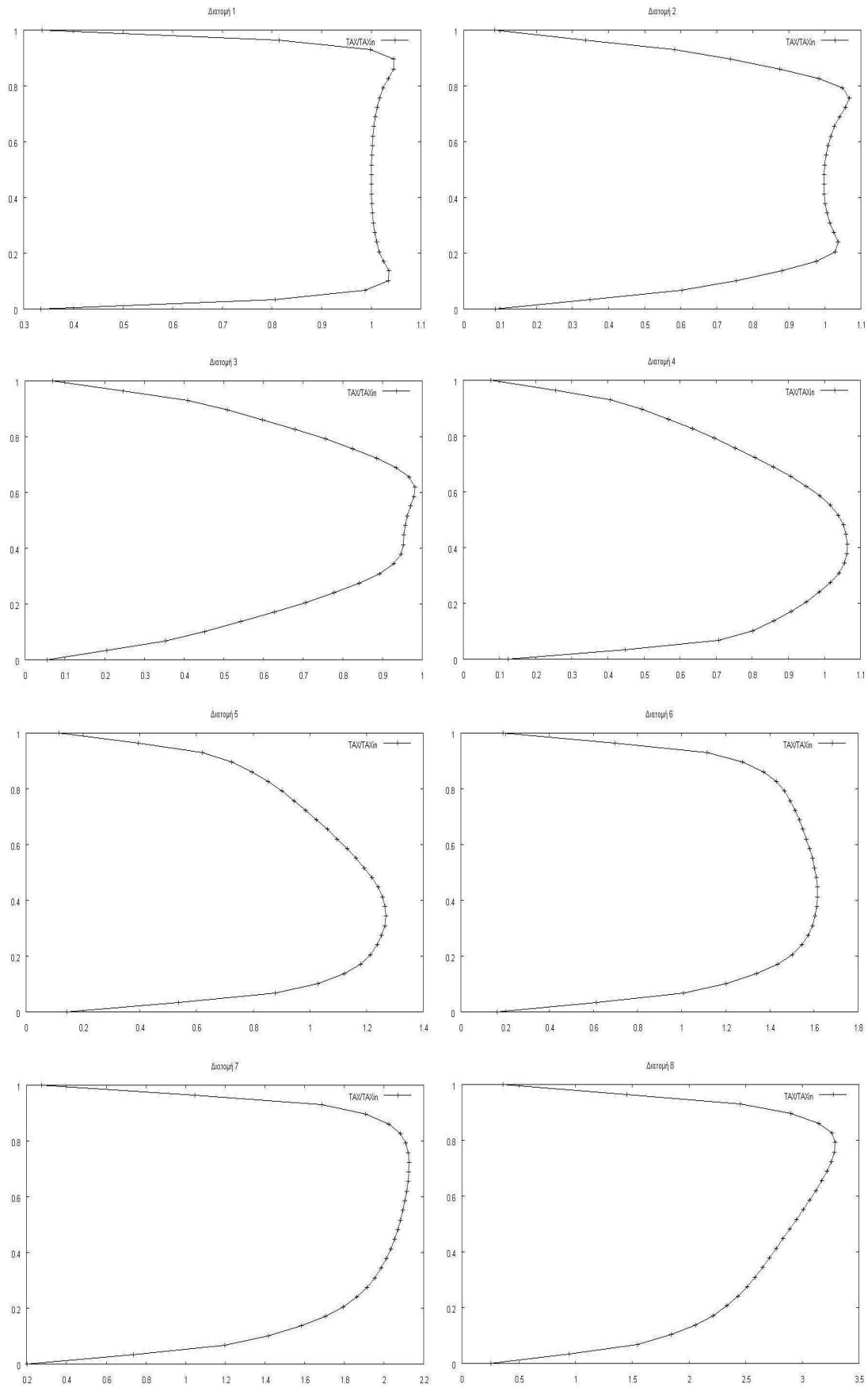
Σχήμα 5.16.2 Κατανομή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



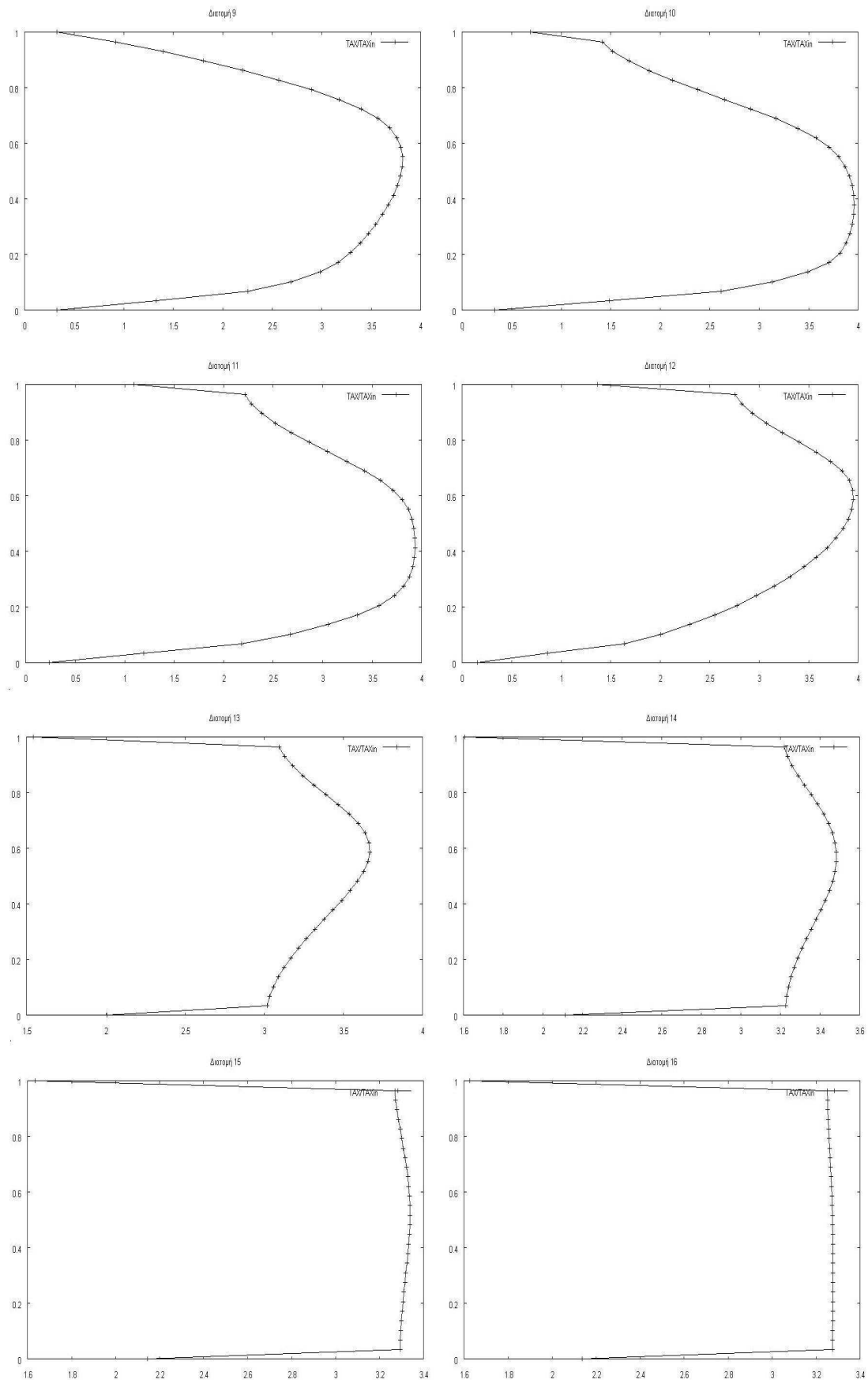
Σχήμα 5.17.1 Κατανομή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



Σχήμα 5.17.2 Κατανομή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

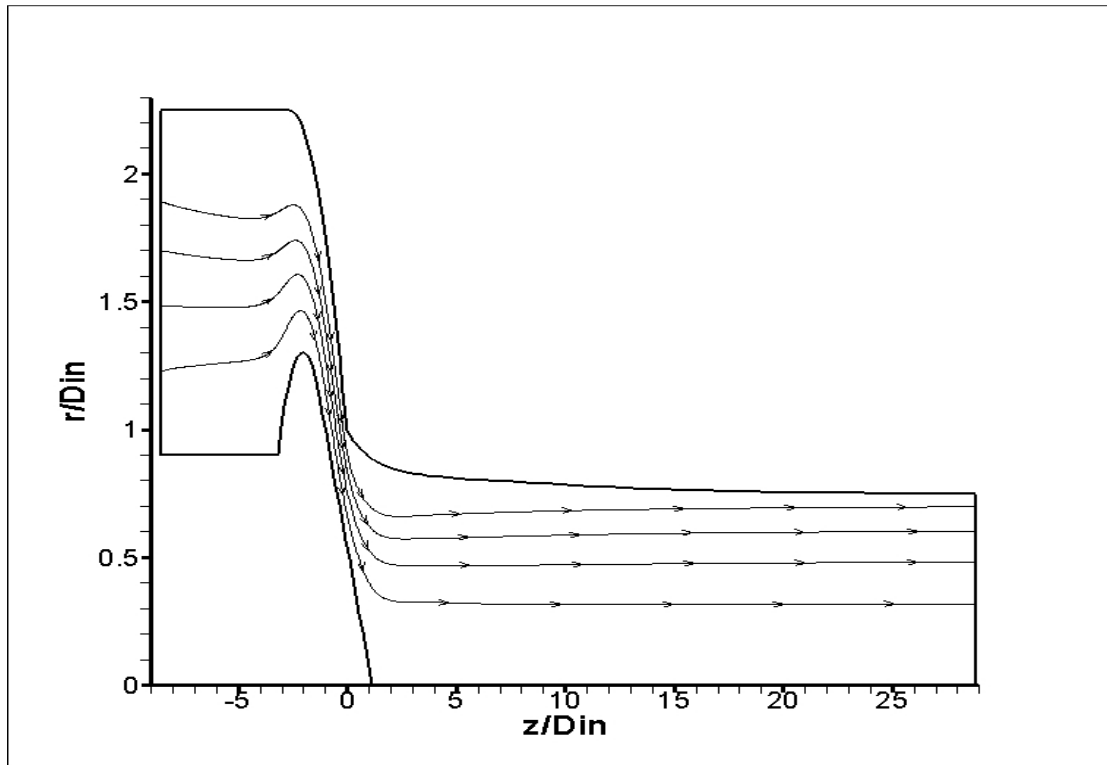


Σχήμα 5.18.1 Κατανομή της συνιστάμενης ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

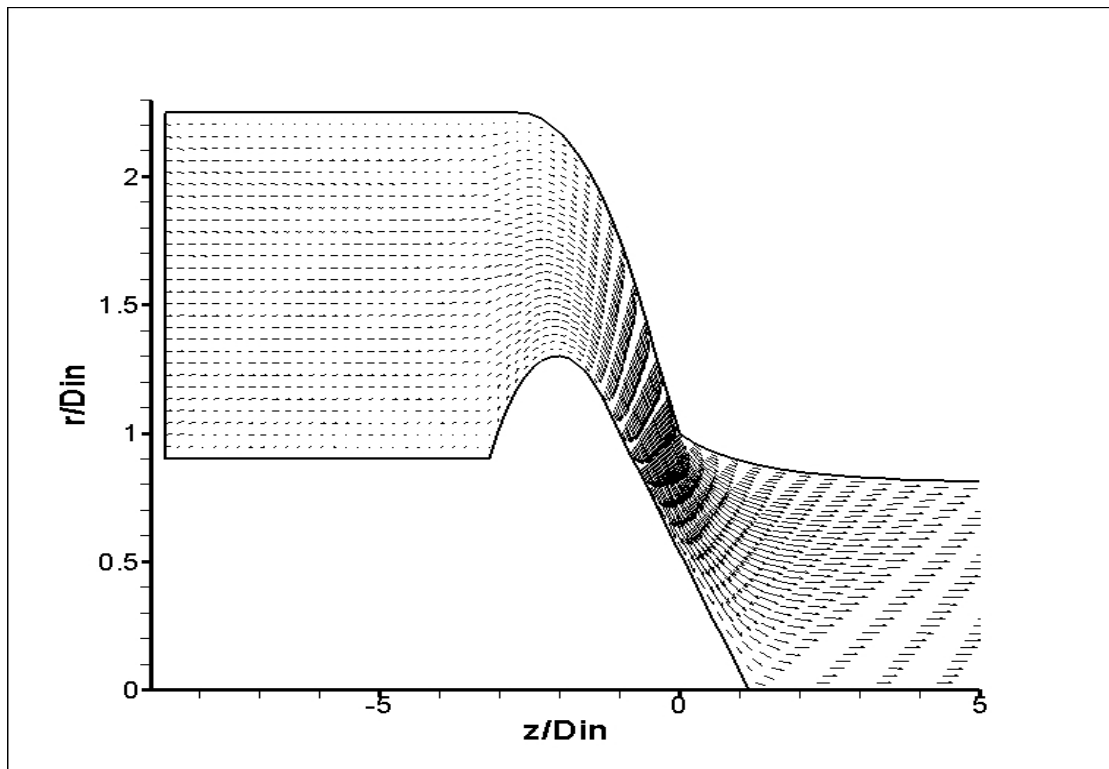


Σχήμα 5.18.2 Κατανομή της συνιστάμενης ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

Τέλος, στα παρακάτω σχήματα είναι σχεδιασμένες τέσσερις γραμμές ροής σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προγράμματος *STREAMLINES.FOR* καθώς και επίσης τα βέλη ροής (ταχύτητας).



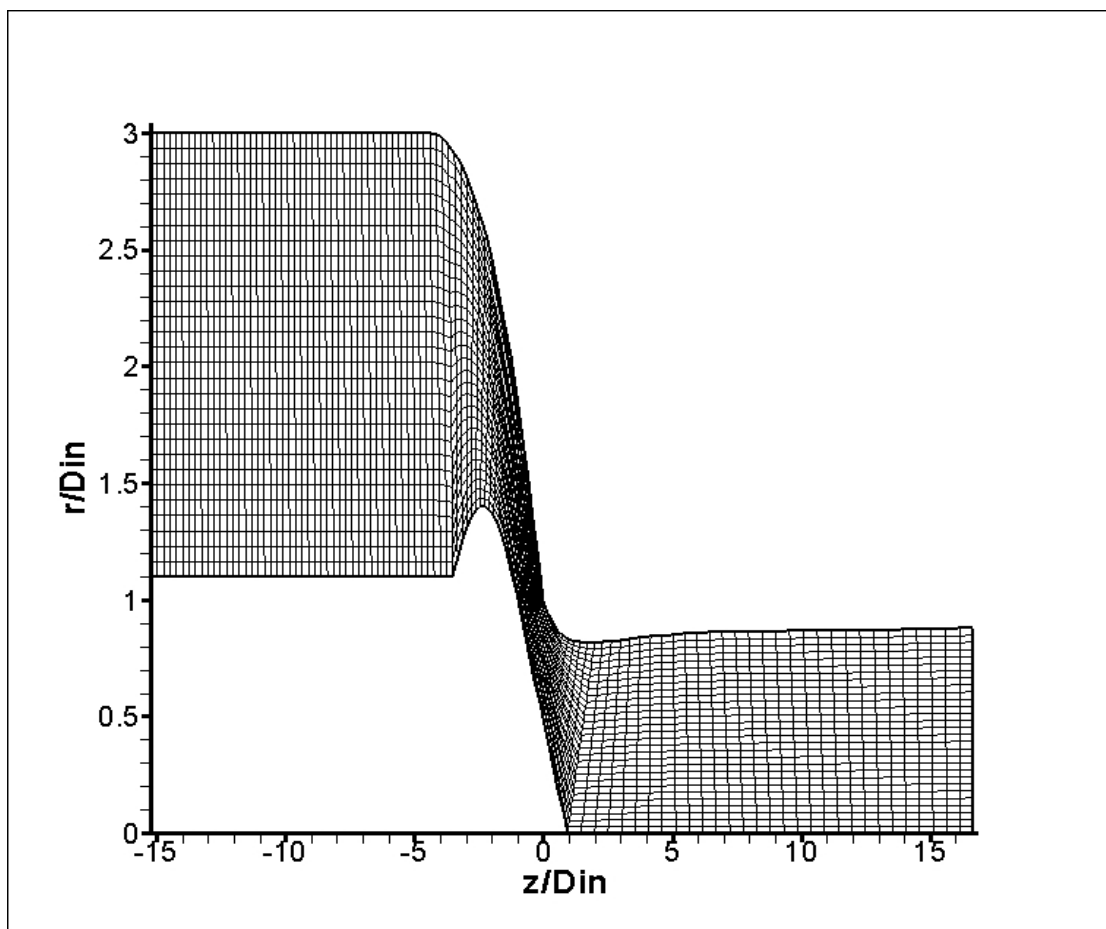
Εικόνα 5.19 Γραμμές ροής για $Re=3*10^6$



Εικόνα 5.20 Βέλη ταχυτήτων για $Re=3*10^6$

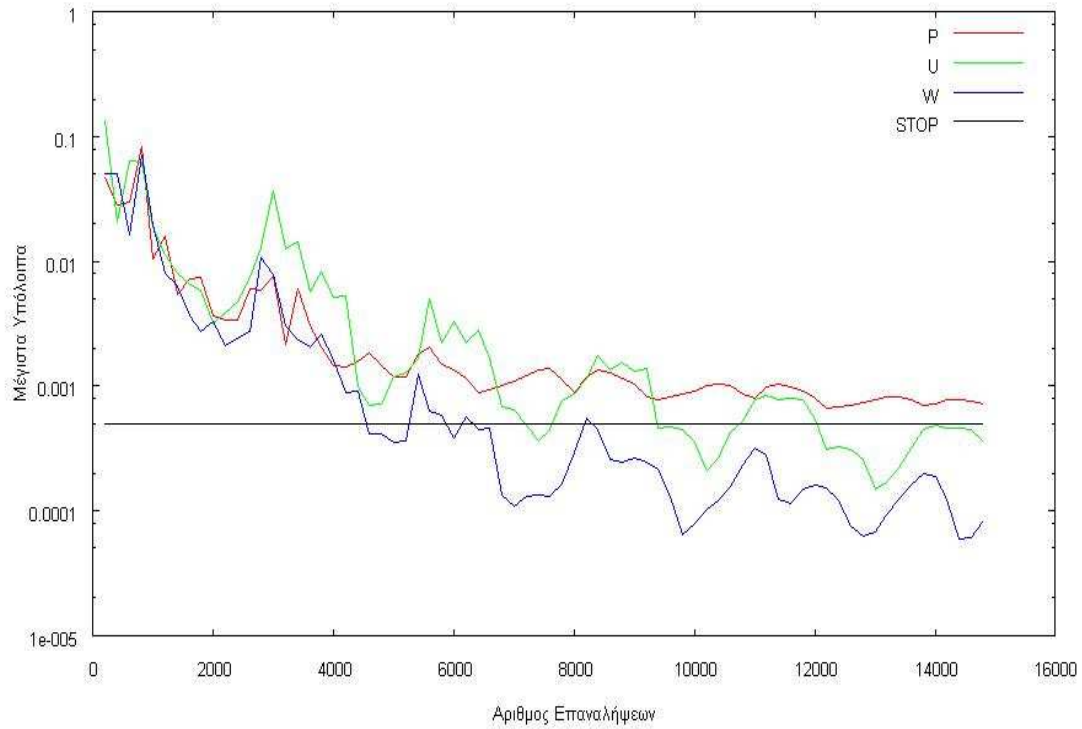
5.5 Τυρβώδης αξονοσυμμετρική ροή διαμέσου ακροφυσίου τροφοδοσίας υδροστροβίλου Pelton (Pelton turbine Type III).

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με το ακροφύσιο τύπου Π για το οποίο χρησιμοποιούμε πλέγμα (100x30) όπως φαίνεται παρακάτω ενώ το κριτήριο σύγκλισης που χρησιμοποιήθηκε για το μέγιστο υπόλοιπο ήταν το $5 \cdot 10^{-4}$, ο αριθμός CFL ήταν 0,2 και η τιμή του συντελεστή ψευδοσυμπίεστότητας β ήταν 1,3 με τις τιμές αυτές να προκύπτουν μετά από δοκιμές ούτως ώστε να εξυπηρετούν τις απαιτήσεις για ταχύτερη και επιτυχή σύγκλιση του αλγορίθμου. Το ποσοστό ανοίγματος και για αυτή την περίπτωση είναι 100%, δηλαδή το ακροφύσιο είναι πλήρως ανοικτό.



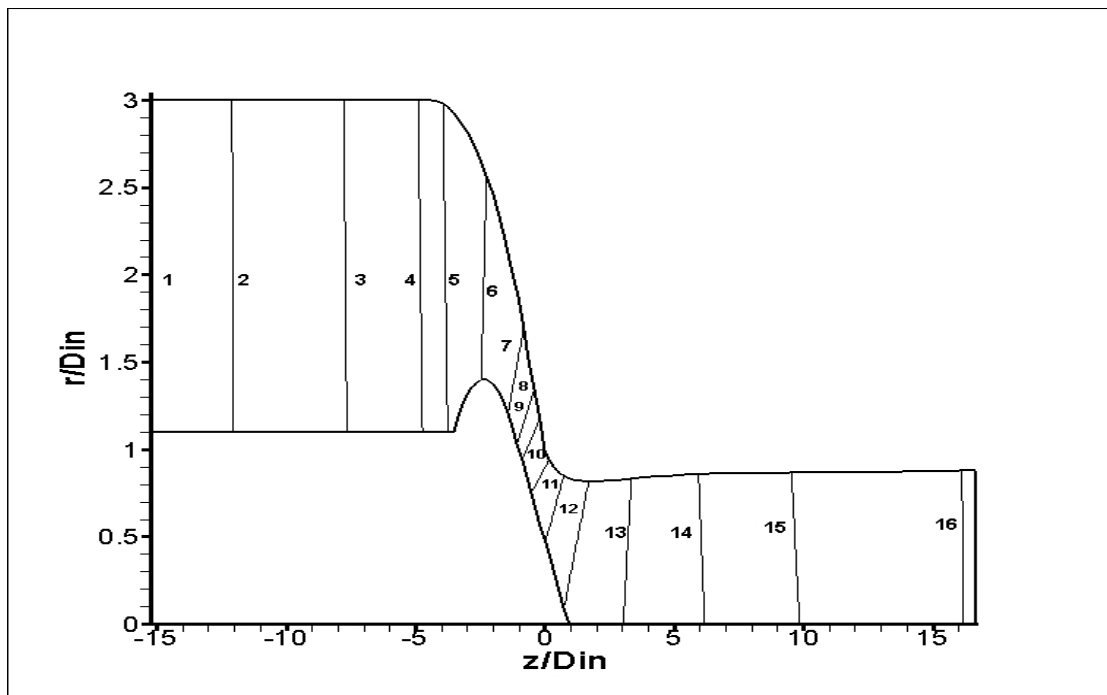
Εικόνα 5.21 Υπολογιστικό πλέγμα (100x30)

Στο παρακάτω σχήμα (5.22) απεικονίζονται τα μέγιστα υπόλοιπα των κύριων μεγεθών p , u_z και u_r συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων και η πορεία των τιμών τους έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης ($5 \cdot 10^{-4}$, οριζόντια ευθεία γραμμή) και για τις τρεις μεταβλητές. Το κριτήριο που ορίστηκε για τον προσδιορισμό της ελεύθερης επιφάνειας είναι 10^{-2} .



Εικόνα 522 Ιστορία της σύγκλισης της ροής (για $Re = 3 \cdot 10^6$)

Στα επόμενα διαγράμματα δίνονται οι κατανομές της ταχύτητας όπως προκύπτουν από την επίλυση του πεδίου ροής για το συγκεκριμένο ακροφύσιο. Οι διατομές στις οποίες αντιστοιχούν οι κατανομές που απεικονίζονται στα διαγράμματα, έχουν επιλεγθεί με τρόπο τέτοιο ώστε να δοθεί η συνολική εικόνα για το πεδίο λύσεων στις περιοχές που ενδιαφέρουν περισσότερο, δίνονται αριθμημένες στο σχήμα 5.23.



Εικόνα 5.23 Υπό εξέταση διατομές

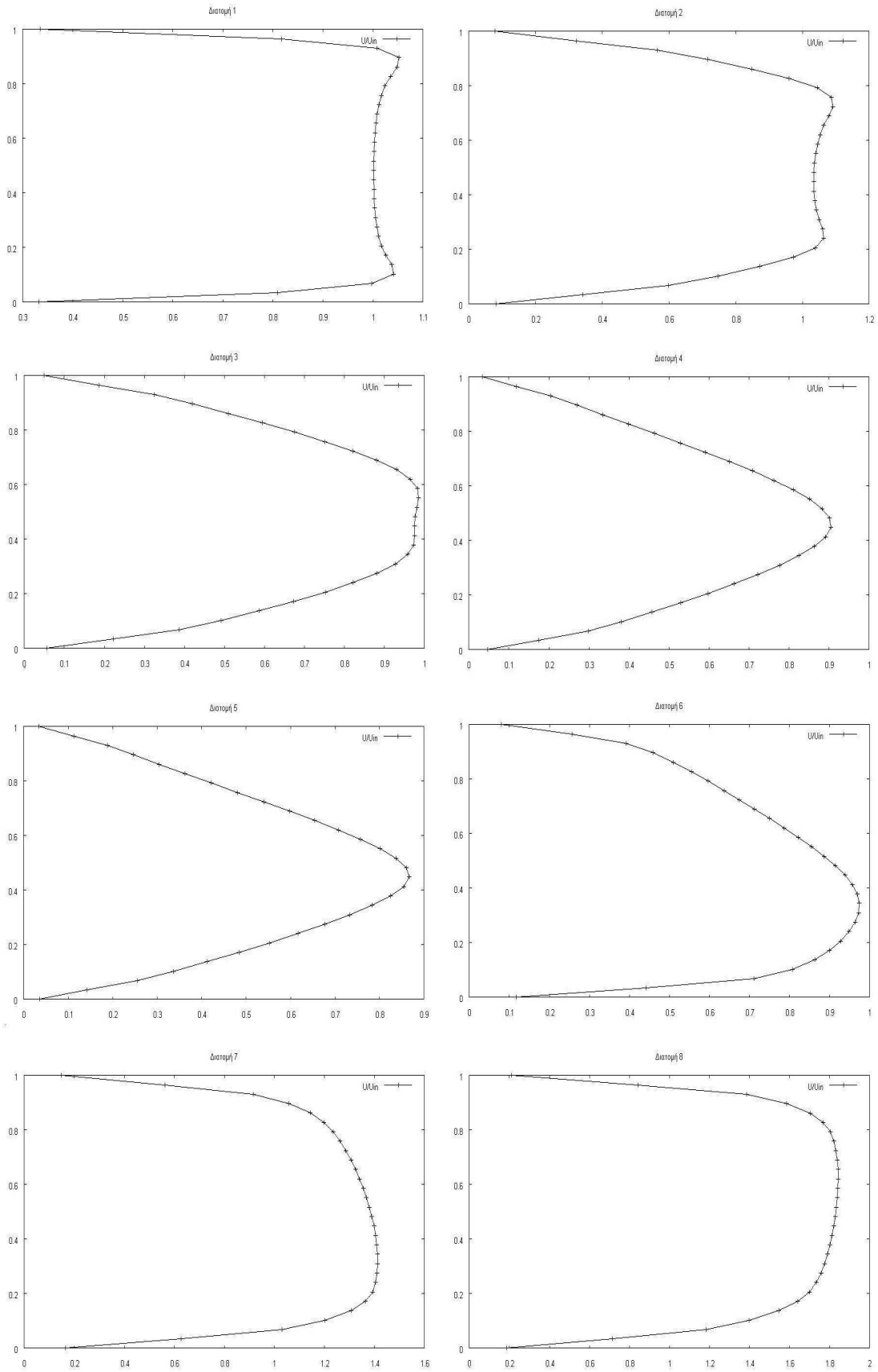
Στα δύο πρώτα διαγράμματα (σχήμα 5.24.1 και 5.24.2) είναι σχεδιασμένες οι κατανομές της αξονικής συνιστώσας u_z της ταχύτητας, τα δύο επόμενα (σχήμα 5.25.1 και 5.25.2) αφορούν την ακτινική συνιστώσα u_r και στα δύο τελευταία (σχήμα 5.26.1 και 5.26.2) αναπαριστώνται οι κατανομές της συνισταμένης ταχύτητας $U = \sqrt{u_z^2 + u_r^2}$.

Όλες οι τιμές της ταχύτητας που είναι σχεδιασμένες στα επόμενα διαγράμματα είναι αδιαστατοποιημένες με την μέση ταχύτητα εισόδου U_{in} του ρευστού και δίνονται συναρτήσει του μοναδιαίου αδιάστατου ύψους $r' = (r - r_i)/(r_o - r_i)$ της κάθε διατομής, όπου r_i είναι η εσωτερική ακτίνα (προς τον άξονα συμμετρίας) και r_o είναι η εξωτερική.

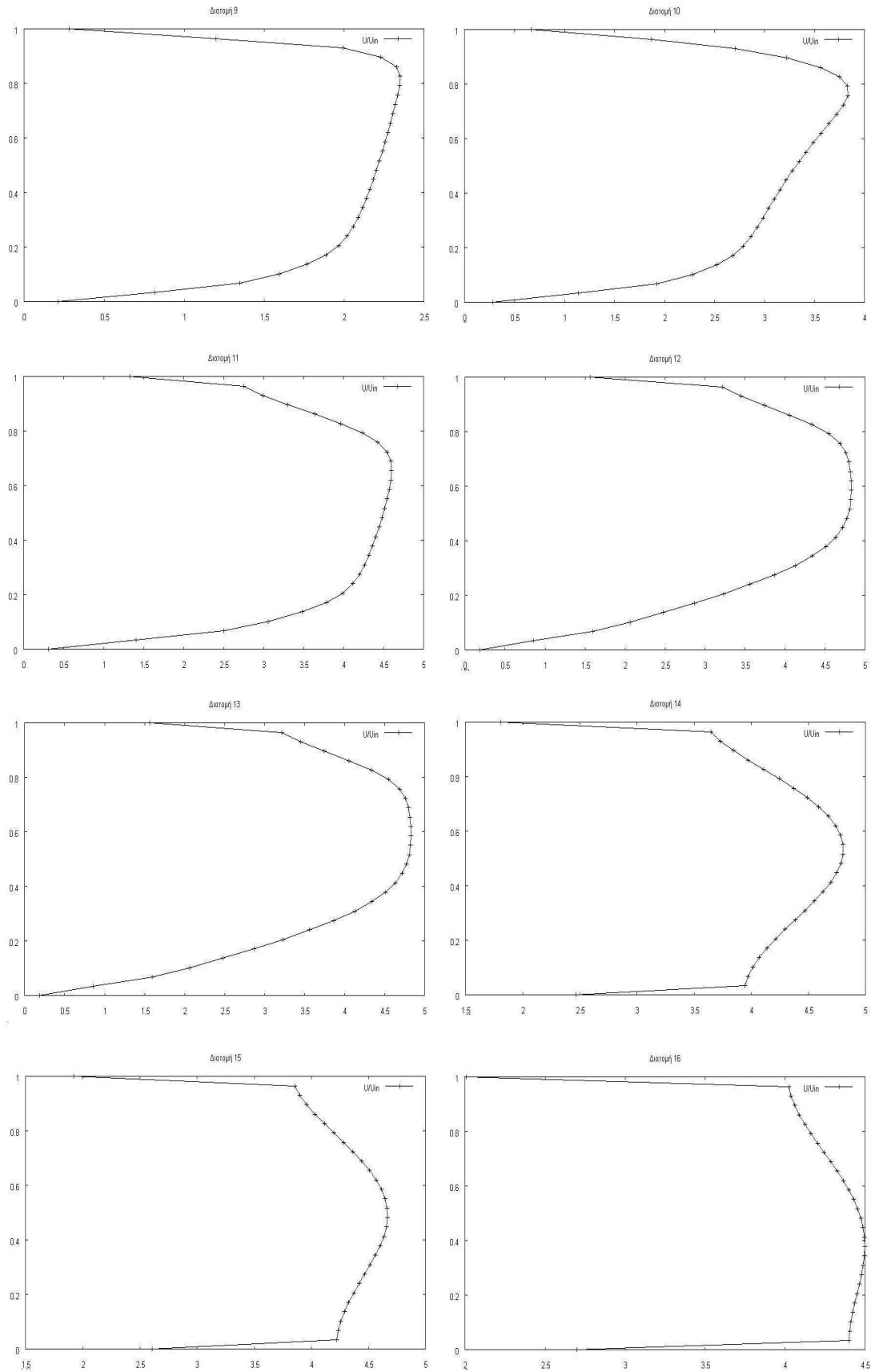
Δεδομένα ακροφυσίου Pelton κατά Bover	
<i>AP(μοίρες) – Γωνία βελόνης</i>	55.0
<i>AE(μοίρες) – Γωνία κοίλου</i>	80.0
<i>RE(-) – Ακτίνα καμπυλότητας κοίλου</i>	5.60
<i>RP(-) – Ακτίνα καμπυλότητας βελόνης</i>	2.40
<i>R3(-) – Μέγιστη ακτίνα βελόνης</i>	1.40
<i>R4(-) – Ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου</i>	3.00
<i>R5(-) – Ακτίνα βάκτρου</i>	1.00
<i>XOP(%) – Άνοιγμα βελόνης</i>	1.00

Με βάση τον παραπάνω πίνακα τροποποιούμε κατάλληλα το αρχείο *inozzle.dat* ώστε να εισάγουμε την διαφορετική γεωμετρία του ακροφυσίου τύπου III.

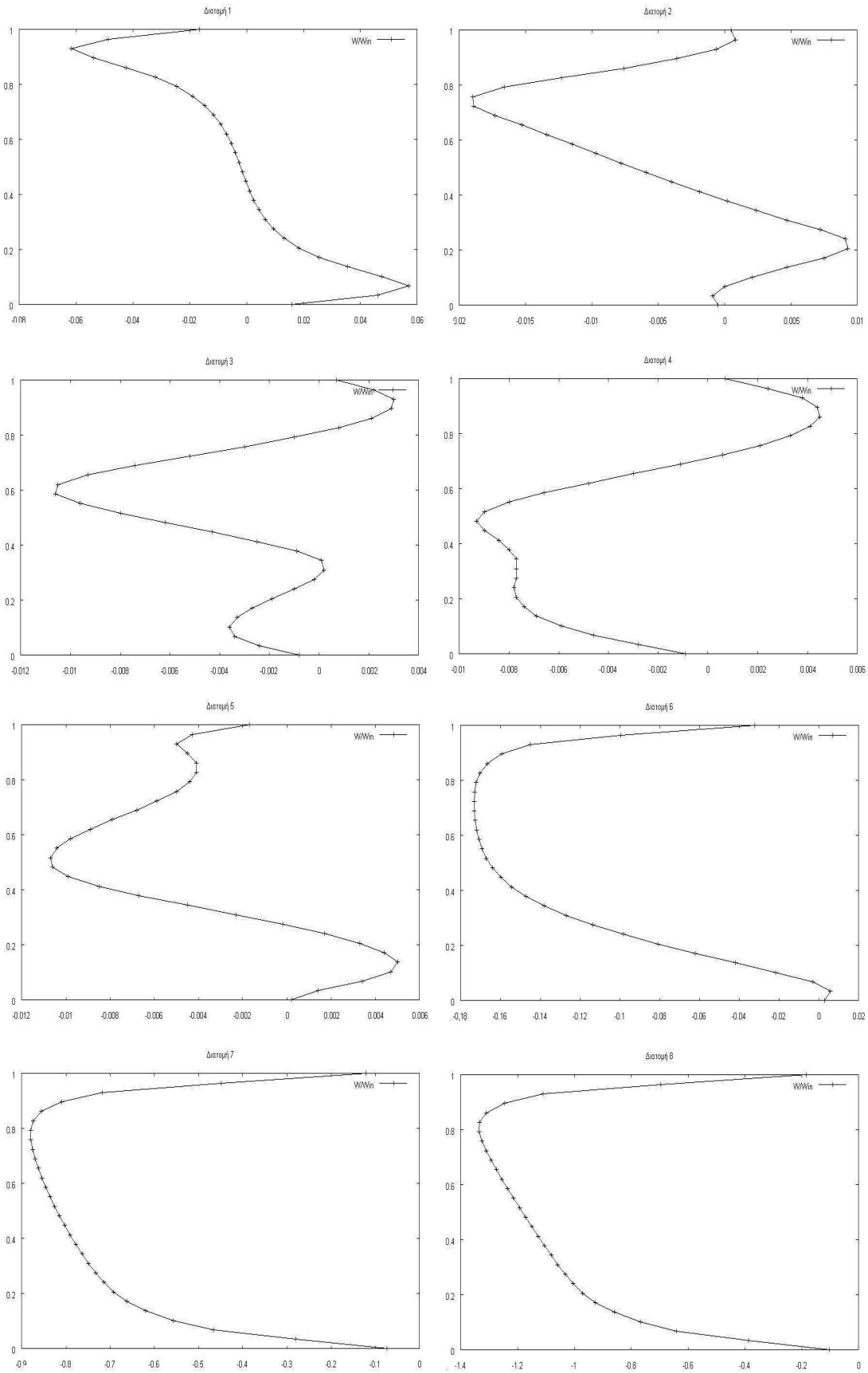
Στην συνέχεια ακολουθούν τα διαγράμματα των αδιαστατοποιημένων ταχυτήτων των επιλεγθέντων διατομών του υπολογιστικού πεδίου.



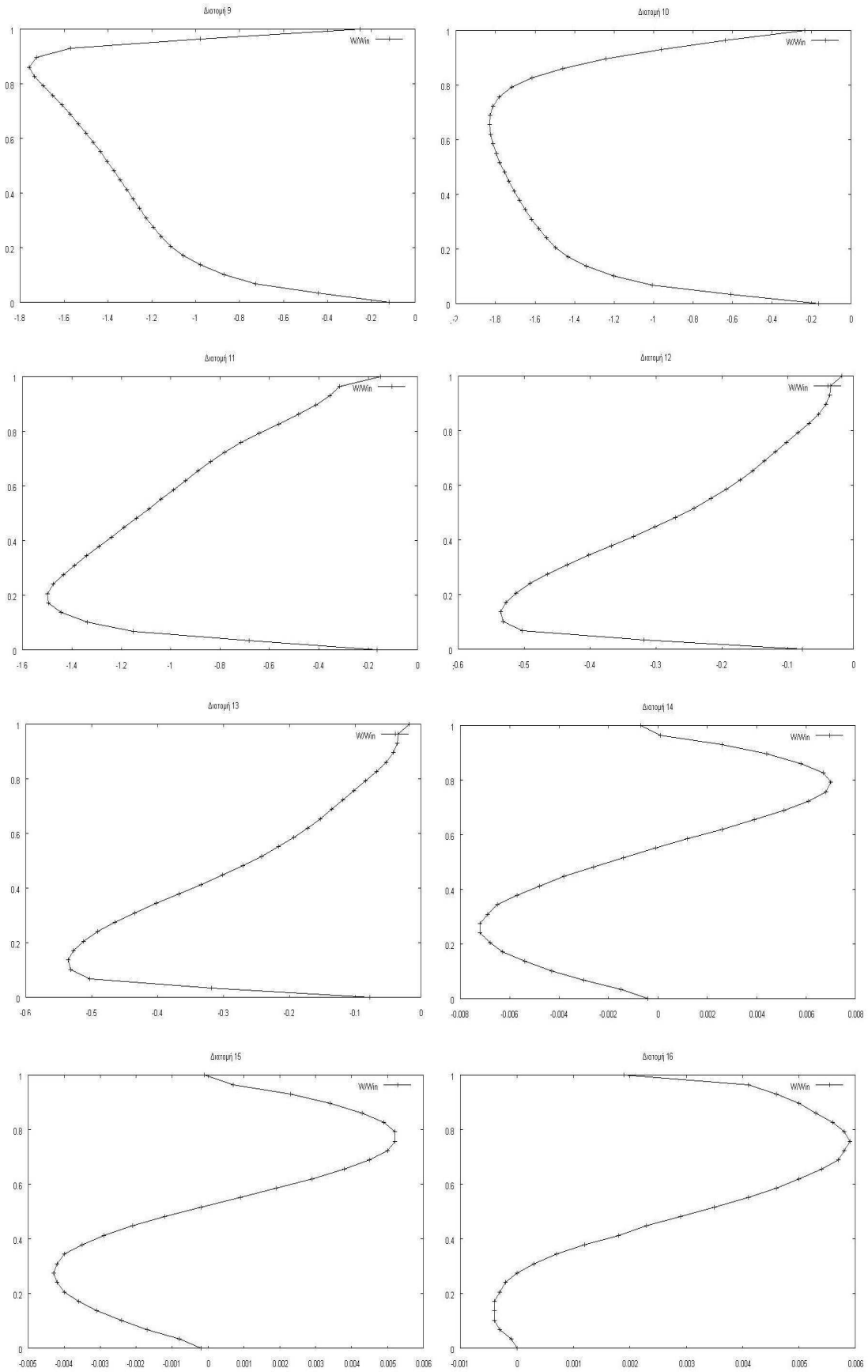
Σχήμα 5.24.1 Κατανομή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



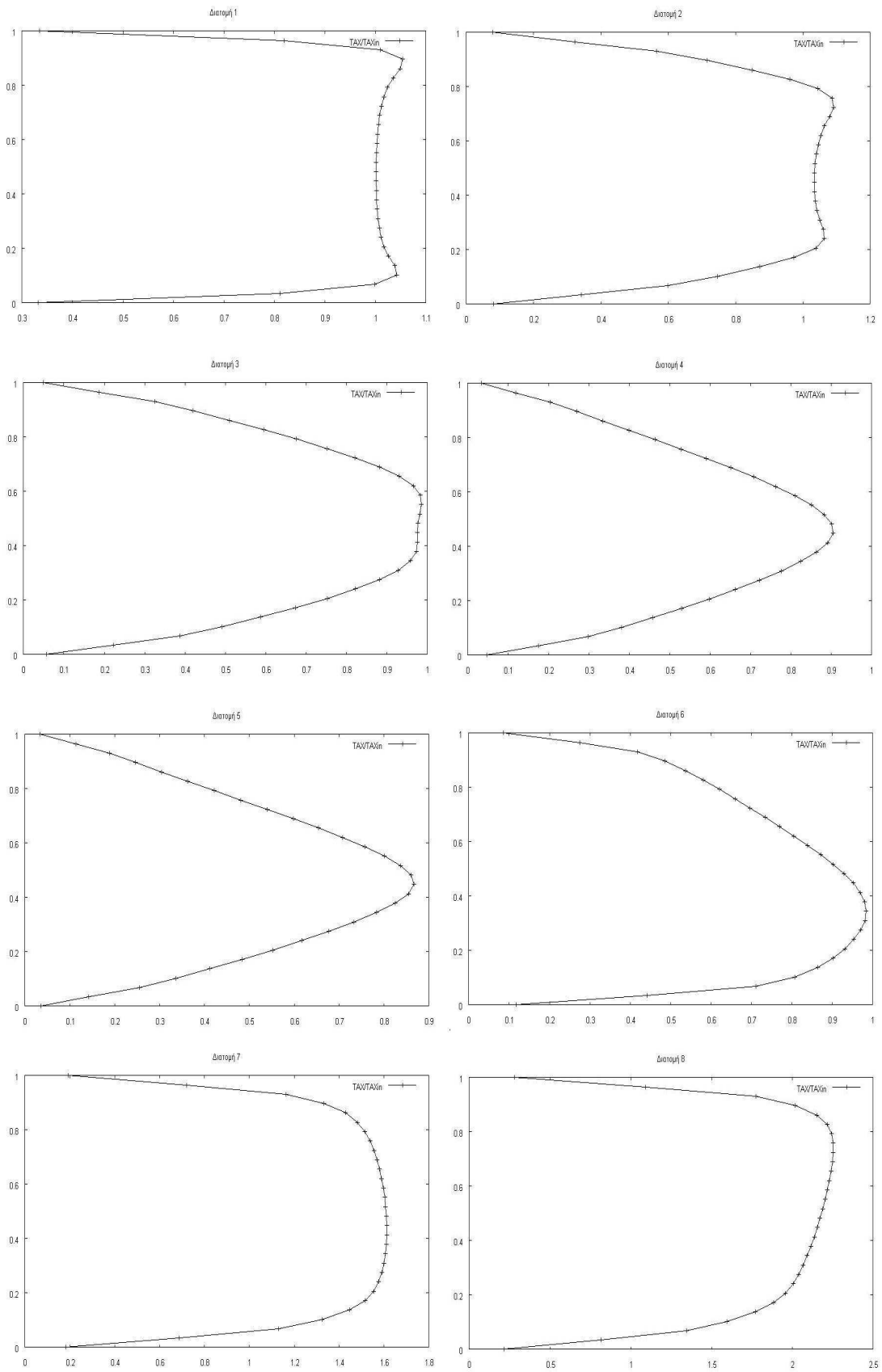
Σχήμα 5.24.2 Κατανομή της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



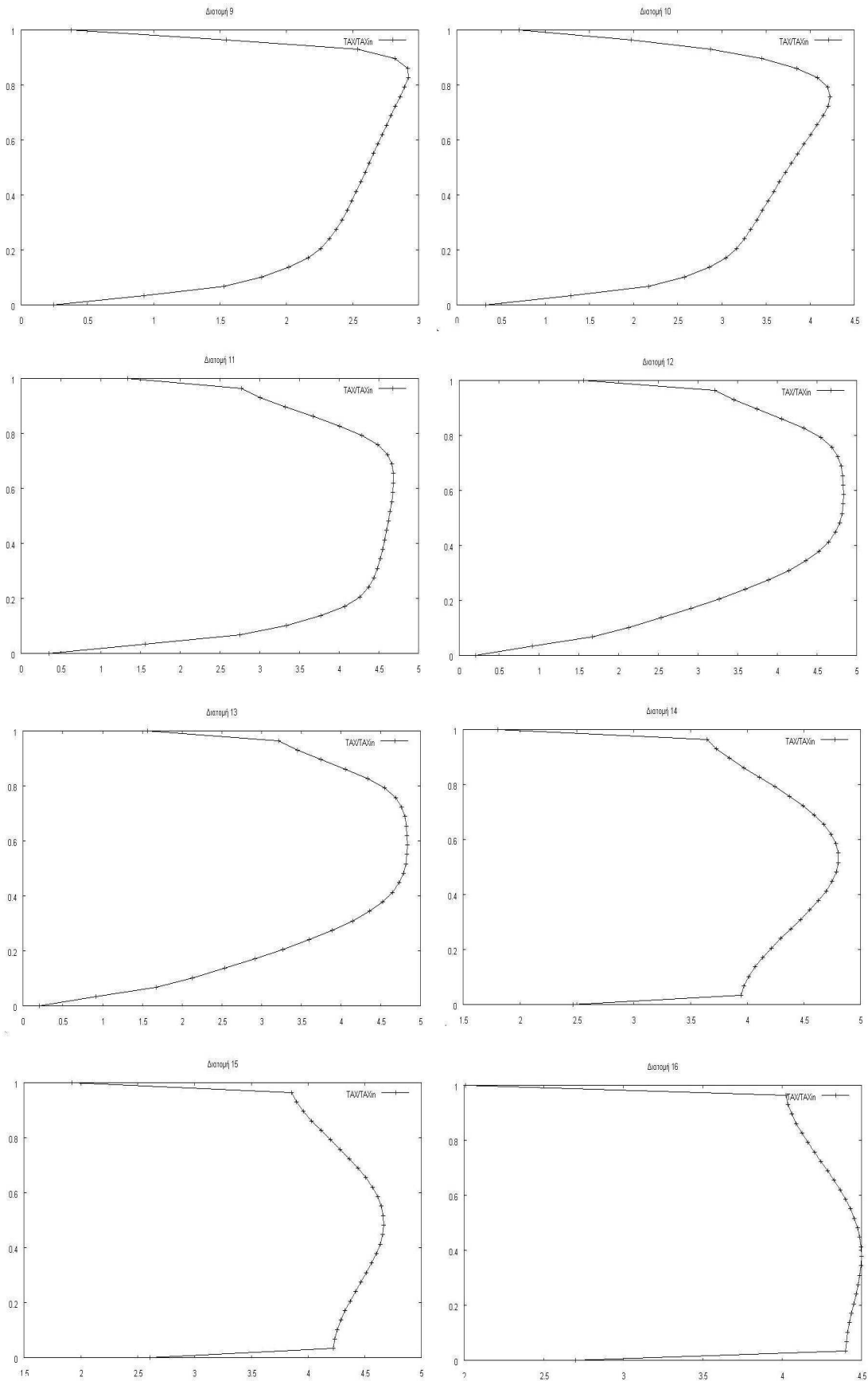
Σχήμα 5.25.1 Κατανομή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$



Σχήμα 5.25.2 Κατανομή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

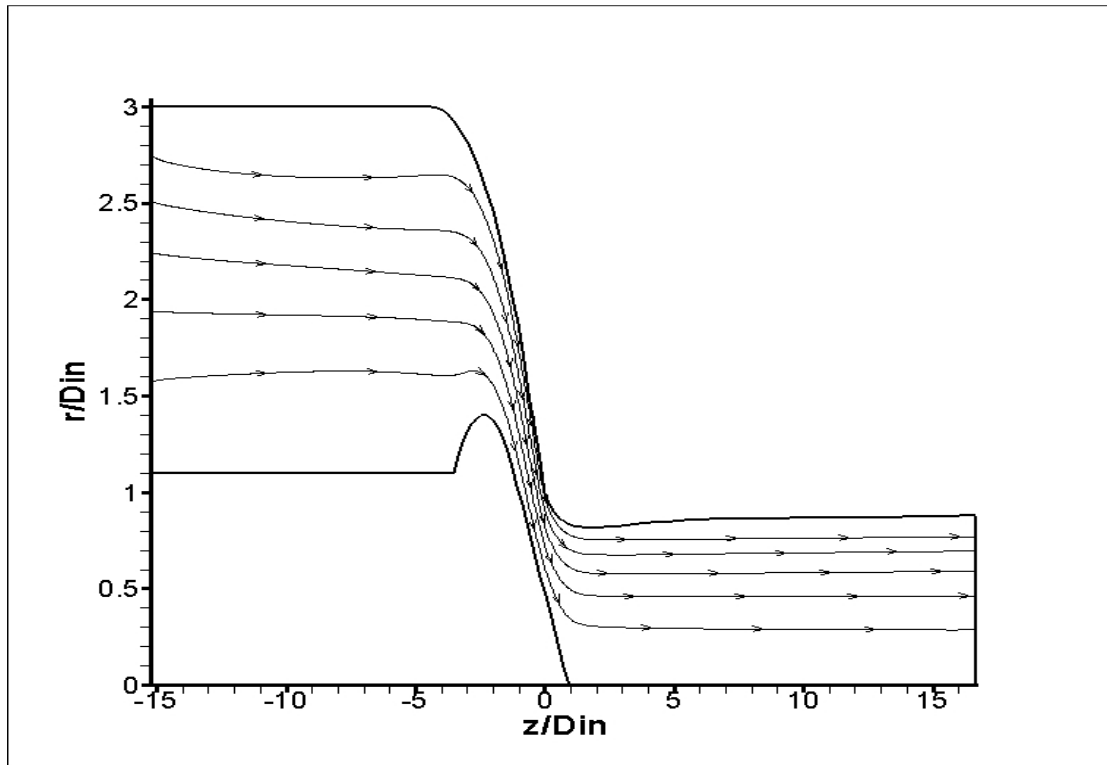


Σχήμα 5.26.1 Κατανομή της συνιστάμενης ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

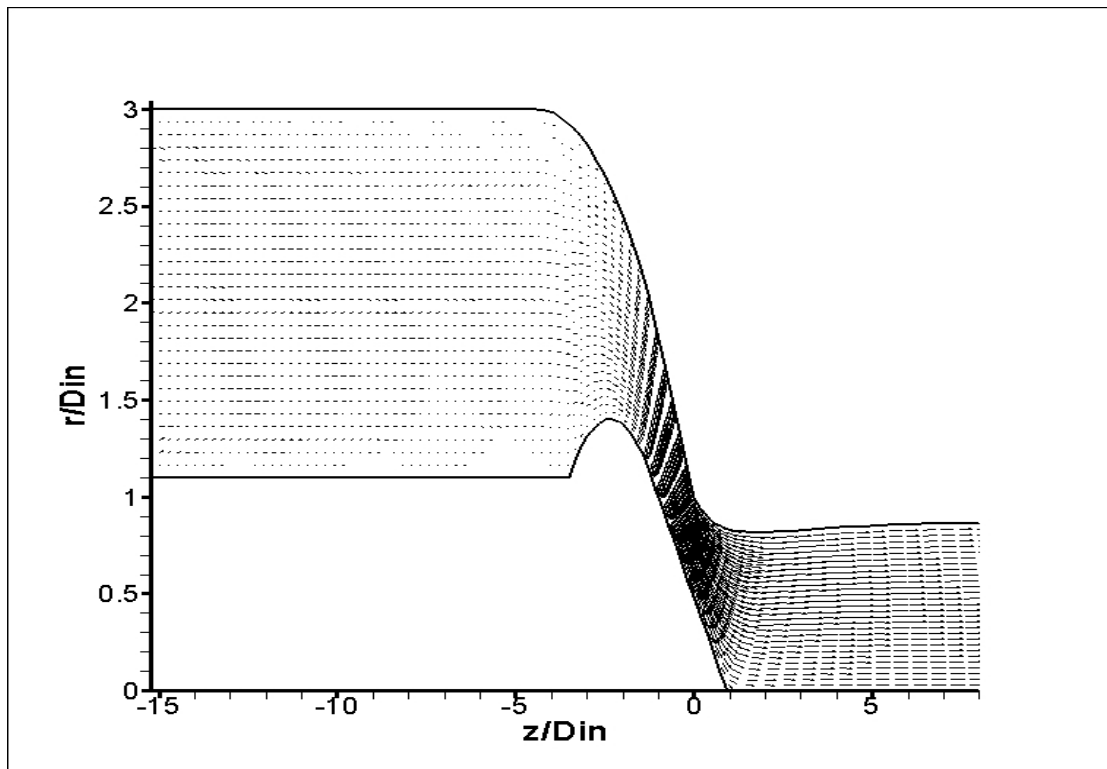


Σχήμα 5.26.2 Κατανομή της συνιστάμενης ταχύτητας του ρευστού για $Re = 3 \cdot 10^6$

Τέλος, στα παρακάτω σχήματα είναι σχεδιασμένες τέσσερις γραμμές ροής σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προγράμματος *STREAMLINES.FOR* καθώς και επίσης τα βέλη ροής (ταχύτητας).



Εικόνα 5.27 Γραμμές ροής για $Re=3*10^6$



Εικόνα 5.28 Βέλη ταχυτήτων για $Re=3*10^6$

6.1 Περιγραφή της διαδικασίας μοντελοποίησης – επίλυσης του ακροφυσίου.

Παρακάτω περιγράφεται ολόκληρη η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση του προβλήματος του ακροφυσίου κατά Bovet. Συγκεκριμένα τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής :

Βήμα 1^ο : Δημιουργία πλέγματος

Επιλογή των σημείων Bezier για την αρχική προσέγγιση της καμπύλης της ελεύθερης επιφάνειας της ροής που εξέρχεται του ακροφυσίου στο **NOZZLG1.f** , το οποίο και τρέχουμε ώστε να υπολογιστούν τα άνω και κάτω όρια του υπολογιστικού χωρίου που αποθηκεύονται στα αρχεία **ONOZZL.dat** και **ONEEDL.dat** με το πρώτο να αντιστοιχεί στο σώμα του ακροφυσίου και το δεύτερο στην βελόνη. Παράλληλα παράγει και το αρχείο **BEZIER.dat** στο οποίο καταγράφονται τα σημεία Bezier που χρησιμοποιήσαμε για την ελεύθερη επιφάνεια.

Στην συνέχεια καταγράφουμε τις διαστάσεις του πλέγματος στο αρχείο **GRID_INPUT.dat** , που στην περίπτωσή μας είναι $NXX = 89$ και $NZZ = 29$. Η μεταβλητή **L_REF** αποτελεί ένα παράγοντα κλιμάκωσης, δηλαδή αν πάρει την τιμή '2.0' , οι συντεταγμένες του πλέγματος που θα προκύψει είναι υποδιπλάσιες από εκείνες των σημείων που παρήχθησαν από την πιο πάνω διαδικασία. Η μεταβλητή **CZ** ρυθμίζει την πυκνότητα των πλεγματικών γραμμών (grid clustering) κατά την z – κατεύθυνση. Όσο η τιμή της τείνει στην μονάδα, τόσο πιο ομοιόμορφο πλέγμα δημιουργείται κατά την z – κατεύθυνση ενώ αντίστοιχα όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πυκνότερο γίνεται στο άνω και κάτω όριο (πυκνότερο κοντά στα τοιχώματα και αραιότερο στο μέσο).

Για την δημιουργία του πλέγματος τρέχουμε το πρόγραμμα **GRID_BOVET.f** . Το πρόγραμμα 'διαβάζει' τα σημεία που περιγράφουν τα όρια του χωρίου από τα αρχεία **ONOZZL.dat** και **ONEEDL.dat** και αφού υπολογίσει τις συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος σύμφωνα με την μέθοδο Coons (§ 6.4) καταγράφει τα αποτελέσματα στο αρχείο **GRID.dat** . Συγκεκριμένα, στην πρώτη γραμμή αποθηκεύονται οι διαστάσεις του πλέγματος και στην συνέχεια στην πρώτη στήλη οι r – συνιστώσες και στην δεύτερη οι z – συνιστώσες των κόμβων του πλέγματος. Σημειώνεται ότι στο παραπάνω πρόγραμμα δεν απαιτείται καμία παρέμβαση παρά μόνο το 'τρέξιμό' του.

Βήμα 2^ο : Εισαγωγή δεδομένων

Όλα τα απαραίτητα δεδομένα που απαιτούνται για την αριθμητική επίλυση, εισάγονται στο αρχείο **INPUT.dat**. Αρχικά καταγράφονται οι συντελεστές CFL και β και ο αριθμός Reynolds της υπό εξέταση ροής. Στη συνέχεια επιλέγονται οι αρχικές εκτιμήσεις της ταχύτητας και της πίεσης καθώς και τα κριτήρια σύγκλισης των βασικών μεγεθών u_z , u_r και p .

Βήμα 3^ο : Καθορισμός είδους ροής και οριακών συνθηκών

Συνεχίζοντας την εισαγωγή δεδομένων στο αρχείο **INPUT.dat**, καθορίζουμε το είδος της ροής που πρόκειται να επιλυθεί. Για διδιάστατη ή αξονοσυμμετρική ροή, η τιμή της μεταβλητής **IAXIS** θα είναι 0 ή 1 αντίστοιχα ενώ για στρωτή ή τυρβώδη ροή, η τιμή της μεταβλητής **ITURB** θα είναι 0 ή 1 αντίστοιχα. Αν η είσοδος του ρευστού στο χώρο που μελετάται γίνεται αξονικά, τότε πρέπει να δοθεί η τιμή 0 στη μεταβλητή **INFLOW**, ενώ αν η είσοδος γίνεται ακτινικά, η τιμή της πρέπει να είναι 1. Στη συνέχεια πρέπει να καθορισθεί η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού κατά την είσοδό του στο υπολογιστικό χωρίο. Αν η είσοδος είναι ομοιόμορφη ($U_{in} = QPER = 1$), τότε η τιμή της μεταβλητής **INLET** θα είναι 0, αν είναι παραβολική της μορφής $U_{in} = QPER \cdot (1-r^2)$ τότε η τιμή πρέπει να είναι 1 και τέλος, αν είναι της μορφής $U_{in} = QPER \cdot (1-r)^{1/7}$ η τιμή θα πρέπει να είναι 2. Αν κάποιο από το άνω ή το κάτω όριο αποτελεί άξονα συμμετρίας πρέπει να δοθεί η τιμή 1 στην μεταβλητή **ISYMMETRY_UP** ή στην **ISYMMETRY_DOWN** αντίστοιχα, διαφορετικά αν αντιπροσωπεύουν στερεά τοιχώματα, θα δοθεί η τιμή 0.

Βήμα 4^ο : Αρχική εκτίμηση οριακών συνθηκών

Στην συνέχεια, καθορίζουμε τις αρχικές τιμές των οριακών συνθηκών αλλά και των παραμέτρων **CU**, **CW**, **CIU**, **CIW**, **CQU** και **CQW** των οποίων ο ρόλος και η λειτουργία περιγράφονται παρακάτω. Ιδιαίτερα σε περιπτώσεις πολύπλοκης γεωμετρίας θα πρέπει να δίνονται διαφορετικές αρχικές εκτιμήσεις κατά μήκος της ροής ώστε να είναι επιτυχής και ταχύτερη η σύγκλιση του αλγορίθμου. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει οι διαφορετικές αρχικές τιμές των κύριων μεταβλητών, να δίνονται προσθέτοντας τις διάφορες αρχικές τιμές, στον κώδικα του κύριου προγράμματος, συναρτήσει των μεταβλητών **CIU**, **CIW**, **CQU** και **CQW** στην οποία αντιστοιχεί το κάθε τμήμα στο οποίο θέλουμε να δώσουμε διαφορετική αρχική εκτίμηση (οι δύο πρώτες δίνουν την κάθετη πλεγματοκή γραμμή και οι υπόλοιπες τις τιμές των ταχυτήτων σε αυτή

την θέση). Αυτές οι προσθήκες πρέπει να γίνονται περίπου στις γραμμές 280-290 του κύριου προγράμματος επίλυσης της ροής.

Στην περίπτωση του ακροφυσίου, αν IE είναι το πλήθος των κάθετων πλεγματοειδών γραμμών στις οποίες είναι χωρισμένο κατά μήκος του το σώμα του ακροφυσίου και η δέσμη στην έξοδο, διαφορετική αρχική εκτίμηση υπάρχει για το τμήμα εισόδου του ακροφυσίου ($1 \leq i \leq CIU \cdot IE = 0,3 \cdot IE$), διαφορετική για το τμήμα που αντιστοιχεί στην στένωση στην περιοχή της βελόνης ($0,3 \cdot IE < i \leq \{ 1 - CIU \cdot IE \} = 0,7 \cdot IE$) και τέλος διαφορετική για το τελευταίο τμήμα ($0,7 \cdot IE < i \leq IE$).

Βήμα 5^ο: Καθορισμός βοηθητικών μεταβλητών

Αρχικά, με την τιμή της μεταβλητής **ITEL** καθορίζεται η κάθετη πλεγματοειδή γραμμή που αντιστοιχεί στο σημείο του κάτω ορίου από το οποίο και πέρα, θέλουμε να λαμβάνεται το όριο αυτό ως στερεό τοίχωμα ενώ με την μεταβλητή **ITEU** καθορίζεται η κάθετη πλεγματοειδή γραμμή στην οποία σταματά η θεώρηση του στερεού τοιχώματος. Δηλαδή, αν δοθεί η τιμή 0, τότε ολόκληρο το κάτω όριο λαμβάνεται ως στερεό ενώ αν δοθεί κάποια τιμή n_1 για το **ITEL** και n_2 για το **ITEU**, τότε το τμήμα μεταξύ του n_1 και n_2 θα λαμβάνεται ως άξονας συμμετρίας και το τμήμα που βρίσκεται εκτός του παραπάνω χωρίου θα λαμβάνεται ως στερεό τοίχωμα.

Επίσης, με την τιμή της μεταβλητής **IFFF** επιλέγουμε την τάξη του σχήματος παρεμβολής (εξ. 4.2.19), με την μεταβλητή **ISTOP** καθορίζεται ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων ώστε να σταματήσει ο αλγόριθμος σε περίπτωση μη σύγκλισης και με την μεταβλητή **IRESI** επιλέγουμε μετά από πόσες επαναλήψεις θέλουμε να εμφανίζονται οι τιμές των μέγιστων υπολοίπων στην οθόνη.

Βήμα 6^ο: Αριθμητική επίλυση και αποτελέσματα

Στην συνέχεια 'τρέχουμε' το κύριο πρόγραμμα **2D_AXIS_BOVET.f** για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος, το οποίο δημιουργεί δυο αρχεία **RESULTS.dat** και **RESIDUALS.dat** για την καταγραφή των αποτελεσμάτων. Στο πρώτο αποθηκεύονται τα αποτελέσματα της επίλυσης ως εξής :

Στην πρώτη και δεύτερη στήλη καταγράφονται οι συντεταγμένες των z και r των κόμβων του πλέγματος, στην τρίτη και τέταρτη στήλη καταγράφονται οι z και r συνιστώσες της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας, στην πέμπτη στήλη αποθηκεύονται οι τιμές της συνισταμένης αδιάστατης ταχύτητας και στην έκτη οι τιμές της πίεσης. Στην περίπτωση

επίλυσης τυρβώδους ροής, καταγράφονται επιπλέον στην έβδομη και όγδοη στήλη οι τιμές της αδιάστατης κινητικής ενέργειας $k \cdot 10/U_{in}^2$ και του ε , αντίστοιχα.

Στο δεύτερο αρχείο καταγράφονται ο αριθμός της επανάληψης, οι τιμές των μέγιστων υπολοίπων των μεγεθών p , u_z , u_r , k και ε αντίστοιχα καθώς και η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης. Αυτά τα δεδομένα χρησιμοποιούνται για τη σχεδίαση του διαγράμματος που απεικονίζει την ιστορία σύγκλισης του αλγορίθμου.

Με την ολοκλήρωση της αριθμητικής επίλυσης στην οθόνη εμφανίζεται η υπολογιζόμενη από τα αποτελέσματα παροχή στην είσοδο και στην έξοδο του υπολογιστικού χωρίου ώστε να μπορούμε να ελέγξουμε την συνέχεια άρα και την ορθότητα της λύσης.

Βήμα 7^ο : Χάραξη γραμμών ροής

Τέλος καθορίζουμε το επιθυμητό πλήθος των γραμμών ροής που θέλουμε να σχεδιάσουμε δίνοντας την αντίστοιχη τιμή στην μεταβλητή **NL** στο συνοδευτικό πρόγραμμα **STREAMLINES.FOR** και επίσης την τιμή **1** στην μεταβλητή **IAXIS** αν πρόκειται για αξονοσυμμετρική ροή ή την τιμή **0** για διδιάστατη.

Τα αποτελέσματα αποθηκεύονται στο αρχείο **STREAMLINES.dat** ως εξής: Στην πρώτη και δεύτερη στήλη καταγράφονται οι συντεταγμένες των z και r -συντεταγμένων των σημείων από τα οποία διέρχεται η συγκεκριμένη γραμμή ροής, η τρίτη στήλη περιέχει τη τιμή της παροχής όγκου που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σημείο και κατά συνέπεια είναι η τιμή της παροχής στην οποία αντιστοιχεί η συγκεκριμένη γραμμή ροής και τέλος στην τέταρτη στήλη καταγράφεται το ποσοστό της μέγιστης διερχόμενης παροχής που αντιστοιχεί σε αυτή τη γραμμή.

Για παράδειγμα, αν υπολογιστεί μια μόνο γραμμή ροής που χωρίζει τη διερχόμενη παροχή στο μέσο, θα είναι $NL=1$, στις δυο πρώτες στήλες του αρχείου *STREAMLINES.dat* θα έχουν καταγραφεί οι συντεταγμένες της γραμμής, στην τρίτη στήλη θα υπάρχει η τιμή του $1/(NL+1)=1/2$ της συνολικής παροχής και στην τέταρτη στήλη θα υπάρχει η τιμή $1/(NL+1)=0,5$. Τα δεδομένα για κάθε μια γραμμή ροής διαχωρίζονται μεταξύ τους με μια κενή γραμμή.

6.2 Πίνακας μεταβλητών κώδικα και αντιστοιχίας του με θεωρία

ΚΥΡΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ :

AR	συντελεστές για την σχέση χρονικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta από το χρονικό επίπεδο n στο $(n+1)$ (εξ. 4.6.1).
B1, ..., B5	υπόλοιπα των κύριων μεταβλητών $p, u, w, k, \varepsilon: = A^{n+1} - A^n $.
BETA	συντελεστής ψευδοσυμπίεστότητας β .
CE1	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon: C_{\varepsilon 1}=1,44$.
CE2	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon: C_{\varepsilon 2}=1,92$.
CIU, CIW	μεταβλητές για τον καθορισμό των αρχικών εκτιμήσεων CU, CW της ταχύτητας. Αρχικά εφαρμόζονται οι τιμές CU*QPER και CW*QPER για τις συνιστώσες u και w (ή u_z και u_r) αντίστοιχα και στη συνέχεια, μετά το CIU*IE και το CIW*IE του ολικού μήκους του πλέγματος, οι τιμές CQU*QPER και CQW*QPER αντίστοιχα. Εφαρμογή σε περιπτώσεις όπου η είσοδος και η έξοδος της ροής βρίσκονται σε διαφορετικές διευθύνσεις (π.χ. πτερωτή φυγόκεντρης αντλίας, αξονική είσοδος-ακτινική έξοδος) και θα πρέπει μετά τη περιοχή καμπύλωσης του πλέγματος (CIU*IE, CIW*IE) να εκτιμηθούν διαφορετικές τιμές ταχύτητας για (ταχύτερη) σύγκλιση.
CM	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon: C_m=0,09$.
CON1,2,3	κριτήριο σύγκλισης για p, u, w (ή p, u_z, u_r) αντίστοιχα.
CR1, CR2	συντελεστές για τον υπολογισμό της διαμέτρου CR·D_IN στην είσοδο της ροής: CR1=1 : χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που η είσοδος δεν είναι συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα x (ή z) (π.χ. δρομέας υδροστροβίλου). CR2=2 : χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που η είσοδος είναι συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα x (ή z) οπότε αν το μισό πλέγμα, η πραγματική διάμετρος εισόδου είναι διπλάσια από αυτή που έχει μοντελοποιηθεί και εφαρμόζεται για την επίλυση της ροής (π.χ. πτερωτή φυγόκεντρης αντλίας).
D_IN	διάμετρος στην είσοδο της ροής για τον καθορισμό οριακών συνθηκών για το ε (εξ. 4.8.5 β).
DT	«τοπικό» χρονικό βήμα ολοκλήρωσης (εξ. 4.7.3).
E0	τιμή του μεγέθους ε στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης.
EVAV	μέγιστη ιδιοτιμή για τον υπολογισμό του «τοπικού» χρονικού βήματος (εξ. 4.7.3).
EVV	μέγιστη ταχύτητα ξ' του κύματος (εξ. 4.3.6).
EXI, EZE	μετασηματισμένες μερικές παράγωγοι ε_x και ε_z του μεγέθους ε .
FFFA, FFFB, FFFC, FFFD,	συντελεστές του σχήματος παρεμβολής (εξ. 4.3.19).
IAXIS	συντελεστής των αξονοσυμμετρικών όρων (εξ. 3.6.1 & 3.6.2): $= 0 \Rightarrow$ διδιάστατο πρόβλημα $= 1 \Rightarrow$ αξονοσυμμετρικό πρόβλημα.
IE, KE	διαστάσεις πλέγματος κατά x, z (ή z, r) αντίστοιχα.
IFF	μεταβλητή επιλογής σχήματος παρεμβολής (εξ. 4.2.19):

	= 1 \Rightarrow πρώτης τάξης = 2 \Rightarrow δεύτερης τάξης, ...
IP1, IP2	μέγιστες επιτρεπτές διαστάσεις πλέγματος κατά x,z (ή z, r) αντίστοιχα.
ISTOP	μεταβλητή τερματισμού των χρονικών επαναλήψεων σε περίπτωση μη σύγκλισης της μεθόδου.
ISYMMETRY_UP,	μεταβλητές για τον καθορισμό του είδους των οριακών συνθηκών στο άνω και κάτω όριο του πλέγματος αντίστοιχα: = 0 \Rightarrow εφαρμογή συνθηκών στερεού τοιχώματος = 1 \Rightarrow εφαρμογή συνθηκών αξονικής συμμετρίας.
ITURB	συντελεστής της τυρβώδους ροής (εξ. 3.6.2): = 0 \Rightarrow στρωτή ροή = 1 \Rightarrow τυρβώδης ροή.
JACOBIAN	ιακωβιανή του μετασχηματισμού (εξ. 2.4.3)
K0	τιμή του μεγέθους k στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης.
KAPPA	σταθερά Von Karman: $\kappa = 0,4$.
KH, EH	τιμές των υπολοίπων RES() των κύριων μεταβλητών k και ε αντίστοιχα, για κάθε υπο-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta, (εξ. 4.7.2).
KHR, EHR	τιμές των υπολοίπων $(\Delta t/6) \cdot \text{RES}()$ των κύριων μεταβλητών k και ε αντίστοιχα, για κάθε υπο-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta, (εξ. 4.6.1). Χρησιμοποιούνται για την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων k - ε από το χρονικό επίπεδο n στο (n+1).
KN, EN	τιμές των κύριων μεταβλητών k και ε αντίστοιχα, στο χρονικό επίπεδο (n+1) μετά την χρονική ολοκλήρωση (εξ.4.7.1, διάνυσμα $U^{(n+1)}$). Επίσης, χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό των υπολοίπων B4 και B5 των μεταβλητών $(A^{n+1} - A^n)$.
KS, ES	τιμές των κύριων μεταβλητών k και ε αντίστοιχα, στο προηγούμενο χρονικό επίπεδο n (εξ. 4.7.1, διάνυσμα $U^{(n)}$). Επίσης, χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό των υπολοίπων B4 και B5 των μεταβλητών $(A^{n+1} - A^n)$.
KSR, ESR	τιμές των κύριων μεταβλητών k και ε αντίστοιχα, μετά από κάθε υπο-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta (εξ. 4.7.1, διάνυσμα $U^{(i)}$).
KXI, KZE	μετασχηματισμένες μερικές παράγωγοι k_x και k_z του μεγέθους k.
NL	πλήθος γραμμών ροής.
PE, UE, WE	τιμές των κύριων μεταβλητών p, u, w (ή p, uz, ur) αντίστοιχα, στο χρονικό επίπεδο (n+1) μετά την χρονική ολοκλήρωση (εξ. 4.6.1, διάνυσμα $U^{(n+1)}$). Επίσης, χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό των υπολοίπων B1, B2 και B3 των μεταβλητών $(A^{n+1} - A^n)$.
PH, UH, WH	τιμές των υπολοίπων RES() των κύριων μεταβλητών p, u, w (ή p, u_z , u_r) αντίστοιχα, για κάθε υπο-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta, (εξ. 4.7.2).
PHR,UHR,WHR	τιμές των υπολοίπων $(\Delta t/6) \cdot \text{RES}()$ των κύριων μεταβλητών p, u, w (ή p, u_z , u_r) αντίστοιχα, για κάθε υπο-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta, (εξ. 4.7.1). Χρησιμοποιούνται για την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier-Stokes από το χρονικό επίπεδο n στο (n+1).
PPER	αρχική εκτίμηση της τιμής της πίεσης.

PS, US, WS	τιμές των κύριων μεταβλητών p, u, w (ή p, u_z, u_r) αντίστοιχα, στο προηγούμενο χρονικό επίπεδο n (εξ. 4.7.1, διάνυσμα $U^{(n)}$). Επίσης, χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό των υπόλοιπων B1, B2 και B3 των μεταβλητών ($ A^{n+1} - A^n $).
PSR, USR, WSR	τιμές των κύριων μεταβλητών p, u, w (ή p, u_z, u_r) αντίστοιχα, μετά από κάθε υπο-επανάληψη της μεθόδου Runge-Kutta (εξ. 4.7.1, διάνυσμα $U^{(i)}$).
QPER	αρχική εκτίμηση της τιμής της ταχύτητας.
R	τιμή της ακτίνας r κατά την εφαρμογή των αξονοσυμμετρικών όρων.
RES1, ..., RES5	μέγιστα υπόλοιπα των κύριων μεταβλητών p, u, w, k και ε σε όλους τους κόμβους, για τον έλεγχο σύγκλισης.
REYNOLDS	τιμή του αριθμού Reynolds.
SIGMA_E	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$: $\sigma_\varepsilon = 1,22$.
SIGMA_K	σταθερά του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$: $\sigma_k = 0,9$.
UXI, UZE	μετασηματισμένες μερικές παράγωγοι u_ξ και u_ζ (ή $u_{z,\xi}$ και $u_{z,\zeta}$) της συνιστώσας u (ή u_z).
UZ, UR	αξονική u_z και ακτινική u_r συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα (χρησιμοποιούνται μόνο στη περίπτωση αξονοσυμμετρικής ροής).
UZEW, WZEW	μετασηματισμένες μερικές παράγωγοι u_ζ και w_ζ (ή $u_{z,\zeta}$ και $u_{r,\zeta}$ πάνω στο τοίχωμα (υπολογίζονται από τις συναρτήσεις τοιχώματος).
VISC_TURB	τυρβώδης συνεκτικότητα: $\mu_t = Re \cdot C_\mu \cdot (k^2/\varepsilon)$
VISC_TURB1	τυρβώδης συνεκτικότητα στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης.
VISCOSITY	ενεργός συνεκτικότητα: $\mu_t = \mu + \mu_{eff}$
WZE, WXI	μετασηματισμένες μερικές παράγωγοι w_ξ και w_ζ (ή $u_{r,\xi}$ και $u_{r,\zeta}$) της συνιστώσας w (ή u_r).
X, Z	συντεταγμένες του πλέγματος στο γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων (στη περίπτωση αξονοσυμμετρικής ροής, το X αντιστοιχεί στην αξονική διεύθυνση z και το Z στην ακτινική r).
XIX, XIX	μετρικές ποσότητες μετασηματισμού ξ_x και ξ_z (ή ξ_x & ξ_r).
XXI, XZE	μετρικές ποσότητες μετασηματισμού x_ξ και x_ζ (ή z_ξ & z_ζ).
ZEX, ZEZ	μετρικές ποσότητες μετασηματισμού ζ_x και ζ_z (ή ζ_z και ζ_r).
ZXI, ZZE	μετρικές ποσότητες μετασηματισμού z_ξ και z_ζ (ή r_ξ και r_ζ).

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΕΣ :**AXISYMMETRIC**

P_AXIS_L, U_AXIS_L	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος K (εξ. 3.6.3).
W_AXIS_L	
P_AXIS_R, U_AXIS_R	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος L (εξ. 3.6.3).
W_AXIS_R	
T_RR_FF	διατμητική τάση ($\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}$) (εξ. 3.6.4).
T_RZ	διατμητική τάση $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ (εξ. 3.6.4).
U_AXIS_R2, W_AXIS_R2	περιέχουν τους πρόσθετους αξονοσυμμετρικούς όρους $(-2/3) \cdot (u_r/r)$ των διατμητικών τάσεων τ_{zz} και τ_{rr} των διανύσματος R και T (εξ. 3.6.3 και 3.6.4).

STREAMLINES

MAXQ	περιέχει την συνολικά μέγιστη τιμή της παροχής όγκου που διέρχεται από το χωρίο επίλυσης.
NL	πλήθος γραμμών ροής.
Q	περιέχει την τιμή της παροχής όγκου.
QMAX	περιέχει την μέγιστη τιμή της παροχής όγκου που διέρχεται από κάθε μια εγκάρσια διατομή στις οποίες είναι διακεκριμένο το χωρίο επίλυσης.

SWEEP

CFL	περιέχει τη τιμή του αδιάστατου συντελεστή CFL για τον υπολογισμό του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται για την ταχύτερη σύγκλιση του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση.
L	παίρνει τιμές από 1 – 4 και εφαρμόζει τις 4 υποεπαναλήψεις της μεθόδου Runge – Kutta.
NIT	μεταβλητή για τις χρονικές επαναλήψεις των συστημάτων των εξισώσεων Navier – Stokes και k - ε.

TURB_AXISYMMETRIC

GAMMA_K	περιέχει τη τιμή του συντελεστή Γ_k του μοντέλου τύρβης k – ε (εξ. 3.6.6).
GAMMA_E	περιέχει τη τιμή του συντελεστή Γ_ε του μοντέλου τύρβης k – ε (εξ. 3.6.6).
K_AXIS_L, E_AXIS_L	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος K_{ke} (εξ. 3.6.10).
K_AXIS_R, E_AXIS_R	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος L_{ke} (εξ. 3.6.10).
K_AXIS_R2, E_AXIS_R2	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος P_{ke3} (εξ. 3.6.11).
K0, E0	οι τιμές των μεγεθών k και ε αντίστοιχα, στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης.
THETA3	περιέχει τη τιμή του πρόσθετου όρου παραγωγής Θ_3 λόγω αξονοσυμμετρίας (εξ. 3.6.12).
UR	περιέχει τη τιμή της ακτινικής συνιστώσας u_r της ταχύτητας στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης.

TURB_PRODUCTION

P_K, P_E	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος P_{ke} (εξ. 3.6.8).
THETA	περιέχει τη τιμή του όρου παραγωγής $\Theta = \mu_t (\Theta_1 + \Theta_2)$ (εξ. 3.6.9)
THETA1	περιέχει τη τιμή του συντελεστή παραγωγής Θ_1 (εξ. 3.6.9).
THETA2	περιέχει τη τιμή του συντελεστή παραγωγής Θ_2 (εξ. 3.6.9).

TURB_XIFLUX

EK ,EE HKL, HEL	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος E_{ke} (εξ. 3.6.5). περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε αριστερά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k και ε πάνω στη πλευρά (εξ. 4.5.3).
HKR, HER	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε δεξιά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k και ε πάνω στη πλευρά (εξ. 4.5.3).
HUL, HWL	περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας αριστερά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του λ (εξ. 4.5.2 και 4.5.4).
HUR, HWR	περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας δεξιά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του λ (εξ. 4.5.2 και 4.5.4).
KK, E	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε πάνω στη πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (εξ. 4.5.3).
LAMBDA U, W	περιέχει την τιμή της μεταβλητής λ (εξ. 4.5.4). περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας πάνω στη πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (εξ. 4.5.2).

TURB_XIFLXV

D1, D2 EK ,EE GAMMA_K	περιέχουν τις τιμές των συντελεστών d_1 και d_2 (εξ. 3.6.7). περιέχουν τις τιμές του διανύσματος R_{ke} (εξ. 3.6.5). περιέχει τη τιμή του συντελεστή Γ_k του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$ (εξ. 3.6.6).
GAMMA_E	περιέχει τη τιμή του συντελεστή Γ_ε του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$ (εξ. 3.6.6).
HKL, HEL	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε αριστερά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k_0 και ε_0 πάνω στη πλευρά.
HKR, HER	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε δεξιά της πλευράς της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k_0 και ε_0 πάνω στη πλευρά.
K_DOWN, E_DOWN	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε στην κάτω πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (δείκτης g στο σχήμα § 4.4). Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραγώγων k_ε και ε_ε πάνω στη πλευρά (εξ. 4.4.2.β και § 4.6).
K_UP, E_UP	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε στην άνω πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (δείκτης f στο σχήμα § 4.4). Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραγώγων k_ε και ε_ε πάνω στη πλευρά (εξ. 4.4.2.β και § 4.6).
K0, E0	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε πάνω στη πλευρά

VISC_TURB1 της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t . περιέχει την τιμή της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t .

TURB_ZEFLUX

EK, EE περιέχουν τις τιμές του διανύσματος G_{ke} (εξ. 3.6.5).
 HKD, HED περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε κάτω από την πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k και ε πάνω στη πλευρά (εξ. 4.5.3).
 HKU, HEU περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε πάνω από την πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k και ε πάνω στη πλευρά (εξ. 4.5.3).
 HUD, HWD περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας κάτω από την πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του λ (εξ. 4.5.2 και 4.5.4).
 HUU, HWU περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας πάνω από την πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του λ (εξ. 4.5.2 και 4.5.4).
 KK, E περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε πάνω στη πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (εξ. 4.5.3).
 LAMBDA περιέχει την τιμή της μεταβλητής λ (εξ. 4.5.4).
 U, W περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας πάνω στη πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (εξ. 4.5.2).

TURB_ZEFLXV

D2, D3 περιέχουν τις τιμές των συντελεστών d_2 και d_3 (εξ. 3.6.7).
 EK, EE περιέχουν τις τιμές του διανύσματος T_{ke} (εξ. 3.6.5).
 GAMMA_K περιέχει τη τιμή του συντελεστή Γ_k του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$ (εξ. 3.6.6).
 GAMMA_E περιέχει τη τιμή του συντελεστή Γ_ε του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$ (εξ. 3.6.6).
 HKD, HED περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε κάτω από την πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k_0 και ε_0 πάνω στη πλευρά.
 HKU, HEU περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε πάνω από την πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του k_0 και ε_0 πάνω στη πλευρά.
 K_L, E_L περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε στην αριστερή πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραγώγων k_ξ και ε_ξ πάνω στη πλευρά (εξ. 4.4.2.α και § 4.6).
 K_R, E_R περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ε στη δεξιά πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον

K0, E0	υπολογισμό των παραγώγων k_x και ϵ_x πάνω στη πλευρά (εξ. 4.4.2.α και § 4.6).
VISC_TURB1	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ϵ πάνω στη πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t . περιέχει την τιμή της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t .

WALL_FUNCTIONS

AP12	η απόσταση μεταξύ των κόμβων 1 – 2 που βρίσκονται πάνω στο τοίχωμα.
K0, E0	περιέχουν τις τιμές των μεγεθών k και ϵ στον κόμβο 2 (εξ. 4.8.4α και 4.8.4β)
KAPPA	περιέχει την τιμή της σταθεράς Von Karman: $\kappa=0,4$.
SD	περιέχει την τιμή της ποσότητας $\sqrt{z_x^2 + r_x^2}$.
SRPA	περιέχει τις τιμές της απόστασης y_2 κατά μήκος του κάτω και άνω στερεού ορίου του πλέγματος.
TW, TWU, TWW	η διατμητική τάση τ_{wall} πάνω στο τοίχωμα και οι συνιστώσες της αντίστοιχα.
U_ASTR	η ταχύτητα τριβής $u^\#$ (εξ. 4.8.1α και 4.8.2).
UUPA	περιέχει τις τιμές της παράλληλης ως προς το τοίχωμα ταχύτητας U_{p2} κατά μήκος του κάτω και άνω στερεού ορίου του πλέγματος.
UWA	περιέχει τις τιμές της παράλληλης ως προς το τοίχωμα ταχύτητας U_{p2} (εξ. 4.8.1α και 4.8.1β).
UZEW, WZEW	μετασηματισμένες μερικές παράγωγοι u_z και w_z (ή $u_{z,z}$ και $u_{r,z}$) πάνω στο τοίχωμα.
VISC_TURB XA, ZA Y2	η τυρβώδης συνεκτικότητα μ_t στα τοιχώματα. συντεταγμένες του κέντρου της υπολογιστικής κυψέλης. απόσταση του κέντρου της υπολογιστικής κυψέλης από το τοίχωμα.
YPLUS	αδιάστατη απόσταση y^{2+} μεταξύ του κόμβου 2 και του τοιχώματος (εξ. 4.8.3).

XIFLUX

B	περιέχει την τιμή της ποσότητας $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_z^2}$
EP, EU, EW EV0, EV1, EV2	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος E (εξ. 3.6.3). περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των ιδιοτιμών λ_0 , λ_1 και λ_2 (εξ. 4.3.11).
EVN G1, G2	περιέχει την τιμή της ιδιοτιμής λ_0 (εξ. 4.3.8 δ). περιέχουν τις τιμές των συντελεστών k_1 και k_2 (εξ. 4.3.17 α και β).
GN0, GN1, GN2	περιέχουν τις τιμές των προσήμων των ιδιοτιμών λ_0 , λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της εξ. 4.3.18.
HPL, HUL, HWL	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r),

HPR, HUR, HWR	μια υπολογιστική κυψέλη αριστερά και μια δεξιά, της πλευράς της κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των κύριων μεταβλητών αριστερά και δεξιά της πλευράς (εξ. 4.3.19).
HPLL, HULL, HWLL HPRR, HURR, HWRR	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r), δυο υπολογιστικές κυψέλες αριστερά και δυο δεξιά, της πλευράς της κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των κύριων μεταβλητών αριστερά και δεξιά της πλευράς (εξ. 4.3.19).
P, U, W	περιέχουν τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r) πάνω στις (εξ. 4.3.16 α, β και γ).
PPL, UUL, WWL PPR, UUR, WWR	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r), περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r), αριστερά και δεξιά της πλευράς της κυψέλης (εξ. 4.3.19).
R_1	περιέχει την τιμή του συντελεστή R_1 (εξ. 4.3.17 γ)
S	περιέχει την τιμή της ποσότητας $\sqrt{\lambda_0^2 + \beta}$.
U0, W0 PB1, U1, W1 PB2, U2, W2 UN, WN	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r) πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης για κάθε ιδιοτιμή λ_0 , λ_1 και λ_2 (εξ. 4.3.18). περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης.
XX, ZZ	περιέχουν τις τιμές των \bar{x} και \bar{z} αντίστοιχα (εξ. 4.3.8 δ).

XIFLXV

EU, EW VISC_TURB1	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος R (εξ. 3.6.3). περιέχει την τιμή της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης.
VISCOSITY	περιέχει την τιμή της αδιαστατοποιημένης ενεργούς συνεκτικότητας μ_{eff} .

ZEFLUX

B	περιέχει την τιμή της ποσότητας $\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_z^2}$
EP, EU, EW EV0, EV1, EV2	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος G (εξ. 3.6.3). περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των ιδιοτιμών λ_0 , λ_1 και λ_2 (εξ. 4.3.11).
EVN	περιέχει την τιμή της ιδιοτιμής λ_0 (εξ. 4.3.8 δ).
G1, G2	περιέχουν τις τιμές των συντελεστών k_1 και k_2 (εξ. 4.3.17 α και β).
GN0, GN1, GN2	περιέχουν τις τιμές των προσήμων των ιδιοτιμών λ_0 , λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της εξ. 4.3.18.
HPD, HUD, HWD HPU, HUU, HWU	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p , u , w (ή p , u_z , u_r), μια υπολογιστική κυψέλη κάτω και μια πάνω, της πλευράς της κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον

HPDD, HUDD, HWDD HPUU, HUUU, HWUU	υπολογισμό των κύριων μεταβλητών κάτω και πάνω από την πλευρά (εξ. 4.3.19). περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p, u, w (ή p, u_z, u_r), περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p, u, w (ή p, u_z, u_r), δυο υπολογιστικές κυψέλες κάτω και δυο πάνω, της πλευράς της κυψέλης. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των κύριων μεταβλητών κάτω και πάνω από την πλευρά (εξ. 4.3.19).
P, U, W	περιέχουν τις τιμές των p, u, w (ή p, u_z, u_r) πάνω στις χαρακτηριστικές (εξ. 4.3.16 α, β και γ).
PPD, UUD, WWD PPU, UUU, WWU R1	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p, u, w (ή p, u_z, u_r), κάτω και πάνω από την πλευρά της κυψέλης (εξ. 4.3.19). περιέχει την τιμή του συντελεστή R_1 (εξ. 4.3.17 γ).
S	περιέχει την τιμή της ποσότητας $\sqrt{\lambda_0^2 + \beta}$
U0, W0 PB1, U1, W1 PB2, U2, W2 UN, WN	περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές των p, u, w (ή p, u_z, u_r) πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης για κάθε ιδιοτιμή λ_0, λ_1 και λ_2 (εξ. 4.3.18). περιέχουν τις τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης.
XX, ZZ	περιέχουν τις τιμές των \bar{x} και \bar{z} αντίστοιχα, εκφρασμένα για την διεύθυνση ζ (εξ. 4.3.8 δ).

ZFLXV

EU, EW VISC_TURB1	περιέχουν τις τιμές του διανύσματος T (εξ. 3.6.3). περιέχει την τιμή της τυρβώδους συνεκτικότητας μ_t πάνω στην πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης.
VISCOSITY	περιέχει την τιμή της αδιαστατοποιημένης ενεργούς συνεκτικότητας μ_{eff} .
UZEW, WZEW	μετασχηματισμένες μερικές παράγωγοι u_z και w_z (ή $u_{z,\zeta}$ και $u_{r,\zeta}$) πάνω στο τοίχωμα (υπολογίζονται από τις συναρτήσεις τοιχώματος). Χρησιμοποιούνται μόνο για τις υπολογιστικές κυψέλες που βρίσκονται πάνω σε στερεό τοίχωμα.

Περιγραφή Υπορουτίνων

AXISYMMETRIC	Η υπορουτίνα AXISYMMETRIC εφαρμόζει τους πρόσθετους όρους στην περίπτωση επίλυσης αξονοσυμμετρικής ροής. Οι όροι αυτοί είναι τα διανύσματα K, L και οι αξονοσυμμετρικοί όροι $(-2/3) \cdot (u_r/r)$ των διατμητικών τάσεων τ_{zz} και τ_{rr} των διανύσματος R και T των εξισώσεων Navier-Stokes (εξ. 3.6.3 και 3.6.4). Καλείται μόνο όταν είναι IAXIS=1 (αξονοσυμμετρική ροή).
--------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

BC	Η υπορουτίνα BC εφαρμόζει τις οριακές συνθήκες (boundary conditions) για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes (§ 4.8). Καλείται πάντα.
JACOBI	Η υπορουτίνα JACOBI χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της γεωμετρίας του πλέγματος. Σταματά την επίλυση σε περίπτωση που εμφανίζονται υπολογιστικές κυψέλες με αρνητικό εμβαδό, το οποίο σημαίνει ότι το πλέγμα δεν είναι κατασκευασμένο σωστά. Καλείται πάντα.
SWEEP	Η υπορουτίνα SWEEP καλεί όλες τις υπορουτίνες που απαιτούνται για την επίλυση του πεδίου ροής και επίσης εφαρμόζει την μέθοδο Runge – Kutta 4ης τάξης για τη χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier-Stokes και $k - \epsilon$. Καλείται πάντα.
TURB_AXISYMMETRIC	Η υπορουτίνα TURB_AXISYMMETRIC εφαρμόζει στην περίπτωση επίλυσης τυρβώδους ροής, τους πρόσθετους όρους λόγω αξονοσυμμετρίας. Οι όροι αυτοί είναι τα διανύσματα $K_{k\epsilon}$, $L_{k\epsilon}$ και $P_{k\epsilon}$ 3 των εξισώσεων $k - \epsilon$ (εξ. 3.6.10 και 3.6.11). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) και IAXIS=1 (αξονοσυμμετρική ροή).
TURB_BC	Η υπορουτίνα TURB_BC εφαρμόζει τις οριακές συνθήκες για την επίλυση των εξισώσεων $k - \epsilon$ (§ 4.8). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή).
TURB_PRODUCTION	Η υπορουτίνα TURB_PRODUCTION εφαρμόζει στην περίπτωση επίλυσης τυρβώδους ροής, τον όρο παραγωγής. Ο όρος αυτός είναι το διάνυσμα $P_{k\epsilon}$ των εξισώσεων $k - \epsilon$ (εξ. 3.6.8). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) .
TURB_XIFLUX	Η υπορουτίνα TURB_XIFLUX χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του μη συνεκτικού διανύσματος $E_{k\epsilon,\xi}$ των εξισώσεων $k - \epsilon$, στις πλευρές (i-1/2, k) και (i+1/2, k) της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ξ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3 και εξ. 3.6.5 και 4.5.1α). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) .
TURB_XIFLXV	Η υπορουτίνα TURB_XIFLXV χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του συνεκτικού διανύσματος $R_{k\epsilon,\xi}$ των εξισώσεων $k - \epsilon$, στις πλευρές (i-1/2, k) και (i+1/2, k) της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ξ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3, § 4.6 και εξ. 3.6.5). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) .

TURB_ZEFLUX	Η υπορουτίνα TURB_ZEFLUX χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του μη συνεκτικού διανύσματος $G_{ke,\zeta}$ των εξισώσεων $k - \epsilon$, στις πλευρές $(i, k-1/2)$ και $(i, k+1/2)$ της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ζ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3 και εξ. 3.6.5 και 4.5.1β). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) .
TURB_ZEFLXV	Η υπορουτίνα TURB_ZEFLXV χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του συνεκτικού διανύσματος $T_{ke,\zeta}$ των εξισώσεων $k - \epsilon$, στις πλευρές $(i, k-1/2)$ και $(i, k+1/2)$ της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ζ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3, § 4.6 και εξ. 3.6.5). Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) .
WALL_FUNCTIONS	Η υπορουτίνα WALL_FUNCTIONS εφαρμόζει στη περίπτωση επίλυσης τυρβώδους ροής, τη μέθοδο των συναρτήσεων τοιχώματος για τον προσδιορισμό των διατμητικών τάσεων πάνω σε στερεά τοιχώματα. Καλείται μόνο όταν είναι ITURB=1 (τυρβώδης ροή) και εφαρμόζεται στο άνω ή/και κάτω όριο του πλέγματος μόνο όταν είναι ISYMMETRY_UP ή/και ISYMMETRY_DOWN=0 (στερεό τοίχωμα).
XIFLUX	Η υπορουτίνα XIFLUX χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του μη συνεκτικού διανύσματος E_ξ των εξισώσεων Navier- Stokes, στις πλευρές $(i-1/2, k)$ και $(i+1/2, k)$ της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ξ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3 και εξ. 3.6.3 και 4.3.2). Καλείται πάντα.
XIFLXV	Η υπορουτίνα XIFLXV χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του συνεκτικού διανύσματος R_ξ των εξισώσεων Navier- Stokes, στις πλευρές $(i-1/2, k)$ και $(i+1/2, k)$ της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ξ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3 και εξ. 3.6.3 και 4.4.1.α). Καλείται πάντα.
ZEFLUX	Η υπορουτίνα ZEFLUX χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του μη συνεκτικού διανύσματος G_ζ των εξισώσεων Navier- Stokes, στις πλευρές $(i, k-1/2)$ και $(i, k+1/2)$ της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ζ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3 και εξ. 3.6.3 και 4.3.2). Καλείται πάντα.
ZEFLXV	Η υπορουτίνα ZEFLXV χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό του συνεκτικού διανύσματος T_ζ των εξισώσεων Navier- Stokes, στις πλευρές $(i, k-1/2)$ και $(i, k+1/2)$ της υπολογιστικής κυψέλης κατά τη ζ -διεύθυνση (σχήμα § 4.3 και εξ. 3.6.3 και 4.4.1.β). Καλείται πάντα.

6.3 Δημιουργία πλέγματος – Δομημένα πλέγματα

Οι πεπερασμένες διαφορικές εξισώσεις επιλύονται αποτελεσματικότητα σε ένα ορθογώνιο πεδίο (για 2 – D εφαρμογές και ένα ισοδύναμο εξαεδρικό πεδίο για 3 – D εφαρμογές) με ίσες αποστάσεις μεταξύ των κόμβων. Παρόλα αυτά, η πλειονότητα των φυσικών πεδίων που συναντάμε δεν έχουν ορθογώνιο σχήμα. Γι αυτό, ο μετασχηματισμός του μη ορθογώνιου φυσικού πεδίου σε ένα ορθογώνιο υπολογιστικό πεδίο όπου οι κόμβοι ισαπέχουν μεταξύ τους. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η παραπάνω διαδικασία επιτρέπει την ευθυγράμμιση των συντεταγμένων κατά μήκος του σώματος διευκολύνοντας την εισαγωγή των οριακών συνθηκών. Ο στόχος της δημιουργίας πλέγματος είναι να αναγνωρίσει την τοποθεσία των κόμβων στο υπολογιστικό πεδίο και την τοποθεσία των αντίστοιχων κόμβων στο φυσικό πεδίο. Επιπλέον, η μετρικότητα και ο ιακωβιανός μετασχηματισμός οι οποίοι απαιτούνται για την επίλυση των εξισώσεων ροής υπολογίζονται μέσα στην ρουτίνα δημιουργίας του πλέγματος.

Τυπικά η μεθοδολογίες δημιουργίας πλεγμάτων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε *αλγεβρικές* και *διαφορικές μεθόδους*. Στην δεύτερη περίπτωση το σχήμα βασίζεται στην επίλυση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων και αναλύονται σε ελλειπτικά, παραβολικά ή υπερβολικά. Η αλγεβρική μέθοδος παραγωγής πλέγματος χρησιμοποιεί μια ευθεία συναρτησιακή περιγραφή του μετασχηματισμού των συντεταγμένων μεταξύ του υπολογιστικού και του φυσικού χωρίου. Η ευρέως χρησιμοποιούμενη αλγεβρική τεχνική η οποία ονομάζεται υπερπεπερασμένη παρεμβολή. Δεδομένης της κατανομής των κόμβων σε όλα τα όρια, παράγει τα σημεία του πλέγματος μέσα στο φυσικό πεδίο με παρεμβολή. Συγκεκριμένες διατυπώσεις αυτής της μεθόδου επιτρέπουν τον γωνιακό και μη έλεγχο των διαστημάτων του πλέγματος στα όρια. Για την παρεμβολή χρησιμοποιούνται τεχνικές που περιλαμβάνουν πολυώνυμα όπως πολυώνυμα κατά Hermite και splines. Οποιαδήποτε κατηγορία θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν τα εξής :

- Μια χαρτογράφηση η οποία εγγυάται ένα προς ένα αντιστοιχία εξασφαλίζοντας ότι οι γραμμές του πλέγματος της ίδιας κατεύθυνσης δεν διασταυρώνονται
- Η ομαλότητα της διανομής των κόμβων του πλέγματος
- Η ορθογωνιότητα των γραμμών του πλέγματος
- Η ικανότητα τοπικής πυκνώσεως (κυρίως κοντά στα τοιχώματα)

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε την πρώτη κατηγορία για αυτό και στην συνέχεια θα αναφερθούμε στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθόδου.

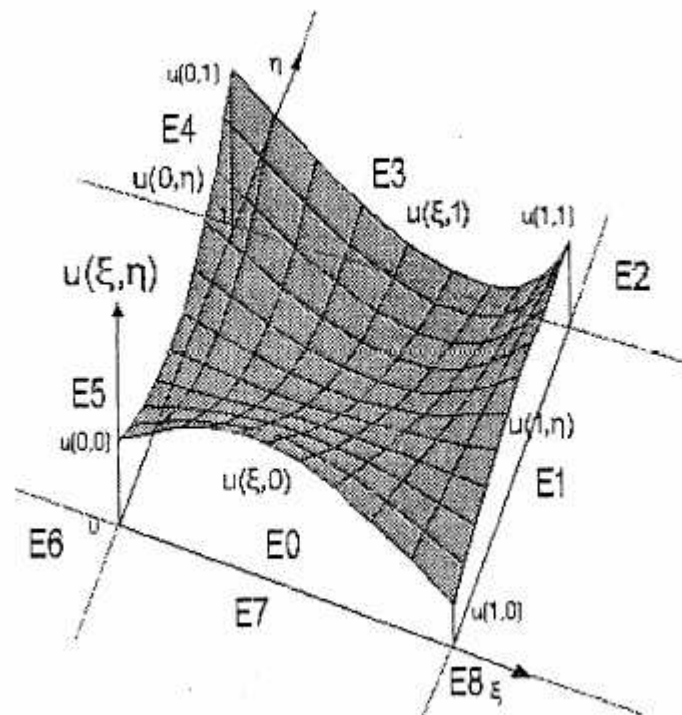
Πλεονεκτήματα :

- Είναι πολύ γρήγορα από υπολογιστική σκοπιά.
- Η μετρικότητα μπορεί να αξιολογηθεί αναλυτικά, αποτρέποντας την εμφάνιση αριθμητικών σφαλμάτων.
- Η ικανότητα για πύκνωση των κόμβων σε διαφορετικές περιοχές μπορεί εύκολα να επιβληθεί.

Μειονεκτήματα :

- Ασυνέχειες στο όριο μπορούν να διαδίδονται στην εσωτερική περιοχή κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα λόγω των σημαντικών μεταβολών στην μετρικότητα.
- Η ομαλότητα και η λοξότητα του πλέγματος μπορεί να είναι δύσκολος ο έλεγχός τους.

Στην παρούσα εργασία έγινε χρήση της μεθοδολογίας Coons για την δημιουργία του πλέγματος, την οποία θα περιγράψουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

6.4 Περιγραφή της μεθόδου δημιουργίας πλέγματος (μέθοδος Coons).

Σχήμα 6.1 Επιφάνεια Coons $u(\xi, \eta)$

Η λογική στην οποία βασίζεται η μεθοδολογία Coons συνίσταται στη διαίρεση της συνολικής υπό εξέταση επιφάνειας σε επιμέρους επιφάνειες E_i . Συγκεκριμένα από το σχήμα 6.1 απεικονίζονται οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (ξ, η) καθώς και η κεντρική επιμέρους επιφάνεια E_0 , που συμβολίζεται με $u(\xi, \eta)$, η οποία περιβάλλεται από τις επιμέρους επιφάνειες E_1 έως E_8 .

Το σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων ξ, η που δημιουργείται είναι *αδιάστατο* και ισχύει η παραδοχή :

$$0 \leq \xi \leq 1 \text{ και } 0 \leq \eta \leq 1$$

Η επιμέρους επιφάνεια $u(\xi, \eta)$ έχει τις παρακάτω οριακές καμπύλες στις πλευρές $\xi = 0$ και 1 και $\eta = 0$ και 1 που την περιβάλλουν :

$$\xi = 0 \Rightarrow u(0, \eta)$$

$$\xi = 1 \Rightarrow u(1, \eta)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow u(\xi, 0)$$

$$\eta = 1 \Rightarrow u(\xi, 1)$$

Υπολογίζοντας τις 4 οριακές καμπύλες $u(0, \eta)$, $u(1, \eta)$, $u(\xi, 0)$ και $u(\xi, 1)$ με βάση την μέθοδο Coons προσδιορίζουμε επαρκώς την ζητούμενη επιφάνεια $u(\xi, \eta)$. Ο συλλογισμός βασίζεται στο ότι στην ξ - κατεύθυνση η οριακή καμπύλη $u(0, \eta)$ δεν έχει καμία επίδραση στο σημείο $\xi = 1$ και ομοίως η καμπύλη $u(1, \eta)$ δεν έχει καμία επίδραση στο σημείο $\eta = 0$ και αντιστοίχως η $u(\xi, 0)$ στο $\eta = 1$ και η $u(\xi, 1)$ στο $\xi = 0$.

Με βάση λοιπόν την παραπάνω θεώρηση το τμήμα που επηρεάζεται από τις οριακές καμπύλες $u(0, \eta)$ και $u(1, \eta)$ μπορεί να περιγραφεί από μια επιφάνεια A_ξ (σχήμα 6.2) κατά την ξ - κατεύθυνση :

$$A_\xi = u(0, \eta) \cdot (1 - \xi) + u(1, \eta) \cdot \xi$$

Επαληθεύοντας την παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι για $\xi = 0$ η A_ξ ταυτίζεται με την $u(0, \eta)$ ενώ για $\xi = 1$ με την $u(1, \eta)$.

Αντίστοιχα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τις καμπύλες $u(\xi, 0)$ και $u(\xi, 1)$ και προκύπτουν αντίστοιχες εξισώσεις. Στην η - κατεύθυνση οι δυο καμπύλες συνθέτουν την επιφάνεια A_η (σχήμα 6.2) :

$$A_\eta = u(\xi, 0) \cdot (1 - \eta) + u(\xi, 1) \cdot \eta$$

Εάν τώρα, προστεθούν οι δυο επιφάνειες προκύπτει :

$$A_{\xi} + A_{\eta} = u(0, \xi) \cdot (1 - \xi) + u(1, \eta) \cdot \xi + u(\xi, 0) \cdot (1 - \eta) + u(\xi, 1) \cdot \eta$$

και το άθροισμα τους παίρνει τις εξής τιμές στις 4 πλευρές για $\xi = 0, 1$ και $\eta = 0, 1$:

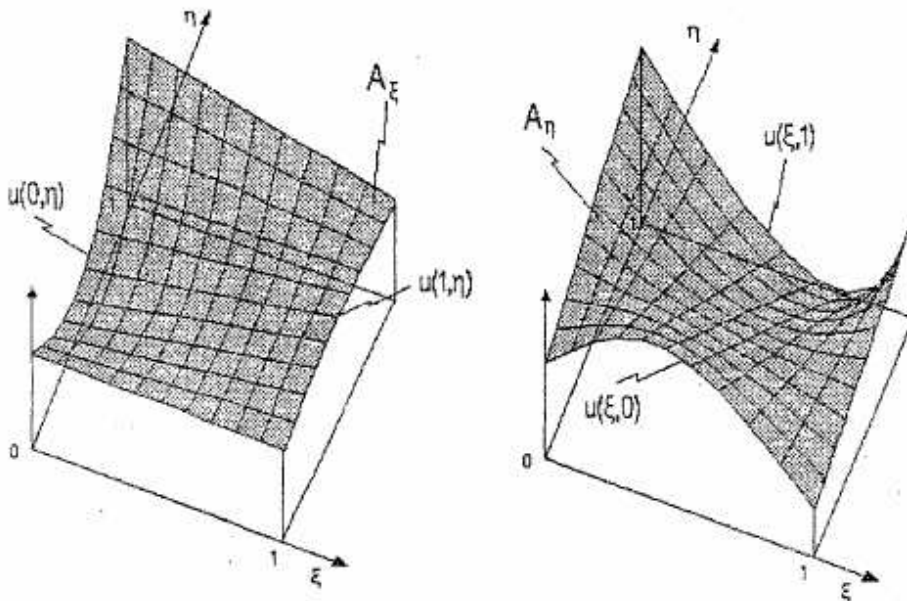
$$A_{\xi} + A_{\eta} \Big|_{\xi=0} = u(0, \eta) \cdot 1 + u(0, 0) \cdot (1 - \eta) + u(0, 1) \cdot \eta$$

$$A_{\xi} + A_{\eta} \Big|_{\xi=1} = u(1, \eta) \cdot 1 + u(1, 0) \cdot (1 - \eta) + u(1, 1) \cdot \eta$$

$$A_{\xi} + A_{\eta} \Big|_{\eta=0} = u(\xi, 0) \cdot 1 + u(0, 0) \cdot (1 - \xi) + u(1, 0) \cdot \xi$$

$$A_{\xi} + A_{\eta} \Big|_{\eta=1} = u(\xi, 1) \cdot 1 + u(0, 1) \cdot (1 - \xi) + u(1, 1) \cdot \xi$$

Το άθροισμα των επιφανειών $A_{\xi} + A_{\eta}$ δεν ταυτίζεται επομένως στα όρια $\xi, \eta = 0$ και 1 του μοναδιαίου τετραπλεύρου με τις υπάρχουσες οριακές καμπύλες καθώς ότι παρουσιάζονται στην παραπάνω εξίσωση πρόσθετοι όροι που εξαρτώνται από τις διακριτές τιμές $u(0,0)$, $u(1,0)$, $u(0,1)$ και $u(1,1)$ και συνδέονται με τις συναρτήσεις $(1-\xi)$, ξ , $(1-\eta)$ και η .



Σχήμα 6.2 Επιφάνειες A_{ξ} και A_{η}

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι οι πρόσθετοι αυτοί όροι συνθέτουν μια καινούργια επιφάνεια $A_{\xi\eta}$ τότε έχουμε :

$$A_{\xi\eta} = u(0,0) \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) + u(0,1) \cdot (1 - \xi) \cdot \eta + u(1,0) \cdot \xi \cdot (1 - \eta) + u(1,1) \cdot \xi \cdot \eta$$

Ομοίως για $\xi, \eta = 0$ και 1 :

$$A_{\xi\eta} |_{\xi=0} = u(0,0) \cdot (1-\eta) + u(0,1) \cdot \eta$$

$$A_{\xi\eta} |_{\xi=1} = u(1,0) \cdot (1-\eta) + u(1,1) \cdot \eta$$

$$A_{\xi\eta} |_{\eta=0} = u(0,0) \cdot (1-\xi) + u(1,0) \cdot \xi$$

$$A_{\xi\eta} |_{\eta=1} = u(0,1) \cdot (1-\xi) + u(1,1) \cdot \xi$$

Αφού προσδιορίσαμε την επιφάνεια $A_{\xi\eta}$ προχωρούμε στην δημιουργία της εξίσωσης που θα περιγράφει αποκλειστικά στην ζητούμενη υπό περιγραφή επιφάνεια $u(\xi, \eta)$:

$$u(\xi, \eta) = A_{\xi} + A_{\eta} - A_{\xi\eta}$$

Η επιφάνεια που προκύπτει από την πάνω σχέση ονομάζεται *επιφάνεια Coons*. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου παρεμβολής Coons είναι ότι η μαθηματική μορφή των οριακών καμπυλών $u(\xi,0)$, $u(\xi,1)$, $u(0,\eta)$ και $u(1,\eta)$ δεν υφίστατο κανένα περιορισμό και μπορεί να είναι τύπου Bezier , S – plines κλπ.

Οι γραμμικές συναρτήσεις $1 - \xi$, ξ , η και $1 - \eta$ που εμφανίστηκαν σαν συναρτήσεις παρεμβολής των αντίστοιχων οριακών καμπυλών ονομάζονται σύμφωνα με την μέθοδο Coons «συναρτήσεις επιρροής» (blending functions) και συμβολίζονται με $E_i(\xi)$ και $E_j(\eta)$ (σχήμα 6.3). Συγκεκριμένα έχουμε :

$$E_0(\xi) = 1 - \xi$$

$$E_1(\xi) = \xi$$

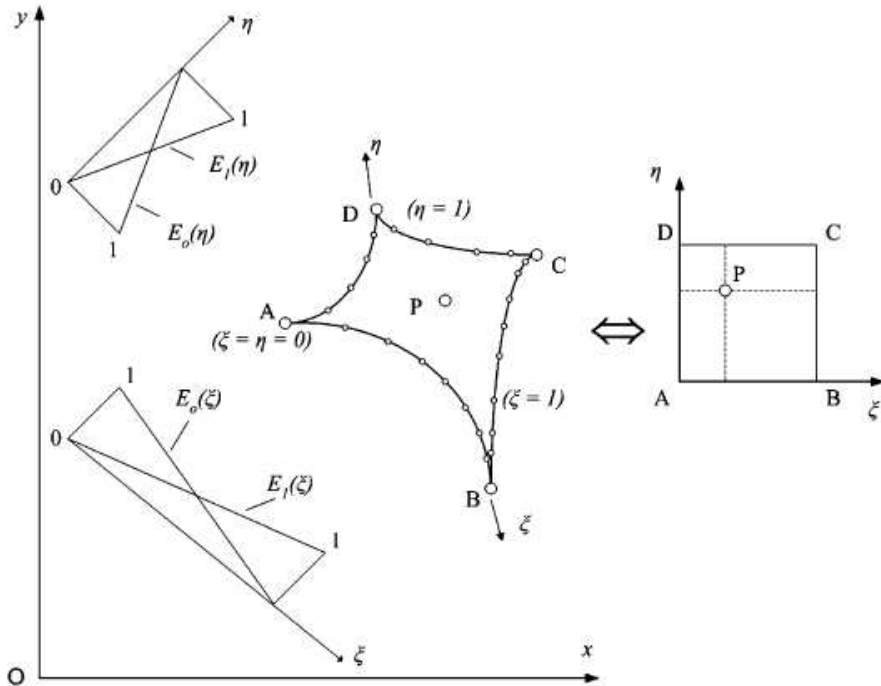
$$E_0(\eta) = 1 - \eta$$

$$E_1(\eta) = \eta$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις επιρροής στην έκφραση για την επιφάνεια $A_{\xi\eta}$ προκύπτει :

$$A_{\xi\eta} = u(0,0) \cdot E_0(\xi) \cdot E_0(\eta) + u(0,1) \cdot E_0(\xi) \cdot E_1(\eta) + u(1,0) \cdot E_1(\xi) \cdot E_0(\eta) + u(1,1) \cdot E_1(\xi) \cdot E_1(\eta)$$

$$\Rightarrow A_{\xi\eta} = \sum_{i,j=0,1} u(i, j) \cdot E_i(\xi) \cdot E_j(\eta)$$



Σχήμα 6.3 Καμπυλόγραμμη επιφάνεια σε συντεταγμένες ξ, η και x, y .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω είναι έκδηλο ότι η μεθοδολογία Coons μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην δημιουργία πλεγμάτων σε καμπύλες επιφάνειες όπως απεικονίζεται στο σχήμα 6.3 σε διδιάστατο καρτεσιανό σύστημα καθώς και στο μοναδιαίο τετράπλευρο ξ, η . Έτσι κάθε οριακή καμπύλη $\xi = 0, 1$ και $\eta = 0, 1$ της υπό εξέταση επιφάνειας περιγράφεται από τις αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες x και z οι οποίες είναι συναρτήσεις των αδιάστατων συντεταγμένων ξ, η . Άρα προκύπτει για τις $x -$ συντεταγμένες :

$$x(0, \eta), x(1, \eta), x(\xi, 0), x(\xi, 1)$$

και τις $z -$ συντεταγμένες :

$$z(0, \eta), z(1, \eta), z(\xi, 0), z(\xi, 1)$$

των 4 οριακών καμπυλών.

Με την χρήση της παρεμβολής Coons αλλά και με την εύρεση των οριακών καμπυλών καθίσταται δυνατή η περιγραφή όλης της καμπύλης επιφάνειας μέσω των αντίστοιχων εξισώσεων :

$$x(\xi, \eta) = A_\xi + A_\eta - A_{\xi\eta} = \sum_{i=0,1} x(i, \eta) \cdot E_i(\xi) + \sum_{j=0,1} x(\xi, j) \cdot E_j(\eta) - \sum_{i,j=0,1} x(i, j) \cdot E_i(\xi) \cdot E_j(\eta)$$

$$z(\xi, \eta) = A_\xi + A_\eta - A_{\xi\eta} = \sum_{i=0,1} z(i, \eta) \cdot E_i(\xi) + \sum_{j=0,1} z(\xi, j) \cdot E_j(\eta) - \sum_{i,j=0,1} z(i, j) \cdot E_i(\xi) \cdot E_j(\eta)$$

Στο σύστημα των αδιάστατων συντεταγμένων ξ και η , η καμπύλη επιφάνεια μετασχηματίζεται σε ένα μοναδιαίο τετράπλευρο και οι καμπύλες $\xi, \eta = \text{const.}$ σε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες ξ και η .

6.5 Ο κώδικας σε Fortran

```

PROGRAM TWO_D_AXISYMMETRIC_WITH_TURBULENCE
C
C -----
C                               N.T.U.A   - L.H.T.       21-8-93
C                                               FEBR. 2002
C   CODE FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF INCOMPRESSIBLE EQUATIONS
C   BY THE INTRODUCTION OF PSEYDO-COMPRESSIBILITY.
C
C   NAVIER-STOKES EQUATIONS - EXPLICIT METHOD - 2D
C   WITH RUNGE-KUTTA 4 TH ORDER
C
C   GOVATSOS P. - DRIKAKIS D.
C   LIALIOUTIS STEFANOS - SEPT. 2005
C   KOYTROGIANNIS THEOXARIS - OKT. 2009
C   PROFESSOR :   PAPANTONIS D.
C
C -----
C
C   INCLUDE 'COMMON.DAT'
C   INCLUDE 'INPUT.DAT'
C
C   OPEN (1, FILE='GRID.DAT')
C   OPEN (2, FILE='RESIDUALS.DAT')
C   OPEN (3, FILE='RESULTS.PLT')
C   OPEN (4, FILE='PROFIL.DAT')
C   OPEN (5, FILE='FREE_STREAM.DAT')
C
C   WRITE (*,*) ' IP1 x IP2 :',IP1,IP2
C   ZERO = 1.E-6
C   PI   = 4.*ATAN(1.)
C
C   CR1=1.      ! D_in = CR1 * R
C   CR2=2.      ! D_in = CR2 * R   : FOR SYMMETRIC PROBLEMS (HALF
GRID)
C
C -----
C           TURBULENCE MODEL'S CONSTANTS
C -----
C
C   CM      = 0.09
C   SIGMA_K = 0.9
C   SIGMA_E = 1.22
C   CE1     = 1.44
C   CE2     = 1.92
C   EPSILON = 9.79
C   KAPPA   = 0.419
C
C -----
C   AR : COEFFICIENTS FOR THE RUNGE KUTTA METHOD
C
C   AR(1) = 0.0
C   AR(2) = 0.5
C   AR(3) = 0.5
C   AR(4) = 1.0
C
C -----
C

```

```

DO I=1,IP1 ! initialization
  EP(I)=0.
  EU(I)=0.
  EW(I)=0.
  EVV(I)=0.
  DO K=1,IP2
    DO L=1,4
      EVAV(L,I,K)=0.
    ENDDO
    X(I,K)=0.
    Z(I,K)=0.
C
    PS(I,K)=0.
    US(I,K)=0.
    WS(I,K)=0.
    PE(I,K)=0.
    UE(I,K)=0.
    WE(I,K)=0.
    PH(I,K)=0.
    UH(I,K)=0.
    WH(I,K)=0.
C
    UZEW(I,K)=0.
    WZEW(I,K)=0.
C
    IF (ITURB.EQ.1) THEN
      KS(I,K)=0.
      ES(I,K)=0.
      KN(I,K)=0.
      EN(I,K)=0.
      KH(I,K)=0.
      EH(I,K)=0.
      VISC_TURB(I,K)=0.
    ENDIF
C
  ENDDO
ENDDO
C
DO I=1,IP3 ! initialization
  DO J=1,IP1
    DO K=1,IP2
      PHR(I,J,K)=0.
      UHR(I,J,K)=0.
      WHR(I,J,K)=0.
C
      IF (ITURB.EQ.1) THEN
        KHR(I,J,K)=0.
        EHR(I,J,K)=0.
      ENDIF
C
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
C
RES10=1.E6
RES20=1.E6
RES30=1.E6
C
C -----
C READ MESH
C -----
C

```

```

C
WRITE(*,*) ' READ AND CONTROL MESH. '
C
READ(1,*) IE,KE          ! FROM FILE='GRID.DAT'
IF (ITEU.EQ.0) ITEU=IE
C
IE=IE+1
KE=KE+1
ITEU_D=ITEU_D+1
ITEL=ITEL+1
ITEU=ITEU+1
C
IST=0
IF (IE.GT.IP1) THEN
  WRITE(*,*) ' '
  WRITE(*,*) ' INCREASE IP1:  IP1>',IE
  IST=1
ENDIF
C
IF (KE.GT.IP2) THEN
  WRITE(*,*) ' '
  WRITE(*,*) ' INCREASE IP2:  IP2>',KE
  IST=1
ENDIF
C
IF (IST.EQ.1) STOP
C
READ (1,*) ((X(I,K),Z(I,K),I=2,IE),K=2,KE)  ! FROM
FILE='GRID.DAT'
C
WRITE(*,*) ' GRID :',IE,' x',KE
C
CALL JACOBI
C
C
C  -----
C      A SERIES OF PSEYDO-CELLS
C      AROUND OF THE INITIAL GRID
C  -----
C
C  ===== INFLOW =====
C
DO K=2,KE
  X(1,K)=2.*X(2,K)-X(3,K)
  Z(1,K)=2.*Z(2,K)-Z(3,K)
ENDDO
C
C  ===== LOWER LIMIT =====
C
DO I=1,IE
  X(I,1)=2.*X(I,2)-X(I,3)
  Z(I,1)=2.*Z(I,2)-Z(I,3)
ENDDO
C
C  ===== UPPER LIMIT =====
C
DO I=1,IE
  X(I,KE+1)=2.*X(I,KE)-X(I,KE-1)
  Z(I,KE+1)=2.*Z(I,KE)-Z(I,KE-1)
ENDDO
C
C  ===== OUTFLOW =====

```



```

C
DO KI=1,KE+1
  X(IE+1,KI)=2.*X(IE,KI)-X(IE-1,KI)
  Z(IE+1,KI)=2.*Z(IE,KI)-Z(IE-1,KI)
ENDDO

C
C
C
-----

DO I=1,IE+1
  DO K=1,KE+1
    PE(I,K)=PS(I,K)
    UE(I,K)=US(I,K)
    WE(I,K)=WS(I,K)

C
    IF (ITURB.EQ.1) THEN
      KN(I,K)=KS(I,K)
      EN(I,K)=ES(I,K)
      IF (EN(I,K).EQ.0.) EN(I,K)=ZERO
      VISC_TURB(I,K)=REYNOLDS*CM*KN(I,K)**2/EN(I,K)
    ENDIF

C
  ENDDO
ENDDO

C
C
C
-----
INITIAL CONDITIONS
-----

C
C
C
-----
THE ORDER OF INTERPOLATION
-----

C
IF (IFFF.EQ.1) THEN
  FFFA=1.
  FFFB=0.
  FFFC=0.
  FFFD=0.
ENDIF

C
IF (IFFF.EQ.2) THEN
  FFFA=3./2.
  FFFB=1./2.
  FFFC=0.
  FFFD=0.
ENDIF

C
IF (IFFF.EQ.3) THEN
  FFFA=5./6.
  FFFB=1./6.
  FFFC=2./6.
  FFFD=0.
ENDIF

C
IF (IFFF.EQ.4) THEN
  FFFA=7./12.
  FFFB=1./12.
  FFFC=7./12.
  FFFD=-1./12.
ENDIF

C

```

```

C -----
C
C -----
C          STANDARD INITIAL GUESS
C              +
C          BOUNDARY CONDITIONS
C -----
C
C          IA=1
C          IB=IE
C          KA=2                ! WALL
C          KB=KE-1
C
C          IF (ISYMMETRY_DOWN.EQ.1) KA=1    ! SYMMETRY DOWN
C          IF (ISYMMETRY_UP.EQ.1)  KB=KE    ! SYMMETRY UP
C
C          DO I=IA,IB
C             DO K=KA,KB
C
C                 PS(I,K)=0.
C                 US(I,K)=0.
C                 WS(I,K)=0.
C                 PE(I,K)=PPER/BETA
C                 UE(I,K)=CU * QPER
C                 WE(I,K)=CW * QPER
C
C                 IF (I.LT.ITEL .OR. I.GT.ITEU_D) THEN
C                     PS(I,1)=0.
C                     US(I,1)=0.
C                     WS(I,1)=0.
C                     UE(I,1)=1.
C                     WE(I,1)=0.
C                     UE(I,KE)=CU * QPER
C                     WE(I,KE)=CW * QPER
C                 ENDIF
C                 IF (I.LT.ITEL .OR. I.GT.ITEL) THEN
C                     PS(I,KE)=0.
C                     US(I,KE)=0.
C                     WS(I,KE)=0.
C                     PE(I,KE)=1.
C                 ENDIF
C
C                 IF (I .GT. CIU*IE) UE(I,K)=CQU*QPER
C                 IF (I .GT. CIW*IE) WE(I,K)=CQW*QPER
C
C                 IF (I .GT. 35 .AND. I.LE.ITEU_D) UE(I,K)= 2.*CQU*QPER
C                 IF (I .GT. 37 .AND. I.LE.ITEU) WE(I,K)=-0.7*QPER
C                 IF (I .GT. ITEU_D+5) UE(I,K)=2.*CQU*QPER
C                 IF (I .GT. ITEU_D) WE(I,K)=0.
C
C             IF (ITURB.EQ.1) THEN
C                 C=CR1                ! C=1.
C                 IF (ISYMMETRY_UP.EQ.1 .OR. ISYMMETRY_DOWN.EQ.1) C=CR2
C
C             ! C=2.
C
C                 D_IN=C*ABS(Z(2,KE)-Z(2,2))
C                 IF (INFLOW.EQ.1)
C                 D_IN=C*AMAX1(ABS(Z(2,2)),ABS(Z(2,KE)))    ! RADIAL INFLOW
C
C                 KS(I,K)=0.
C                 ES(I,K)=0.
C                 KN(I,K)=0.03*QPER**2

```

```

EN(I,K)=CM*KN(I,K)**1.5/(0.005*D_IN)
IF (EN(I,K).LT.ZERO) EN(I,K)=ZERO
VISC_TURB(I,K)=REYNOLDS*CM*KN(I,K)**2/EN(I,K)
C
      ENDIF
C
      ENDDO
ENDDO
C
DO K=1,IP2
  DO I=1,IP1
    PS(I,K)=PE(I,K)
    US(I,K)=UE(I,K)
    WS(I,K)=WE(I,K)
C
    IF (ITURB.EQ.1) THEN
      KS(I,K)=KN(I,K)
      ES(I,K)=EN(I,K)
    ENDIF
C
  ENDDO
ENDDO
C
-----
C
C          CHECK MESH
C
C
-----
CALL JACOBI
WRITE(*,*) ' BEGIN TIME STEPS. '
WRITE(*,*) ' ITEL, ITEU =',ITEL,', ',ITEU
WRITE(*,*) ' IE, KE =',IE,', ',KE
WRITE(*,*) ' '
WRITE(*,*) ' Re= ', REYNOLDS
WRITE(*,*) ' CFL= ',CFL
WRITE(*,*) ' BETA=',BETA
WRITE(*,*) ' QPER=',QPER
WRITE(*,*) ' '
C
IF (INFLOW.EQ.0) THEN
      ! AXIAL INFLOW
      IF (INLET.EQ.0) WRITE(*,*) ' U_INLET =',QPER
      IF (INLET.EQ.1) WRITE(*,*) ' U_INLET =',QPER,'*(1-R^2)'
      IF (INLET.EQ.2) WRITE(*,*) ' U_INLET =',QPER,'*(1-R)^(1/7)'
ENDIF
C
IF (INFLOW.EQ.1) THEN
      ! RADIAL INFLOW
      IF (INLET.EQ.0) WRITE(*,*) ' W_INLET =',CW*QPER
      IF (INLET.EQ.1) WRITE(*,*) ' W_INLET =',CW*QPER,'*(1-R^2)'
      IF (INLET.EQ.2) WRITE(*,*) ' W_INLET =',CW*QPER,'*(1-
R)^(1/7)'
ENDIF
C
WRITE(*,*) ' '
IF (INFLOW.EQ.0) WRITE(*,*) ' INFLOW = AXIAL '
IF (INFLOW.EQ.1) WRITE(*,*) ' INFLOW = RADIAL '
C
WRITE(*,*) ' '
IF (IAXIS.EQ.1) WRITE(*,*) ' AXISYMMETRIC = YES '
IF (IAXIS.NE.1) WRITE(*,*) ' AXISYMMETRIC = NO '
IF (ITURB.EQ.1) WRITE(*,*) ' TURBULENCE = YES '
IF (ITURB.NE.1) WRITE(*,*) ' TURBULENCE = NO '
WRITE(*,*) ' '

```

```

C      IF ( IAXIS.EQ.0 ) THEN
W'      IF ( ITURB.NE.1 ) WRITE( *, * ) '           P           U
W      IF ( ITURB.EQ.1 ) WRITE( *, * ) '           P           U
W      $           K           E'
C      ENDIF
C      IF ( IAXIS.EQ.1 ) THEN
Ur'      IF ( ITURB.NE.1 ) WRITE( *, * ) '           P           Uz
Ur      IF ( ITURB.EQ.1 ) WRITE( *, * ) '           P           Uz
Ur      $           K           E'
C      ENDIF
C      WRITE( *, * ) ' '
C      WRITE( *, * ) ' '
C      -----
C      BEGIN  TIME-STEPS
C      -----
C      DO NIT=1, ISTOP           ! END OF CALCULATIONS IF NIT>ISTOP
C      IF ( NIT.EQ. ISTOP ) GOTO 22
C      CALL SWEEP
C      22  CONTINUE
C      RES1=0.
C      RES2=0.
C      RES3=0.
C      RES4=0.
C      RES5=0.
C      DO K=2, KE-1
C        DO I=2, IE-1
C          B1=ABS( PS( I, K ) - PE( I, K ) )
C          B2=ABS( US( I, K ) - UE( I, K ) )
C          B3=ABS( WS( I, K ) - WE( I, K ) )
C          IF ( B1.GE. RES1 ) RES1=B1
C          IF ( B2.GE. RES2 ) RES2=B2
C          IF ( B3.GE. RES3 ) RES3=B3
C          PS( I, K ) = PE( I, K )
C          US( I, K ) = UE( I, K )
C          WS( I, K ) = WE( I, K )
C          IF ( ITURB.EQ.1 ) THEN
C            B4=ABS( KS( I, K ) - KN( I, K ) )
C            B5=ABS( ES( I, K ) - EN( I, K ) )
C            IF ( B4.GE. RES4 ) RES4=B4
C            IF ( B5.GE. RES5 ) RES5=B5
C            KS( I, K ) = KN( I, K )
C            ES( I, K ) = EN( I, K )

```

```

          IF (ES(I,K).LT.ZERO) ES(I,K)=ZERO
          VISC_TURB(I,K)=REYNOLDS*CM*KS(I,K)**2/ES(I,K)
        ENDIF
C
          ENDDO
        ENDDO
C
C
C      -----
C      STORAGE
C      -----
C
          IF (MOD(NIT,IRESI).EQ.0) THEN
C
          RES01=RES1
          RES02=RES2
          RES03=RES3
C
          IF (RES01.GT.RES10.OR.RES02.GT.RES20.OR.RES03.GT.RES30)
$           THEN
C
          IF (ITURB.EQ.1) THEN
              WRITE (*,103) NIT,RES1,RES2,RES3,RES4,RES5
! PRINTING
              WRITE (2,102) NIT,RES1,RES2,RES3,RES4,RES5,CON1
! TO FILE=RESIDUALS
          ELSE
              WRITE (*,101) NIT,RES1,RES2,RES3
              WRITE (2,100) NIT,RES1,RES2,RES3,CON1
          ENDIF
C
          ELSE
          IF (ITURB.EQ.1) THEN
              WRITE (*,102) NIT,RES1,RES2,RES3,RES4,RES5
              WRITE (2,102) NIT,RES1,RES2,RES3,RES4,RES5,CON1
          ELSE
              WRITE (*,100) NIT,RES1,RES2,RES3
              WRITE (2,100) NIT,RES1,RES2,RES3,CON1
          ENDIF
          ENDIF
C
          RES10=RES01
          RES20=RES02
          RES30=RES03
C
          ENDIF
C
100  FORMAT (1X,I5,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4)
101  FORMAT (1X,I5,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,3X,'!!!!')
102  FORMAT (1X,I5,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,
$     E10.4)
103  FORMAT (1X,I5,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,
$     3X,'!!!!')
C
          IF (RES1.LE.CON1.AND.RES2.LE.CON2.AND.RES3.LE.CON3) GOTO 54
! CHECK FOR CONVERGENCE
C
C
          ENDDO
C
C      -----
C      END OF TIME-STEPS  --  EXIT
C      -----
C

```

```
C
WRITE (*,*) ' '
WRITE (*,*) ' '
WRITE (*,107) NIT,RES1,RES2,RES3
WRITE (*,*) ' '
C
IF (ITURB.EQ.1) THEN
WRITE (2,102) NIT,RES1,RES2,RES3,RES4,RES5,CON1      ! TO
FILE='RESIDUALS.DAT
ELSE
WRITE (2,100) NIT,RES1,RES2,RES3,CON1
ENDIF
C
107 FORMAT (1X,I5,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4)
C
C
54 CONTINUE
C
C
C          -----
C          RESULTS FOR TECPLOT
C          2D DATA
C          -----
C
IF (ITURB.NE.1) THEN
WRITE(3,"(A36)") ' VARIABLES = X, Z, U, W, TAXYTHTA, P '
! TO FILE=RESULTS.DAT
ENDIF
C
IF (ITURB.EQ.1) THEN
WRITE(3,"(A42)") ' VARIABLES = X, Z, U, W, TAXYTHTA, P, K,
E'
ENDIF
C
WRITE(3,"(A8)") ' ZONE I='
WRITE(3,*) IE-1
WRITE(3,"(A3)") ' J='
WRITE(3,*) KE-1
WRITE(3,"(A8)") ' F=POINT'
C
DO K=2,KE
DO I=2,IE
C
UC=0.25*(US(I,K)+US(I-1,K)+US(I-1,K-1)+US(I,K-1))/QPER
WC=0.25*(WS(I,K)+WS(I-1,K)+WS(I-1,K-1)+WS(I,K-1))/QPER
PC=0.25*(PS(I,K)+PS(I-1,K)+PS(I-1,K-1)+PS(I,K-1))
TAXYTHTA=SQRT(UC**2+WC**2)/QPER
IF(I.GE.65 .AND. K.EQ.KE) THEN
WRITE(4,980)UC,WC,PC,US(I,K-1),WS(I,K-1),PS(I,K-1)
ENDIF
C
IF (ITURB.EQ.1) THEN
KC=KS(I,K)*10/QPER**2
EC=ES(I,K)
WRITE(3,909) X(I,K),Z(I,K),UC,WC,TAXYTHTA,PC,KC,EC      !
TO FILE=RESULTS
ELSE
WRITE(3,908) X(I,K), Z(I,K), UC, WC, TAXYTHTA, PC
ENDIF
C
ENDDO
```

```

ENDDO
CLOSE (3)
WRITE(4,*) '-----'
C
C
C
-----
C      VELOCITY PROFILE - FREE STREAM
C
C
OPEN (3, FILE='RESULTS.PLT')
READ (3,*)
READ (3,*)
READ (3,*) IE
READ (3,*)
READ (3,*) KE
READ (3,*)
C
IE = IE+1
KE = KE+1
DO K=2,KE
  DO I=2,IE
    READ (3,*) X(I,K), Z(I,K), UM(I,K), WM(I,K)
  ENDDO
ENDDO
C
DO I=ITEU+2,IE
X7 = X(I-1,KE)
X8 = X(I,KE)
Z7 = Z(I-1,KE)
Z8 = Z(I,KE)
C
DX19 = X8-X7
DZ19 = ABS(Z7-Z8)
DS19 = DZ19/DX19
F1 = ATAN(DS19)
C
VELW= (0.5*(UM(I-1,KE)+UM(I,KE)))*SIN(F1) +
$      (0.5*(WM(I-1,KE)+WM(I,KE)))*COS(F1)
VELW1= UM(I,KE)*SIN(F1) + WM(I,KE)*COS(F1)
WRITE(5,910) VELW, F1, VELW1
ENDDO
C
DO II=1,NPOINT
  I=IPOINT(II)
  SUMQ=0.
C
  DO K=2,KE-1
C
C      4 --- B --- 3      |      |
C      |                 |      |
C      |          o       |      |    DS
C      |                 |      |
C      |                 |      |
C      1 --- A --- 2      |      |
C
C
      X1 = X(I,K)
      X2 = X(I+1,K)
      X3 = X(I+1,K+1)
      X4 = X(I,K+1)
      Z1 = Z(I,K)
      Z2 = Z(I+1,K)

```

```

      Z3 = Z(I+1,K+1)
      Z4 = Z(I,K+1)
      XA = 0.5*(X1+X2)
      ZA = 0.5*(Z1+Z2)
      XB = 0.5*(X3+X4)
      ZB = 0.5*(Z3+Z4)
      X0 = 0.5*(XA+XB)
      Z0 = 0.5*(ZA+ZB)
C
      DX = XB-XA
      DZ = ZB-ZA
      DS = SQRT( DX**2 + DZ**2 )
      F  = -ATAN( DZ/DX )
      IF ( DX.GT.ZERO) F = F + PI      ! DX>0 ==> F=F+180 deg
      IF ( ABS(DX).LE.ZERO ) F = PI/2. ! DX=0 ==> F=90 deg
C
      VEL = UM(I,K)*SIN(F)+WM(I,K)*COS(F)
      R   = ZA + 0.5*(ZB-ZA)-Z(I,1)
C
      DQ   = VEL*DS*(2.*PI*R)**IAXIS
      SUMQ = SUMQ + DQ
      ENDDO
      WRITE(*,*) ' PAROXH : ',SUMQ
      ENDDO
C
361  FORMAT (1X,'X-LOCATION: X=',F10.6)
C
908  FORMAT (6(1X,F12.4))
909  FORMAT (8(1X,F12.4))
910  FORMAT (3(1X,F12.4))
980  FORMAT (6(1X,F12.4))
C
      CLOSE (2)           ! FILE='RESIDUALS.DAT'
      CLOSE (3)           ! FILE='RESULTS.PLT'
      CLOSE (4)           ! FILE='PROFIL.DAT'
      CLOSE (5)           ! FILE='FREE_STREAM.DAT'
C
      WRITE (*,*) ' '
      WRITE (*,*) 'End of Program ...'
C
      WRITE (*,*) 'STOP => [Y=1]'
      READ (*,*) ITE
      IF (ITE.EQ.1.) CONTINUE

      STOP
      END
C
C
C
-----
SUBROUTINE SWEEP
-----
C
C
      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
      DO I=1,IE-1
        DO K=1,KE-1
          PSR(I,K)=PS(I,K)
          USR(I,K)=US(I,K)
          WSR(I,K)=WS(I,K)
C
          IF (ITURB.EQ.1) THEN

```



```

      KSR(I,K)=KS(I,K)
      ESR(I,K)=ES(I,K)
      IF (ABS(ESR(I,K)).LT.ZERO) ESR(I,K)=ZERO
      VISC_TURB(I,K)=REYNOLDS*CM*KSR(I,K)**2/ESR(I,K)
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
C
C
C -----
C          WALL FUNCTIONS FOR TURBULENT FLOW
C -----
C
C IF (ITURB.EQ.1) CALL WALL_FUNCTIONS
C
C -----
C
C DO L=1,4
C
C   DO I=1,IE+1
C     EVV(I)=-10000000.
C     DO K=1,KE+1
C       EVAV(L,I,K)=-10000000.
C     ENDDO
C   ENDDO
C
C -----
C
C          BOUNDARY CONDITIONS FOR P, U, W
C -----
C
C CALL BC
C
C -----
C
C          SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS
C -----
C
C CALL XIFLUX
C CALL ZEFLUX
C CALL XIFLXV
C CALL ZEFLXV
C
C -----
C
C          AXISYMMETRIC PROBLEM
C -----
C
C IF (IAXIS.EQ.1) CALL AXISYMMETRIC
C
C -----
C
C          RUNGE-KUTTA 4 TH ORDER
C          FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS
C -----
C
C DO K=2,KE-1
C   DO I=2,IE-1
C
C     IF (ABS(EVAV(L,I,K)).LT.ZERO) THEN
C       WRITE(*,*) 'IEV1=',I,', ', 'KEV1=',K
C       EVAV(L,I,K)=ZERO
C     ENDIF
C
C
C

```



```

DO I=2,IE-1
C
IF (ABS(EVAV(L,I,K)).LT.ZERO) THEN
WRITE(*,*) 'IEV2=',I,'KEV2=',K
EVAV(L,I,K)=ZERO
ENDIF
C
DT=CFL/EVAV(L,I,K)
C
KSR(I,K)=KS(I,K)-AR(L+1)*DT*KH(I,K)
ESR(I,K)=ES(I,K)-AR(L+1)*DT*EH(I,K)
IF (ABS(ESR(I,K)).LT.ZERO) ESR(I,K)=ZERO
VISC_TURB(I,K)=REYNOLDS*CM*KSR(I,K)**2/ESR(I,K)
C
KHR(L,I,K)=-DT*KH(I,K)/6.
EHR(L,I,K)=-DT*EH(I,K)/6.
ENDDO
ENDDO
C
ENDDO
C
C
DO K=2,KE-1
DO I=2,IE-1
KN(I,K)=KS(I,K)+KHR(1,I,K)+2.*KHR(2,I,K)+2.*KHR(3,I,K)+
$ KHR(4,I,K)
EN(I,K)=ES(I,K)+EHR(1,I,K)+2.*EHR(2,I,K)+
$ 2.*EHR(3,I,K)+EHR(4,I,K)
C
IF (ABS(SRPA(I,K)).LT.ZERO) SRPA(I,K)=ZERO
C
IF (ISYMMETRY_DOWN.NE.1 .AND. K.EQ.2) THEN
! WALL DOWN
IF (I.GE.ITEL. AND. I.LE.ITEU_D)
& EN(I,K)=CM**0.75*KN(I,K)**1.5/SRPA(I,K)
! WALL FUNCTION
ENDIF
C
IF (ISYMMETRY_UP.NE.1 .AND. K.EQ.KE-1) THEN !
WALL UP
IF (I.GE.ITEL. AND. I.LE.ITEU)
& EN(I,K)=CM**0.75*KN(I,K)**1.5/SRPA(I,K)
! WALL FUNCTION
ENDIF
ENDDO
ENDDO
C
ENDIF
C
C
RETURN
END
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE AXISYMMETRIC
-----
C

```

```

C
  INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
  DO I=2,IE-1
    DO K=2,KE-1
C
      XXI=.5*(X(I+1,K)-X(I,K)+X(I+1,K+1)-X(I,K+1))
      ZXI=.5*(Z(I+1,K)-Z(I,K)+Z(I+1,K+1)-Z(I,K+1))
      XZE=.5*(X(I,K+1)-X(I,K)+X(I+1,K+1)-X(I+1,K))
      ZZE=.5*(Z(I,K+1)-Z(I,K)+Z(I+1,K+1)-Z(I+1,K))
C
      JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-XZE*ZXI)
C
      XIX=ZZE
      XIZ=-XZE
      ZEX=-ZXI
      ZEZ=XXI
C
      UXI=0.5*(USR(I+1,K)-USR(I-1,K))
      WXI=0.5*(WSR(I+1,K)-WSR(I-1,K))
      UZE=0.5*(USR(I,K+1)-USR(I,K-1))
      WZE=0.5*(WSR(I,K+1)-WSR(I,K-1))
C
      UZ = UE(I,K)
      UR = WE(I,K)
      R  = 0.25*(Z(I,K)+Z(I+1,K)+Z(I,K+1)+Z(I+1,K+1))
C
      IF (ABS(R).LT.ZERO) R=ZERO
C
      VISCOSITY=1.+VISC_TURB(I,K)      ! = M eff = 1 + M t
C
      T_RZ=XIZ*UXI+ZEZ*UZE+XIX*WXI+ZEX*WZE      ! STRESSES : Trz
      T_RR_FF=2.*(XIZ*WXI+ZEZ*WZE-JACOBIAN*UR/R)      !
: Trr-Tff
C
      P_AXIS_L = JACOBIAN * UR /R
      U_AXIS_L = JACOBIAN * UZ*UR /R
      W_AXIS_L = JACOBIAN * UR**2 /R
C
      P_AXIS_R = 0.
      U_AXIS_R = -(VISCOSITY/REYNOLDS)*T_RZ/R
      W_AXIS_R = -(VISCOSITY/REYNOLDS)*T_RR_FF/R
C
      U_AXIS_R2 = (VISCOSITY/REYNOLDS)*(2./3.)*(XIX+ZEX)* UR/R
      W_AXIS_R2 = (VISCOSITY/REYNOLDS)*(2./3.)*(XIZ+ZEZ)* UR/R
C
      PH(I,K) = PH(I,K) + P_AXIS_L + P_AXIS_R
      UH(I,K) = UH(I,K) + U_AXIS_L + U_AXIS_R + U_AXIS_R2
      WH(I,K) = WH(I,K) + W_AXIS_L + W_AXIS_R + W_AXIS_R2
    ENDDO
  ENDDO
C
  RETURN
  END
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE TURB_AXISYMMETRIC

```

```

C -----
C
C   INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C   DO I=2,IE-1
C     DO K=2,KE-1
C
C       XXI=.5*(X(I+1,K)-X(I,K)+X(I+1,K+1)-X(I,K+1))
C       ZXI=.5*(Z(I+1,K)-Z(I,K)+Z(I+1,K+1)-Z(I,K+1))
C       XZE=.5*(X(I,K+1)-X(I,K)+X(I+1,K+1)-X(I+1,K))
C       ZZE=.5*(Z(I,K+1)-Z(I,K)+Z(I+1,K+1)-Z(I+1,K))
C
C       JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-ZXI*XZE)
C
C       XIZ=-XZE
C       ZEZ=XXI
C
C       KXI=0.5*(KSR(I+1,K)-KSR(I-1,K))
C       EXI=0.5*(ESR(I+1,K)-ESR(I-1,K))
C       KZE=0.5*(KSR(I,K+1)-KSR(I,K-1))
C       EZE=0.5*(ESR(I,K+1)-ESR(I,K-1))
C
C       UR=WE(I,K)
C       IF(ABS(UR).LT.ZERO.AND.ABS(UR).NE.0.) UR=ZERO
C
C       K0=KSR(I,K)
C       E0=ESR(I,K)
C       IF(ABS(E0).LT.ZERO) E0=ZERO
C
C       R=0.25*(Z(I,K)+Z(I+1,K)+Z(I,K+1)+Z(I+1,K+1))
C       IF(ABS(R).LT.ZERO) R=ZERO
C
C       VISC_TURB1=REYNOLDS*CM*K0**2/E0      ! = Mt = Re*Cm*k^2/e
C
C       GAMMA_K=1.+VISC_TURB1/SIGMA_K      ! = Gk = 1 + Mt/Sk
C       GAMMA_E=1.+VISC_TURB1/SIGMA_E      ! = Ge = 1 + Mt/Se
C
C       THETA3=VISC_TURB1*2.*(UR/R)**2      ! ADDITIONAL
C
C   PRODUCTION RATE (AXISYMMETRIC)
C
C     VISCOSITY=1.
C
C     K_AXIS_L=JACOBIAN * UR*K0/R          ! K ke
C     E_AXIS_L=JACOBIAN * UR*E0/R
C
C     K_AXIS_R=- (VISCOSITY/REYNOLDS) * (GAMMA_K/R)
C     $                                     * (XIZ*KXI+ZEZ*KZE)          ! L ke
C     E_AXIS_R=- (VISCOSITY/REYNOLDS) * (GAMMA_E/R)
C     $                                     * (XIZ*EXI+ZEZ*EZE)
C
C     IF(ABS(K0).LT.ZERO) K0=ZERO
C     K_AXIS_R2=- (VISCOSITY/REYNOLDS) * JACOBIAN**2 *
C     $                                     (THETA3-E0*REYNOLDS)
C     E_AXIS_R2=- (VISCOSITY/REYNOLDS) * JACOBIAN**2 *      !
C
C   PRODUCTION RATE
C     $                                     (CE1*THETA3-CE2*E0*REYNOLDS) * (E0/K0)
C
C
C     KH(I,K)=KH(I,K) + K_AXIS_L + K_AXIS_R + K_AXIS_R2
C     EH(I,K)=EH(I,K) + E_AXIS_L + E_AXIS_R + E_AXIS_R2
C
C   ENDDO

```

```

ENDDO
C
C
RETURN
END
C
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE BC          !  BOYNDARY CONDITIONS
-----
C
C
INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
=====  ON THE LOWER LIMIT  =====
C
      DO I=1,IE
        PSR(I,1)= PSR(I,2)
        WSR(I,1)=-WSR(I,2)
        USR(I,1)= USR(I,2)                                !  AXIAL SYMMETRY
C
          IF (I.GE.ITEL .AND. I.LE.ITEU_D) USR(I,1)=-USR(I,2) !
SOLID WALL BETWEEN ITEL & ITEU
          IF (ISYMMETRY_DOWN.EQ.1) USR(I,1)=USR(I,2)          !
AXIAL SYMMETRY ON LOWER LIMIT
C
          IF (ITURB.EQ.1) VISC_TURB(I,1)=VISC_TURB(I,2)
ENDDO
C
C
=====  ON THE UPPER LIMIT  =====
C
      DO I=1,IE
        PSR(I,KE)= PSR(I,KE-1)
        WSR(I,KE)=-WSR(I,KE-1)
        USR(I,KE)=-USR(I,KE-1)                            !  SOLID WALL
C
          IF (ISYMMETRY_UP.EQ.1) USR(I,KE)=USR(I,KE-1)      !  AXIAL
SYMMETRY ON UPPER LIMIT
          IF (I.LT.ITEL .OR. I.GT.ITEU) THEN
            USR(I,KE)= USR(I,KE-1)
            WSR(I,KE)= WSR(I,KE-1)
            PSR(I,KE)=PPER
          ENDIF
C
C
          IF (ITURB.EQ.1) VISC_TURB(I,KE)=VISC_TURB(I,KE-1)
ENDDO
C
C
=====  OUTFLOW  =====
C
      DO K=2,KE-1
        PSR(IE,K)=PPER
        USR(IE,K)=2.*USR(IE-1,K)-USR(IE-2,K)
        WSR(IE,K)=2.*WSR(IE-1,K)-WSR(IE-2,K)
C
          IF (ITURB.EQ.1) VISC_TURB(IE,K)=
$          2.*VISC_TURB(IE-1,K)-VISC_TURB(IE-2,K)
ENDDO

```

```

C
C      ===== INFLOW =====
C
      DO K=2,KE-1
          R=0.25*(Z(1,K)+Z(1,K+1)+Z(2,K)+Z(2,K+1))
C
          PSR(1,K)=2.*PSR(2,K)-PSR(3,K)
          USR(1,K)=CU * QPER
          WSR(1,K)=CW * QPER
C
          IF (INFLOW .EQ. 0) THEN          ! AXIAL INFLOW
              IF (INLET.EQ.1) USR(1,K)=CU * QPER*(1.-R**2.)
              IF (INLET.EQ.2) USR(1,K)=CU * QPER*(1.-R)**(1./7.)
          ENDIF
C
          IF (INFLOW .EQ. 1) THEN          ! RADIAL INFLOW
              IF (INLET.EQ.1) WSR(1,K)=CW * QPER*(1.-R**2.)
              IF (INLET.EQ.2) WSR(1,K)=CW * QPER*(1.-R)**(1./7.)
          ENDIF
C
          IF (ITURB.EQ.1) THEN
              C=CR1          ! C=1.
              IF (ISYMMETRY_UP.EQ.1. OR. ISYMMETRY_DOWN.EQ.1) C=CR2
! C=2.
              D_IN=C*ABS(Z(2,KE)-Z(2,2))
              IF (INFLOW.EQ.1)
D_IN=C*AMAX1(ABS(Z(2,2)),ABS(Z(2,KE)))          ! RADIAL INFLOW
C
              K0=0.03*QPER**2
              E0=CM*K0**1.5/(0.005*D_IN)
              IF (E0.LT.ZERO) E0=ZERO
              VISC_TURB(1,K)=REYNOLDS*CM*K0**2/E0
          ENDIF
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C
C
C
C      -----
C      SUBROUTINE TURB_BC          ! BOYNDARY CONDITIONS
C      -----
C
      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C      ===== ON THE LOWER LIMIT =====
C
      DO I=1,IE
          KSR(I,1)=KSR(I,2)
          ESR(I,1)=ESR(I,2)
          WE (I,1)=-WE(I,2)
          UE (I,1)= UE(I,2)          ! AXIAL SYMMETRY
C
          IF (I.GE.ITEL .AND. I.LE.ITEU_D) UE(I,1)=-UE(I,2) !
SOLID WALL BETWEEN ITEL & ITEU
          IF (ISYMMETRY_DOWN.EQ.1) UE(I,1)=UE(I,2)          !
AXIAL SYMMETRY ON LOWER LIMIT

```

```

      ENDDO
C
C      ===== ON THE UPPER LIMIT =====
C
      DO I=1,IE
        KSR(I,KE)=KSR(I,KE-1)
        ESR(I,KE)=ESR(I,KE-1)
        WE (I,KE)=-WE(I,KE-1)
        UE (I,KE)=-UE(I,KE-1)                                ! SOLID WALL
C
        IF (I.LT.ITEL .OR. I.GT.ITEU) THEN
          WE (I,KE)=WE(I,KE-1)
          UE (I,KE)=UE(I,KE-1)
          KSR(I,KE)=-KSR(I,KE-1)
          ESR(I,KE)=-ESR(I,KE-1)
          ENDIF
          IF (ISYMMETRY_UP.EQ.1) UE(I,KE)=UE(I,KE-1) ! AXIAL
SYMMETRY ON UPPER LIMIT
      ENDDO
C
C      ===== OUTFLOW =====
C
      DO K=2,KE-1
        KSR(IE,K)=2.*KSR(IE-1,K)-KSR(IE-2,K)
        ESR(IE,K)=2.*ESR(IE-1,K)-ESR(IE-2,K)
        UE(IE,K)=2.*UE(IE-1,K)-UE(IE-2,K)
        WE(IE,K)=2.*WE(IE-1,K)-WE(IE-2,K)
      ENDDO
C
C      ===== INFLOW =====
C
      DO K=2,KE-1
        R=0.25*(Z(1,K)+Z(1,K+1)+Z(2,K)+Z(2,K+1))
C
        UE (1,K)=CU * QPER
        WE (1,K)=CW * QPER
C
        IF (INFLOW .EQ. 0) THEN ! AXIAL INFLOW
          IF (INLET.EQ.1) UE (1,K)=CU * QPER*(1.-R**2.)
          IF (INLET.EQ.2) UE (1,K)=CU * QPER*(1.-R)**(1./7.)
          ENDIF
C
        IF (INFLOW .EQ. 1) THEN ! RADIAL INFLOW
          IF (INLET.EQ.1) WE (1,K)=CW * QPER*(1.-R**2.)
          IF (INLET.EQ.2) WE (1,K)=CW * QPER*(1.-R)**(1./7.)
          ENDIF
C
        C=CR1 ! C=1.
        IF (ISYMMETRY_UP.EQ.1. OR. ISYMMETRY_DOWN.EQ.1) C=CR2
! C=2.
        D_IN=C*ABS(Z(2,KE)-Z(2,2))
        IF (INFLOW.EQ.1)
D_IN=C*AMAX1(ABS(Z(2,2)),ABS(Z(2,KE))) ! RADIAL INFLOW
C
        KSR(1,K)=0.03*QPER**2
        ESR(1,K)=CM*KSR(1,K)**1.5/(0.005*D_IN)
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C

```



```

C
C
C
C
-----
SUBROUTINE WALL_FUNCTIONS          !   FOR SOLID WALLS
-----
C
C
INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C   WALL FUNCTIONS
C
C
IF (ISYMMETRY_DOWN.NE.1) THEN          !   WALL DOWN
C
C   ===== LOWER LIMIT =====
C
C
C   4 ----- 3
C   |           |
C   |           o           |
C   |           |           |
C   1 ----- 2
C   ////////////////
C   |           |
C   5 ----- 6
C
C
DO I=ITEL,ITEU_D
C
C   X1=X(I,2)
C   X2=X(I+1,2)
C   X3=X(I+1,3)
C   X4=X(I,3)
C   X5=X(I,1)
C   X6=X(I+1,1)
C
C   Z1=Z(I,2)
C   Z2=Z(I+1,2)
C   Z3=Z(I+1,3)
C   Z4=Z(I,3)
C   Z5=Z(I,1)
C   Z6=Z(I+1,1)
C
C   XXI=X2-X1
C   ZXI=Z2-Z1
C
C   XX1=0.25*(X1+X2+X5+X6)
C   ZZ1=0.25*(Z1+Z2+Z5+Z6)
C   XX2=0.25*(X1+X2+X3+X4)
C   ZZ2=0.25*(Z1+Z2+Z3+Z4)
C
C   XZE=XX2-XX1
C   ZZE=ZZ2-ZZ1
C
C   JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-XZE*ZXI)
C
C   XA=0.25*(X1+X2+X3+X4)
C   ZA=0.25*(Z1+Z2+Z3+Z4)
C
C   EMB = ABS((X2-X1)*(ZA-Z2)-(Z2-Z1)*(XA-X2))

```

```

AP12 = SQRT((X1-X2)**2+(Z1-Z2)**2)

IF (AP12.EQ.0.) WRITE(*,*) 'I=',I
Y2   = EMB/AP12

C
IF (Y2.LT.0.)
$ WRITE(*,*) 'WALL FUNCTION --> DOWN: ',I,' Y2:',Y2
IF (Y2.LT.ZERO) THEN
    WRITE(*,*) 'WALL FUNCTION --> DOWN: ',I,' Y2 :',Y2
    Y2=ZERO
ENDIF

C
UWA1 = (USR(I,2)*XXI+WSR(I,2)*ZXI)
UWA2 = SQRT(XXI**2.+ZXI**2.)
IF(UWA2.EQ.0.) WRITE(*,*) 'I=',I,'UWA2'
UWA  = UWA1/UWA2

C
IF (ABS(UWA).EQ.0.) UWA=ZERO
IF (ABS(UWA).LT.0.001) UWA=0.001*UWA/ABS(UWA)
UUPA(I,2)=UWA
SRPA(I,2)=Y2

C
U_ASTR=ABS(UWA)
IYPL=0
2152 IYPL=IYPL+1
U_ASTR11=U_ASTR

C
U_ASTR12=ABS(EPSILON*Y2*U_ASTR*REYNOLDS)
U_ASTR=KAPPA*ABS(UWA)/LOG(U_ASTR12)

C
IF (IYPL.LT.9) GOTO 2152

C
IF (ABS(U_ASTR-U_ASTR11).GT.0.05)
$ WRITE(*,*) I,' U_ASTR , U_ASTR11 = ',U_ASTR,U_ASTR11

C
YPLUS=REYNOLDS*Y2*U_ASTR
IF (YPLUS.LT.11.63) U_ASTR=SQRT(ABS(UWA)/
$ (REYNOLDS*SRPA(I,2)))

C
K0 = U_ASTR**2 / SQRT(CM)
E0 = U_ASTR**3 / (Y2*KAPPA)
IF (ABS(E0).LE.ZERO) E0=ZERO
VISC_TURB(I,2)=REYNOLDS*CM*K0**2/E0

C
IF (YPLUS.LE.11.63) VISC_TURB(I,2)=0.

C
SD=SQRT(XXI**2+ZXI**2)
IF (SD.LT.ZERO) SD=ZERO
USRI=XXI*UWA/SD
WSRI=ZXI*UWA/SD
TWU=-USRI/Y2
TWW=-WSRI/Y2

C
IF (YPLUS.GT.11.63) THEN
    IF(ABS(UWA).EQ.0.) WRITE(*,*) 'UWA1=',I
    TW = REYNOLDS*(U_ASTR**2)
    TWU = (-USRI/ABS(UWA))*TW
    TWW = (-WSRI/ABS(UWA))*TW
ENDIF

C
C1 = ((-4./3.)*XXI*ZXI+ZXI*XXI) / (SD*JACOBIAN)

```



```

ZZE=ZZ2-ZZ1
C
JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-XZE*ZXI)
C
XA=0.25*(X1+X2+X3+X4)
ZA=0.25*(Z1+Z2+Z3+Z4)
C
EMB = ABS((X4-X3)*(ZA-Z4)-(Z4-Z3)*(XA-X4))
AP12 = SQRT((X3-X4)**2+(Z3-Z4)**2)

IF (AP12.EQ.0.) WRITE(*,*) 'I=',I,'AP12_B'
Y2 = EMB/AP12
C
IF (Y2.LT.0.)
$ WRITE (*,*) 'WALL FUNCTION --> UP: ',I,' Y2 : ',Y2
IF (Y2.LT.ZERO) THEN
WRITE(*,*) 'WALL FUNCTION --> UP: ',I,' Y2 : ',Y2
Y2=ZERO
ENDIF
C
UWA1 = (USR(I,KE-1)*XXI+WSR(I,KE-1)*ZXI)
UWA2 = SQRT(XXI**2+ZXI**2)
C
IF(UWA2.EQ.0.) UWA2=ZERO
C
UWA = UWA1/UWA2
IF (ABS(UUPA(I,KE-1)).EQ.0.) UUPA(I,KE-1)=ZERO
IF (ABS(UWA).LT.0.001)
$ UWA=0.001*UUPA(I,KE-1)/ABS(UUPA(I,KE-1))
UUPA(I,KE-1)=UWA
SRPA(I,KE-1)=Y2
C
U_ASTR=ABS(UWA)
IYPL=0
3152 IYPL=IYPL+1
U_ASTR11=U_ASTR
C
U_ASTR12=ABS(EPSILON*Y2*U_ASTR*REYNOLDS)
U_ASTR=KAPPA*ABS(UWA)/LOG(U_ASTR12)
C
IF (IYPL.LT.9) GOTO 3152
C
IF (ABS(U_ASTR-U_ASTR11).GT.0.05)
$ WRITE(*,*) I,' U_ASTR , U_ASTR11 = ',U_ASTR,U_ASTR11
C
YPLUS=REYNOLDS*Y2*U_ASTR
IF (YPLUS.LT.11.63) U_ASTR=SQRT(ABS(UWA)/
$ (REYNOLDS*SRPA(I,KE-1)))
C
K0 = U_ASTR**2 / SQRT(CM)
E0 = U_ASTR**3 / (Y2*KAPPA)
IF (ABS(E0).LE.ZERO) E0=ZERO
VISC_TURB(I,KE-1)=REYNOLDS*CM*K0**2/E0
C
IF (YPLUS.LE.11.63) VISC_TURB(I,KE-1)=0.
C
SD=SQRT(XXI**2+ZXI**2)
IF(SD.LT.ZERO) SD=ZERO
USRI=XXI*UWA/SD
WSRI=ZXI*UWA/SD
TWU=-USRI/Y2

```

```

C      TWW=-WSRI/Y2
C
C      IF (YPLUS.GT.11.63) THEN
C          TW  = REYNOLDS*(U_ASTR**2)
C          TWU = (-USRI/ABS(UWA))*TW
C          TWW = (-WSRI/ABS(UWA))*TW
C      ENDIF
C
C      C1 = ((-4./3.)*XXI*ZXI+ZXI*XXI) / (SD*JACOBIAN)
C      C2 = (-ZXI*ZXI-(2./3.)*XXI*XXI) / (SD*JACOBIAN)
C      C3 = (XXI*XXI+(2./3.)*ZXI*ZXI) / (SD*JACOBIAN)
C      C4 = (-XXI*ZXI+(4./3.)*ZXI*XXI) / (SD*JACOBIAN)
C
C      C5=C1*C4-C2*C3
C      IF(C5.EQ.0.) C5=ZERO
C      WZEW(I,KE-1) = (-TWU*C1-TWW*C3)/(C1*C4-C2*C3)
C      IF(C1.EQ.0.) C1=ZERO
C      UZEW(I,KE-1) = (TWW-C2*WZEW(I,KE-1))/C1
C
C      IF (ABS(C1).LT.ZERO.OR.ABS(C4).LT.ZERO) THEN
C          UZEW(I,KE-1) = -TWU/C3
C          WZEW(I,KE-1) = TWW/C2
C      ENDIF
C
C      ENDDO
C      ENDIF
C
C      RETURN
C      END
C
C
C      -----
C      SUBROUTINE TURB_PRODUCTION
C      -----
C
C      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C      DO I=2,IE-1
C          DO K=2,KE-1
C
C              METRICS
C
C              XL=0.25*(X(I-1,K)+X(I-1,K+1)+X(I,K)+X(I,K+1))
C              ZL=0.25*(Z(I-1,K)+Z(I-1,K+1)+Z(I,K)+Z(I,K+1))
C              XR=0.25*(X(I,K)+X(I,K+1)+X(I+1,K)+X(I+1,K+1))
C              ZR=0.25*(Z(I,K)+Z(I,K+1)+Z(I+1,K)+Z(I+1,K+1))
C
C              XXI=XR-XL
C              ZXI=ZR-ZL
C
C              XZE=X(I,K+1)-X(I,K)
C              ZZE=Z(I,K+1)-Z(I,K)
C
C              JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-ZXI*XZE)
C
C              XIX=ZZE/JACOBIAN
C              XIZ=-XZE/JACOBIAN
C              ZEX=-ZXI/JACOBIAN
C              ZEZ=XXI/JACOBIAN

```

```

C
      UXI=0.5*(USR(I+1,K)-USR(I-1,K))
      WXI=0.5*(WSR(I+1,K)-WSR(I-1,K))
      UZE=0.5*(USR(I,K+1)-USR(I,K-1))
      WZE=0.5*(WSR(I,K+1)-WSR(I,K-1))
C
      K0=KSR(I,K)
      E0=ESR(I,K)
      IF(ABS(K0).LT.ZERO) K0=ZERO
      IF(ABS(E0).LT.ZERO) E0=ZERO
C
      VISC_TURB1=REYNOLDS*CM*K0**2/E0
C
      THETA1=2.*( (XIX*UXI+ZEX*UZE)**2 + (XIZ*WXI+ZEX*WZE)**2 )
      THETA2=( XIZ*UXI+ZEX*UZE + XIX*WXI+ZEX*WZE )**2
      THETA=VISC_TURB1*(THETA1+THETA2)
C
      P_K=-(1./REYNOLDS)*JACOBIAN*(THETA-E0*REYNOLDS)
      P_E=-(1./REYNOLDS)*JACOBIAN*(CE1*THETA-CE2*E0*REYNOLDS)*
      $
      (E0/K0)
C
      KH(I,K)=KH(I,K)+P_K
      EH(I,K)=EH(I,K)+P_E
      ENDDO
ENDDO
C
RETURN
END
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE TURB_XIFLUX
-----
C
C
INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
DO K=2,KE-1
  DO I=2,IE
C
      XZE=X(I,K+1)-X(I,K)
      ZZE=Z(I,K+1)-Z(I,K)
C
      XIX=ZZE
      XIZ=-XZE
C
C
VARIABLES U & W AT LEFT AND AT RIGHT OF THE CELL SIDE
C
      HUR=UE(I,K)
      HUL=UE(I-1,K)
      HWR=WE(I,K)
      HWL=WE(I-1,K)
C
C
VARIABLES k & e AT LEFT AND AT RIGHT OF THE CELL SIDE
C
      HKR=KSR(I,K)
      HKL=KSR(I-1,K)
      HER=ESR(I,K)
      HEL=ESR(I-1,K)
C

```

```

      U=0.5*(HUR+HUL)
      W=0.5*(HWR+HWL)
C
      LAMBDA=U*XIX+W*XIZ
C
      KK=0.5*((1.+SIGN(1.,LAMBDA))*HKL+(1.-
SIGN(1.,LAMBDA))*HKR)
      E =0.5*((1.+SIGN(1.,LAMBDA))*HEL+(1.-
SIGN(1.,LAMBDA))*HER)
C
      EK(I)=(U*XIX+W*XIZ)*KK
      EE(I)=(U*XIX+W*XIZ)*E
      ENDDO
C
      DO I=2,IE-1
        KH(I,K)=EK(I+1)-EK(I)
        EH(I,K)=EE(I+1)-EE(I)
      ENDDO
C
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C
C
-----
SUBROUTINE TURB_ZEFLUX
-----
C
C
      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
      DO I=2,IE-1
        DO K=2,KE
C
          XXI=X(I+1,K)-X(I,K)
          ZXI=Z(I+1,K)-Z(I,K)
C
          ZEX=-ZXI
          ZEZ=XXI
C
          VARIABLES U & W UP AND DOWN OF THE CELL SIDE
C
          HUU=UE(I,K)
          HUD=UE(I,K-1)
          HWU=WE(I,K)
          HWD=WE(I,K-1)
C
          VARIABLES k & e UP AND DOWN OF THE CELL SIDE
C
          HKU=KSR(I,K)
          HKD=KSR(I,K-1)
          HEU=ESR(I,K)
          HED=ESR(I,K-1)
C
          U=0.5*(HUU+HUD)
          W=0.5*(HWU+HWD)
C
          LAMBDA=U*ZEX+W*ZEZ
C

```

```

      KK=0.5*((1.+SIGN(1.,LAMBDA))*HKD+(1.-
SIGN(1.,LAMBDA))*HKU)
      E =0.5*((1.+SIGN(1.,LAMBDA))*HED+(1.-
SIGN(1.,LAMBDA))*HEU)
C
      EK(K)=(U*ZEX+W*ZEX)*KK
      EE(K)=(U*ZEX+W*ZEX)*E
      ENDDO
C
      DO K=2,KE-1
      KH(I,K)=KH(I,K)+EK(K+1)-EK(K)
      EH(I,K)=EH(I,K)+EE(K+1)-EE(K)
      ENDDO
C
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE TURB_XIFLXV
-----
C
C
      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
      DO K=2,KE-1
      DO I=2,IE
C
C
C
      METRICS
C
      XL=0.25*(X(I-1,K)+X(I-1,K+1)+X(I,K)+X(I,K+1))
      ZL=0.25*(Z(I-1,K)+Z(I-1,K+1)+Z(I,K)+Z(I,K+1))
      XR=0.25*(X(I,K)+X(I,K+1)+X(I+1,K)+X(I+1,K+1))
      ZR=0.25*(Z(I,K)+Z(I,K+1)+Z(I+1,K)+Z(I+1,K+1))
C
      XXI=XR-XL
      ZXI=ZR-ZL
C
      XZE=X(I,K+1)-X(I,K)
      ZZE=Z(I,K+1)-Z(I,K)
C
      JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-ZXI*XZE)
C
      XIX=ZZE/JACOBIAN
      XIZ=-XZE/JACOBIAN
      ZEX=-ZXI/JACOBIAN
      ZEZ=XXI/JACOBIAN
C
      D1=XIX**2+XIZ**2
      D2=XIX*ZEX+XIZ*ZEZ
C
C
      k & E DEREVATIVES (CROSS DEREVATIVES ARE SPLITTED)
C
      KXI=KSR(I,K)-KSR(I-1,K)
      EXI=ESR(I,K)-ESR(I-1,K)
C
      K_UP =0.25*(KSR(I-1,K)+KSR(I,K)+KSR(I-1,K+1)+KSR(I,K+1))

```



```

E_UP =0.25*(ESR(I-1,K)+ESR(I,K)+ESR(I-1,K+1)+ESR(I,K+1))
K_DOWN=0.25*(KSR(I-1,K-1)+KSR(I,K-1)+KSR(I-1,K)+KSR(I,K))
E_DOWN=0.25*(ESR(I-1,K-1)+ESR(I,K-1)+ESR(I-1,K)+ESR(I,K))
C
KZE=K_UP-K_DOWN
EZE=E_UP-E_DOWN
C
HKR=KSR(I,K)
HKL=KSR(I-1,K)
HER=ESR(I,K)
HEL=ESR(I-1,K)
C
K0=0.5*(HKR+HKL)
E0=0.5*(HER+HEL)
IF(ABS(E0).LT.ZERO) E0=ZERO
C
VISC_TURB1=REYNOLDS*CM*K0**2/E0
C
GAMMA_K=1.+VISC_TURB1/SIGMA_K
GAMMA_E=1.+VISC_TURB1/SIGMA_E
C
C
EK(I)=- (1./REYNOLDS)*JACOBIAN*GAMMA_K*(D1*KXI+D2*KZE)
EE(I)=- (1./REYNOLDS)*JACOBIAN*GAMMA_E*(D1*EXI+D2*EZE)
ENDDO
C
DO I=2,IE-1
KH(I,K)=KH(I,K)+EK(I+1)-EK(I)
EH(I,K)=EH(I,K)+EE(I+1)-EE(I)
ENDDO
C
ENDDO
C
RETURN
END
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE TURB_ZEFLXV
-----
C
INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
DO I=2,IE-1
DO K=2,KE
C
METRICS
C
XL=0.25*(X(I,K)+X(I+1,K)+X(I,K-1)+X(I+1,K-1))
ZL=0.25*(Z(I,K)+Z(I+1,K)+Z(I,K-1)+Z(I+1,K-1))
XR=0.25*(X(I,K)+X(I+1,K)+X(I,K+1)+X(I+1,K+1))
ZR=0.25*(Z(I,K)+Z(I+1,K)+Z(I,K+1)+Z(I+1,K+1))
C
XZE=XR-XL
ZZE=ZR-ZL
C
XXI=X(I+1,K)-X(I,K)
ZXI=Z(I+1,K)-Z(I,K)

```

```

C
      JACOBIAN=AMAX1( ZERO,XXI*ZZE-ZXI*XZE)
C
      XIX=ZZE/JACOBIAN
      XIZ=-XZE/JACOBIAN
      ZEX=-ZXI/JACOBIAN
      ZEZ=XXI/JACOBIAN
C
      D2=XIX*ZEX+XIZ*ZEX
      D3=ZEX**2+ZEZ**2
C
C   k & E DEREVATIVES (CROSS DEREVATIVES ARE SPLITTED)
C
      KZE=KSR(I,K)-KSR(I,K-1)
      EZE=ESR(I,K)-ESR(I,K-1)
C
      K_R=0.25*(KSR(I,K)+KSR(I+1,K)+KSR(I,K-1)+KSR(I+1,K-1))
      E_R=0.25*(ESR(I,K)+ESR(I+1,K)+ESR(I,K-1)+ESR(I+1,K-1))
      K_L=0.25*(KSR(I-1,K-1)+KSR(I,K-1)+KSR(I-1,K)+KSR(I,K))
      E_L=0.25*(ESR(I-1,K-1)+ESR(I,K-1)+ESR(I-1,K)+ESR(I,K))
C
      KXI=K_R-K_L
      EXI=E_R-E_L
C
      HKU=KSR(I,K)
      HKD=KSR(I,K-1)
      HEU=ESR(I,K)
      HED=ESR(I,K-1)
C
      K0=0.5*(HKU+HKD)
      E0=0.5*(HEU+HED)
      IF(ABS(E0).LT.ZERO) E0=ZERO
C
      VISC_TURB1=REYNOLDS*CM*K0**2/E0
C
      GAMMA_K=1.+VISC_TURB1/SIGMA_K
      GAMMA_E=1.+VISC_TURB1/SIGMA_E
C
C
      EK(K)=- (1./REYNOLDS)*JACOBIAN*GAMMA_K*(D2*KXI+D3*KZE)
      EE(K)=- (1./REYNOLDS)*JACOBIAN*GAMMA_E*(D2*EXI+D3*EZE)
      ENDDO
C
      DO K=2,IE-1
         KH(I,K)=KH(I,K)+EK(K+1)-EK(K)
         EH(I,K)=EH(I,K)+EE(K+1)-EE(K)
C
      ENDDO
C
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C
C   -----
C   SUBROUTINE JACOBI
C   -----
C
C   CHECK GEOMETRY : IF VOLUMES ARE POSITIVE : RUN
C                   ELSE                       : STOP

```

```

C          -----
C
C      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
C      ISTOP=-1
C      DO K=2,KE-1
C          DO I=2,IE-1
C              XXI=.5*(X(I+1,K)-X(I,K)+X(I+1,K+1)-X(I,K+1))
C              ZXI=.5*(Z(I+1,K)-Z(I,K)+Z(I+1,K+1)-Z(I,K+1))
C              XZE=.5*(X(I,K+1)-X(I,K)+X(I+1,K+1)-X(I+1,K))
C              ZZE=.5*(Z(I,K+1)-Z(I,K)+Z(I+1,K+1)-Z(I+1,K))
C              JACOBIAN=XXI*ZZE-XZE*ZXI
C              IF (JACOBIAN.LT.-ZERO) THEN
C                  WRITE (*,*) ' I= ',I,' K= ',K,' JACOBIAN= ',JACOBIAN
C              ENDIF
C          ENDDO
C      ENDDO
C
C      IF (JACOBIAN.LT.-ZERO) ISTOP=1
C      IF (ISTOP.GT.0) THEN
C          WRITE (*,*) ' '
C          WRITE (*,*) ' METRIC ERROR : JACOBIAN IS NEGATIVE '
C          WRITE (*,*) ' '
C      ENDIF
C
C
C      RETURN
C      END
C
C          -----
C
C      SUBROUTINE XIFLUX
C          -----
C
C      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
C      DO K=2,KE-1
C          DO IR=2,IE
C              ILL=MAX0(1,IR-2)
C              IRR=MIN0(IE,IR+1)
C
C              HPL=PSR(IR-1,K)
C              HUL=USR(IR-1,K)
C              HWL=WSR(IR-1,K)
C
C              HPLL=PSR(ILL,K)
C              HULL=USR(ILL,K)
C              HWLL=WSR(ILL,K)
C
C              HPR=PSR(IR,K)
C              HUR=USR(IR,K)
C              HWR=WSR(IR,K)
C
C              HPRR=PSR(IRR,K)
C              HURR=USR(IRR,K)
C              HWRR=WSR(IRR,K)
C
C      FOR THE POINT IRR=IR WHEN IR=IE

```

```

C
      IF (IRR.EQ.IR) THEN
C
          HPRR=PPER/BETA
          HPRR=2.*HPR-HPL
          HURR=2.*HUR-HUL
          HWRR=2.*HWR-HWL
      ENDIF
C
C   FOR THE POINT ILL=IL WHEN IR=2
C
      IF (ILL.EQ.IR-1) THEN
C
          HPLL=PPER/BETA
C
          HULL=QPER
C
          HWLL=0.
          HPLL=2.*HPL-HPR
          HULL=2.*HUL-HUR
          HWLL=2.*HWL-HWR
      ENDIF
C
C   VARIABLES AT LEFT AND AT RIGHT OF THE CELL SIDE
C
      PPL=FFFA*HPL-FFFB*HPLL+FFFC*HPR+FFFD*HPRR
      UUL=FFFA*HUL-FFFB*HULL+FFFC*HUR+FFFD*HURR
      WWL=FFFA*HWL-FFFB*HWLL+FFFC*HWR+FFFD*HWRR
C
      PPR=FFFA*HPR-FFFB*HPRR+FFFC*HPL+FFFD*HPLL
      UUR=FFFA*HUR-FFFB*HURR+FFFC*HUL+FFFD*HULL
      WWR=FFFA*HWR-FFFB*HWRR+FFFC*HWL+FFFD*HWLL
C
      XZE=X(IR,K+1)-X(IR,K)
      ZZE=Z(IR,K+1)-Z(IR,K)
      XIX=ZZE
      XIZ=-XZE
C
      B=AMAX1(ZERO,SQRT(XIX**2+XIZ**2))
      XX=XIX/B
      ZZ=XIZ/B
C
      UN=(UUL+UUR)/2.
      WN=(WWL+WWR)/2.
      EVN=UN*XX+WN*ZZ
C
      GN0=SIGN(1.,EVN)
      U0=0.5*((1.+GN0)*UUL+(1.-GN0)*UUR)
      W0=0.5*((1.+GN0)*WWL+(1.-GN0)*WWR)
      EV0=U0*XX+W0*ZZ
      S=SQRT(EV0*EV0+BETA)
C
      EV1=EV0+S
      EV2=EV0-S
C
      GN1=SIGN(1.,EV1)
      GN2=SIGN(1.,EV2)
C
      IF(ABS(GN0).NE.1.) WRITE(*,*)'WE HAVE PROBLEM TO GN0
X',GN0
      IF(ABS(GN1).NE.1.) WRITE(*,*)'WE HAVE PROBLEM TO GN1
X',GN1
      IF(ABS(GN2).NE.1.) WRITE(*,*)'WE HAVE PROBLEM TO GN2
X',GN2
C

```

```

PB1=0.5*((1.+GN1)*PPL+(1.-GN1)*PPR)
U1=0.5*((1.+GN1)*UUL+(1.-GN1)*UUR)
W1=0.5*((1.+GN1)*WWL+(1.-GN1)*WWR)
C
PB2=0.5*((1.+GN2)*PPL+(1.-GN2)*PPR)
U2=0.5*((1.+GN2)*UUL+(1.-GN2)*UUR)
W2=0.5*((1.+GN2)*WWL+(1.-GN2)*WWR)
C
P1=PB1*BETA
P2=PB2*BETA
C
IF (S.LT.ZERO) S=ZERO
C
R1=(0.5/S)*((P1-P2)+XX*(EV1*U1-EV2*U2)+ZZ*(EV1*W1-
EV2*W2))
G1=P1+EV1*(XX*U1+ZZ*W1)
G2=P2+EV2*(XX*U2+ZZ*W2)
G3=U0*ZZ-W0*XX
C
U=XX*R1+ZZ*G3
W=ZZ*R1-XX*G3
P=(EV1*G2-EV2*G1)/(2.*S)
C
C   END OF THE FLUX VECTOR SPLITTING
C
C   EVV(IR)=B*AMAX1(EV1,EV2)
C
C   EP(IR)=U*XIX+W*XIZ
C   EU(IR)=U*EP(IR)+P*XIX
C   EW(IR)=W*EP(IR)+P*XIZ
C   ENDDO
C
C   DO I=2,IE-1
C   EVAV(L,I,K)=AMAX1(EVV(I+1),EVV(I))
C
C   PH(I,K)=EP(I+1)-EP(I)
C   UH(I,K)=EU(I+1)-EU(I)
C   WH(I,K)=EW(I+1)-EW(I)
C   ENDDO
C   ENDDO
C
C   RETURN
C   END
C
C   -----
C   SUBROUTINE ZEFLUX
C   -----
C
C   INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C   DO I=2,IE-1
C   DO KR=2,KE
C   KLL=MAX0(1,KR-2)
C   KRR=MIN0(KE,KR+1)
C
C   HPL=PSR(I,KR-1)
C   HUL=USR(I,KR-1)

```

```

C          HWL=WSR ( I , KR-1 )
C
C          HPLL=PSR ( I , KLL )
C          HULL=USR ( I , KLL )
C          HWLL=WSR ( I , KLL )
C
C          HPR=PSR ( I , KR )
C          HUR=USR ( I , KR )
C          HWR=WSR ( I , KR )
C
C          HPRR=PSR ( I , KRR )
C          HURR=USR ( I , KRR )
C          HWRR=WSR ( I , KRR )
C
C          IF ( KR.EQ.2 ) THEN
C              HPLL=2. *HPL-HPR
C              HULL=2. *HUL-HUR
C              HWLL=2. *HWL-HWR
C          ENDIF
C
C          IF ( KR.EQ.KE ) THEN
C              HPRR=2. *HPR-HPL
C              HURR=2. *HUR-HUL
C              HWRR=2. *HWR-HWL
C          ENDIF
C
C
C          VARIABLES AT LEFT AND AT RIGHT OF THE CELL SIDE
C
C          PPL=FFFA*HPL-FFFB*HPLL+FFFC*HPR+FFFD*HPRR
C          UUL=FFFA*HUL-FFFB*HULL+FFFC*HUR+FFFD*HURR
C          WWL=FFFA*HWL-FFFB*HWLL+FFFC*HWR+FFFD*HWRR
C
C          PPR=FFFA*HPR-FFFB*HPRR+FFFC*HPL+FFFD*HPLL
C          UUR=FFFA*HUR-FFFB*HURR+FFFC*HUL+FFFD*HULL
C          WWR=FFFA*HWR-FFFB*HWRR+FFFC*HWL+FFFD*HWLL
C
C          XXI=X ( I+1 , KR ) -X ( I , KR )
C          ZXI=Z ( I+1 , KR ) -Z ( I , KR )
C          ZEX=-ZXI
C          ZEZ=XXI
C
C          B=AMAX1 ( ZERO , SQRT ( ZEX**2+ZEZ**2 ) )
C          XX=ZEX/B
C          ZZ=ZEZ/B
C
C          UN=(UUL+UUR)/2.
C          WN=(WWL+WWR)/2.
C          EVN=UN*XX+WN*ZZ
C
C          GN0=SIGN ( 1. , EVN )
C          U0=0.5 * ( ( 1.+GN0 ) *UUL+( 1.-GN0 ) *UUR )
C          W0=0.5 * ( ( 1.+GN0 ) *WWL+( 1.-GN0 ) *WWR )
C          EV0=U0*XX+W0*ZZ
C
C          IF ( ISYMMETRY_DOWN .NE. 1 ) THEN          ! WALL DOWN
C              IF ( I.GE.ITEU .AND. I.LE.ITEU_D ) THEN ! SOLID WALL
C          BETWEEN ITEU & ITEU
C              IF ( KR.EQ.2 ) EV0=0.                    ! LOWER SOLID
C          LIMIT BETWEEN ITEU & ITEU

```

```

                ENDIF
            ENDIF
C
                IF ( ISYMMETRY_UP .NE. 1 ) THEN                ! WALL UP
                    IF ( I.GE.ITEL. AND. I.LE.ITEU ) THEN      ! SOLID WALL
BETWEEN ITEL & ITEU
                    IF ( KR.EQ.KE ) EV0=0.                    ! UPPER SOLID
LIMIT
                ENDIF
            ENDIF
C
                S=SQRT(EV0*EV0+BETA)
                EV1=EV0+S
                EV2=EV0-S
C
                GN1=SIGN(1.,EV1)
                GN2=SIGN(1.,EV2)
C
                IF (ABS(GN0).NE.1.) WRITE(*,*) 'WE HAVE PROBLEM TO GN0
',GN0
                IF (ABS(GN1).NE.1.) WRITE(*,*) 'WE HAVE PROBLEM TO GN1
',GN1
                IF (ABS(GN2).NE.1.) WRITE(*,*) 'WE HAVE PROBLEM TO GN2
',GN2
C
                PB1=0.5*((1.+GN1)*PPL+(1.-GN1)*PPR)
                U1=0.5*((1.+GN1)*UUL+(1.-GN1)*UUR)
                W1=0.5*((1.+GN1)*WWL+(1.-GN1)*WWR)
C
                PB2=0.5*((1.+GN2)*PPL+(1.-GN2)*PPR)
                U2=0.5*((1.+GN2)*UUL+(1.-GN2)*UUR)
                W2=0.5*((1.+GN2)*WWL+(1.-GN2)*WWR)
C
                P1=PB1*BETA
                P2=PB2*BETA
C
                IF (S.LT.ZERO) S=ZERO
C
                R1=(0.5/S)*((P1-P2)+XX*(EV1*U1-EV2*U2)+ZZ*(EV1*W1-
EV2*W2))
                G1=P1+EV1*(XX*U1+ZZ*W1)
                G2=P2+EV2*(XX*U2+ZZ*W2)
                G3=U0*ZZ-W0*XX
C
                U=XX*R1+ZZ*G3
                W=ZZ*R1-XX*G3
                P=(EV1*G2-EV2*G1)/(2.*S)
C
C      END OF THE FLUX VECTOR SPLITTING
C
                EVV(KR)=B*AMAX1(EV1, EV2)
C
                EP(KR)=U*ZEX+W*ZEZ
                IF (ABS(EV0).LE.ZERO) EP(KR)=0.
C
                EU(KR)=U*EP(KR)+P*ZEX
                EW(KR)=W*EP(KR)+P*ZEZ
            ENDDO
C
            DO K=2,KE-1
C

```

```

      EVAV(L,I,K)=AMAX1(EVAV(L,I,K),EVV(K+1),EVV(K))
C
      PH(I,K)=PH(I,K)+EP(K+1)-EP(K)
      UH(I,K)=UH(I,K)+EU(K+1)-EU(K)
      WH(I,K)=WH(I,K)+EW(K+1)-EW(K)
      ENDDO
C
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C
C -----
C SUBROUTINE XIFLXV
C -----
C
C
C INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C
C VISCOUS FLUXES
C
      C1O3=1./3.
      C2O3=2./3.
      C4O3=4./3.
C
      DO K=2,KE-1
        DO IR=2,IE
          IRR=IR+1
C
          VISC_TURB1=0.5*(VISC_TURB(IR,K)+VISC_TURB(IR-1,K)) ! = Mt
          VISCOSITY=1.+VISC_TURB1                               ! = M eff
C
C METRICS
          XZE=X(IR,K+1)-X(IR,K)
          ZZE=Z(IR,K+1)-Z(IR,K)
C
          XL=0.25*(X(IR-1,K)+X(IR-1,K+1)+X(IR,K)+X(IR,K+1))
          ZL=0.25*(Z(IR-1,K)+Z(IR-1,K+1)+Z(IR,K)+Z(IR,K+1))
          XR=0.25*(X(IR,K)+X(IR,K+1)+X(IRR,K)+X(IRR,K+1))
          ZR=0.25*(Z(IR,K)+Z(IR,K+1)+Z(IRR,K)+Z(IRR,K+1))
C
          XXI=XR-XL
          ZXI=ZR-ZL
C
          JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-ZXI*XZE)
C
          XIX=ZZE/JACOBIAN
          XIZ=-XZE/JACOBIAN
          ZEX=-ZXI/JACOBIAN
          ZEZ=XXI/JACOBIAN
C
C VELOCITY DERIVATIVES (CROSS DERIVATIVES ARE SPLITTED)
C
          UR=USR(IR,K)
          WR=WSR(IR,K)
          UL=USR(IR-1,K)
          WL=WSR(IR-1,K)
C
          UXI=UR-UL
          WXI=WR-WL

```



```

C
      UZEP=.5*(USR(IR,K+1)-USR(IR,K-1))
      UZEM=.5*(USR(IR-1,K+1)-USR(IR-1,K-1))
      WZEP=.5*(WSR(IR,K+1)-WSR(IR,K-1))
      WZEM=.5*(WSR(IR-1,K+1)-WSR(IR-1,K-1))
C
C   FLUXES
C
      EU(IR)=- (VISCOSITY/REYNOLDS)*JACOBIAN*(
$      UXI*(C4O3*XIX**2+XIZ**2)+WXI*(C1O3*XIX*XIZ)+
$      UZEM*AMAX1(0.,C4O3*XIX*ZEX+XIZ*ZEX)+
$      UZEP*AMIN1(0.,C4O3*XIX*ZEX+XIZ*ZEX)+
$      WZEM*AMAX1(0.,XIZ*ZEX-C2O3*XIX*ZEX)+
$      WZEP*AMIN1(0.,XIZ*ZEX-C2O3*XIX*ZEX))
C
C
      EW(IR)=- (VISCOSITY/REYNOLDS)*JACOBIAN*(
$      UXI*C1O3*XIX*XIZ+WXI*(XIX**2+C4O3*XIZ**2)+
$      UZEM*AMAX1(0.,XIX*ZEX-C2O3*XIZ*ZEX)+
$      UZEP*AMIN1(0.,XIX*ZEX-C2O3*XIZ*ZEX)+
$      WZEM*AMAX1(0.,C4O3*XIZ*ZEX+XIX*ZEX)+
$      WZEP*AMIN1(0.,C4O3*XIZ*ZEX+XIX*ZEX))
C
      ENDDO
C
C   FLUX DIFFERENCING
C
      DO I=2,IE-1
          UH(I,K)=UH(I,K)+EU(I+1)-EU(I)
          WH(I,K)=WH(I,K)+EW(I+1)-EW(I)
      ENDDO
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C   -----
C   SUBROUTINE ZEFLXV
C   -----
C
      INCLUDE 'COMMON.DAT'
C
C   VISCOUS FLUXES
C
      C1O3=1./3.
      C2O3=2./3.
      C4O3=4./3.
C
      DO I=2,IE-1
          DO KR=2,KE
              KRR=KR+1
C
              VISC_TURB1=0.5*(VISC_TURB(I,KR)+VISC_TURB(I,KR-1)) ! = Mt
              VISCOSITY=1.+VISC_TURB1 ! = M eff
C
C   METRICS
          XXI=X(I+1,KR)-X(I,KR)
          ZXI=Z(I+1,KR)-Z(I,KR)
C

```

```

XL=0.25*(X(I,KR)+X(I+1,KR)+X(I,KR-1)+X(I+1,KR-1))
ZL=0.25*(Z(I,KR)+Z(I+1,KR)+Z(I,KR-1)+Z(I+1,KR-1))
XO=0.25*(X(I,KR)+X(I+1,KR)+X(I,KRR)+X(I+1,KRR))
ZO=0.25*(Z(I,KR)+Z(I+1,KR)+Z(I,KRR)+Z(I+1,KRR))

C
XZE=XO-XL
ZZE=ZO-ZL

C
JACOBIAN=AMAX1(ZERO,XXI*ZZE-ZXI*XZE)

C
XIX=ZZE/JACOBIAN
XIZ=-XZE/JACOBIAN
ZEX=-ZXI/JACOBIAN
ZEX=XXI/JACOBIAN

C
VELOCITY DERIVATIVES (CROSS DERIVATIVES ARE SPLITTED)
C
UO=USR(I,KR)
WO=WSR(I,KR)
UL=USR(I,KR-1)
WL=WSR(I,KR-1)

C
UZE=UO-UL
WZE=WO-WL

C
C
C
WALL FUNCTIONS
C
IF (ITURB.EQ.1) THEN

C
      IF (ISYMMETRY_DOWN.NE.1) THEN          ! WALL DOWN
        IF (I.GE.ITEL. AND. I.LE.ITEU_D) THEN ! SOLID WALL
BETWEEN ITEL & ITEU
          IF (KR.EQ.2) THEN                    ! LOWER
SOLID LIMIT BETWEEN ITEL & ITEU
            UZE=UZEW(I,2)
            WZE=WZEW(I,2)
          ENDIF
        ENDIF
      ENDIF

C
      IF (ISYMMETRY_UP.NE.1) THEN             ! WALL UP
        IF (I.GE.ITEL. AND. I.LE.ITEU) THEN  ! SOLID WALL
BETWEEN ITEL & ITEU
          IF (KR.EQ.KE) THEN                  ! UPPER
SOLID LIMIT
            UZE=-UZEW(I,KR-1)
            WZE=-WZEW(I,KR-1)
          ENDIF
        ENDIF
      ENDIF

C
    ENDIF

C
C
C
THIN-LAYER NS
C
UXIP=0.5*(USR(I+1,KR)-USR(I-1,KR))
UXIM=0.5*(USR(I+1,KR-1)-USR(I-1,KR-1))
WXIP=0.5*(WSR(I+1,KR)-WSR(I-1,KR))
WXIM=0.5*(WSR(I+1,KR-1)-WSR(I-1,KR-1))

C

```

```

C      FLUXES (THIN-LAYER)
C
      EU(KR)=- ( VISCOSITY/REYNOLDS ) *JACOBIAN* ( UZE*( C4O3*ZEX**2+
$          ZEZ**2 )+WZE*( C1O3*ZEX*ZEZ ) )
      EW(KR)=- ( VISCOSITY/REYNOLDS ) *JACOBIAN* ( UZE*C1O3*ZEZ*ZEX+
$          WZE*( ZEX**2+C4O3*ZEZ**2 ) )
C
C      ADDITIONAL FLUXES
C
      EU(KR)=EU(KR) - ( VISCOSITY/REYNOLDS ) *JACOBIAN* (
$          UXIM*AMAX1 ( 0. , C4O3*XIX*ZEX+XIZ*ZEZ ) +
$          UXIP*AMIN1 ( 0. , C4O3*XIX*ZEX+XIZ*ZEZ ) +
$          WXIM*AMAX1 ( 0. , XIX*ZEZ-C2O3*XIZ*ZEX ) +
$          WXIP*AMIN1 ( 0. , XIX*ZEZ-C2O3*XIZ*ZEX ) )
C
C      EW(KR)=EW(KR) - ( VISCOSITY/REYNOLDS ) *JACOBIAN* (
$          UXIM*AMAX1 ( 0. , XIZ*ZEZ-C2O3*XIX*ZEZ ) +
$          UXIP*AMIN1 ( 0. , XIZ*ZEZ-C2O3*XIX*ZEZ ) +
$          WXIM*AMAX1 ( 0. , C4O3*XIZ*ZEZ+XIX*ZEX ) +
$          WXIP*AMIN1 ( 0. , C4O3*XIZ*ZEZ+XIX*ZEX ) )
C
      ENDDO
C
C      FLUX DIFFERENCING
C
      DO K=2,KE-1
          UH(I,K)=UH(I,K)+EU(K+1)-EU(K)
          WH(I,K)=WH(I,K)+EW(K+1)-EW(K)
      ENDDO
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C

```

```

PROGRAM STREAMLINES
C
PARAMETER (IP1=400,IP2=200)
DIMENSION
X(IP1,IP2),Z(IP1,IP2),U(IP1,IP2),W(IP1,IP2),Q(IP1,IP2),
$ XQ(IP1,IP2),ZQ(IP1,IP2), QMAX(IP1)
REAL*4 MAXQ
C
OPEN (1,FILE='RESULTS.PLT')
OPEN (2,FILE='STREAMLINES.DAT')
C
READ (1,*)
READ (1,*)
READ (1,*) IE
READ (1,*)
READ (1,*) KE
READ (1,*)
C
NL = 5 ! NUMBER OF STREAMLINES
IAXIS= 1
C
IE = IE+1
KE = KE+1
ZERO = 1.E-6
PI = 4.*ATAN(1.)
C
IF (NL.LT.1) STOP ' CHANGE NL ( NUMBER OF STREAMLINES) :NL > 0'
C
DO I=1,IE
DO K=1,KE
Q(I,K) = 0. ! FLOW RATE
QMAX(I) = 0. ! MAXIMUM FLOW RATE FOR EACH I
XQ(I,K) = 0.
ZQ(I,K) = 0.
ENDDO
ENDDO
MAXQ = 0.
DO K=2,KE
DO I=2,IE
READ (1,*) X(I,K), Z(I,K), U(I,K), W(I,K)
ENDDO
ENDDO
DO K=2,KE-1
DO I=2,IE-1
C
C
C
C
C
C
C
4 --- B --- 3 ---
| | |
| | o | DS
| | |
1 --- A --- 2 ---
C
X1 = X(I,K)
X2 = X(I+1,K)
X3 = X(I+1,K+1)
X4 = X(I,K+1)
Z1 = Z(I,K)
Z2 = Z(I+1,K)
Z3 = Z(I+1,K+1)
Z4 = Z(I,K+1)

```

```

      XA = 0.5*(X1+X2)
      ZA = 0.5*(Z1+Z2)
      XB = 0.5*(X3+X4)
      ZB = 0.5*(Z3+Z4)
      X0 = 0.5*(XA+XB)
      Z0 = 0.5*(ZA+ZB)
C
      DX = XB-XA
      DZ = ZB-ZA
      DS = SQRT( DX**2 + DZ**2 )
      F = -ATAN( DZ/DX )
      IF ( DX.GE.0. ) F = F + PI          ! DX>0 ==> F=F+180 deg
      IF ( ABS(DX).LE.ZERO ) F = PI/2.  ! DX=0 ==> F=90 deg
C
      VEL = U(I,K)*SIN(F) + W(I,K)*COS(F) ! VELOCITY
      R = ZA + 0.5*(ZB-ZA)
C
      DQ = VEL*DS*(2.*PI*R)**IAXIS
      Q(I,K) = Q(I,K-1) + DQ
      QMAX(I) = AMAX1( QMAX(I),Q(I,K) ) ! MAXIMUM FLOW
RATE FOR I
C
      XQ(I,K) = X0
      ZQ(I,K) = Z0
      MAXQ = AMAX1 ( QMAX(I), MAXQ ) ! MAXIMUM FLOW RATE
      ENDDO
ENDDO
C
DO II=1,NL          ! NUMBER OF STREAMLINES
  DO I=2,IE-1
    IMAX = 0
    DO K=2,KE-1
      Q0 = II/FLOAT(NL+1) * QMAX(I)          ! Q FOR THE
NL th STREAMLINE
      IF ( Q(I,K).GE.Q0.AND.IMAX.EQ.0 ) THEN ! FIRST Q > Q0
C
C
C          -----
C          LINEAR INTERPOLATION
C          -----
      A = XQ(I,K-1)
      B = ZQ(I,K-1)
      C = XQ(I,K)
      D = ZQ(I,K)
C
      X_LI = ( C-A)*(Q0-Q(I,K-1)) / ( Q(I,K)-Q(I,K-1) )+A
! X WHERE Q = Q0
      Z_LI = ( D-B)*(Q0-Q(I,K-1)) / ( Q(I,K)-Q(I,K-1) )+B
! Z WHERE Q = Q0
C
      WRITE (2,908) X_LI, Z_LI, Q0, II/FLOAT(NL+1)
      IMAX = 1
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
  WRITE (2,*) ' '
ENDDO
908 FORMAT (4(1X,F12.4))
  WRITE (*,*) ' '
C
  IF (NL.EQ.1)
    $ WRITE (*,*) ' ',NL,' STREAMLINE HAS BEEN COMPUTED.'

```

```
C      IF (NL.NE.1)
C      $ WRITE  (*,*) '          ',NL,' STREAMLINES HAVE BEEN COMPUTED.'
C
C      CLOSE (1)
C      CLOSE (2)
C      STOP
C      END
```

```

C -----
C PROGRAM GRID_GENERATION
C -----
C
C PARAMETER (IP3=10,IP1=400,IP2=200)
C COMMON /CO03/
C $ XC(IP3),ZC(IP3),AKSI(IP3),NX(IP3),AH(IP3),NZ(IP3),
C $ X00,Z00,X01,Z01,X10,Z10,X11,Z11
C REAL*4 KSI, H, L_REF
C DIMENSION XKSI1_U(IP1),XKSI0_D(IP1),ZKSI1_U(IP1),ZKSI0_D(IP1)
C DIMENSION Z1(IP1,IP2), Z2(IP1,IP2), X1 (IP1,IP2), X2 (IP1,IP2),
C $ Z3(IP1,IP2),Z4 (IP1,IP2), X3 (IP1,IP2), X4 (IP1,IP2),
C $ X5 (IP1,IP2), Z5 (IP1,IP2), X (IP1,IP2), Z (IP1,IP2)
C CHARACTER*50 FILENAME(IP3)
C
C INCLUDE 'GRID_INPUT.DAT'
C
C ----- GRID DATA -----
C NX(1)=NXX
C NZ(1)=NZZ
C NXC=1
C NZC=1
C ITEL=0
C
C X00=0. ! INLET DOWN
C Z00=0.
C
C X01=X00 ! INLET UP
C Z01=1.
C
C X10=1. ! OUTLET DOWN
C Z10=3.
C
C X11=X10 ! OUTLET UP
C Z11=Z10
C
C XC(1)=X10-X00
C ZC(1)=Z01-Z00
C
C ALX=X10-X00
C ALZ=Z01-Z00
C
C -----
C
C IF (MOD(NZZ,2).NE.1) THEN
C WRITE(*,*) ' '
C WRITE(*,*) ' '
C WRITE(*,*) ' CHANGE NZZ: NZZ=',NZZ-1., ' OR ',NZZ+1.
C STOP
C ENDIF
C
C FILENAME(5)= 'GRID.DAT'
C
C CALL NOZZLG1
C
C OPEN (30, FILE='ONZZL')
C OPEN (31, FILE='ONEEDL')
C
C DO I1=1,NXX+1
C READ (30,*) XKSI1_U(I1), ZKSI1_U(I1)
C READ (31,*) XKSI0_D(I1), ZKSI0_D(I1)
C

```

```

XKSI1_U(I1)=XKSI1_U(I1)/L_REF
ZKSI1_U(I1)=ZKSI1_U(I1)/L_REF
XKSI0_D(I1)=XKSI0_D(I1)/L_REF
ZKSI0_D(I1)=ZKSI0_D(I1)/L_REF
ENDDO
C
CLOSE (30)
CLOSE (31)
C
C
NXX=0
DO L=1,NXC
  NXX=NXX+NX(L)
  AKSI(L)=XC(L)/ALX
ENDDO
AKSI(L)=XC(L)/ALX
C
NZZ=0
DO N=1,NZC
  NZZ=NZZ+NZ(N)
  AH(N)=ZC(N)/ALZ
ENDDO
AH(N)=ZC(N)/ALZ
C
IE=NXX
KE=NZZ
C
J=1
DO KKK=1,2
C
DO N=1,NZC
  DO K=0,NZ(N)
C
  IF (KKK.EQ.1) THEN
    H1=(CZ*NZZ+(1.-CZ)*FLOAT(K))/NZZ /2.
  ENDIF
C
  IF (KKK.EQ.2) THEN
    H1=(CZ*NZZ+(1.-CZ)*FLOAT(NZZ-K))/NZZ
  ENDIF
C
  IF (KKK.EQ.1) THEN
    H=(FLOAT(NZZ-K)*(AH(N+1)-AH(N))/NZ(N)+AH(N))*H1
  ENDIF
C
  IF (KKK.EQ.2) THEN
    H=(FLOAT(NZZ-K)*(AH(N+1)-AH(N))/NZ(N)+AH(N))*
$    (H1+(1.-CZ)*NZZ/NZZ) *.5 +.5
  ENDIF
C
  J=J+1
  I=1
C
  DO L=1,NXC
    DO M=0,NX(L)
C
      KSI=FLOAT(M)*(AKSI(L+1)-AKSI(L))/NX(L)+AKSI(L)
      I=I+1
      CALL CALCXZ(I,KSI,H,FX,FZ,XKSI1_U,XKSI0_D,ZKSI1_U,ZKSI0_D)
C
      IF (KKK.EQ.1) THEN

```



```

                X1(I,J)=FX      ! FOR FIRST HALF IN Z DIRECTION
                Z1(I,J)=FZ
            ENDIF
C
                IF (KKK.EQ.2) THEN
                X2(I,J)=FX      ! FOR LAST HALF IN Z DIRECTION
                Z2(I,J)=FZ
            ENDIF
            ENDDO
            I=I-1
        ENDDO
C
            I=I+1
        ENDDO
        J=J-1
    ENDDO
C
    ENDDO
    J=J+1
C
DO II=2,I
    J1=1
    J2=1
    DO JJ=2,J/2+1
C
        IF (MOD(JJ,2).EQ.0) THEN
            J1=J1+1
            X3(II,J1)=X1(II,JJ)      ! EVEN LINES
            Z3(II,J1)=Z1(II,JJ)
        ENDIF
C
        IF (MOD(JJ,2).EQ.1) THEN
            J2=J2+1
            X4(II,J2)=X2(II,JJ+J/2-1)  ! ODD LINES
            Z4(II,J2)=Z2(II,JJ+J/2-1)
        ENDIF
C
        ENDDO
    ENDDO
C
DO II=2,I
    DO JJ=2,J1
C
        X5(II,JJ)=X3(II,JJ)
        Z5(II,JJ)=Z3(II,JJ)
C
        X5(II,JJ+J1-1)=X4(II,JJ)
        Z5(II,JJ+J1-1)=Z4(II,JJ)
C
        ! ALL X, Z COORDINATES IN FINAL VARIABLES X, Z
        X(II,JJ)=X5(II,JJ)
        Z(II,JJ)=Z5(II,JJ)
C
        X(II,JJ+J1-1)=X5(II,JJ+J1-1)
        Z(II,JJ+J1-1)=Z5(II,JJ+J1-1)
    ENDDO
    ENDDO
C
    IF (ITEL.EQ.1) THEN
    CALL SMOOTH (X,Z,X5,Z5,I,JJ+J1-2)  ! SMOOTHER GRID
    ENDIF
C

```

```

DO II=2,I
  DO K=2,JJ+J1-2
    X(II,K)=X(II,K)/L_REF
    Z(II,K)=Z(II,K)/L_REF
  ENDDO
ENDDO
C
C
OPEN (1,FILE=FILENAME(5))
WRITE (1,*) IE+1,KE+1
C
DO K=2,KE+2
  DO I=2,IE+2
    WRITE(1,901) X(I,K),Z(I,K)
  ENDDO
ENDDO
CLOSE(1)
901 FORMAT (100E20.10)
C
WRITE (*,*) ' '
WRITE (*,*) ' GRID :',IE+1,' x ',KE+1
WRITE (*,*) ' INPUT --> FILE : ',FILENAME(5)
WRITE (*,*) ' OUTPUT --> FILE : ',FILENAME(5)
C
END
C
C
C
C
-----
SUBROUTINE CALCXZ(I,KSI,H,X,Z,XKSI1_U,XKSI0_D,ZKSI1_U,ZKSI0_D)
-----
C
C
PARAMETER (IP3=10,IP1=400)
COMMON /CO03/
$ XC(IP3),ZC(IP3),AKSI(IP3),NX(IP3),AH(IP3),NZ(IP3),
$ X00,Z00,X01,Z01,X10,Z10,X11,Z11

REAL*4 KSI, H
DIMENSION XKSI1_U(IP1),XKSI0_D(IP1),ZKSI1_U(IP1),ZKSI0_D(IP1)
C
C
X0H=X00 ! INFLOW
Z0H=Z01*H
C
X1H=X11*KSI + X10*(1-KSI) ! OUTFLOW
Z1H=Z11
C
XKSI0=XKSI0_D(I-1) ! LOWER LIMIT
ZKSI0=ZKSI0_D(I-1)
C
XKSI1=XKSI1_U(I-1) ! UPPER LIMIT
ZKSI1=ZKSI1_U(I-1)
C
KSI=KSI-1.
C
!=====
E0KSI=1-KSI
E1KSI=KSI
E0H=1-H
E1H=H
!=====

```

```

C
      X=X0H*E0KSI+X1H*E1KSI+XKSI0*E0H+XKSI1*E1H-
$((X00*E0KSI*E0H)+(X01*E0KSI*E1H)+(X10*E1KSI*E0H)+(X11*E1KSI*E1H))
      Z=Z0H*E0KSI+Z1H*E1KSI+ZKSI0*E0H+ZKSI1*E1H-
$((Z00*E0KSI*E0H)+(Z01*E0KSI*E1H)+(Z10*E1KSI*E0H)+(Z11*E1KSI*E1H))
C
      RETURN
      END
C
C -----
C      SUBROUTINE SMOOTH (X1,Z1,X2,Z2,IE,JE)
C -----
C
      DIMENSION X2 (400,200), Z2 (400,200), X1(400,200), Z1(400,200)
C
      DO I=1,IE
        DO J=1,JE
          X1(I,J)=X2(I,J)
          Z1(I,J)=Z2(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
C
      DO K=1,3
        DO I=3,IE-1
          DO J=3,JE-1
            X1(I,J)=(1/8.)*(X1(I-1,J-1)+X1(I-1,J)+X1(I-1,J+1)+
$             X1(I,J-1)+X1(I,J+1)+X1(I+1,J-
1)+X1(I+1,J)+X1(I+1,J+1))
            Z1(I,J)=(1/8.)*(Z1(I-1,J-1)+Z1(I-1,J)+Z1(I-1,J+1)+
$             Z1(I,J-1)+Z1(I,J+1)+Z1(I+1,J-
1)+Z1(I+1,J)+Z1(I+1,J+1))
          ENDDO
        ENDDO
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
C -----
C      SUBROUTINE NOZZLG1
C -----
C
C      PROGRAMMA GIA TON KATHORISMO THS GEOMETRIAS AKROFYSIOY
C      KATA BOVET
C
      COMMON/A/ INBEZ, XB(40), YB(40), NBEZ, XBO(100), YBO(100)
      DIMENSION XE(300), YE(300), XN(300), YN(300), XL(300), YL(300)
C
      OPEN(7, FILE=' INOZZLE ')
      OPEN(8, FILE=' ONOZZL ')
      OPEN(9, FILE=' ONEEDL ')
      OPEN(10, FILE=' FREE_STREAM_UP ')
      OPEN(11, FILE=' SYMMETRY_DOWN ')
      OPEN(16, FILE=' BEZIER ')
C
      READ(7, *)
      READ(7,110)AP
      READ(7,110)AE
      READ(7,110)RE
      READ(7,110)RP

```

```

READ(7,110)R3
READ(7,110)R4
READ(7,110)R5
READ(7,110)XOP
C
PI=4.*ATAN(1.)
AP=AP*PI/180.
AE=AE*PI/180.
C
XEP=RE*SIN(AE/2.)
XA=.0
YA=R4
XAB=XEP
YBP=R4-RE*(1.-COS(AE/2.))
DYBC=YBP-1.
DXBC=DYBC/TAN(AE/2.)
YC=1.
XC=XAB+DXBC
XREF=XC
C
NAB=15
NSA=3*NAB
DX=XAB/FLOAT(NAB)
XS=-DX*FLOAT(NSA)
YS=R4
NBC=DXBC/DX
NBC=NBC+1
DXB=DXBC/FLOAT(NBC)
DYB=DYBC/FLOAT(NBC)
C
--- DIAKRITOPOIHSH AKROFYSSIOY
DO 10 I=1,NSA+1
XE(I)=XS+FLOAT(I-1)*DX
YE(I)=YS
10 CONTINUE
DO 11 IE=1,NAB
I=NSA+IE+1
DXE=DX*FLOAT(IE)
XE(I)=XE(I-1)+DX
AG=ASIN(DXE/RE)
DYE=RE*(1.-COS(AG))
YE(I)=R4-DYE
11 CONTINUE
IB=I
DO 12 IE=1,NBC
I=IB+IE
XE(I)=XE(I-1)+DXB
YE(I)=YE(I-1)-DYB
12 CONTINUE
NI=I
DO 13 I=1,NI
XE(I)=XE(I)-XREF
WRITE(8,*)XE(I),YE(I)
13 CONTINUE
XS=XE(1)
WRITE(*,*)NBC,NI,XS
C
----- DIAKRITOPOIHSH BELONHS
AD=ACOS((R5+RP-R3)/RP)
XD=-RP*SIN(AD)
YD=R5
AF=AP/2.
XF=RP*SIN(AF)

```

```

YF=RP*COS(AF)-(RP-R3)
XG=XF+YF/TAN(AF)
YG=.0
C  ---- T SHMEIO EPAPHS BELONHS ME AKRO AKROFYSIOY
XT=XF-(YF-1.)*(XF-XG)/(YF-YG)
YT=1.
XNREF=XT
XD=XD-XNREF-XOP
XF=XF-XNREF-XOP
XG=XG-XNREF-XOP
C
XS=XE(1)
NSD=(XD-XS)/DX
DXSD=(XD-XS)/FLOAT(NSD)
DO 20 I=1,NSD+1
XN(I)=XS+DXSD*FLOAT(I-1)
YN(I)=R5
20 CONTINUE
ID=NSD+1
NDI=NI+9
NDG=NDI-NSD
DXDG=(XG-XD)/FLOAT(NDG)
NDF=NDG*(XF-XD)/(XG-XD)
DXDF=(XF-XD)/FLOAT(NDF)
DO 21 IF=1,NDF
I=ID+IF
XN(I)=XN(I-1)+DXDF
DXN=XN(I)+XNREF+XOP
AG=ASIN(DXN/RP)
DYN=RP*COS(AG)
YN(I)=RP*COS(AG)-(RP-R3)
21 CONTINUE
IF=I
NFG=NDI-IF
DXFG=(XG-XF)/FLOAT(NFG)
DYFG=(YF-YG)/FLOAT(NFG)
DO 22 IG=1,NFG
I=IF+IG
XN(I)=XN(I-1)+DXFG
YN(I)=YN(I-1)-DYFG
22 CONTINUE
DO 23 I=1,NDI
WRITE(9,*)XN(I),YN(I)
23 CONTINUE
C  ----- KAMPYLH BEZIER OS PROEKTASH TOY AKROFYSIOY
INBEZ=7
XB(1)=XE(NI)
YB(1)=YE(NI)
DXB12=4.50*DX
DXB13=2.00*DX
XB(2)=XB(1)+DXB12
YB(2)=YB(1)-DXB13*TAN(AE/2.)
XB(3)=XB(2)+5.*DX
RJET =0.92
RJET1=0.88
YB(3)=RJET
XB(4)=XB(3)+15.*DX
YB(4)=0.87
XB(5)=XB(4)+15.*DX
YB(5)=0.88
XB(6)=XB(5)+15.*DX

```

```

YB(6)=0.88
XB(7)=XB(6)+20.*DX
YB(7)=RJET1
DO 31 I=1,INBEZ
WRITE(*,*)I,XB(I),YB(I)
WRITE(16,*)XB(I),YB(I)
31 CONTINUE
PAUSE
C
NBEZ=40
CALL BEZIER
DO 32 I=1,NBEZ
WRITE(*,*)I,XBO(I),YBO(I)
PAUSE
32 CONTINUE
DO 50 I=1,NBEZ
WRITE(10,*)XBO(I),YBO(I)
50 CONTINUE
AXL=XBO(NBEZ)-XN(NDI)
DXL=NBEZ-(NDI-NI)
DX1=AXL/(DXL-1)
DO 51 I=2,DXL
XL(I)=XN(NDI)+FLOAT(I-1)*DX1
YL(I)=YN(NDI)
WRITE(11,*)XL(I),YL(I)
51 CONTINUE
C
DO 30 IB=2,NBEZ
I=NI+IB-1
XE(I)=XBO(IB)
YE(I)=YBO(IB)
WRITE(8,*)XE(I),YE(I)
30 CONTINUE
I=0
DO 40 IB=2,DXL
I=NDI+IB-1
XN(I)=XL(IB)
YN(I)=YL(IB)
WRITE(9,*)XN(I),YN(I)
40 CONTINUE
C
-----
100 FORMAT(I3,6(1X,F12.3))
110 FORMAT(40X,F12.4)
C
CLOSE(8)
CLOSE(9)
CLOSE(10)
CLOSE(11)
CLOSE(16)
C
-----
C
RETURN
END
C
-----
SUBROUTINE BEZIER
C
-----
dimension xbe(100),ybe(100)
COMMON/A/ INBEZ,XB(40),YB(40),NBEZ,XBO(100),YBO(100)
common /bez1/ bezm(40,40)
C
NB=INBEZ

```

```

      call inibezier(nb)
C
      IDEG=NBEZ
      call usebezier(xb,yb,nb,xbe,ybe,ideg-1)
C
      do i=1,ideg
      XBO(I)=XBE(I)
      YBO(I)=YBE(I)
      enddo
C
      RETURN
      END
C
-----
      subroutine inibezier(nco)
C
-----
C
      NCO control points
C
      common /bez1/ bezm(40,40)
C
      do 1 mi=0,nco-1      ! for the control points
C
      b=0.d0
C
      c=0.d0
      do 1 i=0,nco-1
      call paragon (nco-1,i ,kres1)
      call paragon (i ,mi,kres2)
      kres3=(-1)**(i-mi)
      coeffi = dfloat(kres1*kres2*kres3)
      if(mi.gt.i) coeffi=0.d0
      bezm(mi+1,i+1) = coeffi
1
      continue
C
      return
      end
C
-----
      subroutine paragon (n,i,k) ! n=UP, i=LOW, k=RESULT
C
-----
C
      ks=max(i,n-i)+1
      kp=min(i,n-i)
      k=1
      do iii=ks,n
      k=k*iii
      enddo
      do iii=1,kp
      k=k/iii
      enddo
      return
      end
C
-----
      subroutine usebezier (xco,yco,nco,xbe,ybe,ideg)
C
-----
C
      NCO control points (xco,yco)
C
      IDEG+1 final points with coordinates (XBE,YBE)
C
      common /bez1/ bezm(40,40)
      dimension xbe(1),ybe(1),xco(1),yco(1)
C
      aa1 = 0.5d0
      dd = 0.1
      do k=1,ideg+1
      ybe(k)=dfloat(k-1)/dfloat(ideg)

```

```
        enddo
c
do 10 kpoi=0,ideg
kpoi1 = kpoi+1
tlocal = ybe(kpoi1)
xbe (kpoi1) = 0.d0
ybe (kpoi1) = 0.d0
  do mi=0,nc0-1
    b=0.d0
    do i=0,nc0-1
      if(tlocal.eq..0.and.i.eq.0)go to 15
      b = b + bezm(mi+1,i+1) * tlocal**i
      go to 16
15      continue
16      b=b+bezm(mi+1,i+1)
      continue
    enddo ! i
    xbe(kpoi1) = xbe (kpoi1) + b*xco(mi+1)
    ybe(kpoi1) = ybe (kpoi1) + b*yco(mi+1)
  enddo ! mi
10 continue
c
RETURN
END
c -----
```


ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1 Τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση της ροής στους τύπους των ακροφυσίων που εξετάστηκαν στη παρούσα εργασία.

	Type I	Type II	Type III
CFL	<i>0.2</i>	<i>0.2</i>	<i>0.2</i>
β	<i>1.3</i>	<i>1.3</i>	<i>1.3</i>
Re	<i>3×10^6</i>	<i>3×10^6</i>	<i>3×10^6</i>
QPER / PPER	<i>1.0 / 1.0</i>	<i>1.0 / 1.0</i>	<i>1.0 / 1.0</i>
CON	<i>5×10^{-4}</i>	<i>9×10^{-4}</i>	<i>5×10^{-4}</i>
IAXIS / ITURB	<i>1 / 1</i>	<i>1 / 1</i>	<i>1 / 1</i>
INFLOW	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
INLET	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
ISYMMETRY_UP / DOWN	<i>0 / 0</i>	<i>0 / 0</i>	<i>0 / 0</i>
CU / CW	<i>1.0 / 0.0</i>	<i>1.0 / 0.0</i>	<i>1.0 / 0.0</i>
CIU / CIW	<i>0.3 / 0.3</i>	<i>0.3 / 0.3</i>	<i>0.3 / 0.3</i>
CQU / CQW	<i>1.0 / 1.0</i>	<i>1.0 / 1.0</i>	<i>1.0 / 1.0</i>
ITEL / ITEU	<i>0 / 46</i>	<i>0 / 46</i>	<i>0 / 65</i>

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΕλληνική :

- ΓΚΟΒΑΤΣΟΣ Α. Π., ‘*Ανάπτυξη αριθμητικής μεθοδολογίας για τον υπολογισμό μόνιμης ροής σε υδροδυναμικές μηχανές.*’, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π., 1997.
- ΜΠΕΡΓΕΛΕΣ Γ., ‘*Υπολογιστική Ρευστομηχανική.*’, Εκδόσεις Συμεών, 2000.
- ΠΑΠΑΝΤΩΝΗΣ Δ., ‘*Υδροδυναμικές Μηχανές, Αντλίες-Υδροστρόβιλοι.*’, Εκδόσεις Συμεών, 2002.
- ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ Σ., ‘*Μηχανική των Ρευστών.*’, Εκδόσεις Συμεών, 1995.
- ΠΑΠΑΝΤΩΝΗΣ Δ., ‘*Μικρά Υδροηλεκτρικά Έργα*’, Εκδόσεις Συμεών, 2001.

Ξενόγλωσση :

- TANNEHILL C. J., ANDERSON A. D., PLETCHER H. R., ‘*Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.*’, 2nd Edition, Hemisphere publishing Corp., Washington, 1997.
- BLAZEK J. , ‘*Computational Fluid Dynamics – Principles and Applications*’, Elsevier Science Ltd. , 2001.
- PETRILA T. , TRIF D. , ‘*Basics of Fluid mechanics and Introduction to Computational Fluid Dynamics*’, Springer , 2005.
- CEBECI T., SHAO J., KAFYEKE F., LAURENDEAU E., ‘*Computational Fluid Dynamics for engineers*’, Springer – Horizons Publishing Inc. , 2005
- HOFFMANN K., CHIANG S., ‘*Computational Fluid Dynamics Volume I*’, Engineering Education System , 2000.
- FERZINGER J. H., PERIC M., ‘*Computational Methods for Fluid Dynamics*’, 3rd Edition, Springer – New York , 2002
- WILCOX D. C., ‘*Turbulence Modelling for CFD*’, DCW Industries Inc., 1994
- CHEN C., JAW S., ‘*Fundamentals of turbulence modelling.*’, Taylor & Francis, 1998.
- CHANG J. L. C., KWAK D., ‘*A diagonal Algorithm for the method of Pseudocompressibility*’, Academic Press , 1986